

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Mestrado)

VINÍCIUS RITER DE FARIA

**Uma Introdução à Álgebra Geométrica e Aplicações em  
Detecção de Objetos em Imagens**

Maringá-PR

2018

VINÍCIUS RITER DE FARIA

**Uma Introdução à Álgebra Geométrica e Aplicações em  
Detecção de Objetos em Imagens**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Emerson Vitor Castelani

Coorientador: Jair da Silva

Maringá-PR

2018

# Resumo

Neste trabalho trazemos um breve estudo sobre Álgebra Geométrica, onde abordaremos apenas definições e resultados básicos, seguido por alguns conceitos que nos levam a representação algébrica de objetos geométricos. Apresentamos a biblioteca LIGA, que foi construída com o objetivo de tornar possível a computação utilizando conceitos de Álgebra Geométrica na linguagem *Julia*. Por fim, para exemplificar a utilização da biblioteca LIGA na detecção de objetos em imagens, apresentamos um algoritmo para detecção de circunferências inspirado na Transformada de Hough.

**Palavras chave:** Álgebra Geométrica, detecção de curvas, Transformada de Hough.

# Abstract

In this work we bring a brief study on Geometric Algebra, where we will address only basic definitions and results, followed by some concepts that lead us to the algebraic representation of geometric objects. We introduce the LIGA library, which was built with the purpose of making possible the computation using concepts of Geometric Algebra in the *Julia* language. Finally, to illustrate the use of the LIGA library in the detection of objects in images, we present an algorithm for circle detection inspired by the Hough Transform.

**Keywords:** Geometric Algebra, curve detection, Hough Transform.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Álgebra Geométrica</b>	<b>10</b>
2.1	Conceitos Básicos . . . . .	10
2.1.1	Axiomas . . . . .	10
2.1.2	Base . . . . .	13
2.1.3	Involuções . . . . .	15
2.1.4	Dualidade . . . . .	16
2.1.5	Produto Interno e Exterior . . . . .	17
2.2	Blades . . . . .	21
2.2.1	Produto Geométrico . . . . .	21
2.2.2	Produto Exterior . . . . .	22
2.2.3	Produto Escalar . . . . .	25
2.2.4	Reversão . . . . .	26
2.2.5	Conjugação . . . . .	27
2.2.6	Norma . . . . .	27
2.2.7	Produto Interno . . . . .	28
2.2.8	Dualidade . . . . .	32
2.2.9	Inverso . . . . .	33
2.2.10	Projeção . . . . .	34
2.2.11	Afastamento . . . . .	35
2.2.12	Reunião e Junção . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Representações Geométricas</b>	<b>37</b>
3.1	Definições Básicas . . . . .	37
3.2	Espaço Euclidiano . . . . .	38
3.2.1	Representação do Produto Exterior . . . . .	38
3.3	Espaço Projetivo . . . . .	39
3.3.1	Representações Através do Produto Exterior . . . . .	41
3.3.2	Representações Através do Produto Interno . . . . .	42
3.4	Espaço Conforme . . . . .	43
3.4.1	Imersão Estereográfica do Espaço Euclidiano . . . . .	44
3.4.2	Homogeneização da Imersão Estereográfica . . . . .	44
3.5	Álgebra Geométrica em $\mathbb{R}^{n+1,1}$ . . . . .	47
3.5.1	Representações Através do Produto Interno em $\mathbb{G}_{4,1}$ . . . . .	47
3.5.2	Representações Através do Produto Exterior em $\mathbb{G}_{4,1}$ . . . . .	51
3.6	Análise de Blades . . . . .	53
3.6.1	Planos . . . . .	54
3.6.2	Esferas . . . . .	54
3.6.3	Retas . . . . .	55
3.6.4	Circunferências . . . . .	56
<b>4</b>	<b>A Biblioteca LIGA e Aplicações</b>	<b>57</b>
4.1	A Biblioteca LIGA . . . . .	58
4.2	Visão Geral e Exemplos Básicos . . . . .	58
4.2.1	Representação de Elementos e Funções . . . . .	58
4.2.2	Extração de Parâmetros . . . . .	60
4.3	Aplicações Avançadas . . . . .	61
4.3.1	Introdução ao Problema de Detecção de Curvas . . . . .	61
4.3.2	Transformada de Hough . . . . .	62
4.3.3	Versão Baseada em Álgebra Geométrica . . . . .	64
4.3.4	Experimentos Numéricos . . . . .	65

4.3.5	Detecção de Esferas . . . . .	67
4.4	Considerações Finais . . . . .	67

# Capítulo 1

## Introdução

A Álgebra Geométrica foi introduzida por William Kingdon Clifford em 1878 [7]. A principal ideia de Clifford era que a Álgebra das Extensões Lineares de Hermann G. Grassmann e a álgebra dos quatérnions de William R. Hamilton pudessem ser combinadas em uma única álgebra geométrica, que foi denominada posteriormente de *Álgebra de Clifford* ou *Álgebra Geométrica* [23].

Os quatérnions foram introduzidos por Hamilton em 1843 com o objetivo de generalizar a álgebra dos números complexos para um sistema de maior dimensão [4]. A construção desse conjunto se dá a partir de um sistema quadridimensional com três eixos imaginários  $\mathbb{I}$ ,  $\mathbb{J}$  e  $\mathbb{K}$ , adicionando a estes o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, sendo estes conjuntos independentes uns aos outros, assim como os números reais são independentes em relação aos números imaginários [16].

Alguns anos depois, em 1873, Hermann G. Grassmann publicou um artigo onde propôs que grandezas físicas fossem representadas por objetos geométricos ao invés de numéricos [15]. Estes objetos seriam como retas orientadas, fragmentos de plano orientados, cubos orientados, entre outros. Além disso, Grassmann generalizou a geometria de Euclides ao sugerir um tratamento matemático válido para um espaço de qualquer dimensão [24].

W.K. Clifford demonstrou diversas semelhanças entre o trabalho de Hamilton com o de Grassmann e formulou uma nova álgebra vetorial, que englobava ambas as formulações de uma forma bem mais simples. Esta foi denominada por ele Álgebra Geométrica [24].

A Álgebra Geométrica simplifica de uma maneira notável a descrição de diversos fenômenos da natureza, ela é efetiva para descrever desde fenômenos clássicos, como eletrodinâmica e mecânica clássica [10, 9, 18], até questões modernas, tal como relatividade e mecânica quântica [21].

Devido as vantagens de se trabalhar com a Álgebra Geométrica nas representações algébricas de objetos geométricos, uma ideia que nos vem a mente são as aplicações computacionais desta estrutura.

Com o objetivo de criar um ambiente na linguagem *Julia* que nos permitisse trabalhar com Álgebra Geométrica, construímos a biblioteca LIGA visando o estudo de problemas de detecção de curvas. Algumas bibliotecas como, *Versor(libvsr)* [8], *CLUCalc* [19], *CLIFFORD* [2] e a biblioteca em Python [1], nos permitem trabalhar com a Álgebra Geométrica, porém, a linguagem Julia não possuía algo do tipo até então.

Consideramos o problema de detecção de curvas devido a facilidade na representação de objetos da Álgebra Geométrica, o que torna esse tipo de problema algo mais simples. No entanto, a Álgebra Geométrica já vem sendo aplicada ao cálculo de estruturas moleculares [3], estrutura de proteínas [6], entre outros.

Este trabalho está dividido em três capítulos, no qual dois deles contemplarão a base para a criação da biblioteca LIGA e o último apresenta a biblioteca e alguns resultados obtidos com o uso da mesma.

De início apresentamos uma revisão bibliográfica de alguns conceitos de Álgebra Geométrica. Contemplaremos uma grande quantidade de definições e resultados que serão importantes para o seguimento do trabalho. O segundo capítulo compreende as representações algébricas nos espaços Projetivo e Conforme. Estas representações dependerão dos Espaços Nulos Geométricos, que exercem a função de conexão entre os objetos algébricos e geométricos. No último capítulo apresentaremos a biblioteca LIGA, seguido de uma breve introdução ao problema de detecção de curvas, onde apresentamos a Transformada de Hough e uma variação dessa técnica utilizando conceitos de Álgebra Geométrica. Por fim, apresentamos as considerações finais sobre o trabalho e algumas perspectivas futuras.

# Capítulo 2

## Álgebra Geométrica

Neste capítulo iremos expor os principais axiomas referente ao tema, em seguida, estas propriedades serão estendidas para blades, que são os objetos algébricos fundamentais no desenvolvimento deste trabalho. Tal exposição contemplará boa parte das funções que compõe a biblioteca **LIGA**. Além disso, a forma que iremos expor é bastante direta e pode ser encontrada de forma mais detalhada em [23]. Outros autores fornecem uma perspectiva diferente, porém contemplando os mesmos tópicos. Aos leitores interessados, recomendamos [10], [11],[14] e [22].

### 2.1 Conceitos Básicos

Inicialmente, apresentaremos os conceitos básicos, como axiomas, propriedades e operações, que caracterizam a Álgebra Geométrica, como apresentado em [23], incluindo mesma notação.

#### 2.1.1 Axiomas

Vamos denotar um espaço vetorial de dimensão  $p + q$  sobre  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{R}^{p,q}$ .

**Definição 2.1.1. (Base canônica de vetores).** A base canônica de  $\mathbb{R}^{p,q}$ , denotada por  $\overline{\mathbb{R}}^{p,q}$ , é definida pelo conjunto simplesmente ordenado

$$\overline{\mathbb{R}}^{p,q} := \{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\},$$

onde  $\{e_i\}$  tem a seguinte propriedade:

$$e_i * e_j = \begin{cases} +1, & 1 \leq i = j \leq p, \\ -1, & p < i = j \leq p + q, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

A reunião de um espaço vetorial com um produto escalar é chamado um espaço quadrático, estes espaços formam a base para a construção da Álgebra Geométrica.

**Axioma 2.1.1.** (*Álgebra Geométrica*) Sejam  $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$  a álgebra associativa sobre o espaço quadrático  $(\mathbb{R}^{p,q}, *)$  e o produto  $\circ$ . A álgebra  $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$  é dita uma Álgebra Geométrica se para cada  $a \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$  temos  $a \circ a = a * a$ .

A Álgebra Geométrica sobre  $\mathbb{R}^{p,q}$  é denotada por  $\mathbb{G}(\mathbb{R}^{p,q})$  ou simplesmente  $\mathbb{G}_{p,q}$  e seu produto “ $\circ$ ” é chamado *produto geométrico* ou *produto de Clifford*.

A seguir todos os axiomas da Álgebra Geométrica serão apresentados. Primeiramente, os elementos de  $\mathbb{G}_{p,q}$ , que são chamados multivetores, satisfazem os axiomas de um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

**Axioma 2.1.2.** *As duas seguintes operações existem em  $\mathbb{G}_{p,q}$ :*

1. **Adição de multivetores.** Para quaisquer dois elementos  $A, B \in \mathbb{G}_{p,q}$  existe um elemento  $C = A + B \in \mathbb{G}_{p,q}$ , ou seja, a soma de elementos de  $\mathbb{G}_{p,q}$  está em  $\mathbb{G}_{p,q}$ .
2. **Multiplicação por escalar.** Para qualquer elemento  $A \in \mathbb{G}_{p,q}$  e escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , existe um elemento  $\alpha A \in \mathbb{G}_{p,q}$ , ou seja, a multiplicação de um escalar por um elemento de  $\mathbb{G}_{p,q}$  está em  $\mathbb{G}_{p,q}$ .

**Axioma 2.1.3.** (*Espaço vetorial*) Sejam  $A, B, C \in \mathbb{G}_{p,q}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

1. **Associatividade da adição de multivetores:**

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

2. **Comutatividade da adição:**

$$A + B = B + A.$$

3. **Elemento neutro da adição.** Existe um elemento  $0 \in \mathbb{G}_{p,q}$  tal que:

$$A + 0 = A.$$

4. **Associatividade** da multiplicação por escalar:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$$

5. **Comutatividade** da multiplicação por escalar:

$$\alpha A = A\alpha.$$

6. **Elemento identidade** da multiplicação por escalar. A identidade  $1 \in \mathbb{R}$  satisfaz:

$$1A = A.$$

7. **Distributividade** sobre a soma de multivetores:

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

8. **Distributividade** sobre a soma de escalares:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

**Axioma 2.1.4.** Os axiomas relacionados ao produto geométrico são os seguintes. Sejam  $A, B, C \in \mathbb{G}_{p,q}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

1. A Álgebra Geométrica é fechada para o produto geométrico:

$$A \circ B \in \mathbb{G}_{p,q}.$$

2. **Associatividade:**

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C).$$

3. **Distributividade:**

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C \quad e \quad (B + C) \circ A = B \circ A + C \circ A.$$

4. **Multiplicação por escalar:**

$$\alpha \circ A = A \circ \alpha = \alpha A.$$

Os axiomas apresentados até agora definem uma álgebra associativa. O que realmente difere a Álgebra Geométrica das outras álgebras é a equação que a define.

**Axioma 2.1.5.** Seja  $a \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q}$  então

$$a \circ a = a * a \in \mathbb{R}.$$

Isto é, o produto geométrico de um vetor com ele mesmo gera um elemento do corpo  $\mathbb{R}$ .

## 2.1.2 Base

Agora veremos como pode ser construída uma base para  $\mathbb{G}_{p,q}$ . De agora em diante, o produto geométrico será denotado apenas pela justaposição dos elementos, ou seja, o produto geométrico de dois multivetores  $A, B \in \mathbb{G}_{p,q}$  será escrito como  $AB$ .

Se  $\mathbb{A}$  é um conjunto ordenado qualquer, denotaremos por  $\mathbb{A}[i]$  o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbb{A}$ , isto é, se  $\mathbb{A} = \{2, 3, 1\}$ , então  $\mathbb{A}[2] = 3$ .

**Definição 2.1.2. (Blade Básica).** Uma *blade básica* em  $\mathbb{G}_{p,q}$  é o produto geométrico de elementos da base canônica  $\overline{\mathbb{R}}^{p,q}$  distintos entre si. Seja  $\mathbb{A} \subset \{1, \dots, p+q\}$ , então  $e_{\mathbb{A}}$  denotará a blade básica

$$e_{\mathbb{A}} := \prod_{i=1}^{|\mathbb{A}|} \overline{\mathbb{R}}^{p,q}[\mathbb{A}[i]].$$

**Exemplo 2.1.1.** Se  $\mathbb{A} = \{2, 3, 1\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ , então

$$e_{\mathbb{A}} = e_2 e_3 e_1.$$

**Definição 2.1.3. (Grade).** A *grade* de uma blade básica  $e_{\mathbb{A}} \in \mathbb{G}_{p,q}$ , com  $\mathbb{A} \subset \{1, \dots, p+q\}$ , denotada por  $gr(e_{\mathbb{A}})$ , é definida como  $gr(e_{\mathbb{A}}) := |\mathbb{A}|$ . Como  $e_{\emptyset} = 1$  temos que  $gr(1) = 0$ . As seguintes definições ainda são feitas:

$$gr_+(e_{\mathbb{A}}) := |\{a \in \mathbb{A} : 1 \leq a \leq p\}|,$$

$$gr_-(e_{\mathbb{A}}) := |\{a \in \mathbb{A} : p < a \leq p+q\}|.$$

Isto é,  $gr_+$  e  $gr_-$  fornecem o número de vetores da base numa blade básica cujo quadrado é 1 e -1, respectivamente.

**Exemplo 2.1.2.** Se  $e_{\mathbb{A}} = e_1 e_2$ ,  $e_{\mathbb{B}} = e_1$  e  $e_{\mathbb{C}} = e_2 e_3 e_1$ , onde  $p = 2$  e  $q = 1$  então

$$gr(e_{\mathbb{A}}) = 2,$$

$$gr_+(e_{\mathbb{B}}) = 1,$$

$$gr_-(e_{\mathbb{C}}) = 1.$$

**Definição 2.1.4. (Conjunto Ordenado das Partes).** Seja  $\mathbb{I} := \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$  com cardinalidade  $n = |\mathbb{I}|$  e denote por  $\mathcal{P}(\mathbb{I})$  o conjunto das partes de  $\mathbb{I}$ , tal que  $|\mathcal{P}(\mathbb{I})| = 2^n$ . O conjunto ordenado das partes de  $\mathbb{I}$ , denotado por  $\mathcal{P}_O(\mathbb{I})$ , é um conjunto ordenado do seguinte tipo:

1. Os elementos de  $\mathcal{P}_O(\mathbb{I})$  são ordenados por cardinalidade em ordem crescente.
2. Os membros de cada elemento de  $\mathcal{P}_O(\mathbb{I})$  são ordenados em ordem crescente.
3. Os elementos de  $\mathcal{P}_O(\mathbb{I})$  de mesma cardinalidade são ordenados pela ordem lexicográfica.

Definimos também,  $\mathcal{P}_O(\mathbb{I}^k) := \{\mathbb{A} \in \mathcal{P}_O(\mathbb{I}) : |\mathbb{A}| = k\}$ , cujos elementos também são ordenados lexicograficamente. Por exemplo, se  $\mathbb{I} = \{1, 2, 3\}$ , então

$$\mathcal{P}_O(\mathbb{I}) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Este conjunto indexado será usado para construir uma base canônica para  $\mathbb{G}_{p,q}$

**Definição 2.1.5. (Base Canônica).** A base canônica de  $\mathbb{G}_{p,q}$ , denotada por  $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ , é construída da seguinte forma. Tome a base canônica de  $\mathbb{R}^{p,q}$  dada por

$$\overline{\mathbb{R}}^{p,q} = \{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\},$$

e seja  $\mathbb{I} = \{1, \dots, p+q\}$ . A *base canônica* de  $\mathbb{G}_{p,q}$  é dada pelo conjunto ordenado

$$\overline{\mathbb{G}}_{p,q} := \{e_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \in \mathcal{P}_O(\mathbb{I})\}.$$

A ordem dos elementos de  $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}$  é a mesma ordem de  $\mathcal{P}_O(\mathbb{I})$ , isto é, se para  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{P}_O(\mathbb{I})$ , se  $\mathbb{A} < \mathbb{B}$ , então  $e_{\mathbb{A}} < e_{\mathbb{B}}$ . Além disso, definimos

$$\overline{\mathbb{G}}_{p,q}^k := \{e_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \in \mathcal{P}_O(\mathbb{I}^k)\}.$$

Por exemplo, considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  com sua base canônica formada pelos vetores  $e_1, e_2$  e  $e_3$ . A base canônica de  $\mathbb{G}_3$  é dada por

$$\overline{\mathbb{G}}_3 := \{1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\}.$$

Se  $\mathbf{E}_i := \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[i]$ , então um multivetor genérico de  $\mathbb{G}_{p,q}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = a^i \mathbf{E}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}, \quad (2.1)$$

onde  $\{a^i\} \subset \mathbb{R}$  e

$$a^i \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{2^n} a^i E_i; \quad i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}.$$

**Definição 2.1.6. (k-Espaço Vetorial).** O  $k$ -espaço vetorial de  $\mathbb{G}_{p,q}$ , denotado por  $\mathbb{G}_{p,q}^k$ , é o espaço vetorial gerado por  $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}^k$ . A dimensão de  $\mathbb{G}_{p,q}^k$  é  $\binom{p+q}{k} = \frac{(p+q)!}{k!(p+q-k)!}$ .

**Exemplo 2.1.3.** Os 2-espaço vetorial de  $\mathbb{G}_3$  será o conjunto formado pelos elementos da forma

$$\alpha e_{12} + \beta e_{13} + \gamma e_{23},$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

Como o  $k$ -espaço vetorial com maior valor para  $k$  ( $k = p + q$ ) tem a mesma dimensão do espaço dos escalares  $\mathbb{R}$ , a seguinte definição é feita.

**Definição 2.1.7. (Pseudoescalar).** O elemento de maior grade da base canônica de  $\mathbb{G}_{p,q}$ , isto é,  $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}[2^{p+q}]$ , é dito ser o pseudoescalar de  $\mathbb{G}_{p,q}$ .

### 2.1.3 Involuções

Uma involução, como citado em [23], é uma operação que, quando aplicada duas vezes em um elemento, o resultado é o próprio elemento. Veremos duas involuções importantes em Álgebra Geométrica, a reversão e a conjugação.

**Definição 2.1.8. (Reversão).** Seja  $\mathbb{A} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, p + q\}$ , tal que  $e_{\mathbb{A}} \in \mathbb{G}_{p,q}$ . Então o reverso de  $e_{\mathbb{A}}$ , denotado por  $\tilde{e}_{\mathbb{A}}$ , é definido por

$$\tilde{e}_{\mathbb{A}} := \prod_{j=1}^k \overline{\mathbb{R}}^{p,q}[\mathbb{A}[k - j + 1]].$$

**Exemplo 2.1.4.** Em  $\overline{\mathbb{G}}_3$  temos que  $E_8 = e_1 e_2 e_3$ , então

$$\tilde{E}_8 = e_3 e_2 e_1 = -e_1 e_2 e_3$$

Desta forma, fica claro que, quando a operação de reversão é aplicada duas vezes em um elemento, o resultado será o próprio elemento. Também segue da definição que

$$\widetilde{\widetilde{E_i E_j}} = \tilde{E}_j \tilde{E}_i.$$

Assim uma blade básica e seu reverso irão diferenciar apenas por um sinal. Com isso, se  $E_i \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[i]$  com grade  $gr(E_i) = k$  então

$$\tilde{E}_i = (-1)^{k(k-1)/2} E_i. \quad (2.2)$$

A operação de reversão é distributiva, conseqüentemente o reverso de um multivetor genérico é obtido aplicando a reversão nas blades básicas que constituem o multivetor, isto é, para  $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}$  com  $\mathbf{A} = a^i E_i$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = a^i \tilde{E}_i$ .

**Definição 2.1.9. (Conjugação).** Seja  $\mathbb{A} \subset \{1, \dots, p+q\}$ , tal que  $e_{\mathbb{A}} \in \mathbb{G}_{p,q}$ . O *conjugado* de  $e_{\mathbb{A}}$ , denotado por  $e_{\mathbb{A}}^\dagger$ , é definido por

$$e_{\mathbb{A}}^\dagger := (-1)^r \tilde{e}_{\mathbb{A}}, \quad r := gr_-(e_{\mathbb{A}}).$$

**Exemplo 2.1.5.** Em  $\mathbb{G}_{2,1}$ , temos que  $E_4 = e_3$ ,  $E_6 = e_1 e_3$  e  $E_8 = e_1 e_2 e_3$ , assim

$$E_4^\dagger = -e_3 = -E_4,$$

$$E_6^\dagger = -e_3 e_1 = e_1 e_3 = E_6,$$

$$E_8^\dagger = -e_3 e_2 e_1 = e_1 e_2 e_3 = E_8.$$

A relação entre uma blade básica  $E_i$  e seu conjugado  $E_i^\dagger$  será

$$E_i^\dagger = (-1)^r (-1)^{k(k-1)/2} E_i. \quad (2.3)$$

onde  $k = gr(E_i)$  e  $r = gr_-(E_i)$ . A conjugação tem a propriedade de que para toda blade básica  $E_i$ ,

$$E_i E_i^\dagger = (-1)^r (-1)^{k(k-1)/2} E_i E_i = +1. \quad (2.4)$$

Conseqüentemente, o conjugado de uma blade básica é seu inverso, ou seja,  $E_i^{-1} = E_i^\dagger$ , porém, o mesmo não ocorre com a reversão, onde  $E_i \tilde{E}_i = \pm 1$ .

## 2.1.4 Dualidade

A dualidade é um conceito de grande importância em Álgebra Geométrica, já que, em determinados casos, o espaço dual pode ser explorado de forma mais simples que o espaço inicial, com este conceito poderemos transitar entre estes espaços.

Seja  $E_i = \overline{\mathbb{G}_{p,q}[i]}$ , então o dual da blade básica  $E_i$ , é denotado por  $E_i^*$  e é definido por

$$E_i^* := E_i I^{-1}, \quad (2.5)$$

onde  $I := \overline{\mathbb{G}_{p,q}^{(p+q)}}$  é o pseudoescalar de  $\mathbb{G}_{p,q}$  e  $I^{-1}$  o seu inverso.

**Exemplo 2.1.6.** Em  $\mathbb{G}_3$

$$I = e_1e_2e_3 \text{ e } I^{-1} = e_3e_2e_1.$$

Usando a associatividade do produto geométrico, temos

$$\begin{aligned} II^{-1} &= (e_1e_2e_3)(e_3e_2e_1) \\ &= (e_1e_2)(e_3e_3)(e_2e_1) \\ &= e_1(e_2e_2)e_1 \\ &= e_1e_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto  $II^{-1} = 1$ . Temos ainda que

$$\begin{aligned} I^{-1} &= e_3(e_2e_1) = -e_3(e_1e_2) = -(e_3e_1)e_2 \\ &= (e_1e_3)e_2 = e_1(e_3e_2) = -e_1(e_2e_3) \\ &= -I. \end{aligned}$$

Portanto,  $II = -II^{-1} = -1$ .

## 2.1.5 Produto Interno e Exterior

Duas operações na Álgebra Geométrica com grande importância são os produtos *interno* e *exterior*. Inicialmente definiremos ambas as operações para blades básicas e posteriormente estenderemos para multivetores.

Antes será necessário uma definição que serve como base para estas operações.

**Definição 2.1.10. (Projeção de Grade).** Seja  $E_i = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[i]$ . Então a *projeção de grade* de  $E_i$  sobre a grade  $k$  é escrita como  $\langle E_i \rangle_k$  e é definida como

$$\langle E_i \rangle_k = \begin{cases} E_i, & gr(E_i) = k, \\ 0, & gr(E_i) \neq k. \end{cases}$$

O operador da projeção de grade é distributivo e, dados  $a \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}$ ,  $\langle a\mathbf{A} \rangle_k = a\langle \mathbf{A} \rangle_k$ . Consequentemente, para  $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}$  com  $\mathbf{A} = a^i E_i$ , segue que

$$\langle \mathbf{A} \rangle_k = a^i \langle E_i \rangle_k. \quad (2.6)$$

**Exemplo 2.1.7.** Tomando os elementos  $A, B, C \in \mathbb{G}_3$ , onde  $A := e_1 + 2e_1e_2 + e_2e_3$ ,  $B = 2 + e_1e_2e_3$  e  $C = e_1 + e_1e_3 + e_1e_2e_3$ , então

$$\langle A \rangle_2 = 2e_1e_2 + e_2e_3,$$

$$\langle B \rangle_0 = 1,$$

$$\langle C \rangle_3 = e_1e_2e_3.$$

**Definição 2.1.11. (Produto Interno).** O *produto interno* de duas blades básicas  $E_i$  e  $E_j$ , com  $gr(E_i) = k, gr(E_j) = l$ , é definido como

$$E_i \cdot E_j = \begin{cases} \langle E_i E_j \rangle_{|k-l|}, & i, j > 0, \\ 0, & i = 0 \text{ e/ou } j = 0. \end{cases}$$

Isto é, se a grade do produto geométrico entre  $E_i$  e  $E_j$  for igual a  $|k-l|$ , então  $E_i \cdot E_j = E_i E_j$ , caso contrário, o produto interno entre esses elementos será igual a zero.

**Exemplo 2.1.8.** Tomando os elementos  $E_4 = e_3, E_5 = e_1e_2$  e  $E_6 = e_1e_3$ , então

$$E_5 \cdot E_6 = \langle e_1e_2e_1e_3 \rangle_{|2-2|} = \langle -e_2e_3 \rangle_0 = 0,$$

$$E_6 \cdot E_4 = \langle e_1e_3e_3 \rangle_{|2-1|} = \langle e_1 \rangle_1 = e_1.$$

**Definição 2.1.12. (Produto Exterior).** O *produto exterior* de duas blades básicas  $E_i$  e  $E_j$ , com  $gr(E_i) = k, gr(E_j) = l$ , é definido como

$$E_i \wedge E_j := \langle E_i E_j \rangle_{k+l}. \quad (2.7)$$

Ou seja, se a grade do produto exterior de  $E_i$  e  $E_j$  é  $k+l$ , então  $E_i \wedge E_j = E_i E_j$ , do contrário, o produto exterior de duas blades básicas será igual a zero.

**Exemplo 2.1.9.** Tomando os mesmos elementos  $E_4, E_5$  e  $E_6$  do Exemplo 2.1.8, temos

$$E_5 \wedge E_4 = \langle e_1e_2e_3 \rangle_{2+1} = \langle e_1e_2e_3 \rangle_3 = e_1e_2e_3,$$

$$E_6 \wedge E_4 = \langle e_1e_3e_3 \rangle_{2+1} = \langle e_1 \rangle_3 = 0.$$

**Lema 2.1.1.** Seja  $\mathbb{A} \subseteq \{1, \dots, p+q\}$  e  $i \in \{1, \dots, p+q\}$ , tal que  $e_{\mathbb{A}}, e_i \in \mathbb{G}_{p,q}$ . Então

$$e_i e_{\mathbb{A}} = \begin{cases} (-1)^{|\mathbb{A}|} e_{\mathbb{A}} e_i, & i \notin \mathbb{A}, \\ (-1)^{|\mathbb{A}|+1} e_{\mathbb{A}} e_i, & i \in \mathbb{A}. \end{cases}$$

**Demonstração:** A demonstração segue da associatividade do produto geométrico e do fato de  $e_i e_j = -e_j e_i$  se  $i \neq j$ .

Suponha  $|\mathbb{A}| = k$ , se  $i \notin \mathbb{A}$  temos

$$\begin{aligned} e_i e_{\mathbb{A}} &= e_i e_{\mathbb{A}_1} e_{\mathbb{A}_2} \dots e_{\mathbb{A}_k} \\ &= -e_{\mathbb{A}_1} e_i e_{\mathbb{A}_2} \dots e_{\mathbb{A}_k} \\ &\quad \vdots \\ &= (-1)^k e_{\mathbb{A}} e_i = (-1)^{|\mathbb{A}|} e_{\mathbb{A}} e_i; \end{aligned}$$

Se  $i \in \mathbb{A}$ , então  $i = e_{\mathbb{A}_j}$  para algum  $j \in \mathbb{A}$  e assim,

$$\begin{aligned} e_i e_{\mathbb{A}} &= e_i e_{\mathbb{A}_1} e_{\mathbb{A}_2} \dots e_{\mathbb{A}_k} \\ &= -e_{\mathbb{A}_1} e_i e_{\mathbb{A}_2} \dots e_{\mathbb{A}_k} \\ &\quad \vdots \\ &= (-1)^{j-1} e_{\mathbb{A}_1} e_{\mathbb{A}_2} \dots e_{\mathbb{A}_i} e_{\mathbb{A}_j} \dots e_{\mathbb{A}_k} \\ &= (-1)^{j-1} e_{\mathbb{A}_1} e_{\mathbb{A}_2} \dots e_{\mathbb{A}_j} e_{\mathbb{A}_i} \dots e_{\mathbb{A}_k} \\ &\quad \vdots \\ &= (-1)^{k-1} e_{\mathbb{A}} e_i = (-1)^{|\mathbb{A}|+1} e_{\mathbb{A}} e_i. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.1.2.** *Seja  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \{1, \dots, p+q\}$  tal que  $e_{\mathbb{A}}, e_{\mathbb{B}} \in \mathbb{G}_{p,q}$ . Então*

$$e_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{B}} = (-1)^{|\mathbb{B}|(|\mathbb{A}|-1)} e_{\mathbb{B}} e_{\mathbb{A}}.$$

**Demonstração:** Segue diretamente da associatividade do produto geométrico e do Lema 2.1.1. □

**Lema 2.1.3.** *Seja  $\mathbb{A} \subseteq \{1, \dots, p+q\}$  e  $i \in \{1, \dots, p+q\}$ , tal que  $e_{\mathbb{A}}, e_i \in \mathbb{G}_{p,q}$ . Então*

$$e_i \wedge e_{\mathbb{A}} = \frac{1}{2}(e_i e_{\mathbb{A}} + (-1)^{|\mathbb{A}|} e_{\mathbb{A}} e_i).$$

**Demonstração:** Se  $i \in \mathbb{A}$ , então  $e_i \wedge e_{\mathbb{A}} = \langle e_i e_{\mathbb{A}} \rangle_{1+|\mathbb{A}|} = 0$  e do Lema 2.1.1  $e_i e_{\mathbb{A}} = (-1)^{|\mathbb{A}|+1} e_{\mathbb{A}} e_i$ , assim  $e_i e_{\mathbb{A}} + (-1)^{|\mathbb{A}|} e_{\mathbb{A}} e_i = 0$ . Se  $i \notin \mathbb{A}$ , então  $e_i \wedge e_{\mathbb{A}} = \langle e_i e_{\mathbb{A}} \rangle_{1+|\mathbb{A}|} = e_i e_{\mathbb{A}}$  em do Lema 2.1.1,  $e_i e_{\mathbb{A}} = (-1)^{|\mathbb{A}|} e_{\mathbb{A}} e_i$ , logo  $\frac{1}{2}(e_i e_{\mathbb{A}} + (-1)^{|\mathbb{A}|} e_{\mathbb{A}} e_i) = e_i e_{\mathbb{A}}$ . □

**Lema 2.1.4.** *Seja  $\mathbb{A} \subseteq \{1, \dots, p+q\}$  e  $i \in \{1, \dots, p+q\}$ , tal que  $e_{\mathbb{A}}, e_i \in \mathbb{G}_{p,q}$ . Então*

$$e_i \cdot e_{\mathbb{A}} = \frac{1}{2}(e_i e_{\mathbb{A}} - (-1)^{|\mathbb{A}|} e_{\mathbb{A}} e_i).$$

**Demonstração:** A demonstração segue da mesma forma que a do Lema 2.1.3. Note que no caso de  $\mathbb{A} = \emptyset$  o resultado ainda vale.  $\square$

**Axioma 2.1.6.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{G}_{p,q}$ . Então*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \\ (a\mathbf{A}) \cdot (b\mathbf{B}) &= ab(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned}$$

**Axioma 2.1.7.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{G}_{p,q}$ . Então*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}, \\ (a\mathbf{A}) \wedge (b\mathbf{B}) &= ab(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Assim, os produtos interno e exterior de dois multivetores  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q}$ , com  $\mathbf{A} = a^i E_i$  e  $\mathbf{B} = b^j E_j$ , podem ser escritos das seguintes formas:

$$A \cdot B = \sum_{i,j} a^i b^j (E_i \cdot E_j), \quad (2.8)$$

$$A \wedge B = \sum_{i,j} a^i b^j (E_i \wedge E_j). \quad (2.9)$$

É possível mostrar que o produto exterior entre multivetores é associativo.

**Lema 2.1.5.** *Seja  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{G}_{p,q}$ . Então*

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}.$$

**Demonstração:** Tome  $A = a^i E_i, B = b^j E_j$  e  $C = c^k E_k$ . Considere inicialmente três blades básicas com grades  $gr(E_i) = r, gr(E_j) = s$  e  $gr(E_k) = t$ , então

$$E_i \wedge (E_j \wedge E_k) = \langle E_i E_j E_k \rangle_{r+s+t} = (E_i \wedge E_j) \wedge E_k.$$

Como o produto exterior é distributivo, a associatividade também valerá no caso

$$A \wedge (B \wedge C).$$

$\square$

**Exemplo 2.1.10.** *Considere os elementos  $A$ ,  $B$ , e  $C$  do Exemplo 2.1.7, então*

$$A \cdot B = e_2 e_3 - e_1 - 2e_3,$$

$$A \wedge C = e_1 e_2 e_3,$$

$$B \wedge A = 2e_1 + 4e_1 e_2 + 2e_2 e_3.$$

## 2.2 Blades

As blades caracterizam um papel importante em Álgebra Geométrica, estas serão as entidades algébricas utilizadas futuramente na obtenção de elementos geométricos. Nesta seção, assim como na anterior, apresentaremos as definições, operações e propriedades, porém, desta vez, focaremos apenas nas blades.

**Definição 2.2.1. (Blade).** Seja  $\{a_i\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$  um conjunto de  $n \geq k$  1-vetores linearmente independentes de  $\mathbb{G}_{p,q}$ . Então o produto exterior destes vetores é chamado uma  $k$ -blade ou uma blade de grade  $k$ . Uma blade de grade  $k$  é denotada por  $A_{\langle k \rangle}$ . Por exemplo,

$$A_{\langle k \rangle} = \bigwedge_{i=1}^k a_i := a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k. \quad (2.10)$$

Note que, toda blade de grade  $k$  também é um  $k$ -vetor, porém nem todo  $k$ -vetor é uma  $k$ -blade.

**Exemplo 2.2.1.** *Sejam  $A, B \in \mathbb{G}_4^2$  definidos como  $A = e_1 e_2 - e_2 e_3$  e  $B = e_1 e_3 + e_2 e_4$ , claramente temos que  $A$  é uma 2-blade*

$$A = (e_1 + e_3) \wedge e_2.$$

*Contudo, apesar de ser um multivetor de grade 2,  $B$  não é uma 2-blade, já que não pode ser escrito como o produto exterior de 1-vetores linearmente independentes.*

### 2.2.1 Produto Geométrico

Antes dos produtos interno e exterior de blades serem discutidos, vamos fazer algumas considerações sobre o produto geométrico. Claramente, o produto geométrico de blades  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$  pode ser escrito como

$$A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} = \sum_{r=0}^n \langle A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} \rangle_r. \quad (2.11)$$

**Exemplo 2.2.2.** *Se tomarmos as seguintes blades em  $\mathbb{G}_3$*

$$A_{\langle 2 \rangle} = e_1 e_2 + e_1 e_3,$$

$$B_{\langle 3 \rangle} = e_1 e_2 e_3,$$

$$C_{\langle 2 \rangle} = e_1 e_3 - e_2 e_3,$$

então,

$$A_{\langle 2 \rangle} B_{\langle 3 \rangle} = (e_1 e_2 + e_1 e_3)(e_1 e_2 e_3) = e_2 - e_3,$$

$$C_{\langle 2 \rangle} B_{\langle 3 \rangle} = (e_1 e_3 - e_2 e_3)(e_1 e_2 e_3) = e_1 + e_2,$$

$$A_{\langle 2 \rangle} C_{\langle 2 \rangle} = (e_1 e_2 + e_1 e_3)(e_1 e_3 - e_2 e_3) = -1 + e_1 e_2 - e_1 e_3 - e_2 e_3.$$

Se duas blades básicas  $E_{\langle k \rangle}, E_{\langle l \rangle} \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$  têm  $m$  vetores básicos em comum então

$$E_{\langle k \rangle} E_{\langle l \rangle} = \langle E_{\langle k \rangle} E_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l-2m}. \quad (2.12)$$

Segue que a soma acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} &= \langle A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|} + \langle A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|+2} + \dots \\ &\quad + \langle A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l-2} + \langle A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l}. \end{aligned}$$

O elemento de menor grade ( $|k-l|$ ) é o produto interno, e o elemento de maior grade ( $k+l$ ) é o produto exterior. Dados  $a, b \in \mathbb{G}_{p,q}^1$ , segue da equação acima que

$$\begin{aligned} ab &= \langle ab \rangle_{|1-1|} + \langle ab \rangle_{1+1} \\ &= a \cdot b + a \wedge b. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Isto é, o produto geométrico entre dois elementos de  $\mathbb{G}_{p,q}$  de grade 1 será a soma dos produtos interno e exterior entre os mesmos.

## 2.2.2 Produto Exterior

Através da distributividade do produto exterior, segue que, para  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$ ,

$$A_{\langle k \rangle} \wedge B_{\langle l \rangle} = \langle A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l}. \quad (2.14)$$

Conseqüentemente, o produto exterior destas blades é zero ou resulta em uma blade de grade  $k+l$ . Assim, se  $k+l > p+q$ , então  $A_{\langle k \rangle} \wedge B_{\langle l \rangle} = 0$ .

**Exemplo 2.2.3.** Agora, se  $A_{\langle 2 \rangle} = e_1e_2 + e_1e_3$ ,  $B_{\langle 1 \rangle} = e_1 + e_2$  e  $C_{\langle 3 \rangle} = e_1e_2e_3$ , então

$$C_{\langle 3 \rangle} \wedge B_{\langle 1 \rangle} = (e_1e_2e_3) \wedge (e_1 + e_2) = 0,$$

$$A_{\langle 2 \rangle} \wedge B_{\langle 1 \rangle} = (e_1e_2 + e_1e_3) \wedge (e_1 + e_2) = -e_1e_2e_3,$$

$$A_{\langle 2 \rangle} \wedge C_{\langle 3 \rangle} = (e_1e_2 + e_1e_3) \wedge (e_1e_2e_3) = 0.$$

**Lema 2.2.1.** Seja  $a \in \mathbb{G}_{p,q}^1$  e  $B_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ , então

$$a \wedge B_{\langle k \rangle} = \frac{1}{2}(aB_{\langle k \rangle} + (-1)^k B_{\langle k \rangle}a).$$

**Demonstração:** Se  $a = \alpha^i e_i$  e  $B_{\langle k \rangle} = b^j E_j$ , onde  $\{\alpha^i\}, \{b^j\} \subset \mathbb{R}$ , então

$$a \wedge B_{\langle k \rangle} = \alpha^i b^j (e_i \wedge E_j).$$

Segue do Lema 2.1.3  $e_i \wedge E_j = \frac{1}{2}(e_i E_j + (-1)^k E_j e_i)$ , pela distributividade o resultado segue diretamente.  $\square$

**Lema 2.2.2.** Seja  $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{G}_{p,q}^1$  uma base para um espaço  $k$ -dimensional ( $1 \leq k \leq p+q$ ) e  $x = \alpha^i a_i$  um vetor neste espaço vetorial com  $\{\alpha^i\} \in \mathbb{R}$ . Então, a blade  $A_{\langle k \rangle} = a_1 \wedge \dots \wedge a_k$  satisfaz a equação  $A_{\langle k \rangle} \wedge x = 0$ .

**Demonstração:** Como o produto exterior é associativo e  $a_i \wedge a_j = -a_j \wedge a_i$ , temos que

$$\begin{aligned} A_{\langle k \rangle} \wedge x &= \sum_i \alpha^i (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k) \wedge a_i \\ &= \sum_i (-1)^{k-i} \alpha^i \left( \bigwedge_{j=1}^{i-1} a_j \right) \wedge \left( \bigwedge_{j=i+1}^k a_j \right) \wedge a_i \wedge a_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $a_i \wedge a_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$ .  $\square$

Isto é, o produto exterior de uma  $k$ -blade com um vetor linearmente dependente aos vetores que constituem a  $k$ -blade é zero. Pode-se dizer que a  $k$ -blade  $A_{\langle k \rangle}$  representa o espaço  $k$ -dimensional gerado por  $\{a_i\}$ .

Os espaços nulos têm grande importância em Álgebra Geométrica e neste trabalho, já que são estes que fazem a ligação entre álgebra e geometria, isto é, a partir

dos espaços nulos, uma entidade geométrica poderá ser representada por uma entidade algébrica. No próximo capítulo isso será trabalhado de forma detalhada, por enquanto focaremos na interpretação algébrica destes espaços.

**Definição 2.2.2. (Espaço Nulo do Produto Exterior).** O *espaço nulo do produto exterior* (OPNS) de uma blade  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ , denotado por  $\text{NO}(A_{\langle k \rangle})$ , é definido como

$$\text{NO}(A_{\langle k \rangle}) := \{x \in \mathbb{G}_{p,q}^1 : x \wedge A_{\langle k \rangle} = 0\}.$$

Usando esta notação segue que  $\text{NO}(A_{\langle k \rangle}) = \text{span}\{a_i\}$ . Segue ainda que o produto exterior de duas blades  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$  é diferente de zero apenas se os respectivos espaços gerados por  $A_{\langle k \rangle}$  e  $B_{\langle l \rangle}$  forem disjuntos. Isto é,

$$A_{\langle k \rangle} \wedge B_{\langle l \rangle} = 0 \iff \text{NO}(A_{\langle k \rangle}) \cap \text{NO}(B_{\langle l \rangle}) \neq \emptyset.$$

Se  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$  com  $A_{\langle k \rangle} \wedge B_{\langle l \rangle} \neq 0$ , então

$$\text{NO}(A_{\langle k \rangle} \wedge B_{\langle l \rangle}) = \text{NO}(A_{\langle k \rangle}) \oplus \text{NO}(B_{\langle l \rangle}). \quad (2.15)$$

onde a soma direta é definida da seguinte forma:

**Definição 2.2.3. (Soma Direta).** Sejam  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^{p,q}$ , então a soma direta desses conjuntos é definida por

$$\mathbb{A} \oplus \mathbb{B} = \{a + b : a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}\}.$$

**Lema 2.2.3.** Se  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  então existe um conjunto de  $k$  vetores ortogonais  $\{a_i\} \in \mathbb{G}_{p,q}^1$ , isto é,  $a_i \wedge a_j \neq 0$  e  $a_i \cdot a_j = 0$  para  $i \neq j$ , tal que  $A_{\langle k \rangle} = \bigwedge_{i=1}^k a_i$ .

**Demonstração:** Da definição de OPNS de uma blade, segue que todas as blades com o mesmo OPNS diferem apenas por um escalar. Além disso, como  $\text{NO}(A_{\langle k \rangle})$  é um espaço vetorial de dimensão  $k$ , existe uma base ortonormal  $\{n_i\} \subset \mathbb{G}_{p,q}^1$  para  $\text{NO}(A_{\langle k \rangle})$ . Se definirmos  $N_{\langle k \rangle} := \bigwedge_{i=1}^k n_i$ , então existirá um escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $A_{\langle k \rangle} = \alpha N_{\langle k \rangle}$ .  $\square$

Note que, se  $\{a_i\} \in \mathbb{G}_{p,q}^1$  é um conjunto de vetores ortogonais, então  $a_i a_j = a_i \wedge a_j$ , para  $i \neq j$ . Consequentemente, a blade  $A_{\langle k \rangle}$  pode ser construída através do produto geométrico de  $\{a_i\}$ , isto é,

$$A_{\langle k \rangle} = \bigwedge_{i=1}^k a_i = \prod_{i=1}^k a_i. \quad (2.16)$$

O Lema 2.2.1 implica também que, para  $a \in \mathbb{G}_{p,q}^1$  e  $B_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$

$$a \wedge B_{\langle k \rangle} = (-1)^k B_{\langle k \rangle} \wedge a. \quad (2.17)$$

Disso segue que, para  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$ ,

$$A_{\langle k \rangle} \wedge B_{\langle l \rangle} = (-1)^{kl} B_{\langle l \rangle} \wedge A_{\langle k \rangle}. \quad (2.18)$$

### 2.2.3 Produto Escalar

Até agora, o produto escalar foi definido apenas para vetores. Esta definição pode ser estendida para blades da seguinte forma. Seja  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$ , então

$$A_{\langle k \rangle} * B_{\langle l \rangle} := \langle A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} \rangle_0. \quad (2.19)$$

Se  $k = l \neq 0$ , o produto escalar será igual ao produto interno, e se  $k \neq l$ , então  $A_{\langle k \rangle} * B_{\langle l \rangle} = 0$ . Veremos posteriormente que para  $k = l$

$$A_{\langle k \rangle} * B_{\langle k \rangle} = (-1)^{k(k+1)} B_{\langle k \rangle} * A_{\langle k \rangle} = B_{\langle k \rangle} * A_{\langle k \rangle}. \quad (2.20)$$

**Lema 2.2.4.** *Se  $A_{\langle r \rangle}, B_{\langle s \rangle}, C_{\langle t \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$  então  $\langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} C_{\langle t \rangle} \rangle_0 = \langle C_{\langle t \rangle} A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_0$ .*

**Demonstração:** Como apenas o componente escalar do produto geométrico das três blades nos interessa,

$$\langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} C_{\langle t \rangle} \rangle_0 = \langle \langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_t C_{\langle t \rangle} \rangle_0 = \langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_t * C_{\langle t \rangle},$$

Segue da afirmação anterior que

$$\langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_t * C_{\langle t \rangle} = C_{\langle t \rangle} * \langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_t = \langle C_{\langle t \rangle} A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_0.$$

□

**Exemplo 2.2.4.** *Tomando as blades  $A_{\langle 2 \rangle} = e_1 e_2 - e_1 e_3$ ,  $B_{\langle 2 \rangle} = e_1 e_3 - e_2 e_3$  e  $C_{\langle 2 \rangle} = 2e_1 e_3$ , então*

$$A_{\langle 2 \rangle} * B_{\langle 2 \rangle} = (e_1 e_2 - e_1 e_3) * (e_1 e_3 - e_2 e_3) = 1,$$

$$A_{\langle 2 \rangle} * C_{\langle 2 \rangle} = (e_1 e_2 - e_1 e_3) * 2e_1 e_3 = 2,$$

$$B_{\langle 2 \rangle} * C_{\langle 2 \rangle} = (e_1 e_3 - e_2 e_3) * 2e_1 e_3 = -2.$$

## 2.2.4 Reversão

Foi introduzido anteriormente o conceito de reversão para blades básicas, as propriedades que valiam para as blades básicas seguem do mesmo modo para as blades. No caso geral, o reverso de uma blade  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  é dado por

$$\tilde{A}_{\langle k \rangle} = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k)^\sim = a_k \wedge a_{k-1} \wedge \dots \wedge a_1 = \bigwedge_{i=k}^1 a_i. \quad (2.21)$$

Como a reversão muda apenas a ordem dos vetores constituintes, uma blade difere de seu reverso apenas por um sinal, isto é,

$$\tilde{\tilde{A}_{\langle k \rangle}} = (-1)^{k(k-1)/2} A_{\langle k \rangle}. \quad (2.22)$$

E ainda, para duas blades  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ ,

$$(A_{\langle k \rangle} \wedge B_{\langle l \rangle})^\sim = \tilde{B}_{\langle l \rangle} \tilde{A}_{\langle k \rangle} \quad \text{e} \quad (A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle})^\sim = \tilde{B}_{\langle l \rangle} \tilde{A}_{\langle k \rangle}. \quad (2.23)$$

**Exemplo 2.2.5.** Se  $A_{\langle 2 \rangle} \in \mathbb{G}_{2,1}^2$ , for definida da seguinte forma  $A_{\langle 2 \rangle} = e_1 e_2 + e_2 e_3$ , então temos que

$$A_{\langle 2 \rangle} = (e_1 - e_3) \wedge e_2.$$

Logo,

$$\tilde{A}_{\langle 2 \rangle} = e_2 \wedge (e_1 - e_3) = -e_1 e_2 - e_2 e_3 = -A_{\langle 2 \rangle}.$$

**Lema 2.2.5.** Se  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ , então  $A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle} = A_{\langle k \rangle} * A_{\langle k \rangle}$ .

**Demonstração:** Segue do Lema 2.2.3 que existe um conjunto  $\{n_i\} \subset \mathbb{G}_{p,q}^1$  de vetores ortogonais tal que  $A_{\langle k \rangle} = \prod_{i=1}^k n_i$ . Assim,

$$\begin{aligned} A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle} &= (-1)^{k(k-1)/2} A_{\langle k \rangle} \tilde{A}_{\langle k \rangle} \\ &= (-1)^{k(k-1)/2} (n_1 \dots n_{k-1} (n_k n_k) n_{k-1} \dots n_1). \end{aligned}$$

Como  $(n_i)^2 \in \mathbb{R}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{R}$ , temos

$$A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle} = \langle A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle} \rangle_0 = A_{\langle k \rangle} * A_{\langle k \rangle}.$$

□

## 2.2.5 Conjugação

O mesmo vale para a conjugação, que também pode ser estendida para blades. Isto é, o conjugado de uma blade  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  é dado por

$$A_{\langle k \rangle}^\dagger = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k)^\dagger = a_k^\dagger \wedge a_{k-1}^\dagger \wedge \dots \wedge a_1^\dagger = \bigwedge_{i=k}^1 a_i^\dagger. \quad (2.24)$$

**Exemplo 2.2.6.** Tomando a mesma blade,  $A_{\langle 2 \rangle} \in \mathbb{G}_{2,1}^2$ , do Exemplo 2.2.5, temos que

$$A_{\langle 2 \rangle}^\dagger = e_2^\dagger \wedge (e_1 - e_3)^\dagger = e_2 \wedge (e_1 + e_3) = -e_1 e_2 + e_2 e_3$$

Note que enquanto  $\tilde{a}_i = a_i$ , o mesmo não é válido para  $a_i^\dagger$ , já que para  $e_i \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}^1$ ,  $e_i^\dagger = -e_i$  se  $p < i \leq p + q$ . Portanto, não é possível estabelecer uma relação entre  $A_{\langle k \rangle}$  e  $A_{\langle k \rangle}^\dagger$  como no caso da reversão. No entanto, para duas blades  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ , também segue que

$$(A_{\langle k \rangle} \wedge B_{\langle l \rangle})^\dagger = B_{\langle l \rangle}^\dagger \wedge A_{\langle k \rangle}^\dagger \quad \text{e} \quad (A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle})^\dagger = B_{\langle l \rangle}^\dagger A_{\langle k \rangle}^\dagger. \quad (2.25)$$

## 2.2.6 Norma

**Definição 2.2.4. (Produto Escalar Euclidiano).** Seja  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ , definiremos o *produto escalar euclidiano* como

$$A_{\langle k \rangle} \star B_{\langle l \rangle} := A_{\langle k \rangle} * B_{\langle l \rangle}^\dagger = \langle A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle}^\dagger \rangle_0.$$

Seja  $A_{\langle k \rangle} = a^i E_i$  e  $B_{\langle l \rangle} = b^j E_j$  com  $\{a^i\}, \{b^j\} \subset \mathbb{R}$ . Se  $k \neq l$ , então  $A_{\langle k \rangle} \star B_{\langle l \rangle} = 0$ , mas se  $k = l$ , então

$$A_{\langle k \rangle} \star B_{\langle l \rangle} = a^i b^j \langle E_i E_j^\dagger \rangle_0 = a^i b^j \delta_{ij} = \sum_i (a^i b^i), \quad (2.26)$$

onde  $\langle E_i E_j^\dagger \rangle_0 = \delta_{ij}$ , com  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e zero se  $i \neq j$ . Consequentemente, se  $A_{\langle k \rangle} \neq 0$ , então

$$A_{\langle k \rangle} \star A_{\langle k \rangle} = \sum_i (a^i)^2 > 0. \quad (2.27)$$

Além disso, para quaisquer multivetores  $A, B \in \mathbb{G}_{p,q}$  com  $A = a^i E_i$  e  $B = b^j E_j$

$$A \star B = a^i b^j \langle E_i E_j^\dagger \rangle_0 = a^i b^j \delta_{ij} = \sum_i (a^i b^i), \quad (2.28)$$

tal como para blades. Consequentemente, se  $A \neq 0$ , então

$$A \star A = \sum_i (a^i)^2 > 0. \quad (2.29)$$

**Definição 2.2.5.** A magnitude de um multivetor  $A \in \mathbb{G}_{p,q}$  é denotada por  $\|A\|$  e definida como

$$\|A\| := \sqrt{A \star A}.$$

**Exemplo 2.2.7.** Se  $A \in \mathbb{G}_3$  for definido como da seguinte forma

$$A = 2e_1 + e_1e_2 - 2e_1e_2e_3,$$

então

$$\|A\| = \sqrt{A \star A} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

## 2.2.7 Produto Interno

Assim como para o produto exterior, segue da distributividade do produto interno que para  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$ ,

$$A_{\langle k \rangle} \cdot B_{\langle l \rangle} = \langle A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|}. \quad (2.30)$$

Uma diferença notável entre as propriedades do produto interno e o exterior é que, no caso do produto interno, não vale a associatividade.

**Exemplo 2.2.8.** Sejam  $A, B, C \in \mathbb{G}_4$  definidos como  $A = e_1e_2e_3$ ,  $B = e_2 + e_1e_2$  e  $C = e_3$ , então

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= (e_1e_2e_3 \cdot (e_2 + e_1e_2)) \cdot e_3 \\ &= -(e_1e_3 + e_3) \cdot e_3 \\ &= -(e_1 + 1), \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= e_1e_2e_3 \cdot ((e_2 + e_1e_2) \cdot e_3) \\ &= e_1e_2e_3 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Lema 2.2.6.** Seja  $a \in \mathbb{G}_{p,q}^1$  e  $B_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ , então

$$a \cdot B_{\langle k \rangle} = \frac{1}{2}(aB_{\langle k \rangle} - (-1)^k B_{\langle k \rangle}a).$$

**Demonstração:** Análogo ao Lema 2.2.1, tome  $e_i = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}^1[i]$  e  $E_i = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}^k[i]$ , com  $a = a^i e_i, B_{\langle k \rangle}$ , onde  $\{a^i\}, \{b^i\} \subset \mathbb{R}$ . Então

$$a \cdot B_{\langle k \rangle} = a^i b^j (e_i \cdot E_j).$$

Segue do Lema 2.1.4 que  $e_i \cdot E_j = \frac{1}{2}(e_i E_j - (-1)^k E_j e_i)$  e, portanto,  $a \cdot B_{\langle k \rangle} = \frac{1}{2}(a B_{\langle k \rangle} - (-1)^k B_{\langle k \rangle} a)$ .  $\square$

Segue que

$$a \cdot B_{\langle k \rangle} = (-1)^k B_{\langle k \rangle} \cdot a.$$

Em particular, para dois vetores  $a, b \in \mathbb{G}_{p,q}^1$ , temos que  $a \cdot b = b \cdot a$ , e ainda, se tivermos  $a = a^i e_i$  e  $b = b^i e_i$ , então

$$a \cdot b = a^i b^i \langle e_i e_i \rangle_0 = a^i b^i e_i^2,$$

onde  $e_i^2$  pode ser  $+1$  ou  $-1$ . Isto é,  $a \cdot b = \sum_i a^i b^i e_i^2 = a * b$ .

Em espaços  $\mathbb{G}_{p,q}$  onde  $p \neq 0$  e  $q \neq 0$  existem “vetores-nulos”  $a \in \mathbb{G}_{p,q}^1$  com  $a \neq 0$  e  $a * a = 0$ . Existem também as “blades nulas” que são definidas a seguir.

**Definição 2.2.6. (Blades Nulas).** Uma blade  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  é dita ser uma blade nula se  $A_{\langle k \rangle} \cdot A_{\langle k \rangle} = 0$ . O subconjunto das blades nulas em  $\mathbb{G}_{p,q}^k$  é denotado por  $\mathbb{G}_{p,q}^{\circ k} \subset \mathbb{G}_{p,q}^k$  e o subconjunto das blades não nulas é denotado por  $\mathbb{G}_{p,q}^{\emptyset k} \subset \mathbb{G}_{p,q}^k$ . Isto é

$$\mathbb{G}_{p,q}^{\emptyset k} := \{A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k : A_{\langle k \rangle} \cdot A_{\langle k \rangle} \neq 0\},$$

$$\mathbb{G}_{p,q}^{\circ k} := \{A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k : A_{\langle k \rangle} \cdot A_{\langle k \rangle} = 0\}.$$

Blades nulas existem apenas em espaços onde  $p$  e  $q$  são ambos diferentes de zero, ou seja, nas álgebras geométricas euclidianas ( $\mathbb{G}_p$ ) e anti-euclidianas ( $\mathbb{G}_{0,q}$ ), não existem blades nulas.

Análogo ao caso do produto exterior, podemos definir também o *espaço nulo do produto interno* de blades.

**Definição 2.2.7. (Espaço Nulo do Produto Interno).** O *espaço nulo do produto interno* (IPNS) de uma blade  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  denotado por  $\mathbb{NI}(A_{\langle k \rangle})$ , é definido como

$$\mathbb{NI}(A_{\langle k \rangle}) := \{x \in \mathbb{G}_{p,q}^1 : x \cdot A_{\langle k \rangle} = 0\}.$$

## Propriedades

Usando os Lemas 2.2.1 e 2.2.6, e algumas identidades mencionadas em [23], podemos chegar à seguinte proposição:

**Proposição 2.2.1.** *Seja  $a, b \in \mathbb{G}_{p,q}^1$  e  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ , então*

$$(A_{\langle k \rangle} \wedge a) \cdot b = A_{\langle k \rangle}(a \cdot b) - (A_{\langle k \rangle} \cdot) \wedge a.$$

Usando este resultado repetidamente chegamos na expressão a seguir. Seja  $\{b_i\} \subset \mathbb{G}_{p,q}^1$  um subconjunto com  $l$  vetores linearmente independentes e  $B_{\langle l \rangle} = \bigwedge_{i=1}^l b_i$ , então

$$a \cdot B_{\langle l \rangle} = \sum_{i=1}^l (-1)^{i+1} (a \cdot b_i) [B_{\langle l \rangle} \setminus b_i],$$

onde

$$[B_{\langle l \rangle} \setminus b_i] := \left( \bigwedge_{r=1}^{i-1} b_r \right) \wedge \left( \bigwedge_{r=i+1}^l b_r \right).$$

Um exemplo do uso dessa equação que será utilizado futuramente é o seguinte:

Seja  $a, b_1, b_2 \in \mathbb{G}_{p,q}^1$ , então

$$a \cdot (b_1 \wedge b_2) = (a \cdot b_1)b_2 - (a \cdot b_2)b_1. \quad (2.31)$$

Como o produto interno de dois vetores é um escalar e escalares comutam com todos os elementos de  $\mathbb{G}_{p,q}$  então  $(a \cdot b_1)b_2 = b_2(a \cdot b_1)$ . Outro exemplo do uso da equação segue se tomarmos  $a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{G}_{p,q}^1$ , assim

$$a \cdot (b_1 \wedge b_2 \wedge b_3) = (a \cdot b_1)(b_2 \wedge b_3) - (a \cdot b_2)(b_1 \wedge b_3) + (a \cdot b_3)(b_1 \wedge b_2). \quad (2.32)$$

Da Proposição 2.2.1 podemos obter os dois resultados seguintes.

**Lema 2.2.7.** *Sejam  $A_{\langle r \rangle}, B_{\langle s \rangle}, C_{\langle t \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$  com  $1 \leq r, s, t \leq n$  e  $t \geq r + s$ , então*

$$(A_{\langle r \rangle} \wedge B_{\langle s \rangle}) \cdot C_{\langle t \rangle} = A_{\langle r \rangle} \cdot (B_{\langle s \rangle} \cdot C_{\langle t \rangle}).$$

**Lema 2.2.8.** *Sejam  $A_{\langle r \rangle}, B_{\langle s \rangle}, C_{\langle t \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$  com  $1 \leq r, s, t \leq n$  e  $s \geq r + t$ , então*

$$(A_{\langle r \rangle} \cdot B_{\langle s \rangle}) \cdot C_{\langle t \rangle} = A_{\langle r \rangle} \cdot (B_{\langle s \rangle} \cdot C_{\langle t \rangle}).$$

**Lema 2.2.9.** *Sejam  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$  e  $I = \overline{\mathbb{G}_{p,q}}[2^{p+q}]$  o pseudoescalar de  $\mathbb{G}_{p,q}$ . Então  $A_{\langle k \rangle}I = A_{\langle k \rangle} \cdot I$ .*

**Demonstração:** Tomemos  $A_{\langle k \rangle} = a^i E_i$  com  $E_i = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}^k[i]$  e  $\{a^i\} \subset \mathbb{R}$ . Então  $A_{\langle k \rangle} I = a^i E_i I$ . Como  $I$  é o produto geométrico de todos os vetores básicos de  $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}^1$ , então  $E_i$  e  $I$  têm  $k$  vetores básicos em comum, conseqüentemente,  $E_i I = \langle E_i I \rangle_{|k-p+q|} = E_i \cdot I$  para todo  $i$ . Segue que  $A_{\langle k \rangle} I = A_{\langle k \rangle} \cdot I$ .  $\square$

Foi mostrado anteriormente que o produto exterior de duas blades, quando diferente de zero, representa a soma direta dos OPNSs das blades. De modo análogo, será mostrado que o produto interno representa a diferença direta entre estes espaços.

**Definição 2.2.8. (Diferença Direta).** Sejam  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{p,q}$ , então a *diferença direta* entre  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  é definida como

$$\mathbb{A} \ominus \mathbb{B} := \{a \in \mathbb{A} : a * b^\dagger = 0 \forall b \in \mathbb{B}\}.$$

Primeiramente consideremos o produto interno de um vetor  $a \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$  e uma blade  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes k}$ ,  $k \geq 2$ , tal que  $B_{\langle l \rangle} = a \cdot A_{\langle k \rangle}$ , onde  $l = k - 1$ . Segue do Lema 2.2.7 que  $a \cdot B_{\langle l \rangle} = a \cdot (a \cdot A_{\langle k \rangle}) = (a \wedge a) \cdot A_{\langle k \rangle} = 0$ , o que implica que  $a$  é perpendicular ao OPNS de  $B_{\langle l \rangle}$ . Além disso, se  $k = 1$ , então  $a \cdot A_{\langle 1 \rangle} \in \mathbb{R}$  e conseqüentemente  $a \cdot (a \cdot A_{\langle 1 \rangle}) = 0$ . Portanto, se  $k \geq 1$  e  $a \cdot A_{\langle k \rangle} \neq 0$ ,

$$\text{NO}(a \cdot A_{\langle k \rangle}) = \text{NO}(A_{\langle k \rangle}) \ominus \text{NO}(a). \quad (2.33)$$

Agora considere duas blades  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes}$  com  $k \leq l$  e  $A_{\langle k \rangle} = \bigwedge_{i=1}^k a_i$  onde  $\{a_i\} \subset \mathbb{G}_{p,q}^1$ . Segue, usando o Lema 2.2.7 repetidamente, que se  $A_{\langle k \rangle} \cdot B_{\langle l \rangle} \neq 0$ ,

$$\text{NO}(A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle}) = \left( ((\text{NO}(B_{\langle l \rangle}) \ominus \text{NO}(a_k)) \ominus \text{NO}(a_{k-1})) \ominus \dots \right) \ominus \text{NO}(a_1), \quad (2.34)$$

que é equivalente a

$$\text{NO}(A_{\langle k \rangle} B_{\langle l \rangle}) = \text{NO}(B_{\langle l \rangle}) \ominus \text{NO}(A_{\langle k \rangle}). \quad (2.35)$$

O que mostra que os produtos interno e exterior podem ser usados para somar e subtrair subespaços.

A existência de blades nulas em álgebras geométricas  $\mathbb{G}_{p,q}$ , com  $p$  e  $q$  diferentes de zero, complica diversas propriedades de blades relacionadas ao produto interno.

**Lema 2.2.10.** *Seja  $a \in \mathbb{G}_{p,q}^1$  e  $U_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ , onde  $a$  e  $U_{\langle k \rangle}$  podem ser blades nulas, então*

$$\text{NO}(a^\dagger \cdot U_{\langle k \rangle}) = \text{NO}(U_{\langle k \rangle}) \ominus \text{NO}(a).$$

Como anteriormente, segue que para  $A_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ ,

$$\text{NO}(A_{\langle l \rangle} \cdot U_{\langle k \rangle}) = \text{NO}(U_{\langle k \rangle}) \ominus \text{NO}(A_{\langle l \rangle}). \quad (2.36)$$

Também segue da definição de soma direta que

$$\text{NO}(U_{\langle k \rangle}) = \text{NO}(A_{\langle k \rangle} \wedge (A_{\langle l \rangle}^\dagger \cdot U_{\langle k \rangle})). \quad (2.37)$$

## 2.2.8 Dualidade

O efeito da operação dual em blades pode ser visto de maneira mais simples se relacionarmos aos OPNS e IPNS das blades. Sejam  $x \in \mathbb{G}_{p,q}^{\emptyset,1}$ ,  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\emptyset,k}$ , com  $k \geq 1$ , e  $I$  o pseudoescalar de  $\mathbb{G}_{p,q}$ . Então,

$$(x \wedge A_{\langle k \rangle})^* = (x \wedge A_{\langle k \rangle}) \cdot I^{-1} = x \cdot A_{\langle k \rangle}^*,$$

consequentemente,

$$x \wedge A_{\langle k \rangle} = 0 \iff x \cdot A_{\langle k \rangle}^* = 0,$$

e portanto

$$\text{NO}(A_{\langle k \rangle}) = \text{NI}(A_{\langle k \rangle}^*). \quad (2.38)$$

Assim temos que o OPNS e o IPNS de blades são diretamente relacionados pela operação dual. Além disso,

$$A_{\langle k \rangle} \wedge A_{\langle k \rangle}^* = \langle A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle} I^{-1} \rangle_{k+|p+q-k|} = \langle A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle} I^{-1} \rangle_{p+q} = (A_{\langle k \rangle} \cdot A_{\langle k \rangle}) I^{-1}. \quad (2.39)$$

Consequentemente, o produto exterior de uma blade com seu dual resulta num múltiplo por uma escalar do pseudoescalar. Em termos de OPNS de blades

$$\text{NO}(A_{\langle k \rangle} \wedge A_{\langle k \rangle}^*) = \text{NO}(A_{\langle k \rangle}) \oplus \text{NO}(A_{\langle k \rangle}^*) = \text{NO}(I^{-1}). \quad (2.40)$$

Como  $I^{-1}$  é um elemento básico de maior grade,  $\text{NO}(I^{-1}) = \mathbb{G}_{p,q}^1$ . Portanto,

$$\text{NO}(A_{\langle k \rangle}^*) = \mathbb{G}_{p,q}^1 \ominus \text{NO}(A_{\langle k \rangle}), \quad (2.41)$$

isto é, os OPNS de uma blade e de seu dual são complementares.

No caso de  $A_{\langle k \rangle}$  ser uma blade nula, o complementar de  $A_{\langle k \rangle}$  será seu conjugado.

Isto é,

$$A_{\langle k \rangle}^\dagger \wedge A_{\langle k \rangle}^* = \langle A_{\langle k \rangle}^\dagger A_{\langle k \rangle} I^{-1} \rangle_{k-|p+q-k|} = (A_{\langle k \rangle}^\dagger A_{\langle k \rangle}) I^{-1} = I^{-1}. \quad (2.42)$$

## 2.2.9 Inverso

Diferente de multivetores genéricos de  $\mathbb{G}_{p,q}$ , blades não nulas de  $\mathbb{G}_{p,q}$  sempre possuem um inverso.

**Lema 2.2.11.** *Seja  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\circ k}$ , então o inverso de  $A_{\langle k \rangle}$  é dado por*

$$A_{\langle k \rangle}^{-1} = \frac{\tilde{A}_{\langle k \rangle}}{A_{\langle k \rangle} \tilde{A}_{\langle k \rangle}}.$$

**Demonstração:** Segue diretamente do Lema 2.2.5 que  $A_{\langle k \rangle} \tilde{A}_{\langle k \rangle} = A_{\langle k \rangle} \cdot \tilde{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{R}$ . Além disso, como  $A_{\langle k \rangle} \cdot \tilde{A}_{\langle k \rangle} = (-1)^{k(k+1)} \tilde{A}_{\langle k \rangle} \cdot A_{\langle k \rangle}$  e  $(-1)^{k(k+1)} = 1$ , para todo  $k \geq 0$ ,

$$A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle}^{-1} = A_{\langle k \rangle}^{-1} A_{\langle k \rangle} = 1.$$

□

**Exemplo 2.2.9.** *Se  $A_{\langle 2 \rangle} = e_1 e_2 - e_2 e_3$ , então o inverso de  $A_{\langle 2 \rangle}$  da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} A_{\langle 2 \rangle}^{-1} &= \frac{\tilde{A}_{\langle 2 \rangle}}{A_{\langle 2 \rangle} \tilde{A}_{\langle 2 \rangle}} = \frac{e_1 e_2 - e_2 e_3}{(e_1 e_2 - e_2 e_3)(e_2 e_3 - e_1 e_2)} \\ &= \frac{e_1 e_2 - e_2 e_3}{2} = \frac{1}{2} e_1 e_2 - \frac{1}{2} e_2 e_3 \\ &= -\frac{1}{2} A_{\langle 2 \rangle}. \end{aligned}$$

Podemos verificar isso facilmente,

$$A_{\langle 2 \rangle} \left(-\frac{1}{2} A_{\langle 2 \rangle}\right) = -\frac{1}{2} (e_1 e_2 - e_2 e_3)(e_1 e_2 - e_2 e_3) = -\frac{1}{2} (-2) = 1$$

É fácil ver que blades nulas não possuem inverso.

**Lema 2.2.12.** *Seja  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\circ k}$  uma blade nula, então não existe uma blade  $B_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  tal que  $A_{\langle k \rangle} B_{\langle k \rangle} = 1$ .*

**Demonstração:** Se  $A_{\langle k \rangle}$  é uma blade nula, então  $A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle} = 0$ . Suponha que  $B_{\langle k \rangle}$  seja o inverso de  $A_{\langle k \rangle}$ , ou seja,  $A_{\langle k \rangle} B_{\langle k \rangle} = 1$ . Neste caso  $A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle} B_{\langle k \rangle} = 0$  e portanto  $A_{\langle k \rangle} = 0$ , o que contradiz a hipótese de que  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\circ k}$ . □

Mesmo que uma blade nula não tenha inverso em relação ao produto geométrico, é possível definir um inverso em relação ao produto interno.

**Definição 2.2.9. (Pseudoinverso de uma Blade).** O pseudoinverso de uma blade  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  com  $1 \leq k \leq p+q$ , denotado por  $A_{\langle k \rangle}^+$ , é definido como

$$A_{\langle k \rangle}^+ := \frac{A_{\langle k \rangle}^\dagger}{A_{\langle k \rangle} \cdot A_{\langle k \rangle}^\dagger} = \frac{A_{\langle k \rangle}^\dagger}{\|A_{\langle k \rangle}\|^2}.$$

O pseudoinverso de  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  satisfaz

$$A_{\langle k \rangle} \cdot A_{\langle k \rangle}^+ = A_{\langle k \rangle}^+ \cdot A_{\langle k \rangle} = +1.$$

No entanto, o produto geométrico  $A_{\langle k \rangle} A_{\langle k \rangle}^+$  resulta em  $+1$  apenas se  $A_{\langle k \rangle}$  não for uma blade nula.

## 2.2.10 Projeção

A projeção de um vetor  $a \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$  sobre um vetor  $n \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$  é a componente de  $a$  na direção de  $n$ . Esta projeção pode ser escrita como

$$(a \cdot n)n^{-1} = (a \cdot \hat{n})\hat{n} = (\|a\| \cos \theta)\hat{n},$$

onde  $\hat{n} = n/\|n\|$  e  $\hat{n}^{-1} = n/\|n\|^2$ . Isso será generalizado para blades, como segue.

**Definição 2.2.10.** Sejam  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  e  $N_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^l$  duas blades quaisquer, com  $1 \leq k \leq l \leq p+q$ , então a projeção de  $A_{\langle k \rangle}$  sobre  $N_{\langle l \rangle}$ , denotada por  $\mathcal{P}_{N_{\langle l \rangle}}(A_{\langle k \rangle})$ , é definida como

$$\mathcal{P}_{N_{\langle l \rangle}}(A_{\langle k \rangle}) := (A_{\langle k \rangle} \cdot N_{\langle l \rangle}^+)N_{\langle l \rangle}.$$

Para blades não nulas a definição pode ser reduzida para

$$\mathcal{P}_{N_{\langle l \rangle}}(A_{\langle k \rangle}) := (A_{\langle k \rangle} \cdot N_{\langle l \rangle}^{-1})N_{\langle l \rangle}.$$

**Exemplo 2.2.10.** Tomando as blades  $A_{\langle 2 \rangle} = e_1e_2 + e_2e_3$  e  $B_{\langle 2 \rangle} = e_1e_2$ , então

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{B_{\langle 2 \rangle}}(A_{\langle 2 \rangle}) &= ((e_1e_2 + e_2e_3) \cdot (-e_1e_2))e_1e_2 \\ &= -(e_1e_2 \cdot e_1e_2 + e_2e_3 \cdot e_1e_2)e_1e_2 \\ &= e_1e_2, \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{A_{\langle 2 \rangle}}(B_{\langle 2 \rangle}) &= (e_1 e_2 \cdot (-\frac{1}{2})(e_1 e_2 + e_2 e_3))(e_1 e_2 + e_2 e_3) \\
&= -\frac{1}{2}(e_1 e_2 \cdot e_1 e_2 + e_1 e_2 \cdot e_2 e_3)(e_1 e_2 + e_2 e_3) \\
&= \frac{1}{2}(e_1 e_2 + e_2 e_3).
\end{aligned}$$

### 2.2.11 Afastamento

O afastamento de um vetor  $a \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$  em relação a um vetor  $n \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$  é a componente de  $a$  que não possui componente paralela a  $n$ . Portanto, o afastamento pode ser definido usando a projeção da seguinte forma:

**Definição 2.2.11.** O afastamento de uma blade  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  a partir de uma blade  $N_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^l$ , com  $1 \leq k \leq l \leq p + q$ , é definido como

$$\mathcal{P}_{N_{\langle l \rangle}}^\perp(A_{\langle k \rangle}) := A_{\langle k \rangle} - \mathcal{P}_{N_{\langle l \rangle}}(A_{\langle k \rangle}).$$

**Exemplo 2.2.11.** Tomando as mesmas blades  $A_{\langle 2 \rangle}$  e  $B_{\langle 2 \rangle}$  do Exemplo 2.2.10, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{B_{\langle 2 \rangle}}^\perp(A_{\langle 2 \rangle}) &= e_1 e_2 + e_2 e_3 - e_1 e_2 \\
&= e_2 e_3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{A_{\langle 2 \rangle}}^\perp(B_{\langle 2 \rangle}) &= e_1 e_2 - \frac{1}{2}(e_1 e_2 + e_2 e_3) \\
&= \frac{1}{2}(e_1 e_2 - e_2 e_3).
\end{aligned}$$

Note que o afastamento de uma blade de grade  $k$  sempre resultara em uma blade de grade  $k$ .

### 2.2.12 Reunião e Junção

Foi visto que o produto exterior entre duas blades que representam parcialmente algum subespaço em comum resulta em zero, assim como o produto interno entre duas blades cujos OPNSs tem um interseção não vazia.

Para remover essas restrições, as operações *reunião* e *junção*, que têm um efeito similar com a interseção e união de conjuntos, são definidas na Álgebra Geométrica.

**Definição 2.2.12. (Junção).** Sejam  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$ , então sua *junção* é escrita como  $A_{\langle k \rangle} \hat{\wedge} B_{\langle l \rangle}$  e é definida como a blade  $J_{\langle m \rangle}$  tal que

$$\text{NO}(J_{\langle m \rangle}) = \text{NO}(A_{\langle k \rangle}) \oplus \text{NO}(B_{\langle l \rangle}), \quad \|J_{\langle m \rangle}\| = 1.$$

Consequentemente, se  $\text{NO}(A_{\langle k \rangle}) \cap \text{NO}(B_{\langle l \rangle}) \neq \emptyset$ , então  $A_{\langle k \rangle} \hat{\wedge} B_{\langle l \rangle} = A_{\langle k \rangle} \wedge B_{\langle l \rangle}$

**Definição 2.2.13. (Reunião).** A *reunião* de duas blades  $A_{\langle k \rangle}, B_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$  é denotada por  $A_{\langle k \rangle} \vee B_{\langle l \rangle}$  e definida como

$$\text{NO}(A_{\langle k \rangle} \vee B_{\langle l \rangle}) = \text{NO}(A_{\langle k \rangle}) \cap \text{NO}(B_{\langle l \rangle}).$$

Note que ambas as operações foram definidas apenas para blades.

# Capítulo 3

## Representações Geométricas

Neste capítulo será mostrado como a Álgebra Geométrica pode ser usada para representar entidades geométricas, começando com algumas definições básicas, em seguida como cada entidade é representada nos espaços Projetivo e Conforme e, por fim, uma breve análise das blades, que nos dará uma forma de identificar os parâmetros de um elemento geométrico a partir de seu representante algébrico.

### 3.1 Definições Básicas

As entidades algébricas, isoladamente, não possuem uma interpretação geométrica. Para que a álgebra possa ser associada com a geometria a seguinte representação deve ser definida.

**Definição 3.1.1.** Seja  $\mathbb{R}^{r,s}$  o espaço vetorial onde as entidades geométricas serão representadas e denote por  $\mathcal{X}$  uma função bijetora  $\mathbb{G}_{p,q}^1 \rightarrow \mathbb{X}$ , onde  $\mathbb{X} \subset \mathbb{G}_{p,q}^1$ , com  $r + s \leq p + q$ . Então os espaços nulos geométricos do produto exterior e interno, *geometric outer- and inner-product null spaces*, (GOPNS e GIPNS, respectivamente) de uma blade  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$  são definidos por

$$\text{NO}_G(A_{\langle k \rangle}) := \{x \in \mathbb{G}_{r,s}^1 : \mathcal{X}(x) \wedge A_{\langle k \rangle} = 0\},$$

$$\text{NI}_G(A_{\langle k \rangle}) := \{x \in \mathbb{G}_{r,s}^1 : \mathcal{X}(x) \cdot A_{\langle k \rangle} = 0\}.$$

Se denotarmos a inversa de  $\mathcal{X}$  por  $\mathcal{X}^{-1} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^{r,s}$ , então esses espaços nulos

podem ser escritos como

$$\text{NO}_G(A_{\langle k \rangle}) = \mathcal{X}^{-1}(\mathbb{X} \cap \text{NO}(A_{\langle k \rangle})) \quad \text{e} \quad \text{NI}_G(A_{\langle k \rangle}) = \mathcal{X}^{-1}(\mathbb{X} \cap \text{NI}(A_{\langle k \rangle})).$$

Esses espaços nulos geométricos são a base para a representação da geometria através da Álgebra Geométrica.

## 3.2 Espaço Euclidiano

Nesta seção será abordada, de forma resumida, a representação da geometria no espaço Euclidiano. Em termos da Definição 3.1.1, o espaço onde as entidades geométricas serão representadas é o  $\mathbb{R}^n$  e a transformação  $\mathcal{X}$  é a identidade.

Com o propósito de facilitar o entendimento, o espaço usado será o euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$  e sua Álgebra Geométrica correspondente  $\mathbb{G}_3$ . A base de  $\mathbb{G}_3$  é dada na Tabela 3.1.

Tipo	No.	Elementos Básicos
Escalar	1	1
1-Vetor	3	$e_1, e_2, e_3$
2-Vetor	3	$e_{12}, e_{13}, e_{23}$
3-Vetor	2	$e_{123}$

Tabela 3.1: Base algébrica de  $\mathbb{G}_3$ .

Primeiramente serão discutidas as entidades geométricas que podem ser representadas em  $\mathbb{G}_3$ , em seguida os efeitos das operações algébricas nos representantes geométricos e, por fim, as transformações que são possíveis em  $\mathbb{G}_3$ .

### 3.2.1 Representação do Produto Exterior

As entidades geométricas de  $\mathbb{R}^3$  que podem ser representadas em  $\mathbb{G}_3$  são apenas as retas e planos passando pela origem. Consideremos, primeiramente, os GOPNSs de blades. Se  $a \in \mathbb{G}_3^1$ , então

$$\text{NO}_G(a) = \{x \in \mathbb{G}_3^1 : x \wedge a = 0\} = \{\alpha a : \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad (3.1)$$

que é a reta que passa pela origem com direção dada por  $a$ . Analogamente, dado um segundo vetor  $b \in \mathbb{G}_3^1$  com  $a \wedge b \neq 0$ ,

$$\mathbb{NO}(a \wedge b) = \{x \in \mathbb{G}_3^1 : x \wedge a \wedge b = 0\} = \{\alpha a + \beta b : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}, \quad (3.2)$$

que é o plano gerado por  $a$  e  $b$ . Agora, o GOPNS do produto exterior de três vetores linearmente independentes  $a, b, c \in \mathbb{G}_3^1$  será o espaço todo:

$$\begin{aligned} \mathbb{NO}_G(a \wedge b \wedge c) &= \{x \in \mathbb{G}_3^1 : x \wedge a \wedge b \wedge c = 0\} \\ &= \{\alpha a + \beta b + \gamma c : (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Será dado um destaque maior aos espaços Projetivo e Conforme, devido a importância de ambos para o trabalho.

### 3.3 Espaço Projetivo

Como mencionado em [23], um espaço Projetivo, também chamado de espaço homogêneo, é gerado a partir de um espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  tomando seus elementos como representantes de uma classe de equivalência. Em particular, um vetor  $a \in \mathbb{R}^n$  representa uma classe de equivalência, denotada por  $[a]$ , que é definida por

$$[a] := \{\alpha a : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

A classe de equivalência de  $a$  é, conseqüentemente, o conjunto de pontos que pertencem a reta que passa pela origem e por  $a$ , com exceção da origem. O conjunto das classes de equivalência de  $\mathbb{R}^n$  formam o espaço Projetivo de  $\mathbb{R}^n$ , frequentemente denotado por  $\mathbb{RP}^{n-1}$ :

$$\mathbb{RP}^{n-1} := \{[a] : a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

Note que  $\mathbb{RP}^{n-1}$  não é mais um espaço vetorial. A transformação de um elemento de  $\mathbb{RP}^{n-1}$  de volta para  $\mathbb{R}^n$  se dá basicamente pela seleção de um representante apropriado para a classe de equivalência.

Para gerar representantes das classes de equivalência do espaço Projetivo com vetores do espaço euclidiano, os vetores euclidianos são primeiramente imersos em um *espaço afim*. O espaço afim de  $\mathbb{R}^n$  é representado pela seguinte imersão de um vetor  $a \in \mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\mathcal{H} : a \in \mathbb{R}^n \mapsto a + e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (3.4)$$

Essa imersão é chamada também de homogeneização de  $a$ , e conseqüentemente os 1-vetores em  $\mathbb{R}^{n+1}$  são chamados vetores homogêneos. Se  $a \in \mathbb{R}^n$ , então o vetor homogeneizado correspondente  $\mathcal{H}(a)$  é denotado tomando a maiúscula do símbolo que representa o vetor, isto é,  $A := \mathcal{H}(a)$ .

Em termos da Definição 3.1.1,  $\mathcal{H}$  será a imersão bijetiva que leva  $\mathbb{R}^n$  para um subespaço de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é imerso como um hiperplano particular de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

O hiperplano  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  representa o espaço afim de  $\mathbb{R}^n$  e será denotado por  $\mathbb{A}^n$ . Agora, dado um vetor  $A \in \mathbb{G}_{n+1}^1$ , o seu vetor euclidiano correspondente não pode ser encontrado de imediato, já que a inversa de  $\mathcal{H}$  é definida apenas para 1-vetores em  $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{G}_{n+1}^1$ . No entanto,  $A$  representa a classe de equivalência  $\text{NO}(A)$  e, conseqüentemente, qualquer vetor em  $\text{NO}(A)$  pode ser usado para representar o mesmo ponto de  $\mathbb{A}^n$ . Em particular, o ponto em  $\text{NO}(A)$  que também pertence a  $\mathbb{A}^n$  pode ser usado. Portanto,  $A$  é projetado de volta em  $\mathbb{G}_n^1$  via

$$a = \mathcal{H}^{-1}(\text{NO}(A) \cap \mathbb{A}^n), \quad (3.5)$$

se  $A$  tiver componente  $e_{n+1}$  não nula. Se observarmos que o produto  $A \cdot e_{n+1}$  nos dará o escalar que acompanha a componente  $e_{n+1}$  de  $A$ , então a expressão  $A/(A \cdot e_{n+1})$  resultará em um ponto em  $\text{NO}(A)$  que também pertence a  $\mathbb{A}^n$ . Assim,  $a$  pode ser obtido da seguinte forma

$$a = \frac{A}{A \cdot e_{n+1}} - e_{n+1}. \quad (3.6)$$

A projeção de um vetor  $A \in \mathbb{G}_{n+1}^1$  para  $\mathbb{G}_n^1$  através da equação acima é equivalente a encontrar o GOPNS de  $A$ ,

$$\text{NO}_G(A) = \{a \in \mathbb{G}_n^1 : \mathcal{H}(a) \wedge A = 0\} = \mathcal{H}^{-1}(\text{NO}(A) \cap \mathbb{A}^n). \quad (3.7)$$

Essa transformação é válida apenas para vetores homogêneos que têm componente não nula na direção  $e_{n+1}$ . Os vetores homogêneos que tem essa componente nula serão levados no infinito.

Uma propriedade importante sobre vetores homogêneos é que dados um vetor  $a \in \mathbb{G}_n^1$  e um escalar  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , então

$$\text{NO}_G = (\alpha \mathcal{H}(a)) = a. \quad (3.8)$$

### 3.3.1 Representações Através do Produto Exterior

Assim como para o espaço euclidiano, entidades geométricas podem ser representadas através do espaço nulo geométrico do produto exterior no espaço Projetivo. Para melhor visualização, será usado o espaço  $\mathbb{R}^2$  e sua imersão homogênea em  $\mathbb{R}^3$ .

#### 3.3.1.1 Retas

Seja  $A_{(2)} = A \wedge B$ , sendo  $A, B \in G_3^1$  imersões homogêneas de  $a, b \in \mathbb{G}_2^1$ , respectivamente, isto é,  $A := \mathcal{H}(a)$  e  $B := \mathcal{H}(b)$ . Neste caso,

$$\mathbb{NO}(A_{(2)}) = \{\alpha A + \beta B : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}. \quad (3.9)$$

Primeiramente, encontramos a interseção de  $\mathbb{NO}(A_{(2)})$  com  $\mathbb{A}^2$ , isto é,

$$X := \mathbb{NO}(A_{(2)}) \cap \mathbb{A}^2 = \frac{\alpha A + \beta B}{(\alpha A + \beta B) \cdot e_3}.$$

Da definição de  $A$  e  $B$ , segue que  $A \cdot e_3 = B \cdot e_3 = 1$ . Somando e subtraindo  $\alpha B$  temos

$$X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(a - b) + b + e_3.$$

Consequentemente,

$$x = \mathcal{H}^{-1}(X) = \lambda(a - b) + b, \quad (3.10)$$

onde  $\lambda = \alpha/(\alpha + \beta)$  é um parâmetro livre. Isso mostra que os vetores euclidianos que pertencem a  $\mathbb{NO}(A_{(2)})$  depois de homogeneizados são os vetores que pertencem a reta que passa por  $a$  e  $b$ .

Note que retas arbitrárias podem ser representadas quando trabalhamos com a imersão homogênea. No espaço euclidiano, apenas retas passando pela origem podem ser representadas.

#### 3.3.1.2 Planos

Usando o mesmo raciocínio anterior e tomando  $a, b, c \in \mathbb{G}_3^1$  e  $A, B, C \in \mathbb{G}_4^1$  com

$$A = \mathcal{H}(a), \quad B = \mathcal{H}(b), \quad C = \mathcal{H}(c),$$

é fácil verificar que  $\mathbb{NO}_G(A \wedge B \wedge C)$  é o plano de  $\mathbb{R}^3$  que passa por  $a, b$  e  $c$ .

De forma geral, podemos categorizar as representações pelo GOPNS da seguinte forma. Dados  $a, b, c \in \mathbb{G}_3^1$  e  $A, B, C \in \mathbb{G}_4^1$ , onde  $A = \mathcal{H}(a), B = \mathcal{H}(b)$  e  $C = \mathcal{H}(c)$ :

$\text{NO}_G(A)$  : **Ponto**  $a$ .

$\text{NO}_G(A \wedge B)$  : **Reta** que contém os pontos  $a$  e  $b$ .

$\text{NO}_G(A \wedge B \wedge C)$  : **Plano** que contém os pontos  $a, b$  e  $c$ .

### 3.3.2 Representações Através do Produto Interno

Assim como no caso euclidiano, no espaço Projetivo continua valendo a dualidade entre o GOPNS e o GIPNS. A seguir será discutido as representações geométricas através do GIPNS.

#### 3.3.2.1 Planos

Seja  $A \in \mathbb{G}_4^1$  dado por

$$A = \hat{a} - \alpha e_4,$$

onde  $\hat{a} \in \mathbb{G}_3^1$  e  $\|\hat{a}\| = 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $e_4$  denota a dimensão homogênea. O GIPNS de  $A$  é dado por

$$\text{NI}_G(A) := \{x \in \mathbb{G}_3^1 : \mathcal{H}(x) \cdot A = 0\}.$$

Seja  $X \in \mathbb{G}_4^1$  definido por  $X := \mathcal{H}(x) = x + e_4$  com  $x \in \mathbb{G}_3^1$ , então

$$\begin{aligned} A \cdot X = 0 &\iff (\hat{a} - \alpha e_4) \cdot (x + e_4) = 0 \\ &\iff \hat{a} \cdot x - \alpha = 0 \\ &\iff \hat{a} \cdot x^{\parallel} - \alpha = 0 \\ &\iff x^{\parallel} = \alpha \hat{a}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde  $x^{\parallel} := \mathcal{P}_{\hat{a}}(x)$  é a componente de  $x$  paralela a  $\hat{a}$ . Se definirmos  $x^{\perp} := \mathcal{P}_{\hat{a}}^{\perp}(a)$  tal que  $x = x^{\parallel} + x^{\perp}$ , então segue que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$x = \alpha \hat{a} + x^{\perp}$$

pertence ao GIPNS de  $A$ , portanto,  $A$  representa o plano com direção normal  $\hat{a}$  distando  $\alpha$  da origem de  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.3.2.2 Retas

Se  $A, B \in \mathbb{G}_4^1$  são definidos como  $A := \mathcal{H}(a)$  e  $B := \mathcal{H}(b)$  com  $a, b \in \mathbb{G}_3^1$ , então o GIPNS de  $A \wedge B$  é dado por

$$\text{NI}_G(A \wedge B) := \{x \in \mathbb{G}_3^1 : \mathcal{H}(x) \cdot (A \wedge B) = 0\}.$$

Seja  $X := \mathcal{H}(x)$ , e suponha  $A \wedge B \neq 0$ , então

$$X \cdot (A \wedge B) = (X \cdot A)B - (X \cdot B)A, \quad (3.12)$$

que é zero somente se  $X \cdot A = X \cdot B = 0$ . Portanto,  $X \cdot (A \wedge B) = 0$ , acontece se, e somente se,  $x$  pertence a ambos os planos representados pelos GIPNSs de  $A$  e  $B$ , logo  $x$  pertence a reta de interseção dos dois planos.

### 3.3.2.3 Pontos

Assim como no raciocínio anterior o GIPNS de um 3-blade representará o ponto de interseção de três planos.

Desta forma, dados  $A, B, C \in \mathbb{G}_4^1$  definidos como  $A := \mathcal{H}(a), B := \mathcal{H}(b)$  e  $C := \mathcal{H}(c)$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{G}_3^1$ , as seguintes entidades geométricas podem ser representadas em  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{NI}_G(A) : \mathbf{Plano},$$

$$\text{NI}_G(A \wedge B) : \mathbf{Reta} \text{ NI}_G(A) \cap \text{NI}_G(B),$$

$$\text{NI}_G(A \wedge B \wedge C) : \mathbf{Ponto} \text{ NI}_G(A) \cap \text{NI}_G(B) \cap \text{NI}_G(C).$$

## 3.4 Espaço Conforme

O espaço Conforme será introduzido em duas etapas, primeiramente através da imersão estereográfica do espaço euclidiano e, em seguida, pela homogeneização da imersão estereográfica.

### 3.4.1 Imersão Estereográfica do Espaço Euclidiano

Em geral, a imersão estereográfica leva um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . A função que faz isso é  $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e é definida como

$$\mathcal{S} : x \mapsto \frac{2}{x^2 + 1}x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+, \quad (3.13)$$

onde  $e_+ := e_{n+1}$  é definido por conveniência e  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  denota a esfera unitária em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que

$$\|\mathcal{S}(x)\| = 1.$$

Do mesmo modo que ocorreu no caso do Espaço Projetivo, onde houve uma restrição do domínio na obtenção da transformação inversa, como a imersão estereográfica leva  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , a transformação inversa  $\mathcal{S}^{-1}$  será definida apenas para elementos de  $\mathbb{S}^n$ .

A projeção estereográfica  $\mathcal{S}^{-1} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por

$$\mathcal{S}^{-1} : X \mapsto \frac{1}{1 - X \cdot e_+} \mathcal{P}_{e_+}^\perp(X). \quad (3.14)$$

Um vetor  $X \in \mathbb{R}^{n+1}$  é um elemento de  $\mathbb{S}^n$  se, e somente se,  $\|X\| = 1$ .

### 3.4.2 Homogeneização da Imersão Estereográfica

Bem como a homogeneização do Espaço Euclidiano, a imersão estereográfica será homogeneizada. Especificamente,  $\mathbb{R}^{n+1}$  será levado em um espaço Projetivo representado em  $\mathbb{R}^{n+1,1}$ . O espaço  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  tem dimensão  $n + 2$  e sua base contém  $n + 1$  vetores cujo quadrado é  $+1$  e um vetor cujo quadrado é  $-1$ . Este tipo de espaço é chamado de *espaço de Minkowski*.

A imersão homogênea de algum  $\mathbb{R}^n$  no espaço de Minkowski  $\mathbb{R}^{n,1}$  é denotada por  $\mathcal{H}_M : x \in \mathbb{R}^n \mapsto X = x + e_-$ , onde a dimensão homogênea é  $e_- := e_{n+1}$  com  $e_- \cdot e_- = -1$  e  $\mathbb{A}_M^n$  denota o espaço afim Minkowski.

Um resultado imediato que segue do uso da dimensão homogênea com assina-

tura negativa é que dado  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$ ,

$$\begin{aligned}
(\alpha \mathcal{H}_M(\mathcal{S}(x)))^2 &= \alpha^2 (\mathcal{S}(x) + e_-)^2 \\
&= \alpha^2 ((\mathcal{S}(x))^2 + (e_-)^2) \\
&= \alpha^2(1 - 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Resumidamente, todos os vetores de  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  que resultam da imersão de um vetor euclidiano de  $\mathbb{R}^n$  têm o quadrado igual a zero. Para  $\mathbb{R}^1$ , o conjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^{2,1}$  que satisfazem essa condição pertencem a um cone, conseqüentemente, todos os vetores-nulos em  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  são ditos pertencerem ao *cone-nulo*. Também segue que, assim como para o espaço Projetivo, um múltiplo de um vetor-nulo representa o mesmo ponto no espaço euclidiano.

O conjunto dos vetores-nulo, isto é, o cone-nulo, é denotado por  $\mathbb{K}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$  e é definido como

$$\mathbb{K}^{n+1} := \{X \in \mathbb{R}^{n+1,1} : X^2 = 0\}. \quad (3.15)$$

Das considerações anteriores, segue que

$$\mathbb{K}^{n+1} = \{\alpha \mathcal{H}_M(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) : \alpha \in \mathbb{R} \setminus 0\}. \quad (3.16)$$

Seja  $\mathbb{S}\mathbb{A}_M^n \subset \mathbb{A}_M^{n+1}$  a imersão de  $\mathbb{S}^n$  no espaço afim  $\mathbb{A}_M^{n+1}$ , isto é,

$$\mathbb{S}\mathbb{A}_M^n = \mathbb{A}_M^{n+1} \cap \mathbb{K}^{n+1} = \mathcal{H}_M(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

A transformação inversa  $\mathcal{H}_M^{-1} : \mathbb{S}\mathbb{A}_M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  é dada por

$$\mathcal{H}_M^{-1} : X \mapsto X - e_-. \quad (3.17)$$

Isso implica que somente os elementos de  $\mathbb{S}\mathbb{A}_M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1,1}$  podem ser levados de volta para  $\mathbb{R}^n$ . Para todos os outros vetores é dado um significado geométrico usando os GOPNS e GIPNS, isto é, para  $A \in \mathbb{R}^{n+1,1}$ , tem-se

$$\text{NO}_G(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{H}_M(\mathcal{S}(x)) \wedge A = 0\},$$

$$\text{NI}_G(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{H}_M(\mathcal{S}(x)) \cdot A = 0\}.$$

Resumidamente, a imersão de um vetor euclidiano  $x \in \mathbb{R}^n$  no espaço Conforme  $\mathbb{R}^{n+1,1}$  é dada por

$$\mathcal{H}_M(\mathcal{S}(x)) = \frac{2}{x^2 + 1}x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+ + e_- . \quad (3.18)$$

Como este é um elemento de um espaço Projetivo, um múltiplo não altera a representação em  $\mathbb{R}^n$ . O vetor pode então ser multiplicado por um escalar sem mudar sua representação no espaço euclidiano. Por conveniência, podemos multiplicar o vetor por  $\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ , que nunca será zero:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x^2 + 1)\mathcal{H}_M(\mathcal{S}(x)) &= x + \frac{1}{2}(x^2 - 1)e_+ + \frac{1}{2}(x^2 + 1)e_- \\ &= x + \frac{1}{2}x^2(e_- + e_+) + \frac{1}{2}(e_- - e_+) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_o, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde

$$e_\infty := e_- + e_+ \quad \text{e} \quad e_o := \frac{1}{2}(e_- - e_+), \quad (3.20)$$

tendo esses as seguintes propriedades derivadas de  $e_+$  e  $e_-$ :

$$e_\infty^2 = e_o^2 = 0 \quad \text{e} \quad e_\infty \cdot e_o = -1. \quad (3.21)$$

Na base formada por  $e_\infty$  e  $e_o$ ,  $e_o$  é considerado como sendo a dimensão homogênea.

A seguinte imersão de vetores do Espaço Euclidiano para o Espaço Conforme é definida: O operador  $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \in \mathbb{K}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$  é definido por

$$\mathcal{C} : x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + 1)\mathcal{H}_M(\mathcal{S}(x)), \quad (3.22)$$

tal que

$$\mathcal{C}(x) = x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_o. \quad (3.23)$$

Essa será a imersão para o Espaço Conforme comumente utilizada a partir deste ponto.

A operação inversa  $\mathcal{C}^{-1}$  é definida apenas para vetores do cone-nulo  $\mathbb{K}^{n+1}$ , isto é,  $\mathcal{C}^{-1} : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathcal{C}^{-1} : X \in \mathbb{K}^{n+1} \mapsto \mathcal{P}_{e_\infty \wedge e_o}^\perp \left( \frac{X}{-X \cdot e_\infty} \right). \quad (3.24)$$

Isso é basicamente o mesmo que a projeção para o plano afim no espaço Projetivo.

## 3.5 Álgebra Geométrica em $\mathbb{R}^{n+1,1}$

Assim como para o Espaço Projetivo, uma Álgebra Geométrica pode ser construída sobre  $\mathbb{R}^{n+1,1}$ , que será denotada por  $\mathbb{G}_{n+1,1}$ . Os GOPNS e GIPNS são os objetos de maior interesse nesta seção. Seja  $A_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{n+1,1}^k$ , então

$$\begin{aligned}\text{NO}_G(A_{\langle k \rangle}) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{C}(x) \wedge A_{\langle k \rangle} = 0\}, \\ \text{NI}_G(A_{\langle k \rangle}) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{C}(x) \cdot A_{\langle k \rangle} = 0\}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Como todos os vetores de  $\mathbb{K}^{n+1}$  podem ser projetados em  $\mathbb{R}^n$ , os Espaços Nulos Geométricos podem ser escritos como

$$\begin{aligned}\text{NO}_G(A_{\langle k \rangle}) &= \mathcal{C}^{-1}(\{X \in \mathbb{K}^{n+1} : X \wedge A_{\langle k \rangle} = 0\}), \\ \text{NI}_G(A_{\langle k \rangle}) &= \mathcal{C}^{-1}(\{X \in \mathbb{K}^{n+1} : X \cdot A_{\langle k \rangle} = 0\}).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Utilizando os conceitos de Espaços Nulos, podemos escrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\text{NO}_G(A_{\langle k \rangle}) &= \mathcal{C}^{-1}(\text{NO}(A_{\langle k \rangle}) \cap \mathbb{K}^{n+1}), \\ \text{NI}_G(A_{\langle k \rangle}) &= \mathcal{C}^{-1}(\text{NI}(A_{\langle k \rangle}) \cap \mathbb{K}^{n+1}).\end{aligned}\tag{3.27}$$

### 3.5.1 Representações Através do Produto Interno em $\mathbb{G}_{4,1}$

Dados os vetores  $a, b \in \mathbb{R}^3$ , com imersões conforme  $A := \mathcal{C}(a)$  e  $B := \mathcal{C}(b)$ , isto é,

$$A = a + \frac{1}{2}a^2 e_\infty + e_o \quad \text{e} \quad B = b + \frac{1}{2}b^2 e_\infty + e_o.$$

Usando as propriedades de  $e_\infty$  e  $e_o$ , segue que

$$\begin{aligned}A \cdot B &= (a + \frac{1}{2}a^2 e_\infty + e_o) \cdot (b + \frac{1}{2}b^2 e_\infty + e_o) \\ &= a \cdot b - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 \\ &= -\frac{1}{2}(a - b)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\|a - b\|^2.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Consequentemente, o produto interno entre dois vetores conformes resulta na medida da distância euclidiana entre seus vetores correspondentes.

#### 3.5.1.1 Pontos

O GIPNS de um vetor  $A \in \mathbb{K}^4 \subset \mathbb{G}_{4,1}^1$  do cone-nulo é dado por

$$\text{NI}_G(A) = \mathcal{C}^{-1}(\text{NI}(A)).$$

Como os vetores no cone-nulo são todos vetores-nulos,

$$\text{NI}(A) = \{\alpha A : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

consequentemente,

$$\text{NI}_G(A) = \mathcal{C}^{-1}(A). \quad (3.29)$$

Assim como para o espaço Projetivo, uma entidade geométrica de dimensão nula no espaço euclidiano pode ser representada por um subespaço unidimensional do espaço Conforme.

### 3.5.1.2 Esferas

Considere o vetor  $a \in \mathbb{R}^3$  e defina  $A := \mathcal{C}(a)$ , que pertence ao cone nulo, e defina o vetor  $S \in \mathbb{G}_{4,1}^1$  fora do cone nulo por

$$S := A - \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty, \quad (3.30)$$

onde  $\rho \in \mathbb{R}$ . Para encontrar o GIPNS de  $S$ , considere o produto interno do vetor  $X \in \mathbb{K}^4$  com  $S$ :

$$\begin{aligned} S \cdot X &= A \cdot X - \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty \cdot X \\ &= -\frac{1}{2}(a - x)^2 + \frac{1}{2}\rho^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$S \cdot X = 0 \iff (a - x)^2 = \rho^2. \quad (3.31)$$

Em resumo, o produto interno entre  $S$  e  $X$  é zero se, e somente se,  $x = \mathcal{C}^{-1}(X)$  pertence a uma esfera centrada em  $a = \mathcal{C}^{-1}(A)$  com raio  $\rho$ . Portanto, o GIPNS de  $S$  é uma esfera:

$$\text{NI}_G(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - a\|^2 = \rho^2\}. \quad (3.32)$$

Assim como para pontos, qualquer múltiplo de  $S$  representa a mesma esfera. A vantagem de usar a forma de  $S$  dada anteriormente é que o raio da esfera pode ser obtido por

$$S^2 = A^2 - \rho^2 A \cdot e_\infty = \rho^2 \quad (3.33)$$

e, se for um elemento múltiplo de  $S$ , o raio pode ser obtido por

$$\left( \frac{S}{-S \cdot e_\infty} \right)^2 = \rho^2. \quad (3.34)$$

### 3.5.1.3 Esferas Imaginárias

Considere agora um vetor  $S \in \mathbb{G}^{1,4}$  definido por

$$S := A + \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty. \quad (3.35)$$

O produto interno de  $S$  com  $X := \mathcal{C}(x), x \in \mathbb{R}^3$ , nos dá

$$S \cdot X = -\frac{1}{2}(a-x)^2 - \frac{1}{2}\rho^2,$$

tal que

$$S \cdot X = 0 \iff (a-x)^2 = -\rho^2.$$

O que é impossível se  $x \in \mathbb{R}^3$ , porém no caso de  $x \in \mathbb{C}^3$  teremos,

$$\|a-x\| = i\rho, \quad (3.36)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária. Resultando assim numa esfera de raio imaginário.

### 3.5.1.4 Planos

Seja  $P \in \mathbb{G}_{4,1}^1$  definido por

$$P := A - e_o - \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty = a + \frac{1}{2}a^2 e_\infty - \frac{1}{2}\rho^2 e_\infty, \quad (3.37)$$

com componente homogênea nula. O produto interno entre  $P$  e um vetor  $X := \mathcal{C}(x), x \in \mathbb{R}^3$ , nos dá

$$\begin{aligned} P \cdot X &= a \cdot x - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \\ &= \|a\|\|x^\parallel\| - \frac{1}{2}(a^2 - \rho^2), \end{aligned}$$

onde  $x^\parallel := \mathcal{P}_a(x)$  é a componente de  $x$  paralela ao vetor  $a$ . Portanto,

$$P \cdot X = 0 \iff \|x^\parallel\| = \frac{a^2 - \rho^2}{2\|a\|}. \quad (3.38)$$

Consequentemente, os vetores  $x$  que pertencem ao GIPNS de  $P$  são aqueles cuja componente paralela a  $a$  tem um comprimento fixo, isso representará um plano com vetor normal  $a$  distando  $(a^2 - \rho^2)/(2\|a\|)$  da origem.

Em geral, um plano com vetor normal  $\hat{a} = a/\|a\|$  e distância  $\alpha$  da origem será representado por

$$P = \hat{a} + \alpha e_\infty. \quad (3.39)$$

### 3.5.1.5 Circunferências

As circunferências serão construídas a partir da interseção de duas esferas. Sejam  $S_1, S_2 \in \mathbb{G}_{4,1}^1$  representantes de duas esferas como descritas anteriormente e defina  $C := S_1 \wedge S_2$ , então

$$\mathbb{N}\mathbb{I}_G(C) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(x) \cdot C = 0\}$$

e

$$X \cdot (S_1 \wedge S_2) = (X \cdot S_1)S_2 - (X \cdot S_2)S_1, \quad (3.40)$$

onde  $x := \mathcal{C}(x)$ . Se  $S_1$  e  $S_2$  são l.i, isto é, representam esferas diferentes, então

$$X \cdot (S_1 \wedge S_2) = 0 \Leftrightarrow X \cdot S_1 = X \cdot S_2 = 0.$$

Logo,  $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(C)$  é o conjunto dos pontos que estão nas duas esferas, que será, no caso geral, a circunferência de interseção das duas esferas, podendo resultar em um único ponto ou até mesmo não ocorrer a interseção.

Note que se  $S_1$  e  $S_2$  representam esferas imaginárias, então  $C$  representará uma circunferência imaginária.

### 3.5.1.6 Retas

Do mesmo modo que vimos uma circunferência como a interseção de duas esferas, podemos ver uma reta como a interseção de dois planos. Sejam  $P_1, P_2 \in \mathbb{G}_{4,1}^1$  representantes de planos pelo produto interno, então  $R := P_1 \wedge P_2$  representará a reta de interseção dos dois planos, uma vez que

$$\mathbb{N}\mathbb{I}_G = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(x) \cdot R = 0\}$$

e

$$X \cdot (P_1 \wedge P_2) = (X \cdot P_1)P_2 - (X \cdot P_2)P_1, \quad (3.41)$$

onde  $x := \mathcal{C}(x)$ . Se  $P_1$  e  $P_2$  são vetores l.i, isto é, representam planos diferentes, então  $X \cdot (P_1 \wedge P_2)$  será zero se, e somente se,  $X \cdot P_1$  e  $X \cdot P_2$  forem zero. Logo,  $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(R)$  é a interseção dos dois planos.

No caso dos planos serem paralelos, podemos ver a interseção como sendo a reta no infinito.

### 3.5.1.7 Par de Pontos

Seguindo o mesmo princípio da representação de circunferências, podemos obter uma representação para um par de pontos usando três esferas ao invés de duas, como a interseção de três esferas resulta, em um caso geral, em um par de pontos, se definirmos  $A := S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$ , onde  $S_1, S_2, S_3 \in \mathbb{G}_{4,1}^1$  são representantes de esferas pelo produto interno, então  $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(A)$  representará um par de pontos.

## 3.5.2 Representações Através do Produto Exterior em $\mathbb{G}_{4,1}$

O fato da representação pelo produto exterior ser dual a representação pelo produto interno será usado para verificar algumas das representações a seguir.

### 3.5.2.1 Pontos

Se  $a \in \mathbb{R}^3$  é representado em  $\mathbb{G}_{4,1}$  por  $A := \mathcal{C}(a)$ , como  $A^2 = 0$ ,  $A$  é uma representação do ponto  $a$  pelo produto interno. Por outro lado, tem-se também é uma representação do ponto  $a$  pelo produto exterior, já que  $A \wedge A = 0$ . Isto é,

$$\mathbb{N}\mathbb{O}_G(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(x) \wedge A = 0\} = \{a\}. \quad (3.42)$$

### 3.5.2.2 Par de Pontos

Sejam  $A, B \in \mathbb{G}_{4,1}^1$  definidos por  $A := \mathcal{C}(a)$  e  $B := \mathcal{C}(b)$ , então

$$\mathbb{N}\mathbb{O}(A \wedge B) = \{X \in \mathbb{G}_{4,1}^1 : X \wedge A \wedge B = 0\} = \{\alpha A + \beta B : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

O GOPNS de  $A \wedge B$  é o subconjunto de  $\mathbb{N}\mathbb{O}(A \wedge B)$  cujo quadrado de seus elementos é zero, ou seja, os vetores da interseção com o cone-nulo. Seja  $X := \alpha A + \beta B$ , então

$$X^2 = 2\alpha\beta A \cdot B,$$

ja que  $A^2 = B^2 = 0$ . Logo,  $X^2 = 0$  tem as solução não triviais onde  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ . Portanto,

$$\mathbb{N}\mathbb{O}_G(A \wedge B) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(x) \wedge A \wedge B = 0\} = \{a, b\}. \quad (3.43)$$

### 3.5.2.3 Ponto Homogêneo

Um ponto homogêneo é um par de pontos constituído por um ponto euclidiano e o ponto no infinito. Se  $a \in \mathbb{R}^3$ ,  $A := \mathcal{C}(a)$  e  $H := A \wedge e_\infty$ , então

$$\mathbb{NO}_G(H) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(x) \wedge H = 0\} = \{a\}, \quad (3.44)$$

uma vez que o ponto no infinito não tem representante em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,  $H$  e  $A$  são ambas representações de  $a$  pelo produto exterior.

### 3.5.2.4 Retas

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}^3$  com  $A := \mathcal{C}(a)$ ,  $B := \mathcal{C}(b)$  e defina  $R := A \wedge B \wedge e_\infty$ , então

$$\mathbb{NO}_G(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(x) \wedge R = 0\}.$$

Definindo  $X := \mathcal{C}(x)$ , teremos

$$X \wedge R = 0 \iff x \wedge a \wedge b \wedge e_\infty + (x \wedge (b - a) - a \wedge b) \wedge e_\infty \wedge e_o = 0.$$

Como as duas parcelas da soma são l.i, ambos devem ser zero. Do primeiro termo obtemos,  $x \wedge a \wedge b \wedge e_\infty = 0 \Rightarrow x = \alpha a + \beta b$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Do segundo termo temos que,  $(x \wedge (b - a) - a \wedge b) \wedge e_\infty \wedge e_o = 0 \Leftrightarrow (x \wedge (b - a) - a \wedge b) = 0$  e

$$\begin{aligned} (x \wedge (b - a) - a \wedge b) = 0 &\iff x \wedge (b - a) = a \wedge b \\ &\iff (\alpha a + \beta b) \wedge (b - a) = a \wedge b \\ &\iff (\alpha + \beta)a \wedge b = a \wedge b \\ &\iff \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$x = \alpha a + \beta b + \alpha b - \alpha b = \alpha(a - b) + b,$$

que é a representação paramétrica da reta passando por  $a$  e  $b$ . Portanto,

$$\mathbb{NO}_G(A \wedge B \wedge e_\infty) = \{\alpha(a - b) + b : \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (3.45)$$

### 3.5.2.5 Planos

A representação de planos pelo produto exterior segue um princípio similar ao de retas. Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ , com  $A := \mathcal{C}(a)$ ,  $B := \mathcal{C}(b)$  e  $C := \mathcal{C}(c)$  e defina  $P := A \wedge B \wedge C \wedge e_\infty$ .

Da mesma forma que para as retas, pode ser mostrado que

$$\begin{aligned}\mathbb{NO}_G(P) &= \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(x) \wedge P = 0\} \\ &= \{\alpha(a - c) + \beta(b - c) + c : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.\end{aligned}\tag{3.46}$$

### 3.5.2.6 Circunferências

A representação pelo produto exterior de uma circunferência que passa pelos pontos  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  é dada por  $K := A \wedge B \wedge C$ , onde  $A := \mathcal{C}(a), B := \mathcal{C}(b)$  e  $C := \mathcal{C}(c)$ .

Primeiramente, como

$$\mathbb{NO}_G(K) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(x) \wedge K = 0\},$$

os pontos  $a, b$  e  $c$  devem pertencer a entidade geométrica representada por  $K$ . Uma vez que  $\mathbb{NO}_G(K) = \mathbb{NI}_G(K^*)$  e, como  $K \in \mathbb{G}_{4,1}^3$ , é uma 3-blade, segue que  $K^* \in G_{4,1}^2$  é uma 2-blade. Como foi mostrado anteriormente, o GIPNS de uma 2-blade pode ser uma reta, uma reta no infinito, uma circunferência ou uma circunferência imaginária. Como  $a, b$  e  $c$  estão nessa entidade geométrica, a mesma não pode estar no infinito, logo sobram apenas as retas e circunferências. Portanto,  $K$  representará a circunferência que contém os três pontos ou, no caso dos pontos serem colineares, a reta que os contém.

### 3.5.2.7 Esferas

Similar ao caso da circunferência, se tomarmos quatro vetores  $a, b, c$ , e  $d$  em  $\mathbb{R}^3$ , com  $A := \mathcal{C}(a), B := \mathcal{C}(b), C := \mathcal{C}(c)$  e  $D := \mathcal{C}(d)$  e definirmos  $S := A \wedge B \wedge C \wedge D$ , então

$$\mathbb{NO}_G(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(x) \wedge S = 0\},$$

os pontos  $a, b, c$  e  $d$  pertencem a entidade representada por  $S$  e  $\mathbb{NO}_G(S) = \mathbb{NI}_G(S^*)$ , onde  $S^* \in \mathbb{G}_{4,1}^1$  é uma 1-blade. A representação de uma 1-blade pelo produto interno pode ser uma esfera ou uma esfera imaginária. Segue do fato de  $a, b, c$  e  $d$  serem vetores euclidianos que  $S$  representa uma esfera.

## 3.6 Análise de Blades

O objetivo agora é mostrar como extrair informações de uma blade que representa alguma entidade geométrica. Por exemplo, no caso de uma blade que representa uma circunferência, precisamos obter o raio e o centro.

### 3.6.1 Planos

Seja  $P \in \mathbb{G}_{4,1}^4$  um representante de um plano pelo produto exterior, então  $P^*$  é da forma

$$P^* = \alpha(\hat{a} + de_\infty),$$

onde  $\hat{a} \in \mathbb{R}^3$  é o vetor normal do plano,  $d \in \mathbb{R}$  é a distância do plano à origem e  $\alpha \in \mathbb{R}$  é um escalar qualquer. Os parâmetros do plano podem ser extraídos por

$$a = \mathcal{P}_{e_{123}}(P^*), \quad \alpha = \|a\|, \quad d = -\frac{P^* \cdot e_o}{\alpha}. \quad (3.47)$$

### 3.6.2 Esferas

Seja  $S \in \mathbb{G}_{4,1}^4$  o representante de uma esfera pelo produto exterior, então  $S^*$  é da forma

$$S^* = \alpha(A - \frac{1}{2}r^2e_\infty),$$

onde  $A := \mathcal{C}(a)$ ,  $a \in \mathbb{R}^3$  é o centro da esfera,  $r \in \mathbb{R}$  é o raio e  $\alpha \in \mathbb{R}$  é algum escalar. Esses parâmetros podem ser extraídos via

$$r^2 = \frac{(S^*)^2}{(S^* \cdot e_\infty)^2}, \quad (3.48)$$

$$a = \frac{\mathcal{P}_{e_{123}}(S^*)}{-S^* \cdot e_\infty}. \quad (3.49)$$

Primeiramente vamos verificar a obtenção do raio. O numerador  $(S^*)^2$  da Equação 3.48 nos dá

$$\begin{aligned} (S^*)^2 &= \alpha^2(A - \frac{1}{2}r^2e_\infty)^2 \\ &= \alpha^2(A^2 - \frac{1}{2}r^2A \cdot e_\infty - \frac{1}{2}r^2e_\infty \cdot A) \\ &= -\frac{1}{2}\alpha^2r^2(a \cdot e_\infty + \frac{1}{2}a^2e_\infty^2 + e_o \cdot e_\infty + e_\infty \cdot a + \frac{1}{2}a^2e_\infty^2 + e_\infty \cdot e_o) \\ &= -\frac{1}{2}\alpha^2r^2((-1) + (-1)) \\ &= \alpha^2r^2, \end{aligned}$$

uma vez que  $A \in \mathbb{K}^4$ ,  $a \cdot e_\infty = 0$ ,  $e_\infty^2 = 0$  e  $e_\infty \cdot e_o = e_o \cdot e_\infty = 0$ . Agora, considerando o

denominador de 3.48, temos

$$\begin{aligned}
(S^* \cdot e_\infty)^2 &= (\alpha(A - \frac{1}{2}r^2e_\infty) \cdot e_\infty)^2 \\
&= (A \cdot e_\infty - \frac{1}{2}r^2e_\infty^2)^2 \\
&= \alpha^2(a \cdot e_\infty + \frac{1}{2}a^2e_\infty^2 + e_o \cdot e_\infty)^2 \\
&= \alpha^2.
\end{aligned}$$

Assim,  $(S^*)^2/(S^* \cdot e_\infty)^2 = r^2$ .

Vamos considerar agora a Equação (3.49) para obtenção do centro. Na extração do raio vimos que  $S^* \circ e_\infty = -\alpha$ , deste modo, o denominador é facilmente determinado por  $-S^* \circ e_\infty = \alpha$ . A projeção no numerador é verificada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{e_{123}}(S^*) &= \alpha \mathcal{P}_{e_{123}}(A - \frac{1}{2}r^2e_\infty) \\
&= \alpha(\mathcal{P}_{e_{123}}(A) - \frac{1}{2}r^2\mathcal{P}_{e_{123}}(e_\infty)) \\
&= \alpha(\mathcal{P}_{e_{123}}(a) + \frac{1}{2}a^2\mathcal{P}_{e_{123}}(e_\infty) + \mathcal{P}_{e_{123}}(e_o)) \\
&= \alpha \mathcal{P}_{e_{123}}(a) \\
&= \alpha a,
\end{aligned}$$

já que  $e_\infty$  e  $e_o$  não possuem componentes paralelas a  $e_{123}$  e a projeção de  $a$  em  $e_{123}$  é o próprio  $a$ , uma vez que este está no espaço gerado por  $e_{123}$ . Concluimos então a igualdade acima.

### 3.6.3 Retas

A representação pelo produto exterior de uma reta  $r$  que passa por  $a, b \in \mathbb{R}^3$  é dada por

$$R := A \wedge B \wedge e_\infty = a \wedge b \wedge e_\infty - (b - a) \wedge e_\infty \wedge e_o,$$

onde  $A := \mathcal{C}(a)$  e  $B := \mathcal{C}(b)$ . Como  $(e_\infty \wedge e_o)^2 = 1$ , temos

$$R \cdot (e_\infty \wedge e_o) = b - a, \tag{3.50}$$

que é a direção da reta  $r$ . Por outro lado,  $d := b - a$  pode ser interpretado com sendo a representação pelo produto interno de um plano que passa pela origem e tem vetor normal  $d$ . A interseção desse plano com a reta  $R$  forma um ângulo reto no ponto mais próximo

da origem que pertence a reta. Esse ponto pode ser obtido calculando a interseção da reta com o plano.

Se definirmos  $P^* := d$ , então  $P$  será a representação do plano pelo produto exterior e o ponto de interseção  $X$  de  $R$  com  $P$  é dado por

$$X = P \vee R = P^* \cdot R, \quad (3.51)$$

já que a reunião de  $P$  e  $R$  é o espaço todo. Assim obtendo a reta por completo.

### 3.6.4 Circunferências

Seja  $C \in \mathbb{G}_{4,1}^3$  um representante pelo produto exterior de uma circunferência que passa pelos pontos  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ , isto é,  $C := X \wedge Y \wedge Z$ , onde  $X, Y$  e  $Z$  são as imersões conformes de  $x, y$  e  $z$ , respectivamente. O plano onde a circunferência está contida tem representação pelo produto externo dada por

$$P := C \wedge e_\infty = A \wedge B \wedge C \wedge e_\infty.$$

Se  $S_1^*, S_2^* \in \mathbb{G}_{4,1}^1$  são representações pelo produto interno de duas esferas cuja interseção é  $C$ , então a representação pelo produto interno de  $C$  é

$$C^* = S_1^* \wedge S_2^*.$$

A reta  $R$  que passa pelos centros das esferas  $S_1$  e  $S_2$  tem uma representação pelo produto exterior dada por

$$R := C^* \wedge e_\infty = S_1^* \wedge S_2^* \wedge e_\infty.$$

A reta  $R$  passa pelo centro,  $X$ , da circunferência, o qual podemos obter usando a Equação (3.51),

$$X = P^* \cdot R. \quad (3.52)$$

Por fim, a representação pelo produto interno normalizada da esfera que centrada em  $X$  com o mesmo raio da circunferência é

$$S^* := C \cdot P^{-1},$$

assim, o raio  $r$  da circunferência pode ser obtido por

$$r = \sqrt{S^* \cdot S^*} = \sqrt{\frac{C \cdot C}{P \cdot P}}. \quad (3.53)$$

# Capítulo 4

## A Biblioteca LIGA e Aplicações

Neste capítulo apresentaremos a biblioteca LIGA<sup>1</sup>, que foi programada utilizando a linguagem *Julia*<sup>2</sup>, com a objetivo de implementar conceitos da Álgebra Geométrica nessa linguagem. Para exemplificar a utilização da biblioteca LIGA, apresentaremos uma aplicação no problema de detecção de circunferências, por ser um problema de fácil implementação e visualização.

O problema de detecção de objetos geométricos em imagens é de grande relevância no campo de visão computacional [17], com importantes aplicações [12, 23] e, em nosso contexto, utilizaremos a biblioteca LIGA para implementar um algoritmo que extrai, num conjunto de combinações, candidatos a raio e centro para a detecção de uma circunferência, seguindo a filosofia da Transformada de Hough [20] com algumas modificações que serão apresentadas no capítulo.

Organizaremos o capítulo da seguinte forma. Inicialmente apresentaremos a biblioteca LIGA, junto com alguns exemplos básicos que auxiliarão no entendimento da mesma. Em seguida introduziremos o problema de detecção de curvas através da Transformada de Hough e, por fim, será apresentado o algoritmo baseado em Álgebra Geométrica, bem como comparações entre a técnica clássica e a nova proposta.

---

<sup>1</sup>Documentação da biblioteca <https://github.com/Viniriter/Liga.jl>

<sup>2</sup>Mais informações disponíveis em <https://julialang.org>

## 4.1 A Biblioteca LIGA

A biblioteca LIGA foi criada com o objetivo de executar algoritmos utilizando conceitos de Álgebra Geométrica, tendo a capacidade de representar algumas funções, como os produtos geométrico, exterior e interno, as projeções, imersões e diversos outros conceitos que foram apresentados nos capítulos anteriores. Devido o alto desempenho, a facilidade e a ausência de algo do tipo nesta linguagem, a linguagem Julia foi utilizada para a programação desta biblioteca.

Um tutorial de instalação e utilização dessa biblioteca pode ser encontrado em <https://github.com/Viniriter/Liga.jl>.

Uma nota importante é o fato de que essa biblioteca ainda está numa fase inicial de desenvolvimento, isto é, suas funções podem não estar devidamente otimizadas e podem gerar uma perda na capacidade de processamento.

## 4.2 Visão Geral e Exemplos Básicos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos básicos de como a biblioteca LIGA pode ser utilizada.

### 4.2.1 Representação de Elementos e Funções

Como mencionado anteriormente, a execução da biblioteca LIGA é através da linguagem Julia, onde, após a instalação e execução da biblioteca, torna-se possível trabalhar com as álgebras geométricas sobre os espaços Euclidiano, Projetivo e Conforme, o que nos dá um amplo alcance no desenvolvimento de algoritmos envolvendo esses conceitos.

A execução dessas estruturas se dá através de uma função *layout*, onde, após selecionado o *layout* pretendido, podemos trabalhar com as álgebras geométricas baseadas nessa seleção. Por exemplo, se definirmos

$$\text{layout}(3),$$

poderemos trabalhar com as álgebras geométricas  $\mathbb{G}_3$  sobre o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{G}_{3,1}$  sobre o espaço projetivo  $\mathbb{R}^{3,1}$  e  $\mathbb{G}_{4,1}$  sobre o espaço conforme  $\mathbb{R}^{4,1}$ .

As representações são divididas em três tipos de elementos criados pela biblioteca, estes são divididos em elementos básicos, multivetores e blades. Os elementos básicos servem para representar um elemento da base de  $\mathbb{G}_n$ ,  $\mathbb{G}_{n,1}$  ou  $\mathbb{G}_{n+1,1}$  acompanhados de um escalar, isto é, no caso do espaço base ser  $\mathbb{R}^2$ , elementos da base de  $\mathbb{G}_2$ , como  $e_1, e_2$  e  $e_{12}$  e qualquer múltiplo real destes, podem ser representados como elementos básicos de  $\mathbb{G}_2$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned} e_1 &= kb(e1, 1.0), \\ 2e_{12} &= kb(e12, 2.0). \end{aligned}$$

No caso de  $\mathbb{G}_{2,1}$ , podemos representar os elementos de  $\mathbb{G}_2$  acrescidos da dimensão homogênea com assinatura negativa, isto é, cujo quadrado é  $-1$ . Neste caso, os elementos da base de  $\mathbb{R}^{2,1}$  passam a ser tratados como  $e_1, e_+$  e  $e_-$  ao invés de  $e_1, e_2$  e  $e_-$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned} e_- &= pb(id, true, 1.0) \\ \frac{1}{2}e_{1+} &= pb(e12, false, 0.5) \end{aligned}$$

Trabalhando com o espaço  $\mathbb{G}_{3,1}$ , podemos representar os elementos da base que contém  $e_\infty$  e  $e_\circ$ . Por exemplo,

$$e_{1\infty} = cb(e1, true, false, 1.0)$$

Da mesma forma que os elementos básicos, os multivetores também podem ser representados. Neste caso, um multivetor será visto como uma soma de elementos básicos. Deste modo, poderemos representar elementos como  $a + \frac{1}{2}a^2e_\infty + e_\circ$ , que é a imersão de um vetor  $a \in \mathbb{R}^n$ , e quaisquer outros elementos de  $\mathbb{G}_n$ ,  $\mathbb{G}_{n,1}$  e  $\mathbb{G}_{n+1,1}$ .

Com esses dois tipos de representação já é possível utilizar a maioria das operações da Álgebra Geométrica, porém para algumas funções como a inversão, projeção e afastamento, se faz necessário a criação de um representante para blades. Estas serão representadas pelo produto exterior de multivetores l.i de grade 1, assim como na definição teórica.

Uma função muito utilizada é a de imersão no Espaço Conforme (3.23), tal função tem grande importância, pois ela será utilizada para a criação de representantes dos objetos geométricos.

## 4.2.2 Extração de Parâmetros

Caso nosso objetivo seja encontrar o raio e o centro da circunferência que contem os pontos  $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ , onde  $a = (0, 1)$ ,  $b = (2, 1)$  e  $c = (1, 2)$ ,

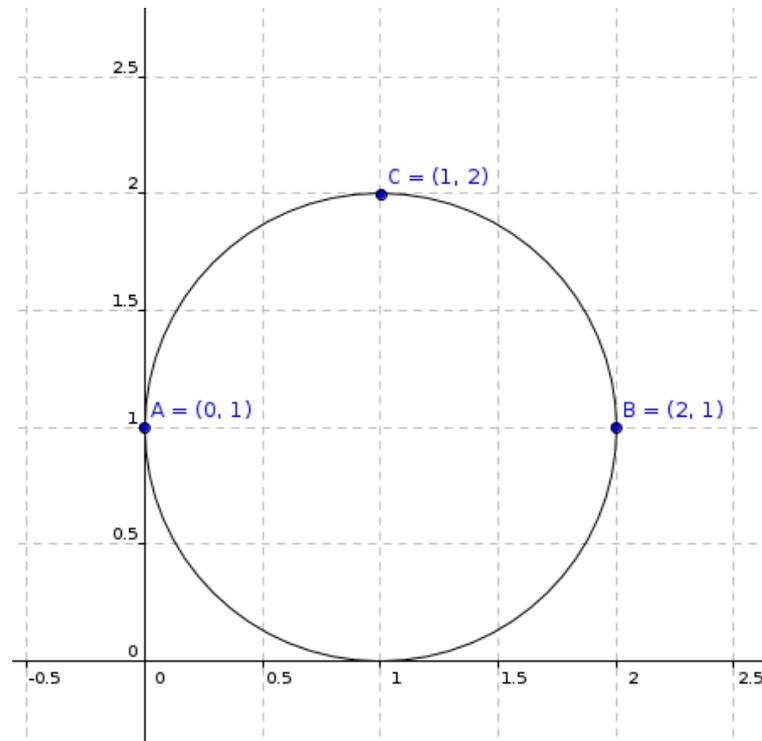


Figura 4.1: Circunferência contendo os pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

utilizando a biblioteca os pontos serão definidos da seguinte forma:

$$a = [0.0, 1.0],$$

$$b = [2.0, 1.0],$$

$$c = [1.0, 2.0].$$

Assim, podemos tomar  $A = \mathcal{C}(a)$ ,  $B = \mathcal{C}(b)$  e  $C = \mathcal{C}(c)$  que são as imersões dos pontos  $a, b$  e  $c$  no subespaço Conforme de  $\mathbb{G}_{3,1}$ . Em notação definida na biblioteca faremos

$$A = \text{conformal}(a),$$

$$B = \text{conformal}(b),$$

$$C = \text{conformal}(c).$$

Com isso, já é possível calcular o representante da circunferência que contém os pontos

$a, b$  e  $c$ , esse representante será o produto exterior das imersões  $A, B$  e  $C$ , isto é,

$$S = A \wedge B \wedge C.$$

Como a circunferência está contida no espaço  $\mathbb{R}^2$ , podemos usar as equações para extração de parâmetros da esfera dada por 3.48 apresentadas na Subseção 3.6.2,

$$\begin{aligned} r^2 &= (SS \cdot SS) / ((SS \cdot cb(id, true, false, 1.0)) \cdot (SS \cdot cb(id, true, false, 1.0))), \\ x &= \text{projection}(SS, cb(e12, false, false, 1.0)) / (SS \cdot cb(id, true, false, -1.0)), \end{aligned}$$

onde  $SS = \text{dual}(S)$  ou, na notação já conhecida,  $SS = S^*$ ,  $r^2$  é o quadrado do raio e  $x$  é o centro da circunferência. Assim obteremos o raio 1 e centro  $(1, 1)$ .

### 4.3 Aplicações Avançadas

Uma introdução ao problema de detecção de curvas será apresentada nesta seção, seguida de uma breve explicação sobre a Transformada de Hough que servirá como base para o algoritmo utilizando Álgebra Geométrica. Nossa abordagem do problema de detecção no contexto de Álgebra Geométrica pode ser visto como um caso particular do estudo apresentado em [13].

#### 4.3.1 Introdução ao Problema de Detecção de Curvas

Um problema de detecção de curvas pode ser formulado da seguinte forma: Considere uma imagem binarizada, onde a quantidade de pontos que representa essa imagem é dada por  $t$ . Neste caso, podemos associá-la a um conjunto de pontos do plano denotado por  $Ib = \{(a_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i = 1, \dots, t\}$ . Se quisermos detectar uma curva definida por  $n$  parâmetros  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  representada por  $\phi(x_1, \dots, x_n, a, b) = 0$ , onde  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . A priori,  $\phi$  pode descrever qualquer curva, por conveniência, vamos considerar o caso em que  $\phi$  representa uma circunferência. Formalmente, pretendemos encontrar um subconjunto de pontos  $FIb \subset Ib$  e parâmetros  $x_1, x_2, x_3$  tais que  $\forall (a, b) \in FIb$  tem-se  $\phi(x_1, x_2, x_3, a, b) = (a - x_1)^2 + (b - x_2)^2 - x_3^2 \approx 0$ .

### 4.3.2 Transformada de Hough

A Transformada de Hough é uma técnica que pode ser usada para a detecção de formas geométricas em uma imagem. A Transformada de Hough clássica é geralmente usada para a detecção de curvas regulares, como circunferências, elipses, retas, etc. Ideias baseadas na Transformada de Hough dependem da discretização do espaço de busca dos parâmetros a serem determinados e uma matriz de acumulação é gerada e associada a essa discretização [12].

Como mencionado em [5], a transformada foi idealizada por Paul Hough, na década de 60, com o objetivo inicial relacionado a identificação do trajeto de partículas subatômicas. A partir da equação de uma reta, Hough transportava todos os pontos da imagem para um espaço transformado, com isso, dado um ponto  $P$  da imagem, variam-se os coeficientes da equação. Então é gerada uma reta cujo conjunto de coordenadas de cada ponto sobre descreve todas as possíveis retas passando pelo ponto  $P$ .

Dado um conjunto de pontos no espaço imagem, se os pontos forem colineares, então teremos uma interseção no conjunto das retas que representam esses pontos no espaço transformado. Desta forma, basta transportar todos os pontos para o espaço transformado e então buscar as interseções entre as retas representantes. Quanto maior o número de retas em uma mesma interseção, maior será o número de pontos colineares.

Devido a alguns problemas com o método inicial, tais como, a não limitação do espaço transformado e a impossibilidade de determinadas representações como retas verticais, Richard O. Duda e Peter E. Hart em [12] propuseram um método alternativo para a técnica de Hough, qual conhecemos hoje como a Transformada de Hough. Esse poderia ser utilizado também na detecção de outras curvas, como por exemplo circunferências.

Para esclarecer o funcionamento do método, vamos usar um exemplo simples. Suponhamos que o espaço imagem contenha apenas 11 pontos, conforme mostrado na Figura 4.2 e queremos encontrar a circunferência que melhor se adéqua a esses pontos. Dado um ponto  $(a, b)$ , a equação utilizada neste caso será

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0. \quad (4.1)$$

No caso geral, deve-se variar o raio e as coordenadas do centro, gerando assim uma matriz de acumuladores tridimensional, no entanto, fixaremos o raio com valor  $\sqrt{2}$  para facilitar a visualização.

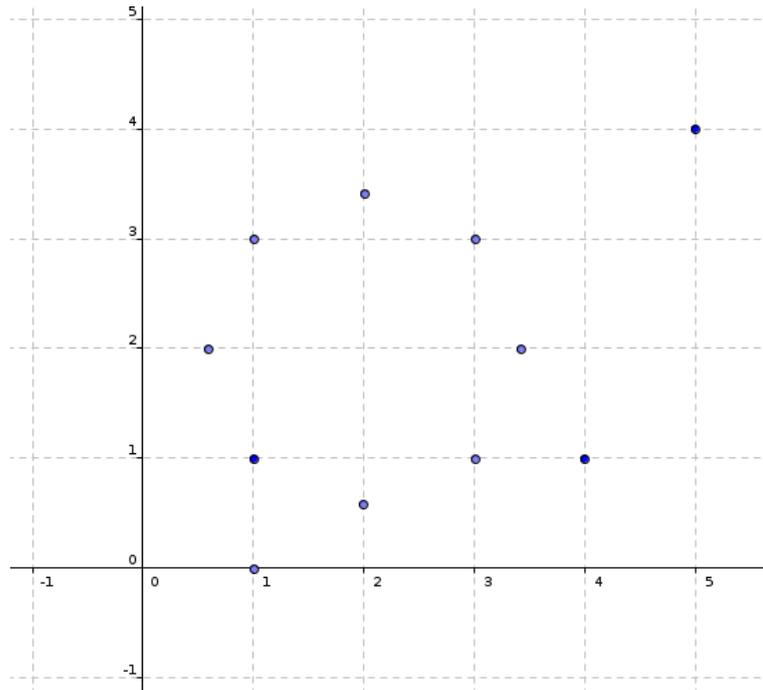


Figura 4.2: Pontos no espaço imagem.

A Tabela 4.1 mostra como fica a matriz acumuladora de pontos no final do processo.

$a \backslash b$	-1	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	2	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	8	0	2	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	0	1	0	2	1	1	1
5	0	1	0	1	0	0	0

Tabela 4.1: Matriz de acumuladores

A ideia da Transformada de Hough apresentada é a mais grosseira possível pois o custo de armazenamento resultante da discretização dos parâmetros é alto. Uma forma, mais sensata é utilizar algum tipo de parametrização antes da discretização. Isso faz com que o espaço transformado reduza de tamanho. O Algoritmo 1, resume esta ideia, por considerar no problema de detecção de circunferências uma parametrização por

coordenadas polares. No geral, o tipo de parametrização depende do tipo de curva que se deseja obter.

---

**Algoritmo 1** Transformada de Hough para detecção de círculos.

---

Defina  $Ac = 0$  a matriz de acumulação e  $r_{min}, r_{max} \in \mathbb{N}$ , valores mínimo e máximo para o possível raio do círculo.

- 1: Para  $r = r_{min}, \dots, r_{max}$  faça
  - 2:   Para  $(a, b) \in Ib$  faça
  - 3:     Para  $\theta = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 360^\circ$  faça
  - 4:        $i = a - r \cos \theta$
  - 5:        $j = b - r \sin \theta$
  - 6:        $Ac[i, j, r] = Ac[i, j, r] + 1$
  - 7:     Fim.
  - 8:   Fim.
  - 9: Fim.
  - 10: Determine  $i, j, k$  tais que  $\max(Ac[:, :, :]) = Ac[i, j, k]$ .
  - 11: Retorne  $x_1 = i, x_2 = j, x_3 = k$ .
- 

A matriz  $Ac$  corresponde ao sistema de votação. A entrada da matriz que teve maior valor irá fornecer os parâmetros procurados, que no caso do exemplo anterior a entrada será  $(2, 2)$ .

### 4.3.3 Versão Baseada em Álgebra Geométrica

A ideia geral desta versão é diminuir quantidade de parâmetros a serem discretizados, permitindo assim uma melhor visualização do problema. O método se concentra em utilizar os conceitos citados na Seção 3.6 para a extração dos parâmetros.

Suponha que queiramos encontrar a circunferência que melhor se adéqua ao conjunto imagem  $Ib$ . Primeiramente devemos tomar três pontos na imagem  $Ib$ . Em seguida calcular as imersões desses pontos no espaço Conforme para que possamos obter o produto exterior dessas imersões. Isso gera o representante da circunferência que contém os três pontos. Por fim, aplicar as Equações 3.48 e verificar se a circunferência obtida satisfaz as condições previamente estabelecidas. Podemos resumir isso pelo seguinte algoritmo:

---

**Algoritmo 2** Detecção de círculos utilizando Álgebra Geométrica

---

Considere  $m$  o número mínimo de pontos necessários sobre a curva.

- 1: Para  $a, b, c \in Ib$  faça
- 2:  $(i, j) = \frac{\mathcal{P}_{e_{12}}(S^*)}{-S^* \cdot e_\infty}$
- 3:  $k = \sqrt{\frac{(S^*)^2}{(S^* \cdot e_\infty)^2}}$
- 4:  $p$  recebe a quantidade de pontos sobre o círculo
- 5: Se  $p \geq m$ .
- 6: Fim
- 7: Fim
- 8: Retorne  $c = (i, j), r = k$ ,

onde  $S^* = (\mathcal{C}(a) \wedge \mathcal{C}(b) \wedge \mathcal{C}(c))^*$ .

---

#### 4.3.4 Experimentos Numéricos

Alguns testes foram feitos onde pudemos comparar o desempenho dos métodos. Em todos os testes, o método baseado em Álgebra Geométrica se mostrou bastante superior, tanto em tempo de execução quanto em memória utilizada. Tais testes foram baseados em exemplos artificiais, cuja intenção foi simplesmente de analisar o potencial dos métodos e com isso poder compará-los.

Os resultados obtidos a partir desses testes estão dispostos na Tabela 4.2. Para a realização dos testes usamos vários conjuntos de pontos contendo uma circunferência de raio 25 e centro (101, 42). Os conjuntos foram dispostos em arquivos, onde em cada arquivo é variado a quantidade de pontos fora da circunferência e a perturbação dos pontos sobre a circunferência.

Um arquivo do tipo datafile-50-300-30-10.dat é interpretado como sendo um conjunto com 50 pontos sobre a circunferência, numa imagem  $300 \times 300$ , com 30 pontos gerados aleatoriamente e 10 pontos da circunferência perturbados.

Teste	Algoritmo 1		Algoritmo 2	
	Tempo (s)	Memória (Mb)	Tempo (s)	Memória (Mb)
datafile-50-300-30-10	2.545263	349	0.492775	56
datafile-50-300-30-20	2.358091	347	0.553820	56
datafile-50-300-30-30	2.359921	347	0.353660	56
datafile-50-300-30-40	2.324341	347	0.348233	56
datafile-50-300-30-50	2.481869	347	0.360162	56
datafile-50-300-300-10	9.036132	1281	1.446017	253
datafile-50-300-300-20	9.058478	1281	1.515439	253
datafile-50-300-300-30	8.904074	1281	1.572077	253
datafile-50-300-300-40	8.933398	1281	1.554663	253
datafile-50-300-300-50	9.250920	1281	1.482391	253
datafile-100-300-300-10	10.228782	1455	0.530292	88
datafile-100-300-300-20	10.454967	1457	0.584770	88
datafile-100-300-300-30	10.886340	1455	0.575704	88
datafile-100-300-300-40	10.847179	1455	0.524168	88
datafile-100-300-300-50	10.739993	1455	0.586106	88
datafile-100-300-300-60	10.584884	1455	0.563553	88
datafile-100-300-300-70	10.691256	1455	0.515590	88
datafile-100-300-300-80	10.813666	1455	0.602718	88
datafile-100-300-300-90	10.943228	1455	0.627213	88
datafile-100-300-300-100	10.932202	1455	0.632773	88

Tabela 4.2: Tabela de comparação dos métodos.

A queda em tempo e memória nos arquivos com maior quantidade de pontos se dá pelo fato do Algoritmo 2 não precisar percorrer todas as combinações de pontos, ou seja, uma vez que foi encontrada uma circunferência que satisfizesse as condições previamente estabelecidas, o método retorna esse resultado e para.

### 4.3.5 Detecção de Esferas

Podemos fazer a extensão para a detecção de esferas de forma muito simples, uma vez que só se faz necessário uma definição de um *layout*(3) ao invés de 2, como foi no caso da detecção de circunferências.

O algoritmo para a detecção de esferas necessita de poucas alterações, além da redefinição do *layout*, para um ambiente de dimensão maior, a única alteração é que ao invés de serem tomados pontos três a três, como no caso da esfera, serão tomados os pontos quatro a quatro. Com isso, a detecção se dá praticamente da mesma forma que para circunferências. O Algoritmo 3 deixa claro essa simplicidade na extensão do problema.

---

**Algoritmo 3** Detecção de esferas utilizando Álgebra Geométrica

---

Considere  $m$  o número mínimo de pontos necessários sobre a curva.

- 1: Para  $a, b, c, d \in Ib$  faça
- 2:  $(i, j) = \frac{\mathcal{P}_{e_{123}}(S^*)}{-S^* \cdot e_\infty}$
- 3:  $k = \sqrt{\frac{(S^*)^2}{(S^* \cdot e_\infty)^2}}$
- 4:  $p$  recebe a quantidade de pontos sobre o círculo
- 5: Se  $p \geq m$ .
- 6: Fim
- 7: Fim
- 8: Retorne  $c = (i, j), r = k$ ,

onde  $S^* = (\mathcal{C}(a) \wedge \mathcal{C}(b) \wedge \mathcal{C}(c) \wedge \mathcal{C}(d))^*$ .

---

## 4.4 Considerações Finais

A Álgebra Geométrica tem uma grande vantagem quando se trata da “comunicação” entre objetos algébricos e geométricos, com maior facilidade na associação entres eles. Tendo isso em vista, estudamos alguns conceitos de Álgebra Geométrica, incluindo representações nos espaços Projetivo e Conforme. Dessa forma, tivemos uma boa base que teve grande importância no desenvolvimento do trabalho.

Com o objetivo de tornar possível a computação utilizando os conceitos de Álgebra Geométrica criamos a biblioteca LIGA. Tal biblioteca tornou possível a realização

de operações entre elementos desse conjunto, conseqüentemente, a criação de algoritmos baseados nesses conceitos se torna factível.

Para exemplificar seu uso, um algoritmo seguindo os princípios da Transformada de Hough para detecção de curvas foi desenvolvido com base na biblioteca LIGA. Esse algoritmo foi designado para a detecção de circunferências, podendo facilmente ser modificado para a detecção de outras formas geométricas como retas, parábolas, planos, esferas, etc.

A biblioteca LIGA se mostrou bastante satisfatória na representação dos conceitos da Álgebra Geométrica citados no início deste trabalho. Foi possível programar algo que, apesar de estar numa versão inicial de testes e desenvolvimento, representasse os elementos e funções da Álgebra Geométrica de forma satisfatória.

As funções da biblioteca apresentaram uma boa precisão, o que mostra isso é, na aplicação de extração de parâmetros, as funções tiveram uma margem de erro consideravelmente baixa, o que tornou possível a detecção de circunferências e até mesmo de esferas, que dependem de um processo iterativo, onde essas funções são aplicadas diversas vezes.

Vale mencionar que, um diferencial da nossa biblioteca se dá na escolha do *layout*, uma vez que podemos trabalhar com espaços de diversas dimensões, diferente de outras bibliotecas e programas, que nos permitem trabalhar apenas em um determinado número de dimensões.

O algoritmo se mostrou para a detecção de circunferências e esferas se mostrou bastante eficiente, visto que algumas verificações são muito mais rápidas por meio da Álgebra Geométrica e nossa variação do método fez com que o sistema de votação se tornasse desnecessário.

Por fim, acreditamos que a biblioteca LIGA pode ser frequentemente melhorada, através da correção de erros e adição de novas funções, se necessário. Um estudo mais detalhado do algoritmo apresentado aqui para a detecção de circunferências e esferas, assim como a implementação de novos algoritmos utilizando a biblioteca LIGA, são questões importantes que podemos trabalhar futuramente.

# Referências Bibliográficas

- [1] clifford: Geometric algebra for python. <https://clifford.readthedocs.io/en/latest/>. Accessed: 2018-01-19.
- [2] R. Abłamowicz and B. Fauser. Clifford/bigebra, a maple package for clifford (co)algebra computations, 2011. ©1996-2011, RA&BF.
- [3] R. Alves et al. Álgebra de clifford aplicada ao cálculo de estruturas moleculares. 2013.
- [4] A. Buchmann. A brief history of quaternions and of the theory of holomorphic functions of quaternionic variables. *arXiv preprint arXiv:1111.6088*, 2011.
- [5] J. M. Camargo. Detecção de curvas em imagens com auxílio de funções ordenadas. 2015.
- [6] Valter S. Camargo et al. *Álgebra geométrica conforme e geometria de distâncias*. PhD thesis, 2015.
- [7] W. K. Clifford. *Mathematical papers*. Macmillan and Company, 1882.
- [8] Pablo Colapinto. Versor: Spatial computing with conformal geometric algebra. Master's thesis, University of California at Santa Barbara, 2011. Available at <http://versor.mat.ucsb.edu>.
- [9] Chris J. L. Doran. *Geometric algebra and its application to mathematical physics*. PhD thesis, University of Cambridge, 1994.
- [10] Chris J. L. Doran and Anthony Lasenby. *Geometric algebra for physicists*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

- [11] L. Dorst, D. Fontijne, and S. Mann. *Geometric Algebra for Computer Science*. Morgan Kaufmann Burlington, 2010.
- [12] R. O. Duda and P. E. Hart. Use of the hough transformation to detect lines and curves in pictures. *Communications of the ACM*, 15(1):11–15, 1972.
- [13] Leandro A. F. Fernandes. On the generalization of subspace detection in unordered multidimensional data. 2010.
- [14] Leandro A. F. Fernandes, Carlile Lavor, and Manuel M. Oliveira. *Álgebra Geométrica e Aplicações*. volume 85, Notas em Matemática Aplicada. SBMAC, 2017.
- [15] Hermann Grassmann. Die lineale ausdehnungslehre, ein neuer zweig der mathematik dargestellt and durch anwendungen auf die ubrigen zweige der mathematik, wie auch auf der statik, mechanik, die lehre vom magnetismus und die krystallonomie erläutert. *Wigand, Leipzig*, 1844.
- [16] W. R. Hamilton. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine*, 25(3):489–495, 1844.
- [17] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge university press, 2003.
- [18] David Hestenes. *New foundations for classical mechanics*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] Eckhard Hitzer and Christian Perwass. Interactive 3d space group visualization with clucalc and the clifford geometric algebra description of space groups. *Advances in applied Clifford algebras*, 20(3):631–658, 2010.
- [20] P.V. Hough. Method and means for recognizing complex patterns, December 18 1962. US Patent 3,069,654.
- [21] Jr. J. Vaz. A álgebra geométrica do espaço-tempo e a teoria da relatividade. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 22(1), 2000.
- [22] Jr. J. Vaz and Roldão da Rocha Jr. *An introduction to Clifford algebras and spinors*. Oxford University Press, 2016.

- [23] Christian Perwass, Herbert Edelsbrunner, Leif Kobbelt, and Konrad Polthier. *Geometric algebra with applications in engineering*, volume 20. Springer, 2009.
- [24] Ricardo S. Vieira. *Tópicos de álgebra geométrica*. 2006.