

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

DJEISON BENETTI

Métricas de Hausdorff induzidas em espaços homogêneos

Maringá-PR

2016

DJEISON BENETTI

Métricas de Hausdorff induzidas em espaços homogêneos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka

Maringá-PR

2016

“[...] o rigor metodológico com que a ciência busca honrar-se só merece esse nome quando inclui em seu horizonte não só o experimento realizado no espaço isolado do laboratório, mas também o experimento realizado no espaço aberto da história.”

Walter Benjamin

Agradecimentos

Ao professor Ryuichi Fukuoka pela orientação, paciência, atenção e disponibilidade. Foram alguns anos de trabalho (mestrado e doutorado) que, sem dúvida nenhuma, contribuíram enormemente para minha formação.

Aos membros da banca examinadora pelas contribuições para a redação final da tese e pelas sugestões de trabalhos futuros.

Aos funcionários, professores e alunos da Universidade Estadual de Maringá que, de uma forma ou de outra, apesar de todas as dificuldades e empecilhos, colaboram para a manutenção de um ambiente acadêmico vivo e, acima de tudo, público.

À Capes e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Araci e Leonir, e ao meu irmão Gustavo. Apesar da distância, sempre nos mantivemos unidos e próximos.

Aos colegas do PMA que passaram pelo O7: André, Eleomar e José Henrique. Certamente bons tempos que ficarão na memória.

À Maria Rosa. Primeiro, por ter me apresentado a Psicanálise, claro! Mas, segundo e mais importante, por sempre estar ao meu lado com seu carinho e paciência, ora incentivando e aconselhando, ora simplesmente lendo alguma coisa comigo.

Resumo

Neste trabalho apresentamos as métricas de Hausdorff induzidas em espaços quocientes. Tais métricas são determinadas a partir de uma ação à esquerda de um grupo G em um espaço métrico conexo M e dadas em termos da distância de Hausdorff entre os conjuntos gX , $g \in G$, com $X \subset M$ compacto previamente fixado. Mais precisamente, determinamos métricas d_X e \widehat{d}_X no espaço quociente G/H_X , onde \widehat{d}_X é a métrica intrínseca associada a d_X e $H_X = \{g \in G; gX = X\}$. É no estudo das propriedades relacionadas a essas métricas que nosso trabalho se desenvolve. Demonstramos que se G é um grupo de Lie que age por isometrias em uma variedade de Finsler M , a métrica de Hausdorff intrínseca \widehat{d}_X induzida no espaço homogêneo G/H_X é uma métrica de Finsler.

Palavras chave: Métrica intrínseca, Métrica de Hausdorff induzida, Espaço homogêneo, Métrica de Finsler.

Abstract

In this work we present Hausdorff metrics induced in quotient spaces. These metrics are determined by a left action of a group G in a connected metric space M , and provided in terms of Hausdorff distance among sets gX , $g \in G$, where $X \subset M$ is a compact set previously fixed. More precisely, we have metrics d_X and \widehat{d}_X in the quotient space G/H_X , where \widehat{d}_X is the intrinsic metric associated to d_X , and $H_X = \{g \in G; gX = X\}$. Our work is developed in the study of properties related to these metrics. We point out that if G is a Lie group acting by isometries in a Finsler manifold M , the intrinsic Hausdorff metric \widehat{d}_X induced on the homogeneous space G/H_X is a Finsler metric.

key words: Intrinsic metric, Induced Hausdorff metric, Homogeneous space, Finsler metric.

Sumário

Introdução	9
1 Métricas intrínsecas; espaços homogêneos	12
1.1 Métricas intrínsecas	12
1.2 Ações de um grupo; espaços homogêneos	17
2 Introdução às métricas de Hausdorff induzidas em espaços homogêneos	20
2.1 Definições; primeiros exemplos	20
2.2 Propriedades métricas e topológicas de d_X e \hat{d}_X	26
2.3 O compacto X enquanto fecho de uma bola normal	37
3 As métricas de Hausdorff intrínsecas induzidas em espaços homogêneos são métricas de Finsler	39
3.1 Estrutura de comprimento Finsler para a métrica de Hausdorff intrínseca induzida em G/H_X	39
3.2 O compacto X enquanto subvariedade mergulhada	45
3.3 Outros exemplos	54
3.3.1 Exemplos no toro plano	54
3.3.2 Exemplos no plano hiperbólico	58
Conclusão	78

Introdução

Apresentamos aqui um estudo das métricas de Hausdorff induzidas em espaços quocientes. Tais métricas são determinadas a partir de uma ação à esquerda de um grupo G em um espaço métrico conexo M e sua construção é dada como segue: fixamos $X \subset M$ compacto e consideramos as distâncias de Hausdorff entre os conjuntos gX , $g \in G$. A distância de Hausdorff determina então uma pseudométrica em G , da qual obtemos uma métrica d_X no espaço quociente G/H_X , onde $H_X = \{g \in G; gX = X\}$. Mais importante do que a própria d_X é a métrica intrínseca \widehat{d}_X determinada a partir dela. É no estudo das propriedades relacionadas a essas métricas que nosso trabalho se desenvolve.

Apesar de a definição da métrica de Hausdorff ser dada em termos bastante gerais, na maioria dos casos estudados fazemos restrições. Estas restrições incluem, por exemplo, exigir que G seja um grupo de Lie, que M seja uma variedade de Finsler (ou Riemanniana) e que a ação de G em M seja uma ação diferenciável e por isometrias (em particular, G/H_X passa a ser um espaço homogêneo). Especificamente, essas são as condições ideais para se demonstrar a maioria dos resultados referentes às métricas de Hausdorff induzidas em G/H_X .

Um fato importante é que o estudo de métricas intrínsecas em espaços homogêneos não é recente. Neste sentido, temos os trabalhos de V. N. Berestovskii: [3], [4] e [5]. Dentre os seus resultados, destacamos: seja N um espaço homogêneo (conexo) munido com uma métrica intrínseca ρ . Então, (N, ρ) é precisamente um espaço quociente G/H de um grupo de Lie conexo G por um subgrupo compacto H munido com uma métrica Carnot-Caratheodory-Finsler invariante com respeito a ação canônica de G em G/H (veja [4], p. 180). Além disso, $N = G/H$ é uma variedade de Finsler se, e só se, as curvas $t \mapsto \exp(tv)x$ são retificáveis para todo vetor v na álgebra de Lie \mathfrak{g} de G e para todo $x \in N$ (veja [4], p. 190).

Resumidamente, uma métrica Carnot-Caratheodory-Finsler d_c é determinada por uma distribuição G -invariante completamente não holonômica Δ em G/H e uma norma (Finsler) $F = F(p, \cdot)$, $p \in G/H$, definida no subespaço vetorial $\Delta(p)$ do espaço tangente $T_p G/H$. A condição de Δ ser não holonômica garante que quaisquer dois pontos em G/H podem ser ligados por um caminho continuamente diferenciável por partes tangente à distribuição Δ (um caminho horizontal). Então, a métrica d_c é definida pela fórmula

$$d_c(p, q) = \inf_{\eta} \int_0^1 F(\eta'(t)) dt, \quad \eta \in C_{pq},$$

onde C_{pq} é o conjunto de todos os caminhos horizontais continuamente diferenciáveis por partes em G/H ligando os pontos p e q em G/H (veja [4], p. 180). Em particular, a métrica de Carnot-Caratheodory-Finsler é de Finsler quando $\Delta(p) = T_p G/H$ para todo $p \in G/H$.

Tendo em vista os resultados de Berestovskii, nossa contribuição consiste no seguinte: dados G um grupo de Lie, M uma variedade de Finsler conexa e $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação diferenciável e por isometrias, a métrica de Hausdorff intrínseca \widehat{d}_X induzida no espaço homogêneo G/H_X é uma métrica de Finsler. Mais precisamente, \widehat{d}_X está associada a uma estrutura de comprimento Finsler determinada por uma aplicação contínua $F : TG/H_X \rightarrow \mathbb{R}$ que, por sua vez, é dada em termos de uma norma F_0 definida em todo $T_{H_X} G/H_X$, onde

$$F_0(v + \mathfrak{h}_X) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\exp(tv)H_X, H_X)}{t} \quad (1)$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$, no qual \mathfrak{g} e \mathfrak{h}_X denotam as álgebras de Lie de G e H_X , respectivamente. Além disso, quando consideramos $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ variedade Riemanniana conexa, estudamos o comportamento da métrica de Finsler \widehat{d}_X em G/H_X para escolhas específicas do compacto $X \subset M$. Por exemplo, dada uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$, para X subvariedade compacta sem bordo, a expressão da métrica de Finsler F associada a \widehat{d}_X em $T_{H_X} G/H_X$ é

$$F(v + \mathfrak{h}_X) = \max_{x \in X} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_M \quad (2)$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$. Um caso particular ocorre quando G é grupo de Lie munido com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ bi-invariante e $\varphi : G \times G \rightarrow G$ uma ação à esquerda (por isometrias). Aqui se $X \subset G$ é uma subvariedade compacta sem bordo e $\chi(X) \neq 0$, então $F(v + \mathfrak{h}_X) = \|v\|_G$ para todo $v \in \mathfrak{g}$.

Em linhas gerais, os capítulos se organizam da seguinte maneira. No primeiro, temos alguns conceitos básicos sobre métricas intrínsecas e espaços homogêneos. No segundo, desenvolvemos as ideias gerais sobre as métricas de Hausdorff induzidas em G/H_X , destacando alguns resultados topológicos, bem como exemplos no espaço euclidiano \mathbb{R}^n e na esfera S^2 . No terceiro, dada uma ação diferenciável e por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade de Finsler conexa M , mostramos que a métrica de Hausdorff intrínseca está associada a uma estrutura de comprimento Finsler cuja norma possui a forma (1). Além disso, para M variedade Riemanniana e $X \subset M$ subvariedade compacta, obtemos uma expressão para a métrica de Finsler em termos das componentes normais dos campos de vetores associados às curvas $t \mapsto \exp(tv)x$, $v \in \mathfrak{g}$ e $x \in X$, conforme em (2). Por último, destacamos alguns exemplos no toro plano e no plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

Capítulo 1

Métricas intrínsecas; espaços homogêneos

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos sobre métricas intrínsecas e espaços homogêneos. Não nos aprofundaremos em detalhes, mas apresentamos os conceitos apenas na medida em que são necessários para a construção dos resultados posteriores.

1.1 Métricas intrínsecas

As ideias básicas referentes às métricas intrínsecas são dadas conforme em [6]. Iniciamos com a definição de estrutura de comprimento em um espaço topológico e avançamos até a definição de estrutura de comprimento induzida por uma métrica. O conceito de velocidade de uma curva em um espaço métrico também é abordado.

Um caminho η em um espaço topológico M é uma aplicação contínua $\eta : I \rightarrow M$ definida em um intervalo (conexo) $I \subset \mathbb{R}$. Uma **estrutura de comprimento** em um espaço topológico M é uma classe \mathcal{A} de caminhos admissíveis (\mathcal{A} é subconjunto dos caminhos contínuos em M) com uma aplicação (de comprimento de caminhos) $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

A classe \mathcal{A} ainda deve satisfazer as seguintes condições:

1. A classe \mathcal{A} é fechada para as restrições: se $\eta : [a, b] \rightarrow M$ é um caminho admissível e $a \leq c \leq d \leq b$, então a restrição $\eta|_{[c,d]}$ também é admissível.
2. A classe \mathcal{A} é fechada para concatenações de caminhos: se um caminho $\eta : [a, b] \rightarrow M$ é

tal que suas restrições em $[a, c]$ e $[c, b]$ são caminhos admissíveis, então η é admissível.

3. A classe \mathcal{A} é fechada para reparametrizações lineares: se $\eta : [a, b] \rightarrow M$ é um caminho admissível e $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo da forma $\phi(t) = \alpha t + \beta$, então a composição $\eta \circ \phi(t)$ é admissível.

A aplicação L também deve satisfazer as seguintes propriedades:

- 1'. L é aditivo: $L(\eta|_{[a,b]}) = L(\eta|_{[a,c]}) + L(\eta|_{[c,b]})$ para todo $c \in [a, b]$.
- 2'. Se $\eta : [a, b] \rightarrow M$ possui comprimento finito (isto é, $L(\eta) < \infty$) e $L(\eta, a, t)$ denota o comprimento da restrição de η ao segmento $[a, t]$, pedimos que $L(\eta, a, \cdot)$ seja uma função contínua. (Da propriedade anterior, $L(\eta, a, a) = 0$.)
- 3'. L é invariante por reparametrizações lineares (item 3 acima): $L(\eta \circ \phi) = L(\eta)$.
- 4'. A estrutura de comprimento (\mathcal{A}, L) é compatível com a topologia de M no seguinte sentido: se U_x é uma vizinhança de x , o comprimento dos caminhos ligando x a pontos do complementar de U_x é não nulo, ou seja, $\inf\{L(\eta); \eta(a) = x, \eta(b) \in M - U_x\} > 0$.

A partir de uma estrutura de comprimento (\mathcal{A}, L) em M , podemos definir uma métrica (função distância) em M associada a esta estrutura. Para tanto, assumimos que M é um espaço topológico de Hausdorff e, para cada $x, y \in M$, associamos a distância $d_L(x, y)$ como sendo o ínfimo dos comprimentos dos caminhos admissíveis ligando x e y , isto é,

$$d_L(x, y) = \inf\{L(\eta); \eta : [a, b] \rightarrow M, \eta \in \mathcal{A}, \eta(a) = x, \eta(b) = y\}. \quad (1.1)$$

O espaço (M, d_L) é um espaço métrico. Contudo, a métrica d_L não é necessariamente finita. Por exemplo, se M é uma união de duas componentes conexas, não existe caminho contínuo ligando uma componente a outra e, conseqüentemente, a distância entre pontos em diferentes componentes conexas é infinita. Além disso, podem existir pontos cujos caminhos contínuos que os conectam possuem comprimento infinito. Assim, dizemos que dois pontos $x, y \in M$ pertencem a mesma componente de acessibilidade se eles podem ser conectados por um caminho de comprimento finito.

Dentre as propriedades que podem ser verificadas em (M, d_L) destacamos: caminhos admissíveis de comprimento finito são contínuos com relação a (M, d_L) , a topologia determinada por d_L é mais fina do que a topologia inicial de M e (M, d_L) é localmente conexo por caminhos (veja [6], p. 28-29).

Definição 1.1 (Métrica intrínseca e Espaço métrico intrínseco). *Uma métrica que pode ser obtida como a função distância associada a uma estrutura de comprimento é chamada uma métrica intrínseca. Um espaço métrico cuja métrica é intrínseca é chamado de espaço métrico intrínseco.*

Nem toda métrica é uma métrica intrínseca. Mesmo se (M, d) é um espaço métrico intrínseco e $A \subset M$, a restrição $d|_A$ não é necessariamente intrínseca. Por exemplo, sejam $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e (\mathcal{A}, L) estrutura de comprimento em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, no qual \mathcal{A} é o conjunto dos caminhos contínuos e L a função comprimento de arco. É claro que $d_L = d_{\mathbb{R}^2}$ e, dados $x, y \in S^1$, é fácil ver que a distância entre x e y em S^1 é maior que a distância euclidiana entre eles.

Exemplo 1.2 (Estrutura de comprimento Finsler). *Seja M uma variedade diferenciável. Introduzimos aqui um tipo especial de estrutura de comprimento obtido a partir de uma função real contínua F de duas variáveis. Nesta estrutura, a expressão do comprimento de uma curva diferenciável por partes η em M é dada por*

$$L_F(\eta) = \int_a^b F(\eta(t), \eta'(t)) dt.$$

Afim de que a aplicação de comprimento L_F seja invariante por reparametrizações lineares, pedimos que F satisfaça $F(x, \lambda v) = |\lambda|F(x, v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in M$ e $v \in T_x M$. Além disso, para todo $x \in M$, exigimos que a aplicação $F(x, \cdot)$ seja uma norma. Nestas condições, a estrutura de comprimento induzida por F é chamada de Finsleriana (ou, simplesmente, Finsler), a aplicação F é chamada de métrica de Finsler e o par (M, F) chamado de variedade de Finsler. A função distância d_{L_F} associada a F , definida conforme (1.1), é uma métrica intrínseca.

Alguns dos principais exemplos de estrutura de comprimento são induzidos por métricas. Para tanto, precisamos de uma definição que nos permita medir o comprimento de curvas em espaços métricos quaisquer.

Definição 1.3. *Sejam (M, d) um espaço métrico e η um caminho em M . Consideramos uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$, isto é, uma coleção finita de pontos $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \dots, p_N\}$ tal que $a = p_0 < p_1 < \dots < p_N = b$. O supremo das somas*

$$\sum(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^N d(\eta(p_{i-1}), \eta(p_i)),$$

sobre todas as partições \mathcal{P} é chamado de comprimento de η com respeito a métrica d e denotado por $L_d(\eta)$. Uma curva é dita retificável se seu comprimento é finito.

Deste modo, a estrutura de comprimento induzida pela métrica d é definida como segue: todos os caminhos contínuos (parametrizados por intervalos fechados) são admissíveis e o comprimento é dado pela função L_d . Todas as propriedades de estrutura de comprimento valem para esta estrutura e L_d também é semicontínuo, isto é, dada uma sequência de caminhos retificáveis $\eta_i(t)$ (com mesmos domínios) que converge, quando i tende ao infinito, para um caminho $\eta(t)$ para todo t no domínio, temos $\liminf L_d(\eta_i) \geq L_d(\eta)$ (veja [6], p. 35).

A estrutura de comprimento induzida pela métrica d dá origem a uma métrica intrínseca (sobre cada componente de acessibilidade por caminhos retificáveis). Assim, estabelecemos uma construção de métricas intrínsecas induzidas, a saber: do espaço métrico (M, d) , obtemos uma estrutura de comprimento (\mathcal{A}, L_d) e, a partir desta estrutura, uma métrica intrínseca $\hat{d} = d_{L_d}$ em M conforme em (1.1). Dentre as propriedades de uma métrica intrínseca, observamos que se η é uma curva retificável em (M, d) , então $L_{\hat{d}}(\eta) = L_d(\eta)$, ou seja, a métrica intrínseca induzida por \hat{d} coincide com \hat{d} . Além disso, se (X, d) for um espaço métrico intrínseco, então $\hat{d} = d$ (veja [6], p. 37-38).

Seja $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ uma partição de um intervalo $[a, b]$. Então, denotamos a norma de \mathcal{P} por $|\mathcal{P}|$, no qual $|\mathcal{P}| = \max_{i=1, \dots, N} |t_i - t_{i-1}|$. O seguinte resultado é clássico e pode ser encontrado em ([6], p. 34).

Proposição 1.4. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $\eta : [a, b] \rightarrow M$ uma curva retificável. Fixado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se uma partição $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_{\mathcal{P}}} = b\}$ satisfaz $|\mathcal{P}| < \delta$, então*

$$L_d(\eta) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} d(\eta(t_{i-1}), \eta(t_i)) < \varepsilon.$$

Exemplo 1.5. *Seja a esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = 1\}$. A métrica ângular sobre S^n é definida por $d_{S^n}(x, y) = \arccos \langle x, y \rangle$, ou seja, é igual ao comprimento do menor arco de uma circunferência maximal ligando x e y . A métrica intrínseca induzida pela métrica euclidiana em S^n é a métrica angular. De fato, o arco da circunferência maximal que liga dois pontos $x, y \in S^n$ é aproximado por segmentos de retas cuja somatória dos comprimentos, no limite, tende ao comprimento do arco.*

Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que uma curva $\eta : [a, b] \rightarrow M$ está parametrizada por comprimento de arco se $L_d(\eta, t, t') = t - t'$ para todo $t, t' \in [a, b]$. Curvas retificáveis sempre admitem parametrização por comprimento de arco. Mais precisamente, toda curva retificável $\eta : [a, b] \rightarrow M$ pode ser representada na forma $\eta = \bar{\eta} \circ \phi$, onde $\bar{\eta} : [0, L_d(\eta)] \rightarrow M$ é uma parametrização por comprimento de arco e $\phi : [a, b] \rightarrow [0, L_d(\eta)]$ é uma aplicação contínua não decrescente (veja [6], p. 46).

Definição 1.6. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $\eta : I \rightarrow M$ uma curva. A velocidade de η em $t \in I$ é definida por*

$$v_\eta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(\eta(t), \eta(t + \varepsilon))}{|\varepsilon|},$$

se o limite existir.

Existe uma classe especial de curvas onde o limite acima existe a menos de um conjunto de medida nula, a saber: as curvas Lipschitz, isto é, as curvas $\eta : [a, b] \rightarrow M$ tal que $d(\eta(t), \eta(t')) \leq C|t - t'|$ para todo $t, t' \in [a, b]$, onde C é uma constante positiva. A demonstração deste resultado é feita em ([6], p. 57) e o enunciado apresentamos a seguir.

Teorema 1.7. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $\eta : [a, b] \rightarrow M$ uma curva Lipschitz. Então, a velocidade $v_\eta(t)$ existe para quase todo $t \in [a, b]$ e*

$$L_d(\eta) = \int_a^b v_\eta(t) dt,$$

onde \int é a integral de Lebesgue.

Observamos que toda curva Lipschitz é retificável e toda curva retificável admite uma parametrização por comprimento de arco.

1.2 Ações de um grupo; espaços homogêneos

Nesta seção apresentamos alguns conceitos básicos sobre ações de grupos e espaços homogêneos. Maiores detalhes podem ser vistos nas referências [2], [9], [10], [13] e [16].

Seja (G, \cdot) um grupo. Denotamos por e o elemento neutro de G e a operação $g \cdot h$ por gh para todo $g, h \in G$. A aplicação $L_g(h) = gh$, para todo $h \in G$, denota a translação à esquerda por g em G . Dado um conjunto M , uma ação à esquerda de G em M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ tal que $\varphi(e, x) = x$ e $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$ para todo $g, h \in G$ e para todo $x \in M$. Denotamos o elemento $\varphi(g, x)$ por gx e, fixado $g \in G$, a aplicação $\varphi_g : M \rightarrow M$, $\varphi_g(x) = gx$, é uma bijeção. Uma ação de G em M é dita transitiva se, dados $x, y \in M$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Além disso, dado $x \in M$, $G_x = \{g \in G; gx = x\}$ em G é o subgrupo de isotropia de x e $G \cdot x = \{gx; g \in G\}$ em M é a órbita de x .

Se H é um subgrupo do grupo G , o espaço quociente G/H é o conjunto $\{gH; g \in G\}$ de todas as classes laterais à esquerda de H em G e a aplicação projeção $\pi : G \rightarrow G/H$ leva cada $g \in G$ na classe lateral $gH \in G/H$. A ação natural de G em G/H , isto é, $\tau : G \times G/H \rightarrow G/H$, $\tau(a, gH) = agH$, é uma ação transitiva e, para cada $a \in G$, a translação à esquerda $\tau_a : G/H \rightarrow G/H$, $\tau_a(gH) = agH$, satisfaz $\pi \circ L_a = \tau_a \circ \pi$ e $\tau_{ab} = \tau_a \circ \tau_b$ para todo $a, b \in G$. Se a ação de G em M é transitiva, fixado $x \in M$, a aplicação que leva cada $gG_x \in G/G_x$ em $gx \in M$ é uma bijeção entre G/G_x e $G \cdot x = M$.

Se (M, d_M) é um espaço métrico, dizemos que a ação de G em M é uma ação por isometrias (ou ainda que a métrica d_M em M é G -invariante) se $d_M(gx, gy) = d_M(x, y)$ para todo $g \in G$ e $x, y \in M$. Se G é um grupo topológico, M um espaço topológico e a ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ é contínua, então as aplicações φ_g e $\varphi_x : G \rightarrow M$, $\varphi_x(g) = gx$, são contínuas para todo $g \in G$ e $x \in M$. Além disso, se G é um grupo de Lie, M uma variedade diferenciável e a ação φ é diferenciável, φ_g e φ_x são diferenciáveis para todo $g \in G$ e $x \in M$.

Sejam G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G . Então, existe uma única estrutura diferenciável no espaço quociente G/H tal que a projeção $\pi : G \rightarrow G/H$ é uma submersão (isto é, π é diferenciável e $d\pi_g$ é sobrejetiva para todo $g \in G$). A variedade diferenciável G/H construída desta maneira é chamada de variedade quociente. Neste caso, temos que $\dim G/H = \dim G - \dim H$, a ação natural de G em G/H é diferenciável e

a translação à esquerda τ_a é um difeomorfismo para cada $a \in G$. Em particular, se G age transitivamente em uma variedade diferenciável M , fixado $x \in X$, G_x é um subgrupo fechado de G e a aplicação que leva cada $gG_x \in G/G_x$ em $gx \in G \cdot x = M$ é um difeomorfismo.

Definição 1.8 (Espaço homogêneo; espaço homogêneo Riemanniano). *Um espaço homogêneo é uma variedade diferenciável M com uma ação transitiva de um grupo de Lie. Por sua vez, um espaço homogêneo Riemanniano é uma variedade Riemanniana M cujo grupo de isometrias $I(M)$ de M age transitivamente.*

Equivalentemente, um espaço homogêneo é difeomorfo a uma variedade da forma G/H , onde G é um grupo de Lie e H é um subgrupo fechado de G . Em particular, um espaço homogêneo Riemanniano M é difeomorfo a um espaço homogêneo G/H com $G = I(M)$. Entretanto, podem existir mais de um grupo de Lie agindo transitivamente em um dado espaço homogêneo Riemanniano M e, conseqüentemente, M pode aparecer como espaço homogêneo G/H sob diferentes grupos de Lie. Neste sentido é que surge a noção de métricas Riemannianas G -invariantes.

Definição 1.9. *Seja $M = G/H$ um espaço homogêneo. Uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ em M é chamada G -invariante se, para cada $a \in G$, a translação à esquerda (difeomorfismo) $\tau_a : G/H \rightarrow G/H$, que leva gH em agH , é uma isometria, ou seja,*

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle d\tau_a(X), d\tau_a(Y) \rangle_M \quad \text{para todo } X, Y \in T_{eH}G/H.$$

Qualquer aplicação que preserva distâncias (isto é, uma isometria de espaços métricos) entre duas variedades Riemannianas conexas é uma isometria (diferenciável) de variedades Riemannianas (veja [12], p. 404). Deste modo, dizer que uma variedade Riemanniana conexa M é um espaço homogêneo cuja métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ é G -invariante é equivalente a dizermos que existem um grupo de Lie G e uma ação transitiva $\varphi : G \times M \rightarrow M$ tais que a função distância d_M associada a métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ em M é G -invariante.

Diferentes métricas em um mesmo espaço topológico podem dar origem a uma mesma métrica intrínseca. A seguir apresentamos um critério para que isso aconteça com relação a métricas G -invariantes de um espaço homogêneo.

Proposição 1.10. *Sejam $M = G/H$ um espaço homogêneo e ρ_1, ρ_2 métricas em M G -invariantes. Se $\rho_1(H, gH) = \rho_2(H, gH)$ para g suficientemente próximo de $e \in G$, então as métricas intrínsecas $\widehat{\rho}_1$ e $\widehat{\rho}_2$ coincidem.*

Observação: *A expressão “ $\rho_1(H, gH) = \rho_2(H, gH)$ para g suficientemente próximo de $e \in G$ ” significa que esta igualdade ocorre para todo $g \in \exp(V)$, onde $V \subset \mathfrak{g}$ é uma vizinhança suficientemente pequena de 0 e $\exp|_V : V \rightarrow \exp(V)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração: Por hipótese, $\rho_1(H, gH) = \rho_2(H, gH)$ para todo $g \in \exp(V)$. Seja então uma vizinhança $\tilde{V} \subset V$ contendo 0 tal que $\exp(\tilde{V})\exp(\tilde{V}) \subset \exp(V)$ e, se $g \in \exp(\tilde{V})$, $g^{-1} \in \exp(\tilde{V})$. Logo, dados $g, h \in \exp(\tilde{V})$, temos $g^{-1}h \in \exp(V)$ e $\rho_1(gH, hH) = \rho_2(gH, hH)$. Agora, sejam $\pi : G \rightarrow G/H$ a projeção natural e $\sigma : [a, b] \rightarrow G/H$ caminho (contínuo) em $(G/H, \rho_1)$. Mostraremos que $L_{\rho_1}(\sigma) = L_{\rho_2}(\sigma)$. De fato, notemos que para cada $t \in [a, b]$ existem $g_t \in G$, com $g_t(\sigma(t)) = H$, e uma vizinhança aberta U_t de $[a, b]$ contendo t tal que $g_t\sigma(U_t) \subset \pi(\exp(\tilde{V}))$. A união dos U_t forma uma cobertura aberta para o compacto $[a, b]$. Sejam $\delta > 0$ um número de Lebesgue desta cobertura e $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ partição de $[a, b]$ satisfazendo $|\mathcal{P}| < \delta$. Logo, fixado $i \in \{1, \dots, N\}$, temos $[t_{i-1}, t_i] \subset U_{\tilde{t}_i}$ para algum $\tilde{t}_i \in [a, b]$ com $g_{\tilde{t}_i}\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset \pi(\exp(\tilde{V}))$. Com isso, escrevemos $g_{\tilde{t}_i}\sigma(t_{i-1}) = g_{i-1}H$ e $g_{\tilde{t}_i}\sigma(t_i) = g_iH$ com $g_{i-1}, g_i \in \exp(\tilde{V})$. Portanto,

$$\begin{aligned} L_{\rho_1}(\sigma) &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^N \rho_1(\sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i)) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^N \rho_1(g_{\tilde{t}_i}\sigma(t_{i-1}), g_{\tilde{t}_i}\sigma(t_i)) \\ &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^N \rho_1(g_{i-1}H, g_iH) \\ &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^N \rho_2(g_{i-1}H, g_iH) = L_{\rho_2}(\sigma). \end{aligned}$$

□

Observamos que podemos ter métricas G -invariantes ρ_1 e ρ_2 em um mesmo espaço topológico com $\rho_1 \neq \rho_2$ e cujas métricas intrínsecas $\widehat{\rho}_1$ e $\widehat{\rho}_2$ coincidem. Como exemplo, sejam a ação transitiva $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = x + y$, e as métricas \mathbb{R} -invariantes em \mathbb{R} dadas por $\rho_1(x, y) = |x - y|$ e $\rho_2(x, y) = \min\{\rho_1(x, y), 1\}$. Então, $\rho_1(-1, 1) \neq \rho_2(-1, 1)$ e $\rho_1(0, x) = \rho_2(0, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$.

Capítulo 2

Introdução às métricas de Hausdorff induzidas em espaços homogêneos

Iniciamos agora o estudo das métricas de Hausdorff induzidas em espaços quocientes. Dados uma ação à esquerda de um grupo G em um espaço métrico conexo M e um compacto $X \subset M$, apresentamos a definição da métrica de Hausdorff induzida no espaço quociente G/H_X . Sob certas condições, destacamos alguns resultados métricos e topológicos referentes à esta métrica e sua correspondente métrica intrínseca. Exemplos também são apresentados.

2.1 Definições; primeiros exemplos

Seja uma ação à esquerda de um grupo G em um espaço métrico conexo M . Fixado $X \subset M$ compacto, estamos primeiramente interessados na pseudométrica em G construída a partir da distância de Hausdorff entre os conjuntos gX , $g \in G$.

Uma pseudométrica nada mais é do que uma aplicação $\bar{\rho}$ que a cada par de elementos x, y de um conjunto associa um valor real $\bar{\rho}(x, y)$, cumprindo as condições de uma métrica, salvo que podemos ter $\bar{\rho}(x, y) = 0$ com $x \neq y$. De um espaço munido com uma pseudométrica obtemos um espaço métrico mediante a identificação dos pontos x, y com $\bar{\rho}(x, y) = 0$. Este processo define uma relação de equivalência cujas classes são $[x] = \{y; \bar{\rho}(x, y) = 0\}$ com $[x] = [y]$ se, e só se, $\bar{\rho}(x, y) = 0$. O conjunto de todas as classes de equivalência munido da

aplicação $\rho([x], [y]) = \bar{\rho}(x, y)$ é um espaço métrico (veja que se $[x] = [u]$ e $[y] = [v]$, então $\bar{\rho}(x, y) = \bar{\rho}(u, v)$ e, portanto, ρ está bem definida).

Agora, fixado um conjunto $X \subset M$, a r -vizinhança aberta de X é dada por $B(X, r) = \{y \in M; d(y, X) < r\}$. A partir disso, dados X e Y conjuntos do espaço métrico (M, d) , definimos a distância de Hausdorff por

$$d_H(X, Y) = \inf \{r > 0; X \subset B(Y, r) \text{ e } Y \subset B(X, r)\}$$

ou, equivalentemente,

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(X, y) \right\}.$$

Dados M e N espaços métricos, podemos utilizar a notação $d_{H,M}$ para indicar a distância de Hausdorff calculada entre conjuntos de M e $d_{H,N}$ quando calculada entre conjuntos de N .

Dentre as propriedades da distância de Hausdorff d_H destacamos: d_H é uma pseudo-métrica em 2^M (o conjunto de todos os conjuntos de M). Se \bar{X} denota o fecho de X , $d_H(X, \bar{X}) = 0$. Se X, Y são fechados com $d_H(X, Y) = 0$, temos $X = Y$ (veja [6], p. 252). Mostraremos ainda outra propriedade importante, a saber: a distância de Hausdorff entre quaisquer conjuntos X e Y de um espaço métrico (M, d) é igual a distância de Hausdorff entre os fechos de X e Y , isto é, $d_H(X, Y) = d_H(\bar{X}, \bar{Y})$. Para tanto, basta verificarmos

$$\sup_{x \in X} d(x, Y) = \sup_{x \in \bar{X}} d(x, \bar{Y}). \quad (2.1)$$

De fato, como $X \subset \bar{X}$ e $d(x, Y) = d(x, \bar{Y})$ para todo $x \in X$, temos

$$\sup_{x \in X} d(x, Y) \leq \sup_{x \in \bar{X}} d(x, Y) = \sup_{x \in \bar{X}} d(x, \bar{Y}).$$

Fixado $\varepsilon > 0$, para cada $a \in \bar{X}$, encontramos $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$ (se $a \in X$, $x = a$). Desde que $|d(a, Y) - d(x, Y)| \leq d(a, x)$, temos $d(a, Y) < d(x, Y) + \varepsilon$ e, portanto,

$$\sup_{a \in \bar{X}} d(a, Y) \leq \sup_{x \in X} \{d(x, Y) + \varepsilon\} = \varepsilon + \sup_{x \in X} d(x, Y).$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, segue a igualdade em (2.1).

Sejam G um grupo, (M, d_M) um espaço métrico conexo e $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação à esquerda por homeomorfismos. Fixado qualquer conjunto compacto X em M , definimos

$$\bar{d}_X : G \times G \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{d}_X(g_1, g_2) = d_H(g_1 X, g_2 X),$$

onde d_H é a distância de Hausdorff calculada entre os compactos g_1X e g_2X . Desde que d_H é uma pseudométrica em 2^M , a aplicação \bar{d}_X é uma pseudométrica em G e, a partir do subgrupo de isotropia de X (isto é, o subgrupo $H_X = \{g \in G; gX = X\}$), \bar{d}_X define uma métrica d_X em G/H_X , a saber

$$d_X : G/H_X \times G/H_X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_X(g_1H_X, g_2H_X) = \bar{d}_X(g_1, g_2)$$

(se $H_X = \{e\}$, $\bar{d}_X = d_X$). No espaço métrico $(G/H_X, d_X)$ determinamos uma estrutura de comprimento induzida por d_X e, com esta estrutura, uma métrica intrínseca \widehat{d}_X . Dizemos que d_X é a métrica de Hausdorff induzida em G/H_X e que \widehat{d}_X é a métrica de Hausdorff intrínseca induzida em G/H_X . Se a ação de G em M é uma ação por isometrias, a distância de Hausdorff é G -invariante, isto é, $d_H(aY, aZ) = d_H(Y, Z)$ para todo $a \in G$ e Y, Z conjuntos em M , o mesmo valendo para as métricas de Hausdorff induzidas d_X e \widehat{d}_X .

Observamos que se G é um grupo topológico e a ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ é contínua, o subgrupo de isotropia de X é um subgrupo fechado em G . De fato, dado $g \in G$ com $g \notin H_X$, existe $x \in X$ tal que $gx \notin X$. Logo, existe uma vizinhança V_{gx} de gx em M tal que $V_{gx} \cap X = \emptyset$. Com isso, $\varphi_x^{-1}(V_{gx})$ é um aberto em G contendo g e, se $h \in \varphi_x^{-1}(V_{gx})$, $hx \notin X$. Ou seja, $g \in \varphi_x^{-1}(V_{gx}) \subset G - H_X$ e, portanto, H_X é fechado em G . Deste modo, se G for um grupo de Lie, a variedade quociente G/H_X é um espaço homogêneo (veja Definição 1.8). No que segue, se G é um grupo de Lie, M uma variedade diferenciável e $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação, assumiremos também que a ação é diferenciável.

A partir de agora, nosso objetivo consiste em fazer um estudo das métricas d_X e \widehat{d}_X em G/H_X . Este estudo, por seu caráter inicial, inclui, além da apresentação de exemplos e algumas propriedades gerais, estabelecer, quando possível, relações entre elas e a métrica original d_M em M . Outra possibilidade é entender de que forma a escolha do compacto X influencia em suas determinações.

Exemplo 2.1. *Seja G um grupo que age transitivamente em (M, d_M) um espaço métrico conexo. Se $X = \{p\}$ em M , a pseudométrica \bar{d}_X em G é dada por $\bar{d}_X(g_1, g_2) = d_M(g_1p, g_2p)$. Como H_X coincide com o subgrupo de isotropia de p e a ação é transitiva, estabelecemos uma bijeção entre G/H_X e M que leva cada elemento $gH_X \in G/H_X$ em $gp \in M$. Além disso,*

$$d_X(g_1H_X, g_2H_X) = \bar{d}_X(g_1, g_2) = d_M(g_1p, g_2p).$$

Portanto, $(G/H_X, d_X)$ é isométrico a (M, d_M) . Por outro lado, se X for o próprio espaço métrico M , $\bar{d}_X(g_1, g_2) = d_H(g_1M, g_2M) = 0$ e d_X é a métrica nula em $G/H_X = \{e\}$.

Exemplo 2.2. Seja a ação $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(y, x) = y + x$. Então, φ é uma ação à esquerda, diferenciável, transitiva e por isometrias. Fixado $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto qualquer, mostraremos que (\mathbb{R}^n, d_X) é isométrico a \mathbb{R}^n com métrica usual $d_{\mathbb{R}^n}$. Com efeito, o subgrupo de isotropia de X é o trivial e a métrica $d_{\mathbb{R}^n}$ é \mathbb{R}^n -invariante. Fixemos $y \in \mathbb{R}^n$. A menos de isometria, consideramos $0 = (0, \dots, 0) \in X$ e escrevemos $y = (0, \dots, y_n)$. Então, y é um vetor normal ao hiperplano $P = \{(y_1, \dots, y_{n-1}, 0); y_i \in \mathbb{R}\}$ e, para cada $z \in \mathbb{R}$, a reta suporte de y (isto é, a reta determinada pelos pontos 0 e y) é normal ao hiperplano $P_z = \{(y_1, \dots, y_{n-1}, z); y_i \in \mathbb{R}\}$. Desde que X é limitado, existe $z_n \in \mathbb{R}$ tal que $P_{z_n} \cap X \neq \emptyset$ e $z_n \leq x_n$ para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$. Em outras palavras, X está acima do hiperplano P_{z_n} (veja Figura 2.1). Consequentemente, também temos $y_n + z_n \leq y_n + x_n$ e, portanto, $y + X$ está acima de $P_{y_n + z_n}$. Logo, se $\tilde{x} \in P_{z_n} \cap X$,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(\tilde{x}, y + X) &\geq d_{\mathbb{R}^n}(\tilde{x}, P_{y_n + z_n}) \\ &= d_{\mathbb{R}^n}((\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, z_n), (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, y_n + z_n)) = \|y\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Além disso, para todo $x \in X$, temos $d_{\mathbb{R}^n}(x, y + X) \leq d_{\mathbb{R}^n}(x, y + x) = \|y\|_{\mathbb{R}^n}$. Com isso, $\sup_{x \in X} d_{\mathbb{R}^n}(x, y + X) = \|y\|_{\mathbb{R}^n}$. Analogamente, $\sup_{x \in X} d_{\mathbb{R}^n}(X, y + x) = \|y\|_{\mathbb{R}^n}$. Portanto, $\bar{d}_X(0, y) = d_H(X, y + X) = \|y\|_{\mathbb{R}^n} = d_{\mathbb{R}^n}(0, y)$.

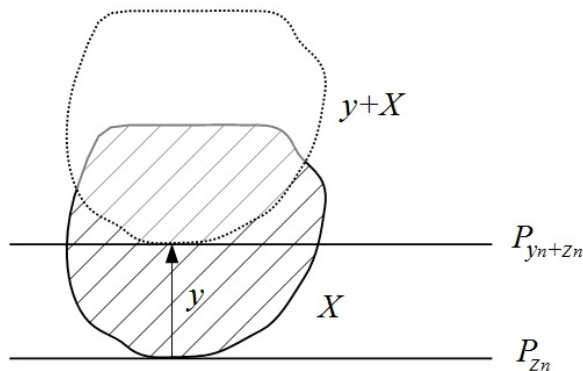


Figura 2.1: Compactos X , $y + X$ e hiperplanos P_{z_n} , $P_{y_n + z_n}$.

A seguir apresentamos exemplos a partir de rotações em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, isto é, da ação à esquerda, diferenciável e transitiva do grupo de Lie $SO(3)$ em S^2 . O grupo de rotações $SO(3)$ é um subgrupo do grupo de isometrias $I(S^2) = O(3)$ de S^2 e o termo “rotações” se refere à rotações em torno de eixos que passam pela origem. Mais precisamente, para cada $g \in SO(3)$, $g \neq e$, está associado um eixo que passa pela origem e um ângulo de rotação em torno deste eixo. Com relação aos subgrupos de $SO(3)$, a menos de conjugação, os únicos subgrupos fechados próprios e não discretos de $SO(3)$ são $SO(2)$ e $O(2)$ (veja [1], p. 955).

Exemplo 2.3. *Seja o compacto $X = \{N, S\}$ em S^2 , onde $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$. O subgrupo de isotropia de X pela ação de $SO(3)$ em S^2 é o gerado pelas rotações em torno do eixo que contém X e a aplicação de rotação em torno do eixo y que leva N em S . Logo, identificamos $SO(3)/H_X = SO(3)/O(2) = P^2$, onde P^2 é o plano projetivo real. Para $g \in SO(3)$ suficientemente próximo de $e \in SO(3)$, temos*

$$d_{S^2}(N, gX) = d_{S^2}(N, gN) = d_{S^2}(gN, X) \text{ e } d_{S^2}(S, gX) = d_{S^2}(S, gS) = d_{S^2}(gS, X).$$

Além disso, $d_{S^2}(N, gN) = d_{S^2}(S, gS)$ e, conseqüentemente,

$$d_X(H_X, gH_X) = d_H(X, gX) = d_{S^2}(N, gN).$$

Deste modo, $(SO(3)/H_X, \widehat{d}_X)$ é isométrico a (P^2, d_{P^2}) , onde d_{P^2} é a métrica induzida pela projeção $\pi : S^2 \rightarrow P^2$. Neste caso, observamos que $d_X = \widehat{d}_X$, uma vez que $d_H(X, gX) = d_{P^2}(\pi(N), g\pi(N))$ para todo $g \in SO(3)$.

Exemplo 2.4. *Em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, sejam a circunferência maximal C_z obtida na interseção de S^2 com o plano xy e o conjunto compacto $X = \{(p_1, p_2, p_3) \in S^2; 0 \leq p_3 \leq 1\}$, isto é, X é a calota superior de S^2 com fronteira C_z . O subgrupo de isotropia de X é o gerado pelas rotações em torno do eixo z e, conseqüentemente,*

$$SO(3)/H_X = SO(3)/SO(2) = S^2.$$

Sejam $g \in SO(3)$ suficientemente próximo de $e \in SO(3)$, com $N \neq gN$, e o plano P que contém os pontos $\{(0, 0, 0), N, gN\}$. Consideramos então a rotação $g_1 \in SO(3)$, com $g_1N = gN$, tal que o eixo de rotação de g_1 está contido no plano xy e é ortogonal a P .

Então, $g^{-1}g_1 \in H_X$ e $d_H(X, gX) = d_H(X, g_1X)$. Agora, a interseção $P \cap S^2$ é um meridiano de S^2 e, para todo $x \in S^2$,

$$d_{S^2}(x, g_1x) \leq d_{S^2}(N, g_1N) = d_{S^2}(N, gN).$$

A interseção $P \cap C_z$ contém dois elementos antípodos x_a e x_b tais que $x_a \notin g_1X$, $x_b \in g_1X$, $g_1x_a \in X$ e $g_1x_b \notin X$. Assim, $d_{S^2}(x_a, g_1X) = d_{S^2}(X, g_1x_b)$ e $d_{S^2}(x_b, g_1X) = 0 = d_{S^2}(X, g_1x_a)$. Mas, como $x_a \in P \cap S^2$, $d_{S^2}(x_a, g_1X) = d_{S^2}(x_a, g_1x_a) = d_{S^2}(N, g_1N)$. Além disso, para qualquer $x \in X$, $\max\{d_{S^2}(x, g_1X), d_{S^2}(X, g_1x)\} \leq d_{S^2}(x, g_1x) \leq d_{S^2}(N, g_1N)$. Logo,

$$\sup_{x \in X} d_{S^2}(x, g_1X) = d_{S^2}(N, gN) = \sup_{x \in X} d_{S^2}(X, g_1x),$$

ou seja, $d_H(X, gX) = d_{S^2}(N, gN)$. Deste modo, $(SO(3)/H_X, \widehat{d}_X)$ é isométrico a (S^2, d_{S^2}) . Neste caso, observamos que $d_X \neq \widehat{d}_X$, uma vez que $d_H(X, gX) \leq \pi/2$ para todo $g \in G$ e existe $\tilde{g} \in G$ tal que $d_{S^2}(H_X, \tilde{g}H_X) = \pi$.

Dependendo da escolha do compacto X em S^2 , para pequenos deslocamentos gX com $g \in SO(3)$, a distância de Hausdorff entre eles coincide com a distância entre pontos em S^2 . Esta é a ideia da proposição a seguir.

Proposição 2.5. *Sejam a ação transitiva e por isometrias $\varphi : SO(3) \times S^2 \rightarrow S^2$ dada por $\varphi(g, x) = gx$ e $X \neq S^2$ conjunto compacto em S^2 . As afirmações abaixo são equivalentes:*

- (i) $SO(3)/H_X = S^2$ ou $SO(3)/H_X = P^2$;
- (ii) Existe $p \in S^2$ tal que $SO(3)_p \subset H_X$;
- (iii) Existe $p \in S^2$ tal que $d_H(X, gX) = d_{S^2}(p, gp)$ para g suficientemente próximo da matriz identidade $e \in SO(3)$.

Demonstração: Mostraremos primeiro que (i) é equivalente a (ii). De fato, suponhamos que $SO(3)/H_X = S^2$ ou $SO(3)/H_X = P^2$. Para D subgrupo discreto e finito de $SO(3)$, temos $\dim SO(3)/D = 3$ e, conseqüentemente, $H_X \neq D$. Os demais subgrupos de $SO(3)$ são conjugados a $SO(2)$ ou $O(2)$ e, portanto, a menos de conjugação, $H_X = SO(2)$ ou $H_X = O(2)$. Logo, é imediato que existe $p \in S^2$ tal que $SO(3)_p \subset H_X$. Por outro lado,

supondo que existe $p \in S^2$ tal que $SO(3)_p \subset H_X$, então novamente, a menos de conjugação, $H_X = SO(2)$ ou $H_X = O(2)$, donde concluimos o desejado.

Agora, mostraremos que **(ii)** é equivalente a **(iii)**. Suponhamos primeiro que **(iii)** seja válido, ou seja, que existe $p \in S^2$ satisfazendo $d_H(X, gX) = d_{S^2}(p, gp)$ para todo g suficientemente próximo de e . Então, dado $g \in SO(3)_p$, temos $d_H(X, gX) = d_{S^2}(p, gp) = 0$. Logo, sendo X fechado, segue que $X = gX$ e, portanto, $g \in H_X$.

Suponhamos que **(ii)** é válido e, sem perda de generalidade, que $p = N = (0, 0, 1) \in S^2$. Desde que $X \neq S^2$, existem $\varepsilon > 0$ e $\tilde{z} \in S^2$ tais que para todo ponto $y \in S^2$, com y no mesmo meridiano de \tilde{z} satisfazendo $d_{S^2}(\tilde{z}, y) < \varepsilon$, vale $SO(3)_N \cdot y \cap X = \emptyset$ (isto é, os paralelos que passam pelos pontos y não interceptam X). Agora, fixado $g \in SO(3)$, com $g \notin H_X$ e $d_{S^2}(N, gN) < \varepsilon$, consideramos o plano P que contém os pontos $\{(0, 0, 0), N, gN\}$ e a rotação $g_1 \in SO(3)$ com $g_1N = gN$ e eixo de rotação ortogonal a P . A interseção $C := P \cap S^2$ é um meridiano ortogonal aos paralelos $SO(3)_N \cdot x \subset X$, $x \in X$. Logo, existe um ponto $z \in C$ tal que se $y \in C$ e $d_{S^2}(z, y) < \varepsilon$, então y não pertence a X . Identificamos C com a circunferência unitária no plano yz e consideramos

$$y_3^a = \max\{y_3; y = (0, y_2, y_3) \in X \cap C, y_3 \leq z_3\};$$

$$y_3^b = \min\{y_3; y = (0, y_2, y_3) \in X \cap C, y_3 \geq z_3\}.$$

Notemos que pelo menos um dos números acima existe. Suponhamos sem perda de generalidade que y_3^a existe. Então, sejam os pontos $y^a = (0, y_2^a, y_3^a)$ e $\tilde{y}^a = (0, -y_2^a, y_3^a)$. Deste modo, denotando $z = (0, z_2, z_3)$ e $g_1z = (0, (g_1z)_2, (g_1z)_3)$, se $(g_1z)_3 > z_3$, escolhamos $q = y^a$ e, se $(g_1z)_3 < z_3$, escolhamos $q = \tilde{y}^a$. Em qualquer caso, $g_1q \notin X$ e $d_{S^2}(X, g_1q) = d_{S^2}(q, g_1q) = d_{S^2}(N, g_1N)$. \square

2.2 Propriedades métricas e topológicas de d_X e \widehat{d}_X

Apresentamos aqui algumas propriedades referentes às métricas de Hausdorff induzidas. Em particular, dada uma ação à esquerda diferenciável de um grupo de Lie G em uma variedade de Finsler conexa M , com $X \subset M$ compacto, estabelecemos uma comparação

entre a topologia quociente em G/H_X , induzida pela projeção $\pi : G \rightarrow G/H_X$, e as topologias correspondentes às métricas d_X e \widehat{d}_X .

Proposição 2.6. *Sejam $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação contínua de um grupo topológico G sobre um espaço métrico (M, d) e $X \subset M$ um subconjunto compacto. Então, a métrica de Hausdorff induzida $d_X : G/H_X \times G/H_X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua com respeito a topologia quociente em G/H_X .*

Demonstração: Mostraremos primeiro que a pseudométrica $\bar{d} : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Fixamos $(g_1, g_2) \in G \times G$ e $\varepsilon > 0$. Existe uma vizinhança $V \times W$ de (g_1, g_2) tal que se $(h_1, h_2) \in V \times W$, então $|\bar{d}(h_1, h_2) - \bar{d}(g_1, g_2)| < \varepsilon$. Para uma prova, seja a aplicação contínua $f : G \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(g, x) = d(gx, g_1x)$. A imagem inversa de $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ é uma vizinhança de $\{g_1\} \times X$. Então, pelo lema do tubo, existe uma vizinhança V de g_1 tal que $V \times X \subset f^{-1}(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$. Da mesma forma, existe uma vizinhança W de g_2 tal que se $h_2 \in W$, então $d(h_2x, g_2x) < \varepsilon/2$ para todo $x \in X$. Agora, se $(h_1, h_2) \in V \times W$, então

$$\begin{aligned} \bar{d}(h_1, h_2) &\leq \bar{d}(h_1, g_1) + \bar{d}(g_1, g_2) + \bar{d}(g_2, h_2) \\ &= d_H(h_1X, g_1X) + \bar{d}(g_1, g_2) + d_H(g_2X, h_2X) \\ &\leq \sup_{x \in X} d(h_1x, g_1x) + \bar{d}(g_1, g_2) + \sup_{x \in X} d(h_2x, g_2x) \leq \bar{d}(g_1, g_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Analogamente, $\bar{d}(g_1, g_2) \leq \bar{d}(h_1, h_2) + \varepsilon$. Logo, $|\bar{d}(h_1, h_2) - \bar{d}(g_1, g_2)| < \varepsilon$ se $(h_1, h_2) \in V \times W$, ou seja, \bar{d} é contínua. Por último, observamos que dados $(g_1H_X, g_2H_X) \in G/H_X \times G/H_X$ e $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $\pi(V) \times \pi(W)$ de (g_1H_X, g_2H_X) tal que se $(h_1H_X, h_2H_X) \in \pi(V) \times \pi(W)$, então $|d_X(h_1H_X, h_2H_X) - d_X(g_1H_X, g_2H_X)| < \varepsilon$. Portanto, d_X é contínua com respeito a topologia quociente em G/H_X . \square

Observação 2.7. *Se $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica e τ é uma topologia em M , então d é contínua em $(M, \tau) \times (M, \tau)$ se, e só se, τ é mais fina do que a topologia induzida por d (veja [11]). Na Proposição 2.6, d_X é contínua com respeito a topologia quociente de G/H_X . Logo, se $\gamma : [a, b] \rightarrow G/H_X$ é um caminho contínuo com relação a topologia quociente em G/H_X , então γ é um caminho contínuo no espaço métrico $(G/H_X, d_X)$.*

Nas condições da Proposição 2.6, temos que a métrica de Hausdorff intrínseca induzida

$\widehat{d}_X : G/H_X \times G/H_X \rightarrow \mathbb{R}$ não é necessariamente contínua com respeito a topologia quociente em G/H_X . Isso pode ser verificado no exemplo abaixo.

Exemplo 2.8. *Seja $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + \sqrt{|x_2 - y_2|}$. Então, não é difícil verificarmos que*

$$\widehat{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & \text{se } x_2 = y_2 \\ \infty & \text{se } x_2 \neq y_2. \end{cases}$$

Com isso, dados a ação natural de $G = \mathbb{R}^2$ em M por translação e $X = \{(0, 0)\}$, temos $H_X = \{(0, 0)\}$ e $(G/H_X, d_X)$ é isométrico ao espaço métrico (M, d) . Logo, $(G/H_X, \widehat{d}_X)$ é isométrico a (M, \widehat{d}) e \widehat{d}_X não é contínua com respeito a topologia quociente em G/H_X .

Lembramos que duas métricas d e ρ em um conjunto N são Lipschitz equivalentes se existem constantes $c, C > 0$ tais que $cd(x, y) \leq \rho(x, y) \leq Cd(x, y)$ para todo $x, y \in N$. Em termos locais, apresentamos a seguinte definição.

Definição 2.9. *Seja N um conjunto não vazio. Suponhamos que d e ρ são duas métricas que definem a mesma topologia em N . Dizemos então que d e ρ são localmente Lipschitz equivalentes se, para cada $p \in N$, existem uma vizinhança V_p de p em N e constantes $c_p, C_p > 0$ tais que $c_p d(x, y) \leq \rho(x, y) \leq C_p d(x, y)$ para todo $x, y \in V_p$.*

A partir disso, estabelecemos um importante resultado.

Proposição 2.10. *Sejam d e ρ métricas definidas em M tais que, para cada $p \in M$, existem constantes $c, C > 0$ e uma vizinhança V de $p \in (M, d)$ (ou uma vizinhança V de $p \in (M, \rho)$) satisfazendo $cd(x, y) \leq \rho(x, y) \leq Cd(x, y)$ para todo $x, y \in V$. Então, as métricas intrínsecas \widehat{d} e $\widehat{\rho}$ são localmente Lipschitz equivalentes.*

Demonstração: Para fixar ideias, suponhamos que existem constantes $c, C > 0$ e uma vizinhança V de $p \in (M, d)$ satisfazendo $cd(x, y) \leq \rho(x, y) \leq Cd(x, y)$ para todo $x, y \in V$. Então, existe $r_d > 0$ tal que $B_d(p, 2r_d) \subset V$ e observamos que $B_{\widehat{d}}(p, r_d) \subset B_d(p, r_d)$. Denotamos a topologia induzida pelas métricas intrínsecas \widehat{d} e $\widehat{\rho}$, respectivamente, por $\tau_{\widehat{d}}$ e $\tau_{\widehat{\rho}}$.

Primeiro, notemos que um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ é contínuo com respeito a métrica d se, e só se, γ é contínuo com respeito a métrica ρ . Deste modo, podemos simplesmente considerar um caminho contínuo $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ sem qualquer referência à métrica d ou ρ .

Para provar que $\tau_{\widehat{d}} \subset \tau_{\widehat{\rho}}$, é suficiente verificarmos que $B_{\widehat{\rho}}(p, cr) \subset B_{\widehat{d}}(p, r)$ para todo $r \leq r_d$. Observamos que se $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, d)$ é um caminho contínuo tal que $\gamma(a) = p$ e $L_d(\gamma) < 2r$, então $\gamma([a, b]) \subset V$. Da mesma forma, pela desigualdade

$$cd(x, y) \leq \rho(x, y) \text{ para todo } x, y \in V, \quad (2.2)$$

se $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, \rho)$ é um caminho contínuo tal que $L_\rho(\gamma) < 2cr$, então $\gamma([a, b]) \subset V$. Este fato implica que se $L_\rho(\gamma) < cr$, então $L_d(\gamma) < r$. Com isso, $B_{\widehat{\rho}}(p, cr) \subset B_{\widehat{d}}(p, r)$ e, portanto, $\tau_{\widehat{d}} \subset \tau_{\widehat{\rho}}$. Analogamente, utilizando a desigualdade $\rho(x, y) \leq Cd(x, y)$, temos que $B_{\widehat{d}}(p, cr/C) \subset B_{\widehat{\rho}}(p, cr)$ para todo $r \leq r_d$ e, portanto, $\tau_{\widehat{\rho}} = \tau_{\widehat{d}}$. O caso em que V é uma vizinhança de $p \in (M, \rho)$ é idêntico.

Agora, mostraremos que \widehat{d} e $\widehat{\rho}$ são localmente Lipschitz equivalentes. Sejam p, V e r_d como na primeira parte da prova. Se $x, y \in B_{\widehat{d}}(p, r_d/2)$, então $\widehat{d}(x, y) < r_d$ e

$$\widehat{d}(x, y) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{x,y}} L_d(\gamma) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{x,y}^V} L_d(\gamma),$$

onde $\mathcal{C}_{x,y}$ denota a família dos caminhos que ligam x, y e $\mathcal{C}_{x,y}^V$ denota a família dos caminhos em V que ligam x, y . Notemos que a última igualdade vale, pois o comprimento dos caminhos que saem de V é maior do que $3r_d/2$. Procedemos da mesma maneira com respeito a métrica ρ , isto é, existe $r_\rho > 0$ tal que $B_\rho(p, 2r_\rho) \subset V$. Então, para $x, y \in B_{\widehat{\rho}}(p, r_\rho/2)$, temos

$$\widehat{\rho}(x, y) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{x,y}} L_\rho(\gamma) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{x,y}^V} L_\rho(\gamma).$$

Por fim, provaremos que $W = B_{\widehat{d}}(p, r_d/2) \cap B_{\widehat{\rho}}(p, r_\rho/2)$ é uma vizinhança na qual \widehat{d} e $\widehat{\rho}$ são Lipschitz equivalentes. De fato, se $x, y \in W$, então

$$c\widehat{d}(x, y) = c \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{x,y}} L_d(\gamma) = c \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{x,y}^V} L_d(\gamma) \leq \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{x,y}^V} L_\rho(\gamma) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{x,y}} L_\rho(\gamma) = \widehat{\rho}(x, y),$$

onde a desigualdade acima decorre de (2.2). A desigualdade $\widehat{\rho}(x, y) \leq C\widehat{d}(x, y)$ para todo $x, y \in W$ segue analogamente. \square

Proposição 2.11. *Sejam G um grupo de Lie, (M, F) uma variedade de Finsler conexa e $X \subset M$ compacto. Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação à esquerda diferenciável de G em M . Então, cada curva diferenciável $\eta : [a, b] \rightarrow (G/H_X, d_X)$ (e $\eta : [a, b] \rightarrow (G/H_X, \widehat{d}_X)$) é Lipschitz. Em particular, η é retificável.*

Demonstração: Sejam $\dim G = n$ e $\dim G/H_X = k$. Mostraremos primeiro que para cada curva diferenciável $\eta : [a, b] \rightarrow G/H_X$, existe uma curva diferenciável $\tilde{\eta} : [a, b] \rightarrow G$ tal que $\eta = \pi \circ \tilde{\eta}$, onde $\pi : G \rightarrow G/H_X$ é a projeção. De fato, π é uma submersão. Logo, para cada $t \in [a, b]$ e cada $p \in \pi^{-1}(\eta(t))$, não é difícil encontrar $\varepsilon > 0$ e um caminho $\bar{\eta} : [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \rightarrow G$ tal que $\pi \circ \bar{\eta} = \eta|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ e $\bar{\eta}(t) = p$. Deste modo, levantamos η localmente e, assim, encontramos uma curva $\hat{\eta} : [a, b] \rightarrow G$ diferenciável por partes satisfazendo $\pi \circ \hat{\eta} = \eta$. Agora, vamos tornar $\hat{\eta}$ diferenciável.

Suponhamos que $\hat{\eta}$ não é diferenciável em \hat{t} . Denotamos $(-\delta, \delta) \times \dots \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ por $(-\delta, \delta)^n$. Seja então U uma vizinhança de $\hat{\eta}(\hat{t}) \in G$ com $\phi = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow (-\delta, \delta)^n$ e $\alpha : \pi(U) \rightarrow (-\delta, \delta)^k$ sistemas de coordenadas em U e $\pi(U)$, respectivamente, tais que $\alpha \circ \pi \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$. Em tais sistemas de coordenadas, escrevemos $\hat{\eta}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $\eta(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$. Em particular, $x_i : (\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável se $i = 1, \dots, k$ e diferenciável por partes se $i = k + 1, \dots, n$. Sem perda de generalidade, suponhamos que \hat{t} a única singularidade de x_i , $i = k + 1, \dots, n$, no intervalo $(\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon)$. Procedemos então do seguinte modo: seja $\beta : (\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável tal que $\beta((\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon)) \subset [0, 1]$ com $\beta(t) = 1$ se $t \in (\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} - \varepsilon/2) \cup (\hat{t} + \varepsilon/2, \hat{t} + \varepsilon)$ e $\beta(t) = 0$ se $t \in (\hat{t} - \varepsilon/4, \hat{t} + \varepsilon/4)$. Observamos que $\tilde{\eta}|_{(\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon)} : (\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon) \rightarrow (-\delta, \delta)$ definida por $\tilde{\eta} = \beta \hat{\eta}$ é diferenciável e coincide com $\hat{\eta}$ em uma vizinhança de $\hat{t} - \varepsilon$ e $\hat{t} + \varepsilon$. Agindo desta maneira com todos os pontos não diferenciáveis de $\hat{\eta}$, obtemos um caminho diferenciável $\tilde{\eta} : [a, b] \rightarrow G$ tal que $\pi \circ \tilde{\eta} = \eta$.

Agora, se \mathcal{P} denota a partição $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_{\mathcal{P}}} = b\}$, escrevemos

$$\begin{aligned}
d_X(\eta(a), \eta(b)) &\leq \widehat{d}_X(\eta(a), \eta(b)) \leq L_{\widehat{d}_X}(\eta) = L_{d_X}(\eta) \\
&= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} d_X(\tilde{\eta}(t_{i-1})H_X, \tilde{\eta}(t_i)H_X) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} d_H(\tilde{\eta}(t_{i-1})X, \tilde{\eta}(t_i)X) \\
&\leq \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \sup_{z \in X} d_M(\tilde{\eta}(t_{i-1})z, \tilde{\eta}(t_i)z) \leq \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \sup_{z \in X} \int_{t_{i-1}}^{t_i} F\left(\frac{d}{dt}\tilde{\eta}(t)z\right) dt \\
&\leq \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} \sup_{z \in X} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sup_{t \in [a, b]} F\left(\frac{d}{dt}\tilde{\eta}(t)z\right) dt \\
&\leq \max_{z \in X, t \in [a, b]} F\left(\frac{d}{dt}\tilde{\eta}(t)z\right) (b - a). \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Notemos que (2.3) vale para qualquer subintervalo fechado de $[a, b]$ com a mesma constante de Lipschitz. Logo, η é uma curva Lipschitz. \square

Observação 2.12. *Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação à esquerda diferenciável e por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade de Finsler (M, F) . Fixamos $v \in \mathfrak{g}$ e consideramos o campo de vetores $K_v(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tv)p$ em M . Então, K_v é um campo de Killing em M , ou seja, os fluxos associados ao campo são isometrias em M . Além disso, temos*

$$K \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \tilde{\eta}(t)\tilde{\eta}^{-1}(t_0) \right) (\tilde{\eta}(t_0)z) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \tilde{\eta}(t)\tilde{\eta}^{-1}(t_0)\tilde{\eta}(t_0)z = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \tilde{\eta}(t)z.$$

Portanto, a constante de Lipschitz na desigualdade (2.3) é o máximo das normas da família dos campos de Killing em M .

Teorema 2.13. *Sejam uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade de Finsler conexa M e $X \subset M$ compacto. Consideramos uma métrica Riemanniana arbitrária $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em G/H_X e denotamos sua função distância por d .*

- (1) *Seja $gH_X \in G/H_X$. Então, existe uma d -vizinhança O de gH_X tal que $d|_{O \times O}$, $d_X|_{O \times O}$ e $\widehat{d}_X|_{O \times O}$ são Lipschitz equivalentes.*
- (2) *Se τ é a topologia quociente em G/H_X , τ_X é a topologia correspondente à métrica d_X e $\widehat{\tau}_X$ é a topologia correspondente à métrica \widehat{d}_X , então $\tau_X \subset \widehat{\tau}_X = \tau$.*

Antes de provarmos este teorema, consideramos alguns resultados preliminares.

Lema 2.14. *Seja o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ com $a > \varepsilon > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{a - \varepsilon}{n}, \frac{a + \varepsilon}{n} \right) \supset (0, \delta).$$

Demonstração: Mostraremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ temos

$$\frac{a + \varepsilon}{n + 1} > \frac{a - \varepsilon}{n}.$$

De fato, basta tomarmos $2\varepsilon N \geq a - \varepsilon > 0$. Então, $n \geq N$ implica $2\varepsilon n \geq a - \varepsilon$ e, assim,

$$n(a + \varepsilon) = an + \varepsilon n \geq an + a - \varepsilon - \varepsilon n = (n + 1)(a - \varepsilon).$$

Com isso, para todo $n \geq N$, obtemos

$$\left(\frac{a-\varepsilon}{n+1}, \frac{a+\varepsilon}{n+1}\right) \cup \left(\frac{a-\varepsilon}{n}, \frac{a+\varepsilon}{n}\right) = \left(\frac{a-\varepsilon}{n+1}, \frac{a+\varepsilon}{n}\right).$$

Logo,

$$\bigcup_{n \geq N} \left(\frac{a-\varepsilon}{n}, \frac{a+\varepsilon}{n}\right) = \left(0, \frac{a+\varepsilon}{N}\right).$$

□

Lema 2.15. *Consideramos as condições do Teorema 2.13. Então, existe uma constante $C > 0$ e uma d -vizinhança O de $H_X \in G/H_X$ tais que $\widehat{d}_X(H_X, gH_X) \leq Cd(H_X, gH_X)$ e $d(H_X, gH_X) \leq Cd_X(H_X, gH_X)$ para cada $gH_X \in O$.*

Demonstração: Sejam $\pi : G \rightarrow G/H_X$ a projeção natural e $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_X$ as álgebras de Lie de G e H_X , respectivamente. Denotamos por \mathfrak{m} um subespaço de \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_X$. Consideramos uma métrica euclidiana $d_m : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R}$ com seu correspondente produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$. Então, existe uma bola suficientemente pequena $U = B_{d_m}(0, r) \subset \mathfrak{m}$ tal que $\exp|_U : U \rightarrow \exp(U)$ e $\pi|_{\exp(U)} : \exp(U) \rightarrow V := \exp(U)H_X$ são difeomorfismos. Se necessário, podemos adequar U de modo que d e d_m são Lipschitz equivalentes em U (veja [14], p. 12). No que segue, identificamos U , $\exp(U)$ e V e as métricas d , d_m , d_X e \widehat{d}_X passam a ser consideradas em qualquer um desses conjuntos.

Vamos provar primeiro que existe $C > 0$ e uma d -vizinhança O de $H_X \in G/H_X$ tal que $d(H_X, gH_X) \leq Cd_X(H_X, gH_X)$ para cada $gH_X \in O$. Para tanto, mostraremos primeiro que existem $\delta > 0$ e uma constante $\tilde{C} > 0$ tais que, para todo vetor $u \in \mathfrak{m}$ com $d_m(0, u) < \delta$, temos $d_m(H_X, \exp(u)H_X) < Cd_X(H_X, \exp(u)H_X)$. A ideia consiste em verificarmos isso para vetores tw em uma ε -vizinhança da esfera $S_{d_m}(0, r/2) \subset U$, estendendo para valores cada vez menores de t . De fato, seja v um vetor não nulo na esfera $S_{d_m}(0, r/2) \subset U$. Então, $d_X(H_X, \exp(v)H_X) = d_H(X, \exp(v)X) > 0$, caso contrário teríamos $v \in \mathfrak{h}_X$. Pela continuidade da métrica d_X com respeito a topologia induzida por d_m (veja Proposição 2.6), existem uma vizinhança $W_v \subset S_{d_m}(0, r/2)$ de v e um $\varepsilon_v \in (0, 1)$ tais que

$$|d_X(H_X, \exp(tw)H_X) - d_X(H_X, \exp(v)H_X)| < \frac{d_X(H_X, \exp(v)H_X)}{2}$$

para todo ponto tw em $U_v = \{tw \in U; t \in (1 - \varepsilon_v, 1 + \varepsilon_v) \text{ e } w \in W_v\}$. Em particular,

$$\frac{d_X(H_X, \exp(v)H_X)}{2} < d_X(H_X, \exp(tw)H_X) < \frac{3d_X(H_X, \exp(v)H_X)}{2}.$$

Seja então $C_v > 0$ tal que

$$C_v d_X(H_X, \exp(tw)H_X) > C_v \frac{d_X(H_X, \exp(v)H_X)}{2} > r.$$

Consequentemente, para todo $tw \in U_v$, temos

$$d_m(H_X, \exp(tw)H_X) = d_m(0, tw) = \frac{tr}{2} < C_v d_X(H_X, \exp(tw)H_X). \quad (2.4)$$

Observamos ainda que se $k \in \mathbb{N}$, então $d_X(H_X, \exp(tw)H_X) = d_X(H_X, \exp(tw/k)^k H_X)$. Logo, devido a G -invariância de d_X e a desigualdade triangular, $d_X(H_X, \exp(tw)H_X) \leq kd_X(H_X, \exp(tw/k)H_X)$. Além disso, $d_m(H_X, \exp(tw)H_X) = kd_m(H_X, \exp(tw/k)H_X)$. Deste modo, $d_m(H_X, \exp(tw/k)H_X) < C_v d_X(H_X, \exp(tw/k)H_X)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $tw \in U_v$. Ou seja, a desigualdade em (2.4) vale para todo $w \in W_v$ e para todo

$$t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1 - \varepsilon_v}{k}, \frac{1 + \varepsilon_v}{k} \right).$$

Pelo Lema 2.14, existe um $\delta_v > 0$ tal que (2.4) vale para todo $w \in W_v$ e $t \in (0, \delta_v)$. Então, cobrimos $S_{d_m}(0, r/2)$ por um número finito de conjuntos abertos $\{W_{v_i}\}_{i=1, \dots, k}$ e consideramos $\delta = \min_{i=1, \dots, k} \delta_{v_i}/2$. Logo, para $\tilde{C} = \max C_{v_i}$, temos

$$d_m(H_X, \exp(u)H_X) < \tilde{C} d_X(H_X, \exp(u)H_X) \quad \text{para todo } u \in B_{d_m}(0, \delta). \quad (2.5)$$

Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que $d(H_X, \exp(u)H_X) \leq C d_X(H_X, \exp(u)H_X)$ para todo $\exp(u)H_X \in B_{d_m}(0, \delta)$, uma vez que d e d_m são Lipschitz equivalentes em U .

Mostraremos por fim que existe $C > 0$ tal que $\widehat{d}_X(H_X, \exp(u)H_X) \leq C d_m(H_X, \exp(u)H_X)$. Sejam $u \in B_{d_m}(0, r/2) - \{0\} \subset U$ e a curva diferenciável $\eta : [0, \|u\|_{d_m}] \rightarrow G/H_X$ dada por $\eta(t) = \exp(tu/\|u\|_{d_m})H_X$. Então, a curva diferenciável $\tilde{\eta} : [0, \|u\|_{d_m}] \rightarrow G$ definida por $\tilde{\eta}(t) = \exp(tu/\|u\|_{d_m})$ satisfaz $\pi \circ \tilde{\eta} = \eta$. Logo, pela desigualdade (2.3), temos

$$\begin{aligned} \widehat{d}_X(H_X, \exp(u)H_X) &\leq L_{d_X}(\eta) \leq \max_{\substack{z \in X \\ t \in [0, \|u\|_{d_m}]}} F \left(\frac{d}{dt} \tilde{\eta}(t)z \right) \|u\|_{d_m} \\ &\leq \max_{\substack{z \in X, t \in [0, r/2] \\ u/\|u\|_{d_m} \in S_{d_m}(0,1)}} F \left(\frac{d}{dt} \tilde{\eta}(t)z \right) d_m(H_X, \exp(u)H_X). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto, existem uma d -vizinhança O' de $H_X \in G/H_X$ e uma constante $C' > 0$ tais que $\widehat{d}_X(H_X, gH_X) \leq C'd(H_X, gH_X)$ para todo $gH_X \in O'$. \square

Demonstração do Teorema 2.13

Devido a invariância à esquerda de d_X e \widehat{d}_X em G/H_X , é suficiente provarmos que existem uma d -vizinhança O de $H_X \in G/H_X$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$\widehat{d}_X(g_1H_X, g_2H_X) \leq Cd(g_1H_X, g_2H_X), \quad (2.7)$$

$$d(g_1H_X, g_2H_X) \leq Cd_X(g_1H_X, g_2H_X) \quad (2.8)$$

para todo $g_1H_X, g_2H_X \in O$.

Vamos provar primeiro a desigualdade (2.7). Para tanto, seja a ação transitiva e diferenciável $\phi : G \times G/H_X \rightarrow G/H_X$, $\phi(g, hH_X) = ghH_X$. Então, consideramos a diferencial $d\phi : T(G \times G/H_X) \rightarrow T(G/H_X)$, $d\phi(g, hH_X, (w, v)) = (ghH_X, d\phi_{(g, hH_X)}(w, v))$, que também é uma aplicação diferenciável. Representemos as curvas $\eta : I \rightarrow G \times G/H_X$ por $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$, onde η_1 é uma curva em G e η_2 é uma curva em G/H_X . Então, quando restringimos $d\phi$ a vetores do tipo $(0, v)$ (ou seja, derivadas direcionais ao longo de curvas com η_1 constante), obtemos

$$d\phi(g, hH_X, (0, v)) = (ghH_X, d(\phi_g)_{hH_X}(v)).$$

Em particular, temos que $d(\phi_g)_{hH_X}(v)$ depende continuamente de g , hH_X e v . Então, se \tilde{O} é uma d -vizinhança de H_X em G/H_X onde o Lema 2.15 é satisfeito (e onde d e d_m são Lipschitz equivalentes), existe uma vizinhança $O_1 \times O_2$ de (e, H_X) em $G \times G/H_X$ satisfazendo

1. $\phi(O_1, O_2) \subset \tilde{O}$;
2. $\sup_{\|v\|_{d_m}=1} \|d(\phi_e)_{hH_X}(v)\|_{d_m} = \sup_{\|v\|_{d_m}=1} \|v\|_{d_m} = 1$ para todo $hH_X \in O_2$. Logo, escolhamos O_1 tal que $\sup_{\|v\|_{d_m}=1} \|d(\phi_g)_{hH_X}(v)\|_{d_m} \leq 2$ para todo $(g, hH_X) \in O_1 \times O_2$;
3. O_1 é uma vizinhança simétrica de e ;
4. $\phi(O_1, H_X) \supset O_2$;
5. O_2 é uma vizinhança d_m -convexa.

(As propriedades acima podem ser usadas como passos para a construção de O_1 e O_2 de maneira que ao final do processo todas as propriedades valem.)

Seja $\sigma : [0, 1] \rightarrow (O_2, d_m)$ uma geodésica ligando pontos g_1H_X e g_2H_X (um segmento euclidiano). Então, $\phi_{g_1^{-1}} \circ \sigma$ é uma curva diferenciável em \tilde{O} (não necessariamente uma d_m -geodésica) ligando os pontos H_X e $g_1^{-1}g_2H_X$ tal que

$$\begin{aligned} d_m(H_X, g_1^{-1}g_2H_X) \leq L_{d_m}(\phi_{g_1^{-1}} \circ \sigma) &= \int_0^1 \|(\phi_{g_1^{-1}} \circ \sigma)'(t)\|_{d_m} dt \\ &= \int_0^1 \|d(\phi_{g_1^{-1}})_{\sigma(t)}(\sigma'(t))\|_{d_m} dt \\ &\leq 2 \int_0^1 \|\sigma'(t)\|_{d_m} dt = 2d_m(g_1H_X, g_2H_X). \end{aligned}$$

Portanto, se $g_1H_X, g_2H_X \in O_2$, obtemos

$$\widehat{d}_X(g_1H_X, g_2H_X) = \widehat{d}_X(H_X, g_1^{-1}g_2H_X) \leq Cd_m(H_X, g_1^{-1}g_2H_X) \leq 2Cd_m(g_1H_X, g_2H_X),$$

onde a primeira desigualdade decorre de (2.6). Assim, (2.7) vale para todo $g_1H_X, g_2H_X \in O_2$.

Por fim, no intuito de provarmos (2.8), consideramos $O'_1 \times O'_2 \subset O_1 \times O_2$ vizinhança de (e, H_X) tal que

1. $\phi(O'_1, O'_2) \subset O_2$;
2. O'_1 é uma vizinhança simétrica de e ;
3. $\phi(O'_1, H_X) \supset O'_2$.

(A propriedade $\sup_{\|v\|_{d_m}=1} \|d(\phi_g)_{hH_X}(v)\|_{d_m} \leq 2$ para todo $(g, hH_X) \in O'_1 \times O'_2$ é automaticamente satisfeita. Além disso, aqui não é necessário que O'_2 seja uma vizinhança d_m -convexa.)

Sejam $g_1H_X, g_2H_X \in O'_2$. Devido as propriedades de $O'_1 \times O'_2$ acima, temos $g_1^{-1} \in O'_1$ e $H_X, g_1^{-1}g_2H_X \in O_2$. Como O_2 é uma vizinhança d_m -convexa, consideramos a d_m -geodésica $\sigma : [0, 1] \rightarrow (O_2, d_m)$ ligando H_X e $g_1^{-1}g_2H_X$. Então, $\phi_{g_1} \circ \sigma$ é uma curva diferenciável em \tilde{O} (não necessariamente uma d_m -geodésica) ligando os pontos g_1H_X e g_2H_X tal que

$$\begin{aligned} d_m(g_1H_X, g_2H_X) \leq L_{d_m}(\phi_{g_1} \circ \sigma) &= \int_0^1 \|(\phi_{g_1} \circ \sigma)'(t)\|_{d_m} dt \\ &= \int_0^1 \|d(\phi_{g_1})_{\sigma(t)}(\sigma'(t))\|_{d_m} dt \\ &\leq 2 \int_0^1 \|\sigma'(t)\|_{d_m} dt = 2d_m(H_X, g_1^{-1}g_2H_X). \end{aligned}$$

Portanto, se $g_1H_X, g_2H_X \in O'_2$, temos

$$d_m(g_1H_X, g_2H_X) \leq 2d_m(H_X, g_1^{-1}g_2H_X) \leq 2Cd_X(H_X, g_1^{-1}g_2H_X) = 2Cd_X(g_1H_X, g_2H_X).$$

Deste modo, o item (1) do teorema vale para $O = O'_2$ uma vez que $d|_{O'_2 \times O'_2}$ e $d_m|_{O'_2 \times O'_2}$ são Lipschitz equivalentes. Agora, no intuito de provarmos o item (2) do teorema, observamos que $\tau_X \subset \tau$ devido a Proposição 2.6. Por sua vez, a igualdade $\widehat{\tau}_X = \tau$ é uma consequência da Proposição 2.10. \square

Corolário 2.16. *Sejam uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade Riemanniana conexa M e $X \subset M$ compacto. Consideramos uma métrica Riemanniana arbitrária $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em G/H_X e denotamos sua função distância por d . Então, o espaço métrico $(G/H_X, \widehat{d}_X)$ é completo.*

Demonstração: Se τ é a topologia quociente em G/H_X , τ_d a topologia em G/H_X com relação a d e $\widehat{\tau}_X$ é a topologia em G/H_X com relação a \widehat{d}_X , então $\tau = \tau_d$ e, do teorema anterior, sabemos que $\widehat{\tau}_X = \tau$. Dessa forma, dada $\overline{B}_d(H_X, r)$ uma bola normal fechada de raio $r > 0$, garantimos a existência de $s > 0$ tal que $B_{\widehat{d}_X}(H_X, s) \subset B_d(H_X, r)$. Seja então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(G/H_X, \widehat{d}_X)$. Fixado $\varepsilon \in (0, s)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\widehat{d}_X(x_i, x_j) < \varepsilon$ para todo $i, j > N$. Fixado $i > N$, temos $x_i = g_iH_X$ para algum $g_i \in G$ e, consequentemente,

$$(x_n)_{n \geq N} \subset B_{\widehat{d}_X}(x_i, \varepsilon) \subset g_i B_{\widehat{d}_X}(H_X, s) \subset g_i \overline{B}_d(H_X, r).$$

Com isso, segue que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente. \square

O item (1) do Teorema 2.13 não garante que d e d_X são localmente Lipschitz equivalentes. A seguir apresentamos um exemplo onde $\tau_X \subset \tau$ com $\tau_X \neq \tau$.

Exemplo 2.17. *Sejam $G = (\mathbb{R}, +)$ com a topologia canônica e $M = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ o toro plano (veja Subseção 3.3.1). Denotamos a métrica em M por d e representamos um ponto em M por (\bar{x}, \bar{y}) , onde $x, y \in \mathbb{R}$ e \bar{x} é a classe de equivalência de $x \in \mathbb{R}$ em \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Consideramos então a ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ dada por $t(\bar{x}, \bar{y}) = (\overline{t+x}, \overline{t\sqrt{2}+y})$, que é o fluxo irracional no toro plano. Fixamos $X = (\bar{0}, \bar{0})$. Com isso, $H_X = \{0\}$ e $G/H_X \cong G$ (bijeção). Dado $\varepsilon > 0$, a bola aberta $B_{d_X}(0, \varepsilon)$ não é limitada. De fato, se tomarmos $N > 0$ arbitrariamente grande, existe $t > N$ tal que $t(\bar{0}, \bar{0}) \in B_d((\bar{0}, \bar{0}), \varepsilon)$. Logo, $t \in B_{d_X}(0, \varepsilon)$ e, portanto, $B_{d_X}(0, \varepsilon)$ é ilimitado para todo $\varepsilon > 0$. Dessa forma, concluímos que $\tau_X \subset \tau$ com $\tau_X \neq \tau$.*

2.3 O compacto X enquanto fecho de uma bola normal

Sejam $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ uma variedade Riemanniana e \exp_x a exponencial Riemanniana em $x \in M$. Se \exp_x é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em $T_x M$, a vizinhança $U := \exp_x(V)$ é chamada uma vizinhança normal de x em M . Agora, se $B(0, r)$ é uma bola no espaço tangente $T_x M$ centrada na origem e raio $r > 0$ com fecho $\overline{B}(0, r)$ contido em V , chamamos de $B(x, r) := \exp_x(B(0, r))$ a bola normal de centro x e raio r . Em particular, $\overline{B}(x, r)$ é uma bola normal compacta em M . A fronteira da bola normal $B(x, r)$ é denotada por $\partial B(x, r)$.

Lema 2.18. *Sejam (M, d_M) um espaço métrico e $x, y \in M$. Se $B(x, r)$ denota a bola de centro em $x \in M$ e raio $r > 0$ com relação a métrica d_M , verificamos:*

(a) $B(x, r) \subset B(y, r + d_M(x, y))$ e $(M - B(y, r + s)) \cap B(x, r) = \emptyset$ quando $s > d_M(x, y)$.

Mais, a s -vizinhança de $B(x, r)$ sempre está contida em $B(x, r + s)$.

(b) Se (M, d_M) é uma variedade Riemanniana conexa e $B(x, r + s)$ é uma bola normal em M , então $B(x, r + s) = B(B(x, r), s)$. Além disso, se $B(y, r + d_M(x, y))$ é uma bola normal em M , existe $x_0 \in \partial B(x, r)$ tal que $d_M(x_0, B(y, r)) = d_M(x, y)$.

Demonstração: O item (a) é consequência direta da desigualdade triangular. Para verificarmos o item (b), sejam $B(x, r + s)$ bola normal em M , $z \in B(x, r + s)$ e $\sigma_{x,z}$ geodésica minimizante que liga x a z . Logo, se $\{w\} = \sigma_{x,z} \cap \partial B(x, r)$, temos $d_M(x, w) = r$ e $r + s > d_M(x, z) = d_M(x, w) + d_M(w, z)$. Assim, $d_M(w, z) < s$ e, portanto, $d_M(z, B(x, r)) < s$ (isto é, $z \in B(B(x, r), s)$). Por fim, sejam $B(y, r + d_M(x, y))$ bola normal em M e $\sigma_{y,x}$ geodésica ligando y a x em $B(y, r + d_M(x, y))$. Então, escrevemos $\sigma_{y,x}(t) = \exp_y(tv)$ com $t \in [0, d_M(x, y)]$. Podemos estender $\sigma_{y,x}$ ao domínio $[0, r + d_M(x, y)]$ de modo que $\sigma_{y,x}$ é a geodésica minimizante ligando os pontos y e $x_0 = \exp_y((r + d_M(x, y))v) \in \partial B(x, r)$. Portanto, $d_M(x_0, y) = r + d_M(x, y)$ e $x_0 \in \partial B(y, r + d_M(x, y)) = \partial B(B(y, r), d_M(x, y))$. \square

Proposição 2.19. *Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Se $B(x, r + d_M(x, y))$ e $B(y, r + d_M(x, y))$ são bolas normais em M , então $d_H(B(x, r), B(y, r)) = d_M(x, y)$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.18, temos $B(x, r) \subset B(y, r+d(x, y))$ e $B(y, r) \subset B(x, r+d(x, y))$. Além disso, $B(x, r + d(x, y)) = B(B(x, r), d(x, y))$ e $B(y, r + d(x, y)) = B(B(y, r), d(x, y))$. Então,

$$\begin{aligned} d_H(B(x, r), B(y, r)) &= \inf \{s > 0; B(x, r) \subset B(B(y, r), s) \text{ e } B(y, r) \subset B(B(x, r), s)\} \\ &\leq d_M(x, y). \end{aligned}$$

Por outro lado, também pelo Lema 2.18, existe $x_0 \in \partial B(x, r)$ tal que $d_M(x_0, B(y, r)) = d_M(x, y)$ e, portanto,

$$\sup_{z \in B(x, r)} d_M(z, B(y, r)) = \sup_{z \in \overline{B}(x, r)} d_M(z, B(y, r)) \geq d_M(x, y).$$

Analogamente, existe $y_0 \in \partial B(y, r)$ tal que

$$\sup_{z \in B(y, r)} d_M(B(x, r), z) \geq d_M(x, y).$$

Portanto, $d_H(B(x, r), B(y, r)) = d_M(x, y)$. □

Em uma variedade de Hadamard M (isto é, uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional menor ou igual a zero), temos $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ é um difeomorfismo (veja [8], p. 165). Consequentemente, toda bola métrica em M é uma bola normal e, portanto, $d_H(B(x, r), B(y, r)) = d_M(x, y)$ para todo $x, y \in M$ e $r > 0$.

Corolário 2.20. *Seja uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade Riemanniana conexa M . Se X é o fecho de uma bola normal em M de centro x , então $d_H(X, gX) = d_M(x, gx)$ para g suficientemente próximo de $e \in G$.*

Demonstração: Denotamos $X = \overline{B}(x, r)$. Pela definição de bola normal, garantimos a existência de $s > 0$ suficientemente pequeno tal que $B(x, r + s)$ ainda é uma bola normal. Escolhemos então $V \subset \mathfrak{g}$ tal que $d_M(x, gx) < s/2$ para todo $g \in \exp(V)$. Deste modo, $B(x, r + d_M(x, gx)) \subset B(x, r + s)$ é uma bola normal. Além disso, como g é isometria, temos $gX = \overline{B}(gx, r)$ e $B(gx, r + d_M(x, gx)) = gB(x, r + d_M(x, gx))$ também é uma bola normal. Da proposição anterior segue o desejado. □

Capítulo 3

As métricas de Hausdorff intrínsecas induzidas em espaços homogêneos são métricas de Finsler

Neste capítulo mostramos que a métrica de Hausdorff intrínseca \widehat{d}_X em G/H_X está associada a uma estrutura de comprimento Finsler definida sobre o conjunto dos caminhos Lipschitz em $(G/H_X, \widehat{d}_X)$. Além disso, para M variedade Riemanniana e $X \subset M$ subvariedade compacta, obtemos uma expressão para a métrica de Finsler em termos das componentes normais dos campos de vetores associados às curvas $t \mapsto \exp(tv)x$, $v \in \mathfrak{g}$ e $x \in X$. Exemplos no toro plano e no plano hiperbólico \mathbb{H}^2 também são apresentados.

3.1 Estrutura de comprimento Finsler para a métrica de Hausdorff intrínseca induzida em G/H_X

Sejam uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade de Finsler conexa M e $X \subset M$ compacto. Sabemos que toda curva diferenciável $\eta : [a, b] \rightarrow (G/H_X, \widehat{d}_X)$ é retificável (veja Proposição 2.11). Em particular, as curvas $t \mapsto \exp(tv)gH_X$, onde $v \in \mathfrak{g}$ e $gH_X \in G/H_X$, são retificáveis em $(G/H_X, \widehat{d}_X)$. Logo, $(G/H_X, \widehat{d}_X)$ é uma variedade de Finsler em cada uma de suas componentes conexas (veja Introdução, p. 6; [4], p. 190).

Contudo, o que faremos a seguir é apresentar uma outra demonstração deste fato. Mais precisamente, mostraremos que a métrica de Hausdorff intrínseca está associada a uma estrutura de comprimento Finsler definida sobre o conjunto dos caminhos Lipschitz em $(G/H_X, \widehat{d}_X)$. Além disso, a métrica de Finsler F em $T_{H_X}G/H_X$ é dada pela norma

$$F_0(v + \mathfrak{h}_X) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\exp(tv)H_X, H_X)}{t},$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$, no qual \mathfrak{g} e \mathfrak{h}_X denotam as álgebras de Lie de G e H_X , respectivamente. Nesta direção, a seguinte proposição é essencial.

Proposição 3.1. *Sejam uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em um espaço métrico conexo M e $X \subset M$ compacto. Fixado $v \in \mathfrak{g}$, seja a curva $\eta : \mathbb{R} \rightarrow G/H_X$ dada por $\eta(t) = \exp(tv)H_X$. Então, $L_{d_X}(\eta|_{[a,b]}) = L_{d_X}(\eta|_{[0,1]})(b - a)$.*

Demonstração: Inicialmente, observamos que, para todo $c \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} L_{d_X}(\eta|_{[a,b]}) &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} d_H(\exp(t_{i-1}v)X, \exp(t_i v)X) \\ &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} d_H(\exp(cv) \exp(t_{i-1}v)X, \exp(cv) \exp(t_i v)X) \\ &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} d_H(\exp((t_{i-1} + c)v)X, \exp((t_i + c)v)X) = L_{d_X}(\eta|_{[a+c, b+c]}) \end{aligned}$$

Portanto, $L_{d_X}(\eta|_{[0,1]}) = L_{d_X}(\eta|_{[0,1/2]}) + L_{d_X}(\eta|_{[1/2,1]}) = 2L_{d_X}(\eta|_{[0,1/2]})$ e, de modo geral, $L_{d_X}(\eta|_{[0,1]}) = 2^k L_{d_X}(\eta|_{[0,1/2^k]})$. Ou seja, o resultado vale quando a curva η está restrita a um intervalo fechado de medida $1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Contudo, cada intervalo fechado pode ser obtido como uma união enumerável de intervalos fechados de medida $1/2^k$, onde a interseção entre dois desses intervalos tem medida nula. (Eventualmente precisamos acrescentar um ponto, por exemplo: $\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}}$ e $[0, \frac{1}{3}] = [0, \frac{1}{2^2}] \cup [\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4}] \cup [\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8}] \cup \dots$). Portanto, $L_{d_X}(\eta|_{[a,b]}) = L_{d_X}(\eta|_{[0,1]})(b - a)$. \square

Teorema 3.2. *Sejam uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em um espaço métrico conexo M e $X \subset M$ compacto. Dada a curva $\eta : \mathbb{R} \rightarrow G/H_X$ definida por $\eta(t) = \exp(tv)H_X$,*

temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\exp(tv)H_X, H_X)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_H(\exp(tv)X, X)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{d}_X(\exp(tv)H_X, H_X)}{t} = L_{d_X}(\eta|_{[0,1]}). \end{aligned}$$

Demonstração: A primeira igualdade é apenas a definição de d_X e sabemos que $d_X \leq \widehat{d}_X$. Agora, para todo $t > 0$, devido a Proposição 3.1, também temos

$$\widehat{d}_X(\exp(tv)H_X, H_X) \leq L_{d_X}(\eta|_{[0,t]}) = L_{d_X}(\eta|_{[0,1]})t.$$

Logo, é suficiente provarmos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\exp(tv)H_X, H_X)}{t} = L_{d_X}(\eta|_{[0,1]}).$$

Consideramos $\eta|_{[0,1]}$, $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_{\mathcal{P}}} = 1\}$ partição de $[0, 1]$ e denotamos

$$\sum(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{N_{\mathcal{P}}} d_H(\exp(t_{i-1}v)X, \exp(t_i v)X).$$

Fixado $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in (0, 1/2)$ tal que se $|\mathcal{P}| < \delta$, então $L_{d_X}(\eta|_{[0,1]}) - \sum(\mathcal{P}) < \varepsilon/2$. Seja então $\tau < \delta$ e \mathcal{P}_{τ} partição de $[0, 1]$ dada por $\mathcal{P}_{\tau} = \{0 = t_0 < \tau < 2\tau < \dots < N\tau \leq 1\}$, onde N é escolhido de maneira que $t' := 1 - N\tau \in [0, \tau)$. Observamos que $t_N = N\tau = 1$ ou $t_N = N\tau < t_{N+1} = 1$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &> L_{d_X}(\eta|_{[0,1]}) - \sum(\mathcal{P}_{\tau}) = L_{d_X}(\eta|_{[0,1]}) - \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}_{\tau}}} d_H(\exp(t_{i-1}v)X, \exp(t_i v)X) \\ &= L_{d_X}(\eta|_{[0,1]})(N\tau + t') - \sum_{i=1}^N d_H(\exp((i-1)\tau v)X, \exp(i\tau v)X) \\ &\quad - d_H(\exp(N\tau v)X, \exp(v)X) \\ &= L_{d_X}(\eta|_{[0,1]})N\tau - Nd_H(\exp(\tau v)X, X) + L_{d_X}(\eta|_{[0,t']}) - d_H(\exp(t'v)X, X) \\ &\geq L_{d_X}(\eta|_{[0,1]})N\tau - Nd_H(\exp(\tau v)X, X), \end{aligned}$$

onde a penúltima passagem decorre da G -invariância da métrica d_M e da Proposição 3.1. Por fim, dividindo a desigualdade acima por $N\tau$, obtemos

$$L_{d_X}(\eta|_{[0,1]}) - \frac{d_H(\exp(\tau v)X, X)}{\tau} < \frac{\varepsilon}{2N\tau} < \frac{\varepsilon}{2(1-\delta)} < \varepsilon$$

para todo $\tau \in (0, \delta)$. □

Corolário 3.3. *Nas condições do teorema anterior, temos*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\exp(tv)H_X, H_X)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\exp(t(-v))H_X, H_X)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_X(\exp(tv)H_X, H_X)}{|t|}. \end{aligned}$$

Demonstração: A primeira igualdade segue diretamente da G -invariância de d_X . A segunda igualdade é óbvia dado que a primeira vale. \square

Lema 3.4. *Sejam uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade de Finsler conexa M e $X \subset M$ compacto. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow G/H_X$ curva tal que $\alpha(0) = H_X$ e $\alpha'(0) = v + \mathfrak{h}_X$. Então,*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\alpha(t), \alpha(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\exp(tv)H_X, H_X)}{t},$$

isto é, o valor do limite não depende da curva escolhida.

Demonstração: Sejam as curvas $\eta_v, \alpha : [0, 1] \rightarrow G/H_X$, onde $\eta_v(t) = \exp(tv)H_X$, $\alpha(0) = H_X$ e $\alpha'(0) = v + \mathfrak{h}_X$. Mostraremos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\eta_v(t), \eta_v(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\alpha(t), \alpha(0))}{t}. \quad (3.1)$$

Conforme feito na demonstração do Lema 2.15, dada a métrica euclidiana $d_m : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R}$, sabemos que d_m e d_X são Lipschitz equivalentes em uma vizinhança O de $H_X \in G/H_X$. Então, em O escrevemos $\eta_v(t) = (t + o_1(t), o_2(t), \dots, o_n(t))$ e $\alpha(t) = (t + \tilde{o}_1(t), \tilde{o}_2(t), \dots, \tilde{o}_n(t))$ com

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{o_i(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{o}_i(t)}{t} = 0$$

e, portanto, $d_X(\eta_v(t), \alpha(t)) \leq C d_m(\eta_v(t), \alpha(t)) \leq \tilde{C} \max_{i=1, \dots, n} |o_i(t) - \tilde{o}_i(t)|$. Ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\eta_v(t), \alpha(t))}{t} = 0.$$

Pela desigualdade triangular, temos ainda

$$\left| \frac{d_X(\eta_v(t), \eta_v(0))}{t} - \frac{d_X(\alpha(t), \alpha(0))}{t} \right| \leq \frac{d_X(\eta_v(t), \alpha(t))}{t}$$

e, com isso, vemos que (3.1) vale. \square

Teorema 3.5. *Sejam uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade de Finsler conexa M e $X \subset M$ compacto. A aplicação $F_0 : T_{H_X}G/H_X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F_0(v + \mathfrak{h}_X) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_X(\exp(tv)H_X, H_X)}{t} = F_0(-v + \mathfrak{h}_X). \quad (3.2)$$

é uma norma em $T_{H_X}G/H_X$.

Demonstração: Seja a curva $\eta_v : [0, 1] \rightarrow G/H_X$ dada por $\eta_v(t) = \exp(tv)H_X$. Suponhamos que $F_0(v + \mathfrak{h}_X) = 0$. Então, pela Proposição 3.2, dado $t \in [0, 1]$, temos

$$d_X(H_X, \exp(tv)H_X) \leq L_{d_X}(\eta_v|_{[0,1]}) = F_0(v + \mathfrak{h}_X) = 0.$$

Com isso, $\exp(tv) \in H_X$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo, $v \in \mathfrak{h}_X$.

Agora, dados $\lambda > 0$ e a curva $\eta_{\lambda v}(t) = \eta_v(\lambda t)$, temos

$$F_0(\lambda v) = L_{d_X}(\eta_{\lambda v}|_{[0,1]}) = L_{d_X}(\eta_v|_{[0,|\lambda|]}) = |\lambda|L_{d_X}(\eta_v|_{[0,1]}) = |\lambda|F_0(v).$$

Por último, mostraremos que $F_0((v + w) + \mathfrak{h}_X) \leq F_0(v + \mathfrak{h}_X) + F_0(w + \mathfrak{h}_X)$. Para tanto, conforme feito na demonstração do Lema 2.15, sejam \mathfrak{m} um subespaço de \mathfrak{g} , com $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_X$, e $d_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica euclidiana. Estendemos então a métrica $d_{\mathfrak{m}}$ a uma métrica euclidiana $d_{\mathfrak{g}}$ definida em \mathfrak{g} de maneira que $\mathfrak{m} \perp \mathfrak{h}_X$. Sabemos que existe uma vizinhança O de $H_X \in G/H_X$ tal que $d_{\mathfrak{m}}$ e d_X são localmente Lipschitz equivalentes. Sejam então as curvas $\eta_w(t) = \exp(tw)H_X$ e $\eta_{v+w}(t) = \exp(t(v+w))H_X$ contidas em O . Dada a curva $\alpha(t) = \exp(t(-v))\exp(t(v+w))$ em G , para t suficientemente pequeno, existe uma curva β em \mathfrak{g} tal que $\exp(\beta(t)) = \alpha(t)$. Desde que $d(\exp)_e$ é a identidade, $\beta'(0) = \alpha'(0) = w$ e, portanto, em algum intervalo $[0, \varepsilon)$,

$$\beta(t) = tw + o(t) \quad \text{com} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|o(t)\|_{d_{\mathfrak{g}}}}{t} = 0$$

(veja [13], p. 133). Logo, para todo $t \in [0, \varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} d_X(\eta_v(t), \eta_{v+w}(t)) &= d_X(\exp(tv)H_X, \exp(t(v+w))H_X) \\ &= d_X(H_X, \alpha(t)H_X) = d_X(H_X, \exp(\beta(t))H_X). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Além disso, ao escrevermos $\beta(t) = \beta_{\mathfrak{m}}(t) + \beta_{\mathfrak{h}_X}(t)$, onde $\beta_{\mathfrak{m}}(t) \in \mathfrak{m}$ e $\beta_{\mathfrak{h}_X}(t) \in \mathfrak{h}_X$, observamos que $\beta_{\mathfrak{m}}(t) = \exp(\beta(t))H_X$. Logo,

$$(d_{\mathfrak{g}}(tw, \beta(t)))^2 = \langle tw - \beta(t), tw - \beta(t) \rangle_{\mathfrak{g}} \geq (d_{\mathfrak{g}}(tw, \beta_{\mathfrak{m}}(t)))^2 = (d_{\mathfrak{m}}(\eta_w(t), \pi \circ \exp(\beta(t))))^2.$$

Deste modo,

$$d_X(\eta_w(t), \exp(\beta(t))H_X) \leq C d_m(\eta_w(t), \exp(\beta(t))H_X) \leq C d_g(tw, \beta(t)) = C \|o(t)\|_{d_g}. \quad (3.4)$$

Portanto, de (3.3) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} |d_X(\eta_v(t), \eta_{v+w}(t)) - d_X(H_X, \eta_w(t))| &= |d_X(H_X, \exp(\beta(t))H_X) - d_X(H_X, \eta_w(t))| \\ &\leq d_X(\eta_w(t), \exp(\beta(t))H_X) \leq C \|o(t)\|_{d_g}. \end{aligned}$$

Com isso, para todo $t \in [0, \varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} d_X(H_X, \eta_{v+w}(t)) &\leq d_X(H_X, \eta_v(t)) + d_X(\eta_v(t), \eta_{v+w}(t)) \\ &\leq d_X(H_X, \eta_v(t)) + d_X(H_X, \eta_w(t)) + C \|o(t)\|_{d_g}. \end{aligned}$$

Dividindo por t e tomando o limite com t tendendo a 0^+ , segue o desejado. \square

Seja a aplicação $F : TG/H_X \rightarrow \mathbb{R}$ onde F é uma norma invariante à esquerda em TG/H_X definida pela norma F_0 em $T_{H_X}G/H_X$ no sentido que

$$F = F_0 \circ \theta,$$

no qual $\theta : TG/H_X \rightarrow T_{H_X}G/H_X$ é dada por $\theta(gH_X, v) = (H_X, d\tau_{g^{-1}}(v))$. A aplicação contínua F em TG/H_X define o que chamamos de uma estrutura de comprimento Finsler (veja Exemplo 1.2). Mais, fixados $\eta : [a, b] \rightarrow (G/H_X, d_X)$ curva Lipschitz e $t \in [a, b]$, com $\eta(t) = gH_X$, segue pela definição de F que

$$v_\eta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d_X(\eta(t), \eta(t + \varepsilon))}{|\varepsilon|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d_X(g^{-1}\eta(t), g^{-1}\eta(t + \varepsilon))}{|\varepsilon|} = F_0(d\tau_{g^{-1}}(\eta'(t)))$$

para quase todo $t \in [a, b]$. Além disso,

$$L_{d_X}(\eta) = \int_a^b v_\eta(t) dt = \int_a^b F(\eta(t), \eta'(t)) dt$$

(veja Teorema 1.7). Portanto, a métrica de Hausdorff intrínseca \widehat{d}_X em G/H_X é uma métrica de Finsler cuja estrutura de comprimento é definida por todos os caminhos Lipschitz (parametrizados por intervalos fechados) e o comprimento determinado pela integral de F .

3.2 O compacto X enquanto subvariedade mergulhada

Nesta seção consideramos $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ variedade Riemanniana e estudamos o comportamento da métrica de Finsler \widehat{d}_X em G/H_X para duas escolhas específicas do compacto $X \subset M$. Na primeira, consideramos X uma subvariedade compacta sem bordo e, na segunda, X é um conjunto compacto com bordo, onde este bordo é uma subvariedade de codimensão 1 com relação a dimensão de M . Em nosso contexto, todas as subvariedades são mergulhadas.

Uma variedade diferenciável de dimensão n com bordo é um espaço topológico N munido com uma estrutura diferenciável satisfazendo a seguinte propriedade: se $x \in N$, então existe uma vizinhança U de x tal que U é difeomorfo a \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}_+^n , onde \mathbb{R}_+^n é o semi-espaço (fechado) definido por $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, x_n \geq 0\}$. O conjunto dos pontos de N que possuem uma vizinhança homeomorfa ao \mathbb{R}^n é chamado de interior de N e denotado por $\text{int } N$. O bordo de N é o conjunto dos pontos de N que possuem uma vizinhança homeomorfa ao \mathbb{R}_+^n e denotado por ∂N . Se N é uma variedade de dimensão n com bordo, então $\text{int } N$ é uma variedade (sem bordo) de dimensão n e ∂N é uma variedade (sem bordo) de dimensão $n - 1$.

Lema 3.6. *Sejam $(V_1 = T_1 \oplus N_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(V_2 = T_2 \oplus N_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espaços vetoriais reais com produto interno, onde T_i, N_i são subespaços vetoriais ortogonais em V_i , $i = 1, 2$. Suponhamos que $\eta : V_1 \rightarrow V_2$ é uma transformação linear satisfazendo $\eta(T_1) = T_2$, $\eta(N_1) = N_2$ e a restrição $\eta|_{N_1} : N_1 \rightarrow \eta(N_1)$ é uma isometria (isto é, $\langle \eta(w_1), \eta(w_2) \rangle_2 = \langle w_1, w_2 \rangle_1$ para todo $w_1, w_2 \in N_1$). Então, $\langle \eta(v), \eta(w) \rangle_2 = \langle v, w \rangle_1$ para todo $v \in V_1$ e $w \in N_1$.*

Demonstração: Fixado $v \in V_1$ escrevemos $v = v_{T_1} + v_{N_1}$ com $v_{T_1} \in T_1$ e $v_{N_1} \in N_1$. Desde que T_i e N_i são subespaços ortogonais, para cada $w \in N_1$, as hipóteses do enunciado nos asseguram que

$$\begin{aligned} \langle \eta(v), \eta(w) \rangle_2 &= \langle \eta(v_{T_1}) + \eta(v_{N_1}), \eta(w) \rangle_2 = \langle \eta(v_{N_1}), \eta(w) \rangle_2 \\ &= \langle v_{N_1}, w \rangle_1 = \langle v_{T_1} + v_{N_1}, w \rangle_1 = \langle v, w \rangle_1. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.7. *Seja uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade Riemanniana conexa M . Suponhamos que X é uma subvariedade compacta em M sem bordo. Então, em $T_{H_X}G/H_X$ a métrica de Finsler F associada a \widehat{d}_X possui a expressão*

$$F(v + \mathfrak{h}_X) = \max_{x \in X} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_M$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$.

Demonstração: Como X é subvariedade compacta em M , X está contido em uma vizinhança tubular de M da forma $\exp(V_\varepsilon)$, onde $\exp(V_\varepsilon)$ denota aqui a exponencial Riemanniana de uma vizinhança V_ε definida por

$$V_\varepsilon = \{N; N \in T_pM \text{ e } N \in (T_pX)^\perp, \text{ para algum } p \in X \text{ e } \|N\|_M < \varepsilon\}$$

e, se $U = \{q \in M; d_M(q, X) < \varepsilon\}$, $\exp|_{V_\varepsilon} : V_\varepsilon \rightarrow U$ é um difeomorfismo (veja [15], p. 346).

Denotamos $\dim X = m$, $\dim M = m + n$ e, para todo $z \in X$, $T_zM = T_zX \oplus (T_zX)^\perp$. Fixado $x \in X$, sejam $(W, (\psi_1, \dots, \psi_m))$ sistema de coordenadas em X centrado em x e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$ as bases associadas aos espaços tangentes de W . Em uma vizinhança $W' \subset W$ determinamos um referencial $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, X_{m+1}, \dots, X_{m+n} \right\}$, no qual $\{X_{m+1}, \dots, X_{m+n}\}$ é base ortonormal do fibrado normal de W' . Seja então o aberto V em M dado por

$$\{y \in M; y = \exp_{y_0}(N_y) \text{ no qual } y_0 \in W', N_y \in (T_{y_0}X)^\perp \text{ e } \|N_y\|_M < \varepsilon\} \subset U.$$

A partir disso, consideramos (V, Ψ) sistema de coordenadas em M definido por

$$\Psi(y) = (\psi_1(y_0), \dots, \psi_m(y_0), a_{m+1}(y), \dots, a_{m+n}(y)),$$

no qual $y = \exp_{y_0}(N_y)$ e $N_y = \sum_{j=1}^n a_{m+j}(y)X_{m+j}$.

Dadas as geodésicas $\sigma_x^j(s) = \exp_x(sX_{m+j})$, com $j \in \{1, \dots, n\}$, temos

1. $(\sigma_x^j)'(0) = X_{m+j}$;
2. $\Psi(\sigma_x^j(s)) = (\psi_1(x), \dots, \psi_m(x), 0, \dots, s, 0, \dots, 0)$ é uma reta ortogonal a $\Psi(V \cap X)$ no ponto $\Psi(x)$.

Portanto,

$$d\Psi_x(X_{m+j}) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Psi(\sigma_x^j(s))) = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} a_{m+j}(\exp(tv)x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \langle \Psi(\exp(tv)x), d\Psi_x(X_{m+j}) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \left\langle \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(\exp(tv)x)}{t}, d\Psi_x(X_{m+j}) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \left\langle d\Psi_x \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right), d\Psi_x(X_{m+j}) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x, X_{m+j} \right\rangle_M, \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato de $d\Psi_x$ estar nas condições do Lema 3.6.

Agora, dado $y = \exp_{y_0}(N_y) \in U$, temos $\exp_{y_0}(-N_y) \in U$ e $\|N_y\|_M < \varepsilon$ (com $\|N_y\|_M = 0$ se $y \in X$ e $\|N_y\|_M \neq 0$ se $y \notin X$). Nestas condições, consideramos o conjunto $X \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ e a aplicação $f : X \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(z, t) = \begin{cases} \frac{d_M(X, \exp(tv)z)}{t} & \text{se } t \neq 0, \\ \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)z \right)^N \right\|_M & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Mostraremos que a aplicação f é contínua. Para tanto, fixado $x \in X$, seja novamente o sistema de coordenadas (V, Ψ) centrado em x e consideremos $\tilde{t} > 0$ de modo que a aplicação $g : W' \times (-\tilde{t}, \tilde{t}) \subset X \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(z, t) = \begin{cases} \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{a_{m+j}(\exp(tv)z)}{t} \right)^2} & \text{se } t \neq 0, \\ \sqrt{\sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)z, X_{m+j} \right\rangle_M^2} & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

está bem definida. Desde que $a_{m+j}(z, t) = a_{m+j}(\exp(tv)z)$ é uma aplicação diferenciável com $a_{m+j}(z, 0) = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, garantimos a existência de $B_j : W' \times (-\tilde{t}, \tilde{t}) \rightarrow \mathbb{R}$ aplicação diferenciável no qual $a_{m+j}(z, t) = tB_j(z, t)$ e $B_j(z, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} a_{m+j}(z, t)$ (veja [8], p. 30). Deste modo, concluímos que $g(z, t) = \sqrt{\sum_{j=1}^n B_j(z, t)^2}$ é uma aplicação contínua.

Observamos então que f é contínua pois $f|_{W' \times (-\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon})} = g$. De fato, se $t \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d_M(X, \exp(tv)z)}{t} &= \frac{1}{t} \|N_{\exp(tv)z}\|_M = \frac{1}{t} \left\| \sum_{j=1}^n a_{m+j}(\exp(tv)z) X_{m+j} \right\|_M \\ &= \frac{1}{t} \sqrt{\left\langle \sum_{j=1}^n a_{m+j}(\exp(tv)z) X_{m+j}, \sum_{j=1}^n a_{m+j}(\exp(tv)z) X_{m+j} \right\rangle_M} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{a_{m+j}(\exp(tv)z)}{t} \right)^2} \end{aligned}$$

e, se $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)z \right)^N \right\|_M &= \left\| \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)z, X_{m+j} \right\rangle_M X_{m+j} \right\|_M \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)z, X_{m+j} \right\rangle_M^2}. \end{aligned}$$

A partir da continuidade de f , fixado $\tilde{\epsilon} > 0$, para cada $z \in X$, consideramos $\delta_z > 0$ de modo que $(y, t) \in B(z, \delta_z)$ implica $|f(y, t) - f(z, 0)| < \tilde{\epsilon}/2$ e ainda denotamos por $K(z, \delta_z)$ o conjunto aberto em M dado por

$$\{y \in M; y = \exp_{y_0}(N_y) \text{ com } y_0 \in X, d_M(z, y_0) < \delta_z/2, N_y \in (T_{y_0}X)^\perp \text{ e } \|N_y\|_M < \delta_z/2\}.$$

Sejam então $\{K(x_i, \delta_{x_i}); i = 1, \dots, k\}$ subcobertura finita para X e $\delta = \min_{i=1, \dots, k} \delta_{x_i}/2$. Logo, dado $y = (y, 0) \in X$, temos $(y, 0) \in K(x_j, \delta_{x_j})$ para algum $j \in \{1, \dots, k\}$ e, conseqüentemente, $d_M((y, 0), (x_j, 0)) < \delta_{x_j}/2$. Mais do que isso, temos por construção que $(y, t) \in K(x_j, \delta_{x_j})$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$ e, portanto,

$$d_M((y, t), (x_j, 0)) \leq d_M((y, t), (y, 0)) + d_M((y, 0), (x_j, 0)) < \delta_{x_j}.$$

Com isso, obtemos

$$|f(y, t) - f(y, 0)| \leq |f(y, t) - f(x_j, 0)| + |f(x_j, 0) - f(y, 0)| < \tilde{\epsilon}.$$

Ou seja, $|f(y, t) - f(y, 0)| < \tilde{\epsilon}$ para todo $y \in X$ e para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Deste modo, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, concluimos que

$$\left| \sup_{x \in X} f(x, t) - \sup_{x \in X} f(x, 0) \right| \leq \tilde{\epsilon}.$$

Nestas condições, escrevemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in X} \frac{d_M(X, \exp(tv)x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in X} f(x, t) = \sup_{x \in X} f(x, 0) \\ &= \sup_{x \in X} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_M. \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo a métrica d_M G -invariante, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in X} \frac{d_M(x, \exp(tv)X)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in X} \frac{d_M(X, \exp(t(-v))x)}{t}.$$

Além disso,

$$\left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x, X_{m+j} \right\rangle_M = - \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t(-v))x, X_{m+j} \right\rangle_M.$$

Por fim, desde que

$$d_H(X, \exp(tv)X) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d_M(x, \exp(tv)X), \sup_{x \in X} d_M(X, \exp(tv)x) \right\},$$

obtemos

$$\begin{aligned} F(v + \mathfrak{h}_X) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_H(X, \exp(tv)X)}{t} \\ &= \max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sup_{x \in X} d_M(x, \exp(tv)X)}{t}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sup_{x \in X} d_M(X, \exp(tv)x)}{t} \right\} \\ &= \max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in X} \frac{d_M(x, \exp(tv)X)}{t}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in X} \frac{d_M(X, \exp(tv)x)}{t} \right\} \\ &= \sup_{x \in X} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_M. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.8. *Sejam uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade Riemanniana conexa M e $X = \{p_1, \dots, p_k\}$ um conjunto finito de pontos isolados em M . Então, em $T_{H_X}G/H_X$ a métrica de Finsler F associada a \hat{d}_X possui a expressão*

$$F(v + \mathfrak{h}_X) = \max \{ \|K_v(p_1)\|_M, \|K_v(p_2)\|_M, \dots, \|K_v(p_k)\|_M \}$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$, onde $K_v(p_i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)p_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Proposição 3.9. *Seja uma ação por isometrias de um grupo de Lie G em uma variedade Riemanniana conexa M . Suponhamos que X é um conjunto compacto em M com bordo ∂X , onde ∂X é uma subvariedade de codimensão 1 (com relação a M). Então, em $T_{H_X}G/H_X$ a métrica de Finsler F associada a \widehat{d}_X possui a expressão*

$$F(v + \mathfrak{h}_X) = \max_{x \in \partial X} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_M$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$.

Demonstração: O bordo $\partial X \subset M$ é uma subvariedade compacta e, portanto, está contido em uma vizinhança tubular $U = \{q \in M; d_M(q, \partial X) < \varepsilon\}$ de M . Sejam $\dim \partial X = m$, $\dim M = m+1$ e, para todo $z \in \partial X$, $T_z M = T_z \partial X \oplus (T_z \partial X)^\perp$, onde $\{X_{m+1}\}$ é o vetor normal de $(T_z \partial X)^\perp$ que aponta para fora de ∂X . Fixado $x \in \partial X$, sejam então $(W, (\psi_1, \dots, \psi_m))$ sistema de coordenadas em ∂X centrado em x , o aberto V em M dado por

$$\{y \in M; y = \exp_{y_0}(N_y) \text{ no qual } y_0 \in W \subset \partial X, N_y \in (T_{y_0} \partial X)^\perp \text{ e } \|N_y\|_M < \varepsilon\} \subset U$$

e (V, Ψ) sistema de coordenadas em M definido por $\Psi(y) = (\psi_1(y_0), \dots, \psi_m(y_0), a_{m+1}(y))$, no qual $y = \exp_{y_0}(N_y)$ e $N_y = a_{m+1}(y)X_{m+1}$.

Dada a geodésica $\sigma_x(s) = \exp_x(sX_{m+1})$, temos $\sigma'_x(0) = X_{m+1}$. Além disso, $\Psi(\sigma_x(s)) = (\psi_1(x), \dots, \psi_m(x), s)$ é uma reta ortogonal a $\Psi(V \cap \partial X)$ em $\Psi(x)$. Portanto,

$$d\Psi_x(X_{m+1}) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Psi(\sigma_x(s))) = (0, \dots, 0, 1).$$

Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} a_{m+1}(\exp(tv)x) &= \left\langle d\Psi_x \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right), d\Psi_x(X_{m+1}) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x, X_{m+1} \right\rangle_M. \end{aligned}$$

Agora, escrevemos o conjunto U como $\partial X \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, no qual $y = \exp_{y_0}(N_y)$ em U é identificado ao ponto $(y_0, \|N_y\|_M)$ se $y \notin X$, ao ponto $(y_0, -\|N_y\|_M)$ se $y \in \text{int } X$ e ao ponto $(y, 0)$ se $y \in \partial X$. Seja então a aplicação $f : \partial X \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(z, t) = \begin{cases} \frac{d_M(X, \exp(tv)z)}{t} & \text{se } t \neq 0, \\ \max \left\{ \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)z, X_{m+1} \right\rangle_M, 0 \right\} & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Mostraremos que a aplicação f é contínua. Para tanto, fixado $x \in \partial X$, seja novamente o sistema de coordenadas (V, Ψ) centrado em x e consideremos $\tilde{t} > 0$ de modo que a aplicação $g : W \times (-\tilde{t}, \tilde{t}) \subset \partial X \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(z, t) = \begin{cases} \frac{a_{m+1}(\exp(tv)z)}{t} & \text{se } t \neq 0, \\ \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)z, X_{m+1} \right\rangle_M & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

está bem definida. Desde que $a_{m+1}(z, t) = a_{m+1}(\exp(tv)z)$ é uma aplicação diferenciável com $a_{m+1}(z, 0) = 0$, garantimos a existência de $B : W \times (-\tilde{t}, \tilde{t}) \rightarrow \mathbb{R}$ aplicação diferenciável no qual $a_{m+1}(z, t) = tB(z, t)$ e $B(z, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} a_{m+1}(z, t)$ (veja [8], p. 30). Deste modo, $g = B$ é diferenciável e $f(z, t) = \max\{g(z, t), 0\}$ é contínua.

A partir da continuidade de f , fixado $\tilde{\varepsilon} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(y, t) - f(y, 0)| < \tilde{\varepsilon}$ para todo $y \in \partial X$ e para todo $t \in (-\delta, \delta)$ e, conseqüentemente,

$$\left| \sup_{x \in \partial X} f(x, t) - \sup_{x \in \partial X} f(x, 0) \right| \leq \tilde{\varepsilon}$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Nestas condições, escrevemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in X} \frac{d_M(X, \exp(tv)x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \partial X} f(x, t) = \sup_{x \in \partial X} f(x, 0) \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \partial X} \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x, X_{m+1} \right\rangle_M, 0 \right\}. \end{aligned}$$

Por fim, sendo a métrica d_M G -invariante e

$$\left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x, X_{m+1} \right\rangle_M = - \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t(-v))x, X_{m+1} \right\rangle_M,$$

obtemos

$$\begin{aligned} F(v + \mathfrak{h}_X) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_H(X, \exp(tv)X)}{t} \\ &= \max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in X} \frac{d_M(x, \exp(tv)X)}{t}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in X} \frac{d_M(X, \exp(tv)x)}{t} \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \partial X} \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t(-v))x, X_{m+1} \right\rangle_M, \sup_{x \in \partial X} \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x, X_{m+1} \right\rangle_M \right\} \\ &= \sup_{x \in \partial X} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_M. \end{aligned}$$

□

Seja G um grupo de Lie munido com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ bi-invariante, isto é, dadas L_g e R_g translações à esquerda e à direita em G , temos

$$\langle d(L_g)_e u, d(L_g)_e v \rangle_{G, g} = \langle u, v \rangle_{G, e} = \langle d(R_g)_e u, d(R_g)_e v \rangle_{G, g}$$

para todo $g \in G$ e $u, v \in \mathfrak{g}$. Em particular, para cada $v \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$, temos

$$K_v(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv)g = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_g(\exp(tv))$$

e, conseqüentemente,

$$\|K_v(g)\|_G = \left\| d(R_g)_e \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv) \right) \right\|_G = \left\| \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv) \right\|_G = \|v\|_G.$$

Agora, se X é uma subvariedade compacta em M , para todo $z \in X$, $T_z M = T_z X \oplus (T_z X)^\perp$ e, assim, $K_v(z) = K_v^T(z) + K_v^N(z)$, no qual $K_v^T(z) \in T_z X$ e $K_v^N(z) \in (T_z X)^\perp$.

Proposição 3.10. *Sejam G grupo de Lie conexo munido com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ bi-invariante e $\varphi : G \times G \rightarrow G$ ação à esquerda (por isometrias). Se $X \subset G$ é uma subvariedade compacta sem bordo, são equivalentes:*

(i) *Para todo $v \in \mathfrak{g}$, existe $z \in X$ tal que $K_v^T(z) = 0$.*

(ii) *Para todo $v \in \mathfrak{g}$, $F(v + \mathfrak{h}_X) = \|v\|_G$.*

Demonstração: Fixado $v \in \mathfrak{g}$ e $z \in X$ com $K_v^T(z) = 0$, temos

$$\max_{x \in X} \left\| \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_G \geq \left\| \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv)z \right)^N \right\|_G = \left\| \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv)z \right\|_G = \|v\|_G.$$

Além disso, para todo $x \in X$, temos

$$\left\| \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_G \leq \left\| \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv)x \right\|_G = \|v\|_G.$$

Portanto, da Proposição 3.7, segue que

$$F(v + \mathfrak{h}_X) = \max_{x \in X} \left\| \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_G = \|v\|_G.$$

Por outro lado, se dado $v \in \mathfrak{g}$ temos $F(v + \mathfrak{h}_X) = \|v\|_G$, então existe $z_0 \in X$ tal que

$$\left\| \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv)z_0 \right)^N \right\|_G = \|v\|_G = \left\| \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tv)z_0 \right\|_G.$$

Ou seja, $K_v^T(p) = 0$. □

Corolário 3.11. *Sejam G grupo de Lie conexo munido com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ bi-invariante e $\varphi : G \times G \rightarrow G$ ação à esquerda (por isometrias). Se $X \subset G$ é um conjunto compacto com bordo ∂X , onde ∂X é uma subvariedade de codimensão 1 (com relação a G), então são equivalentes:*

(i) *Para todo $v \in \mathfrak{g}$, existe $z \in \partial X$ tal que $K_v^T(z) = 0$.*

(ii) *Para todo $v \in \mathfrak{g}$, $F(v + \mathfrak{h}_X) = \|v\|_G$.*

A partir destas fórmulas, obtemos uma relação entre as eventuais singularidades do campo de vetores K_v^T e o compacto $X \subset G$:

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, onde M e N são variedades diferenciáveis compactas orientadas e de mesma dimensão. Se $y \in N$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(y)$ é finito e $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}_x f$ não depende da escolha do valor regular y , onde $\text{sign}_x f = 1$ se aplicação df_x preserva a orientação e $\text{sign}_x f = -1$ se df_x inverte a orientação. Deste modo, definimos o grau da aplicação f como sendo

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}_x f \quad (\deg(f) = 0 \text{ se } f^{-1}(y) = \emptyset).$$

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n (sem bordo), V um campo de vetores em M e $p \in M$ uma singularidade isolada de V . O índice de V em p é definido da seguinte maneira: Identificamos uma vizinhança de p com \mathbb{R}^n e consideramos uma esfera $S^{n-1}(p, \varepsilon)$ de centro em p e raio suficientemente pequeno $\varepsilon > 0$. O grau da aplicação

$$f_V : S^{n-1}(p, \varepsilon) \rightarrow S^{n-1}(p, 1), \quad f_V(q) = \frac{V(q)}{\|V(q)\|_{\mathbb{R}^n}},$$

é o índice de V em p e denotado por $\text{ind}V(p)$.

Estamos agora aptos a enunciar o Teorema de Poincaré-Hopf: Sejam M uma variedade diferenciável compacta (sem bordo) e V um campo de vetores diferenciável em M cujas (eventuais) singularidades $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ são isoladas. Então,

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \text{ind}V(p_i),$$

onde $\chi(M)$ é a característica de Euler de M .

Proposição 3.12. *Sejam G grupo de Lie conexo munido com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ bi-invariante e $\varphi : G \times G \rightarrow G$ ação à esquerda (por isometrias). Se $X \subset G$ é uma subvariedade compacta sem bordo e $\chi(X) \neq 0$, então $F(v + \mathfrak{h}_X) = \|v\|_G$ para todo $v \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Suponhamos que $\chi(X) \neq 0$ e, para cada $v \in \mathfrak{g}$, seja o campo de vetores K_v^T definido em X . Então, pelo Teorema de Poincaré-Hopf, $\sum_{i=1}^k \text{ind} K_v^T(p_i) \neq 0$, onde $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ são as singularidades de K_v^T . Deste modo, está implícito a existência de singularidades para o campo K_v^T . Da Proposição 3.10, concluimos o desejado. \square

Corolário 3.13. *Sejam G grupo de Lie conexo munido com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ bi-invariante e $\varphi : G \times G \rightarrow G$ ação à esquerda (por isometrias). Se $X \subset G$ é um conjunto compacto com bordo ∂X , onde ∂X é uma subvariedade compacta de codimensão 1 (com relação a G) com $\chi(\partial X) \neq 0$, então $F(v + \mathfrak{h}_X) = \|v\|_G$ para todo $v \in \mathfrak{g}$.*

3.3 Outros exemplos

3.3.1 Exemplos no toro plano

Para o que vem a seguir, precisamos de alguns fatos gerais sobre curvas.

Definição 3.14 (Curva plana fechada simples). *Uma curva plana fechada é uma curva parametrizada regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que α e todas as suas derivadas coincidam em a e b . Dizemos que α é uma curva simples se α não possui outras auto-interseções, isto é, se $t_1, t_2 \in [a, b]$ com $t_1 \neq t_2$, então $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.*

Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, uma curva plana fechada parametrizada pelo comprimento de arco. Como s é o comprimento de arco, o vetor tangente $(x'(s), y'(s))$ é unitário e, conseqüentemente, a aplicação $t : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $t(s) = (x'(s), y'(s))$ define uma curva diferenciável cujo traço está contido na circunferência unitária de \mathbb{R}^2 . Seja então $\theta(s)$, $0 < \theta(s) < 2\pi$, o ângulo que $\theta(s)$ faz com o eixo x , isto é, $x'(s) = \cos \theta(s)$ e $y'(s) = \sin \theta(s)$. Conforme variamos s , o valor $\theta(s)$ define uma função que, intuitivamente, mede a rotação total do vetor tangente, ou seja, o ângulo total descrito pelo ponto $\theta(s)$ à

medida que percorremos a curva α de 0 a l (veja [7], p. 42-43). Desde que α é fechada, este ângulo é um múltiplo inteiro de 2π . Este número inteiro é chamado índice de rotação da curva α e ele muda de sinal quando mudamos a orientação da curva. A partir disso, o Teorema do Índice de Rotação nos diz o seguinte: o índice de rotação de uma curva plana fechada e simples é ± 1 com o sinal dependendo da orientação da curva.

Sejam agora a aplicação translação $T_{m,n} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T_{m,n}(x, y) = (x + m, y + n)$, onde m, n são inteiros, e a relação de equivalência em \mathbb{R}^2 que identifica os pontos (x, y) e (x_1, y_1) se existem inteiros m, n tais que $T_{m,n}(x, y) = (x_1, y_1)$. O espaço quociente de \mathbb{R}^2 por esta relação de equivalência é denotado então por $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Em cada quadrado unitário aberto cujos vértices possuem coordenadas inteiras, existe apenas um representante de cada um dos elementos de T e, conseqüentemente, T pode ser pensado apenas como um quadrado fechado com os lados opostos identificados.

A partir da estrutura diferenciável de \mathbb{R}^2 e a aplicação projeção $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$, onde $\pi(x, y) = \{T_{m,n}(x, y); m, n \text{ são inteiros}\}$, induzimos uma estrutura diferenciável e Riemanniana em T , na qual π é isometria local. Com isso, o produto interno em T é essencialmente o produto interno usual de \mathbb{R}^2 e, munido com esta métrica, T é chamado de toro plano (ou toro flat). Logo, para pontos $p, q \in \mathbb{R}^2$ suficientemente próximos, a função distância associada a métrica de T é dada por $d_T(\pi(p), \pi(q)) = d_{\mathbb{R}^2}(p, q)$. Ainda, se $p, q \in \mathbb{R}^2$ são pontos no interior de um quadrado unitário fechado cujos vértices possuem coordenadas inteiras e $p + q$ permanece no interior deste quadrado, identificamos $\pi(p) = p$, $\pi(q) = p$ e $\pi(p + q) = p + q$. Em particular, como a métrica Riemanniana de \mathbb{R}^2 , enquanto um grupo de Lie, é bi-invariante, o mesmo vale para a métrica Riemanniana induzida no grupo de Lie T .

Agora, dada a ação transitiva por isometrias $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(p, q) = p + q$, definimos a ação transitiva por isometrias $\psi : \mathbb{R}^2 \times T \rightarrow T$ dada por $\psi(p, \pi(q)) = \pi \circ \varphi(p, q)$.

Proposição 3.15. *Sejam T o toro plano e a ação transitiva por isometrias $\psi : \mathbb{R}^2 \times T \rightarrow T$ dada por $\psi(p, q) = \pi \circ \varphi(p + q)$.*

(a) *Seja Y compacto em \mathbb{R}^2 tal que Y está contido no interior de um quadrado unitário fechado cujos vértices possuem coordenadas inteiras. Então, $X = \pi(Y)$ é um compacto em T e a métrica de Hausdorff intrínseca \widehat{d}_X em T coincide com d_T .*

(b) Seja C conjunto aberto de \mathbb{R}^2 (cujo bordo é o traço de uma curva plana fechada simples) tal que C está contido no interior de um quadrado unitário fechado cujos vértices possuem coordenadas inteiras. Então, $X = T - \pi(C)$ é compacto em T e a métrica de Hausdorff intrínseca \widehat{d}_X em T coincide com d_T .

(c) Seja Q o interior de um quadrado fechado de \mathbb{R}^2 . Suponhamos que Q está contido no interior de um quadrado unitário fechado (de lados paralelos aos lados de Q) cujos vértices possuem coordenadas inteiras. Então, $X = T - \pi(Q)$ é compacto em T e a métrica de Hausdorff intrínseca \widehat{d}_X em T é a métrica de Finsler obtida da norma

$$F(v) = \max\{|v_1|, |v_2|\}$$

para todo $v = (v_1, v_2) \in \mathfrak{g}_T = \mathbb{R}^2$.

Demonstração: Observamos que, para os compactos $X \subset T$ dos itens (a), (b) e (c), os elementos em \mathbb{R}^2 que fixam X são do tipo (m, n) com m, n inteiros. Logo, $H_X = \Gamma$ e $\mathbb{R}^2/H_X = T$, onde Γ é o subgrupo de \mathbb{R}^2 dos elementos que possuem coordenadas inteiras.

(a) O conjunto compacto Y está contido em um aberto U de \mathbb{R}^2 tal que $\pi : U \rightarrow \pi(U)$ é uma isometria. Logo, fixado p suficientemente próximo de $(0, 0)$, temos $p + Y \in U$ e $d_{H, \mathbb{R}^2}(Y, p + Y) = d_{H, T}(X, p + X)$. Isto conclui a prova do item (a).

(b) O bordo de C coincide com o bordo ∂X de X (veja Figura 3.1) e, sendo X compacto em T com ∂X suave de dimensão 1, segue da Proposição 3.9 que

$$F(v) = \max_{x \in \partial X} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_T,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Mostraremos que existe $p_0 \in \partial X$ tal que

$$\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)p_0 \right)^N = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)p_0.$$

Para tanto, seja K_v o campo de vetores em T (invariante à direita) definido por

$$K_v(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)p.$$

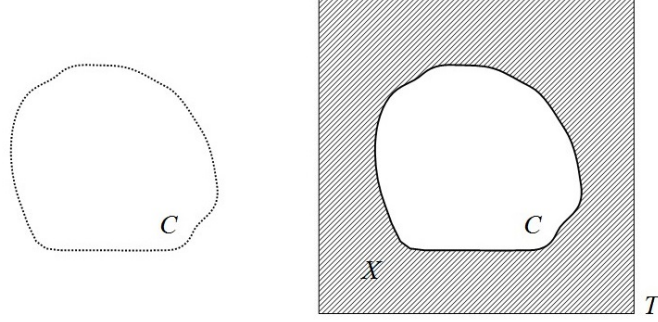


Figura 3.1: Traço de uma curva plana fechada simples delimitando um aberto C em \mathbb{R}^2 e compacto $X = T - \pi(C)$ em T .

Desde que π é uma isometria local, temos que campos invariantes em T estão localmente identificados à campos invariantes (constantes) em \mathbb{R}^2 . Logo, $K_v(p) = y \in \mathbb{R}^2$ para todo $p \in T$ e, portanto, K_v forma um ângulo constante θ com relação ao eixo x . Agora, a rotação total do vetor tangente (e do vetor normal) da curva plana fechada simples que compõe o bordo de X é 2π . Escolhemos então $p_0 \in \partial X$ tal que o ângulo do vetor normal de p_0 com relação ao eixo x é θ . Com isso, y está na mesma reta suporte do vetor normal de p_0 , isto é, $K_v(p_0) = y \in (T_{p_0}\partial X)^N$. O resultado segue do Corolário 3.11.

(c) Sejam Q o interior de um quadrado fechado de vértices a, b, c e d e lados $L_{a,b}, L_{a,c}, L_{b,d}$ e $L_{c,d}$ correspondentes a esses vértices. Identificamos Q e $\pi(Q)$ em T (veja Figura 3.2). Fixamos $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ de modo que $p + Q$ permanece no interior do quadrado fechado unitário que contém Q . Então, dado $x \in X = T - Q$, temos que $x \in p + Q$ é equivalente a $x \notin p + X$ e, conseqüentemente,

$$d_{\mathbb{R}^2}(x, T - (p + Q)) = d_T(x, p + X) \neq 0 \quad \text{se, e só se,} \quad x \in p + Q.$$

Para fixar ideias, escolhemos $p_1, p_2 > 0$ suficientemente pequenos tal que $(p + Q) \cap Q \neq \emptyset$. Logo, $L_{c,d} \cap (p + Q) \neq \emptyset$ e $L_{b,d} \cap (p + Q) \neq \emptyset$. Existem pontos $z^a = (z_1^a, z_2^a) \in L_{c,d} \cap (p + Q)$ e $z^b = (z_1^b, z_2^b) \in L_{b,d} \cap (p + Q)$ tais que

$$d_T(z^a, p + X) = d_{\mathbb{R}^2}(z^a, p + L_{a,c}) = d_{\mathbb{R}^2}(z^a, p + L_{c,d}) = |p_2|,$$

$$d_T(z^b, p + X) = d_{\mathbb{R}^2}(z^b, p + L_{a,b}) = d_{\mathbb{R}^2}(z^b, p + L_{b,d}) = |p_1|.$$

Além disso, para todo $x \in X$, verificamos

$$d_T(x, p + X) \leq \max \{d_T(z^a, p + X), d_T(z^b, p + X)\} = \max \{|p_1|, |p_2|\}.$$

Logo, $\sup_{x \in X} d_T(x, p + X) = \max\{|p_1|, |p_2|\}$. Analogamente, $\sup_{x \in X} d_T(X, p + x) = \max\{|p_1|, |p_2|\}$.

Com isso, $d_X((0, 0), (p_1, p_2)) = \max\{|p_1|, |p_2|\}$ e o resultado segue. \square

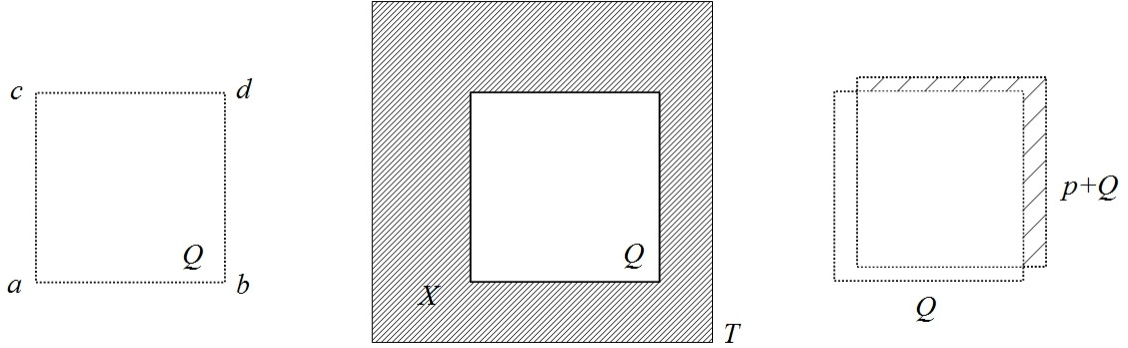


Figura 3.2: Quadrado aberto Q com vértices a, b, c e d , compacto $X = T - Q$ em T e quadrado $p + Q$ com parte hachurada $X \cap (p + Q)$.

3.3.2 Exemplos no plano hiperbólico

Seja o semiplano superior $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ com a métrica da geometria não euclidiana de Lobatchevski, isto é, se $s : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ é um sistema de coordenadas locais em torno de $p \in \mathbb{H}^2$, com $s(x_1, x_2) = q \in s(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = ds(e_i)$, onde e_i são os elementos da base canônica de \mathbb{R}^2 , então $g_{ij}(x_1, x_2) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_{\mathbb{H}^2}$ com $g_{11} = g_{22} = 1/x_2^2$ e $g_{12} = g_{21} = 0$. Adotamos este modelo para o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , no qual as geodésicas são as semirretas verticais e as semicircunferências com centro euclidiano no eixo x . As circunferências em \mathbb{H}^2 possuem o mesmo traço das circunferências no plano euclidiano, com exceção de seu centro hiperbólico ser deslocado para baixo quando comparado ao centro euclidiano.

O grupo $I(\mathbb{H}^2)$ das isometrias de \mathbb{H}^2 é formado por todas as aplicações que são restrições de aplicações conformes em \mathbb{R}^2 que levam \mathbb{H}^2 sobre si mesmo. As aplicações conformes em \mathbb{R}^2 , por sua vez, são constituídas via composição de isometrias, dilatações (homotetias) e

inversões, no máximo uma de cada (veja [8], p. 187). Por uma inversão (em um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2$) entendemos a aplicação definida por

$$\text{Inv}_{p_0}(p) = \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|_{\mathbb{R}^2}^2} + p_0, \quad p \in \mathbb{R}^2 - \{p_0\}. \quad (3.5)$$

Geometricamente, temos que Inv_{p_0} deixa fixa a circunferência de raio 1 com centro em p_0 e permuta entre si as regiões interior e exterior a tal circunferência. Em particular, $\text{Inv}_{p_0}^2$ é a aplicação identidade em $\mathbb{R}^2 - \{p_0\}$.

Consideramos o subgrupo de $I(\mathbb{H}^2)$ gerado por composições entre dilatações e translações na primeira coordenada. Este subgrupo age de modo transitivo em \mathbb{H}^2 e se g é um dos seus elementos, então g é a composição de uma única dilatação D e uma única translação na primeira coordenada T , ou seja, $g = T \circ D$. A partir disso, escrevemos $g = (t, d)$, com $d > 0$, onde $e = (0, 1)$ é o elemento neutro e $g^{-1} = (-t/d, 1/d)$ o inverso de g . Conseqüentemente, esta ação transitiva por isometrias passa a ser representada por

$$\varphi : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2, \quad \varphi(g, (x_1, x_2)) = g(x_1, x_2) = (dx_1 + t, dx_2).$$

A partir de agora, nosso objetivo consiste em calcular d_X e \widehat{d}_X considerando a ação acima e alguns compactos específicos em \mathbb{H}^2 . Destacamos que, para todo $X \subset \mathbb{H}^2$ compacto, a métrica de Hausdorff d_X é uma métrica \mathbb{H}^2 -invariante definida no espaço homogêneo \mathbb{H}^2/H_X , com $H_X = \{e\}$, que identificamos com o próprio \mathbb{H}^2 .

Dados x, y pontos em \mathbb{H}^2 , denotamos a abscissa de x por x_1 e a ordenada de x por x_2 , isto é, $x = (x_1, x_2)$. Dizemos então que $x < y$ se $x_2 < y_2$ e, caso $x_2 = y_2$, se $x_1 < y_1$. Além disso, se W é o traço de uma curva qualquer em \mathbb{H}^2 , dizemos que $x < W$ quando a reta vertical que contém x intercepta W e $x < x_W$ para todo x_W nesta interseção. Analogamente, estendemos para os casos $>$, \leq e \geq .

Sejam p um ponto em \mathbb{H}^2 e $\gamma(s) = (t_0, s)$, com $s \in (0, +\infty)$, parametrização de uma reta vertical de abscissa t_0 não contendo p . Existe um (único) ponto $s_0 \in (0, +\infty)$ tal que $d_{\mathbb{H}^2}(p, \gamma(s_0)) \leq d_{\mathbb{H}^2}(p, \gamma(s))$ para todo s , ou seja, $d_{\mathbb{H}^2}(p, \gamma) = d_{\mathbb{H}^2}(p, \gamma(s_0))$ (veja [7], p. 427). Além disso, se $\sigma_{s_0} : [0, a] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é a geodésica que liga p a $\gamma(s_0)$, então σ_{s_0} é perpendicular a γ (ou seja, $\langle \gamma'(s_0), \sigma'_{s_0}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2} = 0$). Agora, se σ_s denota a geodésica que liga p a $\gamma(s)$, determinamos uma família de curvas vizinhas de σ_{s_0} , ou seja, ao par (p, γ) , associamos a

aplicação diferenciável

$$f : (0, +\infty) \times [0, a] \rightarrow \mathbb{H}^2, \quad f(s, t) = \sigma_s(t).$$

A aplicação f é uma variação de σ_{s_0} e a curva transversal desta variação é a curva parametrizada diferenciável $f_t : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $t \in [0, a]$ fixado, dada por $f_t(s) = f(s, t)$. O vetor velocidade desta curva transversal em $s = 0$, $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$, é um campo vetorial diferenciável ao longo de σ_{s_0} chamado de campo variacional de f com relação a curva σ_{s_0} .

O comprimento de cada curva σ_s é representado pela função $L_{p,\gamma} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L_{p,\gamma}(s) = d_{\mathbb{H}^2}(p, \gamma(s))$. Em termos da aplicação f , ainda escrevemos

$$L_{p,\gamma}(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right| dt, \quad s \in (0, +\infty),$$

e, conseqüentemente, a função energia é dada por

$$E_{p,\gamma}(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right|^2 dt, \quad s \in (0, +\infty).$$

Desde que $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right| = \left| \frac{d\sigma_s}{dt} \right| = \text{constante}$ para todo $s \in (0, +\infty)$, temos $L_{p,\gamma}(s)^2 = aE_{p,\gamma}(s)$ para todo $s \in (0, +\infty)$.

Estamos interessados em determinar a variação do comprimento de σ_s a partir de s_0 . Para tanto, sejam σ_{s_1} e σ_{s_2} geodésicas com $s_1 < s_0 < s_2$. Então,

$$\langle \gamma'(s_1), \sigma'_{s_1}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2} < 0 < \langle \gamma'(s_2), \sigma'_{s_2}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2}.$$

Nestas condições, mostraremos também que

$$\langle \gamma'(s_2), \sigma'_{s_2}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2} = |\langle \gamma'(s_1), \sigma'_{s_1}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2}| \quad \text{se, e só se,} \quad d_{\mathbb{H}^2}(p, \gamma(s_1)) = d_{\mathbb{H}^2}(p, \gamma(s_2)).$$

De fato, observamos que $s_0 < s \neq s_2$ se, e só se, $0 < \langle \gamma'(s), \sigma'_s(a) \rangle_{\mathbb{H}^2} \neq \langle \gamma'(s_2), \sigma'_{s_2}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2}$. Seja então $\text{Inv}_{\sigma_{s_0}}$ a aplicação inversão de σ_{s_0} , isto é, a aplicação de \mathbb{R}^2 que deixa fixa a circunferência de raio s_0 e centro $(t_0, 0)$ contendo σ_{s_0} e permuta entre si suas regiões interior e exterior. Deste modo, a curva $\text{Inv}_{\sigma_{s_0}} \circ \gamma$ possui o mesmo traço de γ , mas com orientação invertida. Em particular, $\text{Inv}_{\sigma_{s_0}} \circ \sigma_{s_1}(a)$ está sobre γ . Portanto, $\text{Inv}_{\sigma_{s_0}} \circ \sigma_{s_1}$ é uma geodésica com origem em p coincidindo com alguma geodésica $\sigma_{\tilde{s}}$ ($s_0 < \tilde{s}$) da variação f tal que $|\langle \gamma'(s_1), \sigma'_{s_1}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2}| = \langle \gamma'(\tilde{s}), \sigma'_{\tilde{s}}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2}$. Logo, se $\langle \gamma'(s_2), \sigma'_{s_2}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2} = |\langle \gamma'(s_1), \sigma'_{s_1}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2}|$, então $\tilde{s} = s_2$. Por sua vez, a volta segue como consequência da proposição abaixo.

Proposição 3.16. *Sejam p um ponto em \mathbb{H}^2 e $\gamma(s)$, $s \in (0, +\infty)$, uma reta vertical não contendo p . Se a função $L_{p,\gamma} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $L_{p,\gamma}(s) = d_{\mathbb{H}^2}(p, \gamma(s))$, assume valor de mínimo em s_0 , então $L_{p,\gamma}$ é decrescente em $(0, s_0)$ e crescente em $(s_0, +\infty)$.*

Demonstração: Sejam $\gamma(s) = (t_0, s)$ e a variação $f(s, t) = \sigma_s(t)$. Notemos que $f_a(s) = \gamma(s)$. Além disso, fixados $s_1 < s_0 < s_2$, se V^1 e V^2 denotam os campos variacionais de f com relação a σ_{s_1} e σ_{s_2} , temos $V^1(a) = \gamma'(s_1)$ e $V^2(a) = \gamma'(s_2)$. Pela fórmula da primeira variação de energia de uma curva (veja [8], p. 215), obtemos $E'_{p,\gamma}(s_i) = 2 \langle \gamma'(s_i), \sigma'_{s_i}(a) \rangle_{\mathbb{H}^2}$, $i = 1, 2$. Como $s_1 < s_0 < s_2$, temos $E'_{p,\gamma}(s_1) < 0$ e $E'_{p,\gamma}(s_2) > 0$. Com isso, a função $E_{p,\gamma}$ cresce a partir de s_0 e, da igualdade $L_{p,\gamma}(s)^2 = aE_{p,\gamma}(s)$, concluímos o mesmo para a função $L_{p,\gamma}$. \square

Outras informações relevantes são obtidas, por exemplo, quando consideramos x, z pontos em \mathbb{H}^2 , γ reta vertical não contendo x, z e $\sigma_x, \sigma_z : [0, a] \rightarrow \mathbb{H}^2$ as geodésicas que minimizam as distâncias de x, z a γ . Estas geodésicas estão sobre arcos de circunferências de mesmo centro euclidiano e, se r_x, r_z denotam os raios euclidianos de tais circunferências, a dilatação $p \mapsto \frac{r_z}{r_x} \cdot p$, $p \in \mathbb{R}^2$, leva a circunferência de σ_x na circunferência de σ_z . Deste modo, se $x < z$ com x, z em uma mesma reta vertical, o arco ligando $\frac{r_z}{r_x} \cdot x$ a $\sigma_z(a)$ contém σ_z , ou seja,

$$d_{\mathbb{H}^2}(x, \gamma) > d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma). \quad (3.6)$$

Além disso, se $z < x$ possuem abscissa menor do que a abscissa da reta vertical γ e x, z estão em uma mesma reta horizontal, o arco ligando $\frac{r_z}{r_x} \cdot x$ a $\sigma_z(a)$ está contido em σ_z , ou seja,

$$d_{\mathbb{H}^2}(x, \gamma) < d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma) \quad (3.7)$$

(veja Figura 3.3).

Sejam p um ponto em \mathbb{H}^2 e t a abscissa de uma reta vertical em \mathbb{H}^2 . A medida que variamos t , o lugar geométrico dos pontos que minimizam a distância de p à reta satisfaz a equação de uma hipérbole. De fato, suponhamos sem perda de generalidade que $p = (0, b)$ e que a representa o raio euclidiano da geodésica que minimiza a distância de p à reta. Então, (t, a) é o ponto sobre a reta onde a distância mínima ocorre e $a^2 = b^2 + t^2$, ou seja,

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1.$$

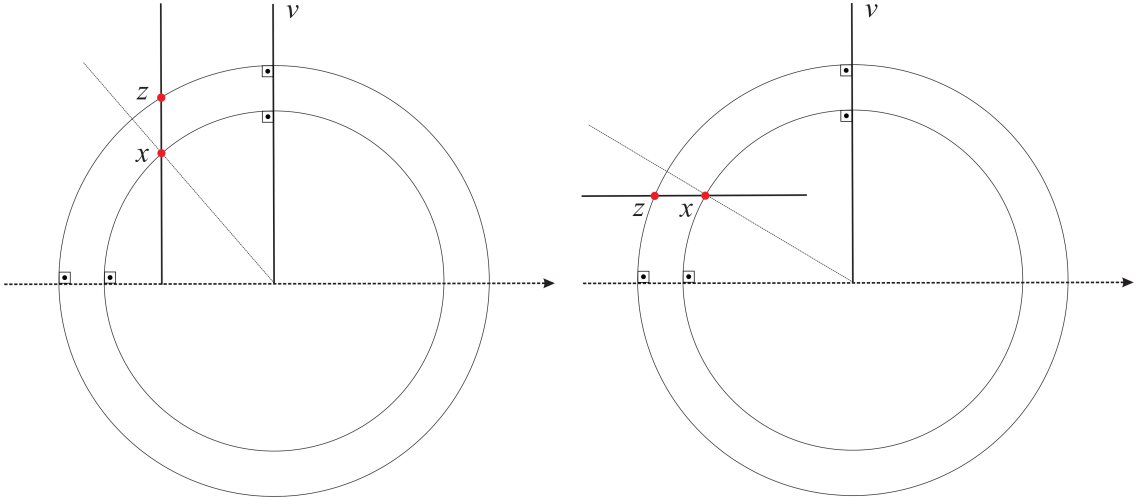


Figura 3.3: Comparação entre $d_{\mathbb{H}^2}(x, \gamma)$ e $d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma)$.

Tal lugar geométrico associado a um ponto qualquer $x \in \mathbb{H}^2$ determina uma curva (hipérbole) $s \in \mathbb{R} \mapsto h_x(s) \in \mathbb{H}^2$ que será denotada por h_x . Podemos sempre considerar uma parametrização para h_x de modo que $h_x(0) = x$. Além disso, se γ é uma reta vertical, existe $t_\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $h_x \cap \gamma = \{h_x(t_\gamma)\}$ e, portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(x, \gamma) = d_{\mathbb{H}^2}(x, h_x \cap \gamma) = d_{\mathbb{H}^2}(x, h_x(t_\gamma))$. Dessa forma, escrevemos $h_x(t_\gamma)$ para representar o ponto da interseção $h_x \cap \gamma$.

Pela Proposição 3.16, segue então que o comprimento das geodésicas que ligam um ponto $x \in \mathbb{H}^2$ a pontos em uma reta vertical γ é crescente a partir de $h_x(t_\gamma)$. Mais precisamente, dados y, z pontos em γ , se $y < z \leq h_x(t_\gamma)$, então

$$d_{\mathbb{H}^2}(x, h_x(t_\gamma)) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x, z) < d_{\mathbb{H}^2}(x, y) \quad (3.8)$$

e, se $h_x(t_\gamma) \leq y < z$, então

$$d_{\mathbb{H}^2}(x, h_x(t_\gamma)) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x, y) < d_{\mathbb{H}^2}(x, z). \quad (3.9)$$

Outra propriedade importante é que as hipérbolas são preservadas por isometria, ou seja, dados $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2$ e uma isometria $g = (t, d) \in \mathbb{H}^2$, temos

$$gh_x = h_{gx}. \quad (3.10)$$

Para uma prova, basta observarmos que circunferências euclidianas centradas no eixo x são levadas por g em circunferências euclidianas também centradas no eixo x . O mesmo vale para $g \in I(\mathbb{H}^2)$ onde g é uma reflexão em torno de uma reta vertical.

No intuito de estabelecermos algum critério para o cálculo da distância de Hausdorff em diferentes conjuntos de \mathbb{H}^2 , a proposição abaixo é elementar.

Proposição 3.17. *Seja x um ponto qualquer em \mathbb{H}^2 .*

(a) *Sejam x^a, x^b pontos em \mathbb{H}^2 sobre uma mesma reta vertical γ , com $x^a < x^b$, e x^c ponto médio de x^a, x^b (isto é, x^c está sobre a reta vertical e $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, x^c) = d_{\mathbb{H}^2}(x^c, x^b)$). Então,*

$$\begin{cases} d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) = d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b) & \text{se } h_x(t_\gamma) = x^c, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) > d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b) & \text{se } h_x(t_\gamma) > x^c, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) < d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b) & \text{se } h_x(t_\gamma) < x^c. \end{cases}$$

Equivalentemente, se C é a semicircunferência (euclidiana) em \mathbb{H}^2 que contém x^c e é ortogonal a reta vertical de x^c , $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) = d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b)$ se $x \in C$, $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) < d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b)$ se x está no interior de região delimitada por C e $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) > d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b)$ se x está no exterior.

(b) *Sejam x^a, x^b pontos em \mathbb{H}^2 sobre uma mesma reta horizontal (euclidiana), com $x_1^a < x_1^b$, e x^c ponto médio (euclidiano) de x^a, x^b . Então,*

$$\begin{cases} d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) = d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b) & \text{se } x_1 = x_1^c, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) > d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b) & \text{se } x_1 > x_1^c, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) < d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b) & \text{se } x_1 < x_1^c. \end{cases}$$

Demonstração: (a) Consideramos a semicircunferência $C_{h_x(t_\gamma)}$ de \mathbb{H}^2 que intercepta a reta vertical γ precisamente no ponto $h_x(t_\gamma)$ e é ortogonal com relação a esta reta. Se $h_x(t_\gamma) = x^c$, então a aplicação inversão com relação a $C_{h_x(t_\gamma)}$ leva o ponto x^a no ponto x^b e, portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) = d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b)$. Por outro lado, se $h_x(t_\gamma) > x^c$, temos duas possibilidades: $h_x(t_\gamma) \geq x^b$ ou $x^c < h_x(t_\gamma) < x^b$. Na primeira, por (3.8), temos $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) > d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b)$. Na segunda, a aplicação inversão com relação a $C_{h_x(t_\gamma)}$ leva o ponto x^a em um ponto de γ acima de x^b e, por (3.9), temos $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) > d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b)$. Analogamente, se $h_x(t_\gamma) < x^c$, também temos duas possibilidades: $h_x(t_\gamma) \leq x^a$ ou $x^a < h_x(t_\gamma) < x^c$. Em ambas, $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) < d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b)$.

(b) A reflexão em torno da reta vertical de x^c é uma isometria de \mathbb{H}^2 e, portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) = d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b)$ se $x_1 = x_1^c$. Seja $S_{\mathbb{H}^2}(x, d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a))$ a circunferência hiperbólica de

centro x e raio $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a)$ e denotemos por \tilde{x} seu centro euclidiano, no qual $\tilde{x}_1 = x_1$ e $\tilde{x}_2 > x_2$. Notemos que se $x_1 < x_1^c$, então x^b não pertence a circunferência euclidiana de centro \tilde{x} e raio $d_{\mathbb{R}^2}(\tilde{x}, x^a)$, ou seja, $x^b \notin S_{\mathbb{H}^2}(x, d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a))$. Portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(x, x^a) < d_{\mathbb{H}^2}(x, x^b)$. A outra desigualdade segue de maneira análoga. \square

Sejam $x^a < x^b$ pontos em uma mesma reta vertical. A distância euclidiana entre os pontos $h_{x^a}(t)$ e $h_{x^b}(t)$ é dada pela diferença entre os raios das semicircunferências que contém as geodésicas que minimizam a distância de x^a e x^b com relação a reta vertical que contém $h_{x^a}(t)$ e $h_{x^b}(t)$. Explicitamente, suponhamos sem perda de generalidade que $x^a = (0, a)$ e $x^b = (0, b)$. Então, esta diferença (euclidiana) é expressa por $\sqrt{b^2 + t^2} - \sqrt{a^2 + t^2}$. Por sua vez, a distância hiperbólica entre $h_{x^a}(t) = (t, \sqrt{a^2 + t^2})$ e $h_{x^b}(t) = (t, \sqrt{b^2 + t^2})$ é

$$d_{\mathbb{H}^2}(h_{x^a}(t), h_{x^b}(t)) = \int_{\sqrt{a^2+t^2}}^{\sqrt{b^2+t^2}} \frac{1}{s} ds = \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + t^2}}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right).$$

Deste modo, quando t tende ao infinito, $d_{\mathbb{H}^2}(h_{x^a}(t), h_{x^b}(t))$ tende a zero, pois

$$\sqrt{b^2 + t^2} - \sqrt{a^2 + t^2} = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 + t^2} + \sqrt{a^2 + t^2}}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial t} d_{\mathbb{H}^2}(h_{x^a}(t), h_{x^b}(t)) = \frac{t}{\sqrt{b^2 + t^2}} - \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}}.$$

Logo, a variação de $d_{\mathbb{H}^2}(h_{x^a}(t), h_{x^b}(t))$ é positiva se $t < 0$, nula se $t = 0$ e negativa se $t > 0$.

Ou seja, $d_{\mathbb{H}^2}(h_{x^a}(t), h_{x^b}(t))$ decresce a partir de $t = 0$. Em particular, para todo $t \neq 0$, temos

$$d_{\mathbb{H}^2}(h_{x^a}(t), h_{x^b}(t)) < d_{\mathbb{H}^2}(x^a, x^b). \quad (3.11)$$

Agora, se $x^a = (x_1^a, x_2^a)$ e $x^b = (x_1^b, x_2^b)$, dado $g = (t, d) \in \mathbb{H}^2$, $d > 0$, escrevemos $y^a := gx^a = (dx_1^a + t, dx_2^a)$ e $y^b := gx^b = (dx_1^b + t, dx_2^b)$. Logo, $y_2^a/x_2^a = y_2^b/x_2^b = d > 0$ e, da desigualdade (3.11), se $y^a \geq h_{x^a}$, então $y^b > h_{x^b}$. Em particular, y^a e y^b estão em uma mesma reta vertical com $y^a < y^b$ e $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, x^b) = d_{\mathbb{H}^2}(y^a, y^b)$ com $y_2^b/y_2^a = x_2^b/x_2^a > 1$.

Lema 3.18. *Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ pontos em \mathbb{H}^2 com $x_1 \neq y_1$. Então, a expressão da distância hiperbólica entre x e y em termos de suas coordenadas é dada por*

$$d_{\mathbb{H}^2}(x, y) = \ln \left(\frac{A(x, y)}{B(x, y)} \right),$$

onde

$$A(x, y) = \frac{\sqrt{((x_1 - y_1)^2 + (x_2^2 - y_2^2))^2 + 4y_2^2(y_1 - x_1)^2 + (x_1 - y_1)^2 + x_2^2 - y_2^2}}{2y_2(y_1 - x_1)},$$

$$B(x, y) = \frac{2x_2(y_1 - x_1)}{\sqrt{(-(x_1 - y_1)^2 + (x_2^2 - y_2^2))^2 + 4x_2^2(y_1 - x_1)^2 - (-(x_1 - y_1)^2 + x_2^2 - y_2^2)}}.$$

Demonstração: Seja C_1 a circunferência (euclidiana) em \mathbb{R}^2 , com centro de abscissa 0, contendo os pontos x e y . Denotamos por r_1 o raio de C_1 e inicialmente vamos supor que o centro de C_1 é $(0, 0)$. Consideramos também uma circunferência C_2 em \mathbb{R}^2 tal que C_2 possui raio $r_2 = 2r_1$ e centro $p = (r_1, 0)$. Se Inv_0 representa a inversão da circunferência de raio unitário e centro $(0, 0)$ conforme em (3.5), as inversões com relação as circunferências C_1 e C_2 são descritas, respectivamente, por

$$\text{Inv}_1(z) = r_1^2 \text{Inv}_0(z), \quad z \in \mathbb{R}^2 - (0, 0),$$

$$\text{Inv}_2(z) = 4r_1^2 \frac{(z - (r_1, 0))}{\|z - (r_1, 0)\|_{\mathbb{R}^2}^2} + (r_1, 0), \quad z \in \mathbb{R}^2 - (r_1, 0).$$

Se $C_1(t) = (r_1 \cos(t), r_1 \sin(t))$, $t \in (0, \pi)$, então

$$\text{Inv}_2 \circ C_1(t) = \left(-r_1, \frac{2r_1 \sin(t)}{1 - \cos(t)} \right).$$

Logo, $\text{Inv}_2(x)$ é um ponto sobre a reta vertical que passa por $-p$. Associamos então a x o triângulo retângulo de vértices $-p$, p e $\text{Inv}_2(x)$, cujo ângulo no vértice p denotamos por α_x . Além disso, no triângulo de vértices $(0, 0)$, p e x , denotamos por β_x o ângulo complementar com relação ao vértice $(0, 0)$ (veja Figura 3.4).

As inversões de C_1 e C_2 são isometrias em \mathbb{H}^2 e, portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(x, y) = d_{\mathbb{H}^2}(\text{Inv}_2(x), \text{Inv}_2(y))$. Desde que $\beta_x = 2\alpha_x$, $\beta_y = 2\alpha_y$ (os triângulos de vértices $(0, 0), p, x$ e $(0, 0), p, y$ são isósceles), concluímos também que

$$d_{\mathbb{H}^2}(x, y) = \ln \left(\frac{\tan \alpha_y}{\tan \alpha_x} \right) = \ln \left(\frac{\tan(\beta_y/2)}{\tan(\beta_x/2)} \right).$$

Além disso, temos

$$\tan(\beta_x/2) = \frac{x_2}{r_1 - x_1} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1}, \quad (3.12)$$

$$\tan(\beta_y/2) = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - y_1} = \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + y_1}{y_2}. \quad (3.13)$$

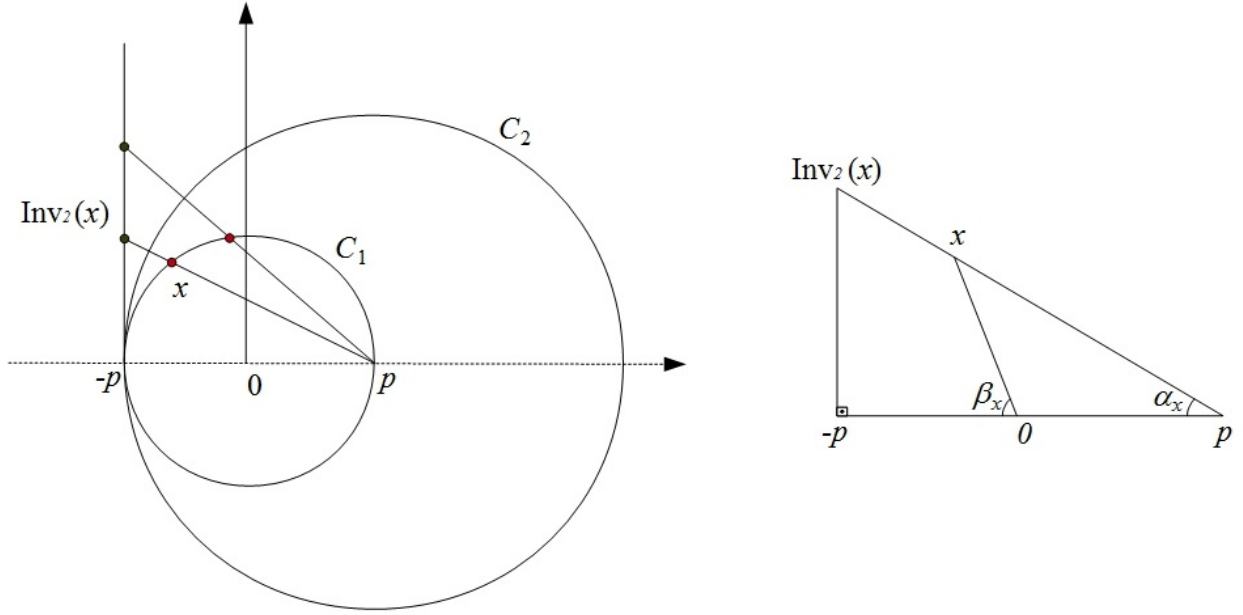


Figura 3.4: Circunferências C_1, C_2 e triângulo retângulo de vértices $-p, p$ e $\text{Inv}_2(x)$.

Observamos que os valores de $\tan(\beta_x/2)$ e $\tan(\beta_y/2)$ são dados em termos das coordenadas dos pontos $x, y \in C_1$. Porém, precisamos determinar tais valores com relação a semicircunferências contendo x e y não necessariamente centradas na origem. Mais precisamente, sejam x, y pontos de \mathbb{H}^2 sobre uma semicircunferência com centro euclidiano $z = (z_1, 0)$. Em coordenadas complexas, $x + \bar{x} = 2\text{Re}(x)$, onde $x = x_1 + ix_2$ e \bar{x} é o conjugado complexo. Então, da igualdade $\|x - z\|_{\mathbb{C}}^2 = \|y - z\|_{\mathbb{C}}^2$, temos $(x - z)(\bar{x} - z) = (y - z)(\bar{y} - z)$ e, conseqüentemente,

$$z = \frac{\|y\|_{\mathbb{C}}^2 - \|x\|_{\mathbb{C}}^2}{(y + \bar{y}) - (x + \bar{x})}.$$

Com isso,

$$x - z = \frac{-x^2 + xy + x\bar{y} - \|y\|_{\mathbb{C}}^2}{(y + \bar{y}) - (x + \bar{x})} \quad \text{e} \quad y - z = \frac{y^2 - xy - \bar{x}y + \|x\|_{\mathbb{C}}^2}{(y + \bar{y}) - (x + \bar{x})}.$$

Notemos que $-(x_1 - y_1)^2 + x_2^2 - y_2^2 + i2x_2(y_1 - x_1)$ e $(x_1 - y_1)^2 + x_2^2 - y_2^2 + i2y_2(y_1 - x_1)$ têm os mesmos argumentos de $x - z$ e $y - z$, respectivamente. Então, se β_x é ângulo complementar ao argumento do complexo $x - z$, da igualdade (3.12), escrevemos

$$\tan(\beta_x/2) = \frac{2x_2(y_1 - x_1)}{\sqrt{(-(x_1 - y_1)^2 + (x_2^2 - y_2^2))^2 + 4x_2^2(y_1 - x_1)^2} - (-(x_1 - y_1)^2 + x_2^2 - y_2^2)}.$$

Analogamente,

$$\tan(\beta_y/2) = \frac{\sqrt{((x_1 - y_1)^2 + (x_2^2 - y_2^2))^2 + 4y_2^2(y_1 - x_1)^2 + (x_1 - y_1)^2 + x_2^2 - y_2^2}}{2y_2(y_1 - x_1)}.$$

□

Proposição 3.19. *Sejam $X = \{x^a, x^b\}$ e $Y = \{y^a, y^b\}$ em \mathbb{H}^2 , com $x^a < x^b$ em uma mesma reta vertical e $Y = gX$ para algum $g \in \mathbb{H}^2$. Então, $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a) \geq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b)$. Além disso,*

$$\begin{cases} d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a) & \text{se } y_2^a = x_2^a, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) > d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a) & \text{se } y_2^a > x_2^a, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) < d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a) & \text{se } y_2^a < x_2^a. \end{cases}$$

Demonstração: É suficiente considerarmos o caso em que os pontos de X possuem abscissa 0 e $g = (t, d) \in \mathbb{H}^2, d > 0$, com $t \geq 0$.

Mostraremos primeiro que $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a) \geq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b)$. Para $t = 0$, $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b)$. Seja então $t > 0$ e denotemos por g_1 a aplicação dilatação dada por $y_2^b/y_2^a = x_2^b/x_2^a > 1$. Logo, $g_1x^a = x^b$, $g_1y^a = ((g_1y^a)_1, y_2^b)$ e $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, g_1y^a) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$. Deste modo, os pontos y^b e g_1y^a estão em uma mesma reta horizontal com $x^b < y^b < g_1y^a$ e, pela Proposição 3.17, $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b) < d_{\mathbb{H}^2}(x^b, g_1y^a)$.

Na segunda parte da proposição, o caso $y_2^a = x_2^a$ implica $y_2^b = x_2^b$ e, portanto, segue via reflexão com relação a reta vertical equidistante (em relação a métrica euclidiana) as retas verticais que contém x^a e y^a . Por fim, é suficiente verificarmos que $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) > d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a)$ quando $y_2^a > x_2^a$. A condição $y_2^a > x_2^a$ implica $d > 1$ e, portanto, o caso $t = 0$ é imediato. Agora, sejam $t > 0$ e $x^a = (0, 1)$, $x^b = (0, b)$, $y^a = (t, d)$ e $y^b = (t, db)$. Então, pelo Lema 3.18, temos

$$B(x^a, y^b) = \frac{2t}{\sqrt{(-t^2 + (1 - d^2b^2))^2 + 4t^2} - (-t^2 + 1 - d^2b^2)},$$

$$A(x^a, y^b) = \frac{\sqrt{(t^2 + (1 - d^2b^2))^2 + 4d^2b^2t^2} + t^2 + 1 - d^2b^2}{2dbt}.$$

Sendo $(t^2 + (1 - d^2b^2))^2 + 4d^2b^2t^2 = (-t^2 + (1 - d^2b^2))^2 + 4t^2$, obtemos

$$\frac{A(x^a, y^b)}{B(x^a, y^b)} = \frac{t^2 + 1 + d^2b^2 + \sqrt{(-t^2 + (1 - d^2b^2))^2 + 4t^2}}{2db}.$$

Por outro lado,

$$B(x^b, y^a) = \frac{2bt}{\sqrt{(-t^2 + (b^2 - d^2))^2 + 4b^2t^2} - (-t^2 + b^2 - d^2)},$$

$$A(x^b, y^a) = \frac{\sqrt{(t^2 + (b^2 - d^2))^2 + 4d^2t^2} + t^2 + b^2 - d^2}{2dt}.$$

Sendo $(t^2 + (b^2 - d^2))^2 + 4d^2t^2 = (-t^2 + (b^2 - d^2))^2 + 4b^2t^2$, obtemos

$$\frac{A(x^b, y^a)}{B(x^b, y^a)} = \frac{t^2 + b^2 + d^2 + \sqrt{(-t^2 + (b^2 - d^2))^2 + 4b^2t^2}}{2db}.$$

Mostraremos que

$$\frac{A(x^a, y^b)}{B(x^a, y^b)} > \frac{A(x^b, y^a)}{B(x^b, y^a)}.$$

De fato, por hipótese, temos $b, d > 1$ e $t > 0$. Além disso, valem as igualdades $(b^2 - 1)(d^2 + 1) = (b^2 - d^2) + (b^2d^2 - 1)$, $(b^2 + 1)(d^2 - 1) = (d^2 - b^2) + (b^2d^2 - 1)$ e $(b^2 - 1)(d^2 - 1) = -(b^2 + d^2) + (b^2d^2 + 1)$. Assim, da primeira igualdade, se $b \leq d$, então $(b^2d^2 - 1) > -(b^2 - d^2)$. Da segunda, se $b > d$, então $(b^2d^2 - 1) > (b^2 - d^2)$. Da terceira, ainda obtemos $(b^2d^2 + 1) > (b^2 + d^2)$. Com isso,

$$\begin{aligned} (-t^2 + (1 - d^2b^2))^2 + 4t^2 &= t^4 + 2t^2(1 + d^2b^2) + (1 - d^2b^2)^2 \\ &> t^4 + 2t^2(b^2 + d^2) + (b^2 - d^2)^2 \\ &= (-t^2 + (b^2 - d^2))^2 + 4b^2t^2, \end{aligned}$$

donde segue o desejado. Portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) > d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a)$. \square

Proposição 3.20. *Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ pontos em \mathbb{H}^2 , com $x_1 \neq y_1$, e γ_x, γ_y as retas verticais que contém x e y , respectivamente. Se $y_2 \geq x_2$, então*

$$d_{\mathbb{H}^2}(x, h_x \cap \gamma_y) \geq d_{\mathbb{H}^2}(y, h_y \cap \gamma_x). \quad (3.14)$$

Em particular, a igualdade ocorre quando $y_2 = x_2$.

Demonstração: Sejam o ponto $z = (x_1, y_2) \in \gamma_x$ e $\tilde{g} \in I(\mathbb{H}^2)$ a reflexão com relação a reta vertical equidistante a γ_x e γ_y (em relação a métrica euclidiana). Logo, $z = \tilde{g}y$, $\tilde{g}\gamma_x = \gamma_y$ e $h_z \cap \gamma_y = \tilde{g}(h_y \cap \gamma_x)$ (veja (3.10)). Então, $d_{\mathbb{H}^2}(y, h_y \cap \gamma_x) = d_{\mathbb{H}^2}(z, h_z \cap \gamma_y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x, h_x \cap \gamma_y)$, onde a última passagem é devido a (3.6). \square

Sejam $X = \{x^a, x^b\}$ em \mathbb{H}^2 , com $x^a < x^b$ em uma mesma reta vertical, e x^c o ponto médio de x^a, x^b (isto é, x^c está na reta vertical que contém X e satisfaz $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, x^c) = d_{\mathbb{H}^2}(x^c, x^b)$). Sejam também $Y = \{y^a, y^b\}$, com $Y = gX$, $g = (t, d)$, $d > 0$, e o ponto médio $y^c = gx^c$. Sem perda de generalidade, escrevemos $x^a = (0, a)$, $x^b = (0, b)$ e $x^c = (0, c)$. Notemos então que a dilatação de constante c/b leva x^b em x^c e $c/b \cdot x^c = x^a$. Isto é, vale a relação $c/b = a/c$. Seja agora $C(s) = (c \cos(s), c \sin(s))$, $s \in (0, \pi)$, a circunferência ortogonal a reta vertical que contém X no ponto x^c . Deste modo, a elipse $E^b(s) = (c \cos(s), b \sin(s))$ descreve a trajetória do ponto y^c quando y^a percorre C . Por outro lado, a elipse $E^a(s) = (c \cos(s), a \sin(s))$ descreve a trajetória do ponto y^c quando y^b percorre C (veja Figura 3.5).

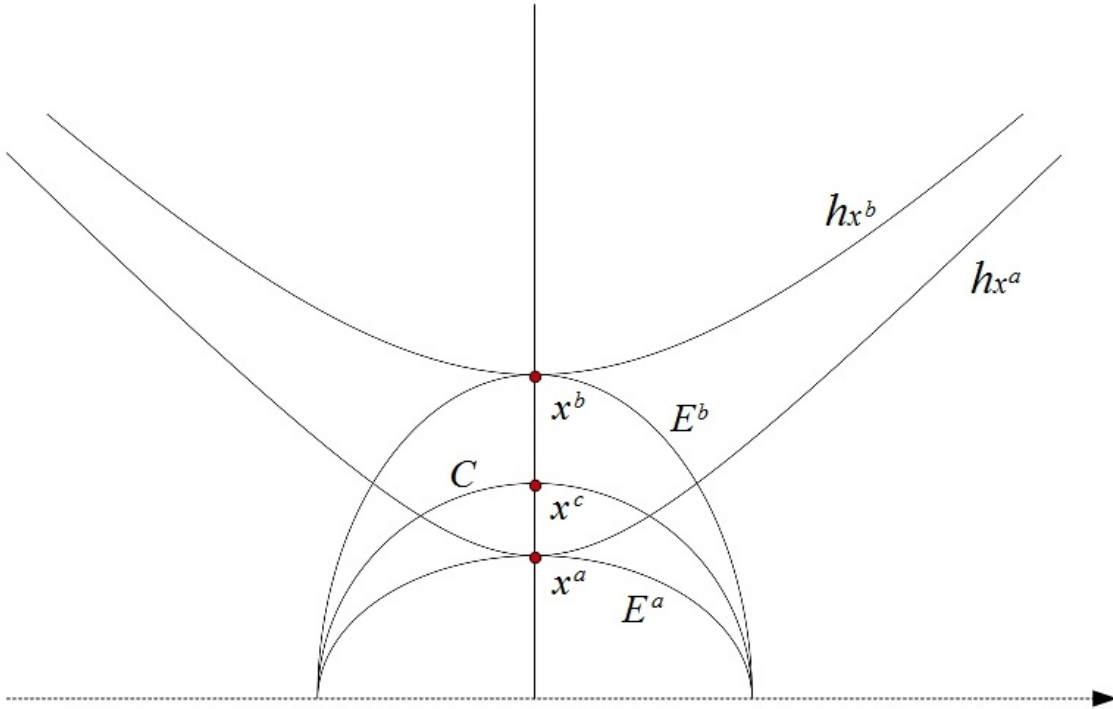


Figura 3.5: Circunferência C , hipérboles h_{x^a} , h_{x^b} e elipses E^a , E^b .

Proposição 3.21. *Sejam $X = \{x^a, x^b\}$ e $Y = \{y^a, y^b\}$ em \mathbb{H}^2 , com $x^a < x^b$ em uma mesma reta vertical, $Y = gX$ para algum $g \in \mathbb{H}^2$ e x^c, y^c pontos médios de X e Y , respectivamente.*

(a) *Se y^c está no interior da região delimitada por E^b ou $y^c \geq h_{x^a}$, então*

$$d_H(X, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a).$$

(b) Se y^c está no exterior da região delimitada por E^b e $y^c < h_{x^a}$, então

$$d_H(X, Y) = \begin{cases} d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) & \text{se } y_2^c \geq x_2^c, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a) & \text{se } y_2^c < x_2^c. \end{cases}$$

Demonstração: (a) Se $y^c < E^b$, então $y^a < C$ e $d_{\mathbb{H}^2}(X, y^a) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$. Sabemos que $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$ (veja Proposição 3.19) e o caso $d_{\mathbb{H}^2}(X, y_b) = d_{\mathbb{H}^2}(x_b, y_b)$ não precisa ser analisado. Além disso, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y^b) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b)$ ocorre quando $y^b \leq C$. Neste caso, temos $y^c \leq h_{x^a}$ e $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$ (veja Proposição 3.17). Por outro lado, sendo $y^c < h_{x^b}$, temos $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b)$ e $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, Y) = \min\{d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a), d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b)\} \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$. Logo, $d_H(X, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x_a, y_a)$.

Agora, se $y^c \geq h_{x^a}$, temos que y^c está no exterior da região delimitada por E^a e, portanto, y^b está no exterior da região delimitada por C . Logo, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y^b) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b)$. Mais, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y^a) = \min\{d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a), d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a)\} \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$. Por outro lado, temos que $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$ e $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, Y) = \min\{d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a), d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b)\} \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$. Portanto, $d_H(X, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x_a, y_a)$.

(b) Se y^c está no exterior da região delimitada por E^b , então y^a e y^b estão no exterior da região delimitada por C . Logo, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y^a) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a)$ e $d_{\mathbb{H}^2}(X, y^b) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a)$ (pois $y^c < h_{x^a}$). Por outro lado, $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b)$ e $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b)$ (pois $h_{y^b} \geq x_c$). Notemos, por fim, que $y_2^c \geq x_2^c$ implica $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) \geq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a)$ e $y_2^c < x_2^c$ implica $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) < d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a)$. \square

Proposição 3.22. *Seja o compacto $X = \{x^a, x^b\} \subset \mathbb{H}^2$ com $x^a < x^b$ em uma mesma reta vertical. Então, a métrica de Hausdorff intrínseca induzida \widehat{d}_X em \mathbb{H}^2 coincide com a métrica hiperbólica de \mathbb{H}^2 . Em particular, $d_X \neq \widehat{d}_X$.*

Demonstração: A métrica d_X está definida no espaço homogêneo \mathbb{H}^2/H_X , onde $H_X = \{e\}$. Então, identificamos os espaços \mathbb{H}^2/H_X e \mathbb{H}^2 fazendo $gH_X = gx^a$ para todo g . Pela proposição anterior, sabemos que $d_X(H_X, gH_X) = d_H(X, gX) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, gx^a)$ para g suficientemente próximo de $e \in \mathbb{H}^2$. Então, da Proposição 1.10, segue que as métricas intrínsecas \widehat{d}_X e $\widehat{d}_{\mathbb{H}^2} = d_{\mathbb{H}^2}$ coincidem. Mais precisamente, $\widehat{d}_X(H_X, gH_X) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, gx^a)$ para todo $g \in \mathbb{H}^2$ e, com isso, $d_X \neq \widehat{d}_X$. \square

Uma análise semelhante da distância de Hausdorff pode ser feita para segmentos verticais em \mathbb{H}^2 . Nesta direção é que apresentamos os resultados abaixo.

Lema 3.23. *Sejam $X = \{x^a, x^b\}$ e $Y = \{y^a, y^b\}$ em \mathbb{H}^2 , com $x^a < x^b$ em uma mesma reta vertical e $Y = gX$ para algum $g \in \mathbb{H}^2$. Se $y_2^a \geq x_2^a$ e $x_b > h_{y^a}$, então $y^b > h_{x^a}$.*

Demonstração: Sejam γ_X e γ_Y as retas verticais que contém X e Y , respectivamente. Então, $x^a \leq h_{y^a} \cap \gamma_X < x^b$. Sejam $z = (x_1^a, y_2^a) \in \gamma_X$ e $\tilde{g} \in I(\mathbb{H}^2)$ a reflexão com relação a reta vertical equidistante a γ_X e γ_Y (em relação a métrica euclidiana). Logo, $z = \tilde{g}y^a$, $\tilde{g}\gamma_X = \gamma_Y$ e $\tilde{g}(h_{y^a} \cap \gamma_X) = h_z \cap \gamma_Y$ (veja (3.10)). De $x^a \leq h_{y^a} \cap \gamma_X < x^b$, vem $\tilde{g}x^a \leq h_z \cap \gamma_Y < \tilde{g}x^b \leq y^b$. Portanto, $y^b > h_z$ e, sendo $x^a \leq z$, obtemos $y^b > h_{x^a}$. \square

Lema 3.24. *Sejam X e Y segmentos verticais em \mathbb{H}^2 com $Y = gX$ para algum $g \in \mathbb{H}^2$, onde $\{x^a, x^b\}$, com $x^a < x^b$, e $\{y^a, y^b\}$ são os pontos extremos de X e Y , respectivamente. Suponhamos $y_2^a \geq x_2^a$. Então, se $y^a \geq h_{x^a}$, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$ para todo $y \in Y$ e, se $y^a < h_{x^a} < y^b$, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y)$ para todo $y \in Y$.*

Demonstração: No que segue, faremos uso das Proposições 3.16, 3.17 e 3.19, além das desigualdades (3.6), (3.8), (3.9) e (3.14).

Suponhamos $y^a \geq h_{x^a}$. Então, $y^b \geq h_{x^b}$. De $y_2^a \geq x_2^a$, dado $y \in Y$, temos os seguintes casos: $h_y \cap X \neq \emptyset$ e $h_y \cap X = \emptyset$. Se $h_y \cap X \neq \emptyset$, temos

$$d_{\mathbb{H}^2}(X, y) = d_{\mathbb{H}^2}(X \cap h_y, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(X \cap h_{y^a}, y^a) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a).$$

Se $h_y \cap X = \emptyset$, temos $h_y \geq x_b$ e, portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y)$. Com relação a este último caso, consideramos as seguintes possibilidades:

1. Se $y \geq h_{x^b}$, temos $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$.
2. Se $y < h_{x^b}$, ainda podemos ter $h_{y^a} \geq x_b$ ou $h_{y^a} < x_b$. Se o ocorrer a primeira, $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$. Se ocorrer a segunda, existe $\tilde{y}_b \in Y$ com $\tilde{y}^b \leq y$ tal que $h_{\tilde{y}^b} \cap X = \{x^b\}$ e, portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(X, \tilde{y}_b) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, \tilde{y}_b)$. Logo,

$$d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a) \geq d_{\mathbb{H}^2}(h_{y^a} \cap X, y^a) > d_{\mathbb{H}^2}(h_{\tilde{y}^b} \cap X, \tilde{y}_b) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, \tilde{y}_b) \geq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y).$$

Portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$ para todo $y \in Y$.

Agora, consideramos $y^a < h_{x^a} < y^b$. De $y_2^a \geq x_2^a$, dado $y \in Y$, temos os casos: $h_y \cap X \neq \emptyset$ e $h_y \cap X = \emptyset$. Se $h_y \cap X \neq \emptyset$, temos

$$d_{\mathbb{H}^2}(X, y) = d_{\mathbb{H}^2}(X \cap h_y, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(X \cap h_{y^a}, y^a) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y).$$

Se $h_y \cap X = \emptyset$, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y)$. Neste último, consideramos ainda as possibilidades:

1. Se $y \geq h_{x^b}$, temos $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b) < d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y)$, onde a última passagem decorre do seguinte: seja uma isometria $g_1 \in \mathbb{H}^2$ tal que $g_1 x^a = h_{x^a} \cap Y$. Logo, $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y) \geq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, g_1 x^b)$ (veja Proposição 3.19). Além disso, da hipótese inicial $y^a < h_{x^a} \cap Y$, concluímos que $g_1 x^b > y^b \geq y \geq h_{x^b}$ e, assim, $d_{\mathbb{H}^2}(x^b, g_1 x^b) > d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^b)$.
2. Se $y < h_{x^b}$, podemos ter $h_{y^a} \geq x^b$ ou $h_{y^a} < x^b$. Se ocorrer $h_{y^a} \geq x^b$, de $y^a < h_{x^a} < y^b$ e $y^a = g x^a$, vem $g^{-1}(h_{x^a} \cap Y) \in X$. Com relação aos pares de pontos $\{x^a, g^{-1}(h_{x^a} \cap Y)\}$ e $\{y^a, h_{x^a} \cap Y\}$, sabendo que $y_2^a \geq x_2^a$, segue da Proposição 3.19 que

$$d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y) \geq d_{\mathbb{H}^2}(g^{-1}(h_{x^a} \cap Y), y^a) \geq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a) \geq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y).$$

Por fim, se ocorrer $h_{y^a} < x^b$, existe $\tilde{y}_b \in Y$ com $\tilde{y}_b \leq y$ tal que $d_{\mathbb{H}^2}(X, \tilde{y}_b) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, \tilde{y}_b)$ e, assim, $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y) > d_{\mathbb{H}^2}(h_{y^a} \cap X, y^a) > d_{\mathbb{H}^2}(x^b, \tilde{y}_b) \geq d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y)$.

Portanto, $d_{\mathbb{H}^2}(X, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y)$ para todo $y \in Y$. □

Proposição 3.25. *Sejam X e Y segmentos verticais em \mathbb{H}^2 com $Y = gX$ para algum $g \in G$, onde $\{x^a, x^b\}$, com $x^a < x^b$, e $\{y^a, y^b\}$ são os pontos extremos de X e Y , respectivamente.*

(a) *Se $y_2^a \geq x_2^a$, então*

$$d_H(X, Y) = \begin{cases} d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a) & \text{se } y^a \geq h_{x^a}, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y) & \text{se } y^a < h_{x^a} < y^b, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) & \text{se } y^b \leq h_{x^a}. \end{cases}$$

(b) *Se $y_2^a < x_2^a$, então*

$$d_H(X, Y) = \begin{cases} d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a) & \text{se } x^b \leq h_{y^a}, \\ d_{\mathbb{H}^2}(h_{y^a} \cap X, y^a) & \text{se } x^a < h_{y^a} < x^b, \\ d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a) & \text{se } x^a \geq h_{y^a}. \end{cases}$$

Demonstração: É suficiente verificarmos apenas o caso $y_2^a \geq x_2^a$.

Suponhamos $y^a \geq h_{x^a}$. Então, $y^b \geq h_{x^b}$ e $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$. Mais, dado $x \in X$, temos que h_x intercepta Y ou $h_x < y_a$. Em qualquer caso, $d_{\mathbb{H}^2}(x, Y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$ (pois $x^a \leq x$ e h_x cresce a partir do ponto de interseção com a reta vertical que contém Y). Logo,

$$\sup_{x \in X} d_{\mathbb{H}^2}(x, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a).$$

Por outro lado, dado $y \in Y$, sendo $y^a \geq h_{x^a}$, temos $d_{\mathbb{H}^2}(X, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$ para todo $y \in Y$ (veja Lema 3.24). Portanto, $d_H(X, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^a)$.

Agora, seja $y^a < h_{x^a} < y^b$. Então, $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y)$. Além disso, dado $x \in X$, temos as seguintes possibilidades: $h_x \cap Y \neq \emptyset$ e $h_x \cap Y = \emptyset$. Se $h_x \cap Y \neq \emptyset$, temos $d_{\mathbb{H}^2}(x, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x, h_x \cap Y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y)$. Se $h_x \cap Y = \emptyset$, temos $d_{\mathbb{H}^2}(x, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x, y^b)$. Este último caso só ocorre quando $y^b < h_x$ e, assim, deve existir $\tilde{x}^b \leq x$ em X tal que $d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{x}^b, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{x}^b, y^b)$. Logo, sendo $y_2^b \geq x_2^b$, $d_{\mathbb{H}^2}(x, y^b) \leq d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{x}^b, y^b) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y)$. Portanto,

$$\sup_{x \in X} d_{\mathbb{H}^2}(x, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y).$$

Por outro lado, dado $y \in Y$, sendo $y^a < h_{x^a} < y^b$, temos $d_{\mathbb{H}^2}(X, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y)$ para todo $y \in Y$ (veja Lema 3.24). Logo, $d_H(X, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, h_{x^a} \cap Y)$.

Por fim, seja $y^b \leq h_{x^a}$. Então, de $y_2^a \geq x_2^a$, temos $h_{y^a} \geq x_b$ (veja Lema 3.23). Logo, $d_{\mathbb{H}^2}(x, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x, y^b)$ para todo $x \in X$ e $d_{\mathbb{H}^2}(X, y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y)$ para todo $y \in Y$. Além disso, sendo $h_{y^b} > x^b$, temos $\sup_{x \in X} d_{\mathbb{H}^2}(x, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b)$ e, sendo $h_{x^b} > y^b$, temos $\sup_{y \in Y} d_{\mathbb{H}^2}(X, y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a)$. Sabemos que $y_2^a \geq x_2^a$ implica $d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b) > d_{\mathbb{H}^2}(x^b, y^a)$ e, portanto, $d_H(X, Y) = d_{\mathbb{H}^2}(x^a, y^b)$. \square

Proposição 3.26. *Seja o compacto $X \subset \mathbb{H}^2$, onde X é um segmento vertical com extremos $\{x^a, x^b\}$, $x^a < x^b$ e $x^a = e$. Então, a métrica de Hausdorff intrínseca induzida \widehat{d}_X em \mathbb{H}^2 coincide com a métrica hiperbólica de \mathbb{H}^2 . Em particular, $d_X \neq \widehat{d}_X$.*

Demonstração: Mostraremos que as estruturas de comprimento induzidas por d_X e $d_{\mathbb{H}^2}$ coincidem, isto é, $L_{d_X}(c) = L_{d_{\mathbb{H}^2}}(c)$ para toda curva contínua $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$. Para tanto, fixado $\varepsilon > 0$, é suficiente verificarmos que existe $\delta > 0$ tal que $d_{\mathbb{H}^2}(p, q) = d_{\mathbb{H}^2}(e, p^{-1}q) < \delta$ implica

$$|d_X(p, q) - d_{\mathbb{H}^2}(p, q)| < \varepsilon d_{\mathbb{H}^2}(p, q) \quad (3.15)$$

para todo $p, q \in \mathbb{H}^2$. De fato, suponhamos que (3.15) é válido. Como a curva $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uniformemente contínua, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $|t - s| < \tilde{\delta}$ implica $d_{\mathbb{H}^2}(c(t), c(s)) < \delta$. Seja então $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ partição do intervalo $[a, b]$ tal que $|\mathcal{P}| < \tilde{\delta}$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{d_X}(\mathcal{P}) - \sum_{d_{\mathbb{H}^2}}(\mathcal{P}) \right| &\leq \sum_{i=1}^N |d_X(c(t_{i-1}), c(t_i)) - d_{\mathbb{H}^2}(c(t_{i-1}), c(t_i))| \\ &< \sum_{i=1}^N \varepsilon d_{\mathbb{H}^2}(c(t_{i-1}), c(t_i)) < \varepsilon L_{d_{\mathbb{H}^2}}(c) \end{aligned}$$

e, assim, concluímos o desejado.

Mostraremos então que (3.15) é válido. Fixemos $\varepsilon > 0$ e $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2$. Denotamos por r_z a reta horizontal que contém z . Então, existe $\tilde{t}_z > 0$ tal que

$$d_{\mathbb{H}^2}(h_z(t), r_z(t)) < \varepsilon |t| \quad \text{para todo } |t| \leq \tilde{t}_z.$$

De fato, sem perda de generalidade, suponhamos que $z_1 = 0$ e $t \in [0, +\infty)$. Escrevemos $r_z(t) = ((r_z(t))_1, (r_z(t))_2) = (t, z_2)$ e $h_z(t) = ((h_z(t))_1, (h_z(t))_2) = (t, \sqrt{t^2 + z_2^2})$. Então, dada a reta $r_\varepsilon(t) = (t, \varepsilon z_2 t + z_2)$, temos $h_z(0) = z = r_\varepsilon(0)$ e $(h'_z(0))_2 = 0 < \varepsilon z_2 = (r'_\varepsilon(0))_2$. Logo, garantimos a existência de $\tilde{t}_z > 0$ tal que $(h_z(t))_2 < (r_\varepsilon(t))_2 = \varepsilon z_2 t + z_2$ para todo $0 \leq t \leq \tilde{t}_z$. Com isso, $d_{\mathbb{R}^2}(h_z(t), r_z(t)) = (h_z(t))_2 - z_2 < \varepsilon z_2 t$ e

$$d_{\mathbb{H}^2}(h_z(t), r_z(t)) = \int_{z_2}^{\sqrt{t^2 + z_2^2}} \frac{1}{s} ds \leq \frac{1}{z_2} d_{\mathbb{R}^2}(h_z(t), r_z(t)) < \varepsilon t$$

para todo $0 \leq t \leq \tilde{t}_z$. Em particular, escolhemos $\tilde{t}_\varepsilon > 0$ tal que $h_\varepsilon(\tilde{t}_\varepsilon) \leq 2$ e

$$d_{\mathbb{H}^2}(h_\varepsilon(t), r_\varepsilon(t)) < \varepsilon |t| \quad \text{para todo } |t| \leq \tilde{t}_\varepsilon. \quad (3.16)$$

Essa escolha ficará evidente depois.

Seja $z \in \mathbb{H}^2$ tal que $z \geq e$ (isto é, $z_2 \geq 1$) e $z < h_e$. Então, observamos que

$$d_{\mathbb{H}^2}(h_e \cap \gamma_z, z) \leq d_{\mathbb{H}^2}(h_e \cap \gamma_z, r_e \cap \gamma_z), \quad (3.17)$$

onde γ_z e γ_e passam a denotar as retas verticais que contém z e e , respectivamente. Agora, seja $z \in \mathbb{H}^2$ tal que $z \leq e$ (isto é, $z_2 \leq 1$) e $e < h_z$. Nestas condições, temos que

$$d_{\mathbb{H}^2}(e, h_z \cap \gamma_e) \leq d_{\mathbb{H}^2}(h_e \cap \gamma_z, r_e \cap \gamma_z). \quad (3.18)$$

Para uma prova deste último, sejam $\tilde{g} \in I(\mathbb{H}^2)$ a reflexão com relação a reta vertical equidistante a γ_e e γ_z (em relação a métrica euclidiana). Logo, $\tilde{g}\gamma_e = \gamma_z$ e $\tilde{g}(h_z \cap \gamma_e) = h_{\tilde{g}z} \cap \gamma_z$ (veja (3.10)). Além disso, $r_e \cap \gamma_z \leq h_{\tilde{g}z} \cap \gamma_z \leq h_e \cap \gamma_z$ (pois $z \leq e$ e $e < h_z$). Assim,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(e, h_z \cap \gamma_e) &= d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{g}e, \tilde{g}(h_z \cap \gamma_e)) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(r_e \cap \gamma_z, h_{\tilde{g}z} \cap \gamma_z) \leq d_{\mathbb{H}^2}(r_e \cap \gamma_z, h_e \cap \gamma_z). \end{aligned}$$

Agora, dados $p, q \in \mathbb{H}^2$, denotamos $z = p^{-1}q$. Se $p, q \in \mathbb{H}^2$ estão suficientemente próximos, temos z suficientemente próximo de e e, conseqüentemente, $zx_b > h_e$ e $x_b > h_z$. Logo, pela Proposição 3.25, os valores que $d_X(p, q) = d_X(e, z)$ pode assumir são:

1. se $z \geq h_e$ ou $e \geq h_z$, temos

$$d_X(e, z) = d_H(X, zX) = d_{\mathbb{H}^2}(e, z). \quad (3.19)$$

2. se $z \geq e$ e $z < h_e$, temos

$$d_X(e, z) = d_H(X, zX) = d_{\mathbb{H}^2}(e, h_e \cap \gamma_z). \quad (3.20)$$

3. se $z \leq e$ e $e < h_z$, temos

$$d_X(e, z) = d_H(X, zX) = d_{\mathbb{H}^2}(z, h_z \cap \gamma_e). \quad (3.21)$$

Por fim, seja $\delta > 0$ tal que se $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{H}^2$ com $d_{\mathbb{H}^2}(e, w) < \delta$, então $|w_1| < \tilde{t}_e$. Em particular, se $z = p^{-1}q$ satisfaz $d_{\mathbb{H}^2}(e, z) < \delta$, temos $|z_1| < \tilde{t}_e$. Logo, de (3.16)-(3.21),

$$\begin{aligned} |d_X(p, q) - d_{\mathbb{H}^2}(p, q)| &= |d_X(e, z) - d_{\mathbb{H}^2}(e, z)| \\ &\leq \max \{ |d_{\mathbb{H}^2}(e, h_e \cap \gamma_z) - d_{\mathbb{H}^2}(e, z)|, \\ &\quad |d_{\mathbb{H}^2}(z, h_z \cap \gamma_e) - d_{\mathbb{H}^2}(e, z)| \} \\ &\leq \max \{ d_{\mathbb{H}^2}(h_e \cap \gamma_z, z), d_{\mathbb{H}^2}(h_z \cap \gamma_e, e) \} \\ &\leq d_{\mathbb{H}^2}(h_e \cap \gamma_z, r_e \cap \gamma_z) < \varepsilon |z_1| < 2\varepsilon d_{\mathbb{H}^2}(p, q). \end{aligned}$$

Observamos que a última passagem decorre do seguinte: dada $\sigma(s) = (s, \sigma_2(s))$ geodésica em \mathbb{H}^2 que liga e a $z = p^{-1}q$, temos $\sigma_2(s) \leq h_e(\tilde{t}_e) \leq 2$ e, conseqüentemente,

$$d_{\mathbb{H}^2}(p, q) = d_{\mathbb{H}^2}(e, z) = \int_0^{|z_1|} \frac{\sqrt{1 + \sigma_2^2(s)}}{\sigma_2(s)} ds \geq \int_0^{|z_1|} \frac{\sqrt{1 + \sigma_2^2}}{2} \geq \frac{|z_1|}{2}.$$

□

Proposição 3.27. *Seja o compacto $X = \{x^a, x^b\}$ em \mathbb{H}^2 com $x_1^a < 0 < x_1^b$, $|x_1^a| = |x_1^b|$ e $x_2^a = x_2^b$. Então, a métrica de Hausdorff intrínseca induzida \widehat{d}_X em \mathbb{H}^2 não coincide com a métrica hiperbólica de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração: Mostraremos que a métrica de Finsler F associada a X não é diferenciável. De fato, como $X = \{x^a, x^b\}$ é subvariedade compacta em \mathbb{H}^2 de dimensão 0, estamos nas condições da Proposição 3.7 e qualquer vetor em $T_x\mathbb{H}^2$, $x \in X$, é ortogonal a T_xX . Nestas condições, para todo $v \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$, obtemos

$$\begin{aligned} F(v) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_H(X, \exp(tv)X)}{t} \\ &= \max_{x \in X} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right)^N \right\|_{\mathbb{H}^2} \\ &= \max \left\{ \left\| \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x^a \right\|_{\mathbb{H}^2}, \left\| \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x^b \right\|_{\mathbb{H}^2} \right\}. \end{aligned}$$

Mostraremos que F não é diferenciável na circunferência unitária em \mathbb{R}^2 . Para tanto, dado $v \in \mathbb{R}^2$ com $\|v\|_{\mathbb{R}^2} = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ de modo que $\exp(tv) = (t \cos \theta, t \sin \theta)$ e, portanto,

$$v = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Deste modo, para $x = (x_1, x_2) \in X$, temos

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x = (x_1 \sin \theta + \cos \theta, x_2 \sin \theta)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv)x \right\|_{\mathbb{H}^2} &= \frac{1}{x_2} \sqrt{(x_1 \sin \theta + \cos \theta)^2 + (x_2 \sin \theta)^2} \\ &= \frac{1}{x_2} \sqrt{x_1(x_1 \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) + \cos^2 \theta + x_2^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

A partir disso, consideramos $f^a, f^b, g : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ as funções diferenciáveis dadas por $f^a(\theta) = x_1^a(x_1^a \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)$, $f^b(\theta) = x_1^b(x_1^b \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)$ e $g(\theta) = \cos^2 \theta + (x_2^a)^2 \sin^2 \theta$. Se tomarmos $f(\theta) = \max\{f^a(\theta), f^b(\theta)\}$, sendo $x_2^a = x_2^b$, podemos então escrever

$$F(v) = F(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{x_2^a} \sqrt{f(\theta) + g(\theta)}.$$

Estabelecemos o seguinte fato: a expressão de F depende da escolha dos pontos x^a e x^b que compõem X . Além disso, F é diferenciável na circunferência unitária se, e só se, f é diferenciável em $[0, 2\pi)$.

Desde que $x_1^a < 0, x_1^b > 0$ e $|x_1^a| = |x_1^b|$, temos $f^a(\theta) - f^b(\theta) = 2x_1^a \sin(\theta) \cos(\theta)$. Observamos que $f^a(\theta) \leq f^b(\theta)$ se $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $f^a(\theta) \geq f^b(\theta)$ para todo $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Deste modo, obtemos $f(\theta) = f^b(\theta)$ quando $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $f(\theta) = f^a(\theta)$ quando $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$. Contudo, segue que f não é diferenciável em $\frac{\pi}{2}$, pois

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = (f^b)' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -x_1^b < 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = (f^a)' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -x_1^a > 0.$$

□

Conclusão

Este trabalho teve como objetivo fazer um estudo das métricas de Hausdorff induzidas em espaços homogêneos. Trata-se de um tema novo e o trabalho, de um modo geral, incluindo os resultados obtidos nesta tese, encontram-se em estágio inicial. Assim sendo, a continuação deste estudo se apresenta como perspectiva de pesquisa futura. Neste sentido, a generalização e a apresentação de novos exemplos já se constituem como caminhos interessantes. Uma outra linha de pesquisa que pode ser seguida é estabelecer até que ponto propriedades válidas para as métricas de Finsler suaves também valem para as métricas de Hausdorff intrínsecas. Talvez alguns problemas possam ser estudados apenas no contexto de métricas de Finsler contínuas em variedades diferenciáveis, sem a exigência de qualquer invariância da métrica por ação de grupo de difeomorfismos. Isto nos leva a pensar, por exemplo, na possibilidade de generalização de objetos matemáticos das geometrias Riemanniana e de Finsler de classe C^∞ para as métricas de Hausdorff intrínsecas.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Antoneli, M. Forger, P. Gaviria - Maximal subgroups of compact Lie groups, *Journal of Lie Theory*, vol. 22, p. 949-1031, 2012.
- [2] A. Arvanitoyeorgos - An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces, *Student mathematical library*, American Mathematical Society, 2003.
- [3] V. N. Berestovskii - Homogeneous manifolds with an intrinsic metric. I, *Siber. Math. J.*, vol. 29, no. 6, p. 887-897, 1988.
- [4] V. N. Berestovskii - Homogeneous manifolds with an intrinsic metric. II, *Siber. Math. J.*, vol. 30, no. 2, p. 180-191, 1989.
- [5] V. N. Berestovskii, V. V. Gorbatsевич - Homogeneous spaces with inner metric and with integrable invariant distributions, *Anal. Math. Phys.*, vol. 4, no. 4, p. 263-331, 2014.
- [6] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov - A course in metric geometry, *Graduate studies in mathematics*, American Mathematical Society, 2001.
- [7] M. P. do Carmo - Geometria diferencial de curvas e superfícies, *Sociedade Brasileira de Matemática*, Rio de Janeiro, 2008.
- [8] M. P. do Carmo - Geometria Riemanniana, *Sociedade Brasileira de Matemática*, Rio de Janeiro, 2008.
- [9] S. Helgason - Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, *Academic Press*, 1978.

- [10] S. Kobayashi, K. Nomizu - Foundations of differential geometry, vol.1, Interscience Publishers, 1963.
- [11] J. R. Munkres - Topology, ed.2, Prentice Hall, New Jersey, 2000.
- [12] S. B. Myers, N. E. Steenrod - The group of isometries of a Riemannian manifold, Ann. of Math, vol. 40, no. 2, p. 400-416, 1939.
- [13] L. A. B. San Martin - Grupos de Lie, Notas de aula, Unicamp, 2015, acessado em: (<http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2015/gruplie0.pdf>)
- [14] A. A. Schneider - Métricas intrínsecas invariantes à esquerda em grupos de Lie, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2016.
- [15] M. Spivak - A Comprehensive introduction to differential geometry, vol.1, ed.3, Publish or Perish, Texas, 1999.
- [16] F. W. Warner - Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, 1983.