UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

ARTHUR HENRIQUE CAIXETA

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UMA EQUAÇÃO DO TIPO MOORE-GIBSON-THOMPSON

Maringá
2016

ARTHUR HENRIQUE CAIXETA

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UMA EQUAÇÃO DO TIPO MOORE-GIBSON-THOMPSON

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profª. Drª. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Co-orientadora: Profª. Drª. Irena Lasiecka

Maringá

2016

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UMA EQUAÇÃO DO TIPO MOORE-GIBSON-THOMPSON

ARTHUR HENRIQUE CAIXETA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Prof^{a}. Dr^{a}. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR
(Orientadora)

Prof^{a}. Dr^{a}. Irena Lasiecka
University of Memphis - Memphis-TN
(Co-orientadora)

Prof^{a}. Dr^{a}. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina - UEL-PR

Prof^{a}. Dr^{a}. Márcia Cristina Anderson Braz Federson
Universidade de São Paulo - ICMC-USP

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR

Agradecimentos

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, aos meus familiares, amigos e professores, em especial às professoras Irena Lasiecka, Luci Harue Fatori e Valéria Neves Domingos Cavalcanti.

Resumo

Consideramos o comportamento assintótico da equação de Moore-Gibson-Thompson (MGT). Este tipo de equação aparece no contexto de acústica não-linear [10, 21, 17], onde a modelagem considera o paradoxo da velocidade infinita de propagação, resultando em uma dinâmica de natureza hiperbólica. Em um primeiro momento, será provado que a equação de terceira ordem em questão gera um sistema dinâmico bem-posto o qual admite um atrator global de dimensão fractal finita. A principal dificuldade encontrada é a ausência de uma função de Lyapunov, juntamente com a não verificação de compacidade das trajetórias, cujo fato previne a aplicabilidade de ferramentas usuais da área de sistemas dinâmicos. A segunda abordagem considera a equação de MGT sujeita a efeitos viscoelásticos. A obtenção de taxas uniforme de decaimento exponencial está vinculada à hipóteses usuais restritivas acerca da função que localiza a atuação da dissipação friccional.

Palavras-chave: Equação de Terceira Ordem, Equação de Moore-Gibson-Thompson, Atrator Global, Comportamento Assintótico.

Abstract

Long-time behavior of the Moore-Gibson-Thompson equation (MGT) is considered. This type of equations arises in the context of nonlinear acoustics [10, 21, 17] where modeling accounts for a finite speed of propagation paradox, the latter results in hyperbolic nature of the dynamics. At first, we will prove that the third order equation in consideration generates a well-posed dynamical system which admits a global and finite dimensional attractor. The main difficulty associated with the problem is the lack of Lyapunov function along with the lack of compactness of trajectories, which fact prevents applicability of standard tools in the area of dynamical systems. The second approach considers the MGT equation subjected to viscoelastic effects. Obtaining uniform exponential decay rate is linked with usual restrictive assumptions regarding the function that localizes the frictional damping.

Keywords: Third Order Equation, Moore-Gibson-Thompson Equation, Global Attractor, Long-time Behavior.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo a investigação do comportamento assintótico de uma dinâmica de terceira ordem no tempo, governada por uma equação diferencial parcial definida em um espaço de Hilbert apropriado sob dois aspectos. 1) O primeiro consiste na análise da equação de MGT não-linear, em que a existência de solução é obtida por meio da Teoria de Semigrupos e a existência de atrator global é estabelecida. 2) O segundo consiste na examinação da equação linear sujeita a efeitos viscoelásticos e os mecanismos de dissipação atuam de maneira localizada e complementar.

O modelo estudado tem sido considerado recentemente no contexto da modelagem de ondas em acústica não-linear, onde a lei de Fourier é substituída pela lei de Maxwell-Cattaneo, que se aproxima mais do mundo real e considera velocidade finita de propagação de ondas acústicas, a qual nos leva à uma equação onde aparecem três derivadas temporais (diferentemente dos modelos clássicos com duas derivadas temporais) [21, 36, 37]. Tal modelagem é motivada pelo fenômeno de velocidade infinita de propagação, observado nas soluções da equação do calor. A presença de três derivadas no tempo muda completamente o caráter da dinâmica subjacente, de parabólica para hiperbólica tornando-a mais rica, com o surgimento de novos fenômenos e, abrangendo casos desde não existência de solução [12, 29], até o decaimento assintótico de soluções de energia finita [25].

O modelo não-linear mencionado toma a seguinte forma abstrata:

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 Au + bAu_t = f(u, u_t, u_{tt}). \tag{0.1}$$

Aqui, A é um operador auto-adjunto, positivo e densamente definido em um espaço de Hilbert H e $f(u, u_t, u_{tt})$ é um termo semilinear. O coeficiente $\tau > 0$ corresponde fisicamente ao parâmetro de relaxação da lei de Maxwell-Cattaneo e é usualmente muito pequeno (de ordem 10^{-12} para a maioria dos metais).

O modelo apresentado acima, inclui, por exemplo, a equação de Moore-Gibson-Thompson (MGT) que aparece no contexto da modelagem de ondas ultrassônicas de alta frequência. Neste caso, a variável u denota a pressão acústica (ou também a velocidade potencial acústica), o operador A denota o operador $-\Delta$ com condições de fronteira de Dirichlet ou de Neumann, $c > 0$ é a velocidade do som, $b = \delta + \tau c^2$, em que δ é a difusividade do som. A constante α representa dissipação friccional no modelo. Existem, na literatura, vários modelos relevantes que descrevem a propagação de ondas acústicas não-lineares (veja [1, 38]). Uma das mais comumente usadas é o modelo MGT em que

$$f(u, u_t, u_{tt}) = k\frac{d^2}{dt^2}u^2, \tag{0.2}$$

com $k = \frac{1+B}{\rho c^2}$, B denotando o parâmetro de não-linearidade e ρ é a densidade do meio. Em [24], uma versão linearizada de (0.1) é estudada com base na teoria de semigrupos. Foi provado em [24] que a análise da equação de terceira ordem é muito diferente da de segunda ordem, onde um coeficiente positivo de difusividade nos dá um efeito regularizante. Isto não é mais verdade nas equações de terceira ordem que são de tipo hiperbólico, necessitando, portanto, um tipo bastante diferente de análise das equações de segunda ordem relacionadas. Para investigarmos a EDP não-linear de terceira ordem, a compreensão da boa colocação e do comportamento assintótico de sua linearização é de suma importância. A forma linearizada (em torno de zero) da equação em sua versão abstrata é dada por

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 Au + bAu_t = 0 \tag{0.3}$$

com condições iniciais

$$u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1,\ u_{tt}(0) = u_2, \tag{0.4}$$

em que A é um operador auto-adjunto positivo, densamente definido no espaço de Hilbert

H, satisfazendo uma desigualdade do tipo Poincaré $D(A^{1/2}) \subset H$ com o seguinte controle de norma

$$\|w\|_H \leq C_0 \|A^{1/2} w\|_H, \; \forall w \in D(A^{1/2}), \tag{0.5}$$

com $0 < C_0 := \lambda_{min}^{-1/2}$ e λ_{min} sendo o ínfimo do espectro do operador A. Aqui A^θ, $\theta \in [0,1]$, denota a potência fracionária de A [31].

Como consequência da presença do parâmetro de relaxação τ, o modelo de "tipo parabólico" ($\tau = 0$) se torna de "tipo hiperbólico" ($\tau > 0$). Assim, os problemas de boa-colocação, comportamento assintótico e o de estabilização, se tornam mais complicados devido à presença de uma quantidade infinita de autovalores instáveis, [25, 24, 30], onde a última referência apresenta uma análise espectral bastante detalhada do modelo linear. É suficiente dizer que, na presença do parâmetro $\tau > 0$, o problema (0.3) se torna mal-posto no caso em que o parâmetro de difusão b é igual a zero [12]. Por outro lado, quando $b > 0$, o sistema gera um semigrupo fortemente contínuo nas variáveis (u, u_t, u_{tt}) no espaço

$$\mathcal{H} \equiv D(A^{1/2}) \times D(A^{1/2}) \times H.$$

Na verdade, a geração de um semigrupo fortemente contínuo também se dá em um espaço mais regular $\mathcal{H}_1 \equiv D(A) \times D(A^{1/2}) \times H$ [24].

Além disto, quando o parâmetro de relaxação τ é pequeno e o parâmetro b é grande com respeito ao parâmetro natural de dissipação α, $\gamma := \alpha - \frac{\tau c^2}{b} > 0$, então o semigrupo correspondente é exponencialmente estável em ambos os espaços $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_1$ [24]. Quando $\gamma = 0$, o semigrupo é conservativo. Não há decaimento, mesmo que a difusividade e a dissipação estejam presentes no modelo. Isto é confirmado pela análise espectral feita em [30]. Já no caso em que $\gamma < 0$, foi provado em [9] que a versão 1-dimensional de (0.3) admite um semigrupo caótico, topologicamente mesclante e uniformemente contínuo sobre espaços de Banach do tipo Herzog.

Neste trabalho, vamos analisar a versão não linear do modelo (0.3).

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 A u + b A u_t = f(u, u_t), \tag{0.6}$$

em que $A = -\Delta$ com condiçao de Dirichlet nula. Isto é

$$Au = -\Delta u, \ u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Para que possamos analisar novos aspectos críticos do problema, não consideraremos efeitos não-lineares gerados pelo termo uu_{tt} e manteremos o termo quadrático $2ku_t^2$ associado a pequenas, mas rápidas mudanças no modelo. Este termo sozinho já será representativo o suficiente na apresentação das propriedades da análise associada ao tratamento de um sistema dinâmico de terceira ordem que não é gradiente e que falha na verificação da regularidade usual das trajetórias.

A boa-colocação local tanto no espaço quanto no tempo (para dados iniciais pequenos) foi desenvolvida em [25]. A grosso modo, neste trabalho foi provado que, quando $\gamma > 0$, pode-se obter uma bola em $\mathcal{H}_1$ de raio suficientemente pequeno, tal que a dinâmica correspondente é bem posta em $\mathcal{H}_1$. Mais ainda, se o dado inicial for escolhido nesta bola, o sistema será exponencialmente estável.

Nosso principal interesse, no que concerne a 1) primeira abordagem, é o comportamento das soluções (i) na ausência de dados iniciais pequenos e (ii) sobre a influência de forças externas que afetem a estrutura dos estados estacionários, fazendo com que estes sejam não-triviais. A configuração determinada por (i) e (ii) nos leva naturalmente ao conceito de atratores globais. Em verdade, mostraremos que a existência local no tempo não exige dados iniciais pequenos e o problema é bem-posto em $\mathcal{H}$ para dados iniciais de tamanho arbitrários. Por outro lado, como os termos não lineares tornam o problema não-dissipativo (no sentido de que a energia total do sistema não necessariamente é decrescente), o comportamento assintótico das soluções se torna um problema sutil. Se faz necessária a adição de um mecanismo de controle para forjar o comportamento assintótico das órbitas. Consideraremos o seguinte termo não-linear de controle

$$g(u_t) := \beta(u_t)^3,$$

que é contínuo de $D(A^{1/2})$ em H, mas não é compacto quando tratado como um operador de Nemytskii. A equação resultante se torna a seguinte:

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 Au + bAu_t + \beta g(u_t) = 2ku_t^2 + p(u), \tag{0.7}$$

em que $p \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz a condição de dissipatividade detalhada abaixo

- A derivada
$$-\delta \leq p'(s) \leq m, \ \ s \in \mathbb{R}, \tag{0.8}$$
para $0 \leq m \leq \min\left\{\dfrac{c^2}{4C_0^2}, \dfrac{c^2\gamma}{16\tau\theta C_0^2}\right\}$ e $0 < \delta < \min\left\{m, \dfrac{b\gamma}{4\tau C_0^2}\right\}$, $\alpha/\tau < \theta < c^2/b$.

É oportuno observar que a função real p satisfaz $|p(s)| \leq m|s| + C$, com $C = |p(0)|$. Mais ainda, vale a pena notar que apesar da escolha da constante θ não ser crucial, sua existência é imprescindível para obter a equivalência entre a energia linear do sistema e a norma do espaço de fase. Tal afirmação será melhor clarificada na Observação 2.3.1 abaixo em que θ é tomada, por simplicidade, como sendo o ponto médio de $\left[\frac{\alpha}{\tau}, \frac{c^2}{b}\right]$.

Estas escolhas particulares apesar de mais simples, são representativas o suficiente para o problema e para as técnicas introduzidas.

Com relação ao problema não-linear (0.7), estabeleceremos os seguintes resultados:

- Boa-colocação local (no tempo) com tamanho arbitrário para os dados iniciais em $\mathcal{H}$ e $\beta \geq 0$;
- Existência global de soluções limitadas em $\mathcal{H}$ e $\beta > 0$;
- Existência de atrator global capturando soluções na topologia de $\mathcal{H}$ para qualquer valor de $\beta > 0$;
- Suavidade e finitude dimensional do atrator.

Os resultados acima descritos foram publicados em [3].

Contrastando a proposta anterior, motivados pelo trabalho de Cavalcanti e Oquendo [4], em que os autores obtém taxas de decaimento para a energia de soluções de uma equação de onda com dissipação friccional não-linear, temos o modelo linear de dissipação localizada no seguinte formato:

$$\tau u_{ttt} + \alpha(\mathbf{x})u_{tt} - c^2\Delta u - b\Delta u_t + \int_0^t g(t-s)div\,(a(\mathbf{x})\nabla u(s))\,ds = 0. \tag{0.9}$$

Em [?], os autores consideram este tipo de equação (Moore-Gibson-Thompson) com dissipações friccional e viscoelástica, ambas agindo sobre todo o domínio. Além disso, para a obtenção de decaimento exponencial uniforme da energia, além das hipóteses canônicas impostas sobre o núcleo de viscoelasticidade e o parâmetro c, há a necessidade de impor também uma relação sobre as outras constantes presentes no modelo, a saber, a positividade da constante $\gamma := \alpha - \dfrac{\tau c^2}{b}$. Em um segundo projeto [?], o núcleo g é generalizado pelos autores.

Aqui, estamos também interessados no decaimento da energia, porém o método dos multiplicadores sugerido em [4] não é aplicável ao modelo (0.9), a menos que hipóteses adicionais sejam consideradas em relação à função α, responsável pelo mecanismo de dissipação friccional no modelo. Devido ao fato do problema, neste caso, ser não-autônomo, as soluções de (0.9) são obtidas via método de Faedo-Galerkin e o decaimento exponencial de tais soluções é estabelecido. Os resultados obtidos nessa direção configuram-se num primeiro estudo e resultados mais gerais são objetos de projetos futuros.

Esta tese encontra-se organizada conforme segue: No primeiro capítulo são apresentadas definições, notações, alguns resultados básicos e exemplos da teoria de semigrupos e sistemas dinâmicos que são necessários para melhor compreensão do trabalho; no segundo capítulo, formularemos de maneira rigorosa o problema, bem como demonstraremos a boa-colocação mencionada anteriormente, por meio da teoria de semigrupos; no terceiro capítulo, trataremos da existência de atrator global para o sistema dinâmico obtido no capítulo dois, além de propriedades adicionais. A saber, suavidade e dimensão finita, ambas obtidas diretamente de uma estimativa de quasistabilidade. No quarto e último capítulo, apresentaremos o decaimento exponencial da equação sujeita a efeitos viscoelásticos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, encontram-se as definições, resultados e exemplos necessários para o melhor entendimento dos resultados que serão obtidos nos capítulos subsequentes.

1.1 Equações Diferenciais Abstratas

1.1.1 Operadores Acretivos em Espaços de Hilbert

Seja H um espaço de Hilbert. Consideraremos operadores unívocos (possivelmente não-lineares) A em H, definidos em um subespaço $D(A) \subseteq H$, denominado **domínio** de A, com **imagem** $R(A) = \{Ax : x \in D(A)\}$.

Definição 1.1.1. *Um operador $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ será chamado **acretivo** se tivermos*

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_H \geq 0, \text{ para quaisquer } x_1, x_2 \in D(A).$$

*Um operador acretivo A será dito **maximal acretivo (m-acretivo)** se a relação*

$$(Av - u^*, v - u)_H \geq 0$$

para alguns $u, u^* \in H$ e para todo $v \in D(A)$ implicar que $u \in D(A)$ e $u^* = Au$.

A seguinte caracterização é bastante conhecida na literatura.

Teorema 1.1.1. *Um operador acretivo $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ sobre o espaço de Hilbert H*

será m-acretivo se, e somente se, a imagem $R(\lambda I + A) = H$ para algum (equivalentemente para todo) $\lambda > 0$.

Demonstração: Veja [33]. □

Também em [33] pode ser encontrado o resultado seguinte sobre perturbação.

Proposição 1.1.1. *Seja $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ um operador m-acretivo sobre o espaço de Hilbert H. Se $B : H \longrightarrow H$ for um operador acretivo e Lipschitz, então $A + B$ será um operador m-acretivo. No caso em que B for apenas Lipschitz contínuo com constante L, então $A + B + \lambda I$ será m-acretivo para qualquer $\lambda \geq L$.*

Definição 1.1.2. *Diremos que um operador $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ é **coercivo**, se*

$$\lim_{\|u\|_H \to \infty} \frac{(Au, u)_H}{\|u\|_H} = \infty, \; u \in D(A).$$

Proposição 1.1.2. *Seja A m-acretivo. Se $\lim\limits_{\|u\|_H \to \infty} \|Au\|_H = \infty$, então A será sobrejetor. Se A for coercivo, então A será sobrejetor.*

Demonstração: Veja [33]. □

Exemplo 1.1.1. *Todo operador auto-adjunto não-negativo em um espaço de Hilbert é um operador m-acretivo.*

1.1.2 Equações de Evolução

Seja A um operador m-acretivo sobre um espaço de Hilbert H. Considere a seguinte equação diferencial abstrata:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t), \; 0 < t < T; \\ u(0) = u_0 \in H. \end{cases} \tag{1.1}$$

com $0 < T \leq \infty$ e $f \in L^1(0, T; H)$.

Definição 1.1.3. *Uma **solução forte** de (1.1) é uma função contínua de $[0, T)$ em H que é absolutamente contínua em cada subintervalo $[a, b]$, $0 < a < b < T$. Logo, u é diferenciável quase sempre com $du/dt \in L^1(a, b; H)$ e para quase todo $t > 0$ temos que $u(t) \in D(A)$ e vale (1.1).*

Temos um resultado que nos dá a existência de soluções fortes para operadores m-acretivos.

Teorema 1.1.2. *Seja A m-acretivo sobre o espaço de Hilbert H. Assuma que $u_0 \in D(A)$ e $f : [0, T] \to H$ seja absolutamente contínua. Então existe uma única solução forte para (1.1). Além disto, u é Lipschitz contínua de $[0, T]$ em H e fortemente diferenciável à direita em H para $t \geq 0$. Mais ainda, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e $u' \in L^\infty(0, T; H)$.*

Demonstração: Veja [33]. □

Um conceito mais fraco de solução, que é também bastante frequente na teoria de equações diferenciais, é considerar limites (fortes) de soluções fortes.

Definição 1.1.4. *Uma **solução generalizada** de (1.1) em um intervalo (fechado) $[0, T]$ é uma função contínua $u \in C([0, T]; H)$ tal que $u(0) = u_0$ e existe uma sequência de soluções fortes u_n definidas em $[0, T]$ para o problema*

$$\frac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) = f_n, \;\; n = 1, 2, ...$$

com $f_n \longrightarrow f$ em $L^1(0, T; H)$ e $u_n \longrightarrow u$ em $C([0, T]; H)$. Uma função u de classe $C([0, T); H)$ será uma solução generalizada do problema (1.1) em um semi-intervalo $[0, T)$, se u for uma solução generalizada de (1.1) em todo intervalo fechado $[0, T']$ com $T' < T$.

Temos também um resultado sobre existência e unicidade para soluções generalizadas.

Teorema 1.1.3. *Seja A m-acretivo sobre o espaço de Hilbert H, $f \in L^1(0, T; H)$ e $u_0 \in \overline{D(A)}$, em que $\overline{D(A)}$ é o fecho de $D(A)$ em H. Então existe uma única solução generalizada para (1.1). Em adição, quaisquer duas soluções generalizadas $u_1(t)$ e $u_2(t)$ com dados*

$\{u_{10}, f_1\}$ *e* $\{u_{20}, f_2\}$ *satisfazem as seguintes estimativas de estabilidade com* $0 \leq s < t \leq T$

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 &\leq \|u_1(s) - u_2(s)\|_H^2 \\ &+ 2\int_s^t (f_1(\sigma) - f_2(\sigma), u_1(\sigma) - u_2(\sigma))_H d\sigma \end{aligned} \tag{1.2}$$

e

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_H \leq \|u_1(s) - u_2(s)\|_H + \int_s^t \|f_1(\sigma) - f_2(\sigma)\|_H d\sigma. \tag{1.3}$$

Demonstração: Veja [33]. □

Observação 1.1.1. *É conveniente observar que as soluções generalizadas não satisfazem a equação diferencial de fato, mesmo que em um sentido fraco. Mas sobre certas hipóteses adicionais de regularidade, é possível mostrar que uma solução generalizada satisfaz uma forma variacional da equação. Tais soluções são chamadas* ***soluções fracas****.*

Consideremos, agora, a equação perturbada

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + (A+B)u(t) = f(t), \ 0 < t < T; \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Também supomos que o operador $B : \overline{D(A)} \longrightarrow H$ seja Lipschitz contínuo com constante L.

Teorema 1.1.4. *Se A for m-acretivo, então*

- *Para cada $u_0 \in D(A)$ e f absolutamente contínua de $[0,T]$ em H, existirá uma única solução forte $u(t)$ para o problema (1.4);*
- *Para cada $u_0 \in \overline{D(A)}$ e $f \in L^1(0,T;H)$ existirá uma única solução generalizada para o problema (1.4) em $[0,T]$.*

Demonstração: A prova deste teorema pode ser encontrada em [33], bem como em [2], no contexto da teoria de operadores maximais monótonos. A principal estratégia da demonstração é notar que o operador $A + B + LI$ é um operador m-acretivo. □

O teorema acima ainda pode ser generalizado no caso em que B é um operador localmente Lipschitz contínuo (veja o resultado a seguir). Tal ferramenta é extremamente útil quando se quer provar a existência global de solução para EDPs semilineares, na posse de estimativas obtidas a partir de algum método de energia. Entendemos por localmente Lipschitz contínuo, um operador que satisfaz a condição de Lipschitz em cada bola fechada do espaço H. Neste caso, a constante de Lipschitz depende do raio da bola.

Teorema 1.1.5. *Seja $(\lambda I + A)$ um operador m-acretivo para algum $\lambda \geq 0$ e assuma que $B : \overline{D(A)} \longrightarrow H$ é um operador localmente Lipschitz. Então*

- *para cada $u_0 \in D(A)$ e $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow H$ absolutamente contínua em cada intervalo finito $[0, T]$, existe um $t_{máx} \leq \infty$ tal que existe uma única solução forte $u(t)$ para o problema (1.4) definida em $[0, t_{máx})$;*
- *para cada $u_0 \in \overline{D(A)}$ e $f \in L^1_{loc}(0, \infty; H)$, existe uma única solução generalizada para o problema (1.4) definida em $[0, t_{máx})$.*

Em ambos os casos, se $t_{máx} < \infty$, então $\lim_{t \to t_{máx}} \|u(t)\|_H = \infty$.

Demonstração: Veja [8]. □

1.2 Atratores para Equações de Evolução

1.2.1 Sistemas Dinâmicos

Definição 1.2.1. *Por definição, um **sistema dinâmico** é um par de objetos (X, S_t), que consiste de um espaço métrico completo X e uma família de operadores (não necessariamente lineares) contínuos $\{S_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ de X em si mesmo com as seguintes propriedades:*

(1) $S_0 = I_X$;

(2) $S_{t+\tau} = S_t \circ S_\tau$.

A propriedade (2) é comumente denominada ***propriedade de semigrupo****. Assumimos, também, que as aplicações da forma $y(t) = S_t x$ são contínuas com respeito a t para qualquer $x \in X$. Nestas condições, X é chamado* ***espaço de fase*** *e S_t é chamado de* ***semigrupo de evolução*** *(ou* ***operador de evolução****).*

Um exemplo canônico para ilustrar tal definição é o seguinte.

Exemplo 1.2.1. *Considere o sistema diferencial autônomo*

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = f(\boldsymbol{x}(t)),\ \ t > 0, \tag{1.5}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função Lipschitz contínua. É sabido que, para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, existe uma única função contínua $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ definida em $\mathbb{R}$ tal que $\varphi(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ e, pela unicidade de solução, temos

$$\varphi(t, \varphi(\tau, \boldsymbol{x})) = \varphi(t + \tau, \boldsymbol{x}),\ \ \textit{para todo}\ t, \tau \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Basta tomar $S_t\boldsymbol{x} := \varphi(t, \boldsymbol{x})$ para ver que o par $(\mathbb{R}^n, S_t)$ é um sistema dinâmico.

Definição 1.2.2. *Seja (X, S_t) um sistema dinâmico.*

- *Um subconjunto fechado $B \subset X$ será dito* ***absorvente*** *para (X, S_t) se para qualquer subconjunto limitado $D \subset X$, existir $t_0(D)$ tal que $S_t D \subset B$ para todo $t \geq t_0(D)$;*

- *(X, S_t) será dito* ***dissipativo****, se possuir um conjunto absorvente limitado B. Se X for um espaço de Banach, então um valor $R > 0$ será dito* ***raio de dissipação*** *de (X, S_t), se $B \subset \{x \in X; \|x\|_X \leq R\}$;*

- *O sistema dinâmico (X, S_t) será dito* ***ponto dissipativo****, se existir $B_0 \subset X$ tal que para cada $x \in X$, existe $t_0(x)$ tal que $S_t x \in B_0$ para todo $t \geq t_0(x)$;*

- *(X, S_t) será dito* ***compacto****, se for dissipativo e o conjunto absorvente B for compacto;*

- *(X, S_t) será dito* ***assintoticamente compacto*** *se existir um conjunto* ***atraente*** *e compacto K, isto é, se existir um subconjunto $K \subset X$ compacto tal que para todo* *subconjunto limitado D de X vale*

$$\lim_{t\to\infty} d_X\{S_tD|K\} = 0, \tag{1.7}$$

em que $d_X\{A|B\} = \sup_{x\in A} dist_X(x,B)$.

- *(X,S_t) será dito **assintoticamente suave**, se para cada subconjunto limitado D tal que $S_tD \subset D$ para $t>0$, existir um subconjunto compacto K contido no fecho $\overline{D}$ de D, satisfazendo (1.7).*

Algumas consequências imediatas da definição acima são:

- se X for compacto, então (X,S_t) será compacto;
- se X for um espaço de dimensão finita, então todo sistema dissipativo será compacto.

Claramente, todo sistema assintoticamente compacto é dissipativo e assintoticamente suave.

Definimos, agora, várias noções básicas da teoria de sistemas dinâmicos.

Definição 1.2.3. *Sejam (X,S_t) um sistema dinâmico e D um subconjunto de X. Diremos que D é **positivamente invariante**, se $S_tD \subseteq D$ para todo $t\geq 0$. Ele será **negativamente invariante**, se $S_tD \supseteq D$ para todo $t\geq 0$. O conjunto D será dito **invariante** se for ao mesmo tempo positivamente e negativamente invariante, ou seja, se $S_tD = D$ para todo $t\geq 0$.*

Definição 1.2.4. *Seja $D\subset X$. O conjunto*

$$\gamma_D^t \equiv \bigcup_{\tau\geq t} S_\tau D$$

*é chamado **cauda** (a partir do momento t) das trajetórias que emanam de D. Temos $\gamma_D^t = \gamma_{S_tD}^0 \equiv \gamma_{S_tD}^+$. Se $D=\{v\}$ consistir de um único ponto, então $\gamma_v^+ \equiv \gamma_D^0$ será chamado **semitrajetória** (ou **semiórbita**) **positiva** emanando de v. Uma curva contínua $\gamma \equiv \{u(t); t\in\mathbb{R}\}$ em X será dita **trajetória** (ou **órbita**) **completa**, se $S_tu(\tau) = u(t+\tau)$ para quaisquer $\tau\in\mathbb{R}$ e $t\geq 0$.*

Observação 1.2.1. *Como S_t não é, em geral, um operador sobrejetor, para falarmos sobre uma trajetória completa passando por um ponto $x \in X$, talvez seja necessário impor certas restrições sobre o ponto x. Em geral, S_t pode não ser injetor também. E, neste caso, pode ser que uma órbita completa não seja única, caso exista alguma. Semitrajetórias positivas são conjuntos positivamente invariantes. Trajetórias completas são conjuntos invariantes.*

Para descrever o comportamento assintótico dos sistemas dinâmicos, utilizamos o conceito de conjunto ω-limite.

Definição 1.2.5. *O conjunto*

$$\omega(D) := \bigcap_{t>0} \overline{\gamma_D^t} = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{\tau>t} S_\tau D} \tag{1.8}$$

é chamado de ***conjunto ω-limite*** *das trajetórias emanando de D. Claramente, conjuntos ω-limite (se existirem) são positivamente invariantes.*

Lema 1.2.1. *Para que $x \in \omega(D)$, é necessário e suficiente que existam sequências $t_n \longrightarrow \infty$ e $\{x_n\} \subset D$ tais que $S_{t_n} x_n \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow \infty$.*

Observemos que, para espaços que não são localmente compactos, deve-se analisar cuidadosamente o conceito de conjuntos limites, já que a interseção infinita enumerável de fechados encaixantes pode ser vazia e, consequentemente, de nada nos ajuda. Vejamos, a seguir, condições suficientes para que o conjunto ω-limite, $\omega(D)$, seja não-vazio.

Proposição 1.2.1. *Suponha que o sistema dinâmico (X, S_t) seja assintoticamente compacto, com conjunto atraente K. Então, para qualquer subconjunto limitado D, o ω-limite $\omega(D)$ será um conjunto não-vazio, compacto e invariante. Se (X, S_t) for assintoticamente suave e a cauda γ_D^t for limitada para algum $t \geq 0$, então o conjunto ω-limite $\omega(D)$ será um conjunto não-vazio, compacto e invariante.*

Demonstração: Veja [26]. □

A proposição a seguir nos dá outras caracterizações de sistemas assintoticamente compactos.

Proposição 1.2.2. *Assuma que X seja um espaço de Banach e (X, S_t) seja um sistema dinâmico dissipativo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (X, S_t) *é assintoticamente compacto;*
- (X, S_t) *é assintoticamente suave;*
- *Existe uma decomposição $S_t = S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$, em que $S_t^{(1)}$ é uniformemente compacto para valores grandes de t, isto é, para qualquer conjunto limitado D, existe $t_0 = t_0(D)$ tal que o conjunto $\gamma^{(1)} := \bigcup_{\tau \geq t_0} S_\tau^{(1)} D$ é relativamente compacto em X e $S_t^{(2)}$ é uma aplicação contínua em X tal que*

$$r_D(t) = \sup\left\{\left\|S_t^{(2)} x\right\|; x \in D\right\} \longrightarrow 0 \text{ conforme } t \longrightarrow \infty \tag{1.9}$$

  para todo conjunto limitado D.

- *Vale a condição de Ladyzhenskaya: para toda sequência limitada $\{x_n\} \subset X$ e toda sequência $t_n \longrightarrow \infty$, a sequência $\{S_{t_n} x_n\}$ é um conjunto relativamente compacto em X.*

Demonstração: Veja [32, 35] e [26]. □

Se o sistema (X, S_t) não for dissipativo, a equivalência descrita acima não será, em geral, válida,apesar de que a compacidade assintótica sempre implicar em suavidade assintótica.

Além disso, prova-se que a suavidade assintótica é, de certa forma, a mais fraca das condições entre as outras propriedades enunciadas [8]. Por esse motivo, damos critérios para concluir que um certo sistema dinâmico seja assintoticamente suave.

Teorema 1.2.1. *Seja (X, S_t) um sistema dinâmico em um espaço de Banach X. Assuma que, para qualquer conjunto limitado positivamente invariante B de X, existam $T > 0$, uma função não-decrescente $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e uma pseudométrica ρ_B^T em $C([0, T]; X)$ de modo que*

(i) $g(0) = 0$; $g(s) < s$, $s > 0$;

(ii) *A pseudométrica ρ_B^T é pré-compacta (com respeito à norma de X) no seguinte sentido: qualquer sequência $\{x_n\} \subset B$ tem uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ tal que a sequência $\{y_k\} \subset C([0,T];X)$ de elementos $y_k(\tau) = S_\tau x_{n_k}$ é de Cauchy com respeito a ρ_B^T;*

(iii) *A estimativa*

$$\|S_T y_1 - S_T y_2\| \leq g\left(\|y_1 - y_2\| + \rho_B^T\left(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau y_2\}\right)\right), \tag{1.10}$$

é válida para quaisquer $y_1, y_2 \in B$, em que $\{S_\tau y_i\}$ denota o elemento do espaço $C([0,T];X)$ dado pela função $y_i(\tau) = S_\tau y_i$.

Então, (X, S_t) será um sistema dinâmico assintoticamente suave.

Demonstração: A demonstração deste resultado é baseada na α-medida de não-compacidade de Kuratowski

$$\alpha(B) = \inf\{d; B \text{ tem uma cobertura de diâmetro} < d\}$$

e pode ser encontrada em [8]. $\square$

Observação 1.2.2. *Ao invés de supor (1.10), o teorema acima continuará válido se supormos*

$$\|S_T y_1 - S_T y_2\| \leq g\left(\|y_1 - y_2\|\right) + \rho_B^T\left(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau y_2\}\right) \tag{1.11}$$

(a pseudométrica fora do argumento de g). O resultado ainda é válido no caso em que X é um espaço métrico completo [6].

O teorema acima implica duas pequenas generalizações que são, às vezes, mais convenientes.

Proposição 1.2.3. *Seja (X, S_t) um sistema dinâmico em um espaço de Banach X. Assuma que, para qualquer conjunto limitado positivamente invariante B de X e para cada $t \geq t_0(B) \geq 0$, existam uma função $K_B(t)$ definida em $[t_0, \infty)$ e uma pseudométrica ρ_B^t em $C([0,t];X)$ tais que* *(i)* $K_B(t) \geq 0$ *e* $\lim_{t\to\infty} K_B(t) = 0$*;*

(ii) A pseudométrica ρ_B^t *é pré-compacta;*

(iii) A estimativa

$$\|S_t y_1 - S_t y_2\| \leq K_B(t)\left(\|y_1 - y_2\|\right) + \rho_B^t\left(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau y_2\}\right), \ t \geq t_0, \tag{1.12}$$

é válida para quaisquer $y_1, y_2 \in B$*.*

Então, (X, S_t) *será um sistema dinâmico assintoticamente suave.*

Demonstração: Basta aplicar o Teorema 1.2.1 com $g(s) = K_B(T) \cdot s$, escolhendo T de modo que $K_B(T) < 1$. □

E esta proposição implica a proposição que segue.

Proposição 1.2.4. *Suponha que o sistema dinâmico* (X, S_t)*,* X *espaço de Banach, possua a seguinte propriedade: para qualquer conjunto limitado positivamente invariante* B *de* X*, existem funções* $C_B(t) \geq 0$ *e* $K_B(t) \geq 0$ *tais que* $\lim_{t\to\infty} K_B(t) = 0$*, um tempo* $t_0 = t_0(B)$ *e uma pseudométrica compacta* ρ *em* X *tais que*

$$\|S_t y_1 - S_t y_2\| \leq K_B(t)\left(\|y_1 - y_2\|\right) + C_B(t) \cdot \rho\left(y_1, y_2\right), \ t \geq t_0, \tag{1.13}$$

para quaisquer $y_1, y_2 \in B$*. Então,* (X, S_t) *será um sistema dinâmico assintoticamente suave.*

O resultado seguinte é de suma importância neste trabalho, por conceder um pouco mais de flexibilidade no que se diz respeito aos métodos usuais provenientes do Teorema 1.2.1. Ele nos permite tomar limites sequenciais ao invés de limites simultâneos, reduzindo a verificação da suavidade assintótica à determinação de um funcional com uma condição de compacidade compensada.

Teorema 1.2.2. *Seja* (X, S_t) *um sistema dinâmico em um espaço métrico* X *munido da métrica* d*. Assuma que, para cada conjunto limitado positivamente invariante* B *de* X *e para* *cada $\varepsilon > 0$, exista $T = T(\varepsilon, B)$ tal que*

$$d(S_T y_1, S_T y_2) \leq \varepsilon + \Psi_T(y_1, y_2), \;\; y_i \in B, \tag{1.14}$$

sendo Ψ_T um funcional definido em $B \times B$ satisfazendo

$$\liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \Psi_T(y_m, y_n) = 0, \tag{1.15}$$

para toda sequência $\{y_n\}$ de B. Então, (X, S_t) será um sistema dinâmico assintoticamente suave.

Demonstração: Veja [8]. □

1.2.2 Atratores Globais

Os atratores são os principais objetos investigados na análise do comportamento assintótico de sistemas dinâmicos dissipativos em espaços de dimensão infinita.

Definição 1.2.6. *Um conjunto fechado e limitado $A \subset X$ será dito **atrator global** do sistema dinâmico (X, S_t), se as seguintes propriedades forem satisfeitas:*

(i) A é um conjunto invariante, isto é, $S_t A = A$ para todo $t \geq 0$;

(ii) A é uniformemente atraente, isto é, para todo conjunto limitado $D \subset X$

$$\lim_{t\to\infty} d_X\{S_t D | A\} = 0, \tag{1.16}$$

em que d_X é a semidistância de Hausdorff.

O principal resultado que lida com a existência de atrator global é o seguinte.

Teorema 1.2.3. *Seja (X, S_t) um sistema dinâmico assintoticamente compacto em um espaço de Banach X com conjunto atraente compacto K. Então (X, S_t) possui um único atrator* *global A tal que $A \subset K$. Este atrator é um conjunto conexo e tem a forma*

$$A = \omega(K) = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau K}. \tag{1.17}$$

Também é válida a relação

$$A = \bigcap_{n>N} S_n K, \text{ para todo } N \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.18}$$

Mais ainda,

(i) uma trajetória completa $\gamma = \{u(t); t \in \mathbb{R}\}$ pertencerá ao atrator se, e somente se, γ for um conjunto limitado;

(ii) para todo $x \in A$, existe uma trajetória completa $\gamma = \{u(t); t \in \mathbb{R}\}$ tal que $u(0) = x$ e $\gamma \subset A$.

Neste caso, o atrator global pode ser caracterizado como o conjunto de todas as trajetórias completas.

Se B for um conjunto absorvente limitado para (X, S_t), então $A = \omega(B)$ e

$$\lim_{t \to \infty} \left(d_X\{S_t B | A\} + d_X\{A | S_t B\} \right) = 0. \tag{1.19}$$

Como consequência, A atrai conjuntos limitados absorventes na métrica de Hausdorff.

Demonstração: Veja [35]. □

É claro que se um sistema dinâmico possuir um atrator global compacto, então ele será assintoticamente compacto. Graças à Proposição 1.2.2, o Teorema 1.2.3 pode ser enunciado da forma seguinte.

Teorema 1.2.4. *Para que um sistema dinâmico dissipativo em um espaço métrico completo possua um atrator global compacto, é necessário e suficiente que ele seja assintoticamente suave.*

Caracterizar atratores globais pode ser um problema difícil. Mesmo em casos teoricamente mais simples, como os finito-dimensionais, os atratores podem ter uma estrutura surpreendentemente complicada. Entretanto, para alguns conjuntos, é bastante simples saber se pertencem ao atrator. Por exemplo, o conjunto $\mathcal{N} := \{x \in X; S_t x = x, \text{ para todo } t \geq 0\}$ dos pontos estacionários está claramente contido no atrator do sistema. Já vimos também que toda trajetória completa está contida no atrator (Teorema 1.2.3).

Definição 1.2.7. *Seja $\mathcal{N}$ o conjunto dos pontos estacionários do sistema dinâmico (X, S_t). Definimos a **variedade instável** $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ emanando do conjunto $\mathcal{N}$ como sendo o conjunto de todos os pontos $y \in X$ tal que existe uma trajetória completa $\gamma = \{u(t); t \in \mathbb{R}\}$ satisfazendo*

$$u(0) = y \;\; e \;\; \lim_{t \to -\infty} dist_X(u(t), \mathcal{N}) = 0.$$

Proposição 1.2.5. *Suponha que o sistema dinâmico possua um atrator global A. Então $\mathcal{M}^u(\mathcal{N}) \subset A$.*

Demonstração: Veja [35]. □

Definição 1.2.8. *Seja $Y \subseteq X$ um conjunto positivamente invariante de um sistema dinâmico (X, S_t).*

- *Um funcional contínuo $\Phi(y)$ definido em Y será dito **função de Lyapunov** (ou **funcional de Lyapunov**) para o sistema dinâmico (X, S_t) em Y, se a função $t \to \Phi(S_t y)$ for uma função não-crescente para qualquer $y \in Y$;*
- *A função de Lyapunov $\Phi(y)$ será dita **estrita** em Y, se a equação $\Phi(S_t y) = \Phi(y)$ para todo $t > 0$, implicar que $y \in \mathcal{N}$;*
- *O sistema dinâmico (X, S_t) será dito **gradiente**, se existir uma função de Lyapunov estrita para (X, S_t) em todo o espaço X.*

Teorema 1.2.5. *Suponha que o sistema dinâmico (X, S_t) seja gradiente e possua um atrator global compacto A. Então $A = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$.*

Demonstração: Veja [35, 18, 26]. □

Uma outra propriedade interessante de sistemas gradientes é a *estabilidade forte* do conjunto dos pontos de equilíbrio.

Teorema 1.2.6. *Assuma que o sistema dinâmico gradiente (X, S_t) possua um atrator global compacto A. Então, para todo $x \in X$, temos*

$$\lim_{t\to\infty} dist_X(S_t x, \mathcal{N}) = 0;$$

isto é, qualquer trajetória estabiliza para o conjunto dos pontos estacionários.

1.2.3 Dimensão Fractal

Possuir dimensão finita é uma propriedade importante para um atrator global, que pode ser estabelecida para vários sistemas dinâmicos, inclusive os que aparecem em aplicações. As dimensões fractal e de Hausdorff são as medidas mais comuns na teoria de sistemas dinâmicos em espaços de dimensão infinita.

Definição 1.2.9. *Seja M um conjunto compacto não-vazio em um espaço métrico X.*

- *A **dimensão fractal** $dim_f M$ de M é definida por*

  $$dim_f M = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{ln[n(M,\varepsilon)]}{-ln(\varepsilon)},$$

  em que $n(M,\varepsilon)$ é o menor número de conjuntos fechados de diâmetro ε que cobrem o conjunto M.

- *Para d positivo, definimos a medida d-dimensional de Hausdorff pela fórmula*

  $$\mu(M,d) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu(M,d,\varepsilon),$$

  em que

  $$\mu(M,d,\varepsilon) = \inf\left\{\sum_j (r^j)^d; M \subset \bigcup_i B(x_j, r_j), r_j \le \varepsilon\right\}.$$

*Acima, $B(x_j, r_j)$ denota a bola aberta em X centrada em x_j e de raio r_j. A **dimensão de Hausdorff**, $dim_H M$, de M é definida pela fórmula $dim_H M = \inf\{d; \mu(M,d) = 0\}$.*

Lidamos, aqui, com a dimensão fractal, pelo fato de que, além de ser mais conveniente nos cálculos, ela majora a dimensão de Hausdorff: $dim_H M \leq dim_f M$; e também pelo resultado seguinte [13].

Teorema 1.2.7. *Seja M um subconjunto compacto do espaço métrico X tal que sua dimensão fractal $dim_f M < \dfrac{n}{2}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então existe uma aplicação injetora lipschitziana $L : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que sua inversa é Hölder contínua.*

Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e M_ε a ε-vizinhança de M, dada por

$$M_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon \text{ para algum } \mathbf{y} \in M\}.$$

Consideremos a taxa com a qual o volume n-dimensional de M_ε diminui conforme $\varepsilon \longrightarrow 0$. Por exemplo, se M for um ponto apenas, contido em $\mathbb{R}^3$, então M_ε será uma esfera de volume $vol(M_\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$. Se M for um segmento de reta de comprimento l, então M_ε será um bastão de volume $vol(M_\varepsilon) \approx \pi l \varepsilon^2$. Se M for um conjunto plano de área a, então M_ε será essencialmente o engrossamento de M com volume $vol(M_\varepsilon) \approx 2a\varepsilon$. Em qualquer caso, $vol(M_\varepsilon) \approx c\varepsilon^{3-s}$, em que o número inteiro s é a dimensão de M. Essa ideia se estende para as dimensões fractais: quando M for um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e, para algum s, $vol^n(M_\varepsilon)/\varepsilon^{n-s}$ tende a um limite positivo finito quando ε tende a zero, faz sentido dizer que M é s-dimensional.

Mais do que isso, é fundamental o entendimento da ideia de *medida à escala* ε quando se trata de dimensão. Para cada ε, medimos o conjunto de modo que essa tal medida escolhida *ignore irregularidades de tamanho menor do que* ε e vemos como se comportam essas medidas conforme $\varepsilon \longrightarrow 0$. A dimensão de M é determinada pela regra de potência (se tal regra existir) obedecida por $n(M, \varepsilon)$, a medida escolhida, conforme ε tende a zero. Se

$$n(M, \varepsilon) \approx c\varepsilon^{-s}$$

para constantes c e s, vemos que

$$s = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ln[n(M,\varepsilon)]}{-ln(\varepsilon)}.$$

Observação 1.2.3. *Para critérios de rigorosidade, poderíamos ter definido as dimensões inferiores e superiores, respectivamente, dadas por*

$$\underline{dim}_f M = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{ln[n(M,\varepsilon)]}{-ln(\varepsilon)}$$

$$\overline{dim}_f M = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{ln[n(M,\varepsilon)]}{-ln(\varepsilon)}$$

e que a dimensão fractal $dim_f M$ *seria um dos valores acima, caso coincidissem. Claramente, para efeitos de cálculos, sempre se assume que* $\varepsilon < 1$.

Suponhamos, por um instante, que $X = \mathbb{R}^n$ *e considere a coleção de hipercubos na malha* ε*-coordenada de* $\mathbb{R}^n$*, isto é, cubos na forma*

$$[m_1\varepsilon, (m_1+1)\varepsilon] \times \cdots \times [m_n\varepsilon, (m_n+1)\varepsilon],$$

com $m_1, \ldots, m_n$ *inteiros. Seja* $n'(M,\varepsilon)$ *o número de* ε*-cubos que intersectam* M*. Eles nos dão uma cobertura de* M *de* $n'(M,\varepsilon)$ *conjuntos de diâmetro* $\varepsilon\sqrt{n}$*. Logo,*

$$n(M, \varepsilon\sqrt{n}) \leq n'(M,\varepsilon).$$

Se $\varepsilon\sqrt{n} < 1$*, então*

$$\frac{ln[n(M,\varepsilon\sqrt{n})]}{-ln(\varepsilon\sqrt{n})} \leq \frac{ln[n'(M,\varepsilon)]}{-ln(\sqrt{n}) - ln(\varepsilon)}$$

e tomando o limite quando $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\underline{dim}_f M \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{ln[n'(M,\varepsilon)]}{-ln(\varepsilon)} \tag{1.20}$$

e

$$\overline{dim}_f M \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{ln[n'(M,\varepsilon)]}{-ln(\varepsilon)}. \tag{1.21}$$

Por outro lado, qualquer conjunto de diâmetro no máximo ε *está contido em* 3^n ε*-cubos (basta escolher qualquer cubo contendo um dos pontos do conjunto e unir com os cubos vizinhos deste cubo). Assim*

$$n'(M,\varepsilon) \leq 3^n n(M,\varepsilon)$$

e tomando logaritmos e limites com $\varepsilon \longrightarrow 0$*, temos as desigualdades contrárias à (1.20) e (1.21). Portanto, podemos tomar* $n(M,\varepsilon)$ *como sendo o número de* ε*-cubos que intersectam* M*. Outras definições equivalentes são obtidas quando se considera* $n(M,\varepsilon)$ *como sendo*

- *o menor número de cubos arbitrários de lado* ε *necessários para cobrir* M*;*
- *o menor número de bolas fechadas de raio* ε *que cobrem* M*;*
- *o maior número de bolas disjuntas de raio* ε *com centros em* M*;*
- *o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo* ε *que cobrem* M*.*

Exemplo 1.2.2. *Se* M *for qualquer subconjunto enumerável do espaço métrico* X*, então* $dim_H M = 0$*. Entretando, o conjunto compacto* $M = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$ *tem dimensão fractal* $dim_f M = \frac{1}{2}$*.*

Com efeito, sejam $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ *e* k *o inteiro que satisfaz* $1/(k-1)k > \varepsilon \geq 1/k(k+1)$*. Se o diâmetro de* U *for menor ou igual a* ε*, então* U *poderá cobrir no máximo um dos pontos* $\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{k}\right\}$*, pois* $1/(k-1) - 1/k = 1/(k-1)k > \varepsilon$*. Então, pelo menos* k *conjuntos de diâmetro* ε *são necessários para cobrir* M*, ou seja,* $n(M,\varepsilon) \geq k$*. Isso nos dá*

$$\frac{ln[n(M,\varepsilon)]}{-ln(\varepsilon)} \geq \frac{ln(k)}{ln[k(k+1)]}.$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ *(e consequentemente* $k \longrightarrow \infty$*) nos dá* $\underline{dim}_f M \geq \frac{1}{2}$*. Por outro lado,* $(k+1)$ *intervalos de comprimento* ε *cobrem* $[0, 1/k]$*, deixando* $(k-1)$ *pontos de* M *que podem ser cobertos por outros* $(k-1)$ *intervalos. Logo,* $n(M,\varepsilon) \geq 2k$*. Assim,*

$$\frac{ln[n(M,\varepsilon)]}{-ln(\varepsilon)} \leq \frac{ln(2k)}{ln[k(k-1)]},$$

de onde segue que $\overline{dim}_f M \leq \frac{1}{2}$*.*

1.2.4 Dimensão e Regularidade de Atratores Globais

Partindo do fato de que os atratores estão intimamente ligados aos sistemas dinâmicos que os definem (caso existam), nada mais natural do que obter propriedades do atrator através de propriedades satisfeitas pelos sistemas dinâmicos. Na literatura, existem várias formas de se abordar a dimensão fractal de um atrator global para um certo sistema dinâmico gerado por uma equação diferencial, variando, por exemplo, entre critérios para decidir se este tal conjunto possui dimensão fractal finita; resultados que nos dão, além da compacidade, a conclusão de que sua dimensão fractal é finita; e também estimativas para a dimensão fractal de um atrator [35, 18, 26].

Em [8], motivados pela interação de uma EDP de segunda ordem no tempo que esteja possivelmente interagindo com uma equação parabólica (sistemas dessa forma aparecem, por exemplo, na modelagem de placas termoelásticas), sistemas dinâmicos da forma seguinte são considerados.

Hipótese A. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach reflexivos, X compactamente imerso em Y. Munimos o espaço $H = X \times Y \times Z$ com a norma*

$$\|y\|_H^2 = \|u_0\|_X^2 + \|u_1\|_Y^2 + \|\theta_0\|_Z^2, \; y = (u_0, u_1; \theta_0).$$

Assumimos que (H, S_t) seja um sistema dinâmico em H com operador de evolução da forma

$$S_t y = (u(t), u_t(t); \theta(t)), \; y = (u_0, u_1; \theta_0) \in H, \tag{1.22}$$

em que as funções $u(t)$ e $\theta(t)$ possuem as regularidades

$$u \in C(\mathbb{R}_+; X) \cap C^1(\mathbb{R}_+; Y), \; \theta \in C(\mathbb{R}_+; Z).$$

Definição 1.2.10. *Um sistema dinâmico da forma (1.22) será dito **quasistável** sobre um conjunto $B \subset H$, se existirem uma seminorma compacta μ_X definida no espaço X e funções reais não-negativas $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ definidas em $\mathbb{R}_+$ tais que* *(i)* $a(t)$ *e* $c(t)$ *são localmente limitadas em* $[0, \infty)$*;*

(ii) $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *e* $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = 0$*;*

(iii) para quaisquer $y_1, y_2 \in B$ *e* $t > 0$ *valem as relações*

$$\|S_t y_1 - S_t y_2\|_H^2 \leq a(t) \cdot \|y_1 - y_2\|_H^2 \tag{1.23}$$

*e vale a **estimativa de quasistabilidade***

$$\|S_t y_1 - S_t y_2\|_H^2 \leq b(t) \cdot \|y_1 - y_2\|_H^2 + c(t) \cdot \sup_{0<s<t} \left[\mu_X \left(u^1(s) - u^2(s)\right)\right]. \tag{1.24}$$

Aqui $S_t y_i = (u^i(t), u_t^i(t); \theta^i(t))$, $i = 1, 2$.

Observação 1.2.4. *(i) Sistemas dinâmicos quasistáveis são, às vezes, chamados de **estáveis módulo termos compactos**, pois estes são decompostos em uma parte estável e uma parte compacta. Obter este tipo de estimativa pode ser um problema extremamente técnico (em casos críticos);*

(ii) Uma seminorma μ *será dita compacta se* $\mu(x_m) \longrightarrow 0$ *para qualquer sequência* $x_m \rightharpoonup 0$*;*

(iii) Escolhas frequentes para a seminorma μ_X *são dadas por* $\mu_X(x) = \|x\|_{[X,Y]_\eta}$, $\eta > 0$, *em que* $[X, Y]_\eta$ *denota o espaço intermediário entre* X *e* Y*. Por exemplo, no contexto de espaços de Sobolev sobre conjuntos limitados,* $\mu_{H^s}(u) = \|u\|_{L^2}$, $s > 0$, *é uma seminorma compacta.*

Vale o resultado a seguir.

Teorema 1.2.8. *Suponha válida (1.22). Assuma que o sistema dinâmico* (H, S_t) *possui um atrator global compacto* A *e é quasistável em* A*. Então o atrator* A *tem dimensão fractal finita* $dim_f^H A$*.*

Demonstração: Veja [8]. □

O teorema a seguir mostra a força da estimativa de quasistabilidade. Ele nos dá uma maior regularidade (temporal) para trajetórias que pertencem ao atrator global. Maiores regularidades espaciais seguem da análise das equações envolvidas e, geralmente, envolvem aplicações de teorias elíticas.

Teorema 1.2.9. *Assuma a validade de (1.22). Suponha que o sistema dinâmico* (X, S_t) *possua um atrator global compacto* A *e que seja quasistável no atrator* A*. Adicionalmente, suponha que seja verificada a estimativa de quasistabilidade (1.24) com a função* $c(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$*. Então qualquer trajetória completa* $\{(u(t), u_t(t); \theta(t); t \in \mathbb{R})\}$ *contida no atrator global goza das seguintes propriedades:*

$$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}; X) \cap C(\mathbb{R}; Y),\ u_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}; Y),\ \theta_t \in L^\infty(\mathbb{R}; Z). \tag{1.25}$$

Mais ainda, existe $R > 0$ *tal que*

$$\|u_t(t)\|_X^2 + \|u_{tt}(t)\|_Y^2 + \|\theta_t(t)\|_Z^2 \leq R^2,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.26}$$

e R *depende da constante* $\|c\|_\infty$*, da seminorma* μ_X *na Definição 1.2.10 e da constante de imersão de* X *em* Y*.*

Demonstração: Veja [8]. $\square$

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

Mesmo que estejamos interessados em estudar a boa-colocação e o comportamento assintótico de uma equação não-linear, a análise do problema linearizado é de suma importância para a melhor compreensão do modelo completo. Olhamos, inicialmente, para uma versão abstrata autônoma do problema, a fim de permitir futuras generalizações.

2.1 O caso linear

2.1.1 Notações preliminares

Seja A um operador ilimitado, auto-adjunto e positivo sobre o espaço de Hilbert H, com domínio denso $D(A) \subset H$ e tal que $0 \in \rho(A)$, sendo $\rho(A)$ o conjunto resolvente do operador A. Consideremos, novamente, a seguinte equação diferencial abstrata linear de terceira ordem definida em H:

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 Au + bAu_t = 0, \tag{2.1}$$

com condições iniciais dadas por

$$u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1,\ u_{tt}(0) = u_2. \tag{2.2}$$

No que segue, assumiremos uma desigualdade do tipo Poincaré

$$D(A^{1/2}) \subset H, \text{ com controle } \|w\|_H \leq C_0\|A^{1/2}w\|_H, \text{ para todo } w \in D(A^{1/2}). \tag{2.3}$$

Denotaremos o produto interno de H por $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_H$, sua norma induzida por $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_H := (\cdot,\cdot)_H^{1/2}$ e a norma usual do espaço L^p por $\|\cdot\|_{L^p} \equiv \|\cdot\|_p$.

2.1.2 O papel das constantes

Apesar de já citado anteriormente, vejamos como os parâmetros da equação influenciam na boa-colocação do problema:

- Se $\tau = 0$, então estamos no caso de uma equação de onda abstrata fortemente amortecida, que é de tipo parabólico, no sentido de que pode-se escrever o problema na forma de uma equação diferencial abstrata de primeira ordem cujo operador associado é gerador de um semigrupo analítico;

- O caso $\tau > 0$ é exatamente quando substituímos a lei de Fourier para o fluxo de calor, pela lei de Maxwell-Cattaneo. Aqui, se faz necessária a positividade da constante b, para que o problema seja bem-posto. Mais ainda, como será visto no decorrer do trabalho, essa constante está intimamente ligada à estabilização das soluções.

- Se $\tau > 0$ e $c = 0$, podemos fazer a mudança de variáveis $v = u_t$ para cair no caso de uma equação de onda fracamente amortecida (de tipo hiperbólico). Neste caso, quando consideramos a equação linear abstrata de primeira ordem associada, $u' = Au$, tanto A quanto $-A$ são geradores de um semigrupo fortemente contínuo.

- A constante α, responsável pela dissipação friccional no sistema, não interfere na boa-colocação do problema.

A seguinte definição é devida a [11].

Definição 2.1.1. *Sejam E um espaço de Banach, A um operador linear e considere o pro-*

blema de Cauchy

$$u^{(n)}(t) = Au(t),\ n \geq 1. \tag{2.4}$$

Diremos que o problema (2.4) é bem posto se estiverem satisfeitas as condições seguintes:

(a) Existe um subespaço denso $D \subseteq E$ tal que se $u_0, \ldots, u_{n-1} \in D$, então existirá uma solução $u(\cdot)$ de (2.4) em $\mathbb{R}_+$ de modo que $u^{(k)}(0_+) = u_k$;

(b) Seja $\{u_\lambda(\cdot)\}$, $\lambda \in \Lambda$, uma sequência generalizada de soluções de (2.4) em $\mathbb{R}_+$ tal que $u_\lambda^{(k)}(0_+) \longrightarrow 0$. Então $u_\lambda(\cdot) \longrightarrow 0$ pontualmente em $\mathbb{R}_+$.

Entendemos por sequência generalizada, a rede com índices no conjunto dirigido Λ.

Segundo esta definição, temos o seguinte resultado devido a [11] (Teorema 3.3):

Teorema 2.1.1. *Assuma que E é um espaço de Banach e suponha que o problema de Cauchy (2.4) seja bem-posto em $\mathbb{R}_+$ para $n \geq 3$. Então A será um operador linear limitado.*

De posse deste resultado, podemos concluir que

Corolário 2.1.1.1. *Se $b = 0$, então o problema (2.1) não será bem-posto.*

Demonstração: O candidato a gerador do semigrupo do problema (2.1), quando $b = 0$, módulo uma perturbação linear contínua, gera o problema

$$\tau u_{ttt} + c^2 Au = 0.$$

Se este problema for bem-posto, então A será limitado, o que não ocorre. $\square$

Podemos escrever o sistema (2.1)-(2.2) na forma de um sistema de primeira ordem

$$U_t(t) = \mathcal{A}U(t),\ t > 0, \tag{2.5}$$

com condição inicial

$$U(0) = U_0 \in \mathcal{H} \equiv D(A^{1/2}) \times D(A^{1/2}) \times H,$$

em que

$$U(t)=\begin{pmatrix} u(t)\\ u_t(t)\\ u_{tt}(t)\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}=\begin{pmatrix} 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\\ -\tau^{-1}c^2A & -\tau^{-1}bA & -\tau^{-1}\alpha I\end{pmatrix}.$$

Desta configuração, concluímos que $D(\mathcal{A})\supset D(A)\times D(A)\times D(A^{1/2})$ e, mais precisamente,

$$D(\mathcal{A})=\{(u_1,u_2,u_3)\in\mathcal{H};\ u_3\in D(A^{1/2}),\ c^2u_1+bu_2\in D(A)\}.$$

Foi mostrado, em [30], que $\mathcal{A}$ gera um semigrupo fortemente contínuo em $\mathcal{H}$. Denotaremos tal semigrupo por $S(t)$.

2.2 O caso linear não-homogêneo

Em seguida, consideramos a versão linear não-homogênea de (2.1) dada por

$$\tau u_{ttt}+\alpha u_{tt}+c^2Au+bAu_t=f\in L^1(0,T;H). \tag{2.6}$$

Seguindo a definição dada em [31], motivada pela fórmula de variação de parâmetros, podemos definir uma solução *suave* correspondente ao sistema não-homogêneo da forma seguinte.

Definição 2.2.1. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo (C_0-semigrupo) $S(t)$. Sejam $V\in\mathcal{H}$ e $F\in L^1(0,T;\mathcal{H})$. A função $U\in C^0([0,T];\mathcal{H})$ dada por*

$$U(t)=S(t)V+\int_0^t S(t-s)F(s)ds,\ 0\le t\le T \tag{2.7}$$

*é a **solução suave** do problema de valor inicial*

$$U_t(t)=\mathcal{A}U(t)+F(t),\ U(0)=V\in\mathcal{H},\ F\in L^1(0,T;\mathcal{H}) \tag{2.8}$$

em $[0,T]$.

A definição acima fornece, também, uma definição de solução suave para (2.6), identificando $F(t) \equiv [0, 0, f(t)]^T$ com $f \in L^1(0, T; H)$.

2.3 O modelo não-linear completo

Agora, partimos para a versão não-linear de (2.6) apresentada anteriormente

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} - c^2 \Delta u - b\Delta u_t + \beta(u_t)^3 = 2k(u_t)^2 + p(u), \text{ em } \Omega \times (0, T), \tag{2.9}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, é um domínio de fronteira C^2, com condições de fronteira de Dirichlet

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega \tag{2.10}$$

e condições iniciais

$$u(0) = u_0, \ u_t(0) = u_1, \ u_{tt}(0) = u_2. \tag{2.11}$$

Esta equação diferencial pode ser reescrita na forma abstrata como

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 Au + bAu_t = h(u_t) + p(u)$$

com $h(s) = 2ks^2 - \beta s^3$, $p \in C^1(\mathbb{R})$ é tal que $-\delta \leq p'(s) \leq m$ para $s \in \mathbb{R}$ como em (0.8), e $A = -\Delta$. Assim, A é um operador ilimitado, auto-adjunto e positivo, definido em $L^2(\Omega)$ com domínio $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $D(A^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$.

É importante notar que as soluções do problema linear não-homogêneo com as quais estamos lidando são soluções suaves, portanto, uma definição precisa de solução para (2.9)-(2.11) se faz necessária.

Definição 2.3.1. *Uma função $U(t) = [u(t), u_t(t), u_{tt}(t)]^T \in \mathcal{H}$ é chamada de **solução suave** para (2.9) em $[0, T]$ se, e somente se,*

(i) $U \in C^0([0, T]; \mathcal{H}) = C^0([0, T]; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$;

(ii) *A seguinte identidade integral é satisfeita para todo* $t \in [0, T]$*:*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F^U(s)ds, \tag{2.12}$$

com $F^U(s) \equiv [0, 0, h(u_t(s)) + p(u(s))]^T$ *e* $U_0 = [u_0, u_1, u_2]^T \in \mathcal{H}$ *as condições iniciais dadas.*

Pelas imersões de Sobolev, $u_t \in C^0([0,T]; L^6(\Omega))$. Logo, pelas hipóteses assumidas sobre a função p, temos

$$h(u_t) + p(u) \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$$

e $F^U(s) \in L^1(0,T;\mathcal{H})$, que torna a definição acima consistente.

Adicionalmente, para $\theta := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{\tau} + \dfrac{c^2}{b}\right) > 0$, definimos a **energia linear**

$$\begin{aligned} E(t) \ \equiv \ & \frac{\tau}{2}\|u_{tt}(t) + \theta u_t(t)\|^2 + \frac{b}{2}\left\|A^{1/2}(u_t(t) + \frac{c^2}{b}u(t))\right\|^2 \\ + \ & \frac{\theta}{2}(\alpha - \theta\tau)\|u_t(t)\|^2 + \frac{c^2}{2b}(\theta b - c^2)\|A^{1/2}u(t)\|^2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

a **energia não-linear**

$$E_0(t) \equiv E(t) + \frac{\beta}{4}\|u_t\|_4^4 \tag{2.14}$$

e a **energia total**

$$\mathcal{E}(t) \equiv E_0(t) - (p(u), u_t) - \theta \int_\Omega P(u)d\mathbf{x} - \frac{2k}{3}\int_\Omega (u_t)^3 d\mathbf{x}. \tag{2.15}$$

em que a função real P satisfaz $P'(s) = p(s)$.

Observação 2.3.1.

- *Notemos que, com* $\gamma \equiv \alpha - \dfrac{\tau c^2}{b}$ *e* $\theta := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{\tau} + \dfrac{c^2}{b}\right)$, *fica claro que*

$$\alpha - \theta\tau = \alpha - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\alpha}{\tau} + \frac{c^2}{b}\right) = \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\tau c^2}{2b} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\tau c^2}{2b} = \frac{\gamma}{2}$$

e

$$\theta b - c^2 = b\left(\theta - \frac{c^2}{b}\right) = b\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\tau} + \frac{c^2}{b}\right) - \frac{c^2}{b}\right] = \frac{b\gamma}{2\tau}.$$

Consequentemente, se γ e β são valores não-negativos, $E_0(t) \geq E(t) \geq 0$ e $E(t)$ é equivalente à $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Por causa deste fato, algumas vezes não faremos distinção (para propósitos de estimativas) entre $E(t)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

- *Pontuamos, também, que enquanto a energia $\mathcal{E}(t)$ pode assumir valores negativos, ela é limitada inferiormente para qualquer $\beta > 0$. Veja o Lema 2.4.2 abaixo. A limitação inferior depende de β em uma forma aditiva. Este fato é importante e tiraremos proveito dele mais tarde.*

- *Outra propriedade do funcional de energia $\mathcal{E}(t)$ é que ele não é, necessariamente, monótono (que não é o caso quando temos, por exemplo, $k = 0$ e p é uma função não-decrescente - veja (2.26)). Entretanto, quando $\beta > \beta_0$ para um β_0 suficientemente grande, então a função $\mathcal{E}$ será uma função de Lyapunov estrita para o sistema. Mas este não é caso quando β é apenas positiva, que é o caso de interesse deste trabalho.*

2.4 Teorema de boa-colocação

A seguir, apresentamos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.4.1. [Boa-colocação]

(1) Assuma que $b > 0$ e $\gamma := \alpha - \frac{\tau c^2}{b} > 0$. Então, para qualquer dado inicial $U_0 = (u_0, u_1, u_2) \in \mathcal{H}$, existe um tempo $T = T(U(0)) > 0$ tal que o problema (2.9) é bem-posto em $(0, T)$, i.e., existe uma única solução suave $U \in C^0([0,T];\mathcal{H})$ no sentido da Definição 2.3.1 que resolve (2.9)-(2.11) e tal que

$$\|(u(t), u_t(t), u_{tt}(t))\|^2_{\mathcal{H}} = \left\{\|A^{1/2}u(t)\|^2 + \|A^{1/2}u_t(t)\|^2 + \|u_{tt}(t)\|^2\right\}$$

é finita para todo $t \in [0, T]$. O mesmo resultado é válido quando substituímos $\mathcal{H}$ por $\mathcal{Y} := D(A) \times D(A) \times D(A^{1/2})$;

(2) Se β, a constante responsável pelo termo de controle do comportamento assintótico de soluções correspondendo à dados iniciais de tamanho arbitrário, for positiva, então poderemos tomar $T = +\infty$ no item anterior;

(3) Se assumirmos, adicionalmente, que $\beta > \beta_0$ em que $\beta_0 = \dfrac{4\tau k^2 \theta C_0^2}{b\gamma}$, então o sistema dinâmico, cuja existência é garantida pelo item (2), será gradiente. Em particular, o funcional de energia $\mathcal{E}(t)$ será decrescente.

2.4.1 Prova do Teorema 2.4.1 - Existência local, existência global e solubilidade global uniforme no tempo

Começamos a demonstração do Teorema 2.4.1 provando a existência local de soluções para e equação (2.9) no sentido da Definição 2.3.1.

Prova da parte (1). Precisaremos do resultado seguinte.

Lema 2.4.1. *Consideremos $\mathcal{H} \equiv H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $h(s) = 2ks^2 - \beta s^3$ e $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definida por $F(u, v, w) = (0, 0, h(v) + p(u))$. Então F é uma aplicação localmente Lipschitz contínua em $\mathcal{H}$, i.e., para todo $M > 0$, existe $L(M) > 0$ tal que se $\|(u_1, v_1, w_1)\|_{\mathcal{H}} \le M$ e $\|(u_2, v_2, w_2)\|_{\mathcal{H}} \le M$, então*

$$\|F(u_1, v_1, w_1) - F(u_2, v_2, w_2)\|_{\mathcal{H}} \le L(M)\|(u_1, v_1, w_1) - (u_2, v_2, w_2)\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração: Observemos, primeiramente, que F é uma aplicação bem definida, graças às imersões de Sobolev. Supomos, inicialmente, que a função p não dependa de u e C_1,C_2 sejam tais que

$$\|\cdot\|_6 \le C_1\|A^{1/2}\cdot\| \text{ e } \|\cdot\|_4 \le C_2\|A^{1/2}\cdot\|.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\|F(u_1,v_1,w_1)-F(u_2,v_2,w_2)\|^2_{\mathcal{H}} &= \|h(v_1)-h(v_2)\|^2 \\
&= \|2k(v_1^2-v_2^2)-\beta(v_1^3-v_2^3)\|^2 \\
&\leq 4k\|v_1^2-v_2^2\|^2+2\beta\|v_1^3-v_2^3\|^2 \\
&\leq 4k\|v_1-v_2\|_4^2\|v_1+v_2\|_4^2 \\
&+ 2\beta\|v_1-v_2\|_6^2\|v_1^2+v_1v_2+v_2^2\|_3^2 \\
&\leq C\|v_1-v_2\|^2_{H_0^1},
\end{aligned}$$

em que $C=C(k,\beta,C_1,C_2,\|v_1\|_{H_0^1},\|v_2\|_{H_0^1})$. O caso geral segue do fato de que o funcional de Nemytskii $p: D(A^{1/2})\longrightarrow L^2(\Omega)$ é localmente Lipschitz contínuo. □

De acordo com [30] (Teorema 3.4 - (i)), existem constantes $\mu\geq 1$ e $\omega>0$ tais que o semigrupo fortemente contínuo gerado pelo problema linear (2.1), $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, satisfaz

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leq \mu e^{-\omega t}, \text{ para todo } t\geq 0.$$

Fixe $T>0$ e defina $\Phi(U(t))$ como sendo o lado direito da identidade (2.12) no conjunto

$$K=\{U=(u,u_t,u_{tt})\in C([0,T];\mathcal{H}): \sup\|U(t)\|_{\mathcal{H}}\leq \mu\|U_0\|_{\mathcal{H}}+1\}.$$

Pelo Lema 2.4.1, para $U\in K$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Phi(U(t))\|_{\mathcal{H}} &\leq \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}}+\int_0^t\|S(t-s)F^U(s)\|_{\mathcal{H}}ds \\
&\leq \mu\|U_0\|_{\mathcal{H}}+\mu\int_0^t\left[\|F^U(s)-F^0(s)\|_{\mathcal{H}}+\|F^0(s)\|_{\mathcal{H}}\right]ds \\
&\leq \mu\|U_0\|_{\mathcal{H}}+\mu\int_0^t\left[L(\mu\|U_0\|_{\mathcal{H}}+1)\|U(s)\|_{\mathcal{H}}+\|p(0)\|_2\right]ds \\
&\leq \mu\|U_0\|_{\mathcal{H}}+t\cdot\mu\left(L(\mu\|U_0\|_{\mathcal{H}}+1)\left(\mu\|U_0\|_{\mathcal{H}}+1\right)+\|p(0)\|_2\right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Além disto, se $U, V \in K$, novamente usando o Lema 2.4.1, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(U(t)) - \Phi(V(t))\|_{\mathcal{H}} &\leq \mu \int_0^t \|F^U(s) - F^V(s)\|_{\mathcal{H}} ds \\ &\leq t \cdot \mu L \left(\mu \|U_0\|_{\mathcal{H}} + 1\right) \|U - V\|_{C([0,T];\mathcal{H})}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Tomando o supremo com relação a $t \in [0, T]$ em (2.16) e (2.17), é fácil ver que, para valores de $T > 0$ suficientemente pequenos, Φ leva K em K e é uma contração, provando que o problema não-linear (2.9) possui uma única solução suave local no tempo.

Agora, se chamarmos de F_1 a aplicação F apresentada acima no Lema 2.4.1, mas definida em $\mathcal{Y} := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \subset D(\mathcal{A})$, partindo do fato de que $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e, das propriedades assumidas sobre a função p, conclui-se que F_1 leva $\mathcal{Y}$ em si mesmo. Ainda mais, uma computação algébrica similar àquela já feita anteriormente mostra que F_1 também é localmente Lipschitz contínua sobre $\mathcal{Y}$. Portanto, pelo resultado obtido em [30] (Teorema 3.4 - (ii)), podemos definir, para $U_0 \in \mathcal{Y}$,

$$\Phi_1(U(t)) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s) F_1^U(s) ds,$$

sobre o conjunto

$$K_1 = \left\{(u, u_t, u_{tt}) \in C([0, T]; \mathcal{Y}) : \sup \|U(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq \mu_1 \|U_0\|_{\mathcal{Y}} + 1\right\}.$$

Da mesma forma, construímos um ponto fixo para Φ_1 que é uma solução forte local no tempo de (2.9).

Seguindo as ideias apresentadas em [25], procedemos com os cálculos com soluções provenientes de dados iniciais mais regulares $U(0) \in \mathcal{Y} = D(A) \times D(A) \times D(A^{1/2})$. Como $\mathcal{Y}$ é denso em $\mathcal{H}$, por argumentos de densidade, podemos passar o limite e obter as estimativas desejadas para soluções suaves.

Prova da parte (2). Como já obtemos soluções locais, que potencialmente explodem em tempo finito, nosso objetivo é estabelecer estimativas de energia que permaneçam válidas para todo tempo $t > 0$. Para tanto, usaremos o método dos multiplicadores, que consiste em compor formalmente a equação com multiplicadores convenientes para a obtenção de estimativas de energia. Mas primeiro, mostraremos que a energia não-linear E_0 e a energia total $\mathcal{E}$ são, em algum sentido, "equivalentes".

Lema 2.4.2. *Assumimos $\beta > 0$. Então existe uma constante positiva $C_p = C_p(\beta, p, \Omega)$ dependendo apenas dos parâmetros da equação e de $\beta > 0$ tal que*

$$\frac{1}{2}E_0(t) - C_{p,\beta,\Omega} \leq \mathcal{E}(t) \leq \frac{3}{2}E_0(t) + C_{p,\beta,\Omega}. \tag{2.18}$$

Suponhamos, por um instante apenas, que o Lema 2.4.2 seja verdadeiro. Então

$$E(t) \leq E_0(t) \leq 2\left(\mathcal{E}(t) + C_{p,\beta,\Omega}\right).$$

Isto mostra que todas as estimativas obtidas para a energia total $\mathcal{E}$ também são válidas para a energia linear E. Para ser mais preciso, se $\mathcal{E}(t)$ for uniformemente globalmente limitada no tempo, então $E(t)$ também será.

Demonstração: Valem as estimativas

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(t) - E_0(t)| &= \left|(p(u), u_t) + \theta\int_\Omega P(u)d\mathbf{x} + \frac{2k}{3}\int_\Omega (u_t)^3 d\mathbf{x}\right| \\ &\leq \left|(p(u), u_t) + \theta\int_\Omega P(u)d\mathbf{x}\right| + \frac{2k}{3}\int_\Omega |u_t|^3 d\mathbf{x} \\ &\leq \delta\|p(u)\|^2 + \frac{1}{4\delta}\|u_t\|^2 + \theta\|P(u)\|_1 + \frac{2k}{3}\int_\Omega |u_t|^3 d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

e agora limitamos cada termo separadamente.

Pela desigualdade de Young, $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$, temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega 1 \cdot u_t^2 \leq C_{\beta,\Omega,\epsilon} + \epsilon\beta\int_\Omega u_t^4 \\ &\int_\Omega 1 \cdot |u_t|^3 \leq C_{\beta,\Omega,\epsilon} + \epsilon\beta\int_\Omega u_t^4, \end{aligned} \tag{2.19}$$

com $p = q = 2$ para a primeira desigualdade e $p = \dfrac{4}{3}$ e $q = 4$ para a segunda.

Pelo Teorema do Valor Médio e as hipóteses feitas sobre a função p, obtemos

$$\|p(u)\|^2 \leq 2m^2C_0^2E_0(t) + C_\Omega$$

e

$$\begin{aligned} |P(u(t,\mathbf{x}))| - |P(0)| &\leq |P(u(t,\mathbf{x})) - P(0)| \\ &\leq |p(\xi(t,\mathbf{x}))| \cdot |u(t,\mathbf{x})|, \ \xi = u \cdot \eta, \ 0 \leq \eta \leq 1 \\ &\leq (m|\xi(t,\mathbf{x})| + C)\, |u(t,\mathbf{x})| \qquad (2.20) \\ &\leq m|u(t,\mathbf{x})|^2 + C|u(t,\mathbf{x})| \\ &\leq (m+\epsilon)|u(t,\mathbf{x})|^2 + \frac{C^2}{4\epsilon}. \end{aligned}$$

Agora integramos (2.20) para obter

$$\|P(u)\|_1 \leq (m+\epsilon)C_0^2\|A^{1/2}u\|^2 + C_{p,\Omega,\epsilon}.$$

Combinando as desigualdades acima com reescalamento apropriado, concluímos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(t) - E_0(t)| &\leq \delta \cdot [2m^2C_0^2E_0(t) + C_\Omega] + \epsilon E_0(t) + C_{\beta,\Omega,\epsilon} \\ &+ \theta(m+\epsilon)C_0^2\|A^{1/2}u\|^2 + C_{p,\Omega,\epsilon} + \epsilon E_0(t) + C_{\beta,\Omega,\epsilon} \\ &\leq \frac{1}{2}E_0(t) + C_{p,\beta,\Omega} \end{aligned}$$

e a demonstração está concluída. □

Para aplicar o já mencionado método da energia, começamos multiplicando (2.9) por u_{tt}: este procedimento é permitido, já que, para dados iniciais regulares, nós já provamos que as soluções locais correspondentes são fortes (parte (1) do Teorema 2.4.1). Tomaremos dados inciais regulares para os quais estimativas uniformes são estabelecidas e, usando argumentos de densidade, obteremos o desejado.

$$\tau(u_{ttt}, u_{tt}) + \alpha\|u_{tt}\|^2 + c^2(Au, u_{tt}) + b(Au_t, u_{tt}) + \beta((u_t)^3, u_{tt}) = \\ 2k((u_t)^2, u_{tt}) + (p(u), u_{tt}).$$

Usando o fato de que

$$\frac{d}{dt}(v(t), w(t)) = (v'(t), w(t)) + (v(t), w'(t)) \tag{2.21}$$

e integrando por partes, podemos reescrever a identidade acima na forma

$$\begin{aligned}&\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}\|^2 + \alpha\|u_{tt}\|^2 + c^2\left[\frac{d}{dt}(A^{1/2}u, A^{1/2}u_t) - \|A^{1/2}u_t\|^2\right]\\ &+\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|A^{1/2}u_t\|^2 + \frac{\beta}{4}\frac{d}{dt}\|u_t\|_4^4 = \frac{2k}{3}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u_t)^3 d\mathbf{x} + (p(u), u_{tt}).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Ainda precisamos reconstruir o termo $\|A^{1/2}u\|$. Para tanto, multiplicamos (2.9) por u_t e obtemos

$$\begin{aligned}\tau(u_{ttt}, u_t) + \alpha(u_{tt}, u_t) + c^2(Au, u_t) + b(Au_t, u_t) + \beta((u_t)^3, u_t) =\\ 2k((u_t)^2, u_t) + (p(u), u_t).\end{aligned}$$

Usando, novamente, (2.21) e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}&\tau\left[\frac{d}{dt}(u_{tt}, u_t) - \|u_{tt}\|^2\right] + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 + \frac{c^2}{2}\frac{d}{dt}\|A^{1/2}u\|^2\\ &+b\|A^{1/2}u_t\|^2 + \beta\|u_t\|_4^4 = 2k\int_\Omega (u_t)^3 d\mathbf{x} + (p(u), u_t).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Multiplicando (2.23) por uma constante $\theta > 0$ e somando a (2.22), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\frac{\tau}{2}\|u_{tt}\|^2 + \theta\tau(u_{tt}, u_t) + \frac{\theta\alpha}{2}\|u_t\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u_t\|_4^4 - (p(u), u_t)\right.\\ &-\theta\int_\Omega P(u)d\mathbf{x} + \frac{b}{2}\|A^{1/2}u_t\|^2 + c^2(A^{1/2}u_t, A^{1/2}u)\\ &\left.\frac{\theta c^2}{2}\|A^{1/2}u\|^2 - \frac{2k}{3}\int_\Omega (u_t)^3 d\mathbf{x}\right\} + (\alpha - \theta\tau)\|u_{tt}\|^2\\ &+(\theta b - c^2)\|A^{1/2}u_t\|^2 + \theta\beta\|u_t\|_4^4 - 2k\theta\int_\Omega (u_t)^3 d\mathbf{x} = -\int_\Omega p'(u)u_t^2 d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Observando o fato de que

$$\frac{\tau}{2}\|u_{tt}+\theta u_t\|^2=\frac{\tau}{2}\|u_{tt}\|^2+\theta\tau(u_{tt},u_t)+\frac{\tau\theta^2}{2}\|u_t\|^2 \quad \text{e}$$

$$\frac{b}{2}\left\|A^{1/2}\left(u_t+\frac{c^2}{b}u\right)\right\|^2=\frac{b}{2}\|A^{1/2}u_t\|^2+c^2(A^{1/2}u_t,A^{1/2}u)+\frac{c^4}{2b}\|A^{1/2}u\|^2,$$

(2.24) é reescrita na forma

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\frac{\tau}{2}\|u_{tt}+\theta u\|^2+\frac{\theta}{2}(\alpha-\theta\tau)\|u_t\|^2+\frac{b}{2}\left\|A^{1/2}u_t+\frac{c^2}{b}A^{1/2}u\right\|^2\right.\\&+\frac{c^2}{2b}(\theta b-c^2)\|A^{1/2}u\|^2+\frac{\beta}{4}\|u_t\|_4^4-(p(u),u_t)-\theta\int_\Omega P(u)d\mathbf{x}\\&\left.-\frac{2k}{3}\int_\Omega(u_t)^3d\mathbf{x}\right\}+(\alpha-\theta\tau)\|u_{tt}\|^2+(\theta b-c^2)\|A^{1/2}u_t\|^2+\theta\beta\|u_t\|_4^4\\&=2k\theta\int_\Omega(u_t)^3d\mathbf{x}-(p'(u),u_t^2).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Da definição de (2.13), (2.14), (2.15) e da Observação 2.3.1, temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t)+\frac{\gamma}{2}\|u_{tt}\|^2+\frac{b\gamma}{2\tau}\|A^{1/2}u_t\|^2+\theta\beta\|u_t\|_4^4=2k\theta\int_\Omega(u_t)^3d\mathbf{x}-(p'(u),u_t^2),\tag{2.26}$$

e portanto, para quaisquer $0<\beta^*<\beta$, $0\le s\le t$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t)\;&+\;\frac{\gamma}{2}\int_s^t\|u_{tt}(r)\|^2dr+\frac{b\gamma}{2\tau}\int_s^t\|A^{1/2}u_t(r)\|^2dr+\theta(\beta-\beta^*)\int_s^t\|u_t(r)\|_4^4dr\\&=\;\mathcal{E}(s)+\theta\int_s^t\int_\Omega\left\{2ku_t^3(r)-\beta^*u_t^4(r)-\theta^{-1}p'(u(r))u_t^2(r)\right\}d\mathbf{x}dr\\&=\;\mathcal{E}(s)+\theta\int_s^t\int_\Omega\left\{\left[2ku_t(r)-\beta^*u_t^2(r)-\theta^{-1}p'(u(r))\right]u_t^2(r)\right\}d\mathbf{x}dr.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Note que k/β^* é o máximo global da função real $s\mapsto 2ks-\beta^*s^2+\theta^{-1}\delta$. Consequentemente, de (0.8), para todo $s\in\mathbb{R}$,

$$\frac{\theta_\delta}{\theta}=\frac{k^2}{\beta^*}+\frac{\delta}{\theta}\ge 2ks-\beta^*s^2+\theta^{-1}\delta\ge 2ks-\beta^*s^2-\theta^{-1}p'(s),$$

em que

$$\theta_\delta:=\frac{k^2\theta}{\beta^*}+\delta>0.$$

Sendo a função $s \mapsto 2ks - \beta^* s^2 + \theta^{-1}\delta$ limitada no intervalo $I := \left[\frac{k}{\beta^*} - \frac{\sqrt{\theta_\delta}}{\beta^*\theta}, \frac{k}{\beta^*} + \frac{\sqrt{\theta_\delta}}{\beta^*\theta}\right]$, e negativa no conjunto $\mathbb{R}\backslash I$, se definirmos

$$\Omega_{\delta,r} = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega;\, \frac{k}{\beta^*} - \sqrt{\frac{\theta_\delta}{\beta^*\theta}} \leq u_t(r,\mathbf{x}) \leq \frac{k}{\beta^*} + \sqrt{\frac{\theta_\delta}{\beta^*\theta}} \right\},$$

podemos estimar (2.27) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &+ \frac{\gamma}{2}\int_s^t \|u_{tt}(r)\|^2 dr + \frac{b\gamma}{2\tau}\int_s^t \|A^{1/2}u_t(r)\|^2 dr + \theta(\beta - \beta^*)\int_s^t \|u_t(r)\|_4^4 dr \\ &\leq \mathcal{E}(s) + \theta\int_s^t \int_{\Omega_{\delta,r}} \left\{ \left[2ku_t(r) - \beta^* u_t^2(r) - \theta^{-1}p'(u(r))\right] u_t^2(r) \right\} d\mathbf{x}dr \\ &\leq \mathcal{E}(s) + (t-s)\cdot C(k,\beta,\theta,p,\Omega), \end{aligned} \tag{2.28}$$

mostrando que a energia total (e consequentemente a energia linear) não explode em tempo finito.

Prova da parte (3). Como anteriormente,

$$\int_\Omega |u_t|^3 dx \leq \epsilon C_0^2 ||A^{1/2}u_t||^2 + (4\epsilon)^{-1}\|u_t\|_4^4$$

e então

$$2k\theta\int_\Omega (u_t)^3 d\mathbf{x} \leq \frac{k\theta}{2\epsilon}\|u_t\|_4^4 + \epsilon 2k\theta C_0^2\|A^{1/2}u_t\|^2.$$

Esta última desigualdade, combinada com (2.26) e a hipótese 0.8, nos dá

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \frac{\gamma}{2}\|u_{tt}\|^2 + \left(\frac{b\gamma}{2\tau} - (2\epsilon k\theta + \delta)C_0^2\right)\|A^{1/2}u_t\|^2 + \theta\left(\beta - \frac{k}{2\epsilon}\right)\|u_t\|_4^4 \leq 0. \tag{2.29}$$

Então basta fixar $\epsilon = \frac{b\gamma}{8\tau k\theta C_0^2} < \frac{b\gamma}{4\tau k\theta C_0^2}$ e, assim, para $\beta > \beta_0 \equiv \frac{4\tau k^2\theta C_0^2}{b\gamma}$, a limitação global é satisfeita. Isto completa a prova do teorema. □

Observação 2.4.1. *Note que a demonstração acima prova que o funcional* $\mathcal{E} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* *definido por*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(u_0, u_1, u_2) &\equiv \frac{\tau}{2}\|u_2 + \theta u_1\|^2 + \frac{b}{2}\left\|A^{1/2}(u_1 + \frac{c^2}{b}u_0)\right\|^2 \\
&+ \frac{\theta\gamma}{4}\|u_1\|^2 + \frac{c^2\gamma}{4\tau}\|A^{1/2}u_0\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u_1\|_4^4 \\
&- (p(u_0), u_1) - \theta\int_\Omega P(u_0)d\boldsymbol{x} - \frac{2k}{3}\int_\Omega |u_1|^3 d\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

é uma função de Lyapunov estrita no caso em que β é suficientemente grande. Com efeito, $\mathcal{E}(t)$ é contínua e não-crescente sobre a dinâmica, segundo (2.29). Quando $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0$, a dinâmica colapsa para os pontos estacionários definidos por

$$c^2 Au = p(u). \tag{2.30}$$

Além disto, $\mathcal{E}$ é limitada superiormente em todo subconjunto limitado de $\mathcal{H}$ e, mais ainda, o conjunto $\{U \in \mathcal{H}; \mathcal{E}(U) \leq R\}$ é limitado em $\mathcal{H}$.

Capítulo 3

Existência de Atrator Global

Na ausência de estrutura gradiente, i.e., quando $\beta > 0$ não é assumido suficientemente grande, ainda assim é possível provar que o sistema dinâmico possui a propriedade de absorção. Este resultado é imprescindível para o estudo de atratores na situação não-gradiente.

3.1 Conjunto absorvente

Teorema 3.1.1. [Conjunto absorvente] *Seja $\beta > 0$. Com relação às soluções globais (no tempo) obtidas via Teorema 2.4.1, o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ gerado por (2.9) no espaço de energia finita $\mathcal{H}$ é dissipativo, ou seja, existe um número real positivo $R > 0$ com a propriedade: para qualquer subconjunto limitado $B \subset \mathcal{H}$, existe um tempo $t_0 = t_0(B)$ tal que $\|S(t)U\|_{\mathcal{H}} \leq R$ para todo $U \in B$ e $t \geq t_0$. Além disso, existe um conjunto absorvente positivamente invariante $\mathcal{B}_0$.*

3.1.1 Prova do Teorema 3.1.1

Faremos uso das ideias apresentadas em [20] e [6, 8], combinando uma escolha conveniente de funcional de Lyapunov.

Defina

$$V_\epsilon(t) := \mathcal{E}(t) + \epsilon\tau(u_{tt}, u) - \epsilon\frac{\tau}{2}\|u_t\|^2 + \epsilon\frac{b}{2}\|A^{1/2}u\|^2.$$

Como

$$2(u_{tt},u) \leq \|u_{tt}\|^2 + C_0^2\|A^{1/2}u\|^2,$$

então existe $\epsilon_0 > 0$ de modo que

$$\frac{1}{4}E_0(t) - C_p \leq V_\epsilon(t) \leq \frac{7}{4}E_0(t) + C_p, \tag{3.1}$$

para todo $\epsilon \in [0,\epsilon_0]$ e $C_p \equiv C_{p,\beta}$, como no Lema 2.4.2, é uma constante independente de ϵ.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
|V_\epsilon(t) - \mathcal{E}(t)| &\leq \epsilon\,|(u_{tt}(t),u(t))| + \frac{\epsilon\tau}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \epsilon\frac{b}{2}\|A^{1/2}u(t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\|u_{tt}(t)\|_2^2 + \epsilon\frac{C_0^2+b}{2}\|A^{1/2}u(t)\|_2^2 + \epsilon\frac{\tau C_0^2}{2}\|A^{1/2}u_t(t)\|_2^2 \\
&\leq \epsilon\cdot\tilde{C}E(t) \leq \epsilon\tilde{C}E_0(t).
\end{aligned}$$

Para $\epsilon \in \left[0, \dfrac{1}{2\tilde{C}}\right]$, pelo Lema 2.4.2 obtemos o desejado.

Temos

$$\begin{aligned}
\tau\frac{d}{dt}(u_{tt},u) &= (\tau u_{ttt},u) + (\tau u_{tt},u_t) \\
&= 2k((u_t)^2,u) + (p(u),u) - \alpha(u_{tt},u) - c^2(Au,u) \\
&- b(Au_t,u) - \beta((u_t)^3,u) + \tau(u_{tt},u_t) \\
&= (2k(u_t)^2 - \beta(u_t)^3,u) + (p(u),u) - \alpha(u_{tt},u) \\
&- c^2\|A^{1/2}u\|^2 - \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|A^{1/2}u\|^2 + \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2,
\end{aligned}$$

que combinado com a hipótese (0.8) assumida sobre a função real p implica

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\tau(u_{tt},u) + \frac{b}{2}\|A^{1/2}u\|^2 - \frac{\tau}{2}\|u_t\|^2\right\} &= (2k(u_t)^2 - \beta(u_t)^3,u) - c^2\|A^{1/2}u\|^2 \\
&+ (p(u),u) - \alpha(u_{tt},u) \\
&\leq (2k(u_t)^2 - \beta(u_t)^3,u) - \frac{c^2}{2}\|A^{1/2}u\|^2 \\
&+ C\|u_{tt}\|^2 + C_p.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{dV_\epsilon}{dt}(t) &= \frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) + \epsilon\frac{d}{dt}\left\{\tau(u_{tt},u) + \frac{b}{2}\|A^{1/2}u\|^2 - \frac{\tau}{2}\|u_t\|^2\right\}\\
&\leq 2k\theta\int_\Omega (u_t)^3 d\mathbf{x} - \frac{\beta\theta}{2}\|u_t\|_4^4 - \frac{\gamma}{2}\|u_{tt}\|^2 + (p'(u),u_t^2)\\
&- \frac{b\gamma}{2\tau}\|A^{1/2}u_t\|^2 - \frac{\epsilon c^2}{2}\|A^{1/2}u\|^2 - \frac{\beta\theta}{2}\|u_t\|_4^4\\
&+ \epsilon(2k(u_t)^2 - \beta(u_t)^3, u) + \epsilon C\|u_{tt}\|^2 + \epsilon C_p.
\end{aligned}$$

Consideremos, agora, $\Omega_1 := \left\{\mathbf{x}\in\Omega : |u_t| \geq \frac{4k}{\beta}\right\}$ e $\Omega_2 := \Omega\backslash\Omega_1$. Portanto, usando um argumento similar usado na prova do Teorema 2.4.1, obtemos

$$2k\theta\int_\Omega (u_t)^3 d\mathbf{x} - \frac{\beta\theta}{2}\|u_t\|_4^4 \leq \mu\left(\Omega_2\right)\left(\frac{4k}{\beta}\right)^3 4k\theta := C_{\Omega,k,\beta}.$$

Vamos estimar, agora, o termo $(2k(u_t)^2 - \beta(u_t)^3, u)$:

$$\begin{aligned}
(2k(u_t)^2 - \beta(u_t)^3, u) &= 2k(u_t^2,u) - \beta((u_t)^3,u)\\
&\leq 2k|((u_t)^2,u)| + \beta|((u_t)^3,u)|\\
&\leq \underbrace{2k\|(u_t)^2\|_2\|u\|_2}_{(1)} + \underbrace{\beta|((u_t)^3,u)|}_{(2)}.
\end{aligned}$$

O termo (1) é estimado como segue.

$$\begin{aligned}
2k\|(u_t)^2\|_2\|u\|_2 &= \left(\frac{2k}{\sqrt{2\delta}}\|(u_t)^2\|_2\right)\cdot\left(\sqrt{2\delta}\|u\|_2\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left[\frac{4k^2}{2\delta}\|(u_t)^2\|_2^2 + 2\delta\|u\|_2^2\right]\\
&\leq \frac{k^2}{\delta}\|u_t\|_4^4 + \delta C_0^2\|A^{1/2}u\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Já o termo (2) será subdividido em dois.

$$\beta|((u_t)^3,u)| \leq \beta\left[\underbrace{\int_{\{|u_t|\leq 1\}}|u_t|^3|u|d\mathbf{x}}_{(I)} + \underbrace{\int_{\{|u_t|\geq 1\}}|u_t|^3|u|d\mathbf{x}}_{(II)}\right].$$

Estimaremos primeiro a parcela (I). Para $\Omega_{\leq} := \{|u_t| \leq 1\}$, pelas desigualdades de Young, de Hölder e de Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\leq}} |u_t|^3|u|d\mathbf{x} &\leq \int_{\Omega_{\leq}} |u_t||u|d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} \left(\delta_1 + \frac{1}{4\delta_1}|u_t|^2\right)|u|d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\delta_1}{\sqrt{2\delta_2}} \cdot \sqrt{2\delta_2}|u| + \frac{1}{4\delta_1}|u||u_t|^2\right) d\mathbf{x} \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\frac{\delta_1^2}{4\delta_2} + \delta_2|u|^2\right) d\mathbf{x} + \frac{1}{4\delta_1}\|u\|_2\|(u_t)^2\|_2 \\
&\leq \frac{\delta_1^2\mu(\Omega)}{4\delta_2} + \delta_2\|u\|_2^2 + \sqrt{2\delta_3}\|u\|_2 \cdot \frac{1}{4\delta_1\sqrt{2\delta_3}}\|(u_t)^2\|_2 \\
&\leq \frac{\delta_1^2\mu(\Omega)}{4\delta_2} + \delta_2 C_0^2\|A^{1/2}u\|_2^2 + \delta_3 C_0^2\|A^{1/2}u\|_2^2 + \frac{1}{64\delta_1^2\delta_3}\|u_t\|_4^4.
\end{aligned}$$

Pondo $\delta_1 = \sqrt{\dfrac{2}{\mu(\Omega)}} \cdot \dfrac{\delta}{C_0}$ e $\delta_2 = \delta_3 = \dfrac{\delta}{2C_0^2}$, obtemos

$$\int_{\Omega_{\leq}} |u_t|^3|u|d\mathbf{x} \leq \delta(1 + \|A^{1/2}u\|_2^2) + C_\delta\|u_t\|_4^4. \tag{3.3}$$

Para estimar (II), usamos um raciocínio análogo. Para $\Omega_{\geq} := \{|u_t| \geq 1\}$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\geq}} |u_t|^3|u|d\mathbf{x} &\leq \|u\|_{6,\Omega_{\geq}} \cdot \|(u_t)^3\|_{6/5,\Omega_{\geq}} = \|u\|_{6,\Omega_{\geq}} \cdot \left(\int_{\Omega_{\geq}} |u_t|^3|u_t|^{3/5}d\mathbf{x}\right)^{5/6} \\
&\leq \|u\|_6 \cdot \left(\int_{\Omega} |u_t|^4 d\mathbf{x}\right)^{5/6} \\
&= \left(\frac{6\delta}{C_0^2}\right)^{1/6} \|u\|_6^{1/3} \cdot \left(\frac{6\delta}{C_0^2}\right)^{-1/6} \|u\|_6^{2/3} \left(\int_{\Omega} |u_t|^4 d\mathbf{x}\right)^{5/6} \\
&\leq \delta\|A^{1/2}u\|_2^2 + C_\delta\|A^{1/2}u\|_2^{4/5}\|u_t\|_4^4.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Combinando as estimativas (3.3) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\beta|((u_t)^3, u)| &\leq \beta\left[\delta\left(1 + \|A^{1/2}u\|_2^2\right) + C_\delta\|u_t\|_4^4\right. \\
&+ \left.\delta\|A^{1/2}u\|_2^2 + C_\delta\|A^{1/2}u\|_2^{4/5}\|u_t\|_4^4\right].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Portanto, de (3.2) e (3.5), reescalando δ, podemos escrever

$$(2k(u_t)^2 - \beta(u_t)^3, u) \leq \delta\left(1 + \|A^{1/2}u\|_2^2\right) + C_\delta\left(1 + \|A^{1/2}u\|_2^{4/5}\right)\|u_t\|_4^4. \tag{3.6}$$

Destas últimas estimativas, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dV_\epsilon}{dt}(t) &\leq C_{\Omega,p,\beta,k} - \frac{\gamma}{4}\|u_{tt}\|^2 - \frac{b\gamma}{2\tau}\|A^{1/2}u_t\|^2 - \frac{\epsilon c^2}{4}\|A^{1/2}u\|^2 - \frac{\beta\theta}{2}\|u_t\|_4^4 \\
&+ \epsilon\left\{-\frac{c^2}{4}\|A^{1/2}u\|^2 + \delta\left(1+\|A^{1/2}u\|^2\right) + C_\delta\left(1+\|A^{1/2}u\|^{4/5}\right)\|u_t\|_4^4\right\}
\end{aligned}$$

Como ϵ será escolhido pequeno e, para valores pequenos de ϵ vale (3.1), nós podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{dV_\epsilon}{dt}(t) + \epsilon\frac{c^2}{7}V_\epsilon(t) &\leq \frac{dV_\epsilon}{dt}(t) + \epsilon\frac{c^2}{4}E_0(t) + \frac{C_p}{7} \\
&\leq C_{\Omega,p,\beta,k} + \frac{C_p}{7} - \frac{\beta\theta}{4}\|u_t\|_4^4 + \epsilon\left\{-\frac{c^2}{8}\|A^{1/2}u\|^2 + \delta\right. \\
&+ \left. C_\delta\left(1+\|A^{1/2}u\|^{4/5}\right)\|u_t\|_4^4\right\}
\end{aligned}$$

com $\delta := \dfrac{c^2}{8} > 0$.

No que segue, escrevemos esta última desigualdade de um modo mais conveniente e limpo, para facilitar os cálculos subsequentes:

$$\begin{aligned}
\min\left\{1, \frac{c^2}{7}\right\}\cdot\left[\frac{dV_\epsilon}{dt}(t) + \epsilon V_\epsilon(t)\right] &\leq \frac{dV_\epsilon}{dt}(t) + \epsilon\frac{c^2}{7}V_\epsilon(t) \\
&\leq C_{\Omega,p,\beta,k} + \frac{C_p}{7} - \frac{\beta\theta}{4}\|u_t\|_4^4 \\
&+ \epsilon\left\{-\frac{c^2}{8}\|A^{1/2}u\|^2 + \frac{c^2}{8} + C_\delta\left(1+\|A^{1/2}u\|^{4/5}\right)\|u_t\|_4^4\right\} \\
&= \left[C_{\Omega,p,\beta,k} + \frac{C_p}{7} + \epsilon\frac{c^2}{8}\right] - \underbrace{\epsilon\frac{c^2}{8}\|A^{1/2}u\|^2}_{\leq 0} \\
&+ \left\{\epsilon\cdot C_\delta\left(1+\|A^{1/2}u\|^{4/5}\right) - \frac{\beta\theta}{4}\right\}\|u_t\|_4^4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dV_\epsilon}{dt}(t) + \epsilon V_\epsilon(t) \leq d_0\left(\epsilon + d_1\right) + d_2\left\{\epsilon\left[1+V_\epsilon(t)\right]^{2/5} - d_3\right\}\|u_t\|_4^4, \tag{3.7}$$

sendo todas as d_i, $i = 1, 2, 3$, constantes positivas e independentes de ϵ, para $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

De (3.7), pode-se ver facilmente que

$$
\begin{aligned}
V_\epsilon(t) & \leq e^{-\epsilon(t-s)}V_\epsilon(s) + d_0\left(1+\frac{d_1}{\epsilon}\right)\left(1-e^{-\epsilon(t-s)}\right) \\
& +d_2\int_s^t e^{-\epsilon(t-\tau)}\left\{\epsilon\left[1+V_\epsilon(\tau)\right]^{2/5}-d_3\right\}\|u_t(\tau)\|_4^4 d\tau,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

para todo $t \geq s \geq 0$. Mostraremos, agora, que a integral do lado direito de (3.8) pode ser eliminada.

Dado um número $V \in \mathbb{R}_+$, seja $\sigma(V)$ o único ponto fixo da função real

$$
f(\sigma) := \frac{2}{d_3}\left\{1+V+d_0\left(1+\sigma\ d_1\right)\right\}^{2/5}. \tag{3.9}
$$

Então, a função real que associa este V ao ponto fixo $\sigma(V)$, $\sigma : V \mapsto \sigma(V)$, é uma função contínua que é positiva, crescente e que satisfaz $\lim_{V\to\infty}\sigma(V) = \infty$.

Redefina $V_\epsilon(t) \equiv V_\epsilon(t) + C_p$, com C_p sendo a constante que aparece em (3.1). Então $4V_\epsilon(t) \geq E_0(t) \geq 0$ e todas as estimativas acima continuam válidas.

Agora, tomamos $\epsilon = \left[\sigma\left(V_\epsilon(s)\right)\right]^{-1}$ em (3.8). Para esta escolha particular de ϵ e lembrando que $\beta > 0$ (logo d_3 também é positiva), afirmamos que

$$
\epsilon\left[1+V_\epsilon(t)\right]^{2/5} - d_3 < 0 \tag{3.10}
$$

para todo $t \geq s$.

De fato, de (3.9) e da relação de ponto fixo $f(\sigma) = \sigma$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\epsilon\left[1+V_\epsilon(s)\right]^{2/5} - d_3 & < \epsilon\left[1+V_\epsilon(s)+d_0\left(1+\epsilon^{-1}d_1\right)\right]^{2/5} - d_3 \\
& = \frac{\epsilon d_3\epsilon^{-1}}{2} - d_3 = -\frac{d_3}{2} < 0.
\end{aligned}
$$

Pela continuidade de V_ϵ, (3.10) é válida para valores de t em algum intervalo $[s, s{+}T^*]$.

Se fosse $T^* < \infty$, então existiria T^* tal que

$$\begin{gathered} \epsilon\left[1+V_\epsilon(t)\right]^{2/5} < d_3,\ t \in [s, s+T^*) \\ \text{e} \\ \epsilon\left[1+V_\epsilon(s+T^*)\right]^{2/5} = d_3. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Agora, usando (3.8), para $t \in [s, s+T^*)$, temos

$$V_\epsilon(t) \leq V_\epsilon(s) + d_0\left(1+\frac{d_1}{\epsilon}\right).$$

Portanto, (3.9) implica que

$$\epsilon\left[1+V_\epsilon(t)\right]^{2/5} \leq \epsilon\left\{1+V_\epsilon(s)+d_0\left(1+\frac{d_1}{\epsilon}\right)\right\}^{2/5} = \frac{d_3}{2},$$

para $t \in [s, s+T^*)$. Assim

$$\epsilon\left[1+V_\epsilon(s+T^*)\right]^{2/5} = \lim_{t\to s+T^*} \epsilon\left[1+V_\epsilon(t)\right]^{2/5} \leq \frac{d_3}{2},$$

contradizendo a segunda relação em (3.11).

Isto prova que, na verdade, (3.8) pode ser escrito na forma

$$V_\epsilon(t) \leq e^{-\epsilon(V_\epsilon(s))(t-s)} V_\epsilon(s) + F(V_\epsilon(s)), \tag{3.12}$$

para todo $t \geq s \geq 0$, em que $\epsilon(V) = [\sigma(V)]^{-1}$ e $F(V) = d_0\left(1 + d_1 \cdot \sigma(V)\right)$.

Em particular,

$$V_\epsilon(t) \leq V_\epsilon(0) + F(V_\epsilon(0)),\ \forall t \geq 0. \tag{3.13}$$

Assuma que $V_\epsilon(0) \leq R$, para algum $R > 0$. Para todo $s \geq 0$, temos

$$V_\epsilon(s) \leq R + d_0\left[1 + d_1 \cdot \sigma(V_\epsilon(0))\right]$$

e, consequentemente,

$$\epsilon(V_\epsilon(s)) \geq \{R + d_0 \, [1 + d_1 \; \sigma(V_\epsilon(0))]\}^{-1} \geq \epsilon_R > 0, \; \forall s \geq 0.$$

Logo,

$$V_\epsilon(t) \leq e^{-\epsilon_R(t-s)} V_\epsilon(s) + F(V_\epsilon(s)),$$

para todo $t \geq s \geq 0$, já que $V_\epsilon(0) \leq R$.

Como $F(V)$ é uma função crescente de V, obtemos

$$W_R(t) \leq e^{-\epsilon_R(t-s)} W_R(s) + F(W_R(s)), \; \forall t \geq s \geq 0,$$

em que $W_R(t) := \sup \{V_\epsilon(t) : V_\epsilon(0) \leq R\}$. Isto implica que

$$W_R^\infty \equiv \limsup_{t \to \infty} W_R(t) \leq F(W_R(s)) < \infty, \; \forall \; s \geq 0.$$

A continuidade de F implica que $W_R^\infty \leq F(W_R^\infty)$. Entretanto,

$$\lim_{V \to \infty} \frac{F(V)}{V} = 0.$$

Então deve existir uma constante V_0 (independente de R) tal que $W_R^\infty \leq V_0$.

A dissipatividade desejada segue diretamente de (3.1).

Neste ponto, é importante enfatizar que o raio de dissipatividade depende de β, mas não é necessário que β seja muito grande.

Se $\mathcal{B}$ for um conjunto absorvente para $(\mathcal{H}, S(t))$, então $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ para todo $t \geq t_{\mathcal{B}}$. Assim, $\mathcal{B}_0 := \bigcup_{t \geq t_{\mathcal{B}}} S(t)\mathcal{B}$ é um conjunto positivamente invariante e $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. A demonstração está completa. $\square$

3.2 Suavidade assintótica

De posse do já provado Teorema 3.1.1, para mostrar a existência de atrator global para um sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é suficiente garantir a suavidade assintótica (1.2.4). Para tanto, usaremos o Teorema 1.2.2.

Observação 3.2.1. *Notemos que quando a dinâmica em questão é compacta ou as não-linearidades da equação são de contribuição compacta com respeito ao fluxo, então o funcional* Ψ *do Teorema 1.2.2 é compacto e a condição (1.15) é trivialmente satisfeita [35, 18, 26]. O caso de interesse é justamente quando não existe a compacidade na dinâmica e se faz necessária a exploração de alguns elementos compactificantes escondidos. Esta é exatamente a situação do nosso problema, em que os termos não-lineares são de ordem crítica com respeito às imersões de Sobolev.*

Teorema 3.2.1. **[Atrator global]** *Assuma a validade do Teorema 3.1.1. Então o semi-fluxo* $S(t)$ *gerado pelo problema (2.9) é assintoticamente suave e, consequentemente, possui um atrator global compacto* $\mathbb{A}$.

3.2.1 Prova do Teorema 3.2.1

Sejam u, w duas soluções suaves para o problema (2.9) com dados iniciais correspondentes U_0, W_0, respectivamente, tomados no conjunto limitado e positivamente invariante $\mathcal{B}_0$, i.e., $S(t)U_0 = (u(t), u_t(t), u_{tt}(t))$ e $S(t)W_0 = (w(t), w_t(t), w_{tt}(t))$. Vamos provar que os requerimentos impostos pelo Teorema 1.2.2 são satisfeitos.

Para não sobrecarregar a notação e facilitar a leitura, ponhamos $z = u - w$,

$$g(z_t(t)) = (u_t(t))^3 - (w_t(t))^3,$$

$$f(z_t(t)) = (u_t(t))^2 - (w_t(t))^2$$

e

$$p(z(t)) = p(u(t)) - p(w(t)).$$

A variável z satisfaz o problema

$$\tau z_{ttt} + \alpha z_{tt} + c^2 Az + bAz_t + \beta g(z_t) = 2kf(z_t) + p(z), \tag{3.14}$$

que nos leva à relação de energia dada por

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{\tau}{2}\|z_{tt}+\theta z_t\|^2 + \frac{\theta\gamma}{4}\|z_t\|^2 + \frac{b}{2}\left\|A^{1/2}z_t + \frac{c^2}{b}A^{1/2}z\right\|^2 + \frac{c^2\gamma}{2\tau}\|A^{1/2}z\|^2\right\} \\
&+\frac{\gamma}{2}\|z_{tt}\|^2 + \frac{b\gamma}{2\tau}\|A^{1/2}z_t\|^2 + \beta\left(g(z_t), z_{tt}+\theta z_t\right) \\
&= \left(2kf(z_t) + p(z), z_{tt}+\theta z_t\right).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Integrando de t à T, obtemos

$$\begin{aligned}
E_z(T) &\leq E_z(T) + \frac{\gamma}{2}\int_t^T \|z_{tt}(s)\|^2 ds + \frac{b\gamma}{2\tau}\int_t^T \|A^{1/2}z_t(s)\|^2 ds \\
&= E_z(t) + \int_t^T \left(2kf(z_t(s)) + p(z(s)), z_{tt}(s)+\theta z_t(s)\right) ds \\
&- \beta\int_t^T \left(g(z_t(s)), z_{tt}(s)+\theta z_t(s)\right) ds.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Integre novamente e teremos

$$\begin{aligned}
TE_z(T) &\leq \int_0^T E_z(t)dt \\
&+ \int_0^T\int_t^T \left(2kf(z_t(s)) + p(z(s)), z_{tt}(s)+\theta z_t(s)\right) ds\ dt \\
&- \beta\int_0^T\int_t^T \left(g(z_t(s)), z_{tt}(s)+\theta z_t(s)\right) ds\ dt.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Multiplicando (3.14) por z, integrando por partes e depois integrando de 0 à T, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\|A^{1/2}z(T)\|^2 + c^2\int_0^T \|A^{1/2}z(t)\|^2 dt + \beta\int_0^T \left(g(z_t(t)), z(t)\right) dt \\
&= \frac{b}{2}\|A^{1/2}z(0)\|^2 - \tau\left[(z_{tt}(t), z_t(t))\right]_0^T + \frac{\tau}{2}\left[\|z_t(t)\|^2\right]_0^T \\
&-\alpha\left[(z_t(t), z(t))\right]_0^T + \alpha\int_0^T \|z_t(t)\|^2 dt + \int_0^T \left(2kf(z_t(t)) + p(z(t)), z(t)\right) dt,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

e desta identidade podemos derivar a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} c^2 \int_0^T \|A^{1/2}z(t)\|^2 dt &\leq C\left(E_z(T)+E_z(0)\right)+\alpha\int_0^T \|z_t(t)\|^2 dt \\ &+ \int_0^T \left(H(z(t),z_t(t)),z(t)\right)dt, \end{aligned} \tag{3.19}$$

com $H(z(t), z_t(t)) = 2kf(z_t(t)) - \beta g(z_t(t)) + p(z(t))$.

Substituindo $t = 0$ em (3.16) e combinando com (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T E_z(t)dt &\leq C(E_z(T)+E_z(0))+\alpha\int_0^T \|z_t(t)\|^2 dt \\ &+ \int_0^T \left(H(z(t),z_t(t)),z_{tt}(t)+\theta z_t(t)+z(t)\right)dt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

A relação (3.17) juntamente com a desigualdade (3.20) nos dá o lema seguinte.

Lema 3.2.1. *Para todo $T > 0$, vale a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned} TE_z(T)+\int_0^T E_z(t)dt &\leq C\left\{E_z(T)+E_z(0)\right\}+\alpha\int_0^T \|z_t(t)\|^2 dt \\ &+ \int_0^T \left(H(z(t),z_t(t)),z_{tt}(t)+\theta z_t(t)+z(t)\right)dt \\ &+ \int_0^T\int_t^T \left(H(z(s),z_t(s)),z_{tt}(s)+\theta z_t(s)\right)ds\ dt, \end{aligned} \tag{3.21}$$

em que E_z é a energia linear em z (que é equivalente à norma de $\mathcal{H}$).

Agora, analisemos cada termo de (3.21) separadamente. Sendo $g(s)s \geq 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} &(T-C)E_z(T)+\int_0^T E_z(t)dt \leq CE_z(0)+\alpha\int_0^T \|z_t(t)\|^2 dt \\ &+\int_0^T \left(2kf(z_t(t))+p(z(t)),z_{tt}(t)+\theta z_t(t)+z(t)\right)dt \\ &-\beta\underbrace{\int_0^T \left(g(z_t(t)),z_{tt}(t)\right)dt}_{(I)}-\beta\int_0^T \left(g(z_t(t)),z(t)\right)dt \\ &+\int_0^T dt\int_t^T \left(2kf(z_t(s))+p(z(s)),z_{tt}(s)+\theta z_t(s)\right)ds \\ &\underbrace{-\beta\int_0^T dt\int_t^T \left(g(z_t(s)),z_{tt}(s)\right)ds}_{(II)}. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $T > 0$ tal que $\dfrac{CE_z(0)}{T-C} \leq \epsilon$. Então deduzimos

$$E_z(T) \leq \epsilon + \Psi_T(U_0, W_0),$$

em que $\Psi_T(U_0, W_0)$ consiste do valor absoluto de todas as integrais que aparecem na desigualdade acima, mas todas divididas por $(T - C)$.

Para concluir a prova da suavidade assintótica, resta apenas provar que o funcional Ψ_T satisfaz (1.15), i.e., para qualquer sequência $\{U_m\}$ tomada no conjunto positivamente invariante $\mathcal{B}_0$, existe uma subsequência $\{U_{m_k}\} \subset \{U_m\}$ tal que $\Psi_T(U_{m_k}, U_{m_l}) \longrightarrow 0$, quando $k, l \longrightarrow \infty$. Mas primeiramente, observe que, exceto pelo termo $|(I)|$, todas as integrais simples restantes contribuem apenas com termos compactos e, portanto, podemos determinar uma subsequência de modo que todas elas convirjam para zero. Para as integrais duplas, mostraremos que $|(II)|$ (que é o termo mais problemático por ser não compacto) converge para zero e a prova de que os outros termos também são convergentes para zero é feita de modo análogo.

Seja $\{U_m\} \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{B}_0$ um conjunto limitado e positivamente invariante. Para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\|S(t)U_m\|^2_{\mathcal{H}} \equiv \|u''_m(t)\|^2 + \|A^{1/2}u'_m(t)\|^2 + \|A^{1/2}u_m(t)\|^2 \leq C_{\mathcal{B}_0},$$

para todo $t \geq 0$. Logo, se $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\{u''_m\} \text{ é limitada em } L^\infty\left(s, t; L^2(\Omega)\right) \text{ e} \tag{3.22}$$

$$\{u'_m\} \text{ é limitada em } L^\infty\left(s, t; H^1_0(\Omega)\right). \tag{3.23}$$

Como $L^1\left(s, t; L^2(\Omega)\right)$ e $L^1\left(s, t; H^{-1}(\Omega)\right)$ são ambos separáveis, passando a uma subsequência se necessário, podemos dizer que

$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty\left(s, t; L^2(\Omega)\right) \text{ e} \tag{3.24}$$

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty\left(s,t;H_0^1(\Omega)\right). \tag{3.25}$$

Adicionalmente,

$$u''_m \rightharpoonup u'' \text{ em } L^2\left(s,t;L^2(\Omega)\right) \tag{3.26}$$

e pelo teorema de compacidade de Aubin-Simon [34],

$$\{u'_m\} \text{ é compacto em } C\left([s,t];L^4(\Omega)\right). \tag{3.27}$$

Assim, podemos extrair uma subsequência, a qual ainda denotaremos pelo mesmo índice, tal que

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ em } C\left([s,t];L^4(\Omega)\right). \tag{3.28}$$

Segue de (3.28) que

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ em } L^2\left(s,t;L^2(\Omega)\right) \equiv L^2(Q_{s,t}), \tag{3.29}$$

em que $Q_{s,t} := (s,t)\times\Omega$.

Em particular, $u'_m \longrightarrow u'$ quase sempre em $Q_{s,t}$. Consequentemente, $(u'_m)^3 \longrightarrow (u')^3$ quase sempre em $Q_{s,t}$ também. Mas

$$\begin{aligned}\|(u'_m)^3\|^2_{L^2(Q_{s,t})} &= \int_s^t d\sigma \int_\Omega |u'_m(\sigma,\mathbf{x})|^6 d\mathbf{x}\\ &= \int_s^t \|u'_m(\sigma)\|_6^6 d\sigma\\ &\le C_1^6 \int_s^t \|A^{1/2}u'_m(\sigma)\|^6 d\sigma\\ &\le C(T,\mathcal{B}_0).\end{aligned}$$

Sendo a sequência $\{(u'_m)^3\}$ limitada e convergente quase sempre, concluímos que

$$(u'_m)^3 \rightharpoonup (u')^3 \text{ em } L^2(Q_{s,t}) \equiv L^2\left(s,t;L^2(\Omega)\right). \tag{3.30}$$

Portanto, de (3.26) e (3.30), para $0 \leq s \leq t \leq T$, temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_s^t \Big((u_m'(\sigma))^3, u_n''(\sigma)\Big)\,d\sigma &= \lim_{m\to\infty}\int_s^t \Big((u_m'(\sigma))^3, u''(\sigma)\Big)\,d\sigma \\
&= \int_s^t \Big((u'(\sigma))^3, u''(\sigma)\Big)\,d\sigma \\
&= \int_s^t \frac{1}{4}\frac{d}{d\sigma}\|u'(\sigma)\|_4^4 d\sigma \\
&= \frac{1}{4}\left[\|u'(t)\|_4^4 - \|u'(s)\|_4^4\right].
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

De um modo similar também temos

$$
\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_s^t \Big((u_n'(\sigma))^3, u_m''(\sigma)\Big)\,d\sigma = \frac{1}{4}\Big[\|u'(t)\|_4^4 - \|u'(s)\|_4^4\Big]. \tag{3.32}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
|(I)| &= \left|\int_0^T \Big((u_m'(t))^3 - (u_n'(t))^3, u_m''(t) - u_n''(t)\Big)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{4}\left[\|u_m'(T)\|_4^4 + \|u_n'(T)\|_4^4 - \|u_m'(0)\|_4^4 - \|u_n'(0)\|_4^4\right]\right. \\
&- \left.\int_0^T \Big[\Big((u_m'(t))^3, u_n''(t)\Big) + \Big((u_n'(t))^3, u_m''(t)\Big)\Big]\,dt\right|
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|(II)| &= \left|\int_0^T dt\int_t^T \Big((u_n'(s))^3 - (u_m'(s))^3, u_n''(s) - u_m''(s)\Big)\,ds\right| \\
&= \left|\int_0^T dt\int_t^T \Big[\Big((u_n'(s))^3, u_n''(s)\Big) + \Big((u_m'(s))^3, u_m''(s)\Big)\Big]\,ds\right. \\
&- \left.\int_0^T dt\int_t^T \Big[\Big((u_n'(s))^3, u_m''(s)\Big) + \Big((u_m'(s))^3, u_n''(s)\Big)\Big]\,ds\right| \\
&= \left|\frac{1}{4}\int_0^T \Big[\|u_n'(s)\|_4^4 + \|u_m'(s)\|_4^4\Big]_t^T\,dt\right. \\
&- \left.\int_0^T dt\int_t^T \Big[\Big((u_n'(s))^3, u_m''(s)\Big) + \Big((u_m'(s))^3, u_n''(s)\Big)\Big]\,ds\right|.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Usando a convergência forte em (3.28) e os limites sequenciais fracos (3.31), (3.32) quando $m, n \to \infty$, obtém-se

$$
\lim_m \lim_n \int_0^T \Big((u_n'(t))^3 - (u_m'(t))^3, u_n''(t) - u_m''(t)\Big)\,dt = 0
$$

e

$$\lim_{m}\lim_{n}\int_0^T dt\int_t^T \Big((u_n'(s))^3-(u_m'(s))^3, u_n''(s)-u_m''(s)\Big)\,ds=0,$$

completando a convergência sequencial em m,n de $\Psi_T(U_m,U_n)$.

A suavidade assintótica segue diretamente do Teorema 1.2.2. Como já provamos que o sistema dinâmico admite uma bola absorvente, a existência de um atrator global compacto $\mathbb{A}$ segue. Isto completa a demonstração do Teorema 3.2.1. $\square$

3.3 Dimensão fractal e regularidade parcial

Aqui o principal objetivo é provar que o atrator global compacto $\mathbb{A}$, obtido através do Teorema 3.2.1, tem dimensão fractal finita. Pelo Teorema 1.2.8, é suficiente provar que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é quasistável em $\mathbb{A}$, no sentido da Definição 1.2.10. A obtenção de tal estimativa envolve majorar a diferença de duas soluções cujos dados iniciais são tomados no atrator global. Este tipo de desigualdade é a principal ferramenta utilizada quando se quer provar finitude dimensional e suavidade de atratores.

Teorema 3.3.1. [Finitude dimensional e regularidade parcial] *Seja $\beta > 0$. Então o atrator mencionado acima*

- *tem dimensão fractal finita;*
- *goza da propriedade de regularidade parcial*

$$||u_{tt}||_{H^1(\Omega)} + ||A(c^2u+bu_t)|| \le C_{\mathbb{A}};$$

Adicionalmente, se $p\in C^\infty$, então as trajetórias no atrator serão infinitamente diferenciáveis (no tempo).

3.3.1 Prova do Teorema 3.3.1

Neste seção, sempre que escrevermos *l.o.t.*, estamos nos referindo aos termos de ordem inferior, ou seja, termos de contribuição compacta para o sistema. Começamos com o resultado seguinte.

Lema 3.3.1. *Sejam u, w duas soluções tomadas na bola absorvente $u, w \in \mathcal{B}$. Ponha $z = u - w$. Então valem as seguintes desigualdades:*

- *Se $\beta > \beta_0$, então*

$$E_z(t) \leq C_1 e^{-\omega t} E_z(0) + C_2 \ l.o.t.^z(0,t), \tag{3.35}$$

em que

$$E_z(t) \sim \|z_{tt}(t)\|^2 + \|A^{1/2} z_t(t)\|^2 + \|A^{1/2} z(t)\|^2$$

e

$$l.o.t.^z(0,t) := \sup_{\sigma \in [0,t]} \Big[\|z(\sigma)\|^2_{H^{1-\eta}(\Omega)} + [\|z_t(\sigma)\|^2_{H^{1-\eta}(\Omega)} \Big];$$

- *Se $u, w \in \mathbb{A}$, o atrator global, então a mesma desigualdade de quasistabilização vale para qualquer $\beta > 0$.*

Demonstração: A variável z satisfaz

$$\tau z_{ttt} + \alpha z_{tt} + c^2 A z + b A z_t + \beta(u_t^3 - w_t^3) = 2k(u_t^2 - w_t^2) + p(u) - p(w). \tag{3.36}$$

Aplicando os multiplicadores $z_{tt}(t)$, $\theta z_t(t)$ e $\epsilon z(t)$, obtém-se

$$\begin{aligned} & E_z(T) + \int_0^T E_z(t) dt + \int_0^T \Big(\beta(u_t(t))^3 - \beta(w_t(t))^3, z_{tt}(t) + \theta z_t(t) + \epsilon z(t) \Big) \, dt \\ & \leq C E_z(0) + \int_0^T \Big(2k(u_t(t))^2 - 2k(w_t(t))^2 + p(u(t)) - p(w(t)), z_{tt}(t) + \theta z_t(t) + \epsilon z(t) \Big) \, dt. \end{aligned} \tag{3.37}$$

O único termo crítico da desigualdade acima é o termo $\beta(u_t^3 - w_t^3, z_{tt})$. Os termos restantes são subcríticos e serão incorporados aos $l.o.t.$

Temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big((u_t(t))^3 - (w_t(t))^3, z_{tt}(t)\Big)\, dt = \int_0^T \Big((u_t(t))^2 + (w_t(t))^2 + u_t(t)w_t(t), z_t(t)z_{tt}(t)\Big)\, dt \\
&\leq C \int_0^T \|z_{tt}(t)\|\|z_t(t)\|_6 \cdot \Big[\|u_t(t)\|_6^2 + \|w_t(t)\|_6^2\Big]\, dt \\
&\leq C \int_0^T \|z_{tt}(t)\|\|z_t(t)\|_{H^1(\Omega)} \cdot \Big[\|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|w_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2\Big] \\
&\leq C \int_0^T E_z(t) \cdot \Big[\|A^{1/2}u_t(t)\|^2 + \|A^{1/2}w_t(t)\|^2\Big]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

e, para deixar a demonstração mais completa, mostramos que os termos remanescentes são, de fato, subcríticos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big((u_t(t))^3 - (w_t(t))^3, z_t(t)\Big)\, dt = \int_0^T \Big((u_t(t))^2 + (w_t(t))^2 + u_t(t)w_t(t), z_t(t)z_t(t)\Big)\, dt \\
&\leq C \int_0^T \|z_t(t)\|\|z_t(t)\|_6 \cdot \Big[\|u_t(t)\|_6^2 + \|w_t(t)\|_6^2\Big]\, dt \\
&\leq C \int_0^T \|z_t(t)\|\|z_t(t)\|_{H^1(\Omega)} \cdot \Big[\|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|w_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2\Big]\, dt \\
&\leq \delta \int_0^T E_z(t)dt + C_{\delta,\mathcal{B}} \int_0^T \|z_t(t)\|^2 dt
\end{aligned} \tag{3.39}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big((u_t(t))^3 - (w_t(t))^3, z(t)\Big)\, dt = \int_0^T \Big((u_t(t))^2 + (w_t(t))^2 + u_t(t)w_t(t), z_t(t)z(t)\Big)\, dt \\
&\leq C \int_0^T \|z(t)\|\|z_t(t)\|_6 \cdot \Big[\|u_t(t)\|_6^2 + \|w_t(t)\|_6^2\Big]\, dt \\
&\leq C \int_0^T \|z(t)\|\|z_t(t)\|_{H^1(\Omega)} \cdot \Big[\|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|w_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2\Big]\, dt \\
&\leq \delta \int_0^T E_z(t)dt + C_{\delta,\mathcal{B}} \int_0^T \|z(t)\|^2 dt.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

As demais não-linearidades são compactas. Deste modo, (3.37) pode ser estimada na forma

$$\begin{aligned}
&E_z(T) + \int_0^T E_z(t)dt \leq CE_z(0) + \delta \int_0^T E_z(t)dt \\
&+C_{\delta,\mathcal{B},p} \int_0^T \Big[\|z_t(t)\|^2 + \|z(t)\|^2\Big]\, dt + \widetilde{C} \int_0^T E_z(t)\Big[\|A^{1/2}u_t(t)\|^2 + \|A^{1/2}w_t(t)\|^2\Big]\, dt.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Tomando $\delta < \dfrac{1}{2}$, concluímos que

$$\begin{aligned} E_z(T) + \int_0^T E_z(t)dt &\leq CE_z(0) + C_{\mathcal{B},p}\int_0^T \left[\|z_t(t)\|^2 + \|z(t)\|^2\right] dt \\ &+ \tilde{C}\int_0^T E_z(t)\left[\|A^{1/2}u_t(t)\|^2 + \|A^{1/2}w_t(t)\|^2\right] dt. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Repetindo o mesmo processo nos intervalos da forma $[s, T+s]$ (o sistema é autônomo)

$$\begin{aligned} E_z(T+s) + \int_s^{T+s} E_z(t)dt &\leq CE_z(s) + C_{\mathcal{B},p}\int_s^{T+s} \left[\|z_t(t)\|^2 + \|z(t)\|^2\right] dt \\ &+ \tilde{C}\int_s^{T+s} E_z(t)\left[\|A^{1/2}u_t(t)\|^2 + \|A^{1/2}w_t(t)\|^2\right] dt. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Agora, usaremos a dissipação da integral válida para cada solução (pois estamos no caso em que $\beta > \beta_0$). Isto nos dá (veja (2.29))

$$\int_0^\infty \left[\|A^{1/2}u_t(t)\|^2 + \|A^{1/2}w_t(t)\|^2\right] dt \leq C(E_u(0), E_w(0)).$$

Portanto, pela desigualdade de Gronwall

$$E_z(T+s) + \int_s^{T+s} E_z(t)dt \leq C_{\mathcal{B},p}\left\{E_z(s) + \int_s^{T+s} \left[\|z_t(t)\|^2 + \|z(t)\|^2\right] dt\right\}. \tag{3.44}$$

Através de um argumento canônico [8], a desigualdade acima nos dá a desigualdade de quasistabilidade enunciada na primeira parte do Lema 3.3.1, no caso em que β é suficientemente grande.

No caso em que $\beta > 0$ é apenas positivo (sem assumirmos a hipótese de que este é grande o suficiente), seguimos a estratégia desenvolvida em [15, 16].

Já sabemos que todas as trajetórias são atraídas por um atrator compacto $\mathbb{A} \subset H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Pela compacidade de $\mathbb{A}$, dado $\epsilon > 0$, $\mathbb{A}$ pode ser coberto por uma ϵ-rede finita.

Sejam $u(t), w(t)$ duas trajetórias contidas no atrator $\mathbb{A}$. Então, em particular,

$u_t(t), w_t(t)$ pertencem a um subconjunto compacto de $H_0^1(\Omega)$. Pela densidade de $H^2(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$ podemos assumir que:

para todo $\epsilon > 0$, existe uma rede finita $\phi_j \in H^2(\Omega) \cap \mathbb{A}$, $j = 1, 2, \ldots, N(\epsilon)$, de modo que para todo $t \in \mathbb{R}$, existem índices $j_1(t), j_2(t)$ satisfazendo

$$\|u_t(t) - \phi_{j_1(t)}\|_{H^1(\Omega)} + \|w_t(t) - \phi_{j_2(t)}\|_{H^1(\Omega)} \leq \epsilon, \; t \in \mathbb{R}. \tag{3.45}$$

Voltando à estimativa básica (3.37), precisamos lidar apenas com o termo crítico do lado direito da desigualdade, que é $\beta(u_t^3 - w_t^3, z_{tt})$. Os demais termos são subcríticos e serão incorporados aos $l.o.t.$, como anteriormente.

Temos

$$\beta(u_t^3(t) - w_t^3(t), z_{tt}(t)) = \beta(u_t^2 + w_t^2 + u_t w_t, z_t z_{tt})$$

$$= \beta(u_t^2(t) - \phi_{j_1(t)}^2 + w_t^2 - \phi_{j_2(t)}^2 + u_t w_t - \phi_{j_1(t)}\phi_{j_2(t)}, z_t z_{tt})$$

$$+\beta(\phi_{j_1(t)}^2 + \phi_{j_2(t)}^2 + \phi_{j_1(t)}\phi_{j_2(t)}, z_t z_{tt}) = \beta I(t) + \beta II(t).$$

A estimativa da primeira parcela segue de argumentos já utilizados anteriormente:

$$I(t) \leq \epsilon C(\mathbb{A}) E_z(t). \tag{3.46}$$

Já para a segunda parcela, escrevemos

$$\begin{aligned} II(t) &\leq C\|z_{tt}(t)\|\|z_t(t)\|_4 \cdot \left[\|\phi_{j_1(t)}\|_8^2 + \|\phi_{j_2(t)}\|_8^2\right] \\ &\leq C\|z_{tt}(t)\|\|z_t(t)\|_{H^{3/4}(\Omega)} \cdot \left[\|\phi_{j_1(t)}\|_{H^{9/8}(\Omega)}^2 + \|\phi_{j_2(t)}\|_{H^{9/8}(\Omega)}^2\right] \\ &\leq \epsilon C(\mathbb{A})\|z_{tt}(t)\|^2 + C(\epsilon, \mathbb{A}) l.o.t.^z \end{aligned}$$

Das desigualdades acima, reescalando ϵ, finalmente obtemos

$$\Big((u_t(t))^3 - (w_t(t))^3, z_{tt}(t)\Big) \leq \epsilon E_z(t) + C(\epsilon, \mathbb{A}) l.o.t.^z. \tag{3.47}$$

De (3.15), levando em consideração a desigualdade acima, concluímos que, para todo $s \leq t$, temos

$$E_z(t) \leq E_z(s) + \epsilon \int_s^t E_z(\sigma)d\sigma + C(\epsilon, \mathbb{A}, t-s)l.o.t.^z(s,t) \tag{3.48}$$

e

$$E_z(s) \leq E_z(t) + I_s^t(z_t, z_{tt}) + \epsilon \int_s^t E_z(\sigma)d\sigma + C(\epsilon, \mathbb{A}, t-s)l.o.t.^z(s,t), \tag{3.49}$$

em que

$$I_s^t(z_t, z_{tt}) = \frac{\gamma}{2} \int_s^t \|z_{tt}(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{b\gamma}{2\tau} \int_s^t \|A^{1/2} z_t(\sigma)\|^2 d\sigma.$$

De (3.20), nós deduzimos que, em cada subintervalo $[s, s+T_0]$, vale

$$\begin{aligned} \int_s^{s+T_0} E_z(t)dt \quad &\leq \quad C\left\{E_z(s+T_0) + E_z(s) + \int_s^{s+T_0} \|z_t(t)\|^2 dt\right\} \\ &+ \quad C(\mathbb{A}, T_0)l.o.t.^z(s, s+T_0). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Se escolhermos ϵ pequeno o suficiente e substituirmos (3.49) em (3.50), obteremos

$$\int_s^{s+T_0} E_z(t)dt \leq C\left\{I_s^{s+T_0}(z_t, z_{tt}) + E_z(s+T_0) + C(\mathbb{A}, T_0)l.o.t.^z(s, s+T_0)\right\}. \tag{3.51}$$

Integrando (3.48), obtemos

$$T_0 E_z(s+T_0) \leq (1+\epsilon T_0) \int_s^{s+T_0} E_z(\sigma)d\sigma + C(\epsilon, \mathbb{A}, T_0)l.o.t.^z(s, s+T_0). \tag{3.52}$$

Combinando (3.52) e (3.51) para um valor suficientemente grande de T_0, conseguimos

$$E_z(s+T_0) + \int_s^{s+T_0} E_z(\sigma)d\sigma \leq C(\mathbb{A}, T_0)\left\{I_s^{s+T_0}(z_t, z_{tt}) + l.o.t.^z(s, s+T_0)\right\}.$$

Como

$$\begin{aligned} I_s^{s+T_0}(z_t, z_{tt}) \quad &= \quad E_z(s) - E_z(s+T_0) \\ &+ \quad \int_s^{s+T_0} \left(H(z(\sigma), z_t(\sigma)), z_{tt}(\sigma) + \theta z_t(\sigma)\right), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} E_z(s+T_0)+\int_s^{s+T_0} E_z(\sigma)d\sigma &\leq C(\mathbb{A},T_0)\left[E_z(s)-E_z(s+T_0)\right] \\ &+ C(\epsilon,\mathbb{A},T_0)l.o.t.^z(s,s+T_0) \\ &+ \epsilon\int_s^{s+T_0} E_z(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

E isto implica

$$\begin{aligned} E_z(s+T_0) &\leq \frac{C(\mathbb{A},T_0)}{1+C(\mathbb{A},T_0)}E_z(s) \\ &+ \sup_{\sigma\in[0,T_0]}\left\{\|z(s+\sigma)\|^2_{H^{1-\eta}(\Omega)}+\|z_t(s+\sigma)\|^2_{H^{1-\eta}(\Omega)}\right\}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Portanto, para $m=0,1,2,...$, (3.53) nos dá

$$E_z((m+1)T_0)\leq \mu E_z(mT_0)+C(\mathbb{A},T_0)z_m,$$

com $0<\mu=\mu(\mathbb{A},T_0)<1$ e $z_m:=l.o.t.^z(mT_0,(m+1)T_0)$. Isto implica que

$$E_z(mT_0)\leq \mu^m E_z(0)+\tilde{C}\sum_{k=1}^{m}\mu^{m-k}z_{k-1}.$$

Usando o fato de que $\mu<1$, podemos utilizar o argumento apresentando em [8], 745-747, para concluir que existem constantes C_1, C_2 e ω (eventualmente dependendo de $\mathbb{A}$), tais que, para todo $t\geq 0$, temos

$$E_z(t)\leq C_1e^{-\omega t}E_z(0)+C_2\sup_{\sigma\in[0,t]}\left[\|z(\sigma)\|^2_{H^{1-\eta}(\Omega)}+[\|z_t(\sigma)\|^2_{H^{1-\eta}(\Omega)}\right],$$

o que completa a prova. $\square$

Como os termos do lado direito da desigualdade (3.35) no Lema 3.3.1 são compactos, isto é,

$$\|z\|^2_{H^{1-\eta}(\Omega)}+\|z_t\|^2_{H^{1-\eta}(\Omega)}\leq \|(z_{tt},z_t,z)\|_{\mathcal{H}_1}$$

em que $\mathcal{H}\subset\mathcal{H}_1$ tem imersão compacta, podemos aplicar os resultados gerais abstratos contidos em [8], a saber, os Teoremas 1.2.8 e 1.2.9, para concluir que o atrator $\mathbb{A}$ tem dimensão fractal finital e é também suave. Isto significa que as trajetórias no atrator satisfazem

$$u_{ttt} \in L_2, u_{tt} \in H^1, u_t \in H^1.$$

Usando a equação (2.9) juntamente com o fato de que os termos não-lineares são localmente Lipschitz contínuos no espaço de fase, temos

$$\|c^2 Au + bAu_t\| \leq C_{\mathbb{A}},$$

o que nos dá $c^2u + bu_t \in D(A),$ para todo $t > 0$, para todas as trajetórias no atrator $\mathbb{A}$.

Capítulo 4

A Equação de MGT sujeita a efeitos viscoelásticos

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira regular $\Gamma = \partial\Omega$ e $T > 0$ arbitrário. Considere a equação linear de terceira ordem dada por

$$\begin{cases} \tau u_{ttt}(t,\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x})u_{tt}(t,\mathbf{x}) - c^2\Delta u(t,\mathbf{x}) - b\Delta u_t(t,\mathbf{x}) \\ + \displaystyle\int_0^t g(t-s)div\,(a(\mathbf{x})\nabla u(s,\mathbf{x}))\,ds = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T); \\ u = 0 \text{ em } \Gamma; \\ u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega); \\ u_t(0) = u_1 \in H_0^1(\Omega); \\ u_{tt}(0) = u_2 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{4.1}$$

em que as constantes τ, c e b são estritamente positivas e, além disso, são verificadas as seguintes hipóteses:

(H.1) A função $a \in C^1(\overline{\Omega})$ é tal que $a(\mathbf{x}) \geq 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e

$$\|a\|_\infty := \max_{x\in\overline{\Omega}} a(\mathbf{x}) = M;$$

(H.2) Seja $\delta > M$ e consideremos $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ tal que, para quase todo $\mathbf{x} \in \Omega$, $\alpha(\mathbf{x}) > 0$ e vale

$$a(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x}) \geq \delta, \text{ para todo } \mathbf{x} \in \Omega;$$

(H.3) A função de relaxamento $g \in C^2(\mathbb{R}^+)$ satisfaz (i) $g(t) \geq 0$; (ii) $\displaystyle\int_0^\infty g(t)dt < \frac{c^2}{M}$; (iii) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $g'(t) \leq -c_1 g(t)$ e $0 \leq g''(t) \leq c_2 g(t)$, para todo $t \geq 0$;
(H.4) Os coeficientes da equação satisfazem $\displaystyle\frac{c^2}{b} < \frac{\delta - M}{\tau}$.

Observemos que, graças à hipótese **(H.3)**, a função

$$k(t, \mathbf{x}) := c^2 - a(\mathbf{x}) \int_0^t g(s)ds$$

possui um mínimo estritamente positivo, que denotaremos por L. Quando conveniente, escreveremos $G(t) := \displaystyle\int_0^t g(s)ds$.

Para simplificarmos os cálculos, introduzimos os seguintes operadores:

$$(g * v)(t) := \int_0^t g(t-s)v(s)ds;$$

$$(g \Box v)(t) := \int_0^t g(t-s)|v(t) - v(s)|^2 ds;$$

$$(g \diamond v)(t) := \int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s))ds.$$

Levando em conta os operadores acima, temos o lema que segue.

Lema 4.0.1. *Se $g, v \in C^1(\mathbb{R})$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ verificamos a seguinte identidade:*

$$2[(g * v)v'](t) = (g' \Box v)(t) - g(t)|v(t)|^2 - \frac{d}{dt}\left\{(g \Box v)(t) - \left(\int_0^t g(s)ds\right)|v(t)|^2\right\}.$$

Demonstração: Derivando a expressão

$$\left\{(g \Box v)(t) - \left(\int_0^t g(s)ds\right)|v(t)|^2\right\}$$

em relação a t obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[(g\Box v)-\left(\int_0^t g(s)ds\right)v^2\right](t) &= (g'\Box v)(t)+2\int_0^t g(t-s)(v(t)-v(s))v'(t)ds \\
&- g(t)(v(t))^2-2\left(\int_0^t g(s)ds\right)v(t)v'(t) \\
&= (g'\Box v)(t)-g(t)(v(t))^2-2v'(t)\int_0^t g(t-s)v(s)ds \\
&= (g'\Box v)(t)-g(t)(v(t))^2-2v'(t)(g*v)(t)
\end{aligned}$$

e terminamos a prova. □

4.1 Existência de Solução

Resolvemos o problema (4.1) para dados iniciais mais regulares e as soluções fracas são obtidas através de um argumento canônico de densidade. Consideremos $w(\mathbf{x})$ uma função admissível e multiplique a equação (4.1) por w. Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
&\tau\int_\Omega u_{ttt}(t,\mathbf{x})w(\mathbf{x})d\mathbf{x}+\int_\Omega \alpha(\mathbf{x})u_{tt}(t,\mathbf{x})w(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
&+b\int_\Omega \nabla u_t(t,\mathbf{x})\cdot\nabla w(\mathbf{x})d\mathbf{x}+c^2\int_\Omega \nabla u(t,\mathbf{x})\cdot\nabla w(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
&-\int_0^t\int_\Omega a(\mathbf{x})g(t-s)\nabla u(s,\mathbf{x})\cdot\nabla w(\mathbf{x})d\mathbf{x}ds=0.
\end{aligned}$$

Seja $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana de $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ ortonormalizada em $L^2(\Omega)$ e denotemos por V_m o subespaço gerado pelos m primeiros vetores da base $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Em V_m, consideramos o problema aproximado (PA)

$$(PA)\begin{cases}
u_m(t)\in V_m \Longleftrightarrow u_m(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^m h_{im}(t)w_i; \\
\tau(u_m''',w)+(\alpha(\cdot)u_m'',w)+c^2(\nabla u_m',\nabla w) \\
+b(\nabla u_m,\nabla w)-\displaystyle\int_0^t g(t-s)(a(\cdot)\nabla u_m,\nabla w)ds=0,\ \forall w\in V_m; \\
u_m(0)=u_{0m}\longrightarrow u_0 \text{ em } H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega); \\
u_m'(0)=u_{1m}\longrightarrow u_1 \text{ em } H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega); \\
u_m''(0)=u_{2m}\longrightarrow u_2 \text{ em } H_0^1(\Omega).
\end{cases}$$

Para $w = v_j$, escrevemos o problema aproximado na forma de um sistema de m equações

$$\begin{cases} \tau C z'''(t) + C_\alpha z''(t) + B\left(z'(t) + \dfrac{c^2}{b}(t)\right) - G(t, z(t)) = 0; \\ z(0) = z_0,\ z'(0) = z_1,\ z''(0) = z_2, \end{cases} \tag{4.2}$$

em que $C = [c_{ij} := (v_i, v_j)]_{m\times m}$, $C_\alpha = \left[c_{ij}^\alpha := (\alpha(\cdot)v_i, v_j)\right]_{m\times m}$, $B = [b_{ij} := b(\nabla v_i, \nabla v_j)]_{m\times m}$,

$$z(t) = \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G(t, z(t)) = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^m \int_0^t g(t-s)h_{im}(s)ds\ (a(\cdot)\nabla v_i, \nabla v_1) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m \int_0^t g(t-s)h_{im}(s)ds\ (a(\cdot)\nabla v_i, \nabla v_m) \end{bmatrix}.$$

Como $\{v_j\}$ é ortonormal em $L^2(\Omega)$, então $C = I_{m\times m}$.

Ainda do problema (4.2), podemos fazer uma mudanças de variáveis na intenção de reduzir o sistema a uma equação linear de primeira ordem na forma

$$\begin{cases} Y'(t) = DY(t) + F(t, Y_1(t)) = R(t, Y(t)); \\ Y(0) = Y_0, \end{cases}$$

de modo que a aplicação R esteja nas condições de Carathéodory, isto é, R é mensurável em t, R é contínua em Y e para cada compacto $K \in (0,T)\times\Omega$, existe uma função real integrável $M_K(t)$ tal que

$$\|R(t, Y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_K(t),\ \text{para todo } (t, Y) \in K.$$

Deste modo, obtemos uma solução local (no tempo) para o problema (4.1). A primeira estimativa a priori nos garante a existência de uma constante C, independente de m e de t, tal que

$$\|u_m''(t)\|^2 + \|\nabla u_m'(t)\|^2 + \|\nabla u_m(t)\|^2 \leq C \tag{4.3}$$

e, esta desigualdade nos permite estender as soluções locais obtidas a todo o intervalo $[0,T]$, independente de m. Além disso,

$$\{u_m\} \text{ e } \{u_m'\} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{4.4}$$

$$\{u_m''\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.5}$$

Omitimos os cálculos necessários para a obtenção de (4.3), pois as estimativas são análogas àquelas feitas na seção 4.2.

Derivando o problema aproximado (PA), multiplicando por $h_{jm}'''(t) + \theta h_{jm}''(t)$ e somando em j, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{\tau}{2}\|u_m'''(t)\|^2 + \theta\tau(u_m'''(t), u_m''(t)) + \frac{\theta}{2}\int_\Omega \alpha(\mathbf{x})|u_m''(t,\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right.\\
&\left.\frac{b}{2}\|\nabla u_m''(t)\|^2 + c^2(\nabla u_m'(t), \nabla u_m''(t)) + \frac{c^2\theta}{2}\|\nabla u_m'(t)\|^2\right\}\\
&+\int_\Omega (\alpha(\mathbf{x}) - \theta\tau)|u_m'''(t,\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + (\theta b - c^2)\|\nabla u_m''(t)\|^2\\
&= \int_0^t g'(t-s)\left(a(\cdot)\nabla u_m(s), \nabla u_m'''(t) + \theta\nabla u_m''(t)\right) ds\\
&+g(0)\left(a(\cdot)\nabla u_m(t), \nabla u_m'''(t) + \theta\nabla u_m''(t)\right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Agora, desta identidade, por intermédio da desigualdade de Gronwall, demonstramos a existência de constantes positivas C_1 e C_2 satisfazendo

$$\|u_m'''(t)\|^2 + \|\nabla u_m''(t)\|^2 \leq C_1 e^{C_2 T}, \text{ para todo } t \in [0,T].$$

Para concluirmos a afirmação acima, vejamos como o termo

$$\int_0^t g'(t-s)\left(a(\cdot)\nabla u_m(s), \nabla u_m'''(t)\right) ds$$

pode ser estimado de tal forma que este seja absorvido pelos termos remanescentes do lado esquerdo da identidade. Pela regra de Leibniz

$$\begin{aligned}\int_0^t g'(t-s)\,(a(\cdot)\nabla u_m(s),\nabla u_m'''(t))\,ds &= \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g'(t-s)\,(a(\cdot)\nabla u_m(s),\nabla u_m''(t))\,ds\right\}\\ &- \underbrace{\int_0^t g''(t-s)\,(a(\cdot)\nabla u_m(s),\nabla u_m''(t))\,ds}_{I_1}\\ &- \underbrace{g'(0)\,(a(\cdot)\nabla u_m(t),\nabla u_m''(t))}_{I_2}.\end{aligned}$$

Das hipóteses **(H.1)**, **(H.4)** e da limitação da sequência $\{u_m\}$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ (obtida na primeira estimativa), para qualquer $\eta>0$, temos

$$\begin{aligned}|I_1| &\le c_2\|a\|_\infty\int_0^t g(t-s)\underbrace{\|\nabla u_m(s)\|}_{\le C}\|\nabla u_m''(t)\|ds\\ &\le c_2C\|a\|_\infty\|g\|_1\|\nabla u_m''(t)\|\\ &\le C_\eta+\frac{\eta}{2}\|\nabla u_m''(t)\|^2,\ C_\eta\sim\frac{1}{\eta},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|I_2| &\le -g'(0)\|a\|_\infty|(\nabla u_m(t),\nabla u_m''(t))|\\ &\le C\|\nabla u_m(t)\|\cdot\|\nabla u_m''(t)\|\\ &\le C_\eta+\frac{\eta}{2}\|\nabla u_m''(t)\|^2,\ C_\eta\sim\frac{1}{\eta}.\end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $\eta\le\dfrac{\theta b-c^2}{2}$ e substituindo em (4.6), vemos que a quantidade $\eta\|\nabla u_m''(t)\|^2$ é absorvida pela quantidade $(\theta b-c^2)\|\nabla u_m''(t)\|^2$ do lado direito de (4.6).

Assim

$$\{u_m'\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{4.7}$$

$$\{u_m''\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{4.8}$$

$$\{u_m'''\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.9}$$

De modo usual, as regularidades acima nos permitem passar o limite no problema, verificar a convergência dos dados iniciais e obter unicidade de solução. Como já dito anteriormente, as soluções fracas são obtidas aproximando os dados iniciais fracos por dados iniciais mais regulares, para os quais já obtemos soluções regulares.

Em suma, provamos o resultado seguinte.

Teorema 4.1.1. *Sob as hipóteses* ***(H.1)-(H.4)****, dados* $(u_0, u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *e* $T > 0$ *arbitrário, existe uma única solução de (4.1) na classe*

$$(u, u_t, u_{tt}) \in C([0,T]; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)).$$

4.2 Decaimento Uniforme

De posse da boa colocação do problema (4.1), podemos nos perguntar se é possível obter taxas de decaimento para as soluções fracas. Iniciamos tal investigação com o lema seguinte.

Lema 4.2.1. *As soluções de (4.1) satisfazem a seguinte identidade de energia*

$$\frac{dE_\theta}{dt}(t) + J_\theta(t) = 0, \tag{4.10}$$

em que $\dfrac{c^2}{b} < \theta < \dfrac{\delta - M}{\tau}$,

$$\begin{aligned}
E_\theta(t) \;\; = \;\; & \frac{\tau}{2}\|u_{tt}(t) + \theta u_t(t)\|^2 + \frac{\theta}{2}\int_\Omega (\alpha(\boldsymbol{x}) - \tau\theta)\, |u_t(t)|^2 d\boldsymbol{x} \\
+ \;\; & \frac{1}{2\theta}\left(\theta b - c^2\right) \|\nabla u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2\theta}\int_\Omega k(t,\boldsymbol{x}) \left|\nabla u_t(t) + \theta \nabla u(t)\right|^2 d\boldsymbol{x} \\
+ \;\; & \int_0^t g(t-s)\left(a(\cdot)\left(\nabla u(t) - \nabla u(s)\right), \nabla u_t(t)\right) ds \\
+ \;\; & \frac{\theta}{2}\int_\Omega a(\boldsymbol{x})\left(g \Box \nabla u\right)(t) d\boldsymbol{x} + \frac{G(t)}{2\theta}\int_\Omega a(\boldsymbol{x}) |\nabla u_t(t)|^2 d\boldsymbol{x} \\
+ \;\; & \frac{g(t)}{2}\int_\Omega a(\boldsymbol{x}) |\nabla u(t)|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega a(\boldsymbol{x})\left(g' \Box \nabla u\right)(t) d\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J_\theta(t) &= \int_\Omega (\alpha(\boldsymbol{x}) - \tau\theta)\, |u_{tt}(t)|^2 d\boldsymbol{x} + (\theta b - c^2)\|\nabla u_t(t)\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega a(\boldsymbol{x})\left[(g'' - \theta g')\,\Box \nabla u\right](t) d\boldsymbol{x} \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega a(\boldsymbol{x})\left[\theta g(t) - g'(t)\right] |\nabla u(t)|^2 d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Demonstração: Começamos multiplicando a equação (4.1) por u_{tt}. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} &\tau(u_{ttt}(t), u_{tt}(t)) + (\alpha(\cdot)u_{tt}(t), u_{tt}(t)) - c^2(\Delta u(t), u_{tt}(t)) \\ &-b(\Delta u_t(t), u_{tt}(t)) + \int_0^t g(t-s)\,(div(a(\cdot)\nabla u(s)), u_{tt}(t)) = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

São válidas as identidades

$$\tau(u_{ttt}(t), u_{tt}(t)) = \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}(t)\|^2 \;\text{ e }\; (\alpha((\cdot))u_{tt}(t), u_{tt}(t)) = \int_\Omega \alpha(\mathbf{x})|u_{tt}(t)|^2 d\mathbf{x},$$

$$-c^2(\Delta u(t), u_{tt}(t)) = c^2\frac{d}{dt}(\nabla u(t), \nabla u_t(t)) - c^2\|\nabla u_t(t)\|^2 \;\text{ e}$$

$$-b(\Delta u_t(t), u_{tt}(t)) = \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t(t)\|^2.$$

Para o último termo, temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(t-s)(a(\cdot)\nabla u(s), \nabla u_t(t))ds\right\} = \int_0^t g'(t-s)(a(\cdot)\nabla u(s), \nabla u_t(t))ds \\ &- \int_0^t g(t-s)(div(a(\cdot)\nabla u(s)), u_{tt}(t))ds + g(0)(a(\cdot)\nabla u(t), \nabla u_t(t)). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} &\int_0^t g(t-s)(div(a(\cdot)\nabla u(s)), u_{tt}(t))ds = -\frac{d}{dt}\underbrace{\int_0^t g(t-s)(a(\cdot)\nabla u(s), \nabla u_t(t))ds}_{(a(\cdot),[(g*\nabla u)\nabla u_t](t))} \\ &+\underbrace{\int_0^t g'(t-s)(a(\cdot)\nabla u(s), \nabla u_t(t))ds}_{(a(\cdot),[(g'*\nabla u)\nabla u_t](t))} + g(0)(a(\cdot)\nabla u(t), \nabla u_t(t)) \end{aligned}$$

e, pelo Lema 4.0.1,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-s)(div(a(\cdot)\nabla u(s)), u_{tt}(t))ds \\
&= -\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega a(\mathbf{x})(g*\nabla u)(t)\cdot\nabla u_t(t)d\mathbf{x} + \int_\Omega a(\mathbf{x})(g'\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x} - \frac{g(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}\right\} \\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})(g''\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x} - \frac{g'(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Coletando os termos com derivadas e substituindo em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{\tau}{2}\|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u_t(t)\|^2 + c^2(\nabla u(t), \nabla u_t(t)) + \frac{g(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}\right. \\
&\left.-\int_\Omega a(\mathbf{x})[(g*\nabla u)\cdot\nabla u_t](t)d\mathbf{x} + \int_\Omega a(\mathbf{x})(-g'\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x}\right\} + \int_\Omega \alpha(\mathbf{x})|u_{tt}(t)|^2 d\mathbf{x} \\
&-c^2\|\nabla u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})(g''\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x} - \frac{g'(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x} = 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Agora, multiplicamos a equação (4.1) por u_t e obtemos

$$\begin{aligned}
&\tau(u_{ttt}(t), u_t(t)) + (\alpha(\cdot)u_{tt}(t), u_t(t)) - c^2(\Delta u(t), u_t(t)) \\
&-b(\Delta u_t(t), u_t(t)) + \int_0^t g(t-s)\,(div(a(\cdot)\nabla u(s)), u_t(t)) = 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

São válidas as identidades

$$\tau(u_{ttt}(t), u_t(t)) = \tau\frac{d}{dt}(u_{tt}(t), u_t(t)) - \tau\|u_{tt}(t)\|^2 \text{ e } (\alpha(\cdot)u_{tt}(t), u_t(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \alpha(\mathbf{x})|u_t(t)|^2 d\mathbf{x},$$

$$-c^2(\Delta u(t), u_t(t)) = \frac{c^2}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2 \text{ e } -b(\Delta u_t(t), u_t(t)) = b\|\nabla u_t(t)\|^2.$$

Para o último termo, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-s)(div(a(\cdot)\nabla u(s)), u_t(t))ds = -\int_0^t g(t-s)(a(\cdot)\nabla u(s), \nabla u_t(t))ds \\
&= -\left(a(\cdot)(g*\nabla u)(t), \nabla u_t(t)\right) = -\int_\Omega a(\mathbf{x})(g*\nabla u)(t)\cdot\nabla u_t(t)d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 4.0.1,

$$\int_0^t g(t-s)(div(a(\cdot)\nabla u(s)), u_t(t))ds = -\frac{1}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})\left[(g'\Box\nabla u)(t) - g(t)|\nabla u(t)|^2\right]d\mathbf{x}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a(\mathbf{x})\left\{(g\Box\nabla u(t))(t) - \left(\int_0^t g(t-s)ds\right)|\nabla u(t)|^2\right\}d\mathbf{x}.$$

Substituindo em (4.13), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\tau(u_{tt}(t),u_t(t)) + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha(\mathbf{x})|u_t(t)|^2 d\mathbf{x} + \frac{c^2}{2}\|\nabla u(t)\|^2\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})(g\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x} - \frac{G(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}\right\} - \tau\|u_{tt}(t)\|^2\\&+b\|\nabla u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})(-g'\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x} + \frac{g(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x} = 0,\end{aligned} \tag{4.14}$$

com $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(t-s)ds$. Combinando (4.12) + θ(4.14), chegamos à identidade

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\underbrace{\frac{\tau}{2}\|u_{tt}(t)\|^2}_{(I)} + \frac{b}{2}\|\nabla u_t(t)\|^2 + \underbrace{c^2(\nabla u(t),\nabla u_t(t))}_{(II)} + \frac{g(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}\right.\\&-\int_\Omega a(\mathbf{x})[(g*\nabla u)\cdot\nabla u_t](t)d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})(-g'\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x} + \underbrace{\tau\theta(u_{tt}(t),u_t(t))}_{(I)}\\&+\frac{\theta}{2}\int_\Omega \alpha(\mathbf{x})|u_t(t)|^2 d\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\theta c^2}{2}\|\nabla u(t)\|^2}_{(II)} + \frac{\theta}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})(g\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x}\\&\left.\underbrace{-\frac{\theta G(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}}_{(II)}\right\} + J_\theta(t) = 0.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Resta, então, provar que a combinação dos termos (I) e (II) resulta em $E_\theta(t)$. De fato, notemos que

$$(I) \qquad \frac{\tau}{2}\|u_{tt}(t)\|^2 + \tau\theta(u_{tt}(t),u_t(t)) = \frac{\tau}{2}\|u_{tt}(t)+\theta u_t(t)\|^2 - \frac{\tau\theta^2}{2}\|u_t(t)\|^2.$$

Mais ainda,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\theta}\int_\Omega k(t,\mathbf{x})|\nabla u_t(t)+\theta\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}-\frac{1}{2\theta}\int_\Omega k(t,\mathbf{x})|\nabla u_t(t)|^2 d\mathbf{x}\\
&=\frac{\theta}{2}\int_\Omega k(t,\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}+\int_\Omega k(t,\mathbf{x})\nabla u_t(t)\cdot\nabla u(t) d\mathbf{x}\\
&=\frac{\theta c^2}{2}\|\nabla u(t)\|^2-\frac{\theta G(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}+c^2(\nabla u(t),\nabla u_t(t))\\
&-G(t)\int_\Omega a(\mathbf{x})\nabla u(t)\cdot\nabla u_t(t) d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
(II)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\theta c^2}{2}\|\nabla u(t)\|^2-\frac{\theta G(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}+c^2(\nabla u(t),\nabla u_t(t))\\
&=\frac{1}{2\theta}\int_\Omega k(t,\mathbf{x})|\nabla u_t(t)+\theta\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}-\frac{c^2}{2\theta}\|\nabla u_t(t)\|^2\\
&+\frac{G(t)}{2\theta}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u_t(t)|^2 d\mathbf{x}+G(t)\int_\Omega a(\mathbf{x})\nabla u(t)\cdot\nabla u_t(t) d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Substituindo (I) e (II) em (4.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{\tau}{2}\|u_{tt}(t)+\theta u_t(t)\|^2+\frac{\theta}{2}\int_\Omega(\alpha(\mathbf{x})-\tau\theta)|u_t(t)|^2 d\mathbf{x}+\frac{1}{2\theta}(\theta b-c^2)\|\nabla u_t(t)\|^2\right.\\
&+\frac{1}{2\theta}\int_\Omega k(t,\mathbf{x})|\nabla u_t(t)+\theta\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}+\frac{g(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})(-g'\Box\nabla u)(t) d\mathbf{x}+\frac{\theta}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})(g\Box\nabla u)(t) d\mathbf{x}\\
&\left.+G(t)\int_\Omega a(\mathbf{x})\nabla u(t)\cdot\nabla u_t(t) d\mathbf{x}-\int_\Omega a(\mathbf{x})[(g*\nabla u)\cdot\nabla u_t](t) d\mathbf{x}\right\}+J_\theta(t)=0.
\end{aligned}
$$

Para concluir a demonstração, basta observar que $G(t)=\displaystyle\int_0^t g(t-s)ds$ e, consequentemente,

$$
G(t)\nabla u(t)-(g*\nabla u)(t)=\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))ds,
$$

e a prova está completa. $\square$

Observação 4.2.1. *Sob as hipóteses **(H.1)-(H.4)**, ambos os funcionais E_θ e J_θ são não-negativos. De fato, se $\dfrac{c^2}{b}<\theta<\dfrac{\delta-M}{\tau}$, então $(\theta b-c^2)>0$ e $(\delta-\tau\theta-M)>0$. Portanto,* *para qualquer* $v \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\alpha(\boldsymbol{x}) - \tau\theta)|v(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \\
&= \int_\Omega (a(\boldsymbol{x}) + \alpha(\boldsymbol{x}) - \tau\theta)|v(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} - \int_\Omega a(\boldsymbol{x})|v(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \\
&\geq \int_\Omega (\delta - \tau\theta)|v(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} - M \int_\Omega |v(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \\
&= (\delta - \tau\theta - M)\|v\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t g(t-s) \left(a(\cdot) \left(\nabla u(t) - \nabla u(s) \right), \nabla u(t) \right) ds \right| \\
&\leq \frac{\theta}{2} \int_\Omega a(\boldsymbol{x})(g \Box \nabla u)(t) d\boldsymbol{x} + \frac{G(t)}{2\theta} \int_\Omega a(\boldsymbol{x})|\nabla u_t(t)|^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&0 \leq \int_0^t g(t-s) \left(a(\cdot) \left(\nabla u(t) - \nabla u(s) \right), \nabla u(t) \right) ds \\
&+ \frac{\theta}{2} \int_\Omega a(\boldsymbol{x})(g \Box \nabla u)(t) d\boldsymbol{x} + \frac{G(t)}{2\theta} \int_\Omega a(\boldsymbol{x})|\nabla u_t(t)|^2.
\end{aligned}$$

Em particular, E_θ *é um funcional decrescente.*

Lema 4.2.2. *Seja* $C > 0$ *uma constante positiva. Então* $\|v + w\|^2 + C\|w\|^2 \sim \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 + C\|w\|^2 &= \frac{1}{1 + \frac{C}{2}} \|v\|^2 + 2(v, w) + \left(1 + \frac{C}{2}\right) \|w\|^2 \\
&+ \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{C}{2}}\right) \|v\|^2 + \frac{C}{2} \|w\|^2 \\
&\geq C_1 \left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right),
\end{aligned}$$

sendo $C_1 = \min \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{C}{2}}, \frac{C}{2} \right\}$. A outra desigualdade é trivial. $\Box$

Lema 4.2.3. *Ponhamos*

$$P(t) := \|u_{tt}(t)\|^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 - \int_\Omega a(\boldsymbol{x}) \left(g' \Box \nabla u \right)(t) d\boldsymbol{x}.$$

Então existem constantes positivas $m_1, M_1 > 0$, *que dependem de* θ, *tais que*

$$m_1 P(t) \leq E_\theta(t) \leq M_1 P(t).$$

Demonstração: Como já visto anteriormente, temos

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t g(t-s)\left(a(\cdot)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right),\nabla u(t)\right)ds\right|\\ &\leq \frac{\theta}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})(g\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x}+\frac{G(t)}{2\theta}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u_t(t)|^2.\end{aligned}$$

Pela Observação 4.2.1, a soma

$$\frac{\theta}{2}\int_\Omega\left(\alpha(\mathbf{x})-\tau\theta\right)|u_t(t)|^2d\mathbf{x}+\frac{g(t)}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2d\mathbf{x}$$

é não-negativa. Logo, dividindo o termo $\frac{1}{2\theta}\left(\theta b-c^2\right)\|\nabla u_t(t)\|^2$ em duas partes, obtemos

$$\begin{aligned}E_\theta(t) &\geq \frac{\tau}{2}\|u_{tt}(t)+\theta u_t(t)\|^2+\frac{1}{4\theta}\left(\theta b-c^2\right)\|\nabla u_t(t)\|^2\\ &+ \frac{1}{4\theta}\left(\theta b-c^2\right)\|\nabla u_t(t)\|^2+\frac{1}{2\theta}\int_\Omega k(t,\mathbf{x})\left|\nabla u_t(t)+\theta\nabla u(t)\right|^2d\mathbf{x}\\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})\left(-g'\Box\nabla u\right)(t)d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré $\|v\|^2\leq\lambda\|\nabla v\|^2$, obtemos

$$\begin{aligned}E_\theta(t) &\geq \frac{\tau}{2}\|u_{tt}(t)+\theta u_t(t)\|^2+\frac{1}{4\theta\lambda}\left(\theta b-c^2\right)\|u_t(t)\|^2\\ &+ \frac{1}{4\theta}\left(\theta b-c^2\right)\|\nabla u_t(t)\|^2+\frac{1}{2\theta}\int_\Omega k(t,\mathbf{x})\left|\nabla u_t(t)+\theta\nabla u(t)\right|^2d\mathbf{x}\\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega a(\mathbf{x})\left(-g'\Box\nabla u\right)(t)d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

O fato de que $E_\theta(t)\geq m_1P(t)$, é consequência imediata do Lema 4.2.2, visto que todas as constantes envolvidas na desigualdade acima são estritamente positivas.

Já a desigualdade contrária segue do fato de termos $\alpha\in L^\infty(\Omega)$, $a\in C^1(\overline{\Omega})$, g e G serem limitadas e $g(t)\leq-\frac{1}{c}g'(t)$. $\Box$

Lema 4.2.4. *Se* $R(t):=\tau(u_{tt}(t),u(t))-\frac{\tau}{2}\|u_t(t)\|^2+(\alpha(\cdot)u_t(t),u(t))+\frac{b}{2}\|\nabla u(t)\|^2$*, então* $|R(t)|\leq M_2P(t)$*, para alguma constante positiva* $M_2>0$*, em que* $P(t)$ *é como no Lema 4.2.3.*

Demonstração: Basta estimar cada termo individualmente utilizando repetidamente as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré, além da limitação da função α e da positividade da função $-g'$. □

Defina $F := R + N \cdot E_\theta$, sendo N uma constante positiva a ser determinada posteriormente.

Lema 4.2.5. *Para N suficientemente grande, existe uma constante $C_N = C(N) > 0$ satisfazendo*

$$\frac{dF}{dt}(t) \leq -C_N P(t).$$

Demonstração: Multiplicamos a equação original por u e obtemos

$$\begin{aligned}&\tau(u_{ttt}(t), u(t)) + (\alpha(\cdot)u_{tt}(t), u(t)) - c^2(\Delta u(t), u(t))\\ &-b(\Delta u_t(t), u(t)) + \int_0^t g(t-s)\left(div(a(\cdot)\nabla u(s)), u(t)\right) ds = 0.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Temos

$$\tau(u_{ttt}(t), u(t)) = \tau \frac{d}{dt}\left[(u_{tt}(t), u(t)) - \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2\right],$$

$$(\alpha(\cdot)u_{tt}(t), u(t)) = \frac{d}{dt}(\alpha(\cdot)u_t(t), u(t)) - \int_\Omega \alpha(\mathbf{x})|u_t(t)|^2 d\mathbf{x},$$

$$-c^2(\Delta u(t), u(t)) = c^2\|\nabla u(t)\|^2, \ -b(\Delta u_t(t), u(t)) = \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2 \ \text{ e}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-s)\left(div(a(\cdot)\nabla u(s)), u(t)\right) ds &= \int_\Omega a(\mathbf{x})\nabla u(t) \cdot (g \diamond \nabla u)(t) d\mathbf{x}\\ &- G(t)\int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Substituindo as identidades acima em (4.16) e coletando as derivadas obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\tau(u_{tt}(t), u(t)) - \frac{\tau}{2}\|u_t(t)\|^2 + (\alpha(\cdot)u_t(t), u(t)) + \frac{b}{2}\|\nabla u(t)\|^2\right\}\\ &- \int_\Omega \alpha(\mathbf{x})|u_t(t)|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega k(t, \mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}\\ &+ \int_\Omega a(\mathbf{x})\nabla u(t) \cdot (g \diamond \nabla u)(t) d\mathbf{x} = 0.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Então, para $L = c^2 - \|a\|_\infty \int_0^\infty g(t)dt$, o mínimo de $k(t,\mathbf{x})$, vale

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt}(t) &= \int_\Omega \alpha(\mathbf{x})|u_t(t)|^2 d\mathbf{x} - \int_\Omega k(t,\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x} \\
&- \int_\Omega a(\mathbf{x})\nabla u(t)\cdot(g \diamond \nabla u)(t) d\mathbf{x} \\
&\leq \lambda\|\alpha\|_\infty\|\nabla u_t(t)\|^2 - \int_\Omega k(t,\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x} \\
&+ \int_\Omega a(\mathbf{x})|\nabla u(t)|\ |(g \diamond \nabla u)(t)| d\mathbf{x} \\
&\leq \lambda\|\alpha\|_\infty\|\nabla u_t(t)\|^2 - \int_\Omega k(t,\mathbf{x})|\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x} \\
&+ \frac{\|a\|_\infty}{2L}\int_\Omega a(\mathbf{x})|(g \diamond \nabla u)(t)|^2 d\mathbf{x} + \frac{L}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue da desigualdade de Hölder e da hipótese **(H.3)**-(iii) que

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt}(t) &\leq \lambda\|\alpha\|_\infty\|\nabla u_t(t)\|^2 - \frac{L}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x} \\
&+ \frac{\|a\|_\infty\|g\|_1}{2L}\int_\Omega a(\mathbf{x})(g\Box\nabla u)(t) d\mathbf{x} \\
&\leq \lambda\|\alpha\|_\infty\|\nabla u_t(t)\|^2 - \frac{L}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x} \\
&+ \frac{\|a\|_\infty\|g\|_1}{2Lc_1}\int_\Omega a(\mathbf{x})(-g'\Box\nabla u)(t) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Combinando isto com (4.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt}(t) &= \frac{dR}{dt}(t) + N\frac{dE_\theta}{dt}(t) \\
&\leq \lambda\|\alpha\|_\infty\|\nabla u_t(t)\|^2 - \frac{L}{2}\int_\Omega |\nabla u_t(t)|^2 d\mathbf{x} \\
&+ \frac{\|a\|_\infty\|g\|_1}{2Lc_1}\int_\Omega a(\mathbf{x})(-g'\Box\nabla u)(t) d\mathbf{x} - NJ_\theta(t).
\end{aligned}$$

Das hipóteses impostas sobre a função α, temos

$$-N\int_\Omega (\alpha(\mathbf{x}) - \tau\theta)|u_{tt}(t)|^2 d\mathbf{x} \leq -NC_{\delta,\tau,\theta,M}\|u_{tt}(t)\|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt}(t) &\leq -NC_{\delta,\tau,\theta,M}\|u_{tt}(t)\|^2 - \frac{L}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 d\mathbf{x} \\
&- \left[N(\theta b - c^2) - \lambda\|\alpha\|_\infty\right]\|\nabla u_t(t)\|^2 + \left(\frac{N\theta}{2} - \frac{\|a\|_\infty\|g\|_1}{2Lc_1}\right)\int_\Omega a(\mathbf{x})(g'\Box\nabla u)(t)d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Tomando $N > \max\left\{\frac{\lambda\|\alpha\|_\infty}{\theta b - c^2}, \frac{\|a\|_\infty\|g\|_1}{\theta L c_1}\right\}$ segue o resultado. □

Teorema 4.2.1. *Existem constantes positivas C e $\bar{C}$ tais que*

$$E_\theta(t) \leq C E_\theta(0) e^{-\bar{C}t}$$

.

Demonstração: Do Lema 4.2.4, $|R(t)| \leq M_2 P(t)$. Pelo Lema 4.2.3, $P(t) \leq \frac{1}{m_1}E_\theta(t)$. Daí

$$-\frac{M_2}{m_1}E_\theta(t) \leq R(t) \leq \frac{M_2}{m_1}E_\theta(t).$$

Somando $NE_\theta(t)$ na desigualdade acima, para $N > \frac{M_2}{m_1}$ ainda grande o suficiente de modo que satisfaça o Lema 4.2.5, obtemos que $F(t)$ é equivalente a E_θ.

Usando o Lema 4.2.5 concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt}(t) &\leq -CP(t) \leq -Cm_1E_\theta(t) \\
&\leq -\bar{C}F(t).
\end{aligned}$$

Assim,

$$F(t) \leq F(0)e^{-\bar{C}t}.$$

Mas como F é equivalente a E_θ, temos

$$E_\theta(t) \leq CE_\theta(0)e^{-\bar{C}t},$$

o que completa a prova. □

Bibliografia

[1] BLACKSTOCK, D. T.; HAMILTON, M. F. *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, 1997.

[2] BRÉZIS, H. *Opérateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Pub. Co., 1973.

[3] CAIXETA, A. H.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; LASIECKA, I. *Global attractors for a third order in time nonlinear dynamics*, Journal of Differential Equations 261 (2016), 113-147.

[4] CAVALCANTI, M. M.; OQUENDO, H. P. *Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation*, SIAM Journal on Control and Optimization, 42:4 (2003), 1310-1324.

[5] CHUESHOV, I.; FRANCESCA, B. *Long-time dynamics of a coupled system of nonlinear wave and thermoelastic plate equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 22:3 (2008), 557-586.

[6] CHUESHOV, I.; LASIECKA, I. *Long-time behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, Memoirs of the American Mathematical Society, 195:912 (2008), 183 pp.

[7] CHUESHOV, I.; LASIECKA, I. *Long-time dynamics of von Karman semi-flows with nonlinear boundary/interior damping*, Journal of Differential Equations, 233 (2007), 42-86.

[8] CHUESHOV, I.; LASIECKA, I. *Von Karman Evolution Equations*, Springer Verlag, (2010), 778 pp.

[9] CONEJERO, J. A.; LIZAMA, C. and RODENAS, F. *Chaotic Behaviour of the Solutions of the Moore-Gibson-Thompson Equation*, Applied Mathematics and Information Sciences 9:5 (2015), 2233-2238.

[10] CRIGHTON, D. G. *Model equations of nonlinear acoustics*, Annual Review of Fluid Mechanichs, 11 (1979), 11-33.

[11] FATTORINI, H. O. *Ordinary Differential Equations in Linear Topological Spaces, I*, Journal of Differential Equations 5 (1968), 72-105.

[12] FATTORINI, H. O. *The Cauchy Problem, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 18*, Addison-Wesley, Reading, Mass, USA, 1983.

[13] FOIAS, C.; OLSON, E. *Finite fractal dimension and Hölder-Lipschitz parametrization*, Indiana Univ. Math. J., 45:3 (1996), 603-616.

[14] FRANCESCA, B.; TOUNDYKOV, D. *Finite-dimensional attractor for a composite system of wave/plate equations with localized damping.* Nonlinearity 23:9 (2010), 2271-2306.

[15] GEREDELLI, P.; LASIECKA, I. *Asymptotc analysis and upper semicontinuity with respect to rotational inertia of attractors to von Karman plates with geometrically localized dissipation and critical nonlinearity.* Nonlinear Analysis, 91 (2013), 73-92.

[16] GEREDELLI, P.; LASIECKA, I.; WEBSTER, J. *Smooth attractors of finite dimension for von Karman evolutions with nonlinear frictional damping localized in a boundary layer*, Journal of Differential Equations 254 (2013), 1193-1229.

[17] GIBSON, W. E.; MOORE, F. K. *Propagation of weak disturbances in a gas subject to relaxation effects*, Journal of the Aerospace Sciences 27:2 (1960) 117-127.

[18] HALE, J. K. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs 25, 1988, 198 pp.

[19] HARAUX, A. *Nonlinear Evolution Equations and Global Behavior of Solutions*, Lecture Notes in Mathematics 841 (1981).

[20] HARAUX, A. *Two remarks on hyperbolic dissipative problems*, Seminaire de Collège de France (1985).

[21] JORDAN, P. M. *Nonlinear acoustic phenomena in viscous thermally relaxing fluids: Shock bifurcation and the emergence of diffusive solitons*, Journal of the Acoustical Society of Amererica 124 (2008) 2491.

[22] KALANTAROV, V.; ZELIK, S. *Finite dimensional attractors for the quasilinear strongly damped wave equation*, Journal of Differential Equations 247 (2009), 1120-1155.

[23] KALTENBACHER, B.; LASIECKA, I. *Global existence and exponential decay rates for the Westervelt equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S 2:3 (2009) 503-525.

[24] KALTENBACHER, B.; LASIECKA, I.; MARCHAND, R. *Wellposedness and exponential decay rates for the Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound*, Control Cybernetics 40:4 (2011), 971-988.

[25] KALTENBACHER, B.; LASIECKA, I.; POSPIESZALSKA, M. *Well-posedness and exponential decay of the energy in the nonlinear Jordan-Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 22:11 (2012), 34 pp.

[26] LADYZHENSKAYA, O. *Attractors for semigroups and evolutions equations*, Cambridge University Press, 1991.

[27] LASIECKA, I.; WANG, X. *Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part I: exponential decay of energy*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 67:17 (2016), 23 pp.

[28] LASIECKA, I.; WANG, X. *Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part II: General decay rate of energy*, Journal Differential Equations. 259:12 (2015), 7610-7635.

[29] LIANG, J.; XIAO, T. J. *The Cauchy Problem for Higher-Order Abstract Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1701 (1998).

[30] MARCHAND, R.; McDEVITT, T.; TRIGGIANI, R. *An abstract semigroup approach to the third-order Moore-Gibson-Thompson partial differential equation arising in high-intensity ultrasound: structural decomposition, spectral analysis, exponential stability*, Mathematical Methods in the Applied Sciences 35:15 (2012), 1896-1929.

[31] PAZY, A. *Semigroups of Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York 44 (1983).

[32] RAUGEL, G. *Global Attractors in partial differential equations*, Handbook of Dynamical Systems 2 (2001).

[33] SHOWALTER, R. *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs 49 (1997), 278 pp.

[34] SIMON, J. *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica Pura ed Applicata 146:1 (1986), 65-96.

[35] TEMAM, R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Applied Mathematical Sciences Springer 68, Springer-Verlag New York (1997), 650 pp.

[36] THOMPSON, P. A. *Compressible-Fluid Dynamics*, McGraw-Hill (1972).

[37] TJOTTA, S. *Higher order model equations in nonlinear acoustics*, Acta Acustica united with Acustica 87:3 (2001), 316-321.

[38] WESTERVELT, P. J. *Parametric acoustic array*. Journal of the Acoustic Society 35 (1963), 535-537.