



Centro de Ciências Exatas  
Universidade Estadual de Maringá  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
(Doutorado)

# Existência, Não Existência global de Solução e Estabilidade Assintótica para a Equação da Onda com Memória.

**Flávio Alexandre Falcão Nascimento**

**Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti**

**Maringá - PR  
2013**

Flávio Alexandre Falcão Nascimento

Existência, Não Existência global de Solução e  
Estabilidade Assintótica para a Equação da Onda com  
Memória.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Matemática do Departamento de Matemática,  
Centro de Ciências Exatas da Universidade Esta-  
dual de Maringá, como requisito parcial para a  
obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Maringá - PR

2013

Flávio Alexandre Falcão Nascimento

Existência, não existência global de solução e  
estabilidade assintótica para a equação da onda com  
memória

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

Nascimento, Flávio Alexandre Falcão  
N244e Existência, não existência global de solução e  
estabilidade assintótica para a equação da onda com  
memória / Flávio Alexandre Falcão Nascimento. --  
Maringá, 2013.  
100 f.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-  
Graduação em Matemática, 2013.

1. Equação da Onda. 2. Equação da Onda com  
memória - Existência e não Existência de Solução. 3.  
Estabilidade Assintótica. I. Cavalcanti, Marcelo  
Moreira, orient. II. Universidade Estadual de  
Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-  
Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 21.ed. 515.353

GVS-000706

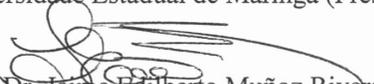
FLÁVIO ALEXANDRE FALCÃO NASCIMENTO

EXISTÊNCIA, NÃO EXISTÊNCIA GLOBAL DE SOLUÇÃO E  
ESTABILIDADE ASSINTÓTICA PARA A EQUAÇÃO DA ONDA COM  
MEMÓRIA

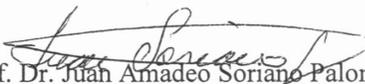
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

  
Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti  
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

  
Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera  
Laboratório Nacional de Computação Científica

  
Profa. Dra. Luci Harue Fatori  
Universidade Estadual de Londrina

  
Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino  
DMA/Universidade Estadual de Maringá

  
Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti  
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 02 de dezembro de 2013.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática - DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

# Agradecimentos

A Deus por ter me abençoado todos os dias de minha vida, e em especial no período desse trabalho.

À minha esposa Paula e aos nossos filhos, Beatriz, Matheus e Paulo Filipe, pelo apoio e paciência, na esperança de ver este trabalho concretizado.

Ao meu orientador, Marcelo M. Cavalcanti, pois sua competência foi crucial para conclusão deste trabalho.

Aos meus pais José Montano e Maria Irene, por me colocarem no mundo e por suas orações, que creio terem sido diárias.

Aos meus orientadores de mestrado Nelson Nery e Ana Maria, ou carinhosamente, Anita, por quem tenho muito carinho e gratidão.

Aos nossos amigos Carlos e Regina, que nos receberam em sua casa aqui em Maringá, quando aqui chegamos, sem sequer nos conhecerem.

À todos os meus queridos amigos e irmãos em Cristo da Igreja Batista Sião, aqui em Maringá, bem como os da Comunidade Resgate em Limoeiro do Norte.

A todos os amigos especiais que a matemática me trouxe: Odair, Marcão, Miriam, Henrique, Wenden, Wellington, Flávio Dias, Cesar, Rodrigo, Carlos, Wilkson, Ailton Forte e Carol, pelas boas conversas e pelos trabalhos realizados.

A todos os professores e funcionários e alunos do Departamento de Matemática da UECE - FAFIDAM, pelo apoio e confiança.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, entre eles os que foram meus professores: Valéria Cavalcanti, Juan Palomino, Marcelo Escudeiro e Ryuichi Fukuoka.

Aos professores Jaime Rivera, Juan Palomino, Valéria Cavalcanti e Luci Fatori pelas correções da tese, críticas e sugestões.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática da UEM, entre eles a Lúcia que sempre me atendeu com muita satisfação.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

*Se projetas alguma coisa, ela te sairá bem e a luz brilhará em teus caminhos. Jó 22:28*

# Resumo

Neste trabalho estudamos a existência bem como a não existência global e o comportamento assintótico de soluções para equação da onda com memória.

Inicialmente, estudamos o seguinte modelo de equação viscoelástica da onda semi-linear sujeito à um amortecimento não linear e um termo de fonte não linear atuando no interior e outro na fronteira:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + h(u_t) = f_1(u), & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds = f_2(u), & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado do  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , com uma fronteira regular  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ . Aqui,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  são fechados, disjuntos e  $\nu$  representa o vetor normal unitário exterior à  $\Gamma$ .

Posteriormente, estudamos o comportamento assintótico da energia associada a seguinte equação viscoelástica da onda:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - \int_0^t g(t-s)\text{div}[a(x)\nabla u(s)] ds - b(x)f(u_t) & \text{em } M \times ]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \times ]0, \infty[, \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 & \text{em } M \end{cases}$$

onde  $(M, \mathbf{g})$  é uma variedade Riemanniana compacta  $n$ -dimensional com bordo e  $\mathbf{g}$  denota uma métrica Riemanniana de classe  $C^\infty$ . Ainda temos que  $a(x)$ ,  $b(x)$  são funções responsáveis pelo mecanismo de amortecimento, sujeitas a hipótese  $a(x) + b(x) \geq \delta > 0$ , para todo  $x \in M$ .

# Abstract

In this work, we study the existence, the global non-existence and the asymptotic behavior of solutions for the wave equation with memory. First, we deal with the solutions for the following model of the semilinear viscoelastic wave equation with a nonlinear damping term and nonlinear source terms acting on the domain and on the boundary:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + h(u_t) = f_1(u), & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds = f_2(u), & \text{on } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a bounded domain of  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , with a smooth boundary  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ . Here,  $\Gamma_0$  and  $\Gamma_1$  are closed and disjoint and  $\nu$  represents the unit outward normal to  $\Gamma$ .

Subsequently we study the asymptotic behavior of the energy associated with the following viscoelastic wave equation:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - \int_0^t g(t-s)\text{div}[a(x)\nabla u(s)] ds - b(x)f(u_t) & \text{in } M \times ]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{on } \partial M \times ]0, \infty[, \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 & \text{in } M \end{cases}$$

where  $(M, \mathbf{g})$  is a  $n$ -dimensional compact Riemannian manifold with boundary,  $\mathbf{g}$  denoting a Riemannian metric of class  $C^\infty$ . We still have that  $a(x)$ ,  $b(x)$  are localized functions responsible by the damping mechanism, satisfying the assumption  $a(x) + b(x) \geq \delta > 0$ , for all  $x \in M$ .

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>6</b>
<b>Resumo</b>	<b>8</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>18</b>
1.1 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais . . . . .	18
1.1.1 Funções Escalarmente Contínuas . . . . .	22
1.2 Resultados Auxiliares . . . . .	22
1.2.1 Teorema de Carathéodory . . . . .	25
1.3 Espaço de Sobolev em Variedades . . . . .	25
<b>2 Existência e Não Existência de Solução Global para a Equação Viscoelástica da Onda</b>	<b>29</b>
2.1 Introdução . . . . .	29
2.2 Notações e Hipóteses . . . . .	30
2.3 Existência de Solução . . . . .	35
2.3.1 Prova do Teorema 2.6 . . . . .	37
2.3.2 Soluções Fracas . . . . .	46
2.4 Não Existência de Solução Global . . . . .	52

2.4.1	Prova do Teorema 2.9 . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Taxas Intrínsecas de Decaimento para a Equação da Onda sob uma Variedade sujeita à com Dissipação Viscoelástica e Friccional</b>	<b>63</b>
3.1	Introdução . . . . .	63
3.2	Hipóteses e Resultado Principal . . . . .	64
3.3	Prova do Lema 3.11 . . . . .	70
3.3.1	Recuperando a Energia Cinética . . . . .	72
3.3.2	Recuperando a Energia Potencial . . . . .	82
3.3.3	Recuperando a Energia Viscoelástica $E(t)$ . . . . .	85
3.3.4	Emplos de Taxas Explícitas de Decaimento . . . . .	88
	<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>

# Introdução

Problemas envolvendo o termo de memória, em diferentes tipos de Equações Diferenciais Parciais, tem sido estudado nos últimos anos. Apenas para exemplificar mencionamos a equação do calor [6, 29, 33], equação da placa [14, 15, 5, 51], sistema de Timoshenko [71, 4, 35, 74] e suas referências. É interessante observar que nesses modelos, a presença do termo de memória e a falta de uma estrutura de semigrupo tornam a análise mais delicada.

A partir desse momento focaremos na equação de onda com memória, ou equação viscoelástica da onda, a qual é nosso objeto de estudo nesse trabalho.

A seguinte equação viscoelástica da onda,

$$(1) \quad u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(x, s) ds + h(u_t) = f(u),$$

em  $\Omega \times (0, \infty)$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com fronteira, bem regular, sujeita a condições iniciais e condições do tipo Dirichlet na fronteira foi estudada por Fabrizio e Polidoro [31], quando  $f = 0$  e  $h(u_t) = au_t$  e também por Cavalcanti et al [12] no caso onde  $f = 0$  e  $h(u_t) = a(x)u_t$ . Mais precisamente, Cavalcanti et al [12] estudaram o seguinte problema

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(x, s) ds + a(x)u_t = 0$$

em  $\Omega \times (0, \infty)$ , onde  $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função que pode ser nula sobre uma parte do domínio  $\Omega$ . Assumindo que  $a(x) \geq a_0$  sobre  $\omega \subset \Omega$  e

$$-\zeta_1 g(t) \leq g'(t) \leq -\zeta_2 g(t), \quad \forall t \geq 0,$$

os autores mostraram um resultado de decaimento exponencial sob algumas restrições sobre o subconjunto  $\omega$ . O resultado em [12] foi melhorado por Berrimi e Messaoudi em [9], onde eles mostraram o mesmo resultado como em [12], sob condições mais fracas sobre a função localizadora  $a$  e a função de relaxamento  $g$ . Em [2] uma versão abstrata mais geral da equação (1) foi considerado e um resultado de estabilização uniforme foi obtido. De fato, as taxas de

decaimento obtidas em [2] estão de acordo com aquelas já alcançadas em [9] para a equação (1).

Usando o método dos multiplicadores, Cavalcanti e Oquendo [13] mostraram alguns resultados de estabilidade para um problema mais geral que aquele considerado em [12]. Mais precisamente, eles investigaram o seguinte problema

$$(2) \quad u_{tt} - k_0 \Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\Delta u(x,s)]ds + b(x)h(u_t) + f(u) = 0,$$

e provaram que sob a mesma condições que em [12] para a função  $g$  e com  $a(x)+b(x) \geq \rho > 0$ , um resultado de estabilidade exponencial se  $g$  decai exponencialmente e  $h$  é linearmente limitada, e um resultado de estabilidade polinomial para  $g$  decaindo polinomialmente.

Neste trabalho estudamos dois problemas de equação viscoelástica da onda, onde no primeiro provamos existência e não existência de solução global, enquanto no segundo, mostramos resultados de comportamento assintótico. Para esse propósito organizamos esse trabalho da seguinte forma.

No Capítulo 1, apresentamos, sem demonstração, alguns resultados preliminares, com o propósito de deixar a leitura desse trabalho o mais auto suficiente possível.

No Capítulo 2, consideramos o seguinte modelo de equação viscoelástica da onda semilinear com um amortecimento não linear e uma fonte não linear no interior e outra na fronteira:

$$(3) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + h(u_t) = f_1(u), & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds = f_2(u), & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado do  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , com uma fronteira regular  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ . Aqui,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  são fechados, disjuntos e  $\nu$  representa o vetor normal unitário exterior à  $\Gamma$ .

O problema (3) foi estudado por Levine e Smith [47] no caso particular em que  $g = h = f_1 = 0$ , e resultados de não existência de solução foram estabelecidos quando a energia associada a solução é negativa.

Na ausência dos termos de fonte (i.e.  $f_1 = f_2 = 0$ ) e se o amortecimento não linear  $h(u_t)$  está agindo na fronteira  $\Gamma_1$ , o problema (3) foi investigado em [18]. Sem impor qualquer hipótese de restrição de crescimento sobre o termo de amortecimento eles provaram taxas de decaimento para a energia total do sistema usando o método dos multiplicadores. O mesmo problema de [18] foi estudado em [59] onde um resultado de decaimento explícito para uma

classe de funções de relaxamento e sem impor qualquer hipótese de restrição sobre o termo de amortecimento foi obtido.

Para  $f_1 = 0$ ,  $f_2(u) = |u|^{k-2}u$  e para um amortecimento da forma  $h(u_t) = |u_t|^{m-2}u_t$ , o problema (3) foi considerado recentemente em [52]. Sob algumas hipóteses apropriadas sobre a função de relaxamento  $g$  e para dados iniciais “pequenos”, a existência global de soluções e um decaimento geral para energia foi mostrado. Por outro lado, para  $f_1 = |u|^{p-2}u$  e  $f_2(u) = 0$ , Ha investigou o problema (3) em [36] com um termo de amortecimento não linear na fronteira,  $h(u_t)$ , e generalizou o resultado de [18] aplicando o método desenvolvido em [53]. Ele obteve taxas de decaimento uniforme sem impor qualquer hipótese de restrição de crescimento sobre o termo de amortecimento  $h(u_t)$ .

Com respeito a “blow up” da solução em tempo finito, Messaoudi [57] estudou o problema (1) com  $h(u_t) = |u_t|^{m-2}u_t$  e mostrou que se a energia inicial é negativa, então a solução explode em tempo finito. Ver também [39, 40, 73, 82] para resultados semelhantes.

O estudo da equação viscoelástica da onda com termos de fonte no interior e na fronteira nos parece mais desafiador. Na verdade, poucos resultados são conhecidos para este tipo de problema.

Cavalcanti et al estudaram em [17] o problema

$$(4) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f_1(u), & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + u + h(u_t) = f_2(u), & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde sob algumas hipóteses sobre os termos de fonte e amortecimento eles mostraram a boa colocação do problema. Além disso, se o amortecimento na fronteira domina o termo de fonte, eles provaram existência de solução global e taxas de decaimento ótimo, assumindo pequenez dos dados iniciais. Mais especificamente, eles provaram que as taxas de decaimento são dadas implicitamente como soluções para uma E.D.O de primeira ordem e depende do comportamento do amortecimento  $h(u_t)$ . Por outro lado, eles provaram um resultado de “blow up” no caso em que o termo de fonte na fronteira domina o amortecimento e os dados iniciais são suficientemente grandes. O resultado de “blow up” deles estende o obtido por Vitillaro em [80] e [81] para uma situação mais geral. Um problema similar a (4) foi considerado em [42], onde os termos não lineares  $f_1(u)$  e  $f_2(u)$  representam fontes atrativas, i.e.  $f_i(u)u \leq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Sob algumas fracas condições geométricas sobre  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  e sem a hipótese que  $h$  tem um comportamento polinomial próximo de zero, eles provaram que a energia total do problema decai tão rápido quanto a solução de alguma E.D.O associada. Mais precisamente, eles generalizaram o método usado para obter estimativas de decaimento uniforme quando  $h$  tem um comportamento polinomial próximo de zero.

Nosso principal objetivo nesse capítulo é estender os resultados acima para a equação viscoelástica da onda(3). A principal dificuldade na análise deste problema é a presença do termo de fonte não linear na fronteira  $\Gamma_1$ .

Agora passamos a descrever como procederemos para contornar tais dificuldades e obter os resultados desejados. Primeiro, nos preocupamos com a existência de solução global fraca, assumindo que os dados iniciais são tomados em um estratégico subconjunto do “potential well”. A fim de provar esse resultado, usamos argumentos devido à Lasiecka & Tataru [42] e Cavalcanti, Domingos Cavalcanti & Lasiecka em [17] adaptados para o nosso problema. Para isto, inicialmente, consideraremos soluções regulares do seguinte problema auxiliar.

$$(5) \quad \begin{cases} u_{tt,\mu} - \Delta u_\mu + \int_0^t g(t-s)\Delta u_\mu(s)ds + h(u_{t,\mu}) = f_{1,\mu}(u_\mu), & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u_\mu = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u_\mu}{\partial \nu}(s)ds + \frac{1}{\mu}u_{t,\mu} = f_{2,\mu}(u_\mu), & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u_\mu(x, 0) = u_\mu^0(x), \quad u_{t,\mu}(x, 0) = u_\mu^1(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde, para cada  $\mu \in \mathbb{N}$ , definimos,

$$(6) \quad f_{1,\mu}(s) := \begin{cases} |s|^{p-2}s, & |s| \leq \mu, \\ |\mu|^{p-2}\mu, & s \geq \mu, \\ |-\mu|^{p-2}(-\mu), & s \leq -\mu, \end{cases} \quad \text{e } f_{2,\mu}(s) := \begin{cases} |s|^{k-2}s, & |s| \leq \mu, \\ |\mu|^{k-2}\mu, & s \geq \mu, \\ |-\mu|^{k-2}(-\mu), & s \leq -\mu. \end{cases}$$

Obtemos uma sequência de soluções regulares do problema (5) que convergirá, quando  $\mu$  vai para o infinito, para a desejada solução fraca do problema (3). Este é o resultado da seção 2.3.

Posteriormente, na seção 2.4, mostraremos que sob algumas restrições sobre os dados iniciais e se a fonte interior domina o amortecimento interior, e com isto queremos dizer que  $\eta < p$ , então a solução deixa de existir quando  $t$  aproxima-se de um valor finito  $T^*$ . Para provar esse resultado, adaptamos o método introduzido em [32] e estendido por [79] e [58].

Os resultados referentes ao Capítulo 2, foram realizados em conjunto com o Professor Belkacem Said-Houari e publicados na revista “Communications on Pure and Applied Analysis”, conforme a referência [72].

No Capítulo 3, estudamos o comportamento assintótico da energia associada a solução de uma equação viscoelástica da onda sujeita a dois mecanismos de amortecimento, um viscoelástico e outro friccional, parcialmente distribuídos.

Seja  $(M, \mathbf{g})$  uma variedade compacta  $n$ -dimensional com bordo com  $\mathbf{g}$  denotando

uma métrica Riemanniana de classe  $C^\infty$ . Denotamos por  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita sobre  $M$  e por  $\Delta$  o operador Laplace-Beltrami sobre  $M$ .

Nosso objetivo é determinar a efetividade de cada amortecimento sobre as taxas de decaimento da energia total associada a solução do problema.

Especificamente, estudamos a seguinte equação viscoelástica da onda,

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(x)\nabla u(s)] ds - b(x)f(u_t) & \text{em } M \times ]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \times ]0, \infty[, \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 & \text{em } M \end{cases}$$

onde  $g$  é a função de relaxamento,  $f$  representa o amortecimento friccional e  $a(x)$ ,  $b(x)$  determinam o suporte de cada mecanismo de amortecimento através da seguinte hipótese,  $a(x) + b(x) \geq \delta > 0$  para todo  $x \in M$ . Assim, sobre o suporte de  $a(x)$  prevalece o amortecimento viscoelástico enquanto sobre o suporte de  $b(x)$  o amortecimento friccional prevalece.

Uma questão natural que nos chega nesse contexto é qual é a taxa de decaimento total em uma configuração mista, ou seja, com ambos os mecanismos de amortecimento, onde cada mecanismo pode ser caracterizado como produzindo certa taxa de decaimento em uma configuração solo. Mais especificamente,

1. Quando ambos, amortecimentos friccional e viscoelástico são aplicados com suporte essencial disjuntos, qual a taxa de decaimento total?
2. O que acontece se os dois mecanismos de amortecimento agem simultaneamente? É melhor em maior quantidade?

No decorrer do Capítulo 3 daremos respostas a essas perguntas. No entanto enquanto não fazemos isso, adiantamos que no caso em que mecanismo de amortecimento viscoelástico age sobre toda a variedade  $M$ , que a energia total associada a solução do nosso problema, decai para zero sob taxas ditadas pela dissipação viscoelástica. Quando mecanismo de amortecimento viscoelástico não age sobre todo  $M$ , então a taxa de decaimento da energia total é obtida pela pior taxa dos termos de amortecimento. No entanto, quando ambos os mecanismos de amortecimento, estão agindo e “competindo” então a dissipação viscoelástica é dominante. Este resultado foi mostrado quando o amortecimento friccional é linear, em [31], onde obtiveram decaimento exponencial para a equação da onda pura, e decaimento polinomial para a energia viscoelástica ou total. Aqui, não apenas recuperamos esse resultado em uma situação mais geral de amortecimentos parcialmente localizados, função de relaxamento mais geral e amortecimento friccional não linear, mas também estamos habilitados a mostrar que para o caso em que o amortecimento friccional é altamente não linear (portanto fraco), com suporte agindo em todo  $M$ , é o amortecimento viscoelástico que dita as “regras do jogo”, ou seja, que determina as taxas de decaimento da energia total. Em outras palavras, em

equações viscoelásticas da onda, o amortecimento friccional não é essencial e torna-se relevante apenas quando o suporte do amortecimento viscoelástico não está estritamente contido em  $M$ .

Uma característica adicional do nosso trabalho é a generalidade dos mecanismos de amortecimento, onde o amortecimento friccional não precisa ser quantificado na origem e o amortecimento viscoelástico é governado por uma inequação diferencial com uma função convexa. Com o intuito de obter resultados ótimos usamos um método introduzido em [42] o qual reduz o estudo das taxas de decaimento de uma EDP a análise das taxas de decaimento de uma solução de uma EDO não linear construída. Esse método foi recentemente estendido para equações viscoelásticas da onda [45] e a combinação dos dois será adaptado aqui ao nosso contexto.

Agora fornecemos uma breve revisão da literatura que é relevante para o problema estudado no Capítulo 3. Com respeito a domínios Euclidianos e na ausência de efeitos viscoelásticos, a linear ou semilinear equação da onda sujeita a amortecimento friccional localmente distribuído foi extensivamente estudado. Entre os muitos trabalhos, mencionamos alguns clássicos: [28], [44], [54], [64], [65], [76],[1], [84]. No que concerne a propagação da equação da onda sobre uma variedade compacta é importante citarmos: [7], [8], [21], [19], [20], [23], [38], [46], [61], [25], [67], [77].

Por outro lado, existe um grande número de trabalhos com respeito a equação viscoelástica da onda em domínios euclidianos, alguns desses citados no início dessa introdução, outros são [26, 70, 2, 3] e as referências deles. Em contraste, poucos estão relacionados a efeitos viscoelásticos localmente distribuídos, ver por exemplo, [13] e [70], mas ainda assim, sob domínios Euclidianos e sob hipóteses bastante restritivas sobre a função de relaxamento.

Apesar de nesse Capítulo, discutirmos o efeito viscoelástico “versus” o efeito friccional quando a energia se dissipa sobre uma variedade compacta, é importante observar que a técnica aqui usada independe da “geometria da variedade compacta”. Na verdade, a presença da viscoelasticidade, mesmo sobre uma pequena região, ver (3.2.5), desempenha um papel essencial. Sem a presença do efeito viscoelástico, a bem conhecida Condição de Controle Geométrico devido a Bardos-Lebeau-Rauch, [7] e Taylor, [75], é necessário afim de se obter taxas de decaimento exponencial.

Os resultados referentes ao Capítulo 3, foram realizados em conjunto com os professores Marcelo Moreira Cavalcanti, Valéria Domingos Neves Cavalcanti e Irena Lasiacka e aceitos para publicação na revista “Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B”, conforme a referência [22].

# Capítulo 1

## Preliminares

Nesse capítulo introduziremos alguns resultados básicos afim de tornar a leitura mais agradável. As demonstrações serão em sua maior parte omitidas, mas indicaremos as respectivas referências bibliográficas para os interessados.

### 1.1 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que são levados em conta as variáveis temporal e espacial, o qual é necessário para dar sentido a problemas de evolução.

Para cada  $t \in [0, T]$  fixo, interpretamos a função  $x \mapsto u(x, t)$  como um elemento do espaço  $X$ . Denotaremos este elemento como  $u(t) \in X$  com valores no espaço  $X$ .

Seja  $X$  um espaço de Banach,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

O espaço  $L^p(a, b; X)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , consiste das funções (classes) mensuráveis sobre  $[a, b]$  com imagem em  $X$ , ou seja as funções  $u : (a, b) \rightarrow X$ , tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left( \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço  $L^\infty(a, b; X)$  consiste das funções (classes) mensuráveis sobre  $[a, b]$  com imagem em  $X$ , as funções  $u : (a, b) \rightarrow X$  limitadas quase sempre em  $(a, b)$ . A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup \operatorname{ess} \|u(t)\|_X.$$

O espaço  $C^m([a, b]; X)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , consiste de todas as funções contínuas  $u : [a, b] \rightarrow X$  que possuem derivadas contínuas até a ordem  $m$  sobre  $[a, b]$ . A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^m \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Vejamos algumas propriedades desses espaços, as quais podem ser encontradas em [83]

**Proposição 1.1** *Sejam  $m = 0, 1, \dots$ , e  $1 \leq p < +\infty$ ,  $X$  e  $Y$  espaços de Banach.*

(a)  $C^m([a, b]; X)$  é um espaço de Banach sobre  $\mathbb{K}$ .

(b)  $L^p(a, b; X)$ ,  $1 \leq p < +\infty$  e  $L^\infty(a, b; X)$ , são espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$ .

(c)  $C([a, b]; X)$  é denso em  $L^p(a, b; X)$  e a imersão  $C([a, b]; X) \hookrightarrow L^p(a, b; X)$  é contínua.

(d) Se  $X$  é um espaço de Hilbert com produto escalar  $(\cdot, \cdot)_X$ , então  $L^2(a, b; X)$  é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u, v)_{L^2(a, b; X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X dt.$$

(e)  $L^p(a, b; X)$  é separável, se  $X$  for separável e  $1 \leq p < +\infty$ .

(f) Se  $X \hookrightarrow Y$ , então  $L^r(a, b; X) \hookrightarrow L^q(a, b; Y)$ ,  $1 \leq q \leq r \leq +\infty$ .

Lembremos que se  $U$  e  $\Psi$  são dois espaços vetoriais topológicos, temos que  $\mathcal{L}(U, \Psi)$  denota o espaço das funções lineares e contínuas de  $U$  em  $\Psi$ .

O espaço das distribuições sobre  $(a, b)$  com imagem em  $X$ , será denotado por

$$\mathcal{D}'(a, b; X).$$

Logo,  $\mathcal{D}'(a, b; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a, b); X)$ , ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e limitadas de  $\mathcal{D}(a, b)$  em  $X$ . A noção de convergência em  $\mathcal{D}'(a, b; X)$ : seja  $S \in \mathcal{D}'(a, b; X)$  logo  $S : \mathcal{D}(a, b) \mapsto X$  é linear e se  $\theta_\mu \rightarrow \theta$  em  $\mathcal{D}(a, b)$  então  $\langle S, \theta_\mu \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$  em  $X$ . Diremos que  $S_\nu \rightarrow S$  em  $\mathcal{D}'(a, b; X)$  se  $\langle S_\nu, \theta \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$  em  $X$ ,  $\forall \theta \in \mathcal{D}(a, b)$ . Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre  $(a, b)$  com valores no espaço de Banach  $X$ .

A derivada  $\frac{dS}{dt}$  para  $S \in \mathcal{D}'(a, b; X)$ , é definida com um único elemento deste espaço a qual satisfaz,

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = - \left\langle S, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b).$$

A função  $S \mapsto \frac{dS}{dt}$  é uma função contínua de  $\mathcal{D}'(a, b; X)$  sobre ele mesmo.

Agora se  $f \in L^2(a, b; X)$  definimos  $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a, b; X)$  por

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b)$$

a função  $f \mapsto \tilde{f}$  de  $L^2(a, b; X) \rightarrow \mathcal{D}'(a, b; X)$  é linear e contínua, e ainda é injetora e desta forma identificamos  $\tilde{f}$  com  $f$  e obtemos

$$L^2(a, b; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a, b; X)$$

O espaço  $L^1_{loc}(a, b; X)$  é o espaço das funções  $u$  tal que para todo compacto  $K \subset (a, b)$ ,  $\chi_K u$  pertence à  $L^1(a, b; X)$ , onde  $\chi_K$  denota a função característica de  $K$ .

**Definição 1.2** Seja  $J \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , tal que  $J \geq 0$  e  $\int_{\mathbb{R}} J(t)dt = 1$ . Dado  $\epsilon > 0$ , definamos

$$J_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} J\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad e \quad (J_\epsilon * u)(t) = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(t-s)u(s)ds$$

para as funções  $u$  em que o lado direito da última igualdade faz sentido.

**Proposição 1.3** Seja  $u$  uma função definida sobre  $\mathbb{R}$ , que anula-se fora de um intervalo  $I$ .

(a) Se  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; X)$ , então  $J_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}; X)$ .

(b) Se  $u \in L^2(\mathbb{R}; X)$ , então  $J_\epsilon * u \in L^2(\mathbb{R}; X)$ . Além disso,  $\|J_\epsilon * u\|_{L^2(\mathbb{R}; X)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}; X)}$  e  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|J_\epsilon * u - u\|_{L^2(\mathbb{R}; X)} = 0$

Fazendo as devidas adaptações, encontramos a demonstração desta proposição por exemplo em [41]

O espaço dual de  $L^p(a, b; X)$ . Consideremos  $Y = L^p(a, b; X)$ . Temos a seguinte relação de dualidade  $Y' = L^q(a, b; X')$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  devido ao teorema seguinte.

**Teorema 1.4** Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo e separável,  $1 < p < +\infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

(a) Cada função  $v \in L^q(a, b; X')$  corresponde a um único funcional  $\bar{v} \in Y'$  dada por

$$(1.1.1) \quad \langle \bar{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt \quad \forall u \in Y.$$

Reciprocamente, para cada  $\bar{v} \in Y'$  corresponde a exatamente uma função  $v \in L^q(a, b; X')$  dada por (1.1.1). Além disso

$$\|\bar{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a, b; X')}$$

(b) O espaço de Banach  $L^p(a, b; X)$  é reflexivo e separável.

**Prova:** Ver [83]. ■

Assim podemos identificar  $Y'$  com  $L^q(a, b; X')$ , pois pelo Teorema acima existe um isomorfismo isométrico. Donde

$$\langle v, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt; \quad \|v\| = \left( \int_a^b \|v(t)\|_{X'}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall u \in Y \quad \forall v \in Y'$$

Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais finitos ou não,  $a < b$ ,  $X$  e  $Y$  espaços de Banach com  $X$  denso em  $Y$  e  $m \geq 1$  inteiro, definamos

$$W(a, b) := \{u \in L^2(a, b; X); \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2(a, b; Y)\}$$

onde  $u^{(m)}$  é neste sentido uma distribuição em  $\mathcal{D}'(a, b; X)$ . A norma é dada por

$$\|u\|_{W(a, b)} = \left[ \|u\|_{L^2(a, b; X)}^2 + \|u^{(m)}\|_{L^2(a, b; Y)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Segue daí que  $W(a, b)$  é um espaço de Banach.

Denotaremos por  $\mathcal{D}(a, b; X)$  o espaço localmente convexo das funções vetoriais  $\varphi : (a, b) \mapsto X$  infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em  $(a, b)$ . Diremos que  $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$  em  $\mathcal{D}(a, b; X)$  se:

- i) Existe  $K$  compacto de  $(a, b)$  tal que  $\text{supp}(\varphi_\nu)$  e  $\text{supp}(\varphi)$  estão contidos em  $K$ ,  $\forall \nu$ ;
- ii) Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_\nu^{(k)}(t) \rightarrow \varphi^{(k)}(t)$  em  $X$  uniformemente em  $t \in (a, b)$ .

Prova-se que o conjunto  $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(a, b), \xi \in X\}$  é total em  $\mathcal{D}(a, b; X)$ .

Denotaremos por  $H_0^1(a, b; X)$  o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a, b; X) := \{v \in L^2(a, b; X), v' \in L^2(a, b; X), v(a) = v(b) = 0\}$$

munido com o produto interno

$$((w, v)) = \int_a^b (w(t), v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t), v'(t))_X dt.$$

identificando  $L^2(a, b; X)$  com o seu dual  $[L^2(a, b; X)]'$ , via Teorema de Riesz, obtemos

$$\mathcal{D}(a, b; X) \hookrightarrow H_0^1(a, b; X) \hookrightarrow L^2(a, b; X) \hookrightarrow H^{-1}(a, b; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a, b; X)$$

onde  $H^{-1}(a, b; X) = [H_0^1(a, b; X)]'$

**Proposição 1.5** *Seja  $u \in L^2(a, b; X)$ . Então existe um único  $f \in H^{-1}(a, b; X)$  que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi)_X \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(a, b), \quad \forall \xi \in X$$

**Prova:** Ver [62]. ■

Da proposição anterior podemos identificar  $f$  com  $u'$ , de posse disso, diremos que se  $u \in L^2(a, b; X)$  então  $u' \in H^{-1}(a, b; X)$

**Proposição 1.6** *A aplicação*

$$u \in L^2(a, b; X) \mapsto u' \in H^{-1}(a, b; X)$$

*onde  $X$  é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.*

**Prova:** Ver [62]. ■

**Proposição 1.7** *O espaço  $\mathcal{D}(a, b; X)$  é denso em  $W(a, b)$*

**Prova:** Ver [49]. ■

Da proposição acima, tomando  $X = L^2(\Omega) = Y$  temos que  $\mathcal{D}(a, b; X)$  é denso em  $H^m(a, b; L^2(\Omega))$

### 1.1.1 Funções Escalarmente Contínuas

Seja  $X$  um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções  $f \in L^\infty(0, T; X)$  tais que a aplicação  $t \rightarrow \langle f(t), x \rangle$  é contínua sobre  $[0, T]$ ,  $\forall x \in X'$ , onde  $X'$  é dual de  $X$ . Denotaremos tal espaço por  $C_s(0, T; X)$ .

Disto segue que  $C_s^1(0, T; X) = \{u \in C_s(0, T; X); u' \in C_s(0, T; X)\}$ , onde  $u'$  é a derivada de  $u$  no sentido das distribuições. Da mesma forma temos que  $C_s^2(0, T; X) = \{u \in C_s(0, T; X); u'' \in C_s(0, T; X)\}$ .

**Observação:** Se  $u \in L^\infty(0, T; X)$  e  $u \in C([0, T]; X)$  então  $u \in C_s(0, T; X)$ .

**Lema 1.8** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach,  $X \hookrightarrow Y$  e  $X$  um espaço reflexivo. Então*

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_s(0, T; Y) = C_s(0, T; X).$$

**Prova:** Ver [49]. ■

## 1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

**Definição 1.9** *Seja  $X$  um espaço de Banach. A topologia fraca  $\sigma(X, X')$  sobre  $X$  é a topologia menos fina sobre  $X$  que torna contínuas todas as aplicações  $f \in X'$ .*

Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de  $X$  a qual converge para  $x$  em  $X$  na topologia fraca  $\sigma(X, X')$ . Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

**Proposição 1.10** *Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $X$ , então:*

- (i)  $x_n \rightharpoonup x$  em  $X$  se, e somente se,  $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ ,  $\forall f \in X'$ .
- (ii) Se  $x_n \rightarrow x$  em  $X$ , então  $x_n \rightharpoonup x$  em  $X$ .
- (iii) Se  $x_n \rightharpoonup x$  em  $X$ , então  $\|x_n\|_X$  é limitada e  $\|x\|_X \leq \liminf \|x_n\|_X$ .
- (iv) Se  $x_n \rightharpoonup x$  em  $X$  e  $f_n \rightarrow f$  em  $X'$ , então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

**Prova:** Ver [11]. ■

Seja  $X$  um espaço de Banach e seja  $x \in E$  fixo. Definamos  $J_x : X' \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

As aplicações  $J_x$  são lineares e contínuas, portanto  $J_x \in X''$ ,  $\forall x \in X$ .

Definamos, agora,  $J : X \rightarrow X''$  tal que  $J(x) = J_x$ .

**Definição 1.11** A topologia fraca  $*$ , também designada por  $\sigma(X', X)$ , é a topologia menos fina sobre  $X'$  que torna contínuas todas as aplicações  $J_x$ .

**Proposição 1.12** Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $X'$ , então:

- (i)  $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$  fraco estrela em  $X'$  se, e somente se,  $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in X$ .
- (ii) Se  $f_n \rightarrow f$  forte em  $X'$ , então  $f_n \rightharpoonup f$  fraco em  $X'$ .
- (iii) Se  $f_n \rightharpoonup f$  fraco em  $X'$ , então  $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$  fraco estrela em  $X'$ .

**Prova:** Ver [11]. ■

**Lema 1.13** Sejam  $X$  um espaço de Banach reflexivo e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência limitada em  $X$ , então existe uma subseqüência  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $x \in X$ , tal que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ fracamente em } X.$$

**Prova:** Ver [11]. ■

**Lema 1.14** Sejam  $X$  um espaço de Banach separável e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência limitada em  $X'$ , então existe uma subseqüência  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  e  $f \in X'$ , tal que

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ fraco estrela em } X'.$$

**Prova:** Ver [11]. ■

**Lema 1.15 (Lema de Gronwall)** - Sejam  $z \in L^\infty(0, T)$  e  $f \in L^1(0, T)$  tais que  $z(t) \geq 0$ ,  $f(t) \geq 0$  e seja  $c$  uma constante não negativa. Se

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \forall t \in [0, T],$$

então

$$f(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds}, \forall t \in [0, T].$$

**Prova:** Ver [55]. ■

**Proposição 1.16 (Teorema de Aubin-Lions)** - Sejam  $B_0, B, B_1$  três espaços de Banach tais que  $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ , onde  $B_0$  e  $B_1$  são reflexivos. Definamos

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\},$$

onde  $1 < p_0, p_1 < \infty$ , e consideremos  $W$  munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de  $W$  em  $L^{p_0}(0, T; B)$  é compacta.

**Proposição 1.17 (Lema de Lions)** - Seja  $(u_\nu)$  uma sucessão de funções pertencentes à  $L^q(Q)$  com  $1 < q < \infty$ . Se

(i)  $u_\nu \rightarrow u$  quase sempre em  $Q$

(ii)  $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C, \forall \nu \in \mathbb{N}$ ;

então  $u_\nu \rightharpoonup u$  fraco em  $L^q(Q)$ .

**Proposição 1.18 (Fórmula de Gauss e a Fórmula de Green)** - Seja  $\Omega$  um aberto limitado bem regular do  $\mathbb{R}^n$ . Se  $u, v \in H^1(\Omega)$ , então para  $1 \leq i \leq n$  temos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Gamma} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \nu_i d\Gamma,$$

onde  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  e  $\nu$  denota o vetor normal unitário exterior à  $\Gamma$ .

Se  $u \in H^2(\Omega)$  e  $v \in H^1(\Omega)$ , temos a fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = - \int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

**Prova:** Ver [20]. ■

**Proposição 1.19 (Regularidade dos problemas elípticos)** - Seja  $\Omega$  um aberto de classe  $C^2$  com fronteira  $\Gamma$  limitada. Sejam  $f \in L^2(\Omega)$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$ , verificando

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então,  $u \in H^2(\Omega)$  e  $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$ , onde  $c$  é uma constante que só depende de  $\Omega$ . Além disso, se  $\Omega$  é de classe  $C^{m+2}$  e  $f \in H^m(\Omega)$ , então  $u \in H^{m+2}(\Omega)$  com  $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^m(\Omega)}$ ; em particular, se  $m > \frac{n}{2}$  então  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . Ainda, se  $\Omega$  é de classe  $C^\infty$  e  $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , então  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ .

**Prova:** Ver [11].

**Lema 1.20** Sejam  $H$  e  $V$  espaços de Banach, tais que  $H \hookrightarrow V$ . Se  $u \in L^1(0, T; H)$  e  $u' \in L^1(0, T; V)$  então  $u \in C^0([0, T]; V)$ .

**Prova:** Ver [68].

**Teorema 1.21 (Regra da Cadeia)** Seja  $G \in C^1(\mathbb{R})$  tal que  $G(0) = 0$  e  $|G'(s)| \leq M$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Seja  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Então a função  $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$  e

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

**Prova:** Ver [41].

### 1.2.1 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no Capítulo 2. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [24].

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  um conjunto aberto cujos elementos são denotados por  $(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$(1.2.2) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Dizemos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz as condições de Carathéodory sobre  $\Omega$  se:

- (i)  $f(t, x)$  é mensurável em  $t$  para cada  $x$  fixado;
- (ii)  $f(t, x)$  é contínua em  $x$  para quase todo  $t$  fixado;
- (iii) para cada compacto  $K \subset \Omega$ , existe uma função real  $m_K(t)$ , integrável, tal que

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \quad \forall (t, x) \in K.$$

**Teorema 1.22 (Teorema de Carathéodory)** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfazendo as condições de Carathéodory sobre  $\Omega$ . Então existe uma solução absolutamente contínua  $x(t)$  de (1.2.2) sobre algum intervalo  $|t - t_0| \leq \beta$ ,  $\beta > 0$ .*

**Corolário 1.23** *Sejam  $\Omega = [0, T] \times B$  com  $T > 0$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$  onde  $b > 0$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  nas condições de Carathéodory sobre  $\Omega$ . Suponhamos que  $x(t)$  é uma solução de (1.2.2) tal que  $|x_0| \leq b$  e que em qualquer intervalo  $I$ , onde  $x(t)$  está definida, se tenha  $|x(t)| \leq M$ ,  $\forall t \in I$ ,  $M$  independente de  $I$  e  $M < b$ . Então  $x(t)$  possui um prolongamento à todo  $[0, T]$ .*

## 1.3 Espaço de Sobolev em Variedades

Nessa seção apresentamos de forma introdutória a definição dos espaços de Sobolev em variedades Riemannianas. Para isto precisamos repassar alguns resultados de Geometria Riemanniana.

Seja  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional compacta,  $n \geq 2$ , orientável, simplesmente conexa e com bordo munida de uma métrica Riemanniana  $\mathbf{g}(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$  completa, de classe  $C^\infty$ . Denotaremos por  $(g_{ij})_{n \times n}$  a matriz  $n \times n$  relativa a métrica  $\mathbf{g}$ . O espaço tangente a  $\mathcal{M}$  em  $p \in \mathcal{M}$  é denotado por  $T_p\mathcal{M}$ .

Seja  $f \in C^2(\mathcal{M})$ , definimos o operador Laplace-Beltrame de  $f$  como

$$(1.3.3) \quad \Delta f = \operatorname{div}(\nabla f),$$

onde  $\nabla f$  denota o gradiente de  $f$  na métrica  $\mathbf{g}$ , isto é, para todo campo de vetores  $X$  em  $\mathcal{M}$

$$(1.3.4) \quad \langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

e  $\text{div}$  denota o divergente, ou seja, se  $X$  é um campo de vetores em  $\mathcal{M}$ ,  $\text{div}X(p) := \text{traço da aplicação linear } Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p), p \in \mathcal{M}$ .

De posse de tais definições e notações, enunciamos o seguinte lema.

**Lema 1.24** *Seja  $p \in \mathcal{M}$ . Considere  $f \in C^1(\mathcal{M})$  e  $H$  um campo de vetores em  $\mathcal{M}$ . Então é válida a seguinte identidade :*

$$(1.3.5) \quad \langle \nabla f, \nabla(H(f)) \rangle = \nabla H(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{2}[\text{div}(|\nabla f|^2 H) - |\nabla f|^2 \text{div}H],$$

onde  $\nabla H$  é a diferencial covariante definida por  $\nabla H(X, Y) = \langle \nabla_X H, Y \rangle$ .

**Prova:** Ver [43] ■

Finalmente definimos a Hessiana de  $f \in C^2(\mathcal{M})$  como o tensor simétrico do tipo  $(0, 2)$  em  $\mathcal{M}$ , isto é,

$$(1.3.6) \quad \text{Hess}(f)(X, Y) = \nabla^2 f(X, Y) := \nabla(\nabla f)(X, Y) = \langle \nabla_Y(\nabla f), X \rangle,$$

para quaisquer  $X$  e  $Y$  campos de vetores em  $\mathcal{M}$ .

**Observação 1.25** *Para simplificar a notação, denotaremos a norma em  $L^2(\mathcal{M})$  sem fazer distinção sobre o argumento, seja ele uma função ou um campo de tensores do tipo  $(0, m)$ .*

Seja  $k \in \mathbb{N}$  e  $p \geq 1$ . Definimos o espaço  $C_k^p(\mathcal{M})$  por

$$(1.3.7) \quad C_k^p(\mathcal{M}) = \{u \in C^\infty(\mathcal{M}); \int_{\mathcal{M}} |\nabla^j u|^p d\mathcal{M} < \infty, \forall j = 0, 1, \dots, k\},$$

onde  $\nabla^j u$  denota a  $j$ -ésima diferencial covariante de  $u$ , ( $\nabla^0 u = u, \nabla^1 u = \nabla u$ ).

Assim definimos os espaço de Sobolev  $H_k^p(\mathcal{M})$  como o completado de  $C_k^p(\mathcal{M})$  com respeito a norma

$$(1.3.8) \quad \|u\|_{H_k^p(\mathcal{M})}^p = \sum_{j=0}^k \int_{\mathcal{M}} |\nabla^j u|^p d\mathcal{M}.$$

Desta forma segue que:

i)  $L^2(\mathcal{M}) := H_0^2(\mathcal{M})$  é o completado de  $C_0^2(\mathcal{M})$  com respeito a norma

$$(1.3.9) \quad \|u\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 = \int_{\mathcal{M}} |u|^2 d\mathcal{M}.$$

ii)  $H^1(\mathcal{M}) := H_1^2(\mathcal{M})$  é o completado de  $C_1^2(\mathcal{M})$  com respeito a norma

$$(1.3.10) \quad \|u\|_{H^1(\mathcal{M})}^2 = \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^2 d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |u|^2 d\mathcal{M}.$$

iii)  $H^2(\mathcal{M}) := H_2^2(\mathcal{M})$  é o completado de  $C_2^2(\mathcal{M})$  com respeito a norma

$$(1.3.11) \quad \|u\|_{H^2(\mathcal{M})}^2 = \int_{\mathcal{M}} |\nabla^2 u|^2 d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^2 d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |u|^2 d\mathcal{M}.$$

**Observação 1.26** De acordo com as definições anteriores temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$(1.3.12) \quad H^2(\mathcal{M}) \hookrightarrow H^1(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{M}).$$

**Proposição 1.27** O espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, denotado por  $\mathcal{D}(\mathcal{M})$  ou  $C_0^\infty(\mathcal{M})$ , é denso em  $H^1(\mathcal{M})$ , ou seja,  $H_0^1(\mathcal{M}) = H^1(\mathcal{M})$ , onde  $H_0^1(\mathcal{M}) := \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}^{H^1(\mathcal{M})}$ .

**Prova:** Ver [37] ■

Por argumentos de densidade podemos estender as fórmulas apresentadas anteriormente aos espaços de Sobolev. Na sequência enunciamos alguns teoremas que serão bastante utilizados no decorrer do trabalho.

**Teorema 1.28** Seja  $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional não compacta,  $n \geq 2$ , simplesmente conexa, orientável e sem bordo munida de uma métrica Riemanniana  $\mathbf{g}(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$  completa, de classe  $C^\infty$ .

Sejam  $u \in H^1(\mathcal{M})$  tal que  $\Delta u \in L^2(\mathcal{M})$  e  $v \in H^1(\mathcal{M})$ , então é válida a seguinte identidade:

$$(1.3.13) \quad \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathcal{M} = \int_{\mathcal{M}} -\Delta u v d\mathcal{M}.$$

**Prova:** Ver [75] ■

**Teorema 1.29 (Teorema da Divergência de Gauss)** Sejam  $\mathcal{M}^n$  uma variedade Riemanniana orientável, conexo, com bordo  $\partial\mathcal{M}$ , bem regular,  $X \in [H^1(\mathcal{M})]^n$  um campo de vetores e  $\nu$  o campo vetorial normal unitário exterior à  $\partial\mathcal{M}$ , então

$$(1.3.14) \quad \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div} X d\mathcal{M} = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle X, \nu \rangle d\Gamma.$$

**Prova:** Ver [20] ■

**Teorema 1.30 (Teorema de Green 1)** *Sejam  $\mathcal{M}^n$  uma variedade Riemanniana orientável, conexo, com bordo  $\partial\mathcal{M}$ , bem regular,  $X \in [H^1(\mathcal{M})]^n$  um campo de vetores,  $q \in H^1(\mathcal{M})$  e  $\nu$  o campo vetorial normal unitário exterior à  $\partial\mathcal{M}$ , então,*

$$(1.3.15) \quad \int_{\Omega} (\operatorname{div} X)q \, d\mathcal{M} = - \int_{\mathcal{M}} \langle X, \nabla q \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega} (\langle X, \nu \rangle)q \, d\Gamma.$$

**Prova:** Ver [20] ■

**Teorema 1.31 (Teorema de Green 2)** *Sejam  $\mathcal{M}^n$  uma variedade Riemanniana orientável, conexo, com bordo  $\partial\mathcal{M}$ , bem regular,  $X \in [H^1(\mathcal{M})]^n$  um campo de vetores,  $q \in H^1(\mathcal{M})$  e  $\nu$  o campo vetorial normal unitário exterior à  $\partial\mathcal{M}$ , então*

$$(1.3.16) \quad \int_{\mathcal{M}} (\Delta f)q \, d\mathcal{M} = - \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla f, \nabla q \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\mathcal{M}} (\partial_{\nu} f)q \, d\Gamma.$$

**Prova:** Ver [20] ■

**Proposição 1.32** *Sejam  $\mathcal{M}^n$  uma variedade Riemanniana orientável, conexo, com bordo  $\partial\mathcal{M}$ , bem regular. Se  $u \in W^{1,p}(\mathcal{M})$  então  $u|_{\Gamma} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ , onde  $\Gamma = \partial\mathcal{M}$ .*

**Prova:** Ver [11]. ■

**Corolário 1.33** *Sob as hipóteses da Proposição 1.32 é válida a seguinte identidade de Green generalizada:*

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla w, \nabla \psi \rangle \, d\mathcal{M} = \int_{\mathcal{M}} \Delta \psi \, w \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\mathcal{M}} \partial_{\nu} \psi \, w \, d\Gamma,$$

para todo  $w \in W^{1,1}(\mathcal{M})$  e  $\psi \in C^{\infty}(\mathcal{M})$ .

**Prova:** A demonstração é baseada em dois argumentos:

- 1) Na Proposição 1.32, donde faz sentido falar em  $w|_{\partial\mathcal{M}} \in L^1(\partial\mathcal{M})$ ;
- 2) Na imersão contínua e densa  $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \hookrightarrow W^{1,1}(\mathcal{M})$ , onde  $\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \{w|_{\mathcal{M}} ; w \in C_0^{\infty}(\mathcal{M})\}$ . ■

# Capítulo 2

## Existência e Não Existência de Solução Global para a Equação Viscoelástica da Onda

### 2.1 Introdução

Nesse capítulo mostramos a existência e a não existência de solução global para o seguinte modelo de equação viscoelástica da onda semilinear com um amortecimento não linear e um termo de fonte não linear no interior e outro na fronteira:

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + h(u_t) = f_1(u), & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds = f_2(u), & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado do  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , com uma fronteira regular  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ . Aqui,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  são fechados, disjuntos e  $\nu$  representa o vetor normal unitário exterior à  $\Gamma$ .

A fim de alcançar nossos objetivos, aplicamos o método de Faedo-Galerkin combinado com o método de compacidade de modo a obter a existência de solução regular de um problema auxiliar com termos de fonte globalmente Lipschitz e com dado inicial no poço potencial. Depois, usamos um método de aproximação envolvendo termos de fonte dados por funções truncadas e adaptamos as ideias introduzidas em [42] para provar a existência de solução fraca para o nosso problema. Para provar a não existência de solução global, mostramos que sob algumas restrições impostas sobre os dados iniciais e se o termo de fonte interior domina o termo de amortecimento, se supusermos que a solução que existe é global, então obtemos uma contradição.

## 2.2 Notações e Hipóteses

Iniciamos essa seção introduzindo algumas notações e hipóteses. Denotamos o produto escalar por,

$$(u, v)(t) = \int_{\Omega} u(x, t)v(x, t) dx; \quad (u, v)_{\Gamma_1}(t) = \int_{\Gamma_1} u(x, t)v(x, t) d\Gamma,$$

em  $L^2(\Omega)$  e  $L^2(\Gamma_1)$ , respectivamente. Denotaremos por  $\|\cdot\|_q$  a norma usual em  $L^q(\Omega)$  para  $1 \leq q \leq \infty$ , e por  $\|\cdot\|_{q, \Gamma_1}$  a norma usual em  $L^q(\Gamma_1)$ . Consideremos o espaço de Hilbert,

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\},$$

munido com o produto interno,

$$(u, v)_{H_{\Gamma_0}^1} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Usaremos as imersões

$$H_{\Gamma_0}^1(\Gamma_1) \hookrightarrow L^k(\Gamma_1), \quad 2 < k \leq \bar{k}, \quad \text{onde} \quad \bar{k} = \begin{cases} \frac{2(N-1)}{N-2}, & \text{se } N \geq 3, \\ +\infty, & \text{se } N = 1, 2, \end{cases}$$

(2.2.2) e também

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 2 < p \leq \bar{p}, \quad \text{onde} \quad \bar{p} = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3, \\ +\infty, & \text{se } N = 1, 2. \end{cases}$$

De modo a obter os resultados desejados assumimos ainda as seguintes hipóteses:

**(H.1)** As funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $h$  possuem uma estrutura polinomial, isto é:

$$f_1(s) = |s|^{p-2}s, \quad f_2(s) = |s|^{k-2}s, \quad h(s) = |s|^{\eta-2}s,$$

onde  $k, \eta, p \geq 2$  são tais que

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^k(\Gamma_1).$$

**(H.2)** A função de relaxamento  $g$  pertence à classe

$$C^2(0, +\infty) \cap W^{2,1}(0, +\infty) \cap W^{2,+\infty}(0, +\infty)$$

e satisfaz

$$(2.2.3) \quad g(s) \geq 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s) ds = l > 0$$

e

$$(2.2.4) \quad g'(s) \leq 0, \quad \forall s \geq 0.$$

A seguir, apresentamos algumas definições e cálculos, os quais foram introduzidos, por exemplo, em Vitillaro [81] e suas referências.

Sejam  $B_1$  e  $B_2$ , as melhores constantes nas imersões  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  e  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^k(\Gamma_1)$ , respectivamente, isto é,

$$(2.2.5) \quad \begin{aligned} B_1^{-1} &= \inf \{ \|\nabla u\|_2 : u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) : \|u\|_p = 1 \}, \\ B_2^{-1} &= \inf \{ \|\nabla u\|_2 : u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) : \|u\|_{k,\Gamma_1} = 1 \}. \end{aligned}$$

Introduzimos ainda os seguintes valores:

$$\tilde{B}_1 = \frac{B_1}{l} \quad \text{e} \quad \tilde{B}_2 = \frac{B_2}{l},$$

onde  $l$  é o número positivo introduzido em (2.2.3).

Definamos agora a função real  $F$  da seguinte forma,

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\tilde{B}_1^p}{p}x^p - \frac{\tilde{B}_2^k}{k}x^k,$$

e seja  $\alpha_1$  o primeiro zero positivo da função  $F'(x)$ .

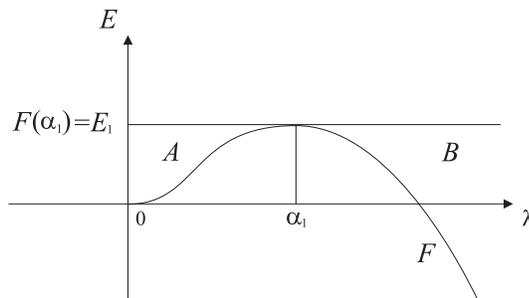
**Observação 2.1** *Não é difícil verificar, como feito em [17], que a função  $F$  é crescente para  $0 < \alpha < \alpha_1$ , decrescente para  $\alpha > \alpha_1$  e que  $\alpha_1$  é um ponto de máximo local de  $F$ .*

Do exposto acima decorre que,

$$(2.2.6) \quad 1 = \tilde{B}_1^p \alpha_1^{p-2} + \tilde{B}_2^k \alpha_1^{k-2} \quad \text{e} \quad E_1 = F(\alpha_1) = \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{\tilde{B}_1^p}{p}\alpha_1^p - \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\alpha_1^k,$$

onde  $E_1$  é uma constante positiva.

A seguir apresentamos o gráfico da função  $F$  o qual ajuda-nos a entender a importância de tal função, pois este indica as regiões  $A$  e  $B$ , as quais como veremos no decorrer desse capítulo, estão relacionadas com a existência e não existência de solução global do problema (2.1.1), respectivamente.



Definamos agora o funcional energia associado ao problema (2.1.1) por

$$(2.2.7) \quad E(t, u, u_t) = E(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ + \frac{1}{2} (g \diamond u)(t) - \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p - \frac{1}{k} \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k,$$

onde

$$(g \diamond u)(t) = \int_0^t g(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|_2^2 ds.$$

Provaremos agora que a energia  $E(t)$  definida em (2.2.7) é uma função não crescente, mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Lema 2.2** *Seja  $u$  uma solução fraca de (2.1.1). Então, para todo  $t > 0$ , temos*

$$(2.2.8) \quad \frac{dE(t)}{dt} = - \|u_t(t)\|_\eta^\eta + \frac{1}{2} (g' \diamond u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ \leq - \|u_t(t)\|_\eta^\eta + \frac{1}{2} (g' \diamond u)(t), \quad \forall t \geq 0.$$

**Prova:** A demonstração é feita para soluções fortes, contudo o resultado pode ser estendido a soluções fracas por usuais argumentos de densidade. Multiplicando a primeira equação em (2.1.1) por  $u_t$ , integrando sobre  $\Omega$  e usando integração por partes obtemos

$$(2.2.9) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{k} \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k \right\} \\ - \int_\Omega \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) \nabla u_t(t) ds dx = - \|u_t(t)\|_\eta^\eta.$$

Por outro lado, temos

$$(2.2.10) \quad \frac{d}{dt} (g \diamond u)(t) = \int_0^t g'(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|_2^2 ds + \frac{d}{dt} (\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_0^t g(s) ds \\ - 2 \int_\Omega \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) \nabla u_t(t) ds dx \\ = (g' \diamond u)(t) - 2 \int_\Omega \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) \nabla u_t(t) ds dx \\ + \frac{d}{dt} \left\{ \|\nabla u(t)\|_2^2 \int_0^t g(s) ds \right\} - g(t) \|\nabla u(t)\|_2^2.$$

Esta última identidade implica

$$(2.2.11) \quad \int_\Omega \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) \nabla u_t(t) ds dx = \frac{1}{2} (g' \diamond u)(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|\nabla u(t)\|_2^2 \int_0^t g(s) ds \right\} \\ - \frac{1}{2} g(t) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \diamond u)(t).$$

Uma aplicação direta da identidade (2.2.11) implica (2.2.8) e isto completa a prova do Lema 2.2. ■

Definamos, para  $u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ , o seguinte funcional:

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \diamond u) \\ &\quad - \frac{1}{p} \|u\|_p^p - \frac{1}{k} \|u\|_{k, \Gamma_1}^k, \end{aligned}$$

o qual está bem definido em função das imersões em (2.2.2). Então a função energia (2.2.7) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + J(u(t)), \quad \forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega).$$

Ainda precisamos definir a função

$$(2.2.12) \quad \gamma(t) = \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \diamond u)(t).$$

É importante observar que podemos deduzir de (2.2.5)-(2.2.12), que

$$\begin{aligned} (2.2.13) \quad E(t) &\geq J(u(t)) = \frac{1}{2} \gamma(t) - \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p - \frac{1}{k} \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k \\ &\geq \frac{1}{2} \gamma(t) - \frac{\tilde{B}_1^p}{p} ((\gamma(t))^{1/2})^p - \frac{\tilde{B}_2^k}{k} ((\gamma(t))^{1/2})^k = F((\gamma(t))^{1/2}). \end{aligned}$$

**Observação 2.3** *Provaremos no Lema 2.8 que se  $(\gamma(t))^{1/2} < \alpha_1$ , então  $F((\gamma(t))^{1/2}) \geq 0$  e consequentemente,  $J(u(t)) \geq 0$  e  $E(t) \geq 0$ , para todo  $t \geq 0$ .*

**Observação 2.4** *Repetimos aqui, para melhor compreensão do leitor, uma observação feita por Cavalcanti et al. em [16], a qual adaptamos ao nosso contexto.*

*Sendo  $f_1(s) := |s|^{p-2}s$ ,  $f_2(s) := |s|^{k-2}s$  e definindo  $f_{1,trunc}$ ,  $f_{2,trunc}$  por,*

$$f_{1,trunc}(s) := \begin{cases} |s|^{p-2}s, & |s| \leq L, \\ |L|^{p-2}L, & s \geq L, \\ |-L|^{p-2}(-L), & s \leq -L, \end{cases}$$

e

$$f_{2,trunc}(s) := \begin{cases} |s|^{k-2}s, & |s| \leq L, \\ |L|^{k-2}L, & s \geq L, \\ |-L|^{k-2}(-L), & s \leq -L. \end{cases}$$

onde  $L$  é uma constante positiva, então se,

$$F_1(s) := \int_0^s f_1(\tau) d\tau, \quad F_2(s) := \int_0^s f_2(\tau) d\tau$$

e

$$F_{1,trunc}(s) := \int_0^s f_{1,trunc}(\tau) d\tau, \quad F_{2,trunc}(s) := \int_0^s f_{2,trunc}(\tau) d\tau$$

são, respectivamente, as primitivas de  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_{1,trunc}$ ,  $f_{2,trunc}$ , podemos escrever, para todo  $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ :

$$J(v) := \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \diamond v)(t) - \int_{\Omega} F_1(v(x)) dx - \int_{\Gamma_1} F_2(v(x)) d\Gamma$$

e

$$\begin{aligned} J_{trunc}(v) &:= \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \diamond v)(t) \\ &\quad - \int_{\Omega} F_{1,trunc}(v(x)) dx - \int_{\Gamma_1} F_{2,trunc}(v(x)) d\Gamma. \end{aligned}$$

Definindo

$$E_{trunc}(t) := \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + J_{trunc}(u(t)),$$

considerando a energia  $E(t)$  definida em (2.2.7) e lembrando que,

$$\int_{\Omega} F_{1,trunc}(u(x, t)) dx \leq \int_{\Omega} F_1(u(x, t)) dx$$

e

$$\int_{\Gamma_1} F_{2,trunc}(u(x, t)) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_1} F_2(u(x, t)) d\Gamma,$$

deduzimos de (2.2.7) e (2.2.13), que:

$$\begin{aligned} E_{trunc}(t) &= \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + J_{trunc}(u(t)) \\ &= \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (g \diamond u)(t) - \int_{\Omega} F_{1,trunc}(u(x, t)) dx - \int_{\Gamma_1} F_{2,trunc}(u(x, t)) d\Gamma \\ &\geq \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (g \diamond u)(t) - \int_{\Omega} F_1(u(x, t)) dx - \int_{\Gamma_1} F_2(u(x, t)) d\Gamma \\ &\geq J(u(t)) \geq F((\gamma(t))^{1/2}), \end{aligned}$$

onde  $\gamma(t)$  é definida em (2.2.12).

Segue do exposto acima que as desigualdades obtidas na Observação 2.3, continuam ocorrendo se trocarmos  $E(t)$  por  $E_{trunc}(t)$  e  $J(u(t))$  por  $J_{trunc}(u(t))$ . Assim, todos os argumentos que usarmos para provar a existência de solução regular do problema auxiliar

(2.3.16) que apresentaremos na próxima seção, quando o dado inicial é tomado no “poço potencial”, poderá ser repetido para o mesmo problema trocando  $f_1(s) = |s|^{p-2}s$  por  $f_{1,trunc}$  e  $f_2(s) = |s|^{k-2}s$  por  $f_{2,trunc}$ .

A fim de obtermos a existência global de soluções regulares para o problema auxiliar (2.3.16), precisamos das seguintes hipóteses sobre os dados iniciais.

**Hipótese 2.5** (*Hipóteses Sobre os Dados Iniciais*)

(H.3) *Assumamos que*

$$\{u^0, u^1\} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega),$$

(H.4) *verificando a seguinte condição de compatibilidade*

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \alpha u^1 = |u^0|^{k-2}u^0 \quad \text{sobre } \Gamma_1.$$

(H.5) *Além disso, suponhamos que*

$$E(0) < E_1 \quad e \quad \|\nabla u^0\|_2 < \alpha_1,$$

onde  $E_1 = F(\alpha_1)$  e  $\alpha_1$  é o primeiro zero positivo da função  $F'$ .

## 2.3 Existência de Solução

Nessa seção, nosso principal objetivo é provar a existência de solução global para o problema (2.1.1). Antes disso, provaremos um importante resultado que é a existência e unicidade de solução para o problema auxiliar (2.3.16) que será apresentado a seguir.

**Teorema 2.6** *Se (H.1)-(H.5) ocorrem, então o problema (2.3.16) possui uma única solução  $u$  na classe*

$$\begin{aligned} u &\in L_{loc}^\infty(0, \infty; H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), & u' &\in L_{loc}^\infty(0, \infty; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)), \\ e \quad u'' &\in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

com  $(\gamma(t))^{1/2} < \alpha_1$ , para todo  $t > 0$ .

Como consequência do Teorema 2.6, usando argumentos de densidade, obtemos o próximo resultado.

**Teorema 2.7** *Se o dado inicial pertence a  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  satisfazendo (H.5). Então, o problema (2.1.1) possui pelo menos uma solução fraca na classe*

$$u \in C^0([0, \infty), H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)),$$

com  $(\gamma(t))^{1/2} < \alpha_1$ , para todo  $t > 0$ .

Agora descreveremos que procedimento usaremos para obter o resultado desejado. Como previamente mencionado, a fim de obter a existência de soluções fracas para o problema (2.1.1), obteremos, inicialmente, soluções regulares para o seguinte problema auxiliar

$$(2.3.14) \quad \begin{cases} u_{tt,\mu} - \Delta u_\mu + \int_0^t g(t-s)\Delta u_\mu(s)ds + h(u_{t,\mu}) = f_{1,\mu}(u_\mu), & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u_\mu = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u_\mu}{\partial \nu}(s)ds + \frac{1}{\mu}u_{t,\mu} = f_{2,\mu}(u_\mu), & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u_\mu(x, 0) = u_\mu^0(x), \quad u_{t,\mu}(x, 0) = u_\mu^1(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde, para cada  $\mu \in \mathbb{N}$ , definimos,

$$(2.3.15) \quad f_{1,\mu}(s) := \begin{cases} |s|^{p-2}s, & |s| \leq \mu, \\ |\mu|^{p-2}\mu, & s \geq \mu, \\ |-\mu|^{p-2}(-\mu), & s \leq -\mu, \end{cases} \quad \text{e } f_{2,\mu}(s) := \begin{cases} |s|^{k-2}s, & |s| \leq \mu, \\ |\mu|^{k-2}\mu, & s \geq \mu, \\ |-\mu|^{k-2}(-\mu), & s \leq -\mu. \end{cases}$$

Contudo, para isso, ao invés de acharmos solução para o problema (2.3.14), iremos considerar o problema mais geral dado por

$$(2.3.16) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + |u_t|^{\eta-2}u_t = |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds + \alpha u_t = |u|^{k-2}u, & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva.

Para este propósito usaremos o método de Faedo-Galerkin, o qual nos permite tratar ambos os casos, especificamente: obter existência de solução regular para o problema (2.3.16) quando temos um termo de fonte localmente Lipschitz sobre a fronteira e particularmente,

quando também temos um termo de fonte globalmente Lipschitz, como em (2.3.14). Nesse momento é sempre importante enfatizar, como foi feito em [17] e [16], que não é possível considerar argumentos de densidade para passar das soluções regulares para fracas se estamos considerando soluções regulares dadas por (2.3.16), onde o termo de fonte na fronteira é localmente Lipschitz. Por esta razão é crucial considerarmos uma sequência de funções globalmente Lipschitz (truncadas) como proposto em (2.3.14).

### 2.3.1 Prova do Teorema 2.6

#### Existência

Para obter a existência de solução para o problema (2.3.16) temos que construir uma base especial relacionada com o problema elíptico, cuja construção foi inspirada no que fizeram Milla Miranda e San Gil Jutuca em [63]. De fato, seja  $\{\omega_\mu^*\}$  uma base para  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . A partir dessa base podemos construir a base especial desejada  $\{\omega_\mu\}$ , relacionada ao problema auxiliar (2.3.16) do seguinte modo: Se  $u^0$  e  $u^1$  são linearmente independentes, definimos  $w_1 = u^0$ ,  $w_2 = u^1$ , e para  $w_i$ ,  $i \geq 3$  os vetores de  $\{\omega_\mu^*\}$  são escolhidos de modo a serem linearmente independentes com  $u^0$  e  $u^1$ . Se os vetores  $u^0$  e  $u^1$  são linearmente dependentes, escolhemos  $w_1 = u^0$  e para  $w_i$ ,  $i \geq 2$  os vetores de  $\{\omega_\mu^*\}$  que são linearmente independentes com  $u^0$ .

Posto isto, definamos

$$V_m = [w_1, \dots, w_m]$$

e consideremos para todo  $w \in V_m$  o seguinte problema aproximado:

$$(2.3.17) \quad \begin{cases} u_m(t) = \sum_{j=1}^m \gamma_j(t) w_j \in V_m \\ (u_m''(t), w) + (\nabla u_m(t), \nabla w) - (|u_m(t)|^{k-2} u_m(t), w)_{\Gamma_1} + \alpha(u_m'(t), w)_{\Gamma_1} \\ - \int_0^t g(t-s) (\nabla u_m(s), \nabla w) ds + (|u_m'|^{\eta-2} u_m'(t), w) = (|u_m(t)|^{p-2} u_m(t), w), \\ u_m(0) = u^0, \quad u_m'(0) = u^1, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Por conhecidos métodos de Equações Diferenciais Ordinárias é possível obter uma solução local para o problema aproximado (2.3.17) sobre algum intervalo  $[0, t_m)$ ,  $t_m > 0$ . A extensão desta solução para o intervalo  $[0, T]$ , para todo  $T > 0$ , é uma consequência das estimativas a priori que faremos a seguir.

- **Estimativa a Priori de Primeira Ordem**

Para  $w = u'_m(t)$ , deduzimos

$$E'_m(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \diamond u_m)(t) - \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_p^p - \frac{1}{k} \|u_m(t)\|_{k, \Gamma_1}^k \right\}$$

e para todo  $t \in (0, t_m)$ ,

$$(2.3.18) \quad E'_m(t) \leq \frac{1}{2} (g' \diamond u_m)(t) - \alpha \|u'_m(t)\|_{2, \Gamma_1}^2 - \|u'_m(t)\|_q^\eta \leq 0,$$

o que implica que  $E_m(t)$  é uma função não-crescente, para todo  $t \in (0, t_m)$ .

A seguir enunciaremos e provaremos um Lema que assume um papel importante para podermos estender a solução a todo o intervalo  $(0, +\infty)$ . Para isto, adaptamos as ideias de Vitillaro [81] ao nosso contexto.

A fim de não sobrecarregar a notação e também pelo fato que este resultado será usado para a extensão da solução, omitiremos o índice  $m$ .

**Lema 2.8** *Suponha que (H.1)-(H.3) e (H.5) ocorrem. Então,*

$$(2.3.19) \quad J(u(t)) < E_1 \quad e \quad \gamma(t) < \alpha_1^2, \quad \forall t > 0.$$

Além disso, temos,

$$(2.3.20) \quad \gamma(t) \leq \frac{1}{c} E(t) < \frac{1}{c} E(0), \quad \forall t > 0,$$

onde

$$c = \begin{cases} \frac{p-2}{2p}, & \text{se } k \geq p \\ \frac{k-2}{2k}, & \text{se } p \geq k. \end{cases}$$

**Prova:** De (2.2.13) e (2.3.18), obtemos

$$(2.3.21) \quad F((\gamma(t))^{1/2}) \leq J(u(t)) \leq E(t) \leq E(0) < E_1,$$

o que implica que  $J(u(t)) < E_1$ , para todo  $t \in [0, t_m)$ . Além disso, notando que  $F$  é crescente em  $(0, \alpha_1)$ , decrescente em  $(\alpha_1, +\infty)$  e  $F(\lambda) \rightarrow -\infty$ , quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Assim, como  $E(0) < E_1$ , então existe,  $\lambda'_2 < \alpha_1 < \lambda_2$  tal que,  $F(\lambda'_2) = F(\lambda_2) = E(0)$ , o que juntamente com  $\|\nabla u^0\|_2 < \alpha_1$  e (2.2.13), nos dá que, para todo  $t > 0$ ,

$$F((\gamma(0))^{1/2}) = F(\|\nabla u^0\|_2) \leq E(0) = F(\lambda'_2).$$

Isto implica que,

$$\|\nabla u^0\|_2 \leq \lambda'_2.$$

Agora, provaremos que

$$(2.3.22) \quad (\gamma(t))^{1/2} \leq \lambda'_2, \quad \forall t \in [0, t_m),$$

e então (2.3.19) virá de resultados de continuidade.

De fato, suponha por absurdo, que (2.3.22) não acontece. Então, existe  $t^* \in (0, t_m)$  que verifica,

$$(\gamma(t^*))^{1/2} > \lambda'_2.$$

Se  $\lambda'_2 < (\gamma(t^*))^{1/2} < \alpha_1$ , então de (2.3.21), podemos escrever

$$E(t^*) \geq F((\gamma(t^*))^{1/2}) > F(\lambda'_2) = F(\lambda_2) = E(0).$$

e isto é uma contradição, uma vez que  $E(t)$  é uma função não crescente.

Se  $(\gamma(t^*))^{1/2} \geq \alpha_1$ , temos que existe um  $\bar{\lambda}$  verificando,

$$(\gamma(0))^{1/2} = \|\nabla u^0\|_2 \leq \lambda'_2 < \bar{\lambda} < \alpha_1 \leq (\gamma(t^*))^{1/2}.$$

Consequentemente, da continuidade da função  $\gamma(\cdot)$ , existe  $\bar{t} \in (0, t^*)$  satisfazendo

$$(\gamma(\bar{t}))^{1/2} = \bar{\lambda}.$$

Então, desta última identidade, obtemos

$$E(\bar{t}) \geq F(\gamma(\bar{t}))^{1/2} > F(\lambda'_2) = F(\lambda_2) = E(0),$$

de onde vem uma nova contradição. Consequentemente obtemos (2.3.19).

Para provar (2.3.20), notamos que para  $\lambda < \alpha_1$ ,

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \lambda^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\tilde{B}_1^p}{p} \lambda^{p-2} - \frac{\tilde{B}_2^k}{k} \lambda^{k-2} \right) \\ &\geq \lambda^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\tilde{B}_1^p}{p} \alpha_1^{p-2} - \frac{\tilde{B}_2^k}{k} \alpha_1^{k-2} \right). \end{aligned}$$

Então, usando a identidade,

$$1 - \tilde{B}_1^p \alpha_1^{p-2} - \tilde{B}_2^k \alpha_1^{k-2} = 0,$$

temos, para  $k \geq p$ ,

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\geq \lambda^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\tilde{B}_1^p}{p} \alpha_1^{p-2} - \frac{\tilde{B}_2^k}{k} \alpha_1^{k-2} \right) = \lambda^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{k} \right) \tilde{B}_2^k \alpha_1^{k-2} \right) \\ &\geq \lambda^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) = \lambda^2 \left( \frac{p-2}{2p} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $p \geq k$ , obtemos de modo análogo

$$F(\lambda) \geq \lambda^2 \left( \frac{k-2}{2k} \right).$$

Assim, fazendo  $c = \frac{p-2}{2p}$ , se  $k \geq p$  e  $c = \frac{k-2}{2k}$ , se  $p \geq k$ , temos,

$$(2.3.23) \quad F(\lambda) \geq \lambda^2 c.$$

Então, de (2.2.13), (2.3.19) e (2.3.23), temos

$$c\gamma(t) = c((\gamma(t))^{1/2})^2 \leq F((\gamma(t))^{1/2}) \leq E(t) < E(0) < E_1.$$

Portanto, a prova do Lema 2.8 está completa. ■

Retornando ao problema aproximado e tendo em mente o resultado do Lema anterior, deduzimos

$$(2.3.24) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_2^2 + c\gamma(t) &\leq \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_2^2 + F((\gamma(t))^{1/2}) \\ &\leq \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_2^2 + J(u_m(t)) \\ &= E(t) \leq E(0) < E_1, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

particularmente,

$$(2.3.25) \quad cl \|\nabla u_m(t)\|_2^2 < c\gamma(t) \leq \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_2^2 + c\gamma(t) < E_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, de (2.3.24) obtemos que  $E(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Então, disto e de (2.3.18), resulta que

$$E(0) - E(t) < E(0) < E_1,$$

e então,

$$(2.3.26) \quad \begin{aligned} &-\frac{1}{2} \int_0^t (g' \diamond u_m)(s) ds + \int_0^t \|u'_m(s)\|_\eta^\eta ds + \int_0^t \alpha \|u'_m(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds \\ &\leq - \int_0^t E'(s) ds = E(0) - E(t) < E_1, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

#### • Estimativa a Priori de Segunda Ordem

Inicialmente, estimaremos  $\|u''_m(0)\|_2$ . Para isto é crucial considerarmos a condição de compatibilidade para os dados iniciais suposto em (H.4) e a base especial construída.

Considerando  $t = 0$  e  $w = u''_m(0)$  no problema aproximado (2.3.17), notando que o termo de memória se anula, deduzimos que

$$\begin{aligned} &\|u''_m(0)\|_2^2 + (\nabla u_m(0), \nabla u''_m(0)) - (|u_m(0)|^{k-2} u_m(0), u''_m(0))_{\Gamma_1} \\ &+ \alpha (u'_m(0), u''_m(0))_{\Gamma_1} + (|u'_m(0)|^{\eta-2} u'_m(0), u''_m(0)) \\ &= (|u_m(0)|^{p-2} u_m(0), u''_m(0)). \end{aligned}$$

Neste momento, salientamos a importância da base construída, pois temos  $u_m(0) = u^0$  e  $u'_m(0) = u^1$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Com isso obtemos,

$$\begin{aligned} \|u''_m(0)\|_2^2 + (\nabla u^0, \nabla u''_m(0)) &= (|u^0|^{k-2}u^0, u''_m(0))_{\Gamma_1} + \alpha(u^1, u''_m(0))_{\Gamma_1} \\ &+ (|u^1|^{\eta-2}u^1, u''_m(0)) = (|u^0|^{p-2}u^0, u''_m(0)). \end{aligned}$$

O Teorema de Green generalizado implica,

$$\begin{aligned} \|u''_m(0)\|_2^2 &= (\Delta u^0, u''_m(0)) - \left( \frac{\partial u^0}{\partial \nu}, u''_m(0) \right)_{\Gamma_1} + (|u^0|^{k-2}u^0, u''_m(0))_{\Gamma_1} \\ &- \alpha(u^1, u''_m(0))_{\Gamma_1} - (|u^1|^{\eta-2}u^1, u''_m(0)) + (|u^0|^{p-2}u^0, u''_m(0)). \end{aligned}$$

Da condição de compatibilidade (H.4), deduzimos que

$$\begin{aligned} \|u''_m(0)\|_2^2 &= (\Delta u^0, u''_m(0)) - (|u^1|^{\eta-2}u^1, u''_m(0)) + (|u^0|^{p-2}u^0, u''_m(0)) \\ &\leq \left( \|\Delta u^0\|_2 + \|u^1\|_{2(\eta-1)}^{\eta-1} + \|u^0\|_{2(p-1)}^{p-1} \right) \|u''_m(0)\|_2. \end{aligned}$$

Então, da desigualdade de Young vem que:

$$(2.3.27) \quad \|u''_m(0)\|_2 \leq \|\Delta u^0\|_2 + \|u^1\|_{2(\eta-1)}^{\eta-1} + \|u^0\|_{2(p-1)}^{p-1} = L_1$$

Derivando a equação (2.3.17)<sub>2</sub> com respeito a  $t$  e considerando  $w = u''_m(t)$ , segue que,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|u''_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(t)\|_2^2 \right\} + (\eta-1)(|u'_m(t)|^{\eta-2}u'_m(t), u''_m(t)) + \alpha \|u''_m(t)\|_{2,\Gamma_1}^2 \\ (2.3.28) \quad &= g(0)(\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) + \int_0^t g'(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla u''_m(t)) ds \\ &+ (k-1)(|u_m(t)|^{k-2}u'_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} + (p-1)(|u_m(t)|^{p-2}u'_m(t), u''_m(t)). \end{aligned}$$

Agora, analisaremos alguns termos em (2.3.29).

- **Estimativa para  $I_1 := g(0)(\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t))$ .**

Usando (H.2), temos,

$$\begin{aligned} I_1 &= g(0)(\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) = -g(0)\|\nabla u'_m(t)\|_2^2 + g(0)\frac{d}{dt}(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) \\ (2.3.29) \quad &\leq g(0)\frac{d}{dt}(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)). \end{aligned}$$

- **Estimativa para  $I_2 := \int_0^t g'(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla u''_m(t)) ds$ .**

Novamente usando (H.2), Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Hölder, deduzimos que,

$$\begin{aligned}
I_2 & : = \int_0^t g'(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla u_m''(t)) ds \\
& = \frac{d}{dt} \left( \int_0^t g'(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(t)) ds \right) \\
& \quad - g'(0) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_2^2 - \int_0^t g''(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(t)) ds \\
& \leq \frac{d}{dt} \left( \int_0^t g'(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(t)) ds \right) - g'(0) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_2^2 \\
& \quad + \int_0^t |g''(t-s)| \|\nabla u_m(s)\|_2 \|\nabla u_m'(t)\|_2 ds \\
(2.3.30) \quad & \leq \frac{d}{dt} \left( \int_0^t g'(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(t)) ds \right) - g'(0) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_2^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left( \int_0^t |g''(t-s)| \|\nabla u_m(s)\|_2 ds \right)^2 \\
& \leq \frac{d}{dt} \left( \int_0^t g'(t-s)(\nabla u_m(s), \nabla u_m'(t)) ds \right) - g'(0) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_2^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|g''\|_{L^1(0,+\infty)} \int_0^t |g''(t-s)| \|\nabla u_m(s)\|_2^2 ds.
\end{aligned}$$

- **Estimativa para  $I_3 := (p-1)(|u_m(t)|^{p-2}u_m'(t), u_m''(t))$ .**

Aplicando a desigualdade de Hölder generalizada, observando que  $\frac{p-2}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2} = 1$ , considerando a imersão  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(p-1)}(\Omega)$  e (2.3.25), concluímos

$$\begin{aligned}
(2.3.31) \quad |I_3| & \leq (p-1) \| |u_m(t)|^{p-2} u_m'(t) \|_{2(p-1)} \|u_m''(t)\|_2 \\
& \leq K_1 \|\nabla u_m(t)\|_2^{p-2} \|\nabla u_m'(t)\|_2 \|u_m''(t)\|_2 \\
& \leq K_2 [\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + \|u_m''(t)\|_2^2],
\end{aligned}$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são constantes positivas independentes de  $m$  e  $t$ .

- **Estimativa para  $I_4 := (k-1)(|u_m(t)|^{k-2}u_m'(t), u_m''(t))_{\Gamma_1}$ .**

Analogamente ao feito em  $I_3$ , obtemos,

$$|I_4| \leq \frac{K_3}{\alpha} \|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_m''(t)\|_{2,\Gamma_1}^2,$$

onde  $K_3$  é uma constante positiva independente de  $m$  e  $t$ .

- **Estimativa para  $I_5 := (\eta-1)(|u_m'(t)|^{\eta-2}u_m''(t), u_m''(t))$ .**

Não é difícil ver que,

$$(2.3.32) \quad I_5 := (\eta - 1) \int_{\Omega} |u'_m(t)|^{\eta-2} (u''_m(t))^2 dx = K_4 \int_{\Omega} \left( \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^{\frac{\eta-2}{2}} u'_m(t) \right)^2 dx,$$

onde  $K_4 = \frac{4(\eta-1)}{\eta^2}$  é independente de  $m$  e  $t$ .

A partir do obtido de (2.3.29)-(2.3.32), deduzimos,

$$(2.3.33) \quad \begin{aligned} \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} \leq & g(0) \frac{d}{dt} (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) + K_2 \|\nabla u'_m(t)\|_2^2 + K_2 \|u''_m(t)\|_2^2 \\ & + \frac{K_3}{\alpha} \|\nabla u'_m(t)\|_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \int_0^t g'(t-s) (\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t)) ds \right) \\ & - g'(0) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(t)\|_2^2 \\ & + \frac{1}{2} \|g''\|_{L^1(0,+\infty)} \int_0^t |g''(t-s)| \|\nabla u_m(s)\|_2^2 ds, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \tilde{I}(t) := & \frac{1}{2} \|u''_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(t)\|_2^2 + K_4 \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{d}{dt} |u'_m(s)|^{\frac{\eta-2}{2}} u'_m(s) \right)^2 dx ds \\ & + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u''_m(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds. \end{aligned}$$

Integrando (2.3.33) sobre  $(0, t)$  e lembrando de (2.3.27), podemos escrever,

$$\begin{aligned} \tilde{I}(t) \leq & \frac{1}{2} \|u''_m(0)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u^1\|_2^2 + g(0) (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) - g(0) (\nabla u^0, \nabla u^1) \\ & + \left( K_2 + \frac{K_3}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_2^2 ds + K_2 \int_0^t \|u''_m(s)\|_2^2 ds - g'(0) \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_2^2 \\ & + g'(0) \frac{1}{2} \|\nabla u^0\|_2^2 + \int_0^t g'(t-s) (\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t)) ds \\ & + \frac{1}{2} \|g''\|_{L^1(0,+\infty)} \int_0^t \int_0^\xi |g''(\xi-s)| \|\nabla u_m(s)\|_2^2 ds d\xi \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \tilde{I}(t) \leq & \frac{L_1^2}{2} + \frac{1}{2} \|\nabla u^1\|_2^2 + \frac{g(0)}{\eta_1} \|\nabla u_m(t)\|_2^2 + g(0) \eta_1 \|\nabla u'_m(t)\|_2^2 \\ & - g'(0) \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \|g'\|_{L^1(0,+\infty)} \frac{\eta_2}{2} \|\nabla u'_m(t)\|_2^2 + K_5 \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_2^2 ds \\ & + \frac{g(0)}{2} \{ \|\nabla u^0\|_2^2 + \|\nabla u^1\|_2^2 \} + \frac{1}{2\eta_2} \|g'\|_{L^\infty(0,+\infty)} \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_2^2 ds \\ & + K_2 \int_0^t \|u''_m(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2} \|g''\|_{L^1(0,+\infty)} \|g''\|_{L^\infty(0,+\infty)} T \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_2^2 ds. \end{aligned}$$

onde  $K_5 = K_2 + \frac{K_3}{\alpha} + \frac{1}{2}$ .

De (H.2), (2.3.25) e fazendo,  $\eta_1 = \frac{1}{8g(0)}$  e  $\eta_2 = \frac{1}{4\|g'\|_{L^1(0,+\infty)}}$ , deduzimos da última desigualdade que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_m''(t)\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + K_4 \int_0^t \int_\Omega \left( \frac{d}{dt} |u_m'(s)|^{\frac{\eta-2}{2}} u_m'(s) \right)^2 dx ds + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_m''(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds \\ & \leq L_2 + (2K_5 + 4K_2) \int_0^t \frac{1}{2}\|u_m''(s)\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\nabla u_m'(s)\|_2^2 ds \\ & + K_4 \int_0^t \left( \int_0^s \int_\Omega \left( \frac{d}{dt} |u_m'(\xi)|^{\frac{\eta-2}{2}} u_m'(\xi) \right)^2 dx d\xi + \frac{\alpha}{2} \int_0^s \|u_m''(\xi)\|_{2,\Gamma_1}^2 d\xi \right) ds, \end{aligned}$$

onde  $L_2 = L_2(u_0, u_1, g(0), g'(0), c, l, E_1, L_1, T)$ , independe de  $m \in \mathbb{N}$  e  $t \in [0, T]$ .

Aplicando o Lema de Gronwall obtemos a segunda estimativa:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_m''(t)\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + K_4 \int_0^t \int_\Omega \left( \frac{d}{dt} |u_m'(s)|^{\frac{\eta-2}{2}} u_m'(s) \right)^2 dx ds \\ (2.3.34) \quad & + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_m''(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds \leq L_3, \end{aligned}$$

onde  $L_3$  é uma constante positiva independente de  $m \in \mathbb{N}$  e  $t \in [0, T]$ .

As estimativas obtidas nos permitem obter uma subsequência de  $(u_m)$ , a qual ainda denotaremos por  $(u_m)$ , e uma função  $u : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo:

$$(2.3.35) \quad u_m \rightharpoonup u \text{ fraco estrela em } L_{loc}^\infty(0, \infty; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)),$$

$$(2.3.36) \quad u_m' \rightharpoonup u' \text{ fraco estrela em } L_{loc}^\infty(0, \infty; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)),$$

$$(2.3.37) \quad u_m'' \rightharpoonup u'' \text{ fraco estrela em } L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

$$(2.3.38) \quad u_m' \rightharpoonup u' \text{ fraco em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)),$$

$$(2.3.39) \quad u_m'' \rightharpoonup u'' \text{ fraco em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)).$$

Uma vez que as imersões  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  e  $H^{1/2}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$  são compactas, temos, graças a Proposição 1.16 (Teorema de Aubin-Lions), que:

$$u_m \rightarrow u \text{ forte em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

$$u_m' \rightarrow u' \text{ forte em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

$$u_m \rightarrow u \text{ forte em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)),$$

e conseqüentemente, usando a Proposição 1.17 (Lema de Lions), deduzimos

$$(2.3.40) \quad |u_m|^{p-2} u_m \rightharpoonup |u|^{p-2} u, \text{ fraco em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

$$(2.3.41) \quad |u_m'|^{\eta-2} u_m' \rightharpoonup |u'|^{\eta-2} u', \text{ fraco em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

$$(2.3.42) \quad |u_m|^{k-2} u_m \rightharpoonup |u|^{k-2} u, \text{ fraco em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)).$$

As convergências (2.3.35)-(2.3.42) nos permitem passar ao limite em (2.3.17). Como  $(w_j)$  é uma base de  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ , então, para todo  $T > 0$ ,  $\theta \in D(0, T)$  e  $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ , depois de passar ao limite, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (u''(t), v)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t) dt \\
& - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla v)\theta(s) ds dt + \alpha \int_0^T (u'(t), v)_{\Gamma_1}\theta(t) dt \\
& - \int_0^T (|u(t)|^{k-2}u, v)_{\Gamma_1}\theta(t) dt + \int_0^T (|u'|^{\eta-2}u', v)\theta(t) dt \\
(2.3.43) \quad & = \int_0^T (|u(t)|^{p-2}u, v)\theta(t) dt.
\end{aligned}$$

De (2.3.43) e tomando  $v \in D(\Omega)$ , vem que

$$u'' - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + |u'|^{\eta-2}u' = |u|^{p-2}u \quad \text{em } D'(\Omega \times (0, T)).$$

No entanto, como  $u''$ ,  $|u'|^{\eta-2}u'$ ,  $|u|^{p-2}u \in L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega))$  temos que

$$\Delta \left( u - \int_0^t g(t-s)u(s)ds \right) \in L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega))$$

e portanto

$$(2.3.44) \quad u'' - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + |u'|^{\eta-2}u' = |u|^{p-2}u \quad \text{em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Considerando (2.3.44) e usando a fórmula de Green generalizada, deduzimos:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds + \alpha u' = |u|^{k-2}u \quad \text{em } D'(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_1))$$

e uma vez que  $|u|^{k-2}u \in L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$ , inferimos que

$$(2.3.45) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds + \alpha u' = |u|^{k-2}u \quad \text{em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)).$$

O que prova a existência de solução para o problema (2.3.16). Passemos agora a prova da unicidade de solução do referido problema.

### Unicidade de Solução

Sejam  $u_1$  e  $u_2$  duas soluções do problema (2.3.16). Então,  $z = u_1 - u_2$  verifica

$$\begin{aligned}
(2.3.46) \quad & (z''(t), w) + (\nabla z(t), \nabla w) - \int_0^t g(t-s)(\nabla z(s), \nabla w) ds + \alpha(z'(t), w)_{\Gamma_1} \\
& + \left( |u_1(t)|^{k-2}u_1(t) - |u_2(t)|^{k-2}u_2(t), w \right)_{\Gamma_1} + (|u_1'(t)|^{\eta-2}u_1'(t) - |u_2'(t)|^{\eta-2}u_2'(t), w) \\
& = (|u_1(t)|^{p-2}u_1(t) - |u_2(t)|^{p-2}u_2(t), w),
\end{aligned}$$

para todo  $w \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ .

Substituindo  $w = z'(t)$  em (2.3.46) e observando que a função  $s \mapsto |s|^{\eta-2}s$  é monótona crescente temos, em particular,

$$\left(|u_1'(t)|^{\eta-2}u_1'(t) - |u_2'(t)|^{\eta-2}u_2'(t), u_1' - u_2'\right) \geq 0, \text{ para todo } t \geq 0,$$

o que implica,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|z'(t)\|_2^2 + \|\nabla z(t)\|_2^2 \right\} + g(0) \|\nabla z(t)\|_2^2 + \int_0^t g'(t-s) (\nabla z(s), \nabla z(t)) ds \\ & + \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t g(t-s) (\nabla z(s), \nabla z(t)) ds \right\} + \alpha \|z'(t)\|_{2,\Gamma_1}^2 \\ & \leq \left( |u_1(t)|^{k-2}u_1(t) - |u_2(t)|^{k-2}u_2(t), z'(t) \right)_{\Gamma_1} + \left( |u_1(t)|^{p-2}u_1(t) - |u_2(t)|^{p-2}u_2(t), z'(t) \right) \\ & \leq K_6 \int_{\Gamma_1} \left( |u_1(t)|^{k-2} + |u_2(t)|^{k-2} \right) |z(t)| |z'(t)| d\Gamma + K_7 \int_{\Omega} \left( |u_1(t)|^{p-2} + |u_2(t)|^{p-2} \right) |z(t)| |z'(t)| dx \\ & \leq K_6 \left( \|u_1(t)\|_{2(k-1),\Gamma_1}^{k-2} + \|u_2(t)\|_{2(k-1),\Gamma_1}^{k-2} \right) \|z(t)\|_{2(k-1),\Gamma_1} \|z'(t)\|_{2,\Gamma_1} \\ & \quad + K_7 \left( \|u_1(t)\|_{2(p-1)}^{p-2} + \|u_2(t)\|_{2(p-1)}^{p-2} \right) \|z(t)\|_{2(p-1)} \|z'(t)\|_2, \end{aligned}$$

onde  $K_6$  e  $K_7$  são constantes positivas que dependem de  $k$  e  $p$ , respectivamente.

Note que a última desigualdade vem aplicando Hölder generalizado, observando que  $\frac{p-2}{2(p-1)} + \frac{2}{2(p-1)} + \frac{1}{2} = 1$ .

Integrando o obtido sobre  $(0, t)$ , usando as imersões  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(k-1)}(\Gamma_1)$  e  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(p-1)}(\Omega)$  e a primeira estimativa a priori, deduzimos que:

$$\|z'(t)\|_2^2 + \|\nabla z(t)\|_2^2 + (\alpha - \hat{\epsilon}) \int_0^t \|z'(s)\|_{2,\Gamma_1}^2 ds \leq K_8 \int_0^t \left( \|z'(s)\|_2^2 + \|\nabla z(s)\|_2^2 \right) ds,$$

onde  $\hat{\epsilon}$  é uma constante positiva arbitrária suficientemente pequena. Aplicando o Lema de Gronwall, temos da última desigualdade que  $\|z'(t)\|_2 = \|\nabla z(t)\|_2 = 0$ . O que nos permite concluir a unicidade.

### 2.3.2 Soluções Fracas

#### Prova do Teorema 2.7

Com o objetivo de obter a existência de soluções fracas usaremos conhecidos argumentos que podem ser encontrados, por exemplo, em [42]. Aqui repetimos esses argumentos com o objetivo de tornar o texto auto suficiente.

Seja  $A$  o operador cujo domínio  $D(A)$  é definido por,

$$D(A) = \left\{ (u, v) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega); u - \mathcal{N}[\tilde{g}(\gamma_0 v) + \tilde{f}(\gamma_0 u)] \in D(-\Delta) \right\},$$

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ \Delta(u - \mathcal{N}[\tilde{g}(\gamma_0 v) + \tilde{f}(\gamma_0 u)]) \end{pmatrix},$$

e  $\mathcal{N} : H^s(\Gamma_1) \rightarrow H_{\Gamma_0}^{s+3/2}(\Omega)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , é o operador de Neumann definido por

$$\mathcal{N}\tilde{p} = \tilde{q} \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta\tilde{q} = 0 & \text{em } \Omega \\ \tilde{q} = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \frac{\partial\tilde{q}}{\partial\nu} = \tilde{p} & \text{sobre } \Gamma_1. \end{cases}$$

Além disso, é importante observar que estamos considerando  $\tilde{g}(s) = \frac{1}{\mu}s$  e  $\tilde{f} = f_{2,\mu}$  como na Observação 2.4, a qual é uma função Lipschitz contínua sobre  $\mathbb{R}$ , e ainda,

$$\begin{aligned} D(-\Delta) &= \{v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega)\} \\ &= \left\{ v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \right\}. \end{aligned}$$

Note que,

$$(2.3.47) \quad (u, v) \in D(A) \Leftrightarrow \begin{cases} (u, v) \in [H_{\Gamma_0}^1(\Omega)]^2, \\ u - \mathcal{N}[\tilde{g}(\gamma_0 v) + \tilde{f}(\gamma_0 u)] \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \\ \Delta(u - \mathcal{N}[\tilde{g}(\gamma_0 v) + \tilde{f}(\gamma_0 u)]) \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Da Teoria de Semigrupos Não Lineares, o operador  $A$  é  $\omega$ -acretivo sobre o espaço  $E := H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , para algum  $\omega$  suficientemente grande. Além disso,  $A + \omega I$  é maximal monótono e

$$(2.3.48) \quad D(A) \text{ é denso em } H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Assumindo que  $\{u^0, u^1\} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  e ainda que,

$$\|\nabla u^0\| < \alpha_1 \quad \text{e} \quad E(u(0)) < E_1,$$

então,

$$\|\nabla u^0\| = \alpha_1 - \delta_1 \quad \text{e} \quad E(u(0)) = E_1 - \delta_2,$$

onde  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$  são números positivos. Tendo em vista (2.3.48), existe  $\{u_\mu^0, u_\mu^1\} \subset D(A)$  tal que

$$(2.3.49) \quad u_\mu^0 \rightarrow u^0 \text{ em } H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \quad \text{e} \quad u_\mu^1 \rightarrow u^1 \text{ em } L^2(\Omega), \quad \text{quando } \mu \rightarrow +\infty.$$

Então,  $\{u_\mu^0, u_\mu^1\}$  satisfaz, para todo  $\mu \geq \mu_0$ , para algum  $\mu_0 \in \mathbb{N}$ , a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial u_\mu^0}{\partial \nu} + \frac{1}{\mu} u_\mu^1 = f_{2,\mu}(u_\mu^0)$$

onde  $\alpha$  é escolhido igual a  $\frac{1}{\mu}$ ,  $f_{2,\mu}$  é dada por (2.3.15) e, além disso,

$$\|\nabla u_\mu^0\| < \alpha_1 \quad \text{e} \quad E(u_\mu(0)) < E_1.$$

Para cada  $\mu \in \mathbb{N}$  seja  $u_\mu$  a solução regular de (2.3.16) com dado inicial,  $\{u_\mu^0, u_\mu^1\}$ , ou seja, para todo  $T > 0$

$$u_\mu \in C_s(0, T; \mathcal{H}) \cap C_s^1(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap C_s^0(0, T; L^2(\Omega))$$

onde

$$\mathcal{H} := \{v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \Delta v \in L^2(\Omega)\},$$

e verifica

$$\begin{cases} u_{tt,\mu} - \Delta u_\mu + \int_0^t g(t-s)\Delta u_\mu(s)ds + h(u_{t,\mu}) = f_{1,\mu}(u_\mu), & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u_\mu = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u_\mu}{\partial \nu}(s)ds + \frac{1}{\mu}u_{t,\mu} = f_{2,\mu}(u_\mu), & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u_\mu(x, 0) = u_\mu^0(x), \quad u_{t,\mu}(x, 0) = u_\mu^1(x), & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (P_\mu)$$

Novamente usando o Lema 2.8, agora adaptado para funções truncadas, (ver Observação 2.4), (2.3.24) e (2.3.26), obtemos

$$(2.3.50) \quad \{u'_\mu\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(2.3.51) \quad \{u_\mu\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)),$$

$$(2.3.52) \quad \{F_{1,\mu}(u_\mu)\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^1(\Omega)),$$

$$(2.3.53) \quad \{F_{2,\mu}(u_\mu)\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^1(\Gamma_1)),$$

$$(2.3.54) \quad \{u'_\mu\} \text{ é limitada em } L^\eta(0, T; L^\eta(\Omega)),$$

$$(2.3.55) \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{\mu}}u'_\mu\right\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)).$$

Do fato que  $L^\eta(\Omega_T) \hookrightarrow L^2(\Omega_T)$ , onde  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ , vem que

$$(2.3.56) \quad \begin{aligned} \|u'_\mu\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \|u'_\mu\|_{L^2(\Omega_T)} \\ &\leq C\|u'_\mu\|_{L^\eta(\Omega_T)} = C\|u'_\mu\|_{L^\eta(0,T;L^\eta(\Omega))} \end{aligned}$$

e conseqüentemente, por (2.3.54), obtemos que

$$(2.3.57) \quad \{u'_\mu\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Como,

$$(2.3.58) \quad f_{1,\mu}(u_\mu) \rightarrow f_1(u) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(\Omega_T) \text{ quando } \mu \rightarrow +\infty,$$

e

$$(2.3.59) \quad f_{2,\mu}(u_\mu) \rightarrow f_2(u) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \equiv L^2(\Sigma_{1,T}) \text{ quando } \mu \rightarrow +\infty,$$

(ver Lasiecka e Tataru[42], Lemma 2.1), onde  $\Sigma_{1,T} = \Gamma_1 \times (0, T)$  e  $f_1, f_2$  são dadas na Observação 2.4.

Por outro lado, uma vez que

$$\| |u'_\mu|^{\eta-2} u'_\mu \|_{L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(0, T; L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(\Omega))} = \| |u'_\mu|^{\eta-1} \|_{L^\eta(0, T; L^\eta(\Omega))}$$

concluimos de (2.3.54) que

$$\{ |u'_\mu|^{\eta-2} u'_\mu \} \text{ é limitada em } L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(0, T; L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(\Omega)).$$

Pelas estimativas obtidas, existe uma subsequência de  $\{u_\mu\}$ , a qual denotaremos da mesma forma, tal que

$$(2.3.60) \quad u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)),$$

$$(2.3.61) \quad u'_\mu \rightharpoonup u' \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(2.3.62) \quad u'_\mu \rightharpoonup u' \quad \text{fraco em } L^\eta(0, T; L^\eta(\Omega)),$$

$$(2.3.63) \quad f_{1,\mu}(u_\mu) \rightharpoonup |u|^{p-2}u \quad \text{fraco em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(2.3.64) \quad f_{2,\mu}(u_\mu) \rightharpoonup |u|^{k-2}u \quad \text{fraco em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)),$$

$$(2.3.65) \quad |u'_\mu|^{\eta-2} u'_\mu \rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em } L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(0, T; L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(\Omega)),$$

para algum  $\chi \in L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(0, T; L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(\Omega))$ .

Além disso, pelo Teorema de Aubin-Lions, ver [48, Theorem 5.1], deduzimos que

$$(2.3.66) \quad u_\mu \rightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(2.3.67) \quad u_\mu \rightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)).$$

Resta-nos provar que  $\chi = |u'|^{\eta-2}u'$ . Para isso, usaremos argumentos de monotonicidade.

Definindo  $z_{\mu,\sigma} = u_\mu - u_\sigma$ ,  $\mu, \sigma \in \mathbb{N}$ , de  $(P_\mu)$  vem que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|z'_{\mu,\sigma}\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla z_{\mu,\sigma}\|_2^2 + (g \diamond (z_{\mu,\sigma}))(t) \right\} \\
& + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_1} |u'_\mu|^2 d\Gamma - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_1} u'_\mu u'_\sigma d\Gamma - \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma_1} u'_\sigma u'_\mu d\Gamma + \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma_1} |u'_\sigma|^2 d\Gamma \\
(2.3.68) \quad & + \int_\Omega (|u'_\mu|^{\eta-2} u'_\mu - |u'_\sigma|^{\eta-2} u'_\sigma) (u'_\mu - u'_\sigma) dx = \frac{1}{2} (g' \diamond (u_\mu - u_\sigma))(t) \\
& + \int_\Omega (f_{1,\mu}(u_\mu) - f_{1,\sigma}(u_\sigma)) (u'_\mu - u'_\sigma) dx + \int_{\Gamma_1} (f_{2,\mu}(u_\mu) - f_{2,\sigma}(u_\sigma)) (u'_\mu - u'_\sigma) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, de (2.3.68) obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|z'_{\mu,\sigma}\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla z_{\mu,\sigma}\|_2^2 + (g \diamond (z_{\mu,\sigma}))(t) \right\} \\
(2.3.69) \quad & + \int_\Omega (|u'_\mu|^{\eta-2} u'_\mu - |u'_\sigma|^{\eta-2} u'_\sigma) (u'_\mu - u'_\sigma) dx \\
& \leq \left[ \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\sigma} \right] \int_{\Gamma_1} |u'_\mu|^2 d\Gamma + \left[ \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\sigma} \right] \int_{\Gamma_1} |u'_\sigma|^2 d\Gamma \\
& + \int_\Omega (f_{1,\mu}(u_\mu) - f_{1,\sigma}(u_\sigma)) (u'_\mu - u'_\sigma) dx \\
& + \int_{\Gamma_1} (f_{2,\mu}(u_\mu) - f_{2,\sigma}(u_\sigma)) (u'_\mu - u'_\sigma) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Integrando (2.3.69) sobre  $(0, t)$  chegamos em

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \|z'_{\mu,\sigma}\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla z_{\mu,\sigma}\|_2^2 + (g \diamond (z_{\mu,\sigma}))(t) \right\} \\
& + \int_0^t \int_\Omega (|u'_\mu|^{\eta-2} u'_\mu - |u'_\sigma|^{\eta-2} u'_\sigma) (u'_\mu - u'_\sigma) dx ds \\
(2.3.70) \quad & \leq \|u_\mu^1 - u_\sigma^1\|_2^2 + \|\nabla u_\mu^0 - \nabla u_\sigma^0\|_2^2 \\
& + \left[ \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\sigma} \right] \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u'_\mu|^2 d\Gamma ds + \left[ \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\sigma} \right] \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u'_\sigma|^2 d\Gamma ds \\
& + \int_0^t \int_\Omega (f_{1,\mu}(u_\mu) - f_{1,\sigma}(u_\sigma)) (u'_\mu - u'_\sigma) dx ds \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_1} (f_{2,\mu}(u_\mu) - f_{2,\sigma}(u_\sigma)) (u'_\mu - u'_\sigma) d\Gamma ds.
\end{aligned}$$

A estimativa (2.3.56) junto com as convergências (2.3.49) e (2.3.59) implicam a convergência para zero (quando  $\mu, \sigma \rightarrow +\infty$ ) dos termos do lado direito de (2.3.70). Assim, de (2.3.70) deduzimos que

$$(2.3.71) \quad u_\mu \rightarrow u \text{ em } C^0([0, T]; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)),$$

$$(2.3.72) \quad \lim_{\mu, \sigma \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\Omega} (|u'_{\mu}|^{\eta-2} u'_{\mu} - |u'_{\sigma}|^{\eta-2} u'_{\sigma}) (u'_{\mu} - u'_{\sigma}) dx ds = 0.$$

De (2.3.62), (2.3.65) e (2.3.72), obtemos também que

$$(2.3.73) \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\mu}|^{\eta} dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\mu}|^{\eta-2} u'_{\mu} u' dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} \chi u'_{\mu} dx ds \right] \\ + \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\sigma}|^{\eta} dx ds = 0.$$

Consequentemente, novamente usando (2.3.62), (2.3.65) e trocando  $\sigma$  por  $\mu$ , temos de (2.3.73)

$$(2.3.74) \quad 2 \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\mu}|^{\eta} dx ds = 2 \int_0^t \int_{\Omega} \chi u' dx ds.$$

O limite obtido em (2.3.74) combinado com (2.3.62), (2.3.65) e a monotonicidade da função  $h(s) = |s|^{\eta-2}s$  implicam que  $\chi = h(u')$ .

De fato, uma vez que  $h(s) = |s|^{\eta-2}s$  é monótona crescente, temos que

$$\int_0^T \langle h(u'_{\mu}) - h(\psi), u'_{\mu} - \psi \rangle dt \geq 0$$

para todo  $\psi \in L^{\eta}(\Omega)$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  define a dualidade entre  $L^{\eta}(\Omega)$  e  $L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(\Omega)$ .

A última desigualdade implica

$$(2.3.75) \quad \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^T \langle h(u'_{\mu}(t)), \psi \rangle dt + \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^T \langle h(\psi), u'_{\mu}(t) - \psi \rangle dt \\ \leq \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^T \langle h(u'_{\mu}(t)), u'_{\mu}(t) \rangle dt.$$

Considerando as convergências (2.3.62), (2.3.65) e (2.3.74), concluímos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - h(\psi), u'(t) - \psi \rangle dt \geq 0.$$

Fazendo  $\psi := u' + \lambda \xi$  onde  $\xi$  é um elemento arbitrário de  $L^{\eta}(\Omega)$  temos, pela hemicontinuidade do operador  $L^{\eta}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{\eta}{\eta-1}}(\Omega); v \mapsto h(v)$ , que  $\chi = h(u')$ , como desejávamos provar, o que nos permite passar ao limite em  $(P_{\mu})$  a fim de obter

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds + h(u_t) = f_1(u), & \text{em } D'(\Omega \times (0, T)), \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) ds = f_2(u), & \text{em } L^2(0, T, L^2(\Gamma_1)), \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1. \end{cases}$$

Note que desta forma exibimos uma solução fraca para o problema acima, contudo a técnica utilizada não nos permite falar em unicidade da mesma.

## 2.4 Não Existência de Solução Global

Nessa seção provaremos a não existência de solução global para o problema (2.1.1), quando  $\eta < p$  e ainda considerando hipóteses apropriadas sobre os dados iniciais.

A seguir enunciamos o resultado principal dessa seção, cuja demonstração será feita na próxima seção, onde usaremos argumentos de contradição assumindo a existência de solução global.

**Teorema 2.9** *Suponha que (H.2) ocorre e ainda que*

$$(2.4.76) \quad \int_0^\infty g(s) ds < \frac{r/2 - 1}{r/2 - 1 + 1/(2r)},$$

onde  $r = \min\{p, k\}$ , com  $2 \leq \eta < p \leq \bar{p}$  e  $2 \leq k \leq \bar{k}$ .

Além disso assuma que

$$(2.4.77) \quad E(0) < E_2 \quad e \quad \|\nabla u^0\|_2 \geq \alpha_1,$$

com

$$(2.4.78) \quad E_2 = \begin{cases} \frac{(k-r)\alpha_1^2}{rp}, & \text{se } p > k, \\ \frac{(p-r)\alpha_1^2}{rk}, & \text{se } k > p. \end{cases}$$

e  $\alpha_1$  definido em (2.2.6).

Então, não existe solução global de (2.1.1).

**Observação 2.10** *Segue de (2.2.6) e das definições de  $r$  e de  $E_2$  que  $E_2 < E_1$ .*

O Lema a seguir desempenha um importante papel na prova do Teorema acima e foi inspirado no trabalho de Cavalcanti et al [17] onde os autores provaram um resultado similar para a equação da onda.

**Lema 2.11** *Seja  $u$  uma solução de (2.1.1). Assuma que*

$$(2.4.79) \quad E(0) < E_1 \quad e \quad \|\nabla u_0\|_2 \geq \alpha_1.$$

Então existe uma constante  $\lambda_2 > \alpha_1$  tal que

$$(2.4.80) \quad (\gamma(t))^{1/2} \geq \lambda_2, \quad \forall t > 0$$

e

$$(2.4.81) \quad \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p + \frac{1}{k} \|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k \geq \frac{\tilde{B}_1^p}{p} \lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k} \lambda_2^k, \quad \forall t > 0.$$

**Prova:** Note que segue diretamente do obtido em (2.2.13) que para todo  $t > 0$ ,

$$(2.4.82) \quad E(t) \geq F((\gamma(t))^{1/2}).$$

É oportuno lembrar das propriedades da função  $F$  (ver Observação 2.1) e que

$$F(\alpha_1) = E_1,$$

onde  $\alpha_1$  é dado em (2.2.6). Com isso em mente e uma vez que por hipótese  $E(0) < E_1$ , segue que existe  $\lambda_2 > \alpha_1$ , tal que  $F(\lambda_2) = E(0)$ . Da definição da função  $\gamma(t)$ , dada em (2.2.12) vem que

$$(\gamma(0))^{1/2} = \|\nabla u_0\|_2.$$

Disto e de (2.4.82) temos que

$$F((\gamma(0))^{1/2}) = F(\|\nabla u_0\|_2) \leq E(0) = F(\lambda_2),$$

o que implica na desigualdade

$$(2.4.83) \quad \|\nabla u_0\|_2 \geq \lambda_2,$$

posto que por hipótese temos  $\lambda_2 > \alpha_1$ ,  $\|\nabla u_0\|_2 \geq \alpha_1$  e a função  $F$  é decrescente para esses valores, ver Observação 2.1.

A fim de obter (2.4.80), suponhamos que

$$(\gamma(t_0))^{1/2} < \lambda_2,$$

para algum  $t_0 > 0$ .

Se  $(\gamma(t_0))^{1/2} < \alpha_1$ , temos em verdade que,  $(\gamma(t_0))^{1/2} < \alpha_1 < \lambda_2 \leq \|\nabla u_0\|_2$ . Pela continuidade de  $\gamma(\cdot)$ , existe  $t^* \in (0, t_0)$  tal que

$$(\gamma(t^*))^{1/2} = \lambda^*,$$

com  $\alpha_1 < \lambda^* < \lambda_2$ . Disto e de (2.4.82), vem que

$$E(t^*) \geq F((\gamma(t^*))^{1/2}) = F(\lambda^*) > F(\lambda_2) = E(0)$$

o que é absurdo, uma vez que  $E$  é não crescente.

Agora, se  $(\gamma(t_0))^{1/2} > \alpha_1$ , então novamente por (2.4.82) obtemos que

$$E(t_0) \geq F((\gamma(t_0))^{1/2}) > F(\lambda_2) = E(0),$$

e pela mesma razão chegamos a um absurdo. Em ambos os casos, (2.4.80) é obtido.

Para provar (2.4.81), usamos novamente (2.2.13) para obter

$$\frac{1}{2}\gamma(t) \leq E(t) + \frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p + \frac{1}{k}\|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k.$$

Consequentemente, usando que  $E$  é não crescente, (2.4.80) e (2.2.6) chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p + \frac{1}{k}\|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k &\geq \frac{1}{2}\gamma(t) - E(0) \\ (2.4.84) \qquad \qquad \qquad &\geq \frac{1}{2}\lambda_2^2 - E(0) \\ &= \frac{1}{2}\lambda_2^2 - F(\lambda_2) = \frac{\tilde{B}_1^p}{p}\lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\lambda_2^k, \end{aligned}$$

o que prova a desigualdade (2.4.81) e encerra a prova do Lema 2.11. ■

### 2.4.1 Prova do Teorema 2.9

Com o intuito de provarmos o principal resultado dessa seção, aplicaremos o método de Georgiev-Todorova, ver por exemplo, [32, 56] e também [58]. Então, suponhamos que a solução seja global. Nosso objetivo é chegarmos a uma contradição.

Definamos

$$(2.4.85) \qquad \qquad \qquad \mathcal{H}(t) = E_2 - E(t).$$

De (2.2.8) segue que a função  $\mathcal{H}$  é não decrescente. Temos ainda por (2.2.13), (2.4.79) e (2.4.85) que

$$\begin{aligned} (2.4.86) \qquad 0 &< \mathcal{H}(0) \leq \mathcal{H}(t) \\ &< E_1 - E(t) \\ &\leq E_1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (g \diamond u)(t) + \frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p + \frac{1}{k}\|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k. \end{aligned}$$

De (2.2.6), (2.2.12) e (2.4.80), vem que

$$\begin{aligned} &E_1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} (g \diamond u)(t) \\ &= F(\alpha_1) - \frac{1}{2}\gamma(t) \\ &< F(\alpha_1) - \frac{1}{2}\alpha_1^2 = -\frac{\tilde{B}_1^p}{p}\alpha_1^p - \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\alpha_1^k < 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Disto e de (2.4.86) segue a seguinte desigualdade:

$$(2.4.87) \quad 0 < \mathcal{H}(0) \leq \mathcal{H}(t) \leq \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p + \frac{1}{k} \|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k, \quad \forall t \geq 0.$$

Nesse momento, para  $\varepsilon > 0$  pequeno, a ser escolhido posteriormente, definamos a seguinte função auxiliar,

$$(2.4.88) \quad \mathcal{L}(t) = \mathcal{H}^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx,$$

onde

$$(2.4.89) \quad 0 < \sigma \leq \min\left(\frac{p-\eta}{p(\eta-1)}, \frac{p-2}{2p}\right).$$

Lembramos que estamos supondo  $p > \eta$  e observamos que a função  $\mathcal{L}$  é uma pequena perturbação da energia.

Nosso objetivo é mostrar que  $\mathcal{L}$  satisfaz a seguinte inequação

$$(2.4.90) \quad \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} \geq \xi \mathcal{L}^{1+\nu}(t)$$

em  $[0, \infty)$ , onde  $\nu > 0$ .

Esta desigualdade, nos permite concluir que a solução do problema (2.1.1), que estamos supondo ser global, explode em tempo finito  $t \geq \mathcal{L}(0)^{-\nu} \xi^{-1} \nu^{-1}$ , assumido que  $\mathcal{L}(0) > 0$ , o que nos leva a uma contradição.

A fim de concluirmos esse resultado, precisamos de mais dois lemas auxiliares.

**Lema 2.12** *Seja  $u$  solução de (2.1.1). Então, sob as hipóteses do Teorema 2.9, existe uma constante  $\eta_1 > 0$  independente de  $t$  e  $\varepsilon > 0$ , tal que*

$$(2.4.91) \quad \mathcal{L}'(t) \geq \varepsilon \eta_1 \left( \mathcal{H}(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k \right), \quad \forall t \geq 0$$

e ainda,

$$\mathcal{L}(0) = \mathcal{H}(0)^{1-\sigma} + \varepsilon \int_{\Omega} u_0(x) u_1(x) dx > 0.$$

**Prova:** Derivando (2.4.88) com respeito a  $t$  e usando o problema (2.1.1), obtemos

$$(2.4.92) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &= (1-\sigma) \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \|u_t(t)\|_2^2 - \varepsilon \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad + \varepsilon \|u(t)\|_p^p + \varepsilon \|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s, x) ds dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{\Omega} u |u_t|^{\eta-2} u_t dx. \end{aligned}$$

De modo a estimar os dois últimos termos em (2.4.92) usaremos a seguinte desigualdade de Young

$$XY \leq \frac{\lambda^\alpha X^\alpha}{\alpha} + \frac{\lambda^{-\beta} Y^\beta}{\beta},$$

em que  $X, Y \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  tal que  $1/\alpha + 1/\beta = 1$ .

A seguir aplicaremos essa desigualdade tomando  $\alpha = \eta$  e  $\beta = \frac{\eta}{\eta-1}$ . Notando ainda que de (2.4.87), temos, para uma constante positiva  $M$ , a ser determinada posteriormente, que

$$\lambda(t) = M^{-\frac{(\eta-1)}{\eta}} \mathcal{H}^{\frac{\sigma(\eta-1)}{\eta}}(t) > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u|u_t|^{\eta-2} u_t dx &\leq \left| \int_{\Omega} u|u_t|^{\eta-2} u_t dx \right| \\ (2.4.93) \quad &\leq \frac{\lambda(t)^\eta}{\eta} \|u(t)\|_\eta^\eta + \frac{\eta-1}{\eta} \lambda(t)^{-\eta/(\eta-1)} \|u_t(t)\|_\eta^\eta, \\ &= \frac{M^{-(\eta-1)}}{\eta} \mathcal{H}^{\sigma(\eta-1)}(t) \|u(t)\|_\eta^\eta + \frac{\eta-1}{\eta} M \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \|u_t(t)\|_\eta^\eta. \end{aligned}$$

O termo de memória do lado direito de (2.4.92) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s, x) ds dx \\ (2.4.94) \quad &= \|\nabla u(t)\|_2^2 \left( \int_0^t g(s) ds \right) + \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \int_0^t g(t-s) (\nabla u(s, x) - \nabla u(t, x)) ds dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando as desigualdades de Hölder e Young, inferimos que para todo  $\mu > 0$ , vem que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \int_0^t g(t-s) (\nabla u(s, x) - \nabla u(t, x)) ds dx \right| \\ (2.4.95) \quad &\leq \int_0^t g(t-s) \|\nabla u(t)\|_2 \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|_2 ds \\ &\leq \mu (g \diamond u)(t) + \frac{1}{4\mu} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Substituindo as estimativas (2.4.93) e (2.4.94) em (2.4.92), usando a desigualdade

(2.4.95) e ainda somando  $0 = -\varepsilon r E_2 + \varepsilon r \mathcal{H}'(t) + \varepsilon r E(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
(2.4.96) \quad \mathcal{L}'(t) &\geq (1 - \sigma) \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \left( \frac{r}{2} + 1 \right) \|u_t\|_2^2 \\
&+ \varepsilon \left( 1 - \frac{r}{p} \right) \|u(t)\|_p^p + \varepsilon \left( 1 - \frac{r}{k} \right) \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k - \varepsilon \frac{M^{-(\eta-1)}}{\eta} \mathcal{H}^{\sigma(\eta-1)}(t) \|u\|_\eta^\eta \\
&- \varepsilon \frac{\eta-1}{\eta} M \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \|u_t\|_\eta^\eta + \varepsilon \left( \frac{r}{2} - \mu \right) (g \diamond u)(t) - \varepsilon r E_2 + \varepsilon r \mathcal{H}'(t) \\
&+ \varepsilon \left\{ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) - \left( \frac{r}{2} - 1 + \frac{1}{4\mu} \right) \left( \int_0^t g(s) ds \right) \right\} \|\nabla u(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Explorando (2.4.81), temos que

$$\begin{aligned}
(2.4.97) \quad -\varepsilon r E_2 &= -\varepsilon r E_2 \left( \frac{\tilde{B}_1^p}{p} \lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k} \lambda_2^k \right) \cdot \left( \frac{\tilde{B}_1^p}{p} \lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k} \lambda_2^k \right)^{-1} \\
&\geq -\varepsilon r E_2 \left( \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p + \frac{1}{k} \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k \right) \cdot \left( \frac{\tilde{B}_1^p}{p} \lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k} \lambda_2^k \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, substituindo (2.4.97) em (2.4.96), ocorre que

$$\begin{aligned}
(2.4.98) \quad \mathcal{L}'(t) &\geq (1 - \sigma) \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \left( \frac{r}{2} + 1 \right) \|u_t(t)\|_2^2 \\
&+ \varepsilon c_1 \|u(t)\|_p^p + \varepsilon c_2 \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k - \varepsilon \frac{M^{-(\eta-1)}}{\eta} \mathcal{H}^{\sigma(\eta-1)}(t) \|u(t)\|_\eta^\eta \\
&- \varepsilon \frac{\eta-1}{\eta} M \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \|u_t(t)\|_\eta^\eta + \varepsilon \left( \frac{r}{2} - \mu \right) (g \diamond u)(t) + \varepsilon r \mathcal{H}'(t) \\
&+ \varepsilon \left\{ \left( \frac{r}{2} - 1 \right) - \left( \frac{r}{2} - 1 + \frac{1}{4\mu} \right) \left( \int_0^t g(s) ds \right) \right\} \|\nabla u(t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são como segue

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 - \frac{r}{p} - \frac{r}{p} E_2 \left( \frac{\tilde{B}_1^p}{p} \lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k} \lambda_2^k \right)^{-1}, \\
c_2 &= 1 - \frac{r}{k} - \frac{r}{k} E_2 \left( \frac{\tilde{B}_1^p}{p} \lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k} \lambda_2^k \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$ . Para isto, dividiremos em dois casos:

**Caso 1:**  $p > k$ .

Neste caso,  $E_2 = \frac{(k-r)}{rp}\alpha_1^2$  e segue que  $c_1 \geq c_2$ . Assim é suficiente provarmos que  $c_2 > 0$ . De fato, notemos inicialmente que pela relação (2.2.6), vem que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{B}_1^p}{p}\alpha_1^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\alpha_1^k - \frac{1}{p}\alpha_1^2 &= -\frac{1}{p}\alpha_1^2 \left(1 - \tilde{B}_1^p\alpha_1^{p-2}\right) + \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\alpha_1^k \\ &= -\frac{1}{p}\alpha_1^2 \left(\tilde{B}_2^k\alpha_1^{k-2}\right) + \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\alpha_1^k \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{p}\right)\tilde{B}_2^k\alpha_1^k > 0. \end{aligned}$$

Daí, temos

$$(2.4.99) \quad \frac{\tilde{B}_1^p}{p}\alpha_1^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\alpha_1^k > \frac{1}{p}\alpha_1^2.$$

Aplicando (2.4.99), obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r}{k}\right) \left(\frac{\tilde{B}_1^p}{p}\alpha_1^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\alpha_1^k\right) &> \left(1 - \frac{r}{k}\right) \frac{1}{p}\alpha_1^2 \\ (2.4.100) \quad &= \left(\frac{k-r}{k}\right) \frac{1}{p}\alpha_1^2 = \frac{r}{k} \frac{(k-r)}{rp}\alpha_1^2 \\ &= \frac{r}{k}E_2 \end{aligned}$$

De (2.4.100), podemos concluir o desejado como segue

$$\begin{aligned} c_2 &= 1 - \frac{r}{k} - \frac{r}{k}E_2 \left(\frac{\tilde{B}_1^p}{p}\lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\lambda_2^k\right)^{-1} \\ &> 1 - \frac{r}{k} - \left(1 - \frac{r}{k}\right) \left(\frac{\tilde{B}_1^p}{p}\lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\lambda_2^k\right) \left(\frac{\tilde{B}_1^p}{p}\lambda_2^p + \frac{\tilde{B}_2^k}{k}\lambda_2^k\right)^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Caso 2:**  $k > p$ .

Neste caso  $E_2 = \frac{(p-r)}{rk}\alpha_1^2$  e podemos mostrar de modo análogo ao feito no caso anterior que  $c_2 \geq c_1 > 0$ .

Agora, estudaremos outras constantes em (2.4.98).

Para  $0 < \mu < r/2$ , definamos

$$a_1 = r/2 - \mu, \quad \text{e} \quad a_2 = (r/2 - 1) - (r/2 - 1 + 1/(4\mu)) \left(\int_0^\infty g(s) ds\right).$$

Segue de forma imediata que  $a_1 > 0$ . Por outro lado, lembrando a hipótese (2.4.76) podemos concluir que  $a_2 > 0$ . Assim, (2.4.98) toma a forma

$$(2.4.101) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\geq (1 - \sigma) \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \left( \frac{r}{2} + 1 \right) \|u_t\|_2^2 \\ &+ \varepsilon c_1 \|u(t)\|_p^p + \varepsilon c_2 \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k - \varepsilon \frac{M^{-(\eta-1)}}{\eta} \mathcal{H}^{\sigma(\eta-1)}(t) \|u\|_\eta^\eta \\ &- \varepsilon \frac{\eta-1}{\eta} M \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \|u_t\|_\eta^\eta + \varepsilon a_1 (g \diamond u)(t) + \varepsilon r \mathcal{H}(t) + \varepsilon a_2 \|\nabla u(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Agora, vem de (2.4.85) e (2.2.8) que  $\mathcal{H}'(t) \geq \|u_t(t)\|_\eta^\eta$ ,  $\forall t \geq 0$ . Isto juntamente com (2.4.101) nos permite concluir que,

$$(2.4.102) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\geq \left\{ (1 - \sigma) - \varepsilon M \frac{\eta-1}{\eta} \right\} \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \left( \frac{r}{2} + 1 \right) \|u_t\|_2^2 \\ &+ \varepsilon c_1 \|u(t)\|_p^p + \varepsilon c_2 \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k \\ &+ \varepsilon a_1 (g \diamond u)(t) + \varepsilon r \mathcal{H}(t) \\ &+ \varepsilon a_2 \|\nabla u(t)\|_2^2 - \varepsilon \frac{M^{-(\eta-1)}}{\eta} \mathcal{H}^{\sigma(\eta-1)}(t) \|u(t)\|_\eta^\eta. \end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é analisar o último termo do lado direito em (2.4.102). Uma vez que  $p > \eta$ , então usando a imersão  $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^\eta\Omega$  e (2.4.87) obtemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\sigma(\eta-1)}(t) \|u(t)\|_\eta^\eta &\leq C \left( \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p + \frac{1}{k} \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k \right)^{\sigma(\eta-1)} \left( \|u(t)\|_p^p \right)^{\eta/p} \\ &\leq C \left( \|u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k \right)^{(p\sigma(\eta-1)+\eta)/p}, \end{aligned}$$

onde  $C$  aqui e a seguir denota uma constante positiva, possivelmente diferentes, porém independentes de  $t$ .

Usando (2.4.89) e a seguinte desigualdade algébrica

$$(2.4.103) \quad z^\nu \leq (z+1) \leq (1+1/\omega)(z+\omega), \quad \forall z \geq 0, 0 < \nu \leq 1, \omega > 0$$

podemos escrever, para todo  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \left( \|u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k \right)^{(p\sigma(\eta-1)+\eta)/p} &\leq d \left( \|u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k + \mathcal{H}(0) \right) \\ &\leq d \left( \|u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k + \mathcal{H}(t) \right), \end{aligned}$$

onde  $d = 1 + 1/\mathcal{H}(0)$ .

Conseqüentemente, de (2.4.102) e da desigualdade acima, obtemos

$$(2.4.104) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\geq \left\{ (1 - \sigma) - \varepsilon M \frac{\eta-1}{\eta} \right\} \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \left( \frac{r}{2} + 1 \right) \|u_t\|_2^2 \\ &+ \varepsilon \left( c_1 - \frac{CM^{-(\eta-1)}}{\eta} d \right) \|u(t)\|_p^p + \varepsilon \left( c_2 - \frac{CM^{-(\eta-1)}}{\eta} d \right) \|u(t)\|_{k, \Gamma_1}^k \\ &+ \varepsilon a_1 (g \diamond u)(t) + \varepsilon \left( r - \frac{CM^{-(\eta-1)}}{\eta} d \right) \mathcal{H}(t) + \varepsilon a_2 \|\nabla u(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Neste ponto, escolhamos  $M$  suficientemente grande tal que,

$$(2.4.105) \quad \begin{cases} d_1 = c_1 - CM^{-(\eta-1)}d/\eta > 0, \\ d_2 = c_2 - CM^{-(\eta-1)}d/\eta > 0, \\ d_3 = r - CM^{-(\eta-1)}d/\eta > 0. \end{cases}$$

Uma vez que agora  $M$  está fixado, podemos escolher  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, de modo que sejam verdadeiras as seguintes desigualdades,

$$\mathcal{L}(0) = \mathcal{H}(0)^{1-\sigma} + \varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1(x) dx > 0$$

e

$$(2.4.106) \quad (1 - \sigma) - \varepsilon M(\eta - 1)/\eta > 0.$$

De (2.4.104), (2.4.105) e (2.4.106) podemos concluir que,

$$\mathcal{L}'(t) \geq \varepsilon \eta_1 \left( \mathcal{H}(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k \right), \quad \forall t \geq 0,$$

onde  $\eta_1 = \min\{d_1, d_2, d_3, \frac{r}{2} + 1\} > 0$ , independente de  $t$ . Isto prova o Lema 2.12.

Enunciamos agora o nosso segundo lema auxiliar e em seguida passamos a sua demonstração.

**Lema 2.13** *Seja  $u$  solução de (2.1.1). Então, sob as hipóteses do Teorema 2.9, existe uma constante  $\eta_2 > 0$ , independente de  $t$ , tal que*

$$(2.4.107) \quad \mathcal{L}(t)^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq \varepsilon \eta_2 \left( \mathcal{H}(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k \right), \quad \forall t \geq 0.$$

**Prova:**

No que segue, por simplicidade, omitiremos, quando conveniente, as variáveis do tempo e do espaço nas integrais. Segue direto da definição  $\mathcal{L}$ , (2.4.88), que

$$\mathcal{L}^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq 2^{\frac{1}{1-\sigma}} \left[ \mathcal{H}(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} \left( \int_{\Omega} u_t u dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \right].$$

Pela desigualdade de Hölder, temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t u dx &\leq \left( \int_{\Omega} u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega} u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

onde  $C$  é uma constante positiva que vem da imersão  $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ . Esta desigualdade implica que,

$$\left( \int_{\Omega} u_t u dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C^{\frac{1}{1-\sigma}} \left[ \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{(1-\sigma)p}} \left( \int_{\Omega} u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2(1-\sigma)}} \right].$$

Aplicando a desigualdade de Young no lado direito, vem que existe uma constante positiva, também denotada por  $C$ , tal que,

$$\left( \int_{\Omega} u_t u dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C \left[ \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{\mu}{(1-\sigma)p}} + \left( \int_{\Omega} u_t^2 dx \right)^{\frac{\theta}{2(1-\sigma)}} \right],$$

para  $1/\mu + 1/\theta = 1$ . Tomamos  $\theta = 2(1-\sigma)$ , logo  $\mu = 2(1-\sigma)/(1-2\sigma)$ , para obter

$$\left( \int_{\Omega} u_t u dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C \left[ \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{2}{(1-2\sigma)p}} + \int_{\Omega} u_t^2 dx \right].$$

Nesse momento, aplicaremos novamente a desigualdade algébrica (2.4.103), agora com  $z = \|u(t)\|_p^p$ ,  $d = 1 + 1/\mathcal{H}(0)$ ,  $\omega = \mathcal{H}(0)$  e  $\nu = \frac{2}{p(1-2\sigma)}$ , cuja condição (2.4.89), sobre  $\sigma$ , garante que  $0 < \nu \leq 1$ .

Assim, obtemos que

$$z^\nu \leq d(z + \mathcal{H}(0)) \leq d(z + \mathcal{H}(t)),$$

ou ainda,

$$\|u(t)\|_p^{\frac{2}{(1-2\sigma)}} \leq d \left( \|u(t)\|_p^p + \mathcal{H}(t) \right), \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, existe uma constante positiva, ainda denotada por  $C$ , tal que para todo  $t \geq 0$ ,

$$\left( \int_{\Omega} u_t u dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C \left[ \mathcal{H}(t) + \|u(t)\|_p^p + \|u_t(t)\|_2^2 \right].$$

Portanto, existe uma constante positiva  $\eta_2$ , independente de  $t$ , isto é, tal que para todo  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &\leq \varepsilon \eta_2 \left[ \mathcal{H}(t) + \|u(t)\|_p^p + \|u_t(t)\|_2^2 \right] \\ (2.4.108) \quad &\leq \varepsilon \eta_2 \left[ \mathcal{H}(t) + \|u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_{k,\Gamma_1}^k + \|u_t(t)\|_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do Lema 2.13. ■

**Prova do Teorema 2.9:**

Combinando (2.4.91) e (2.4.108), inferimos que existe uma constante positiva  $\xi = \frac{\eta_1}{\eta_2} > 0$ , tal que para todo  $t \geq 0$ ,

$$(2.4.109) \quad \mathcal{L}'(t) \geq \xi \mathcal{L}^{\frac{1}{1-\sigma}}(t).$$

Assim, a desigualdade (2.4.90) acontece para  $\nu = \sigma/(1-\sigma)$ .  
Vem do Lema (2.12) que,

$$\mathcal{L}(t) \geq \mathcal{L}(0) > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Disto e de (2.4.109), inferimos que

$$\mathcal{L}^{\frac{-1}{1-\sigma}}(t) \mathcal{L}'(t) \geq \xi.$$

Mas notando que,

$$\mathcal{L}^{\frac{-1}{1-\sigma}}(t) \mathcal{L}'(t) = \left( -\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\right) \mathcal{L}^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(t) \right)',$$

segue que,

$$\left( -\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\right) \mathcal{L}^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(t) \right)' \geq \xi.$$

Agora integrando sobre  $(0, t)$ , obtemos,

$$\mathcal{L}^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(t) - \mathcal{L}^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0) \leq -\frac{\sigma}{1-\sigma} t \xi$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(t) \leq \mathcal{L}^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\sigma}{1-\sigma} t \xi,$$

donde segue que,

$$\mathcal{L}^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{\left( \mathcal{L}^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\sigma}{1-\sigma} t \xi \right)^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

Portanto, para  $T^* = \frac{1-\sigma}{\xi \sigma \mathcal{L}^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0)}$ , obtemos que

$$\lim_{t \downarrow T^*} \frac{1}{\left( \mathcal{L}^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\sigma}{1-\sigma} t \xi \right)^{\frac{1}{\sigma}}} = +\infty.$$

Isto nos permite concluir que a solução do problema (2.1.1), que estamos supondo ser global, explode em tempo finito, o que é uma contradição e o Teorema 2.9 está provado.

■

# Capítulo 3

## Taxas Intrínsecas de Decaimento para a Equação da Onda sob uma Variedade sujeita à com Dissipação Viscoelástica e Friccional

### 3.1 Introdução

Nesse capítulo estudamos o comportamento assintótico da energia associada a solução de uma equação da onda sujeita a dois mecanismos de amortecimento, um viscoelástico e outro friccional, parcialmente distribuídos.

Seja  $(M, \mathbf{g})$  uma variedade compacta  $n$ -dimensional com bordo,  $\mathbf{g}$  denotando uma métrica Riemanniana de classe  $C^\infty$ . Denotamos por  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita sobre  $M$  e por  $\Delta$  o operador Laplace-Beltrami sobre  $M$ .

Nosso objetivo é determinar a efetividade de cada amortecimento sobre as taxas de decaimento da energia total associada a solução do problema.

Especificamente, estudamos a seguinte equação viscoelástica da onda,

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta u - \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(s)] ds - b(x) f(u_t) & \text{em } M \times ]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \times ]0, \infty[, \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 & \text{em } M \end{cases}$$

onde  $g$  é a função de relaxamento,  $f$  representa o amortecimento friccional e  $a(x)$ ,  $b(x)$  determinam o suporte de cada mecanismo de amortecimento por meio da seguinte hipótese,  $a(x) + b(x) \geq \delta > 0$  para todo  $x \in M$ . Assim, sobre o suporte de  $a(x)$  prevalece o amortecimento viscoelástico enquanto sobre o suporte de  $b(x)$  o amortecimento friccional.

## 3.2 Hipóteses e Resultado Principal

Assumimos as seguintes hipóteses:

### Hipótese 3.1

- A função de relaxamento  $g : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é decrescente,  $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^+)$  e satisfaz:

$$(3.2.1) \quad g(0) > 0 \quad e \quad \|a\|_{L^\infty} \int_0^\infty g(s) ds < 1.$$

Além disso, assumimos que

$$(3.2.2) \quad g'(t) \leq -H_1(g(t)), \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

onde  $H_1 \in C^1(\mathbb{R}^+)$ ,  $H_1(0) = 0$  é uma função dada, estritamente crescente e convexa.

- A função  $f(s)$  é contínua, estritamente crescente,  $f(0) = 0$  e sujeita a seguinte condição de crescimento de Sobolev no infinito:

$$(3.2.3) \quad k^{-1}s^2 \leq f(s)s \leq K|s|^{p+1}, \quad |s| \geq 1,$$

onde  $H^1(M) \subset L^{p+1}(M)$ ,  $p > 1$  e  $k, K$  são tais que  $0 < k, K < \infty$ .

**Observação 3.2** As condições impostas na Hipótese 3.1 sobre  $f$  e  $g$  são mínimos. O amortecimento friccional modelado por  $f$  não precisa satisfazer nenhuma condição de crescimento próximo a origem (região crítica de estabilidade), as condições de crescimento impostas no infinito são conhecidas e necessárias para obter taxas de decaimento uniforme com amortecimento friccional, ver [54], e a função de relaxamento é muito geral devido a generalidade da função  $H_1$ . A condição (3.2.2) foi recentemente considerada em [3, 60] juntamente com outras restrições sobre a função de relaxamento.

É conhecido de [42] que em função da monotonicidade estrita de  $f$  juntamente com sua continuidade, podemos definir uma função  $H_2$ , contínua, zero na origem, crescente, convexa na origem e linear no infinito, tal que:

$$(3.2.4) \quad s^2 + f^2(s) \leq H_2^{-1}(sf(s)), \quad |s| \leq 1.$$

Como observado acima, o papel da Hipótese 3.1 é quantificar o “comportamento crítico” dos amortecimentos friccional e viscoelástico via funções convexas gerais  $H_1$  e  $H_2$ .

A fim de obter taxas de decaimento uniforme para a energia associada ao problema (3.1.1) impomos hipóteses de natureza geométrica que determinam algumas limitações inferiores sobre as funções localizadoras  $a(x)$  e  $b(x)$ .

**Hipótese 3.3** *Assumimos que  $a \in C^1(M)$ ,  $b \in L^\infty(M)$  são funções não negativas tais que*

$$(3.2.5) \quad \text{meas} \{x \in \partial M, a(x) > 0\} > 0.$$

$$(3.2.6) \quad a(x) + b(x) \geq \delta > 0 \text{ para todo } x \in M.$$

Definimos  $\Sigma_T = M \times ]0, T[$  e seja  $H_0^1(M) := \{v \in H^1(M); v|_{\partial M} = 0\}$ , o qual é um espaço de Hilbert com a topologia induzida pelo  $H^1(M)$ . A condição  $v|_{\partial M} = 0$  é requerida para garantir a desigualdade de Poincaré,

$$(3.2.7) \quad \|h\|_{L^2(M)}^2 \leq (\lambda_1)^{-1} \|\nabla h\|_{L^2(M)}^2, \quad \text{para todo } h \in H_0^1(M),$$

onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do operador Laplace-Beltrami para o problema de Dirichlet.

A existência e unicidade de solução do problema (3.1.1) é feita de forma clássica usando o método de Faedo-Galerkin. Omitimos os cálculos aqui, mas esses podem ser obtidos, seguindo de perto o que foi feito em [78]. A seguir enunciamos esse resultado.

**Teorema 3.4** *Com  $(u^0, u^1) \in [H^2(M) \cap H_0^1(M)] \times H_0^1(M)$  existe uma única solução regular para o problema (3.1.1) na classe*

$$(3.2.8) \quad u \in L_{loc}^\infty(0, \infty; H_0^1(M) \cap H^2(M)), u_t \in L_{loc}^\infty(0, \infty; H_0^1(M)), u_{tt} \in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(M)).$$

Com  $(u^0, u^1) \in H_0^1(M) \times L^2(M)$ , podemos provar, por argumentos de densidade, que o problema (3.1.1) tem uma única solução fraca na classe

$$(3.2.9) \quad u \in C^0([0, \infty); H_0^1(M)) \cap C^1([0, \infty); L^2(M)).$$

Usaremos as notações para os seguintes operadores binários:

$$\begin{aligned} (g * w)(t) &:= \int_0^t g(t-s)w(s) ds. \\ (g \square w)(t) &:= \int_0^t g(t-s)|w(t) - w(s)|^2 ds. \\ (g \diamond w)(t) &:= \int_0^t g(t-s)(w(t) - w(s)) ds. \end{aligned}$$

O lema a seguir estabelece uma relação útil entre esses operadores.

**Lema 3.5** *Para qualquer  $g, w \in C^1(\mathbb{R})$  obtemos a identidade*

$$2[g * w] w' = g' \square w - g(t)|w|^2 - \frac{d}{dt} \left\{ g \square w - \left( \int_0^t g \right) |w|^2 \right\}.$$

**Prova:** Derivando a expressão

$$g \square w - \left( \int_0^t g(s) ds \right) |w|^2,$$

obtemos o desejado. ■

Assumindo que  $u$  é a única solução global fraca para o problema (3.1.1), definimos o correspondente funcional energia:

$$(3.2.10) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_M [ |u_t(x, t)|^2 + \kappa(x, t) |\nabla u(x, t)|^2 + a(x) g \square \nabla u ] dx,$$

onde  $\kappa(x, t) := 1 - a(x) \int_0^t g(s) ds$ .

Note que, por (3.2.1) temos que

$$(3.2.11) \quad 0 < l := 1 - \|a\|_{L^\infty} \int_0^\infty g(s) ds \leq \kappa(x, t) \leq 1, \quad \forall (x, t) \in M \times \mathbb{R}_+,$$

ou seja, a função  $\kappa$  é positiva e limitada superior e inferiormente.

O próximo lema nos permitirá concluir a importante identidade de energia.

**Lema 3.6** *Seja  $u$  uma solução do problema (3.1.1). Então,*

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{1}{2} \int_M a(x) [g' \square \nabla u - g(t) |\nabla u|^2] dx - \int_M b(x) f(u_t) u_t dx.$$

**Prova:** Multiplicando a equação (3.1.1) por  $u_t$ , integrando por partes e aplicando o Lema 3.5, chegamos ao resultado desejado. ■

**Observação 3.7** *Devemos observar que a prova de tal lema é realizada para soluções regulares e posteriormente estendida para soluções fracas usando argumentos de densidade.*

Como uma consequência do Lema 3.6, temos que toda solução de (3.1.1) na classe (3.2.9) satisfaz a seguinte identidade para todo  $t_2 > t_1 \geq 0$

$$(3.2.12) \quad E(t_2) - E(t_1) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_M \{ a(x) [g' \square \nabla u - g(t) |\nabla u|^2] - b(x) f(u_t) u_t \} dx dt$$

e além disso, o funcional energia definido em (3.2.10) é não crescente em relação a variável  $t$ .

Apenas por simplicidade de notação, denotaremos o termo de amortecimento por:

$$(3.2.13) \quad D(t) := \frac{1}{2} \int_M \{ a(x) [-g' \square \nabla u + g(t) |\nabla u|^2] + b(x) f(u_t) u_t \} dx.$$

Nosso principal resultado consiste em determinar taxas de decaimento para o funcional energia que tem dissipação gerada por ambos os mecanismos de amortecimento, friccional e viscoelástico. A descrição quantitativa das taxas de decaimento serão dadas pela E.D.O que é estabelecida em função das funções convexas  $H_1$  e  $H_2$ .

Antes de enunciar nosso resultado principal, procedemos como Lasiecka *et al.* [45] e consideramos uma função  $\tilde{H}_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  convexa, contínua, crescente, zero na origem e que satisfaz

$$(3.2.14) \quad \tilde{H}_1((g \square w)(t)) \leq -g' \square w(t), \quad t > 0,$$

para qualquer função  $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  na qual a operação  $\square$  pode ser aplicada.

**Observação 3.8** *Como mostrado em [45], uma condição suficiente para (3.2.14) ocorrer é apresentada em [60]. De fato, seguindo o que foi feito no Teorema 2.2 em [60], defina  $H_0(s) = H_1(D_0(s))$ , onde  $H_1$  é definida em (3.2.2) e  $D_0 \in C^1(\mathbb{R}^+)$  é uma função positiva,  $D_0(0) = 0$  e tal que  $H_0$ , é uma função  $\in C^2(\mathbb{R}^+)$  estritamente crescente, convexa e ainda satisfazendo*

$$(3.2.15) \quad \frac{g}{H_0^{-1}(-g')} \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

*Então (3.2.14) é satisfeita para  $\tilde{H}_1 = H_1(D_0)$ .*

*É ainda importante ressaltar que como observado em [60], a condição (3.2.15) é satisfeita para várias funções de relaxamento.*

A seguir enunciamos o resultado principal desse Capítulo.

**Teorema 3.9** *Assumindo que as hipóteses 3.1, 3.3 e 3.2.14 ocorrem. Então, existe um tempo  $T_0 > 0$  tal que toda solução do problema (3.1.1) satisfaz*

$$E(t) \leq S \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right), \quad \forall t > T_0,$$

com  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ , onde  $S(t)$  é a solução da E.D.O.

$$(3.2.16) \quad \frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0)$$

onde  $q$  é dada no próximo lema.

Um importante ingrediente para a prova do resultado acima é o conhecido Lema que enunciamos a seguir, apenas para melhor compreensão do leitor.

**Lema 3.10 (Lasiecka e Tataru [42])** *Seja  $p$  uma função positiva, crescente e tal que  $p(0) = 0$ . Uma vez que  $p$  é crescente, podemos definir uma função crescente  $q$ ,  $q(x) = x - (I+p)^{-1}(x)$ . Considere a sequência  $s_n$  de números positivos satisfazendo*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

*Então  $s_m \leq S(m)$  onde  $S(t)$  é a solução da seguinte E.D.O.*

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0.$$

*Além disso, se  $p(x) > 0$  para  $x > 0$  então,  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ .*

Contudo, a chave para a prova do Teorema 3.9, usando o Lema 3.10 acima, é o Lema que enunciamos a seguir, o qual fornece uma estimativa para o funcional energia em relação ao termo de amortecimento (3.2.13).

**Lema 3.11** *Para  $T > 0$  suficientemente grande, existe uma constante positiva  $C_0$  e uma função contínua, não decrescente e convexa,  $H : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,*

$$(3.2.17) \quad \frac{1}{C_0}E((n+1)T) \leq H^{-1} \left( \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right).$$

De fato, deixe-nos, apenas por um momento, assumir que o resultado do Lema 3.11 é verdadeiro. Assim, procederemos a seguir com a prova do Teorema 3.9. Posteriormente, nos dedicaremos a prova do Lema assumido.

**Prova do Teorema 3.9:** Seja  $T > 0$  suficientemente grande, como no Lema 3.11. Segue de (3.2.17) e da identidade de energia (3.2.12) que

$$E((n+1)T) + H \left( \frac{1}{C_0}E((n+1)T) \right) \leq E(nT), \quad n = 1, 2, \dots$$

Portanto, aplicando o Lema 3.10 com  $s_n = E(nT)$  e  $s_0 = E(0)$  concluímos que  $E(nT) \leq S(n)$  onde  $S(t)$  é uma solução da E.D.O. não linear (3.2.16), com  $p(s) = H(s/C_0)$ ,  $s \in \mathbb{R}^+$  e  $p(0) = 0$ . Então, para  $t > T$  temos  $t = nT + r$ , com  $0 < r < T$ , e pelas propriedades assintóticas do funcional energia  $E(t)$  e da função  $S(t)$  temos

$$E(t) \leq E(nT) \leq S(n) = S \left( \frac{t-r}{T} \right) \leq S \left( \frac{t}{T} - 1 \right),$$

o que finaliza a prova. ■

**Observação 3.12** *Notamos que as taxas de decaimento da E.D.O. dependem do comportamento de  $p(s)$  próximo a origem. Assim, a taxa final será ditada pela maior crescimento na*

origem das correspondentes funções  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ . Quando as duas funções  $H_i$  são de crescimento polinomial e os suportes essenciais de  $a(x)$  e  $b(x)$  são disjuntos, então as taxas de decaimento final são polinomiais com a menor ordem do polinômio (o pior cenário possível). Se a função viscoelástica  $H_1$  tem crescimento polinomial, então, independente do suporte de  $b(x)$  e  $a(x)$  e independente do crescimento de  $H_2$  a taxa de decaimento total pode ser no máximo polinomial e ditada por  $H_1$ . Isto confirma o resultado de Fabrizio-Polidoro [31] que foi obtido para amortecimento linear friccional e amortecimento viscoelástico polinomial agindo simultaneamente. Nosso resultado generaliza estes para qualquer amortecimento não linear. O efeito de “overdamping” causado pela presença do segundo amortecimento forte, não melhora as taxas de decaimento envolvidas, causados pelo amortecimento viscoelástico. A razão disso é que estamos considerando a energia total que consiste da energia mecânica e energia viscoelástica.

A parte viscoelástica é inteiramente controlada pelo amortecimento viscoelástico, isto é, pelo comportamento da função de relaxamento. Assim, não importa quão forte seja o amortecimento friccional, este não tem muito efeito sobre o decaimento da energia viscoelástica. Essa propriedade é exibida pela nossa condição (3.2.14).

Por outro lado, quando o amortecimento viscoelástico é mais forte que o friccional, nossa prova mostra que sob a hipótese que  $a(x) \geq c > 0$  em  $M$ , as taxas de decaimento são “essencialmente” dadas pelo amortecimento viscoelástico. Por exemplo, se a função de relaxamento tem comportamento exponencial e o friccional logarítmico, então a energia total decai exponencialmente. Esta última condição simplesmente significa que o amortecimento viscoelástico prevalece, independente dos efeitos do amortecimento friccional.

A observação acima confirma o “poder” do amortecimento viscoelástico em dominar as características dissipativas do modelo inteiro. De fato, formularemos abaixo o correspondente resultado cuja prova está contida nas estimativas realizadas para a prova do Teorema 3.9.

**Corolário 3.13** *Assuma:*

- $a(x) \geq \delta > 0$ , para todo  $x \in M$ , juntamente com todas as hipóteses impostas sobre a função de relaxamento  $g(s)$  e quantificados pela função  $H_1$ .
- $f \in C^1(\mathbb{R})$ , é monótona, zero na origem e satisfaz a condição de crescimento no infinito  $|f(s)| \leq K[|s|^{p+1} + 1]$ , onde  $H^1(M) \subset L^{p+1}(M)$ .

Então a conclusão do Teorema 3.9 é satisfeita.

O restante desse capítulo é dedicado a prova do Lema 3.11.

A ideia principal é “construir” equações diferenciais descrevendo as taxas de decaimento para cada caso.

Este método foi introduzido em [42] no caso em que o amortecimento era friccional e em [45] no caso de amortecimento viscoelástico. Aqui combinamos o feito nos dois e ainda usamos algumas técnicas usadas em [13] para concluir o desejado.

### 3.3 Prova do Lema 3.11

Antes de passarmos a prova do Lema 3.11, precisaremos de alguns resultados prévios e de três lemas técnicos, como em [13], os quais apresentamos a seguir.

Consideremos a seguinte função auxiliar  $\varphi \in C^2(M)$ , tal que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\geq \delta/2 && \text{se } x \in a^{-1}([\delta/2, \infty[), \\ 0 \leq \varphi(x) &\leq \delta/2 && \text{se } x \in a^{-1}([\delta/4, \delta/2]), \\ \varphi(x) &= 0 && \text{se } x \in a^{-1}([0, \delta/4]). \end{aligned}$$

Note que pelas hipóteses da função  $a$  é sempre possível construir tal função auxiliar  $\varphi$ , que ainda satisfaz,  $\text{supp}(\varphi) \subset \text{supp}(a)$ . Na verdade, temos mais, se  $x \in \text{supp}(\varphi)$  então  $a(x) \geq \delta/4$ , ou, em outras palavras, a função  $a(x)$  é limitada inferiormente por  $\delta/4$  para todo  $x \in \text{supp}(\varphi)$ .

Observe que se  $a(x) \leq \delta/2$  para todo  $x \in M$ , então isto implica que  $b(x) > \delta/2$  para todo  $x \in M$ , uma vez que, caso contrário, se  $b(x) \leq \delta/2$  para algum  $x \in M$ , então

$$a(x) + b(x) \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta, \quad \text{para algum } x \in M$$

o que contradiz a hipótese (3.2.6).

Consequentemente,  $a(x) \leq \delta/2$  para todo  $x \in M$  implica que  $b(x) > \delta/2$  para todo  $x \in M$ . Portanto, temos o amortecimento friccional agindo em todo o  $M$ . Analogamente,  $b(x) \leq \delta/2$  para todo  $x \in M$  implica que  $a(x) > \delta/2$  para todo  $x \in M$  o que nos mostra que o efeito viscoelástico age sobre todo  $M$ .

Quando temos  $a(x) > \delta/2$  para algum  $x \in M$ , tendo em mente que  $a$  é uma função contínua, então,  $a(x) > \delta/2$  acontece para toda vizinhança  $W$  de  $M$  (a qual pode ser considerada maximal satisfazendo a propriedade  $a(x) > \delta/2, \forall x \in W$ ). Isto significa, pelo menos, que  $b(x) > \delta/2$  em  $M \setminus W$ . É claro que o caso mais interessante ocorre quando temos efeitos de amortecimento simultâneos e complementares.

A seguir enunciamos um primeiro lema técnico.

**Lema 3.14** *Temos:*

$$(3.3.1) \quad \varphi(x) + b(x) \geq \frac{\delta}{2}, \quad \text{para todo } x \in M.$$

**Prova:** Seja  $x \in M$ , então:

i) Se  $x \in a^{-1}([\delta/2, +\infty[)$ , então, uma vez que  $\varphi(x) \geq \delta/2$  e  $b(x) \geq 0$ , obtemos

$$\varphi(x) + b(x) \geq \delta/2.$$

(ii) Se  $x \notin a^{-1}([\delta/2, +\infty[)$ , então  $0 \leq a(x) < \delta/2$  o que implica  $-a(x) > -\delta/2$ . Desta última desigualdade e pela hipótese (3.2.6), deduzimos que

$$\varphi(x) + b(x) \geq b(x) \geq \delta - a(x) > \delta - \delta/2 = \delta/2,$$

o que prova o desejado. ■

A seguir, enunciaremos um segundo lema técnico, o qual é muito útil nos cálculos.

**Lema 3.15** *As seguintes desigualdades ocorrem:*

$$(3.3.2) \quad \int_M ((\varphi(x))^2 + |\nabla\varphi(x)|^2)h^2 dx \leq C \int_M a(x)|\nabla h|^2 dx,$$

$$(3.3.3) \quad \int_M ((\varphi(x))^2 + |\nabla\varphi(x)|^2)|\nabla h|^2 dx \leq C \int_M a(x)|\nabla h|^2 dx,$$

para todo  $h \in H_0^1(M)$  e para alguma constante positiva  $C$  que depende somente de  $\varphi$  e  $a$ .

**Prova:** De fato, antes de provar a desigualdade (3.3.2) deixe-nos lembrar um resultado que é uma variante da desigualdade de Poincaré, especificamente:

Sejam  $\Omega_1, \Omega_2$  subconjuntos de  $M$  com medida positiva e tais que  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ . Então, assumindo que  $meas(\partial\Omega_2 \cap \partial M) \neq 0$ , temos

$$\int_{\Omega_1} |h|^2 dx \leq C \int_{\Omega_2} |\nabla h|^2 dx; \quad \forall h \in H_0^1(M),$$

onde  $C$  é uma constante positiva.

Não é difícil provar essa última desigualdade. Na verdade, é suficiente observar que  $h|_{\partial\Omega_2 \cap \partial M} = 0$  e  $meas(\partial\Omega_2 \cap \partial M) > 0$ .

Por outro lado, da hipótese (3.2.5) e uma vez que  $a$  é contínua existem  $\varepsilon_0 > 0$  e  $V \subset M$ , vizinhança de  $\partial M$  tal que  $meas(\partial V \cap \partial M) > 0$  e  $a(x) \geq \varepsilon_0$  para todo  $x \in V$ . Tomando,  $\Omega_1 := \text{supp}(\varphi)$ ,  $\Omega_2 := \{x \in M; a(x) > \max\{\delta/4, \varepsilon_0\} := a_0\}$  e considerando  $h \in H_0^1(M)$ , das hipóteses acima, deduzimos que,

$$(3.3.4) \quad \begin{aligned} \int_M ((\varphi(x))^2 + |\nabla\varphi(x)|^2)h^2 dx &= \int_{\Omega_1} ((\varphi(x))^2 + |\nabla\varphi(x)|^2)h^2 dx \\ &\leq C a_0^{-1} \int_{\Omega_2} a(x)|\nabla h|^2 dx, \end{aligned}$$

o que conclui a prova de (3.3.2). A prova da desigualdade (3.3.3) segue de forma imediata. ■

Antes de enunciarmos nosso próximo resultado, introduzimos por simplicidade, a seguinte notação:

$$(g \circ v)(t) := \int_0^t g(t-s) \|v(t) - v(s)\|_{L^2(M)}^2 ds.$$

Finalmente, enunciaremos e provaremos o terceiro e último lema técnico.

**Lema 3.16** *Seja  $u$  uma solução de (3.1.1),  $\psi \in L^1(0, \infty)$  e  $\gamma = \gamma(x)$  uma função suave. Então,*

$$(3.3.5) \quad \|(\psi \diamond (\gamma u))\|_{L^2(M)}^2 \leq \|\psi\|_{L^1(0, \infty)} (\psi \circ (\gamma u))(t).$$

**Prova:**

Temos, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Teorema de Fubini, que

$$\begin{aligned} \|(\psi \diamond (\gamma u))\|_{L^2(M)}^2 &= \int_M \left( \int_0^t \sqrt{\psi(t-s)} \sqrt{\psi(t-s)} \gamma(x) (u(t) - u(s)) ds \right)^2 dx \\ &\leq \int_M \left( \int_0^t \psi(\xi) d\xi \right) \int_0^t \psi(t-s) \gamma(x)^2 (u(t) - u(s))^2 ds dx \\ &\leq \|\psi\|_{L^1(0, \infty)} \int_0^t \psi(t-s) \|\gamma(\cdot)(u(t) - u(s))\|_{L^2(M)}^2 dx ds, \end{aligned}$$

o que prova o lema. ■

No que segue e a fim de obter a desigualdade (3.2.17) nossa tarefa resume-se a reconstruir a energia total em função dos termos de dissipação.

Isto será feito, aplicando adequados multiplicadores, para reconstruir cada parte da energia: cinética, potencial e viscoelástica.

Com o objetivo de simplificar a notação, denotamos:  $(u, v)_{L^2(M)} = (u, v)_M$  e  $\|u\|_{L^2(M)} = \sqrt{(u, u)_M} = \|u\|_M$ .

### 3.3.1 Recuperando a Energia Cinética

Primeiro recuperaremos a energia cinética no suporte de  $a(x)$ . Para isto, multiplicamos a equação (3.1.1) pelo multiplicador viscoelástico  $(g \diamond (\varphi u))(t) = \int_0^t g(t-s) \varphi(x) (u(t) - u(s)) ds$  para obter:

$$(3.3.6) \quad \int_{nT}^{(n+1)T} (u_{tt}(t) - \Delta u(t) + g * \operatorname{div}[a(x) \nabla u(s)] + b(x) f(u_t), g \diamond (\varphi u)(t))_M dt = 0.$$

Analisaremos cada um dos quatro termos acima separadamente. Para o primeiro termo obtemos que

$$\begin{aligned}
(3.3.7) \quad & \int_{nT}^{(n+1)T} (u_{tt}(t), g \diamond (\varphi u)(t))_M dt \\
&= \int_{nT}^{(n+1)T} (u_{tt}(t), \int_0^t g(t-s)\varphi(\cdot)(u(t)-u(s)) ds)_M dt \\
&= (u_t(t), \int_0^t g(t-s)\varphi(\cdot)(u(t)-u(s)) ds)_M \Big|_{nT}^{(n+1)T} \\
&\quad - \int_{nT}^{(n+1)T} (u_t(t), \int_0^t g'(t-s)\varphi(\cdot)(u(t)-u(s)) ds)_M dt \\
&\quad - \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(\xi) d\xi \right) \int_M \varphi(x) |u_t|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Para o segundo termo temos

$$\begin{aligned}
(3.3.8) \quad & - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M \Delta u(t) \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx dt \\
&= \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M \nabla u(t) \nabla \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M \nabla u(t) \varphi(x) (g \diamond \nabla u)(t) dx dt,
\end{aligned}$$

Para o terceiro termo ocorre que

$$\begin{aligned}
(3.3.9) \quad & \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(\cdot) \nabla u(s)] ds, g \diamond (\varphi u)(t) \right)_M dt \\
&= \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(\cdot) \nabla u(s)] ds, \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) (u(t)-u(s)) ds \right)_M dt \\
&= - \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(s) ds, \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot) (u(t)-u(s)) ds \right)_M dt \\
&\quad - \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(s) ds, \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) \nabla (u(t)-u(s)) ds \right)_M dt.
\end{aligned}$$

Finalmente, para o quarto termo segue que

$$\begin{aligned}
(3.3.10) \quad & \int_{nT}^{(n+1)T} (b(\cdot) f(u_t), g \diamond (\varphi u)(t))_M dt \\
&= \int_{nT}^{(n+1)T} (b(\cdot) f(u_t), \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) (u(t)-u(s)) ds)_M dt
\end{aligned}$$

Combinando (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8), (3.3.9) e (3.3.10), chegamos em

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(\xi) d\xi \right) \int_M \varphi(\cdot) |u_t|^2 dx dt = (u_t(t), \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds)_M \Big|_{nT}^{(n+1)T} \\
& - \int_{nT}^{(n+1)T} (u_t(t), \int_0^t g'(t-s) \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds)_M dt \\
& + \int_{nT}^{(n+1)T} (\nabla u(t), \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds)_M dt \\
(3.3.11) \quad & + \int_{nT}^{(n+1)T} (\nabla u(t), \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds)_M dt \\
& - \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(s) ds, \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
& - \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(s) ds, \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
& + \int_{nT}^{(n+1)T} (b(\cdot) f(u_t), \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds)_M dt.
\end{aligned}$$

Por outro lado, é conveniente observar que

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(t) ds, \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
(3.3.12) \quad & = \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds, \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
& + \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(s) ds, \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(t) ds, \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
(3.3.13) \quad & = \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds, \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
& + \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(s) ds, \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt.
\end{aligned}$$

Substituindo (3.3.12) e (3.3.13) em (3.3.11) concluimos que

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(\xi) d\xi \right) \int_M \varphi(x) |u_t|^2 dx dt \\
&= (u_t(t), \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds)_M \Big|_{nT}^{(n+1)T} \\
&\quad - \int_{nT}^{(n+1)T} (u_t(t), \int_0^t g'(t-s) \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds)_M dt \\
&\quad + \int_{nT}^{(n+1)T} (\nabla u(t), \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds)_M dt \\
(3.3.14) \quad &+ \int_{nT}^{(n+1)T} (\nabla u(t), \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds)_M dt \\
&\quad + \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds, \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
&\quad - \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(t) ds, \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
&\quad + \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds, \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
&\quad - \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla u(t) ds, \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) \nabla (u(t) - u(s)) ds \right)_M dt \\
&\quad + \int_{nT}^{(n+1)T} (b(\cdot) f(u_t), \int_0^t g(t-s) \varphi(\cdot) (u(t) - u(s)) ds)_M dt \\
&:= J_1 + J_2 + \dots + J_8 + J_9.
\end{aligned}$$

Agora, analisaremos cada termo  $J_i$ , com  $i = 1, \dots, 9$ .

*Estimativa para  $J_1$ .*

Temos,

$$\begin{aligned}
J_1 &= (u_t((n+1)T), \int_0^{(n+1)T} g((n+1)T-s) \varphi(\cdot) (u((n+1)T) - u(s)) ds)_M \\
(3.3.15) \quad &- (u_t(nT), \int_0^{nT} g(nT-s) \varphi(\cdot) (u(nT) - u(s)) ds)_M.
\end{aligned}$$

Seja  $m \in \mathbb{N}$  um número natural arbitrário. Assim, pela desigualdade (3.3.2) do Lema

3.15 e tendo em mente a definição do funcional energia em (3.2.10), deduzimos

$$\begin{aligned}
(3.3.16) \quad & (u_t(mT), \int_0^{mT} g(mT-s)\varphi(\cdot)(u(mT)-u(s))ds)_M \\
& \leq \int_0^{mT} g(mT-s) \|u_t(mT)\|_M \|\varphi(\cdot)(u(mT)-u(s))\|_M ds \\
& \leq \int_0^{mT} g(mT-s) \left[ \frac{1}{2} \|u_t(mT)\|_M^2 + \frac{1}{2} \|\varphi(\cdot)(u(mT)-u(s))\|_M^2 \right] ds \\
& \leq \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \|u_t(mT)\|_M^2 + \frac{C}{2} \int_0^{mT} g(mT-s) \|\sqrt{a(\cdot)}(\nabla u(mT)-\nabla u(s))\|_M^2 ds \\
& = \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \|u_t(mT)\|_M^2 + \frac{C}{2} \int_M a(x)(g \square \nabla u)(mT) dx \\
& \leq \|g\|_{L^1(0,\infty)} E(mT) + CE(mT).
\end{aligned}$$

Retornando para (3.3.15) usando (3.3.16), obtemos

$$(3.3.17) \quad |J_1| \leq C[E((n+1)T) + E(nT)]$$

onde a constante  $C$  depende de  $g, \varphi$  mas não depende de  $n$ , o que é crucial para a conclusão da prova.

**Observação 3.17** *Observamos que representamos por  $C$  uma constante positiva que pode assumir valores diferentes, quando conveniente, dependendo de vários parâmetros, menos de  $n$ .*

*Estimativa para  $J_2$ .*

Aplicando o Lema 3.16 e o Lema 3.15, temos

$$\begin{aligned}
(3.3.18) \quad |J_2| & \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_M \left\| \int_0^t g'(t-s)\varphi(\cdot)(u(t)-u(s)) ds \right\|_M dt \\
& \leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_M^2 dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \left\| \int_0^t g'(t-s)\varphi(\cdot)(u(t)-u(s)) ds \right\|_M^2 dt \\
& \leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_M^2 dt \\
& \quad + \frac{1}{4\varepsilon} \|g'\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t |g'(t-s)| \|\varphi(\cdot)(u(t)-u(s))\|_M^2 ds dt \\
& \leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_M^2 dt \\
& \quad - \frac{C}{4\varepsilon} \|g'\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g'(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}(\nabla u(t)-\nabla u(s))\|_M^2 ds dt,
\end{aligned}$$

onde  $\varepsilon$  é um número positivo pequeno que será escolhido convenientemente posteriormente e a constante  $C$  depende de  $\varphi$ , mas novamente, não depende de  $n$ .

*Estimativa para  $J_3$ .*

Repetindo os mesmos argumentos usados na estimativa  $J_2$ , deduzimos,

$$(3.3.19) \quad \begin{aligned} |J_3| &\leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt \\ &+ \frac{C}{4\varepsilon} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}(\nabla u(t) - \nabla u(s))\|_M^2 ds dt. \end{aligned}$$

*Estimativa para  $J_4$ .*

Do mesmo modo ocorre que

$$(3.3.20) \quad \begin{aligned} |J_4| &\leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt \\ &+ \frac{C}{4\varepsilon} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}(\nabla u(t) - \nabla u(s))\|_M^2 ds dt. \end{aligned}$$

*Estimativa para  $J_5$ .*

Temos,

$$(3.3.21) \quad \begin{aligned} |J_5| &\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \left\| \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla(u(t) - u(s)) ds \right\|_M \left\| \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot)(u(t) - u(s)) ds \right\|_M dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \left\| \int_0^t g(t-s) a(\cdot) \nabla(u(t) - u(s)) ds \right\|_M^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \left\| \int_0^t g(t-s) \nabla \varphi(\cdot)(u(t) - u(s)) ds \right\|_M^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|a(\cdot) \nabla(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\nabla \varphi(\cdot)(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \|a\|_\infty \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt \\ &\quad + \frac{C}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt \\ &= \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} (\|a\|_\infty + C) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt. \end{aligned}$$

*Estimativa para  $J_6$ .*

Uma vez mais temos,

$$\begin{aligned}
& |J_6| \\
& \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \left\| \int_0^t g(t-s)a(\cdot)\nabla u(t)ds \right\|_M \left\| \int_0^t g(t-s)\nabla\varphi(\cdot)(u(t)-u(s))ds \right\|_M dt \\
& \leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \left\| \int_0^t g(t-s)a(\cdot)\nabla u(t)ds \right\|_M^2 dt \\
(3.3.22) \quad & + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \left\| \int_0^t g(t-s)\nabla\varphi(\cdot)(u(t)-u(s))ds \right\|_M^2 dt \\
& \leq \varepsilon \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|a(\cdot)\nabla u(t)\|_M^2 ds dt \\
& + \frac{C}{4\varepsilon} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t)-u(s))\|_M^2 ds dt \\
& \leq \varepsilon \|g\|_{L^1(0,\infty)} \|a\|_\infty \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla u(t)\|_M^2 ds dt \\
& + \frac{C}{4\varepsilon} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t)-u(s))\|_M^2 ds dt.
\end{aligned}$$

*Estimativa para  $J_7$ .*

Analogamente ao feito para  $J_5$ , deduzimos,

$$(3.3.23) \quad |J_7| \leq \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} (\|a\|_\infty + C) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t)-u(s))\|_M^2 ds dt.$$

*Estimativa para  $J_8$ .*

Agora, de modo análogo ao feito para  $J_6$ , obtemos,

$$\begin{aligned}
(3.3.24) \quad & |J_8| \leq \varepsilon \|g\|_{L^1(0,\infty)} \|a\|_\infty \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla u(t)\|_M^2 ds dt \\
& + \frac{C}{4\varepsilon} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t)-u(s))\|_M^2 ds dt.
\end{aligned}$$

*Estimativa para  $J_9$ .*

A análise desse termo é um pouco mais delicada, pois precisamos considerar duas situações, como apresentamos abaixo.

$$(3.3.25) \quad \int_{nT}^{(n+1)T} (b(\cdot)f(u_t), g \diamond (\varphi u))_M dt = \int_{\Sigma_A} + \int_{\Sigma_B}$$

onde  $\Sigma_A \equiv \{(t, x) \in (nT, (n+1)T) \times M, |u_t(t, x)| \leq 1\}$  e  $\Sigma_B$  é o complementar de  $\Sigma_A$  em  $(nT, (n+1)T) \times M$ .

No conjunto  $\Sigma_B$  usamos a seguinte estimativa,

$$\begin{aligned} & \|\varphi(\cdot) \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))ds\|_{L^{p+1}(M)} \leq C \|\varphi(\cdot) \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))ds\|_{H^1(M)} \\ & \leq C \|\varphi(\cdot) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))ds\|_M + C \|\nabla \varphi(\cdot) \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))ds\|_M \\ & \leq C \left[ \int_M a(x)(g \square \nabla u)(t)dx \right]^{1/2} \leq CE^{1/2}(0), \end{aligned}$$

onde aplicamos a imersão de Sobolev,  $H^1(M) \hookrightarrow L^{p+1}(M)$ , a desigualdade de Poincaré, as inequações (3.3.2)-(3.3.3) e que o funcional energia é não crescente.

Assim, usando a desigualdade de Hölder, a estimativa acima e (3.2.3), podemos concluir para  $T$  suficientemente grande, que

$$\begin{aligned} (3.3.26) \quad & \int_{\Sigma_B} \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|g \diamond (\varphi u)\|_{L^{p+1}(\{x \in M; |u_t| > 1\})} \|b(\cdot)f(u_t)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\{x \in M; |u_t| > 1\})} \\ & = C \int_{nT}^{(n+1)T} \left\{ \int_{\{x \in M; |u_t| > 1\}} |b(x)f(u_t)|^{\frac{p+1}{p}} dx \right\}^{\frac{p}{p+1}} dt \\ & = C \left\{ \int_{nT}^{(n+1)T} 1^{p+1} dt \right\}^{\frac{1}{p+1}} \left\{ \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\{x \in M; |u_t| > 1\}} |b(x)f(u_t)|^{\frac{p+1}{p}} dx dt \right\}^{\frac{p}{p+1}} \\ & = C T \left\{ \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\{x \in M; |u_t| > 1\}} |b(x)f(u_t)|^{\frac{p+1}{p}} dx dt \right\}^{\frac{p}{p+1}} \\ & = C \{T\}^{\frac{p+1}{p}} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\{x \in M; |u_t| > 1\}} |b(x)f(u_t)|^{\frac{p+1}{p}} dx dt \Big|^{\frac{p}{p+1}} \\ & \leq CT^{\frac{p+1}{p}} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\{x \in M; |u_t| > 1\}} |b(x)f(u_t)|^{\frac{p+1}{p}} dx dt, \text{ ( para T suficientemente grande)} \\ & \leq C \|b\|_{\infty}^{1/p} T^{\frac{p+1}{p}} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\{x \in M; |u_t| > 1\}} b(x)|f(u_t)|^{\frac{p+1}{p}} dx dt, \text{ (usando (3.2.3))} \\ & \leq \tilde{C} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M kb(x)f(u_t)u_t dx dt, \end{aligned}$$

onde  $C$  depende de  $T, E(0), g, b, k$  e  $K$  mas não depende de  $n$ .

Sobre o conjunto  $\Sigma_A$  usamos a desigualdade de Young, juntamente com a hipóteses (3.2.4) sobre a função  $f$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_A} \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \left\{ \varepsilon \| (g \diamond (\varphi u))(t) \|_{L^2(\{x \in M; |u_t| \leq 1\})}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \| b(\cdot) f(u_t(t)) \|_{L^2(\{x \in M; |u_t| \leq 1\})}^2 dt \right\} \\
& \leq \varepsilon \| g \|_{L^1(0, \infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \| \sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(t) - u(s)) \|_M^2 ds dt \\
(3.3.27) \quad & + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\{x \in M; |u_t| \leq 1\}} |b(x) f(u_t)|^2 dx dt \\
& \leq \varepsilon \| g \|_{L^1(0, \infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \| \sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(t) - u(s)) \|_M^2 ds dt \\
& + \frac{1}{4\varepsilon} \| b \|_\infty \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\{x \in M; |u_t| > 1\}} b(x) |f(u_t)|^2 dx dt, \text{ (usando (3.2.4))} \\
& \leq \varepsilon \| g \|_{L^1(0, \infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \| \sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(t) - u(s)) \|_M^2 ds dt \\
& + \frac{1}{4\varepsilon} \| b \|_\infty \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) H_2^{-1}(f(u_t) u_t) dx dt.
\end{aligned}$$

Combinando as estimativas (3.3.26) e (3.3.27) obtemos:

$$\begin{aligned}
|J_9| & \leq \left( \frac{1}{4\varepsilon} \| b \|_\infty + C \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) [H_2^{-1} + kI] (f(u_t) u_t) dx dt \\
(3.3.28) \quad & + \varepsilon \| g \|_{L^1(0, \infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \| \sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(t) - u(s)) \|_M^2 ds dt.
\end{aligned}$$

Com o propósito de recuperar a energia cinética total, precisamos adicionar a parte correspondente ao suporte de  $b(x)$ . Isto corresponde a  $\int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) |u_t|^2 dx dt = \int_{\Sigma_A} + \int_{\Sigma_B}$ . Usando que  $|u_t|^2 \leq k f(u_t) u_t$ ,  $(t, x) \in \Sigma_B$  e que  $|u_t|^2 \leq H_2^{-1}(f(u_t) u_t)$ ,  $(t, x) \in \Sigma_A$ , ainda lembrando que  $\| a \|_\infty \| g \|_{L^1(0, \infty)} < 1$ , combinando (3.3.14)–(3.3.24) e (3.3.28), podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \int_0^t g(\xi) d\xi \right) \int_M (\varphi(x) + b(x)) |u_t|^2 dx dt \leq C [E((n+1)T) + E(nT)] \\
& + \left( \frac{1}{4\varepsilon} \| b \|_\infty + C + \| g \|_{L^1(0, \infty)} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) [H_2^{-1} + kI] [f(u_t) u_t] dx dt \\
(3.3.29) \quad & + \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \| u_t(t) \|_M^2 dt \\
& - \frac{C}{4\varepsilon} \| g' \|_{L^1(0, \infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g'(t-s) \| \sqrt{a(\cdot)} (\nabla u(t) - \nabla u(s)) \|_M^2 ds dt \\
& + 2\varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \| \nabla u(t) \|_M^2 dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C}{2\varepsilon} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}(\nabla u(t) - \nabla u(s))\|_M^2 ds dt \\
& + \|g\|_{L^1(0,\infty)} (\|a\|_\infty + C) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}(\nabla u(t) - \nabla u(s))\|_M^2 ds dt \\
& \quad + 2\varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla u(t)\|_M^2 ds dt \\
& + \frac{C}{2\varepsilon} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt \\
& + \varepsilon C \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt.
\end{aligned}$$

Uma vez que  $g(0) > 0$  podemos escolher  $0 < t_1 < T$  ( $t_1$  próximo a zero) tal que para todo  $t \geq t_1$ ,  $\int_0^t g(s) ds \geq t_1 g(t_1) = C_0$ . Com isso em mente, aplicando a desigualdade (3.3.1), ou seja, que  $\varphi(x) + b(x) \geq \delta/2$  para todo  $x \in M$ , e para  $\varepsilon < \frac{C_0\delta}{2}$ , de (3.3.29) conseguimos recuperar a energia cinética sobre todo  $M$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M |u_t|^2 dx dt \leq C[E((n+1)T) + E(nT)] \\
& + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x)[H_2^{-1} + kI + KI](f(u_t)u_t) dx dt \\
& - C \|g'\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g'(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt \\
& + 2\varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt \\
& + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt \\
& + 2\varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla u(t)\|_M^2 ds dt \\
& + \varepsilon C \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t) - u(s))\|_M^2 ds dt,
\end{aligned}$$

para todo  $t \geq t_1$  e para alguma constante positiva  $C$  que não depende de  $n$ .

**Observação 3.18** *Comparando a efetividade do amortecimento friccional e viscoelástico, é interessante responder a pergunta, o que acontece quando o amortecimento viscoelástico age em todo  $M$ . Isto significa que  $a(x) \geq \delta$  sobre  $M$ . Em tal cenário não é difícil ver que o amortecimento friccional não tem impacto sobre as taxas de decaimento, quando assumido que este é diferenciável próximo a origem. De fato, a estimativa responsável pela deterioração das taxas de decaimento devido ao amortecimento friccional são as que correspondem às estimativas do termo  $J_9$ . Mas, neste caso, sob a condição de diferenciabilidade, podemos simplificar escrevendo,  $f^2(u_t) \leq Lf(u_t)u_t$  para  $u_t \in \Sigma_A$  com  $L$  sendo a constante de Lipschitz*

na origem. Uma vez que o suporte de  $\varphi$  é total, o multiplicador viscoelástico recupera a energia cinética total o qual resulta na seguinte estimativa final,

$$\begin{aligned} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t\|_M^2 dt &\leq C[E((n+1)T) + E(nT) + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x)[(L+k)I]f(u_t)u_t dxdt] \\ &\quad - C\|g'\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g'(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t)-u(s))\|_M^2 dsdt, \\ +2\varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt &+ C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t)-u(s))\|_M^2 dsdt \\ &\quad + 2\varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla u(t)\|_M^2 dsdt \\ &\quad + \varepsilon C\|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla(u(t)-u(s))\|_M^2 dsdt, \end{aligned}$$

Com o propósito de esclarecer, enfatizamos que a desigualdade acima, a qual reconstrói toda a energia cinética quando  $a(x)$  tem suporte total em  $M$  ocorre sob as seguintes hipóteses sobre o amortecimento friccional:

**Hipótese 3.19** Assumamos que  $a(x) \geq \delta > 0$  sobre  $M$  e

- $f \in C(R)$  é monótona, crescente, diferenciável na origem com  $f(0) = 0$ .
- $|f(s)| \leq K|s|^{p+1}$ , para  $|s| \geq 1$ .

Não existe necessidade de um limitante inferior  $m$  no infinito, nem a utilização de uma função  $H_2$ .

### 3.3.2 Recuperando a Energia Potencial

Tendo obtido a energia cinética, passaremos a recuperação da energia potencial. Isto será feito pela usual partição da energia, por meio de um adequado multiplicador. Assim, multiplicando a equação (3.1.1) por  $u$  e integrando sobre  $M \times (nT, (n+1)T)$ , inferimos

$$(3.3.30) \int_{nT}^{(n+1)T} \left( u_{tt}(t) - \Delta u(t) + \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(\cdot)\nabla u(s)] ds + b(\cdot)f(u_t), u(t) \right)_M dt = 0.$$

Após realizar algumas integrações por partes, obtemos

$$\begin{aligned} (3.3.31) \quad & - \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_M^2 dt + (u_t(t), u(t))_M \Big|_{nT}^{(n+1)T} + \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt \\ & - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) (a(\cdot)\nabla u(s), \nabla u(t))_M dsdt = - \int_{nT}^{(n+1)T} (b(\cdot)f(u_t), u)_M dt. \end{aligned}$$

A exemplo do que fizemos para recuperar a energia cinética, estimaremos algumas integrais.

*Estimativa para  $I_1 := - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) (a(\cdot) \nabla u(s), \nabla u(t))_M ds dt$ .*

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz combinada com a desigualdade  $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$ , vem que

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla u(s)\|_M \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla u(t)\|_M ds dt \\
&\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \left[ \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(s) - u(t))\|_M + \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla u(t)\|_M \right] \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla u(t)\|_M ds dt \\
&= \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(s) - u(t))\|_M \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla u(t)\|_M ds dt \\
(3.3.32) \quad &+ \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla u(t)\|_M^2 ds dt \\
&\leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(s) - u(t))\|_M^2 ds dt \\
&\quad + (\varepsilon + 1) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla u(t)\|_M^2 ds dt,
\end{aligned}$$

onde  $\varepsilon$  é um número positivo que posteriormente será escolhido convenientemente.

*Estimativa para  $I_2 := - \int_{nT}^{(n+1)T} (b(\cdot) f(u_t), u)_M dt$ .*

Considerando, novamente, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, juntamente com a desigualdade de Poincaré, ainda combinada com a desigualdade  $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$ , deduzimos que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} (b(\cdot) f(u_t), u)_M dt = \int_{\Sigma_A} + \int_{\Sigma_B},$$

onde, como já feito anteriormente, consideramos,

$$\Sigma_A = \{(t, x) \in [nT, (n+1)T] \times M; |u_t(t, x)| \leq 1\}$$

e

$$\Sigma_B = \{(t, x) \in [nT, (n+1)T] \times M; |u_t(t, x)| > 1\}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Sigma_A} \right| &\leq \frac{\lambda_1^{-1} \|b\|_\infty}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) H_2^{-1}(f(u_t) u_t) dx dt \\
(3.3.33) \quad &+ \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt.
\end{aligned}$$

onde usamos a hipótese (3.2.4).

Nesse momento, novamente, aplicamos a desigualdade de Hölder, a imersão de Sobolev  $H^1(M) \hookrightarrow L^{p+1}(M)$ , a desigualdade de Poincaré, (3.2.3) e que a energia é não crescente, para obtermos,

$$(3.3.34) \quad \left| \int_{\Sigma_B} \right| \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|b(\cdot)f(u_t)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\{x \in M; |u_t| > 1\})} \|u(t)\|_{L^{p+1}(\{x \in M; |u_t| > 1\})} dt \\ \leq C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) k f(u_t) u_t dx dt,$$

onde  $C$  depende de  $l, b, \lambda_1, K, k$  e  $E(0)$ , mas não depende de  $n$ .

Assim, (3.3.33) e (3.3.34) implicam

$$(3.3.35) \quad \int_{nT}^{(n+1)T} (b(\cdot)f(u_t), u)_M dt \\ \leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) [H_2^{-1} + kI](f(u_t)u_t) dx dt.$$

*Estimativa para  $I_3 := (u_t(t), u(t))_M|_{nT}^{(n+1)T}$ .*

Temos,

$$|I_3| \leq \frac{\lambda_1^{-1/2}}{2} [\|u_t((n+1)T)\|_M^2 + \|\nabla u((n+1)T)\|_M^2] \\ + \frac{\lambda_1^{-1/2}}{2} [\|u_t(nT)\|_M^2 + \|\nabla u(nT)\|_M^2].$$

Desta última desigualdade e do fato que  $\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_M^2 \leq l^{-1} E(t)$  para todo  $t \geq 0$ , onde  $l = 1 - \|a\|_\infty \int_0^\infty g(s) ds$ , inferimos que,

$$(3.3.36) \quad |I_3| \leq C[E((n+1)T) + E(nT)],$$

onde a constante  $C$  não depende de  $n$ .

Combinando (3.3.30), (3.3.31), (3.3.32), (3.3.35) e (3.3.36) podemos escrever

$$(3.3.37) \quad \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt - \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_M^2 dt \leq C[E((n+1)T) + E(nT)] \\ + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(s) - u(t))\|_M^2 ds dt \\ + (\varepsilon + 1) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla u(t)\|_M^2 ds dt \\ + \left( \frac{\lambda_1^{-1} \|b\|_\infty}{4\varepsilon} + C \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) [H_2^{-1} + kI](f(u_t)u_t) dx dt + \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt.$$

Donde obtemos a recuperação da energia potencial.

**Observação 3.20** Como anteriormente, podemos perguntar, o que acontece se o suporte do amortecimento viscoelástico é total em  $M$ ? Ou seja, se  $a(x) \geq \delta$  sobre  $M$ . Também como antes, concluímos que o amortecimento friccional não tem efeito, assumindo que este é diferenciável na origem e limitado superiormente por  $K|s|^p$ . De fato, a estimativa relevante está no termo  $I_2$  que requer somente a limitação especificada em (3.19). Desta forma, a estimativa resultante torna-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt - \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_M^2 dt \leq C[E((n+1)T) + E(nT)] \\
& + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla(u(s) - u(t))\|_M^2 ds dt \\
(3.3.38) \quad & + (\varepsilon + 1) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \|\sqrt{a(\cdot)} \nabla u(t)\|_M^2 ds dt \\
& + \left(\frac{\lambda_1^{-1} \|b\|_\infty}{4\varepsilon} + C\right) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) [K + I] (f(u_t) u_t) dx dt + \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_M^2 dt.
\end{aligned}$$

### 3.3.3 Recuperando a Energia Viscoelástica $E(t)$

Nosso último passo é recuperar a energia viscoelástica.

Combinando (3.3.37) e (3.3.30) e adicionando o termo,

$$- \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M \left( \int_0^t g(s) ds \right) a(x) |\nabla u(t)|^2 dx dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt$$

em ambos os lados e, graças a (3.2.11), usando que,

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \int_M |\nabla u(t)|^2 dx dt \leq \frac{1}{l} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M \kappa(x, t) |\nabla u|^2 dx dt, \quad \forall t \geq 0,$$

afim de recuperar a energia  $E(t)$ , vem que:

$$\begin{aligned}
(3.3.39) \quad & (1 - 5\varepsilon) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M \left( 1 - a(x) \int_0^t g(s) ds \right) |\nabla u|^2 dx dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_M^2 dt \\
& + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt \\
& \leq C[E((n+1)T) + E(nT)] + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt \\
& + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x) [H_2^{-1} + kI + KI] (f(u_t) u_t) dx dt \\
& + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M a(x) (-g' \square \nabla u)(t) dx dt.
\end{aligned}$$

De (3.3.39) escolhendo  $\varepsilon$  suficientemente pequeno e  $T$  suficientemente grande, obtemos a seguinte desigualdade de observabilidade:

$$(3.3.40) \quad \int_{nT}^{(n+1)T} E(t) dt \leq C[E((n+1)T) + E(nT)] \\ + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M a(x)(g \square \nabla u)(t) dx dt \\ + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x)[H_2^{-1} + kI + KI](f(u_t)u_t) dx dt \\ + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M a(x)(-g' \square \nabla u)(t) dx dt.$$

Neste último passo precisamos relacionar a energia viscoelástica com o amortecimento viscoelástico. No caso em que a função de relaxamento obedece a uma equação linear, esta relação é simples e expressa por uma multiplicação adequada.

No entanto, quando desejamos taxas de decaimento gerais, argumentos adicionais são necessários. Aqui seguimos o que foi feito em [45].

Da hipótese feita sobre a função de relaxamento  $g$  (3.2.14), obtemos

$$(3.3.41) \quad (g \square \nabla u)(t) \leq \tilde{H}_1^{-1}(-g' \square \nabla u)(t), \quad t \in [nT, (n+1)T]$$

De (3.3.41) e usando (3.3.40) vem que,

$$(3.3.42) \quad \int_{nT}^{(n+1)T} E(t) dt \leq C[E((n+1)T) + E(nT)] \\ + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M a(x)[\tilde{H}_1^{-1} + I](-g' \square \nabla u)(t) dx dt \\ + C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x)[H_2^{-1} + kI + KI](f(u_t)u_t) dx dt.$$

Aplicaremos a seguir a seguinte versão da desigualdade de Jensen:

- Seja  $F$  uma função convexa e crescente sobre  $[a, b]$ ,  $f : \Omega \rightarrow [a, b]$  e  $h$  uma função integrável tal que  $h(x) \geq 0$  e  $\int_{\Omega} h(x) dx = h_0 > 0$ . Então,

$$(3.3.43) \quad \int_{\Omega} F^{-1}(f(x))h(x) dx \leq h_0 F^{-1}[h_0^{-1} \int_{\Omega} f(x)h(x) dx]$$

Usaremos (3.3.43) a fim de trazer as funções  $H_i$  para fora das integrais. Deixe-nos denotar,

$$\int_M a(x) = a_0, \quad \int_M b(x) = b_0,$$

onde podemos assumir  $a_0, b_0 > 0$ .

Notamos que as funções  $\tilde{H}_1^{-1} + I, H_2^{-1} + (k + K)I$  são concavas.

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M a(x)[\tilde{H}_1^{-1} + I](-g' \square \nabla u)(t) dx dt \\ & \leq a_0 T [\tilde{H}_1^{-1} + I] [a_0^{-1} T^{-1} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M a(x)(-g' \square \nabla u)(t) dx dt], \\ & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x)[H_2^{-1} + kI + KI](f(u_t)u_t) dx dt \\ & \leq b_0 T [H_2^{-1} + kI + KI] [b_0^{-1} T^{-1} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M b(x)f(u_t)u_t dx dt]. \end{aligned}$$

Por outro lado, da identidade de energia, (3.2.12) obtemos

(3.3.44)

$$E((n+1)T) - E(nT) = \frac{1}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_M \{a(x) [g' \square \nabla u - g(t)|\nabla u|^2] - b(x)f(u_t)u_t\} dx dt.$$

Substituindo  $E(nT)$  dado em (3.3.44) na desigualdade (3.3.42) lembrando a notação (3.2.13), obtemos para  $T$  suficientemente grande,

$$\int_{nT}^{(n+1)T} E(t) dt \leq CE((n+1)T) + CH^{-1} \left[ \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right],$$

onde  $C$  é uma constante positiva que não depende de  $n$ , e  $H = [H_2^{-1} + (1+k+K)I + \tilde{H}_1^{-1}]^{-1}$ .

**Observação 3.21** Quando o amortecimento viscoelástico está agindo sobre todo  $M$ , sob as hipóteses (3.19), obtemos que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} E(t) dt \leq CE((n+1)T) + CH^{-1} \left[ \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right],$$

com  $H = [LI + KI + \tilde{H}_1^{-1} + I]^{-1}$ , portanto, não dependem da dissipação resultante do amortecimento friccional.

Uma vez que  $E(t)$  é não crescente, deduzimos desta última desigualdade que

$$(T - C)E((n+1)T) \leq CH^{-1} \left[ \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right],$$

o que implica, para  $T$  suficientemente grande que

$$E((n+1)T) \leq CH^{-1} \left[ \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right].$$

A desigualdade acima prova o Lema 3.11. ■

**Observação 3.22** Quando  $a(x)$  está agindo sobre todo  $M$  e assumimos as hipóteses 3.19, então a função  $H(s)$  não depende de  $H_2(s)$ . Isto quer dizer que as taxas de decaimento são dadas pelo amortecimento viscoelástico. Esse fato é afirmado no Corolário 3.13.

### 3.3.4 Emplos de Taxas Explícitas de Decaimento

Agora exibiremos algumas taxas de decaimento explícitas.

#### Decaimento Exponencial

Para obtermos taxas de decaimento exponencial assumimos as seguintes hipóteses:

$$g'(t) \leq -cg(t), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

e

$$k^{-1}|s| \leq |f(s)| \leq K|s|, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Daí vem que, as hipóteses (3.2.2), (3.2.14) sobre a função de relaxamento  $g$  e (3.2.3), (3.2.4) sobre a não linearidade  $f$ , são satisfeitas, respectivamente quando,

$$H_1 = -cI, \quad \tilde{H}_1 = \frac{1}{c}I, \quad \text{e } H_2^{-1} = (k + K)I,$$

onde  $I$  é a identidade.

Uma vez que a função  $H$  do Lema 3.11 é dada por  $H = [H_2^{-1} + (1+k+K)I + \tilde{H}_1^{-1}]^{-1}$ , segue do exposto acima que, nesse caso,  $H = C I$ , onde  $C$  é uma constante positiva que não depende de  $n$ .

De (3.2.17), (3.2.13) e (3.3.44) temos para  $T > T_0$ ,

$$E((n+1)T) \leq C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt = -CE((n+1)T) + CE(nT),$$

onde a constante  $C$  depende de  $T$  mas não depende de  $n$ .

A última desigualdade implica,

$$(3.3.45) \quad E((n+1)T) \leq \frac{C}{C+1} E(nT), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

o que fornece a estabilidade exponencial.

De fato, de (3.3.45) vem que,

$$(3.3.46) \quad E(T) \leq \frac{C}{1+C} E(0) = \frac{1}{1+\frac{1}{C}} E(0), \quad \text{para todo } T > T_0.$$

Repetindo o processo acima de  $T$  a  $2T$ , obtemos

$$E(2T) \leq \frac{1}{1+\frac{1}{C}} E(T) \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{C})^2} E(0).$$

No caso geral, temos que,

$$E(nT) \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{C})^n} E(0).$$

Uma vez que qualquer número  $t$  pode ser escrito como  $t = nT + r$  onde  $0 \leq r < T$  e  $E_u(t)$  é uma função não crescente, temos

$$E(t) \leq E(t - r) \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{c}\right)^{\frac{t-r}{T}}} E(0) = C_0 e^{-\gamma t} E(0),$$

onde  $C_0 = e^{\frac{r}{T} \ln(1 + \frac{1}{c})}$ ,  $\gamma = \frac{\ln(1 + \frac{1}{c})}{T}$ , e o decaimento exponencial segue.

### Outras Taxas de Decaimento

Com o intuito de obtermos outras taxas de decaimento assumiremos as seguintes hipóteses:

$$g'(t) \leq -cg(t), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

e

$$s^2 + f(s)^2 \leq H_2^{-1}(f(s)s), \quad \text{para } |s| < 1.$$

Daí vem que, as hipóteses (3.2.2), (3.2.14) sobre a função de relaxamento  $g$  são satisfeitas, respectivamente, quando

$$H_1 = -cI, \quad \text{e} \quad \tilde{H}_1 = \frac{1}{c}I,$$

onde  $I$  é a identidade.

Uma vez que a função  $H$  do Lema 3.11 é dada por  $H = [H_2^{-1} + (1+k+K)I + \tilde{H}_1^{-1}]^{-1}$ , segue do exposto acima que, nesse caso,  $H = [CI + H_2^{-1}]^{-1}$ , onde  $C$  é uma constante positiva que não depende de  $n$ .

A partir do que foi apresentado acima, para compreensão do leitor, repetiremos os mesmos argumentos introduzidos em Cavalcanti, Domingos cavalcanti e Lasiecka [17], notando que nesse artigo os autores trataram o problema com dissipação do tipo friccional. Observamos que com as hipóteses consideradas nesse caso sobre  $g$  e  $f$  incorremos no mesmo contexto que em [17] com o mesmo propósito de obter taxas explícitas de decaimento.

O algoritmo para o cálculo das taxas de decaimento dadas no Teorema 3.9 é geral e fornece taxas de decaimento explícitas sem qualquer restrição, em particular, sobre o crescimento da dissipação  $f$  na origem, como assumido por hipótese acima. Ilustraremos a seguir alguns exemplos.

Para prosseguir, notemos que o comportamento da função  $q(s)$  próximo a origem, veja Lema 3.10, é assintoticamente equivalente a  $H_2(s)$ . Assim o único problema está em verificar a estrutura de  $H_2$  próxima a origem. Antes notemos que a equação a considerar é  $S_t + c_0(H_2)(c_1 S) = 0$ ,  $S(0) = E(0)$  e a solução desta equação fornece uma limitação assintótica para a energia, isto é,  $E(t) \leq C(E(0))S(t)$ , para  $t > T_0$ , onde as constantes  $c_0$  e  $c_1$  são obtidas

a partir do fato que  $q(s) \sim (CI + H_2^{-1})^{-1}(s)$  próximo a origem. De fato, esse comportamento assintótico é consequência direta das definições de  $q$  e  $p$  no Lema 3.10,

$$(3.3.47) \quad \begin{aligned} q &= I - (I + p)^{-1} = p \circ (I + p)^{-1} = p \circ [(p^{-1} + I) \circ p]^{-1} \\ &= p \circ [(L^{-1}(CI + r) + I) \circ p]^{-1} = L^{-1}(CI + r)^{-1}, \end{aligned}$$

onde  $r(\cdot) = H_2^{-1}\left(\frac{\cdot}{\text{med}(Q_T)}\right)$ ,  $Q_T = M \times (0, T)$ . Uma vez que  $H_2^{-1}(s) \geq cs$ , próxima da origem, para alguma constante positiva  $c$ , (3.3.47) implica  $q(s) \sim (CI + H_2^{-1})^{-1}(s) \geq c_1 H_2$  próximo a origem. Então, como já mencionado, o comportamento assintótico da energia é determinado pela seguinte E.D.O.

$$S_t + c_0(H_2)(c_1 S) = 0, S(0) = E(0).$$

Como o objetivo de ser mais específico, consideraremos dois casos: (i)  $f(s)$  decai para zero mais rapidamente que qualquer função linear e (ii)  $f(s)$  decai mais lentamente que qualquer função linear. No primeiro caso, a fim de determinar  $H_2^{-1}$  é suficiente a desigualdade  $s^2 \leq H_2^{-1}(sf(s))$ , enquanto que no segundo caso precisamos somente de  $f^2(s) \leq H_2^{-1}(sf(s))$ .

Resolvendo explicitamente  $s^2 = H_2^{-1}(sf(s))$  obtemos que  $H_2(s) = \sqrt{s}f(\sqrt{s})$ , que foi inicialmente introduzido em [1] e [50]. Para que a função  $H_2^{-1}$  seja “elegível” devemos verificar sua concavidade ou equivalentemente a convexidade de  $H_2(s) = \sqrt{s}f(\sqrt{s})$  numa vizinhança da origem.

Analogamente, no segundo caso temos  $H_2(s) = \sqrt{s}f^{-1}(\sqrt{s})$  com a mesma necessidade de convexidade numa vizinhança da origem.

Resumindo esta discussão e desconsiderando as constantes  $c_0, c_1$  obtemos:

**Corolário 3.23** *Se assumirmos que  $f'(0) = 0$  (isto é o damping é “fraco” -superlinear na origem) e a função  $\sqrt{s}f(\sqrt{s})$  convexa para  $s \in [0, s_0]$ , onde  $s_0$  pode ser arbitrariamente pequena, a equação diferencial a ser resolvida torna-se*

$$S_t + \sqrt{S}f(\sqrt{S}) = 0, S(0) = E(0) = S_0,$$

e  $E(t) \leq C(E(0))S(t)$ . *Mais especificamente, integrando a equação diferencial obtemos com  $G(S, S_0) \equiv \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{S}} \frac{1}{f(u)} du$ ,  $S(t) = G^{-1}(-\frac{t}{2}, S_0)$ .*

**Corolário 3.24** *Se assumirmos que  $f(s)$  decai para zero de forma mais lenta do que qualquer função linear, ou seja:*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{f(s)} = 0,$$

e além disso a função  $\sqrt{s}f^{-1}(\sqrt{s})$  convexa para  $s \in [0, s_0]$ , onde  $s_0$  podem ser arbitrariamente pequenos, a equação diferencial a ser resolvida se torna

$$S_t + \sqrt{S}f^{-1}(\sqrt{S}) = 0, S(0) = E(0) = S_0,$$

e  $E(t) \leq C(E(0))S(t)$ . Mais especificamente, integrando a equação diferencial obtemos com  $G(S, S_0) \equiv \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{S}} \frac{1}{f^{-1}(u)} du$   $S(t) = G^{-1}(-\frac{t}{2}, S_0)$ .

**Observação 3.25** De fato, como ilustrado acima, a equação diferencial no Corolário 3.24 segue pela construção intrínseca da função concâva  $H_2^{-1}$ , onde a última foi introduzida inicialmente em [42]. É interessante notar que as diferentes abordagens quando comparadas, descrevem as mesmas taxas de decaimento para soluções correspondentes.

Apresentamos, como em [17], o procedimento com alguns exemplos. Por simplicidade, normalizaremos as constantes de modo que elas não apareçam nas expressões.

- **Exemplo 1** Consideremos  $f(s) = s^p$ ,  $p > 1$  na origem. Sendo a função  $s^{\frac{p+1}{2}}$  convexa para  $p \geq 1$  vamos resolver

$$(3.3.48) \quad S_t + S^{\frac{p+1}{2}} = 0.$$

Esta equação pode ser integrada diretamente. Mas a fim de ilustrarmos a fórmula geral calculemos:

$$G(s, S_0) = \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{s}} u^{-p} du = \frac{1}{1-p} [s^{\frac{-p+1}{2}} - S_0^{\frac{-p+1}{2}}].$$

Aqui  $G^{-1}(t) = [S_0^{\frac{-p+1}{2}} - t(1-p)]^{\frac{2}{-p+1}}$ . Então

$$E(t) \leq C(E(0)) [E(0)^{\frac{-p+1}{2}} + t(p-1)]^{\frac{2}{-p+1}}.$$

Claro que as mesmas taxas de decaimento podem ser obtidas por integração direta de (3.3.48).

- **Exemplo 2** Tomemos  $f(s) = s^3 e^{-\frac{1}{s^2}}$  para  $s$  na origem. Sendo a função  $s^2 e^{-\frac{1}{s}}$  convexa em uma vizinhança da origem calculemos

$$(3.3.49) \quad S_t + S^2 e^{-\frac{1}{S}} = 0.$$

Neste caso  $G(S, S_0) = -1/2 [e^{-\frac{1}{S}} - e^{-\frac{1}{S_0}}]$  e  $G^{-1}(t, S_0) = [\ln(e^{\frac{1}{S_0}} - 2t)]^{-1}$ .

Por isso

$$E(t) \leq C(E(0)) [\ln(e^{\frac{1}{E(0)}} + t)]^{-1},$$

cujas soluções também pode ser obtida diretamente integrando (3.3.49).

- **Exemplo 3** Consideremos  $f(s) = s|s|e^{-\frac{1}{|s|}}$  para  $s$  próxima a origem. Sendo a função  $s^{3/2} e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}}$  convexa em  $[0, s_0]$  para algum  $s_0$  pequeno, somos levados a equação diferencial

$$(3.3.50) \quad S_t + S^{3/2} e^{-\frac{1}{\sqrt{S}}} = 0.$$

A função  $G(S, S_0) = -[e^{\frac{1}{\sqrt{S}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{S_0}}}]$ .

Logo,  $G^{-1}(t, S_0) = \frac{1}{\ln^2[e^{\frac{1}{\sqrt{S_0}}} - t]}$  e

$$E(t) \leq C(E(0)) \frac{1}{\ln^2[e^{\frac{1}{\sqrt{E(0)}}} + \frac{1}{2}t]}.$$

- **Exemplo 4** Tomemos  $f(s) = |s|^{\theta-1}s$ ,  $0 < \theta < 1$ . Neste caso a análise é idêntica ao caso do Exemplo 1 sendo  $f^{-1}(s) = s^{\frac{1}{\theta}}$ ,  $s > 0$  e  $\frac{1}{\theta} > 1$ . Assim, as taxas de decaimento tornam-se

$$E(t) \leq C(E(0)) \left[ E(0)^{\frac{-1+\theta}{2\theta}} + t \frac{1-\theta}{\theta} \right]^{\frac{2\theta}{\theta-1}}.$$

Já quando assumimos, como em Lasiecka, Messaoudi e Mustafa [45], a seguinte hipótese sobre a função de relaxamento  $g$ , com  $p \in [1, 2)$

$$g'(t) \leq -(g(t))^p, \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e } \tilde{H}_1((g \square w)(t)) \leq -g' \square w(t), \quad t > 0$$

e sobre a função não linear  $f$  consideremos

$$k^{-1}|s| \leq |f(s)| \leq K|s|, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Daí vem que as hipóteses (3.2.14) e (3.2.4) sobre a função de relaxamento e a não linearidade  $f$  são satisfeitas, respectivamente, quando

$$\tilde{H}_1(s) \sim s^{\frac{1}{q}} \text{ para } q > \frac{1}{2-p},$$

onde  $\sim$  significa assintoticamente equivalente próximo à origem (ver [45] B. Aplicação do Teorema 2.5) e

$$H_2^{-1} = (k + K)I$$

onde  $I$  é a identidade.

Uma vez que a função  $H$  do Lema 3.11 é dada por  $H = [H_2^{-1} + (1+k+K)I + \tilde{H}_1^{-1}]^{-1}$ , segue do exposto acima que, nesse caso,  $H \sim \tilde{H}_1$ , onde  $C$  é uma constante positiva que não depende de  $n$ . Nessas condições obtemos

$$E(t) \leq Ct^{-\frac{1}{1-q}} \quad t > T_0.$$

Observamos que quando ambos os mecanismos dissipativos tiverem comportamento assintótico polinomial próximo a origem, então a taxa de decaimento da energia dar-se-á no pior cenário, ou seja, com a pior taxa de decaimento polinomial, ver [22].

# Bibliografia

- [1] F. Alabau-Boussouira, **Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems**. Applied Mathematics and Optimization, 51, 51–105, 2005.
- [2] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, D. Sforza, **Decay estimates for second order evolution equations with memory**. J. Funct. Anal., 254(5):1342–1372, 2008.
- [3] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, **A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations**. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser., I 347, 867–872 2009.
- [4] M.S. Alves, C.A. Raposo, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda, O. V. Villagrán, **Uniform stabilization for the transmission problem of the Timoshenko system with memory**. J. Math. Anal. Appl. 369, no. 1, 323–345, 2010.
- [5] D. Andrade, M.A. Jorge Silva, T.F. Ma, **Exponential stability for a plate equation with p-Laplacian and memory terms**. Mathematical Methods in the Applied Sciences, v. 35, 417–426, 2012.
- [6] V. Barbu, M. Iannelli, **Controllability of the heat equation with memory**. Differential Integral Equations 13, no. 10-12, 1393–1412, 2000.
- [7] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, **Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary**. SIAM J. Control Optim. 30, no. 5, 1024–1065, 1992.
- [8] M. Bellassoued, **Decay of solutions of the elastic wave equation with a localized dissipation**. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, XII (3), 267–301, 2003.
- [9] S. Berrimi, S. A. Messaoudi, **Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source**. Nonl. Anal., 64: 2314–2331, 2006.

- [10] L. Bociu, I. Lasiecka, **Local Hadamard well-posedness for nonlinear wave equations with supercritical sources and damping.** J. Differential Equations, 249(3): 654–683, 2010.
- [11] H. Brézis, **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones.** Madrid: Alianza Editorial, S.A., 1984.
- [12] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano, **Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping.** E. J. Differential Equations, 44:1–14, 2002.
- [13] M. M. Cavalcanti, H. P. Oquendo, **Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation.** SIAM J. Control Optim., 42(4): 1310–1324, 2003.
- [14] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, T. F. Ma, **Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains** Differential Integral Equations 17, no. 5-6, 495–510, 2004.
- [15] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano, **Global existence and asymptotic stability for the nonlinear and generalized damped extensible plate equation.** Commun. Contemp. Math., 6 , no. 5, 705–731, 2004.
- [16] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano, **Global solvability and asymptotic stability for the wave equation with nonlinear feedback and source term on the boundary.** Adv. Math. Sci. Appl., 16(2): 661–696, 2006.
- [17] M. M. Cavalcanti, V. D. Cavalcanti, I. Lasiecka, **Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction.** J. Differential. Equations., 236: 407–459, 2007.
- [18] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, P. Martinez, **General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems.** Nonlinear Anal., 68(1): 177–193, 2008.
- [19] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, **Uniform Stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping.** Methods Appl. Anal., 15(4), 405–426, 2008.
- [20] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, **Uniform Stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping.** Transactions of AMS, v.361, no 9, p.4561-4580, 2009.

- [21] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, **Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result**. Arch. Ration. Mech. Anal. 197, no. 3, 925–964, 2010.
- [22] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, I. Lasiecka, F. A. Falcão Nascimento, **Intrinsic Decay rate estimates for the wave equation with competing viscoelastic and frictional dissipation**. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B, a aparecer.
- [23] H. Christianson, **Semiclassical non-concentration near hyperbolic orbits**. *J. Funct. Anal.* 246, no. 2, 145–195, 2007.
- [24] E. Coddington, N. Levinson, **Theory of Ordinary Differential Equations**. New York: Mac Graw-Hill, 1955.
- [25] M. Daoulatli, I. Lasiecka and D. Toundykov, **Uniform energy decay for a wave equation with partially supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions**. DCDS-S, 2, 1, 2009.
- [26] C. M. Dafermos, **Asymptotic stability in viscoelasticity**. Arch. Ration. Mech. Anal. 37, 297–308, 1970.
- [27] C. M. Dafermos, **Asymptotic behavior of solutions of evolution equations**. Non-linear evolution equations (Proc. Sympos., Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 103–123, 1997. Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin, 40, Academic Press, New York-London, 1978.
- [28] B. Dehman, G. Lebeau, E. Zuazua, **Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation**. Anna. Sci. Ec. Norm. Super. 36, 525–551, 2003.
- [29] K. Deng, Z. Dong, **Blow-up for the heat equation with a general memory boundary condition**. Commun. Pure Appl. Anal. 11, no. 5, 2147–2156, 2012.
- [30] M. Eller, J. Lagnese and S. Nicaise, **Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping**. Special issue in memory of Jacques-Louis Lions. Comput. Appl. Math. 21, no. 1, 135–165, 2002.
- [31] M. Fabrizio, S. Polidoro, **Asymptotic decay for some differential systems with fading memory**. Appl. Anal. 81, no. 6, 1245–1264, 2002.
- [32] V. Georgiev, G. Todorova, **Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term**. J. Differential. Equations., 109: 295–308, 1994.

- [33] S. Guerrero, O. Y. Imanuvilov, **Remarks on non controllability of the heat equation with memory.** ESAIM Control Optim. Calc. Var. 19, no. 1, 288–300, 2013.
- [34] A. Guesmia, S. A. Messaoudi, **A general decay result for a viscoelastic equation in the presence of past and finite history memories.** Nonlinear Analysis: Real World Applications, 13, 476–485, 2012.
- [35] A. Guesmia, S. A. Messaoudi, **On the stabilization of Timoshenko systems with memory and different speeds of wave propagation.** Appl. Math. Comput. 219, no. 17, 9424–9437, 2013.
- [36] T. G. Ha, **On viscoelastic wave equation with nonlinear boundary damping and source term.** Commun. Pure Appl. Anal., 9(6):1543–1576, 2010.
- [37] E. Hebey, **Sobolev Space on Riemannian Manifolds.** Berlin: Springer, 1996.
- [38] M. Hitrik, **Expansions and eigenfrequencies for damped wave equations.** Journées équations aux Dérivées Partielles"(Plestin-les-Grèves, ), Exp. No. VI, 10 pp., Univ. Nantes, Nantes, 2001.
- [39] M. Kafini, S. A. Messaoudi. **A blow-up result for a viscoelastic system in  $\mathbb{R}^n$ .** Electron. J. Differential Equations, pages No. 113, 7 pp. (electronic), 2007.
- [40] M. Kafini, S. A. Messaoudi. **A blow-up result in a Cauchy viscoelastic problem.** Appl. Math. Lett., 21(6): 549–553, 2008.
- [41] S. Kesavan, **Topic in Functional Analysis and Applications.** New Dehli: John Wiley and Sons, 1989.
- [42] I. Lasiecka and D. Tataru. **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping.** Differential Integral Equations, 6, no 3, 507–533, 1993.
- [43] I. Lasiecka, R. Triggiani, **Inverse/Observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients.** Journal. Math. Anal. Apl., v.235, p.13-57, 1999.
- [44] I. Lasiecka, D. Toundykov, **Regularity of higher energies of wave equation with nonlinear localized damping and a nonlinear source.** Nonlinear Anal. 69, no. 3, 898–910, 2008.
- [45] I. Lasiecka, S. A. Messaoudi, M. Mustafa, **Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory.** Journal Mathematical Physics, 2013 to appear.

- [46] G. Lebeau, **Equations des ondes amorties**. Algebraic Geometric Methods in Maths. Physics, pp. 73–109, 1996.
- [47] H. A. Levine and R. A. Smith. **A potential well theory for the wave equation with a nonlinear boundary condition**. J. Reine Angew. Math., 374: 1–23, 1987.
- [48] J. L. Lions. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires**. Dunod Gautier-Villars, Paris, 1969.
- [49] J. L. Lions, E. Magenes, **Non-Homogeneous boundary Value Problems and Applications, v.I**. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.
- [50] W. Liu, E. Zuazua, **Decay rates for dissipative wave equations**. Papers in memory of Ennio De Giorgi (Italian). Ricerche Mat. 48 , suppl., 61–75, 1999.
- [51] W. Liu, G. Li, L. Hong, **Decay of solutions for a plate equation with  $p$ -Laplacian and memory term**. Electron. J. Differential Equations, no. 129, 5, 2012.
- [52] L. Lu, S. Li, S. Chai. **On a viscoelastic equation with nonlinear boundary damping and source terms: global existence and decay of the solution**. Nonlinear Anal. Real World Appl., 12(1): 295–303, 2011.
- [53] P. Martinez, **A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems**. ESAIM Control Optim. Calc. Var., 4: 419–444 (electronic), 1999.
- [54] P. Martinez, **A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping**. Rev. Mat. Complutense 12(1) , 251–283, 1999.
- [55] L. A. Medeiros, **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Rio de Janeiro: Textos e Métodos Matemáticos 16, IM-UFRJ, 1983.
- [56] S. A. Messaoudi. **Blow up in a nonlinearly damped wave equation**. Mathematische Nachrichten., 231: 1–7, 2001.
- [57] S. A. Messaoudi. **Blow up and global existence in nonlinear viscoelastic wave equations**. Math. Nachrich, 260:58–66, 2003.
- [58] S. A. Messaoudi, B. Said-Houari. **Global non-existence of solutions of a class of wave equations with non-linear damping and source terms**. Math. Methods Appl. Sci., 27: 1687–1696, 2004.
- [59] S. A. Messaoudi, M. I. Mustafa. **On the control of solutions of viscoelastic equations with boundary feedback**. Nonlinear Anal. Real World Appl., 10, no 5, 3132–3140, 2009.

- [60] S. A. Messaoudi, M. Mustafa, **General stability result for viscoelastic wave equations**, Journal of Mathematical Physics, 53, 053702, 2012.
- [61] L. Miller, **Escape function conditions for the observation, control, and stabilization of the wave equation**. SIAM J. Control Optim. 41, no. 5, 1554–1566, 2002.
- [62] M. M. Miranda, **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Rio de Janeiro: Seminário Brasileiro de Análise. Atas 28 - Seminário Brasileiro de Análise, p.171-191, 1988.
- [63] M. M. Miranda and L. P. San Gil Jutuca. **Existence and boundary stabilization of solutions for the Kirchhoff equation**. Comm. Partial Differential Equations, 24(9-10): 1759–1800, 1999.
- [64] M. Nakao, **Decay and global existence for nonlinear wave equations with localized dissipations in general exterior domains**. New trends in the theory of hyperbolic equations, Oper. Theory Adv. Appl., 159, Birkhäuser, Basel, 213–299, 2005.
- [65] M. Nakao, **Energy decay for the wave equation with boundary and localized dissipations in exterior domains**. Math. Nachr. 278(7-8), 771–783, 2005.
- [66] T. Qin, **Asymptotic behavior of a class of abstract semilinear integrodifferential equations and applications**. J. Math. Anal. Appl. 233, no. 1, 130–147, 1999.
- [67] J. Rauch, M. Taylor, **Decay of solutions to non dissipative hyperbolic systems on compact manifolds**. Comm. Pure Appl. Math. 28(4), 501–523, 1975.
- [68] P. A. Raviart, J. M. Thomas, **Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivées Partielles**. Paris: Masson, 1983.
- [69] J. E. M. Rivera, **Global solution on a quasilinear wave equation with memory**. Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 8, no. 2, 289–303, 1994.
- [70] J. E. M. Rivera, A. Peres Salvatierra, **Asymptotic behaviour of the energy in partially viscoelastic materials**. Quart. Appl. Math. 59, no. 3, 557–578, 2001.
- [71] J.E.M. Rivera, H.F.Sare, **Exponential decay of Timoshenko systems with indefinite memory dissipation**. Adv. Differential Equations 13, no. 7-8, 733–752. 2008.
- [72] B. Said-Houari, F.A. Falcão Nascimento, **Global existence and nonexistence for the viscoelastic wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction**. Commun. Pure Appl. Anal. 12, no. 1, 375–403, 2013.

- [73] H. Song and C. Zhong, **Blow-up of solutions of a nonlinear viscoelastic wave equation**. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 11(5):3877–3883, 2010.
- [74] N. Tatar, **Exponential decay for a viscoelastically damped Timoshenko beam**. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* 33, no. 2, 505–524, 2013.
- [75] M. E. Taylor, **Partial Differential Equations I**. Basic Theory. 2nd Edition, Springer, 2010.
- [76] D. Toundykov, **Optimal decay rates for solutions of nonlinear wave equation with localized nonlinear dissipation of unrestricted growth and critical exponents source terms under mixed boundary**. *Nonlinear Analysis T. M. A.*, 67(2), 512–544, 2007.
- [77] R. Triggiani and P. F. Yao, **Carleman estimates with no lower-Order terms for general Riemannian wave equations. Global uniqueness and observability in one shot.**, *Appl. Math. and Optim.*, 46 (Sept./Dec.), 331–375, 2002. Special issue dedicated to J. L. Lions.
- [78] C. O. Vieira, **Existência e decaimento exponencial de soluções de uma equação da onda semilinear e parcialmente viscoelástica com dissipação friccional localizada**. *Dissertação (Mestrado em Matemática)* - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.
- [79] E. Vitillaro. **Global existence theorems for a class of evolution equations with dissipation**. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 149:155–182, 1999.
- [80] E. Vitillaro. **Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms**. *J. Differential Equations*, 186(1):259–298, 2002.
- [81] E. Vitillaro. **A potential well theory for the wave equation with nonlinear source and boundary damping terms**. *Glasg. Math. J.*, 44(3): 375–395, 2002.
- [82] S. Yu, M. Wang, W. Liu, **Blow up for a Cauchy viscoelastic problem with a nonlinear dissipation of cubic convolution type**, *Math. Methods Appl. Sci.*, 32, 1919–1928, 2009.
- [83] E. Zeidler, **Nonlinear Functional Analysis and its Applications**. v.2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.
- [84] E. Zuazua, **Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping**. *Comm. Partial Differential Equations* 15, no. 2, 205–235, 1990.