

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RODOLFO DE PAULA RIBEIRO JUNIOR

Tipo parabólico de semigrupos e forma de Jordan

Maringá

2010

RODOLFO DE PAULA RIBEIRO JUNIOR

Tipo parabólico de semigrupos e forma de Jordan

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Osvaldo Germano do Rocio.

Maringá

2010

“É melhor ser alegre que ser triste
Alegria é a melhor coisa que existe
É assim como a luz no coração
... Ponha um pouco de amor numa cadência
E vai ver que ninguém no mundo vence
A beleza que tem um samba, não.”
[Vinícius de Moraes]

A tudo e a todos que de alguma forma fazem parte da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, à meus pais e aos meus antepassados, além dos motivos óbvios, pelo amor, apoio e companheirismo em todas as situações, em particular nas situações difíceis. A gratidão é imensa, ao meu orientador e amigo, Osvaldo Germano do Rocio, cujos ensinamentos contribuíram para que eu evoluísse não apenas no conhecimento matemático, mas também na vida. Agradeço também os meus amigos e professores João Ribeiro Gonçalves Filho e Cícero Lopes Frota por toda a colaboração na elaboração deste trabalho, e também pelos momentos de celebração. Um agradecimento especial à todos os professores do DMA, em particular aos professores Marcos Verdi e Josiney de Souza, cuja colaboração foi importantíssima para a elaboração deste trabalho. Agradeço à Lucia Kato, por todo o apoio e colaboração durante este curso de mestrado. Agradeço à Capes pelo apoio financeiro. Agradeço à todos os meus amigos. Agradeço em especial Nayene Pitta Paião e Rafael Húngaro, parceiros de trabalho. Débora Albanez por toda a sua colaboração. Minha gratidão aos amigos Marcio Barbosa e Cezar Maximino, amigos que muito me ajudaram e incentivaram. Um muito obrigado também aos amigos do espaço Ananda Ganesha, em especial para os amigos Gustavo Figueiredo, Elch Esquiçati, Ananda Tereza e Anadir Lima. Aos amigos Silvana Martins e Renato Marques Viana, minha imensa gratidão. Um agradecimento muito especial ao meu grande amigo Mariovaldo Cardoso, que me apresentou a beleza da cultura da capoeira. Agradeço muito minha maravilhosa companheira Danieli Santos, por todo seu amor, companheirismo, amizade, apoio e compreensão.

A todos que de alguma forma, colaboraram para a conclusão de mais esta etapa, deixo aqui registrado o meu sincero e entusiasmado...

MUITO OBRIGADO!!!

Resumo

O objetivo neste trabalho é descrever uma relação entre o tipo parabólico de um semigrupo em $Sl(n, \mathbb{R})$ e a forma canônica de Jordan dos elementos em seu interior. Após um breve resumo dos conceitos básicos da teoria geral de Grupos e Álgebras e Lie também da teoria de conjuntos de controle para a ação de semigrupos, apresentamos o conceito de tipo parabólico de um semigrupo. Em seguida, finalmente expomos a relação para caso de grupos de Lie semi-simples e exploramos a relação no caso $Sl(n, \mathbb{R})$.

Palavras Chaves: Semigrupos; Grupos de Lie; Variedades Flag; Tipo parabólico; Forma Canônica de Jordan.

Abstract

The purpose of this work is to describe a relationship between the parabolic type of a semigroup and the canonical Jordan form of the elements in its interior. After a brief resume of the basic concepts of the general theory of Lie Groups and Algebras and Control Sets for the action of semigroups, we present the concept of parabolic type of a semigroup. After we expose the relationship to the semi-simple Lie groups case and explore the relationship in the $Sl(n, \mathbb{R})$ case.

Key Words: Semigroups; Lie Groups; Flag Manifolds; Parabolic Type; Jordan Canonical Form.

Sumário

Introdução	1
1 Grupos e Álgebras de Lie	3
1.1 Grupos de Lie e Álgebras de Lie	3
1.2 Ação de grupos de Lie e representação adjunta	7
1.3 Variedades homogêneas	8
1.4 Resultados básicos sobre álgebras de Lie	11
1.5 Aplicação exponencial	13
1.6 Forma de Cartan-Killing	15
1.7 Decomposição de Cartan	16
1.8 Sistema de raízes, decomposição de Iwasawa, Subgrupos Parabólicos e Variedades “Flag”	19
1.8.1 Sistema de raízes	20
1.8.2 Decomposição de Iwasawa	22
1.8.3 Subgrupos Parabólicos e Variedades “flag”	24
1.9 Grupos de Weyl	30
1.10 Decomposição de Bruhat	32
1.11 Interpretação geométrica das Câmaras de Weyl	34

1.12	Subgrupos Split e Câmaras de Weyl	37
1.13	Fibrados principais	38
1.14	Ação de W sobre G/MA	40
1.15	Pontos fixos e atratores	42
2	Conjunto de Controle para ação de Semigrupos	46
2.1	Conjuntos de controle	47
2.2	Conjuntos de controle invariantes	52
3	Conjuntos de controle em variedades Flag	60
3.1	Unicidade do conjunto de controle invariante sobre G/P	60
3.2	Caracterização do conjunto de controle invariante sobre variedades Flag maximais	64
3.3	Caracterização de conjuntos de controle em variedades Flag maximais	73
3.4	Conjuntos de controle em variedades Flag arbitrárias	81
3.5	Um subgrupo do grupo de Weyl	84
4	Tipo parabólico de um semigrupo e forma canônica de Jordan	89
4.1	Tipo Parabólico de um semigrupo	90
4.2	Decomposição multiplicativa de Jordan	95
4.3	Tipo parabólico de um semigrupo e forma de Jordan dos elementos de seu interior	99
4.4	O caso $Sl(n, \mathbb{R})$	105
	Bibliografia	107
	Índice Remissivo	110

Introdução

O estudo de semigrupos em grupos de Lie semi-simples tem se desenvolvido bastante recentemente. Uma ferramenta fundamental neste estudo é a teoria dos conjuntos de controle. O esclarecimento da natureza dos conjuntos de controle tem revelado várias características geométricas e topológicas do semigrupo.

Quando se estuda os conjuntos de controle para a ação de semigrupos em variedades “flag” surge o conceito de tipo parabólico de um semigrupo. Neste trabalho o objetivo principal é apresentar a relação entre o tipo parabólico de um semigrupo de $SL(n, \mathbb{R})$ e a forma canônica de Jordan dos elementos do interior do semigrupo. A essência da técnica consiste em observar que o subconjunto $\Theta(h)$ das raízes que anulam o elemento split $h \in S$ nos dá informações a respeito da forma canônica de Jordan de h , a saber, quanto “maior” $\Theta(h)$, maior serão os blocos de Jordan de h . Como $\Theta(h) \subset \Theta(S)$ para todo $h \in \text{int}S$, onde $\Theta(S)$ é o tipo parabólico do semigrupo S , temos que $\Theta(S)$ nos fornece as dimensões máximas que os blocos de Jordan dos elementos do interior de S podem ter. Além disto existe $h \in \text{int}S$ tal que $\Theta(h) = \Theta(S)$, ou seja, estas dimensões máximas são atingidas.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. Nos três primeiros capítulos apresentamos os principais resultados da teoria de Lie e dos semigrupos em Grupos de Lie semi-simples sobre os quais está alicerçado o trabalho. No primeiro capítulo generalidades sobre grupos e álgebras de Lie. No segundo capítulo apresentamos propriedades gerais dos conjuntos de controle, enquanto no terceiro capítulo apresentamos propriedades dos conjuntos de controle nas variedades flag.

O quarto capítulo é onde aparecem os resultados que nos permitem alcançar o objetivo almejado. O teorema principal afirma que $\Theta(h) \subset \Theta(S)$, para todo elemento split $h \in \text{int}S$, e também que existe um elemento split $h \in \text{int}S$ para o qual $\Theta(h) = \Theta(S)$. A partir deste teorema é alcançamos nosso objeto principal que é conhecer os tamanhos máximos que os blocos de Jordan dos elementos do interior S podem atingir.

Capítulo 1

Grupos e Álgebras de Lie

Os grupos e álgebras de Lie surgiram quando Sophus Lie, buscando criar uma teoria para as equações diferenciais análoga à teoria Galois para equações algébricas, estudou as propriedades dos grupos de simetria de suas soluções. Neste estudo surgiram os grupos infinitesimais, que atualmente recebem o nome de álgebras de Lie. Posteriormente descobriu-se a impossibilidade de se construir a teoria buscada por Lie, entretanto, os conceitos desenvolvidos por ele nesta busca, foram generalizados e deram origem ao ramo da matemática que hoje recebe o nome de Teoria de Lie.

Neste capítulo abordamos os conceitos e propriedades fundamentais dos grupos e álgebras de Lie, bem como a relação entre estes objetos. Apenas apresentamos os conceitos e principais resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. Não são apresentadas as demonstrações destes resultados. As mesmas podem ser obtidas nos livros clássicos de grupos e álgebras de Lie, em especial em [2], [3], [5], e [6].

1.1 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

Um grupo de Lie é conjunto com duas estruturas distintas, uma estrutura de variedade diferenciável e uma estrutura de grupo. Estas duas se relacionam exigindo-se que a aplicação que define o produto e a inversa seja diferenciável.

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial, munido de uma operação chamada

colchete. Cada grupo de Lie possui uma álgebra de Lie, eles se relacionam por meio da aplicação exponencial. Através dele informações são levadas do grupo para a álgebra e vice-versa.

Definição 1.1. *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável de classe C^∞ munida de uma estrutura de grupo abstrato, na qual a aplicação $G \times G \longrightarrow G$ dada por $(\sigma, \tau) \longmapsto \sigma\tau^{-1}$ é de classe C^∞ .*

Definição 1.2. *Dizemos que (H, φ) é um subgrupo de Lie do grupo de Lie G se:*

1. H é um subgrupo abstrato de G ;
2. $\varphi : H \rightarrow G$ é um homomorfismo de grupos abstratos; e
3. (H, φ) é uma subvariedade de G .

Um exemplo bastante familiar de grupo de Lie é o grupo de matrizes invertíveis $Gl(n, \mathbb{R})$. A estrutura diferenciável de $Gl(n, \mathbb{R})$ é herdada de $gl(n, \mathbb{R})$, o conjunto de todas as matrizes $n \times n$. Como $gl(n, \mathbb{R})$ se identifica naturalmente com \mathbb{R}^{n^2} , então $gl(n, \mathbb{R})$ possui uma estrutura de variedade C^∞ . Sendo o determinante uma função contínua tomando valores em $gl(n, \mathbb{R})$ e assumindo valores reais então $Gl(n, \mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{n^2} e portanto possui uma estrutura de variedade C^∞ . Como as aplicações:

$$\begin{aligned} Gl(n, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow Gl(n, \mathbb{R}) \\ (A, B) &\longmapsto AB \\ &e \\ Gl(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow Gl(n, \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A^{-1} \end{aligned}$$

são diferenciáveis de classe C^∞ , então $Gl(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

O próximo resultado fornece uma maneira eficiente de se obter exemplos de subgrupos de Lie.

Proposição 1.3. *Todo o subgrupo fechado de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie de G .*

Exemplo 1.4. O grupo linear especial $Sl(n, \mathbb{R})$, que é o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ de determinante 1, é um subgrupo de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$. O grupo ortogonal especial $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in Sl(n, \mathbb{R}); AA^t = 1\}$, onde 1 é a matriz identidade $n \times n$, também é um subgrupo de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$.

Definição 1.5. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo de G . Definimos o centralizador e o normalizador de H em G , respectivamente por:*

$$Z_G(H) = \{x \in G : xh = hx \quad \forall h \in H\};$$

$$N_G(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}.$$

O centro de G é definido por:

$$Z(G) = \{x \in G : xy = yx \quad \forall y \in G\}.$$

Definição 1.6. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um espaço vetorial munido de uma operação $[\cdot, \cdot]$, denominada colchete, satisfazendo:*

1. $[\cdot, \cdot]$ é bilinear;
2. $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$;
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

A segunda condição é equivalente a $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ e a terceira condição é conhecida como *identidade de Jacobi*.

Um exemplo típico de álgebra de Lie é o conjunto $gl(n, \mathbb{R})$ munido do colchete definido por $[X, Y] = XY - YX$. Com este mesmo colchete temos outros exemplos de álgebras de Lie, como por exemplo, o conjunto das matrizes $n \times n$ de traço zero, denotado por $sl(n, \mathbb{R})$.

Definição 1.7. Uma subálgebra de Lie \mathfrak{h} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um subespaço vetorial de \mathfrak{g} tal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$. Com a estrutura herdada de \mathfrak{g} , \mathfrak{h} é naturalmente uma álgebra de Lie.

Por exemplo, $sl(d, \mathbb{R}) = \{X \in gl(d, \mathbb{R}) : trX = 0\}$ é uma subálgebra de Lie de $gl(d, \mathbb{R})$.

Definição 1.8. Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} uma subálgebra de \mathfrak{g} . O centralizador e o normalizador de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} , são definidos respectivamente como:

$$Z(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{h}\}$$

$$N(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] \in \mathfrak{h} \text{ para todo } Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Definição 1.9. Sejam G e H grupos de Lie. Uma aplicação $\Psi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos de Lie se Ψ é C^∞ e é um homomorfismo de grupos abstratos. Se além disso Ψ for um difeomorfismo, então dizemos que Ψ é um isomorfismo de grupos de Lie. Neste caso, se tivermos ainda $G = H$ dizemos que Ψ é um automorfismo.

Definição 1.10. Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie. Uma transformação linear $\Psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é dita um homomorfismo de álgebras de Lie se $\Psi([X, Y]) = [\Psi(X), \Psi(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Se além disso Ψ for invertível, então dizemos que Ψ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Neste caso, se tivermos ainda $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ então dizemos que Ψ é um automorfismo.

Considere V um espaço vetorial. Denotaremos por $Gl(V)$ o conjunto de todas as transformações lineares invertíveis de V . Também usaremos $gl(V)$ para indicar o conjunto das transformações lineares de V . Assim, definimos:

Definição 1.11. Se $H = Gl(V)$, $Gl(d, \mathbb{R})$ ou $Gl(d, \mathbb{C})$ então um homomorfismo $\Psi : G \rightarrow H$ é chamado uma representação do grupo de Lie G .

1.2 Ação de grupos de Lie e representação adjunta

Definição 1.12. *Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma ação de G sobre M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ satisfazendo:*

- i) φ é C^∞ ;
- ii) $\varphi(1, x) = x$ para todo $x \in M$;
- iii) $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in M$.

Se $\varphi : G \times M \rightarrow M$ é uma ação, denotaremos $\varphi(g, x)$ simplesmente por gx , $\forall g \in G, \forall x \in M$.

Definição 1.13. *Sejam G um grupo de Lie e $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação. Dizemos que a ação é transitiva se para quaisquer $x, y \in M$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Nesse caso dizemos que G age transitivamente sobre M . Também dizemos que a ação é efetiva se $gx = x$ para todo $x \in M$ implicar que $g = 1$.*

Consideremos G um grupo de Lie e $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação. Fixando $g \in G$ a ação induz um difeomorfismo $\varphi_g : M \rightarrow M$ definida por $\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$. Dado um grupo de Lie G temos uma ação natural do grupo de Lie nele mesmo por meio dos automorfismos internos:

$$\begin{aligned} a_g : G \times G &\rightarrow G, \\ a_g(x) &= gxg^{-1}. \end{aligned}$$

Cada aplicação a_g induz um isomorfismo da álgebra de Lie de G . Desta forma obtemos uma representação de G em $Gl(d, \mathbb{R})$ pela aplicação que a cada $g \in G$ associa a transformação linear da_g . Esta representação é chamada *representação adjunta* de G e denotada por

$$Ad : G \rightarrow Gl(\mathfrak{g})$$

$$g \mapsto da_g.$$

De maneira similar aos grupos de Lie, a cada $x \in \mathfrak{g}$ está associada uma transformação linear

$$ad(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

definida por $ad(X)Y = [X, Y]$. A representação adjunta da álgebra de Lie \mathfrak{g} é a aplicação

$$ad : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$$

$$x \mapsto ad(x).$$

Estas representações se relacionam através do seguinte diagrama que comuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & Aut(\mathfrak{g}) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & End(\mathfrak{g}) \end{array} ,$$

ou seja,

$$\exp(ad(X)) = Ad(\exp(X)).$$

1.3 Variedades homogêneas

Uma variedade homogênea é o quociente entre um grupo de Lie G e um subgrupo fechado $H \subset G$. Neste trabalho este conceito é fundamental, pois o objeto central de nosso trabalho é o tipo parabólico de um semigrupo $S \subset G$, que é um subconjunto do sistema de raízes obtido a partir do estudo da ação de S nas variedades “flag” G/P_Θ , que são um tipo particular de variedade homogênea. Nesta seção obtemos as variedades homogêneas a partir da ação de G em uma variedade M , escolhemos um

ponto $m \in M$, o seu subgrupo de isotropia $H \subset G$ é um subgrupo fechado de G , em seguida adotamos em G/H uma certa estrutura diferenciável que torna G/H o que chamamos de variedade homogênea. Ao longo desta seção veremos qual a estrutura diferenciável que escolhemos para G/H , é a estrutura que torna G/H difeomorfa a M . Quando $G = Sl(n, \mathbb{R})$, a variedade M que tomamos é a variedade “flag” formada por sequências finitas de subespaços euclidianos encaixados. Os subgrupos de isotropia para esta ação são subgrupos parabólicos. Apenas para adiantar um pouco as idéias, um subgrupo parabólico é um subgrupo $P_\Theta \subset G$ determinado por um subconjunto Θ do sistema de raízes. No caso em geral que G é um grupo de Lie semi-simples, as variedades “flag” generalizadas são as variedades homogêneas G/P_Θ , onde P_Θ são subgrupos parabólicos de G .

Sejam G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G . Ao conjunto quociente G/H pode ser dada uma única estrutura de variedade, exigindo que a projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H$, definida por $\pi(g) = gH$ seja uma aplicação C^∞ . Nesta estrutura, um subconjunto U de G/H é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ é um aberto em G .

Definição 1.14. *As variedades da forma G/H , com estrutura diferenciável conforme acima, são ditas variedades homogêneas .*

Dada uma ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ do grupo de Lie G sobre uma variedade M , fixemos $m_0 \in M$ e definimos $H = \{g \in G : gm_0 = m_0\}$. H é um subgrupo fechado de G e é chamado *subgrupo de isotropia* em m_0 . No caso da ação ser transitiva, a aplicação $\tau : G/H \rightarrow M$ definida por $\tau(gH) = gm_0$ é um difeomorfismo. Um importante fato obtido deste resultado é que toda variedade M , que possui um grupo de difeomorfismos que age transitivamente na mesma, é difeomorfa a uma variedade homogênea.

Exemplo 1.15. (Variedades “Flag”) Dada uma sequência de inteiros $s = (k_1, k_2, \dots, k_r)$, com $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$, a variedade “flag” real $\mathbb{F}^n(s)$ é o conjunto de todos

os “flag” $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r$ de subespaços de \mathbb{R}^n , com $\dim V_j = k_j$, $j = 1, 2, \dots, r$.

Temos uma ação natural

$$\varphi : Sl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{F}^n(s) \rightarrow \mathbb{F}^n(s)$$

do grupo $Sl(n, \mathbb{R})$ na variedade flag $\mathbb{F}^n(s)$ definida como segue: Se $g \in Sl(n, \mathbb{R})$ e $(V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r) \in \mathbb{F}^n(s)$, então

$$\varphi(g, (V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r)) = (gV_1 \subset gV_2 \subset \dots \subset gV_r).$$

Note que a aplicação $V_i \mapsto gV_i$ leva cada subespaço de dimensão k_i de \mathbb{R}^n em um subespaço de mesma dimensão. Além disso, se $V_i \subset V_j$ então $gV_i \subset gV_j$ e esta ação é transitiva. Para ver isto consideremos a base canônica do \mathbb{R}^n e o “flag” canônico $f_{\beta_0} = (\langle e_1, \dots, e_{k_1} \rangle = V_1, \subset \dots \subset \langle e_1, \dots, e_{k_r} \rangle = V_r)$. Consideremos também um flag arbitrário $f_\beta = (W_1 \subset \dots \subset W_r)$. Escolhemos uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ com a mesma orientação da base canônica, adaptada a f_β , no sentido que $\{u_1, \dots, u_{k_1}\} \subset W_1, \dots, \{u_{k_{r-1}+1}, \dots, u_{k_r}\} \subset W_r$. Definimos a aplicação linear $g' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por, $g'(e_i) = f_i$. Claramente $g'(f_{\beta_0}) = f_\beta$. Como g' é injetora então também é sobrejetora, e portanto é um isomorfismo. Assim $\det g' \neq 0$. Se $\det g' \neq 1$, então $\det g' > 0$ logo tomando $g = \frac{1}{(\det g')^{1/n}} g'$ temos que $\det g = 1$ e $gf_{\beta_0} = f_\beta$. Agora, vamos calcular o subgrupo de isotropia no elemento f_{β_0} . Seja $g \in Sl(n, \mathbb{R})$ e consideremos o produto de g pelos elementos $e_1, \dots, e_{k_1} \in V_1$. Temos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k_1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \dots & a_{k_1 k_1} & \dots & a_{k_1 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk_1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k_1 1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}e_1 + \dots + a_{k_1 1}e_{k_1} + \dots + a_{n1}e_n \in V_1$$

⋮

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k_1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \dots & a_{k_1 k_1} & \dots & a_{k_1 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk_1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k_1} \\ a_{2k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1 k_1} \\ \vdots \\ a_{nk_1} \end{pmatrix}$$

$$= a_{1k_1} e_1 + \dots + a_{k_1 k_1} e_k + \dots + a_{nk_1} e_n \in V_1$$

Aplicando o mesmo raciocínio para V_2, \dots, V_r concluímos que, para fixar todos os espaços V_1, V_2, \dots, V_r a matriz g tem que ter a forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

onde A_i é uma matriz quadrada $(k_i - k_{i-1}) \times (k_i - k_{i-1})$. Denotando por P_s o subgrupo fechado de $Sl(n, \mathbb{R})$ das matrizes desta forma temos uma aplicação, injetora e sobrejetora σ da variedade homogênea $Sl(n, \mathbb{R})/P_s$ no conjunto $\mathbb{F}^n(s)$ definida por $\sigma(gP_s) = \varphi(g, f_\beta)$. Finalmente, dotamos $\mathbb{F}^n(s)$ de uma estrutura de variedade diferenciável exigindo que esta aplicação seja localmente um difeomorfismo.

Quando a sequência s é dada por $(1, 2, \dots, n)$ dizemos que $\mathbb{F}^n(s)$ é uma “*Flag*” *maximal*. Casos particulares de variedades “*Flags*” são as Grassmannianas $Gr_k(n) = \mathbb{F}^n(k)$ que são constituídas por subespaços k -dimensionais de \mathbb{R}^n e o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{n-1} = Gr_1(n)$, que é o espaço das direções em \mathbb{R}^n .

1.4 Resultados básicos sobre álgebras de Lie

Nesta seção apresentamos os conceitos de álgebra de Lie solúvel, nilpotente e também semi-simples. Classes muito importantes de álgebras de Lie dentro da teoria.

Definição 1.16. *Um subespaço \mathfrak{h} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um ideal de \mathfrak{g} se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$.*

Definimos indutivamente os seguintes subespaços de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\
\mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\
&\vdots \\
\mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]
\end{aligned}$$

Temos que $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal para todo $k \geq 0$. Assim $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$ para todo k .

A sequência de ideais definida acima recebe o nome de *série derivada* de \mathfrak{g} e cada ideal é chamado uma *álgebra derivada* de \mathfrak{g} .

Definição 1.17. Dizemos que uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é solúvel se a sua série derivada se anula para algum $k \geq 0$.

Um exemplo de álgebra solúvel é o conjunto das matrizes triangulares superiores $n \times n$.

Definição 1.18. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita abeliana se $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

O conjunto das matrizes diagonais $n \times n$ é uma álgebra abeliana, já que o produto de duas matrizes diagonais sempre comuta. Observemos também que, as álgebras abelianas são solúveis já que, \mathfrak{g} é abeliana se, e somente se, $\mathfrak{g}' = 0$.

Afim de introduzir o conceito de álgebra nilpotente, definimos a seguinte sequência de ideais de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\
\mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\
&\vdots \\
\mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]
\end{aligned}$$

A sequência de ideais definida acima, é chamada de *séria central descendente*.

Definição 1.19. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita nilpotente se a sua série central descendente se anula para algum $k > 0$.

O conjunto das matrizes triangulares superiores com diagonal nula é um exemplo de uma álgebra nilpotente.

Observação 1.20. Toda álgebra de Lie nilpotente é solúvel. No entanto, nem toda álgebra de Lie solúvel é nilpotente. Um conhecido contra exemplo é o conjunto das matrizes triangulares superiores, que é solúvel mas não é nilpotente.

Dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensão finita, existe um único ideal solúvel que contém todos os ideais solúveis de \mathfrak{g} ([1], proposição 1.28). Definimos este ideal como sendo o *radical solúvel* de \mathfrak{g} e o denotamos por $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, ou simplesmente por \mathfrak{r} .

Definição 1.21. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita simples se:

- i) $\dim \mathfrak{g} > 1$;
- ii) \mathfrak{g} não possui ideais não triviais.

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita semi-simples se seu radical solúvel é nulo, ou seja, se \mathfrak{g} não contém ideais solúveis além de 0.

O item (i) da definição acima garante a compatibilidade dos conceitos de álgebras simples e semi-simples (pois se não houvesse essa exigência, álgebras de Lie unidimensionais seriam simples mas não são semi-simples.). Desta forma, com as definições acima toda álgebra simples é também semi-simples.

A álgebra de Lie $sl(n, \mathbb{R})$ é simples e portanto semi-simples.

1.5 Aplicação exponencial

Definição 1.22. Dado um grupo de Lie G chamaremos qualquer homomorfismo $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$ de subgrupo a um parâmetro de G .

Foi provado no teorema 3.27 de [3] que dados dois grupos de Lie G e H , com G simplesmente conexo, se $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo então existe um único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $d\varphi = \psi$.

Como a álgebra de Lie de um grupo de Lie é o espaço tangente na identidade então a álgebra de Lie de \mathbb{R} é dada pelos campos de vetores constantes $\{\lambda \frac{d}{dr} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ definimos o homomorfismo entre a álgebra de Lie de \mathbb{R} e \mathfrak{g} por

$$\lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda X$$

Sendo a reta real simplesmente conexa, temos que existe um único subgrupo a um parâmetro $\exp_X : \mathbb{R} \mapsto G$ tal que

$$d(\exp_X(\lambda \frac{d}{dr})) = \lambda X.$$

Dito em outras palavras, a aplicação definida por $t \mapsto \exp_X(t)$ é o único subgrupo a um parâmetro de G cujo vetor tangente em 0 é $X(e)$. Então definimos a *aplicação exponencial* por

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

considerando $\exp(X) = \exp_X(1)$.

Desta forma, temos aqui o responsável por transportar algumas propriedades da álgebra de Lie para o grupo de Lie. O próximo exemplo justifica a terminologia de exponencial.

Exemplo 1.23. Seja $G = Gl(n, \mathbb{R})$. Então $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e a aplicação exponencial é dada pela exponencial de matrizes, isto é, se $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ então

$$\exp(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots$$

A relação existente entre a exponencial e as representações adjuntas de um grupo e sua álgebra de Lie é dada por

$$\exp(ad(X)) = Ad(\exp(X)).$$

Assim temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{Ad} & Aut(\mathfrak{g}) \\
\exp \uparrow & & \uparrow \exp \\
\mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & End(\mathfrak{g})
\end{array}$$

e,

$$\exp(tAd(g)X) = g(\exp tX)g^{-1}.$$

1.6 Forma de Cartan-Killing

A forma de Cartan-Killing é uma ferramenta essencial no estudo de álgebras de Lie semi-simples pois, nestas álgebras, a forma de Cartan-Killing é não-degenerada. Uma forma bilinear B em um espaço vetorial V é dita não degenerada quando para todo elemento não-nulo $v \in V$ existe $u \in V$ tal que $B(v, u) \neq 0$. Na próxima seção, onde apresentamos a decomposição de Cartan, surge um objeto de fundamental importância, que é uma subálgebra abeliana maximal \mathfrak{a} na parte não-compacta da decomposição. A forma de Cartan-Killing nos permite definir um produto interno em \mathfrak{a} , que nos permite identificar os elementos de \mathfrak{a} com os elementos do seu dual \mathfrak{a}^* . Esta identificação nos ajuda tanto na hora de definir Grupo de Weyl como também na hora de definir a ação de um grupo de Weyl nos elementos de \mathfrak{a} .

A forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}X \text{ad}Y)$$

é denominada forma de Cartan-Killing. O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], nos fornece uma caracterização das álgebras semi-simples em termos da forma de Cartan-Killing.

Teorema 1.24. *A forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} é não-degenerada se, e somente se, \mathfrak{g} é semi-simples*

1.7 Decomposição de Cartan

A decomposição de Cartan de uma álgebra de Lie semi-simples real \mathfrak{g} nos fornece condições de encontrar um sistema de raízes, ferramenta fundamental para nossos propósitos. Para maiores detalhes, veja o capítulo 12 de [6]. Esta decomposição está fundamentada no conceito de forma real compacta.

Na prática, dada uma álgebra de Lie semi-simples real \mathfrak{g} , consideramos seu complexificado $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ encontramos uma forma real compacta \mathfrak{u} e partir dela obtemos a decomposição de Cartan de \mathfrak{g} . O conceito de forma real compacta e também o teorema que assegura a existência de tal objeto para álgebras semi-simples são apresentados a seguir.

Dada uma álgebra de Lie real \mathfrak{g} , seu complexificado

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \{X + iY; X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

é a álgebra de Lie complexa com colchete definido por

$$[X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] = [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i([X_1, Y_2] + [Y_1, X_2])$$

a partir da seguinte relação:

$$[X, iY] = i[X, Y].$$

Uma relação muito importante entre uma álgebra de Lie real \mathfrak{g} e seu complexificado $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, é o fato de que \mathfrak{g} é semi-simples se, e somente se $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ é semi-simples.

O realificado $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ de uma álgebra de Lie complexa é a álgebra obtida restringindo os escalares a \mathbb{R} .

Seja U um espaço vetorial complexo. Uma conjugação σ em U , é uma transformação $\sigma : U \rightarrow U$ que satisfaz:

- (i) $\sigma(u + v) = \sigma(u) + \sigma(v)$ para todo $u, v \in V_{\mathbb{C}}$;
- (ii) $\sigma(zv) = \bar{z}\sigma(v)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e todo $v \in V_{\mathbb{C}}$;

(iii) $\sigma^2 = -1$.

Estamos particularmente interessados nas conjugações de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ que satisfazem a seguinte propriedade

$$[\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y]. \quad (1.1)$$

Definição 1.25. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra complexa. Uma **forma real** de \mathfrak{g} é uma subálgebra \mathfrak{g}_0 de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ que é o subespaço dos pontos fixos de uma conjugação σ que satisfaz (1.1). Se isto ocorre, \mathfrak{g} é o complexificado de \mathfrak{g}_0 .*

Uma **forma real compacta** de uma álgebra de Lie complexa \mathfrak{g} é uma forma real \mathfrak{g}_0 de \mathfrak{g} na qual a forma de Cartan-Killing é negativa definida. Assim temos que as álgebras de Lie compactas são semi-simples. A razão para que se defina álgebra de Lie compacta desta maneira é que uma álgebra de Lie semi-simples real é a álgebra de Lie de um grupo de lie compacto se, e somente se, sua forma de Cartan-Killing é negativa definida (veja [6]).

O teorema a seguir garante a existência uma forma real compacta para uma álgebra de Lie

Teorema 1.26. *Toda álgebra semi-simples complexa admite formas reais compactas. Se \mathfrak{u}_1 e \mathfrak{u}_2 são formas reais compactas de \mathfrak{g} , então existe um automorfismo ϕ de \mathfrak{g} tal que $\phi(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_2$ e, portanto, as formas reais compactas são isomorfas entre si.*

Demonstração: Veja [6] ■

O teorema anterior nos diz que toda álgebra de Lie semi-simples complexa possui uma forma real compacta. A proposição a seguir relaciona a semi-simplicidade de uma álgebra de Lie real e da sua complexificada.

Exemplo 1.27. Uma forma real compacta de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ é $\mathfrak{su}(n)$.

A decomposição de Cartan de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} foi inspirada na decomposição das matrizes de traço 0 em matrizes anti-simétricas, que formam uma álgebra compacta, e simétricas, que constituem um subespaço complementar.

Definição 1.28. (*Decomposição de Cartan*) Sejam \mathfrak{g}_0 uma álgebra de Lie semi-simples sobre \mathbb{R} , \mathfrak{g} sua complexificada e σ uma conjugação de \mathfrak{g} com respeito a \mathfrak{g}_0 (isto é, o conjunto dos pontos fixos de σ coincide com \mathfrak{g}_0). Uma decomposição em soma direta $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, sendo \mathfrak{k} subálgebra e \mathfrak{s} um subespaço vetorial é chamada uma decomposição de Cartan se existir uma forma real compacta $\mathfrak{g}_{\mathfrak{k}}$ tal que

$$\sigma \mathfrak{g}_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{g}_{\mathfrak{k}}$$

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_{\mathfrak{k}}$$

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{g}_{\mathfrak{k}}.$$

A esta decomposição está associado o automorfismo involutivo θ definido por $\theta(X) = X$ se $X \in \mathfrak{k}$ e $\theta(Y) = -Y$ se $Y \in \mathfrak{s}$. Este automorfismo é denominado involução de Cartan .

O automorfismo involutivo θ da definição acima desempenha um papel importante como veremos a seguir. Considere a forma bilinear B_{θ} em \mathfrak{g}_0 dada por

$$B_{\theta}(X, Y) = -\langle X, \theta(Y) \rangle.$$

Temos pelo teorema 12.21 de [6] que B_{θ} é um produto interno em \mathfrak{g}_0 , daí a importância do automorfismo θ . Observe que, se $X, Y \in \mathfrak{s}$ então $B_{\theta}(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, pois $\theta(Y) = Y$. Como B_{θ} é um produto interno temos que a forma de Cartan-Killing é positiva definida em \mathfrak{s} . Outro fato importante a ser destacado, do teorema 12.22 de [6], é que $\text{ad}Y$ é simétrica em relação à B_{θ} para todo $Y \in \mathfrak{s}$, e conseqüentemente diagonalizável.

Exemplo 1.29. Seja $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Então, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ é a complexificada de \mathfrak{g}_0 , com conjugação σ dada por $\sigma(X) = \bar{X}$. Uma forma real compacta de \mathfrak{g} é $\mathfrak{g}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{su}(n)$.

Agora, $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{g}_\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ é o subespaço das matrizes simétricas \mathfrak{s} . Assim, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}$ é uma decomposição de Cartan. A involução de Cartan associada é dada por $\theta(X) = -X^t$.

Agora seja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana que é *maximal* em \mathfrak{s} , no sentido em que \mathfrak{a} não está contida em nenhuma subálgebra abeliana contida em \mathfrak{s} . Uma tal subálgebra existe pois qualquer subespaço \mathfrak{a}_0 de dimensão 1 em \mathfrak{s} é uma subálgebra abeliana, como \mathfrak{s} é um espaço vetorial de dimensão finita, existe uma subálgebra abeliana \mathfrak{a} de dimensão maximal.

Como a subálgebra abeliana maximal \mathfrak{a} está contida em \mathfrak{s} temos que para todo $Y \in \mathfrak{a}$, $\text{ad}Y$ é diagonalizável. Uma subálgebra abeliana na qual a adjunta de seus elementos é diagonalizável é denominada *subálgebra split*, em particular uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ é uma subálgebra split.

Temos que a forma de Cartan-Killing é um produto interno na subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, pois a forma de Cartan-Killing é um produto interno em \mathfrak{s} . Desta forma, para cada funcional linear $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, temos associado um único $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que $\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle$ para todo $H \in \mathfrak{a}$. Temos assim um isomorfismo entre \mathfrak{a} e \mathfrak{a}^* , o que nos fornece a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_* : \mathfrak{a}^* \times \mathfrak{a}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle \alpha, \beta \rangle_* = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle$ que chamaremos também de forma de Cartan-Killing em \mathfrak{a}^* . Devido a esta discussão, por abuso de notação, vamos usar o mesmo símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tanto para a forma de Cartan-killing em \mathfrak{a} quanto para a forma de Cartan-Killing em \mathfrak{a}^* .

1.8 Sistema de raízes, decomposição de Iwasawa, Subgrupos Parabólicos e Variedades “Flag”

Considere a seguinte decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$. Escolhendo uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, as raízes restritas de \mathfrak{g} em relação à \mathfrak{a} são funcionais lineares que aparecem como autovalores da adjuntas dos elementos de \mathfrak{a} . O conjunto das raízes restritas de \mathfrak{g} em relação à \mathfrak{a} é chamado de sistema de raízes. Nesta seção

iniciamos apresentando o conceito de raiz restrita de \mathfrak{g} em relação à \mathfrak{a} . Em seguida apresentamos a decomposição de Iwasawa de uma álgebra de Lie real \mathfrak{g} que é um refinamento da decomposição de Cartan, que é obtida a partir dos autoespaços associados às raízes. Uma vez obtida a decomposição de Iwasawa exploramos o conceito de subgrupos parabólicos, objetos estes primordiais neste trabalho. Uma vez que o tipo parabólico de um semigrupo é um subconjunto do sistema de raízes que é obtido através do estudo da ação do semigrupo nas variedades flag, que são quocientes do tipo G/P_Θ onde P_Θ é um subgrupo parabólico.

1.8.1 Sistema de raízes

Conforme foi dito na introdução desta seção, o conceito de raiz restrita \mathfrak{g} em relação à \mathfrak{a} é de fundamental importância para nossos propósitos. Na realidade, mais que isto, é uma ferramenta primordial na classificação das álgebras de Lie semi-simples. Para maiores informações consulte [6].

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan. Seleccionemos uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$. Seja $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear e considere o conjunto

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Se $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ então α é denominado *peso* da representação adjunta de \mathfrak{a} em \mathfrak{g} , ou simplesmente peso do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, e os subespaço \mathfrak{g}_α são denominados subespaços de pesos. Um peso não nulo α é denominado *raiz restrita* de \mathfrak{g} em relação a \mathfrak{a} , ou raiz restrita do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Denotemos por Δ o conjunto de tais raízes, que recebe o nome de sistema de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Um sistema de raízes é dito reduzido se os únicos múltiplos de uma raiz α que ainda é raiz forem α e $-\alpha$. É claro que a partir do sistema de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ é possível obter um sistema reduzido. Para uma abordagem mais geral e aprofundada dos sistemas de raízes indicamos o capítulo 9 de [6].

O conceito de peso é definido na teoria para uma representação ρ qualquer de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} em um espaço vetorial V , a existência de um pesos associado a cada autovalor de $\rho(X)$, $X \in \mathfrak{g}$ é garantido se \mathfrak{g} for nilpotente (teorema 2.9 de [6]), para mais informações consulte o capítulo 2 de [6].

Temos pela proposição 12.26 de [6] que duas subálgebras abelianas maximais quaisquer em \mathfrak{s} são isomorfas. Devido a este fato, vamos enfatizar a subálgebra em relação à qual a raiz restrita está sendo tomada apenas quando for necessário).

Em [6], o teorema 2.9 juntamente com as proposições 6.5 e 12.25 nos permite decompor \mathfrak{g} como a soma direta dos auto-espacos associados aos pesos \mathfrak{g} em relação à \mathfrak{a}

$$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{m}} + \sum_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

onde $\tilde{\mathfrak{m}}$ é o auto-espaço associado ao peso nulo.

Exemplo 1.30. Uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}$, onde \mathfrak{s} é o subespaço das matrizes simétricas. Temos que o conjunto das matrizes diagonais de traço zero $\mathfrak{a} = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0\}$ é uma subálgebra abeliana maximal contida em \mathfrak{s} . As raízes restritas de \mathfrak{g} relativas a \mathfrak{a} são os funcionais lineares α_{ij} definidos por $\alpha_{ij}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_i - \lambda_j$. De fato, se $X = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}$ então

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)X &= \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)a_{12} & \cdots & (\lambda_1 - \lambda_n)a_{1n} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)a_{21} & 0 & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_n)a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_n - \lambda_1)a_{n1} & (\lambda_n - \lambda_2)a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, $\text{ad}(H)X = \alpha(H)X$ se, e somente se, $\alpha = \alpha_{ij}$ para algum $i, j = 1, \dots, n$. Portanto, as raízes restritas de \mathfrak{g} relativas a \mathfrak{a} são os funcionais α_{ij} com $i \neq j$.

Vamos agora definir raízes positivas, raízes simples, conceitos que nos serão úteis posteriormente.

O subconjunto de \mathfrak{a} dado por $\{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0 \text{ para todo } \alpha \in \Delta\}$ é aberto e denso em \mathfrak{a} pois é o conjunto dos pontos que não anulam um número finito de funcionais lineares não-nulos. Este conjunto é chamado o conjunto dos *elementos regulares* de \mathfrak{a} . Assim, \mathfrak{a} é dividido em uma quantidade finita de componentes conexas, que são denominadas *câmaras de Weyl*. Seleccionemos uma delas e denotemos por \mathfrak{a}^+ . Ela será denominada *câmara positiva*. Com base nesta escolha, chamamos o conjunto

$$\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta : \alpha(H) > 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}^+\}$$

de *sistema positivo de raízes* do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Escolher uma câmara é equivalente a escolher uma relação de ordem em \mathfrak{a} . Para uma demonstração deste fato consulte [6].

Definição 1.31. *Uma raiz $\alpha \in \Delta$ é dita simples se*

- (i) $\alpha > 0$,
- (ii) Não existem $\beta, \gamma \in \Delta$ tais que β e γ são positivas e $\alpha = \beta + \gamma$

O conjunto das raízes simples é denominado *sistema simples de raízes* do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, o qual denotaremos por Π . Este conjunto na realidade é uma base de \mathfrak{a} , na qual toda raiz é escrita com coeficientes inteiros e de mesmo sinal, além disto toda raiz positiva é expressa com coeficientes não negativos. Existe uma abordagem mais geral e abstrata do conceito de sistema simples de raízes. Para maiores detalhes e a demonstração dos fatos enunciados neste parágrafo consulte [6].

1.8.2 Decomposição de Iwasawa

A decomposição de Iwasawa nos permite obter informações importantes a respeito de um Grupo de Lie e também de sua Álgebra de Lie, pois dá origem a vários

objetos que nos fornecem informações a respeito da álgebra. Em particular, a partir de uma decomposição de Iwasawa obtemos os subgrupos parabólicos, através dos quais obtemos o conceito de tipo parabólico de um semigrupo.

Seja

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [2]

Teorema 1.32. (*Decomposição de Iwasawa*) *A subálgebra \mathfrak{n}^+ acima definida é nilpotente e \mathfrak{g} se decompõe como $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$.*

A decomposição de Iwasawa da álgebra fornece uma decomposição do grupo nos seguintes termos. Seja $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$ e $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$. Então G se decompõe como $G = KAN^+$.

Definição 1.33. *A decomposição*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ .$$

acima é chamada decomposição de Iwasawa de \mathfrak{g} . A decomposição $G = KAN^+$ é chamada decomposição global de Iwasawa.

Exemplo 1.34. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Uma decomposição de Cartan de \mathfrak{g} é $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{s}$, onde \mathfrak{s} é o subespaço das matrizes simétricas. O conjunto das matrizes diagonais de traço zero $\mathfrak{a} = \{diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0\} \subset \mathfrak{s}$ é uma subálgebra abeliana maximal. No exemplo 1.30 vimos que as raízes restritas de \mathfrak{g} relativas a \mathfrak{a} são os funcionais $\alpha_{ij}, i \neq j$. Os elementos regulares de \mathfrak{a} são as matrizes diagonais com todas as entradas distintas pois, se uma matriz $H = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ possui duas entradas iguais, digamos $\lambda_i = \lambda_j$, teremos $\alpha_{ij}(H) = \lambda_i - \lambda_j = 0$. Assim, o conjunto $\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n\}$ é uma câmara de Weyl, a qual escolheremos para ser a câmara positiva. Com esta escolha, para que $\alpha_{ij}(H)$ seja estritamente positivo para todo $H \in \mathfrak{a}^+$ é necessário que $i > j$. Portanto, $\Delta^+ = \{\alpha_{ij} : i > j\}$ é um sistema positivo de raízes.

Se α_{ij} pertence a Δ^+ então

$$\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha_{ij}(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

é o conjunto das matrizes com entrada ij qualquer e todas as demais nulas. Assim,

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é o conjunto das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ é uma decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, com $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$ e \mathfrak{a} e \mathfrak{n}^+ dadas como acima. Exponenciando estas subálgebras obtemos os seguintes subgrupos de $Sl(n, \mathbb{R})$:

$$K = SO(n)$$

$$A = \{\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \lambda_i > 0, i = 1, \dots, n \text{ e } \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = 1\}$$

$$A^+ = \{\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in A : \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n\}$$

e N^+ é o conjunto das matrizes triangulares superiores com os elementos da diagonal todos iguais a 1.

1.8.3 Subgrupos Parabólicos e Variedades “flag”

Seja G um grupo de Lie conexo, semi-simples e com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Consideremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ uma decomposição de Iwasawa e $G = KAN^+$ a decomposição global de Iwasawa correspondente. Denotaremos o *centralizador* de \mathfrak{a} em K por M e sua álgebra de Lie por \mathfrak{m} , dessa forma

$$M = \{u \in K : \text{Ad}(u)H = H, \forall H \in \mathfrak{a}\} = \{u \in K : uhu^{-1} = h, \forall h \in A\}.$$

O subespaço

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

é uma subálgebra de \mathfrak{g} .

Definição 1.35. A subálgebra \mathfrak{p} acima definida é chamada subálgebra parabólica minimal. Ela é a álgebra de Lie do grupo de Lie $P = MAN^+$, que por sua vez é dito subgrupo parabólico minimal. Qualquer subgrupo que contenha um subgrupo parabólico minimal é chamado subgrupo parabólico.

Exemplo 1.36. Como vimos no exemplo (1.15) os subgrupos de isotrofia da ação natural de $Sl(n, \mathbb{R})$ sobre a variedade “Flag” maximal $\mathbb{F}^s(1, \dots, n)$ nos elementos canônicos tem a forma

$$P = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Note que estes grupos de isotrofia são os subgrupos parabólicos minimais de $Sl(n, \mathbb{R})$.

Dentre as propriedades dos subgrupos e subálgebras minimais, destacamos as seguintes

Proposição 1.37. i) O normalizador de P coincide com P , ou seja,

$$P = \{u \in G : uPu^{-1} = P\},$$

ii) P é o normalizador de \mathfrak{p} em G , ou seja,

$$P = \{u \in G : Ad(u)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}$$

iii) todos os subgrupos parabólicos minimais são conjugados entre si. Além disso, dado um subgrupo parabólico minimal P e $g \in G$, temos que gPg^{-1} é também um subgrupo parabólico minimal

A variedade homogênea G/P é denominada *variedade flag maximal*. Como P é o normalizador de \mathfrak{p} , G/P pode ser identificada com a órbita de \mathfrak{p} sob a ação adjunta de G na Grassmanniana dos subespaços de \mathfrak{g} que possuem mesma dimensão que \mathfrak{p} .

Ou seja, para cada $g \in G$ temos a seguinte identificação $gP \leftrightarrow Ad(g)\mathfrak{p}$. Como P é seu próprio normalizador, G/P pode ser também identificada com o conjunto dos subgrupos parabólicos minimais, isto é, para cada $g \in G$ temos $gP \leftrightarrow gPg^{-1}$. Em resumo, para cada $g \in G$ temos as seguintes identificações

$$gP \leftrightarrow Ad(g)\mathfrak{p} \leftrightarrow gPg^{-1}.$$

Para maiores informação acerca destas identificações, consulte [8].

Agora veremos como são obtidas as outras variedades flag a partir dos subgrupos parabólicos. Inicialmente definimos as subálgebras parabólicas, a partir das quais obtemos os subgrupos parabólicos que são seus normalizadores. Além disto apresentamos as propriedades mais relevantes para nosso trabalho dos subgrupos parabólicos e também das variedades flag. Para maiores informações e demonstrações dos fatos aqui apresentados indicamos [8], [2] e as referências dos mesmos.

Seja Π um sistema simples de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ e seja $\Theta \subset \Pi$ um subconjunto qualquer. Associado Θ temos o subgrupo parabólico P_Θ , sua subálgebra é a subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ . Vamos agora ver como estes objetos podem ser construídos.

Considere a subálgebra $\mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ de $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, onde $\langle \Theta \rangle^+$ é o menor subconjunto fechado de Δ^+ contendo Θ , ou seja, o subconjunto de Δ^+ gerado pelas combinações lineares dos elementos de Θ . A subálgebra \mathfrak{p}_Θ é dada por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p},$$

e o subgrupo parabólico P_Θ é o normalizador de \mathfrak{p}_Θ em G . A álgebra de Lie de P_Θ é \mathfrak{p}_Θ pois \mathfrak{p}_Θ é seu próprio normalizador em \mathfrak{g} .

Exemplo 1.38. Tomemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(5, \mathbb{R})$ com a decomposição canônica de Iwasawa. Conforme já vimos

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\alpha_{ij} : i \neq j, j = 1, \dots, 5\} \text{ é o conjunto das raízes} \\ \Delta^+ &= \{\alpha_{ij} : i < j\} \text{ é um conjunto de raízes positivas} \\ \Pi &= \{\alpha_{i,i+1} : i = 1, \dots, 4\} \text{ é um sistema simples de raízes} \end{aligned}$$

Tomando $\Theta = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ temos que

$$\langle \Theta \rangle^+ = \{\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}\}.$$

Denotaremos $\sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha$ e $\sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ respectivamente por $\mathfrak{n}^+(\Theta)$ e $\mathfrak{n}^-(\Theta)$. Temos que $\mathfrak{n}^+(\Theta)$ e $\mathfrak{n}^-(\Theta)$ são subálgebras de \mathfrak{n}^+ e \mathfrak{n}^- , respectivamente ([2], página 66).

Agora vamos explicitar estas subálgebras.

$$\mathfrak{n}^+(\Theta) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{n}^-(\Theta) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Em geral P_Θ não é conexo, a componente conexa de P_Θ é $\exp \mathfrak{p}_\Theta$. Note que, se $\Theta_1 \subset \Theta_2$ então $\mathfrak{p}_{\Theta_1} \subset \mathfrak{p}_{\Theta_2}$. Além disto, $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p}_\Pi = \mathfrak{g}$, assim $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_\Theta$, $P \subset P_\Theta$ para todo $\Theta \subset \Pi$. A subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ admite uma decomposição que nos será útil, a decomposição de Langlands. Seja $\mathfrak{a}(\Theta)$ o subespaço de \mathfrak{a} gerado por H_α , $\alpha \in \Theta$, onde $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ é o dual de $\alpha : \alpha(\cdot) = \langle H_\alpha, \cdot \rangle$. Denote por \mathfrak{a}_Θ o complemento ortogonal (em relação à forma de Cartan Killing) de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{a} , e por \mathfrak{n}_Θ^+ a subálgebra de \mathfrak{n}^+ definida por $\mathfrak{n}_\Theta^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+ - \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in \Delta^+ - \langle \Theta \rangle^+$. Denotando

ainda $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$) temos a seguinte decomposição de \mathfrak{p}_Θ

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_\Theta &= \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p} \\
&= \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \\
&= \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{m} \oplus (\mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}_\Theta) \oplus (\mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}_\Theta^+) \\
&= (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)) \oplus (\mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+) \\
&= \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+.
\end{aligned}$$

Esta é a chamada decomposição de Langsland de \mathfrak{p}_Θ .

Exemplo 1.39. Dando continuidade ao que foi feito no exemplo 1.38, temos que

$$H_{\alpha_{12}} = \frac{1}{10}(E_{11} - E_{22}) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$H_{\alpha_{23}} = \frac{1}{10}(E_{22} - E_{33}) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\mathfrak{a}(\Theta) = \langle E_{11} - E_{22}, E_{22} - E_{33} \rangle = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a + b + c = 0 \right) \right\}$$

e

$$\mathfrak{a}(\Theta) = \langle E_{33} - E_{44}, E_{44} - E_{55} \rangle = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix} : d + e + f = 0 \right) \right\}.$$

Desta forma temos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_\Theta &= (\mathfrak{m} + \mathfrak{a}(\Theta) + \mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)) + (\mathfrak{a}_\Theta + \mathfrak{n}_\Theta^+) \\
&= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} * & * & * & 0 & \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\} \\
&= \left(\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{array} \right) \right) + \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
&= \mathfrak{m}_\Theta + (\mathfrak{a}_\Theta + \mathfrak{n}_\Theta^+).
\end{aligned}$$

A subálgebra $\mathfrak{g}(\Theta)$ gerada por $\mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$ é semi-simples e $\mathfrak{a}(\Theta)$ está contida em $\mathfrak{g}(\Theta)$ como uma subálgebra “split”. Também, $\mathfrak{g}(\Theta)$ é um ideal em \mathfrak{m}_Θ , pois \mathfrak{m} normaliza $\mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$. Portanto o complemento ortogonal $\mathfrak{g}(\Theta)^\perp$ de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em \mathfrak{m}_Θ é um ideal em \mathfrak{m}_Θ o qual satisfaz $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{g}(\Theta) \oplus \mathfrak{g}(\Theta)^\perp$. Uma vez que nesta decomposição ambas as componentes são ideais, temos que $[\mathfrak{g}(\Theta), \mathfrak{g}(\Theta)^\perp] = 0$. Assim, $\mathfrak{g}(\Theta)^\perp$ é o centralizador de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em \mathfrak{m}_Θ . Temos que $\mathfrak{g}(\Theta) \subset \mathfrak{m}$, pois \mathfrak{m} é o centralizador de \mathfrak{a} .

Também temos a decomposição de Langsland em P_Θ

$$P_\Theta = \tilde{M}_\Theta A_\Theta N_\Theta^+,$$

onde $A_\Theta = \exp \mathfrak{a}_\Theta$, $N_\Theta^+ = \exp \mathfrak{n}_\Theta^+$, e \tilde{M}_Θ é um subgrupo fechado com álgebra de Lie \mathfrak{m}_Θ . Em geral \tilde{M}_Θ não é conexo. Denotamos por M_Θ a componente conexa da identidade de \tilde{M}_Θ . Ela é o subgrupo fechado $M_\Theta = \exp \mathfrak{m}_\theta$. Além disto, \tilde{M}_Θ normaliza $A_\Theta N_\Theta^+$.

Exemplo 1.40. (1.8.22) Exponenciando as subálgebras obtidas no exemplo anterior, obtemos

$$M_{\Theta} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A_{\Theta} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$N_{\Theta}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Notemos que a componente identidade de P_{Θ} ,

$$(P_{\Theta})_0 = M_{\Theta}A_{\Theta}N_{\Theta}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

é o subgrupo de isotropia no subespaço gerado por e_1, e_2, e_3 (vetores da base canônica de \mathbb{R}^5) quando consideramos a ação natural de $Sl(5, \mathbb{R})$ sobre $Gr_3(5)$. Na realidade, todo subgrupo do tipo P_{Θ} é um subgrupo de isotropia em algum elemento na ação de $Sl(n, \mathbb{R})$ sobre alguma variedade “*Flag*”.

1.9 Grupos de Weyl

O grupo de Weyl é o grupo de transformações lineares gerado pelas reflexões em relação às raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Sua importância dentro da teoria, entre outras coisas, reside no fato de que nos permite entender a bijeção entre os sistemas simples de raízes e o conjunto de todas as câmaras de Weyl. Para nossos propósitos seu valor é

imenso pois é a partir do subgrupo $W(S)$ do grupo de Weyl, que obteremos o tipo parabólico de um semigrupo. Para obtermos subgrupo $W(S)$ associamos a cada elemento do grupo w do grupo de Weyl um conjunto de controle D_w na variedade flag maximal G/P , o subgrupo $W(S)$ consiste dos elementos w tais que D_w é o conjunto de controle invariante em G/P .

Seja um Δ o sistema de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, vamos agora considerar o conjunto das reflexões em relação aos elementos de Δ . O grupo de transformações W gerado por estas reflexões é o grupo de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. O grupo de Weyl também pode ser visto como o grupo quociente M^*/M , onde M é o centralizador de A em K e M^* é o normalizador de A em K , pois o grupo de Weyl W é isomorfo a M^*/M . Este isomorfismo será de extrema importância para definir a ação do grupo de Weyl em \mathfrak{a} , nas câmaras de Weyl e também nos elementos das variedades flag G/P_Θ . Vamos agora apresentar a definição de reflexão em relação uma raiz $\alpha \in \Delta$. Este conceito pode ser generalizado para um espaço vetorial qualquer, para mais informações consulte [6]. Devido ao isomorfismo entre \mathfrak{a} e seu dual \mathfrak{a}^* é indiferente definir as reflexões em \mathfrak{a} ou \mathfrak{a}^* , para os nossos propósitos é mais cômodo definir em \mathfrak{a} . Seja $\alpha \in \Delta$ uma raiz do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, e seja H_α o dual de $\alpha : \alpha(\cdot) = \langle H_\alpha, \cdot \rangle$. A transformação linear $r_\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$ dada por

$$r_\alpha(H) = H - 2 \frac{\langle H_\alpha, H \rangle}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle} H$$

é denominada reflexão em relação à raiz α . Pode-se verificar facilmente que esta transformação é invertível. O grupo de transformações lineares em \mathfrak{a} gerado pelas reflexões em torno das raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ é denominado *grupo de Weyl* do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Denotaremos o grupo de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ por W . Está claro que diferentes escolhas da subálgebra abeliana maximal, dá origem a diferentes grupos de Weyl, entretanto devido ao isomorfismo entre as subálgebras abelianas maximais, os respectivos grupos de Weyl também são isomorfos, veja a proposição 9.2 de [6]. Por este motivo vamos nos referir ao grupo de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ apenas por grupo de Weyl, isto também justifica o fato da notação para grupo de Weyl não enfatizar a

subálgebra abeliana maximal em relação à qual dá origem ao mesmo.

O grupo de Weyl age transitivamente no conjunto das câmaras de Weyl (proposição 9.3 de [6]). Seja C uma câmara de Weyl, temos pela proposição 9.20 de [6] que o subgrupo de isotropia em C é o subgrupo que contém apenas a identidade. Isto nos dá uma bijeção entre o grupo de Weyl e o conjunto das câmaras de Weyl.

1.10 Decomposição de Bruhat

A decomposição de Bruhat do flag maximal G/P é uma decomposição obtida a partir da ação do subgrupo N^- sobre os elementos da forma wP de G/P , onde w é um elemento do grupo de Weyl. Na realidade tomamos um representante $\tilde{w} \in M^*$ de w e consideramos a ação de N^- em $\tilde{w}P$.

Considere a decomposição global de Iwasawa $G = KAN^+$, sejam $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $N^- = \exp(\mathfrak{n}^-)$ e $P = MAN^+$ o subgrupo parabólico minimal associado a esta decomposição. Para cada elemento w do grupo de Weyl W do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, tomemos um representante $\tilde{w} \in M^*$ e denotemos a origem P de G/P por b_0 . Nestas condições, G/P se decompõe como

$$G/P = \bigcup_{w \in W} N^- \tilde{w}b_0.$$

Esta decomposição é denominada *decomposição de Bruhat* e cada órbita $N^- \tilde{w}b_0$ nesta união recebe o nome de célula de Bruhat. Quaisquer duas células ou coincidem, ou são disjuntas. A célula $N^- b_0$ aberta e densa em G/P e recebe o nome de *célula aberta de Bruhat*. A demonstração destes fatos, bem como outras informações a respeito desta decomposição podem ser encontradas em [2].

Agora vejamos um exemplo:

Exemplo 1.41. Consideremos a ação de $Sl(3, \mathbb{R})$ sobre $Gr_2(3)$ dada por

$$\begin{aligned} \varphi : Sl(3, \mathbb{R}) \times Gr_2(3) &\longrightarrow Gr_2(3) \\ (g, \bar{\xi}) &\longmapsto g\bar{\xi} = \overline{g\xi}. \end{aligned}$$

Seja $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 e tomemos o elemento $\overline{\xi_0} \in Gr_2(3)$ representado por

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

subespaço gerado por $\{e_1, e_2\}$. O subgrupo de isotropia H_2 neste elemento é o subconjunto das matrizes de $SL(3, \mathbb{R})$ da forma

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Desta forma $Gr_2(3)$ é difeomorfa a $SL(3, \mathbb{R})/H_2$, sendo o difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \gamma : SL(3, \mathbb{R})/H_2 &\longrightarrow Gr_2(3) \\ gH_2 &\longmapsto g\overline{\xi_0} \end{aligned}$$

Via este difeomorfismo o elemento $H_2 \in SL(3, \mathbb{R})/H_2$ é identificado com o plano

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $N_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ e as células $N_\beta \xi_i$ são:

$$\begin{aligned} \bullet N_\beta \xi_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ \bullet N_\beta \xi_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ \bullet N_\beta \xi_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

As outras células coincidem com uma destas três como subconjuntos de $Gr_2(3)$. Note ainda que $N_\beta \xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, onde 1 é a matriz identidade 2×2 e x é uma matriz arbitrária 1×2 , logo esta é a célula aberta e densa de $Gr_2(3)$.

Para termos uma visão geométrica das células da decomposição de Bruhat de $Gr_2(3)$, vamos identificá-las na esfera unitária contida no semi-espaço $y \geq 0$, identificando cada plano com sua intersecção com a esfera.

- $N_\beta \xi_0$ é identificada com a calota menos o seu bordo;
- $N_\beta \xi_1$ é identificada com o bordo menos os pontos $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$;
- $N_\beta \xi_2$ é identificada com os pontos $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$.

Deste modo temos que $Gr_2(3) = N_\beta \xi_0 \cup N_\beta \xi_1 \cup N_\beta \xi_2$. A figura abaixo destaca cada uma das três células da decomposição de Bruhat de $Gr_2(3)$.

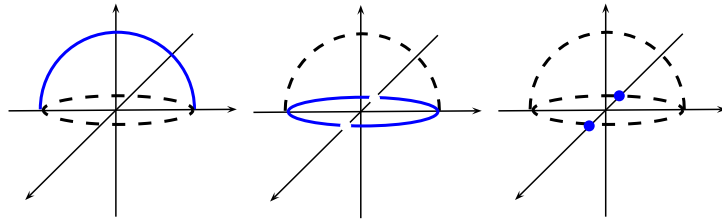


Figura 1.1: Células da decomposição de Bruhat de $Gr_2(3)$

1.11 Interpretação geométrica das Câmaras de Weyl

Fixadas uma decomposição de Cartan, uma subálgebra abeliana maximal e uma câmara positiva, considere o conjunto de todas as câmaras conjugadas a câmara positiva escolhida inicialmente. Nesta seção daremos uma interpretação geométrica para este conjunto. Identificaremos o conjunto das câmaras positivas com o espaço homogêneo G/MA , em seguida interpretaremos a fibração

$$G/MA \rightarrow G/MAN^+$$

em termos das câmaras e dos subgrupos parabólicos minimais.

Seja \mathfrak{a} uma subálgebra abeliana maximal fixa e selecionemos uma câmara de Weyl positiva \mathfrak{a}^+ . Associado com \mathfrak{a}^+ temos a decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$.

Definamos $C(\mathfrak{g}) =: \{\text{Ad}(g)(\mathfrak{a}) : g \in G\}$. Temos que $C(\mathfrak{g})$ é o conjunto das subálgebras abelianas conjugadas de \mathfrak{a} . Para um elemento $\text{Ad}(g)\mathfrak{a}$ pertencente a C denotemos por $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ o seu conjunto de câmaras de Weyl e tomemos $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathfrak{g} \in G} \mathcal{C}(\mathfrak{g})$. Então \mathcal{C} é o conjunto de todas as câmaras de Weyl conjugadas a \mathfrak{a}^+ .

Definimos uma ação $G \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ por $(g, \alpha^+) \mapsto \text{Ad}(g)\alpha^+$. A isotropia no elemento \mathfrak{a}^+ é MA . De fato, $\text{Ad}(g)\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+$ se, e somente se, $\text{Ad}(g) = \text{Id}$, o que por sua vez ocorre se, e somente se $ghg^{-1} = h$ para todo $h \in A^+$. Mas g comuta com h se, e somente se, g pertence a MA o que prova a afirmação. Dessa forma, temos uma bijeção

$$\begin{aligned} G/MA &\rightarrow \mathcal{C} \\ gMA &\mapsto \text{Ad}(g)\mathfrak{a}^+. \end{aligned}$$

Com isto G/MA pode ser realizado como o conjunto das conjugações das câmaras de Weyl de \mathfrak{a} em \mathfrak{g} .

Agora considere a fibração equivariante

$$G/MA \rightarrow G/MAN^+$$

que aplica cada classe MA na classe MAN^+ que a contem.

Com a identificação estabelecida acima, a fibração $G/MA \rightarrow G/MAN^+$ pode ser interpretada como segue: um elemento $\alpha \in G/MA$ é uma câmara de Weyl de $\text{Ad}(g)(\mathfrak{a})$ para algum g pertencente a G . Tomemos um sistema positivo de raízes de $(\mathfrak{g}, \text{Ad}(g)\mathfrak{a})$ considerando a câmara α como sendo positiva. A partir de α obtemos um único subgrupo parabólico minimal $P(\alpha)$. Temos então que a fibração está associando à câmara $\alpha \in G/MA$ o subgrupo parabólico minimal $P(\alpha)$ que a contém como positiva.

Se α pertence a G/MA então $\alpha = \text{Ad}(g)\beta$ para algum $g \in G$ e alguma câmara de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Então, o elemento de G/MAN^+ correspondente a α é o subgrupo parabólico gPg^{-1} .

Resumidamente temos que α é uma câmara positiva para b pertencente a \mathbb{B} se, e somente se $\pi(\alpha) = b$, onde $\pi : G/MA \rightarrow G/MAN^+$ é a fibração descrita acima.

Exemplo 1.42. Consideremos o grupo $Sl(2, \mathbb{R})$ bem como a descrição de sua estrutura feita nos exemplos anteriores. A identificação de G/MA com a conjunto das câmaras de Weyl é dada pela aplicação

$$G/MA \rightarrow \mathcal{C}$$

$$gMA \mapsto gA^+g^{-1}$$

onde $A^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \lambda > 1 \right\}$. Analisemos o caso particular em que $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ao elemento $gMA \in G/MA$ está associado a câmara

$$\begin{aligned} gA^+g^{-1} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : \lambda > 1 \right\}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda > 1 \right\} \end{aligned}$$

que é a câmara negativa em A segundo o sistema de raízes positivas Δ^+ obtido considerando A^+ como câmara positiva. Agora, $\pi(gMA) = gMAN^+ \leftrightarrow$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ x & \lambda \end{pmatrix} \right\}$. Assim, a câmara $\left\{ \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} : \beta < \beta^{-1} \right\}$ é positiva para o subgrupo parabólico minimal $\tilde{P} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ x & \lambda \end{pmatrix} \right\}$.

Temos ainda que N^+ é transitivo sobre a fibra de $b_0 = MAN^+$. De fato:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}\{b_0\} &= \{gMA \in G/MA : gMAN^+ = MAN^+\} \\ &= \{gMA \in G/MA : g \in MAN^+\} \\ &= MAN^+/MA \approx N^+ \end{aligned}$$

Como um grupo sempre age transitivamente sobre si mesmo segue-se a afirmação. Isto significa que qualquer câmara positiva para $P = MAN^+$ é da forma nA^+n^{-1}

com $n \in N^+$ pois, dada uma câmara positiva qualquer $\alpha \in G/MA$, se $\pi(\alpha) = P$ então α pertence a $\pi^{-1}\{b_0\}$, logo existe $n \in N^+$ tal que $\alpha = nA^+n^{-1}$.

Analogamente, todo $gP \in \mathbb{B}$ é identificado com

$$gPg^{-1} = gMAN^+g^{-1} = (gMg^{-1})(gAg^{-1})(gN^+g^{-1}),$$

logo toda câmara positiva para gPg^{-1} é da forma $(gng^{-1})(gAg^{-1})(gng^{-1})$.

1.12 Subgrupos Split e Câmaras de Weyl

Nesta seção identificaremos o quociente G/M^*A com o conjunto dos subgrupos “split” de G e, a partir disso, interpretaremos a fibração $G/MA \rightarrow g/M^*A$.

Já que M^* e A são subgrupos fechados de G temos que o produto M^*A também é um subgrupo fechado. Além disso, como $M \subset M^*$ temos que $MA \subset M^*A$. Podemos então considerar o espaço homogêneo G/M^*A e a fibração equivariante

$$G/MA \rightarrow G/M^*A,$$

que associa a cada classe de MA a classe lateral de M^*A que a contem.

Denotemos o conjunto dos subgrupos “split” de G por $\mathcal{S}(G)$ e consideremos a ação de G em $\mathcal{S}(G)$ dada por $(g, \alpha) \mapsto \text{Ad}(g)(\alpha)$. Temos que M^*A é o subgrupo de isotropia em \mathfrak{a} . De fato, $\text{Ad}(g)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ se, e somente se g pertence ao normalizador de \mathfrak{a} em G que é M^*A . Logo, temos uma bijeção

$$G/M^*A \rightarrow \mathcal{S}(G)$$

$$gM^*A \mapsto \text{Ad}(g)\mathfrak{a}$$

e podemos identificar G/M^*A com o conjunto das subálgebras “split” de \mathfrak{g} .

Com esta identificação a fibração acima pode ser interpretada como a aplicação que associa cada câmara de Weyl dada à subálgebra “split” que a contém.

1.13 Fibrados principais

Nesta seção apresentaremos o conceito de fibrados principais. O interesse em introduzir o conceito de fibrados principais neste trabalho é que a fibração $G/MA \rightarrow G/M^*A$ define G/MA como um fibrado principal sobre G/M^*A , tendo o grupo de Weyl como grupo estrutural deste fibrado. Isto auxilia a compreensão da ação do grupo de Weyl W sobre o conjunto das câmaras de Weyl G/MA .

Definição 1.43. *Sejam P e M variedades diferenciáveis e G um grupo de Lie. Um fibrado principal de espaço total P , espaço de base M e grupo estrutural G , o qual é denotado na literatura por $P(M, G)$, consiste destas três estruturas (P, M e G) e de uma ação à direita*

$$\begin{aligned} \eta &: P \times G \rightarrow P \\ (p, g) &\mapsto \eta(p, g) = pg \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) *A ação é livre;*
- ii) *O espaço das órbitas desta ação, $\{pG = \{pg : g \in G\} : p \in P\}$ é M . Em termos precisos, existe uma submersão*

$$\pi : P \rightarrow M$$

tal que as órbitas de G são os conjuntos $\pi^{-1}\{x\}$ denominadas fibras.

- iii) *P é localmente trivial no sentido de que para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e um difeomorfismo*

$$\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$$

que é dada da forma

$$\psi(p) = (\pi(p), \phi(p))$$

onde $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ é uma aplicação que satisfaz

$$\phi(pa) = \phi(p)a.$$

Exemplo 1.44. Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável, então o produto $M \times G$ é um fibrado principal, com grupo estrutural G e espaço base M . A ação à direita é dada por $((x, g)h) \mapsto (x, g)h = (x, gh)$. A projeção $\pi : M \times G \rightarrow M$, $(x, g) \mapsto x$ é uma submersão tal que as fibras $\pi^{-1}\{x\} = \{(x, g) : g \in G\}$ coincidem com as órbitas dos elementos (x, h) , ou seja, $\{(x, hj) : j \in G\} = \pi^{-1}\{x\}$. Tomando agora uma vizinhança U de $x \in M$ temos $\pi^{-1}(U) = \{(x, g), g \in G\} = U \times G$ e as trivializações locais dão dadas pela imersão

$$\begin{aligned} \psi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times G \\ \psi(x, g) &\mapsto (x, g). \end{aligned}$$

De fato, tomando $\phi(x, g) = g$ temos $\phi((x, g), a) = \phi(x, ga) = ga = (\phi(x, g))a$ para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ e $a \in G$.

Exemplo 1.45. Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então, $G/G/H, H$ é um fibrado principal. A ação à direita de H sobre G é dada por $(g, h) \mapsto gh$. A projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$ nos fornece uma submersão tal que as fibras $\pi^{-1}(gH) = gH \subset G$ coincidem com a órbita de g , que é $gH = \{gh : h \in H\}$. As trivializações locais são obtidas devido a existência de seções locais em G/H , que são aplicações σ definidas em um aberto $U \subset G/H, \sigma : U \rightarrow G$ tais que $\pi(\sigma(gH)) = gH$ para todo $gH \in U$. Assim, a aplicação

$$\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times H$$

dada por $\psi(\sigma(gH)h) = (gH, h)$ é uma trivialização local, já que todo elemento $g \in G$ pode ser escrito da forma $g = xh$ com $x \in G$ e $h \in H$.

1.14 Ação de W sobre G/MA

Nesta seção, veremos como W age no conjunto das câmaras de Weyl de G com o auxílio da fibração $G/MA \rightarrow G/M^*A$.

O subgrupo MA é normal em M^*A . De fato, dado $\tilde{w}a \in M^*A$ temos que $\tilde{w}aMA(\tilde{w}a)^{-1} = \tilde{w}MAaa^{-1}\tilde{w} = \tilde{w}M\tilde{w}^{-1}A = MA$, onde usamos respectivamente o fato de que M centraliza A , A é abeliano e que M^* normaliza A e M .

Assim, a fibração $G/MA \rightarrow G/M^*A$ define G/MA como um fibrado principal sobre G/M^*A . O grupo estrutural deste fibrado é $M^*A/MA \approx M^*/M = W$. De fato:

i) a ação à direita de M^*A/MA é dada por $(gMA\tilde{w}aMA) \mapsto g\tilde{w}aMA$;

ii) a fibração $\pi : G/MA \rightarrow G/M^*A$ define as fibras

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(gM^*A) &= \{hMA \in G/MA : hN^*A = gM^*A\}, \\ &= \{g\tilde{w}aMA : \tilde{w}a \in M^*A\} \end{aligned}$$

que coincidem com as órbitas dos elementos $gMA \in G/MA$;

iii) dado um ponto $gM^*A \in G/M^*A$, tomamos uma vizinhança U que o contenha e definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow M^*A/MA \\ g\tilde{w}aMA &\mapsto \tilde{w}aMA. \end{aligned}$$

Da igualdade

$$\phi((g\tilde{w}aMA)\tilde{w}_1a_1MA) = \phi(g\tilde{w}a\tilde{w}_1a_1MA) = \tilde{w}a\tilde{w}_1a_1MA = (\phi(g\tilde{w}aMA))\tilde{w}_1a_1MA$$

concluimos que a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times M^*A/MA \\ p &\mapsto (\pi(p), \phi(p)) \end{aligned}$$

define uma trivialização local.

Desta forma temos uma ação natural à direita de W sobre G/MA .

Definição 1.46. A ação à direita de W sobre G/MA é dada por $(gMA)w = g\tilde{w}MA$ para $g \in G$, $w \in W$ e \tilde{w} um representante qualquer de $w \in M^*$.

Em termos das interpretações geométricas das seções anteriores a ação de W sobre as câmaras de Weyl é a seguinte: Seja $\alpha^+ = gMA$ uma câmara de Weyl em G/MA e $\alpha = gM^*A \in G/M^*A$ o subgrupo “split” que a contém. Temos que $\alpha = gA^+g^{-1}$ e $\alpha = gAg^{-1}$. Além disso, o normalizador de α em gKg^{-1} é gM^*g^{-1} . Dado $w \in W$ seja \tilde{w} qualquer um de seus representantes em M^* . A ação à direita acima mencionada nos dá

$$\alpha^+w = (gMA)w = g\tilde{w}MA.$$

Agora, a conjugação usada para obter α a partir de A define um isomorfismo entre os grupos de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ e do par (\mathfrak{g}, α) que associa a cada representante \tilde{w} do grupo de Weyl definido por A o elemento $g\tilde{w}g^{-1}$ do grupo de Weyl definido por α (isto segue imediatamente do fato de que o normalizador de α em gKg^{-1} é gM^*g^{-1}). Assim, o elemento α^+w de G/MA é identificado com a câmara

$$(g\tilde{w}g^{-1})(gA^+g^{-1})(g\tilde{w}g^{-1})^{-1} = (g\tilde{w})A^+(g\tilde{w})^{-1}.$$

Exemplo 1.47. Para $G = Sl(2, \mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} MA &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right\} e \\ M^*A &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Tomando $g = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ temos que

$$\begin{aligned} \alpha^+ &= gMA = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b\lambda^{-1} \\ c\lambda & 0 \end{pmatrix} \right\} e \\ \alpha &= gM^*A = \left\{ \begin{pmatrix} b\lambda & 0 \\ 0 & -c\lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b\lambda^{-1} \\ c\lambda & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\alpha^+ &= gAg^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix} : \lambda > 1 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda > 1 \right\} e \\
\alpha &= gAg^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\} = A
\end{aligned}$$

Observemos que esta conjugação nos dá o mesmo subgrupo “split”, mas com outra câmara sendo considerada. Tomando $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in W$ e $\tilde{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ um representante em M^* temos que

$$\begin{aligned}
g\tilde{w} &= \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \\
\alpha^+ w = g\tilde{w}MA &= \left\{ \begin{pmatrix} -b\lambda & 0 \\ 0 & c\lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b\lambda & 0 \\ 0 & -c\lambda^{-1} \end{pmatrix} : \lambda > 1 \right\} e \\
(g\tilde{w})A^+(g\tilde{w})^{-1} &= \left\{ \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b^{-1} & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : \lambda > 1 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \lambda > 1 \right\} = A^+,
\end{aligned}$$

ou seja, o elemento w aplica a câmara α^+ na câmara positiva A^+ .

1.15 Pontos fixos e atratores

Seja $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa do grupo de Lie semi-simples G e A^+ uma câmara positiva. Tomemos $h \in A^+$ e consideremos o difeomorfismo

$$\begin{aligned}
h : G/MAN^+ &\rightarrow G/MAN^+ \\
gMAN^+ &\mapsto hgMAN^+ .
\end{aligned}$$

Então $gMAN^+ = hgMAN^+$ se, e somente se, $ghg^{-1} \in MAN^+$. Mas como $h \in A^+$ é um elemento split, temos que é também um elemento split. Deste forma $ghg^{-1} \in MAN^+$ se, e somente se $ghg^{-1} = h'$, para algum $h' \in A$. Mas isto ocorre se, e somente se, g pertence ao normalizador de A , ou seja, g pertence a M^* . Logo,

os pontos fixos deste difeomorfismo são da forma $\tilde{w}P = \tilde{w}b_0$, com $\tilde{w} \in M^*$. Portanto os pontos fixos de h estão em bijeção com os elementos do grupo. Devido a este fato, utilizamos a seguinte denominação.

Definição 1.48. *Diremos que $\tilde{w}b_0$ é um h -ponto fixo do tipo w .*

Seja $\tilde{w}b_0$ um ponto fixo para h e tomemos $n\tilde{w}b_0 \in N^-\tilde{w}b_0$. temos que $h(n\tilde{w}b_0) = hnh^{-1}h\tilde{w}b_0 = hnh^{-1}\tilde{w}b_0$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} h^knh^{-k} = 1$, temos que $h^k(n\tilde{w}b_0) = h^knh^{-k}\tilde{w}b_0 \rightarrow \tilde{w}b_0$ quando $k \rightarrow \infty$. Devido a esta propriedade temos a seguinte definição.

Definição 1.49. *Se $h^k(n\tilde{w}b_0) = h^knh^{-k}\tilde{w}b_0 \rightarrow \tilde{w}b_0$ quando $k \rightarrow \infty$ para todo $n \in N^-$, diremos que $\tilde{w}b_0$ é um atrator de $N^-\tilde{w}b_0$ para h , ou ainda, que $N^-\tilde{w}b_0$ é a variedade estável de $\tilde{w}b_0$.*

Temos assim que o h -fixo $\tilde{w}b_0$ é um atrator da célula $N^-\tilde{w}b_0$. Em particular b_0 é um atrator para a célula aberta de Bruhat. Logo, a variedade estável para b_0 é a variedade estável de b_0 .

Observação 1.50. Quando conjugamos h por um elemento $g \in G$ temos o isomorfismo entre os grupos de Weyl de A e de gAg^{-1} definido por $w \rightarrow gwg^{-1}$. Desta forma, o ponto fixo do tipo w para ghg^{-1} é $g\tilde{w}b_0 = (g\tilde{w}g^{-1})(gb_0)$, que é a imagem do atrator gb_0 sob o elemento do grupo de Weyl de gAg^{-1} identificado com w pelo isomorfismo definido por g .

Exemplo 1.51. Consideremos o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^1$ com os mesmos resultados do exemplo 1.8.28. Se h pertence a A^+ , consideremos o difeomorfismo de $\mathbb{R}P^1$ dado por $h[(x_1, x_2)] = [h(x_1, x_2)]$. Se $h = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, com $\lambda > 1$, então

$$h[(x_1, x_2)] = \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = [(\lambda x_1, \lambda^{-1} x_2)].$$

Assim, $h[(x_1, x_2)] = [(x_1, x_2)]$ se, e somente se, $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Logo, os pontos fixos de h são $b_0 = [(1, 0)]$, do tipo 1, e $\tilde{w}b_0 = [(0, 1)]$, do tipo w . Seja $[(x, y)] \neq [(0, 1)] \in \mathbb{R}P^1$. Para todo número natural k , temos

$$h^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix}$$

e

$$[(x, y)] = \left[\frac{1}{\lambda^k}(x, y) \right].$$

Assim,

$$h^k[(x, y)] = \left[\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^k}x \\ \frac{1}{\lambda^k}y \end{pmatrix} \right] = [(x, \lambda^{-2k}y)].$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, temos $[(x, \lambda^{-2k}y)] \rightarrow [(x, 0)] = [(1, 0)] = b_0$. Logo, b_0 atrai a célula aberta e densa N^-b_0 . Para o caso $[(x, y)] = [(0, 1)]$ temos $[(0, y)] = [\lambda^k(0, y)] = [(0, 1)]$ mesmo com $k \rightarrow \infty$. Assim, $[(0, 1)]$ atrai apenas a si próprio.

Exemplo 1.52. Seja $G = Gr_2(3)$, $h = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ com $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$ e

$V = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$. Então

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 x_2 & \lambda_2 y_2 \\ \lambda_3 x_3 & \lambda_3 y_3 \end{pmatrix}$$

e $hV = V$ se, e somente se, (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) possuem exatamente duas coordenadas nulas. Se este é o caso, então $V = \tilde{w}b_0$ para algum $w \in W$. Logo os pontos fixos são $\tilde{w}b_0$ com $w \in W$. Tomemos agora $V \in N^-b_0$. Então, $V = \langle (1, x, y), (0, 1, z) \rangle$ para algum $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se

$$h = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \in A$$

e k é um inteiro positivo, temos que

$$h^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}$$

e

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^k} \cdot 1 & \frac{1}{\lambda_2^k} \cdot 0 \\ \frac{1}{\lambda_1^k} \cdot x & \frac{1}{\lambda_2^k} \cdot 1 \\ \frac{1}{\lambda_1^k} \cdot y & \frac{1}{\lambda_2^k} \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^k} & 0 \\ \frac{x}{\lambda_1^k} & \frac{1}{\lambda_2^k} \\ \frac{y}{\lambda_1^k} & \frac{z}{\lambda_2^k} \end{pmatrix}$$

Assim, $h^k V = \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1}\right)^k & 0 \\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2}\right)^k \\ \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k & \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^k \end{pmatrix}$. Fazendo $k \rightarrow \infty$, temos que

$$h^k V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_0.$$

Logo, b_0 é o atrator de $N^- b_0 = N^- \tilde{w}_1 b_0$.

Verifica-se da mesma maneira que as variedades estáveis para $\tilde{w}_2 b_0, \tilde{w}_3 b_0, \tilde{w}_4 b_0, e \tilde{w}_5 b_0$ são respectivamente $N^- \tilde{w}_2 b_0, N^- \tilde{w}_3 b_0, N^- \tilde{w}_4 b_0, e N^- \tilde{w}_5 b_0$.

Capítulo 2

Conjunto de Controle para ação de Semigrupos

Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade na qual G age transitivamente. Seja $S \subset G$ um semigrupo de interior não vazio e consideremos a ação de S em M , que é obtida restringindo a ação de G em M a S . Dizemos que S age transitivamente em M , ou que a ação de S em M é transitiva, se para quaisquer $x, y \in M$ tivermos que x está na órbita de y . Analogamente definimos a ação transitiva de S em um subconjunto qualquer de M . Quando a ação de S em M não é transitiva, estamos interessados em encontrar algum subconjunto $D_0 \subset M$ onde esta transitividade ocorre, um tal conjunto recebe o nome de conjunto de transitividade. Não apenas isto, temos interesse em encontrar algum conjunto $D \subset M$ onde ocorre uma transitividade aproximada da ação de S , no sentido em que para quaisquer $x, y \in D$ se temos que y está no fecho da órbita de x . Um tal subconjunto onde ocorre esta transitividade aproximada é denominado conjunto de controle para a ação S . Um fato importante é que na família dos conjuntos de controle para a ação de um semigrupo S em uma variedade M , é que existe uma relação de ordem nestes conjuntos, e, em alguns casos, existe um elemento maximal C nesta ordem, que é denominado conjunto de controle invariante. Nosso objetivo neste capítulo é apresentar a definição formal destes objetos, conjunto de controle, conjunto de controle invariante e conjunto de transitividade. Além disto apresentamos algumas proprie-

dades e relações entre estes objetos, que são importantes em nosso estudo uma vez que o conceito de tipo parabólico é obtido através do estudo de uma relação entre o conjuntos de controle invariantes nas variedades flag G/P_Θ e o conjunto de controle invariante na variedade flag maximal G/P . Na primeira seção apresentamos os conceitos e propriedades dos conjuntos de controle para a ação em uma variedade M qualquer, fazemos o mesmo para os conjuntos de controle invariantes na segunda seção.

2.1 Conjuntos de controle

Definição 2.1. *Um conjunto de controle para o semigrupo S é um subconjunto $D \subset M$ que satisfaz as seguintes condições:*

- i) $\text{int}(D) \neq \emptyset$;
- ii) $D \subset fe(Sx) \quad \forall x \in D$; e
- iii) D é maximal com relação as propriedades (i) e (ii), ou seja, se $D' \subset M$ satisfaz (i) e (ii) e $D \subset D'$, então $D' = D$.

A condição (ii) diz que dados dois pontos quaisquer $x, y \in D$ então $y \in fe(Sx)$. Vejamos agora algumas propriedades de conjuntos de controle. A primeira delas diz que os conjuntos de controle coincidem ou são disjuntos, e para demonstrá-la, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.2. *Sejam $a, b, c \in M$ tais que $a \in fe(Sb)$ e $b \in fe(Sc)$. Então $a \in fe(Sc)$.*

Demonstração: Como $a \in fe(Sb)$ e $b \in fe(Sc)$, consideremos as sequências (x_n) e (y_n) de pontos de S tais que $x_n c \rightarrow b$ e $y_n b \rightarrow a$. Então, para toda vizinhança V de a , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_0} b \in V$, ie, a partir de n_0 os termos da sequência (x_n) estão na vizinhança V de a . Como a ação é contínua e $x_n c \rightarrow b$ temos que

$y_{n_0}x_n c \rightarrow y_{n_0}b$. Desta forma, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_0}x_1 c \in V$. Portanto, $a \in fe(Sc)$. ■

Proposição 2.3. *Sejam D e D' dois conjuntos de controle. Então $D = D'$ ou $D \cap D' \neq \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos que $D \cap D' \neq \emptyset$ e tomemos $x \in D \cap D'$. É claro que $int(D \cup D') \neq \emptyset$ já que $intD \neq \emptyset$. Sejam $a, b \in D \cup D'$ elementos quaisquer. Pela condição (ii) da definição 2.1, $a \in fe(Sx)$ e $x \in fe(Sb)$. Pelo lema anterior concluímos que $a \in fe(Sb)$. Pelo que acabamos de mostrar, $D \cup D' \subset fe(Sb) \forall b \in D \cup D'$. Pela maximalidade de D temos que $D \cup D' = D$. Logo $D \subset D'$ e novamente usando a maximalidade dos conjuntos de controle, concluímos que $D = D'$. ■

Proposição 2.4. *Todo subconjunto $D \subset M$ que satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 2.1 está contido em um conjunto de controle.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A} = \{C \subset M : D \subset C \text{ e } C \text{ satisfaz (i) e (ii) da Def. 3.1.3}\}$ ordenado pela inclusão. Como $D \in \mathcal{A}$ temos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Consideremos em \mathcal{A} uma cadeia arbitrária $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e coloquemos

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha.$$

Tomando $x, y \in U$, então existem $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ tais que $x \in C_{\alpha_1}$ e $y \in C_{\alpha_2}$. Mas segundo a ordem em \mathcal{A} temos que $C_{\alpha_1} \subset C_{\alpha_2}$ ou $C_{\alpha_2} \subset C_{\alpha_1}$, então $y \in fe(Sx)$. Isto mostra que $U \in \mathcal{A}$ e portanto, toda cadeia em \mathcal{A} é limitada superiormente. Pelo lema de *Zorn*, \mathcal{A} possui elementos maximais. Seja C_M um destes elementos maximais. Pela definição de \mathcal{A} temos que $D \subset C_M$ e C_M é o conjunto de controle desejado. ■

Um fato importante é que o fecho e o interior da órbita pelo semigrupo S de um ponto qualquer da variedade M são invariantes pela ação de S .

Proposição 2.5. Para todo $x \in M$ temos que, $S(int(Sx)) \subset int(Sx)$ e $S(fe(Sx)) \subset fe(Sx)$.

Demonstração: Dados $g \in S$ e $z \in int(Sx)$, existe $U \subset M$ aberto tal que $z \in U \subset Sx$. Como a ação é aberta (homeomorfismos), temos que gU é um aberto e $gz \in gU \subset gSx \subset Sx$. Logo $gz \in int(Sx)$. Agora, se $g \in S$ e $y \in fe(Sx)$ então existe $(g_n x)$ sequência em Sx que converge para y . Pelo fato da ação ser contínua segue que $gg_n x \rightarrow gy$, e portanto, $gy \in fe(Sx)$. ■

Definição 2.6. Seja D um conjunto de controle para o semigrupo S . Definimos o conjunto de transitividade para D como sendo:

$$D_0 = \{x \in D : x \in (int(S))x\}$$

Proposição 2.7. Seja D um conjunto de controle para o semigrupo S e seja D_0 o seu conjunto de transitividade. Se $D_0 \neq \emptyset$, então:

- i) $D_0 = (intS)D \cap D$;
- ii) $D \subset (intS)^{-1}x, \forall x \in D_0$;
- iii) $D_0 = (intS)x \cap (intS)^{-1}x, \forall x \in D_0$;
- iv) Para todo $x, y \in D_0$, existe $g \in intS$ com $gx = y$;
- v) D_0 é denso em D ;
- vi) D_0 é S -invariante em D no sentido que:

$$\text{se } h \in S, x \in D_0 \text{ e } hx \in D, \text{ então } hx \in D_0$$

Demonstração: (i) Vamos mostrar que $D_0 \subset (int(S))D \cap D$. Para isto tome $x \in D_0$. Então $x \in D$ e $x \in (intS)x$, isto é, $x \in D \cap (int(S))x \subset D \cap (int(S))D$. Logo $D_0 \subset D \cap (int(S))D$. Agora vamos mostrar que $[(int(S))D \cap D] \subset D_0$. Para

isto, tome $x \in (\text{int}(S))D \cap D$. Então existem $h \in \text{int}(S)$ e $y \in D$ tais que $x = hy$. Daí, $h^{-1}x = y$, ou seja, $(\text{int}(S))^{-1}x \cap D \neq \emptyset$. Como $D \subset fe(Sx)$ e D possui pontos interiores, também temos que $Sx \cap D \neq \emptyset$. Seja então $z \in Sx \cap D$. Como $D \subset fe(Sz)$ e $Sz \cap (\text{int}(S))^{-1}x \neq \emptyset$ existem $g \in S$ e $h \in \text{int}(S)$ tal que $gz = h^{-1}x$. Logo $hgz = x$, ou seja, $x \in (\text{int}(S))Sz$, mas $z \in Sx$ e, como $\text{int}(S)$ é um ideal, temos que $(\text{int}(S))Sz \subset (\text{int}(S))x$, (já que $z = s_1x$). Logo $x \in (\text{int}(S))x$ (pois $x \in (\text{int}(S))Sz \subset (\text{int}(S))x$). Como por hipótese $x \in D \Rightarrow x \in D_0$.

(ii) Seja $x \in D_0$. Queremos mostrar que $D \subset (\text{int}(S))^{-1}x$. Para isto, seja $y \in D$. Pelo item anterior temos que $(\text{int}(S))^{-1}x \cap D \neq \emptyset$. Mas como $D \subset fe(Sy)$ temos que $Sy \cap (\text{int}(S))^{-1}x \neq \emptyset$. Assim existem $g \in S$ e $h \in \text{int}(S)$ tais que $gy = h^{-1}x$, logo $y = g^{-1}h^{-1}x$. Como $g^{-1}h^{-1} = (hg)^{-1} \in (\text{int}(S))^{-1}$ (já que $h \in \text{int}(S)$ que é ideal, então $hg \in \text{int}(S)$) $\Rightarrow y = g^{-1}h^{-1}x \in (\text{int}(S))^{-1}x$.

(iii) Seja $x \in D_0$ e $y \in (\text{int}(S))^{-1}x \cap (\text{int}(S))x$. Assim existem $g, h \in \text{int}(S)$ tais que $y = h^{-1}x = gx$. Logo $y \in fe(Sx)$. Para mostrar que $y \in D$, mostraremos que $D' := D \cup y$ satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 2.1, e como D é um conjunto de controle concluiremos, pela maximalidade, que $D' = D$. Em primeiro lugar, $\text{int}(D') \neq \emptyset$, pois $\text{int}(D) \neq \emptyset$. Para provarmos que D' satisfaz a condição (ii) da definição 2.1 devemos mostrar as seguintes afirmações:

- a) $D \subset fe(Sz)$, $\forall z \in D$. O que é claro, já que D é um conjunto de controle.
- b) $z \in fe(Sy)$, $\forall z \in D$. De fato, temos por definição que $z \in fe(Sx)$. Agora sabemos que existe $h \in \text{int}(S)$ com $y = h^{-1}x$, assim $x = hy \in Sy \subset fe(Sy)$. Segue do Lema 2.2 que $z \in fe(Sy)$.
- c) $y \in fe(Sz)$, $\forall z \in D$. De fato, temos que $y = gx$ para algum $g \in \text{int}S$. Desta forma, $y \in Sx \subset fe(Sx)$. Temos ainda que $x \in fe(Sx)$ para qualquer $z \in D$, logo $fe(Sx) \subset fe(Sz)$, $\forall z \in D$. Portanto $y \in fe(Sz)$, $\forall z \in D$.
- d) $y \in fe(Sy)$. Da igualdade $y = gx = h^{-1}x$ temos que $x = hy$ e, consequen-

temente, $y = ghy$. Portanto, $y \in Sy \subset fe(Sy)$. Concluimos então que $D' \subset fe(Sx) \forall x \in D'$. Portanto D' satisfaz as duas primeiras condições de conjuntos de controle. Pela maximalidade de D como conjunto de controle temos que $D' = D$, ou seja, $y \in D$. Já que $y = ghy$, com $g, h \in int(S)$, temos que $y \in (int(S))y$, ie, $y \in D_0$. Para a inclusão oposta, dados $x, y \in D_0$ temos, pelo item (ii), que $y \in (int(S))^{-1}x$ e $x \in (int(S))^{-1}y$. Portanto $y \in (int(S))x \cap (int(S))^{-1}x$.

(iv) Pelo item anterior temos que $D_0 = (int(S))y \cap (int(S))^{-1}y, \forall y \in D_0$. Assim, se $x, y \in D_0$ temos que $x = hy$, para algum $h \in int(S)$.

(v) Tomemos $x \in D_0$. Pelo item (iii) temos que $D_0 = (int(S))x \cap (int(S))^{-1}x$. Já que $(int(S))x$ e $(int(S))^{-1}x$ são abertos, temos $fe(D_0) \supset (fe((int(S))x)) \cap (int(S))^{-1}x$. Pelo item (ii), $D \subset (int(S))^{-1}x$. Além disso, $D \subset fe(Sx) \subset fe(int(S(x)))$, pois $Sx \subset S(int(S))x \subset (int(S))x$. Logo, $D \subset fe((int(S))x)$. Portanto, $D \subset fe(D_0)$ e D_0 é denso em D .

(vi) Tomemos $h \in S$ e $x \in D_0$. Então existe $g \in int(S)$ com $gx = x$. Logo, $hx = hgx$ e, conseqüentemente, $hx \in (int(S))x$. Temos por hipótese que $hx \in D$. Pelo item (ii) $D \subset (int(S))^{-1}x$, assim $hx \in (int(S))^{-1}x$. Portanto, $hx \in (int(S))^{-1}x \cap (int(S))x$, o que pelo item (iii) implica que $hx \in D_0$.

■

Proposição 2.8. *Se D um conjunto de controle para ação do semigrupo S e D_0 seu conjunto de transitividade temos que, se $SD \subset D$ ou se $S^{-1}D \subset D$, então $D_0 \neq \emptyset$. No segundo caso, $D_0 = D$.*

Demonstração: Suponha $SD \subset D$. Então $(intS)D \subset D$ e conseqüentemente $(intS)D \cap D \neq \emptyset$. Pelo item (i) da proposição anterior, $D_0 \neq \emptyset$. Suponha agora que $S^{-1}D \subset D$ e tomemos $x \in D$. Temos então que $(intS)^{-1}x$ é aberto e está contido em D , assim $Sx \cap (intS)^{-1}x \neq \emptyset$. Logo, existem $g \in S, h \in intS$ com $gx = h^{-1}x$,

ou seja, $hgx = x$. Portanto, $x \in (intS)x$. Como $x \in D$ temos, por definição, que $x \in D_0$. ■

Quando o conjunto de transitividade D_0 de um conjunto de controle D é não vazio dizemos que D é um *conjunto de controle efetivo*.

2.2 Conjuntos de controle invariantes

Sendo $D_1, D_2 \in \xi$, dizemos que $D_1 \leq D_2$ se existir $x \in D_1$ tal que $fe(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$.

Note que $fe(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow D_2 \subset fe(Sx)$.

Proposição 2.9. *Se $D_1, D_2 \in \xi$ e $D_1 \leq D_2$ então $D_2 \cap fe(Sx) \neq \emptyset$ para todo $x \in D_1 \Rightarrow D_2 \subset fe(Sx), \forall x \in D_1$.*

Demonstração: Temos que $D_1 \leq D_2$, então existe $x_0 \in D_1$ tal que $fe(Sx_0) \cap D_2 \neq \emptyset$. Seja $y \in fe(Sx_0) \cap D_2$ e tomemos $x \in D_1$ qualquer. Assim, pelo item (ii) da definição 2.1, segue que $x_0 \in fe(Sx)$ e pelo lema 2.2 concluímos que $y \in fe(Sx)$ e portanto $fe(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$. ■

A relação “ \leq ” é uma relação de ordem parcial, ou seja, satisfaz as propriedades: reflexiva, transitiva e antisimétrica.

Dizemos que um conjunto de controle D é maximal se satisfaz a propriedade que: se $C \in \xi$ e $D \leq C$ então $C = D$.

Proposição 2.10. *Suponhamos que a variedade M seja compacta e que $C \in \xi$ seja um conjunto de controle maximal com relação a ordem “ \leq ” introduzida anteriormente. Então C satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) *para todo $x \in C$, tem-se que $fe(Sx) = fe(C)$;*
- ii) *C é maximal com a propriedade (i).*

Definição 2.11. Dizemos que $C \subset M$ é um conjunto de controle invariante para S se satisfaz:

- i) $fe(Sx) = fe(C), \forall x \in C$;
- ii) C é maximal com a propriedade (i).

Proposição 2.12. Se S é acessível, então todo conjunto de controle invariante para S é fechado. Além disso se C é um desses conjuntos então $int(C) \neq \emptyset$.

Demonstração: Consideremos C um c.c.i e $x \in fe(C)$. Tomando $y \in C$ temos que $fe(Sy) = fe(C)$, ou seja, $x \in fe(Sy)$. Como já foi visto que o fecho da órbita é invariante pela ação de S , segue que $Sx \subset fe(Sy) = fe(C)$. Ainda, como $int(Sx) \neq \emptyset$ temos que Sx não pode estar contida na fronteira de C , o que significa que $Sx \cap C \neq \emptyset$. Sendo assim, seja $w \in Sx \cap C$. Temos que

$$fe(C) = fe(Sw) \subset fe(Sx) \subset fe(C)$$

donde segue que $fe(Sx) = fe(C) = fe(feC), \forall x \in fe(C)$. Logo, $fe(C)$ é um c.c.i que contém C , e pela maximalidade dos conjuntos de controle, temos que $C = fe(C)$, ou seja, C é fechado. Note ainda que

$$Sx \subset fe(Sx) \subset fe(C) = C, \text{ i.é, } Sx \subset C$$

e como $int(Sx) \neq \emptyset$ temos que $int(C) \neq \emptyset$. ■

Proposição 2.13. Se S é acessível, então todo conjunto de controle invariante para a ação de S é um conjunto de controle para S .

Demonstração: considere C um c.c.i. para a ação de S . Sabendo pela proposição anterior que $int(C) \neq \emptyset$ e também que C é fechado. Sendo assim $C \subset fe(Sx)$, para todo $x \in C$. Agora vamos mostrar a maximalidade de C como conjunto de controle. Suponhamos que exista D contendo C tal que $D \subset fe(Sx)$, para todo $x \in C$. Deste modo, $fe(Sz) = fe(C) \subset fe(D)$ para todo $z \in C$, e portanto,

$fe(D) = fe(Sz)$, para todo $z \in C$ (já que $fe(D) \subset fe(Sz) \subset fe(D)$). Resta mostrar que $fe(Sz) \subset fe(D)$, para todo $x \in D$. Para isto, tomemos $y \in fe(Sx)$, e $z \in C$. Como $x \in D \subset fe(Sz)$, para todo $x \in D$ temos que $fe(D) = fe(Sx)$. Segue da maximalidade de C como conjunto de controle invariante que C é um conjunto de controle. ■

Proposição 2.14. *Sendo S um semigrupo acessível, se D é um conjunto de controle invariante, então D é maximal com relação a ordem “ \leq ”.*

Demonstração: Com efeito, consideremos D' um conjunto de controle tal que $D \leq D'$. Assim existe $x \in D$ tal que $fe(Sx) \cap D' \neq \emptyset$. Como D é um conjunto de controle invariante, temos que $D = fe(Sx)$ o que implica que $D \cap D' \neq \emptyset$. Mas como dois conjuntos de controle ou são disjuntos ou coincidem, segue que $D = D'$.

■

Proposição 2.15. *Suponha que $M = G/L$ seja um espaço homogêneo compacto e seja S um semigrupo de G com interior não vazio. Sejam C um c.c.i. para a ação de S sobre M e $C_0 = (intS)C$. Então são válidas as afirmações:*

- (i) $C_0 = int(Sx)$, $\forall x \in C_0$;
- (ii) $SC_0 \subset C_0 = Sy = (intS)y$, $\forall y \in C_0$;
- (iii) $fe(C_0) = C$;
- (iv) $C_0 = \{x \in C : \exists g \in S \text{ com } gx = x\}$;
- (v) $C_0 = \{x \in C : \exists g \in intS \text{ com } g^{-1}x \in C\}$.

Para conjuntos fechados, a propriedade (ii) da definição 2.11 é automaticamente satisfeita.

Proposição 2.16. *Se $C \subset M$ é não vazio, satisfaz a condição (i) da definição 2.11 e é fechado então C é um conjunto de controle invariante para S .*

Demonstração: É necessário apenas mostrar a maximalidade de C . Para isto, suponhamos que $C \subset C'$, onde C' é um certo conjunto que satisfaz a condição (i) da definição 2.11. Tomando $x \in C$ temos que $x \in C'$, e assim

$$C \subset C' \subset fe(Sx) = fe(C) = C$$

Portanto temos $C = C'$. ■

Proposição 2.17. *Se $C = \bigcap_{b \in M} fe(Sb) \neq \emptyset$, então C é um conjunto de controle invariante para a ação de S e é único.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que C é um conjunto de controle invariante. Para isto, notemos inicialmente que como C é a intersecção de fechados, C é fechado. Assim, pela Proposição 2.16, para mostrarmos que C é um conjunto de controle invariante precisamos mostrar apenas que $fe(Sy) = C$ para todo $y \in C$. Sendo assim, seja $y \in C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx)$. É claro que, em particular vale que $y \in fe(Sx)$ para todo $x \in C$. Para a inclusão oposta, seja $y \in fe(Sw)$ para algum $w \in C$. Como $w \in Sx$ para todo $x \in M$ segue que $fe(Sw) \subset fe(Sx)$ para todo $x \in M$ o que implica que $y \in fe(Sx)$ para todo $x \in M$. Portanto $y \in C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx)$. Para mostramos a unicidade consideremos C_1 e C_2 conjuntos de controle invariante para a ação de S . Neste caso, $\forall x \in C_1$ temos que $\overline{Sx} = \overline{C_1}$ e $\forall y \in C_2$ temos que $\overline{Sy} = \overline{C_2}$. Pela hipótese temos que $\overline{Sx} \cap \overline{Sy} \neq \emptyset$ e daí $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$. Como $int(S) \neq \emptyset$ então C_1 e C_2 são fechados e daí, pela Proposição 2.3 $C_1 = C_2$. ■

Proposição 2.18. *Suponha que $C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx) \neq \emptyset$ seja o único conjunto de controle invariante para a ação de S e que exista um único conjunto de controle invariante para S^{-1} , digamos, C^- , tal que $int(C) \cap int(C^-) \neq \emptyset$. Então S age transitivamente em M .*

Demonstração: Pela Proposição 2.12 C é fechado. Assim $SC \subset C$, o que implica que $C_0 \neq \emptyset$ pelo item (vii) da Proposição 2.7. Pelo item (iii) da mesma proposição,

temos que se $x \in C_0$ então $x \in (\text{int}(S))^{-1}x$ e como $x \in C$ temos que $x \in \text{fe}(Sy)$ para todo $y \in M$ (pela definição de C). Desta maneira, $x \in (\text{int}(S))^{-1} \cap \text{fe}(Sy)$. Logo existe uma sequência $(a_n y)$ em Sy que converge para x e está em $(\text{int}(S))^{-1}x$. Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $a_n y \in (\text{int}(S))^{-1}x$. Deste modo, $a_n y = g^{-1}x$ para algum $g \in (\text{int}(S))^{-1}$, ou seja, $ga_n y = x$. Isto significa que se $x \in C_0$ e $y \in M$ então $x \in Sy$. Conseqüentemente, para todo $y \in M$ existe $s \in S$ tal que $sy = x$. Assim, $s^{-1}x = y$ para todo $y \in M$ o que mostra que $S^{-1}x = M$. Pela Proposição 2.7 C_0 é denso em C . Logo $(\text{int}(C^-)) \cap C_0 \neq \emptyset$. Seja $x \in (\text{int}(C^-)) \cap C_0$, então como $x \in C_0$ temos que $S^{-1}x = M$ e, do fato que $S^{-1}x \subset C^-$, pois C^- é S^{-1} -invariante, temos que $M = S^{-1}x \subset C^-$, logo $C^- = M$. Como $SC^- \subset M = C^-$ temos, pelo item (vii) da Proposição 2.3 que $C_0^- = C^-$. Logo $C_0^- = M$. Assim, $S^{-1}x = M$ para todo $x \in M$, ou seja, dados $x, y \in M$ quaisquer existe $g \in S$ tal que $g^{-1}x = y$ ou, equivalentemente, $gy = x$. Portanto, S age transitivamente em M . ■

Proposição 2.19. *Se $N \subset M$ é um subconjunto compacto e invariante sob a ação de S então, para todo $x \in N$, $\text{fe}(Sx)$ contém um conjunto de controle invariante fechado.*

Demonstração: Para provarmos a existência do conjunto de controle invariante usaremos o Lema de Zorn. Tome $x \in N$ fixo e considere a família de conjuntos:

$$\mathcal{O}_x = \{\text{fe}(Sy) : \text{fe}(Sy) \subset \text{fe}(Sx), y \in M\}$$

Esta família é claramente não vazia já quem contém $\text{fe}(Sx)$. Consideremos em \mathcal{O}_x e relação de ordem dada pela inclusão de conjuntos e tomemos uma cadeia $\{\text{fe}(Sy)\}_{y \in I}$ com índices I . Temos que $Sx \subset N$, pois N é invariante e $\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}(N) = N$. Assim, a cadeia tomada forma uma sequência de subconjuntos compactos encaixados, logo

$$\bigcap_{y \in I} \text{fe}(Sy) \neq \emptyset$$

Sendo assim, tomando $z \in \bigcap_{y \in I} fe(Sy)$, temos que $fe(Sz) \in \mathcal{O}_x$ e $fe(Sz) \subset fe(Sy)$ para todo $y \in I$. Logo $fe(Sz)$ é um limitante inferior da cadeia e, pelo lema de Zorn temos que \mathcal{O}_x possui um elemento minimal $C = fe(Sw)$, para algum $w \in M$. Tomando $z \in fe(Sw) = C$ e $b \in fe(Sz)$ temos que $b \in fe(Sw) = C$, ou seja, $fe(Sz) \subset C$. Como $fe(Sz) \in \mathcal{O}_x$ e C é minimal em \mathcal{O}_x devemos ter $fe(Sz) \subset C = fe(C)$. Portanto C é um conjunto de controle invariante. ■

Corolário 2.20. *Se M for compacta então existe pelo menos um conjunto de controle invariante C .*

Como as variedade flag maximal G/P é uma variedade compacta, ela admite um conjunto de controle para a ação de um semigrupo de interior não-vazio qualquer.

Para finalizar esta seção apresentamos a proposição que nos permite relacionar o conjunto de controle invariante na variedade flag maximal G/P com os conjuntos de controle invariantes nas outras variedades flag.

Sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados do grupo de lie G e π a fibração equivariante canônica $\pi : G/L_1 \rightarrow G/L_2$ dada por $\pi(gL_1) = gL_2$.

Proposição 2.21. *Seja $\pi : G/L_1 \rightarrow G/L_2$ a fibração equivariante canônica com G/L_1 compacta. Nestas condições temos*

- (i) *Se $C_1 \subset G/L_1$ é um conjunto de controle invariante para S , então $C_2 = \pi(C_1)$ é um conjunto de controle para S em G/L_2 .*
- (ii) *Se $C_2 \subset G/L_2$ é um conjunto de controle invariante, existe um conjunto de controle invariante $C_1 \subset G/L_1$ tal que $\pi(C_1) = C_2$.*
- (iii) *Com C_1 e C_2 como em (i), suponha que para algum $y \in C_2$ tenhamos $\pi^{-1}(y) \subset C_1$, então $C_1 = \pi^{-1}(C_2)$.*

Demonstração:

(i) Como G/L_1 é compacto, π é uma aplicação fechada. Para $x \in C_1$ temos que

$$\text{fe}(S\pi(x)) = \text{fe}(\pi(Sx)) = \pi(\text{fe}(Sx)) = \pi(C_1)$$

Já que $\pi(C_1)$ é fechado e cumpre a condição (i) da definição 2.1, temos que $\pi(C_1)$ é um conjunto de controle invariante.

(ii) Dados $x \in \pi^{-1}(C_2)$ e $g \in S$ temos que $\pi(gx) = g\pi(x) \in C_2$, pois C_2 é S -invariante. Além disso, $\pi^{-1}(C_2)$ é compacto, pois é o fechado do espaço compacto G/L_1 . Logo, pela proposição 2.19 ele contém um conjunto de controle invariante fechado C_1 . Seja $x \in C_1$, temos assim que $\pi(C_1) = \pi(\text{fe}(Sx)) = \text{fe}(S\pi(x)) = C_2$.

(iii) Seja y conforme estabelecido e tomemos $z \in (C_2)_0$. Pelo item (ii) da proposição 2.7 existe $g \in \text{int}S$ tal que $g^{-1}z = y$. Assim $z = gy$, e $\pi^{-1}\{z\} = g\pi^{-1}\{y\}$. De fato, $x \in \pi^{-1}\{z\} \Leftrightarrow \pi(x) = z = gy \Leftrightarrow x \in g\pi^{-1}\{y\}$. Por hipótese, $\pi^{-1}\{y\} \subset C_1$ e, como C_1 é invariante, $\pi^{-1}\{z\} \subset C_1$. Assim, $\pi^{-1}((C_2)_0) \subset C_1$. Uma vez que $(C_2)_0$ é denso em C_2 e C_1 é fechado, temos a igualdade $\pi^{-1}(C_2) = C_1$.

■

Considere agora fibração canônica da “flag” maximal G/P na variedade flag G/P_Θ , como na flag maximal temos um único conjunto de controle invariante para a ação de S (teorema 3.1 de [7]), temos pelo item (ii) da proposição acima que na variedade G/P_Θ também temos um único conjunto de controle invariante para a ação de S .

Para finalizar esta seção apresentaremos um exemplo:

Exemplo 2.22. Seja $G = Sl(3, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ o subconjunto das matrizes em G com entradas não negativas. S é um semigrupo de interior não vazio em G . Consideremos a ação natural de $Sl(3, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}P^2$. O conjunto

$$C = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{R}P^2 : x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

é um conjunto de controle invariante para a ação de S sobre $\mathbb{R}P^2$. De fato, sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ elementos de \mathbb{R}^3 . Se $[x], [y] \in \text{int}C$ então $x_i, y_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$. Logo

$$g = \frac{x_1 x_2 x_3}{y_1 y_2 y_3} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_3}{x_3} \end{pmatrix} \in S$$

e

$$g[x] = \left[\frac{x_1 x_2 x_3}{y_1 y_2 y_3} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_3}{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] = \left[\frac{x_1 x_2 x_3}{y_1 y_2 y_3} y \right] = [y].$$

Isto mostra que $[y] \in S[x]$ e portanto $\text{int}C \subset S[x]$ para todo $[x] \in \text{int}C$. Agora, se tomarmos $[x]$ não pertencente ao interior de C , devemos ter que $[x] = [(x_1, x_2, x_3)]$, com ao menos um coordenada nula (mas não todas). Tomando g com todas as entradas positivas temos que

$$\left[\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] = [(ax_1 + bx_2 + cx_3, dx_1 + ex_2 + fx_3, gx_1 + hx_2 + ix_3)]$$

pertence ao interior de C pois as três coordenadas são não nulas. Portanto, dado $[x] \in C$ qualquer, existe $g \in S$ tal que $g[x] \in \text{int}C$. Reciprocamente, se tomarmos $g \in S$ e $[x] \in C$ temos que $g[x] \in C$, pois estamos tomando todas as entradas de g e as coordenadas de x não negativas. Assim, $S[x] \subset C$ para todo $[x] \in C$ e, conseqüentemente, $\text{fe}(S[x]) \subset \text{fe}C$. Portanto temos que $\text{fe}(S[x]) \subset \text{fe}C$ para todo $x \in C$. Já que C é fechado, pela proposição 2.16 temos que C é um conjunto de controle invariante.

Capítulo 3

Conjuntos de controle em variedades Flag

Neste capítulo estudaremos ações de semigrupos em variedades Flag. Assumiremos as seguintes hipóteses ao longo de todo o capítulo: G é um grupo de Lie conexo, semi-simples e com centro finito. Analisaremos a ação de um semigrupo $S \subset G$, de interior não vazio, nas variedades “Flag” G/P_Θ , onde P_Θ é um subgrupo parabólico de G . Mostraremos que sobre a variedade flag G/P_Θ existe somente um conjunto de controle invariante para a ação de S e caracterizaremos os conjuntos de controle existentes sobre as variedades “Flag” maximais, isto é, as variedades G/P com P um subgrupo parabólico minimal de G . Na última seção apresentamos o subgrupo $W(S)$ do grupo de Weyl que é fundamental em nosso trabalho, pois o tipo parabólico de um semigrupo é definido a partir de $W(S)$.

3.1 Unicidade do conjunto de controle invariante sobre G/P

Sejam G um grupo de Lie semi-simples com centro finito, P um subgrupo parabólico de G e $S \subset G$ um semigrupo de interior não vazio. Como a variedade “Flag” $\mathbb{B} = G/P$ é compacta, temos pelo corolário 2.20 que a variedade \mathbb{B} contém pelo menos um conjunto de controle invariante para S . Nesta seção mostraremos que

\mathbb{B} admite exatamente um tal conjunto. Para mostrarmos isto, é suficiente mostrar que existe $b_0 \in \mathbb{B}$ tal que $b_0 \in fe(Sx)$ para todo $b \in \mathbb{B}$, de onde concluímos que o conjunto de controle invariante é único pela proposição 2.18.

Para mostrar a existência de um tal b_0 precisaremos do seguinte lema, o qual diz essencialmente que existe uma decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$ com $A \cap intS \neq \emptyset$.

Lema 3.1. *Mediante as hipóteses acima estabelecidas existe uma decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ da álgebra de Lie \mathfrak{g} de G e existe $H \in \mathfrak{a}$ tal que $h = \exp H$ pertence ao interior de S . Além disso, H pode ser escolhido como sendo um elemento \mathfrak{a} -regular, no sentido que $\lambda(H) \neq 0$ para toda raiz λ do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.*

Demonstração: Como G/P é uma variedade compacta, existe um conjunto de controle invariante para a ação de S , o qual é efetivo pela proposição 2.8, pois $SC \subset C$. Tomemos $x \in C_0$. Então, existe $g \in intS$ com $gx = x$. Se P é a isotropia em x , então $x \in P$. Seja $P = M_1A_1N_1^+$ uma decomposição de Iwasawa de P e consideremos o conjunto

$$\sigma = \{u \in M : \exists g \in intS \text{ com } g = mhn \text{ para algum } h \in A_1 \text{ e } n \in N_1^+\}$$

Como $P \cap intS \neq \emptyset$, então existe algum $mhn = g \in intS$, ou seja, σ é não vazio. Fixando $H \in A_1$ e $n \in N_1^+$ definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \eta_{h,n} : M_1 &\rightarrow P \\ m &\rightarrow mhn. \end{aligned}$$

Então $\sigma = \bigcup_{h \in A_1, n \in N_1^+} \eta_{h,n}^{-1}\{P \cap intS\}$, logo σ é aberto. Provemos que σ é semigrupo. Se m_1 e m_2 pertencem a σ então existem $g_1, g_2 \in intS$ com $g_1 = m_1h_1n_1$ e $g_2 = m_2h_2n_2$. Assim, $g_1g_2 = g_1 = m_1h_1n_1m_2h_2n_2 = m_1m_2\bar{h}\bar{n}$, logo m_1m_2 pertence a σ . Pelas considerações acima σ é um semigrupo de interior não vazio no subgrupo compacto M_1 , logo 1 pertence a σ . Assim existe $g \in intS$ com $g = hn$, para

algum $h \in A_1$ e $n \in N_1^+$. Tomemos agora $n_0 \in N^+$ tal que $n_0 h n n_0^{-1} = h$. Um tal n_0 sempre existe pois, dado um elemento regular $h \in A_1$, a aplicação $\psi : N_1^+ \rightarrow N_1^+$ definida por $\psi(n) = h^{-1} n h n^{-1}$ é um difeomorfismo ([2], teorema 1.1.4). Assim, dado n_0 tal que $\psi(n_0) = n$, temos que $h^{-1} n_0 h n_0^{-1} = n$, e somente se $h = n_0^{-1} h n n_0$, conforme desejado. Tomemos um tal n_0 e consideremos $M = n_0^{-1} M_1 n_0$, $A = n_0^{-1} A_1 n_0$ e $N^+ = n_0^{-1} N_1^+ n_0 = N^+$. Como tomamos $n_0 \in N_1^+ \subset P$ temos que $n_0^{-1} P n_0 = P$. Agora, $g = h n = n_0^{-1} (n_0 h n n_0^{-1}) n_0 = n_0^{-1} h n n_0$, logo $g \in A$ e, com esta decomposição, temos de fato que $A \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Como o conjunto dos elementos regulares é denso em A , segue-se o resultado.

■

A demonstração deste lema possui dois corolários que serão bastante úteis posteriormente.

Corolário 3.2. *Se b pertence a C_0 então existe uma decomposição $P = M_0 A_0 N_0^+$ de seu subgrupo de isotropia tal que $A_0 \cap \text{int}S \neq \emptyset$*

Corolário 3.3. *Suponha que $g = h n$, com $h \in A^+$ e $n \in N^+$. Então existe uma decomposição $P = M_0 A_0 N_0^+$ tal que g pertence a A_0^+ , a câmara positiva implícita nesta decomposição.*

Demonstração: Basta tomar, como na demonstração do lema, um n_0 tal que $n_0 h n n_0^{-1} = h$ e a decomposição dado no lema. ■

Para demonstrarmos o principal teorema desta seção precisaremos ainda do seguinte lema, que é consequência imediata da construção dos subgrupos envolvidos.

Lema 3.4. *Sejam G um grupo de Lie semi-simples, $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio e $G = K A N^+$ uma decomposição global de Iwasawa de G tal que $A \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Então, para todo $n \in N^-$ e todo elemento regular $h \in A$ temos que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h^k n h^{-k} = 1.$$

Agora é possível demonstrar a unicidade do conjunto de controle invariante sobre G/P .

Teorema 3.5. *Se o semigrupo $S \subset G$ possui interior não vazio, então S tem um único conjunto de controle invariante sobre G/P .*

Demonstração: Se P' é um subgrupo parabólico de G então, por definição, P' contém algum subgrupo parabólico minimal. Agora, se $\pi : G/P \rightarrow G/P'$ é a fibração canônica e G/P' contém algum conjunto de controle invariante, digamos C_1 , então pelo item (ii) da proposição 2.21, $\pi^{-1}(C_1)$ deverá conter algum conjunto de controle invariante sobre G/P . Portanto, se mostrarmos que existe um único conjunto de controle invariante de S sobre G/P digamos C , então qualquer conjunto de controle invariante C' sobre G/P' satisfaz $\pi(C) \subset C'$ e, já que pela proposição 3.1.5 conjuntos de controle coincidem ou são disjuntos, temos que C' é único. Suponhamos então que P seja um subgrupo parabólico minimal. Seja $G = KAN^+$ a correspondente decomposição global de Iwasawa mencionada no lema 3.1 e $P_0 = MAN^+$ o subgrupo parabólico minimal associado, o qual identificamos com a classe lateral b_0 .

Tomemos um elemento regular $h \in A \cap \text{int}S$. Se n pertence a N^- então, pelo lema 3.4, temos que $h^k n h^{-k} \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow \infty$. Pela decomposição de Bruhat, $N^- b_0$ é aberto e denso em \mathbb{B} . Conseqüentemente, para qualquer $b' \in \mathbb{B}$, existe $g \in \text{int}S$ com $gb' \in N^- b_0$. Agora, se $b = nMAN^+$ pertence a $N^- b_0$, com $n \in N^-$, então $h^k(b) = h^k n h^{-k} MAN^+$, assim $h^k(b) \rightarrow b_0$ quando $k \rightarrow \infty$, ou seja, dado um b' qualquer em \mathbb{B} temos que $h^k g b' \rightarrow b_0$. Observe que tomamos h e $g \in \text{int}S$, assim $h^k g \in \text{int}S$, o que implica que b_0 pertence ao fecho de Sb' para todo $b' \in \mathbb{B}$. Portanto o resultado segue da proposição 2.18. ■

Da demonstração deste teorema segue-se imediatamente o seguinte corolário, que será bastante utilizado no decorrer deste trabalho.

Corolário 3.6. *Seja $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de G , $P = MAN^+$*

o subgrupo parabólico minimal associado e D o único conjunto de controle invariante sobre G/P . Se $A \cap \text{int}S \neq \emptyset$ então $b = P$ pertence a C .

Demonstração: Basta tomar $h \in A \cap \text{int}S$ e prosseguir como no último parágrafo da demonstração do teorema anterior. ■

Observação 3.7. Na demonstração do teorema 3.5 a única propriedade de b_0 utilizada foi que $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k n h^{-k} b_0 = b_0$ para todo $n \in N^-$ algum elemento regular $h \in \text{int}S$, ou seja, que b_0 é um atrator de \mathbb{B} para elementos regulares no interior do semigrupo. Concluimos então que os atratores de \mathbb{B} para este tipo de elemento pertencem ao conjunto de controle invariante. Vale mais ainda, como tomamos $h \in \text{int}S \cap A$, temos $h b_0 = b_0$, ou seja, $b_0 \in C_0$. Logo, estes atratores de \mathbb{B} estão no conjunto de transitividade C_0 . Veremos posteriormente que vale a inclusão oposta: se b pertence a C_0 , então b é um atrator de \mathbb{B} para elementos regulares no interior de S .

3.2 Caracterização do conjunto de controle invariante sobre variedades Flag maximais

Sejam G um grupo de Lie semi-simples, conexo e com centro finito agindo sobre a variedade “Flag” $\mathbb{B} = G/P$, onde P é um subgrupo parabólico de G e $S \subset G$ um semigrupo com pontos interiores. Mostramos no ítem (v) da proposição 2.7 que se o conjunto de transitividade C_0 de um conjunto de controle C é não vazio, então C_0 é denso em C . Nesta seção demonstraremos alguns resultados que ajudam a caracterizar C_0 e, conseqüentemente, C . No caso do conjunto de controle invariante veremos que C é essencialmente determinado por certos elementos em $\text{int}S$ que são atratores de um subconjunto aberto e denso de \mathbb{B} .

Começamos introduzindo o seguinte conjunto das câmaras que interceptam o interior do semigrupo.

$$\Sigma = \{\alpha^+ \in G/MA : \alpha^+ \cap \text{int}S \neq \emptyset\}$$

Na seção 1.11 identificamos G/MA com o conjunto das câmaras de Weyl. Assim, Σ é constituído pelas câmaras de Weyl em G que interceptam o interior de S . Vendo Σ como conjunto de pontos de G , ele contém os pontos de $\text{int}S$ que pertencem a alguma câmara. Seja $h \in \text{int}S$ tal que h pertence a alguma câmara α^+ . Para alguma decomposição de Iwasawa de G , α^+ é uma câmara positiva. Conforme foi observado na seção 1.15, h possui o conjunto $\{\tilde{w}b_0 : \tilde{w} \in M^*\}$ como seu conjunto de pontos fixos. Em particular, um desses pontos atrai um subconjunto aberto e denso de \mathbb{B} .

Em resumo, Σ aponta para aqueles elementos em $\text{int}S$ cuja ação sobre \mathbb{B} tem um ponto fixo que atrai um subconjunto aberto e denso.

O lema 3.1 implica que Σ é não vazio. Na verdade, os próximos resultados irão mostrar que Σ é suficientemente grande para caracterizar o conjunto de controle. Antes porém, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Suponhamos que $\text{int}S \cap A \neq \emptyset$, o que é sempre possível pelo lema 3.1, e definamos,

$$\Lambda = \{H \in \mathfrak{a} : \exp tH \in \text{int}S \text{ para algum } t > 0\}$$

Provaremos posteriormente que Λ é um cone convexo em \mathfrak{a} . Para isto precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.8. *Se $H \in \Lambda$ então existe $T > 0$ tal que $\exp tH \in \text{int}S$ para todo $t > T$.*

Demonstração: Tomemos $H \in \Lambda$. Então existe $t > 0$ tal que $\exp tH \in \text{int}S$. Agora, $\exp tH = \exp_H t$ e, como \exp_H é uma aplicação contínua de \mathbb{R} em A , existe um intervalo aberto (a, b) , com $a > 0$ tal que $\exp tH \in \text{int}S$ para $t \in (a, b)$. Como então $\exp ktH = (\exp tH)^k$ então $\exp ktH \in \text{int}S$ para todo inteiro positivo k . Desta forma, para todo inteiro positivo k , se $t \in (ka, kb)$ então $\exp tH \in \text{int}S$. Uma vez que para k suficientemente grande $ka < (k-1)b$, vemos que para um certo número

real $T > 0$ os intervalos (ka, kb) cobrem o intervalo (T, ∞) , ou seja, se $t > T$ então $t \in (ka, kb)$ para algum inteiro positivo k . Logo, se $t > T$ então $\exp tH \in \text{int}S$. ■

Podemos agora provar que Λ é um cone convexo.

Proposição 3.9. Λ é um cone convexo em \mathfrak{a}

Demonstração: Provaremos primeiramente que Λ é um cone.

- i) Para provar que Λ é topologicamente fechado, seja $X \in \text{fe}\Lambda$. Então existe uma sequência (X_n) em Λ tal que $X_n \rightarrow X$. Como $X_n \in \Lambda$ para todo n , temos que existem t_n tais que $\exp(t_n X_n) \in \text{int}S$. Fixando n e tomando $t = \max\{t_{n'} : n' < n\}$, temos que $\exp(tX_n) \in \text{int}S$ para todo $n' < n$. Pela continuidade da aplicação exponencial, temos que $\exp(tX_n) \rightarrow \exp(tX)$. Como $\text{int}S$ é aberto, concluímos que $\exp(tX) \in \text{int}S$, logo $X \in \Lambda$ e, portanto Λ é fechado.
- ii) Seja $H \in \Lambda$ e $r > 0$. Pelo lema anterior existe $T > 0$ tal que $\exp(tH) \in \text{int}S$ para todo $t > T$. Se $s > \frac{T}{r}$ então $sr > T$ e, conseqüentemente, $\exp(s(rH)) \in \text{int}S$. Isto mostra que $rH \in \Lambda$.
- iii) Sejam $X, Y \in \Lambda$. Então existem números reais estritamente positivos T_X e T_Y tais que se $t > \max\{T_X, T_Y\}$ então $\exp(tX)$ e $\exp(tY)$ pertencem a $\text{int}S$. Como A é abeliano, temos que

$$\exp(tX + tY) = \exp(tX) \exp(tY).$$

Desta forma,

$$\exp(t(X + Y)) = \exp(tX + tY) = \exp(tX) \exp(tY) \in \text{int}S,$$

ou seja, existe $t > 0$ tal que $\exp(t(X + Y)) \in \text{int}S$. Portanto, $X + Y \in \Lambda$

Provaremos agora que Λ é convexo. Sejam $H_1, H_2 \in \Lambda$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$. Como A é abeliano, temos que

$$\exp(t_1 H_1 + t_2 H_2) = (\exp(t_1 H_1))(\exp(t_2 H_2)) \in \text{int}S$$

Assim, se $\exp(t_1 H_1), \exp(t_2 H_2) \in \text{int}S$, então $\exp(t_1 H_1 + t_2 H_2) \in \text{int}S$. Temos ainda que

$$\begin{aligned} \exp(t_1 H_1 + t_2 H_2) &= \exp\left(t_1 \frac{t_1+t_2}{t_1+t_2} H_1 + t_2 \frac{t_1+t_2}{t_1+t_2} H_2\right) \\ &= \exp(t_1 + t_2) \left(\frac{t_1}{t_1+t_2} H_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2} H_2\right) \in \text{int}S \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $\frac{t_1}{t_1+t_2} H_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2} H_2 \in \Lambda$ quaisquer que sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$. Fazendo $t \rightarrow \infty$ e mantendo T_2 fixo e vice-versa, vemos que o segmento que une H_1 e H_2 está contido em Λ . Portanto Λ é convexo.

■

Seja \mathfrak{a} a câmara positiva da decomposição $G = KAN^+$. Temos o seguinte resultado.

Proposição 3.10. *Seja C o único conjunto de controle invariante sobre G/P . Se $\Lambda \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$ então $b_0 \in C_0$.*

Demonstração: Se $\Lambda \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$ existe $H \in \mathfrak{a}^+$ com $\exp(tH) \in \text{int}S$ para algum $t > 0$. Desta forma $A^+ \cap \text{int}S \neq \emptyset$ e, pelo corolário 3.6, temos que $b_0 \in C$. Como $h \in (\text{int}S) \cap P$, temos que $hb_0 = b_0$. Portanto b_0 pertence a C_0 .

Definamos agora o conjunto

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{h \in A : \text{existe } n \in N^+ \text{ com } hn \in \text{int}S\} \\ &= \{h \in A : \text{existe } n \in N^+ \text{ com } nh \in \text{int}S\} \end{aligned}$$

A igualdade vem do fato de que $hn = (hnh^{-1})h$ e, como A normaliza N^+ , temos que $hnh^{-1}h = \bar{n}h$, para algum $\bar{n} \in N^+$. ■

Proposição 3.11. *Λ_0 é um semigrupo de interior não vazio em A .*

Demonstração: Se h_1, h_2 pertencem a Λ_0 , então existem $n_1, n_2 \in N^+$ tais que $h_1 n_1, h_2 n_2 \in \text{int}S$. Como A normaliza N^+ então $(h_1 n_1)(h_2 n_2) = h_1 h_2 \bar{n}$ para algum $\bar{n} \in N^+$. Portanto $h_1 h_2 \in \Lambda_0$ e Λ_0 é um semigrupo em A . Como estamos supondo $A \cap \text{int}S \neq \emptyset$ temos que $\Lambda_0 \neq \emptyset$. Para cada $n \in N^+$, definamos

$$\begin{aligned} \eta_n : A &\rightarrow AN^+ \\ h &\mapsto hn. \end{aligned}$$

Então, $\Lambda_0 = \bigcup_{n \in N^+} \eta_n^{-1}\{AN^+ \cap \text{int}S\}$. Logo, Λ_0 é aberto.

■

Proposição 3.12. *Definamos*

$$\tilde{\Lambda} = \{H \in \mathfrak{a} : \exp(tH) \in \Lambda_0 \text{ para algum } t > 0\}$$

Então, $\tilde{\Lambda}$ é um cone convexo em \mathfrak{a} e $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$.

Demonstração: A demonstração de que $\tilde{\Lambda}$ é um cone convexo é idêntica à feita para Λ . Agora, se H pertence a Λ_0 então $\exp(tH) \in \text{int}S$ para algum $t > 0$. Logo $\exp(tH) \cdot 1$ pertence ao interior de S e, com $01 \in N^+$, $\exp(tH)$ pertence a Λ_0 . Portanto H pertence a $\tilde{\Lambda}$.

■

Lema 3.13. *Seja Λ e $\tilde{\Lambda}$ conforme definidos acima e C o único conjunto de controle invariante sobre \mathbb{B} . Suponha que $b_0 \in C_0$ e $\text{int}S \cap A \neq \emptyset$. Assuma também que um dado $w \in W$, o grupo de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, satisfaz $\tilde{w}(b_0) \in C_0$. Então $w^{-1}(\Lambda) \subset \tilde{\Lambda}$*

Demonstração: Denotemos $b_1 = \tilde{w}b_0$ e $N_1^+ = \tilde{w}N^+\tilde{w}^{-1}$. Se P_0 é o subgrupo de isotropia de b_0 então $P_1 = \tilde{w}P_0\tilde{w}^{-1}$ é a isotropia em b_1 . Como $b_0, b_1 \in C_0$ então existem $g_1, g_2 \in \text{int}S$ com $g_1 b_1 = b_0$ e $g_2 b_0 = b_1$. Seja $g_1 = u h_1 n_1$ a decomposição de g_1 com respeito à decomposição $G = KAN_1^+$. Então $g_1 b_1 = (u h_1 n_1) b_1 = u b_1$,

pois $h_1 n_1$ pertence a P_1 , que é a isotropia em b_1 . Mas $ub_1 = g_1 b_1 = b_0 = \tilde{w}^{-1} b_1$. Em termos de classes laterais, a igualdade $ub_1 = \tilde{w}^{-1} b_1$ é equivalente a $uMAN_1^+ = \tilde{w}^{-1}MAN_1^+$ em G/P_1 ou $uM = \tilde{w}^{-1}M$ em K/M . Assim, temos $\tilde{w}u$ pertence a M . Logo $u = \tilde{w}^{-1}m_1$ para algum $m_1 \in M$. Podemos então escrever g_1 como

$$g_1 = \tilde{w}^{-1}m_1 h_1 n_1,$$

com $m_1 \in M, h_1 \in A$ e $n_1 \in N_1^+$. Similarmente, temos

$$g_2 = \tilde{w}^{-1}m'_2 h'_2 n'_2,$$

com $m'_2 \in M, h'_2 \in A$ e $n'_2 \in N^+$. Podemos reescrever esta última igualdade como

$$g_2 = (\tilde{w}m'_2\tilde{w}^{-1})(\tilde{w}h'_2\tilde{w}^{-1})(\tilde{w}n'_2\tilde{w}^{-1})\tilde{w}.$$

Assim g_2 pode ser escrito como

$$g_2 = m_2 h_2 n_2 \tilde{w}$$

para algum $m_2 \in M, h_2 \in A$ e $n_2 \in N_1^+$. Seja $H \in \Lambda$. Existe $T > 0$ tal que, se $t > T$, então $h_t = \exp(tH) \in \text{int}S$. Consequentemente $g_1 h_t g_2$ pertence a $\text{int}S$. Usando repetidamente o fato de que A normaliza N^+ e de que M^* normaliza M , obteremos que

$$\begin{aligned} g_1 h_t g_2 &= \tilde{w}^{-1}m_1 h_1 n_1 h_t m_2 h_2 n_2 \tilde{w} \\ &= \tilde{w}^{-1}m_1 h_1 h_t m_2 h_2 n'_1 n_2 \tilde{w} \\ &= \tilde{w}^{-1}m_1 m_2 h_t h_1 h_2 n'_1 n'_2 \tilde{w} \\ &= \tilde{w}^{-1}\bar{m} h_t h_1 h_2 \bar{n} \tilde{w} \\ &= m_0 \tilde{w}^{-1} h_t h_1 h_2 \tilde{w} \tilde{w}^{-1} \bar{n} \tilde{w} \\ &= m_0 \bar{h}_t n_0 \end{aligned}$$

onde $\bar{h}_t = \tilde{w}^{-1}h_t h_1 h_2 \tilde{w}$ e $n_0 = \tilde{w}^{-1}\bar{n}\tilde{w} \in N^+$.

Fixemos agora $t \in \mathbb{R}$ e definamos

$$\sigma = \{m \in M : m\bar{h}_t^k \in \text{int}S \text{ para algum inteiro positivo } k \text{ e } n \in N^+\}.$$

Temos que σ é não vazio pois, já que $g_1 h_t g_2 = m_0 \bar{h}_t n_0$ pertence a $\text{int}S$, ao menos este m_0 pertence a σ . Também, σ é um semigrupo pois, se $m_1, m_2 \in \sigma$, então existem

inteiros positivos k_1, k_2 e elementos $n_1, n_2 \in N^+$ tais que $m_1 \overline{h_t^{k_1}} n_1$ e $m_2 \overline{h_t^{k_2}} n_2$ pertençam a $intS$. Como $(m_1 \overline{h_t^{k_1}} n_1)(m_2 \overline{h_t^{k_2}} n_2)$ pertence a $intS$ e $(m_1 \overline{h_t^{k_1}} n_1)(m_2 \overline{h_t^{k_2}} n_2) = m_1 m_2 \overline{h_t^{k_1+k_2}} n$, já que A^+ normaliza N^+ , temos que $m_1 m_2$ pertence a σ . Temos ainda que σ é aberto pois fixando k e n e definindo

$$\begin{aligned} \eta_{k,n} : m &\rightarrow MAN^+ \\ m &\mapsto m \overline{h_t^k} \end{aligned}$$

temos que

$$\sigma = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^+, n \in N^+} \{\eta_{k,n}^{-1}(MAN^+ \cup intS)\}.$$

Logo σ é um semigrupo de interior não vazio em M , o qual é compacto. Assim σ contém a componente identidade de M , ou seja, para cada t existe um inteiro k e $n \in N^+$ tal que $\overline{h_t^k} \in intS$. Isto implica que $\overline{H_t} = \log \overline{h_t} n$ pertence a $\tilde{\Lambda}$.

agora, quando $t \rightarrow \infty$ temos que

$$\exp(r(\log h_t h_1 h_2)) = \exp t(r \log(\exp t H h_1 h_2)) \rightarrow \exp t H,$$

ou seja, o raio definido por $\log(h_t h_1 h_2)$ aproxima o raio definido por H . Logo, o raio definido por $\overline{H_t} = \tilde{w}^{-1}(\log h_t h_1 h_2)$ aproxima o raio definido por $\tilde{w}^{-1}(H)$. Portanto, $\tilde{w}^{-1}(H) \in \text{fe} \tilde{\Lambda}$. Mas Λ e $\tilde{\Lambda}$ são abertos, logo $\tilde{w}^{-1}(\Lambda) \subset \tilde{\Lambda}$. ■

Lema 3.14. *Se b pertence a C_0 e P é a isotropia em b então $P \cap intS$ é um semigrupo com interior não vazio em P .*

Demonstração: Como b pertence a c_0 existe $g \in intS$ com $gb = b$. Logo $P \cap intS \neq \emptyset$. Agora, se g e h pertencem a $P \cap intS$ então gh pertence a $P \cap intS$, pois P é grupo e $intS$ é semigrupo. Além disso, $P \cap intS$ é aberto em P . Portanto $P \cap intS$ é um semigrupo com interior não vazio em P . ■

Estamos agora em condições de demonstrar um dos principais resultados desta seção. Este teorema nos permite caracterizar o conjunto de transitividade do conjunto de controle sobre a variedade “Flag” $\mathbb{B} = G/P$ por meio do conjunto Σ definido no início desta seção.

Teorema 3.15. *Seja C o único conjunto de controle invariante para a ação de S sobre \mathbb{B} e seja C_0 o seu conjunto de transitividade. Consideremos a fibração equivariante*

$$\pi : G/MA \rightarrow G/MAN^+.$$

Então $C_0 = \pi(\Sigma)$.

Demonstração: Tomemos $\alpha^+ \in \Sigma$. Como α^+ é uma câmara de Weyl então $\alpha^+ = gA^+g^{-1}$ para algum $g \in G$. Seja $\alpha = gAg^{-1}$ o subgrupo split contendo α^+ e $b = \pi(\alpha^+) = gP$. Queremos provar que b pertence a C_0 . O subgrupo de isotropia de P é dado por

$$P_b = gPg^{-1} = (gMg^{-1})(gAg^{-1})(gN^+g^{-1}) = M_gA_gN_g^+.$$

Como tomamos $\alpha^+ \in \Sigma$, existe $h \in \alpha^+ \cap \text{int}S$. Logo $h \in gA^+g^{-1}$ e, consequentemente, $h \in P_b$. Agora, pelo corolário 3.6, $b \in C$. Além disso, como $h \in \text{int}S \cap P_b$ temos que $hb = b$, com $h \in \text{int}S$. Logo, pela definição de conjunto de transitividade, $b \in C_0$.

Para a inclusão oposta tomemos $b \in C_0$. Pelo corolário 3.2, existe uma decomposição $P = MAN^+$ tal que $a \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Fixemos esta decomposição e seja \mathfrak{a}^+ a câmara positiva. Já que a união das câmaras de Weyl é densa em A , existe uma câmara A^* tal que $A^* \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Assim, $\mathfrak{a}^* \cap \Lambda \neq \emptyset$, onde \mathfrak{a}^* é a câmara de \mathfrak{a} tal que $\exp(\mathfrak{a}^*) = A^*$. Seja w o único elemento do grupo de Weyl W que satisfaz $w(\mathfrak{a}^+) = \mathfrak{a}^*$ e denotemos $N^* = \tilde{w}N^+\tilde{w}^{-1}$ e $P^* = MAN^*$ (as igualdades $\tilde{w}M\tilde{w}^{-1} = M$ e $\tilde{w}A\tilde{w}^{-1}$ seguem do fato de que M^* normaliza M e A). Além disso, $\tilde{w}b = b^*$ onde b^* é o elemento de \mathbb{B} correspondente ao subgrupo parabólico minimal P^* . A câmara \mathfrak{a}^* é positiva para $P^* = MAN^*$ e, como $\mathfrak{a}^* \cap \Lambda \neq \emptyset$, temos pela proposição 3.10 que b^* pertence a C_0 . Segue então da proposição 3.13 que $\tilde{w}^{-1}(\Lambda) \subset \tilde{\Lambda}$. Como $\tilde{w}^{-1}(\mathfrak{a}^*) = \mathfrak{a}^+$ temos que $\mathfrak{a}^+ \cap \tilde{\Lambda} \neq \emptyset$. Assim, existe $H \in \mathfrak{a}^+$ com $(\exp(tH))n \in \text{int}S$, para algum $t > 0$ e $n \in N^+$. Desta forma, determinamos $g \in \text{int}S$ com $g = hn$,

onde $h \in A^+$ e $n \in N^+$. Portanto, o corolário 3.3 implica que existe alguma decomposição $P = M_0 A_0 N_0^+$ com a câmara positiva A_0^+ interceptando o interior de S , ou seja, $b \in \Sigma$. ■

Por este teorema, se $b \in C_0$ então existe $\alpha^+ \in G/MA$ tal que $\alpha^+ \cap \text{int}S \neq \emptyset$ e $\pi(\alpha^+) = b$. Seja então P a isotropia em b e consideremos o espaço homogêneo G/P . Tomando $h \in \alpha^+ \cap \text{int}S$ e $n \in N^-$ temos que $h^k n h^{-k} b \rightarrow b$. Assim, b atrai uma variedade aberta e densa em \mathbb{B} , ou seja, b é um atrator de \mathbb{B} para elementos regulares do interior do semigrupo. Portanto, todo ponto do conjunto de transitividade de C é um atrator. A observação 1 da seção anterior mostra a inclusão contrária.

Podemos então dar a seguinte caracterização para o conjunto de transitividade do conjunto de controle invariante para a ação do semigrupo $S \subset G$ sobre G/P .

Corolário 3.16. *O conjunto de transitividade C_0 do conjunto de controle invariante C é constituído pelos atratores de $\mathbb{B} = G/P$ para elementos regulares no interior do semigrupo.*

Exemplo 3.17. Tomemos $G = \text{SL}(n; \mathbb{R})$ e consideremos a ação natural de G sobre o espaço de todos os “flags” de subespaços de \mathbb{R}^n , conforme fizemos no exemplo 1.15. Ainda de acordo com aquele exemplo temos que o espaço homogêneo G/P , com P subgrupo parabólico minimal é realizado como variedade “Flag” $\mathbb{F}(1, \dots, n)$. O teorema 3.15 nos diz que um “flag” $b = (V_1 \subset \dots \subset V_n) \in C_0$ se, e somente se, existe algum $g \in \text{int}S$ com $gb = b$ e g pertencente a alguma câmara positiva para b . Agora, o subgrupo de isotropia em b , que denotaremos por P_b , se decompõe como $P_b = MAN^+$, onde, com respeito a alguma base contida em b , os elementos de A são matrizes diagonais com entradas positivas. A câmara positiva canônica A^+ é, nesta base, o subconjunto das matrizes diagonais $\{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0) : \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n\}$. Desta forma, para que b pertença a C_0 , deve existir alguma transformação linear g que se escreve como matriz diagonal com $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$. Para que isto ocorra, devemos ter alguma matriz g com todos os autovalores reais e distintos e

ainda satisfazendo $\lambda_1 \in V_1, \dots, \lambda_n \in V_n$.

3.3 Caracterização de conjuntos de controle em variedades Flag maximais

Na seção anterior caracterizamos o conjunto de transitividade dos conjuntos de controle invariantes nas variedades “Flags” G/P como constituídos dos atratores de G/P para elementos regulares no interior do semigrupo. Nesta seção vamos considerar os outros conjuntos de controle.

Como antes, G será um grupo de Lie conexo, semi-simples de centro finito, $S \subset G$ um semigrupo com pontos interiores e consideraremos uma escolha canônica fixa dos elementos que nos permitem falar em decomposição de Iwasawa, grupos de Weyl e conceitos relacionados. Como na seção anterior, seja

$$\Sigma = \{\alpha^+ \in G/MA : \alpha^+ \cap \text{int}S \neq \emptyset\}.$$

Consideraremos a projeção canônica $\pi : G/MA \rightarrow G/MAN^+$. para um elemento w do grupo de Weyl W temos o conjunto

$$\Sigma w = \{g\tilde{w}MA \in G/MA : gMA \in \Sigma\}.$$

O objetivo agora é caracterizar os conjuntos de controle sobre G/P por meio do conjunto $\pi(\Sigma w)$. Para dar esta caracterização vamos precisar dos seguintes lemas. Neles vamos manter um dado w fixo.

Lema 3.18. *Fixemos $b \in C_0$ e definamos*

$$v(b, w) = \pi\{\alpha w \in G/MA : \alpha \in \pi^{-1}\{b\} \cap \Sigma\}.$$

$$\text{Então } \pi(\Sigma w) = \bigcup_{b \in C_0} v(b, w)$$

Consideremos $b_1, b_2 \in C_0$ e os grupos de isotropia P_1, P_2 de b_1 e b_2 , respectivamente. Denotemos $\text{int}P_i$ por S_i , $i = 1, 2$. Pelo lema 4.2.7, S_1 e S_2 são semigrupos

com interior não vazio em P_1 e P_2 , respectivamente. Mantendo esta notação temos os seguintes lemas.

Lema 3.19. *Para cada $b \in C_0$, $v(b, w)$ está contido em um conjunto de controle, digamos $D(b, w)$*

Demonstração: Tomemos $b \in C_0$ e assumamos, sem perda de generalidade, que $b = b_0 = MAN^+$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi^{-1}\{b_0\} \cap \Sigma$. Consideremos $b_1 = \pi(\alpha_1 w)$ e $b_2 = \pi(\alpha_2 w)$. Notemos que b_1 e b_2 pertencem a $v(b, w)$. Precisamos mostrar que b_1 e b_2 estão no mesmo conjunto de controle para S . Uma vez que $\pi(\alpha_1) = \pi(\alpha_2) = MAN^+$, temos que α_1 e α_2 são câmaras positivas para MAN^+ . Conforme vimos no final da seção 1.11, N^+ age transitivamente sobre $\pi^{-1}\{b_0\}$. Desta forma, existe $n_0 \in N^+$ tal que $\alpha_2 = n_0 \alpha_1$. devido a equivariancia da ação com respeito a π temos:

$$b_2 = \pi(\alpha_2 w) = \pi(n_0 \alpha_1 w) = m_0 \pi(\alpha_1 w) = n_0 b_1.$$

Portanto, b_1 e b_2 pertencem a mesma N^+ -órbita. Tomemos $h \in \text{int}S \cap \alpha_1$. Para todo inteiro k , temos

$$h^k b_2 = h^k n_0 b_1 = h^k n_0 h^{-k} h^k b_1 = h^k n_0 h^{-k} b_1 \quad (3.1)$$

Observemos agora que $hb_1 = b_1$ pois tomamos h na câmara positiva, logo h pertence a P , a isotropia em b . Assim b_1 é um ponto fixo para algum $h \in S$. Pelo corolário 3.16, b_1 está no interior de algum conjunto de controle, digamos D_1 . Tomando agora $h' \in \alpha_2 \cap \text{int}S$ temos que b_2 também está no interior de um conjunto de controle, digamos D_2 . Uma vez que $h^k n_0 h^{-k} \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow \infty$, a equação 3.1 implica que $h^k b_2 \rightarrow b_1$, ou seja, b_1 pertence ao fecho de Sb_2 . Assim, $D_1 \cap \text{fe}(Sb_2) \neq \emptyset$, logo $D_2 \leq D_1$. Revertendo o argumento, temos que $D_1 \leq D_2$. Portanto $D_1 = D_2$, de onde segue o resultado.

■

Lema 3.20. *Sejam $b_1, b_2 \in C_0$ e $g \in \text{int}S$ tal que $gb_1 = b_2$. Então $\text{int}(gS_1g^{-1})$ e $\text{int}S_2$ são semigrupos em P_2 .*

Demonstração: Que $\text{int}S_2$ é um semigrupo em P_2 é claro pela discussão que precede o lema. Provemos que $\text{int}(gS_1g^{-1})$ é semigrupo em P_2 . Seja $ghg^{-1} \in \text{int}(gS_1g^{-1})$. Como $h \in P_1 \cap \text{int}S$, temos que $hb_1 = b_1$ e assim $ghb_1 = b_2$. Logo, $(ghg^{-1})b_2 = ghg^{-1}(ghb_1) = ghhb_1 = gb_1 = b_2$. Vemos então que (ghg^{-1}) fixa b_2 , ou sejam $ghg^{-1} \in P_2$. Portanto, $\text{int}(gS_1g^{-1}) \subset P_2$. Tomemos agora $g\bar{h}g^{-1}, ghg^{-1} \in \text{int}(gS_1g^{-1})$. Então $ghg^{-1}g\bar{h}g^{-1} = gh\bar{h}g^{-1} \in \text{int}(gS_1g^{-1})$. Logo, $\text{int}(gS_1g^{-1})$ é um semigrupo em P_2 .

■

Lema 3.21. *Sejam $b_1, b_2 \in C_0$. Então existe $g \in \text{int}S$ com $gb_1 = b_2$ tal que $\text{int}(gS_1g^{-1})$ e $\text{int}(S_2)$ interceptam a mesma câmara positiva, digamos β , para P_2 .*

Demonstração: Como $b_1, b_2 \in C_0$ então existe $\bar{g} \in \text{int}S$ com $\bar{g}b_1 = b_2$. Denotemos

$$\tilde{S}_1 := \tilde{g}S_1\tilde{g}^{-1}.$$

Pelo lema anterior \tilde{S}_1 é um semigrupo em P_2 . Para $u \in S_1$, temos que $\tilde{g}u \in \text{int}S$ e $ub_1 = b_1$. Logo $\tilde{g}ub_1 = b_2$. Temos ainda que

$$(\tilde{g}u)S_1(\tilde{g}u)^{-1} = (\tilde{g}u\tilde{g}^{-1})(\tilde{g}S_1\tilde{g}^{-1})(\tilde{g}u\tilde{g}^{-1}) = h\tilde{S}_1h^{-1},$$

onde $h = \tilde{g}u\tilde{g}^{-1} \in \tilde{S}_1$. Como todo elemento $\bar{h} \in \tilde{S}_1$ é da forma $\tilde{g}\tilde{u}\tilde{g}^{-1}$ com $\tilde{u} \in S_1$, temos que $\bar{h}\tilde{S}_1\bar{h}^{-1} = (\tilde{g}\tilde{u})S_1(\tilde{g}\tilde{u})^{-1}$. Desta forma, para provarmos a existência de um g da forma desejada basta determinar $h \in \tilde{S}_1$ e uma câmara β pertencente a $\pi^{-1}\{b_2\}$ tal que β intercepta simultaneamente os interiores de $h\tilde{S}_1h^{-1}$ e S_2 .

Como $b_1 \in C_0$ temos que $b_1 = \pi(\alpha^+)$ para alguma câmara positiva α^+ interceptando o interior de S . Mas, se α é uma câmara positiva para P_1 , então $n\alpha^+, n \in N^+$, também o é. De fato, $\pi(n\alpha^+)$ é a câmara positiva para P_1 interceptada por S_1 então

$\tilde{g}\alpha^+ \leftrightarrow \tilde{g}\alpha^+\tilde{g}^{-1}$ é interceptada por $\tilde{S}_1 = \tilde{g}\tilde{S}_1\tilde{g}^{-1}$ e, como $\pi(\tilde{g}\alpha^+) = \tilde{g}\pi(\alpha) = \tilde{g}b_1 = b_2$, temos que $\tilde{g}\alpha^+$ é positiva para b_2 . Denotemos esta câmara por β_1 . Analogamente ao caso de S_1 , temos ainda que S_2 intercepta uma câmara positiva para P_2 , digamos β_2 . Assumiremos sem perda de generalidade que $\beta_1 = A^+$ e $P_2 = MAN^+$. Tomemos $h_1 \in \beta_1 \cap \text{int}(\tilde{S}_1)$ e $h_2 \in \beta_2 \cap \text{int}(S_2)$. Já que toda câmara positiva para P_2 é da forma nA^+n^{-1} temos que $h_2 = h'n$ para algum $h' \in \beta_1 = A^+$ e $n \in N^+$. Para todo inteiro positivo k ,

$$h_1^{-k}h_2h_1^k = h_1^{-k}(h'n)h_1^k = h'(h_1^knh_1^k) \in h_1^{-k}S_2h_1^k,$$

pois $h_2 \in S_2$. Também, $\text{int}(\tilde{S}_1)$ intercepta a câmara que contém h' , pois h' pertence a β_1 e $\text{int}(\tilde{S}_1) \cap \beta_1 \neq \emptyset$. Consequentemente, $\text{int}(\tilde{S}_1)$ intercepta as câmaras que contém pontos próximos à h' . Consequentemente, para k suficientemente grande $\text{int}(\tilde{S}_1)$ e $\text{int}(h_1^{-k}S_2h_1^k)$ interceptam a mesma câmara β_1 , a qual é positiva para P_2 . Tomemos então $h = h_1^k$. Temos que $\text{int}(h\tilde{S}h^{-1})$ e $\text{int}(hh^{-1}S_2hh^{-1}) = \text{int}(S_2)$ interceptam $h\beta_1h^{-1}$. Como $h \in \beta_1$ temos que $h\beta_1h^{-1}$ também é uma câmara positiva para P_2 . Logo, encontramos o h desejado e o lema está provado. ■

Lema 3.22. *Sejam b_1 e b_2 elementos de C_0 . Existem então $\alpha \in \pi^{-1}\{b_1\} \cap \Sigma$ e $g \in \text{int}S$ tais que $gb_1 = b_2$ e $g\alpha \in \Sigma$.*

Demonstração: Tomando g e β como no lema 3.21 seja $\alpha = g^{-1}\beta$, ou seja, $\beta = g\alpha$. Como $\pi(\beta) = \pi(g\alpha) = g\pi(\alpha) = b_2 = gb_1$ temos que $\pi(\alpha) = b_1$. Logo α pertence a $\pi^{-1}\{b_0\}$. Além disso $\alpha \cap \text{int}(S_1) \neq \emptyset$. De fato, uma vez que $\beta = g\alpha g^{-1}$ e $g\alpha g^{-1} \cap \text{int}(gS_1g^{-1}) \neq \emptyset$ temos que $\alpha \cap \text{int}(S_1) \neq \emptyset$. Temos também $\beta \cap \text{int}(S_2) \neq \emptyset$, de onde segue que $\beta \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Portanto $\beta = g\alpha$ pertence a Σ e o lema está provado.

■

O próximo resultado ajuda a caracterizar os conjuntos de controle sobre variedades “Flags” maximais.

Teorema 3.23. *Para um dado $w \in W$, $\pi(\Sigma w)$ está inteiramente contido em um conjunto de controle para S .*

Demonstração: Pelo lema 3.18, temos que $\pi(\Sigma w) = \bigcup_{b \in C_0} v(b, w)$. O lema 3.19 nos diz que, para todo $b \in C_0$, $v(b, w)$ está contido em um conjunto de controle, digamos $D(b_1, w)$. Basta então mostrar que todos os conjuntos $v(b, w)$ estão contidos no mesmo conjunto de controle, ou seja, que para $b_1, b_2 \in C_0$ temos $D(b_1, w) = D(b_2, w)$. Tomemos então $b_1, b_2 \in C_0$. Pelo lema anterior existem $\alpha \in \pi^{-1}\{b_1\} \cap \Sigma$ e $g \in S$ tais que $gb_1 = b_2$ e $g\alpha$ pertence a Σ . Assim, $\pi(g\alpha) = g\pi(\alpha) = gb_1 = b_2$. Logo $g\alpha$ pertence a $\pi^{-1}\{b_2\} \cap \Sigma$. Portanto,

$$g\pi(\alpha w) = \pi(g\alpha w) \in v(b_2, w) \subset D(b_2, w).$$

Como $\alpha \in \pi^{-1}\{b_1\} \cap \Sigma$, temos que $\pi(\alpha w) \in D(b_1, w)$. Logo, a igualdade acima implica que $fe(S\pi(\alpha w)) \cap D(b_2, w) \neq \emptyset$, isto é, $D(b_1, w) \leq D(b_2, w)$. Revertendo o argumento temos a igualdade entre os conjuntos de controle, de onde segue-se o resultado.

■

Notação No que segue, denotaremos por D_w o único conjunto de controle contendo $\pi(\Sigma w)$.

Notemos que a definição do conjunto D_w depende não somente de w mas também da escolha da câmara de Weyl positiva A^+ . Isto porque definimos a bijeção entre o conjunto das câmaras de Weyl e de \mathfrak{g} e G/MA com base no fato de que MA é o subgrupo de isotropia em \mathfrak{a}^+ pela aplicação $G \times \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}^+) \mapsto \text{Ad}(g)\mathfrak{a}^+$. Tomando então outra câmara de Weyl básica, teríamos outro subgrupo de isotropia, digamos H , o que altera a bijeção entre o conjunto das câmaras de Weyl e o espaço quociente, que agora é G/H . Isto, por sua vez, modifica a projeção $\pi : G/MA \rightarrow G/MAN^+$. Por isso, quando o papel da câmara básica for relevante para nossos objetivos ela será mencionada, mas denotaremos o conjunto de controle contendo $\pi(\Sigma w)$ pela notação simplificada D_w .

Independente da câmara positiva D_1 é sempre o conjunto de controle invariante. De fato, D_1 é o conjunto de controle que contém o conjunto $\pi(\Sigma)$. Este conjunto sempre contém b_0 , o ponto fixo do tipo 1, que é atrator de qualquer elemento “split” em G .

Como para alguma decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$ temos que $A \cap \text{int}S \neq \emptyset$, concluímos que $MA \cap \text{int}S \neq \emptyset$ para algum subgrupo split A . Assim $\tilde{w}MA$ pertence a Σw . Logo $\pi(\tilde{w}MA) = \tilde{w}MAN^+$ pertence a D_w . Como $\tilde{w}MAN^+$ é ponto fixo do difeomorfismo $h : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, definida por $h(gP) = hgP$, com $h \in A \cap \text{int}S$, concluímos que D_w contém pontos que são fixos por elementos em $\text{int}S$, ou seja, seu conjunto de transitividade $(D_w)_0$ é não vazio. Portanto, os conjuntos de controle D_w são efetivos. Reciprocamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.24. *Qualquer conjunto de controle efetivo sobre \mathbb{B} é da forma D_w para algum $w \in W$.*

Demonstração: Seja D um conjunto de controle efetivo sobre \mathbb{B} e tomemos b em seu conjunto de transitividade. Então, se P é o subgrupo de isotropia em b , temos que $P \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Tomemos uma decomposição qualquer $P = MAN^+$. O subconjunto

$$\sigma = \{m \in M : \exists hn \in AN^+ \text{ com } mhn \in \text{int}S\}$$

contém a componente identidade de M , conforme vimos na demonstração do corolário 3.2. Assim, $\text{int}S \cap AN^+ \neq \emptyset$. Uma vez que qualquer conjugação de A por algum elemento de N^+ nos dá um subgrupo “split” a união dos subgrupos “split” é densa em AN^+ e assim existe $g \in \text{int}S$ com $gb = b$ e g em algum subgrupo “split” de G . Como os pontos fixos do difeomorfismo $g : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, com g pertencente a algum subgrupo “split”, são da forma $\tilde{w}b_0$, concluímos que $b = \tilde{w}b_0$ para algum $\tilde{w} \in M^*$. Isto significa que $\pi(\tilde{w}MA) = b$, e como $MA \in \Sigma$, temos que $b \in \pi(\Sigma w) \subset D_w$.

Como, pela proposição 2.3, conjuntos de controle ou coincidem ou são disjuntos temos que $D = D_w$. ■

O teorema 3.23 nos diz que os conjuntos de controle contém os conjuntos $v(b_0, w) \in C_0$. De qualquer forma não é imediato ainda que b pertence a $(D_w)_0$ pertence a $v(b_0, w)$ para algum $b_0 \in C_0$. O teorema seguinte complementa a caracterização dos conjuntos de controle, descrevendo $(D_w)_0$ como a união dos conjuntos $v(b, w)$, $binC_0$.

Teorema 3.25. *Para $w \in W$, seja $(D_w)_0$ o conjunto de transitividade de D_w e tomemos $b \in (D_w)_0$. Então existe $b_0 \in C_0$ tal que b pertence a $v(b_0, w)$.*

Demonstração: Para qualquer $b \in (D_w)_0$ existe, por definição, $h \in intS$ com $hb = b$. Como a união dos subgrupos “split” é densa em G , podemos tomar h em algum subgrupo “split”. Uma vez que o resultado independe da câmara de Weyl escolhida, não há perda de generalidade em assumir que $h \in A^+$ e que $b = \tilde{w}_1 b_0$ para algum $w_1 \in W$, onde $b_0 = MAN^+$. Uma vez que $h \in A^+$, temos que $hb_0 = b_0$, pois os pontos fixos do difeomorfismo $h : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ são os elementos do conjunto $\{\tilde{w}b_0 : w \in W\}$. Mas h pertence também a $intS$, logo $b_0 \in C_0$. Pela mesma razão $b' = \tilde{w}b_0 \in (D_w)_0$. Desta forma, pra os elementos b e $b' \in (D_w)_0$, existe $g, g' \in intS$ tais que $gb' = b$ e $g'b = b'$. Tomando a decomposição de Iwasawa de g e g' com respeito a KAN_w e KAN_{w_1} , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} g &= \tilde{w}_1 \tilde{w}^{-1} h_1 (\tilde{w} n_1 \tilde{w}^{-1}), \quad h_1 \in A, \quad n_1 \in N^+ \\ g' &= \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} h_2 (\tilde{w}_1 n_2 \tilde{w}_1^{-1}), \quad h_2 \in A, \quad n_2 \in N^+. \end{aligned}$$

Isto segue do fato de que $gb' = \tilde{w}_1 \tilde{w}^{-1} b' = b$ e $g' \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} b = b'$. Temos que $gh^k g'$ pertence a $intS$ para todo inteiro positivo k . Também

$$gh^k g' = \tilde{w}_1 (\tilde{w}^{-1} h_1 \tilde{w}) n_1 (\tilde{w}^{-1} h^k \tilde{w}) (\tilde{w}_1^{-1} h_2 \tilde{w}_1) n_1 \tilde{w}^{-1}.$$

Usando o fato de que A normaliza N^+ , esta expressão se reduz a

$$gh^k g' = \tilde{w}_1 h' n \tilde{w}_1^{-1},$$

onde $n \in N^+$ e $h' = (\tilde{w}^{-1}h_1\tilde{w})(\tilde{w}^{-1}h^k\tilde{w})(\tilde{w}_1^{-1}h_2\tilde{w}_1) = \tilde{w}^{-1}h_1h^kh_2\tilde{w}_1$. Temos que $h_1h^kh_2 \rightarrow h^k$ quando $k \rightarrow \infty$. Assim, para k suficientemente grande, podemos assumir que h' pertence a $\tilde{w}^{-1}A^+\tilde{w}$. Temos ainda que

$$gh^kg'b = gh^kb' = gb' = b.$$

Assim, gh^kg' pertence ao grupo isotrópico em b , o qual é MAN_{w_1} , já que $b = \tilde{w}b_0 \leftrightarrow \tilde{w}_1b_0(\tilde{w}_1)^{-1}$. Com respeito a esta decomposição, temos

$$gh^kg' = \tilde{w}_1h'n\tilde{w}_1^{-1} = (\tilde{w}_1h'\tilde{w}_1^{-1})(\tilde{w}_1n\tilde{w}_1^{-1}) = h''n',$$

onde $h'' = \tilde{w}_1h'\tilde{w}_1^{-1}$ e $n' = \tilde{w}_1n\tilde{w}_1 \in N_{w_1}$. Para concluirmos a demonstração do teorema, suponhamos primeiro que $n' = 1$. Temos que h'' pertence a câmara $al = w_1w^{-1}A^+$, pois h' pertence a $\tilde{w}^{-1}A^+\tilde{w} \leftrightarrow w^{-1}A^+$ e h'' é obtido a partir de h' através de uma conjugação por \tilde{w}_1 . Como estamos considerando $n = 1$, temos que $gh^kg' = h''$, e uma vez que $g, h, g' \in \text{int}S$, temos que $h'' \in \text{int}S$. Precisamos então mostrar que $\pi(\alpha w) = b$. A ação à direita de W sobre α é dada como uma ação à esquerda após uma conjugação por w_1w^{-1} ser realizada. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha w &= (w_1w^{-1})w(w_1w^{-1})^{-1}\alpha = w_1w^{-1}ww_1^{-1}\alpha \\ &= w_1ww_1^{-1}\alpha = w_1ww_1^{-1}w_1w_1^{-1}A^+ = w_1A^+ = \tilde{w}_1A^+\tilde{w}_1^{-1} \end{aligned}$$

que é uma câmara positiva para \tilde{w}_1b_0 . Assim, $\pi(\tilde{w}_1A^+\tilde{w}_1^{-1}) = \tilde{w}_1b_0 = b$. Logo, $b = \pi(\alpha w) \in v(b_0, w)$, conforme desejado.

Para provarmos o caso geral tomemos agora $n_0 \in N_{w_1}$ tal que $n_0h''n'n_0^{-1} = h''$. Assim, para n' qualquer, conjugando $h''n'$ por n_0 obtemos $n_0h''n'n_0^{-1} = h''$. Temos então que, na decomposição $b = M_0A_0N_0^+$, onde $M_0 = n_0^{-1}Mn_0$, $A_0 = n_0^{-1}An_0$ e $N_0^+ = n_0^{-1}N_{w_1}n_0 = N_{w_1}$, o elemento $h''n' \in \text{int}S$. Logo $w_1w^{-1}A_0^+ \cap \text{int}S = \alpha_0 \cap \text{int}S \neq \emptyset$ e assim α_0 pertence a Σ . Temos ainda que $\alpha_0w = \tilde{w}_1A_0^+\tilde{w}_1^{-1}$ e, como $\pi(\tilde{w}_1A_0^+\tilde{w}_1^{-1}) = \tilde{w}_1b_0 = b$, segue que $b \in v(b_0, w)$.

■

3.4 Conjuntos de controle em variedades Flag arbitrárias

Sejam G um grupo de Lie conexo, semi-simples e com centro finito, $S \subset G$ um semigrupo com pontos interiores, $G = KAN^+$ uma decomposição global de Iwasawa de $G/P = MAN^+$ o subgrupo parabólico minimal associado a esta decomposição e P_Θ um subgrupo parabólico qualquer. Consideremos a ação natural de G sobre G/P e seja C o único conjunto de controle invariante para S sobre G/P . Assuma que $A \cap \text{int}S \neq \emptyset$ e, conseqüentemente, $b_0 = P \in C_0$. Denotemos P_Θ por ξ_0 e consideremos a fibração canônica $\pi : G/P \rightarrow G/P_\Theta$. Com estas notações em mente, o objetivo desta seção é determinar os conjuntos de controle invariantes sobre a fibra $\pi^{-1}\{\xi_0\}$.

Pelo teorema 3.5 G/P_Θ possui exatamente um conjunto de controle invariante para a ação de S , digamos C_Θ . Pelo item (i) da proposição 2.21, temos que

$$C_\Theta = \pi(C).$$

Temos também que $\xi_0 \in (C_\Theta)_0$. De fato, como $b_0 \in C_0$, temos que $b_0 = gb_0$ para algum $g \in \text{int}S$ e assim $g\xi_0 = g\pi(gb_0) = \pi(b_0) = \xi_0$.

Vamos agora olhar para a fibra $F := \pi^{-1}\{\xi_0\} \cap C_0$ de C_0 sobre ξ_0 . Denotemos

$$\bar{S}_\Theta = S \cap P_\Theta.$$

Este é um semigrupo com interior não vazio em P_Θ . Para ver isto, notemos primeiro que P_Θ é a isotropia em ξ_0 . Além disso, como $\xi_0 \in (C_\Theta)_0$, existe $g \in \text{int}S$ tal que $g\xi_0 = \xi_0$, logo $g \in \text{int}(S \cap P_\Theta)$.

Proposição 3.26. *Se \bar{S}_Θ e F são conforme definidos acima, então $\bar{S}_\Theta F = F$.*

Demonstração: Tomemos $g \in \bar{S}_\Theta$ e $x \in F$, Então $x \in C_0$ e $\pi(x) = \xi_0$. Assim, $\pi(gx) = g\pi(x) = g\xi_0 = \xi_0$. Também, como C é um conjunto de controle invariante,

temos que $fe(Sx) = fe(C) = C$. Logo $Sx \subset C$ e assim $gx \in C$, o que, pela proposição 2.8, implica que gx pertence a C_0 . Portanto, gx pertence a F , ou seja, $\overline{S_\Theta}F \subset F$.

Para mostrar a inclusão contrária tomemos $x \in F$. Então x pertence a C_0 e $\pi(x) = \xi_0$. Logo, existe $g \in \text{int}S$ com $gx = x$. Desta forma, $g\xi_0 = g\pi(x) = \pi(gx) = \pi(x) = \xi_0$ mostrando que g pertence a $\overline{S_\Theta} \cap S = \overline{S_\Theta}$. Logo, $g \in \overline{S_\Theta}$ e $x \in \overline{S_\Theta}F$. Portanto, $\overline{S_\Theta} = F$.

Coloquemos agora

$$S_\Theta = \overline{S_\Theta} \cap (P_\Theta)_0,$$

onde $(P_\Theta)_0$ é a componente identidade de P_Θ . Já que o número de componente conexas de $(P_\Theta)_0$ é finito, o quociente $P_\Theta/(P_\Theta)_0$ tem um número finito de elementos. Tomemos $g \in \text{int}(S \cap P_\Theta)$. O conjunto $\{g^n(P_\Theta)_0 : n \in \mathbb{N}\}$ é finito. Logo existem $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \neq n$ tais que $g^n(P_\Theta)_0 = g^m(P_\Theta)_0$. Já que $g \in \text{int}S$, temos que $g^{n-m} \in \text{int}S$ e assim $g^{n-m} \in \text{int}S \cap (P_\Theta)_0 = S_\Theta$, ou seja, S_Θ tem interior não vazio em $(P_\Theta)_0$.

Como $\overline{S_\Theta} = F$ e $S_\Theta F \subset \tilde{S}_\Theta$, temos que $\Theta \subset F$. A recíproca também é válida, conforme mostra o seguinte lema.

■

Lema 3.27. *Para quaisquer $b, b' \in F$, temos que $b \in S_\Theta b'$.*

Demonstração: Seja P_b a isotropia em b . Como $b \in C_0$, temos que $S_b = S \cap P_b$ é um subsemigrupo de interior não vazio em P_b . Já que a união dos subgrupos split é densa em P , temos que S_b intercepta algum subgrupo split de G . Logo existe $h \in \text{int}S$ com $hb = b$ e h pertencente a algum subgrupo split de G . Temos também que $h\xi_0 = h\pi(b) = \pi(b) = \xi_0$ e assim $h \in \text{int}(\tilde{S}_\Theta)$. Com o que foi feito acima e sabendo que $h \in P_\Theta$, temos que $h^k \in (P_\Theta)_0$ para algum $k > 0$. Desta forma, podemos assumir que $h \in \text{int}(S_\Theta)$. Agora, como b pertence a C_0 , temos que ele é o

atrator de um subconjunto aberto e denso de C . Logo, para b' em um subconjunto aberto e denso de $\pi^{-1}\{b_0\}$ temos $h^n b' \rightarrow b$ quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, b pertence a $fe(S_\Theta b')$. Mas $hb = b$ com $h \in \text{int}(S_\Theta)$. Portanto, $b \in S_\Theta$. ■

Nosso objetivo agora é mostrar que o fecho de F é um conjunto de controle invariante para um semigrupo com interior não vazio em um grupo de Lie semi-simples agindo em $\pi^{-1}\{\xi_0\}$.

Proposição 3.28. *Sejam C e C_Θ os conjuntos de controle invariantes sobre G/P e G/P_Θ , respectivamente, e tomemos ξ_0 pertencente a $(C_\Theta)_0$. Então, $fe(F)$ é o único conjunto de controle invariante para a ação de um semigrupo com interior não vazio de um grupo de Lie semi-simples sobre $\pi^{-1}\{\xi_0\}$ e F está contido em seu conjunto de transitividade.*

Demonstração: Em primeiro lugar, observemos que $A_\Theta N_\Theta^+$ é normal em P_Θ . De fato, já que M_Θ normaliza $A_\Theta N_\Theta^+$, se $p \in P_\Theta$, $p = man$, então $pA_\Theta N_\Theta^+ p^{-1} = manA_\Theta N_\Theta^+ (an)^{-1} m^{-1} = mA_\Theta N_\Theta^+ m^{-1} = A_\Theta N_\Theta^+$. Agora, dado $g \in A_\Theta N_\Theta^+$ e $aP \in \pi^{-1}\{\xi_0\} = P_\Theta/P$, com $a \in P_\Theta$, temos que $gaP = aa^{-1}gaP = axP$, com $x \in A_\Theta N_\Theta^+$, pois $A_\Theta N_\Theta^+$ é normal em P_Θ . Mas $A_\Theta N_\Theta^+ \subset AN^+ \subset P$ assim, $xP = P$ e $axP = aP$, logo $gaP = aP$, ou seja, $A_\Theta N_\Theta^+$ age trivialmente em $\pi^{-1}\{\xi_0\}$. Desta forma, a ação de S_Θ sobre $\pi^{-1}\{\xi_0\}$ depende apenas da ação das classes $sA_\Theta N_\Theta^+$, que é um semigrupo de interior não vazio em $(P_\Theta)_0/A_\Theta N_\Theta^+ = M_\Theta A_\Theta N_\Theta^+/A_\Theta N_\Theta^+ \approx M_\Theta$.

Seja $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ o centralizador de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em M_Θ ,

$$Z(\mathfrak{g}(\Theta)) = \{u \in M_\Theta : \text{ad}(u)X = X, \forall X \in \mathfrak{g}(\Theta)\}$$

Como $\mathfrak{g}(\Theta)$ é um ideal de \mathfrak{m}_Θ , temos que $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ é um subgrupo fechado normal de M_Θ . Além disso, a álgebra de Lie de $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ (que é o centralizador de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em \mathfrak{m}_Θ e coincide com $\mathfrak{g}(\Theta)^\perp$) complementa $\mathfrak{g}(\Theta)$ em \mathfrak{m}_Θ . Consequentemente a álgebra de Lie

$$G(\Theta) = M_\Theta/Z(\mathfrak{g}(\Theta))$$

é $\mathfrak{g}(\Theta) \oplus \mathfrak{g}(\Theta)^\perp \approx \mathfrak{g}(\Theta)$, a qual é semi-simples. Como $Z(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset M$, temos que $Z(\mathfrak{g}(\Theta))b_0 = b_0$. Uma vez que ela é normal em M_Θ , sua ação sobre $\pi^{-1}\{\xi_0\}$ é trivial e assim a ação de S_Θ em $\pi^{-1}\{\xi_0\}$ depende somente da ação do subsemigrupo com interior não vazio de $G(\Theta)$ dado por

$$S(\Theta) = S_\Theta/(\mathfrak{g}(\Theta)).$$

Como já tínhamos que $S_\Theta F = F$, temos que o fecho de F é um conjunto de controle invariante para a ação de $S(\Theta)$ sobre $\pi^{-1}\{\xi_0\}$. Este é o único conjunto de controle invariante, pois, uma vez que $M_\Theta \cap P$ é um subgrupo parabólico minimal do grupo de Lie \widetilde{M}_Θ , esta fibra é exatamente a fronteira maximal de $G(\Theta)$. ■

3.5 Um subgrupo do grupo de Weyl

Nesta seção estudaremos o subconjunto $W(S) \subset W$ para o qual D_w é o conjunto de controle invariante para todo $w \in W(S)$. Provaremos que tal subconjunto é na verdade um subgrupo e veremos que este coincide com o grupo de Weyl do grupo de Lie $G(\Theta)$ apresentado na última seção.

Começamos definindo

$$W(S) := \{w \in W : D_w \text{ é o conjunto de controle invariante para a ação de } S\}.$$

Notemos que $W(S)$ é formado pelos elemento de W tais que $\pi(\Sigma w) = \pi(\Sigma)$, pois Σ projeta-se sobre o conjunto de controle invariante, onde $\pi : G/MA \rightarrow G/MAN^+$ é a fibração canônica.

Em princípio $W(S)$ é somente um subconjunto de grupo de Weyl. Mostraremos mais adiante que ele é na verdade um subgrupo. Este fato não é imediato, pois $W(S)$ não é definido como o conjunto que deixa Σ invariante. Para $w \in W(S)$ e $\alpha \in \Sigma$ não é necessariamente verdade que αw pertence a Σ . Temos apenas que alguma câmara positiva para $\pi(\alpha w)$ pertence a Σ .

Assim como $D_w, W(S)$ também depende da escolha da câmara de Weyl básica para sua definição. Quando necessário, nós destacaremos a câmara escrevendo $W(S, A^+)$.

Observação 3.29. Com A^+ fixo, $W(S)$ é um subconjunto do grupo de Weyl de A . Por definição, temos que $w \in W(S)$ se, e somente se, $\pi(\Sigma w) = \pi(\Sigma) = C_0$. Assim, se $\alpha^+ w \in \Sigma w$, com $w \in W(S)$, devemos ter $\pi(\alpha^+ w) \in C_0$. Temos que $\alpha^+ = g(A^+) = gA^+g^{-1}$ para algum $g \in G$. Então, $w \in W(S)$ se, e somente se, existir $g \in G$ tal que gA^+ pertence a Σ e se $\pi(gA^+\tilde{w}) = \pi(g\tilde{w}g^{-1}A^+)$ pertencer a C_0 . A partir disso, se tivermos $A_1^+ = gA^+$, então $W(S, A_1^+) = g(W(S, A^+))g^{-1}$.

Proposição 3.30. *Fixemos uma escolha canônica e suponhamos que $b_0 = MAN^+$ pertence a C_0 . Então são equivalentes:*

- i) w pertence a $W(S)$;
- ii) $N^+\tilde{w}b_0 \subset C_0$. Se além disso A^+ pertencer a Σ , então (i) e (ii) são equivalentes a:
- iii) $\tilde{w}b_0$ pertence a C_0 , onde \tilde{w} é qualquer representante de w .

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii) Uma vez que b_0 pertence a C_0 , podemos considerar o conjunto σ da demonstração da proposição 3.24 e concluir que existem $h \in A^+$ e $n \in N^+$ tais que

$$hn \in \text{int}S.$$

Suponhamos primeiro que $n = 1$. Assim, $h \in \text{int}S$ e $A^+ \in \Sigma$. Temos que a ação à direita de w sobre A^+ , que é dada por $A^+w = \tilde{w}A^+$, coincide com a ação à esquerda de qualquer um de seus representantes. Conseqüentemente, $\pi(A^+w) = \pi(\tilde{w}A^+) = \tilde{w}\pi(A^+) = \tilde{w}b_0$. Como supondo $w \in W(S)$, temos, pelo teorema 3.15, que $\pi(\Sigma w) = C_0$. Já que A^+ pertence a Σ , $\pi(A^+w) \in C_0$. Logo $\tilde{w}b_0 \in C_0$. Como C_0 é aberto, existe uma vizinhança U da identidade em N^+ tal que

$$U\tilde{w}b_0 \subset C_0.$$

Uma vez que $h^{-k}nh^k \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow \infty$ para todo $n \in N^+$, temos que para k suficientemente grande $h^{-k}bh^k \in U$. Logo, $n \in h^kUh^{-k}$ para todo $n \in N^+$, com k suficientemente grande. Assim, $N^+ = \bigcup_{h \geq 0} h^kUh^{-k}$. Temos também que

$$h^kUh^{-k}\tilde{w}b_0 = h^kU\tilde{w}b_0,$$

pois $\tilde{w}b_0$ é ponto fixo do difeomorfismo h , logo é também ponto fixo de h^{-k} . Como $U\tilde{w}b_0 \subset C_0$ e $h^k \in \text{int}S$ temos que $h^kU\tilde{w}b_0 \subset C_0$, pois $C_0 \subset (\text{int}S)x$ para todo $x \in C_0$. Isto mostra que $N^+\tilde{w}b_0 \subset C_0$. Para mostrarmos o caso geral tomemos $n_0 \in N^+$ tal que

$$hn = n_0hn_0^{-1}. \quad (3.2)$$

Um tal n_0 sempre existe, conforme justificamos na demonstração do lema 3.1. Já que $hn \in \text{int}S$ e $h \in A^+$, temos por 3.2, que $n_0A^+n_0^{-1} \cap \text{int}S \neq \emptyset$. Consideremos a decomposição de $b_0 = P$ dada por

$$P = (n_0Mn_0^{-1})(n_0An_0^{-1})(n_0N^+n_0^{-1}) = (n_0Mn_0^{-1})(n_0An_0^{-1})N^+.$$

Assim, $n_0\tilde{w}n_0^{-1}$ é um representante de w no normalizador de $n_0A^+n_0^{-1}$, que é $m_0M^*n_0^{-1}$. Temos então

$$(n_0N^+n_0^{-1})(n_0\tilde{w}n_0^{-1})b_0 = N^+\tilde{w}b_0 \subset C_0.$$

Logo, $n_0A^+n_0^{-1}$ pertence a Σ e $\pi(n_0A^+n_0^{-1}\tilde{w}) = \pi(n_0\tilde{w}n_0^{-1}(n_0A^+n_0^{-1})) \in C_0$ e a prova segue como no caso $n = 1$.

(ii) \Rightarrow (iii) Como $N^+\tilde{w}b_0 \subset C_0$, basta tomar $n = 1$.

(iii) \Rightarrow (i) Temos por hipótese adicional que $A^+ \in \Sigma$. Usando a observação 3.29 com $g = 1$, temos que $\pi(\tilde{w}A^+) = \tilde{w}b_0 \in C_0$, logo $w \in W(S)$. ■

A proposição seguinte mostra que $W(S)$ é um subgrupo de W . Pela observação 3.29 é desnecessário especificar a câmara básica considerada pois, para câmaras

conjugadas teremos conjuntos conjugados e a propriedade de ser subgrupo é invariante por conjugações.

Proposição 3.31. $W(S)$ é um subgrupo de W .

Demonstração: Notemos primeiro que $W(S) \neq \emptyset$ pois, uma vez que D_1 é o conjunto de controle invariante, temos que $1 \in W(S)$. Fixemos agora uma escolha canônica com $b_0 \in C_0$. Tomemos $w_1, w_2 \in W(S)$ e escolhamos representantes $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in M^*$. Pela proposição anterior, $\tilde{w}_1 b_0 \in C_0$. Agora, $(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1}) \tilde{w} b_0 \in C_0$ pois $\tilde{w}_2 \in W(S)$. Logo $\tilde{w}_1 \tilde{w}_1 b_0 \in C_0$. Pela proposição anterior, $\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \in W(S)$. Portanto $W(S)$ é um semigrupo em W . Como W é finito temos que $W(S)$ é um subgrupo. ■

Fixemos agora uma escolha canônica assumindo que $A \cap \text{int}S \neq \emptyset$ e consideremos novamente os conjuntos:

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= \{H \in \mathfrak{a} : \exp(tH) \in \text{int}S \text{ para algum } t > 0\} \\ \Lambda &= \{h \in A : \text{existe } n \in N^+ \text{ com } hn \in \text{int}S\} \\ \tilde{\Lambda} &= \{H \in \mathfrak{a} : \exp(tH) \in \Lambda \text{ para algum } t > 0\}\end{aligned}$$

Pela proposição 3.30, se $w \in W(S)$ então $\tilde{w} b_0 \in C_0$. Logo a proposição 3.13 implica que $\tilde{w}^{-1} \Lambda_0 \subset \tilde{\Lambda}$ para todo $w \in W(S)$. Uma vez que $W(S)$ é um grupo temos que $\tilde{w} \Lambda_0 \tilde{\Lambda}$ para todo $w \in W(S)$.

Seja $\Gamma = \Gamma(S)$ o conjunto gerado por $\cup\{\tilde{w} \Lambda_0 : w \in W(S)\}$. Γ é um cone, conforme mostra a seguinte proposição.

Proposição 3.32. Γ é um cone convexo contido em $\tilde{\Lambda}$. Além disso, Γ é invariante por $W(S)$.

Demonstração: É imediato perceber que Γ é um cone, pois se $X, Y \in \Gamma$, então X e Y se escrevem como combinações lineares de elementos de $\cup\{\tilde{w} : w \in W(S)\}$, logo $X + Y$ também se escreve como combinação linear de tais elementos e o mesmo vale para xX , se x é um número real não negativo. Também é claro que $\Gamma \subset \tilde{\Lambda}$, pois

cada $\tilde{w}\Lambda_0$ está contido em $\tilde{\Lambda}$ e, como $\tilde{\Lambda}$ é um cone, qualquer combinação linear de seus elementos pertence a $\tilde{\Lambda}$.

Para provar que Γ é invariante por $W(S)$, seja $w \in W(S)$ e $X \in \Gamma$. Então $X = \sum_i a_i \tilde{w}_i H_i$ com $a_i \in \mathbb{R}$, $w_i \in W(S)$ e $H_i \in \Lambda_0$. Como $W(S)$ é um grupo temos que $ww_i \in W(S)$ para todo i , logo $wX \in \Gamma$.

■

Capítulo 4

Tipo parabólico de um semigrupo e forma canônica de Jordan

Este é o capítulo principal do trabalho, é nele que expomos algumas relações entre o tipo parabólico de um semigrupo e a forma de Jordan dos elementos em seu interior. O capítulo está dividido em quatro seções. Na terceira seção surgem as relações entre o tipo parabólico e a forma de Jordan. Já na quarta seção exploramos estas relações em subgrupos de $Sl(n, \mathbb{R})$. A primeira seção é iniciamos o entendimento das relações, pois é onde apresentamos a definição de tipo parabólico, ela está fundamentada nos resultados do capítulo anterior. A segunda seção é preparatória para a terceira, apresentamos a forma canônica multiplicativa de Jordan e um teorema que a relaciona com a decomposição de Iwasawa e também alguns resultados auxiliares.

O subgrupo $W(S)$ do grupo de Weyl que foi definido na seção 3.5 é um objeto essencial, pois o tipo parabólico de um semigrupo é o subconjunto $\Theta \subset \Pi$ maximal tal que $W(S) = W_\Theta$.

Na terceira seção o principal resultado é o teorema 4.23 que nos permite caracterizar o tipo parabólico de S através do elemento mais irregular que se pode encontrar no interior de S . Este teorema é uma consequência direta da proposição 4.17 e do corolário 4.22. Os resultados que aparecem nesta seção antes deste corolário tem como objetivo preparar a sua demonstração.

A conclusão que os resultados nos conduzem, é que a partir do tipo parabólico de S é possível conhecermos os maiores tamanhos possíveis para os blocos de Jordan dos elementos do interior de S , onde S é um semigrupo aberto de $Sl(n, \mathbb{R})$.

4.1 Tipo Parabólico de um semigrupo

O tipo parabólico de um semigrupo $S \subset G$ é um subconjunto Θ do sistema simples de raízes de G que está associado com o semigrupo S . Considere a fibração $\pi : G/P \rightarrow G/P_\Theta$, se $C_\Theta \subset G/P_\Theta$ é o S -c.c.i. então $\pi^{-1}(C_\Theta)$ contém o S -c.c.i. em G/P . O tipo parabólico de S é o subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ maximal para o qual $\pi^{-1}(C_\Theta)$ é o S -c.c.i. em G/P .

A existência do tipo parabólico de um semigrupo S é garantida pelo seguinte teorema que discutiremos nesta seção:

Teorema: *Fixe uma escolha canônica com $b_0 \in C_0$ e $A^+ \in \sigma$. Seja Π o sistema simples de raízes associado com a decomposição de Iwasawa definida por b_0 . Então existe $\Theta \subset \Pi$ tal que $W(S, A^+) = W_\Theta$. Além disso, seja C_Θ o S -c.c.i. em G/P_Θ . Então $C = \pi^{-1}(C_\Theta)$ onde $\pi : G/P \rightarrow G/P_\Theta$ é a fibração canônica.*

Dividimos a demonstração deste teorema em lemas com o objetivo de facilitar o entendimento e também de enfatizar alguns pontos da demonstração.

Considere o seguinte subconjunto do grupo de Weyl

$$W(S) = \{w \in W : D_w \text{ é o } S\text{-c.c.i. em } G/P\},$$

onde G/P denota o flag maximal.

Um fato que vale a pena ressaltar novamente é que $W(S)$ é um subgrupo do grupo de Weyl, conforme está demonstrado na proposição 3.31.

O próximo lema não será utilizado diretamente, mas ele auxilia o entendimento da demonstração da existência de um ponto fixo por $W(S)$.

Lema 4.1. *Seja $w \in W$ a reflexão em relação à raiz $\alpha \in \Delta$. Então um elemento não-nulo $H \in \mathfrak{a}$ é fixo por w se, e somente se $\alpha(H) = 0$.*

Demonstração: Temos que $w(H) = H - 2\frac{\langle H_\alpha, H \rangle}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}H$. Portanto $w(H) = H$ se, e somente se $\langle H_\alpha, H \rangle = 0$, ou seja, $\alpha(H) = 0$. ■

Se $H \in \mathfrak{a}$, considere o subconjunto das raízes que anulam H

$$\Theta(H) = \{\alpha \in \Delta : \alpha(H) = 0\}.$$

Denotamos por $W_{\Theta(H)}$ o subgrupo gerado pelas raízes em $\Theta(H)$.

Agora fixemos uma escolha canônica que satisfaça $A \cap \text{int}(S) \neq \emptyset$. Isto é possível devido ao Lema 3.1. Considere novamente os seguintes conjuntos

$$\Lambda_0 = \{H \in \mathfrak{a} : \exp tH \in \text{int}(S), \text{ para algum } t > 0\},$$

$$\Lambda = \{h \in A : \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ com } hn \in (\text{int})(S)\}$$

e

$$\tilde{\Lambda} = \{H \in \mathfrak{a} : \exp tH \in \Lambda, \text{ para algum } t > 0\}.$$

Listamos na proposição abaixo as propriedades destes conjuntos que serão utilizadas no que segue, estes fatos estão demonstrados no capítulo anterior, na seção 3.2 e também nas seguintes.

Proposição 4.2. *Os conjuntos Λ_0, Λ e $\tilde{\Lambda}$ satisfazem as seguintes propriedades:*

- (i) Λ_0 e $\tilde{\Lambda}$ são cones convexos dom interior não-vazio em \mathfrak{a} ;
- (ii) $\Lambda_0 \subset \tilde{\Lambda}$
- (iii) $w\Lambda_0 \subset \tilde{\Lambda}$ para todo $w \in W(S)$.

Considere $\Gamma = \Gamma(S)$ o cone convexo gerado por $\cup\{w\Lambda_0 : w \in W(S)\}$. Segue da definição que Γ é $W(S)$ invariante e do item (iii) da proposição acima que $\Gamma \subset \tilde{\Lambda}$.

Lema 4.3. *Existe um elemento não nulo $H \in \tilde{\Lambda}$ que é ponto fixo para $W(S)$, isto é, $wH = H$ para todo $w \in W(S)$.*

Demonstração: Temos dois casos para considerar, $\tilde{\Lambda} = \mathfrak{a}$ e o caso em que $\tilde{\Lambda}$ é cone convexo próprio em \mathfrak{a} . Se $\tilde{\Lambda} = \mathfrak{a}$, então $Ad(S) = Ad(G)$ e S pode ser um semigrupo próprio somente se G tiver centro infinito ([7], Teorema 4.2). Como estamos abordando apenas o caso em que G possui centro finito, este caso não será contemplado. Se $\tilde{\Lambda}$ é um cone convexo próprio em \mathfrak{a} , então Γ também é próprio, assim $W(S)$ deixa invariante um cone em \mathfrak{a} . Como $W(S)$ é finito, isto acontece se, e somente se, existir um elemento não nulo $H \in \mathfrak{a}$ que é deixado fixo por $W(S)$, isto é, $wH = H$ para todo $w \in W(S)$. Considere o seguinte elemento de $\tilde{\Lambda}$

$$H = \sum_{w \in W(S)} wH',$$

onde H' é um elemento não nulo qualquer em Γ . Como $W(S)$ é finito, temos que $wH = H$. Pela forma como H foi escolhido é claro que $H \in \tilde{\Lambda}$. Além disso, temos que H pertence ao fecho de uma câmara, digamos \mathfrak{a} , a menos que $W(S) = \{1\}$, pois o único elemento que fixa um elemento do interior de uma câmara é a identidade. Portanto que é possível encontrar um ponto que é fixo por $W(S)$ em uma câmara que intercepta $\tilde{\Lambda}$. ■

Lema 4.4. *Existe $\Theta \subset \Pi$ tal que $W(S) \subset W_\Theta$*

Demonstração: Seja $H \in \mathfrak{a}^+ \cap \tilde{\Lambda}$ um ponto fixo por $W(S)$ e seja Π o sistema simples de raízes associado à câmara \mathfrak{a}^+ . Temos pelo teorema 1.1.2.8 de [2] que o maior subgrupo do grupo de Weyl que deixa H fixo é da forma W_Θ , onde Θ é um subconjunto do sistema simples de raízes Π e W_Θ é o subgrupo gerado pelas reflexões definidas pelas raízes em Θ . Temos pela proposição 9.20 de [6] que Θ é dado por $\Theta = \{\alpha \in \Pi : \alpha(H) = 0\}$. Portanto $W(S) \subset W_\Theta$ ■

O lema anterior garante a existência de um subconjunto Θ do sistema simples

de raízes Π tal que $W(S) \subset W_\Theta$. O próximo lema vai um pouco além garantindo a existência de um subconjunto $\Theta \subset \Pi$ tal que ocorre a igualdade $W(S) = W_\Theta$.

Seja $H \in \mathfrak{a}$ fixo por $W(S)$. Quando $\Theta(H)$ é minimal, isto é, não existe $H' \in \mathfrak{a}$ ponto fixo por $W(S)$ tal que $\Theta(H')$ seja subconjunto próprio de $\Theta(H)$, dizemos que H é um *ponto fixo de regularidade maximal*.

Lema 4.5. *Seja $H \in \tilde{\Lambda}$ um ponto fixo para $W(S)$. Se H é um ponto fixo de regularidade maximal, então $W(S) = W_\Theta(H)$. Além disto existe $\xi_0 \in G/P_\Theta(H)$ tal que $\pi^{-1}(\xi_0) \in C$.*

Demonstração: Seja $H \in \tilde{\Lambda}$ um ponto fixo de regularidade maximal para $W(S)$ e seja $\Theta = \Theta(H)$. Seja P_Θ o subgrupo parabólico associado a Θ e considere a fibração canônica equivariante $\pi : G/P \rightarrow G/P_\Theta$. Denote por C e C_Θ os conjuntos de controle invariantes para S , respectivamente, em G/P e G/P_Θ . Suponha que $b_0 \in C_0$, assim, $\xi_0 = \pi(b_0) \in (C_\Theta)_0$. Seja $C_{\xi_0} = C \cap \pi^{-1}(\xi_0)$, então C_{ξ_0} é o conjunto de controle invariante do semigrupo $S(\Theta)$, que é um semigrupo do grupo de Lie semi-simples $G(\Theta)$, cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}(\Theta)$. A fibra $\pi^{-1}(\xi_0)$ coincide com a fronteira maximal de $G(\Theta)$. Também, $W(S)$ é um subgrupo de $W(S(\Theta))$.

A hipótese de que Θ é minimal implica que $W(S)$ não possui vetor diferente de zero fixo na subálgebra $\mathfrak{a}(\Theta)$ de $\mathfrak{g}(\Theta)$. Pela proposição 3.30, $\tilde{w}b_0 \in C_{\xi_0} \subset C$ para todo $w \in W_\Theta$, assim, novamente pela proposição 3.30, $W(S) = W_\Theta$

■

Agora o teorema que nos conduz ao conceito de tipo parabólico de um semigrupo:

Teorema 4.6. *Fixe uma escolha canônica com $b_0 \in C_0$ e $A^+ \in \sigma$. Seja Π o sistema simples de raízes associado com a decomposição de Iwasawa definida por b_0 . Então existe $\Theta \subset \Pi$ tal que $W(S, A^+) = W_\Theta$. Além disso, seja C_Θ o S -c.c.i. em G/P_Θ . Então $C = \pi^{-1}(C_\Theta)$ onde $\pi : G/P \rightarrow G/P_\Theta$ é a fibração canônica.*

Demonstração: A existência de um $\Theta \subset \Pi$ tal que $W(S, A^+) = W_\Theta$ segue da

primeira afirmação do lema 4.5 o fato de que $C = \pi^{-1}(C_\Theta)$ decorre da segunda afirmação do mesmo lema e do item (iii) da proposição 2.21 ■

Definição 4.7. *O subconjunto $\Theta \subset \Pi$ maximal tal que $W(S) = W_\Theta$ é denominado **tipo parabólico do semigrupo S** e denotado por $\Theta(S)$.*

Vamos apresentar agora um resultado do artigo [10] o qual garante que, para cada Θ , é possível encontrar um semigrupo S cujo tipo parabólico $\Theta(S) = \Theta$.

Proposição 4.8. *Suponha que $C \subset G/P_\Theta$ seja admissível e satisfaça $C = \text{fe}(\text{int}C)$. Então o semigrupo de compressão*

$$S_C = \{g \in G : gC \subset C\}$$

possui interior não-vazio. Além disto C é o conjunto de controle invariante para S_C em G/P_Θ , $C_0 = \text{int}C$ e o tipo parabólico de S_C é Θ .

Demonstração: Tome $x \in \text{int}C$ e seja σ uma célula aberta contendo C . Pelo lema 2.6 de [10] existe um elemento split regular $h \in G$ tal que x é seu atrator e $\sigma = \sigma(h)$. A sequência h^k contrai σ em x quando $k \rightarrow +\infty$. Como C é um subconjunto compacto de σ , a contração é uniforme em C . Isto significa que para qualquer vizinhança U de x existe k_0 tal que $h^k C \subset U$ para $k \geq k_0$. Em particular se tomarmos $U \subset C$ temos que $g = h^{k_0}$ está em S_C . Além disso, o conjunto $\{f : f(C) \subset U\}$ é aberto na topologia aberto-compacta das aplicações contínuas de G/P_Θ . Pela continuidade da ação de G temos que $g \in \text{int}S_C$ o que mostra a primeira parte da proposição.

Para a segunda afirmação note que C é invariante por S_C pois os atratores para os elementos split regulares no $\text{int}S$ estão contido no conjunto de transitividade do conjunto de controle invariante. ■

Agora vamos apresentar um exemplo:

Exemplo 4.9. Seja $G = Sl(n, \mathbb{R})$ e $\Theta = \{\alpha_{23}, \alpha_{34}, \dots, \alpha_{(i-1)i}, \dots, \alpha_{(n-1)n}\}$. Temos que G/P_Θ é a variedade flag $\mathbb{R}P^{n-1}$. Considere o octante positivo de $\mathbb{R}P^{n-1}$

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

O semigrupo de compressão de C é $Sl(n, \mathbb{R}^+)$. Temos ainda que C é admissível e satisfaz $C = \text{fe}(\text{int}C)$, temos assim, pela proposição anterior, que o tipo parabólico de S_C é Θ .

4.2 Decomposição multiplicativa de Jordan

Nesta seção apresentamos a decomposição multiplicativa de Jordan completa de uma matriz $g \in G \subset \mathbb{GL}(n; \mathbb{R})$ e também sua relação com a decomposição de Iwasawa do grupo de Lie G .

Seja $g \in \mathbb{GL}(n; \mathbb{R})$ e seja

$$g = g_s + g_n \tag{4.1}$$

sua decomposição de Jordan. Como g é invertível todos os seus autovalores são não-nulos o que implica que g_s é invertível. Denotando $g_u := 1 + g_s^{-1}g_n$ podemos reescrever 4.1 como

$$g = g_s g_u, \tag{4.2}$$

a qual é denominada *decomposição multiplicativa de Jordan* de g . Os próximos dois resultados nos fornecem informações sobre esta decomposição. O primeiro refina a decomposição multiplicativa, o segundo a relaciona com alguma decomposição de Iwasawa de G .

Antes dos resultados, vamos fixar alguns conceitos

Definição 4.10. *Seja $g \in \mathbb{GL}(n; \mathbb{R})$ um elemento semisimples. Dizemos que:*

- i) g é elíptico se todos os seu autovalores (inclusive os complexos) possuem módulo 1.*

ii) g é hiperbólico se todos os seus autovalores forem reais positivos.

Note que uma matriz é caracterizada como elíptica ou hiperbólica exclusivamente de acordo com as características dos seus autovalores. Como autovalores de uma matriz são invariantes por conjugação, temos que toda matriz conjugada a uma matriz elíptica também é elíptica. O mesmo para as conjugações de uma matriz hiperbólica.

Neste ponto apresentamos uma decomposição que refina a decomposição multiplicativa de Jordan:

Teorema 4.11. *Cada $g \in \mathbb{GL}(n; \mathbb{R})$ pode ser escrito de maneira única como*

$$g = ehg_u \tag{4.3}$$

onde $e, h, g_u \in \mathbb{GL}(n; \mathbb{R})$ são elíptico, hiperbólico, e unipotente, respectivamente, e comutam entre si.

Demonstração: Seja $g \in \mathbb{GL}(n; \mathbb{R})$, e seja j a forma de Jordan real da matriz g . Para simplificar a notação, vamos denotar também por g a transformação linear determinada pela matriz g . Seja B a base de Jordan do operador g , isto é, a base na qual a matriz do operador g é a matriz j . Esta base nos dá uma decomposição de \mathbb{R}^n em subespaços invariantes J_i tal que a matriz do operador $g_i = g|_{J_i}$ é um bloco de Jordan do operador g . Seja λ_i o autovalor de g_i . Temos dois casos a considerar: o caso em que λ_i é um número real, e também o caso em que λ_i é um número complexo que não é real. Se λ_i for real, então a matriz de g_i em relação à base de Jordan é:

$$j(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

e cada bloco de Jordan $j(\lambda_i)$ pode ser decomposto como:

$$j(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_i^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e assim obtemos a decomposição de Jordan multiplicativa completa do bloco:

$$j(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\lambda_i| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\lambda_i| & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\lambda_i| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |\lambda_i| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_i^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, o caso em que $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Suponhamos então $\lambda_i = a + ib$ com $b \neq 0$. Neste caso,

$$j(\lambda_i) = \begin{pmatrix} D(\lambda_i) & Id_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D(\lambda_i) & Id_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D(\lambda_i) & Id_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

onde $D(\lambda_i) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e $Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Neste caso podemos decompor o bloco $j(\lambda_i)$ como:

$$j(\lambda_i) = \begin{pmatrix} D(\lambda_i) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D(\lambda_i) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D(\lambda_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D(\lambda_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_2 & D(\lambda_i)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Id_2 & D(\lambda_i)^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id_2 & D(\lambda_i)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Id_2 \end{pmatrix},$$

Denotando $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$ e $\sin(\theta) = \frac{b}{\rho}$, podemos escrever $\lambda_i = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Assim temos $D(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$, denotando $R(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ e por $h = \rho Id_n$ a matriz diagonal $h = \text{diag}(\rho, \rho, \dots, \rho)$ de mesma ordem de $j(\lambda_i)$ temos a decomposição multiplicativa completa de Jordan do bloco $j(\lambda_i)$:

$$j(\lambda_i) = ehg_u,$$

onde

$$e = \begin{pmatrix} R(\lambda_i) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R(\lambda_i) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R(\lambda_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R(\lambda_i) \end{pmatrix}, g_u = \begin{pmatrix} Id_2 & R(\lambda_i)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Id_2 & R(\lambda_i)^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id_2 & R(\lambda_i)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Id_2 \end{pmatrix},$$

■

Apresentamos agora uma relação entre a decomposição multiplicativa completa de Jordan e a decomposição de Iwasawa de um grupo de Lie de matrizes semisimples:

Teorema 4.12. *Seja \mathfrak{g} uma algebra de Lie semisimples real e \tilde{G} o grupo adjunto $Ad(G)$. Seja $\tilde{G} = KAN$ qualquer decomposição de Iwasawa de G . Então;*

- i) $g \in G$ é elíptico se, e somente se é conjugado a um elemento em K .*
- ii) $g \in G$ é hiperbólico se, e somente se é conjugado a um elemento de A .*
- iii) $g \in G$ é unipotente se, e somente se é conjugado a um elemento de N .*

Demonstração: Veja [1], página 431.

■

Definição 4.13. *Um toro n -dimensional em um grupo de Lie G é um subgrupo $T \subset G$ que é isomorfo ao produto direto da esfera unitária S^1 por si mesma n vezes.*

Proposição 4.14. *Seja $g \in \mathbb{GL}(n; \mathbb{R})$ um elemento semisimples. Então g é elíptico se, e somente se g pertence a um toro n – dimensional.*

Demonstração: Se g é elíptico, então g é diagonalizável em $\mathbb{GL}(n; \mathbb{C})$, e seus autovalores são todos de norma 1. Ou seja, após diagonalizado, g é da forma

$$diag(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$$

que é um elemento de um toro n -dimensional. A recíproca é imediata. ■

4.3 Tipo parabólico de um semigrupo e forma de Jordan dos elementos de seu interior

Nesta seção vamos relacionar o tipo parabólico de um semigrupo aberto S com a forma de Jordan de seus elementos.

Sejam $G = Sl(n, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ um semigrupo aberto, cujo tipo parabólico seja $\Theta(S)$.

Proposição 4.15. *Dado $g \in G$, considere a decomposição multiplicativa completa de Jordan de g*

$$g = ehg_u.$$

Então existe uma decomposição de Iwasawa $G = KAN$ tal que $e \in K$ e $h = \exp H \in A$.

Demonstração: Segue diretamente dos teoremas (4.11) e (4.12). ■

Ainda de acordo com as notações fixadas no teorema acima, seja $g \in S$, vamos inicialmente relacionar a decomposição $g = ehg_u$ com o tipo parabólico de S . Mais especificamente, através de um subconjunto do espaço de raízes associado ao elemento hiperbólico h da decomposição.

Como $h \in A$ existe uma câmara de Weyl A^+ tal que $h \in \text{fe}(A^+)$. Denote por σ o sistema simples de raízes associado a A^+ e considere novamente o seguinte subconjunto

$$\Theta(h) = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(\log h) = 0\}. \quad (4.4)$$

Considere o subgrupo parabólico $P_{\Theta(h)}$. A decomposição de Levi, decompõe $P_{\Theta(h)}$ como

$$P_{\Theta(h)} = Z(P_{\Theta(h)})L_{\Theta(h)},$$

onde $Z(P_{\Theta(h)})$ é o centro de $P_{\Theta(h)}$ em si próprio e $L_{\Theta(h)}$ é a componente semisimples da decomposição que é um subgrupo redutível.

O primeiro objetivo a ser alcançado com os próximos resultados é mostrar que $\Theta(h)$ está contido no tipo parabólico $\Theta(S)$ de S se h está em $\text{int}(S)$.

Lema 4.16. *Decomponha $g \in S$ como $g = ehg_u$. Então existe um inteiro $k > 0$ tal que $h^k \in S$.*

Demonstração: Temos pela proposição 4.14 que e está em um toro n -dimensional $T \subset G$. Como S é aberto, podemos encontrar $v \in T$ de ordem finita tal que $vhg_u \in S$. De fato após diagonalizado em $\mathbb{GL}(n; \mathbb{C})$ e tem a forma

$$\text{diag}(e^{it_1}, \dots, e^{it_n}).$$

Como S é aberto, podemos encontrar naturais m_1, \dots, m_n e n_1, \dots, n_n de tal forma que

$$v = \text{diag}(e^{i2\pi \frac{m_1}{n_1}}, \dots, e^{i2\pi \frac{m_n}{n_n}})$$

satisfaça $vhg_u \in S$. Basta tomar $\frac{m_i}{n_i}$ suficientemente próximo de $\frac{t_i}{2\pi}$. Assim, existe um inteiro $l \geq 0$ com $h^l g^l \in S$. A saber, l pode ser tomado como $l = n_1 n_2 \cdots n_n$. Por outro lado, g_u^l é um elemento unipotente no grupo de Lie redutível $L_{\Theta(h)}$. Assim para qualquer vizinhança U de g_u^l em $L_{\Theta(h)}$ existe $z \in U$ com ordem finita (veja [7]). Se U for suficientemente pequena, $h^l z \in S$. Como z comuta com h , pois $z \in L_{\Theta(h)}$, temos que z comuta com h^l . Assim, se s for a ordem de z , temos que $(h^l)^s \in S$.

■

A proposição seguinte nos garante a existência de um elemento $h \in S$ tal que $\Theta(S) \subset \Theta(h)$. Ela é de fundamental importância em nosso propósito de relacionar o tipo parabólico de um semigrupo com a forma de Jordan dos elementos em seu interior.

Proposição 4.17. *Existe algum subgrupo split A_1 e $a \in A_1 \cap \text{int}(S)$ tal que $\Theta(S) \subset \Theta(h)$.*

Demonstração: Pelo lema 4.3 temos que existe $H \in \tilde{\Lambda}$ que é fixado por todo $w \in W(S)$. Assim $h = \exp H \in \Lambda$, ou seja, existe $n \in N^+$ tal que $g = hn \in S$. Seja $g = g_s g_u$ a decomposição multiplicativa de Jordan de g . Como h é hiperbólico temos que g_s também é hiperbólico, assim temos que g_s está em algum subgrupo split, digamos A_1 , de G (teorema IX.2 de [1]). Pelo lema anterior, existe k tal que $a = g_s^k \in S$. Temos que um elemento do grupo de Weyl de A_1 fixa a se, e somente se ele fixa g_s . Como h e g_s são conjugados, existe $u \in G$ tal que $uAu^{-1} = A_1$ e $uhu^{-1} = a$. É claro que u leva câmaras que possuem h em seu fecho em câmaras que possuem a em seu fecho. Também, multiplicando u à direita por elementos do grupo de Weyl fixando h e à esquerda por aqueles fixando a é possível saber quais câmaras são permutadas por u (se h está nas câmaras A^+ e wA^+ então $wh = h$ pois a W -órbita de h cruza wA^+ apenas uma vez). Usando a agora o isomorfismo entre os grupos de Weyl de A e A_1 temos que a é fixado por todos elementos de $W(S)$ (na realidade pela imagem isomorfa de $W(S)$ no grupo de Weyl de A_1 . ■

Seja $Z(L_{\Theta(h)}^0)$ o centro de $L_{\Theta(h)}^0$ em si mesmo, e seja $M_{\Theta(h)}$ a componente semi-simples de $L_{\Theta(h)}^0$. Como $L_{\Theta(h)}^0$ é redutível temos que $x \in L_{\Theta(h)}^0$ pode ser escrito de maneira única como $x = yz$, com $y \in M_{\Theta(h)}$ e $z \in Z(L_{\Theta(h)}^0)$ um elemento do centro de $L_{\Theta(h)}^0$ em $L_{\Theta(h)}^0$.

Lema 4.18. *Mantenha as notações acima e considere a projeção $p : L_{\Theta(h)}^0 \longrightarrow M_{\Theta(h)}$ definida por $p(yz) = y$. Então*

$$p(S \cap L_{\Theta(h)}^0) = M_{\Theta(h)}.$$

Demonstração: Sendo uma projeção, p é uma aplicação aberta e assim $p(S \cap L_{\Theta(h)}^0)$ é um semigrupo aberto em $M_{\Theta(h)}$. Pelo lema anterior $h^k \in S \cap L_{\Theta(h)}^0$, e como $h^k \in Z(L_{\Theta(h)}^0)$ temos que $p(h^k) = 1$, donde $p(S \cap L_{\Theta(h)}^0) = M_{\Theta(h)}$. ■

Corolário 4.19. *Para todo $x \in M_{\Theta(h)}$ existe $a \in A$ tal que $xa \in S$.*

Demonstração: O centro de $L_{\Theta(h)}^0$ tem a forma $Z_K Z_{\mathfrak{p}}$ com $Z_K \subset K$, compacto e $Z_{\mathfrak{p}} \subset A$. Dado $x \in M_{\Theta(h)}$ o lema acima mostra a existência de $a \in Z_K Z_{\mathfrak{p}}$ com $ax = xa \in S$. Como Z_K é compacto nós podemos argumentar como na demonstração do lema 4.16, e obter $ax \in S$, com $a \in Z_{\mathfrak{p}} \subset A$. ■

Corolário 4.20. *Dado um “flag” \mathbb{F}_{Θ} , denote por b^{Θ} o atrator de A^+ em \mathbb{F}_{Θ} e por C_{Θ}^+ o conjunto atrator de S , também em \mathbb{F}_{Θ} . Então a órbita $M_{\Theta(h)} b^{\Theta} \subset C_{\Theta}^+$.*

Demonstração: Tome $x \in M_{\Theta(h)}$ e seja $a \in A$ tal que $xa \in S$, disto segue que $xb^{\Theta} \subset C_0^+$. ■

Lema 4.21. *Mantenha as notações anteriores com b^{Θ} sendo o atrator de A^+ em \mathbb{F}_{Θ} . Então, $M_{\Theta(h)} b^{\Theta}$ está contida na célula aberta de Bruhat determinada por A^+ se, somente se $\Theta(h) \subset \Theta$.*

Demonstração: Suponha que $\Theta(h) \subset \Theta$. Então $M_{\Theta(h)} \subset P_{\Theta}$, o grupo de isotropia em b^{Θ} . Então $M_{\Theta(h)} b^{\Theta} = b^{\Theta}$.

Para a recíproca denote por \mathcal{W}_{Θ} o subgrupo do grupo de Weyl gerado pelas reflexões com respeito as raízes em Θ . Suponha que algum $\alpha \in \Theta(h)$ não esteja em Θ , e seja r_{α} a reflexão com respeito a α . Então $r_{\alpha} \notin \mathcal{W}$, assim se w_{α} for um representante de r_{α} no normalizador M^* de A então $w_{\alpha} b^{\Theta} \neq b^{\Theta}$. Contudo, $w_{\alpha} \in M_{\Theta(h)}$ e assim $M_{\Theta(h)} b^{\Theta}$ não está contida na célula aberta de Bruhat. ■

Corolário 4.22. *Para $g \in S$ escreva $g = ehg_u$, e defina $\Theta(h)$ como em (4.4). Então $\Theta(h) \subset \Theta(S)$.*

Demonstração: Segue imediatamente do lema anterior e da definição do tipo parabólico de S , levando-se em consideração que $S \cap A^+ \neq \emptyset$.

■

Vamos agora enunciar como um teorema o resultado que associa o tipo parabólico de um semigrupo com a forma canônica de Jordan dos elementos em seu interior.

Teorema 4.23. *Seja $\Theta(S)$ o tipo parabólico do semigrupo S . Então existe um elemento split $h \in \text{int}(S)$ tal que $\Theta(h) = \Theta(S)$*

Demonstração: A proposição 4.17 nos garante a existência de elemento split $h \in \text{int}(S)$ tal que $\Theta(S) \subset \Theta(h)$. Por outro lado, o corolário 4.22 nos garante que $\Theta(h) \subset \Theta(S)$ para todo elemento split no interior de S . Portanto temos o desejado ■

Apenas para ilustrar apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.24. Considere $G = Sl(3, \mathbb{R})$ e $S = Sl(n, \mathbb{R})$, o interior de S é constituído pelas matrizes de G com todas entradas estritamente positivas. Um elemento de irregularidade maximal que se pode encontrar no interior de S é

$$\begin{pmatrix} 1/\lambda^2 & \lambda & \lambda \\ 1/\lambda^2 & 2\lambda & \lambda \\ 1/\lambda^2 & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

que é conjugado ao elemento

$$\begin{pmatrix} 1/\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Como \mathfrak{a} é nilpotente, temos que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{a} \rightarrow A$ é um difeomorfismo. O mesmo vale para a aplicação exponencial

$$\exp : \text{ad}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Ad}(A) \subset Gl(\mathfrak{g}).$$

Outro fato importante para a discussão que segue, é que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{End}(\mathfrak{g}) \end{array} ,$$

ou seja,

$$\exp(\text{ad}(X)) = \text{Ad}(\exp(X)).$$

Antes de prosseguir vamos definir alguns conceitos. Um elemento $h \in A$ é denominado um split regular quando $H = \ln(h) \in \mathfrak{a}$ é um elemento regular em \mathfrak{a} , ou seja, quando $\alpha(H) \neq 0$ para toda raiz do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Seja $h \in A$ não regular e considere novamente o subconjunto $\Theta(h)$ das raízes que anulam h

$$\Theta(h) = \{\alpha \in \Pi : \alpha(\ln(h)) = 0\}.$$

Um elemento split $h \in S$ é dito irregular quando $\Theta(h) \neq \emptyset$. Esta denominação deve-se ao fato de que um elemento $H \in \mathfrak{a}$ é regular quando $\alpha(H) \neq 0$, para toda raiz α no sistema simples de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Seja $h \in S$ um elemento split tal que $\Theta(h) = \Theta(S)$. Dizemos que o elemento h é de *irregularidade maximal*. Devido ao corolário 4.22 um h de irregularidade maximal é um elemento com maior irregularidade que é possível encontrar em S .

Observe que os elementos regulares são os elementos do interior das câmaras de Weyl, enquanto que os elementos irregulares pertencem à fronteira das câmaras.

Fixada esta terminologia, o teorema 4.23 nos diz que o tipo parabólico $\Theta(S)$ é caracterizado pelos elementos de irregularidade maximal que se pode encontrar em S . Do mesmo teorema e também do corolário 4.22 temos que o tipo parabólico de S caracteriza a forma dos elementos de irregularidade maximal em S .

Seja $H \in \mathfrak{a}$, temos que $\text{ad}H$ é diagonalizável em \mathbb{R} (teorema 12.22 de [6]), e se escreve na forma diagonal como $\text{diag}(\alpha_1(H), \dots, \alpha_n(H))$, onde os funcionais α_i são as raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Assim, se $h = \exp(H)$, então $\text{Ad}h = \exp(\text{ad}H)$ se escreve na forma diagonal como $\text{diag}(e^{\alpha_1(H)}, \dots, e^{\alpha_n(H)})$, onde e denota a aplicação exponencial real. Desta forma, se $\alpha_i \in \Theta(h)$, então o i -ésimo autovalor de $\text{Ad}h$ é igual a 1. Por outro lado, como a exponencial um difeomorfismo entre \mathfrak{a} e A , temos que se o i -ésimo autovalor de $\text{Ad}h$ for igual a 1, então $\alpha_i \in \Theta(h)$. Portanto a quantidade de 1's que aparece no espectro de $\text{Ad}h$ nos dá uma “medida” da irregularidade de h . Se $h \in S$, temos que a cardinalidade de $\Theta(S)$ nos diz a quantidade máxima de 1's que pode aparecer no espectro de $\text{Ad}h$.

4.4 O caso $Sl(n, \mathbb{R})$

Vamos adotar em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ a decomposição de Iwasawa canônica que foi descrita no exemplo 1.34. Nesta escolha, a subálgebra abeliana maximal escolhida foi

$$\mathfrak{a} = \{diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \sum \lambda_i = 0\}.$$

Em $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ seja E_{ij} a matriz cuja entrada ij é igual a 1 e as restantes são nulas. O conjunto $\{E_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ forma uma base de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Seja $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, as coordenadas de X nesta base são $(x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{in}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn})$, para simplificar a notação vamos re-indexar as coordenadas substituindo o índice ij pelo número natural $(n-1)i + j$ que indica a posição ocupada pela coordenada x_{ij} .

Agora vamos explorar algumas relações entre o espectro de Adh e os espectro de $h \in Sl(n, \mathbb{R})$. Sejam $h = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Sl(n, \mathbb{R})$ e $H = (\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n) \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, temos, pelo exemplo 1.30 que a matriz de adH em relação à base E_{ij} é a matriz a matriz diagonal

$$diag(\lambda_1 \lambda_1^{-1}, \lambda_1 \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_1 \lambda_n^{-1}, \dots, \lambda_i \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_i \lambda_n^{-1}, \dots, \lambda_n \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n \lambda_n^{-1}).$$

Note que a entrada $\lambda_i \lambda_i^{-1} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Temos assim que os elementos E_{ii} de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ pertencem ao auto-espaço associado ao peso nulo, ou seja, $\{E_{ii}\}_{i=1,\dots,n} \subset \mathfrak{g}_0$

Sejam $S \subset G$ um semigrupo aberto, e $h \in A$ um elemento split regular, então $\mathfrak{g}_0 = \{E_{ii}\}_{i=1,\dots,n}$. Agora seja $h \in A$ um elemento split não regular e $\Theta(h) = \{\alpha \in \Pi : \alpha(\ln h) = 0\}$. Se $\alpha_{ij} \in \Theta(h)$, então E_{ij} está no auto-espaço associado ao peso nulo, reciprocamente, se $E_{ij} \in \mathfrak{g}_0$ então $\alpha_{ij} \in \Theta(h)$. Ou seja, $\Theta(h)$ caracteriza o auto-espaço associado ao auto-valor nulo de $ad(h)$. Além disto, se $h \in A \cap S$ é de irregularidade maximal temos que \mathfrak{g}_0 tem a maior dimensão possível.

Assim, $h \in A \cap S$ é de irregularidade maximal se, e somente se, \mathfrak{g}_0 tem a maior dimensão possível. Além disto temos que $\alpha_{ij} \in \langle \Theta(h) \rangle$ se, e somente se $\lambda_i = \lambda_j$, o que

nos permite obter informações sobre os blocos de Jordan de $h = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in A$.

Mais especificamente, temos que os autovalores λ_i e λ_j coincidem se, e somente se, $\alpha_{ij} \in \Theta(h)$, na verdade isto vale para qualquer $h \in A$. Desta forma fixando um autovalor $\lambda_i = \lambda$, temos que o conjunto dos autovalores que coincidem com λ_i é o conjunto dos autovalores $\{\lambda_j : \alpha_{ij} \in \Theta(h)\}$. A partir desta observação podemos construir os blocos de Jordan de h , reciprocamente a partir dos blocos de Jordan de h obtemos $\Theta(h)$. Isto nos dá uma caracterização da forma de Jordan do elemento split $h \in A$ a partir de $\Theta(h)$. Assim temos que um elemento split $h \in S \cap A$ de irregularidade maximal é aquele cujos blocos de Jordan são os maiores possíveis pois para um tal elemento $\Theta(h) = \Theta(S)$. Equivalentemente é aquele cuja auto-espaco associado ao autovalor nulo de $\text{Ad}(h)$ é de maior dimensão possível.

A partir destas considerações, obtemos também quais são os maiores blocos de Jordan possíveis de se encontrar para um elemento qualquer $g \in S$, a saber, são os mesmos que obtemos para um elemento split $h \in S$ de irregularidade maximal. Seja $g \in S$, suponha que g já esteja na forma canônica de Jordan. Não há perda de generalidade nesta suposição pois se g não está na forma canônica de Jordan, existe $u \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que ugu^{-1} é a forma canônica de Jordan de g . Seja $g = ehg_u$ a decomposição multiplicativa de Jordan completa de g , se os auto-valores generalizados de g são todos reais, vimos na seção 4.2 que o bloco de Jordan de g associado ao auto-valor λ se decompõe como

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\lambda_i| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\lambda_i| & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\lambda_i| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |\lambda_i| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_i^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí podemos perceber que o elemento hiperbólico h é que determina o maior tamanho para os blocos de Jordan dos elementos $g \in S$, se algum autovalor λ de g for complexo não-real, o que pode acontecer é que em um bloco de h estejam

contidos mais de um bloco de g o que não interfere no maior tamanho possível de cada bloco.

Referências Bibliográficas

- [1] Helgason, S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [2] G. Warner, *Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups*. Springer-Verlag, 1972.
- [3] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman and Company, 1971.
- [4] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: an elementary introduction*. Springer, New York (2003).
- [5] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Prentice-Hall, New Jersey, (1974).
- [6] L.A.B. San Martin, *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp (1999).
- [7] L.A.B. San Martin, *Invariant Control Sets on Flag Manifolds*. Mathematics of Control, Signals and Systems 6 (1993), 41-61.
- [8] L. A. B. San Martin and P.A. Tonelli, *Semigroup actions on homogeneous spaces*, Semigroup Forum, 50 (1995), 59-88.
- [9] Osvaldo Germano do Rocio and L. A. B. San Martin, *Connected Components of Open Semigroups in Semi-simple Lie groups*, Semigroup Forum, 69 (2004), 1-29.

- [10] L.A.B. San Martin, *Maximal semigroups in semi-simple Lie Groups*. Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 5165–5184.

Índice Remissivo

- álgebra de Lie, 5
- álgebra de Lie abeliana, 12
- álgebra de Lie nilpotente, 12
- álgebra de Lie semi-simples, 13
- álgebra de Lie simples, 13
- álgebra de Lie solúvel, 12
- álgebra derivada, 12

- ação, 7
- ação efetiva, 7
- ação transitiva, 7
- aplicação exponencial, 14
- automorfismo de álgebras de Lie, 6
- automorfismos de grupos de Lie, 6

- câmara positiva, 22
- câmaras de Weyl, 22
- centralizador da álgebra, 6
- centralizador do grupo, 5
- centro, 5
- conjugação, 96
- conjunto de controle, 47
- conjunto de controle efetivo, 52
- conjunto de controle invariante, 53
- conjunto de controle maximal, 52

- conjunto de transitividade, 49

- Decomposição de Cartan, 18
- Decomposição de Iwasawa, 23
- Decomposição global de Iwasawa, 23

- elemento elíptico, 95
- elementos regulares, 22

- Flag maximal, 11

- grupo de Lie, 4

- homomorfismo de álgebras de Lie, 6
- homomorfismos de grupos de Lie, 6

- ideal da álgebra de Lie, 11
- identidade de Jacobi, 5
- involução de Cartan, 18
- isomorfismo de álgebras de Lie, 6
- isomorfismos de grupos de Lie, 6

- normalizador da álgebra, 6
- normalizador do grupo, 5

- raíz restrita, 20
- radical solúvel, 13
- representação adjunta, 7

representação do grupo de Lie, 6

série central descendente, 12

série derivada, 12

sistema positivo de raízes, 22

subálgebra de Lie, 6

subálgebra parabólica minimal, 25

subgrupo a um parâmetro, 13

subgrupo de isotropia, 9

subgrupo de Lie, 4

subgrupo parabólico, 25

subgrupo parabólico minimal, 25

variedade flag maximal, 25

Variedades “Flag”, 9

variedades homogêneas, 9