

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EMERSON DIONISIO BELANÇON

Topologia da Polar de uma Curva Plana com um par Característico

MARINGÁ

2009

Aos meus pais, Antonio e Mercedes, meu filho, Miguel e minha namorada Silvana. Minha homenagem e gratidão, por tudo o que representam em minha vida.

Agradecimentos

À Deus, simplesmente por tudo.

À minha família por toda estrutura que me possibilitou mais esta etapa.

À Prof^a. Dr^a. Maria Elenice Rodrigues Hernandes, por ter sido a chave mestra deste trabalho com sua paciência, sugestões e críticas.

Ao programa de pos-graduação em matemática, em especial à Lúcia e aos professores pela boa formação que me proporcionaram.

Aos demais colegas de pós-graduação, pelas críticas e sugestões.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é o de caracterizar a topologia da curva polar genérica de uma curva algebróide plana irredutível em $\mathbb{C}[[X, Y]]$ com um par característico, através do seu polígono de Newton. Com isto, apresentaremos o principal resultado (Teorema (3.14)) que descreve totalmente a topologia da curva polar genérica em termos da topologia da curva que a define.

Abstract

The main objective of this work is to characterize the topology of the generic polar curve of an irreducible plane algebroid curve in $\mathbb{C}[[X, Y]]$ with just one characteristic pair using the Newton polygon. With this, we will present the main result (Theorem (3.14)) that describe completely the topology of the generic polar curve in terms of the topology of the curve that define it.

ÍNDICE

Introdução	2
1 Preliminares	5
1.1 Anel das Séries de Potências	5
1.2 Teorema da Preparação de Weierstrass	9
1.3 Fatoração de Séries de Potências	13
1.4 Teorema de Newton-Puiseux	15
1.5 Curvas Planas	22
1.5.1 Curvas Algebróides Planas	23
1.5.2 Parametrização e Expoentes Característicos	28
1.5.3 Germes de Curvas Analíticas	35
1.6 Índice de Interseção	37
1.7 Polígono de Newton	40
2 Topologia das Curvas Polares	44
2.1 Curvas Polares	44
2.2 Topologia de Curvas Planas	48
2.3 Topologia da Polar de uma Curva Plana	52

3	Polar de uma Curva Plana com um par Característico	54
3.1	Equação da Curva Polar	54
3.2	Polígono de Newton da Polar Genérica	61
3.3	Ramos Não-Genéricos	85
A	Apêndice	90
A.1	Frações Contínuas	90
A.2	Polinômios Simétricos	97
	Referências	99

INTRODUÇÃO

As singularidades das variedades algébricas e analíticas são até hoje um campo de pesquisa ativo que combina técnicas de diferentes campos da matemática, como a Geometria, a Álgebra e a Topologia.

Algumas curvas, com ponto singular, aparecem nos trabalhos de geômetras da Grécia antiga e a primeira contribuição para um estudo sistemático de singularidades de curvas planas é devido à Isaac Newton. Mesmo que alguns problemas pertinentes ainda permaneçam em aberto, hoje, após os trabalhos de geômetras como Zariski, Burau, Brauner, Puiseux, Smith, Noether, Enriques e outros, existe uma teoria bem estabelecida para a análise e classificação das singularidades de curvas planas.

Por volta da década de 30, Zariski, Brauner e Burau provaram que dois germes de curvas analíticas planas irredutíveis são topologicamente equivalentes se, e somente se, as curvas possuem os mesmos pares característicos.

Um dos problemas pertinentes que surgiram foi na tentativa de determinar o tipo topológico da curva polar a partir do tipo topológico da curva plana que a define. Este problema, além de ser antigo, não tem uma solução simples. Pham [P] apresenta o primeiro exemplo mostrando que o tipo topológico da curva polar depende do tipo analítico da curva plana original e não somente do seu tipo topológico. Entretanto, algumas informações sobre a topologia da curva polar deduzidas do tipo topológico da curva plana original podem ser encontradas em [M], [KL], [C1], [C2] e [C3].

Neste trabalho vamos descrever a topologia da curva polar genérica a partir da topologia da curva original, no caso de curvas algebróides planas irredutíveis genéricas com único par de expoentes característicos.

Passemos agora a descrever a estrutura deste trabalho.

No capítulo 1, apresentamos os resultados referentes as curvas algebróides planas. Antes porém, é necessário um breve comentário sobre o anel das séries de potências formais. Os principais resultados deste capítulo são o Teorema da Preparação de Weierstrass e o Teorema de Newton-Puiseux. Nas Seções (1.5) e (1.6), vamos introduzir alguns conceitos sobre curvas algebróides planas, tais como parametrização de Newton-Puiseux, expoentes característicos e índice de interseção. O primeiro é uma ferramenta poderosa para estudar as propriedades da curva, o segundo auxilia na determinação da topologia de uma curva plana e o terceiro juntamente com os expoentes característicos, determinam completamente a topologia de curvas planas redutíveis. Ainda neste capítulo, apresentamos o conceito de curvas analíticas planas que nos permite uma interpretação geométrica do conjunto de zeros de um elemento do ideal maximal, devido a propriedade de convergência. Finalizamos o capítulo com uma seção voltada especificamente ao Polígono de Newton.

O capítulo 2 contém resultados sobre a topologia de curvas planas. Iniciamos com alguns resultados de curvas polares que são obtidas a partir de uma curva plana e em seguida introduzimos uma breve descrição da topologia de curvas analíticas planas. E para finalizar o capítulo, descrevemos o exemplo de Pham com mais detalhes.

No capítulo 3, iniciamos descrevendo os monômios que aparecem na curva polar de uma curva algebróide plana irredutível com um par característico. Na sequência, construímos o polígono de Newton da curva polar genérica de uma certa classe de curvas algebróides planas e a partir disto obtemos informações sobre sua topologia. Concluimos o capítulo mostrando que o polígono de Newton da curva polar de qualquer curva algebróide plana irredutível está contido na região limitada pelo polígono de Newton da polar genérica e a polar de um ramo elementar. Para finalizar a descrição, temos o Apêndice A, onde apresentamos os principais resultados sobre frações contínuas, os quais utilizaremos na construção do polígono de Newton da polar genérica, e um pequeno comentário sobre polinômios simétricos.

Preliminares

Neste capítulo, vamos introduzir alguns conceitos e resultados relacionados com as curvas algebróides planas que serão utilizados nesta dissertação. Curvas algebróides são curvas definidas por séries de potências formais, sendo necessário um breve estudo sobre séries de potências. As referências básicas nesta parte são os textos de [H] e [C4].

1.1 Anel das Séries de Potências

Seja K um corpo e X_1, X_2, \dots, X_r indeterminadas sobre K . Vamos denotar por $\mathfrak{R} = K[[X_1, X_2, \dots, X_r]]$ o conjunto de todas as somas formais do tipo

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + P_2 + \dots,$$

onde cada P_i é um polinômio homogêneo de grau i , nas indeterminadas X_1, X_2, \dots, X_r com coeficientes em K . Consideremos o polinômio nulo como sendo um polinômio homogêneo de qualquer grau.

Um elemento de \mathfrak{R} será chamado uma **série de potência formal** nas indeterminadas X_1, X_2, \dots, X_r com coeficientes em K .

Sejam $f = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$ e $g = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots$ elementos de \mathfrak{R} . Por definição temos

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad P_i = Q_i, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Em \mathfrak{R} , definimos as seguintes operações.

1. $f + g = \sum_{i=0}^{\infty} P_i + \sum_{i=0}^{\infty} Q_i = \sum_{i=0}^{\infty} (P_i + Q_i);$

$$2. f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} Q_i = \sum_{k=0}^{\infty} C_k, \text{ onde } C_k = \sum_{j=0}^k P_{k-j} Q_j.$$

É fácil verificar que, com estas operações, \mathfrak{R} é um anel comutativo com unidade chamado, **o anel das séries de potências formais** em r indeterminadas, com coeficientes em K .

Observe que o corpo K e o anel dos polinômios $K[X_1, X_2, \dots, X_r]$ são subanáis do anel \mathfrak{R} .

Os elementos de \mathfrak{R} podem ser representados explicitamente na forma

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_r=i} a_{i_1, i_2, \dots, i_r} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r},$$

onde $a_{i_1, i_2, \dots, i_r} \in K$.

Se K é o corpo dos números reais ou dos complexos, podemos considerar o subanel $A = K\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ de \mathfrak{R} das séries de potências absolutamente convergentes numa vizinhança da origem de K^r . Em outras palavras, os elementos de A são as séries f para as quais existe um número real positivo ρ , dependendo de f , tal que a série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_r=i} |a_{i_1, i_2, \dots, i_r}| \rho^{i_1+i_2+\dots+i_r}$$

converge absolutamente numa vizinhança da origem.

O seguinte resultado descreve os elementos inversíveis de \mathfrak{R} .

Proposição 1.1. *O elemento $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ em \mathfrak{R} é inversível se, e somente se, $P_0 \neq 0$.*

Demonstração: Suponha que o elemento $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ seja inversível, então existe $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in \mathfrak{R}$ tal que

$$1 = fg = P_0 Q_0 + (P_1 Q_0 + P_0 Q_1) + \dots \quad (1.1)$$

De acordo com a Proposição (1.1) temos que $f \in \mathfrak{R}$ é uma unidade, se e somente se, $\text{mult}(f) = 0$.

A multiplicidade das séries de potências satisfaz as seguintes propriedades que são semelhantes as do grau de polinômios.

Proposição 1.5. *Sejam $f, g \in \mathfrak{R}$. Então,*

1. $\text{mult}(fg) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$;
2. $\text{mult}(f \pm g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$, com sinal de igualdade válido sempre que $\text{mult}(f) \neq \text{mult}(g)$.

Demonstração: Sejam $f = P_n + P_{n+1} + \dots$, onde cada P_i é um polinômio homogêneo de grau i , com $P_n \neq 0$, ou seja, $\text{mult}(f) = n$ e $g = Q_m + Q_{m+1} + \dots$, onde cada Q_j é um polinômio homogêneo de grau j , com $Q_m \neq 0$, ou seja, $\text{mult}(g) = m$.

1) Note que $fg = P_n Q_m + P_n Q_{m+1} + \dots + P_{n+1} Q_m + \dots$

Como P_n e Q_m são polinômios homogêneos não nulos, então $P_n Q_m$ é um polinômio homogêneo não nulo de grau $n+m$. Logo, $P_n Q_m$ é a forma inicial de fg e conseqüentemente, $\text{mult}(fg) = n + m = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$.

2) Veja que

$$f \pm g = (P_n \pm Q_m) + (P_{n+1} \pm Q_{m+1}) + \dots$$

Como não sabemos nada sobre a característica do corpo K , vamos considerar dois casos.

Suponha $m = n$. Neste caso podemos ter:

- $P_n \pm Q_n = 0$. Logo $\text{mult}(f \pm g) > n = \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$.
- $P_n \pm Q_n \neq 0$. Neste caso a forma inicial de $f \pm g$ é $P_n \pm Q_n$, que é um polinômio homogêneo de grau n . Assim $\text{mult}(f \pm g) = \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$.

Considere agora o caso $m \neq n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $n < m$ então

$$f \pm g = P_n + P_{n+1} + \dots + (P_m \pm Q_m) + (P_{m+1} \pm Q_{m+1}) + \dots$$

Como $P_n \neq 0$ segue que P_n é a forma inicial de $f \pm g$. Logo $n = \text{mult}(f \pm g) = \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$. ■

Exemplo 1.6. Considere $f(X, Y) = 4X^2 + 3XY + X^3 + Y^4 + \dots$ e $g(X, Y) = X^2 + 2XY + X^4 + X^2Y^3 + \dots$ séries de potências em $\mathbb{Z}_5[[X, Y]]$, no qual a $\text{mult}(f) = \text{mult}(g) = 2$. Então

$$f + g = X^3 + X^4 + Y^4 + X^2Y^3 + \dots$$

cuja multiplicidade é igual a 3.

Consideremos $f, g \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$ então $\text{mult}(f) < \infty$ e $\text{mult}(g) < \infty$. Do item (1) da Proposição (1.5) segue que $\text{mult}(fg) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g) < \infty$. Logo, $fg \neq 0$. Isto implica que o anel \mathfrak{R} é um domínio.

Denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}} = \langle X_1, X_2, \dots, X_r \rangle$ o ideal de \mathfrak{R} gerado por X_1, X_2, \dots, X_r . Denotaremos também por $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}^i$ a i -ésima potência do ideal $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}$ e por $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}^0 = \mathfrak{R}$.

Proposição 1.7. O ideal $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}}$ é o único ideal maximal de \mathfrak{R} e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{\mathfrak{R}}^i = \{0\}$.

Demonstração: Veja Proposition (1.1.4) de [H]. ■

1.2 Teorema da Preparação de Weierstrass

Nesta seção vamos estudar algumas propriedades algébricas dos anéis das séries de potências formais. Mais precisamente o Teorema da Preparação de Weierstrass que reduz o estudo de uma série de potência formal a um certo polinômio em uma das indeterminadas.

Seja $K((X))$ o corpo de frações do anel das séries de potências formais em uma indeterminada $K[[X]]$. Seja $h = \frac{f}{g} \in K((X)) \setminus \{0\}$, com $f = X^m u$ e $g = X^n v$, onde $m, n \in \mathbb{N}$ e u e v são unidades em $K[[X]]$.

Assim temos que

$$h = X^{m-n} u v^{-1} = X^r w, \quad (1.3)$$

onde $r \in \mathbb{Z}$ e w é uma unidade em $K[[X]]$.

Exemplo 1.8. Considere $f = 2 + 3X^2 + X^4 + 5X^6$ e $g = X^5 + X^6 + X^7 + X^8$ em $\mathbb{C}[[X]]$.

Então

$$h = \frac{1(2 + 3X^2 + X^4 + 5X^6)}{X^5(1 + X + X^2 + X^3)},$$

onde $u = 2 + 3X^2 + X^4 + 5X^6$ e $v = 1 + X + X^2 + X^3$. Assim $h = X^{-5}uv^{-1}$ mas, da Proposição (1.1), segue que $v^{-1} = 1 - X + X^4 - X^5 + \dots$

Logo,

$$h = X^{-5}(2 + 3X^2 + X^4 + 5X^6)(1 - X + X^4 - X^5 + \dots)$$

$$h = X^{-5}(2 - 2X + 3X^2 - 3X^3 + 3X^4 - 3X^5 + 8X^6 + \dots).$$

Portanto,

$$h = \frac{2}{X^5} - \frac{2}{X^4} + \frac{3}{X^3} - \frac{3}{X^2} + \frac{3}{X} - 3 + 8X - 8X^2 + X^3 - X^4 + 5X^5 - 5X^6 + \dots$$

Da Equação (1.3) segue que qualquer elemento h de $K((X))$ é da forma

$$a_{-r}X^{-r} + a_{-r+1}X^{-r+1} + \dots + a_{-1}X^{-1} + a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots,$$

onde $r \in \mathbb{N}$ e os a_i s são elementos de K . Os elementos de $K((X))$ são chamados **séries de potências formais de Laurent**.

Definição 1.9. Seja $h \in K((X)) \setminus \{0\}$ dada por $h = X^r w$, onde $r \in \mathbb{Z}$ e w é uma unidade em $K[[X]]$, então definimos a multiplicidade de h como $\text{mult}(h) = r$.

Também definimos $\text{mult}(0) = \infty$.

No exemplo acima segue que $\text{mult}(h) = -5$.

Definição 1.10. Dizemos que $f \in \mathfrak{R}$ é regular de ordem m , com respeito à indeterminada X_j , se $f(0, \dots, X_j, \dots, 0)$ for divisível por X_j^m mas não por X_j^{m+1} .

Dizemos também que f é regular em X_j , quando f é regular com respeito a X_j de ordem $m = \text{mult}(f)$.

Neste caso, $\text{mult}(f) = \text{mult}(f(0, \dots, X_j, \dots, 0))$.

Exemplo 1.11. A série $f(X, Y) = XY^3 + Y^4 + X^5$ é regular de ordem 4 em Y e regular de ordem 5 em X . Enquanto a série $g(X, Y) = XY^2 + 4X^2Y - X^5Y^2$ não é regular com relação a nenhuma das indeterminadas.

O seguinte resultado é uma consequência direta da definição.

Lema 1.12. Dados $f, g \in \mathfrak{R}$, então fg é regular com respeito a X_j , de uma certa ordem se, e somente se, f e g são regulares com respeito a X_j , de determinadas ordens.

Denotaremos no que segue por \mathfrak{R}' o anel $K[[X_1, \dots, X_{r-1}]]$ e por $\mathcal{M}_{\mathfrak{R}'}$ seu ideal maximal.

O próximo Teorema permite-nos reduzir o estudo de uma série de potência formal, a menos de unidade, ao estudo de um polinômio em uma das indeterminadas, digamos X_r , com coeficientes no anel \mathfrak{R}' .

Teorema 1.13. (Teorema da Preparação de Weierstrass) Seja $f \in \mathfrak{R}$ uma série regular com respeito a X_r de ordem $n \geq 1$. Então existem uma unidade $u \in \mathfrak{R}$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_{\mathfrak{R}'}$, unicamente determinados por f , tais que

$$f \cdot u = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + A_2 X_r^{n-2} + \dots + A_n.$$

Além disto, se f é regular em X_r , isto é, $n = \text{mult}(f)$, então $\text{mult}(A_i) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Veja [HKT] (Theorem 4.11). ■

No Teorema (1.13), atribuímos a condição de f ser regular mas, como veremos a seguir, esta condição não é tão restrita como pode parecer. Assumindo K infinito, mostraremos que depois de compor f com um automorfismo linear de \mathfrak{R} , podemos transformar f em uma série regular em uma das indeterminadas escolhida arbitrariamente. No caso de K finito, não é possível garantir a existência de automorfismo linear, mas é sempre possível encontrar um automorfismo de \mathfrak{R} que transforma f em uma série regular em uma das indeterminadas. Como estamos interessados quando K é um corpo infinito, vamos nos restringir a este caso.

Lema 1.14. *Seja K um corpo infinito. Dada uma família finita \mathfrak{S} de polinômios homogêneos não nulos em $K[Y_1, \dots, Y_r]$, existe uma transformação linear*

$T : K[X_1, \dots, X_r] \rightarrow K[Y_1, \dots, Y_r]$, tal que para todo $F \in \mathfrak{S}$ de grau n , existe $c_F \in K \setminus \{0\}$ tal que

$$F(T(X_1, \dots, X_r)) = c_F X_r^n + (\text{termos de menor grau em } X_r).$$

Demonstração: Como \mathfrak{S} é finita e K é infinito existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in K^r$ com $\alpha_r \neq 0$ tal que

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \neq 0$$

para todo $F \in \mathfrak{S}$ de grau n .

Defina a seguinte transformação linear $T : K[X_1, \dots, X_r] \rightarrow K[Y_1, \dots, Y_r]$ por:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix},$$

onde os α_i 's, $i = 1, \dots, r$ foram definidos acima. Assim $T(X_i) = X_i + \alpha_i X_r = Y_i$, com $i = 1, \dots, r-1$ e $T(X_r) = \alpha_r X_r = Y_r$. Além disso,

$$\begin{aligned} Y_1^{m_1} \dots Y_r^{m_r} &= (X_1 + \alpha_1 X_r)^{m_1} \dots (\alpha_r X_r)^{m_r} \\ &= \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_r^{m_r} X_r^{m_1 + \dots + m_r} + (\text{termos de menor grau em } X_r). \end{aligned}$$

Logo, para todo $F \in \mathfrak{S}$, temos que

$$F(T(X_1, \dots, X_r)) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_r) X_r^n + (\text{termos de menor grau em } X_r).$$

Assim basta tomar $c_F = F(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \neq 0$ e o resultado segue. ■

Corolário 1.15. *Seja K um corpo infinito. Dado uma família finita \mathfrak{S} de elementos não nulos em \mathfrak{R} , existe um automorfismo linear T de \mathfrak{R} tal que todos os elementos de $\mathfrak{S} \circ T$ são regulares na última indeterminada.*

Demonstração: Como no Lema anterior, considerando a transformação linear

$T : K[X_1, \dots, X_r] \rightarrow K[Y_1, \dots, Y_r]$ e disso segue que T é um automorfismo já que $\alpha_r \neq 0$.

■

Do corolário acima, obtemos o seguinte corolário do Teorema da Preparação de Weierstrass.

Corolário 1.16. *Seja $f \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$ de multiplicidade $n \geq 1$. Então existem um K -automorfismo T de \mathfrak{R} , uma unidade $u \in \mathfrak{R}$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{R}'$ tais que $\text{mult}(A_i) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$ e*

$$T(f) \cdot u = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \dots + A_n.$$

Demonstração: Como K é infinito segue do Corolário (1.15) que existe um automorfismo linear T tal que $T(f)$ é regular na última indeterminada. Como $\text{mult}(f) = n$ segue que $T(f)$ é regular e $\text{mult}(T(f)) = n$. Assim, do Teorema (1.13) existem uma unidade $u \in \mathfrak{R}$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{R}'$ tais que $\text{mult}(A_i) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$ e

$$T(f) \cdot u = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \dots + A_n.$$

■

O polinômio $X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + A_2 X_r^{n-2} + \dots + A_n$ associado a f , depois de possivelmente uma mudança de coordenadas, será considerado uma preparação de Weierstrass de f .

1.3 Fatoração de Séries de Potências

Nesta seção estudaremos a fatoração no anel $\mathfrak{R} = K[[X_1, X_2, \dots, X_r]]$.

Definição 1.17. *Um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass) em X_r é uma série de potência em \mathfrak{R} da forma,*

$$P(X_1, \dots, X_r) = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \dots + A_n \in \mathfrak{R}'[X_r]$$

tal que $n \geq 1$ e $\text{mult}(A_i) \geq 1$ (respectivamente, $\text{mult}(A_i) \geq i$), para todo $i = 1, \dots, n$.

Entendemos por polinômio mônico em uma variável como sendo um polinômio em que o coeficiente do termo de grau mais alto é um.

Lema 1.18. *Sejam F_1, \dots, F_s polinômios mônicos em $\mathfrak{R}'[X_r]$. Então $F_1 \cdot \dots \cdot F_s$ é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass) se, e somente se, cada F_i , $i = 1, \dots, s$ é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass).*

Demonstração: Veja Lemma (2.2.3) de [H]. ■

Lema 1.19. *Seja $F \in \mathfrak{R}'[X_r]$ um pseudo polinômio. Então F é redutível em \mathfrak{R} se, e somente se, F é redutível em $\mathfrak{R}'[X_r]$.*

Demonstração: Suponha que F é redutível em \mathfrak{R} então existem $F_1, F_2 \in \mathfrak{R}$, não unidades, tais que $F = F_1 \cdot F_2$. Como F é um pseudo polinômio ele é regular de uma certa ordem com respeito à X_r , então do Lema (1.18), temos que F_1 e F_2 são regulares de certa ordem maior ou igual a um, pois $F = F_1 \cdot F_2$ é um pseudo polinômio. Do Teorema da Preparação de Weierstrass existem unidades $U_1, U_2 \in \mathfrak{R}$, $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{M}_{\mathfrak{R}'}$ tais que

$$H_1 = F_1 \cdot U_1 = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \dots + A_n \in \mathfrak{R}'[X_r] \quad \text{e}$$

$$H_2 = F_2 \cdot U_2 = X_r^m + B_1 X_r^{m-1} + \dots + B_m \in \mathfrak{R}'[X_r],$$

onde H_1, H_2 são pseudo polinômios de grau maior ou igual a um. Pondo $U = U_1 \cdot U_2$ temos que U é inversível e

$$F \cdot U = (F_1 \cdot U_1) \cdot (F_2 \cdot U_2) = H_1 \cdot H_2.$$

Como H_1, H_2 são pseudo polinômios temos novamente do Lema (1.18) que $F \cdot U$ é um pseudo polinômio. Uma vez que $F \cdot 1 = F$ segue da unicidade do Teorema da Preparação de Weierstrass que $F = H_1 \cdot H_2$, isto é, F é redutível em $\mathfrak{R}'[X_r]$.

Reciprocamente, suponha que $F \in \mathfrak{R}'[X_r]$ é um pseudo polinômio redutível de grau d . Então, existem H_1 e H_2 em $\mathfrak{R}'[X_r]$, mônicos de grau m e n respectivamente tais que $F = H_1 \cdot H_2$, com $m, n \geq 1$ e $m + n = d$. Como do Lema (1.18), H_1 e H_2 são pseudo polinômios de grau maior ou igual a um, segue que eles não são inversíveis em \mathfrak{R} . Então F é redutível em \mathfrak{R} . ■

Teorema 1.20. *O anel \mathfrak{R} é um domínio de fatoração única.*

Demonstração: Veja Theorem (2.2.3) de [H]. ■

Corolário 1.21. *Suponha que $F \in \mathfrak{R}'[X_r]$ é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass) com respeito a indeterminada X_r . Se $F = F_1 \cdot \dots \cdot F_s$ é a decomposição de F em fatores irredutíveis de \mathfrak{R} , então podemos escolher uma fatoração onde cada F_i é um pseudo polinômio (respectivamente, polinômio de Weierstrass).*

Demonstração: Do Teorema (1.20), \mathfrak{R}' é um domínio de fatoração única, então o Lema de Gauss afirma que $\mathfrak{R}'[X_r]$ também é um domínio de fatoração única. Seja $F = F_1 \cdot \dots \cdot F_s$ uma decomposição de F em fatores irredutíveis de $\mathfrak{R}'[X_r]$, o qual do Lema (1.19) é uma decomposição em fatores irredutíveis de \mathfrak{R} . Como F é mônico, pois F é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass) podemos supor que os F_i 's são mônicos. Com isto e do Lema (1.19) segue que os F_i 's são pseudo polinômios (respectivamente, polinômios de Weierstrass). ■

1.4 Teorema de Newton-Puiseux

Como estamos interessados no estudo de curvas planas, vamos nesta seção nos restringir ao anel das séries de potências formais $K[[X, Y]]$. Embora vários resultados que apresentaremos sejam válidos sobre corpos de qualquer característica, vamos considerar K um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Nosso objetivo nesta seção é o de encontrar uma parametrização de uma dada série de potências f . Se $f \in K\{X, Y\}$, ou seja, f é uma série absolutamente convergente numa vizinhança de um dado ponto, encontrar uma parametrização de f é simplesmente determinar as raízes de f . Todavia não faz sentido determinar as raízes de f , no caso formal, isto é, $f \in K[[X, Y]]$. Para contornar este problema, sabemos pelo Teorema da Preparação de Weierstrass que toda série $f \in K[[X, Y]]$, a menos de unidade, pode ser dada por um polinômio de Weierstrass em $K[[X]][Y]$. Portanto nosso problema reduz-se ao problema de determinar as raízes de um polinômio $f \in K[[X]][Y]$ no fecho algébrico de $K((X))$ o qual denotaremos $\overline{K((X))}$.

Newton propôs uma solução para este problema expandindo Y como uma série de potências em X com expoentes fracionários, não se preocupando com a questão de con-

vergência. Em 1850 Puiseux, por sua vez, aplicou o método de Newton no contexto de funções de uma variável complexa provando a convergência das séries. Para mais detalhes ver [BK]. Adotaremos aqui essencialmente o ponto de vista de Newton e não nos preocuparemos com a convergência das séries.

Vimos na Seção (1.2) que $K((X))$ é o conjunto das séries formais de Laurent com coeficientes em K , isto é, as séries da forma

$$a_{-m}X^{-m} + a_{-m+1}X^{-m+1} + \dots + a_{-1}X^{-1} + a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots .$$

Considerando o polinômio $Y^n - X \in K[[X]][Y]$ para todo inteiro positivo n , temos que o fecho algébrico $\overline{K((X))}$ tem que conter as raízes da equação $Y^n - X = 0$ para todo inteiro positivo n , e conseqüentemente, tem que conter os elementos da forma $X^{\frac{1}{n}}$ os quais satisfazem as seguintes relações:

- i) $X^{\frac{1}{1}} = X$;
- ii) $(X^{\frac{m}{rn}})^r = X^{\frac{m}{n}}$, para todo $r, m, n \in \mathbb{Z}$ e $n, r > 0$.

Deste modo, obtemos extensões $K((X^{\frac{1}{n}}))$ de $K((X))$. Podemos provar que estas extensões são finitas e galoisianas (veja [H]).

O próximo resultado tem um papel fundamental na teoria de curvas planas em um corpo algebricamente fechado de característica zero. Ele nos diz que se $\alpha \in \overline{K((X))}$ é uma raiz de um polinômio $f \in K[[X]][Y]$, então α pertence a extensão $K((X^{\frac{1}{n}}))$ de $K((X))$ para algum $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.22. (Teorema de Newton-Puiseux) *Temos que $\overline{K((X))} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K((X^{\frac{1}{n}}))$.*

Demonstração: Devido a complexidade da demonstração deste resultado, vamos omiti-la, uma vez que foge aos nossos propósitos. O leitor pode encontrar a demonstração em [H] e uma versão algorítmica deste teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [C4]. Este algoritmo fornece todas as raízes de f construídas a partir do polígono de Newton.

■

Observe que os elementos de $\bigcup_{q=1}^{\infty} K((X^{\frac{1}{q}}))$ podem ser escritos da forma

$$\alpha = b_1 X^{\frac{p_1}{q_1}} + b_2 X^{\frac{p_2}{q_2}} + \dots,$$

com $b_i \in K$, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $q_i > 0$ para todo $i \geq 1$ e $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \dots$, onde o conjunto $\left\{ \frac{p_i}{q_i}; i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ admite um denominador comum.

Se $b_1 \neq 0$, então o número racional $\frac{p_1}{q_1}$ é chamado a multiplicidade de α e podemos denotar por $\text{mult}_X(\alpha)$. Por comodidade, se $\alpha = 0$, definimos $\text{mult}_X(\alpha) = \infty$.

Note que α é uma série de potências fracionária em X , se $\text{mult}_X(\alpha) > 0$ dizemos que α é uma **série de Newton-Puiseux**.

Teorema 1.23. *Toda extensão finita de $K((X))$ é da forma $K((X^{\frac{1}{n}}))$ para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Demonstração: Veja Lemma (3.2.1) de [H]. ■

É possível provar que a extensão $K((X^{\frac{1}{n}}))/K((X))$, além de finita e galoisiana possui grupo de Galois isomorfo ao grupo U_n , onde U_n é o grupo multiplicativo das n -ésimas raízes da unidade em K . Este grupo é cíclico porque é um subgrupo do grupo multiplicativo do corpo K e tem ordem n sempre que o polinômio $X^n - 1$ é separável sobre K .

Observação 1.24. *Vale lembrar que, ao somar todos os elementos de U_n isso resulta no elemento neutro da adição. De fato, considere ω como sendo uma raiz primitiva da unidade. Então*

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}.$$

Mas $\omega^n = 1$ então $\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$. Portanto, $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$.

O seguinte resultado descreve a extensão algébrica principal de $K((X))$, isto é, o corpo $K((X))(\alpha)$, obtido pela adjunção de $K((X))$ com o elemento algébrico $\alpha \in \overline{K((X))}$. Nesta situação, sabemos da teoria geral de corpos que

$$K((X))(\alpha) = K((X))[\alpha] = \{P(\alpha); P \in K((X))[Y]\}.$$

Temos o seguinte resultado.

Teorema 1.25. *Seja $\alpha \in \overline{K((X))}/K((X))$ e escrevendo $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}}$, onde $n = \min\{q; \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\}$. Então:*

- i) $K((X))[\alpha] = K((X^{\frac{1}{n}}))$;
- ii) *O polinômio minimal de α sobre $K((X))$ é dado por $g(X, Y) = \prod_{i=1}^n (Y - \alpha_i)$, onde $\alpha_i = \varphi(\xi^i X^{\frac{1}{n}})$ para algum gerador fixo ξ do grupo U_n ;*
- iii) *Temos que $g(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_n(X) \in K((X))[Y]$, onde $\text{mult}(a_i(X)) \geq i \cdot \text{mult}(\alpha) = \frac{i \cdot \text{mult}(a_n(X))}{n}$, com igualdade válida quando $i = n$. Em particular, se $\text{mult}(\alpha) \geq 1$ (respectivamente, $\text{mult}(\alpha) > 0$) então $g(X, Y) \in K[[X]][Y]$ será um polinômio de Weierstrass (respectivamente, um pseudo polinômio).*

Demonstração: Veja Theorem (3.3.2) de [H]. ■

Corolário 1.26. *Seja $f \in K((X))[Y]$ um polinômio mônico irredutível de grau $n \geq 1$ e seja $\alpha \in \overline{K((X))}$ qualquer raiz de f . Então, se $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}}$ segue que*

- i) $n = \min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\}$;
- ii) *Podemos fatorar f como $f(X, Y) = \prod_{i=1}^n (Y - \alpha_i)$, onde $\alpha_i = \varphi(\xi^i X^{\frac{1}{n}})$ para algum gerador fixo ξ do grupo U_n ;*
- iii) *Se $f \in K[[X]][Y]$ é um polinômio de Weierstrass (respectivamente, pseudo polinômio), então $\text{mult}(\alpha) \geq 1$ (respectivamente, $\text{mult}(\alpha) > 0$).*

Demonstração: i) Como $\alpha \in \overline{K((X))}$ segue de imediato do Teorema (1.25) que $n = \min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\}$ com $n \geq 1$.

ii) Como $\alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}}$ segue, do Teorema (1.25) item (ii), que $g(X, Y) = \prod_{i=1}^n (Y - \alpha_i)$ é o polinômio minimal de α . Como f é mônico e irredutível no qual α é raiz segue que $\deg(f) \geq \deg(g)$. Daí existem $P, R \in K((X))[Y]$ com $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(g)$ tal que

$$f = Pg + R.$$

Assim, $0 = f(X, \alpha) = P(X, \alpha)g(X, \alpha) + R(X, \alpha)$. Mas α é raiz de g então $R(X, \alpha) = 0$, ou seja, α é raiz de R . Se $\deg(R) < \deg(g)$ temos um absurdo, pois g é o polinômio de menor grau tal que $g(X, \alpha) = 0$. Portanto $R = 0$. Assim, $f = Pg$. Sendo f irredutível temos que P é uma unidade então $\deg(f) = \deg(g)$. Portanto $f = g = \prod_{i=1}^n (Y - \alpha_i)$.

iii) Suponha $f(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_n(X)$ um polinômio de Weierstrass, ou seja, $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Como α é raiz de f , segue que

$$0 = f(X, \alpha) = \alpha^n + a_1(X)\alpha^{n-1} + \dots + a_n(X),$$

ou seja, $-\alpha^n = a_n(X) + a_{n-1}(X)\alpha + \dots + a_1(X)\alpha^{n-1}$. Assim,

$$\text{mult}(-\alpha^n) = \text{mult}(\alpha^n) = \text{mult}(a_n(X) + a_{n-1}(X)\alpha + \dots + a_1(X)\alpha^{n-1}).$$

Então, deve existir $i_0 = 1, \dots, n$ tal que

$$n \cdot \text{mult}(\alpha) \geq \min_i \{ \text{mult}(a_i(X)) + (n - i)\text{mult}(\alpha) \} = \text{mult}(a_{i_0}(X)) + (n - i_0)\text{mult}(\alpha).$$

Como $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$ temos

$$n \cdot \text{mult}(\alpha) \geq i_0 + (n - i_0)\text{mult}(\alpha),$$

ou seja, $n \cdot \text{mult}(\alpha) \geq i_0 + n \cdot \text{mult}(\alpha) - i_0 \cdot \text{mult}(\alpha)$. Donde segue que, $i_0 \cdot \text{mult}(\alpha) \geq i_0$, o que implica que $\text{mult}(\alpha) \geq 1$.

Se f for um pseudo polinômio temos que $\text{mult}(a_i(X)) \geq 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Daí obtemos $i_0 \cdot \text{mult}(\alpha) \geq 1$ então,

$$\text{mult}(\alpha) \geq \frac{1}{i_0} > 0.$$

■

Teorema 1.27. (Teorema da Função Implícita de Newton) *Seja $f \in K[[X, Y]]$ irredutível e de multiplicidade n e suponha que $\frac{\partial^n f}{\partial Y^n}(0, 0) \neq 0$. Então, existe $\varphi(X^{\frac{1}{n}}) =$*

$\sum_{i \geq 1} b_i X^{\frac{i}{n}} \in K[[X^{\frac{1}{n}}]]$ tal que

$$f(X, \varphi(X^{\frac{1}{n}})) = 0.$$

Além disso, qualquer $\alpha \in K[[X^{\frac{1}{n}}]]$ satisfazendo $f(X, \alpha) = 0$ é tal que $\alpha = \varphi(\xi X^{\frac{1}{n}})$, para algum $\xi \in U_n$.

Demonstração: Veja demonstração em [H]. ■

Exemplo 1.28. Considere $f(X, Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^4Y - X^5 + X^6$ série de potências formal em $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Note que $\text{mult}(f) = 4$ então, $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$. Assim, $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{4}}) = X^{\frac{5}{4}} + X^{\frac{6}{4}}$ é uma raiz de f . De fato,

$$\begin{aligned} f(X, \varphi(X^{\frac{1}{4}})) &= (X^{\frac{5}{4}} + X^{\frac{6}{4}})^4 - 2X^3(X^{\frac{5}{4}} + X^{\frac{6}{4}})^2 - 4X^4(X^{\frac{5}{4}} + X^{\frac{6}{4}}) - X^5 + X^6 \\ &= X^5 + 4X^{\frac{21}{4}} + 6X^{\frac{11}{2}} + 4X^{\frac{23}{4}} + X^6 - 2X^{\frac{11}{2}} - 4X^{\frac{23}{4}} - 2X^6 \\ &\quad - 4X^{\frac{21}{4}} - 4X^{\frac{11}{2}} - X^5 + X^6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sabendo que i é um gerador do grupo U_4 segue do Teorema da Função Implícita que, $\alpha_k = \varphi(i^k X^{\frac{1}{4}})$, $k = 0, 1, 2, 3$ são as raízes de f , ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \varphi(X^{\frac{1}{4}}) = X^{\frac{5}{4}} + X^{\frac{6}{4}}, & \alpha_1 &= \varphi(iX^{\frac{1}{4}}) = iX^{\frac{5}{4}} - X^{\frac{6}{4}} \\ \alpha_2 &= \varphi(i^2 X^{\frac{1}{4}}) = -X^{\frac{5}{4}} + X^{\frac{6}{4}}, & \alpha_3 &= \varphi(i^3 X^{\frac{1}{4}}) = -iX^{\frac{5}{4}} - X^{\frac{6}{4}}. \end{aligned}$$

Portanto $f(X, Y)$ pode ser fatorado como segue

$$f(X, Y) = (Y - \alpha_0)(Y - \alpha_1)(Y - \alpha_2)(Y - \alpha_3).$$

Observação 1.29. Como o anel $K[[X]]$ é um domínio de fatoração única, Teorema (1.20), com corpo de frações $K((X))$, então segue como consequência do Lema de Gauss que todo polinômio irreduzível em $K[[X]][Y]$ é irreduzível em $K((X))[Y]$.

O seguinte lema é uma condição necessária para a irreduzibilidade de uma série de potências, o que tem uma importância geométrica fundamental.

Lema 1.30. (Lema da Unitangente) *Seja $f \in K[[X, Y]]$ com $f(0, 0) = 0$ irredutível de multiplicidade n . Então, a forma inicial de f é do tipo*

$$F_n = (aX + bY)^n,$$

com $a, b \in K$ e não simultaneamente nulos.

Demonstração: Se necessário, caso f não seja regular em nenhuma indeterminada, podemos executar uma mudança linear de coordenadas de tal modo que f seja regular em Y . Daí, pelo Corolário (1.16) existem um polinômio de Weierstrass

$$P(X, Y) = Y^n + A_1(X)Y^{n-1} + \dots + A_n(X) \in K[[X]][Y]$$

de grau n e uma unidade $U \in K[[X, Y]]$ tais que $f = U \cdot P$. Como f é irredutível segue que P é irredutível em $K[[X, Y]]$. Uma vez que P é um polinômio de Weierstrass, P é um pseudo polinômio. Logo, do Lema (1.19), temos que P é irredutível em $K[[X]][Y]$ e portanto da Observação (1.29), P é irredutível em $K((X))[Y]$. Dado $\alpha \in \overline{K((X))}$ qualquer raiz de $P(X, Y)$, segue do Corolário (1.26) item (ii), que

$$P(X, Y) = \prod_{k=1}^n (Y - \varphi(\xi^k X^{\frac{1}{n}})),$$

onde ξ é uma raiz primitiva da unidade e

$$\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq r} b_i X^{\frac{i}{n}} = b_r X^{\frac{r}{n}} + b_{r+1} X^{\frac{r+1}{n}} + \dots \in K((X^{\frac{1}{n}})),$$

com $b_r \neq 0$. Como P é um polinômio de Weierstrass novamente do Corolário (1.26) item (iii), temos que, $\text{mult}(\alpha) \geq 1$ mas,

$$\text{mult}(\alpha) = \text{mult}(\varphi(X^{\frac{1}{n}})) = \frac{r}{n},$$

pois $b_r \neq 0$. Assim $\frac{r}{n} \geq 1$, ou ainda, $r \geq n$.

Note que a forma inicial de P é a forma inicial do polinômio

$$Q(X, Y) = \prod_{k=1}^n (Y - \xi^{kr} b_r X^{\frac{r}{n}}) = Y^n - (b_r X^{\frac{r}{n}} \sum_{k=1}^n \xi^{kr}) \cdot Y^{n-1} + \dots \\ + ((-1)^i b_r^i X^{\frac{ir}{n}} \sum_{k=1}^n \xi^{ikr}) \cdot Y^{n-i} + \dots + (-1)^n b_r^n X^r,$$

para $i = 0, \dots, n$. Com isso temos duas possibilidades para r :

a) Se $r = n$, a forma inicial de $Q(X, Y)$ será

$$Q(X, Y) = \prod_{k=1}^n (Y - \xi^{kn} b_n X^{\frac{n}{n}}) = \prod_{k=1}^n (Y - b_n X) = (Y - b_n X)^n.$$

Assim a forma inicial de $P(X, Y)$ é $(Y - b_n X)^n$. Como a forma inicial de f é o produto das formas iniciais de U e P , segue que a forma inicial de f é $(aX + bY)^n$ uma vez que U é unidade.

b) Se $r > n$ temos que $n - i + \frac{ir}{n} > n$ para todo $i = 1, \dots, n$. Assim a forma inicial de Q é Y^n e conseqüentemente é também a de P . Logo a forma inicial de f é bY^n já que $U(0, 0) \neq 0$.

Portanto, $F_n = (aX + bY)^n$, com a ou b não simultaneamente nulos. ■

Embora provamos o lema em um corpo de característica zero usando o teorema de Newton-Puiseux, o resultado também é válido para qualquer corpo algebricamente fechado.

Exemplo 1.31. A série $f = Y^2 - X^2 - X^3$ é redutível em $K[[X, Y]]$, pois a forma inicial de f é $F_2 = Y^2 - X^2 = (Y - X)(Y + X) \neq (Y - X)^2$.

Exemplo 1.32. A série $g = (X + Y)^2 + 2X^3Y + \dots$ tem como forma inicial $F_2 = (X + Y)^2$, mas neste caso não podemos afirmar que g é irredutível.

1.5 Curvas Planas

O estudo de singularidades de curvas têm motivado muitos trabalhos em Teoria de Singularidades e em Geometria Algébrica. Nesta seção vamos abordar conceitos e al-

guns resultados sobre curvas algebróides e analíticas planas. Vamos determinar uma parametrização para uma dada curva plana, chamada parametrização de Newton-Puiseux e a partir dela definir os expoentes característicos da curva.

1.5.1 Curvas Algebróides Planas

Na Definição (1.3), definimos elementos associados e isto nos motiva a seguinte definição.

Definição 1.33. *Uma curva algebróide plana é a classe de equivalência de um elemento não inversível f de $K[[X, Y]] \setminus \{0\}$ módulo a relação de associado.*

Considere $f \in K[[X, Y]] \setminus \{0\}$. Denotaremos por (f) a curva algebróide plana determinada por f , ou seja,

$$(f) = \{uf; \text{ onde } u \text{ é uma unidade em } K[[X, Y]]\}.$$

Por definição, temos que $(f) = (g)$ se, e somente se, existe uma unidade $u \in K[[X, Y]]$ tal que $g = uf$.

Como a multiplicidade de uma série de potências formal é invariante por multiplicação por uma unidade, podemos definir a multiplicidade de uma curva algebróide plana (f) como sendo a multiplicidade de f .

Definição 1.34. *Uma curva algebróide plana é dita regular (ou suave) se esta possui multiplicidade igual a um. Quando a multiplicidade é maior que um, dizemos que a curva é singular.*

Seja (f) uma curva algebróide plana, dizemos que a curva (f) é **irreduzível** se a série de potências formal f é irreduzível em $K[[X, Y]]$. Note que a noção de irreduzibilidade independe do representante da curva pois, se $g \in (f)$ fosse redutível, então como $g = uf$ para alguma unidade $u \in K[[X, Y]]$, logo teríamos que $f = u^{-1}g$ também seria redutível, o que é uma contradição.

Uma curva algebróide plana irreduzível será chamada um ramo.

Definição 1.35. Uma curva algebróide plana (f) será chamada *reduzível* se f admite uma decomposição em fatores irredutíveis distintos, f_1, \dots, f_r de $K[[X, Y]]$, ou seja,

$$f = f_1^{\alpha_1} \cdot f_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot f_r^{\alpha_r},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ são inteiros positivos.

As curvas planas (f_j) para $j = 1, \dots, r$ são chamadas ramos da curva (f) .

Definição 1.36. Uma curva algebróide plana (f) é dita *reduzida*, se $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_r$ com $(f_i) \neq (f_j)$ para $i \neq j$, isto é, quando f_i e f_j não são associadas se $i \neq j$.

Várias propriedades de uma curva algebróide plana são preservadas em $K[[X, Y]]$ por um K - automorfismo. Isto motiva a próxima definição.

Definição 1.37. Duas curvas algebróides planas (f) e (g) são ditas *equivalentes*, que denotamos neste caso $(f) \sim (g)$, se existe um K - automorfismo Φ de $K[[X, Y]]$ tal que

$$(\Phi(f)) = (g).$$

Em outras palavras, (f) e (g) são equivalentes se existem um K - automorfismo Φ e uma unidade $u \in K[[X, Y]]$ tais que $\Phi(f) = ug$.

Alguns conceitos ou propriedades de curvas algebróides planas irredutíveis são invariantes módulo a relação de equivalência \sim , por exemplo, o caráter reduzível ou irredutível de uma curva, sua multiplicidade entre outras.

Proposição 1.38. Sejam (f) e (g) curvas algebróides planas tais que $(f) \sim (g)$. Então (f) é reduzível se, e somente se, (g) é reduzível.

Demonstração: Como $(f) \sim (g)$ existe um K - automorfismo $\Phi : K[[X, Y]] \rightarrow K[[X, Y]]$ e uma unidade $u \in K[[X, Y]]$ tais que $\Phi(f) = ug$, ou seja, $g = u^{-1}\Phi(f)$.

Assim, f é reduzível se, e somente se, $f = \prod_{i=1}^s f_i^{\alpha_i}$, com $f_i \in K[[X, Y]]$ irredutível,

$i = 1, \dots, s$ e isto se, e somente se,

$$g = u^{-1}\Phi(f) = u^{-1}\Phi\left(\prod_{i=1}^s f_i^{\alpha_i}\right) = u^{-1}\prod_{i=1}^s \Phi(f_i^{\alpha_i}),$$

ou seja, se e somente se, g é redutível. Note que, em particular, se $s = 1$ temos que f é irreduzível se, e somente se, g é irreduzível. ■

Vamos apresentar um resultado que nos será útil para provar que a equivalência de curvas preserva a multiplicidade. Seja $g \in K[[X, Y]]$ dada por $g(X, Y) = aX + bY + \dots$, com $a, b \in K$. Denominamos $L = aX + bY$ a forma linear inicial de g .

Proposição 1.39. *Sejam $g_1, g_2 \in K[[X, Y]]$ com formas lineares iniciais L_1 e L_2 , respectivamente. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} \Psi : K[[X, Y]] &\longrightarrow K[[X, Y]] \\ f &\longmapsto f(g_1, g_2) \end{aligned}$$

é um K -automorfismo se, e somente se, L_1 e L_2 são K -linearmente independentes.

Demonstração: Ver demonstração em [H]. ■

Proposição 1.40. *Se $(f) \sim (g)$, então $\text{mult}(f) = \text{mult}(g)$.*

Demonstração: Com efeito, considere $f = \sum_{i=m}^{\infty} F_i$, com F_i polinômio homogêneo de grau i . Suponha $\text{mult}(f) = m$. Devemos mostrar que $\text{mult}(g) = m$, onde $g = u^{-1}\Phi(f)$. Note que,

$$g = u^{-1}\Phi(f) = u^{-1}\Phi\left(\sum_{i=m}^{\infty} F_i\right) = u^{-1}\sum_{i=m}^{\infty} \Phi(F_i).$$

Como F_i é um polinômio homogêneo de grau i , segue que

$$F_i = \sum_{j+k=i} a_{jk} X^j Y^k.$$

E sendo Φ um K - automorfismo temos que

$$\begin{aligned}\Phi : K[[X, Y]] &\longrightarrow K[[X, Y]] \\ X &\longmapsto aX + bY + \text{termos de ordem superior} \\ Y &\longmapsto cX + dY + \text{termos de ordem superior}\end{aligned}$$

e satisfaz $ad - cb \neq 0$ já que, da Proposição (1.39), as formas iniciais são linearmente independentes. Assim,

$$\Phi(F_i) = \sum_{j+k=i} a_{jk} \Phi(X)^j \Phi(Y)^k.$$

Mas veja que $\text{mult}(\Phi(X)) = 1$ e $\text{mult}(\Phi(Y)) = 1$, logo

$$\text{mult}(\Phi(X)^j \Phi(Y)^k) = \text{mult}(\Phi(X)^j) + \text{mult}(\Phi(Y)^k) = j + k = i.$$

Portanto, $\text{mult}(g) = \text{mult}(\Phi(F_m)) = m$, pois $F_m \neq 0$. ■

Como qualquer curva é equivalente a um polinômio de Weierstrass (Corolário (1.16)), podemos supor que a curva é determinada por um polinômio de Weierstrass e nestas condições, temos o seguinte resultado para curvas regulares.

Proposição 1.41. *Se (f) é uma curva regular com $f \in K[[X, Y]]$, então $(f) \sim (X)$ ou $(f) \sim (Y)$. Em particular, se (f) e (g) são curvas regulares então, $(f) \sim (g)$.*

Demonstração: Como $f \in K[[X, Y]]$ e (f) é uma curva regular, segue que $\text{mult}(f) = 1$. Assim podemos escrever f da forma $f = aX + bY + \dots$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Se $a \neq 0$ considere o K - automorfismo dado por

$$\begin{aligned}\Phi : K[[X, Y]] &\longrightarrow K[[X, Y]] \\ X &\longmapsto f(X, Y) \\ Y &\longmapsto Y.\end{aligned}$$

Com isto, segue que $\Phi(X) = f(X, Y)$, ou seja, $(f) \sim (X)$. De modo análogo, se $b \neq 0$ podemos definir um K - automorfismo similar e garantir que $(f) \sim (Y)$.

Para mostrar que $(f) \sim (g)$, basta utilizar o mesmo argumento de f em g e concluir que $(g) \sim (X)$ ou $(g) \sim (Y)$. Do fato que a relação \sim é transitiva e que $(X) \sim (Y)$, segue

o resultado. ■

Suponha agora que (f) é uma curva algebróide plana de multiplicidade n , então

$$f = F_n + F_{n+1} + \dots,$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo em $K[X, Y]$ de grau i e $F_n \neq 0$. Chamaremos a curva (F_n) de **cone tangente** da curva (f) .

Pelo Lema da Unitangente (ver Lema (1.30)) a forma inicial de uma série irredutível f é do tipo $F_n = (aX + bY)^n$, com a e b não simultaneamente nulos. Podemos generalizar este resultado para uma série f qualquer, isto é, qualquer polinômio homogêneo em duas variáveis com coeficientes em um corpo algebricamente fechado se decompõe em um produto de fatores lineares, ou seja,

$$F_n = \prod_{i=1}^s c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i},$$

onde $\sum_{i=1}^s r_i = n$, com $c_i, a_i, b_i \in K$ para todo $i = 1, \dots, s$ e $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, se $i \neq j$. Assim, o cone tangente de (f) consiste das formas lineares $a_i X + b_i Y$, $i = 1, \dots, s$, onde cada uma delas possui multiplicidade r_i . Chamamos cada uma destas formas lineares de **reta tangente** de (f) . Se a curva (f) tem multiplicidade um, isto é, se (f) é regular, então o cone tangente (F_1) consiste de uma única reta tangente com multiplicidade um.

Exemplo 1.42. 1. A curva $(Y^2 - X^3)$ tem como cone tangente a reta (Y) com multiplicidade 2.

2. A curva $(Y^2 - X^2(X + 1))$ tem como cone tangente duas retas tangentes $(Y - X)$ e $(Y + X)$, onde cada reta tem multiplicidade um, pois $f = Y^2 - X^2(X + 1) = Y^2 - X^2 - X^3$. Assim, $F_2 = Y^2 - X^2 = (Y + X)(Y - X)$.

3. A curva $(XY + X^2 + Y^3)$ tem como cone tangente duas retas tangentes, (X) e $(Y + X)$, onde cada reta possui multiplicidade um, pois $f = XY + X^2 + Y^3 = X(Y + X) + Y^3$. Assim, $F_2 = X(Y + X)$.

1.5.2 Parametrização e Expoentes Característicos

Vamos introduzir a noção de parametrização de ramos planos. Esta será uma ferramenta poderosa para estudar as propriedades de curvas. Outro conceito fundamental neste trabalho são os expoentes característicos, estes determinam completamente a topologia de uma curva plana irredutível.

Seja $f = F_n + F_{n+1} + \dots \in K[[X, Y]]$ uma série irredutível de multiplicidade n . Pelo Lema (1.30) temos que $F_n = (aX + bY)^n$, para algum $a, b \in K$ não simultaneamente nulos. Assim, ou f é regular em Y (quando $b \neq 0$) ou f é regular em X (quando $a \neq 0$). Se f é regular em Y , então podemos escrever f na forma:

$$f = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_n(X) + Y^{n+1} \cdot h(X, Y), \quad (1.4)$$

com $a_i(X) \in K[[X]]$, $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$, $a_0(0) \neq 0$ e $h(X, Y) \in K[[X, Y]]$.

Lema 1.43. *Seja $f \in K[[X, Y]]$ uma série de potências irredutível de multiplicidade n e regular em Y . Escreva f como em (1.4). Então*

$$\text{mult}(a_i(X)) \geq \frac{i \cdot \text{mult}(a_n(X))}{n},$$

para todo $i = 0, \dots, n$.

Demonstração: Como f é regular em Y de ordem n , segue do Teorema da Preparação de Weierstrass que existem uma unidade $u \in K[[X, Y]]$ e $A_1, \dots, A_n \in K[[X]]$ com $A_i(0) = 0$ tais que

$$u \cdot f = P(X, Y) = Y^n + A_1(X)Y^{n-1} + \dots + A_n(X) \in K[[X]][Y]. \quad (1.5)$$

Sendo u uma unidade e f irredutível em $K[[X, Y]]$, temos que $u \cdot f$ é irredutível em $K[[X, Y]]$. Assim, do Lema (1.19) segue que $u \cdot f$ é irredutível em $K[[X]][Y]$ e do Lema de Gauss $u \cdot f$ é irredutível em $K((X))[Y]$. Logo do Teorema (1.25) item (iii) segue que,

para $i = 0, \dots, n$

$$\text{mult}(A_i(X)) \geq \frac{i \cdot \text{mult}(A_n(X))}{n}. \quad (1.6)$$

Colocando $u = u_0 + u_1Y + \dots$, com $u_i \in K[[X]]$, temos que u_0 é inversível, logo $u_0(0) \neq 0$. Agora de (1.5) temos

$$u_0a_i + u_1a_{i+1} + \dots + u_{n-i}a_n = A_i$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Em particular, $\text{mult}(A_n(X)) = \text{mult}(u_0a_n) = \text{mult}(a_n)$, ou seja,

$$\text{mult}(A_n(X)) = \text{mult}(a_n). \quad (1.7)$$

A prova será feita por indução sobre i . De fato, para $i = n$ o resultado segue de (1.6) e (1.7). Suponha que o resultado é válido para todo $j > i$. Como

$$u_0a_i = A_i - (u_1a_{i+1} + \dots + u_{n-i}a_n)$$

e u_0 é inversível, temos

$$\begin{aligned} \text{mult}(a_i) &= \text{mult}(u_0a_i) = \text{mult}(A_i - (u_1a_{i+1} + \dots + u_{n-i}a_n)) \\ &\geq \min\{\text{mult}(A_i), \text{mult}(u_1a_{i+1}), \dots, \text{mult}(u_{n-i}a_n)\}. \end{aligned}$$

Observe que de (1.6) e (1.7), $\text{mult}(A_i(X)) \geq \frac{i \cdot \text{mult}(a_n(X))}{n}$ e da hipótese de indução segue que o mínimo do conjunto ocorre em A_i . Logo,

$$\text{mult}(a_i(X)) = \text{mult}(A_i(X)) \geq \frac{i \cdot \text{mult}(a_n(X))}{n}$$

para todo $i = 1, \dots, n$. ■

Proposição 1.44. *Considerando f como na Equação (1.4), as seguintes condições são equivalentes:*

- 1) *O cone tangente de (f) é (Y^n) ;*
- 2) *Para todo $i \geq 1$, $\text{mult}(a_i(X)) > i$.*

Demonstração: 1) \Rightarrow 2) Suponha que (Y^n) é o cone tangente de (f) , então f é regular em Y . Como f é da forma

$$f = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_n(X) + Y^{n+1} \cdot h(X, Y),$$

com $a_i(X) \in K[[X]]$, $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$, $a_0(0) \neq 0$ e $h(X, Y) \in K[[X, Y]]$, devemos ter $\text{mult}(a_i(X)) > i$ para todo $i = 1, \dots, n$, pois caso contrário, o cone tangente seria $(Y^n + a_i Y^{n-i})$ para algum $i = 1, \dots, n$.

2) \Rightarrow 1) Suponha que $\text{mult}(a_i(X)) > i$ para todo $i \geq 1$. Note que

$$\text{mult}(a_i(X)Y^{n-i}) = \text{mult}(a_i(X)) + \text{mult}(Y^{n-i}) > n.$$

Logo, o cone tangente da curva (f) é (Y^n) uma vez que $a_0(X)$ é unidade. ■

Suponhamos, agora que f é irredutível de multiplicidade n e regular em Y como em (1.4). Seja $P(X, Y) \in K[[X]][Y]$ o pseudo polinômio de grau n associado a f como em (1.5) e seja $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in K[[X^{\frac{1}{n}}]]$ onde $n = \min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\}$ tal que

$$P(X, Y) = P(X, \varphi(X^{\frac{1}{n}})) = 0,$$

o que é garantido pelo Teorema da Função Implícita (Teorema (1.27)).

Tomando $t = X^{\frac{1}{n}}$ então $t^n = X$, assim temos $\varphi(t) \in K[[t]]$ e $f(t^n, \varphi(t)) = 0$. Nesta situação obtemos:

$$\begin{cases} X = t^n \\ Y = \varphi(t) = \sum_{i \geq m} b_i t^i, \quad \text{com } b_m \in K \setminus \{0\} \end{cases} \quad (1.8)$$

uma parametrização de f chamada **parametrização de Newton-Puiseux** da curva (f) .

Qualquer outra raiz de P dará outra parametrização de Newton-Puiseux $(t^n, \psi(t))$ do ramo (f) , onde $\psi(t) = \varphi(\xi t)$ e ξ é uma n -ésima raiz da unidade. Estas são as únicas parametrizações da curva (f) da forma $(t^n, \varphi(t))$.

Note que a condição

$$n = \min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}})) \text{ e } f(X, \alpha) = 0\}$$

implica que em qualquer parametrização como em (1.8), n e os índices i , para os quais $b_i \neq 0$, são relativamente primos, pois caso contrário, $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in K[[X^{\frac{1}{n'}}]]$ onde $n' = \frac{n}{d} < n$ e d é o *m.d.c.* de todos os índices i , para todo $i \geq 1$, o que é absurdo pois n é o menor dos inteiros para os quais $\alpha \in K[[X^{\frac{1}{n}}]]$ pertence. Observe que,

$$\varphi(t) = \sum_{i \geq m} b_i t^i = b_m t^m + b_{m+1} t^{m+1} + \dots, \quad \text{com } b_m \neq 0,$$

implica que, $\text{mult}_t(\varphi(t)) = m$. Por outro lado,

$$\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq m} b_i X^{\frac{i}{n}} = b_m X^{\frac{m}{n}} + b_{m+1} X^{\frac{m+1}{n}} + \dots, \quad \text{com } b_m \neq 0.$$

Assim, $\text{mult}_X(\alpha) = \frac{m}{n}$. Portanto, $n \cdot \text{mult}_X(\alpha) = m = \text{mult}_t(\varphi(t))$. Com isto, e do Teorema (1.25) item (iii) segue que

$$m = \text{mult}_t(\varphi(t)) = n \cdot \text{mult}_X(\alpha) = \text{mult}_X(A_n(X)) = \text{mult}_X(a_n(X)) \geq n,$$

onde a última igualdade segue da Equação (1.7) e a desigualdade segue da Equação (1.4).

Em particular, se o cone tangente de (f) é (Y^n) , então da Proposição (1.44), temos $\text{mult}_t(\varphi(t)) = \text{mult}_X(a_n(X)) > n$.

Há muitas outras possíveis parametrizações de (f) por meio de outras séries em $K[[t]]$. Seja $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ um par de elementos em $K[[t]]$ não nulos e não unidades. Dizemos que $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ é uma parametrização de (f) se

$$f(\psi_1(t), \psi_2(t)) = 0$$

como um elemento de $K[[t]]$.

Definição 1.45. *Uma parametrização $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ de (f) será chamada primitiva se*

existir um automorfismo ρ de $K[[t]]$ tal que

$$(\rho(\psi_1(t)), \rho(\psi_2(t))) = (t^n, \varphi(t)),$$

onde $(t^n, \varphi(t))$ é uma parametrização de Newton-Puiseux de (f) .

Se f é regular em X , então temos o mesmo resultado sobre X trocando Y por X .

A relação entre a equação de uma curva e sua parametrização de Newton-Puiseux é de alta complexidade como podemos ver nos seguintes exemplos.

Exemplo 1.46. Considere a curva dada por

$$f(X, Y) = -Y^7 - 14X^3Y^4 - 7X^8Y^3 + 14X^7Y^2 + 7X^8Y + X^{11} + 7X^{13} - X^{15}.$$

Note que f é regular em Y com ordem $7 = \text{mult}(f)$. Se $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{7}}) \in K[[X^{\frac{1}{7}}]]$ é uma raiz de f , ou seja, $f(X, \alpha) = 0$, então considerando $t = X^{\frac{1}{7}}$ temos que $\varphi(t) \in K[[t]]$ e $f(t^7, \varphi(t)) = 0$. Logo uma parametrização de Newton-Puiseux para f é dada por

$$\begin{cases} X = t^7 \\ Y = \varphi(t) = \sum_{i>7} b_i t^i = t^9 + t^{11} - t^{15}. \end{cases}$$

Exemplo 1.47. A curva $(f) = (-Y^2 + 4X^9Y + X^5)$ é regular em Y de ordem $2 = \text{mult}(f)$, tem uma parametrização cujos termos até a potência 109 em t são:

$$\begin{cases} X = t^2 \\ Y = t^5 + 2t^{18} + 2t^{31} - 2t^{57} + 4t^{83} - 10t^{109} + \dots \end{cases}$$

Seja C um ramo da curva definida por uma série de potências f de multiplicidade n e regular em Y com uma parametrização de Newton-Puiseux

$$\begin{cases} X = t^n \\ Y = \varphi(t) = \sum_{i \geq m} b_i t^i, \quad b_m \in K \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Com isso, temos a seguinte definição.

Definição 1.48. Definimos duas seqüências $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de números naturais associados a curva (f) como segue:

$$\begin{cases} \beta_0 = \varepsilon_0 = \text{mult}(f) = n \\ \beta_j = \min\{i ; \varepsilon_{j-1} \text{ não divide } i \text{ e } b_i \neq 0\}, & \text{se } \varepsilon_{j-1} \neq 0 \\ \varepsilon_j = m.d.c.(\beta_0, \dots, \beta_j) = m.d.c.(\varepsilon_{j-1}, \beta_j). \end{cases}$$

Observe que se $\varepsilon_{j-1} \neq 1$ então o conjunto $\min\{i ; \varepsilon_{j-1} \text{ não divide } i \text{ e } b_i \neq 0\}$ não é vazio uma vez que a parametrização é primitiva. Portanto os β_j 's estão bem definidos, β_1 é igual ao primeiro expoente de t em $\varphi(t)$, onde β_1 não é divisível por n .

Temos também que ε_j divide ε_{j-1} pois $\varepsilon_j = m.d.c.(\varepsilon_{j-1}, \beta_j)$, para todo $j \geq 1$ e

$$n = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots .$$

Consequentemente, para algum $\gamma \in \mathbb{N}$, obtemos $\varepsilon_\gamma = 1$ e portanto, a seqüência dos β_j , $j > 1$ é crescente e termina em β_γ .

Definição 1.49. Os expoentes característicos de C são os $(\gamma + 1)$ números naturais $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\gamma)$.

Exemplo 1.50. Considere uma parametrização de Newton-Puiseux de um ramo C ,

$$\begin{cases} X = t^6 \\ Y = t^{12} + t^{15} + t^{18} + t^{19}. \end{cases}$$

Da Definição (1.48), temos que $\beta_0 = \varepsilon_0 = 6$ e β_1 é igual ao primeiro expoente de t em Y que não é divisível por 6, ou seja, $\beta_1 = 15$ e $\varepsilon_1 = m.d.c.(6, 15) = 3$. Agora β_2 é igual ao menor expoente de t que não é divisível por 3, ou seja, $\beta_2 = 19$. Assim

$$\varepsilon_2 = m.d.c.(\varepsilon_1, \beta_2) = m.d.c.(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = 1.$$

Assim, os expoentes característicos de C são $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (6, 15, 19)$.

Note que, os expoentes característicos de um ramo C determina o inteiro ε_j , já que $\varepsilon_j = m.d.c.(\beta_0, \dots, \beta_j)$.

Com a notação acima, podemos escrever uma parametrização do ramo C como segue:

$$\begin{cases} X = t^n \\ Y = P(t^n) + \sum_{i=\beta_1}^{\beta_2-1} b_i t^i + \dots + \sum_{i=\beta_{\gamma-1}}^{\beta_\gamma-1} b_i t^i + \sum_{i \geq \beta_\gamma} b_i t^i, \end{cases}$$

onde $P(t) \in K[t]$ e $b_{\beta_1}, \dots, b_{\beta_\gamma} \neq 0$.

Com isso, e através de uma mudança de coordenadas do tipo $X \mapsto X$ e $Y \mapsto \frac{Y - P(X)}{b_{\beta_1}}$, se necessário, podemos considerar uma parametrização de Newton-Puiseux do ramo C como sendo

$$\begin{cases} X = t^{\beta_0} \\ Y = t^{\beta_1} + \sum_{i > \beta_1} b_i t^i. \end{cases}$$

Da definição de β_j podemos facilmente deduzir que os coeficientes da parametrização tem a seguinte propriedade: se i e j são inteiros tal que $\beta_{j-1} \leq i < \beta_j$ e se ε_{j-1} não divide i , então $b_i = 0$. Reciprocamente, dada qualquer sequência crescente de números naturais relativamente primos $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\gamma$ tais que os inteiros ε_j definidos por

$$\varepsilon_j = m.d.c.(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_j)$$

são estritamente decrescentes e finalizem em 1, então esta sequência corresponde aos expoentes característicos de algum ramo plano C .

Também definimos os **pares característicos** (η_j, μ_j) para $j = 1, \dots, \gamma$ de C , como segue:

$$\eta_j = \frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j} \quad \text{e} \quad \mu_j = \frac{\beta_j}{\varepsilon_j}.$$

Agora, como $\varepsilon_j = m.d.c.(\varepsilon_{j-1}, \beta_j)$, temos que $m.d.c.(\eta_j, \mu_j) = 1$.

Exemplo 1.51. *Determinemos os expoentes característicos e os pares característicos do ramo definido pela seguinte parametrização*

$$\begin{cases} X = t^{12} \\ Y = t^{24} + t^{30} + t^{33} + t^{40}. \end{cases}$$

Observe que, da Definição (1.48) obtemos,

$$\varepsilon_0 = 12, \quad \varepsilon_1 = 6 \quad \varepsilon_2 = 3 \quad \varepsilon_3 = 1$$

$$\beta_0 = 12, \quad \beta_1 = 30, \quad \beta_2 = 33, \quad \beta_3 = 40.$$

Logo, os expoentes característicos de C são $(12, 30, 33, 40)$. Com isto, podemos determinar os pares característicos.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} = 2 & \eta_2 &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 2 & \eta_3 &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = 3 \\ \mu_1 &= \frac{\beta_1}{\varepsilon_1} = 5 & \mu_2 &= \frac{\beta_2}{\varepsilon_2} = 11 & \mu_3 &= \frac{\beta_3}{\varepsilon_3} = 40. \end{aligned}$$

Portanto os pares de Puiseux são $(2, 5)$, $(2, 11)$ e $(3, 40)$.

1.5.3 Germes de Curvas Analíticas

Neste momento estamos interessados no estudo de curvas restritas a uma vizinhança de um ponto da curva. Para tanto, faz-se necessário o conceito de curvas analíticas.

Vamos nesta seção considerar K como o corpo dos números complexos e $\mathbb{C}\{X, Y\}$ o anel das séries de potências absolutamente convergentes numa vizinhança de um ponto O de \mathbb{C}^2 . Todos os resultados apresentados anteriormente para $K[[X, Y]]$ podem ser demonstrados para $\mathbb{C}\{X, Y\}$.

A propriedade extra da convergência permite uma interpretação geométrica do conjunto dos zeros de um elemento f do ideal maximal $M = \langle X, Y \rangle$ do anel $\mathbb{C}\{X, Y\}$.

Definição 1.52. *Definimos uma curva analítica plana definida por $f \in M$ como*

$$C_f = \{(x, y) \in U; f(x, y) = 0\},$$

onde $U \subset \mathbb{C}^2$ é uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto O de \mathbb{C}^2 .

Um ponto $P = (a, b) \in C_f$ é singular se $f(P) = f_X(P) = f_Y(P) = 0$, onde f_X e f_Y são as derivadas parciais de f com respeito a X e a Y . Caso contrário, P é dito regular

e neste caso, definimos a reta tangente a C_f em P como

$$T_P C_f : f_X(P)(X - a) + f_Y(P)(Y - b) = 0.$$

Uma curva é regular ou não singular se, e somente se, é regular em todos os seus pontos.

Observação 1.53. *O Teorema de Newton-Puiseux, neste contexto, diz que se $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ é um pseudo polinômio irredutível de multiplicidade n , então existe uma série de potências $\varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}$, convergente num disco D centrado na origem de \mathbb{C} , tal que*

$$f(t^n, \varphi(t)) = 0, \quad \text{para todo } t \in D.$$

Isto nos dá uma parametrização local de C_f em torno da origem de \mathbb{C}^2 , por funções analíticas.

Proposição 1.54. *Sejam $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ irredutíveis. Então $C_f = C_g$ se, e somente se, f e g são associadas.*

Demonstração: Ver demonstração em [H]. ■

O conceito de germe, que vamos estabelecer, carrega toda a informação local da curva. Sejam C_f e C_g curvas analíticas planas em $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Considere U e V vizinhanças de $O \in \mathbb{C}^2$, onde O é um ponto de C_f e C_g . Dizemos que C_f e C_g definem o mesmo **germe em O** se para alguma vizinhança aberta $W \subset U \cap V$ de O temos que

$$C_f \cap W = C_g \cap W.$$

Um germe de curva num ponto O é uma classe de equivalência de curvas definidas em alguma vizinhança de O , módulo a relação de equivalência de ter a mesma restrição a uma vizinhança aberta de O .

O ponto O é chamado a origem do germe. Se C_f é uma curva, escrevemos (C_f, O) para denotar o germe da curva C_f no ponto O . Se não houver confusão, diremos frequentemente germe ao invés de germe da curva.

Uma curva C_f definida em uma vizinhança de um ponto O é dita irredutível em O se, e somente se, seu germe (C_f, O) é irredutível em O .

Definição 1.55. *Um germe (C_f, O) é chamado um germe singular ou uma singularidade da curva se, e somente se, $\text{mult}((C_f, O)) > 1$.*

Com isso, podemos dizer que seus representantes têm um ponto singular ou um ponto múltiplo em O .

Definição 1.56. *Dizemos que um germe (C_f, O) não nulo é suave se ele é não singular. Além disso, se (C_f, O) é suave, também será seus representantes.*

Considere (X, Y) as coordenadas em uma vizinhança de O e seja (a, b) as coordenadas do ponto O de forma que $\bar{X} = X - a$, $\bar{Y} = Y - b$ sejam as coordenadas locais da origem, ou seja, a menos de uma translação, podemos considerar que o ponto O é a origem de \mathbb{C}^2 .

1.6 Índice de Interseção

Nesta seção introduziremos um método para expressar numericamente a ordem ou o grau de contato de duas curvas algebróides planas, que é medido pelo índice de interseção.

Seja K um corpo arbitrário e denotaremos por $\mathcal{M} = \langle X, Y \rangle$, como usual, o ideal maximal de $K[[X, Y]]$.

Definição 1.57. *Sejam $f, g \in \mathcal{M}$. O índice de interseção de f e g é o inteiro (incluindo ∞) dado por:*

$$I(f, g) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}.$$

Com esta definição obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.58. *Sejam $f, g, h \in \mathcal{M}$, Φ um automorfismo de $K[[X, Y]]$ e u, v unidades em $K[[X, Y]]$. O índice de interseção satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $I(f, g) < \infty$ se, e somente se, f e g são relativamente primos em $K[[X, Y]]$;
2. $I(f, g) = I(g, f)$;

3. $I(\Phi(f), \Phi(g)) = I(uf, vg) = I(f, g)$;
4. $I(f, gh) = I(f, g) + I(f, h)$;
5. $I(f, g) = 1$ se, e somente se, (f) e (g) são suaves e possuem cones tangentes distintos;
6. $I(f, g - hf) = I(f, g)$.

Demonstração: Ver demonstração em [H]. ■

Exemplo 1.59. Determinaremos o índice de interseção das seguintes séries de potências $g(X, Y) = Y^7 - X^2$ e $f(X, Y) = Y^5 - X^3$. Pelo Teorema (1.58) itens (4) e (6) obtemos,

$$\begin{aligned} I(f, g) &= I(Y^5 - X^3, Y^7 - X^2) = I(Y^5 - X^3, Y^7 - X^2 - Y^2(Y^5 - X^3)) \\ &= I(Y^5 - X^3, X^2(XY^2 - 1)) = I(Y^5 - X^3, X^2) + I(Y^5 - X^3, XY^2 - 1). \end{aligned}$$

Agora observe que $I(Y^5 - X^3, XY^2 - 1) = 0$, pois $XY^2 - 1$ é uma unidade, assim $\langle Y^5 - X^3, XY^2 - 1 \rangle = \mathbb{C}[[X, Y]]$. Com isso, e dos itens (2), (4) e (6) do Teorema (1.58) temos,

$$\begin{aligned} I(f, g) &= I(Y^5 - X^3, X^2) = 2I(Y^5 - X^3, X) = 2I(X, Y^5 - X^3) \\ &= 2I(X, Y^5) = 10I(X, Y) = 10, \end{aligned}$$

uma vez que as curvas (X) e (Y) são suaves e possuem retas tangentes distintas.

Definição 1.60. Seja $f \in \mathcal{M}$ e considere o seguinte anel,

$$\mathcal{O}_f = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f \rangle}.$$

O anel \mathcal{O}_f é um anel local cujo ideal maximal, que denotamos por \mathcal{M}_f , é dado por $\mathcal{M}_f = \langle x, y \rangle$, onde $x = X + \langle f \rangle$ e $y = Y + \langle f \rangle$, ou seja, x e y são as classes residuais de X e Y , respectivamente.

Definição 1.61. Seja $f \in \mathcal{M}$ definimos a valoração associada a f como sendo a função

$$\begin{aligned} v_f : \mathcal{O}_f \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ g &\longmapsto \text{mult}(g(t^n, \varphi(t))), \end{aligned}$$

onde $(t^n, \varphi(t))$ é qualquer parametrização primitiva de f e pondo $v_f(0) = \infty$.

Teorema 1.62. *Sejam f e g pseudo polinômios em $K[[X]][Y]$. Seja $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_r$ uma decomposição de f em fatores irredutíveis. Então,*

$$I(f, g) = \sum_{i=1}^r v_{f_i}(g).$$

Demonstração: Ver demonstração em [H]. ■

Observe que pelo teorema acima, se f for irredutível então $I(f, g) = v_f(g)$ para todo $g \in K[[X, Y]]$.

Teorema 1.63. *Sejam $f, g \in \mathcal{M}$. Então*

$$I(f, g) \geq \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g)$$

com igualdade se, e somente se, (f) e (g) não possuem tangentes em comum.

Demonstração: Sejam $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_r$ e $g = g_1 \cdot \dots \cdot g_s$ a decomposição de f e g em fatores irredutíveis. Do Teorema (1.58) item (2) e (4) obtemos,

$$I(f, g) = \sum_{i,j} I(f_i, g_j). \quad (1.9)$$

Por outro lado, como $\text{mult}(h_1 h_2) = \text{mult}(h_1) + \text{mult}(h_2)$ temos

$$\text{mult}(f) \text{mult}(g) = \sum_{i,j} \text{mult}(f_i) \text{mult}(g_j). \quad (1.10)$$

Logo, se $I(f_i, g_j) \geq \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(g_j)$, para todo i, j , temos de (1.9) e (1.10) que

$$I(f, g) = \sum_{i,j} I(f_i, g_j) \geq \sum_{i,j} \text{mult}(f_i) \text{mult}(g_j) = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g).$$

Portanto, podemos observar que é suficiente provarmos o teorema para f e g irredutíveis.

Do item (3) do Teorema (1.58) o índice de interseção é invariante por mudança de coordenadas. Sendo assim, podemos assumir, após uma mudança de coordenadas ade-

quada, que f é regular em Y , isto é, a reta tangente da curva (f) é Y e a curva (f) admite uma parametrização de Newton-Puiseux da forma

$$\begin{cases} X = t^n \\ Y = \varphi(t) = t^{\beta_1} + \sum_{i>\beta_1} b_i t^i, \end{cases}$$

onde $n = \text{mult}(f) < \beta_1$ e n não divide β_1 .

Agora suponha que $\text{mult}(g) = m$ e

$$g(X, Y) = (aX + bY)^m + g_{m+1}(X, Y) + \dots,$$

onde $g_{m+i}(X, Y)$ com $i \geq 1$ é um polinômio homogêneo de grau $m+i$. Então pelo Teorema (1.62) temos que

$$\begin{aligned} I(f, g) = v_f(g) = \text{mult}(g(t^n, \varphi(t))) &= \text{mult}((at^n + b\varphi(t))^m + g_{m+1}(t^n, \varphi(t)) + \dots) \\ &\geq nm = \text{mult}(f)\text{mult}(g). \end{aligned}$$

Com igualdade válida se, e somente se, $a \neq 0$, isto é, a reta tangente de (g) não é Y , ou ainda, as retas tangentes das curvas (f) e (g) são distintas uma vez que, a reta tangente de (f) é Y . Disso segue o resultado. ■

1.7 Polígono de Newton

Nesta seção apresentaremos um método algébrico para fatorar uma série de potências formal $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ que é exclusivamente devido a Newton, embora fosse completado depois pelos trabalhos de Cramer e Puiseux.

Fixe sobre um plano $\pi = \mathbb{R}^2$ um sistema de coordenadas ortogonais α, δ . Convencionando as orientações usuais do \mathbb{R}^2 .

Considere $f = \sum_{\alpha, \delta \geq 0} a_{\alpha, \delta} X^\alpha Y^\delta$ como um elemento de $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Para cada par (α, δ) com $a_{\alpha, \delta} \neq 0$ plotamos sobre π o ponto de coordenada (α, δ) de forma a obtermos um

conjunto de pontos discretos com coordenadas inteiras não negativas,

$$\Delta(f) = \{(\alpha, \delta); a_{\alpha, \delta} \neq 0\}$$

que é chamado o **diagrama de Newton** de f .

Estamos interessados em uma linha poligonal cujos vértices são pontos de $\Delta(f)$ e cujos lados deixam as coordenadas da origem e todo diagrama em diferentes semiplanos. Para isto, primeiro translade $\Delta(f)$ pela ação de todos vetores com componentes não negativas de forma a obter o conjunto

$$\Delta'(f) = \Delta(f) + \mathbb{R}_+^2.$$

Então considerando o fecho convexo $\overline{\Delta}(f)$ de $\Delta'(f)$, isto é, o conjunto convexo minimal contendo $\Delta'(f)$. O bordo de $\overline{\Delta}(f)$ consiste da união de duas semirretas paralelas aos eixos e uma linha poligonal (talvez reduzida a um único vértice).

Esta linha poligonal é, por definição, o **polígono de Newton de f** o qual denotaremos por $N(f)$. Usaremos somente N quando não houver risco de confusão.

No que segue, consideraremos um polígono de Newton e seus lados orientados da direita para esquerda e de baixo para cima. Assim, se os vértices de um polígono de Newton, de acordo com a orientação, são $P_i = (\alpha_i, \delta_i)$, $i = 0, \dots, k$ então $\alpha_{i-1} > \alpha_i$ e $\delta_{i-1} < \delta_i$, $i = 0, \dots, k$. Neste caso, diremos que N começa em P_0 e termina em P_k . P_0 e P_k serão chamados respectivamente, o primeiro e o último vértice do polígono.

A altura $h(N)$ e a largura $\omega(N)$ do polígono de Newton são definidos, respectivamente, como a ordenada máxima e a abscissa máxima de seus vértices, isto é, $h(N) = \delta_k$ e $\omega(N) = \alpha_0$.

Os próximos três lemas são elementares.

Lema 1.64. *O polígono de Newton de f começa (respectivamente, termina) sobre o eixo α (respectivamente, eixo δ) se, e somente se, f não tem fator Y (respectivamente, fator X).*

Lema 1.65. *O polígono de Newton de f é reduzido a um único vértice se, e somente se, $f = uX^\alpha Y^\delta$, onde u é uma unidade.*

Lema 1.66. *Se $u \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ é unidade, então $\Delta'(f) = \Delta'(uf)$ e conseqüentemente $N(f) = N(uf)$.*

Assim, se f e g são associados então $N(f) = N(g)$.

Seja ξ o germe de uma curva C_f em O . Está claro, do Lema (1.66), que todas as equações de ξ tem o mesmo polígono de Newton. Com isto, temos a seguinte definição.

Definição 1.67. *Definimos o polígono de Newton $N(\xi)$ do germe ξ como sendo o polígono de Newton de qualquer uma das equações de ξ .*

Para curvas planas definidas sobre um corpo de característica zero, existe um algoritmo devido à Newton, que determina uma Parametrização de Newton-Puiseux da curva. E para tanto, o Algoritmo de Newton determina as raízes de uma série $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ preparada à Weierstrass (para mais detalhes ver [BK] e [C4]). Os resultados abaixo seguem do algoritmo de Newton.

Como referência dos resultados abaixo, ver por exemplo, [BK].

Proposição 1.68. *Se C é uma curva algebróide plana irredutível singular, então o polígono de Newton de C consiste de um único segmento.*

Demonstração: Ver Lemma 2 de [BK]. ■

Proposição 1.69. *Se C é uma curva plana redutível, então os ramos de C que correspondem a diferentes segmentos do polígono de Newton são todos distintos.*

Corolário 1.70. *O número de ramos de uma curva plana redutível C é maior ou igual ao número de lados do polígono de Newton de C .*

Proposição 1.71. *Seja C uma curva redutível em $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Um dos ramos de C possui uma série de Newton-Puiseux com termo inicial*

$$ax^{\frac{m}{n}}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

se, e somente se, existe no polígono de Newton de C um lado L com inclinação $-\frac{n}{m}$.

Observação 1.72. Assuma que um lado L do polígono de Newton começa no ponto (α_0, δ_0) e termina no ponto (α_1, δ_1) e sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ os ramos correspondentes à L , ou seja, os ramos cuja série de Newton-Puiseux possui termo inicial de ordem $\frac{m}{n}$.

Seja n_t a multiplicidade de γ_t . Segue novamente da prova construtiva do Algoritmo de Newton que

$$\delta_1 - \delta_0 = \sum_{t=1}^k n_t. \quad (1.11)$$

Exemplo 1.73. Considere a série $f(X, Y) = Y^4 + 2X^3Y^3 + 5X^5Y^2 + 6X^3Y + X^8$ em $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Então, o polígono de Newton é da seguinte forma:

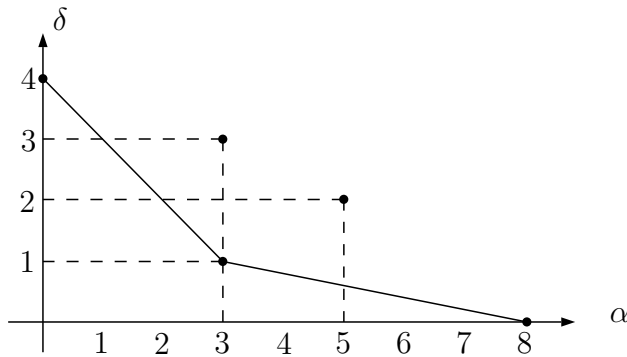


Figura 1.1: Polígono de Newton de $f(X, Y)$

Com isto, concluímos que o polígono de Newton começa no ponto $P_0 = (8, 0)$ e termina no ponto $P_3 = (0, 4)$, tem altura $h(N) = 4$ e largura $\omega(N) = 8$. A inclinação de cada lado é $-\frac{1}{5}$ e -1 , respectivamente.

Uma parametrização de Newton-Puiseux de $f(X, Y)$ é dada por:

$$\begin{cases} x = t \\ y = R(Z^3 + 6)t - \frac{2}{3}t^3 + \dots \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{t^5}{6} + \dots, \end{cases}$$

onde R é a raiz do polinômio $p(Z) = Z^3 + 6$.

Pela Observação (1.72), altura de um lado é $1 = \sum_{t=1}^k n_t$, onde n_t é multiplicidade de cada ramo correspondente ao lado de altura 1 e para o outro lado é $3 = \sum_{t=1}^k n_t$. Da parametrização, obtemos que $n_t = 1$ para ambos os casos. Assim, podemos concluir que existe um ramo da curva correspondente ao lado de altura 1 e três ramos correspondentes ao lado de altura 3. Com isto, temos que o número de lados do polígono é menor que o número de ramos da curva $f(X, Y)$.

Topologia das Curvas Polares

Curvas polares planas são curvas definidas a partir de uma curva plana dada. Neste capítulo, vamos abordar os principais conceitos sobre curvas polares, além disto, descreveremos completamente a topologia de curvas planas.

Uma pergunta natural que surge é: a topologia de uma curva polar pode ser descrita a partir da topologia da curva plana que a define? Essa afirmação é falsa. Todavia, no próximo capítulo, veremos que no caso genérico de curvas polares obtidas de curvas planas genéricas com um par característico esta afirmação é verdadeira.

2.1 Curvas Polares

Nesta seção vamos considerar curvas polares de uma curva algebróide plana.

Sejam $f, g \in \mathcal{M}$, onde \mathcal{M} é o ideal maximal do anel $\mathbb{C}[[X, Y]]$, tal que a curva algebróide plana (g) seja suave.

Denote por $P_g(f)$ o determinante da Jacobiana

$$P_g(f) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(X, Y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix}.$$

Com estas notações, obtemos a seguinte definição.

Definição 2.1. *Se $P_g(f) \neq 0$, ou seja, não é identicamente nulo, então $P_g(f)$ define uma curva a qual chamaremos de **curva polar** de f com respeito à g , ou g -polar, e denotaremos $(P_g(f))$.*

Vejamos algumas propriedades das curvas polares:

Proposição 2.2. *A curva polar $(P_g(f))$ é invariante por mudanças de coordenadas.*

Demonstração: Sejam $f, g \in \mathcal{M}$ com (g) uma curva suave e considere o seguinte \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ dado por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\longmapsto R(X, Y) \\ Y &\longmapsto T(X, Y), \end{aligned}$$

onde $R(X, Y) = aX + bY + h_1(X, Y)$, $T(X, Y) = cX + dY + h_2(X, Y)$ e $\text{mult}(h_1(X, Y)) \geq 2$, $\text{mult}(h_2(X, Y)) \geq 2$. Pela Proposição (1.39), se φ é um \mathbb{C} -automorfismo, então as formas iniciais de $R(X, Y)$ e $T(X, Y)$ são linearmente independentes. Logo $ad - bc \neq 0$. Primeiramente note que, $\varphi(f) = f(R(X, Y), T(X, Y))$ e $\varphi(g) = g(R(X, Y), T(X, Y))$ satisfazem

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi(f), \varphi(g))}{\partial(X, Y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi(f)}{\partial X} & \frac{\partial\varphi(f)}{\partial Y} \\ \frac{\partial\varphi(g)}{\partial X} & \frac{\partial\varphi(g)}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(R(X, Y), T(X, Y))}{\partial X} & \frac{\partial f(R(X, Y), T(X, Y))}{\partial Y} \\ \frac{\partial g(R(X, Y), T(X, Y))}{\partial X} & \frac{\partial g(R(X, Y), T(X, Y))}{\partial Y} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial X} + \frac{\partial g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial Y} + \frac{\partial g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial R}{\partial X} & \frac{\partial R}{\partial Y} \right) & \left(\frac{\partial f}{\partial R} & \frac{\partial f}{\partial T} \right) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial X} & \frac{\partial T}{\partial Y} \right) & \left(\frac{\partial g}{\partial R} & \frac{\partial g}{\partial T} \right) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial X} & \frac{\partial R}{\partial Y} \\ \frac{\partial T}{\partial X} & \frac{\partial T}{\partial Y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial R} & \frac{\partial f}{\partial T} \\ \frac{\partial g}{\partial R} & \frac{\partial g}{\partial T} \end{vmatrix} = \frac{\partial(R, T)}{\partial(X, Y)} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(R, T)}. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \frac{\partial(\varphi(f), \varphi(g))}{\partial(X, Y)} = \frac{\partial(R, T)}{\partial(X, Y)} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(R, T)}.$$

Agora, observe que as curvas determinadas por $\frac{\partial(\varphi(f), \varphi(g))}{\partial(X, Y)}$ e $\frac{\partial(f, g)}{\partial(R, T)}$ são as mesmas, uma vez que $\frac{\partial(R, T)}{\partial(X, Y)}$ é uma unidade. Com efeito,

$$\frac{\partial(R, T)}{\partial(X, Y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial X} & \frac{\partial R}{\partial Y} \\ \frac{\partial T}{\partial X} & \frac{\partial T}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \frac{\partial h_1}{\partial X} & b + \frac{\partial h_1}{\partial Y} \\ c + \frac{\partial h_2}{\partial X} & d + \frac{\partial h_2}{\partial Y} \end{vmatrix} = ad - bc + h(X, Y),$$

onde $h(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ com $\text{mult}(h(X, Y)) \geq 1$. Como $ad - bc \neq 0$ concluímos que $\frac{\partial(R, T)}{\partial(X, Y)}$ é uma unidade em $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Agora, note que

$$P_{\varphi(g)}(\varphi(f)) = \frac{\partial(\varphi(f), \varphi(g))}{\partial(X, Y)} = \frac{\partial(R, T)}{\partial(X, Y)} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(R, T)} = \frac{\partial(R, T)}{\partial(X, Y)} \cdot P_g(f).$$

Portanto, $(P_g(f)) = (P_{\varphi(g)}(\varphi(f)))$. ■

Proposição 2.3. *Sejam $f, h \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ com $\text{mult}(h) = 1$ e $P_h(f)$ a equação da polar de f com respeito à h . Então, existem mudanças de coordenadas tais que $(P_h(f)) = (P_g(f))$, para alguma $g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ de forma que*

$$P_g(f) = a \frac{\partial f}{\partial X} + b \frac{\partial f}{\partial Y},$$

com $a, b \in \mathbb{C}$ não simultaneamente nulos.

Demonstração: Vamos dividir a demonstração em dois casos:

Primeiro caso: Suponhamos que $h(X, Y)$ seja linear, isto é, $h(X, Y) = aY - bX$, com $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Logo, obtemos de imediato a equação da polar de f com respeito à h da própria definição.

Segundo caso: Suponhamos que $h(X, Y)$ não seja linear. Como $\text{mult}(h) = 1$ então

$$h(X, Y) = bX + aY + h_1(X, Y),$$

onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $h_1(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ com $\text{mult}(h_1) \geq 2$. Podemos supor sem perda

de generalidade que $b \neq 0$ e defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\longmapsto \frac{aY - h(X, Y)}{b} \\ Y &\longmapsto Y. \end{aligned}$$

Observe que as formas iniciais de φ são linearmente independentes. Com efeito, calculando o determinante temos

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{b} \cdot \frac{\partial h(X, Y)}{\partial X} & \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial h(X, Y)}{\partial Y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{\partial h(X, Y)}{\partial X}$$

que é não nulo, pois caso contrário, $\frac{\partial h(X, Y)}{\partial X} = 0$, para todo X, Y , ou seja, $h(X, Y)$ só dependeria de Y , o que é absurdo uma vez que supomos $b \neq 0$. Portanto, da Proposição (1.39), φ é um \mathbb{C} -automorfismo.

Note que $\varphi^{-1}(h(X, Y)) = aY - bX$, pois

$$\varphi(aY - bX) = a\varphi(Y) - b\varphi(X) = aY - b\left(\frac{aY - h(X, Y)}{b}\right) = h(X, Y).$$

Assim, considerando $\psi = \varphi^{-1}$ obtemos $\psi(h(X, Y)) = aY - bX$. Portanto, como a curva polar é invariante por mudanças de coordenadas e do que foi mostrado no primeiro caso, concluimos o desejado. ■

Podemos em particular, escolher $g(X, Y) = -X$ e então a equação da polar é dada por $P_g(f) = \frac{\partial f}{\partial Y}$.

Observação 2.4. *A curva polar de f com respeito à g é invariante por mudanças de coordenadas, Proposição (2.2) mas, em geral, a curva polar ($P_g(f)$) depende da equação de f , ou seja, do representante da curva escolhida. De fato, considere $h = uf$ um outro representante da curva (f), onde u é uma unidade em $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Assim, a equação da*

polar h com respeito à g é

$$P_g(uf) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(uf)}{\partial X} & \frac{\partial(uf)}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f \frac{\partial u}{\partial X} + u \frac{\partial f}{\partial X} & f \frac{\partial u}{\partial Y} + u \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix} =$$

$$u \left(\frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial g}{\partial X} \right) + f \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial g}{\partial X} \right) = u \frac{\partial(f, g)}{\partial(X, Y)} + f \frac{\partial(u, g)}{\partial(X, Y)}.$$

Claramente se pode observar que esta equação é diferente da equação da polar de f com relação à g .

2.2 Topologia de Curvas Planas

Nesta seção vamos apresentar uma breve descrição da topologia de curvas analíticas planas. Este problema foi completamente resolvido por Brauner, Zariski e Burau (veja [Z1]) por volta da década de 30. Eles provaram que dois germes de curvas analíticas planas irredutíveis são topologicamente equivalentes se, e somente se, as curvas possuem os mesmos expoentes característicos.

Para mais detalhes sobre a parte histórica e a demonstração dos resultados que vamos apresentar veja, por exemplo, [BK].

Intrinsecamente, uma curva é homeomorfa a \mathbb{C} , entretanto se queremos capturar as propriedades qualitativas das curvas planas, devemos considerá-las como curvas mergulhadas em \mathbb{C}^2 .

Como definimos anteriormente, uma curva analítica plana C_f é um conjunto dado por:

$$C_f = \{(x, y) \in U; f(x, y) = 0 \quad \text{com} \quad f \in \mathbb{C}\{X, Y\}\},$$

onde U é uma vizinhança suficientemente pequena da origem de \mathbb{C}^2 .

Definição 2.5. *Sejam C_f e C_g curvas analíticas planas em \mathbb{C}^2 e suponha $x \in C_f$ e $y \in C_g$. Então, o germe (C_f, x) é topologicamente equivalente a (C_g, y) se existem vizinhanças U de x e V de y , respectivamente, em \mathbb{C}^2 e um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ tais que $\phi(x) = y$ e $\phi(C_f \cap U) = C_g \cap V$.*

Vamos considerar primeiramente o caso irredutível. Dada uma curva analítica plana irredutível C_f , ou seja, $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ é irredutível, podemos enxergá-la como um objeto em \mathbb{R}^4 , pois

$$C_f \subset \mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4.$$

Assumindo que C_f possui uma singularidade isolada, podemos sem perda de generalidade, supor que a singularidade é a origem $(0, 0)$ de \mathbb{C}^2 .

Uma primeira questão que os geômetras se preocuparam foi descrever o tipo topológico de C_f numa vizinhança da singularidade. Para tanto é natural nos restringirmos a uma pequena vizinhança da origem. Assim, seja B uma bola aberta de \mathbb{R}^4 centrada na origem e de raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Seja S o bordo de \overline{B} , ou seja, $S = \partial\overline{B}$ é a esfera centrada na origem de raio $\varepsilon > 0$. Denominamos a interseção da esfera S com a curva por **link** e denotamos por $K = S \cap C_f$.

Quando C_f é irredutível na vizinhança de uma singularidade, então o link $K = S \cap C_f$ é um nó em $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ (S^3 é uma 3-esfera).

Definição 2.6. *Um nó é um subconjunto $K \cap S^3$ que é homeomorfo a esfera S com uma orientação. Dois nós K_1 e K_2 em S^3 são equivalentes quando existe um homeomorfismo $\phi : S^3 \rightarrow S^3$ que leva K_1 em K_2 e que preserva suas orientações. Equivalência entre links é definida de maneira análoga.*

Definição 2.7. *Se A é um subconjunto de \mathbb{C}^2 , definimos o cone sobre A (ou com base A) com vértice na origem, como sendo o conjunto de retas de \mathbb{C}^2 que passam pela origem e por cada um dos pontos de A , o qual denotamos por $C(A)$.*

Milnor em [Mi] provou que estudar a topologia de uma curva analítica plana C_f numa vizinhança da origem, ou seja, $C_f \cap \overline{B}$, reduz-se ao estudo da topologia do cone do link (ou seja, $C(K)$, onde $K = S \cap C_f$), resultado que apresentaremos abaixo.

Teorema 2.8. *Seja \overline{B} uma pequena bola em torno da origem de \mathbb{C}^2 , o qual é uma singularidade de uma curva analítica plana C_f . Seja $S = \partial\overline{B}$, $K = S \cap C_f$ e $C(K) \subset \overline{B}$ o cone com base K e vértice na origem. Então*

$$(\overline{B}, \overline{B} \cap C_f) \quad e \quad (\overline{B}, C(K)) \quad \text{são homeomorfos.}$$

Entretanto, o tipo topológico de $(\overline{B}, C(K))$ é determinado pela topologia de (S, K) , ou seja, pela topologia do link.

Em resumo, o teorema acima mostra que germes de curvas analíticas planas com links equivalentes são topologicamente equivalentes. E a recíproca também é verdade.

Corolário 2.9. *Dois germes de curvas analíticas planas irredutíveis são topologicamente equivalentes se, e somente se, eles possuem links equivalentes.*

Ou seja, o problema da classificação topológica local de curvas analíticas planas irredutíveis, reduziu-se ao problema de classificar seus links, que são nós.

Considerando a projeção estereográfica $\pi : S \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde q é um ponto da esfera S que não pertence à curva C_f , o estudo da topologia do link $K = S \cap C_f$ é reduzido ao estudo da topologia da imagem de K pela projeção π , que é um objeto de \mathbb{R}^3 .

Pode-se mostrar que a imagem do link pela projeção estereográfica, $\pi(K)$, é um **nó tórico iterado**. Vamos dar uma idéia do que se trata um nó tórico iterado. Um nó tórico em \mathbb{R}^3 é uma curva simples, ou seja, sem auto-interseção e fechada em um toro de \mathbb{R}^3 .

Definição 2.10. *Dizemos que um nó tórico é do tipo (n, m) e ordem 1, se ele percorre n vezes no sentido equatorial e se espirala m vezes no sentido meridional no toro.*

Se considerarmos uma vizinhança tubular de um nó tórico do tipo (n_1, m_1) e nesta vizinhança considerarmos um nó tórico do tipo (n_2, m_2) , então este último é chamado de **nó tórico iterado** de ordem 2 do tipo $(n_1, m_1)(n_2, m_2)$. Procedendo desta maneira, podemos construir um nó tórico iterado de ordem g de tipo $(n_1, m_1)(n_2, m_2)\dots(n_g, m_g)$.

O teorema a seguir descreve a topologia do link ou da sua imagem pela projeção estereográfica π , uma vez que K e $\pi(K)$ são homeomorfos.

Teorema 2.11. *Seja (C_f, O) um germe de curva analítica plana irredutível, parametrizada por uma expansão de Newton-Puiseux com pares característicos $(n_1, m_1)\dots(n_g, m_g)$. Então, o link $K = S \cap C_f$, onde S é o bordo de uma pequena bola ao redor de O , é um nó tórico iterado do tipo $(n_1, m_1)\dots(n_g, m_g)$.*

A recíproca deste resultado também é verdadeira.

Corolário 2.12. *Dois germes de curvas analíticas planas irredutíveis são topologicamente equivalentes se, e somente se, eles possuem os mesmos pares característicos (ou os mesmos expoentes característicos).*

Portanto, os germes de curvas analíticas planas irredutíveis são completamente classificados do ponto de vista topológico pelos expoentes característicos da curva.

E o que podemos falar sobre a topologia de curvas analíticas planas redutíveis? Neste caso também temos uma descrição completa. Se (C_f, O) é um germe de curva analítica plana redutível, então a interseção de C_f com uma esfera S é uma união de nós linkados. Cada nó pertence a uma componente irredutível de C_f .

Dados (C_f, O) e (C_g, O) germes de curvas analíticas planas redutíveis em $O \in \mathbb{C}^2$. E sejam $K_1 = S \cap C_f$ e $K_2 = S \cap C_g$ nós, onde S é uma pequena esfera em torno de O . É possível provar que, certas informações sobre o tipo de entrelaçamento entre K_1 e K_2 são obtidas do conhecimento do índice de interseção das curvas associadas.

Teorema 2.13. *Dois germes de curvas analíticas planas redutíveis (C_f, O) e (C_g, O) são topologicamente equivalentes, se existe uma bijeção entre as componentes irredutíveis de C_f e C_g tais que*

1. *os expoentes característicos das componentes irredutíveis correspondentes são iguais;*
2. *o índice de interseção das componentes irredutíveis correspondentes coincidem.*

Portanto, este teorema classifica completamente, do ponto de vista topológico, as singularidades de curvas analíticas planas com vários ramos. E observe que a existência de uma bijeção entre C_f e C_g nos garante que as curvas possuem o mesmo número de ramos.

A descrição topológica acima, apesar de ter sido feita para curvas analíticas planas, permanece válida para curvas algebróides planas definidas em $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Isto deve-se ao fato que dado uma curva algebróide plana definida por uma série $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, então existem mudanças de coordenadas de tal modo que f pode ser truncada numa determinada ordem. Portanto curvas planas podem ser definidas, a menos de mudanças de coordenadas, por polinômios, que em particular são analíticos. Para mais detalhes ver [Z2].

2.3 Topologia da Polar de uma Curva Plana

Como afirmamos no início deste capítulo, a topologia de uma curva polar não depende apenas da topologia da curva plana que a define. Em 1971, Pham em [P] deu o primeiro exemplo de germes de curvas planas com mesmo tipo topológico, porém suas curvas polares não tem o mesmo tipo topológico.

Exemplo 2.14. (Pham) Considere a família de curvas planas f_λ dada por:

$$f_\lambda : f = Y^3 - X^{11} + \lambda X^8 Y, \quad \text{onde } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Uma parametrização de Newton-Puiseux de f_λ é dado por

$$\begin{cases} X = t^3 \\ Y = t^{11} + \frac{\lambda}{3}t^{13} + \dots \end{cases}$$

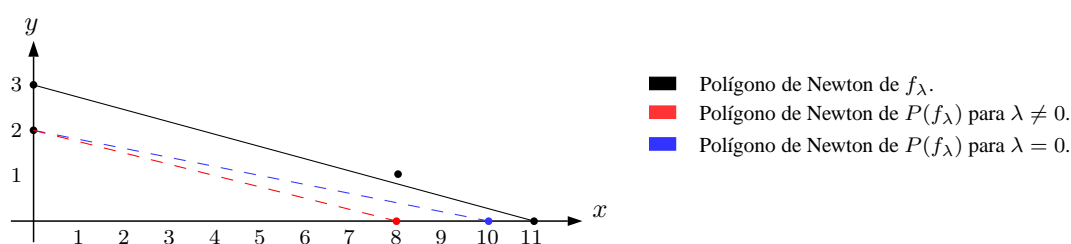


Figura 2.1: Topologia

Observe que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, f_λ é irredutível com um par característico $(3, 11)$. Portanto, do Corolário (2.12), são topologicamente equivalentes. Agora, da Proposição (2.3) podemos considerar a equação da curva polar de f_λ dada por,

$$P(f_\lambda) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial Y} = 3Y^2 + \lambda X^8, \quad \text{onde } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Analisemos os seguintes casos:

i) Se $\lambda \neq 0$, então $\frac{\partial f_\lambda}{\partial Y} = 3Y^2 + \lambda X^8 = (\sqrt{3}Y + \sqrt{\lambda}iX^4)(\sqrt{3}Y - \sqrt{\lambda}iX^4)$. Neste caso, os ramos $C_1 = (\sqrt{3}Y + \sqrt{\lambda}iX^4)$ e $C_2 = (\sqrt{3}Y - \sqrt{\lambda}iX^4)$ possuem único expoente característico β_{01} e β_{02} , respectivamente, que é exatamente a multiplicidade dos ramos,

ou seja, $\beta_{01} = 1 = \beta_{02}$. E o índice de interseção de C_1 e C_2 é:

$$I(C_1, C_2) = I(\sqrt{3}Y + \sqrt{\lambda}iX^4, \sqrt{3}Y - \sqrt{\lambda}iX^4) = I(Y, X^4) = 4I(Y, X) = 4.$$

ii) Se $\lambda = 0$, então $\frac{\partial f_\lambda}{\partial Y} = 3Y^2 = (\sqrt{3}Y)(\sqrt{3}Y)$. Também neste caso os ramos $g_1 = (\sqrt{3}Y)$ e $g_2 = (\sqrt{3}Y)$ possuem único expoente característico, $\beta_{01} = 1 = \beta_{02}$. Mas o índice de interseção de g_1 e g_2 é:

$$I(g_1, g_2) = I(\sqrt{3}Y, \sqrt{3}Y) = I(Y, Y) = \infty.$$

Logo, pelo Teorema (2.13), as curvas polares $P(f_\lambda)$ para $\lambda = 0$ e $\lambda \neq 0$ não são topologicamente equivalentes.

Casas em [C1] considera curvas algebróides planas irredutíveis genéricas com um par característico, e neste caso, genericamente o tipo topológico da polar de uma curva algebróide plana com um par característico depende apenas do tipo topológico da curva original, que como descrevemos na seção anterior, o conhecimento dos expoentes característicos determina completamente a topologia de uma curva plana irredutível. O exemplo de Pham apresenta uma família de curvas planas com um par característico cujas curvas polares não possuem mesmo tipo topológico.

No próximo capítulo, vamos explorar com mais detalhes o trabalho de Casas em [C1], utilizando o polígono de Newton.

Polar de uma Curva Plana com um par Característico

Neste capítulo vamos descrever a topologia da curva polar genérica de uma curva algebróide plana irredutível em $\mathbb{C}[[X, Y]]$, com um par característico, através do polígono de Newton da polar.

O principal resultado deste trabalho é o Teorema (3.14) que caracteriza os ramos da polar genérica através do par característico de cada ramo.

3.1 Equação da Curva Polar

Para não carregar a notação vamos, de agora em diante, considerar o anel $\mathbb{C}[[x, y]]$.

Seja (f) uma curva algebróide plana irredutível com um par característico e definida sobre o corpo \mathbb{C} dos números complexos. Depois de uma mudança de coordenadas, se necessário, segue do Teorema da Função Implícita de Newton (Teorema (1.27)) que a série de Newton-Puiseux de (f) é escrita da seguinte forma:

$$y = b(x) = x^{\frac{m}{n}} + \sum_{k \geq 1} a_k x^{\frac{m+k}{n}},$$

onde n é a multiplicidade e (n, m) é o par característico da curva algebróide plana irredutível (f) .

Sabemos que existem n parametrizações de Newton-Puiseux de uma curva algebróide plana irredutível e que elas diferem por uma raiz n -ésima da unidade, assim denotemos tais parametrizações por

$$b_i(x) = \xi_i^m x^{\frac{m}{n}} + \sum_{k \geq 1} a_k \xi_i^{m+k} x^{\frac{m+k}{n}} \quad (3.1)$$

com $\xi_i \in U_n$, $i = 1, \dots, n$, onde U_n é o grupo das n -ésimas raízes da unidade em \mathbb{C} . Segue do Corolário (1.26) item (ii) que podemos escrever $f(x, y)$ da forma

$$0 = f(x, y) = \prod_{i=1}^n (y - b_i(x)) \in \mathbb{C}[[x, y]]$$

como sendo a equação implícita de (f) .

A polar de (f) relativa a direção com coordenadas homogêneas (λ, μ) é definida pela equação $\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, ou mais explicitamente,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\prod_{i=1}^n (y - b_i(x)) \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\prod_{i=1}^n (y - b_i(x)) \right) \\ &= \lambda \left[-b'_1(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n (y - b_i(x)) - b'_2(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n (y - b_i(x)) - \dots - b'_n(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n (y - b_i(x)) \right] \\ &\quad + \mu \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n (y - b_i(x)) + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n (y - b_i(x)) + \dots + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n (y - b_i(x)) \right] \\ &= -\lambda \sum_{j=1}^n b'_j(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) + \mu \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \right) (\mu - \lambda b'_j(x)). \end{aligned}$$

Logo,

$$0 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \right) (\mu - \lambda b'_j(x)). \quad (3.2)$$

Lema 3.1. *Podemos escrever a expressão $\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \right)$ em termos de polinômios simétricos, ou seja,*

$$\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \right) = ny^{n-1} + \sum_{\rho=0}^{n-2} (-1)^{n-\rho-1} (\rho+1) S_1^{n-\rho-1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-\rho-1}}) y^\rho.$$

Demonstração: Primeiramente devemos observar que,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \right) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n (y - b_i(x)) + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n (y - b_i(x)) + \dots + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n (y - b_i(x)) \\ &= (y - b_2(x)) \dots (y - b_n(x)) + (y - b_1(x))(y - b_3(x)) \dots (y - b_n(x)) + \dots + (y - b_1(x)) \dots (y - b_{n-1}(x)) \\ &= ny^{n-1} - (n-1)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)y^{n-2} + (n-2)(b_1b_2 + \dots + b_1b_n + b_2b_3 + \dots + b_2b_n + b_{n-1}b_1 + \dots + b_{n-1}b_n)y^{n-3} + \dots + (b_1 \dots b_{n-1} + b_1 \dots b_{n-2}b_n + b_1 \dots b_{n-3}b_{n-1}b_n + \dots + b_2b_3 \dots b_n). \end{aligned}$$

Com a definição de polinômio simétrico (Ver Apêndice (A.2)), se $i_t \in \{1, 2, \dots, n\}$ obtemos,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \right) &= ny^{n-1} - (n-1)S_1^1(b_{i_1})y^{n-2} + (n-2)S_1^2(b_{i_1}, b_{i_2})y^{n-3} \\ &\quad - (n-3)S_1^3(b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3})y^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1}S_1^{n-1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-1}}). \end{aligned}$$

Segue que,

$$\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \right) = ny^{n-1} + \sum_{\rho=0}^{n-2} (-1)^{n-\rho-1} (\rho+1) S_1^{n-\rho-1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-\rho-1}}) y^\rho.$$

■

Como as n parametrizações de Newton-Puiseux de (f) são dadas pela Equação (3.1) e estamos interessados nos primeiros termos da série $S_1^{n-\rho-1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-\rho-1}})$, vamos expressá-los em termos de polinômios simétricos nas raízes ξ_i , $i = 1, \dots, n$.

Lema 3.2. *Para $\rho = 0, \dots, n-2$ segue que*

$$\begin{aligned} S_1^{n-\rho-1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-\rho-1}}) &= S_{m, \dots, m}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) x^{\frac{(n-\rho-1)m}{n}} \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} \left(S_{m, \dots, m, m+k}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) a_k x^{\frac{(n-\rho-1)m+k}{n}} \right) + \dots \end{aligned}$$

Demonstração: De fato, note que se $\rho = n-2$

$$\begin{aligned} S_1^1(b_{i_1}) = b_1 + b_2 + \dots + b_n &= \left(\sum_{i_t=1}^n \xi_{i_t}^m \right) x^{\frac{m}{n}} + \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{i_t=1}^n \xi_{i_t}^{m+k} \right) a_k x^{\frac{m+k}{n}} \\ &= S_m^1(\xi_1, \dots, \xi_n) x^{\frac{m}{n}} + \sum_{k \geq 1} S_{m+k}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) a_k x^{\frac{m+k}{n}}. \end{aligned}$$

De um modo geral, é fácil verificar que,

$$S_1^2(b_{i_1}, b_{i_2}) = S_{m,m}^2(\xi_1, \dots, \xi_n)x^{\frac{2m}{n}} + \sum_{k \geq 1} \left(S_{m,m+k}^2(\xi_1, \dots, \xi_n)a_k x^{\frac{2m+k}{n}} \right) + \dots$$

$$S_1^3(b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}) = S_{m,m,m}^3(\xi_1, \dots, \xi_n)x^{\frac{3m}{n}} + \sum_{k \geq 1} \left(S_{m,m,m+k}^3(\xi_1, \dots, \xi_n)a_k x^{\frac{3m+k}{n}} \right) + \dots$$

.....

$$S_1^{n-1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-1}}) = S_{m,\dots,m}^{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)x^{\frac{(n-1)m}{n}} + \sum_{k \geq 1} \left(S_{m,\dots,m,m+k}^{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)a_k x^{\frac{(n-1)m+k}{n}} \right) + \dots$$

Assim, tomando $\rho = 0, \dots, n - 2$, segue que

$$S_1^{n-\rho-1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-\rho-1}}) = S_{m,\dots,m}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)x^{\frac{(n-\rho-1)m}{n}} + \sum_{k \geq 1} \left(S_{m,\dots,m,m+k}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)a_k x^{\frac{(n-\rho-1)m+k}{n}} \right) + \dots$$

■

Assim, podemos concluir dos Lemas (3.1) e (3.2) que

$$\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \right) = ny^{n-1} + \sum_{\rho=0}^{n-2} (-1)^{n-\rho-1} (\rho + 1) \left[S_{m,\dots,m}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)x^{\frac{(n-\rho-1)m}{n}} + \sum_{k \geq 1} \left(S_{m,\dots,m,m+k}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)a_k x^{\frac{(n-\rho-1)m+k}{n}} \right) + \dots \right] y^\rho. \quad (3.3)$$

Vamos observar adiante que apesar de termos expresso $S_1^{n-\rho-1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-\rho-1}})$ parcialmente em termos de polinômios simétricos nas raízes ξ_i , $i = 1, \dots, n$, os termos descritos são suficientes para nossos propósitos.

No próximo resultado, vamos considerar $\rho \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \rho < n - 1$.

Proposição 3.3. *Na equação (3.2) não aparecem monômios com bigrau (δ, ρ) (em x e y resp.) se $\delta < \frac{(n-\rho-1)m}{n}$. Se $\delta \geq \frac{(n-\rho-1)m}{n}$ e se $t := t(\delta, \rho) := \delta n - (n - \rho - 1)m$ então ocorre na equação (3.2) um monômio não trivial com bigrau (δ, ρ) cujo coeficiente é uma função linear em a_t . Mais ainda, se $t(\delta, \rho) = t(\alpha, \beta)$ temos que $(\delta, \rho) = (\alpha, \beta)$, além disso, se $t(\delta, \rho) < r$ então a_r não ocorre no monômio cujo bigrau é (δ, ρ) .*

Antes de provar a proposição, enunciaremos e demonstraremos um lema técnico que será útil na demonstração da proposição.

Lema 3.4. *Se $\rho < n - 2$ então $m + t \equiv m(\rho + 2) \not\equiv 0 \pmod{n}$, onde $t = t(\delta, \rho) = \delta n - (n - \rho - 1)m$. Além disso, $\sum_{i=1}^n \xi_i^{m+t} = S_{m+t}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$.*

Demonstração: Suponha que $\rho < n - 2$, como $t = t(\delta, \rho) = \delta n - (n - \rho - 1)m$ segue que,

$m + t = m + \delta n - (n - \rho - 1)m = \delta n - (n - \rho - 2)m = n(\delta - m) + (\rho + 2)m$. Logo, $m + t \equiv (\rho + 2)m \pmod{n}$. Agora observe que, se $(\rho + 2)m = \zeta n$, para algum $\zeta \in \mathbb{Z}$, $\zeta \neq 0$, então $m = \frac{\zeta}{\rho + 2}n$ absurdo, pois $\text{mdc}(m, n) = 1$. Para concluir, note que

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^{m+t} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{n(\delta-m)+m(\rho+2)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{m(\rho+2)}.$$

Vale lembrar, da Observação (1.24) que, ao somar todos os elementos de U_n isso resulta no elemento neutro da adição, mais ainda, $\xi_i^{m(\rho+2)} \in U_n$ e se $\xi_i^{m(\rho+2)} = \xi_j^{m(\rho+2)}$ então $i = j$, ou seja, $\xi_i = \xi_j$. Logo,

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^{m+t} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{m(\rho+2)} = 0.$$

■

Agora estamos aptos para demonstrar a Proposição (3.3).

Demonstração: Nosso objetivo nesta proposição é determinar os monômios que de fato aparecem na equação (3.2), cujos coeficientes são funções lineares em a_t . Para tanto, basta analisarmos na equação (3.2) o que acontece com os monômios da expressão

$$\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (y - b_i(x)) \right) \mu = \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left(y - \xi_i^m x^{\frac{m}{n}} - \sum_{k \geq 1} a_k \xi_i^{m+k} x^{\frac{m+k}{n}} \right) \right) \mu. \quad (3.4)$$

Pela Equação (3.3), é fácil ver que para y^ρ , $0 \leq \rho < n - 1$, a ordem em x não é menor que $(n - \rho - 1)\frac{m}{n}$.

Suponha que $\delta \geq \frac{(n-\rho-1)m}{n}$. Observe na Equação (3.3) que, para $\rho = n - 1$, $\delta = 0$. Temos que $(n - \rho - 1)m \not\equiv 0 \pmod{n}$ pois caso contrário, $n|(n - \rho - 1)m$. Uma vez que

$mdc(m, n) = 1$ segue que $n|(n - \rho - 1)$, ou seja, $n|(n - (\rho + 1))$. Como $\rho + 1 < n$ temos $n - (\rho + 1) < n$, absurdo. Portanto $n \nmid (n - \rho - 1)m$.

Seja $t(\delta, \rho) = \delta n - (n - \rho - 1)m \in \mathbb{Z}$. Como $\delta \geq \frac{(n-\rho-1)m}{n}$ temos que $t(\delta, \rho) \geq 0$ e além disso, $t(\delta, \rho) = 0$ se, e somente se, $\delta = \frac{(n-\rho-1)m}{n}$. Analisemos o caso em que $\delta > \frac{(n-\rho-1)m}{n}$, ou seja, $t(\delta, \rho) > 0$. Neste caso, pela Equação (3.3) temos que, $\delta = \frac{(n-\rho-1)m+k}{n}$, $k \geq 1$, ou seja, $t = k = \delta n - (n - \rho - 1)m$. Nestas condições, queremos provar que em (3.4) ocorre um monômio não trivial com bigrau (δ, ρ) cujo coeficiente é uma função linear em a_t , ou seja, basta provarmos que

$$S_{m, \dots, m, m+t}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0.$$

Com efeito, se $\rho < n - 2$ segue do Lema (3.4) que $S_{m+t}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ e da Proposição (A.10) (Ver Apêndice (A.2)) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= S_{m, \dots, m, m}^{n-\rho-2}(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot S_{m+t}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &= S_{2m+t, m, \dots, m}^{n-\rho-2}(\xi_1, \dots, \xi_n) + S_{m, 2m+t, m, \dots, m}^{n-\rho-2}(\xi_1, \dots, \xi_n) + \dots + S_{m, \dots, m, 2m+t}^{n-\rho-2}(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &\quad + S_{m, \dots, m, m+t}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &= (n - \rho - 2)S_{m, \dots, m, 2m+t}^{n-\rho-2}(\xi_1, \dots, \xi_n) + S_{m, \dots, m, m+t}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n), \end{aligned}$$

ou seja, $S_{m, \dots, m, m+t}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = -(n - \rho - 2)S_{m, \dots, m, 2m+t}^{n-\rho-2}(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Agora vamos determinar $S_{m, \dots, m, 2m+t}^{n-\rho-2}(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Se $\rho < n - 3$, segue do Lema (3.4) que $S_{2m+t}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i^{2m+t} = 0$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= S_{m, \dots, m, m}^{n-\rho-3}(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot S_{2m+t}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) = (n - \rho - 3)S_{m, \dots, m, 3m+t}^{n-\rho-3}(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &\quad + S_{m, \dots, m, 2m+t}^{n-\rho-2}(\xi_1, \dots, \xi_n), \end{aligned}$$

ou ainda, $S_{m, \dots, m, 2m+t}^{n-\rho-2}(\xi_1, \dots, \xi_n) = -(n - \rho - 3)S_{m, \dots, m, 3m+t}^{n-\rho-3}(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Obtendo assim,

$$S_{m, \dots, m, m+t}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = (n - \rho - 2)(n - \rho - 3)S_{m, \dots, m, 3m+t}^{n-\rho-3}(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Desta forma, repetindo este processo obtemos,

$$S_{m,\dots,m,m+t}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = (-1)^{n-\rho-3} \cdot (n - \rho - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot S_{m,(n-\rho-2)m+t}^2(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

E finalmente,

$$\begin{aligned} 0 = S_m^1(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot S_{(n-\rho-2)m+t}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) &= S_{(n-\rho-1)m+t}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &+ S_{m,(n-\rho-2)m+t}^2(\xi_1, \dots, \xi_n). \end{aligned}$$

Concluimos após $n - \rho - 2$ passos,

$$S_{m,m,\dots,m+t}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = (-1)^{n-\rho-2} (n - \rho - 2)! \cdot S_{(n-\rho-1)m+t}^1(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Mas, por hipótese, $t = t(\delta, \rho) = \delta n - (n - \rho - 1)m > 0$, então $\delta n = (n - \rho - 1)m + t$.

Assim,

$$S_{(n-\rho-1)m+t}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) = S_{\delta n}^1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i^{\delta n} = n \neq 0.$$

Portanto,

$$S_{m,m,\dots,m+t}^{n-\rho-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = (-1)^{n-\rho-2} \cdot (n - \rho - 2)! \cdot n \neq 0$$

e disso segue o resultado.

Suponha que $t(\delta, \rho) = t(\alpha, \beta)$, então $\delta n - (n - \rho - 1)m = \alpha n - (n - \beta - 1)m$, o que implica $(\rho - \beta)m = (\alpha - \delta)n$. Assim $n \mid (\rho - \beta)m$. Como $\text{mdc}(m, n) = 1$ temos $n \mid (\rho - \beta)$. Sendo $\rho, \beta \leq n - 1$ segue que $\rho - \beta \leq n - 1$. Logo $\rho - \beta = 0$, ou seja, $\rho = \beta$ e conseqüentemente $0 = n(\alpha - \delta)$ e assim, segue que $\delta = \alpha$. Portanto $(\delta, \rho) = (\alpha, \beta)$.

Para concluir, se a_r aparece no monômio cujo bigrau é (δ, ρ) segue imediatamente da Equação (3.3) que $t(\delta, \rho) = k \geq r$ o que completa a demonstração da proposição. ■

Observação 3.5. Os termos $n\mu y^{n-1}$ e $-m\lambda x^{m-1}$ também aparecem na Equação (3.2). O último vem da soma do produto de $(n - 1)$ -fatores $\xi_i^m x^{\frac{m}{n}}$ de $b_i(x)$ com os fatores $\frac{m}{n} \xi_j^m \lambda x^{\frac{m-n}{n}}$ de $b'_j(x)$, $i, j = 1, \dots, n$ com $i \neq j$. Além disto, não existe outro termo com bigrau $(0, n - 1)$ envolvendo μ , nem termos com bigrau $(m - 1, 0)$ envolvendo λ . Portanto, para qualquer valor de a_k existem monômios não triviais com bigrau $(0, n - 1)$ e $(m - 1, 0)$

na equação de uma curva polar genérica.

3.2 Polígono de Newton da Polar Genérica

Analisaremos agora a singularidade da curva polar genérica para uma curva algebróide plana irredutível (genérica) C , onde genérica, neste caso, significa que de todas as curvas C , excluímos aquelas cujos coeficientes a_k formam um conjunto finito de relações algébricas não triviais (que não serão escritos explicitamente).

A Proposição (3.3) determina os monômios que ocorrem na equação de uma polar genérica de uma curva genérica com um par característico, em particular, se considerarmos um monômio na equação da curva polar cujo grau é ρ em y , onde $0 \leq \rho < n - 1$, então o menor grau em x não é menor que $(n - \rho - 1)\frac{m}{n}$. Como os vértices do polígono de Newton são formados por coordenadas inteiras positivas segue que o menor grau em x é $m - \lfloor (\rho + 1)\frac{m}{n} \rfloor$, (onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função parte inteira). De fato, se $(\rho + 1)\frac{m}{n}$ fosse inteiro, então $(n - \rho - 1)\frac{m}{n}$ seria inteiro. O que é um absurdo, pois $\text{mdc}(m, n) = 1$ e $n \nmid (n - \rho - 1)m$. Assim, $(\rho + 1)m \not\equiv 0 \pmod{n}$, ou seja, $(\rho + 1)\frac{m}{n}$ não é inteiro. Logo,

$$\left\lfloor m - (\rho + 1)\frac{m}{n} \right\rfloor < m - (\rho + 1)\frac{m}{n}.$$

Por outro lado, $(\rho + 1)\frac{m}{n} > \lfloor (\rho + 1)\frac{m}{n} \rfloor$, ou ainda $-(\rho + 1)\frac{m}{n} < -\lfloor (\rho + 1)\frac{m}{n} \rfloor$ então $m - (\rho + 1)\frac{m}{n} < m - \lfloor (\rho + 1)\frac{m}{n} \rfloor$. Assim,

$$\left\lfloor m - (\rho + 1)\frac{m}{n} \right\rfloor < m - (\rho + 1)\frac{m}{n} < m - \left\lfloor (\rho + 1)\frac{m}{n} \right\rfloor.$$

Portanto, $m - \lfloor (\rho + 1)\frac{m}{n} \rfloor$ é o menor grau que ocorre em x .

Para desenhar o polígono de Newton da polar genérica, temos que considerar apenas os pontos da forma

$$P_\rho = \left(m - \left\lfloor (\rho + 1)\frac{m}{n} \right\rfloor, \rho \right), \quad \text{onde } \rho = 0, \dots, n - 1.$$

Note que incluímos o ponto P_{n-1} que corresponde ao único monômio de grau $n - 1$

em y . Assim temos os pontos

$$P_0 = \left(m - \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor, 0 \right) \quad \text{e} \quad P_{n-1} = (0, n-1)$$

como sendo o primeiro e o último vértice, respectivamente, do polígono de Newton da polar genérica. O próximo passo é descobrir quais dos pontos P_ρ são os vértices do polígono de Newton da polar genérica.

Como a curva C possui um par característico (n, m) , podemos expressá-lo em termos de frações contínuas reduzidas da forma

$$\frac{p_s}{q_s} = \frac{m}{n} = h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{h_s}}}}}, \quad (3.5)$$

veja Seção (A.1) sobre frações contínuas no Apêndice A.

Vamos supor que as coordenadas de um vértice são dadas pela seguinte expressão

$$P_{q_{2j}-1} = \left(m - \left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor, q_{2j} - 1 \right), \quad \text{para algum } j \text{ inteiro positivo, } 0 \leq j < \frac{s}{2}.$$

Note que, se $j = 0$ temos que $q_{2j} - 1 = q_0 - 1 = 0$ então $(m - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor, 0) = (m - h_0, 0)$ é o primeiro vértice do polígono de Newton. Como conhecemos um vértice e sabemos as coordenadas de todos os outros pontos é possível construir o próximo lado do polígono de Newton da polar genérica, basta selecionar dentre todas as retas que passam pelos pontos P_ρ e $P_{q_{2j}-1}$, onde $q_{2j} - 1 < \rho \leq n - 1$, a de mínima inclinação, cuja expressão é

$$\frac{q_{2j} - 1 - \rho}{- \left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\rho+1)m}{n} \right\rfloor}.$$

Ou seja, se θ é o ângulo entre a reta que passa pelos pontos P_ρ e $P_{q_{2j}-1}$ e o eixo δ , então queremos determinar a reta cujo θ é máximo. Como as inclinações dessas retas são todas

negativas, tomamos em vez das inclinações o oposto de seu inverso que é dado por,

$$\max \left(\frac{\left\lfloor \frac{(\rho+1)m}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor}{\rho - q_{2j} + 1} \right), \quad q_{2j} - 1 < \rho \leq n - 1.$$

Considere $t = \rho - q_{2j} + 1$, ou seja, $\rho = t + q_{2j} - 1$. Como $q_{2j} - 1 < \rho \leq n - 1$ temos que $0 < t \leq n - q_{2j}$. Com isto, obtemos

$$\max \left(\frac{\left\lfloor \frac{(\rho+1)m}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor}{\rho - q_{2j} + 1} \right) = \max \left(\frac{\left\lfloor \frac{(t+q_{2j})m}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor}{t} \right), \quad 0 < t \leq n - q_{2j}.$$

Denotamos por

$$\Delta = \frac{1}{t} \left(\left\lfloor \frac{(t+q_{2j})m}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor \right).$$

Utilizaremos as propriedades de frações contínuas na tentativa de encontrar um limitante superior para Δ .

Lema 3.6. *Fixado um inteiro positivo j , onde $0 \leq j < \frac{s}{2}$ e nas condições acima, temos que $\Delta \leq \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}$.*

Demonstração: Observe que da Equação (3.5)

$$\left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor = \left\lfloor q_{2j} \frac{p_s}{q_s} \right\rfloor = \left\lfloor q_{2j} \left(\frac{p_s}{q_s} + \frac{p_{2j}}{q_{2j}} - \frac{p_{2j}}{q_{2j}} \right) \right\rfloor = \left\lfloor p_{2j} + q_{2j} \left(\frac{p_s}{q_s} - \frac{p_{2j}}{q_{2j}} \right) \right\rfloor.$$

Como $2j < s$ e além disso, $2j \equiv 0 \pmod{2}$, temos do Lema (A.7) Apêndice A que $\frac{p_s}{q_s} - \frac{p_{2j}}{q_{2j}} \leq \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}}$. Então,

$$q_{2j} \left(\frac{p_s}{q_s} - \frac{p_{2j}}{q_{2j}} \right) \leq q_{2j} \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} = \frac{1}{q_{2j+1}} < 1.$$

Logo, $\left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor = p_{2j}$. Assim,

$$\Delta = \frac{1}{t} \left(\left\lfloor \frac{(t+q_{2j})m}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor \right) = \frac{1}{t} \left(\left\lfloor \frac{(t+q_{2j})m}{n} \right\rfloor - p_{2j} \right).$$

Por outro lado,

$$\Delta = \frac{1}{t} \left(\left\lfloor \frac{(t + q_{2j})m}{n} \right\rfloor - p_{2j} \right) = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{(t + q_{2j})m}{n} - p_{2j} \right\rfloor, \quad (3.6)$$

pois estamos subtraindo um número inteiro da parte inteira.

Como $2j < s$ segue que $2j + 1 \leq s$. No momento vamos supor que $2j + 1 < s$. Consideraremos o caso em que $2j + 1 = s$ posteriormente.

Novamente do Lema (A.7) temos que

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} = \frac{p_s}{q_s} &= \frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \left(\frac{p_s}{q_s} - \frac{p_{2j}}{q_{2j}} \right) \\ &= \frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \left(\frac{(-1)^{2j+2}}{q_{2j}q_{2j+1}} + \frac{(-1)^{2j+3}}{q_{2j+1}q_{2j+2}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \right) \\ &= \frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \left(\frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} - \frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \right) \\ &= \frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} - 1 \left(\frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} - \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^s}{q_{s-1}q_s} \right). \end{aligned}$$

Observe que separamos o termo $\frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}}$ porque supomos que $2j + 1 < s$. Denotando por F a expressão

$$F = \frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} - \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^s}{q_{s-1}q_s}$$

temos que

$$\frac{m}{n} = \frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} - F. \quad (3.7)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{(t + q_{2j})m}{n} - p_{2j} \right\rfloor = \frac{1}{t} \left\lfloor (t + q_{2j}) \left(\frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} - F \right) - p_{2j} \right\rfloor \\ &= \frac{1}{t} \left\lfloor (t + q_{2j}) \frac{p_{2j}}{q_{2j}} + (t + q_{2j}) \left(\frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} - F \right) - p_{2j} \right\rfloor \\ &= \frac{1}{t} \left\lfloor t \left(\frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} \right) + \frac{1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right\rfloor. \end{aligned}$$

Segue do Corolário (A.6) Apêndice A que,

$$\frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} = h_0 + \frac{1}{q_0q_1} - \frac{1}{q_1q_2} + \dots + \frac{(-1)^{2j}}{q_{2j-2}q_{2j-1}} + \frac{(-1)^{2j+1}}{q_{2j-1}q_{2j}} + \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

Logo,

$$\Delta = \frac{1}{t} \left[t \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + \frac{1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right]. \quad (3.8)$$

Aplicando a divisão de Euclides, existem $c, r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < q_{2j+1}$ tal que

$$tp_{2j+1} = cq_{2j+1} + r. \quad (3.9)$$

Daí $t \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} = c + \frac{r}{q_{2j+1}}$. Substituindo em (3.8) temos,

$$\Delta = \frac{1}{t} \left[c + \frac{r}{q_{2j+1}} + \frac{1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right] = \frac{1}{t} \left[c + \frac{r+1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right].$$

Como $0 \leq r < q_{2j+1}$ então $0 < r+1 \leq q_{2j+1}$. Logo, $0 < \frac{r+1}{q_{2j+1}} \leq 1$ e portanto $c + \frac{r+1}{q_{2j+1}} \leq c+1$. Além disso, $(t + q_{2j})F > 0$. De fato, do Lema (A.7) temos que

$$\frac{p_s}{q_s} - \frac{p_{2j}}{q_{2j}} = \frac{(-1)^{2j+2}}{q_{2j}q_{2j+1}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \leq \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}}.$$

Subtraindo $\frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}} > 0$ em ambos os lados da desigualdade, temos

$$- \left(\frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} - \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^s}{q_{s-1}q_s} \right) \leq 0,$$

ou seja, $-F \leq 0$. Suponha que $F = 0$ então da Expressão (3.7) segue que $\frac{m}{n} = \frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \frac{1}{q_{2j}q_{2j+1}}$ o que implica que $2j+1 = s$, contradizendo o fato que supomos $2j+1 < s$.

E claramente, $(t + q_{2j}) > 0$, pois $0 < t \leq n - q_{2j}$ e q_{2j} são inteiros positivos. Portanto $(t + q_{2j})F > 0$. Disso resulta que $c + \frac{r+1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F < c+1$. Consequentemente

$$\Delta = \frac{1}{t} \left[c + \frac{r+1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right] \leq \frac{c}{t}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, da Equação (3.9) obtemos $c = \frac{tp_{2j+1} - r}{q_{2j+1}}$. Daí

$$\frac{c}{t} = \frac{tp_{2j+1} - r}{tq_{2j+1}} = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} - \frac{r}{tq_{2j+1}} \leq \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}. \quad (3.11)$$

Logo, $\Delta \leq \frac{c}{t} \leq \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}$. Portanto, determinamos um limitante superior para Δ . \blacksquare

No próximo resultado, provaremos que este limitante superior é na realidade o máximo procurado. Estamos sob a hipótese que $2j < s$ assim, $2j + 1 \leq s$. No momento estamos analisando o caso $2j + 1 < s$.

Proposição 3.7. *Nas condições acima e supondo que $2j + 1 < s$, o máximo de Δ é atingido se, e somente se, $t = \alpha q_{2j+1}$, onde $\alpha = 1, \dots, h_{2j+2}$. Além disso, o máximo de Δ é $\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}$.*

Demonstração: Suponhamos que para j fixado tal que $2j + 1 < s$ o máximo de Δ é atingido. Como $tp_{2j+1} = cq_{2j+1} + r$, onde $0 < t \leq n - q_{2j}$, podemos observar em (3.11) que o limitante superior não é atingido se $r > 0$. Então suponha $r = 0$. Donde segue que $tp_{2j+1} = cq_{2j+1}$, ou seja, $q_{2j+1} \mid tp_{2j+1}$. Como $\text{mdc}(p_{2j+1}, q_{2j+1}) = 1$ temos que $q_{2j+1} \mid t$, então $t = \alpha q_{2j+1}$, para algum α inteiro positivo, uma vez que t e q_{2j+1} o são. É fácil ver que $0 < \alpha \leq \frac{n - q_{2j}}{q_{2j+1}}$ pois $0 < t \leq n - q_{2j}$. Entretanto, $n = q_s$ o que implica

$$0 < \alpha = \frac{t}{q_{2j+1}} \leq \frac{q_s - q_{2j}}{q_{2j+1}}.$$

Da Proposição (A.4), Apêndice A, temos $h_{2j+2} = \frac{q_{2j+2} - q_{2j}}{q_{2j+1}}$, mas $q_{2j} < q_{2j+1} < q_{2j+2} \leq q_s$, daí $h_{2j+2} = \frac{q_{2j+2} - q_{2j}}{q_{2j+1}} \leq \frac{q_s - q_{2j}}{q_{2j+1}}$.

Suponhamos primeiramente que $0 < \alpha \leq h_{2j+2}$. Logo de (3.10) segue que

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + \frac{1}{q_{2j+1}} - (\alpha q_{2j+1} + q_{2j})F \right] \\ &\geq \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + \frac{1}{q_{2j+1}} - (h_{2j+2} q_{2j+1} + q_{2j})F \right] \\ &= \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + \frac{1}{q_{2j+1}} - q_{2j+2}F \right]. \end{aligned}$$

Como $F = \frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} - \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^s}{q_{s-1}q_s}$ temos que

$$\begin{aligned} \Delta &\geq \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + \frac{1}{q_{2j+1}} - q_{2j+2} F \right] \\ &= \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + \frac{1}{q_{2j+1}} + q_{2j+2} \left(-\frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} + \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + \frac{1}{q_{2j+1}} - \frac{q_{2j+2}}{q_{2j+1}q_{2j+2}} + q_{2j+2} \left(\frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + q_{2j+2} \left(\frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \right) \right]. \end{aligned}$$

Note que se $2j+2 < s$, segue do Lema (A.7) que $\frac{p_s}{q_s} - \frac{p_{2j+2}}{q_{2j+2}} = \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \leq \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}}$, pois $2j+2 \equiv 0 \pmod{2}$. Logo,

$$0 < q_{2j+2} \left(\frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \right) \leq \frac{q_{2j+2}}{q_{2j+2}q_{2j+3}} = \frac{1}{q_{2j+3}} < 1,$$

pois o termo $\frac{1}{q_{2j+3}}$ não existe se $2j+2 = s$. Com isso,

$$\Delta \geq \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + q_{2j+2} \left(\frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \right) \right] = \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} (\alpha p_{2j+1}) = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}},$$

ou seja, $\Delta \geq \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}$ para $0 < \alpha \leq h_{2j+2}$. Observe que se $2j+2 = s$, então $\frac{p_s}{q_s} - \frac{p_{2j+2}}{q_{2j+2}} = 0$. Assim,

$$\Delta \geq \frac{\alpha p_{2j+1}}{\alpha q_{2j+1}} = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

Logo, para $0 < \alpha \leq h_{2j+2}$ e de (3.10) e (3.11) obtemos

$$\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} \leq \Delta \leq \frac{c}{t} \leq \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

Portanto,

$$\Delta = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} \quad \text{para } 0 < \alpha \leq h_{2j+2}.$$

Agora vamos supor que $\alpha \geq h_{2j+2} + 1$ e mostraremos que o máximo não é atingido.

Primeiramente provaremos que

$$(t + q_{2j})F > \frac{1}{q_{2j+1}}. \quad (3.12)$$

De fato, como $t = \alpha q_{2j+1}$ temos

$$\begin{aligned} (t + q_{2j})F &= (\alpha q_{2j+1} + q_{2j})F \geq ((h_{2j+2} + 1)q_{2j+1} + q_{2j})F \\ &= (h_{2j+2}q_{2j+1} + q_{2j+1} + q_{2j})F \\ &= ((h_{2j+2}q_{2j+1} + q_{2j}) + q_{2j+1})F \\ &= (q_{2j+2} + q_{2j+1})F. \end{aligned}$$

Dividiremos em três casos:

a) Se $2j + 3 < s$ segue que,

$$\begin{aligned} (q_{2j+2} + q_{2j+1})F &> (q_{2j+2} + q_{2j+1}) \left(\frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} - \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} \right) \\ &= \frac{1}{q_{2j+1}} + \frac{1}{q_{2j+2}} - \frac{q_{2j+1}}{q_{2j+2}q_{2j+3}} - \frac{1}{q_{2j+3}} \\ &= \frac{1}{q_{2j+1}} + \frac{q_{2j+3} - q_{2j+1} - q_{2j+2}}{q_{2j+2}q_{2j+3}} \\ &= \frac{1}{q_{2j+1}} + \frac{q_{2j+3} - (q_{2j+2} + q_{2j+1})}{q_{2j+2}q_{2j+3}} \\ &\geq \frac{1}{q_{2j+1}} + \frac{q_{2j+3} - (h_{2j+3}q_{2j+2} + q_{2j+1})}{q_{2j+2}q_{2j+3}} \\ &= \frac{1}{q_{2j+1}} + \frac{q_{2j+3} - q_{2j+3}}{q_{2j+2}q_{2j+3}} = \frac{1}{q_{2j+1}}. \end{aligned}$$

Logo, $(t + q_{2j})F \geq (q_{2j+2} + q_{2j+1})F > \frac{1}{q_{2j+1}}$ se $2j + 3 < s$.

b) Se $2j + 3 = s$ o procedimento é como no caso (a), onde a primeira desigualdade é uma igualdade se $2j + 3 = s$, mas $h_{2j+3} = h_s > 1$, consequentemente a segunda

desigualdade é estrita, isto é,

$$\begin{aligned} (q_{2j+2} + q_{2j+1})F &= \frac{1}{q_{2j+1}} + \frac{q_s - (q_{2j+2} + q_{2j+1})}{q_{2j+2}q_s} \\ &> \frac{1}{q_{2j+1}} + \frac{q_s - (h_s q_{2j+2} + q_{2j+1})}{q_{2j+2}q_s} \\ &= \frac{1}{q_{2j+1}} + \frac{q_s - q_s}{q_{2j+2}q_s} = \frac{1}{q_{2j+1}}. \end{aligned}$$

Logo, $(t + q_{2j})F \geq (q_{2j+2} + q_{2j+1})F > \frac{1}{q_{2j+1}}$ se $2j + 3 = s$.

c) Se $2j + 2 = s$ temos

$$\begin{aligned} (t + q_{2j})F &\geq (q_{2j+2} + q_{2j+1})F = (q_{2j+2} + q_{2j+1}) \left(\frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} \right) \\ &= (q_s + q_{s-1}) \left(\frac{1}{q_{s-1}q_s} \right) = \frac{1}{q_{s-1}} + \frac{1}{q_s} > \frac{1}{q_{s-1}} = \frac{1}{q_{2j+1}}. \end{aligned}$$

Com isto está provado (3.12). Agora estamos aptos para calcular o valor de Δ se $\alpha \geq h_{2j+2} + 1$. Como

$$\Delta = \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + \frac{1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right],$$

de (3.12) segue que $\frac{1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F < 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} \left[\alpha p_{2j+1} + \left(\frac{1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right) \right] \\ &< \frac{1}{\alpha q_{2j+1}} [\alpha p_{2j+1}] = \frac{\alpha p_{2j+1}}{\alpha q_{2j+1}} = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}, \end{aligned}$$

ou seja, $\Delta < \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}$ e, como esperado, o máximo não é atingido.

Reciprocamente, suponhamos que $t = \alpha q_{2j+1}$ com $\alpha = 1, \dots, h_{2j+2}$. Como $tp_{2j+1} = cq_{2j+1} + r$ segue que $r = (\alpha p_{2j+1} - c)q_{2j+1}$, ou seja, $r \equiv 0 \pmod{q_{2j+1}}$ isto implica que $r = 0$ pois $0 \leq r < q_{2j+1}$. Logo,

$$\frac{c}{t} = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} \quad \text{e conseqüentemente} \quad \Delta \leq \frac{c}{t} = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

Por outro lado, como $r = 0$ segue de (3.10) que

$$\Delta = \frac{1}{t} \left[c + \frac{r}{q_{2j+1}} + \frac{1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right] = \frac{1}{t} \left[c + \frac{1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right].$$

Além disso, por hipótese $1 \leq \alpha \leq h_{2j+2}$, assim

$$(t + q_{2j})F = (\alpha q_{2j+1} + q_{2j})F \leq (h_{2j+2} q_{2j+1} + q_{2j})F = q_{2j+2}F.$$

Mas como $2j + 1 < s$ e $2j + 1 \not\equiv 0 \pmod{2}$ segue do Lema (A.7) que

$$\begin{aligned} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} - \frac{p_s}{q_s} &= - \left(-\frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} + \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^{s+1}}{q_{s-1}q_s} \right) \\ &= \frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} - \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^s}{q_{s-1}q_s} \leq \frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}}, \end{aligned}$$

mas $F = \frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} - \frac{1}{q_{2j+2}q_{2j+3}} + \dots + \frac{(-1)^s}{q_{s-1}q_s}$ então $F \leq \frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}}$ e desta forma,

$$(t + q_{2j})F \leq q_{2j+2}F \leq q_{2j+2} \frac{1}{q_{2j+1}q_{2j+2}} = \frac{1}{q_{2j+1}} < 1. \text{ Logo,}$$

$$\left[c + \frac{1}{q_{2j+1}} - (t + q_{2j})F \right] = c. \quad (3.13)$$

Portanto, $\Delta = \frac{c}{t} = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}$ o que conclui a demonstração. ■

Observação 3.8. A Proposição (3.7) nos garante que se $2j + 1 < s$, com j fixado, $0 \leq j < \frac{s}{2}$ e supondo que o ponto $P_{q_{2j-1}}$ é um vértice do polígono de Newton, a inclinação mínima dentre todas as retas que passam pelos pontos $P_{q_{2j-1}}$ e P_ρ , para todo $0 \leq \rho \leq n-1$, (onde P_ρ são pontos do diagrama de Newton e $\rho = t + q_{2j} - 1$) é $-\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$, pois Δ é o oposto do inverso destas inclinações.

Além disso, como $\Delta = \frac{1}{t} \left(\left\lfloor \frac{(t + q_{2j})m}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor \right)$ o máximo de Δ é atingido para todos os valores de t , tais que $t = \alpha q_{2j+1}$, onde $\alpha = 1, \dots, h_{2j+2}$.

Agora, se $2j + 1 = s$, ou seja, s é ímpar, vamos determinar o valor de t para o qual o

máximo de Δ é atingido. Recordemos da Expressão (3.6) que

$$\Delta = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{(t + q_{2j})m}{n} - p_{2j} \right\rfloor.$$

Assim,

$$\Delta = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{(t + q_{s-1})p_s}{q_s} - p_{s-1} \right\rfloor = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{tp_s}{q_s} + \frac{q_{s-1}p_s}{q_s} - p_{s-1} \right\rfloor.$$

Sabendo que $s + 1$ é par e da Proposição (A.5), Apêndice A obtemos, $1 = q_{s-1}p_s - p_{s-1}q_s$, ou melhor, $q_{s-1}p_s = p_{s-1}q_s + 1$. Logo,

$$\Delta = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{tp_s}{q_s} + \frac{p_{s-1}q_s + 1}{q_s} - p_{s-1} \right\rfloor = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{tp_s}{q_s} + \frac{1}{q_s} \right\rfloor = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{tp_s + 1}{q_s} \right\rfloor.$$

Lema 3.9. Fixado j , $0 \leq j < \frac{s}{2}$ tal que $2j + 1 = s$ e nas condições acima temos que $tp_s + 1 \equiv 0 \pmod{q_s}$ se, e somente se, $t \equiv -q_{s-1} \pmod{q_s}$.

Demonstração: Suponha que $tp_s + 1 \equiv 0 \pmod{q_s}$, então existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $tp_s + 1 = zq_s$. Da Proposição (A.5) temos que, $tp_s + (q_{s-1}p_s - p_{s-1}q_s) = zq_s$, o que implica que $p_s(t + q_{s-1}) = (z + p_{s-1})q_s$, ou seja, $q_s \mid p_s(t + q_{s-1})$. Entretanto, $\text{mdc}(q_s, p_s) = 1$ então $q_s \mid (t + q_{s-1})$, ou seja, $t \equiv -q_{s-1} \pmod{q_s}$.

Por outro lado, suponha que $t \equiv -q_{s-1} \pmod{q_s}$, ou seja, existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$t + q_{s-1} = xq_s.$$

Multiplicando por p_s em ambos os lados, obtemos $tp_s + q_{s-1}p_s = xq_sp_s$. Disto, segue que

$$tp_s + (q_{s-1}p_s - p_{s-1}q_s) + p_{s-1}q_s = xq_sp_s,$$

ou seja, $tp_s + 1 = xq_sp_s - p_{s-1}q_s = (xp_s - p_{s-1})q_s$. Logo, $q_s \mid (tp_s + 1)$. ■

Como $2j + 1 = s$, ou seja, $2j = s - 1$ e $0 < t \leq n - q_{2j} = q_s - q_{s-1}$ segue do Lema (3.9) o seguinte resultado.

Lema 3.10. Se $2j + 1 = s$ temos que $tp_s + 1 \equiv 0 \pmod{q_s}$ se, e somente se, $t = q_s - q_{s-1}$.

Demonstração: Suponha que $tp_s + 1 \equiv 0 \pmod{q_s}$. Do Lema (3.9) existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que

$t + q_{s-1} = zq_s$, ou seja, $t = zq_s - q_{s-1}$. Mas $0 < t \leq q_s - q_{s-1}$ o que implica $0 < z \leq 1$ pois q_s, q_{s-1} são inteiros positivos. Como $z \in \mathbb{Z}$ segue que $z = 1$ e portanto $t = q_s - q_{s-1}$. Por outro lado, suponha que $t = q_s - q_{s-1}$ então da Proposição (A.5) segue que

$$tp_s + 1 = (q_s - q_{s-1})p_s + (q_{s-1}p_s - p_{s-1}q_s) = q_s p_s - p_{s-1}q_s = (p_s - p_{s-1})q_s,$$

ou seja, $tp_s + 1 = (p_s - p_{s-1})q_s$. Portanto, $tp_s + 1 \equiv 0 \pmod{q_s}$. ■

Agora estamos aptos para demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 3.11. *Se $2j + 1 = s$ o valor máximo de Δ é $\frac{p_s - p_{s-1}}{q_s - q_{s-1}}$ e é atingido quando $t = q_s - q_{s-1}$.*

Demonstração: Como $0 < t \leq q_s - q_{s-1}$ e $\Delta = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{tp_s + 1}{q_s} \right\rfloor$ temos que se $t = q_s - q_{s-1}$ então,

$$\Delta = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{tp_s + 1}{q_s} \right\rfloor = \frac{1}{q_s - q_{s-1}} \left(\frac{(q_s - q_{s-1})p_s + 1}{q_s} \right).$$

Com a Proposição (A.5), obtemos

$$\Delta = \frac{1}{q_s - q_{s-1}} \left(\frac{q_s p_s - p_{s-1} q_s}{q_s} \right) = \frac{1}{q_s - q_{s-1}} (p_s - p_{s-1}) = \frac{p_s - p_{s-1}}{q_s - q_{s-1}}.$$

Vamos mostrar que se $0 < t < q_s - q_{s-1}$, então $\Delta < \frac{p_s - p_{s-1}}{q_s - q_{s-1}}$. Com efeito, se $t < q_s - q_{s-1}$ segue do Lema (3.10) que $tp_s + 1 \not\equiv 0 \pmod{q_s}$, ou melhor, $\frac{tp_s + 1}{q_s}$ não é um inteiro, assim

$$\left\lfloor \frac{tp_s + 1}{q_s} \right\rfloor \leq \frac{tp_s}{q_s}.$$

Logo, $\Delta = \frac{1}{t} \left\lfloor \frac{tp_s + 1}{q_s} \right\rfloor \leq \frac{1}{t} \frac{tp_s}{q_s} = \frac{p_s}{q_s}$. Novamente da Proposição (A.5) segue que, $p_s q_{s-1} = 1 + p_{s-1} q_s > p_{s-1} q_s$, ou seja, $-p_s q_{s-1} < -p_{s-1} q_s$. Com isto, $(p_s q_s - p_{s-1} q_s) - p_s q_{s-1} < -p_{s-1} q_s$. Assim, $p_s q_s - p_s q_{s-1} < p_s q_s - p_{s-1} q_s$, isto implica que, $p_s (q_s - q_{s-1}) < (p_s - p_{s-1}) q_s$. Logo,

$$\Delta \leq \frac{p_s}{q_s} < \frac{p_s - p_{s-1}}{q_s - q_{s-1}},$$

para $t < q_s - q_{s-1}$ o que conclui a demonstração. Portanto, o valor máximo de Δ é atingido para $t = q_s - q_{s-1}$. ■

O próximo resultado determina completamente o polígono de Newton da polar genérica de uma curva algebróide plana irredutível genérica com um par característico. Supondo conhecido um dos vértices do polígono, vamos determinar o lado do polígono de Newton que começa neste vértice dado.

Proposição 3.12. *O polígono de Newton da polar genérica de uma curva algebróide plana irredutível C genérica com um par característico (n, m) possui $\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor$ lados, que denotamos por L_j , $j = 0, \dots, \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$. O lado L_j tem inclinação $-\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$, se $2j+1 < s$ ou $-\frac{q_s - q_{s-1}}{p_s - p_{s-1}}$, se $2j+1 = s$. Além disso, os pontos do diagrama de Newton no lado L_j são, para $2j+1 < s$,*

$$P_{q_{2j} + \alpha q_{2j+1} - 1} = (m - p_{2j}, q_{2j} - 1) + \alpha(-p_{2j+1}, q_{2j+1}),$$

$\alpha = 0, \dots, h_{2j+2}$. Se s é ímpar, o último lado $L_{\frac{s-1}{2}}$ contém somente dois pontos $(0, n-1)$ e $(m - p_{s-1}, q_{s-1} - 1)$.

Demonstração: Vamos provar este resultado por indução sobre os vértices do polígono de Newton. Suponha que o $(j+1)$ -ésimo vértice do polígono é o ponto

$$P_{q_{2j}-1} = \left(m - \left\lfloor \frac{mq_{2j}}{n} \right\rfloor, q_{2j} - 1 \right),$$

para algum j inteiro positivo, $0 \leq j \leq \frac{s}{2}$. Queremos determinar o próximo vértice e consequentemente um lado do polígono de Newton.

Note que, se $j = 0$ temos que $q_{2j} - 1 = q_0 - 1 = 0$ então $P_0 = (m - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor, 0) = (m - h_0, 0)$, o qual sabemos que é o primeiro vértice do polígono de Newton.

Se s é par existe um j_1 , $0 \leq j_1 \leq \frac{s}{2}$, tal que $s = 2j_1$ então, $q_{2j_1} - 1 = q_s - 1 = n - 1$ e assim obtemos o último vértice do polígono de Newton $P_{n-1} = (0, n-1)$.

Analisemos agora $0 < j < \frac{s}{2}$, ou seja, $2j+1 \leq s$.

1º Caso: $2j+1 < s$.

Neste caso, pela Proposição (3.7) e Observação (3.8), $\max\{\Delta\} = \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}$ que é atingido para $t = \alpha q_{2j+1}$, onde $\alpha = 1, \dots, h_{2j+2}$. Entretanto, $\rho = q_{2j} + t - 1$, ou seja, $\rho = \alpha q_{2j+1} + q_{2j} - 1$. Deste modo, o lado do polígono de Newton que começa no vértice $P_{q_{2j}-1}$ possui inclinação

$-\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$, passa pelos pontos

$$P_\rho = P_{q_{2j} + \alpha q_{2j+1} - 1}, \quad \text{para} \quad \alpha = 1, \dots, h_{2j+2} - 1$$

e termina no vértice cujo $\alpha = h_{2j+2}$, ou seja,

$$P_{q_{2j} + h_{2j+2} q_{2j+1} - 1} = P_{q_{2j+2} - 1} = \left(m - \left\lfloor \frac{mq_{2j+2}}{n} \right\rfloor, q_{2j+2} - 1 \right),$$

pois pela Proposição (A.4) $h_{2j+2} q_{2j+1} = q_{2j+2} - q_{2j}$.

Vamos determinar explicitamente as coordenadas dos pontos que estão sobre o lado do polígono de Newton, com inclinação $-\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$. Já sabemos que as coordenadas são da forma:

$$P_{q_{2j} + \alpha q_{2j+1} - 1} = \left(m - \left\lfloor (\alpha q_{2j+1} + q_{2j}) \frac{m}{n} \right\rfloor, \alpha q_{2j+1} + q_{2j} - 1 \right).$$

Mas, das Equações (3.7) e (3.8) temos que

$$\begin{aligned} \left\lfloor (\alpha q_{2j+1} + q_{2j}) \frac{m}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor (\alpha q_{2j+1} + q_{2j}) \left(\frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \frac{1}{q_{2j} q_{2j+1}} - F \right) \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \alpha q_{2j+1} \left(\frac{p_{2j}}{q_{2j}} + \frac{1}{q_{2j} q_{2j+1}} \right) + p_{2j} + \frac{1}{q_{2j+1}} - (\alpha q_{2j+1} + q_{2j}) F \right\rfloor \\ &= \left\lfloor p_{2j} + \alpha p_{2j+1} + \left(\frac{1}{q_{2j+1}} - (\alpha q_{2j+1} + q_{2j}) F \right) \right\rfloor. \end{aligned}$$

Neste caso, $r = 0$ e $t = \alpha q_{2j+1}$, pois o máximo de Δ é atingido, então $c = \alpha p_{2j+1}$. Logo, pela Equação (3.13), $\left\lfloor \alpha p_{2j+1} + \frac{1}{q_{2j+1}} - (\alpha q_{2j+1} + q_{2j}) F \right\rfloor = \alpha p_{2j+1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left\lfloor (\alpha q_{2j+1} + q_{2j}) \frac{m}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor p_{2j} + \alpha p_{2j+1} + \left(\frac{1}{q_{2j+1}} - (\alpha q_{2j+1} + q_{2j}) F \right) \right\rfloor \\ &= p_{2j} + \alpha p_{2j+1}. \end{aligned}$$

Desta forma, as coordenadas dos pontos que estão sobre o lado do polígono de Newton são

$$P_{q_{2j} + \alpha q_{2j+1} - 1} = (m - p_{2j}, q_{2j} - 1) + \alpha(-p_{2j+1}, q_{2j+1}),$$

onde $\alpha = 0, \dots, h_{2j+2}$.

2º Caso: $2j + 1 = s$.

Este caso ocorre quando s é ímpar. Note que $2j + 1 = s$ implica $2j = s - 1$. Assim, supondo que o penúltimo vértice do polígono de Newton é dado por $P_{q_{2j}-1} = P_{q_{s-1}-1}$ então, pela Proposição (3.11), o lado do polígono que começa em $P_{q_{s-1}-1}$ possui inclinação $-\frac{q_s - q_{s-1}}{p_s - p_{s-1}}$ para $t = q_s - q_{s-1}$. Logo, como $\rho = t + q_{2j} - 1 = q_s - q_{s-1} + q_{s-1} - 1 = q_s - 1 = n - 1$ concluímos que o último lado contém somente dois pontos

$$P_{q_{s-1}-1} = (m - p_{s-1}, q_{s-1} - 1) \quad \text{e} \quad P_{n-1} = (0, n - 1).$$

Para finalizar, podemos observar que a quantidade de lados é dado pela variação de j . Assim, para s ímpar existe um j tal que $2j + 1 = s$, ou seja, $j = \frac{s-1}{2}$. Logo, $j = 0, \dots, \frac{s-1}{2} = \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$. Mas, para $j = \frac{s-1}{2}$ obtemos mais um vértice. Portanto, obtemos $\frac{s+1}{2} = \lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor$ lados. No caso s par, existe um j , a saber $j = \frac{s}{2} - 1$, que é o maior, tal que $2j + 1 < s$ e para este j estamos no penúltimo vértice e conseqüentemente encontramos o último. Logo, neste caso, $j = 0, \dots, \frac{s}{2} - 1 = \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$. De forma análoga, para $j = \frac{s}{2} - 1$ obtemos mais um vértice e portanto mais um lado. Assim, a quantidade de lados para s par é $\frac{s}{2} = \lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor$ o que conclui a demonstração. ■

Vale observar que na construção do polígono de Newton da polar genérica, o primeiro caso da Proposição (3.12) sempre ocorre, independentemente se s é par ou ímpar. Se s é par somente o primeiro caso determina completamente o polígono de Newton da polar genérica. Se s é ímpar, além do primeiro caso devemos utilizar o segundo caso para construir o último lado do polígono de Newton.

Exemplo 3.13. *Considere a série de potências irredutível em $\mathbb{C}[[x, y]]$, dada pela seguinte equação:*

$$\begin{aligned} f(x, y) = & y^{21} - 42x^7y^{16} + 3x^{10}y^{14} + 41x^{14}y^{11} + 259x^{17}y^9 + 21x^{18}y^8 + 3x^{20}y^7 \\ & - 833x^{21}y^6 + 441x^{24}y^4 + 70x^{25}y^3 - 42x^{27}y^2 + 21x^{28}y - x^{29} + x^{30}. \end{aligned}$$

Os resultados obtidos neste exemplo coincidem com o caso de f ser genérica com par

característico (21, 29). Uma parametrização de Newton-Puiseux desta série é dada por

$$\begin{cases} x = t^{21} \\ y = t^{29} + t^{30}. \end{cases}$$

Da Proposição (2.3), a equação da polar genérica de f é dada por $P_g(f) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$, onde $a, b \in \mathbb{C}$ não simultaneamente nulos, ou seja,

$$\begin{aligned} P_g(f) = & 21by^{20} - 294ax^6y^{16} - 672bx^7y^{15} + 30ax^9y^{14} + 42bx^{10}y^{13} + 574ax^{13}y^{11} \\ & + 451bx^{14}y^{10} + 4403ax^{16}y^9 + (378a + 2331b)x^{17}y^8 + (168bx^{18} + 60ax^{19})y^7 \\ & + (-17493a - 21b)x^{20}y^6 - 4998bx^{21}y^5 + 10584ax^{23}y^4 + (1750a + 1764b)x^{24}y^3 \\ & + (210bx^{25} - 1134ax^{26})y^2 + (588a - 84b)x^{27}y + (-29a + 21b)x^{28} + 30ax^{29}. \end{aligned}$$

Utilizando o software Maple obtemos que a polar acima admite três ramos cujas parametrizações de Newton-Puiseux são dadas por:

$$\begin{cases} x = \frac{(29a - 21b)}{210b}t^2 \\ y = \frac{(29a - 21b)^2}{44100b^2}t^3 + \dots \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{25}{16}t^5 \\ y = -\frac{125}{64}t^7 + \frac{(37120a - 10671305b)}{688128b}t^8 + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -32768t^{13} \\ y = -2097152t^{18} - \frac{69730304}{13}t^{19} + \frac{61287301120}{3549}t^{20} + \dots \end{cases}$$

Vamos aplicar a Proposição (3.12) para a construção do polígono de Newton da polar genérica da curva irredutível plana f . Consideremos os pontos da seguinte forma:

$$P_\rho = \left(m - \left\lfloor \frac{(\rho + 1)m}{n} \right\rfloor, \rho \right), \quad \rho = 0, \dots, n - 1.$$

Como $n = 21$ e $m = 29$ temos

$$P_\rho = \left(29 - \left\lfloor \frac{(\rho + 1)29}{21} \right\rfloor, \rho \right), \quad \rho = 0, \dots, 20.$$

Computando estes pontos para $\rho = 0, \dots, 20$, obtemos a seguinte tabela:

$P_0 = (28, 0)$	$P_1 = (27, 1)$	$P_2 = (25, 2)$	$P_3 = (24, 3)$	$P_4 = (23, 4)$
$P_5 = (21, 5)$	$P_6 = (20, 6)$	$P_7 = (18, 7)$	$P_8 = (17, 8)$	$P_9 = (16, 9)$
$P_{10} = (14, 10)$	$P_{11} = (13, 11)$	$P_{12} = (12, 12)$	$P_{13} = (10, 13)$	$P_{14} = (9, 14)$
$P_{15} = (7, 15)$	$P_{16} = (6, 16)$	$P_{17} = (5, 17)$	$P_{18} = (3, 18)$	$P_{19} = (2, 19)$
$P_{20} = (0, 20)$				

Representando a fração $\frac{29}{21}$ em termos de frações contínuas, obtemos:

$$\frac{p_5}{q_5} = \frac{29}{21} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$

Concluimos, das regras de recorrências Apêndice (A.1), que as frações contínuas reduzidas são:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{4}{3}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{7}{5}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{11}{8}, \quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{29}{21}.$$

Supondo que as coordenadas de um vértice do polígono de Newton são dadas pela expressão,

$$P_{q_{2j}-1} = \left(29 - \left\lfloor \frac{q_{2j} 29}{21} \right\rfloor, q_{2j} - 1 \right) \quad (3.14)$$

para desenhar o próximo lado precisamos calcular as inclinações das retas que passam pelos pontos $P_{q_{2j}-1}$, P_ρ onde $q_{2j} - 1 < \rho \leq n - 1$ e dessas inclinações, tomamos a maior delas. Estas inclinações são dadas pela expressão de Δ .

Observe que $s = 5$ é ímpar então, vamos dividir em dois casos.

1º caso: Se $2j + 1 < s$, então da Observação (3.8) o máximo de Δ é atingido para todos os valores de t , tais que $t = \alpha q_{2j+1}$, onde $\alpha = 1, \dots, h_{2j+2}$. Assim, como $s = 5$ os valores de j para os quais $2j + 1 < 5$ são $j = 0, 1$.

Com isto, para $j = 0$ temos que o máximo de Δ é atingido para $t = \alpha q_1$, onde $\alpha = 1, \dots, h_2 = 1$, ou seja, existe somente um ponto P_ρ no qual a inclinação é a máxima.

Logo, $\max\{\Delta\} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2}$. Como $\rho = t + q_{2j} - 1$ temos $\rho = \alpha q_1 + q_0 - 1 = 2$. Logo, o próximo lado do polígono de Newton começa em $P_{q_{2j}-1} = P_0 = (28, 0)$ tem inclinação $-\frac{q_1}{p_1} = -\frac{2}{3}$, não passa por nenhum ponto, uma vez que $h_2 = 1$ e termina no ponto $P_2 = (25, 2)$.

Para $j = 1$ temos $\max\{\Delta\} = \frac{p_3}{q_3} = \frac{7}{5}$ e existe somente um ponto P_ρ no qual o máximo de Δ é atingido pois, $h_4 = 1$. Este ponto ocorre quando $\rho = \alpha q_3 + q_2 - 1 = 7$. Logo o próximo lado do polígono de Newton começa em $P_{q_{2j}-1} = P_2 = (25, 2)$ tem inclinação $-\frac{q_3}{p_3} = -\frac{5}{7}$, não passa por nenhum ponto e termina no ponto $P_7 = (18, 7)$.

Observe que para $j = 2$, $2j + 1 = 5$ então, vamos considerar o 2º caso.

2º caso: Se $2j + 1 = 5$ segue da Proposição (3.11) que o valor máximo de Δ é $\frac{p_s - p_{s-1}}{q_s - q_{s-1}}$ quando $t = q_s - q_{s-1}$. Com isto, $\max\{\Delta\} = \frac{p_5 - p_4}{q_5 - q_4} = \frac{18}{13}$ e é atingido quando $\rho = q_5 - q_4 + q_4 - 1 = 20$. Logo, o lado do polígono de Newton começa no ponto $P_{q_4-1} = P_7 = (18, 7)$ tem inclinação $-\frac{q_5 - q_4}{p_5 - p_4} = -\frac{13}{18}$ e termina no ponto $P_{n-1} = P_{20} = (0, 20)$ que é o último vértice. Portanto, o polígono de Newton da curva polar genérica está completamente determinado.

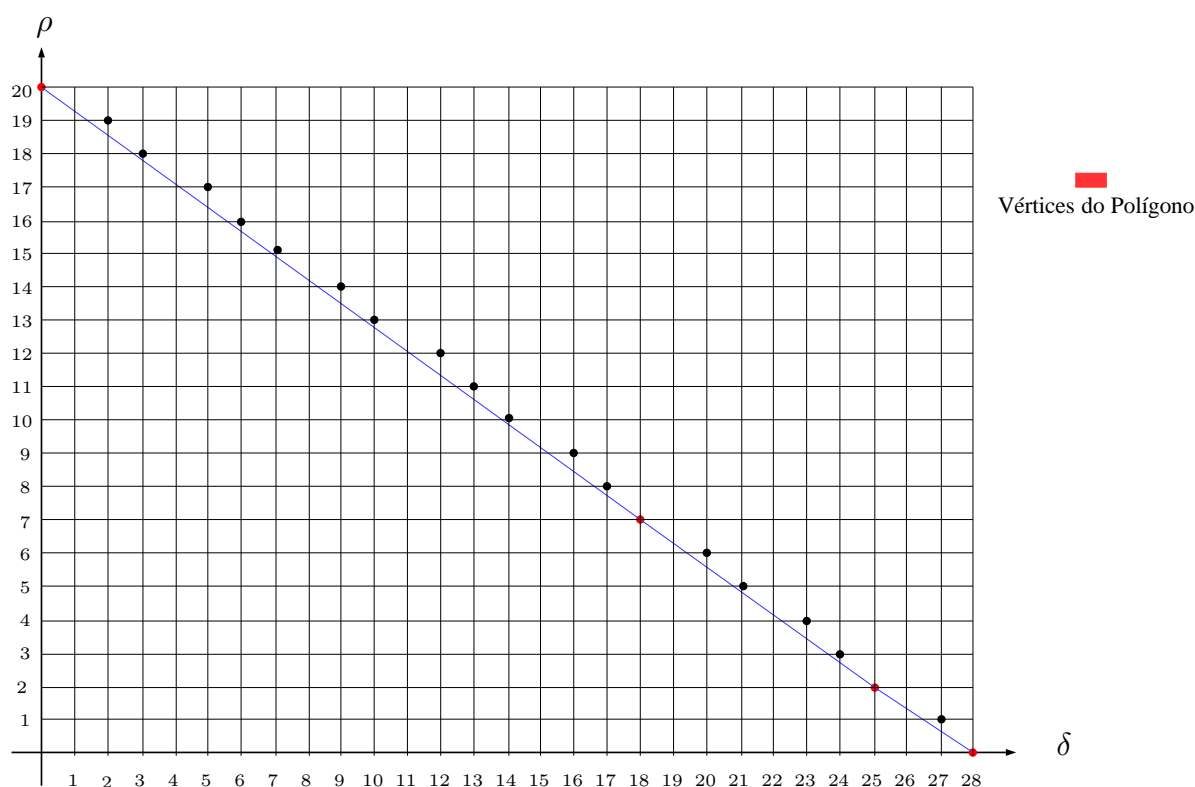


Figura 3.1: Polígono de Newton da polar de f .

Pela Proposição (3.12), o polígono de Newton da polar genérica de uma curva algebróide plana irredutível C é caracterizada da seguinte maneira:

i) Se $2j + 1 < s$, então todos os pontos sobre o lado L_j do polígono de Newton da polar são dados por

$$P_{q_{2j} + \alpha q_{2j+1} - 1} = (m - p_{2j}, q_{2j} - 1) + \alpha(-p_{2j+1}, q_{2j+1}),$$

onde $\alpha = 0, \dots, h_{2j+2}$ cujos vértices são

$$P_{q_{2j} - 1} = (m - p_{2j}, q_{2j} - 1) \quad \text{e} \quad P_{q_{2j+2} - 1} = (m - p_{2j+2}, q_{2j+2} - 1)$$

associados aos valores $\alpha = 0$ e $\alpha = h_{2j+2}$, respectivamente.

Este último vértice é obtido pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} P_{q_{2j+2} - 1} &= (m - p_{2j}, q_{2j} - 1) + h_{2j+2}(-p_{2j+1}, q_{2j+1}) \\ &= (m - p_{2j} - h_{2j+2}p_{2j+1}, q_{2j} - 1 + h_{2j+2}q_{2j+1}). \end{aligned}$$

Entretanto, pela Proposição (A.4), $h_{2j+2}p_{2j+1} = p_{2j+2} - p_{2j}$ e $h_{2j+2}q_{2j+1} = q_{2j+2} - q_{2j}$. Logo,

$$P_{q_{2j+2} - 1} = (m - p_{2j+2}, q_{2j+2} - 1).$$

Um polinômio em $\mathbb{C}[x, y]$ que aproxima o lado L_j é:

$$\begin{aligned} &A_0 x^{m-p_{2j}} y^{q_{2j}-1} + A_1 x^{m-p_{2j}-p_{2j+1}} y^{q_{2j}-1+q_{2j+1}} + \dots + A_{h_{2j+2}} x^{m-p_{2j+2}} y^{q_{2j+2}-1} \\ &= x^{m-p_{2j+2}} y^{q_{2j}-1} (A_0 x^{p_{2j+2}-p_{2j}} + A_1 x^{p_{2j+2}-p_{2j}-p_{2j+1}} y^{q_{2j+1}} + \dots + A_{h_{2j+2}} y^{q_{2j+2}-q_{2j}}). \end{aligned}$$

Pela Proposição (A.4), o polinômio que aproxima o lado L_j é dado por

$$x^{m-p_{2j+2}} y^{q_{2j}-1} (A_0 x^{h_{2j+2}p_{2j+1}} + A_1 x^{h_{2j+2}p_{2j+1}-p_{2j+1}} y^{q_{2j+1}} + \dots + A_{h_{2j+2}} y^{h_{2j+2}q_{2j+1}}). \quad (3.15)$$

Podemos supor que os coeficientes dos termos que aproximam a equação da polar associada ao lado L_j são genéricos, pois a curva é genérica. Podemos supor que a cada

lado L_j estão associados um polinômio que admite apenas raízes simples. Começemos analisando o seguinte polinômio.

$$p(x, y) = A_0 x^{h_{2j+2} p_{2j+1}} + A_1 x^{h_{2j+2} p_{2j+1} - p_{2j+1}} y^{q_{2j+1}} + \dots + A_{h_{2j+2}} y^{h_{2j+2} q_{2j+1}}$$

e considere a seguinte mudança de coordenadas, $x_1 = x^{p_{2j+1}}$ e $y_1 = y^{q_{2j+1}}$. Assim,

$$p(x_1, y_1) = A_0 x_1^{h_{2j+2}} + A_1 x_1^{h_{2j+2}-1} y_1 + \dots + A_{h_{2j+2}} y_1^{h_{2j+2}},$$

o qual é um polinômio homogêneo de ordem h_{2j+2} .

Como genericamente, a equação que aproxima o lado L_j admite apenas raízes simples, temos que

$$\prod_{i=1}^{h_{2j+2}} (c_i x_1 + d_i y_1) = \prod_{i=1}^{h_{2j+2}} (c_i x^{p_{2j+1}} + d_i y^{q_{2j+1}}). \quad (3.16)$$

Por outro lado, pela Proposição (3.12), cada lado L_j possui inclinação $-\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$, logo pela Proposição (1.71), todos os ramos γ_i , $i = 1, \dots, k$ da polar associados ao lado L_j , possuem série de Newton-Puiseux com termo inicial da forma $a_{ij} x^{\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}}$, ou seja,

$$\gamma_i = a_{ij} x^{\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}} + \dots, \quad \text{com } i = 1, \dots, k. \quad (3.17)$$

O método de Newton permite obter parametrizações dos ramos da curva. Isto é feito através de um polinômio cujos termos estão presentes na equação da curva e que correspondem a pontos sobre o polígono de Newton. Além disso, os termos iniciais da parametrização dos ramos associados ao lado L_j são colhidos (pelo método de Newton) do polinômio $p(x, y)$ que aproxima o lado L_j . Como de (3.16), $p(x, y)$ admite apenas raízes simples, concluímos que associado ao lado L_j temos h_{2j+2} parametrizações e portanto h_{2j+2} ramos da polar.

Provemos agora que a multiplicidade n_i de cada ramo γ_i é exatamente q_{2j+1} . Da Expressão (3.17) temos que $n_i \geq q_{2j+1}$.

Por outro lado, pela Observação (1.72) a altura do lado L_j é dado por $\sum_{i=1}^k n_i$, onde n_i

é a multiplicidade do ramo γ_i associado ao lado L_j e k é o número de ramos. Logo, como L_j possui h_{2j+2} ramos da polar associado a ele, concluímos que

$$q_{2j+2} - 1 - (q_{2j} - 1) = q_{2j+2} - q_{2j} = h_{2j+2}q_{2j+1} = \sum_{i=1}^{h_{2j+2}} n_i.$$

Deste modo,

$$h_{2j+2}q_{2j+1} = \sum_{i=1}^{h_{2j+2}} n_i \geq \sum_{i=1}^{h_{2j+2}} q_{2j+1} = h_{2j+2}q_{2j+1}.$$

Logo, $n_i = q_{2j+1}$, para todo $i = 1, \dots, h_{2j+2}$.

Pela Expressão (3.17), $\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} = \frac{\beta_1}{\beta_0}$, onde (β_0, β_1) é o primeiro par característico dos ramos γ_i . Como a multiplicidade de cada ramo γ_i é $\beta_0 = q_{2j+1}$ e $m.d.c.(p_{2j+1}, q_{2j+1}) = 1$ concluímos que $\beta_1 = p_{2j+1}$. Portanto, no caso $2j+1 < s$, cada lado L_j do polígono de Newton da polar genérica, tem associado h_{2j+2} ramos com um par característico (q_{2j+1}, p_{2j+1}) .

Note que, considerando apenas as raízes de $p(x, y)$, obtemos de (3.16) que não podem haver mais ramos associados ao lado L_j pois, se $x = 0$ e $y = 0$ também são raízes da polar genérica, então da Expressão (3.15), teríamos associado ao lado L_j , γ_i ramos da polar, $i = 1, \dots, k+2$. Logo os ramos $\gamma_1 = x$ e $\gamma_2 = y$ deveriam ter forma inicial $a_{ij}x^{\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}}$. Absurdo. Portanto, os ramos γ_i da polar associados ao lado L_j são os ramos dados pela fatoração de $p(x, y)$.

ii) Se $2j+1 = s$ então o último lado do polígono de Newton da polar começa no ponto $(m - p_{s-1}, q_{s-1} - 1)$ e termina no ponto $(0, n - 1)$. Logo, um polinômio em $\mathbb{C}[x, y]$ que aproxima o último lado é

$$\begin{aligned} A_{m-p_{s-1}}x^{m-p_{s-1}}y^{q_{s-1}-1} + A_0y^{n-1} &= y^{q_{s-1}-1}(A_{m-p_{s-1}}x^{m-p_{s-1}} + A_0y^{n-q_{s-1}}) \\ &= y^{q_{s-1}-1}(A_{m-p_{s-1}}x^{p_s-p_{s-1}} + A_0y^{q_s-q_{s-1}}). \end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos no caso anterior, como a inclinação do último lado é $-\frac{q_s - q_{s-1}}{p_s - p_{s-1}}$, concluímos que associado ao último lado temos um ramo com um par característico $(q_s - q_{s-1}, p_s - p_{s-1})$.

E desta maneira obtemos o seguinte resultado:

Sejam $\frac{m}{n}$ uma fração irredutível a qual escrevemos como fração contínua na forma

$$\frac{m}{n} = h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{h_s}}}}},$$

com $h_s > 1$ e $\frac{p_i}{q_i}$, $i = 0, \dots, s$, a forma irredutível das frações parciais

$$\frac{p_i}{q_i} = h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{h_i}}}}}.$$

Teorema 3.14. *Considere C uma curva algebróide plana irredutível genérica com um par característico (n, m) . Então a curva polar genérica de C é composta por h_{2j+2} ramos associados ao lado L_j , onde $j = 0, \dots, \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$ com par característico (q_{2j+1}, p_{2j+1}) . No caso s ímpar, o último lado $L_{\frac{s-1}{2}}$ possui apenas um ramo da polar associado a ele, com par característico $(q_s - q_{s-1}, p_s - p_{s-1})$.*

Exemplo 3.15. *Considere a série de potências irredutível dada pela seguinte expressão.*

$$\begin{aligned} f(x, y) = & y^{19} + 19x^{10}y^{12} - 266x^{13}y^{10} + 570x^{16}y^8 - 418x^{19}y^6 + 57x^{20}y^5 + 133x^{22}y^4 \\ & + 133x^{23}y^3 - 19x^{25}y^2 + 19x^{26}y - x^{27} + x^{28}. \end{aligned}$$

No caso genérico de curvas com par característico $(19, 27)$ obtemos os mesmos resultados para a polar genérica. A parametrização de Newton-Puiseux desta série é dada por

$$\begin{cases} x = t^{19} \\ y = t^{27} - t^{28}. \end{cases}$$

Disso obtemos $n = 19$ e $m = 27$. Da Proposição (2.3), a equação da polar genérica de f é dada por $P_g(f) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$, onde $a, b \in \mathbb{C}$ não simultaneamente nulos, ou seja, a

equação da polar desta série é dada por,

$$\begin{aligned}
 P_g(f) = & 19ay^{18} + 190bx^9y^{12} + 228ax^{10}y^{11} - 3458bx^{12}y^{10} - 2660ax^{13}y^9 + 9120bx^{15}y^8 \\
 & + 4560ax^{16}y^7 - 7942bx^{18}y^6 + (-2508a + 1140b)x^{19}y^5 + (285ax^{20} + 2926bx^{21})y^4 \\
 & + (532a + 3059b)x^{22}y^3 + (399ax^{23} - 475bx^{24})y^2 + (-38a + 494b)x^{25}y \\
 & + (19a - 27b)x^{26} + 28bx^{27}.
 \end{aligned}$$

Parametrização dos ramos da polar são:

$$\begin{cases} x = R(19a - 27b + 399aZ + 285aZ^2)t^2 \\ y = \left[-\frac{1}{15} + \frac{9b}{95a} - R(19a - 27b + 399aZ + 285aZ^2)\frac{7}{5} \right] t^3 + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = [-15 - R(15 + 12Z + Z^2)12]t^7 \\ y = (129R(15 + 12Z + Z^2) + 180)t^{10} + \dots, \end{cases} \quad (3.18)$$

onde $R(p(Z))$ representa as raízes do polinômio $p(Z)$.

Aplicando a Proposição (3.12) obtemos o seguinte polígono de Newton da polar genérica de f (ver figura (3.2)).

Representando $\frac{27}{19}$ em termos de frações contínuas, temos

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{27}{19} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}, \text{ onde } h_1 = 2, h_2 = 2, h_3 = 1 \text{ e } h_4 = 2.$$

Observe que neste caso s é par e das regras de recorrências, as frações reduzidas são:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{5}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{10}{7}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{27}{19}.$$

Logo, do Teorema (3.14) a curva polar de f possui $h_2 = 2$ ramos com par característico $(2, 3)$ e $h_4 = 2$ ramos com par característico $(7, 10)$. Os dois ramos com para característico $(2, 3)$ e os dois ramos com par característico $(7, 10)$ são obtidos tomando raízes distintas dos polinômios $p(Z)$. Observe que no polígono de Newton da polar de f cada lado possui um ponto diferente dos vértices.

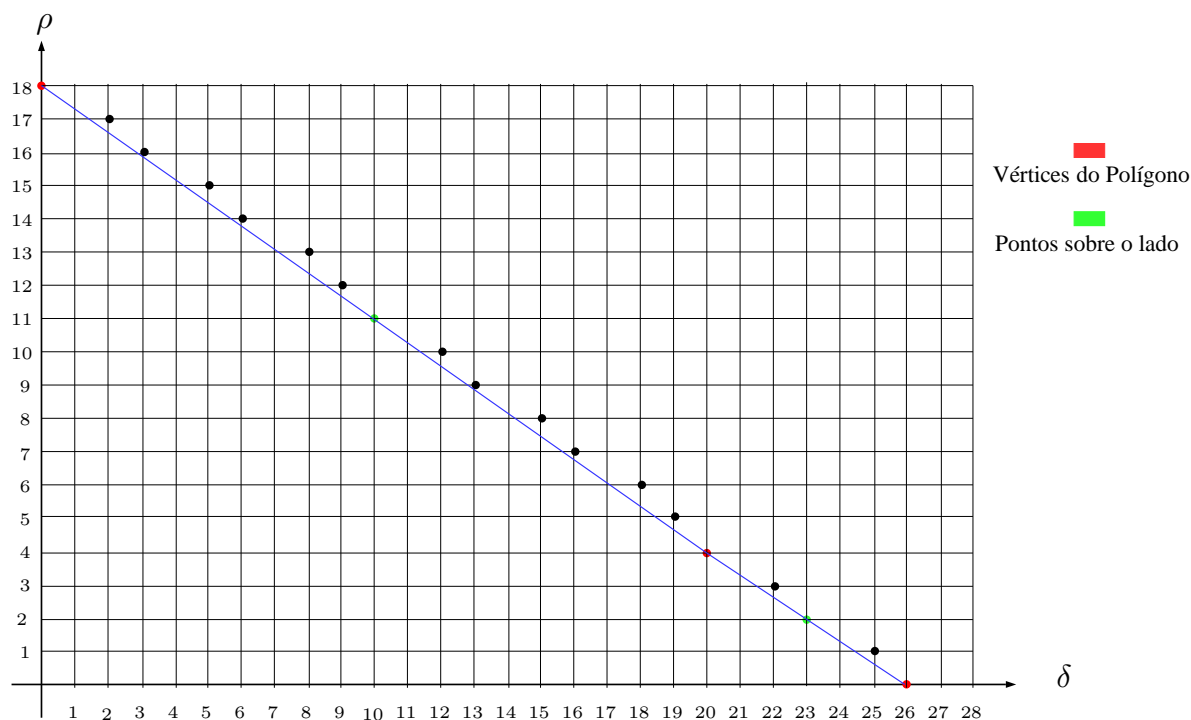


Figura 3.2: Polígono de Newton da polar genérica de g .

Pelo Teorema (2.13), a topologia de curvas planas redutíveis é caracterizada pelos pares característicos de cada ramo e pelo índice de interseção entre os ramos. Observe que o polígono de Newton da polar genérica descreve completamente sua topologia, uma vez que, através dele podemos obter os pares característicos de cada ramo, que estão associados as inclinações dos lados do polígono. Além disso, genericamente os ramos de uma curva plana redutível não possuem o mesmo cone tangente.

Recordemos que se $f = F_n + F_{n+1} + \dots$, onde F_i é um polinômio homogêneo em $\mathbb{C}[x, y]$ de grau i , com $F_n \neq 0$, então a curva (F_n) é o cone tangente da curva (f) . Segue do Lema da Unitangente (Lema (1.30)) que

$$F_n = \prod_{i=1}^s c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i}, \text{ onde } \sum_{i=1}^s r_i = n.$$

Genericamente, temos que $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$ com $i, j = 1, \dots, s$. Logo, se f_i e f_j são ramos de (f) com $i \neq j$, então f_i e f_j não possuem tangente em comum. Portanto, segue do Teorema (1.63) que

$$I(f_i, f_j) = \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(f_j).$$

Donde concluímos que na polar genérica, o índice de interseção entre seus ramos, que genericamente não possuem cone tangente em comum, é o produto das multiplicidades de cada ramo, que é obtido do polígono de Newton da polar.

Note que os pares característicos de cada ramo e conseqüentemente a multiplicidade de cada ramo da polar genérica são obtidos a partir da decomposição em frações contínuas do par característico (n, m) da curva que a define. Portanto, a topologia da curva polar genérica é completamente descrita pela topologia da curva algebróide plana irredutível com um par característico que a define.

3.3 Ramos Não-Genéricos

Definição 3.16. *Seja $f_0 = X^m - Y^n \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, onde m, n são inteiros positivos tal que $m.d.c.(m, n) = 1$. Definimos **ramos elementares** a todo ramo equivalente à curva $C_0 = (f_0)$.*

O próximo resultado descreve o tipo equisingular da polar genérica de um ramo elementar, uma vez que a polar de C_0 possui polígono de Newton com somente dois vértices, a saber $(m - 1, 0)$ e $(0, n - 1)$.

Proposição 3.17. *Sejam C_0 um ramo elementar e $d = m.d.c.(m - 1, n - 1)$. Então a curva polar de C_0 possui d ramos com par característico $(n - 1, m - 1)$ e quaisquer dois destes ramos tem índice de interseção $\frac{(m - 1)(n - 1)}{d^2}$.*

Demonstração: Suponha que $d = m.d.c.(m - 1, n - 1)$, então existem inteiros positivos η e ζ tais que $m - 1 = d\eta$ e $n - 1 = d\zeta$. Logo, a equação da curva polar pode ser escrita da seguinte forma, $m\mu X^{m-1} - n\lambda Y^{n-1} = (\sqrt[d]{m\mu}X^\eta)^d - (\sqrt[d]{n\lambda}Y^\zeta)^d$. Tomando $a = \sqrt[d]{m\mu}X^\eta$ e $b = \sqrt[d]{n\lambda}Y^\zeta$ temos,

$$m\mu X^{m-1} - n\lambda Y^{n-1} = a^d - b^d. \quad (3.19)$$

Como estamos no corpo dos números complexos, podemos fatorar (3.19), como segue:

1. Se d é ímpar, temos

$$m\mu X^{m-1} - n\lambda Y^{n-1} = a^d - b^d = \prod_{k=0}^{d-1} \left(\left(\cos \frac{2k\pi}{d} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{d} \right) a - b \right);$$

2. Se d é par, temos

$$m\mu X^{m-1} - n\lambda Y^{n-1} = a^d - b^d = \prod_{k=0}^{d-1} \left(a - \left(\cos \frac{2k\pi}{d} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{d} \right) b \right).$$

Com isto, podemos concluir que a curva polar possui d ramos.

Uma parametrização de Newton-Puiseux para o ramo C_0 é dada por:

$$\begin{cases} x = t^{n-1} \\ y = \sqrt[n-1]{\frac{m\mu}{n\lambda}} t^{m-1}, \end{cases}$$

na qual obtemos o par característico $(n-1, m-1)$. Agora, seja $A = \cos \frac{2k\pi}{d} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{d}$, onde $k = 0, \dots, d-1$ e calculemos o seguinte índice de interseção:

$$I(A\sqrt[d]{m\mu}X^\eta - \sqrt[d]{n\lambda}Y^\zeta, \sqrt[d]{m\mu}X^\eta - A\sqrt[d]{n\lambda}Y^\zeta).$$

Segue das propriedades (6) e (4) do Teorema (1.58) que

$$\begin{aligned} & I(A\sqrt[d]{m\mu}X^\eta - \sqrt[d]{n\lambda}Y^\zeta, \sqrt[d]{m\mu}X^\eta - A\sqrt[d]{n\lambda}Y^\zeta - \frac{1}{A}(A\sqrt[d]{m\mu}X^\eta - \sqrt[d]{n\lambda}Y^\zeta)) \\ &= I(A\sqrt[d]{m\mu}X^\eta - \sqrt[d]{n\lambda}Y^\zeta, (\frac{\sqrt[d]{n\lambda}}{A} - A\sqrt[d]{n\lambda})Y^\zeta) \\ &= I(A\sqrt[d]{m\mu}X^\eta - \sqrt[d]{n\lambda}Y^\zeta, Y^\zeta) \\ &= I(A\sqrt[d]{m\mu}X^\eta, Y^\zeta) \\ &= I(X^\eta, Y^\zeta) = \eta\zeta = \frac{m-1}{d} \cdot \frac{n-1}{d} = \frac{(m-1)(n-1)}{d^2}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Na Proposição (3.12) construímos o polígono de Newton para a polar genérica de uma curva plana irreduzível C com um par característico e sabemos que o polígono de Newton do ramo elementar C_0 contém um lado cujos vértices são $(m-1, 0)$ e $(0, n-1)$. Logo, é de

se esperar que, a singularidade da polar genérica de qualquer curva plana irredutível com par característico (n, m) está, em certo sentido, entre a singularidade da polar genérica de uma curva plana qualquer C e do ramo elementar C_0 . Vamos definir esta região no polígono de Newton.

Definição 3.18. *Seja Θ o domínio fechado sobre o plano limitado pelo polígono de Newton descrito na Proposição (3.12), o segmento com origem $(0, n - 1)$ e extremidade $(m - 1, 0)$ e o eixo δ , isto é, a região do semiplano situado entre o polígono de Newton de C e C_0 .*

Com esta definição, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.19. *Se C é uma curva algebróide plana irredutível com par característico (n, m) , então depois de uma conveniente mudança de coordenadas, a polar genérica de C tem seu polígono de Newton contido em Θ . Reciprocamente, qualquer polígono de Newton contido em Θ com início em $(0, n - 1)$ e término no eixo δ , é o polígono de Newton da curva polar genérica de alguma curva algebróide plana irredutível com par característico (n, m) .*

Demonstração: Suponha C uma curva algebróide plana irredutível com par característico (n, m) . Desta forma, podemos supor sem perda de generalidade, que C é dada pela série de Newton-Puiseux da forma,

$$y = b(x) = x^{\frac{m}{n}} + \sum_{k \geq 1} a_k x^{\frac{m+k}{n}}.$$

Com isto, e da Observação (3.5), temos que os pontos $(0, n - 1)$ e $(m - 1, 0)$ estão no polígono de Newton da polar genérica de C , ou seja, na pior das hipóteses o polígono de Newton da polar genérica de C tem apenas dois vértices. Por outro lado, da definição do polígono de Newton, os pontos que estão abaixo da mais baixa fronteira de Θ estão abaixo do polígono de Newton descrito na Proposição (3.12). Assim, estes pontos correspondem a monômios que não ocorrem na equação da polar de C para valores genéricos de a_k . Portanto, o polígono de Newton da polar genérica de C está contido em Θ .

Reciprocamente, considere qualquer polígono de Newton contido em Θ com início em $(0, n - 1)$ e término no eixo δ . Primeiro note que todos os pontos em Θ estão no semiplano

$\delta \geq \frac{m(n-\rho-1)}{n}$ e assim, pela Proposição (3.3), correspondem a monômios não triviais sobre a equação da polar para valores genéricos dos a_t . Vamos considerar em Θ os pontos com coordenadas inteiras excluindo aqueles que estão sobre a linha da fronteira superior, ou seja, que estão sobre a reta que passa pelos pontos $(0, n-1)$, $(m-1, 0)$ cuja equação é dada por $\rho = -\left(\frac{n-1}{m-1}\right)\delta + (n-1)$ que pode ser reescrita da forma $\frac{\delta}{(m-1)} + \frac{\rho}{(n-1)} = 1$. Com isto, definimos o seguinte conjunto

$$\Omega = \left\{ (\delta, \rho) \in \Theta; \quad \delta \text{ e } \rho \text{ são inteiros e } \frac{\delta}{(m-1)} + \frac{\rho}{(n-1)} \neq 1 \right\}.$$

Podemos ordenar os pontos de Ω pelos valores de $t = t(\delta, \rho) = \delta n - (n - \rho - 1)m$ de forma que no monômio que corresponde um ponto em Ω aparece um coeficiente a_t que não corresponde a pontos já considerados, ou seja, cada ponto em Ω corresponde a um único coeficiente a_t , Proposição (3.3).

Por outro lado, podemos notar que qualquer termo na Equação (3.2) no qual o parâmetro λ ocorre tem bigrau (δ, ρ) com $\delta \geq \frac{m(n-\rho-1)}{n} + \frac{m}{n} - 1$, isto é,

$$\begin{aligned} \delta n - m(n - \rho - 1) - m &\geq -n \\ \Rightarrow \delta n - mn + m\rho &\geq -n \\ \Rightarrow \delta n + m\rho &\geq n(m - 1) \\ \Rightarrow \frac{\delta n}{m - 1} + \frac{m\rho}{m - 1} &\geq n \\ \Rightarrow \frac{\delta}{m - 1} + \frac{\rho}{n - \frac{n}{m}} &\geq 1 \end{aligned}$$

assim, λ não ocorre no monômio o qual corresponde os pontos de Ω , pois

$$\frac{\delta}{m - 1} + \frac{\rho}{n - \frac{n}{m}} = 1 \tag{3.20}$$

é a equação da reta que passa pelos pontos $(0, n - \frac{n}{m})$, $(m - 1, 0)$ (ver figura (3.3)). Note que $\frac{n}{m} < 1$ então $n - 1 < n - \frac{n}{m}$, ou seja, $\frac{\delta}{m - 1} + \frac{\rho}{n - 1} > \frac{\delta}{m - 1} + \frac{\rho}{n - \frac{n}{m}} \geq 1$, o que implica que os pontos (δ, ρ) que satisfazem esta equação não estão em Ω , uma vez que estes pontos (δ, ρ) correspondem a pontos que estão acima da reta dada em (3.20), e Ω é o conjunto dos pares $(\delta, \rho) \in \Theta$ tais que $\frac{\delta}{m - 1} + \frac{\rho}{n - 1} < 1$.

Logo, se considerarmos qualquer subconjunto $T \subset \Omega$, podemos escolher valores para a_t de tal modo que a equação da polar tem coeficientes nulos que correspondem a pontos em T e coeficientes não nulos que correspondem a pontos em Ω que não estão em T . Isso é feito independentemente de λ , ou seja, para uma polar genérica. Portanto concluímos a demonstração. ■

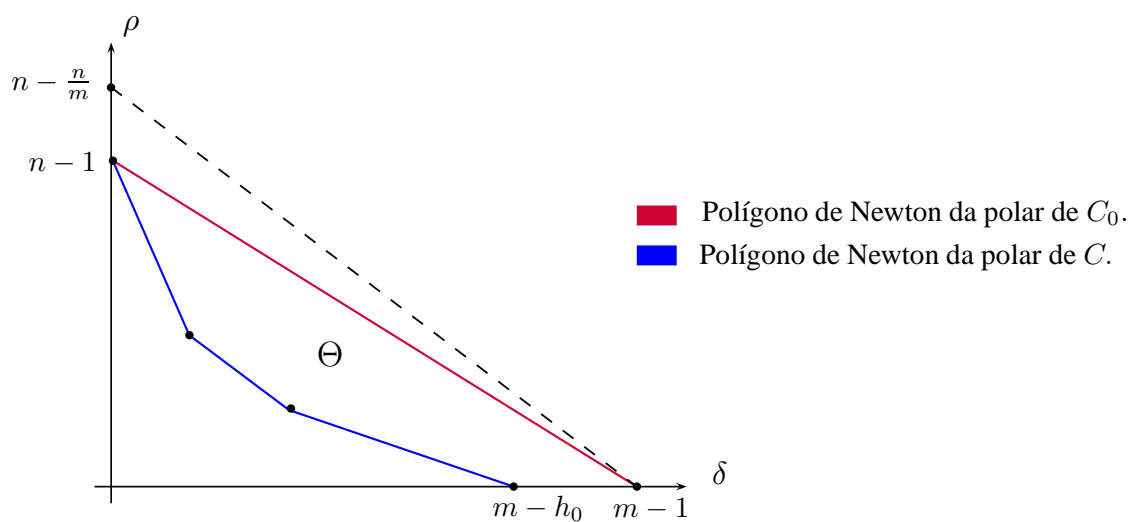


Figura 3.3: Região Θ .

Apêndice

Neste apêndice colocamos os principais conceitos envolvendo frações contínuas e polinômios simétricos que podem auxiliar numa melhor compreensão dos resultados apresentados ao longo deste trabalho. Para mais detalhes sobre frações contínuas veja, por exemplo, [B].

A.1 Frações Contínuas

Uma propriedade essencial de \mathbb{R} é que todo número real pode ser aproximado por números racionais. Com isto, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $h_0 \in \mathbb{Z}$, onde $h_0 = \lfloor x \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ representa a função parte inteira de x) tal que $0 \leq x - h_0 < 1$ e, a maneira mais natural de avaliar um número real é indicar entre que números inteiros ele se encontra. Claro que é suficiente indicar o menor deles pois podemos escrever $x = h_0 + b_0$, onde $0 < b_0 < 1$. Mas podemos melhorar esta aproximação, para dar o segundo passo vamos analisar b_0 . Uma vez que $b_0 < 1$ é natural representá-lo por uma fração de numerador 1. Assim $x = h_0 + \frac{1}{c_0}$, onde $c_0 > 1$. Com um processo análogo ao de x em c_0 obtemos $h_1 = \lfloor c_0 \rfloor$ de forma que $0 \leq c_0 - h_1 < 1$ e assim $x = h_0 + \frac{1}{h_1 + b_1}$, onde $0 \leq b_1 < 1$. Procedendo desta forma, temos

Definição A.1. *Todo número real x pode ser representado pela expressão,*

$$x = h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

onde h_1, h_2, \dots são números naturais e h_0 é um número natural ou zero. A expressão de

x é chamada de **fração contínua**.

É possível desenvolver um número negativo em uma fração contínua colocando o sinal negativo antes da parte inteira do número, ou seja,

$$x = -h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

A próxima definição será muito útil em nosso trabalho. As frações reduzidas serão a base para a construção do polígono de Newton de uma curva polar genérica.

Definição A.2. *Uma fração contínua pode ser truncada, mantendo os elementos $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$ e excluindo os elementos posteriores h_{n+1}, h_{n+2}, \dots , para todo $n \geq 0$. A expressão é chamada n -ésima fração reduzida ou simplesmente reduzida e é representada por*

$$\frac{p_n}{q_n} = h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{h_n}}}}}. \quad (\text{A.1})$$

No caso particular, $n = 0$, a reduzida de ordem zero é $\frac{p_0}{q_0} = [h_0] = \frac{h_0}{1}$.

Antes da Definição (A.1), tomamos conhecimento de um método para desenvolver um número real em fração contínua. Este método consiste em um caso particular do chamado algoritmo de Euclides. Para começar, vejamos como se aplica o algoritmo de Euclides para determinar o *mdc* de dois números naturais. Dados $p, q \in \mathbb{N}$. O algoritmo

de Euclides compõe-se dos seguintes passos

$$\begin{aligned}
 p &= h_0q + r_0 & (0 \leq r_0 < q), \\
 q &= h_1r_0 + r_1 & (0 \leq r_1 < r_0), \\
 r_0 &= h_2r_1 + r_2 & (0 \leq r_2 < r_1), \\
 \dots & \dots \dots \dots \\
 r_{s-2} &= h_sr_{s-1}.
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

As igualdades em (A.2) podem ser escritas sob a forma,

$$\frac{p}{q} = h_0 + \frac{r_0}{q}; \quad \frac{q}{r_0} = h_1 + \frac{r_1}{r_0}; \quad \frac{r_0}{r_1} = h_2 + \frac{r_2}{r_1}; \quad \dots \quad \frac{r_{s-2}}{r_{s-1}} = h_s,$$

onde $r_{s-1} = \text{mdc}(p, q)$.

Cada uma destas igualdades, exceto a última, contém a representação de uma fração imprópria, isto é, está sob a forma da soma de uma fração própria com um número inteiro. Note que o primeiro membro de cada igualdade, a começar pela segunda, é o inverso da fração própria que aparece na igualdade anterior. Assim,

$$\frac{p}{q} = h_0 + \frac{r_0}{q} = h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{r_1}{r_0}} = h_0 + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = \dots$$

Portanto é possível excluir sucessivamente todos os r_i , $i = 0, \dots, s - 1$ obtendo assim o desenvolvimento de $\frac{p}{q}$ em uma fração contínua finita. Desta forma, todo número racional pode ser representado por frações contínuas finitas. A prova disto é o algoritmo de Euclides. Vale observar que se $p < q$ então $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = h_0 = 0$.

Exemplo A.3. Para o número racional $\frac{61}{27}$ temos, do algoritmo de Euclides, a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}
 61 &= 2 \cdot 27 + 7 \\
 27 &= 3 \cdot 7 + 6 \\
 7 &= 1 \cdot 6 + 1 \\
 6 &= 6 \cdot 1,
 \end{aligned}$$

onde $h_0 = 2$, $h_1 = 3$, $h_2 = 1$ e $h_3 = 6$. Assim, podemos representar o número racional dado em termos de frações contínuas, como segue

$$\frac{61}{27} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}.$$

Logo, suas frações reduzidas são,

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{2}{1}; \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{7}{3}; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{9}{4}; \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{61}{27}.$$

Vale observar que, no caso de uma fração contínua finita, existe uma reduzida que coincide com a própria fração contínua, a última. No exemplo acima, esta fração é $\frac{p_3}{q_3}$.

Para determinar a n -ésima reduzida, não é necessário efetuar os longos cálculos que resultam da expressão (A.1). Existem fórmulas de recorrência bastante simples que permitem calcular p_n e q_n .

Claramente temos

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{h_0}{1}; \quad \frac{p_1}{q_1} = h_0 + \frac{1}{h_1} = \frac{h_0 h_1 + 1}{h_1}.$$

A fim de passar de $\frac{p_1}{q_1}$ para $\frac{p_2}{q_2}$ deve-se substituir h_1 por $h_1 + \frac{1}{h_2}$. Com isto e alguns cálculos simples, obtemos

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{h_0(h_1 h_2 + 1) + h_2}{h_1 h_2 + 1} = \frac{h_2(h_0 h_1 + 1) + h_0}{h_2 h_1 + 1}.$$

Como $p_0 = h_0$, $p_1 = h_0 h_1 + 1$, $q_1 = h_1$ e $q_0 = 1$ temos que $\frac{p_2}{q_2} = \frac{h_2 p_1 + p_0}{h_2 q_1 + q_0}$. Estas igualdades nos levam a formular uma regra geral. Colocando $p_0 = h_0$, $q_0 = 1$, $p_{-1} = 1$ e $q_{-1} = 0$, temos

Proposição A.4. Para todo $n \geq 0$, vale

$$p_{n+1} = h_{n+1} p_n + p_{n-1} \quad e \quad q_{n+1} = h_{n+1} q_n + q_{n-1}. \quad (\text{A.3})$$

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre n . Para $n = 0, 1, 2$ já

foram verificadas acima. Suponhamos, por hipótese de indução, que (A.3) seja verdadeiro para um valor fixo de n , digamos $n = k$, então

$$p_{k+1} = h_{k+1}p_k + p_{k-1} \quad \text{e} \quad q_{k+1} = h_{k+1}q_k + q_{k-1} \quad (\text{A.4})$$

são válidas. Demonstraremos que (A.3) é verdadeiro para $n = k + 1$. Notemos que para passar de $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ para $\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$ é necessário substituir h_{k+1} por $h_{k+1} + \frac{1}{h_{k+2}}$. Efetuando esta substituição nas fórmulas (A.4) os números p_k , q_k , p_{k-1} e q_{k-1} não sofrerão alterações, visto que as suas expressões não incluem h_{k+1} . Assim

$$\begin{aligned} p_{k+2} &= \left(h_{k+1} + \frac{1}{h_{k+2}} \right) p_k + p_{k-1} \\ &= \frac{h_{k+2}h_{k+1}p_k + p_k + h_{k+2}p_{k-1}}{h_{k+2}} \\ &= \frac{1}{h_{k+2}} (h_{k+2}(h_{k+1}p_k + p_{k-1}) + p_k). \end{aligned}$$

Da hipótese de indução segue que $p_{k+2} = \frac{1}{h_{k+2}} (h_{k+2}p_{k+1} + p_k)$ e de forma análoga temos,

$$q_{k+2} = \frac{1}{h_{k+2}} (h_{k+2}q_{k+1} + q_k).$$

Sabendo que os valores de p_{k+2} e q_{k+2} estão definidos apenas pela razão entre os dois, podemos desprezar o fator comum $\frac{1}{h_{k+2}}$. Desta forma, obtemos

$$p_{k+2} = h_{k+2}p_{k+1} + p_k \quad \text{e} \quad q_{k+2} = h_{k+2}q_{k+1} + q_k$$

o que conclui a demonstração. ■

Sem perda de generalidade, podemos considerar p_n e q_n , $n \geq 0$, como sendo números naturais, pois vimos que é possível desenvolver um número negativo em fração contínua colocando o sinal negativo na parte inteira. Com isto, é fácil compreender que os denominadores, tal como os numeradores, das reduzidas são estritamente crescentes, isto é, $q_n > q_{n-1}$ e $p_n > p_{n-1}$ para $n \geq 2$. Por outro lado, como $p_1 = h_0h_1 + 1$, $q_0 = 1$ e $q_1 = h_1$

obtemos $p_0 < p_1$ mas podemos ter $q_0 = q_1$. Portanto

$$\begin{aligned} 1 &= q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \dots \\ h_0 &= p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots \end{aligned} \quad (A.5)$$

Com o resultado da Proposição (A.4) é possível calcular a diferença entre duas reduzidas adjacentes, mais ainda, é possível provar que p_n e q_n dados pelas fórmulas de recorrências são primos entre si.

Proposição A.5. *Para todo $n \geq 1$ temos que*

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}.$$

Além disto, $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$.

Demonstração: Note que,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}}.$$

Observe que se mostrarmos que $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$ concluímos a demonstração da proposição. De fato, provaremos por indução sobre n . Para $n = 1$ obtemos

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (h_0 h_1 + 1)1 - h_0 h_1 = 1 = (-1)^2.$$

Suponhamos válida a expressão $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}$. Aplicando a Proposição (A.4) para p_{k+1} e q_{k+1} temos,

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= (h_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (h_{k+1} q_k + q_{k-1}) \\ &= p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} \\ &= -1(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) = (-1)^{k+2}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é válida pela hipótese de indução. O que conclui a demonstração. Vale observar que a expressão $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$ mostra que $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$ para todo $n \geq 1$. ■

Como consequência imediata da Proposição anterior temos o seguinte corolário.

Corolário A.6. *Para todo $n \geq 1$ temos*

$$\frac{p_n}{q_n} = h_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n-1} q_n}.$$

Demonstração: A demonstração segue da Proposição (A.5). ■

Observe que, das expressões (A.5) temos $1 \leq q_0 q_1 < q_1 q_2 < \dots < q_{n-1} q_n$. Porém, em nossos estudos, vamos supor sempre que $q_0 < q_1$, logo $1 < q_0 q_1 < q_1 q_2 < \dots < q_{n-1} q_n$. Com isto e da Proposição (A.5), obtemos o seguinte lema.

Lema A.7. *Para todo $i, j \geq 0$, se $j < i$ então*

$$0 < \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_j}{q_j} \leq \frac{1}{q_j q_{j+1}} \quad \text{se } j \equiv 0 \pmod{2}$$

ou

$$0 < \frac{p_j}{q_j} - \frac{p_i}{q_i} \leq \frac{1}{q_j q_{j+1}} \quad \text{se } j \not\equiv 0 \pmod{2}.$$

Demonstração: Do Corolário (A.6), como $j < i$ segue que

$$\begin{aligned} 0 < \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_j}{q_j} &= h_0 + \frac{1}{q_0 q_1} + \dots + \frac{(-1)^{j+1}}{q_{j-1} q_j} + \frac{(-1)^{j+2}}{q_j q_{j+1}} + \dots + \frac{(-1)^{i+1}}{q_{i-1} q_i} \\ &\quad - \left(h_0 + \frac{1}{q_0 q_1} + \dots + \frac{(-1)^{j+1}}{q_{j-1} q_j} \right) \\ &= \frac{(-1)^{j+2}}{q_j q_{j+1}} + \dots + \frac{(-1)^{i+1}}{q_{i-1} q_i}. \end{aligned}$$

Como $1 < q_0 q_1 < q_1 q_2 < \dots < q_{i-1} q_i$ temos $\frac{1}{q_{i-1} q_i} < \frac{1}{q_{i-2} q_{i-1}} < \dots < \frac{1}{q_1 q_0} < 1$.

Logo

$$0 < \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_j}{q_j} \leq \frac{(-1)^{j+2}}{q_j q_{j+1}} = \frac{1}{q_j q_{j+1}} \quad \text{se } j \equiv 0 \pmod{2}.$$

Analogamente, segue o outro caso. ■

A.2 Polinômios Simétricos

Definição A.8. Chama-se polinômio simétrico aos polinômios em que podemos permutar as variáveis entre si sem que isso altere a sua expressão. Com isto, defina o polinômio

$$S_{j_1, j_2, \dots, j_p}^p(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}) = \sum_{i_t=1}^n b_{i_1}^{j_1} \cdot b_{i_2}^{j_2} \cdot \dots \cdot b_{i_p}^{j_p}$$

onde $i_t \in \{1, 2, \dots, n\}$, classicamente chamado um p -upla polinômio simétrico.

Exemplo A.9. Considere $p = 2$ e $n = 3$. Assim $i_t \in \{1, 2, 3\}$, então o 2-upla polinômio simétrico é da forma

$$S_{j_1, j_2}^2(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = \sum_{i_t=1, i_t \neq i_l, t \neq l}^3 x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} = x_1^{j_1} x_2^{j_2} + x_1^{j_1} x_3^{j_2} + x_2^{j_1} x_1^{j_2} + x_2^{j_1} x_3^{j_2} + x_3^{j_1} x_1^{j_2} + x_3^{j_1} x_2^{j_2}.$$

Uma propriedade importante dos polinômios simétricos, o qual vamos utilizar, é que podemos multiplicar um p -upla polinômio simétrico com um 1-upla polinômio simétrico e o resultado ainda continua sendo um polinômio simétrico. Como segue no próximo resultado.

Proposição A.10. Se S_{j_1, \dots, j_p}^p e S_j^1 são polinômios simétricos, então

$$S_{j_1, \dots, j_p}^p \cdot S_j^1 = S_{j_1+j, \dots, j_p}^p + S_{j_1, j_2+j, \dots, j_p}^p + \dots + S_{j_1, \dots, j_p+j}^p + S_{j_1, \dots, j_p, j}^{p+1}.$$

Exemplo A.11. Se $p = 2$ e $n = 3$, considere o polinômio do exemplo anterior e, seja

$$S_j^1 = \sum_{i_1=1}^3 x_{i_1}^j = x_1^j + x_2^j + x_3^j. \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} S_{j_1, j_2}^2 \cdot S_j^1 &= x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_1^j + x_1^{j_1} x_3^{j_2} x_1^j + x_2^{j_1} x_1^{j_2} x_1^j + x_2^{j_1} x_3^{j_2} x_1^j + x_3^{j_1} x_1^{j_2} x_1^j + x_3^{j_1} x_2^{j_2} x_1^j \\ &+ x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_2^j + x_1^{j_1} x_3^{j_2} x_2^j + x_2^{j_1} x_1^{j_2} x_2^j + x_2^{j_1} x_3^{j_2} x_2^j + x_3^{j_1} x_1^{j_2} x_2^j + x_3^{j_1} x_2^{j_2} x_2^j \\ &+ x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_3^j + x_1^{j_1} x_3^{j_2} x_3^j + x_2^{j_1} x_1^{j_2} x_3^j + x_2^{j_1} x_3^{j_2} x_3^j + x_3^{j_1} x_1^{j_2} x_3^j + x_3^{j_1} x_2^{j_2} x_3^j. \end{aligned}$$

Simplificando temos

$$\begin{aligned}
S_{j_1, j_2}^2 \cdot S_j^1 &= x_1^{j_1+j} x_2^{j_2} + x_1^{j_1+j} x_3^{j_2} + x_2^{j_1+j} x_1^{j_2} + x_2^{j_1+j} x_3^{j_2} + x_3^{j_1+j} x_1^{j_2} + x_3^{j_1+j} x_2^{j_2} \\
&+ x_1^{j_1} x_2^{j_2+j} + x_1^{j_1} x_3^{j_2+j} + x_2^{j_1} x_1^{j_2+j} + x_2^{j_1} x_3^{j_2+j} + x_3^{j_1} x_1^{j_2+j} + x_3^{j_1} x_2^{j_2+j} \\
&+ x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_3^j + x_1^{j_1} x_3^{j_2} x_2^j + x_2^{j_1} x_1^{j_2} x_3^j + x_2^{j_1} x_3^{j_2} x_1^j + x_3^{j_1} x_1^{j_2} x_2^j + x_3^{j_1} x_2^{j_2} x_1^j.
\end{aligned}$$

$$\text{Portanto } S_{j_1, j_2}^2 \cdot S_j^1 = S_{j_1+j, j_2}^2 + S_{j_1, j_2+j}^2 + S_{j_1, j_2, j}^3.$$

REFERÊNCIAS

- [B] BESKIN, N.M., *Frações contínuas*, **Iniciação à Matemática**, Editora Mir, (1987), 20-45.
- [BK] BRIESKORN, E. AND KNÖRRER, H., *Plane Algebraic Curves*, **Birkhäuser Verlag**, (1986).
- [C1] CASAS-ALVERO, E., *On the singularities of polar curves*, **Manuscr. Math.**, **43**, (1983), 167-190.
- [C2] CASAS-ALVERO, E., *Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves*, **Math. Ann.**, **287**, (1990), 429-494.
- [C3] CASAS-ALVERO, E., *Singularities of polar curves*, **Compositio Math.**, **89**, (1993), 339-359.
- [C4] CASAS-ALVERO, E., *Singularities of plane curves*, **Cambridge University Press**, (2000).
- [H] HEFEZ, A., *Irreducible Plane Curve Singularities, Real and Complex Singularities*, **Lectures Notes in Pure and Appl. Math.** **232**, Dekker, New York, (2003), 1-86.
- [HKT] HIRSCHFELD, J.W.P.; KOCHMAROS, G. AND TORRES, F., *Algebraic Curves over a Finite Field*, **1º ed. Princeton Univ. Press**, (2008).
- [KL] KUO, T.C. AND LU, Y.C., *On analytic function germs of two variables*, **Topology** **16**, (1977), 299-310.
- [M] MERLE, M., *Invariants polaires des courbes planes*, **Invent. Math.**, **41** (1977), 103-111.

-
- [Mi] MILNOR, J., *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, **Annals of Mathematics Studies 61**. Princeton Univ. Press, (1968).
- [P] PHAM, F., *Deformations equisingulières des idéaux jacobiens des courbes planes*, In Proc. of Liverpool Symposium on Singularities II, volume 209 of Lect. Notes in Math., Springer Verlag, Berlin, London, New York, (1971), 218-233.
- [Z1] ZARISKI, O., *On the topology of algebroid singularities*, **Amer. J. Math.**, 54, (1932), 453-465.
- [Z2] ZARISKI, O., *Le Problème des Modules pour les branches planes*, **Hermann, Paris**, (1986).
- [W] WALL, C.T.C., *Singular Points of Plane Curves*, **Cambridge Univ. Press**, (2004).