CONTROLABILIDADE EXATA NA FRONTEIRA PARA O SISTEMA DE BRESSE E CONTROLABILIDADE EXATO-APROXIMADA INTERNA PARA O SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO

Juliano de Andrade

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Doutorado)

Orientador: Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá - PR

Fevereiro-2017

CONTROLABILIDADE EXATA NA FRONTEIRA PARA O SISTEMA DE BRESSE E CONTROLABILIDADE EXATO-APROXIMADA INTERNA PARA O SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO

Juliano de Andrade

Tese de doutorado defendida publicamente perante banca examinadora designada pelo colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PMA) da Universidade Estadual de Maringá (UEM), como exigência parcial para à obtenção do título de doutor em matemática.

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Juan Amadeo Soriano Palomino (Orientador)..

Universidade Estadual de Maringá- UEM

Profa. Valéria Neves Domingos Cavalcanti ....

Universidade Estadual de Maringá- UEM

Prof. Marcelo Moreira Cavalcanti ....

Universidade Estadual de Maringá- UEM

Prof. Pedro Danizete Damázio ....

Universidade Federal do Paraná -UFPR

Prof. Marcio Antonio Jorge da Silva ....

Universidade Estadual de Londrina- UEL

Maringá

Fevereiro, 2017

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade e força para realização deste trabalho, pois sem ele nada eu teria feito.

Agradeço também ao professor Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino, pela orientação, por compartilhar conosco parte de seu conhecimento matemático, pela paciência e pelo grande ser humano que é essa pessoa.

Aos meus pais que me instruiram e ajudaram a formar o caráter do homem que hoje sou.

Quero agradecer em especial minha esposa Lucineide Keime Nakayama de Andrade pelo apoio nesta caminhada, e por estar sempre cuidando de nosso filho para eu estudar.

A Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Aos professores Valéria Neves Domingos Cavalcanti e Marcelo Moreira Cavalcanti pelo incentivo e a todos os professores que direta ou indiretamente ajudaram em minha formação e a todos os meus amigos.

Resumo

Este trabalho trata da controlabilidade exata na fronteira para o sistema de Bresse, cujo controle age em uma parte da fronteira. O controle é obtido por meio da desigualdade de Carleman e o método HUM (Hilbert Uniqueness Method) devido a Lions [24] e [23].

Também estudamos o controle exato-aproximado interno para o sistema de Bresse termoelástico, cujo controle age em um subintervalo do domínio. O controle é obtido minimizando-se o funcional associado ao sistema de Bresse termoelástico, como feito em [11].

Palavra chave: sistema de Bresse, sistema de Bresse termoelástico, método HUM, desigualdade de observabilidade, desigualdade de Carleman, controle exato na fronteira, controle exato-aproximada interna.

Abstract

This work deals with boundary controllability for the Bresse system whose control acts on a part of the border. The control is obtained through the Carleman inequality and the HUM method (Hilbert Uniqueness Method) due to Lions [24] and [23].

We also studied the approximate exact control for the thermoelastic Bresse system, where the control acts in a subinterval of the domain. The control function is obtained by minimizing the functional which is associated with the thermoelasic Bresse system as done in [11].

Key words: Bresse system, thermoelastic Bresse system, Hilbert Uniqueness Method, observability inequality, Carleman inequality, exact border control, internal exact-approximate controllability.

Sumário

Introdução

Este trabalho é sobre o sistema de Bresse e sistema de Bresse termoelástico, nomes devidos ao francês Jacques Antoine Charles Bresse que foi engenheiro civil nasceu em 1822 Vienne (Isère) Paris e morreu em 1883. Especializado no projeto de aplicação das rodas de água é um dos 72 nomes na Torre Eiffel.

Aqui trataremos sobre a controlabilidade exata na fronteira para o sistema de Bresse e a controlabilidade exato aproximada interna para o sistema de Bresse termoelástico. No capítulo 1 resumidamente apresentaremos os resultados preliminares referente aos espaços de Sobolev, à teoria das distribuições e à teoria de semigrupos,(para mais detalhes ver ([2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 16, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 33, 36])) os quais são de grande importância para obtenção de tais controles.

No capítulo 2 consideraremos o sistema de Bresse dado por

$$\begin{array}{l} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - [w_x - l\varphi] = 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \\ \rho_1 w_{tt} - k_0[w_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \end{array} \tag{1}$$

em que $Q = (0, L) \times (0, T)$ onde $\rho_1, \rho_2, k, b, k_0$ são constantes positivas que estão relacionados com a composição do material. Por w, φ e ψ vamos denotar, respectivamente, o deslocamento tangencial/longitudinal, o deslocamento vertical/normal e o deslocamento da seção transversal/cisalhamento.

Assumimos condições de fronteira do tipo

$$\begin{array}{l} \varphi(0, t) = \psi(0, t) = w(0, t) = 0 \\ \varphi(L, t) = g_1, \quad \psi(L, t) = g_2, \quad w(L, t) = g_3 \end{array} \tag{2}$$

para $t \in (0,T)$, e condições iniciais

$$\begin{array}{ll} \varphi(.,0) = \varphi_0, & \varphi_t(.,0) = \varphi_1, \\ \psi(.,0) = \psi_0, & \psi_t(.,0) = \psi_1, \\ w(.,0) = w_0, & w_t(.,0) = w_1. \end{array} \tag{3}$$

O problema de controlabilidade exata na fronteira para o sistema (1)-(3) com dados iniciais $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1) \in L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L) \times L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L) \times L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L)$ consiste em encontrar controles g_1, g_2, g_3 em $L^2(0,T)$ tais que para um tempo T suficientemente grande a solução (φ, ψ, w) de (1)-(3) satisfaça

$$\varphi(T) = \varphi_t(T) = \psi(T) = \psi_t(T) = w(T) = w_t(T) = 0. \tag{4}$$

Para obter este controle é necessário encontrar uma desigualdade de observabilidade para o sistema

$$\begin{array}{l} \rho_1 u_{tt} - k(u_x + v + lz)_x - [z_x - lu] = 0 \\ \rho_2 v_{tt} - b v_{xx} + k(u_x + v + lz) = 0 \\ \rho_1 z_{tt} - k_0[z_x - lu]_x + kl(u_x + v + lz) = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) = z(0,t) = z(L,t) = 0 \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1 \\ v(.,0) = v_0, \quad v_t(.,0) = v_1 \\ z(.,0) = z_0, \quad z_t(.,0) = z_1, \end{array} \tag{5}$$

do tipo

$$E(0) \leq C \int_0^T |u_x(L)|^2 + |v_x(L)|^2 + |z_x(L)|^2 \, dt,$$

onde

$$E(0) = \int_0^L \rho_1 |u_1|^2 + \rho_2 |v_1|^2 + \rho_1 |z_1|^2 + b|v_{0x}|^2 + k|u_{0x} + v_0 + lz_0|^2 + k_0|z_{0x} - lu_0|^2 \, dx.$$

Para isso usaremos uma estimativa de Carleman e por fim usaremos o método HUM para obter o controle.

Para trabalhos relacionados ao sistema de Bresse pode ser visto em [35] e [38].

O controle para a equação de onda em uma dimensão foi trabalhado em [17], aqui trataremos sobre o controle na fronteira para o sistema de Bresse, em uma dimensão, tal sistema de Bresse são formados por três equações de ondas acoplados.

Para a desigualdade direta foi feito como em [37]. A estimativa de Carleman foi inspirado por [34], tal estimativa de Carleman é necessário para obter a desigualdade de observabilidade.

Por fim para obter-se o controle desejado faz-se uso do método HUM (Hilbert Uniqueness Method) proposto por [23] e [24] e usado por [1, 8, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 27, 30].

No capítulo 3 trataremos em obter o controle exato-aproximada em (l_1, l_2), com $(l_1, l_2) \subset (0, L)$, para o sistema de Bresse termoelástico

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = f_1\chi_{(l_1,l_2)}, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = f_2\chi_{(l_1,l_2)}, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = f_3\chi_{(l_1,l_2)}, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \theta_t - k_1\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) \\ = w(0,t) = w(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ \varphi(.,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(.,0) = \varphi_1, \quad em \quad (0,L) \\ \psi(.,0) = \psi_0, \quad \psi_t(.,0) = \psi_1, \quad em \quad (0,L) \\ w(.,0) = w_0, \quad w_t(.,0) = w_1, \quad em \quad (0,L) \\ \theta(.,0) = \theta_0, \quad em \quad (0,L). \end{array}\right. \tag{6}$$

O controle exato-aproximada interna consiste em encontrar um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que para cada dados inicial e final $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0), (\Phi_0, \Phi_1, \Psi_0, \Psi_1, W_0, W_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$ e $\varepsilon > 0$, é possível encontrar controles f_1, f_2, f_3 tais que a solução de (6) satisfaça

$$\begin{array}{l} \varphi(T) = \Phi_0, \quad \varphi_t(T) = \Phi_1 \\ \psi(T) = \Psi_0, \quad \psi_t(T) = \Psi_1 \\ w(T) = W_0, \quad w_t(T) = W_1 \\ |\theta(T) - \eta_0|_{L^2(0,L)} \leq \varepsilon. \end{array} \tag{7}$$

Para obter tal controle faremos como em [11] e [35].

O processo usado para se obter-se o controle exato-aproximada interna consiste em encontrar uma estimativa de observabilidade para o sistema homogêneo (6) (isto é $f_1 = f_2 = f_3 = 0$). Para obter tal estimativa de observabilidade usaremos uma desigualdade de observabilidade para o sistema desacoplado associado

$$\begin{cases} \rho_1\widetilde{\varphi}_{tt} - k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w})_x + k_0 l(\widetilde{w}_x - l\widetilde{\varphi}) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2\widetilde{\psi}_{tt} - b\widetilde{\psi}_{xx} + k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w}) + \frac{m\gamma}{k_1}P\widetilde{\psi}_t = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1\widetilde{w}_{tt} - k_0(\widetilde{w}_x - l\widetilde{\varphi})_x + kl(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w}) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \widetilde{\theta}_t - k_1\widetilde{\theta}_{xx} + m\widetilde{\psi}_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \widetilde{\varphi}(0,t) = \widetilde{\varphi}(L,t) = \widetilde{\psi}(0,t) = \widetilde{\psi}(L,t) \\ = \widetilde{w}(0,t) = \widetilde{w}(L,t) = \widetilde{\theta}(0,t) = \widetilde{\theta}(L,t) = 0, \quad t\in(0,T) \\ \widetilde{\varphi}(.,0) = \varphi_0, \quad \widetilde{\varphi}_t(.,0) = \varphi_1, \quad em \quad (0,L) \\ \widetilde{\psi}(.,0) = \psi_0, \quad \widetilde{\psi}_t(.,0) = \psi_1, \quad em \quad (0,L) \\ \widetilde{w}(.,0) = w_0, \quad \widetilde{w}_t(.,0) = w_1, \quad em \quad (0,L) \\ \widetilde{\theta}(.,0) = \theta_0, \quad em \quad (0,L), \end{cases} \tag{8}$$

onde

$$P\widetilde{\psi}_t = P\widetilde{\psi}_t - \frac{1}{L}\int_0^L P\widetilde{\psi}_t \, dx$$

e um teorema que diz, para $S(t)$ e $S^0(t)$ os semigrupos fortemente contínuos em $\mathcal{H}$ associados aos sistemas homogêneo (6) e (8) respectivamente tem-se que

$S(t) - S^0(t) : \mathcal{H} \to C([0,T];\mathcal{H})$ é contínuo e compacto.

Por fim para obter-se o controle exata-aproximada interna minimizaremos o funcional $J : \widetilde{H} \to \mathbb{R}$ definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &J(u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1,p_0) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} (|u|^2+|v|^2+|z|^2)\,dx\,dt \\ &-\rho_1\int_0^L \Phi_1 u_0 dx - \rho_2\int_0^L \Psi_1 v_0 dx - \rho_1\int_0^L W_1 z_0 dx + \rho_1\langle\Phi_0,u_1\rangle + \rho_2\langle\Psi_0,v_1\rangle \\ &+\rho_1\langle W_0,z_1\rangle - \int_0^L (\eta_0 + m\Psi_x)p_0\,dx + \varepsilon\|p_0\|_{L^2(0,L)}, \end{aligned} \tag{9}$$

onde

$\widetilde{H} = L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times L^2(0,L)$.

A estabilização para o sistema de Bresse termoelástico foi trabalhado em [14], aqui trabalharemos o controle exato-aproximada interna.

O resultado de soluções foram baseados em [11] e usando Hölmgren's Uniqueness Theorem em [18].

A desigualdade de observabilidade foi baseado em [11], [35] usando-se o resultado de soluções e a teoria de equações diferenciais ordinárias dada por [10].

Por fim se obtém o controle como feito em [11].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços Funcionais

1.1.1 Distribuições

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_n)$, n-uplas de números inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 ... + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$ denotaremos o operador derivação em $\mathbb{R}^n$ por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Definimos o *suporte* da função φ em Ω e denotamos por $supp(\varphi)$ o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $supp(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sucessão $\{\varphi_\nu\}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$\varphi_\nu \to \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

$i) supp(\varphi_\nu) \subset K, \ \forall \nu$ e $supp(\varphi) \subset K$;
$ii) D^\alpha \varphi_\nu \to D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre $K, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em (1.1). Chamaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω. Diremos que $\{T_\nu\}$, uma sucessão de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e escreveremos

$$T_\nu \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T, denotada por $D^\alpha T$, é dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens e $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e além disso a aplicação

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua.

1.1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u, definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se define por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\},$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$, com o produto interno

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx$$

e a norma $|u|^2 = (u,u)$, é um espaço de Hilbert.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ (com a convenção de que se $p = 1$ então $p' = \infty$).

Proposição 1.1. ***(Desigualdade de Young)*** *Se a e b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

sempre que $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Demonstração: Ver [4]. □

Proposição 1.2. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv| \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4]. □

Proposição 1.3. ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Sejam u, $v \in L^p(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$ então*

$$||u+v||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [29]. □

Proposição 1.4. ***(Desigualdade de Jensen)*** *Seja B um hipercubo do $\mathbb{R}^n$, então para toda função côncova F e toda função integrável $g \in L^1(B)$ temos*

$$F\left(\frac{1}{med(B)}\int_B g(x)dx\right) \geq \frac{1}{med(B)}\int_B F(g(x))dx.$$

Demonstração: Ver [32]. □

Teorema 1.5. ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Se uma sequência $\{f_k\}$ de funções integráveis a Lebesgue num conjunto Ω converge quase sempre em Ω para um função f, e se $|f_k|_{L^1(\Omega)} \leq \psi$, quase sempre em Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, para um certa função $\psi \in L^1(\Omega)$, então a integral $\displaystyle\int_\Omega f$ existe e*

$$\int_\Omega f\ dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\ dx.$$

Demonstração: Ver [15]. □

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é lebesgue integrável sobre cada subconjunto compacto de Ω.

Proposição 1.6. ***(Du Bois Raymond)*** *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\ dx = 0, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver [5]. □

1.1.3 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções de $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall|\alpha| \leq m\}.$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$||u||^p_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } p = \infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escreve-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W^{m,p}_0(\Omega)$ como sendo fecho de $C^\infty_0(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C^\infty_0(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W^{m,p}_0(\Omega).$$

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ então a norma em $W^{m,p}_0(\Omega)$ dada por

$$||u||^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W^{m,p}_0(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e p' é o índice conjugado de p. Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H^m_0(\Omega)$.

1.2 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca $*$, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

Considerando E um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.

Seja $\{x_n\}$ uma sucessão convergente para x na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que $\{x_n\}$ converge fraco para x e denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E$$

Proposição 1.7. *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em E, então*
i)$x_n \rightharpoonup x$ *em* E *se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$;
ii)Se $x_n \to x$ *em* E, *então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E;
iii)Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* E, *então* $||x||_E$ *é limitada e* $||x||_E \leq \liminf ||x_n||_E$;
iv)Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *em* E', *então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [4]. □

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} J_x : E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \end{array}$$

que é linear e contínua, e portanto, $J_x \in E''$, $\forall x \in E$. Deste modo, definamos a aplicação $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de E em E''.

A topologia fraca $*$, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x.

Seja $\{f_n\}$ uma sucessão convergente para f na topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$. Com vistas à simplificação das notações escreveremos apenas que $\{f_n\}$ converge fraco $*$ para f, ou simbolicamente,

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E',$$

quando não houver possibilidade de confusão.

Proposição 1.8. *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em E', então*
i)$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'*se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ $\forall x \in E$;
ii)Se $f_n \to f$ *forte, então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$;
iii)Se $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E';
iv)Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E', *então* $||f_n||_{E'}$ *está limitada e* $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$;
v)Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *e* $x_n \to x$ *em* E, *então* $\langle f_n, x_n\rangle \rightharpoonup \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [4]. □

Dizemos que um espaço de Banach é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : E \to E''$ é sobrejetora. Um espaço métrico E é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset E$ enumerável e denso em E.

Teorema 1.9. *Seja E um espaço de Banach tal que E' é separável. Então E é separável.*

Demonstração: Ver [4]. □

Teorema 1.10. *Seja E um espaço de Banach separável e seja $\{f_n\}$ uma sequência limitada em E'. Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca $*$ $(\sigma(E', E))$.*

Demonstração: Ver [4]. □

Teorema 1.11. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}$ um sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca $(\sigma(E, E'))$.*

Demonstração: Ver [4]. □

1.3 Espaços de Funcionais a Valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (0,T). Dizemos que uma sucessão

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0, T; X)$$

se

i)Existe um compacto K de $(0, T)$ tal que supp(φ_ν) e supp(φ) estão contidos em K, para todo ν;

ii)Para cada $k \in \mathbb{N}, \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi$ em X, uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0,T) = \mathcal{D}(0,T;\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ se $S : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é linear e se $\theta_\nu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle \text{ em }, \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

O espaço $\mathcal{D}'(0,T;X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das *distruibuições vetoriais* de $(0,T)$ com valores em X.

Denota-se por $L^2(0,T;X)$ o espaço das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \to X$ mensuráveis em $(0,T)$, $(0,T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T ||u(t)||_X^2 dt < \infty.$$

Em particular, se X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T,X)$ munido do produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

também é um espaço de Hilbert.

1.4 O Espaço $W(0,T;X,Y)$

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, $X \subset Y$ com imersão contínua e densa. Definimos um novo espaço de Hilbert

$$W(0,T;X,Y) = \left\{ u \in L^2(0,T;X); u_t \in L^2(0,T;Y) \right\}$$

com a norma

$$||u||^2_{W(0,T;X,Y)} = ||u||^2_{L^2(0,T;X)} + ||u_t||^2_{L^2(0,T;Y)}.$$

Para mais detalhes ver [10].

Considere o espaço $C([0,T];E)$ como sendo o conjunto das funções contínuas de $[0,T]$ em E, munido da norma

$$||u||_{C([0,T];E)} = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_E.$$

Com essas notações, temos o

Teorema 1.12. *Se $u \in W(0,T;X,Y)$ então $u \in C([0,T];[X,Y]_{\frac{1}{2}})$, onde $[X,Y]_\theta$ denota a interpolação*[1] *entre os espaços X e Y.*

Demonstração: Ver teorema 3.1, p.19 de [25]. $\square$

1.5 Integral de Bochner: definição, convergência e regularização

Consideremos $f : A \to X$ uma função a valores vetoriais definida em um subconjunto mensurável a Lebesgue $A \subset \mathbb{R}$ em um espaço de Banach, real ou complexo, X de norma $\|\cdot\|_X$.

Definição 1.13. *Diz-se que $f : A \to X$ é simples se assume um número finito de valores. Em outras palavras, f é simples se existem $A_1, A_2, ..., A_m$ subconjuntos mensuráveis de A dois a dois disjuntos, cada qual tendo medida finita (med(A) finita) e existem $x_1, x_2, ..., x_n$ pontos não nulos correspondentes em X tais que*

$$f(.) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} x_j \tag{1.2}$$

onde χ_{A_j} é a função característica de A_j. Assim, se $t \in A_{j_0}$, para algum j_0 então $f(t) = x_{j_0}$, ou seja, f é constante em A_{j_0}. Agora se $t \in A \setminus \cup_{j=1}^{n} A_j$ então $f(t) = 0$.

Definição 1.14. *Diz-se que $f : A \to X$ é* fortemente mensurável *se existe uma sequência de funções simples $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0, \text{ quase sempre em } A.$$

[1]Para mais detalhes sobre espaços interpolados veja [25].

Definição 1.15. *Define-se a integral da função simples $f : A \to X$ dada em (1.2) por:*

$$\sum_{j=1}^{m} med(A_j)x_j$$

e denota-se por

$$\int_A f(t)\ dt = \sum_{j=1}^{m} med(A_j)x_j$$

Definição 1.16. *Uma função $f : A \to X$ é dita integrável à Bochner se existe uma sequência de funções simples $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$f_n(t) \to f(t) \text{ em } X \text{ quase sempre em } A$$

e, além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \|f_n(t) - f(t)\|_X\ dt = 0.$$

A integral de f sobre A, que denotaremos por $\int_A f(t)\ dt$ é definida por

$$\int_A f(t)\ dt = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(t)\ dt.$$

Teorema 1.17 (Bochner)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável a Lebesgue. Uma função $f : A \to X$ fortemente mensurável é Bochner integrável se e somente se a aplicação numérica $t \in A \mapsto \|f(t)\|_X$ é integrável a Lebesgue.*

Demonstração: ver [6]. □

Designaremos por $L^p(A; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, a classe das funções f fortemente mensuráveis e tais que a função numérica:

$$t \in A \longmapsto \|f(t)\|_X$$

pertence a $L^P(A)$.

Proposição 1.18. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R}; X)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, para quase todo $t \in \mathbb{R}$ a função $s \in \mathbb{R} \mapsto f(t-s)g(s) \in X$ é Bochner integrável e pondo-se*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)\ ds$$

tem-se $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}; X)$ *e*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R};X)}.$$

Demonstração: ver [6]. $\square$

Proposição 1.19. *Sejam* $f \in C_0^k(\mathbb{R})$ *e* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; X)$, $k \in \mathbb{N}^*$. *Então*

$$(f * g) \in C^k(\mathbb{R}; X).$$

Além disso

$$\frac{d^k}{dt^k}(f * g) = \frac{d^k f}{dt^k} * g$$

Demonstração: ver [6]. $\square$

Definição 1.20. *Denomina-se sucessão regularizante a toda sucessão* $\{\rho_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ *de funções reais tais que:*

$$\rho_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \ supp(\rho_\nu) \subset \overline{B_{\frac{1}{\nu}}(0)}, \ \int_{\mathbb{R}} \rho_\nu(t) \ dt = 1.$$

Proposição 1.21. *Seja* $f \in C^0(\mathbb{R}; X)$. *Então* $\rho_\nu * f \to f$ *uniformemente sobre todo compacto de* $\mathbb{R}$.

Demonstração: ver [6]. $\square$

Proposição 1.22. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, *com* $1 \leq p < \infty$. *Então*

$$\rho_\nu * f \to f \ \text{em} \ L^p(\mathbb{R}; X).$$

Demonstração: ver [6]. $\square$

1.6 Mais alguns Resultados

Devido à dimensão do trabalho, enunciamos nesta seção mais alguns resultados utilizados no texto.

Proposição 1.23. ***(Lema de Gronwall)*** *Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $\varphi \in L^1(0,T)$ tais que $z(x) \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$ e seja $c \geq 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t z(s)\varphi(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

então

$$\varphi(t) \leq c.e^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [28]. □

Lema 1.24. *Seja $m \in L^1(0,T;R)$ tal que $m \geq 0$ quase sempre em $(0,T)$ e $b \geq 0$ constante real. Suponhamos $h \in L^\infty(0,T)$; $h \geq 0$ sobre $(0,T)$ verificando a desigualdade*

$$\frac{1}{2}h^2(t) \leq 2b^2 + 2\int_0^t m(s)h(s) \ ds \tag{1.3}$$

para todo $t \in (0,T)$. Então

$$h(t) \leq 2b + 2\int_0^t m(s)ds. \tag{1.4}$$

Demonstração: ver [3] □

Teorema 1.25. ***(de Representação de Riesz-Fréchet)*** *Seja H um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f,u), \ \forall u \in H.$$

Além disso,

$$||f||_H = ||\varphi||_{H'}.$$

Demonstração: Ver [4]. □

Definição 1.26. *Seja H um espaço de Hilbert. Se diz que uma forma bilinear $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ é*
$i)$contínua *se existe uma constante C tal que $|a(u,v)| \leq C|u||v|, \ \forall u, v \in H$ e*
$ii)$coerciva *em H se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $a(v,v) \geq \alpha |v|^2, \ \forall v \in H.$*

Teorema 1.27. ***(Lax-Milgram)*** *Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H'$ existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle\,, \ \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \ \text{e} \ \frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração: Ver [4]. □

O seguinte resultado é uma consequência do teorema da aplicação aberta.

Teorema 1.28. *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo e bijetivo. Então*

i) *T^{-1} é um operador linear e contínuo de F sobre E.*

ii) *Existem $m, M > 0$ tais que $m\|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$, para todo $x \in E$.*

Demonstração: ver corolário 2.21 p.75 em [7]. □

Teorema 1.29 (Prolongamento por Densidade)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $A : D(A) \subset E \to F$ um operador linear e limitado. Se $D(A)$ for denso em E, então A admite um único prolongamento linear limitado $\widetilde{A}$ a todo espaço E. Além disso,*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(D(A),F)} = \|\widetilde{A}\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Demonstração: ver teorema 2.42 p.88 de [7]. $\square$

Teorema 1.30. ***(da Regularidade Elítica)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $||u||_{H^2(\Omega)} \leq c||f||_{L^2(\Omega)}$ onde c é uma constante que só depende de Ω.

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } ||u||_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c||f||_{H^m(\Omega)}.$$

Em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Ver [4]. $\square$

Teorema 1.31. ***(de Aubin-Lions)*** *Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \overset{comp}{\hookrightarrow} B \overset{cont}{\hookrightarrow} B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0); u_t \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$. Consideremos W munido da norma

$$||u||_W = ||u||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + ||u||_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Proposição 1.32. ***(Lema de Lions)*** *Seja $\{u_\nu\}$ uma sucessão de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*
$i) u_\nu \to u$ quase sempre em Q e
$ii) ||u_\nu||_{L^q(Q)} \leq c$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$,
então $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

1.7 Operador Definido por uma Terna

Desenvolvemos esta seção conforme [7]. Sejam V e H espaços de Hilbert complexos, cujos produtos internos e normas denotaremos, respectivamente, por $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ e $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$, com V tendo imersão contínua e densa em H.

Seja

$$\begin{array}{rcl} a(\cdot,\cdot): V\times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,v) & \longmapsto & a(u,v) \end{array}$$

uma forma sesquilinear contínua.

Definamos

$$\begin{array}{l} D(A)=\{u\in V;\ \text{a forma antilinear } v\in V\mapsto a(u,v) \text{ é contínua} \\ \ \text{com a topologia induzida por } H\}\,. \end{array} \tag{1.5}$$

Em outras palavras, $D(A)$ é o conjunto dos elementos $u\in V$ tais que a forma antilinear

$$\begin{array}{rcl} g_u: V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ v & \longmapsto & g_u(v)=a(u,v) \end{array} \tag{1.6}$$

é contínua quando induzimos em V a topologia de H. Note que $D(A)\neq\emptyset$ pois $0\in D(A)$. Sendo V denso em H, podemos estender a aplicação (1.6) a uma aplicação

$$\widetilde{g_u}: H\longrightarrow\mathbb{C}$$

antilinear e contínua tal que

$$\widetilde{g_u}(v)=g_u(v),\quad \forall v\in V. \tag{1.7}$$

Pelo teorema 1.25, existe único $f_u\in H$ tal que

$$\widetilde{g_u}(v)=(f_u,v),\quad \forall v\in H. \tag{1.8}$$

Em particular,

$$a(u,v)=(f_u,v),\quad \forall v\in V. \tag{1.9}$$

Desta forma, temos definida a aplicação

$$\begin{array}{rcl} A: D(A) & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & Au=f_u \end{array} \tag{1.10}$$

e, consequentemente, chegamos a uma nova caracterização para $D(A)$, a saber,

$$D(A) = \{u \in V;\ \text{existe } f \in H \text{ que verifica } a(u,v) = (f,v),\ \text{para todo } v \in V\}. \tag{1.11}$$

Assim, $D(A)$ é subespaço de H e fica definido um operador linear

$$\begin{array}{rcl} A : D(A) & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & Au \end{array} \tag{1.12}$$

onde

$$(Au, v) = a(u,v) \text{ para todo } u \in D(A) \text{ e para todo } v \in V. \tag{1.13}$$

Neste contexto, diremos que o operador A é definido pela terna $\{V, H, a(u,v)\}$ e denotaremos tal fato escrevendo

$$A \leftrightarrow \{V, H, a(u,v)\}.$$

Teorema 1.33. *Sejam V e H espaços de Hilbert com $V \hookrightarrow H$ sendo V denso em H. Se $a(u,v)$ é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva em V e A é o operador definido pela terna $\{V, H, a(\cdot,\cdot)\}$, então, para cada $f \in H$, existe um único $u \in D(A)$ tal que $Au = f$.*

Demonstração: ver teorema 5.126 em [7]. $\square$

Sendo A o operador definido pela terna $\{V, H, a(u,v)\}$, verifiquemos o que se pode dizer de uma possível extensão deste. Sejam V' e H' os antiduais de V e H, respectivamente. Definamos

$$\begin{array}{rcl} B : V & \longrightarrow & V' \\ u & \longmapsto & Bu \end{array} \quad \text{onde } \begin{array}{rcl} Bu : V & \longrightarrow & \mathbb{C} \text{ é definido por} \\ v & \longmapsto & < Bu, v >_{V',V} = a(u,v). \end{array} \tag{1.14}$$

Observe que a aplicação acima está bem definida e é linear. Da continuidade de $a(\cdot,\cdot)$ seque que B é contínua pois

$$\|Bu\|_{V'} = \sup_{v \in V; \|v\| \le 1} | < Bu, v > | = \sup_{v \in V; \|v\| \le 1} |a(u,v)| \le \sup_{v \in V; \|v\| \le 1} C\|u\|\|v\| \le C\|u\|,$$

ou seja, $B \in \mathcal{L}(V, V')$. Além disso, veja que

$$Bu = Au, \text{ para todo } u \in D(A), \tag{1.15}$$

ou seja, B é uma extensão de A a todo V.

No caso particular em que

$$a(u, v) = ((u, v)) \text{ onde } ((\cdot, \cdot)) \text{ é o produto interno de } V,$$

então, a extensão B do operador A dada acima é uma bijeção isométrica, onde a injetividade resulta do fato que B é isometria e a sobrejetividade é uma consequência do teorema 1.27 de Lax-Milgram.

1.8 Semigrupos e Grupos de Operadores Lineares em Espaços de Banach

Definição 1.34. *Seja X um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados de X em X é um semigrupo de operador linear limitado de X se*

i) $S(0) = I$.

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ *para todos* $t, s \geq 0$.

O operador linear A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} S(t)x \bigg|_{t=0} \text{ para } x \in D(A)$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$, onde $D(A)$ é o domínio de A.

Definição 1.35. *Um semigrupo $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores limitados de X é fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x \text{ para todo } x \in X.$$

Um semigrupo de operadores limitados fortemente contínuo de X será chamado de semigrupo de classe C_0.

Definição 1.36. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o seu gerador infinitesimal. Ponhamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo:*

$$D(A^n) = \left\{x \in X; x \in D(A^{n-1}) \text{ e } A^{n-1}x \in D(A)\right\}$$

$$A^n x = A\left(A^{n-1}x\right), \quad \forall x \in D(A^n).$$

Proposição 1.37. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo, S, de classe C_0, então, para todo $x \in D(A^n)$, $S(t)x \in C^{n-k}([0,\infty]; D(A^k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$.*

Demonstração: ver proposição 2.18, p. 23 de [16]. □

Para o espaço de Banach X consideremos seu dual X'. Denotamos por $x^* \in X'$ aplicado em $x \in X$ por $< x^*, x >$ ou $< x, x^* >$. Para cada $x \in X$ definimos o conjunto dualidade

$$F(x) = \left\{x^* \in X; < x^*, x >= \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}.$$

Do teorema de Hahn-Banach segue que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Definição 1.38. *Um operador linear A é dissipativo se para cada $x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re < Ax, x^* > \leq 0$. O operador linear A é dito m-dissipativo se for dissipativo e $Im(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$.*

Proposição 1.39. *Se A é m-dissipativo com $Im(\lambda_0 - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$, então $Im(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: ver proposição 4.12, p.38 de [16]. □

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador de X. O resolvente de A, denotado por $\rho(A)$ é definido assim

$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C};\quad (A-\lambda I)^{-1}\quad existe\ D((A-\lambda I)^{-1})\quad e\quad denso\quad em\quad X$ $e\quad (A-\lambda I)^{-1}\quad e\quad limitado\}.$

O espectro de A será denotado por

$$\sigma(A)=\mathbb{C}\setminus\rho(A).$$

Teorema 1.40. *Seja A dissipativo com $D(A)$ denso em X. Se $0\in\rho(A)$, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contração.*

Teorema 1.41 (Lumer-Phillips)**.** *O operador A é m-dissipativo se, e somente se, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.*

Demonstração: ver teorema 4.3, p.14 em [33]. □

Teorema 1.42. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Seja B um operador dissipativo com $D(A)\subset D(B)$ satisfazendo*

$$\|Bx\|\leq\alpha\|Ax\|+\beta\|x\|,\quad para\ todo\ x\in D(A),$$

onde $0\leq\alpha<1$ e $\beta\geq 0$. Então $A+B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.

Demonstração: ver corolário 3.3, p. 82, de [33]. □

Definição 1.43. *Uma família a um parâmetro $S(t)$, $-\infty<t<\infty$, de operadores lineares limitados de um espaço de Banach X é um grupo de operadores lineares de classe C_0 se satisfaz seguintes condições*

i) $S(0)=I$,

ii) $S(t+s)=S(t)S(s)$ *para* $-\infty<t,s<\infty$,

iii) $\lim_{t\to 0}S(t)x=x$ *para* $x\in X$.

Definição 1.44. *O gerador infinitesimal A de um grupo $S(t)$ é definido por*

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

sempre que o limite existe. O domínio de A é o conjunto de todos os elementos $x \in X$ para os quais o limite acima existe

Seja $S(t)$ um grupo de operadores lineares limitados de classe C_0. Das definições propostas segue que para $t \geq 0$, $S(t)$ é um semigrupo de classe C_0 cujo gerador infinitesimal é o operador A. Além disso, para $t \geq 0$, $S'(t) := S(-t)$ é também um semigrupo de classe C_0 de gerador infinitesimal $-A$. Assim, se $S(t)$ é um grupo de operadores limitados de classe C_0 de X, tanto A como $-A$ são geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0.

Definição 1.45. *Um grupo S de operadores lineares limitados de um espaço de Hilbert é dito grupo unitário se $S(t)^* = S(t)^{-1}$, $\forall t \geq 0$.*

Note que $\|S(t)x\| = \|x\|$ para todo grupo unitário, o que implica que $\|S(t)\| = 1$.

Teorema 1.46 (Stone)**.** *Um operador linear A definido em um espaço de Hilbert, X, é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 se, e somente se, $A^* = -A$.*

Demonstração: ver teorema 5.8, p.55 de [16]. □

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), & t > 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1.16}$$

onde $f : [0, T[\to X$.

Observação 1.47. *Se f é identicamente nula e A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $S(t)$, o problema de Cauchy (1.16) tem uma única solução e esta é dada por $u(t) = S(t)x$, para todo $x \in D(A)$ (ver [33], p. 100). Como*

$D(A^n) \subset D(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, a regularidade da solução de (1.16) é dada pela proposição 1.37.

Definição 1.48. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $S(t)$. Seja $x \in X$ e $f \in L^1(0, T; X)$. A função $u \in C([0, T]; X)$ dada por*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é dita solução fraca *do problema de valor inicial (1.16) em $[0, T]$.*

Teorema 1.49. *Se $f \in L^1(0, T; X)$ então para cada $x \in X$ o problema de valor inicial (1.16) tem uma única solução fraca.*

Demonstração: ver corolário 2.2, p.106 de [33]. □

Definição 1.50. *Uma função u que é diferenciável quase sempre em $[0, T]$ e com $u' \in L^1(0, T; X)$ é dita* solução forte *do problema de valor inicial (1.16) se $u(0) = x$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$ q.s. em $[0, T]$.*

Teorema 1.51. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $S(t)$. Se f é diferenciável quase sempre em $[0, T]$ e $f' \in L^1(0, T; X)$ então, para cada $x \in D(A)$ o problema de valor inicial (1.16) tem uma única solução forte em $[0, T]$.*

Demonstração: ver corolário 2.10, p.109 de [33]. □

1.9 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert

Embora aplicaremos os resultados a seguir para operadores unívocos, a teoria é mais geral, valendo para operadores plurivalentes como passamos a descrever baseados em [2, 3].

Seja H um espaço de Hilbert. Um operador plurivalente A será uma aplicação de H em $\mathcal{P}(H)$, conjunto das partes de H. O domínio de A é dado por

$$D(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\}$$

e a imagem de A é o conjunto

$$Im(A) = \bigcup_{x \in H} Ax.$$

Se para cada $x \in H$, o conjunto Ax possui exatamente um elemento diremos que A é unívoco.

O operador A pode ser identificado com seu gráfico em $H \times H$, isto é, $\{\{x, y\}; y \in Ax\}$. Assim o conjunto dos operadores é ordenado pela inclusão de seus gráficos, isto é, $A \subset B \Leftrightarrow Ax \subset Bx,\ \forall x \in H$.

Definição 1.52. *Um operador A é dito monótono se*

$$< Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 > \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A),$$

ou mais precisamente,

$$< y_1 - y_2, x_1 - x_2 > \geq 0, \quad \forall y_1 \in Ax_1 \ e \ y_2 \in Ax_2.$$

Diremos que A é maximal monótono se for maximal no conjunto dos operadores monótonos.

Proposição 1.53. *Seja A um operador de H. São equivalentes as seguintes asserções:*

i) *A é um operador maximal monótono;*

ii) *A é monótono e $Im(I + A) = H$.*

Demonstração: ver proposição 2.2, p.23 de [3]. $\square$

Definição 1.54. *Um operador unívoco A de H é dito hemicontínuo em H se $A(x+ty) \rightharpoonup Ax$ fraco em H' quando $t \to 0$ para cada $x, y \in H$.*

O seguinte resultado pode ser estabelecido também para espaços de Banach reflexivos

Teorema 1.55. *Seja B é um operador monótono, hemicontínuo e limitado de H. Suponha que A é um operador maximal monótono de H. Então $A+B$ é maximal monótono.*

Demonstração: ver corolário 1.1, p.39 de [2]. $\square$

Agora considere o seguinte problema de cauchy abstrato:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) + Au(t) \ni 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.17}$$

Teorema 1.56. *Seja A um operador maximal monótono de um espaço de Hilbert H. Para cada $u_0 \in D(A)$, existe uma única função $u(t)$ de $[0, \infty)$ em H tal que*

i) *$u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$;*

ii) *$u(t)$ é lipschitziana em $[0, \infty)$, isto é, $\frac{d}{dt}u \in L^\infty(0, \infty; H)$;*

iii) *$u(t)$ satisfaz o problema de cauchy abstrato 1.17.*

Demonstração: ver teorema 3.1, p.54 de [3]. $\square$

Definição 1.57. *A função u dada pelo teorema acima é chamada de solução forte de 1.17. Dizemos que $u \in C([0, T]; H)$ é solução fraca da equação $\frac{d}{dt}u + Au \ni 0$ se existir uma sequência $u_n \in C([0, T]; H)$ de soluções fortes de $\frac{d}{dt}u_n + Au_n \ni 0$ tal que $u_n \to u$ uniformemente em $[0, T]$.*

Teorema 1.58. *Seja A um operador maximal monótono de um espaço de Hilbert H. Para todo $u_0 \in \overline{D(A)}$ existe uma única solução fraca de 1.17.*

Demonstração: ver teorema 3.4, p.65 de [3]. $\square$

1.10 Funções escalarmente contínuas

Seja X um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^{\infty}(0,T;X)$ tais que a aplicação $t \mapsto < x, f(t) >$ é contínua sobre $[0,T]$, para todo $x \in X'$, onde X' é o dual de X. Denotaremos tal espaço por $C_s(0,T;X)$.

Disto segue que

$$C_s^1(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u' \in C_s(0,T;X)\},$$

onde u' é a derivada distribucional de u. Da mesma forma

$$C_s^2(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u'' \in C_s(0,T;X)\}.$$

Observação 1.59. *Se $u \in L^{\infty}(0,T;X)$ e $u' \in C([0,T];X)$ então $u \in C_s(0,T;X)$.*

Proposição 1.60. *Sejam X e Y espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e X reflexivo. Então $L^{\infty}(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X)$.*

Demonstração: ver [25]. □

Capítulo 2

Controlablidade exata na fronteira para o sistema de Bresse

2.1 Existência e unicidade de soluções

Consideraremos o sistema de Bresse dado por

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = f_1 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_2 \\ \rho_1\omega_{tt} - k_0[\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_3 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

em $Q = (0, L) \times (0, T)$. Assumimos condições de fronteira do tipo Dirichlet, i.e.,

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0, \tag{2.2}$$

para $t \in (0, T)$, e condições iniciais

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, & \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0, & \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \\ \omega(\cdot, 0) = \omega_0, & \omega_t(\cdot, 0) = \omega_1. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Passemos a discorrer sobre a existência de solução que é uma consequência da teoria de semigrupos que pode ser encontrada em [33] e está resumidamente descrita nas preliminares.

Consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \left[H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)\right]^3$$

munido da norma

$$
\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon\}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \int_0^L \rho_1|\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2 + \rho_1|\Upsilon|^2 + b|\psi_x|^2 \\
&\qquad +k|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + k_0|\omega_x - l\varphi|^2 \, dx
\end{aligned}
$$

a qual é equivalente à norma usual de $\mathcal{H}$ (a demonstração pode ser feita usando argumentos de contradição).

Se denotarmos $V(t) = \{\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \omega, \omega_t\}$ e $F = \{0, f_1, 0, f_2, 0, f_3\}$ o problema de valor inicial e fronteira (2.1)-(2.3) se torna equivalente a

$$
\begin{cases} \dfrac{d}{dt}V(t) = \mathcal{A}V(t) + F, \;\; t > 0, \\ V(0) = V_0 \end{cases} \tag{2.4}
$$

onde $V_0 = \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1\}$ e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é dado por

$$
\mathcal{A} = \begin{pmatrix}
0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{k\partial_x^2 - k_0 l^2 I}{\rho_1} & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{k+k_0}{\rho_1} l\partial_x & 0 \\
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
-\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b\partial_x^2 - kI}{\rho_2} & 0 & -\frac{kl}{\rho_2} I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
\frac{-k_0 - k}{\rho_1} l\partial_x & 0 & -\frac{kl}{\rho_1} I & 0 & \frac{k_0\partial_x^2 - kl^2 I}{\rho_1} & 0
\end{pmatrix} \tag{2.5}
$$

com $D(\mathcal{A}) = \left[H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)\right]^3$.

Mostraremos que $\mathcal{A}$ é m-dissipativo. Mostraremos primeiramente que $\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato, seja $U = \{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon\} \in D(\mathcal{A})$. Então

$$
\begin{aligned}
& (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \\
= & \int_0^L \{k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x\Phi + k_0 l[\omega_x - l\varphi]\Phi + b\phi_{xx}\Psi - k(\varphi_x + \psi + l\omega)\Psi \\
& +k_0[\omega_x - l\varphi]_x\Upsilon - kl(\varphi_x + \psi + l\omega)\Upsilon + b\psi_x\Psi_x \\
& +k(\varphi_x + \psi + l\omega)(\Phi_x + \Psi + l\Upsilon) + k_0[\omega_x - l\varphi][\Upsilon_x - l\Phi] \;\}dx \\
= & \int_0^L [-k(\varphi_x + \psi + l\omega)\Phi_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega)\Phi_x]dx + [k(\varphi_x + \psi + l\omega)\Phi]_0^L \\
& \int_0^L [b\psi_x\Psi_x - b\psi_x\Psi_x]dx + [b\psi_x\Psi]_0^L + \int_0^L [k_0(\omega_x - l\varphi)\Upsilon_x - k_0(\omega_x - l\varphi)\Upsilon_x]dx \\
& + [k_0(\omega_x - l\varphi)\Upsilon]_0^L = 0, \quad U \in D(\mathcal{A}).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = 0$ o que implica que $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Mostremos agora que $\mathcal{A}$ é m-dissipativo. Mostremos que $Im(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. De fato, seja $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\} \in \mathcal{H}$ e, portanto, é suficiente provar que existe $U \in D(\mathcal{A})$ satisfazendo o problema espectral

$$U - \mathcal{A}U = G. \tag{2.6}$$

Fazendo $U = \{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon\}$, a equação (2.6) fica equivalente

$$\begin{array}{rll}
\varphi - \Phi & = g_1 & \text{em } H_0^1(0,L), \\
\rho_1 \Phi - k(\varphi_x - \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] & = \rho_1 g_2 & \text{em } L^2(0,L), \\
\psi - \Psi & = g_3 & \text{em } H_0^1(0,L), \\
\rho_2 \Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) & = \rho_2 g_4 & \text{em } L^2(0,L), \\
\omega - \Upsilon & = g_5 & \text{em } H_0^1(0,L), \\
\rho_1 \Upsilon - k_0[\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) & = \rho_1 g_6 & \text{em } L^2(0,L).
\end{array} \tag{2.7}$$

Isolando Φ, Ψ, Υ nas equações $(2.7)_1$,$(2.7)_3$ e $(2.7)_5$ e substituindo em $(2.7)_2$,$(2.7)_4$ e $(2.7)_6$ respectivamente, obtemos

$$\left\{\begin{array}{ll}
\rho_1 \varphi - k(\varphi_x - \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = G_1 & \text{em } L^2(0,L), \\
\rho_2 \psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = G_2 & \text{em } L^2(0,L), \\
\rho_1 \omega - k_0[\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = G_3 & \text{em } L^2(0,L).
\end{array}\right. \tag{2.8}$$

onde

$$G_1 = \rho_1(g_1 + g_2), \quad G_2 = \rho_2(g_3 + g_4) \text{ e } G_3 = \rho_1(g_5 + g_6). \tag{2.9}$$

Assim definimos a forma bilinear

$$\alpha : \left[H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)\right]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

de forma que $\alpha(\{\varphi, \psi, \omega\}, \{u, v, z\})$
$= \int_0^L \rho_1 \varphi u + \rho_2 \psi v + \rho_1 \omega z + b\psi_x v_x +$
$+ k(\varphi_x + \psi + l\omega)(u_x + v + lz) + k_0[\omega_x - l\varphi][z_x - lu] \; dx.$

Observe que $\alpha(\{\varphi, \psi, \omega\}, \{\varphi, \psi, \omega\})$ define uma norma, equivalente à usual, em $[H_0^1(0,L)]^3$. Donde segue que α é contínua e coerciva.

Multiplicando (2.8) por u, v e z respectivamente e integrando em $(0,L)$ obtemos que $\alpha(\{\varphi, \psi, \omega\}, \{u, v, z\}) = \int_0^L G_1 u + G_2 v + G_3 z \; dx$
$= \langle \{G_1, G_2, G_3\}, \{u, v, z\} \rangle_{[H_0^1(0,L)^3]', H_0^1(0,L)^3}, \quad \forall \{u, v, z\} \in H_0^1(0,L)^3.$

Pelo teorema de Lax-Milgram, o sistema (2.8) tem única solução $\{\varphi, \psi, \omega\} \in H_0^1(0, L)^3$. Disso, de (2.7) da regularidade dos problemas elíticos em (2.8) e de (2.9) obtemos $U = \{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon\}$ em $D(\mathcal{A})$ satisfazendo (2.6) provando assim que $Im(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ e, portanto, que $\mathcal{A}$ é m-dissipativo.

Pelo Teorema de Lumer-Phillips $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Isto implica, em virtude dos teoremas 1.51 e 1.49, que o problema (2.4) tem única solução forte e única solução fraca dependendo da escolha dos dados iniciais V_0 e da não-homogeneidade F. Equivalentemente, o problema de valor inicial (2.1)-(2.3) tem únicas soluções forte e fraca, ou seja, o problema (2.1)-(2.3) com $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1\} \in (H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L))^3$, $f_1, f_2, f_3 \in W^{1,1}(0, T; L^2(0, L))$ possui uma única solução forte $\{\varphi, \psi, w\}$ na classe $C([0, T]; H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$ e se $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1\} \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^3$, $f_1, f_2, f_3 \in L^1(0, T; L^2(0, L))$ o problema (2.1)-(2.3) possui uma única solução fraca $\{\varphi, \psi, w\}$ na classe $C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$.

2.2 Desigualdade direta

Consideremos os seguintes funcionais

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t| + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi + w|^2 + k_0 |w_x - l\varphi|^2 \, dx$$

e

$$\widetilde{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t| + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x|^2 + k_0 |w_x|^2 \, dx$$

onde

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 |\varphi_1|^2 + \rho_2 |\psi_1|^2 + \rho_1 |w_1| + b|\psi_{0x}|^2 + k|\varphi_{0x} + \psi_0 + w_0|^2 + k_0 |w_{0x} - l\varphi_0|^2 \, dx$$

e

$$\widetilde{E}(0)=\frac{1}{2}\int_0^L \rho_1|\varphi_1|^2+\rho_2|\psi_1|^2+\rho_1|w_1|+b|\psi_{0x}|^2+k|\varphi_{0x}|^2+k_0|w_{0x}|^2\ dx.$$

Compondo (2.1) por φ_t, ψ_t e ω_t respectivamente temos que

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_t|^2+\frac{d}{dt}\frac{k}{2}\|\varphi\|^2-k((\psi+l\omega)_x,\varphi_t)-k_0l([\omega_x-l\varphi],\varphi_t)=\langle f_1,\varphi_t\rangle$$

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}|\psi_t|^2+\frac{d}{dt}\frac{b}{2}\|\psi\|^2+k((\varphi_x+\psi+l\omega),\psi_t)=\langle f_2,\psi_t\rangle$$

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}|\omega_t|^2+\frac{d}{dt}\frac{k_0}{2}\|\omega\|^2-k_0l(\varphi_x,\omega_t)+kl((\varphi_x+\psi+l\omega),\omega_t)=\langle f_3,\omega_t\rangle.$$

Somando-se as três equações anteriores temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\widetilde{E}(t)\\
&=k((\psi+l\omega)_x,\varphi_t)+k_0l([\omega_x-l\varphi],\varphi_t)+\langle f_1,\varphi_t\rangle-k((\varphi_x+\psi+l\omega),\psi_t)\\
&+\langle f_2,\psi_t\rangle+k_0l(\varphi_x,\omega_t)-kl((\varphi_x+\psi+l\omega),\omega_t)+\langle f_3,\omega_t\rangle\\
&\leq C\widetilde{E}(t)+\langle f_1,\varphi_t\rangle+\langle f_2,\psi_t\rangle+\langle f_3,\omega_t\rangle\\
&\leq C\widetilde{E}(t)+C(|f_1|+|f_2|+|f_3|)\sqrt{\widetilde{E}(t)}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\widetilde{E}(t)-C\widetilde{E}(t)\leq +C(|f_1|+|f_2|+|f_3|)\sqrt{\widetilde{E}(t)}.$$

Multiplicando-se esta última desigualdade por e^{-Ct} teremos

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{E}(t)e^{-Ct})\leq Ce^{-Ct}(|f_1|+|f_2|+|f_3|)\sqrt{\widetilde{E}(t)}.$$

Integrando-se em $[0,t]$, $t\leq T$, obtemos

$$\widetilde{E}(t)e^{-Ct}\leq \widetilde{E}(0)+C\int_0^t(|f_1|+|f_2|+|f_3|)\sqrt{\widetilde{E}(t)}\ dt.$$

Assim

$$\widetilde{E}(t)\leq C\widetilde{E}(0)+C\int_0^t(|f_1|+|f_2|+|f_3|)\sqrt{\widetilde{E}(s)}\ ds$$

onde majoramos e^{Ct} por e^{CT} e incorporamos na constante C usando a mesma notação para as constantes como C

e do teorema 1.24 obtemos

$$\sqrt{\widetilde{E}(t)} \leq C(\sqrt{\widetilde{E}(0)} + \int_0^t (|f_1| + |f_2| + |f_3|)ds).$$

Portanto temos que

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|\omega_t|^2 + k\|\varphi\|^2 + b\|\psi\|^2 + k_0\|\omega\|^2)}$$
$$\leq C[\sqrt{\frac{1}{2}(\rho_1|\varphi_1|^2 + \rho_2|\psi_1|^2 + \rho_1|\omega_1|^2 + k\|\varphi_0\|^2 + b\|\psi_0\|^2 + k_0\|\omega_0\|^2)}$$
$$+ \int_0^t (|f_1| + |f_2| + |f_3|)ds].$$

Na desigualdade anterior podemos minorar o lado esquerdo, usando o fato de que se a, b são não negativos então $2\sqrt{a^2 + b^2} \geq a + b$ por

$$C(\rho_1|\varphi_t| + \rho_2|\psi_t| + \rho_1|\omega_t| + k\|\varphi\| + b\|\psi\| + k_0\|\omega\|)$$

e o lado direito podemos majorar, usando o fato que se a, b são não negativos, então $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$, por

$$C(\rho_1|\varphi_1| + \rho_2|\psi_1| + \rho_1|\omega_1| + k\|\varphi_0\| + b\|\psi_0\| + k_0\|\omega_0\| + \int_0^t (|f_1| + |f_2| + |f_3|)ds).$$

Assim teremos que

$$\begin{aligned} &(\rho_1|\varphi_t| + \rho_2|\psi_t| + \rho_1|\omega_t| + k\|\varphi\| + b\|\psi\| + k_0\|\omega\|) \\ &\leq C(\rho_1|\varphi_1| + \rho_2|\psi_1| + \rho_1|\omega_1| + k\|\varphi_0\| + b\|\psi_0\| + k_0\|\omega_0\| \\ &\ + \int_0^t (|f_1| + |f_2| + |f_3|)ds). \end{aligned} \tag{2.10}$$

E ainda, de

$$\sqrt{\widetilde{E}(t)} \leq C(\sqrt{\widetilde{E}(0)} + \int_0^t (|f_1| + |f_2| + |f_3|)ds) \tag{2.11}$$

temos que

$$\widetilde{E}(t) \leq C(\widetilde{E}(0) + (\int_0^t (|f_1| + |f_2| + |f_3|)ds)^2). \tag{2.12}$$

Tome $q \in C^1([0, L])$, e sejam inicialmente $\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$, $\varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in H_0^1(0, L)$ e $f_1, f_2, f_3 \in W^{1,1}(0, T; L^2(0, L))$ e φ, ψ, ω solução forte de

(2.1)-(2.3), então $\varphi, \psi, \omega \in C([0,T]; H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L))$,

$\varphi_t, \psi_t, \omega_t \in C([0,T]; H_0^1(0,L))$.

Além disso, (2.1) são satisfeitos q.s em Q. Multiplicando-se (2.1) por $q\varphi_x$, $q\psi_x$ e $q\omega_x$ respectivamente, e integrando-se em Q, obtemos:

$$\rho_1 \int_Q \varphi_{tt} q\varphi_x dxdt - k\int_Q (\varphi_x + \psi + l\omega) q\varphi_x dxdt - k_0 l \int_Q [\omega_x - l\varphi] q\varphi_x dxdt = \int_Q f_1 q\varphi_x dxdt$$

$$\rho_2 \int_Q \psi_{tt} q\psi_x dxdt - b\int_Q \psi_{xx} q\psi_x dxdt + k\int_Q (\varphi_x + \psi + \omega) q\psi_x dxdt = \int_Q f_2 q\psi_x dxdt$$

$$\rho_1 \int_Q \omega_{tt} q\omega_x dxdt - k_0 \int_Q [\omega_x - l\varphi]_x q\omega_x dxdt + kl \int_Q (\varphi_x + \psi + l\omega) q\omega_x dxdt = \int_Q f_3 q\omega_x dxdt.$$

Integrando por partes obtemos

$$\rho_1 \int_Q \varphi_{tt} q\varphi_x dxdt = \rho_1 \int_0^L [\varphi_t q\varphi_x]_0^T dx + \frac{\rho_1}{2}\int_Q |\varphi_t|^2 q_x dxdt,$$

$$-k\int_Q (\varphi_x + \psi + l\omega) q\varphi_x dxdt = \frac{k}{2}\int_Q |\varphi_x|^2 q_x dxdt,$$

$$-\frac{k}{2}\int_0^T [|\varphi_x|^2 q]_0^L dt - k\int_Q (\psi + l\omega)_x q\varphi_x dxdt,$$

$$\rho_2 \int_Q \psi_{tt} q\psi_x dxdt = \rho_2 \int_0^L [\psi_t q\psi_x]_0^T dx + \frac{\rho}{2}\int_Q |\psi_t|^2 q_x dxdt,$$

$$-b\int_Q \psi_{xx} q\psi_x dxdt = \frac{b}{2}\int_Q |\psi_x|^2 q_x dxdt - \frac{b}{2}\int_0^T [|\psi_x|^2]_0^L dt,$$

$$\rho_1 \int_Q \omega_{tt} q\omega_x dxdt = \rho_1 \int_0^L [\omega_t q\omega_x]_0^T dx + \frac{\rho_1}{2}\int_Q |\omega_t|^2 q_x dxdt,$$

$$-k_0 \int_Q [\omega_x - l\varphi]_x q\omega_x dxdt = -\frac{k_0}{2}\int_0^T [|\omega_x|^2 q]_0^L dt + \frac{k_0}{2}\int_Q |\omega_x|^2 q_x dxdt + k_0 l \int_Q \varphi q\omega_x dxdt.$$

Com isso temos

$$\rho_1 \int_0^L [\varphi_t q\varphi_x]_0^T dx + \frac{\rho_1}{2}\int_Q |\varphi_t|^2 q_x dxdt + \frac{k}{2}\int_Q |\varphi_x|^2 q_x dxdt - \frac{k}{2}\int_0^T [|\varphi_x|^2 q]_0^L dt$$

$$- k\int_Q (\psi + l\omega)_x q\varphi_x dxdt - k_0 l \int_Q [\omega_x - l\varphi] q\varphi_x dxdt = \int_Q f_1 q\varphi_x dxdt$$

$$\rho_2 \int_0^L [\psi_t q\psi_x]_0^T dx + \frac{\rho_2}{2}\int_Q |\psi_t|^2 q_x dxdt + \frac{b}{2}\int_Q |\psi_x| q_x dxdt - \frac{b}{2}\int_0^T [|\psi_x|^2 q]_0^L dt$$

$$+ k\int_Q (\varphi_x + \psi + l\omega) q\psi_x dxdt = \int_Q f_2 q\psi_x$$

$$\rho_1\int_0^L[\omega_t q\omega_x]_0^T dx+\frac{\rho_1}{2}\int_Q|\omega_t|^2q_xdxdt+\frac{k_0}{2}\int_Q|\omega_x|^2q_xdxdt-\frac{k_0}{2}\int_0^T[|\omega_x|^2q]_0^Ldt$$
$$+\,k_0l\int_Q\varphi q\omega_xdxdt+kl\int_Q(\varphi_x+\psi+l\omega)q\omega_xdxdt=\int_Q f_3q\omega_x.$$

Somando-se as três últimas equações temos

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{2}\int_0^T[|\varphi_x|^2q]_0^Ldt+\frac{b}{2}\int_0^T[|\psi_x|^2q]_0^Ldt+\frac{k_0}{2}\int_0^T[|\omega_x|^2q]_0^Ldt\\
&=\rho_1\int_0^L[\varphi_tq\varphi_x]_0^Tdx+\frac{\rho_1}{2}\int_Q|\varphi_t|^2q_xdxdt+\frac{k}{2}\int_Q|\varphi_x|^2q_xdxdt\\
&-k\int_Q(\psi+l\omega)_xq\varphi_xdxdt-k_0l\int_Q[\omega_x-l\varphi]q\varphi_xdxdt-\int_Q f_1q\varphi_xdxdt\\
&\rho_2\int_0^L[\psi_tq\psi_x]_0^Tdx+\frac{\rho_2}{2}\int_Q|\psi_t|^2q_xdxdt+\frac{b}{2}\int_Q|\psi_x|q_xdxdt\\
&+k\int_Q(\varphi_x+\psi+l\omega)q\psi_xdxdt-\int_Q f_2q\psi_xdxdt\\
&+\rho_1\int_0^L[\omega_tq\omega_x]_0^Tdx+\frac{\rho_1}{2}\int_Q|\omega_t|^2q_xdxdt+\frac{k_0}{2}\int_Q|\omega_x|^2q_xdxdt\\
&+k_0l\int_Q\varphi q\omega_xdxdt+kl\int_Q(\varphi_x+\psi+l\omega)q\omega_xdxdt-\int_Q f_3q\omega_xdxdt.
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Tomando, em particular, $q(x)=x$ temos

$$\begin{aligned}
&\frac{kL}{2}\int_0^T|\varphi_x(L)|^2dt+\frac{bL}{2}\int_0^T|\psi_x(L)|^2dt+\frac{k_0L}{2}\int_0^T|\omega_x(L)|^2dt\\
&=\rho_1\int_0^L[\varphi_tx\varphi_x]_0^Tdx+\frac{\rho_1}{2}\int_Q|\varphi_t|^2dxdt+\frac{k}{2}\int_Q|\varphi_x|^2dxdt\\
&-k\int_Q(\psi+l\omega)_xx\varphi_xdxdt-k_0l\int_Q[\omega_x-l\varphi]x\varphi_xdxdt-\int_Q f_1x\varphi_xdxdt\\
&+\rho_2\int_0^L[\psi_tx\psi_x]_0^Tdx+\frac{\rho_2}{2}\int_Q|\psi_t|^2dxdt+\frac{b}{2}\int_Q|\psi_x|dxdt\\
&+k\int_Q(\varphi_x+\psi+l\omega)x\psi_xdxdt-\int_Q f_2x\psi_x\ dx\ dt\\
&+\rho_1\int_0^L[\omega_tx\omega_x]_0^Tdx+\frac{\rho_1}{2}\int_Q|\omega_t|^2dxdt+\frac{k_0}{2}\int_Q|\omega_x|^2dxdt\\
&+k_0l\int_Q\varphi x\omega_xdxdt+kl\int_Q(\varphi_x+\psi+l\omega)x\omega_xdxdt-\int_Q f_3x\omega_x.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

Da desigualdade anterior e usando-se (2.10), (2.12) a limitação da função

$q(x) = x$ em $[0, L]$ e o fato de se a, b são não negativos, então $2ab \leq a^2 + b^2$ temos

$$\frac{kL}{2}\int_0^T |\varphi_x(L)|^2 dt + \frac{bL}{2}\int_0^T |\psi_x(L)|^2 dt + \frac{k_0 L}{2}\int_0^T |\omega_x(L)|^2 dt$$
$$\leq -\int_Q f_1 x\varphi_x dxdt - \int_Q f_2 x\psi_x - \int_Q f_3 x\omega_x + C\widetilde{E}(T) + C\int_0^T \widetilde{E}(t)dt + C\widetilde{E}(0)$$
$$\leq -\int_Q f_1 x\varphi_x dxdt - \int_Q f_2 x\psi_x dxdt - \int_Q f_3 x\omega_x dxdt + C\widetilde{E}(0) + C\int_0^T \widetilde{E}(t)dt$$
$$+ C(\int_0^t (|f_1| + |f_2| + |f_3|)dt)^2$$
$$\leq \int_0^L \int_0^T |f_1| x |\varphi_x| dxdt + \int_0^L \int_0^T |f_2| x |\psi_x| dxdt + \int_0^L \int_0^T |f_3| x |\omega_x| dxdt$$
$$+ C\widetilde{E}(0) + C(\int_0^T (|f_1| + |f_2| + |f_3|)dt) + C\int_0^T (\widetilde{E}(0) + \int_0^T (|f_1| + |f_2| + |f_3|))dt$$
$$\leq C\int_0^T |f_1| \|\varphi\| dt + C\int_0^T |f_2| \|\psi\| dt + C\int_0^T |f_3| \|\omega\| dt + C\widetilde{E}(0)$$
$$+ C(\int_0^T (|f_1| + |f_2| + |f_3|)dt)^2$$
$$\leq C\int_0^T (|f_1|+|f_2|+|f_3|)[\rho_1|\varphi_1| + \rho_2|\psi_1| + \rho_1|\omega_1| + k\|\varphi_0\| + b\|\psi_0\| + k_0\|\omega_0\| + \int_0^t (|f_1| + |f_2| + |f_3|)]dt$$
$$+ C\widetilde{E}(0) + C(\int_0^T (|f_1| + |f_2| + |f_3|)dt)^2$$
$$\leq C[\widetilde{E}(0) + (\int_0^T (|f_1| + |f_2| + |f_3|)dt)^2] \leq C[\widetilde{E}(0) + (\int_0^T |f_1| dt)^2 + (\int_0^T |f_2| dt)^2 + (\int_0^T |f_3| dt)^2].$$

Portanto,

$$\int_0^T |\varphi_x(L)|^2 dt + \int_0^T |\psi_x(L)|^2 dt + \int_0^T |\omega_x(L)|^2 dt$$
$$\leq C\widetilde{E}(0) + C(\int_0^T |f_1| dt)^2 + C(\int_0^T |f_2| dt)^2 + C(\int_0^T |f_3| dt)^2$$

isto é,

$$\begin{aligned} &|\varphi_x(L)|^2 + |\psi_x(L)|^2 + |\omega_x(L)|^2 \\ &\leq C\widetilde{E}(0) + C(|f_1|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |f_2|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |f_3|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))}). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Representemos por W o espaço das soluções fracas de (2.1)-(2.3) quando $((\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1), (f_1, f_2, f_3)) \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^3 \times (L^1(0, T; L^2(0, L)))^3$.

Claramente W é um espaço vetorial, e a aplicação linear:

$$\begin{array}{l}(H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3\times(L^1(0,T;L^2(0,L)))^3\to W\\ \{\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\omega_0,\omega_1,f_1,f_2,f_3\}\mapsto\{\varphi,\psi,\omega\}\end{array}\tag{2.16}$$

é bijetora, e portanto podemos munir o espaço W com a seguinte norma:

$|\{\varphi,\psi,\omega\}|_W=[\rho_1|\varphi_1|+\rho_2|\psi_1|+\rho_1|\omega_1|+k\|\varphi_0\|+b\|\psi_0\|+k_0\|\omega_0\|$
$+|f_1|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}+|f_2|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}+|f_3|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}]$.

Com esta norma W é um espaço de Banach.

Representemos por V o espaço das soluções fortes de (2.1)-(2.3) quando $((\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\omega_0,\omega_1),(f_1,f_2,f_3))\in(H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\times H_0^1(0,L))^3$
$\times(W^{1,1}(0,T;L^2(0,L)))^3$.

Logo, V é um subespaço vetorial de W.

De (2.15) obtemos que

$$|\varphi_x(L)|+|\psi_x(L)|+|\omega_x(L)|\leq|\{\varphi,\psi,\omega\}|_W\qquad\forall\quad\{\varphi,\psi,\omega\}\in V.\tag{2.17}$$

Denotando $\gamma_1(\{\varphi,\psi,\omega\})$; $\{\varphi,\psi,\omega\}\in V$ de (2.16) temos que a aplicação linear

$$\begin{array}{l}\gamma:V\to[L^2(0,T)]^3\\ \{\varphi,\psi,\omega\}\mapsto\{\varphi_x(L),\psi_x(L),\omega_x(L)\}\end{array}\tag{2.18}$$

é contínua com a norma de W.

Sendo V denso em W estendemos por continuidade a uma aplicação linear e contínua

$\widetilde{\gamma}_1:W\to L^2(0,T)$

definida do seguinte modo:

se $\{\varphi,\psi,\omega\}\in W$, existem $\{\varphi_\mu,\psi_\mu,\omega_\mu\}\in V$ tal que

$\{\varphi_\mu,\psi_\mu,\omega_\mu\}\to\{\varphi,\psi,\omega\}$ em W,

então

$\widetilde{\gamma}_1(\varphi,\psi,\omega)=\lim\limits_{\mu\to+\infty}\gamma_1(\{\varphi_\mu,\psi_\mu,\omega_\mu\})=\lim\limits_{\mu\to+\infty}\{\varphi_{\mu x}(L),\psi_{\mu x}(L),\omega_{\mu x}(L)\}$.

Denotando

$\widetilde{\gamma}_1(\{\varphi,\psi,\omega\})=\{\varphi_x(L),\psi_x(L),\omega_x(L)\},\quad\{\varphi,\psi,\omega\}\in\quad W$ segue-se:

$$\begin{aligned}&\{\varphi_x(L),\psi_x(L),\omega_x(L)\}=\lim_{\mu\to+\infty}\{\varphi_{\mu x}(L),\psi_{\mu x}(L),\omega_{\mu x}(L)\},\\&em\quad (L^2(0,T))^3,\quad \{\varphi,\psi,\omega\}\in V.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Teorema 2.1. *Se $q=x$ em $[0,L]$ a solução fraca de (2.1)-(2.3) verifica (2.14) e (2.15).*

Demonstração: Sendo $\{\varphi,\psi,\omega\}$ a solução fraca de (2.1)-(2.3) associada aos dados $((\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\omega_0,\omega_1),(f_1,f_2,f_3))\in(H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3\times(L^1(0,T;L^2(0,L)))^3$ usando a densidade podemos aproximar por dados regulares

$((\varphi_{0\mu},\varphi_{1\mu},\psi_{0\mu},\psi_{1\mu},\omega_{0\mu},\omega_{1\mu}),(f_{1\mu},f_{2\mu},f_{3\mu}))\in(H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\times H_0^1(0,L))^3$ $\times(W^{1,1}(0,T;L^2(0,L)))^3$ com

$((\varphi_{0\mu},\varphi_{1\mu},\psi_{0\mu},\psi_{1\mu},\omega_{0\mu},\omega_{1\mu}),(f_{1\mu},f_{2\mu},f_{3\mu}))\to$ $((\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\omega_0,\omega_1),(f_1,f_2,f_3))$ em $(H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3\times(L^1(0,T;L^2(0,L)))^3$.

Denotando por $\{\varphi_\mu,\psi_\mu,\omega_\mu\}$ as soluções fortes para os dados

$((\varphi_{0\mu},\varphi_{1\mu},\psi_{0\mu},\psi_{1\mu},\omega_{0\mu},\omega_{1\mu}),(f_{1\mu},f_{2\mu},f_{3\mu}))$ como já feito anteriormente vale a identidade (2.13) para $\{\varphi_\mu,\psi_\mu,\omega_\mu\}$. Por continuidade no limite, tem-se

$\{\varphi_\mu,\psi_\mu,\omega_\mu\}\to\{\varphi,\psi,\omega\}$ em $[C[0,T];H^1(0,L)]^3$,

$\{\varphi'_\mu,\psi'_\mu,\omega'_\mu\}\to\{\varphi',\psi',\omega'\}$ em $[C[0,T];L^2(0,L)]^3$,

e assim teremos que a direita de (2.14) vale para $\{\varphi,\psi,\omega\}$; usando (2.19) e $q=x$ o lado esquerdo de (2.14) é valido para $\{\varphi,\psi,\omega\}$ e daí (2.14) é válido para soluções fracas.

Para provar (2.15), definimos a energia associado a $\{\varphi_\mu,\psi_\mu,\omega_\mu\}$ por

$\widetilde{E}_\mu(t)=\frac{1}{2}\{\rho_1|\varphi_{\mu t}|^2+\rho_2|\psi_{\mu t}|^2+\rho_1|\omega_{\mu t}|^2+k\|\varphi_\mu\|^2+b\|\psi_\mu\|^2+k_0\|\omega_\mu\|^2\}$.

Em $t=0$ temos:

$\widetilde{E}_\mu(0)=\frac{1}{2}\{\rho_1|\varphi_{1\mu}|^2+\rho_2|\psi_{1\mu}|^2+\rho_1|\omega_{1\mu}|^2+k\|\varphi_{0\mu}\|^2+b\|\psi_{0\mu}\|^2+k_0\|\omega_{0\mu}\|^2\}$.

Claramente

$$\widetilde{E}_\mu(0) \to \widetilde{E}(0) \tag{2.20}$$

onde $\widetilde{E}(0)$ é a energia associada a $\{\varphi, \psi, \omega\}$.

Como já mostrado

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{2}\int_0^T |\varphi_{\mu x}(L)|^2 dt + \frac{b}{2}\int_0^T |\psi_{\mu x}(L)|^2 dt + \frac{k_0}{2}\int_0^T |\omega_{\mu x}(L)|^2 dt \\
&\leq C\{\widetilde{E}_\mu(0) + \int_0^L [\int_0^T |f_{1\mu}|dt]^2 dx + \int_0^L [\int_0^T |f_{2\mu}|dt]^2 dx + \int_0^L [\int_0^T |f_{3\mu}|dt]^2 dx\}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Assim, de (2.19), (2.20) e $\{f_{1\mu}, f_{2\mu}, f_{3\mu}\} \to \{f_1, f_2, f_3\}$ em $L^1(0,T;L^2(0,L))$ e (2.21) segue a identidade (2.15).

Assim no limite tem-se que

$$\|\varphi_x(L)\|_{L^2(0,T)} \leq C\{|f_1|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |f_2|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |f_3|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \widetilde{E}(0)\},$$

$$\|\psi_x(L)\|_{L^2(0,T)} \leq C\{|f_1|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |f_2|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |f_3|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \widetilde{E}(0)\},$$

$$\|\omega_x(L)\|_{L^2(0,T)} \leq C\{|f_1|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |f_2|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |f_3|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \widetilde{E}(0)\}.$$

2.3 Solução ultrafraca

Passemos agora a discussão sobre a solução ultrafraca de

$$\begin{cases}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\
\rho_1\omega_{tt} - k_0[\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\
\varphi(0,t) = \psi(0,t) = \omega(0,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\
\varphi(L,t) = g_1(t), \quad \psi(L,t) = g_2(t), \quad \omega(L,t) = g_3(t), \quad t \in (0,T) \\
\varphi(.,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(.,0) = \varphi_1, \quad em \quad (0,L) \\
\psi(.,0) = \psi_0, \quad \psi_t(.,0) = \psi_1, \quad em \quad (0,L) \\
\omega(.,0) = w_0, \quad \omega_t(.,0) = w_1, \quad em \quad (0,L)
\end{cases} \tag{2.22}$$

Definição 2.2. *Dizemos que $\{\varphi, \psi, \omega\}$ é uma solução ultrafraca de (2.22) se satisfaz*

$$\begin{aligned}
&\int_Q (\varphi F_1 + \psi F_2 + \omega F_3)\ dx\ dt + \rho_1(\varphi_0, u_t(0)) - \rho_1 \langle \varphi_1, u(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\
&+\rho_2(\psi_0, v_t(0)) - \rho_2 \langle \psi_1, v(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \rho_1(\omega_0, z_t(0)) - \rho_1 \langle \omega_1, z(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\
&+k \int_0^T g_1(t) u_x(L) dt + b \int_0^T g_2(t) v_x(L) dt + k_0 \int_0^T g_3(t) z_x(L) dt \\
&= 0, \quad (*)
\end{aligned}$$

onde $\{u, v, z\}$ é solução de

$$\begin{cases}
\rho_1 u_{tt} - k(u_x + v + lz)_x - k_0 l[z_x - lu] = F_1, \\
\rho_2 v_{tt} - b v_{xx} + k(u_x + v + lz) = F_2, \\
\rho_1 z_{tt} - k_0[z_x - lu]_x + kl(u_x + v + lz) = F_3, \\
u(x,T) = u_t(x,T) = v(x,T) = v_t(x,T) = z(x,T) = z_t(x,T) = 0, \\
u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) = z(0,t) = z(L,t) = 0,
\end{cases} \tag{2.23}$$

na classe $C([0,T]; H^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,L))$

com $F_1, F_2, F_3 \in L^1(0,T; L^2(0,L))$.

Desta definição temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3. *Dados $T > 0$, $\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in L^2(0,L)$, $\varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in H^{-1}(0,L)$, $F_1, F_2, F_3 \in L^1(0,T; H^{-1}(0,L))$ e $g_1, g_2, g_3 \in L^2(0,T)$, existe única solução ultrafraca*

$$\{\varphi, \psi, \omega\} \in C([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(0,L)),$$

de (2.22). Além disso, existe uma constante, $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
&\rho_1 \|\varphi_t\|_{C(0,T;H^{-1}(0,L))} + \rho_2 \|\psi_t\|_{C(0,T;H^{-1}(0,L))} + \rho_1 \|\omega_t\|_{C(0,T;H^{-1}(0,L))} \\
&+\rho_1 \|\varphi\|_{C(0,T;L^2(0,L))} + \rho_2 \|\psi\|_{C(0,T;L^2(0,L))} + \rho_1 \|\omega\|_{C(0,T;L^2(0,L))} \\
&\leq C[k|\varphi_0| + b|\psi_0| + k_0|\omega_0| + \rho_1 \|\varphi_1\| + \rho_2 \|\psi_1\| + \rho_1 \|\omega_1\| \\
&+|g_1| + |g_2| + |g_3|]
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Demonstração: Considerando-se a mudança de variável

$$A(t) = u(T-t),$$

$$B(t) = v(T-t),$$

$$C(t) = z(T-t),$$

temos o problema equivalente a (2.23)

$$\begin{cases} \rho_1 A_{tt} - k(A_x + B + lC)_x - k_0 l[C_x - lA] = H_1, \\ \rho_2 B_{tt} - bB_{xx} + k(A_x + B + lC) = H_2, \\ \rho_1 C_{tt} - k_0[C_x - lA]_x + kl(A_x + B + lC) = H_3, \\ A(x,0) = B(x,0) = C(x,0) = A_t(x,0) = B_t(x,0) = C_t(x,0) = 0, \\ A(0,t) = B(0,t) = C(0,t) = A(L,t) = B(L,t) = C(L,t) = 0, \end{cases} \tag{2.25}$$

onde $H_i(t) = F_i(T-t), \quad i = 1,2,3.$

Supondo-se que

$$F_i \in L^1(0,T;L^2(0,L)), \tag{2.26}$$

então

$$H_i \in L^1(0,T;L^2(0,L)). \tag{2.27}$$

Logo (2.25) tem uma única solução

$$A, B, C \in C([0,T];H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T];L^2(0,L)) \tag{2.28}$$

e satisfaz a estimativa

$$\rho_1|A_t| + \rho_2|B_t| + \rho_1|C_t| + k\|A\| + b\|B\| + k_0\|C\| \leq C_1 \int_0^T (|H_1| + |H_2| + |H_3|)dt. \tag{2.29}$$

Além disso,

$$A_x(L), B_x(L), C_x(L) \in L^2(0,T), \tag{2.30}$$

e existe uma constante C_1 que verifica

$$\begin{aligned} &|A_x(L)|^2 + |B_x(L)|^2 + |C_x(L)|^2 \\ &\leq C_1(|H_1|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |H_2|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |H_3|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))}). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Decorre de (2.25),(2.28),(2.29),(2.30) e (2.31) que a solução $\{u, v, z\}$ do problema (2.23), com $F_1, F_2, F_3 \in L^1(0,T;L^2(0,L))$ verifica:

$$u, v, z \in C([0,T]; H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,L)) \quad e \quad u_x(L), v_x(L), z_x(L) \in L^2(0,T) \tag{2.32}$$

e satisfaz as estimativas

$$\begin{aligned} &\rho_1|u_t| + \rho_2|v_t| + \rho_1|z_t| + k\|u\| + b\|v\| + k_0\|z\| \\ &\leq C_1[(\int_0^T |F_1|dt)^2 + (\int_0^T |F_2|dt)^2 + (\int_0^T |F_3|dt)^2)dt] \end{aligned} \tag{2.33}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_0^T |u_x(L)|^2 dt + \int_0^T |v_x(L)|^2 dt + \int_0^T |z_x(L)|^2 dt \\ &\leq C_1[(\int_0^T |F_1|dt)^2 + (\int_0^T |F_2|dt)^2 + (\int_0^T |F_3|dt)^2)dt]. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Agora de

$$|u_x(L)| + |v_x(L)| + |z_x(L)| \leq C(|F_1|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |F_2|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |F_3|_{L^1(0,T;L^2(0,L))})$$

$$\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in L^2(0,L),\ \varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in H^{-1}(0,L) \text{ e } g_1, g_2, g_3 \in L^2(0,T) \text{ e de (2.32)},$$

temos que a expressão da Definição 2.2 assume a forma

$$\begin{aligned} &\int_Q (\varphi F_1 + \psi F_2 + \omega F_3)\ dx\ dt = -\rho_1(\varphi_0, u_t(0)) + \rho_1 \langle \varphi_1, u(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &-\rho_2(\psi_0, v_t(0)) + \rho_2 \langle \psi_1, v(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \rho_1(\omega_0, z_t(0)) + \rho_1 \langle \omega_1, z(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &-k \int_0^T g_1(t) u_x(L) dt - b \int_0^T g_2(t) v_x(L) dt - k_0 \int_0^T g_3(t) z_x(L) dt, \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde $\{u, v, z\}$ é a única solução de (2.23) na classe (2.32).

Definimos o operador linear

$$S : (L^1(0,T; L^2(0,L)))^3 \to \mathbb{R}$$

$$(F_1, F_2, F_3) \mapsto \langle S, (F_1, F_2, F_3) \rangle$$

pondo

$$\begin{aligned} &\langle S, (F_1, F_2, F_3) \rangle = -\rho_1(\varphi_0, u_t(0)) + \rho_1 \langle \varphi_1, u(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &-\rho_2(\psi_0, v_t(0)) + \rho_2 \langle \psi_1, v(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \rho_1(\omega_0, z_t(0)) + \rho_1 \langle \omega_1, z(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &-k \int_Q g_1(t) u_x(L) dt - b \int_Q g_2(t) v_x(L) dt - k_0 \int_Q g_3(t) z_x(L) dt \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde u, v, z é a única solução de (2.23) na classe (2.32). De (2.33) e (2.34) tem-se

$$|\langle S,(F_1,F_2,F_3)\rangle| \leq C\{k|\varphi_0| + b|\psi_0| + k_0|\omega_0| + \rho_1\|\varphi_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \rho_2\|\psi_1\|_{H^{-1}(0,L)}$$
$$+ \rho_1\|\omega_1\|_{H^{-1}(0,L)} + |g_1| + |g_2| + |g_3|\}\{\|F_1\| + \|F_2\| + \|F_3\|\},$$

de onde segue que S é contínuo, isto é

$$S \in ((L^1(0,T;L^2(0,L)))^3)' \tag{2.37}$$

e

$$\begin{aligned}&\|S\|_{((L^1(0,T;L^2(0,L)))^3)'} \leq \\ &C\{k|\varphi_0| + b|\psi_0| + k_0|\omega_0| + \rho_1\|\varphi_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \rho_2\|\psi_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \rho_1\|\omega_1\|_{H^{-1}(0,L)} \\ &+|g_1| + |g_2| + |g_3|\}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Agora em virtude do teorema de Riez podemos identificar S a um único elemento $(\varphi, \psi, \omega) \in (L^\infty(0,L;L^2(0,L)))^3$ de modo que

$$\begin{aligned}&\langle S,(F_1,F_2,F_3)\rangle = \int_0^T [(\varphi,F_1) + (\psi,F_2) + (\omega,F_3)]dt \\ &\|S\|_{((L^1(0,T;L^2(0,L)))^3)'} = \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} + \|\psi\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} + \|\omega\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Do exposto anterior dizemos que $\{\varphi, \psi, \omega\}$ é uma solução por transposição ou solução ultrafraca do problema (2.22) se $\{\varphi, \psi, \omega\} \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ e verifica (2.35).

De (2.36) e (2.39) $\{\varphi, \psi, \omega\} \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ obtida pela representação de Riez é solução por transposição de (2.22). Além disso de (2.38) e (2.39) temos

$$\begin{aligned}&\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} + \|\psi\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} + \|\omega\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \\ &\leq C\{k|\varphi_0| + b|\psi_0| + k_0|\omega_0| + \rho_1\|\varphi_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \rho_2\|\psi_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \rho_1\|\omega_1\|_{H^{-1}(0,L)} \\ &+|g_1| + |g_2| + |g_3|\}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Para concluir a demonstração do Teorema 2.3 precisamos de mais alguns resultados que serão feitos a seguir, após feitos todos os resultados necessários retomaremos o Teorema 2.3 para conclui-lo.

Dos resultados já obtido no Teorema 2.3 temos o seguinte resultado:

Teorema 2.4. *Sob as condições do Teorema 2.3, existe uma única solução* $\{\varphi, \psi, \omega\}$*, por transposição, do problema (2.22), a qual verifica a desigualdade em (2.40)*

Corolário 2.5. *A aplicação linear*

$$(L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L))^3 \times (L^2(0,T))^3 \to (L^\infty(0,T;L^2(0,L)))^3$$

$$((\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1), (g_1, g_2, g_3)) \mapsto \{\varphi, \psi, \omega\}$$

onde $\{\varphi, \psi, \omega\}$ *é a solução por transposição de (2.22), é contínua.*

Proposição 2.6. *O problema (2.22) com dados* $\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in H_0^1(0,L)$*,* $\varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in L^2(0,L)$ *e* $g_1, g_2, g_3 \in H_0^2(0,T)$ *admite uma única solução* $\varphi, \psi, \omega \in C([0,T];H^1(0,L)) \cap C^1([0,T];L^2(0,L))$ *que por sua vez é também solução por transposição, isto é, verifica a identidade (2.35).*

Demonstração: Seja $\theta \in C^\infty([0,L])$ tal que $\theta(0) = 0$ e $\theta(L) = 1$, considere $\theta(x)g_1(t)$, $\theta(x)g_2(t)$, $\theta(x)g_3(t)$. Assim,

$$\theta(L)g_1(t) = g_1(t), \quad \theta(L)g_2(t) = g_2(t), \quad \theta(L)g_3(t) = g_3(t). \tag{2.41}$$

Agora, consideremos o problema

$$\begin{aligned}
&\rho_1 u_{tt} - k(u_x + v + lz)_x - k_0 l[z_x - lu] \\
&= \rho_1 \theta(x) g_{1tt}(t) - k(\theta_x(x) g_1(t) + \theta(x) g_2(t) + l\theta(x) g_3(t))_x \\
&-k_0 l[\theta_x(x) g_3(t) - l\theta(x) g_1(t)] + \rho_2 v_{tt} - b v_{xx} + k(u_x + v + lz) \\
&= \rho_2 \theta(x) g_{2tt}(t) - b\theta_{xx} g_2(t) + k(\theta_x(x) g_1(t) + \theta(x) g_2(t) + l\theta(x) g_3(t)) \\
&+\rho_1 z_{tt} - k_0[z_x - lu]_x + kl(u_x + v + lz) \\
&= \rho_1 \theta(x) g_{3tt}(t) - k_0[\theta_x(x) g_3(t) - l\theta(x) g_1(t)]_x \\
&+kl(\theta_x(x) g_1(t) + \theta(x) g_2(t) + l\theta(x) g_3(t)) \\
&u(0,t) = v(0,t) = z(0,t) = u(L,t) = v(L,t) = z(L,t) = 0, \\
&u(.,0) = \varphi_0, v(.,0) = \psi_0, z(.,0) = \omega_0, u_t(.,0) = \varphi_1, v_t(.,0) = \psi_1, z_t(.,0) = \omega_1.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Como o lado direito das três primeiras equações de (2.42) pertence a $L^2(0,T;L^2(0,L))$, então (2.42) admite uma única solução

$$\{u, v, z\} \in C([0,T]; H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,L)) \tag{2.43}$$

e pondo-se

$$\begin{cases} \varphi = u + \theta g_1, \\ \psi = v + \theta g_2, \\ \omega = z + \theta g_3, \end{cases} \tag{2.44}$$

segue que

$$\varphi, \psi, \omega \in C([0,T]; H^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,L)). \tag{2.45}$$

De (2.42), (2.43) e (2.44) vem que:

$$\begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw)_x = 0, \end{array} \tag{2.46}$$

igualdades essas no sentido de $C([0,T]; H^{-1}(0,L))$. Também de (2.41) e (2.44)

$$\begin{cases} \varphi(L) = u(L) + \theta(L) g_1(t) = g_1(t), \\ \psi(L) = v(L) + \theta(L) g_2(t) = g_2(t), \\ \omega(L) = z(L) + \theta(L) g_3(t) = g_3(t), \\ \varphi(0) = \psi(0) = \omega(0) = 0. \end{cases} \tag{2.47}$$

Agora de (2.42), segue que:

$$\begin{cases} \varphi(z,0) = u(x,0) + \theta(x) g_1(0) = \varphi_0 \\ \psi(x,0) = v(x,0) + \theta(x) g_2(0) = \psi_0 \\ \omega(x,0) = z(x,0) + \theta(x) g_3(0) = \omega_0. \end{cases} \tag{2.48}$$

$$\begin{cases} \varphi_t(z,0) = u_t(x,0) + \theta(x) g_{1t}(0) = \varphi_1 \\ \psi_t(x,0) = v_t(x,0) + \theta(x) g_{2t}(0) = \psi_1 \\ \omega_t(x,0) = z_t(x,0) + \theta(x) g_{3t}(0) = \omega_1 \end{cases} \tag{2.49}$$

De (2.46), (2.47), (2.48) e (2.49) temos provado que $\{\varphi, \psi, \omega\}$ dada em (2.44) é solução de (2.22) na classe (2.45).

Provaremos que $\{\varphi, \psi, \omega\}$ é solução por transposição. Com efeito, provaremos que se $F_1, F_2, F_3 \in L^1(0,T;L^2(0,L))$, então

$$\begin{aligned}&\int_Q \varphi F_1 + \psi F_2 + \omega F_3 \; dx \; dt = -\rho_1(\varphi_0, u_t(0)) + \rho_1 \left\langle \varphi_1, u(0) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &-\rho_2(\psi_0, v_t(0)) + \rho_2 \left\langle \psi_1, v(0) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \rho_1(\omega_0, z_t(0)) + \rho_1 \left\langle \omega_1, z(0) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &-k \int_0^T g_1(t) u_x(L) dt - b \int_0^T g_2(t) v_x(L) dt - k_0 \int_0^T g_3(t) z_x(L) dt,\end{aligned} \tag{2.50}$$

onde $\{u, v, z\}$ é solução de (2.23) na classe

$$C([0,T]; H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,L)). \tag{2.51}$$

Mas, como $W^{1,1}(0,T;L^2(0,L))$ é denso em $L^1(0,T;L^2(0,L))$ existem

$(F_{1\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}, \quad (F_{2\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}, \quad (F_{3\nu})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset W^{1,1}(0,T;L^2(0,L))$ tal que:

$$\begin{aligned} &F_{1\nu} \to F_1, \\ &F_{2\nu} \to F_2, \\ &F_{3\nu} \to F_3. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Consideremos a sequência de problemas regulares:

$$\begin{cases} \rho_1 u_{\nu tt} - k(u_{\nu x} + v_\nu + l z_\nu)_x - k_0 l[z_{\nu x} - l u_\nu] = F_{\nu 1}, \\ \rho_2 v_{\nu tt} - b v_{\nu xx} + k(u_{\nu x} + v_\nu + l z_\nu) = F_{\nu 2}, \\ \rho_1 z_{\nu tt} - k_0[z_{\nu x} - l u_\nu]_x + kl(u_{\nu x} + v_\nu + l z_\nu) = F_{\nu 3}, \\ u_\nu(x,T) = u_{\nu t}(x,T) = v_\nu(x,T) = v_{\nu t}(x,T) = z_\nu(x,T) = z_{\nu t}(x,T) = 0, \\ u_\nu(0,t) = u_\nu(L,t) = v_\nu(0,t) = v_\nu(L,t) = z_\nu(0,t) = z_\nu(L,t) = 0, \end{cases} \tag{2.53}$$

que tem solução em $C([0,T], H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(0,L))$.

Além disso, em (2.53) se trocarmos u_ν por $u_\nu - u$, v_ν por $v_\nu - v$, z_ν por $z_\nu - z$ e $F_{1\nu}$ por $F_{1\nu} - F_1$, $F_{2\nu}$ por $F_{2\nu} - F_2$, $F_{3\nu}$ por $F_{3\nu} - F_3$ temos que a solução de (2.53) neste caso pertence a $C([0,T], H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,L))$ e verificando

$$\begin{aligned}&\rho_1 |u_{\nu t} - u_t| + \rho_2 |v_{\nu t} - v_t| + \rho_1 |z_{\nu t} - z_t| + k\|u_\nu - u\| + b\|v_\nu - v\| + k_0\|z_\nu - z\| \\ &\leq C(|F_{1\nu} - F_1|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |F_{2\nu} - F_2|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |F_{3\nu} - F_3|_{L^1(0,T;L^2(0,L))})\end{aligned} \tag{2.54}$$

e

$$\begin{aligned}&|u_{\nu x}(L) - u_x(L)| + |v_{\nu x}(L) - v_x(L)| + |z_{\nu x}(L) - z_x(L)| \\ &\leq C(|F_{1\nu} - F_1|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |F_{2\nu} - F_2|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + |F_{3\nu} - F_3|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}).\end{aligned} \tag{2.55}$$

De (2.52), (2.54) e (2.55) concluímos que

$$u_\nu \to u, \quad v_\nu \to v, \quad z_\nu \to z \ \ em \quad C([0,T]; H_0^1(0,L)), \tag{2.56}$$

$$u_{\nu t} \to u_t, \quad v_{\nu t} \to v_t, \quad z_{\nu t} \to z_t \ \ em \quad C([0,T]; L^2(0,L)), \tag{2.57}$$

$$u_{\nu x}(L) \to u_x(L), \quad v_{\nu x}(L) \to v_x(L), \quad z_{\nu x}(L) \to z_x(L) \ \ em \quad L^2(0,T). \tag{2.58}$$

de (2.46) e como $u_\nu, v_\nu, z_\nu \in C([0,T]; H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(0,L))$, então

$$\begin{array}{l} \langle \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi), u_\nu \rangle = 0, \\ \langle \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw), v_\nu \rangle = 0, \\ \langle \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw)_x, z_\nu \rangle = 0. \end{array} \tag{2.59}$$

Analogamente ao feito para obter o problema adjunto temos

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_Q \varphi F_{1\nu} + \psi F_{2\nu} + \omega F_{3\nu} \ dx \ dt = -\rho_1(\varphi_0, u_{\nu t}(0)) + \rho_1 \left\langle \varphi_1, u_\nu(0) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ -\rho_2(\psi_0, v_{\nu t}(0)) + \rho_2 \left\langle \psi_1, v_\nu(0) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \rho_1(\omega_0, z_{\nu t}(0)) + \rho_1 \left\langle \omega_1, z_\nu(0) \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ \displaystyle -k \int_Q g_1(t) u_{\nu x}(L) dt - b \int_Q g_2(t) v_{\nu x}(L) dt - k_0 \int_Q g_3(t) z_{\nu x}(L) dt \end{array} \tag{2.60}$$

de (2.56), (2.57), (2.58) e (2.60) no limite temos (2.50).

Provaremos que a solução $\{\varphi, \psi, \omega\}$ por transposição de (2.22) sujeito aos dados: $\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in L^2(0,L)$, $\varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in H^{-1}(0,L)$, $g_1, g_2, g_3 \in L^2(0,T)$, pertencente a classe $C([0,T]; L^2(0,L))$.

Com efeito, sejam

$(\varphi_{0\mu})_{\mu\in\mathbb{N}}, \quad (\psi_{0\mu})_{\mu\in\mathbb{N}}, \quad (\omega_{0\mu})_{\mu\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(0,L)$

$(\varphi_{1\mu})_{\mu\in\mathbb{N}}, \quad (\psi_{1\mu})_{\mu\in\mathbb{N}}, \quad (\omega_{1\mu})_{\mu\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,L)$

$(g_{1\mu})_{\mu\in\mathbb{N}}, \quad (g_{2\mu})_{\mu\in\mathbb{N}}, \quad (g_{3\mu})_{\mu\in\mathbb{N}} \subset H_0^2(0,T)$

tais que

$$\begin{array}{l} \varphi_{0\mu} \to \varphi_0 \quad em \quad L^2(0,L) \\ \psi_{0\mu} \to \psi_0 \quad em \quad L^2(0,L) \\ \omega_{0\mu} \to \omega_0 \quad em \quad L^2(0,L) \\ \varphi_{1\mu} \to \varphi_1 \quad em \quad H^{-1}(0,L) \\ \psi_{1\mu} \to \psi_1 \quad em \quad H^{-1}(0,L) \\ \omega_{1\mu} \to \omega_1 \quad em \quad H^{-1}(0,L) \\ g_{1\mu} \to g_1 \quad em \quad L^2(0,T) \\ g_{2\mu} \to g_2 \quad em \quad L^2(0,T) \\ g_{3\mu} \to g_3 \quad em \quad L^2(0,T). \end{array} \tag{2.61}$$

Para cada $\mu \in \mathbb{N}$ consideremos o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1\varphi_{\mu tt} - k(\varphi_{\mu x} + \psi + lw_\mu)_x - k_0 l(w_{\mu x} - l\varphi_\mu) = 0 \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2\psi_{\mu tt} - b\psi_{\mu xx} + k(\varphi_{\mu x} + \psi_\mu + lw_\mu) = 0 \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1 w_{\mu tt} - k_0(w_{\mu x} - l\varphi_\mu)_x + kl(\varphi_{\mu x} + \psi_\mu + lw_\mu) = 0 \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \varphi_\mu(0,t) = \psi_\mu(0,t) = w_\mu(0,t) = 0, \quad t\in(0,T) \\ \varphi_\mu(L,t) = g_{1\mu}(t), \quad \phi_\mu(L,t) = g_{2\mu}(t), \quad w_\mu(L,t) = g_{3\mu}(t), \quad t \in (0,T) \\ \varphi_\mu(.,0) = \varphi_{0\mu}, \quad \varphi_{\mu t}(.,0) = \varphi_{1\mu} \quad em \quad (0,L) \\ \psi_\mu(.,0) = \psi_{0\mu}, \quad \psi_{\mu t}(.,0) = \psi_{1\mu} \quad em \quad (0,L) \\ w_\mu(.,0) = w_{0\mu}, \quad w_{\mu t}(.,0) = w_{1\mu} \quad em \quad (0,L). \end{array} \right. \tag{2.62}$$

a solução $\{\varphi_\mu, \psi_\mu, \omega_\mu\}$ de (2.62) está na classe

$(C([0,T];H^1(0,L)) \cap C^1([0,T];L^2(0,L)))^3$.

Além disso, $\varphi_\mu, \psi_\mu, \omega_\mu$ é solução por transposição de (2.62).

Decorre então que $(\varphi_\mu - \varphi)$, $(\psi_\mu - \psi)$, $(\omega_\mu - \omega)$ é solução por transposição de (2.22) com dados $(\varphi_{0\mu} - \varphi_0)$, $(\psi_{0\mu} - \psi_0)$, $(\omega_{0\mu} - \omega_0)$, $(\varphi_{1\mu} - \varphi_1)$, $(\psi_{1\mu} - \psi_1)$, $(\omega_{1\mu} - \omega_1)$, $(g_{1\mu} - g_1)$, $(g_{2\mu} - g_2)$, $(g_{3\mu} - g_3)$ e temos já mostrado que (ver (2.40))

$$\begin{array}{l} \|\varphi_\mu - \varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} + \|\psi_\mu - \psi\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} + \|\omega_\mu - \omega\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \\ \leq C\{k|\varphi_{0\mu} - \varphi_0|_{L^2(0,L)} + b|\psi_{0\mu} - \psi_0|_{L^2(0,L)} + k_0|\omega_{0\mu} - \omega_0|_{L^2(0,L)} \\ +\rho_1|\varphi_{1\mu} - \varphi_1|_{H^{-1}(0,L)} + \rho_2|\psi_{1\mu} - \psi_1|_{H^{-1}(0,L)} + \rho_1|\omega_{1\mu} - \omega_1|_{L^2(0,L)} \\ +|g_{1\mu} - g_1|_{L^2(0,T)} + |g_{2\mu} - g_2|_{L^2(0,T)} + |g_{3\mu} - g_3|_{L^2(0,T)}. \end{array} \tag{2.63}$$

Desta desigualdade e das convergências em (2.61) vem que:

$$\begin{array}{l} \varphi_\mu \to \varphi \quad em \quad L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \\ \psi_\mu \to \psi \quad em \quad L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \\ \omega_\mu \to \omega \quad em \quad L^\infty(0,T;L^2(0,L)), \end{array} \tag{2.64}$$

o que implica que

$$\begin{array}{llll}(\varphi_\mu) & é & de & Cauchy\ em\ L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \\ (\psi_\mu) & é & de & Cauchy\ em\ L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \\ (\omega_\mu) & é & de & Cauchy\ em\ L^\infty(0,T;L^2(0,L))\end{array} \tag{2.65}$$

como

$$\begin{array}{l}(\varphi_\mu) \subset C([0,T];L^2(0,L)) \\ (\psi_\mu) \subset C([0,T];L^2(0,L) \\ (\omega_\mu) \subset C([0,T];L^2(0,L)\end{array} \tag{2.66}$$

e nestes espaços, as topologias das normas

$\|.\|_{C([0,T];L^2(0,L))}$ e $\|.\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$

são equivalentes resulta que:

$(\varphi_\mu), (\psi_\mu), (\omega_\mu)$ é de cauchy em $C([0,T];L^2(0,L)$ e portanto

$$\begin{array}{lll}\varphi_\mu \to X & em & C([0,T];L^2(0,L)) \\ \psi_\mu \to Y & em & C([0,T];L^2(0,L)) \\ \omega_\mu \to Z & em & C([0,T];L^2(0,L)).\end{array} \tag{2.67}$$

Pela unicidade do limite em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ de (2.64) e (2.67) obtemos que

$$\begin{array}{l}X = \varphi \\ Y = \psi \\ Z = \omega,\end{array} \tag{2.68}$$

o que prova

$$\{\varphi, \psi, \omega\} \in (C([0,T];L^2(0,L)))^3. \tag{2.69}$$

Mostremos agora que $\varphi_t, \psi_t, \omega_t \in C([0,T];H^{-1}(0,L))$ ou seja

$$\varphi, \psi, \omega \in C^1([0,T];H^{-1}(0,L)). \tag{2.70}$$

De fato, consideremos o espaço

$(W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L)))^3 = \{(F_1,F_2,F_3); (F_1,F_2,F_3), (F_1',F_2',F_3')$

$\in (L^1(0,T;H_0^1(0,L)))^3 \quad e \quad (F_1(0),F_2(0),F_3(0)) = (0,0,0) = (F_1(T),F_2(T),F_3(T))\}.$

Como:

$$(D(0,T;H_0^1(0,L)))^3 \subset (W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L)))^3 \subset (L^1(0,T;H_0^1(0,L)))^3$$

e $D(0,T;H_0^1(0,L)))^3$ é denso em $(L^1(0,T;H_0^1(0,L)))^3$, então

$$(W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L)))^3 \quad \textit{é} \quad \textit{denso} \quad \textit{em} \quad (L^1(0,T;H_0^1(0,L)))^3. \tag{2.71}$$

Definimos:

$$\begin{aligned} &\mathbb{T} : (W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L)))^3 \to \mathbb{R} \\ &(F_1,F_2,F_3) \mapsto \mathbb{T}(F_1,F_2,F_3) = -S(F_1',F_2',F_3') \end{aligned} \tag{2.72}$$

onde S é o funcional definido em (2.36) isto é

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}(F_1,F_2,F_3) = -S(F_1',F_2',F_3') = +\rho_1(\varphi_0,u_t(0)) - \rho_1\left\langle\varphi_1,u(0)\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} \\ &+\rho_2(\psi_0,v_t(0)) - \rho_2\left\langle\psi_1,v(0)\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} + \rho_1(\omega_0,z_t(0)) - \rho_1\left\langle\omega_1,z(0)\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} \\ &+k\int_Q g_1(t)u_x(L)dt + b\int_Q g_2(t)v_x(L)dt + k_0\int_Q g_3(t)z_x(L)dt \end{aligned} \tag{2.73}$$

onde $\{u,v,z\}$ é solução de

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1 u_{tt} - k(u_x+v+lz)_x - k_0 l[z_x - lu] = F_1', \\ \rho_2 v_{tt} - bv_{xx} + k(u_x+v+lz) = F_2', \\ \rho_1 z_{tt} - k_0[z_x - lu]_x + kl(u_x+v+lz) = F_3', \\ u(x,T) = u_t(x,T) = v(x,T) = v_t(x,T) = z(x,T) = z_t(x,T) = 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) = z(0,t) = z(L,t) = 0, \end{array}\right. \tag{2.74}$$

na classe $C([0,T],H^1(0,L)) \cap C^1([0,T];L^2(0,L))$.

Suponhamos, por um momento, que exista $C>0$ tal que

$$\begin{aligned} &|\mathbb{T}(F_1,F_2,F_3)| = |-S(F_1',F_2',F_3')| \\ &\leq C\{k|\varphi_0| + b|\psi_0| + k_0|\omega_0| + \rho_1\|\varphi_1\| + \rho_2\|\psi_1\| + \rho_1\|\omega_1\| \\ &+|g_1| + |g_2| + |g_3|\}\{\|F_1\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|F_2\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|F_3\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\} \\ &\forall(F_1,F_2,F_3) \in (W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L)))^3. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Da linearidade de $\mathbb{T}$ e de (2.75) resulta que $\mathbb{T}$ é contínua quando induzimos em $(W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L)))^3$ a topologia de $(L^1(0,T;H_0^1(0,L)))^3$. Assim de (2.71) podemos estender $\mathbb{T}$ de maneira única, à aplicação linear e contínua

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathbb{T}} : (L^1(0,T;H_0^1(0,L)))^3 \to \mathbb{R} \\ &(F_1,F_2,F_3) \mapsto \widetilde{T}(F_1,F_2,F_3) \end{aligned} \tag{2.76}$$

isto é, $\widetilde{\mathbb{T}} \in ((L^1(0,T;H_0^1(0,L)))^3)' = (L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L)))^3$, com:

$$\widetilde{\mathbb{T}}(F_1,F_2,F_3) = -S(F_1',F_2',F_3'), \quad \forall (F_1,F_2,F_3) \in (W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L)))^3. \tag{2.77}$$

Além disso, se $(F_1,F_2,F_3) \in (L^1(0,T;H_0^1(0,L)))^3$
e $(F_{1\nu},F_{2\nu},F_{3\nu}) \in (W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L)))^3$ é tal que

$$\begin{array}{l} F_{1\nu} \to F_1 \\ F_{2\nu} \to F_2 \\ F_{3\nu} \to F_3, \end{array} \tag{2.78}$$

então

$$\widetilde{\mathbb{T}}(F_1,F_2,F_3) = \lim_{\nu\to\infty} T(F_{1\nu},F_{2\nu},F_{3\nu}). \tag{2.79}$$

De (2.75), para cada $\nu \in \mathbb{N}$ podemos escrever que

$$\begin{array}{l} |\widetilde{\mathbb{T}}(F_{1\nu},F_{2\nu},F_{3\nu})| \leq C\{k|\varphi_0| + b|\psi_0| + k_0|\omega_0| + \rho_1\|\varphi_1\| + \rho_2\|\psi_1\| + \rho_1\|\omega_1\| \\ +|g_1| + |g_2| + |g_3|\}\{\|F_{1\nu}\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|F_{2\nu}\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|F_{3\nu}\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\} \end{array} \tag{2.80}$$

e de (2.78) (2.79) e (2.80) no limite, obtemos:

$$\begin{array}{l} |\widetilde{\mathbb{T}}(F_1,F_2,F_3)| \leq C\{k|\varphi_0| + b|\psi_0| + k_0|\omega_0| + \rho_1\|\varphi_1\| + \rho_2\|\psi_1\| + \rho_1\|\omega_1\| \\ +|g_1| + |g_2| + |g_3|\}\{\|F_1\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|F_2\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|F_3\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\} \\ \forall (F_1,F_2,F_3) \in (L^1(0,T;H_0^1(0,L)))^3. \end{array} \tag{2.81}$$

De (2.81) resulta que

$$\begin{array}{l} |\widetilde{\mathbb{T}}|_{(L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L)))^3} \leq C\{k|\varphi_0| + b|\psi_0| + k_0|\omega_0| + \rho_1\|\varphi_1\| + \rho_2\|\psi_1\| + \rho_1\|\omega_1\| \\ +|g_1| + |g_2| + |g_3|\}. \end{array} \tag{2.82}$$

Consideremos $F_1 = \alpha\theta$, $F_2 = \beta\theta$, $F_3 = \gamma\theta$, onde $\alpha,\beta,\gamma \in H_0^1(0,L)$, $\theta \in D(0,T)$. Então $F_1,F_2,F_3 \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L))$ e de (2.35) e (2.73) vem que

$$\begin{array}{l} \widetilde{\mathbb{T}}(F_1,F_2,F_3) = T(F_1,F_2,F_3) \\ = -\displaystyle\int_0^T (\varphi,F_1')_{L^2(0,L)}dt - \int_0^T (\psi,F_2')_{L^2(0,L)}dt - \int_0^T (\omega,F_3')_{L^2(0,L)}dt \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{l} \langle \widetilde{\mathbb{T}}, (\alpha\theta,\beta\theta,\gamma\theta)\rangle \\ = -\displaystyle\int_0^T (\varphi,\alpha)_{L^2(0,L)}\theta' dt - \int_0^T (\psi,\beta)_{L^2(0,L)}\theta' dt - \int_0^T (\omega,\gamma)_{L^2(0,L)}\theta' dt, \end{array}$$

logo,

$$\int_0^T \langle \widetilde{\mathbb{T}}, (\alpha, \beta, \gamma) \rangle \theta dt = -\int_0^T \langle \varphi, \alpha \rangle \theta' dt - \int_0^T \langle \psi, \beta \rangle \theta' dt - \int_0^T \langle \omega, \gamma \rangle \theta' dt$$

isto é,

$$\langle \int_0^T \widetilde{\mathbb{T}} \theta(t) dt, (\alpha, \beta, \gamma) \rangle = \langle -\int_0^T \varphi \theta' dt, \alpha \rangle + \langle -\int_0^T \psi \theta' dt, \beta \rangle + \langle -\int_0^T \omega \theta' dt, \gamma \rangle$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in H_0^1(0, L) \quad e \quad \forall \theta \in D(0, T)$.

Disto, conclui-se que:

$$\widetilde{\mathbb{T}} = (\varphi', \psi', \omega') \quad em \quad (D'(0, T, H^{-1}(0, L)))^3 \tag{2.83}$$

o que implica que:

$$(\varphi', \psi', \omega') \in (L^\infty(0, T, H^{-1}(0, L)))^3. \tag{2.84}$$

De (2.82), (2.83) e (2.84) temos que

$$\begin{aligned} &\|(\varphi', \psi', \omega')\|_{(L^\infty(0,T,H^{-1}(0,L)))^3} \\ &= \|\varphi'\|_{L^\infty(0,T,H^{-1}(0,L))} + \|\psi'\|_{L^\infty(0,T,H^{-1}(0,L))} + \|\omega'\|_{L^\infty(0,T,H^{-1}(0,L))} \\ &\leq C\{k|\varphi_0| + b|\psi_0| + k_0|\omega_0| + \rho_1\|\varphi_1\| + \rho_2\|\psi_1\| + \rho_1\|\omega_1\| + |g_1| + |g_2| + |g_3|\}. \end{aligned} \tag{2.85}$$

As propriedades (2.84) e (2.85) são verificadas para toda solução $\{\varphi, \psi, \omega\}$ por transposição, de (2.22) e notando que $(\varphi_\mu - \varphi)$, $(\psi_\mu - \psi)$, $(\omega_\mu - \omega)$ é solução por transposição de (2.22) com dados $(\varphi_{0\mu} - \varphi_0), (\psi_{0\mu} - \psi_0), (\omega_{0\mu} - \omega_0), (\varphi_{1\mu} - \varphi_1)$, $(\psi_{1\mu} - \psi_1), (\omega_{1\mu} - \omega_1), (g_{1\mu} - g_1), (g_{2\mu} - g_2), (g_{3\mu} - g_3)$ são sucessões introduzidas em (2.61), resulta de (2.85) que:

$$\begin{aligned} &\|\varphi'_\mu - \varphi'\| + \|\psi'_\mu - \psi'\| + \|\omega'_\mu - \omega'\| \\ &\leq C\{k|\varphi_{0\mu} - \varphi_0| + b|\psi_{0\mu} - \psi_0| + k_0|\omega_{0\mu} - \omega_0| + \rho_1\|\varphi_{1\mu} - \varphi_1\| + \rho_2\|\psi_{1\mu} - \psi_1\| \\ &+\rho_1\|\omega_{1\mu} - \omega_1\| + |g_{1\mu} - g_1| + |g_{2\mu} - g_2| + |g_{3\mu} - g_3|\} \to 0. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Portanto:

$$\begin{array}{lll} \varphi'_\mu \to \varphi' & em & L^\infty(0, T; H^{-1}(0, L)) \\ \psi'_\mu \to \psi' & em & L^\infty(0, T; H^{-1}(0, L)) \\ \omega'_\mu \to \omega' & em & L^\infty(0, T; H^{-1}(0, L)), \end{array} \tag{2.87}$$

e como

$$\begin{array}{l} (\varphi'_\mu) \subset C([0, T]; L^2(0, L)) \subset C([0, T]; H^{-1}(0, L)) \\ (\psi'_\mu) \subset C([0, T]; L^2(0, L)) \subset C([0, T]; H^{-1}(0, L)) \\ (\omega'_\mu) \subset C([0, T]; L^2(0, L)) \subset C([0, T]; H^{-1}(0, L)) \end{array} \tag{2.88}$$

resulta de (2.87) (conforme feito para $\{\varphi, \psi, \omega\}$) que $\{\varphi', \psi', \omega'\} \in C([0,T]; H^{-1}(0,L))$, o que prova (2.70).

Desta forma, para obtermos (2.70) é suficiente provarmos (2.75).

Para isso, consideremos o seguinte Lema:

Lema 2.7. *A solução $\{u,v,z\}$ de (2.74) verifica*

$$\begin{array}{l} k\|u_0\| + b\|v_0\| + k_0\|z_0\| + \rho_1|u_1| + \rho_2|v_1| + \rho_1|z_1| + |u_x(L)| + |v_x(L)| + |z_x(L)| \\ \leq C(\|F_1\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))} + \|F_2\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))} + \|F_3\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))}). \end{array} \tag{2.89}$$

Demonstração: Consideremos o problema:

$$\begin{cases} \rho_1 X_{tt} - k(X_x + Y + lZ)_x - k_0 l[Z_x - lX] = F_1, \\ \rho_2 Y_{tt} - bY_{xx} + k(X_x + Y + lZ) = F_2, \\ \rho_1 Z_{tt} - k_0[Z_x - lX]_x + kl(X_x + Y + lZ) = F_3, \\ X(x,T) = X_t(x,T) = Y(x,T) = Y_t(x,T) = Z(x,T) = Z_t(x,T) = 0, \\ X(0,t) = X(L,t) = Y(0,t) = Y(L,t) = Z(0,t) = Z(L,t) = 0, \end{cases} \tag{2.90}$$

com $F_1, F_2, F_3 \in W_0^{1,1}(0,T; H_0^1(0,L))$

(2.90) tem uma única solução forte

$$(X,Y,Z) \in (C([0,T]; H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(0,L)))^3 \tag{2.91}$$

e

$$\begin{array}{l} k\|X'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))} + b\|Y'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))} + k_0\|Z'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))} \\ +\rho_1|X|_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))} + \rho_2|Y|_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))} \\ +\rho_1|Z|_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))} \\ \leq C(\|F_1\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))} + \|F_2\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))} + \|F_3\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))}). \end{array} \tag{2.92}$$

Provemos que

$$u = X', v = Y', z = Z' \tag{2.93}$$

é solução fraca de (2.74).

Com efeito, de (2.90) as soluções das equações $(2.90)_1, (2.90)_2, (2.90)_3$ estão em $C([0,T]; L^2(0,L)) \hookrightarrow C([0,T]; H^{-1}(0,L))$

isto implica que a derivada das soluções de $(2.90)_1, (2.90)_2, (2.90)_3$ pertence á

$D'([0,T];H^{-1}(0,L))$ isto é, as soluções de $(2.74)_1, (2.74)_2, (2.74)_3$

pertence a $D'([0,T];H^{-1}(0,L))$.

Agora como $u, v, z \in C([0,T];H_0^1(0,L))$ e $F_1', F_2', F_3' \in L^1(0,T;H_0^1(0,L))$ obtemos que as soluções de

$$(2.74)_1, (2.74)_2, (2.74)_3 \ \ \textit{estão} \ \ \textit{em} \ \ L^1(0,T;H^{-1}(0,L)). \tag{2.94}$$

Note que

$u = X', v = Y', z = Z' \in C([0,T];H_0^1(0,L)),$

$u' = X'', v' = Y'', z' = Z'' \in C([0,T];L^2(0,L)),$

tendo sentido $u(T), u'(T), v(T), v'(T), z(T), z'(T)$.

Daí, de (2.90), obtemos

$$\begin{cases} u(x,T) = X'(x,T) = 0, \\ v(x,T) = Y'(0,T) = 0, \\ z(x,T) = Z'(x,T) = 0, \\ u'(x,T) = X''(x,T) = 0, \\ v'(x,T) = Y''(x,T) = 0, \\ z'(x,T) = Z''(x,T) = 0. \end{cases} \tag{2.95}$$

pois $X(x,T) = Y(x,T) = Z(x,T) = 0$ e $F_1(T) = F_2(T) = F_3(T) = 0$, já que $F_1 = F_2 = F_3 \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(0,L))$ de (2.94) e (2.95) e do fato de

$$\begin{cases} u(0,t) = X'(0,t) = 0, \\ v(x,T) = Y'(0,T) = 0 \\ z(0,t) = Z'(0,t) = 0, \\ u(L,t) = X'(L,t) = 0, \\ v(L,t) = Y'(L,t) = 0, \\ z(L,t) = Z'(L,t) = 0. \end{cases} \tag{2.96}$$

(u, v, z) dadas em (2.93) é solução de (2.74) temos:

$$\begin{aligned}
&\rho_1|u'(0)| + \rho_2|v'(0)| + \rho_1|z'(0)| + k\|u(0)\| + b\|v(0)\| + k_0\|z(0)\| \\
&= \rho_1|X''(0)| + \rho_2|Y''(0)| + \rho_1|Z''(0)| + k\|X'(0)\| + b\|Y'(0)\| + k_0\|Z'(0)\| \\
&= |k(X_x + Y + lZ)_x(0) + k_0 l[Z_x - lX](0)| + |bY_{xx}(0) - (X_x + Y + lZ)(0)| \\
&+|k_0[Z_x - lX]_x(0) - kl(X_x + Y + lZ)(0)| + k\|X'(0)\| + b\|Y'(0)\| + k_0\|Z'(0)\| \\
&\leq C(\rho_1\|X(0)\| + \rho_2\|Y(0)\| + \rho_1\|Z(0)\| + k\|X'(0)\| + b\|Y'(0)\| + k_0\|Z'(0)\|).
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Da identidade anterior e de (2.92), obtemos

$$\begin{aligned}
&\rho_1|u'(0)| + \rho_2|v'(0)| + \rho_1|z'(0)| + k\|u(0)\| + b\|v(0)\| + k_0\|z(0)\| \\
&\leq C\{\|F_1\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))} + \|F_2\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))} + \|F_3\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))}\}.
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Multiplicando-se $(2.74)_1$, $(2.74)_2$ e $(2.74)_3$ por xu, xv, e xz, respectivamente, e integrando-se por partes eliminamos a derivada em relação a t de F_1, F_2, F_3 e análogo ao feito para a desigualdade direta e trocando $u' = X''$, $v' = Y''$, $z' = Z''$ e usando o sistema (2.90) teremos

$$\begin{aligned}
&|u_x(L)| + |v_x(L)| + |z_x(L)| \\
&\leq C\{\|F_1\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))} + \|F_2\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))} + \|F_3\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,L))}\}
\end{aligned} \tag{2.99}$$

portanto de (2.98) e (2.99) temos o desejado em (2.89) o que conclui a prova do lema 2.7.

Agora de (2.73) usando Schwarz e (2.89) obtemos a desigualdade em (2.75).

Agora de (2.40), (2.69), (2.70) e (2.85) concluimos a prova do Teorema 2.3.

2.4 Desigualdade de Carleman e desigualdade de observabilidade

O objetivo central deste capítulo é encontrar o controle na fronteira para o seguinte sistema de Bresse

$$\left\{\begin{array}{l}\rho_1\varphi_{tt}-k(\varphi_x+\psi+lw)_x+k_0l(w_x-l\varphi)=0 \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)=0 \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \rho_1 w_{tt}-k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)=0 \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \varphi(0,t)=\psi(0,t)=w(0,t)=0, \quad t\in(0,T)\\ \varphi(L,t)=g_1(t), \quad \phi(L,t)=g_2(t), \quad w(L,t)=g_3(t), \quad t\in(0,T)\\ \varphi(.,0)=\varphi_0, \quad \varphi_t(.,0)=\varphi_1 \quad em \quad (0,L)\\ \psi(.,0)=\psi_0, \quad \psi_t(.,0)=\psi_1 \quad em \quad (0,L)\\ w(.,0)=w_0, \quad w_t(.,0)=w_1 \quad em \quad (0,L).\end{array}\right. \tag{2.100}$$

Para o controle na fronteira tomamos os dados iniciais $(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,w_0,w_1)\in(L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L))^3$ e g_1,g_2,g_3 são controles tomados em $L^2(0,T)$.

O problema de controlabilidade exata na fronteira é encontrar controles g_1,g_2,g_3 tal que no tempo T nos dá

$\varphi(T)=\varphi_t(T)=\psi(T)=\psi_t(T)=w(T)=w_t(T)=0.$

Usaremos a estimativa de Carleman e o método HUM, para obter o controle na fronteira.

Para o controle na fronteira usaremos o método HUM, para isso precisamos obter uma estimativa de observabilidade do tipo

$E(0)\leq\displaystyle\int_0^T(|u_x(L)|^2+|v_x(L)|^2+|z_x(L)|^2)\,dt$

para o sistema (2.23) com $F_1=F_2=F_3=0$, para tal tipo de observabilidade usaremos a estimativa de Carleman ao qual começaremos o procedimento para encontrá-la.

Como já demonstrado temos os seguintes teoremas

Teorema 2.8. *O problema (2.22) com $g_1,g_2,g_3=0$, $\{\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,w_0,w_1\}\in(H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\times H_0^1(0,L))^3$, possui uma única solução forte $\{\varphi,\psi,w\}$ na classe $C([0,T];H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))\cap C^1([0,T];L^2(0,L))$.*

Teorema 2.9. *O problema (2.22) com $g_1,g_2,g_3=0$, $\{\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,w_0,w_1\}\in(H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3$, possui uma única solução fraca $\{\varphi,\psi,w\}$ na classe $C([0,T];H_0^1(0,L))\cap C^1([0,T];L^2(0,L))$.*

Consideremos funções $u, v, z \in L^2(-T, T; L^2(0, L))$ com
$u_x, v_x, z_x \in L^2(-T, T; L^2(0, L))$ tais que

$$\begin{array}{l} L_1(u,v,z) = \rho_1 u_{tt} - k u_{xx} + kv + klz \quad \in L^2(-T,T;L^2(0,L)) \\ L_2(u,v,z) = \rho_2 v_{tt} - b v_{xx} \quad \in L^2(-T,T;L^2(0,L)) \\ L_3(u,v,z) = \rho_1 z_{tt} - k_0 z_{xx} + kl^2 u \quad \in L^2(-T,T;L^2(0,L)). \end{array} \tag{2.101}$$

Definindo

$$\begin{array}{l} L_{1,1}(u,v,z) = L_1(u,v,z) - kv_x - klz_x - kv - klz - k_0 l[z_x - lu] \\ L_{1,2}(u,v,z) = L_2(u,v,z) + k(u_x + v + lz) \\ L_{1,3}(u,v,z) = L_3(u,v,z) + k_0 l u_x - k_0 l^2 u + kl(u_x + v + lz); \end{array} \tag{2.102}$$

temos que

$$L_{1,1}(u,v,z), L_{1,2}(u,v,z), L_{1,3}(u,v,z) \in L^2(-T,T,L^2(0,L)).$$

Consideremos funções $u, v, z \in L^2(-T, T; L^2(0, L))$
com $u_x, v_x, z_x \in L^2(-T, T; L^2(0, L))$ tais que
$L_1(u, v, z), L_2(u, v, z), L_3(u, v, z) \in L^2(-T, T; L^2(0, L))$,
$u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = z(0, t) = z(L, t) = 0$ *em* $(-T, T)$
$u(x, -T) = u(x, T) = v(x, -T) = v(x, T) = z(x, -T) = z(x, T) = 0$ *em* $(0, L)$
$u_t(x, -T) = u_t(x, T) = v_t(x, -T) = v_t(x, T) = z_t(x, -T) = z_t(x, T) = 0$ *em* $(0, L)$.

Defina agora, para $x_0 < 0$

$$\phi(x,t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M_0 \tag{2.103}$$

onde $\beta > 0$ será escolhido posteriormente e M_0 é escolhido de tal forma que

$$\forall (x,t) \in (0,L) \times (-T,T), \quad \phi(x,t) \geq 1. \tag{2.104}$$

Para $\lambda > 0$ definimos

$$\varphi_\lambda(x,t) = e^{\lambda\phi(x,t)}. \tag{2.105}$$

Agora, como u, v, z estão definidos em $(0, L) \times (-T, T)$, seja $s > 0$ e defina
$w_1 = e^{s\varphi_\lambda} u$, $w_2 = e^{s\varphi_\lambda} v$, $w_3 = e^{s\varphi_\lambda} z$.

Sejam

$$P_1(w_1,w_2,w_3) = e^{s\varphi_\lambda}L_1(e^{-s\varphi_\lambda}w_1, e^{-s\varphi_\lambda}w_2, e^{-s\varphi_\lambda}w_3) = e^{s\varphi_\lambda}L_1(u,v,z)$$

$$P_2(w_1,w_2,w_3) = e^{s\varphi_\lambda}L_2(e^{-s\varphi_\lambda}w_1, e^{-s\varphi_\lambda}w_2, e^{-s\varphi_\lambda}w_3) = e^{s\varphi_\lambda}L_2(u,v,z)$$

$$P_3(w_1,w_2,w_3) = e^{s\varphi_\lambda}L_3(e^{-s\varphi_\lambda}w_1, e^{-s\varphi_\lambda}w_2, e^{-s\varphi_\lambda}w_3) = e^{s\varphi_\lambda}L_3(u,v,z)$$

Fazendo os cálculos formalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-s\varphi_\lambda}w_i) = e^{-s\varphi_\lambda}(\frac{\partial w_i}{\partial t} - s\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\varphi_\lambda w_i),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{-s\varphi_\lambda}w_i) = e^{-s\varphi_\lambda}(\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - s\lambda^2(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2\varphi_\lambda w_i - s\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\varphi_\lambda w_i),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{-s\varphi_\lambda}w_i) = e^{-s\varphi_\lambda}(\frac{\partial w_i}{\partial x} - s\lambda\frac{\partial\phi}{\partial x}\varphi_\lambda w_i),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-s\varphi_\lambda}w_i) = e^{-s\varphi_\lambda}(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - s\lambda^2(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2\varphi_\lambda w_i - s\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\varphi_\lambda w_i)$$

$i = 1, 2, 3.$

Podemos escrever

$$P_1(w_1,w_2,w_3) = P_1^1(w_1,w_2,w_3) + P_1^2(w_1,w_2,w_3) + R_1^0(w_1,w_2,w_3), \tag{2.106}$$

onde (os operadores ∇ e Δ representarão a primeira e segunda derivada em relação a x)

$$P_1^1(w_1,w_2,w_3) = \rho_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - k\Delta w_1 + s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)w_1$$
$$+(M_2-1)(w_2+lw_3),$$
$$P_1^2(w_1,w_2,w_3) = (M_1-1)s\lambda\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)w_1$$
$$-s\lambda^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)w_1 - 2s\lambda\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t} - k\nabla\phi\nabla w_1),$$

$$\begin{aligned} R_1^0(w_1,w_2,w_3) = -M_1 s\lambda\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)w_1 + kw_2 + klw_3 \\ -(M_2-1)(w_2+lw_3) \end{aligned},$$

$$P_2(w_1,w_2,w_3) = P_2^1(w_1,w_2,w_3) + P_2^2(w_1,w_2,w_3) + R_2^0(w_1,w_2,w_3), \tag{2.107}$$

onde

$$\begin{aligned} P_2^1(w_1,w_2,w_3) &= \rho_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - b\Delta w_2 + s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2(\rho_2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - b|\nabla\phi|^2)w_2, \\ P_2^2(w_1,w_2,w_3) &= (M_3-1)s\lambda\varphi_\lambda(\rho_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - b\Delta\phi)w_2 - s\lambda^2\varphi_\lambda(\rho_2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - b|\nabla\phi|^2)w_2 \\ &\quad -2s\lambda\varphi_\lambda(\rho_2\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_2}{\partial t} - b\nabla\phi\nabla w_2), \\ R_2^0(w_1,w_2,w_3) &= -M_3 s\lambda\varphi_\lambda(\rho_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - b\Delta\phi)w_2, \end{aligned}$$

e

$$P_3(w_1,w_2,w_3) = P_3^1(w_1,w_2,w_3) + P_3^2(w_1,w_2,w_3) + R_3^0(w_1,w_2,w_3), \tag{2.108}$$

onde

$$\begin{aligned} P_3^1(w_1,w_2,w_3) &= \rho_1\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} - k_0\Delta w_3 + s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k_0|\nabla\phi|^2)w_3 \\ &\quad -(M_4-1)lw_1, \\ P_3^2(w_1,w_2,w_3) &= (M_5-1)s\lambda\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k_0\Delta\phi)w_3 \\ &\quad -s\lambda^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k_0|\nabla\phi|^2)w_3 - 2s\lambda\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_2}{\partial t} - k_0\nabla\phi\nabla w_3), \\ R_3^0(w_1,w_2,w_3) &= -M_5 s\lambda\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k_0\Delta\phi)w_3 + k_0 l^2 w_1 + (M_4-1)lw_1, \end{aligned}$$

onde M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 serão escolhidos na demonstração do teorema a seguir.

Teorema 2.10. *(***Estimativa de Carleman***) Sejam $x_0 < 0$ fixo e $0 < \beta < min\{1, \frac{k}{\rho_1}, \frac{15}{16\rho_1}, \frac{b}{\rho_2}, \frac{15}{16\rho_2}, \frac{k_0}{\rho_1}\}$. Existem $\lambda_0 > 0, s_0 > 0$ e uma constante $C = C(s_0, \lambda_0, (0,L), \beta, x_0)$ tal que para $s > s_0$, $\lambda > \lambda_0$ e para cada $u, v, z \in L^2(-T, T, L^2(0,L))$ com $u_x, v_x, z_x \in L^2(-T, T; L^2(0,L))$,*

$L_1(u,v,z), L_2(u,v,z), L_3(u,v,z) \in L^2(-T,T;L^2(0,L))$ *e* $u(0) = u(L) = v(0) = v(L) = z(0) = z(L) = 0$, $u(T) = u(-T) = v(T) = v(-T) = z(T) = z(-T) = 0$, $\frac{\partial u(T)}{\partial t} = \frac{\partial u(-T)}{\partial t} = \frac{\partial v(T)}{\partial t} = \frac{\partial v(-T)}{\partial t} = \frac{\partial z(T)}{\partial t} = \frac{\partial z(-T)}{\partial t} = 0$
tem-se

$$
\begin{aligned}
& s\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + \rho_2|\frac{\partial v}{\partial t}|^2 + \rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2 + k|u_x|^2 + b|v_x|^2 + k_0|z_x|^2 \\
& + k|u_x + v + lz|^2 + k_0|z_x - lu|^2)dxdt \\
& + s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3(|u|^2 + |v|^2 + |z|^2)dxdt + \int_{-T}^{T}\int_0^L |P_1^1(w_1,w_2,w_3)|^2 dxdt \\
& + \int_{-T}^{T}\int_0^L |P_1^2(w_1,w_2,w_3)|^2 dxdt + \int_{-T}^{T}\int_0^L |P_2^1(w_1,w_2,w_3)|^2 dxdt \\
& + \int_{-T}^{T}\int_0^L |P_2^2(w_1,w_2,w_3)|^2 dxdt + \int_{-T}^{T}\int_0^L |P_3^1(w_1,w_2,w_3)|^2 dxdt \\
& + \int_{-T}^{T}\int_0^L |P_3^2(w_1,w_2,w_3)|^2 dxdt \\
& \leq C \int_{-T}^{T}\int_0^L e^{2s\varphi_\lambda}|L_{1,1}(u,v,z)|^2 dxdt + C \int_{-T}^{T}\int_0^L e^{2s\varphi_\lambda}|L_{1,2}(u,v,z)|^2 dxdt \\
& + C \int_{-T}^{T}\int_0^L e^{2s\varphi_\lambda}|L_{1,3}(u,v,z)|^2 dxdt + Cs\lambda \int_{-T}^{T} e^{2s\varphi_\lambda(L,t)}|u_x(L)|^2 dt \\
& + Cs\lambda \int_{-T}^{T} e^{2s\varphi_\lambda(L,t)}|v_x(L)|^2 dt + Cs\lambda \int_{-T}^{T} e^{2s\varphi_\lambda(L,t)}|z_x(L)|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Demonstração: É suficiente demonstrar a desigualdade do teorema com L_1, L_2, L_3, ao invés de $L_{1,1}, L_{1,2}, L_{1,3}$ pois

$$|L_1(u,v,z)|^2 \leq |L_{1,1}(u,v,z)|^2 + C(|u|^2 + |v|^2 + |z|^2 + |u_x|^2 + |v_x|^2 + |z_x|^2),$$

$$|L_2(u,v,z)|^2 \leq |L_{1,2}(u,v,z)|^2 + C(|u|^2 + |v|^2 + |z|^2 + |u_x|^2 + |v_x|^2 + |z_x|^2),$$

$$|L_3(u,v,z)|^2 \leq |L_{1,3}(u,v,z)|^2 + C(|u|^2 + |v|^2 + |z|^2 + |u_x|^2 + |v_x|^2 + |z_x|^2),$$

e os termos

$$\int_{-T}^{T}\int_0^L e^{2s\varphi_\lambda}(|u|^2 + |v|^2 + |z|^2 + |u_x|^2 + |v_x|^2 + |z_x|^2)\ dx\ dt$$

podem ser absorvidos pelos termos

$$s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda(k|u_x|^2+b|v_x|^2+k_0|z_x|^2)\ dx\ dt$$
$$+\,s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda(|u|^2+|v|^2+|z|^2)\ dx\ dt$$

escolhendo s_0 suficientemente grande.

Observe agora que

$$P_1^1(w_1,w_2,w_3)+P_1^2(w_1,w_2,w_3)=[e^{s\varphi_\lambda}L_1(u,v,z)-R_1^0(w_1,w_2,w_3)]$$

$$P_2^1(w_1,w_2,w_3)+P_2^2(w_1,w_2,w_3)=[e^{s\varphi_\lambda}L_2(u,v,z)-R_2^0(w_1,w_2,w_3)]$$

$$P_3^1(w_1,w_2,w_3)+P_3^2(w_1,w_2,w_3)=[e^{s\varphi_\lambda}L_2(u,v,z)-R_3^0(w_1,w_2,w_3)].$$

Ao longo de nossa demonstração os operadores ∇ e Δ representarão a primeira e segunda derivada em relação a x, respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}(|P_1^1(w_1,w_2,w_3)|^2+|P_1^2(w_1,w_2,w_3)|^2)dxdt\\
&+2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}P_1^1(w_1,w_2,w_3)P_1^2(w_1,w_2,w_3)dxdt\\
&=\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|e^{s\varphi_\lambda}L_1(w_1,w_2,w_3)-R_1^0(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt\\
&\leq\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}2e^{s\varphi_\lambda}|L_1(w_1,w_2,w_3)|^2\ dx\ dt\\
&+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}2|R_0^1(w_1,w_2,w_3)|^2\ dx\ dt,
\end{aligned}\tag{2.109}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}(|P_2^1(w_1,w_2,w_3)|^2+|P_2^2(w_1,w_2,w_3)|^2)dxdt\\
&+2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}P_2^1(w_1,w_2,w_3)P_2^2(w_1,w_2,w_3)dxdt\\
&=\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|e^{s\varphi_\lambda}L_2(w_1,w_2,w_3)-R_2^0(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt\\
&\leq\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}2e^{s\varphi_\lambda}|L_2(w_1,w_2,w_3)|^2\ dx\ dt\\
&+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}2|R_2^0(w_1,w_2,w_3)|^2\ dx\ dt,
\end{aligned}\tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}(|P_3^1(w_1,w_2,w_3)|^2+|P_3^2(w_1,w_2,w_3)|^2)dxdt\\
&+2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}P_3^1(w_1,w_2,w_3)P_3^2(w_1,w_2,w_3)dxdt\\
&=\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|e^{s\varphi_\lambda}L_3(w_1,w_2,w_3)-R_3^0(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt\\
&\leq\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}2e^{s\varphi_\lambda}|L_3(w_1,w_2,w_3)|^2\ dx\ dt\\
&+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}2|R_3^0(w_1,w_2,w_3)|^2\ dx\ dt.
\end{aligned}\tag{2.111}$$

Estimaremos primeiro os termos

$$\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}P_1^1(w_1,w_2,w_3)P_1^2(w_1,w_2,w_3)dxdt,$$

$$\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}P_2^1(w_1,w_2,w_3)P_2^2(w_1,w_2,w_3)dxdt,$$

$$\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}P_3^1(w_1,w_2,w_3)P_3^2(w_1,w_2,w_3)dxdt.$$

Fazendo-se os cálculos,

$$I_{11}^1=\rho_1(M_1-1)s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)w_1dxdt$$

$$=\rho_1(1-M_1)s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)dxdt$$

$$-\rho_1\frac{(1-M_1)}{2}s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\lambda(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2)(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)dxdt,$$

$$I_{12}^1=\rho_1 s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\Delta\phi|^2)w_1dxdt$$

$$=\rho_1 s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\Delta\phi|^2)dxdt$$

$$- \rho_1 s\lambda^2 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}|^2)dxdt$$
$$- (2+\frac{1}{2})\rho_1 s\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt$$
$$+ \frac{\rho_1 s\lambda^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(k|\Delta\phi|^2)dxdt$$
$$- \frac{\rho_1 s\lambda^4}{2}\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\Delta\phi|^2)dxdt,$$

$$I_{13}^1 = -2\rho_1 s\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t} - k\Delta\phi\Delta w_1)dxdt$$
$$= \rho_1 s\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt$$
$$+ \rho_1 s\lambda^2 \int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2dxdt$$
$$+ \rho_1 s\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda(k\Delta\phi + \lambda k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$- 2\rho_1 s\lambda^2 \int_{-T}^{T}\int_0^L \frac{\partial w_1}{\partial t}\varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}(k\nabla\phi\nabla W_1)dxdt,$$

$$I_{21}^1 = -k(M_1-1)s\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L \Delta w_1\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)w_1dxdt$$
$$= k(M_1-1)s\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L |\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)dxdt$$
$$- \frac{k(M_1-1)}{2}s\lambda^2 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi + \lambda|\nabla\phi|^2)(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)dxdt,$$

$$I_{22}^1 = ks\lambda^2 \int_{T}^{-T}\int_0^L \Delta w_1\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)w_1dxdt$$
$$= -ks\lambda^2 \int_{T}^{-T}\int_0^L |\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$+ \frac{ks\lambda^3}{2}\int_{T}^{-T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda(\lambda|\nabla\phi|^2 + \Delta\phi)(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$- 2ks\lambda^3 \int_{T}^{-T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2k\Delta\phi dxdt$$
$$- ks\lambda^2 \int_{T}^{-T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda k|\Delta\phi|^2dxdt,$$

$$I_{23}^1 = 2ks\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L \Delta w_1\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t} - k\nabla\phi\nabla w_1)dxdt$$

$$= ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(k\Delta\phi)dxdt + ks\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$-2ks\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\nabla w_1\nabla\phi\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t})dxdt$$
$$+ks\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2dxdt$$
$$+ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt$$
$$-ks\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(k\nabla\phi)\mid_0^L dt.$$

$$I_{31}^1 = s^3\lambda^3(M_1-1)\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi^2(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)w_1(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)w_1\varphi_\lambda dxdt$$
$$=(M_1-1)s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi^3(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)dxdt,$$

$$I_{32}^1 = -s^3\lambda^4\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda^2(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)w_1(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)\varphi_\lambda w_1 dxdt$$
$$=-s^3\lambda^4\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)^2dxdt,$$

$$I_{33}^1 = -2s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda^2(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)w_1\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t}-k\nabla\phi\nabla w_1)dxdt$$
$$=s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$+2s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2+k|\nabla\phi|^2k\Delta\phi)dxdt$$
$$+s^3\lambda^4\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)^2dxdt,$$

$$I_{41}^1 = (M_2-1)(M_1-1)s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}w_1w_2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)dxdt$$
$$(M_2-1)(M_1-1)ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}w_1w_3\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)dxdt,$$

$$I_{42}^1 = -(M_2-1)s\lambda^2\int_{T}^{-T}\int_{0}^{L}w_1w_2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)dxdt,$$

$$I_{43}^1 = -(M_2-1)\rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t}w_2dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&- (M_2-1)\rho_1 ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t}w_3dxdt\\
&- (M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda\nabla\phi\nabla w_1 w_2dxdt\\
&- (M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda\nabla\phi\nabla w_1 lw_3dxdt.
\end{aligned}
$$

Dos cálculos anteriores temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_0^L P_1^1(w_1,w_2,w_3)P_1^2(w_1,w_2,w_3)dxdt =\\
&\rho_1(1-M_1)s\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)dxdt\\
&- \rho_1\frac{(1-M_1)}{2}s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\lambda(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2)(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)dxdt\\
&+ \rho_1 s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\Delta\phi|^2)dxdt\\
&- \rho_1 s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}|^2)dxdt\\
&- (2+\frac{1}{2})\rho_1 s\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt\\
&+ \frac{\rho_1 s\lambda^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(k|\Delta\phi|^2)dxdt\\
&- \frac{\rho_1 s\lambda^4}{2}\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\Delta\phi|^2)dxdt+\\
&\rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt+\rho_1 s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2dxdt\\
&+ \rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda(k\Delta\phi+\lambda k|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&- 2\rho_1 s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L \frac{\partial w_1}{\partial t}\varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}(k\nabla\phi\nabla w_1)dxdt\\
&+ k(M_1-1)s\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L |\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)dxdt\\
&- \frac{k(M_1-1)}{2}s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi+\lambda|\nabla\phi|^2)(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-k\Delta\phi)dxdt\\
&- ks\lambda^2\int_{T}^{-T}\int_0^L |\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&+ \frac{ks\lambda^3}{2}\int_{T}^{-T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda(\lambda|\nabla\phi|^2+\Delta\phi)(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&- 2ks\lambda^3\int_{T}^{-T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2k\Delta\phi dxdt
\end{aligned}
$$

$$- ks\lambda^2 \int_T^{-T} \int_0^L |w_1|^2 \varphi_\lambda k |\Delta\phi|^2 dxdt + ks\lambda \int_{-T}^T \int_0^L |\nabla w_1|^2 \varphi_\lambda (k\Delta\phi) dxdt$$
$$+ ks\lambda^2 \int_{-T}^T \int_0^L |\nabla w_1|^2 \varphi_\lambda (k|\nabla\phi|^2) dxdt$$
$$- 2ks\lambda^2 \int_{-T}^T \int_0^L \nabla w_1 \nabla\phi \varphi_\lambda (\rho_1 \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t}) dxdt$$
$$+ ks\lambda^2 \int_{-T}^T \int_0^L |\nabla w_1|^2 \varphi_\lambda \rho_1 |\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 dxdt$$
$$+ ks\lambda \int_{-T}^T \int_0^L |\nabla w_1|^2 \varphi_\lambda \rho_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} dxdt$$
$$- ks\lambda \int_{-T}^T |\nabla w_1|^2 \varphi_\lambda (k\nabla\phi) \mid_0^L dt$$
$$+ (M_1-1)s^3\lambda^3 \int_{-T}^T \int_0^L |w_1|^2 \varphi^3 (\rho_1 |\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)(\rho_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi) dxdt$$
$$- s^3\lambda^4 \int_{-T}^T \int_0^L |w_1|^2 \varphi_\lambda^3 (\rho_1 |\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)^2 dxdt$$
$$+ s^3\lambda^3 \int_{-T}^T \int_0^L |w_1|^2 \varphi_\lambda^3 (\rho_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)(\rho_1 |\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2) dxdt$$
$$+ 2s^3\lambda^3 \int_{-T}^T \int_0^L |w_1|^2 \varphi_\lambda^3 (\rho_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} |\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 + k|\nabla\phi|^2 k\Delta\phi) dxdt$$
$$+ s^3\lambda^4 \int_{-T}^T \int_0^L |w_1|^2 \varphi_\lambda^3 (\rho_1 |\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)^2 dxdt$$
$$+ (M_2-1)(M_1-1)s\lambda \int_{-T}^T \int_0^L w_1 w_2 \varphi_\lambda (\rho_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi) dxdt$$
$$(M_2-1)(M_1-1)ls\lambda \int_{-T}^T \int_0^L w_1 w_3 \varphi_\lambda (\rho_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi) dxdt$$
$$- (M_2-1)s\lambda^2 \int_T^{-T} \int_0^L w_1 w_2 \varphi_\lambda (\rho_1 |\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2) dxdt$$
$$- (M_2-1)\rho_1 s\lambda \int_{-T}^T \int_0^L \varphi_\lambda \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t} w_2 dxdt - (M_2-1)\rho_1 ls\lambda \int_{-T}^T \int_0^L \varphi_\lambda \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t} w_3 dxdt$$
$$- (M_2-1)ks\lambda \int_{-T}^T \int_0^L \varphi_\lambda \nabla\phi \nabla w_1 w_2 dxdt$$
$$- (M_2-1)ks\lambda \int_{-T}^T \int_0^L \varphi_\lambda \nabla\phi \nabla w_1 l w_3 dxdt,$$

$$\int_{-T}^T \int_0^L P_1^1(w_1,w_2,w_3) P_1^2(w_1,w_2,w_3) dxdt = 2\rho_1 s\lambda \int_{-T}^T \int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2 \varphi_\lambda \rho_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} dxdt$$
$$- \rho_1 M_1 s\lambda \int_{-T}^T \int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2 \varphi_\lambda (\rho_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi) dxdt$$
$$+ 2s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_0^L \varphi_\lambda [\rho_1^2 |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2 |\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - 2\rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t} k\nabla w_1 \nabla\phi + k^2 |\nabla w_1|^2 |\nabla\phi|^2 dxdt$$

$$+ 2s\lambda k\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(k\Delta\phi)dxdt + kM_1s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)dxdt$$
$$- ks\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(k\nabla\phi)\mid_0^L dt$$
$$+ 2s^3\lambda^4\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)^2dxdt$$
$$+ 2s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 + k|\nabla\phi|^2k\Delta\phi)dxdt$$
$$+ M_1s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)dxdt + R + X_1,$$

onde

$$R = (M_2-1)(M_1-1)s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}w_1w_2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)dxdt$$
$$(M_2-1)(M_1-1)ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}w_1w_3\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)dxdt$$
$$- (M_2-1)s\lambda^2\int_{T}^{-T}\int_{0}^{L}w_1w_2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$- (M_2-1)ls\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}w_1w_3\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$- 2(M_2-1)\rho_1s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t}w_2dxdt$$
$$- 2(M_2-1)\rho_1ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t}w_3dxdt$$
$$+ 2(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda\nabla\phi\nabla w_1w_2dxdt$$
$$+ 2(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda\nabla\phi\nabla w_1lw_3dxdt$$

e

$$X_1 = -\rho_1(\frac{1-M_1}{2})s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2)(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)dxdt$$
$$- \rho_1s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}|^2)dxdt$$
$$- \frac{5}{2}s\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt$$
$$+ \frac{\rho_1s\lambda^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(k|\Delta\phi|^2)dxdt$$
$$- \frac{\rho_1s\lambda^4}{2}\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\Delta\phi|^2)dxdt$$

$$- \frac{k(M_1-1)}{2} s\lambda^2 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi + \lambda|\nabla\phi|^2)(\rho_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)dxdt$$
$$+ \frac{ks\lambda^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi + \lambda|\nabla\phi|^2)(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$- ks\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2 k\Delta\phi dxdt$$
$$- ks\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda k|\nabla\phi|^2 dxdt.$$

Note que

$$2s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda[\rho_1^2|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - 2\rho_1\frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}k\nabla w_1\nabla\phi + k^2|\nabla w_1|^2|\nabla\phi|^2 dxdt > 0,$$

e

$$\phi(x,t) = |x-x_0|^2 - \beta t^2 + M_0,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t) = -2\beta t,$$
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(x,t) = -2\beta,$$
$$\nabla\phi(x,t) = 2(x-x_0),$$
$$\Delta\phi(x,t) = 2.$$

Assim

$$\int_{-T}^{T}\int_0^L P_1^1(w_1,w_2,w_3)P_2^1(w_1,w_2,w_3)dxdt \geq -4\rho_1^2\beta s\lambda\int_{-T}^{T}|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+ 2\rho_1 M_1(\rho_1\beta + k)s\lambda\int_{-T}^{T}|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+ 4k^2 s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$- 2kM_1 s\lambda(\rho_1\beta + k)\int_{-T}^{T}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$- k^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_1|^2\lambda(L)dt$$
$$+ 32s^3\lambda^4\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)^2dxdt$$
$$+ 16s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(-\rho_1^2\beta^3t^2 - k^2(x-x_0)^2)dxdt$$
$$- 8M_1 s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta + k)(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)dxdt + R + X_1.$$

Usando a definição de λ e φ_λ e $|a+b| \leq |a| + |b|$ temos que:

$|X_1| \leq Cs\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w-1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$ para algum $C > 0$.

Fazendo $-4\rho_1^2\beta + 2\rho_1 M_1(\rho_1\beta + k) > 0$, então $M_1 > \dfrac{2\beta\rho_1}{(\rho_1\beta + k)}$ e de

$4k^2 - 2kM_1(\rho_1\beta + k) > 0$, então $M_1 < \dfrac{2k}{(\rho_1\beta + k)}$.

Logo,

$$\frac{2\beta\rho_1}{(\rho_1\beta + k)} < M_1 < \frac{2k}{(\rho_1\beta + k)}$$

se, e somente se, $\beta < \dfrac{k}{\rho_1}$.

Com isto,

$$\begin{aligned}
&-4\rho_1^2\beta s\lambda \int_{-T}^{T} |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt \\
&+ 2\rho_1 M_1(\rho_1\beta + k)s\lambda \int_{-T}^{T} |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt \\
&+ 4k^2 s\lambda \int_{-T}^{T} |\nabla w_1|^2\varphi_\lambda dxdt \\
&- 2kM_1 s\lambda(\rho_1\beta + k) \int_{-T}^{T} |\nabla w_1|^2\varphi_\lambda dxdt \\
&\geq cs\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt + cs\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L |\nabla w_1|^2\varphi_\lambda dxdt,
\end{aligned}$$

para algum $c > 0$.

Tomando $\beta < \frac{15}{16\rho_1}$ tem-se que $(16) = (1 + 15) > (1 + 16\rho_1\beta)$ e podemos estimar

$$\begin{aligned}
&32s^3\lambda^4 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)^2 dxdt \\
&+ 16s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(-\rho_1^2\beta^3t^2 - k^2(x-x_0)^2) dxdt \\
&- 8M_1 s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta + k)(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2) dxdt \\
&= 32s^3\lambda^4 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)^2 dxdt \\
&- 16\rho_1\beta s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2) dxdt \\
&+ 16s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(k(x-x_0)^2) dxdt \\
&- 8M_1\rho_1\beta s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2) dxdt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 8M_1ks^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)dxdt \\
&= 32s^3\lambda^4 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)^2dxdt \\
&- (16+8M_1)\rho_1\beta s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2)dxdt \\
&+ (16+8M_1\rho_1\beta)s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(k(x-x_0))dxdt \\
&- 8M_1ks^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)dxdt \\
&\geq 32s^3\lambda^4 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)^2dxdt \\
&- (16+8M_1)\rho_1\beta s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)dxdt \\
&- 8M_1ks^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2)dxdt \\
&+ s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3(x-x_0)^2dxdt \\
&= 8s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3F(X)dxdt,
\end{aligned}
$$

com

$$F(X) = 4\lambda X^2 - [(2+M_1)\rho_1\beta + kM_1]X + k(x-x_0)^2$$

e

$$X = (\rho_1\beta^2t^2 - k(x-x_0)^2).$$

Agora note que existe um $\lambda_1 > 0$ suficientemente grande tal que

$$4\lambda X^2 - [(2+M_1)\rho_1\beta + kM_1]X \geq 0 \;\forall\lambda > \lambda_1,$$

e como $k(x-x_0)^2 > c > 0$ para $x_0 < 0$ fixo e algum $c > 0$,

então

$$F(X) > c \text{ para } \lambda > \lambda_1.$$

Assim

$$8s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3 F(X)dxdt$$
$$\geq Cs^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.$$

Portanto

$$\int_{-T}^{T}\int_0^L P_1^1(w_1,w_2,w_3)P_2^1(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$\geq Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt + Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L |\nabla w_1|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+Cs^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt - k^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda(L)dxdt + R + X_1$$

Para estimar R usaremos as desigualdades $\pm ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ e $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$ e a definição de λ e φ_λ, e para algum $\lambda_2 > 0$ suficientemente grande e $\lambda > \lambda_2$ teremos

$$(M_2-1)(M_1-1)s\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L w_1w_2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)dxdt$$
$$+(M_2-1)(M_1-1)ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L w_1w_3\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k\Delta\phi)dxdt$$
$$-(M_2-1)s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L w_1w_2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$-(M_2-1)ls\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_0^L w_1w_3\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$\geq -Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt - Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_2|^2\varphi_\lambda^3 dxdt - Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda^3 dxdt,$$

e

$$-2(M_2-1)\rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t}w_2 dxdt$$
$$\geq -2\varepsilon_1(M_2-1)\rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2 dxdt$$
$$\frac{-(M_2-1)}{2\varepsilon_1}\rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda|w_2|^2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 dxdt;$$

$$-2(M_2-1)\rho_1 ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial t}w_3 dxdt$$
$$\geq -2\varepsilon_2(M_2-1)\rho_1 ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2 dxdt$$
$$\frac{-(M_2-1)}{2\varepsilon_2}\rho_1 ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda|w_3|^2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 dxdt;$$

$$2(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda\nabla\phi\nabla w_1 w_2 dxdt$$
$$+2(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda\nabla\phi\nabla w_1 lw_3 dxdt$$
$$=+(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda|\nabla w_1+w_2+lw_3|^2\nabla\phi dxdt$$
$$-(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda[|\nabla w_1|^2+|w_2|^2+|lw_3|^2]\nabla\phi dxdt$$
$$-2(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda w_2 lw_3\nabla\phi dxdt.$$

Temos que

$$R>-Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$-Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$-Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_3|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$-2\varepsilon_1(M_2-1)\rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$-\frac{(M_2-1)}{2\varepsilon_1}\rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$-2\varepsilon_2(M_2-1)\rho_1 ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$-\frac{(M_2-1)}{2\varepsilon_2}\rho_1 ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_3|^2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda|\nabla w_1+w_2+lw_3|^2\nabla\phi dxdt$$
$$-(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda[|\nabla w_1|^2+|w_2|^2+|lw_3|^2]\nabla\phi dxdt$$
$$-2(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda w_2 lw_3\nabla\phi dxdt$$

temos que para $(M_2-1)>0$

$$-(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda|\nabla w_1|^2\nabla\phi dxdt$$
$$\geq -2(L-x_0)(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda|\nabla w_1|^2 dxdt.$$

Tomando $(M_2-1)>0$ suficientemente pequeno com M_2 fixado, depois tomando ε_1 e ε_2 suficientemente pequenos e usando o fato de
$|X|\leq Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$ e $\nabla\phi>0$

temos

$$\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L} P_1^1(w_1,w_2,w_3)P_1^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$\geq Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt + Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+ Cs^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt - 2k^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_1(L)|^2\varphi_\lambda(L)dxdt$$
$$Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1 + w_2 + lw_3|^2\varphi_\lambda dxdt - Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$- Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$- Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_3|^2\varphi_\lambda^3 dxdt + Y$$

onde

$$Y = -\frac{(M_2-1)}{2\varepsilon_1}\rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$- \frac{(M_2-1)}{2\varepsilon_2}\rho_1 ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_3|^2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$- (M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda[|w_2|^2 + |lw_3|^2]\nabla\phi dxdt$$
$$- 2(M_2-1)ks\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda w_2 lw_3\nabla\phi dxdt$$

usando $|a+b|\leq|a|+|b|$, $ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ e a definição de λ,φ_λ e ϕ temos que

$$|Y|\leq Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}(|w_1|^2+|w_2|^2+|w_3|^2)\varphi_\lambda^3 dxdt \text{ para algum } c>0.$$

Portanto

$$\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L} P_1^1(w_1,w_2,w_3)P_1^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$\geq Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt + Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+ Cs^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt - 2k^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_1(L)|^2\varphi_\lambda(L)dt$$
$$Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_1 + w_2 + lw_3|^2\varphi_\lambda dxdt - Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$- Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$- Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_3|^2\varphi_\lambda^3 dxdt,$$

para $\lambda > max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \lambda_3$.

Analogamente

$$\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L} P_2^1(w_1,w_2,w_3)P_2^2(w_1,w_2,w_3)dxdt = 2\rho_2 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_2}{\partial t}|^2\varphi_\lambda\rho_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt$$

$$-\rho_2 M_3 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_2}{\partial t}|^2\varphi_\lambda(\rho_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-b\Delta\phi)dxdt$$

$$+2s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda[\rho_2^2|\frac{\partial w_2}{\partial t}|^2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-2\rho_2\frac{\partial w_2}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}k\nabla w_2\nabla\phi+b^2|\nabla w_2|^2|\nabla\phi|^2dxdt$$

$$+2s\lambda b\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_2|^2\varphi_\lambda(b\Delta\phi)dxdt+bM_3 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_2|^2\varphi_\lambda(\rho_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-b\Delta\phi)dxdt$$

$$-bs\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_2|^2\varphi_\lambda(b\nabla\phi)\mid_0^L dt$$

$$+2s^3\lambda^4\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda^3(\rho_2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-b|\nabla\phi|^2)^2dxdt$$

$$+2s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda^3(\rho_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\rho_2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2+b|\nabla\phi|^2 b\Delta\phi)dxdt$$

$$+M_3 s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda^3(\rho_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-b\Delta\phi)(\rho_2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-k|\nabla\phi|^2)dxdt+X_2$$

$$X_2 = -\rho_2(\frac{1-M_3}{2})s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2)(\rho_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-b\Delta\phi)dxdt$$

$$-\rho_2 s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda(\rho_2|\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}|^2)dxdt$$

$$-\frac{5}{2}s\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda\rho_2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt$$

$$+\frac{\rho_2 s\lambda^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(b|\Delta\phi|^2)dxdt$$

$$-\frac{\rho_2 s\lambda^4}{2}\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|(\rho_2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-b|\Delta\phi|^2)dxdt$$

$$-\frac{k(M_3-1)}{2}s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi+\lambda|\nabla\phi|^2)(\rho_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-b\Delta\phi)dxdt$$

$$+\frac{bs\lambda^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi+\lambda|\nabla\phi|^2)(\rho_2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2-b|\nabla\phi|^2)dxdt$$

$$-bs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2 b\Delta\phi dxdt$$

$$-bs\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda b|\nabla\phi|^2dxdt.$$

Repetindo-se os cálculos como anteriormente chegamos a

$$\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L} P_2^1(w_1,w_2,w_3)P_2^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$

$$\geq Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_2}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt + Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_2|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+ Cs^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda^3 dxdt - 2b^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_2(L)|^2\varphi_\lambda(L)dt$$
$$- Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_2|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$

para algum $\lambda_4 > 0$ grande e $\lambda > \lambda_4$ e algum $C > 0$ para $0 < \beta < min\{\frac{b}{\rho_2}, \frac{15}{16\rho_2}\}$.

Também como feito no primeiro caso

$$\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L} P_3^1(w_1,w_2,w_3)P_3^2(w_1,w_2,w_3)dxdt = 2\rho_1 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_3}{\partial t}|^2\varphi_\lambda\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt$$
$$- \rho_2 M_5 s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\frac{\partial w_3}{\partial t}|^2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k_0\Delta\phi)dxdt$$
$$+ 2s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda[\rho_1^2|\frac{\partial w_3}{\partial t}|^2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - 2\rho_1\frac{\partial w_3}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}k_0\nabla w_3\nabla\phi + k_0^2|\nabla w_3|^2|\nabla\phi|^2dxdt$$
$$+2s\lambda k_0\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_3|^2\varphi_\lambda(k_0\Delta\phi)dxdt + k_0M_5s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_3|^2\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k_0\Delta\phi)dxdt$$
$$- k_0s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_3|^2\varphi_\lambda(k_0\nabla\phi)\mid_0^L dt$$
$$+ 2s^3\lambda^4\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_3|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k_0|\nabla\phi|^2)^2dxdt$$
$$+ 2s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_3|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 + k_0|\nabla\phi|^2k_0\Delta\phi)dxdt$$
$$+ M_5s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_3|^2\varphi_\lambda^3(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k_0\Delta\phi)(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k_0|\nabla\phi|^2)dxdt + R_3 + X_3,$$

onde

$$R_3 = -(M_4-1)(M_5-1)ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L} w_1w_3\varphi_\lambda(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial tr} - k_0\Delta\phi)dxdt$$
$$+ (M_4-1)ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L} w_1w_3\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}| - k_0|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$+ k_0(M_4-1)s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|\nabla w_3 - lw_1|^2\nabla\phi\varphi_\lambda dxdt$$
$$- k_0(M_4-1)s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}(|\nabla w_3|^2 + |lw_1|^2)\nabla\phi\varphi_\lambda dxdt$$
$$+ 2(M_4-1)ls\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\rho_1\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_3}{\partial t}w_1\varphi_\lambda dxdt$$

e

$$X_3 = -\rho_1(\frac{1-M_5}{2})s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|w_3|^2\varphi_\lambda(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2)(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k_0\Delta\phi)dxdt$$

$$- \rho_1 s\lambda^2 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}|^2)dxdt$$
$$- \frac{5}{2}s\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dxdt$$
$$+ \frac{\rho_1 s\lambda^3}{2} \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(k_0|\Delta\phi|^2)dxdt$$
$$- \frac{\rho_1 s\lambda^4}{2} \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda|\frac{\partial\phi}{\partial t}|(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k_0|\Delta\phi|^2)dxdt$$
$$- \frac{k(M_5-1)}{2}s\lambda^2 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi + \lambda|\nabla\phi|^2)(\rho_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - k_0\Delta\phi)dxdt$$
$$+ \frac{k_0 s\lambda^3}{2} \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi + \lambda|\nabla\phi|^2)(\rho_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2 - k_0|\nabla\phi|^2)dxdt$$
$$- k - 0s\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2 k_0\Delta\phi dxdt$$
$$- k_0 s\lambda^2 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda k_0|\nabla\phi|^2 dxdt.$$

Para $(M_4-1) > 0$ com M_4 fixado

$$2(M_4-1)ls\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L \rho_1\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial w_3}{\partial t}w_1\varphi_\lambda dxdt$$
$$\geq (M_4-1)l\rho_1 s\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L \varphi_\lambda(\frac{1}{2\varepsilon_3}|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2|w_1| + 2\varepsilon_3|\frac{\partial w_3}{\partial t}|^2)dxdt.$$

Tomando ε_3 suficientemente pequeno e repetindo os cálculos como feito no primeiro caso chegamos à

$$\int_{-T}^{T}\int_0^L P_3^1(w_1,w_2,w_3)P_3^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$\geq Cs\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L |\frac{\partial w_3}{\partial t}|^2\varphi_\lambda dxdt + Cs\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L |\nabla w_3|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+ Cs^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda^3 dxdt - 2k_0^2(L-x_0)s\lambda \int_{-T}^{T} |\nabla w_3(L)|^2\varphi_\lambda(L)dt$$
$$- Cs\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_3|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$- Cs\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_0^L |w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$+ Cs\lambda \int_{-T}^{T}\int_0^L |\nabla w_3 - lw_1|^2\nabla\phi\varphi_\lambda dxdt,$$

para algum $\lambda_5 > 0$ grande e $\lambda > \lambda_5$ e algum $C > 0$ para $0 < \beta < min\{\frac{k_0}{\rho_1}, \frac{15}{16\rho_1}\}$.

Assim já temos

$$\int_{-T}^{T}\int_0^L P_1^1(w_1,w_2,w_3)P_1^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_0^L P_2^1(w_1,w_2,w_3)P_2^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_0^L P_3^1(w_1,w_2,w_3)P_3^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$\geq Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L (|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2+|\frac{\partial w_2}{\partial t}|^2+|\frac{\partial w_3}{\partial t}|^2)\varphi_\lambda dxdt$$
$$+Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L (|\nabla w_1|^2+|\nabla w_2|^2+|\nabla w_3|^2)\varphi_\lambda dxdt$$
$$+Cs^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L (|w_1|^2+|w_2|^2+|w_3|^2)\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$-2k^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_1(L)|^2\varphi_\lambda(L)dt-2b^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_2(L)|^2\varphi_\lambda(L)dt$$
$$-2k_0^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_3(L)|^2\varphi_\lambda(L)dt+Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L|\nabla w_1+w_2+lw_3|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L|\nabla w_3-lw_1|^2\nabla\phi\varphi_\lambda dxdt$$
$$-Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L|w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt-Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L|w_2|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$-Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L|w_3|^2\varphi_\lambda^3 dxdt,$$

para $x_0<0$ fixo e $0<\beta<min\{1,\frac{k}{\rho_1},\frac{15}{16\rho_1},\frac{b}{\rho_2},\frac{15}{16\rho_2},\frac{k_0}{\rho_1},\}$

e $\lambda>max\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5\}$.

Observe que para algum $s_0>$ suficientemente grande e $s>s_0$ os termos

$$-Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L|w_1|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$-Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L|w_2|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$
$$-Cs\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L|w_3|^2\varphi_\lambda^3 dxdt$$

e

$$\int_{-T}^{T}\int_0^L|R_1^0(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt,\ \int_{-T}^{T}\int_0^L|R_2^0(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt,$$
$$\int_{-T}^{T}\int_0^L|R_3^0(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$

podem ser absorvidos por

$$s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L(|w_1|^2+|w_2|^2+|w_3|^2)\varphi_\lambda^3dxdt.$$

Logo,

$$\int_{-T}^{T}\int_0^L P_1^1(w_1,w_2,w_3)P_1^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_0^L P_2^1(w_1,w_2,w_3)P_2^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_0^L P_3^1(w_1,w_2,w_3)P_3^2(w_1,w_2,w_3)dxdt$$
$$-\int_{-T}^{T}\int_0^L |R_1^0(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt-\int_{-T}^{T}\int_0^L |R_2^0(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$
$$-\int_{-T}^{T}\int_0^L |R_3^0(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$
$$\geq Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L(|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2+|\frac{\partial w_2}{\partial t}|^2+|\frac{\partial w_3}{\partial t}|^2)\varphi_\lambda dxdt$$
$$+Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L(|\nabla w_1|^2+|\nabla w_2|^2+|\nabla w_3|^2)\varphi_\lambda dxdt$$
$$+Cs^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L(|w_1|^2+|w_2|^2+|w_3|^2)\varphi_\lambda^3dxdt$$
$$+Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L|\nabla w_1+w_2+lw_3|^2\varphi_\lambda dxdt$$
$$+Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L|\nabla w_3-lw_1|^2\nabla\phi\varphi_\lambda dxdt$$
$$-2k^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_1(L)|^2\varphi_\lambda(L)dt-2b^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_2(L)|^2\varphi_\lambda(L)dt$$
$$-2k_0^2(L-x_0)s\lambda\int_{-T}^{T}|\nabla w_3(L)|^2\varphi_\lambda(L)dt$$

Portanto, da Continuidade de φ_λ, de (2.109), (2.110) e (2.111) e da desigualdade anterior chegamos a

$$s\lambda\int_{-T}^{T}\int_0^L\varphi_\lambda(|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2+|\frac{\partial w_2}{\partial t}|^2+|\frac{\partial w_3}{\partial t}|^2+|w_{1x}|^2+|w_{2x}|^2+|w_{3x}|^2$$
$$+|w_{1x}+w_2+lw_3|^2+|w_{3x}-lw_1|^2)dxdt$$
$$+s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_0^L\varphi_\lambda^3(|w_1|^2+|w_2|^2+|w_3|^2)dxdt+\int_{-T}^{T}\int_0^L|P_1^1(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_0^L|P_1^2(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt+\int_{-T}^{T}\int_0^L|P_2^1(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$

$$+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|P_2^2(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|P_3^1(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|P_3^2(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$
$$\leq C\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}e^{2s\varphi_\lambda}|L_1(u,v,z)|^2dxdt+C\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}e^{2s\varphi_\lambda}|L_2(u,v,z)|^2dxdt$$
$$+C\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}e^{2s\varphi_\lambda}|L_3(u,v,z)|^2dxdt+Cs\lambda\int_{-T}^{T}|w_{1x}(L)|^2dt$$
$$+Cs\lambda\int_{-T}^{T}|w_{2x}(L)|^2dt+Cs\lambda\int_{-T}^{T}|w_{3x}(L)|^2dt,$$

o que é equivalente a

$$s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda(\rho_1|\frac{\partial w_1}{\partial t}|^2+\rho_2|\frac{\partial w_2}{\partial t}|^2+\rho_1|\frac{\partial w_3}{\partial t}|^2+k|w_{1x}|^2+b|w_{2x}|^2+k_0|w_{3x}|^2$$
$$+k|w_{1x}+w_2+lw_3|^2+k_0|w_{3x}-lw_1|^2)dxdt$$
$$+s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}\varphi_\lambda^3(|w_1|^2+|w_2|^2+|w_3|^2)dxdt+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|P_1^1(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|P_1^2(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|P_2^1(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|P_2^2(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|P_3^1(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}|P_3^2(w_1,w_2,w_3)|^2dxdt$$
$$\leq C\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}e^{2s\varphi_\lambda}|L_1(u,v,z)|^2dxdt+C\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}e^{2s\varphi_\lambda}|L_2(u,v,z)|^2dxdt$$
$$+C\int_{-T}^{T}\int_{0}^{L}e^{2s\varphi_\lambda}|L_3(u,v,z)|^2dxdt+Cs\lambda\int_{-T}^{T}|w_{1x}(L)|^2dt$$
$$+Cs\lambda\int_{-T}^{T}|w_{2x}(L)|^2dt+Cs\lambda\int_{-T}^{T}|w_{3x}(L)|^2dt.$$

Fazendo a mudança $u=e^{-s\varphi}w_1$, $v=e^{-s\varphi}w_2$, $z=e^{-s\varphi}w_3$ na desigualdade anterior chegamos ao desejado.

□

Recordemos o problema de controlabilidade exata para o sistema de Bresse. Para os dados iniciais $(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\omega_0,\omega_1)\in L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)$ consideremos o sistema de Bresse

$$\left\{\begin{array}{l}\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \varphi(0,t) = \psi(0,t) = \omega(0,t) = 0, \quad t\in(0,T)\\ \varphi(L,t) = g_1(t), \quad \phi(L,t) = g_2(t), \quad \omega(L,t) = g_3(t), \quad t\in(0,T)\\ \varphi(.,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(.,0) = \varphi_1, \quad em \quad (0,L)\\ \psi(.,0) = \psi_0, \quad \psi_t(.,0) = \psi_1, \quad em \quad (0,L)\\ \omega(.,0) = w_0, \quad \omega_t(.,0) = \omega_1, \quad em \quad (0,L)\end{array}\right. \tag{2.112}$$

onde g_1, g_2, g_3 são controles tomados em $L^2(0,T)$.

Já foi mostrado que o problema (2.112) tem uma única solução

$u \in C([0,T]; L^2(0,L))$ com $u_t \in C([0,T]; H^{-1}(0,L))$

O problema de controlabilidade exata é encontrar controles g_1, g_2, g_3 tal que no tempo T nos dá

$$\varphi(T) = \varphi_t(T) = \psi(T) = \psi_t(T) = \omega(T) = \omega_t(T) = 0.$$

Por Lions [23] é equivalente a provar uma desigualdade de observabilidade para o problema adjunto

$$\left\{\begin{array}{l}\rho_1 u_{tt} - k(u_x + v + lz)_x - k_0 l[z_x - lu] = 0,\\ \rho_2 v_{tt} - bv_{xx} + k(u_x + v + lz) = 0,\\ \rho_1 z_{tt} - k_0[z_x - lu]_x + kl(u_x + v + lz) = 0,\\ u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) = z(0,t) = z(L,t) = 0,\\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,T) = u_1(x)\\ v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x)\\ z(x,0) = z_0(x), z_t(x,0) = z_1(x),\end{array}\right. \tag{2.113}$$

onde $u_0, v_0, z_0 \in H_0^1(0,L)$ e $u_1, v_1, z_1 \in L^2(0,L)$.

Queremos mostrar que temos uma desigualdade do tipo:

$$\exists C_0 > 0, \quad tal \quad que \quad E_0 \le C_0 \int_0^T (|u_x(L)|^2 + |v_x(L)|^2 + |z_x(L)|^2)dt \tag{2.114}$$

onde

$E_0 = E(0)$ é a energia inicial dada por

$$\frac{1}{2}\int_0^L \rho_1|u_1|^2 + \rho_2|v_1|^2 + \rho_1|z_1|^2 + k_0|z_{0x} - lu_0|^2 + b|v_{0x}|^2 + k|u_{0x} + v_0 + lz_0|^2 dx.$$

Teorema 2.11. *Assumimos que*

$x_0 < 0$, $\Gamma_0 = \{L\}$

$T > 2\sup_{x\in[0,L]} |x - x_0| = 2(L - x_0)$.

Então existe uma constante C_0 *tal que para cada* $u_0, v_0, z_0 \in H_0^1(0, L)$ *e* $u_1, v_1, z_1 \in L^2(0, L)$ *temos*

$$E_0 \leq C_0 \int_0^T (|u_x(L)|^2 + |v_x(L)|^2 + |z_x(L)|^2)dt \tag{2.115}$$

Demonstração: Para $u_0, v_0, z_0 \in H_0^1(0, L)$ e $u_1, v_1, z_1 \in L^2(0, L)$ a equação (2.113) tem uma única solução

$u, v, z \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$.

Além disso, o funcional de energia

$E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L \rho_1|u_t(t)|^2 + \rho_2|v_t(t)|^2 + \rho_1|z_t(t)|^2 + k_0|z_x(t) - lu(t)|^2 + b|v_x(t)|^2 + k|u_x(t) + v(t) + lz(t)|^2dx = E(0)$.

Seja

$$E_M(t) = E(\frac{T}{2}) = E(t) = E(0). \tag{2.116}$$

Escolhendo

$$\phi_M(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta(t - \frac{T}{2})^2 + M_0 \tag{2.117}$$

onde β é escolhido tal que

$$\frac{4}{T^2} \sup_{x\in[0,L]} |x - x_0|^2 < \beta < min\{1, \frac{k}{\rho_1}, \frac{15}{16\rho_1}, \frac{b}{\rho_2}, \frac{15}{16\rho_2}, \frac{k_0}{\rho_1}\} \tag{2.118}$$

e M_0 é escolhido tal que

$$\forall(x, t) \in (0, L) \times (-T, T), \phi_M(x, t) \geq 1, \tag{2.119}$$

temos que

$$\phi_M(x, \frac{T}{2}) = |x - x_0|^2 + M_0 \geq \phi_M(x, t), \quad \forall t \in [0, T] \tag{2.120}$$

e

$\phi_M(x,\frac{T}{2}) > M_0;$

assim pela continuidade de ϕ_M existe $\eta > 0$ tal que,

$$\forall t \in [\frac{T}{2}-\eta, \frac{T}{2}+\eta], \quad \forall x \in (0,L) \quad \phi_M(x,t) \geq M_0. \tag{2.121}$$

Agora como $\phi_M(x,0) = \phi_M(x,T) = |x-x_0|^2 - \beta\frac{T^2}{4} + M_0$.

Portanto, com a escolha de β e a hipótese sobre T

$\dfrac{4}{T^2} \sup\limits_{x\in[0,L]} |x-x_0|^2 < \beta$ implica em $\sup\limits_{x\in[0,L]} |x-x_0|^2 < \beta\dfrac{T^2}{4}$ então $\sup\limits_{x\in[0,L]} |x-x_0|^2 - \beta\dfrac{T^2}{4} < 0$

logo

$\phi_M(x,0) = \phi_M(x,T) < M_0$

e pela continuidade da ϕ_M

$$\exists \delta > 0, \forall t \in [0,\delta] \cup [T-\delta, T] \quad \phi_M(x,t) \leq M_0 \tag{2.122}$$

escolha η e δ tal que $\eta + \delta < \frac{T}{2}$.

Seja $\theta_\delta \in C_0^\infty([0,T])$ tal que

$\forall t \in [0,T] \quad 0 \leq \theta_\delta \leq 1, \quad e \quad \forall t \in [\delta, T-\delta] \quad \theta_\delta(t) = 1.$

Sejam

$$\begin{array}{l} U(x,t) = \theta_\delta u(x,t) \\ V(x,t) = \theta_\delta v(x,t) \\ Z(x,t) = \theta_\delta z(x,t); \end{array} \tag{2.123}$$

fazendo-se os cálculos

$$\begin{array}{l} U_x(x,t) = \theta_\delta u_x(x,t), \quad U_{xx}(x,t) = \theta_\delta u_{xx}(x,t) \\ U_t(x,t) = \theta_{\delta t} u(x,t) + \theta_\delta u_t(x,t) \\ U_{tt}(x,t) = \theta_{\delta tt} u(x,t) + 2\theta_{\delta t} u_t(x,t) + \theta_\delta u_{tt}(x,t) \end{array} \tag{2.124}$$

e os análogo para V e Z, obtem-se que:

$$
\begin{aligned}
&L_{1,1}(U,V,Z) = \rho_1\theta_{\delta tt}u + 2\rho_1\theta_{\delta t}u_t\\
&L_{1,2}(U,V,Z) = \rho_2\theta_{\delta tt}v + 2\rho_1\theta_{\delta t}v_t\\
&L_{1,3}(U,V,Z) = \rho_1\theta_{\delta tt}z + 2\rho_1\theta_{\delta t}z_t\\
&U(0) = U(L) = V(0) = V(L) = Z(0) = Z(L) = 0\\
&U(.,0) = U(.,T) = V(.,0) = V(.,T) = Z(.,0) = Z(.,T) = 0\\
&U_t(.,0) = U_t(.,T) = V_t(.,0) = V_t(.,T) = Z_t(.,0) = Z_t(.,T) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.125}
$$

Se denotarmos para, $\lambda > 0$,

$\varphi(x,t) = e^{\lambda\phi_M(x,t)}$

podemos aplicar a desigualdade de Carleman para U, V, Z no intervalo $(0,T)$ (para tal basta fazer uma mudança de variável $\xi = t - \frac{T}{2}$ e $t \in (0,T)$ implica $\xi \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ e depois, volta-se ao intervalo $(0,T)$ pela mudança de variável).

Existem $s_0, \lambda_0 > 0$ e $C > 0$ tal que para $s \geq s_0$ e $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ temos que:

$$
\begin{aligned}
&s\lambda\int_0^T\int_0^L e^{2s\varphi_M}\varphi_M(\rho_1|\frac{\partial U}{\partial t}|^2 + \rho_2|\frac{\partial V}{\partial t}|^2 + \rho_1|\frac{\partial Z}{\partial t}|^2 + k|U_x|^2 + b|V_x|^2 + k_0|Z_x|^2\\
&+k|U_x + V + lZ|^2 + k_0|Z_x - lU|^2)dxdt\\
&+s^3\lambda^3\int_0^T\int_0^L e^{2s\varphi_M}\varphi_M^3(|U|^2 + |V|^2 + |Z|^2)dxdt\\
&\leq C\int_0^T\int_0^L e^{2s\varphi_M}|L_{1,1}(U,V,Z)|^2dxdt + C\int_0^T\int_0^L e^{2s\varphi_M}|L_{1,2}(U,V,Z)|^2dxdt\\
&+C\int_0^T\int_0^L e^{2s\varphi_M}|L_{1,3}(U,V,Z)|^2dxdt + Cs\lambda\int_0^T e^{2s\varphi_M(L,t)}|U_x(L)|^2dt\\
&+Cs\lambda\int_0^T e^{2s\varphi_M(L,t)}|V_x(L)|^2dt + Cs\lambda\int_0^T e^{2s\varphi_M(L,t)}|Z_x(L)|^2dt.
\end{aligned}
\tag{2.126}
$$

Usando as desigualdades de Schwarz e Poincaré e o fato de $\theta_\delta \in C_0^\infty([0,T])$ e suas derivadas se anularem em $[\delta, T-\delta]$, temos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^L e^{2s\varphi_M}|L_{1,1}(U,V,Z)|^2dxdt+\int_0^T\int_0^L e^{2s\varphi_M}|L_{1,2}(U,V,Z)|^2dxdt\\
&+\int_0^T\int_0^L e^{2s\varphi_M}|L_{1,3}(U,V,Z)|^2dxdt\\
&\le C_1\int_0^\delta\int_0^L e^{2se^{\lambda M_0}}(\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2+\rho_2|\frac{\partial}{\partial t}|^2+\rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2+k|u_x|^2+b|v_x|^2+k_0|z_x|^2\\
&+k|u_x+v+lz|^2+k_0|z_x-lu|^2)dxdt+\\
&C_1\int_{T-\delta}^T\int_0^L e^{2se^{\lambda M_0}}(\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2+\rho_2|\frac{\partial}{\partial t}|^2+\rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2\\
&+k|u_x|^2+b|v_x|^2+k_0|z_x|^2+k|u_x+v+lz|^2+k_0|z_x-lu|^2)dxdt.
\end{aligned}
\tag{2.127}
$$

Por outro lado $U=u,V=v,Z=z$ em $[\frac{T}{2}-\eta,\frac{T}{2}+\eta]$ logo

$$
\begin{aligned}
&s\lambda\int_0^T\int_0^L e^{2s\varphi_M}\varphi_M(\rho_1|\frac{\partial U}{\partial t}|^2+\rho_2|\frac{\partial V}{\partial t}|^2+\rho_1|\frac{\partial Z}{\partial t}|^2+k|U_x|^2+b|V_x|^2+k_0|Z_x|^2\\
&+k|U_x+V+lZ|^2+k_0|Z_x-lU|^2)dxdt\\
&\ge s\lambda\int_{\frac{T}{2}-\eta}^{\frac{T}{2}+\eta}\int_0^L e^{2se^{\lambda M_0}}(\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2+\rho_2|\frac{\partial v}{\partial t}|^2+\rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2\\
&+k|u_x|^2+b|v_x|^2+k_0|z_x|^2+k|u_x+v+lz|^2+k_0|z_x-lu|^2)dxdt,
\end{aligned}
\tag{2.128}
$$

de (2.127), (2.128) e a desigualdade de Carleman (2.126) dividindo por $e^{2se^{\lambda M_0}}$ temos

$$
\begin{aligned}
&s\lambda\int_{\frac{T}{2}-\eta}^{\frac{T}{2}+\eta}\int_0^L(\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2+\rho_2|\frac{\partial v}{\partial t}|^2+\rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2\\
&+k|u_x|^2+b|v_x|^2+k_0|z_x|^2+k|u_x+v+lz|^2+k_0|z_x-lu|^2)dxdt\\
&\le C_1\int_0^\delta\int_0^L(\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2+\rho_2|\frac{\partial}{\partial t}|^2+\rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2+k|u_x|^2+b|v_x|^2+k_0|z_x|^2\\
&+k|u_x+v+lz|^2+k_0|z_x-lu|^2)dxdt+\\
&C_1\int_{T-\delta}^T\int_0^L(\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2+\rho_2|\frac{\partial}{\partial t}|^2+\rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2\\
&+k|u_x|^2+b|v_x|^2+k_0|z_x|^2+k|u_x+v+lz|^2+k_0|z_x-lu|^2)dxdt\\
&+Cs\lambda\int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t)-e^{\lambda M_0})}|U_x(L)|^2dt\\
&+Cs\lambda\int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t)-e^{\lambda M_0})}|V_x(L)|^2dt+Cs\lambda\int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t)-e^{\lambda M_0})}|Z_x(L)|^2dt.
\end{aligned}
\tag{2.129}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\delta \int_0^L (\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + \rho_2|\frac{\partial v}{\partial t}|^2 + \rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2 + k|u_x|^2 + b|v_x|^2 + \\
&k_0|z_x|^2 + k|u_x + v + lz|^2 + k_0|z_x - lu|^2)dxdt \\
&+ \int_{T-\delta}^T \int_0^L (\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + \rho_2|\frac{\partial v}{\partial t}|^2 + \rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2 \\
&+k|u_x|^2 + b|v_x|^2 + k_0|z_x|^2 + k|u_x + v + lz|^2 + k_0|z_x - lu|^2)dxdt \\
&\leq C(E(t) + \widetilde{E}(t)) \leq C(E(0) + \widetilde{E}(0)) \leq CE(0),
\end{aligned} \tag{2.130}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&s\lambda \int_{\frac{T}{2}-\eta}^{\frac{T}{2}+\eta} \int_0^L (\rho_1|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + \rho_2|\frac{\partial v}{\partial t}|^2 + \rho_1|\frac{\partial z}{\partial t}|^2 \\
&+k|u_x|^2 + b|v_x|^2 + k_0|z_x|^2 + k|u_x + v + lz|^2 + k_0|z_x - lu|^2)dxdt \\
&\geq Cs\lambda \int_{\frac{T}{2}-\delta}^{\frac{T}{2}+\delta} E(t)dt = Cs\lambda \int_{\frac{T}{2}-\delta}^{\frac{T}{2}+\delta} E(0)dt = C_2 s\lambda E(0).
\end{aligned} \tag{2.131}
$$

De (2.130) e (2.131) para $s\lambda$ suficientemente grande se tem que:

$$
\begin{aligned}
&s\lambda E(0) \leq Cs\lambda \int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t) - e^{\lambda M_0})}|U_x(L)|^2 dt \\
&+Cs\lambda \int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t) - e^{\lambda M_0})}|V_x(L)|^2 dt + Cs\lambda \int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t) - e^{\lambda M_0})}|Z_x(L)|^2 dt \\
&\leq Cs\lambda \int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t) - e^{\lambda M_0})}|\theta_\delta u_x(L)|^2 dt \\
&+Cs\lambda \int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t) - e^{\lambda M_0})}|\theta_\delta v_x(L)|^2 dt + Cs\lambda \int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t) - e^{\lambda M_0})}|\theta_\delta z_x(L)|^2 dt \\
&\leq Cs\lambda \int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t) - e^{\lambda M_0})}|u_x(L)|^2 dt \\
&+Cs\lambda \int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t) - e^{\lambda M_0})}|v_x(L)|^2 dt + Cs\lambda \int_0^T e^{2s(\varphi_M(L,t) - e^{\lambda M_0})}|z_x(L)|^2 dt \\
&\leq Cs\lambda \int_0^T |u_x(L)|^2 dt \\
&+Cs\lambda \int_0^T |v_x(L)|^2 dt + Cs\lambda \int_0^T |z_x(L)|^2 dt,
\end{aligned} \tag{2.132}
$$

e da desigualdade anterior, temos o desejado. □

2.5 Controle na fronteira para o sistema de Bresse utilizando o método HUM

Seja $x_0 < 0$ arbitrário, porém fixado.

Definamos:

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - x_0. \end{aligned} \tag{2.133}$$

Ponhamos

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 = \{0\}, \\ &\Gamma_1 = \{L\}, \\ &\textstyle\sum_0 = \Gamma_0 \times]0, T[, \\ &\textstyle\sum_1 = \Gamma_1 \times]0, T[. \end{aligned} \tag{2.134}$$

Seja

$$R_0 = 2 \sup_{x \in [0,L]} |x - x_0|. \tag{2.135}$$

Consideremos o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0[\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \varphi(0, t) = \psi(0, t) = \omega(0, t) = 0, \quad t \in (0, T) \\ \varphi(L, t) = g_1(t), \quad \phi(L, t) = g_2(t), \quad \omega(L, t) = g_3(t), \quad t \in (0, T) \\ \varphi(., 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(., 0) = \varphi_1, \quad em \quad (0, L) \\ \psi(., 0) = \psi_0, \quad \psi_t(., 0) = \psi_1, \quad em \quad (0, L) \\ \omega(., 0) = \omega_0, \quad \omega_t(., 0) = \omega_1, \quad em \quad (0, L). \end{array} \right. \tag{2.136}$$

O nosso objetivo é encontrar $T_0 > 0$ e um espaço de Hilbert H, de forma que se $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1\} \in H$ então existem controles g_1, g_2, g_3 em $]0, T[$ tal que a solução de (2.136) verifica:

$$\varphi(T) = \varphi'(T) = \psi(T) = \psi'(T) = \omega(T) = \omega'(T) = 0, \quad \forall T > T_0.$$

Seja $\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\} \in (D(0, L) \times D(0, L))^3$ e consideremos o sistema homogêneo de Bresse:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 u_{tt} - k(u_x + v + lz)_x - k_0 l[z_x - lu] = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 v_{tt} - bv_{xx} + k(u_x + v + lz) = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 z_{tt} - k_0[z_x - lu]_x + kl(u_x + v + lz) = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = v(0, t) = z(0, t) = 0, \quad t \in (0, T) \\ u(L, t) = 0 = v(L, t) = z(L, t) = 0, \quad t \in (0, T) \\ u(., 0) = u_0, \quad u_t(., 0) = u_1, \quad em \quad (0, L) \\ v(., 0) = v_0, \quad v_t(., 0) = v_1, \quad em \quad (0, L) \\ z(., 0) = z_0, \quad z_t(., 0) = z_1, \quad em \quad (0, L). \end{array} \right. \tag{2.137}$$

O sistema (2.137) tem uma única solução na classe:

$$\{u, v, z\} \in [C([0, T]; H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H_0^1(0, L))]^3. \tag{2.138}$$

Em verdade, temos o seguinte resultado de regularidade:

$$\{u, v, z\} \in C^{\infty}([0, L] \times (0, T)) \tag{2.139}$$

e,em particular, $u_x(L), v_x(L), z_x(L) \in L^2(0, T)$.

Consideremos o problema retrógrado:

$$\begin{cases} \rho_1 \Phi_{tt} - k(\Phi_x + \Psi + lW)_x - k_0 l[W_x - l\phi] = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \Psi_{tt} - b\Psi_{xx} + k(\Phi_x + \Psi + lW) = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 W_{tt} - k_0[W_x - l\Phi]_x + kl(\Phi_x + \Psi + lW) = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \Phi(0, t) = \Psi(0, t) = W(0, t) = 0, \quad t \in (0, T) \\ \Phi(L, t) = u_x(L), \quad \Psi(L, t) = v_x(L), \quad W(L, t) = z_x(L), \quad t \in (0, T) \\ \Phi(., T) = \Phi_t(., T) = \Psi(., T) = \Psi_t(., T) = W(., T) = W_t(., T) = 0, \quad em \quad (0, L), \end{cases} \tag{2.140}$$

onde $\{u, v, z\}$ é solução de (2.137). Fazendo-se a reversão no tempo, o problema (2.140) admite uma única solução $\{\Phi, \Psi, W\}$ por transposição, na classe

$$\{\Phi, \Psi, W\} \in [C([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(0, L))]^3. \tag{2.141}$$

Em virtude da regularidade das funções $\{\Phi, \Psi, W\}$ e de unicidade dos problemas (2.137), (2.140) definimos:

$$\begin{aligned} &\wedge : (D(0, L) \times D(0, L))^3 \to (H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L))^3 \\ &\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\} \mapsto \wedge\{(u_0, u_1), (v_0, v_1), (z_0, z_1)\} \\ &= \{(\rho_1 \Phi'(0), -\rho_1 \Phi(0)), (\rho_2 \Psi'(0), -\rho_2 \Psi(0)), (\rho_1 W'(0), -\rho_1 W(0))\}. \end{aligned} \tag{2.142}$$

Agora desenvolveremos um raciocínio que nos permitirá obter uma relação entre a aplicação $\wedge$, definida anteriormente e as derivadas $u_x(L)$, $v_x(L)$, $z_x(L)$ do problema (2.137).

Como $H_0^2(0, T)$ é denso em $L^2(0, T)$ e $u_x(L), v_x(L), z_x(L) \in L^2(0, T)$, existem $(g_{1\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}, (g_{2\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}, (g_{3\mu})_{\mu \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(0, T)$ tais que

$$\begin{aligned} g_{1\mu} &\to u_x(L) \\ g_{2\mu} &\to v_x(L) \\ g_{3\mu} &\to z_x(L). \end{aligned} \tag{2.143}$$

Consideremos a sequência de problemas

$$\begin{cases} \rho_1\Phi_{\mu tt} - k(\Phi_{\mu x} + \Psi_\mu + lW_\mu)_x - k_0 l[W_x - l\Phi] = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2\Psi_{\mu tt} - b\Psi_{\mu xx} + k(\Phi_{\mu x} + \Psi_\mu + lW_\mu) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1 W_{\mu tt} - k_0[W_{x\mu} - l\Phi_\mu]_x + kl(\Phi_{\mu x} + \Psi_\mu + lW_\mu) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \Phi_\mu(0,t) = \Psi_\mu(0,t) = W_\mu(0,t) = 0, \quad t\in(0,T) \\ \Phi_\mu(L,t) = g_{1\mu}(t), \quad \Psi_\mu(L,t) = g_{2\mu}(t), \quad W_\mu(L,t) = g_{3\mu}(t), \quad t\in(0,T) \\ \Phi_\mu(.,T) = \Phi_{\mu t}(.,T) = \Psi_\mu(.,T) = \Psi_{\mu t}(.,T) \\ = W_\mu(.,T) = W_{\mu t}(.,T) = 0, \quad em \quad (0,L). \end{cases} \tag{2.144}$$

Fazendo a reversão do tempo, então para cada $\mu \in \mathbb{N}$, resulta que o problema (2.144) admite uma única solução na classe

$$\{\Phi_\mu, \Psi_\mu, W_\mu\} \in [C([0,T];H^1(0,L)) \cap C^1([0,T];L^2(0,L))]^3$$

verificando

$$\begin{cases} \rho_1\Phi_{\mu tt} - k(\Phi_{\mu x} + \Psi_\mu + lW_\mu)_x - k_0 l[W_x - l\phi] = 0, \\ \rho_2\Psi_{\mu tt} - b\Psi_{\mu xx} + k(\Phi_{\mu x} + \Psi_\mu + lW_\mu) = 0, \\ \rho_1 W_{\mu tt} - k_0[W_{x\mu} - l\Phi_\mu]_x + kl(\Phi_{\mu x} + \Psi_\mu + lW_\mu) = 0. \end{cases} \tag{2.145}$$

Mais além, para cada μ, a solução $\{\Phi_\mu, \Psi_\mu, W_\mu\}$ de (2.144) é também solução por transposição. Resulta daí que $\{(\Phi_\mu - \Phi), (\Psi_\mu - \Psi), (W_\mu - W)\}$ (onde $\{\Phi, \Psi, W\}$ é solução por transposição de (2.140)) é a única solução por transposição de:

$$\begin{cases} \rho_1(\Phi_\mu - \Phi)_{tt} - k((\Phi_\mu - \Phi)_x + (\Psi_\mu - \Psi) + l(W_\mu - W))_x \\ -k_0 l[(W_\mu - W)_x - l(\Phi_\mu - \Phi)] = 0, \\ \rho_2(\Psi_\mu - \Psi)_{tt} - b(\Psi_\mu - \Psi)_{xx} + kl((\Phi_\mu - \Phi)_x + (\Psi_\mu - \Psi) + l(W_\mu - W)) = 0, \\ \rho_1(W_\mu - W)_{tt} - k_0[(W_\mu - W)_x - l(\Phi_\mu - \Phi)]_x \\ +kl((\Phi_\mu - \Phi)_x + (\Psi_\mu - \Psi) + l(W_\mu - W)) = 0, \\ \Phi_\mu(0,t) - \Phi(0,t) = \Psi_\mu(0,t) - \Psi(0,t) = W_\mu(0,t) - W_(0,t) = 0, \\ \Phi_\mu(L,t) - \Phi_\mu(L,t) = g_{1\mu}(t) - u_x(L), \quad \Psi_\mu(L,t) - \Psi(L,t) = g_{2\mu}(t) - v_x(L), \\ W_\mu(L,t) - W_\mu(L,t) = g_{3\mu}(t) - z_x(L), \\ \Phi_\mu(.,T) - \Phi(.,T) = \Phi_{\mu t}(.,T) - \Phi_t(.,T) = \Psi_\mu(.,T) - \Psi(.,T) \\ = \Psi_{\mu t}(.,T) - \Psi_t(.,T) = W_\mu(.,T) - W(.,T) = W_{\mu t}(.,T) - W_t(.,T) = 0. \end{cases} \tag{2.146}$$

Além disso, de (2.40) segue que:

$$\begin{aligned} &\|\Phi_\mu - \Phi\|_{C([0,T];L^2(0,L))} + \|\Psi_\mu - \Psi\|_{C([0,T];L^2(0,L))} + \|W_\mu - W\|_{C([0,T];L^2(0,L))} \\ &\leq C\{\|g_{1\mu} - u_x(L)\|_{L^2(0,L)} + \|g_{2\mu} - v_x(L)\|_{L^2(0,L)} + \|g_{3\mu} - z_x(L)\|_{L^2(0,L)}\}, \end{aligned} \tag{2.147}$$

e de (2.85), obtemos:

$$\begin{aligned}&\|\Phi'_\mu-\Phi'\|_{C([0,T];H^{-1}(0,L))}+\|\Psi'_\mu-\Psi'\|_{C([0,T];H^{-1}(0,L))}+\|W'_\mu-W'\|_{C([0,T];H^{-1}(0,L))}\\&\leq C\{\|g_{1\mu}-u_x(L)\|_{L^2(0,L)}+\|g_{2\mu}-v_x(L)\|_{L^2(0,L)}+\|g_{3\mu}-z_x(L)\|_{L^2(0,L)}\}.\end{aligned} \tag{2.148}$$

De (2.143), (2.147) e (2.148) resulta que:

$$\begin{array}{l}\Phi_\mu \to \Phi \quad em \quad C([0,T];L^2(0,L)),\\ \Psi_\mu \to \Psi \quad em \quad C([0,T];L^2(0,L)),\\ W_\mu \to W \quad em \quad C([0,T];L^2(0,L)),\end{array} \tag{2.149}$$

e

$$\begin{array}{l}\Phi'_\mu \to \Phi' \quad em \quad C([0,T];H^{-1}(0,L)),\\ \Psi'_\mu \to \Psi' \quad em \quad C([0,T];H^{-1}(0,L)),\\ W'_\mu \to W' \quad em \quad C([0,T];H^{-1}(0,L)).\end{array} \tag{2.150}$$

Por outro lado, dados $X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1 \in D(0,L)$ existe uma solução $\{X,Y,Z\}$ de (2.137) na classe (2.138) com dados iniciais $\{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\}$. Compondo (2.145) com X, Y, Z resulta que:

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^T \langle \rho_1\Phi_{\mu tt}-k(\Phi_{\mu x}+\Psi_\mu+lW_\mu)_x-k_0l(W_x-l\phi),X\rangle dt=0\\ \displaystyle\int_0^T \langle \rho_2\Psi_{\mu tt}-b\Psi_{\mu xx}+k(\Phi_{\mu x}+\Psi_\mu+lW_\mu),Y\rangle dt=0\\ \displaystyle\int_0^T \langle \rho_1W_{\mu tt}-k_0(W_{x\mu}-l\Phi_\mu)_x+kl(\Phi_{\mu x}+\Psi_\mu+lW_\mu),Z\rangle dt=0.\end{array}\right. \tag{2.151}$$

Integrando-se por partes obtemos (usando a extensão $\widetilde{\Delta}: H^1(0,L)\to H^{-1}(0,L)$)

$$\begin{array}{l}\displaystyle\rho_1(\Phi_\mu(.,0),X_1)-\rho_1\langle\Phi'_\mu(.,0),X_0\rangle+k\int_0^T\langle g_{1\mu}(t),X_x(L)\rangle dt=0\\ \displaystyle\rho_2(\Psi_\mu(.,0),Y_1)-\rho_2\langle\Psi'_\mu(.,0),Y_0\rangle+b\int_0^T\langle g_{2\mu}(t),Y_x(L)\rangle dt=0\\ \displaystyle\rho_1(W_\mu(.,0),Z_1)-\rho_1\langle W'_\mu(.,0),Z_0\rangle+k_0\int_0^T\langle g_{3\mu}(t),Z_x(L)\rangle dt=0.\end{array} \tag{2.152}$$

De (2.143), (2.149), (2.150) e (2.152) resulta que

$$
\begin{aligned}
&k\int_0^T \langle u_x(L), X_x(L)\rangle dt + b\int_0^T \langle v_x(L), Y_x(L)\rangle dt + k_0\int_0^T \langle z_x(L), Z_x(L)\rangle dt\\
&= -\rho_1(\Phi(.,0), X_1) + \rho_1\langle \Phi'(.,0), X_0\rangle - \rho_2(\Psi(.,0), Y_1)\\
&+\rho_2\langle \Psi'(.,0), Y_0\rangle - \rho_1(W(.,0), Z_1) + \rho_1\langle W'(.,0), Z_0\rangle,
\end{aligned}
\tag{2.153}
$$

onde $\{X,Y,Z\}$ é solução de (2.137) com dados $\{X_1, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\} \in [D(0,L) \times D(0,L)]^3$ e $\{u,v,z\}$ é a única solução de (2.137) com dados $\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}$.

Note que (2.153) pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
&k\int_0^T \langle u_x(L), X_x(L)\rangle dt + b\int_0^T \langle v_x(L), Y_x(L)\rangle dt + k_0\int_0^T \langle z_x(L), Z_x(L)\rangle dt\\
&= \langle \{\rho_1(\Phi'(.,0), -\Phi(.,0)), \rho_2(\Psi'(.,0), -\Psi(.,0)), \rho_1(W'(.,0), -W(.,0))\},\\
&\{(X_0, X_1), (Y_0, Y_1), (Z_0, Z_1)\}\rangle_{[H^{-1}(0,L)\times L^2(0,L)]^3, [H^{-1}(0,L)\times L^2(0,L)]^3}\\
&= \langle \wedge\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}, \{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\}\rangle_{(D'(0,l))^6, (D(0,L))^6}.
\end{aligned}
\tag{2.154}
$$

Definimos

$$
\begin{aligned}
&(.,.)_* : (D(0,L))^6 \times (D(0,L))^6 \to \mathbb{R}\\
&\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}, \{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\} \mapsto\\
&k\int_0^T \langle u_x(L), X_x(L)\rangle dt + b\int_0^T \langle v_x(L), Y_x(L)\rangle dt + k_0\int_0^T \langle z_x(L), Z_x(L)\rangle dt.
\end{aligned}
\tag{2.155}
$$

Claramente a aplicação em (2.155) é linear e positiva.

Para provar que (2.155) é um produto interno em $(D(0,L))^6 \times (D(0,L))^6$, devemos mostrar que a aplicação é estritamente positiva. Mais precisamente provaremos que:

$$
\begin{aligned}
&(\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}, \{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\})_* = 0\\
&\Leftrightarrow u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = z_0 = z_1 = 0
\end{aligned}
\tag{2.156}
$$

Se

$$
\begin{aligned}
&u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = z_0 = z_1 = 0\\
&\Rightarrow (\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}, \{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\})_* = 0
\end{aligned}
\tag{2.157}
$$

é imediato.

Suponhamos que

$$\begin{aligned}&(\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\},\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\})_*\\&=k\int_0^T|u_x(L)|^2dt+b\int_0^T|v_x(L)|^2dt+k_0\int_0^T|z_x(L)|^2dt=0\end{aligned}\tag{2.158}$$

então pela desigualdade inversa $\forall\ T>2\sup_{x\in[0,L]}|x-x_0|=2(L-x_0),\quad x_0<0.$

$$0\le E(0)\le C_0\{k\int_0^T|u_x(L)|^2dt+b\int_0^T|v_x(L)|^2dt+k_0\int_0^T|z_x(L)|^2dt=0\}\tag{2.159}$$

o que implica $u_0=u_1=v_0=v_1=z_0=z_1=0$.

Do exposto resulta que a aplicação

$$\begin{aligned}&\|.\|_*:(D(0,L))^6\to\mathbb{R}^+\\&\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\mapsto\\&(k\int_0^T|u_x(L)|^2dt+b\int_0^T|v_x(L)|^2dt+k_0\int_0^T|z_x(L)|^2dt)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{2.160}$$

define uma norma em $(D(0,L))^6$. Consideremos F o espaço de Hilbert obtido completando $(D(0,L))^6$ com a norma $\|.\|_*$, isto é

$$F=\overline{(D(0,L)\times D(0,L))^3}^{\|.\|_*}.\tag{2.161}$$

Pelas desigualdades direta e inversa existem $C_1,C_2>0$ tais que

$$C_1E(0)\le k\int_0^T|u_x(L)|^2dt+b\int_0^T|v_x(L)|^2dt+k_0\int_0^T|z_x(L)|^2dt\le C_2E(0),\tag{2.162}$$

logo

$$\begin{aligned}&C_1'\|\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\|_{(H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3}\\ \le\ &\|\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\|_*\le C_2'\|\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\|_{(H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3},\\&\forall\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\in(D(0,L)\times D(0,L))^3.\end{aligned}\tag{2.163}$$

Resulta de (2.160) e (2.163) que a norma $\|\{.\}\|_*$ é equivalente à norma $\|\{.\}\|_{(H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3}$ em $(D(0,L)\times D(0,L))^3$.

Consequentemente de (2.161) obtemos:

$$\begin{aligned} &F=\overline{(D(0,L)\times D(0,L))^3}^{\|.\|_*}=\overline{(D(0,L)\times D(0,L))^3}^{\|.\|_{(H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3}} \\ &=(H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3. \end{aligned} \tag{2.164}$$

Munindo $(D(0,L))^6$ da topologia dada pela norma $\|.\|_*$ provaremos que o operador $\wedge$ dado em (2.142), que é obviamente linear, é contínua. De fato de (2.154), (2.155) resulta que

$$\begin{aligned} &|\langle \wedge\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\},\{X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z_0,Z_1\}\rangle|_{F',F} \\ &=|(\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\},\{X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z_0,Z_1\})_*| \\ &\le \|\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\|_*\|\{X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z_0,Z_1\}\|_* \\ &\forall\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\},\{X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z_0,Z_1\}\in D^6(0,L). \end{aligned} \tag{2.165}$$

Pela densidade de $(D(0,L))^6$ em F segue que:

$$\begin{aligned} &|\langle \wedge\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\},\{A_0,A_1,B_0,B_1,C_0,C_1\}\rangle|_{F',F} \\ &\le \|\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\|_*\|\{A_0,A_1,B_0,B_1,C_0,C_1\}\|_* \\ &\forall\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\in D^6(0,L), \quad e \quad \{A_0,A_1,B_0,B_1,C_0,C_1\}\in F, \end{aligned} \tag{2.166}$$

o que implica que:

$$\begin{aligned} &\|\langle \wedge\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\|_{F'}\le \|\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\|_* \\ &\forall\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\}\in D^6(0,L), \end{aligned} \tag{2.167}$$

o que prova a continuidade do operador $\wedge$. Agora, pela densidade de $(D(0,L))^6$ em F podemos estender $\wedge$, de maneira única, a um operador linear e contínuo:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\wedge}:F\to F' \\ &\{A_0,A_1,B_0,B_1,C_0,C_1\}\mapsto \widetilde{\wedge}\{A_0,A_1,B_0,B_1,C_0,C_1\} \\ &=\lim_{\mu\to+\infty}\wedge\{A_{0\mu},A_{1\mu},B_{0\mu},B_{1\mu},C_{0\mu},C_{1\mu}\} \end{aligned} \tag{2.168}$$

onde:

$$\begin{aligned} &\{A_{0\mu},A_{1\mu},B_{0\mu},B_{1\mu},C_{0\mu},C_{1\mu}\}_{\mu\in\mathbb{N}}\subset (D(0,L))^6 \\ &\|\{A_{0\mu},A_{1\mu},B_{0\mu},B_{1\mu},C_{0\mu},C_{1\mu}\}-\{A_0,A_1,B_0,B_1,C_0,C_1\}\|_*\to 0. \end{aligned} \tag{2.169}$$

Notemos que a definição anterior independe da sequência $\{A_{0\mu},A_{1\mu},B_{0\mu},B_{1\mu},C_{0\mu},C_{1\mu}\}$ que aproxima de $\{A_0,A_1,B_0,B_1,C_0,C_1\}$.

Provaremos que

$$\begin{aligned} &\widetilde{\wedge}\{A_0,A_1,B_0,B_1,C_0,C_1\}=\{\rho_1\Phi'(.,0),-\rho_1\Phi(.,0),\rho_2\Psi'(.,0),-\rho_2\Psi(.,0) \\ &,\rho_1W'(.,0),-\rho_1W(.,0)\} \end{aligned} \tag{2.170}$$

onde $\{\Phi, \Psi, W\}$ é solução por transposição de

$$\begin{cases} \rho_1 \Phi_{tt} - k(\Phi_x + \Psi + lW)_x - k_0 l[W_x - l\phi] = 0 \\ \rho_2 \Psi_{tt} - b\Psi_{xx} + k(\Phi_x + \Psi + lW) = 0 \\ \rho_1 W_{tt} - k_0[W_x - l\Phi]_x + kl(\Phi_x + \Psi + lW) = 0 \\ \Phi(0,t) = \Psi(0,t) = W(0,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ \Phi(L,t) = A_x(L), \quad \Psi(L,t) = B_x(L), \quad W(L,t) = C_x(L), \quad t \in (0,T) \\ \Phi(.,T) = \Phi_t(.,T) = \Psi(.,T) = \Psi_t(.,T) = W(.,T) = W_t(.,T) = 0, \quad em \quad (0,L) \end{cases} \tag{2.171}$$

onde $\{A, B, C\}$ é solução de

$$\begin{cases} \rho_1 A_{tt} - k(A_x + B + lC)_x - k_0 l[C_x - lA] = 0 \\ \rho_2 B_{tt} - bB_{xx} + k(A_x + B + lC) = 0 \\ \rho_1 C_{tt} - k_0[C_x - lA]_x + kl(A_x + B + lC) = 0 \\ A(0,t) = B(0,t) = C(0,t) = A(L,t) = B(L,t) = C(L,t) = 0 \\ A(.,0) = A_0, A_t(.,0) = A_1 \\ B(.,0) = B_0, B_t(.,0) = B_1 \\ C(.,0) = C_0, C_t(.,0) = C_1. \end{cases} \tag{2.172}$$

Com efeito,

seja $\{A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1\} \in F$ e consideremos $\{A_{0\mu}, A_{1\mu}, B_{0\mu}, B_{1\mu}, C_{0\mu}, C_{1\mu}\} \subset D^6(0,L)$ tal que

$$\{A_{0\mu}, A_{1\mu}, B_{0\mu}, B_{1\mu}, C_{0\mu}, C_{1\mu}\} \to \{A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1\} \quad em \quad F. \tag{2.173}$$

Temos de (2.142) e (2.168) que

$$\begin{cases} \widetilde{\wedge}\{A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1\} = \lim\limits_{\mu \to +\infty} \wedge\{A_{0\mu}, A_{1\mu}, B_{0\mu}, B_{1\mu}, C_{0\mu}, C_{1\mu}\} \\ = \lim\limits_{\mu \to +\infty} \{\rho_1 \Phi'_\mu(.,0), -\rho_1 \Phi_\mu(.,0), \rho_2 \Psi'_\mu(.,0), -\rho_2 \Psi_\mu(.,0), \rho_1 W'_\mu(.,0), -\rho_1 W_\mu(.,0)\} \end{cases} \tag{2.174}$$

onde, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, $\{\Phi_\mu, \Psi_\mu, W_\mu\}$ é a única solução por transposição do problema:

$$
\begin{cases}
\rho_1\Phi_{\mu tt} - k(\Phi_{\mu x} + \Psi_\mu + lW_\mu)_x - k_0 l[W_{\mu x} - l\phi_\mu] = 0 \\
\rho_2\Psi_{\mu tt} - b\Psi_{\mu xx} + k(\Phi_{\mu x} + \Psi_\mu + lW_\mu) = 0 \\
\rho_1 W_{\mu tt} - k_0[W_{\mu x} - l\Phi_\mu]_x + kl(\Phi_{\mu x} + \Psi_\mu + lW_\mu) = 0 \\
\Phi_\mu(0,t) = \Psi_\mu(0,t) = W_\mu(0,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\
\Phi_\mu(L,t) = A_{\mu x}(L), \quad \Psi_\mu(L,t) = B_{\mu x}(L), \quad W_\mu(L,t) = C_{\mu x}(L), \quad t \in (0,T) \\
\Phi_\mu(.,T) = \Phi_{\mu t}(.,T) = \Psi_\mu(.,T) = \Psi_{\mu t}(.,T) \\
= W_\mu(.,T) = W_{\mu t}(.,T) = 0, \quad em \quad (0,L)
\end{cases}
\tag{2.175}
$$

onde $\{A_\mu, B_\mu, C_\mu\}$ é solução de

$$
\begin{cases}
\rho_1 A_{\mu tt} - k(A_{\mu x} + B_\mu + lC_\mu)_x - k_0 l[C_{\mu x} - lA_\mu] = 0 \\
\rho_2 B_{\mu tt} - bB_{\mu xx} + k(A_{\mu x} + B_\mu + lC_\mu) = 0 \\
\rho_1 C_{\mu tt} - k_0[c_{\mu x} - lA_\mu]_x + kl(A_{\mu x} + B_\mu + lC_\mu) = 0 \\
A_\mu(0,t) = B_\mu(0,t) = C_\mu(0,t) = A_\mu(L,t) = B_\mu(L,t) = C_\mu(L,t) = 0 \\
A_\mu(.,0) = A_{\mu 0}, A_{\mu t}(.,0) = A_{\mu 1} \\
B_\mu(.,0) = B_{\mu 0}, B_{\mu t}(.,0) = B_{\mu 1} \\
C_\mu(.,0) = C_{\mu 0}, C_{\mu t}(.,0) = C_{\mu 1}.
\end{cases}
\tag{2.176}
$$

Resulta daí que $\{\Phi_\mu - \Phi, \Psi_\mu - \Psi, W_\mu - W\}$ é a única solução por transposição de

$$
\begin{cases}
\rho_1(\Phi_\mu - \Phi)_{tt} - k((\Phi_\mu - \Phi)_x + (\Psi_\mu - \Psi) + l(W_\mu - W))_x \\
-k_0 l[(W_\mu - W)_x - l(\Phi_\mu - \Phi)] = 0 \\
\rho_2(\Psi_\mu - \Psi)_{tt} - b(\Psi_\mu - \Psi)_{xx} + k((\Phi_\mu - \Phi)_x + (\Psi_\mu - \Psi) + l(W_\mu - W)) = 0 \\
\rho_1(W_\mu - W)_{tt} - k_0[(W_\mu - W)_x - l(\Phi_\mu - \Phi)]_x \\
+kl((\Phi_\mu - \Phi)_x + (\Psi_\mu - \Psi) + l(W_\mu - W)) = 0 \\
\Phi_\mu(0,t) - \Phi(0,t) = \Psi_\mu(0,t) - \Psi(0,t) = W_\mu(0,t) - W(0,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\
\Phi_\mu(L,t) - \Phi(L,t) = A_{\mu x}(L) - A_x(L), \Psi_\mu(L,t) - \Psi(L,t) = B_{\mu x}(L) - B_x(L) \\
W_\mu(L,t) - W(L,t) = C_{\mu x}(L) - C_x(L), \\
\Phi_\mu(.,T) - \Phi_(.,T) = \Phi_{\mu t}(.,T) - \Phi_t(.,T) = \Psi_\mu(.,T) - \Psi(.,T) \\
= \Psi_{\mu t}(.,T) - \Psi_t(.,T) = W_\mu(.,T) - W(.,T) = W_{\mu t}(.,T) - W_t(.,T) = 0
\end{cases}
\tag{2.177}
$$

onde $\{A_\mu - A, B_\mu - B, C_\mu - C\}$ é a única solução de

$$\left\{\begin{array}{l}\rho_1(A_\mu - A)_{tt} - k((A_\mu - A)_x + (B_\mu - B) + l(C_\mu - C))_x \\ -k_0 l[(C_\mu - C)_x - l(A_\mu - A)] = 0 \\ \rho_2(B_\mu - B)_{tt} - b(B_\mu - B)_{xx} + k((A_\mu - A)_x + (B_\mu - B) + l(C_\mu - C)) = 0 \\ \rho_1(C_\mu - C)_{tt} - k_0[(C_\mu - C)_x - l(A_\mu - A)]_x \\ +kl((A_\mu - A)_x + (B_\mu - B) + l(C_\mu - C)) = 0 \\ A_\mu(0,t) - A(0,t) = B_\mu(0,t) - B(0,t) = C_\mu(0,t) - C(0,t) = A_\mu(L,t) - A(L,t) \\ = B_\mu(L,t) - B(L,t) = C_\mu(L,t) - C(L,t) = 0 \\ A_\mu(.,0) - A(.,0) = A_{0\mu} - A_0, A_{\mu t}(.,0) - A_t(.,0) = A_{1\mu} - A_1 \\ B_\mu(.,0) - B(.,0) = B_{0\mu} - B_0, B_{\mu t}(.,0) - B_t(.,0) = B_{1\mu} - B_1 \\ C_\mu(.,0) - C(.,0) = C_{0\mu} - C_0, C_{\mu t}(.,0) - C(.,0) = C_{1\mu} - C_1.\end{array}\right. \tag{2.178}$$

De (2.40) e (2.85)

$$\begin{array}{l}\|\Phi_\mu - \Phi\|_{C([0,T];L^2(0,L))} + \|\Psi_\mu - \Psi\|_{C([0,T];L^2(0,L))} + \|W_\mu - W\|_{C([0,T];L^2(0,L))} \\ +\|\Phi'_\mu - \Phi'\|_{C([0,T];H^{-1}(0,L))} + \|\Psi'_\mu - \Psi'\|_{C([0,T];H^{-1}(0,L))} + \|W'_\mu - W'\|_{C([0,T];H^{-1}(0,L))} \\ \leq C\{k\|A_{\mu x}(L) - A_x(L)\|_{L^2(0,L)} + b\|B_{\mu x}(L) - B_x(L)\|_{L^2(0,L)} \\ +k_0\|C_{\mu x}(L) - C_x(L)\|_{L^2(0,L)}\} \\ = C(\|\{A_{0\mu} - A_0, A_{1\mu} - A_1, B_{0\mu} - B_0, B_{1\mu} - B_1, C_{0\mu} - C_0, C_{1\mu} - C_1\}\|_*)\end{array} \tag{2.179}$$

onde a última desigualdade decorre de (2.160). Finalmente de (2.173) e (2.179) resulta que:

$$\begin{array}{ll}\Phi_\mu \to \Phi & em \;\; C([0,T];L^2(0,L)) \\ \Psi_\mu \to \Psi & em \;\; C([0,T];L^2(0,L)) \\ W_\mu \to W & em \;\; C([0,T];L^2(0,L))\end{array} \tag{2.180}$$

$$\begin{array}{ll}\Phi'_\mu \to \Phi' & em \;\; C([0,T];H^{-1}(0,L)) \\ \Psi'_\mu \to \Psi' & em \;\; C([0,T];H^{-1}(0,L)) \\ W'_\mu \to W' & em \;\; C([0,T];H^{-1}(0,L)).\end{array} \tag{2.181}$$

De (2.174),(2.180) e (2.181) segue (2.170).

Definamos:

$$\begin{array}{l}b(\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\},\{X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z_0,Z_1\}) \\ = \langle\widetilde{\wedge}\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\},\{X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z_0,Z_1\}\rangle \\ \forall\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\},\{X_0,X_1,Y_0,Y_1,Z_0,Z_1\} \in F\end{array} \tag{2.182}$$

que é claramente uma forma bilinear.

Provaremos, a seguir que $b(.,.)$ é contínua e coerciva em F. Com efeito, sejam

$\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}, \{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\} \in F$ e

$(\{u_{0\mu}, u_{1\mu}, v_{0\mu}, v_{1\mu}, z_{0\mu}, z_{1\mu}\}), (\{X_{0\mu}, X_{1\mu}, Y_{0\mu}, Y_{1\mu}, Z_{0\mu}, Z_{1\mu}\}) \subset (D(0,L))^6$ tais que

$\{u_{0\mu}, u_{1\mu}, v_{0\mu}, v_{1\mu}, z_{0\mu}, z_{1\mu}\} \to \{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}$ e

$\{X_{0\mu}, X_{1\mu}, Y_{0\mu}, Y_{1\mu}, Z_{0\mu}, Z_{1\mu}\} \to \{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\}$ em F.

Para cada $\mu \in \mathbb{N}$ de (2.166) vem que:

$|\langle \wedge \{u_{0\mu}, u_{1\mu}, v_{0\mu}, v_{1\mu}, z_{0\mu}, z_{1\mu}\}, \{X_{0\mu}, X_{1\mu}, Y_{0\mu}, Y_{1\mu}, Z_{0\mu}, Z_{1\mu}\}\rangle_{F',F}|$

$\leq \|\{u_{0\mu}, u_{1\mu}, v_{0\mu}, v_{1\mu}, z_{0\mu}, z_{1\mu}\}\|_* \|\{X_{0\mu}, X_{1\mu}, Y_{0\mu}, Y_{1\mu}, Z_{0\mu}, Z_{1\mu}\}\|_*$.

Tomando o limite na desigualdade anterior temos:

$$\begin{aligned} &|\langle \widetilde{\wedge} \{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}, \{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\}\rangle| \\ &\leq \|\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}\|_* \|\{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\}\|_* \end{aligned} \tag{2.183}$$

o que prova a continuidade de $b(.,.)$.

Para provar a coercividade da mesma notemos que de (2.154) e (2.160), para cada $\mu \in \mathbb{N}$ podemos escrever

$\langle \wedge \{u_{0\mu}, u_{1\mu}, v_{0\mu}, v_{1\mu}, z_{0\mu}, z_{1\mu}\}, \{u_{0\mu}, u_{1\mu}, v_{0\mu}, v_{1\mu}, z_{0\mu}, z_{1\mu}\}\rangle_{F',F}|$

$= \|\{u_{0\mu}, u_{1\mu}, v_{0\mu}, v_{1\mu}, z_{0\mu}, z_{1\mu}\}\|_*^2$

e no limite obtemos:

$\langle \wedge \{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}, \{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}\rangle_{F',F}|$

$= \|\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}\|_*^2$

o que prova a coercividade de $b(.,.)$.

Assim, por Lax-Milgran dado $\{P_0, P_1, Q_0, Q_1, R_0, R_1\} \in F'$

$\exists!\ \{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\} \in F$ tal que

$$\begin{aligned} &\langle \{P_0, P_1, Q_0, Q_1, R_0, R_1\}, \{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\}\rangle = \\ &b(\{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}, \{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\}) \\ &= \langle \widetilde{\wedge} \{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\}, \{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\}\rangle \\ &\forall \{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1\} \in F, \end{aligned} \tag{2.184}$$

o que implica em função da definição de $b(.,.)$ dada em (2.182) que:

$$\begin{array}{l} Dado \ \ \{P_0,P_1,Q_0,Q_1,R_0,R_1\} \in F' \ \ \exists! \ \ \{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\} \in F \ \ \ tal \ \ que \\ \{P_0,P_1,Q_0,Q_1,R_0,R_1\} = \widetilde{\wedge}\{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\} \end{array} \tag{2.185}$$

ou ainda, em virtude de (2.170), concluímos que:

$$\begin{array}{l} Dado \ \ \{P_0,P_1,Q_0,Q_1,R_0,R_1\} \in F' \ \ \ \exists! \ \ \{u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1\} \in F \ \ \ tal \ \ que \\ P_0 = \rho_1\Phi'(.,0), P_1 = -\rho_1\Phi'(.,0), Q_0 = \rho_2\Psi'(.,0), Q_1 = -\rho_2\Psi'(.,0), \\ R_0 = \rho_1 W'(.,0), R_1 = -\rho_1 W'(.,0), \end{array} \tag{2.186}$$

onde $\{\Phi,\Psi,W\}$ é a única solução, por trasposição de:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1\Phi_{tt} - k(\Phi_x+\Psi+lW)_x - k_0 l[W_x - l\Phi] = 0, \ \ em \ \ \ (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2\Psi_{tt} - b\Psi_{xx} + k(\Phi_x+\Psi+lW) = 0, \ \ em \ \ \ (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1 W_{tt} - k_0[W_x - l\Phi]_x + kl(\Phi_x+\Psi+lW) = 0, \ \ em \ \ \ (0,L)\times(0,T) \\ \Phi(0,t) = \Psi(0,t) = W(0,t) = 0, \ \ t\in(0,T) \\ \Phi(L,t) = u_x(L), \ \ \ \Psi(L,t) = v_x(L), \ \ \ W(L,t) = z_x(L), \ \ t\in(0,T) \\ \Phi(.,T) = \Phi_t(.,T) = \Psi(.,T) = \Psi_t(.,T) = W(.,T) = W_t(.,T) = 0, \ \ em \ \ \ (0,L). \end{array}\right. \tag{2.187}$$

e $\{u,v,z\}$ é solução de

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1 u_{tt} - k(u_x+v+lz)_x - k_0 l[z_x - lu] = 0, \ \ em \ \ \ (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2 v_{tt} - bv_{xx} + k(u_x+v+lz) = 0, \ \ em \ \ \ (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1 z_{tt} - k_0[z_x - lu]_x + kl(u_x+v+lz) = 0, \ \ em \ \ \ (0,L)\times(0,T) \\ u(0,t) = v(0,t) = z(0,t) = 0, \ \ t\in(0,T) \\ u(L,t) = 0 = v(L,t) = z(L,t) = 0, \ \ t\in(0,T) \\ u(.,0) = u_0, \ \ \ u_t(.,0) = u_1, \ \ em \ \ (0,L) \\ v(.,0) = v_0, \ \ \ v_t(.,0) = v_1, \ \ em \ \ (0,L) \\ z(.,0) = z_0, \ \ \ z_t(.,0) = z_1, \ \ em \ \ (0,L). \end{array}\right. \tag{2.188}$$

Lembremos que

$F = (H_0^1(0,L)\times L^2(0,L))^3$ e $F' = (H^{-1}(0,L)\times L^2(0,L))^3$.

Assim, elegendo-se

$$T_0 = 2(L-x_0) \ \ e \ \ \ H = (L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L))^3, \tag{2.189}$$

então dado

$$\begin{array}{l} \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1\} \in H \quad tem - se \quad que \\ \{P_0, P_1, Q_0, Q_1, R_0, R_1\} = \{\rho_1\varphi_1, -\rho_1\varphi_0, \rho_2\psi_1, -\rho_2\psi_0, \rho_1\omega_1, -\rho_1\omega_0\} \in F' \end{array} \tag{2.190}$$

e de (2.186) resulta que $\exists!\ \{u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1\} \in F$ tal que

$$\begin{array}{l} \Phi(., 0) = \varphi_0, \Phi'(., 0) = \varphi_1 \\ \Psi(., 0) = \psi_0, \Psi'(., 0) = \psi_1 \\ W(., 0) = \omega_0, W'(., 0) = \omega_1 \end{array} \tag{2.191}$$

onde $\{\Phi, \Psi, W\}$ é a única solução por transposição de (2.187) e $\{u, v, z\}$ é a única solução fraca de (2.188) com dados $u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1$.

Considerando-se

$$g_1 = u_x(L), g_2 = v_x(L), g_3 = z_x(L) \tag{2.192}$$

no problema (2.136) sujeito aos dados iniciais conforme em (2.191), temos que tal problema possui uma única solução por transposição φ, ψ, ω.

Observemos que de (2.187) e (2.191) resulta que $\{\Phi, \Psi, W\}$ é também solução por transposição do problema (2.136).

Logo pela unicidade de solução vem que $\varphi = \Phi$, $\psi = \Psi$, $W = \omega$ e consequentemente de (2.187) concluimos que:

$$\varphi(., T) = \varphi'(., T) = \psi(., T) = \psi'(., T) = \omega(., T) = \omega'(., T) = 0. \tag{2.193}$$

Capítulo 3

Controlabilidade exato-aproximada interna para o sistema de Bresse termoelástico

3.1 Existência e unicidade de soluções forte e fraca

Consideremos o sistema de Bresse termoelástico

$$\left\{\begin{array}{l}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l[w_x - l\varphi] = f_1\chi_{(l_1,l_2)}, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = f_2\chi_{(l_1,l_2)}, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0[w_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = f_3\chi_{(l_1,l_2)}, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\
\theta_t - k_1\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\
\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t)\\
= w(0,t) = w(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t\in(0,T)\\
\varphi(.,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(.,0) = \varphi_1, \quad em \quad (0,L)\\
\psi(.,0) = \psi_0, \quad \psi_t(.,0) = \psi_1, \quad em \quad (0,L)\\
w(.,0) = w_0, \quad w_t(.,0) = w_1, \quad em \quad (0,L)\\
\theta(.,0) = \theta_0, \quad em \quad (0,L),
\end{array}\right. \tag{3.1}$$

Trataremos agora a existência e unicidade de soluções forte e fraca do problema (3.1) via semigrupo; para isso consideremos o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2(0,L)$,

munido da norma

$\|U\|^2 = \|(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,w,W,\theta)\|^2 =$

$$\int_0^L [\rho_1|\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2 + \rho_1|W|^2 + b|\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + \frac{\gamma}{m}|\theta|^2]dx$$

a qual é equivalente à norma usual de $\mathcal{H}$.

Se denotarmos $V(t) = (\varphi, \varphi_t, \psi, \phi_t, w, w_t, \theta)$ e $F = (0, f_1, 0, f_2, 0, f_3, 0)$ o problema (3.1) se torna

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}V(t) = \mathcal{A}V(t) + F \\ V(0) = V_0, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

onde $V_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1)$ e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k\partial_x^2 - k_0 l^2 I}{\rho_1} & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{k+k_0}{\rho_1} l\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b\partial_x^2 - kI}{\rho_2} & 0 & -\frac{kl}{\rho_2} I & 0 & \frac{-\gamma}{\rho_2}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \frac{-k_0 - k}{\rho_1} l\partial_x & 0 & -\frac{kl}{\rho_1} I & 0 & 0 & \frac{k_0\partial_x^2 - kl^2 I}{\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m\partial_x & 0 & 0 & k_1\partial_x^2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

com $D(\mathcal{A}) = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$.

Mostraremos inicialmente que $\mathcal{A}$ é dissipativo.

De fato, seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, \Upsilon, \theta) \in D(\mathcal{A})$. Então

$$
\begin{aligned}
& (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \\
= & \int_0^L k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x \Phi + k_0 l[\omega_x - l\varphi]\Phi + b\phi_{xx}\Psi - k(\varphi_x + \psi + l\omega)\Psi \\
& -\gamma\theta_x\Psi + k_0[\omega_x - l\varphi]_x\Upsilon - kl(\varphi_x + \psi + l\omega)\Upsilon + b\psi_x\Psi_x \\
& +k(\varphi_x + \psi + l\omega)(\Phi_x + \Psi + l\Upsilon) + k_0[\omega_x - l\varphi][\Upsilon_x - l\Phi] + \frac{\gamma}{m}[-m\Psi_x + k_1\theta_{xx}]\, dx \\
= & \int_0^L [-k(\varphi_x + \psi + l\omega)\Phi_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega)\Phi_x]dx + [k(\varphi_x + \psi + l\omega)\Phi]_0^L \\
& \int_0^L [b\psi_x\Psi_x - b\psi_x\Psi_x]dx + [b\psi_x\Psi]_0^L + \int_0^L [k_0(\omega_x - l\varphi)\Upsilon_x - k_0(\omega_x - l\varphi)\Upsilon_x]dx \\
& + [k_0(\omega_x - l\varphi)\Upsilon]_0^L + \int_0^L [\gamma\theta_x\Psi - \gamma\theta_x\Psi]dx - [\gamma\Psi\theta]_0^L \\
& -\frac{\gamma k_1}{m}\int_0^L |\theta_x|^2 dx + [\frac{\gamma k_1}{m}\theta_x\theta]_0^L = -\frac{\gamma k_1}{m}\int_0^L |\theta_x|^2 dx, \quad U \in D(\mathcal{A}).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} < 0$, o que implica que $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Mostraremos agora que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. De fato, seja $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathcal{H}$ e $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^T$, provaremos que

$$
-\mathcal{A}U = F. \tag{3.4}
$$

Fazendo $U = \{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon, \theta\}$, a equação 3.4 fica equivalente

$$
\begin{array}{clll}
-\Phi & = f_1 & \text{em } H_0^1(0, L), \\
-\Psi & = f_3 & \text{em } H_0^1(0, L), \\
-\Upsilon & = f_5 & \text{em } H_0^1(0, L), \\
-k(\varphi_x - \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] & = \rho_1 f_2 & \text{em } L^2(0, L), \\
-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_x & = \rho_2 f_4 & \text{em } L^2(0, L), \\
-k_0[\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) & = \rho_1 f_6 & \text{em } L^2(0, L) \\
m\psi_x - k_1\theta_{xx} & = f_7 & \text{em } L^2(0, L).
\end{array} \tag{3.5}
$$

Assim definimos a forma bilinear

$$
\alpha : \left[H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)\right]^2 \longrightarrow \mathbb{R}
$$

de forma que $\alpha(\{\varphi, \psi, \omega, \theta\}, \{u, v, z, p\})$
$= \displaystyle\int_0^L [b\psi_x v_x + +k(\varphi_x + \psi + l\omega)(u_x + v + lz) + k_0[\omega_x - l\varphi][z_x - lu] + \frac{\gamma}{m}\theta p]\, dx.$

Observe que $\alpha(\{\varphi, \psi, \omega\, \theta\}, \{\varphi, \psi, \omega, \theta\})$ define uma norma, equivalente à usual, em $[H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)]$. Donde segue que α é contínua e coerciva em $[H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)]^2$.

Multiplicando-se $(3.5)_4$, $(3.5)_5$ $(3.5)_6$ e $(3.5)_7$ por u, v, z e p respectivamente e integrando-se em $(0,L)$ obtemos que

$$\alpha(\{\varphi, \psi, \omega, \theta\}, \{u, v, z, p\}) = \int_0^L \rho_1 f_2 u + \rho_2 f_4 v + \rho_1 f_6 z + f_7 p \; dx$$
$$= \langle \{G_1, G_2, G_3\}, \{u, v, z\} \rangle \,, \quad \forall \{u, v, z, p\} \in H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L),$$

onde $G_1 = \rho_1 f_2$, $G_2 = \rho_2 f_4$, $G_3 = \rho_1 f_6$.

Pelo teorema de Lax-Milgram, o sistema $(3.5)_4 - (3.5)_7$ tem única solução $\{\varphi, \psi, \omega, \theta\} \in H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$.
Logo, de (3.5) obtemos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon, \theta) \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L)$

satisfazendo (3.4), provando assim que $Im(-\mathcal{A}) = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L)$.

Logo $U = -\mathcal{A}F$ e $\|\mathcal{A}^{-1}F\| = \|U\| \leq C\|F\|$, portanto $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq C$, assim $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

E pelo teorema 1.40 $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contração; pelos teoremas 1.49 e 1.51, o problema (3.1)tem única solução forte e fraca dependendo da escolha de f_1, f_2, f_3 e dos dados iniciais.
Denotamos $\{S(t)\}_{t>0}$ o semigrupo fortemente contínuo em $\mathcal{H}$ associado ao sistema (3.1).

3.2 Solução ultrafraca para o sistema de Bresse termoelástico

Consideremos o problema

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k(u_x + v + lz)_x + k_0 l[z_x - lu] = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2 v_{tt} - bv_{xx} + k(u_x + v + lz) + mp_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1 z_{tt} - k_0[z_x - lu]_x + kl(u_x + v + lz) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ -p_t - k_1 p_{xx} - \gamma v_x = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) = z(0,t) = z(L,t) \\ = p(0,t) = p(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ u(.,T) = u_0, \quad u_t(.,T) = u_1, \quad em \quad (0,L) \\ v(.,T) = v_0, \quad v_t(.,T) = v_1, \quad em \quad (0,L) \\ z(.,T) = z_0, \quad z_t(.,T) = z_1, \quad em \quad (0,L) \\ p(.,T) = p_0, \quad em \quad (0,L), \end{cases} \tag{3.6}$$

com $(u_0, u_1, v_0, v_1, z_0, z_1, p_0) \in L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L) \times L^2(0,L)$. Fazendo a mudança de variável

$$U(x,t) = -\int_t^T u(x,s)ds + \chi_1(x)$$

$$V(x,t) = -\int_t^T v(x,s)ds + \chi_2(x)$$

$$Z(x,t) = -\int_t^T z(x,s)ds + \chi_3(x)$$

com

$$\begin{cases} -k(\chi_{1x} + \chi_2 + l\chi_3)_x + k_0 l(\chi_{3x} - l\chi_1) = -\rho_1 u_1, \\ -b\chi_{2xx} + k(\chi_{1x} + \chi_2 + l\chi_3) = -\rho_2 v_1 - mp_{0x}, \\ -k_0(\chi_{3x} - l\chi_1)_x + kl(\chi_{1x} + \chi_2 + l\chi_3) = 0, \\ \chi_1(0) = \chi_1(L) = \chi_2(0) = \chi_2(L) = \chi_3(0) = \chi_3(L) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Tem-se

$$\begin{cases} \rho_1 U_{tt} - k(U_x + V + lZ)_x + k_0 l[Z_x - lU] = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2 V_{tt} - bV_{xx} + k(U_x + V + lZ) + mp_x = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1 Z_{tt} - k_0[Z_x - lU]_x + kl(U_x + V + lZ) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ -p_t - k_1 p_{xx} - \gamma V_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ U(.,T) = \chi_1, \quad U_t(.,T) = u_0, \quad em \quad (0,L) \\ V(.,T) = \chi_2, \quad V_t(.,T) = v_0, \quad em \quad (0,L) \\ Z(.,T) = \chi_3, \quad Z_t(.,T) = z_0, \quad em \quad (0,L) \\ p(.,T) = p_0, \quad em \quad (0,L). \end{cases} \tag{3.8}$$

Note-se que se fizermos uma mudança na variável temporal trocando-se t por $T-t$, o sistema (3.8) torna-se similar ao sistema (3.1) e antão, mostrando-se que (3.7) tem uma única solução em $H_0^1(0,L)^3$, e que $\|(\chi_1,\chi_2,\chi_3)\|_{(H_0^1(0,L))^3} \approx \|(\rho_1 u, \rho_2 v_1 + mp_{0x}, \rho_1 z_1)\|_{(H^{-1}(0,L))^3}$, assim como mostrado em (3.1), teremos que (3.8) tem uma única solução fraca, o que é equivalente a (3.6) ter uma única solução em $C([0,T];L^2(0,L))$ e derivada em relação a t em $C([0,T];H^{-1}(0,L))$.

Mostremos que (3.7) tem uma única solução (χ_1,χ_2,χ_3) em $(H_0^1(0,L))^3$ e que $\|(\chi_1,\chi_2,\chi_3)\|_{(H_0^1(0,L))^3} \approx \|(\rho_1 u, \rho_2 v_1 + mp_{0x}, \rho_1 z_1)\|_{(H^{-1}(0,L))^3}$.

Para tanto defina a forma bilinear

$$\alpha : \left[H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)\right]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

de modo que

$$\begin{aligned}&\alpha(\{\chi_1,\chi_2,\chi_3\},\{\xi,\eta,\sigma\})\\ &= \int_0^L b\chi_{2x}\eta_x + k(\chi_{1x}+\chi_2+l\chi_3)(\xi_x+\eta+l\sigma) + k_0[\chi_{3x}-l\chi_1][\sigma_x - l\xi]\;dx.\end{aligned}$$

Como claramente α é contínua, mostraremos que α é coerciva em $\left[H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)\right]^2$, isto é,

$$\left\{\begin{array}{l} \|(\chi_1,\chi_2,\chi_3)\|_*^2 = \displaystyle\int_0^L b|\chi_{2x}|^2 + k|\chi_{1x}+\chi_2+l\chi_3|^2 + k_0|\chi_{3x}-l\chi_1|^2\;dx \\ \geq C\displaystyle\int_0^L |\chi_1|^2+|\chi_{1x}|^2+|\chi_2|^2+|\chi_{2x}|^2+|\chi_3|^2+|\chi_{3x}|^2\;dx \\ = C\|(\chi_1,\chi_2,\chi_3)\|_{(H_0^1(0,L))^3}^2 \end{array}\right. \tag{3.9}$$

Suponhamos que (3.9) seja falso, ié., $\forall n\in\mathbb{N}$, existe $(\chi_{1n},\chi_{2n},\chi_{3n})$

$$\|(\chi_{1n},\chi_{2n},\chi_{3n})\|_{(H_0^1(0,L))^3} > n\|(\chi_{1n},\chi_{2n},\chi_{3n})\|_*, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Defina

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\widetilde{\chi_{1n}} = \dfrac{\chi_{1n}}{\|(\chi_{1n}, \chi_{2n}, \chi_{3n})\|_{(H_0^1(0,L))^3}}, \\
\widetilde{\chi_{2n}} = \dfrac{\chi_{2n}}{\|(\chi_{1n}, \chi_{2n}, \chi_{3n})\|_{(H_0^1(0,L))^3}}, \\
\widetilde{\chi_{3n}} = \dfrac{\chi_{3n}}{\|(\chi_{1n}, \chi_{2n}, \chi_{3n})\|_{(H_0^1(0,L))^3}}.
\end{array}
\right.
\tag{3.11}
$$

De (3.10) e (3.11) temos

$$
\|(\widetilde{\chi_{1n}}, \widetilde{\chi_{2n}}, \widetilde{\chi_{3n}})\|_* < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}
$$

De (3.11) temos

$$
\|(\widetilde{\chi_{1n}}, \widetilde{\chi_{2n}}, \widetilde{\chi_{3n}})\|_{H_0^1(0,L)} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}
$$

De (3.13) podemos extrair uma subsequência de $(\widetilde{\chi_{1n}}, \widetilde{\chi_{2n}}, \widetilde{\chi_{3n}}) \in (H_0^1(0,L))^3$

que ainda denotaremos por $(\widetilde{\chi_{1n}}, \widetilde{\chi_{2n}}, \widetilde{\chi_{3n}})$ tal que

$$
\widetilde{\chi_{1n}} \rightharpoonup \widetilde{\chi_1}, \quad em \quad L^2(0,L), \tag{3.14}
$$

$$
\widetilde{\chi_{2n}} \rightharpoonup \widetilde{\chi_2}, \quad em \quad L^2(0,L), \tag{3.15}
$$

$$
\widetilde{\chi_{3n}} \rightharpoonup \widetilde{\chi_3}, \quad em \quad L^2(0,L), \tag{3.16}
$$

$$
\widetilde{\chi_{1nx}} \rightharpoonup \widetilde{\chi_{1x}}, \quad em \quad L^2(0,L), \tag{3.17}
$$

$$
\widetilde{\chi_{2nx}} \rightharpoonup \widetilde{\chi_{2x}}, \quad em \quad L^2(0,L), \tag{3.18}
$$

$$
\widetilde{\chi_{3nx}} \rightharpoonup \widetilde{\chi_{3x}}, \quad em \quad L^2(0,L). \tag{3.19}
$$

De (3.12)

$$
\int_0^L b|\widetilde{\chi_{2x}}|^2 + k|\widetilde{\chi_{1x}} + \widetilde{\chi_2} + l\widetilde{\chi_3}|^2 + k_0|\widetilde{\chi_{3x}} - l\widetilde{\chi_1}|^2 \, dx < \frac{1}{n}; \tag{3.20}
$$

logo

$$
\widetilde{\chi_{2nx}} \to 0, \quad em, \quad L^2(0,L) \tag{3.21}
$$

e, pela desigualdade de Poincaré

$$\widetilde{\chi}_{2n} \to 0, \quad em, \quad L^2(0,L). \tag{3.22}$$

De (3.21) e (3.22)

$$\widetilde{\chi}_{2n} \to 0, \quad em, \quad H_0^1(0,L). \tag{3.23}$$

Usando (3.23), de (3.20) chegamos a

$$\widetilde{\chi}_{1nx} + l\widetilde{\chi}_{3n} \to 0, \quad em, \quad L^2(0,L) \tag{3.24}$$

e

$$\widetilde{\chi}_{3nx} - l\widetilde{\chi}_{1n} \to 0, \quad em, \quad L^2(0,L). \tag{3.25}$$

Por sua vez, de (3.14)-(3.19) temos que

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\chi}_{1nx} + l\widetilde{\chi}_{3n} \rightharpoonup \widetilde{\chi}_{1x} + l\widetilde{\chi}_3, & em, & L^2(0,L) \\ \widetilde{\chi}_{3nx} - l\widetilde{\chi}_{1n} \rightharpoonup \widetilde{\chi}_{3x} - l\widetilde{\chi}_1, & em, & L^2(0,L); \end{array} \tag{3.26}$$

logo, de (3.26) e das convergências anteriores, conclui-se que

$$\begin{array}{l} \widetilde{\chi}_{1x} + l\widetilde{\chi}_3 = 0, \\ \widetilde{\chi}_{3x} - l\widetilde{\chi}_1 = 0. \end{array} \tag{3.27}$$

O sistema (3.27) é um sistema de EDO e usando o fato de $\chi_1(0) = \chi_1(L) = \chi_3(0) = \chi_3(L) = 0$ tem-se a única solução $\chi_1 = \chi_3 = 0$.

Portanto $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$.

Da imersão compacta de $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\begin{array}{l} \widetilde{\chi}_{1n} \to \widetilde{\chi}_1 = 0, \quad em, \quad L^2(0,L), \\ \widetilde{\chi}_{3n} \to \widetilde{\chi}_3 = 0, \quad em, \quad L^2(0,L); \end{array} \tag{3.28}$$

logo para n suficientemente grande temos que

$\|(\widetilde{\chi}_{1n}), \widetilde{\chi}_{2n}), \widetilde{\chi}_{3n})\|_{H_0^1} < \frac{1}{2}$ o que contradiz (3.13).

Portanto existe um $C_1 > 0$ tal que $\|.\|_{(H_0^1(0,L))^2} \leq C_1\|.\|_*$ e $C_2\|.\|_* \leq \|.\|_{(H_0^1(0,L))^2}$ é imediato para algum $C_2 > 0$. Portanto α é contínua e coerciva em $[H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)]^2$.

Multiplicando-se $(3.7)_1$, $(3.7)_2$ e $(3.7)_2$ por ξ, η, σ respectivamente e integrando-se em $(0,L)$ temos

$$\begin{array}{l} \alpha(\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}, \{\xi, \eta, \sigma\}) = -\displaystyle\int_0^L \rho_1 u_1 \xi + (\rho_2 v_1 + m p_{0x})\eta + \rho_1 z_1 \sigma \; dx \\ \langle \{-\rho_1 u_1, -\rho_2 v_1 - m p_{0x}, -\rho_1 z_1\}, \{\xi, \eta, \sigma\} \rangle_{H^{-1}(0,L), H_0^1(0,L)}. \end{array} \tag{3.29}$$

Pelo teorema de Lax-Milgram, o sistema (3.7) tem uma única solução em $(H_0^1(0,L))^3$ e $\|(\chi_1, \chi_2, \chi_3)\|_{(H_0^1(0,L))^3} \approx \|(\rho_1 u, \rho_2 v_1 + m p_{0x}, \rho_1 z_1)\|_{(H^{-1}(0,L))^3}$

3.3 Sistema desacoplado

Consideremos o seguinte sistema desacoplado

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \widetilde{\varphi}_{tt} - k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w})_x + k_0 l[\widetilde{w}_x - l\widetilde{\varphi}] = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \rho_2 \widetilde{\psi}_{tt} - b\widetilde{\psi}_{xx} + k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w}) + \frac{m\gamma}{k_1} P\widetilde{\psi}_t = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \rho_1 \widetilde{w}_{tt} - k_0[\widetilde{w}_x - l\widetilde{\varphi}]_x + kl(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w}) = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \widetilde{\theta}_t - k_1 \widetilde{\theta}_{xx} + m\widetilde{\psi}_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \widetilde{\varphi}(0,t) = \widetilde{\varphi}(L,t) = \widetilde{\psi}(0,t) = \widetilde{\psi}(L,t) = \widetilde{w}(0,t) = \widetilde{w}(L,t) \\ = \widetilde{\theta}(0,t) = \widetilde{\theta}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ \widetilde{\varphi}(.,0) = \varphi_0, \quad \widetilde{\varphi}_t(.,0) = \varphi_1, \quad em \quad (0,L) \\ \widetilde{\psi}(.,0) = \psi_0, \quad \widetilde{\psi}_t(.,0) = \psi_1, \quad em \quad (0,L) \\ \widetilde{w}(.,0) = w_0, \quad \widetilde{w}_t(.,0) = w_1, \quad em \quad (0,L) \\ \widetilde{\theta}(.,0) = \theta_0, \quad em \quad (0,L), \end{array} \right. \tag{3.30}$$

onde $P\widetilde{\psi}_t = \widetilde{\psi}_t - \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \widetilde{\psi}_t dx$ e P é o operador projeção de $L^2(0,L)$ em $F = \{\Psi_x; \Psi \in H_0^1(0,L)\}$, associado ao sistema (3.1).

Primeiramente faremos a solução de

$$\left\{\begin{array}{l}
\rho_1\widetilde{\varphi}_{tt} - k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w})_x + k_0 l[\widetilde{w}_x - l\widetilde{\varphi}] = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\
\rho_2\widetilde{\psi}_{tt} - b\widetilde{\psi}_{xx} + k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w}) + \frac{m\gamma}{k_1}P\widetilde{\psi}_t = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\
\rho_1\widetilde{w}_{tt} - k_0[\widetilde{w}_x - l\widetilde{\varphi}]_x + kl(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w}) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\
\widetilde{\varphi}(0,t) = \widetilde{\varphi}(L,t) = \widetilde{\psi}(0,t) = \widetilde{\psi}(L,t) = \widetilde{w}(0,t) = \widetilde{w}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T)\\
\widetilde{\varphi}(.,0) = \varphi_0, \quad \widetilde{\varphi}_t(.,0) = \varphi_1, \quad em \quad (0,L)\\
\widetilde{\psi}(.,0) = \psi_0, \quad \widetilde{\psi}_t(.,0) = \psi_1, \quad em \quad (0,L)\\
\widetilde{w}(.,0) = w_0, \quad \widetilde{w}_t(.,0) = w_1, \quad em \quad (0,L)
\end{array}\right. \tag{3.31}$$

Consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \left[H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)\right]^3$$

munido da norma

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\{\widetilde{\varphi}, \Phi, \widetilde{\psi}, \Psi, \widetilde{\omega}, \Upsilon\}\|_{\mathcal{H}}^2\\
&= \int_0^L \rho_1|\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2 + \rho_1|\Upsilon|^2 + b|\widetilde{\psi}_x|^2\\
&\qquad +k|\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega}|^2 + k_0|\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi}|^2 \, dx
\end{aligned}$$

a qual é equivalente à norma usual de $\mathcal{H}$ (a demonstração pode ser feita usando argumentos de contradição).

Se denotarmos $V(t) = \{\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}_t, \widetilde{\psi}, \widetilde{\psi}_t, \widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}_t\}$ o problema de valor inicial (3.31) se torna equivalente a

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dt}V(t) = \mathcal{A}V(t)\\
V(0) = V_0
\end{array}\right. \tag{3.32}$$

onde $V_0 = \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1\}$ e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix}
0 & I & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{k\partial_x^2 - k_0 l^2 I}{\rho_1} & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{k+k_0}{\rho_1} l\partial_x & 0\\
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0\\
-\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b\partial_x^2 - kI}{\rho_2} & \frac{-m\gamma}{\rho_2 k_1}P & -\frac{kl}{\rho_2}I & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I\\
\frac{-k_0-k}{\rho_1} l\partial_x & 0 & -\frac{kl}{\rho_1}I & 0 & \frac{k_0\partial_x^2 - kl^2 I}{\rho_1} & 0
\end{pmatrix} \tag{3.33}$$

com $D(\mathcal{A}) = [H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)]^3$.

Mostraremos primeiramente que $\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato, seja $U = \{\widetilde{\varphi}, \Phi, \widetilde{\psi}, \Psi, \widetilde{\omega}, \Upsilon\} \in D(\mathcal{A})$. Então

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \\
= &\int_0^L k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})_x\Phi + k_0 l[\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi}]\Phi + b\widetilde{\phi}_{xx}\Psi - k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})\Psi \\
&-\frac{m\gamma}{k_1}P\psi\psi + k_0[\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi}]_x\Upsilon - kl(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})\Upsilon + b\widetilde{\psi}_x\Psi_x \\
&+k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})(\Phi_x + \Psi + l\Upsilon) + k_0[\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi}][\Upsilon_x - l\Phi]\ dx \\
= &\int_0^L [-k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})\Phi_x + k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})\Phi_x]dx + [k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})\Phi]_0^L \\
&\int_0^L [b\widetilde{\psi}_x\Psi_x - b\widetilde{\psi}_x\Psi_x]dx + [b\widetilde{\psi}_x\Psi]_0^L + \int_0^L [k_0(\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi})\Upsilon_x - k_0(\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi})\Upsilon_x]dx \\
&+ [k_0(\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi})\Upsilon]_0^L - \frac{m\gamma}{k_1}\int_0^L |\Psi|^2\ dx + \frac{m\gamma}{k_1 L}(\int_0^L |\Psi|\ dx)^2 \\
&= -\frac{m\gamma}{k_1}\int_0^L |\Psi|^2\ dx + \frac{m\gamma}{k_1 L}(\int_0^L |\Psi|\ dx)^2 \leq 0, \quad U \in D(\mathcal{A}).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \leq 0$ o que implica que $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Mostremos agora que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. De fato, seja $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\} \in \mathcal{H}$ e portanto é suficiente provar que existe $U \in D(\mathcal{A})$ satisfazendo o problema espectral

$$
-\mathcal{A}U = G. \tag{3.34}
$$

Fazendo $U = \{\widetilde{\varphi}, \Phi, \widetilde{\psi}, \Psi, \widetilde{\omega}, \Upsilon\}$, a equação 3.34 fica equivalente

$$
\begin{array}{rll}
-\Phi & = g_1 & \text{em } H_0^1(0, L), \\
-k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})_x - k_0 l[\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi}] & = \rho_1 g_2 & \text{em } L^2(0, L), \\
-\Psi & = g_3 & \text{em } H_0^1(0, L), \\
-b\widetilde{\psi}_{xx} + k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega}) + \frac{m\gamma}{k_1}P\Psi & = \rho_2 g_4 & \text{em } L^2(0, L), \\
-\Upsilon & = g_5 & \text{em } H_0^1(0, L), \\
-k_0[\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi}]_x + kl(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega}) & = \rho_1 g_6 & \text{em } L^2(0, L).
\end{array} \tag{3.35}
$$

Isolando Ψ na equação $(3.35)_3$ e substituindo em $(3.35)_4$ obtemos

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\rho_1\widetilde{\varphi} - k(\widetilde{\varphi}_x - \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})_x - k_0 l[\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi}] = G_1 & \text{em } L^2(0, L), \\
\rho_2\widetilde{\psi} - b\widetilde{\psi}_{xx} + k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega}) = G_2 & \text{em } L^2(0, L), \\
\rho_1\widetilde{\omega} - k_0[\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi}]_x + kl(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega}) = G_3 & \text{em } L^2(0, L),
\end{array}
\right. \tag{3.36}
$$

onde

$$
G_1 = \rho_1 g_2, \quad G_2 = \rho_2 g_4 + \frac{m\gamma}{k_1}Pg_3 \text{ e } G_3 = \rho_1 g_6. \tag{3.37}
$$

Assim definimos a forma bilinear

$$\alpha : \left[H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)\right]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

de modo que

$$\alpha(\{\varphi,\psi,\omega\},\{u,v,z\})$$
$$= \int_0^L [b\widetilde{\psi}_x v_x + +k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{\omega})(u_x + v + lz) + k_0[\widetilde{\omega}_x - l\widetilde{\varphi}][z_x - lu]]\ dx.$$

Observe que $\alpha(\{\varphi,\psi,\omega\},\{\varphi,\psi,\omega\})$ define uma norma, equivalente a usual, em $[H_0^1(0,L)]^3$. Donde segue que α é contínua e coerciva em
$[H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)]^2$.

Multiplicando (3.36) por u, v e z respectivamente e integrando em $(0,L)$ obtemos que

$$\alpha(\{\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\omega}\},\{u,v,z\}) = \int_0^L G_1u + G_2v + G_3z\ dx$$
$$= \langle\{G_1,G_2,G_3\},\{u,v,z\}\rangle_{[H_0^1(0,L)^3]',H_0^1(0,L)^3}\,, \quad \forall\{u,v,z\} \in H_0^1(0,L)^3.$$

Pelo teorema de Lax-Milgram, o sistema (3.36) tem única solução $\{\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\omega}\} \in H_0^1(0,L)^3$. Disso, de (3.35) e de (3.37) obtemos $U = \{\widetilde{\varphi},\Phi,\widetilde{\psi},\Psi,\widetilde{\omega},\Upsilon\}$ em $\mathcal{H}$ satisfazendo (3.34). Logo $U = -\mathcal{A}F$ e

$\|\mathcal{A}^{-1}F\| = \|U\| \leq C\|F\|$, portanto $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq C$, assim $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

E pelo teorema 1.40, $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contração e pelos teoremas 1.49 e 1.51 o problema (3.31)tem única solução forte e fraca dependendo da escolha dos dados iniciais.

Pela unicidade de solução de (3.31) e de (3.30)

$$\begin{cases} \widetilde{\theta}_t - k_1\widetilde{\theta}_{xx} = -m\widetilde{\psi}_{xt}, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ \widetilde{\theta}(0,t) = \widetilde{\theta}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ \widetilde{\theta}(.,0) = \theta_0, \quad em \quad (0,L), \end{cases} \tag{3.38}$$

com $-m\widetilde{\psi}_{xt} \in C([0,T],H^{-1}(0,L))$, pois $-m\widetilde{\psi}_t \in C([0,T],L^2(0,L))$,

e

$\widetilde{\theta}_t - k_1\widetilde{\theta}_{xx} = -m\widetilde{\psi}_{xt} \in L^2(0,T,H^{-1}(0,L))$.

É bem conhecido que problema (3.38) tem solução única, mostraremos que tal solução $\widetilde{\theta} \in C([0,T]; L^2(0,L))$.

De fato, seja $f = -m\widetilde{\psi}_{xt}$

logo

$$(\widetilde{\theta}_t, \widetilde{\theta}) + (\widetilde{\theta}_x, \widetilde{\theta}_x) = \langle f, \widetilde{\theta} \rangle$$

assim

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\widetilde{\theta}|^2 + |\widetilde{\theta}_x|^2 \leq \|f\||\widetilde{\theta}_x| \leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{H^{-1}(0,L)} + \frac{1}{2}|\widetilde{\theta}_x|^2$$

logo

$$\frac{d}{dt}|\widetilde{\theta}|^2 + |\widetilde{\theta}_x|^2 \leq \|f\|^2_{H^{-1}(0,L)}(0,L).$$

Integrando em relação a t temos

$$|\widetilde{\theta}|^2 + \int_0^t |\widetilde{\theta}_x|^2 \leq |\widetilde{\theta}(0)| + \int_0^T \|f\|^2_{H^{-1}(0,L)}\, ds$$

e portanto,

$$\widetilde{\theta} \in L^2(0,T; H^1_0(0,L)) \text{ e } \widetilde{\theta} \in C([0,T]; L^2(0,L)).$$

e $\widetilde{\theta}$ é a única solução de (3.38).

Teorema 3.1. *Sejam P a projeção de $L^2(0,L)$ em $F = \{\Psi_x, \Psi \in H^1_0(0,L)\}$ e denotamos por $\{S^0(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo fortemente contínuo em $\mathcal{H}$ associado ao seguinte sistema desacoplado*

$$\left\{\begin{array}{l}
\rho_1\widetilde{\varphi}_{tt} - k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w})_x + k_0 l[\widetilde{w}_x - l\widetilde{\varphi}] = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\
\rho_2\widetilde{\psi}_{tt} - b\widetilde{\psi}_{xx} + k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w}) + \frac{m\gamma}{k_1}P\widetilde{\psi}_t = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\
\rho_1\widetilde{w}_{tt} - k_0[\widetilde{w}_x - l\widetilde{\varphi}]_x + kl(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w}) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\
\widetilde{\theta}_t - k_1\widetilde{\theta}_{xx} + m\widetilde{\psi}_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\
\widetilde{\varphi}(0,t) = \widetilde{\varphi}(L,t) = \widetilde{\psi}(0,t) = \widetilde{\psi}(L,t) = \widetilde{w}(0,t) = \widetilde{w}(L,t) \\
= \widetilde{\theta}(0,t) = \widetilde{\theta}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\
\widetilde{\varphi}(.,0) = \varphi_0, \quad \widetilde{\varphi}_t(.,0) = \varphi_1, \quad em \quad (0,L) \\
\widetilde{\psi}(.,0) = \psi_0, \quad \widetilde{\psi}_t(.,0) = \psi_1, \quad em \quad (0,L) \\
\widetilde{w}(.,0) = w_0, \quad \widetilde{w}_t(.,0) = w_1, \quad em \quad (0,L) \\
\widetilde{\theta}(.,0) = \theta_0, \quad em \quad (0,L).
\end{array}\right. \tag{3.39}$$

Então, $S(t) - S^0(t) : \mathcal{H} \to C([0,T]; \mathcal{H})$ é contínuo e compacto.

Demonstração: Seja B um conjunto limitado de $\mathcal{H}$.

Temos

$$(\varphi(t), \varphi_t(t), \psi(t), \psi_t(t), w(t), w_t(t), \theta) = [S(t)](\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0) \tag{3.40}$$

$$(\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\varphi}_t(t), \widetilde{\psi}(t), \widetilde{\psi}_t(t), \widetilde{w}(t), \widetilde{w}_t(t), \widetilde{\theta}) = [S^0(t)](\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0) \tag{3.41}$$

para cada $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0) \in B$

fazendo $\Phi = \varphi - \widetilde{\varphi}$, $\Psi = \psi - \widetilde{\psi}$, $W = w - \widetilde{w}$ e $\Theta = \theta - \widetilde{\theta}$ temos

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1 \Phi_{tt} - k(\Phi_x + \Psi + lW)_x + k_0 l[W_x - l\Phi] = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \rho_2 \Psi_{tt} - b\Psi_{xx} + k(\Phi_x + \Psi + lw) + \gamma\Theta_x \\ = k_1\gamma(\frac{m}{K_1^2} P\widetilde{\psi}_t - \frac{1}{k_1}\widetilde{\theta}_x), \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \rho_1 W_{tt} - k_0[W_x - l\Phi]_x + kl(\Phi_x + \Psi + lW) = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \Theta_t - k_1\Theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \Phi(0,t) = \Phi(L,t) = \Psi(0,t) = \Psi(L,t) = W(0,t) = W(L,t) \\ = \Theta(0,t) = \Theta(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ \Phi(.,0) = 0, \quad \Phi_t(.,0) = 0, \quad em \quad (0,L) \\ \Psi(.,0) = 0, \quad \Psi_t(.,0) = 0, \quad em \quad (0,L) \\ W(.,0) = 0, \quad W_t(.,0) = 0, \quad em \quad (0,L) \\ \Theta(.,0) = 0, \quad em \quad (0,L). \end{array}\right. \tag{3.42}$$

Vamos mostrar agora que $(\dfrac{m}{K_1^2} P\widetilde{\psi}_t - \dfrac{1}{k_1}\widetilde{\theta}_x)$ é limitado em $L^1(0,T; H^s(0,L))$ para algum $s > 0$ onde $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0)$ varia em B.

Decompomos

$$\frac{m}{K_1^2} P\widetilde{\psi}_t - \frac{1}{k_1}\widetilde{\theta}_x = w_x^1 + w_x^2 \tag{3.43}$$

onde w^1 satisfaz

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{k_1} w_t^1 + w_{xx}^1 = 0 \\ w^1(0,t) = w^1(L,t) = 0 \\ w^1(.,0) = -\dfrac{m}{k_1^2} A\widetilde{\psi}_{1x} - \dfrac{1}{k_1}\widetilde{\theta}_0 \end{array}\right. \tag{3.44}$$

e w^2 verifica

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{k_1} w_t^2 + w_{xx}^2 = -\dfrac{m}{k_1^2} A\widetilde{\psi}_{ttx} \\ w^2(0,t) = w^2(L,t) = 0 \\ w^2(.,0) = 0, \end{array}\right. \tag{3.45}$$

com $A = (-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}$.

Temos que

$\|\widetilde{\psi}_{1x}\|_{H^{-1}(0,L)} \leq C\|\widetilde{\psi}_1\|.$

Portanto

$$\widetilde{\psi}_{1x} \quad \text{é} \quad limitada \quad em \quad H^{-1}(0,L) \tag{3.46}$$

$$A\widetilde{\psi}_{1x} \quad \text{é} \quad limitada \quad em \quad H_0^1(0,L) \tag{3.47}$$

$$A\widetilde{\psi}_{1x} \quad \text{é} \quad limitada \quad em \quad L^2(0,L) \tag{3.48}$$

$$-\frac{m}{k_1^2}A\widetilde{\psi}_{1x} - \frac{1}{k_1}\widetilde{\theta}_0 \quad \text{é} \quad limitada \quad em \quad L^2(0,L) \tag{3.49}$$

Podemos escrever $w^1(t) = G_1(t)[w_0^1]$

onde $w_0^1 = w^1(0) = -\dfrac{m}{k_1^2}A\widetilde{\psi}_{1x} - \dfrac{1}{k_1}\widetilde{\theta}_0$

e G_1 é um semigrupo analítico (ver [33]) gerado por $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ tal que

$\|\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}G_1(t)v\| \leq M_1 t^{-1}\|v\|_{L^2(0,L)},$

e

$\|G_1(t)v\|_{L^2(0,L)} \leq \|v\|_{L^2(0,L)}, \quad \forall v \in L^2(0,L).$

Mostraremos agora que $\displaystyle\int_0^T \|w^1\|_{H^{1+\sigma}(0,L)}\, dt$ é limitada.

De fato temos que

$\|w^1(t)\|_{L^2(0,L)} = \|G_1(t)w_0^1\|_{L^2(0,L)} \leq \|w_0^1\|_{L^2(0,L)}$

e

$\|G_1(t)w_0^1\|_{H^2(0,L)}$
$= \|\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_1(t)w_0^1\|_{L^2(0,L)} \leq M_1 t^{-1}e^{-\delta t}\|w_0^1\|_{L^2(0,L)} \leq M_1 t^{-1}\|w_0^1\|_{L^2(0,L)}.$

Por interpolação tem-se que $H^s(0,L) = [H^m(0,L), H^0(0,L)]_\theta$ onde $(1-\theta)m = s$ $0 < \theta < 1$, m inteiro, assim podemos escrever $H^s(0,L) = [H^2(0,L), H^0(0,L)]_\theta$, com $s = 2(1-\theta) = 1 + (1-2\theta)$, tomando $\sigma = 1 - 2\theta$ e $0 < \theta < \dfrac{1}{2}$, teremos $0 < \sigma < 1$, assim $s = 1 + \sigma$ com $0 < \sigma < 1$.

Por interpolação (ver [25]) temos

$$\|G_1(t)w_0^1\|_{H^{1+\sigma}(0,L)} \leq \|G_1(t)w_0^1\|_{H^2(0,L)}^{\frac{1+\sigma}{2}} \|G_1(t)w_0^1\|_{L^2(0,L)}^{\frac{1-\sigma}{2}}$$
$$\leq (M_1 t^{-1})^{\frac{1+\sigma}{2}} \|w_0^1\|_{L^2(0,L)}^{\frac{1+\sigma}{2}} \|w_0^1\|_{L^2(0,L)}^{\frac{1-\sigma}{2}}.$$

Portanto,

$$\int_0^T \|G(t)w_0^1\|_{H^{1+\sigma}(0,L)} dt \leq \frac{2C}{1-\sigma} T^{\frac{1-\sigma}{2}} \|w_0^1\|_{L^2(0,L)}, \text{ onde } C = M_1^{\frac{1+\sigma}{2}}.$$

Assim, podemos concluir que

$$\int_0^T \|w^1\|_{H^{1+\sigma}(0,L)} dt \leq \frac{2C}{1-\sigma} T^{\frac{1-\sigma}{2}} \|w_0^1\|_{L^2(0,L)}.$$

Agora observe que

$$\widetilde{\psi}_{tt} = \frac{1}{\rho_2}[b\widetilde{\psi}_{xx} - k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w}) - \frac{m\gamma}{k_1} P\widetilde{\psi}_t] \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(0,L))$$

e assim $\widetilde{\psi}_{ttx} = \dfrac{1}{\rho_2}[b\widetilde{\psi}_{xxx} - k(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi} + l\widetilde{w})_x - \dfrac{m\gamma}{k_1} P\widetilde{\psi}_{xt}]$ é limitada em $L^2(0,T;(H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))')$.

Usando o operador $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = -\Delta$ e suas extensões $(-\Delta : L^2(0,L) \to (H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))'$,isometria e $-\Delta : H_0^1(0,L) \to H^{-1}(0,L)$, isometria e $-\Delta : H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L) \to L^2(0,L))$ e como $\widetilde{\psi}_x$ é limitado em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$, então $\widetilde{\psi}_{xxx}$ é limitado em $L^\infty(0,T;(H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))')$, portanto $\widetilde{\psi}_{ttx}$ é limitado em $L^\infty(0,T;(H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))')$, assim $\widetilde{\psi}_{ttx}$ é limitado em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$.

Analogamente como feito para w^1, teremos que w^2 é limitado em $L^1((0,T);H^{1+\sigma}(0,L))$; logo, concluímos que w_x^1, w_x^2 são limitados em $L^1(0,T;H^\sigma(0,L))$, com $0<\sigma<1$, isto é

$(\frac{m}{K_1^2}P\widetilde{\psi}_t - \frac{1}{k_1}\widetilde{\theta}_x)$ é limitado em $L^1(0,T;H^s(0,L))$ para algum $s>0$, onde $(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,w_0,w_1,\theta_0)$ varia em B.

Mostremos agora que $S(t) - S^0(t) : \mathcal{H} \to C([0,T];\mathcal{H})$ é contínua e compacto.

Seja $B \subset \mathcal{H}$ um conjunto limitado com $(\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, w_0^n, w_1^n, \theta_0^n) \subset B$.

Então:

$S(t) - S^0(t)(\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, w_0^n, w_1^n, \theta_0^n) \ = (\varphi^n - \widetilde{\varphi}^n, \psi^n - \widetilde{\psi}^n, w^n - \widetilde{w}^n, \theta^n - \widetilde{\theta}^n);$

então existe uma subsequência de $(\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, w_0^n, w_1^n, \theta_0^n) \subset B$ que, sem perda de generalidade, usaremos as mesmas notações, tal que

$$(\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, w_0^n, w_1^n, \theta_0^n) \rightharpoonup (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0) \tag{3.50}$$

Mostraremos que

$$(S(t) - S^0(t))(\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, w_0^n, w_1^n, \theta_0^n) \to (S(t) - S^0(t))(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0). \tag{3.51}$$

De fato, já temos que

$$(S(t) - S^0(t))(\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, w_0^n, w_1^n, \theta_0^n) \rightharpoonup (S(t) - S^0(t))(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0). \tag{3.52}$$

Considerando o funcional de energia $E(t)$ associado a (3.42) temos
$E(t) \leq |\frac{\gamma m}{k_1} P \widetilde{\psi}_t - \widetilde{\theta}_x|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}$;

logo $\varphi_t - \widetilde{\varphi}_t$ é limitado em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$, $\varphi_{tt} - \widetilde{\varphi}_{tt}$ é limitado em $L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L))$ $\varphi_{ttx} - \widetilde{\varphi}_{ttx}$ é limitado em $L^\infty(0,T;H^{-2}(0,L))$, como $H^\sigma(0,L)$ tem imersão compacta em $L^2(0,L)$ e $L^2(0,L)$ tem imersão contínua em $H^{-2}(0,L)$ ver [36]

$$(S(t) - S^0(t))(\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, w_0^n, w_1^n, \theta_0^n) \to (S(t) - S^0(t))(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0). \tag{3.53}$$

□

3.4 Resultados de Soluções

Consideremos o problema

$$\left\{\begin{array}{l}\rho_1\varphi_{tt}-k(\varphi_x+\psi+lw)_x+k_0l(w_x-l\varphi)=0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)+\gamma\theta_x=0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \rho_1w_{tt}-k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)=0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \theta_t-k_1\theta_{xx}+m\psi_{xt}=0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \varphi(0,t)=\varphi(L,t)=\psi(0,t)=\psi(L,t)=w(0,t)=w(L,t)\\ =\theta(0,t)=\theta(L,t)=0, \quad t\in(0,T)\\ \varphi(.,0)=\varphi_0, \quad \varphi_t(.,0)=\varphi_1, \quad em \quad (0,L)\\ \psi(.,0)=\psi_0, \quad \psi_t(.,0)=\psi_1, \quad em \quad (0,L)\\ w(.,0)=w_0, \quad w_t(.,0)=w_1, \quad em \quad (0,L)\\ \theta(.,0)=\theta_0, \quad em \quad (0,L),\end{array}\right. \tag{3.54}$$

Lema 3.2. *Se a solução de (3.54)* $(\varphi,\psi,w,\theta)=(c_1,c_2,c_3,c_4)$ *em* $(l_1,l_2)\times(0,T)$, *onde* c_1,c_2,c_3,c_4 *são constantes, então* $(\varphi,\psi,w,\theta)=(c_1,c_2,c_3,c_4)$ *em* $(0,L)\times(0,T)$.

Demonstração: Sem perca de generalidade podemos supor $c_1=c_2=c_3=c_4=0$. Agora usando [18] para $\alpha\in\mathbb{Z}^2, \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ com $|\alpha|=m$ denotamos $\dfrac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}$. A notação de Schwartz, na forma geral para m a ordem do sistema linear para N equações diferenciais com N incógnitas temos a forma

$$\sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x)\partial^\alpha u=B(x)$$

onde u e B são vetores colunas com N componentes e A_α são matrizes de ordem $N\times N$.

Seja $X=[\varphi,\psi,w,\theta]$ o vetor coluna. A parte principal de (3.54) é dado por $A_{(2,0)}\partial^{(2,0)}X+A_{(1,1)}\partial^{(0,2)}X+A_{(0,2)}\partial^{(0,2)}X$ com

$$A_{(0,2)}=\begin{pmatrix}\rho_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \rho_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{(2,0)} = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz característica é

$$\Lambda((\xi,\eta,\tau)) = \begin{pmatrix} \rho_1\xi^2 - k\tau^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2\xi^2 - b\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1\xi^2 - k_0\tau^2 & 0 \\ 0 & \eta m & 0 & -k_1\tau^2 \end{pmatrix}$$

e a forma principal para o operador é dado por

$$Q(\xi,\eta,\tau) = det(\Lambda((\xi,\eta,\tau))) = (\rho_1\xi^2 - k\tau^2)(\rho_2\xi^2 - b\tau^2)(\rho_1\xi^2 - k_0\tau^2)(-k_1\tau^2).$$

A linha principal dada por

$\Pi = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \tau r + \xi t = C\}$ é característica com respeito a (3.54) se, e somente se,

$\tau^2 = 0$

$\rho_1\xi^2 - k\tau^2 = 0, \quad \tau = \pm\sqrt{\frac{\rho_1}{k}}\xi$

$\rho_2\xi^2 - b\tau^2 = 0, \quad \tau = \pm\sqrt{\frac{\rho_2}{b}}\xi$

$\rho_1\xi^2 - k_0\tau^2 = 0, \quad \tau = \pm\sqrt{\frac{\rho_1}{k_0}}\xi.$

Consequentemente, as linhas características do sistema são

$$\left\{ \begin{array}{l} t = C \\ t \pm \sqrt{\frac{k}{\rho_1}}r = C \\ t \pm \sqrt{\frac{b}{\rho_2}}r = C \\ t \pm \sqrt{\frac{k_0}{\rho_1}}r = C \end{array} \right. \tag{3.55}$$

e, pela unicidade dada pelo teorema de Holmgren's (ver [18]), conclui-se que

$(\varphi,\psi,w,\theta) = (0,0,0,0)$ em $(0,L)\times(0,T)$

□

Corolário 3.3. *Se* $(\varphi,\psi,w) = (0,0,0)$ *em* $(l_1,l_2)\times(0,T)$*, então* $(\varphi,\psi,w,\theta) = (0,0,0,C)$ *em* $(0,L)\times(0,T)$.

Demonstração: De fato se $(\varphi,\psi,w) = (0,0,0)$ em $(l_1,l_2)\times(0,T)$ então por $(3.54)_2$ $\theta_x = 0$ em $(l_1,l_2)\times(0,T)$ e por $(3.54)_4$ $\theta_t = 0$ em $(l_1,l_2)\times(0,T)$, de $\theta_x = 0$ e $\theta_t = 0$ em $(l_1,l_2)\times(0,T)$, temos que $\theta = C$, em $(l_1,l_2)\times(0,T)$ onde é uma constante que não depende de x e nem de t e pelo lema (3.2) $(\varphi,\psi,w,\theta) = (0,0,0,C)$ em $(0,L)\times(0,T)$ □

Proposição 3.4. *Suponhamos que* $T > 2\alpha R$*, se a solução de (3.54)* (φ,ψ,w,θ) *é tal que* $(\varphi,\psi,w) = (0,0,0)$ *em* $(l_1,l_2)\times(0,T)$*, então* $(\varphi,\psi,w,\theta) = (0,0,0,0)$ *em* $(0,L)\times(0,T)$.

Demonstração: De fato do corolário(3.3) temos que $(\varphi,\psi,w,\theta) = (0,0,0,C)$ em $(0,L)\times(0,T)$ e pelo fato de $\theta(0,.) = \theta(L,.) = 0$ em $(0,T)$, então $C = 0$, e portanto $(\varphi,\psi,w,\theta) = (0,0,0,0)$ em $(0,L)\times(0,T)$. □

Proposição 3.5. *Suponhamos que* $T > 2\alpha R$*. Seja* (u,v,z,p) *solução do sistema (3.6) tal que* $(u,v,z) = (0,0,0)$ *em* $(l_1,l_2)\times(0,T)$*. Então* $(u,v,z,p) = (0,0,0,0)$ *em* $(0,L)\times(0,T)$.

Demonstração: Fazendo-se uma reversão no tempo em (3.6) $u(x,t) = \widetilde{u}(x,T-t)$, $v(x,t) = \widetilde{v}(x,T-t)$, $z(x,t) = \widetilde{z}(x,T-t)$, $p(x,t) = \widetilde{p}(x,T-t)$, e em seguida derivando-se $(3.6)_4$ em relação a t e chamando $\widetilde{p}_t = \widetilde{\eta}$ chegamos a

$$\begin{cases} \rho_1\widetilde{u}_{tt} - k(\widetilde{u}_x + \widetilde{v} + l\widetilde{z})_x + k_0 l[\widetilde{z}_x - l\widetilde{u}] = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T,) \\ \rho_2\widetilde{v}_{tt} - b\widetilde{v}_{xx} + k(\widetilde{u}_x + \widetilde{v} + l\widetilde{z}) + m\widetilde{\eta}_x = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T), \\ \rho_1\widetilde{z}_{tt} - k_0[\widetilde{z}_x - l\widetilde{u}]_x + kl(\widetilde{u}_x + \widetilde{v} + l\widetilde{z}) = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T), \\ \eta_t - k_1\eta_{xx} + \gamma v_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T). \end{cases} \tag{3.56}$$

Como $(u,v,z) = (0,0,0)$ em $(l_1,l_2)\times(0,T)$, então pela definição de $(\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{z})$ temos que $(\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{z}) = (0,0,0)$ em $(l_1,l_2)\times(0,T)$, e pela proposição (3.4) $(\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{z},\widetilde{\eta} = \widetilde{p}_t) = (0,0,0,0)$ em $(0,L)\times(0,T)$, portanto $\widetilde{p} = \widetilde{p}(x)$ por (3.6) teremos então que

$p_{xx}=0$ em $(0,L)\times(0,T)$, assim $p=Cx$ e pelo fato de $p(0,.)=p(L,.)=0$ em $(0,T)$. devemos ter que $C=0$, e portanto $p=0$ em $(0,L)\times(0,T)$.

$\square$

3.5 Desigualdade de observabilidade e controle interno

Considere o problema

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}-k(\varphi_x+\psi+lw)_x+k_0l[w_x-l\varphi]=0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)+\frac{m\gamma}{k_1}P\psi_t=0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \rho_1w_{tt}-k_0[w_x-l\varphi]_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)=0, \quad em \quad (0,L)\times(0,T)\\ \varphi(0,t)=\varphi(L,t)=\psi(0,t)=\phi(L,t)=w(0,t)=w(L,t)=0, \quad t\in(0,T)\\ \varphi(.,0)=\varphi_0, \quad \varphi_t(.,0)=\varphi_1, \quad em \quad (0,L)\\ \psi(.,0)=\psi_0, \quad \psi_t(.,0)=\psi_1, \quad em \quad (0,L)\\ w(.,0)=w_0, \quad w_t(.,0)=w_1, \quad em \quad (0,L) \end{cases} \tag{3.57}$$

com $P\psi_t=\psi_t-\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L\psi_t dx$. Sejam

$R:=\max\{l_1,L-l_2\}$ e $\alpha:=\max\{1,\dfrac{\rho_1}{k},\dfrac{\rho_2}{b},\dfrac{\rho_1}{k_0}\}$.

Teorema 3.6 (Desigualdade de Observabilidade)**.** *Para $T>2\alpha R$, existe uma constante positiva, $C>0$, tal que a solução fraca de (3.57) satisfaz*

$$\|\{\varphi_0,\psi_0,\omega_0\}\|^2_{[H_0^1(0,L)]^3}+\|\{\varphi_1,\psi_1,\omega_1\}\|^2_{[L^2(0,L)]^3}\leq C\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}[\varphi_t^2+\psi_t^2+\omega_t^2]\ dx\ dt \tag{3.58}$$

Demonstração: [Prova do teorema 3.6] Primeiramente, considere $T_0\in\mathbb{R}$ tal que $T>T_0>2\alpha R$. Então, escolha $\varepsilon_0\in\mathbb{R}$ satisfazendo $0<\varepsilon_0<\min\left\{\frac{l_2-l_1}{2},\frac{T_0-2\alpha R}{2(\alpha+1)}\right\}$. Para simplificar a notação, considere

$$\begin{aligned}\Phi(x,t) \ := \ & \rho_1|\varphi_t(x,t)|^2+\rho_2|\psi_t(x,t)|^2+\rho_1|\omega_t(x,t)|^2+b|\psi_x(x,t)|^2+k|\varphi_x(x,t)|^2\\ & +k_0|\omega_x(x,t)|^2+k|\psi(x,t)+l\omega(x,t)|^2+k_0l^2|\varphi(x,t)|^2 \qquad (3.59)\\ & +\varepsilon x\frac{m\gamma}{k_1L}(\int_0^L\psi_t(x,t)dx)^2. \qquad (3.60)\end{aligned}$$

Considere as funções F_ξ^1 e F_ξ^2 definidas conforme segue.

- Para $T > 0$ e $\xi \in (0, L)$ tal que $T - 2\varepsilon_0 > 2\alpha\xi$, defina

$$F_\xi^1(x) := \frac{1}{2}\int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \Phi(x,t)dt, \quad x \in [0,\xi]. \tag{3.61}$$

- Para $T > 0$ e $\xi \in (0, L)$ tal que $T - 2\varepsilon_0 > 2\alpha(L-\xi)$, defina

$$F_\xi^2(x) := \frac{1}{2}\int_{\varepsilon_0+(x-\xi)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(x-\xi)\alpha} \Phi(x,t)dt, \quad x \in [\xi, L]. \tag{3.62}$$

Para $T > 0$ satisfazendo as condições ora mencionadas, segue que

$$F_\xi^1(\xi) = F_\xi^2(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon_0}^{T-\varepsilon_0} \Phi(\xi,t)dt.$$

Derivando-se F_ξ^1 em relação a x vem que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F_\xi^1(x) \quad = \quad & \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \rho_1\varphi_t\varphi_{tx} + \rho_2\psi_t\psi_{tx} + \rho_1\omega_t\omega_{tx} + b\psi_x\psi_{xx} \\ & +k\varphi_x\varphi_{xx} + k_0\omega_x\omega_{xx} + k(\psi + l\omega)(\psi + l\omega)_x + k_0 l^2\varphi\varphi_x dt \\ & + \frac{\alpha}{2}\Phi(x,t)\Big|_{t=T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} + \frac{\alpha}{2}\Phi(x,t)\Big|_{t=\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha} \qquad (3.63) \\ & +\varepsilon\frac{m\gamma}{k_1 L}(\int_0^L \psi_t)^2. \qquad (3.64)\end{aligned}$$

Integrando-se por partes as três primeiras parcelas do lado direito da identidade acima resulta em

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \rho_1\varphi_t\varphi_{tx} + \rho_2\psi_t\psi_{tx} + \rho_1\omega_t\omega_{tx} \qquad (3.65) \\ & = [\rho_1\varphi_t\varphi_x + \rho_2\psi_t\psi_x + \rho_1\omega_t\omega_x|_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \qquad (3.66) \\ - & \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \rho_1\varphi_{tt}\varphi_x + \rho_2\psi_{tt}\psi_x + \rho_1\omega_{tt}\omega_x \; dt. \qquad (3.67)\end{aligned}$$

Multiplicando-se a primeira, segunda e terceira equação de 3.57 por φ_x, ψ_x e ω_x, respectivamente, e somando-se os resultados obtém-se

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \rho_1\varphi_{tt}\varphi_x+\rho_2\psi_{tt}\psi_x+\rho_1\omega_{tt}\omega_x\, dt \qquad (3.68)\\
=& \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} -k\varphi_{xx}\varphi_x-k(\psi+l\omega)_x\varphi_x-k_0l[\omega_x-l\varphi]\varphi_x-b\psi_{xx}\psi_x+k\varphi_x\psi_x\\
&+k(\psi+l\omega)\psi_x+\frac{m\gamma}{k_1}\psi_t\psi_x-\frac{m\gamma}{k_1L}(\int_0^L \psi_t dx)\psi_x-k_0\omega_{xx}\omega_x+k_0l\varphi_x\omega_x\\
&+kl\varphi_x\omega_x+kl(\psi+l\omega)\omega_x\, dt.
\end{aligned}
$$

Combinando (3.63), (3.65) e (3.68) chegamos a

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F_\xi^1(x)=&\int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}\Bigg[2k_0l^2\varphi\varphi_x+\varepsilon\frac{m\gamma}{k_1L}(\int_0^L\psi_t dx)^2 \qquad (3.69)\\
&\frac{m\gamma}{k_1}\psi_t\psi_x-\frac{m\gamma}{k_1L}(\int_0^L\psi_t dx)\psi_x+2k(\psi+l\omega)(\psi+l\omega)_x\Bigg]\,dt\\
&+\frac{\alpha}{2}\Phi(x,t)\Big|_{t=T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}+\frac{\alpha}{2}\Phi(x,t)\Big|_{t=\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}\\
&+[\rho_1\varphi_t\varphi_x+\rho_2\psi_t\psi_x+\rho_1\omega_t\omega_x|_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}.
\end{aligned}
$$

Provemos agora que as duas últimas linhas de (3.69) é maior que zero. De fato,

$$
\begin{aligned}
&|\rho_1\varphi_t(x,t)\varphi_x(x,t)+\rho_2\psi_t(x,t)\psi_x(x,t)+\rho_1\omega_t(x,t)\omega_x(x,t)| && (3.70)\\
\leq\ & \tfrac{1}{2}\left[\rho_1\varphi_t^2(x,t)+\rho_2\psi_t^2(x,t)+\rho_1\omega_t^2(x,t)+\tfrac{\rho_1}{k}k\varphi_x^2(x,t)\right. && (3.71)\\
&\left.+\tfrac{\rho_2}{b}b\psi_x^2(x,t)+\tfrac{\rho_1}{k_0}k_0\omega_x^2(x,t)\right] && (3.72)\\
\leq\ & \tfrac{1}{2}\max\left\{1,\tfrac{\rho_1}{k},\tfrac{\rho_2}{b},\tfrac{\rho_1}{k_0}\right\}[\rho_1\varphi_t^2(x,t)+\rho_2\psi_t^2(x,t)+\rho_1\omega_t^2(x,t) && (3.73)\\
&+k\varphi_x^2(x,t)+b\psi_x^2(x,t)+k_0\omega_x^2(x,t)] && (3.74)\\
\leq\ & \tfrac{\alpha}{2}\Phi(x,t),\quad \forall(x,t)\in(0,L)\times(0,T), && (3.75)
\end{aligned}
$$

o que vem justificar a importante escolha de α e nos permite concluir que

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\alpha}{2}\Phi(x,T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha)+\tfrac{\alpha}{2}\Phi(x,\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha)\\
&+[\rho_1\varphi_t\varphi_x+\rho_2\psi_t\psi_x+\rho_1\omega_t\omega_x|_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}\geq 0.
\end{aligned} \qquad (3.76)
$$

Note também que

$$
\varepsilon\frac{m\gamma}{k_1L}(\int_0^L\psi_t dx)^2-\frac{m\gamma}{k_1L}(\int_0^L\psi_t dx)\psi_x\geq\varepsilon\frac{m\gamma}{k_1L}(\int_0^L\psi_t dx)^2-\varepsilon\frac{m\gamma}{k_1L}(\int_0^L\psi_t dx)^2-\frac{m\gamma}{4\varepsilon k_1L}\psi_x^2=-\frac{m\gamma}{4\varepsilon k_1L}\psi_x^2
$$

Assim, levando-se em conta a definição de F_ξ^1, podemos estimar (3.69), desprezando sua última linha, e obter

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F_\xi^1(x) &\geq \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}\left[2k_0l^2\varphi\varphi_x+\frac{m\gamma}{k_1}\psi_t\psi_x\right.\\
&\qquad\qquad\left.+2k(\psi+l\omega)(\psi+l\omega)_x-\frac{m\gamma}{4\varepsilon k_1L}\psi_x^2\right]\,dt\\
&\geq -\frac{C}{2}\int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}\Phi(x,t)dt\\
&= -CF_\xi^1(x),
\end{aligned}$$

onde $C>0$ é uma constante positiva. Desta desigualdade segue que $\frac{d}{dx}F_\xi^1(x)+CF_\xi^1(x)\geq 0$ o que implica, quando multiplicada por um fator integrante, que $\frac{d}{dx}\left[F_\xi^1(x)e^{Cx}\right]\geq 0$. Integrando-se esta última em $[x,\xi]$ vem que

$$F_\xi^1(x)\leq CF_\xi^1(\xi),\quad \forall x\in[0,\xi],\quad \xi\in(0,L). \tag{3.77}$$

Integrando-se a desigualdade acima em $[0,\xi]$ e usando a definição de F_ξ^1 obtemos

$$\int_0^\xi\int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}\Phi(x,t)\,dt\,dx\leq C\int_{\varepsilon_0}^{T-\varepsilon_0}\Phi(\xi,t)\,dt. \tag{3.78}$$

Usando-se argumentos análogos para F_ξ^2 chegamos a

$$F_\xi^2(x)\leq CF_\xi^2(\xi),\quad \forall x\in[\xi,L],\quad \xi\in(0,L). \tag{3.79}$$

Integrando-se sobre $[\xi,L]$ resulta que

$$\int_\xi^L\int_{\varepsilon_0+(x-\xi)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(x-\xi)\alpha}\Phi(x,t)\,dt\,dx\leq C\int_{\varepsilon_0}^{T-\varepsilon_0}\Phi(\xi,t)\,dt. \tag{3.80}$$

Agora, fazendo-se $\widetilde{l_1}:=l_1+\varepsilon_0$ e $\widetilde{l_2}:=l_2-\varepsilon_0$ vem que $(\widetilde{l_1},\widetilde{l_2})\subset(l_1,l_2)$. Desta forma podemos definir

$$\widetilde{R}:=\max\left\{\widetilde{l_1},L-\widetilde{l_2}\right\}. \tag{3.81}$$

Observe que $\widetilde{R}=R+\varepsilon_0$. Então, devido à escolha de ε_0, segue que $T_0-2\varepsilon_0>2\alpha\widetilde{R}$. Logo, existe $\delta_0>0$ tal que $T_0-2\varepsilon_0-2\alpha\delta_0>2\alpha\widetilde{R}$. Mais ainda, considere $\delta\in\mathbb{R}$ tal que

$$0 < \delta < \min\left\{\delta_0, \frac{\widetilde{l}_2 - \widetilde{l}_1}{2}\right\} \tag{3.82}$$

e observe que

$$\begin{aligned} \xi \in [\widetilde{l}_1, \widetilde{l}_1 + \delta] \quad &\Rightarrow \quad T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta > T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta_0 > 2\alpha\widetilde{R} \geq 2\alpha\widetilde{l}_1 \\ &\Rightarrow \quad T_0 - 2\varepsilon_0 > 2\alpha(\widetilde{l}_1 + \delta) \geq 2\alpha\xi \end{aligned} \tag{3.83}$$

e

$$\begin{aligned} \xi \in [\widetilde{l}_2 - \delta, \widetilde{l}_2] \quad &\Rightarrow \quad T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta > T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta_0 > 2\alpha\widetilde{R} \geq 2\alpha(L - \widetilde{l}_2) \\ &\Rightarrow \quad T_0 - 2\varepsilon_0 > 2\alpha(L - (\widetilde{l}_2 - \delta)) \geq 2\alpha(L - \xi). \end{aligned} \tag{3.84}$$

As implicações acima juntamente com as relações 3.78 e 3.80 nos fornecem

$$\int_0^{\xi} \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T_0 - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \Phi(x,t)\ dt\ dx \leq C \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t)\ dt, \text{ se } \xi \in [\widetilde{l}_1, \widetilde{l}_1 + \delta], \tag{3.85}$$

$$\int_{\xi}^{L} \int_{\varepsilon_0 + (x - \xi)\alpha}^{T_0 - \varepsilon_0 - (x - \xi)\alpha} \Phi(x,t)\ dt\ dx \leq C \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t)\ dt, \text{ se } \xi \in [\widetilde{l}_2 - \delta, \widetilde{l}_2]. \tag{3.86}$$

Integrando as expressões acima nos intervalos a que ξ pertence, a saber, ora em $[\widetilde{l}_1, \widetilde{l}_1 + \delta]$, ora em $[\widetilde{l}_2 - \delta, \widetilde{l}_2]$, resulta em

$$\int_{\widetilde{l}_1}^{\widetilde{l}_1 + \delta} \int_0^{\xi} \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T_0 - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \Phi(x,t)\ dt\ dx\ d\xi \leq C \int_{\widetilde{l}_1}^{\widetilde{l}_1 + \delta} \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t)\ dt\ d\xi, \tag{3.87}$$

$$\int_{\widetilde{l}_2 - \delta}^{\widetilde{l}_2} \int_{\xi}^{L} \int_{\varepsilon_0 + (x - \xi)\alpha}^{T_0 - \varepsilon_0 - (x - \xi)\alpha} \Phi(x,t)\ dt\ dx\ d\xi \leq C \int_{\widetilde{l}_2 - \delta}^{\widetilde{l}_2} \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t)\ dt\ d\xi. \tag{3.88}$$

Por outro lado, como $\xi \in [\widetilde{l}_1, \widetilde{l}_1 + \delta]$, podemos eliminar a dependência de ξ e estimar o lado esquerdo de (3.87) conforme segue

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta}\int_0^{\xi}\int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}\Phi(x,t)\ dt\ dx\ d\xi\\
&=\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta}\int_0^{\tilde{l}_1}F^1_{\xi}(x)\ dx\ d\xi+\underbrace{\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta}\int_{\tilde{l}_1}^{\xi}F^1_{\xi}(x)\ dx\ d\xi}_{\geq 0}\\
&\geq\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta}\int_0^{\tilde{l}_1}F^1_{\xi}(x)\ dx\ d\xi\\
&=2\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta}\int_0^{\tilde{l}_1}\int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}\Phi(x,t)\ dt\ dx\ d\xi\\
&\geq 2\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta}\int_0^{\tilde{l}_1}\int_{\varepsilon_0+(\tilde{l}_1+\delta-x)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\tilde{l}_1+\delta-x)\alpha}\Phi(x,t)\ dt\ dx\ d\xi\\
&=2\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta}\int_0^{\tilde{l}_1}F^1_{\tilde{l}_1+\delta}(x)\ dx\ d\xi\\
&=2\delta\int_0^{\tilde{l}_1}F^1_{\tilde{l}_1+\delta}(x)\ dx.
\end{aligned}
\tag{3.89}
$$

De forma análoga obtemos que:

$$
\int_{\tilde{l}_2-\delta}^{\tilde{l}_2}\int_{\xi}^{L}\int_{\varepsilon_0+(x-\xi)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(x-\xi)\alpha}\Phi(x,t)\ dt\ dx\ d\xi\geq 2\delta\int_{\tilde{l}_2}^{L}F^2_{\tilde{l}_2-\delta}(x)\ dx. \tag{3.90}
$$

Combinando-se (3.87), (3.88), (3.89) e (3.90) e do fato que $\delta<\frac{\tilde{l}_2-\tilde{l}_1}{2}$ segue que:

$$
\int_0^{\tilde{l}_1}F^1_{\tilde{l}_1+\delta}(x)\ dx\leq\frac{C}{\delta}\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta}\int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0}\Phi(\xi,t)\ dt\ d\xi\leq\frac{C}{\delta}\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2}\int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0}\Phi(x,t)\ dt\ dx \tag{3.91}
$$

$$
\int_{\tilde{l}_2}^{L}F^2_{\tilde{l}_2-\delta}(x)\ dx\leq\frac{C}{\delta}\int_{\tilde{l}_2-\delta}^{\tilde{l}_2}\int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0}\Phi(\xi,t)\ dt\ d\xi\leq\frac{C}{\delta}\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2}\int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0}\Phi(x,t)\ dt\ dx \tag{3.92}
$$

A escolha de $T_0>0$ nos dá $T_0-2\varepsilon_0-2\alpha\delta-2\alpha\tilde{R}>0$. Da equivalência das normas de $[H^1_0(0,L)\times L^2(0,L)]^3$ induzida pela energia, $E(t)$, e da definição de $\displaystyle\int_0^L\Phi(x,t)dx$, juntamente com $E(0)\leq CE(t)$,

$$
\begin{aligned}
&(T_0-2\varepsilon_0-2\alpha\delta-2\alpha\tilde{R})E(0)\\
&\leq C\int_{\varepsilon_0+(\tilde{R}+\delta)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\tilde{R}+\delta)\alpha}E(t)\ dt\leq C\int_{\varepsilon_0+(\tilde{R}+\delta)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\tilde{R}+\delta)\alpha}\int_0^L\Phi(x,t)\ dx\ dt
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

Da definição de $\tilde{R}$ temos que

$$
\varepsilon_0+(\tilde{R}+\delta)\alpha\geq\varepsilon_0+(\tilde{l}_1+\delta)\alpha\geq\varepsilon_0+(\tilde{l}_1+\delta-x)\alpha,\quad x\in[0,L];\qquad\text{and}
$$

$$
\varepsilon_0+(\tilde{R}+\delta)\alpha\geq\varepsilon_0+(L-\tilde{l}_2+\delta)\alpha\geq\varepsilon_0+(x-(\tilde{l}_2-\delta-x))\alpha,\quad x\in[0,L],
$$

o que, por sua vez, implica que

$$\begin{aligned}&\Big(\varepsilon_0+(\widetilde{R}+\delta)\alpha, T_0-\varepsilon_0-(\widetilde{R}+\delta)\alpha\Big)\\ \subset&\Big(\varepsilon_0+(\widetilde{l}_1+\delta-x)\alpha, T_0-\varepsilon_0-(\widetilde{l}_1+\delta-x)\alpha\Big)\end{aligned} \tag{3.94}$$

e

$$\begin{aligned}&\Big(\varepsilon_0+(\widetilde{R}+\delta)\alpha, T_0-\varepsilon_0-(\widetilde{R}+\delta)\alpha\Big)\\ \subset&\Big(\varepsilon_0+(x-(\widetilde{l}_2-\delta))\alpha, T_0-\varepsilon_0-(x-(\widetilde{l}_2-\delta))\alpha\Big).\end{aligned} \tag{3.95}$$

Assim, aumentando-se o intervalo de integração da última estimativa e trocando-se a ordem das integrais chegamos a

$$E(0)\leq C\int_0^{\widetilde{l}_1} F^1_{\widetilde{l}_1+\delta}(x)\ dx+C\int_{\widetilde{l}_1}^{\widetilde{l}_2}\int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0}\Phi(x,t)\ dt\ dx+C\int_{\widetilde{l}_2}^{L} F^2_{\widetilde{l}_2-\delta}(x)\ dx. \tag{3.96}$$

A desigualdade acima junto às estimativas (3.91) e (3.92), nos permitem escrever

$$E(0)\leq C\int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0}\int_{l_1+\varepsilon_0}^{l_2-\varepsilon_0}\Phi(x,t)\ dx\ dt. \tag{3.97}$$

Portanto, da definição de Φ e do fato que $T>T_0$ segue que

$$\begin{aligned}&E(0)\leq C\int_{\varepsilon_0}^{T-\varepsilon_0}\int_{l_1+\varepsilon_0}^{l_2-\varepsilon_0}\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+\rho_1\omega_t^2+b\psi_x^2+k\varphi_x^2+k_0\omega_x^2+k\psi^2\\ &+kl^2\omega^2+k_0l^2\varphi^2+\varepsilon x\tfrac{m\gamma}{k_1L}(\textstyle\int_0^L\psi_t\ dx)^2\ dx\ dt.\end{aligned} \tag{3.98}$$

Note que

$$\begin{aligned}&C\int_{\varepsilon_0}^{T-\varepsilon_0}\int_{l_1+\varepsilon_0}^{l_2-\varepsilon_0}\varepsilon x\frac{m\gamma}{k_1L}(\int_0^L\psi_t\ dx)^2\ dx\ dt\\ &\leq C\int_{\varepsilon_0}^{T-\varepsilon_0}\int_{l_1+\varepsilon_0}^{l_2-\varepsilon_0}\varepsilon x\frac{m\gamma}{k_1L}\int_0^L\psi_t^2\ dx\ dx\ dt\\ &\leq C\int_{\varepsilon_0}^{T-\varepsilon_0}\int_{l_1+\varepsilon_0}^{l_2-\varepsilon_0}\varepsilon x\frac{m\gamma}{k_1L}2E(0)\ dx\ dt\\ &\leq C(T-2\varepsilon_0)(l_2-l_1-2\varepsilon_0)\varepsilon\tfrac{m\gamma}{k_1}E(0)\end{aligned} \tag{3.99}$$

e tomando-se ε suficientemente pequeno tal que
$C(T-2\varepsilon_0)(l_2-l_1-2\varepsilon_0)\varepsilon\dfrac{m\gamma}{k_1}\leq\dfrac{1}{2}$ obtemos

$$\begin{aligned}&E(0)\leq C\int_{\varepsilon_0}^{T-\varepsilon_0}\int_{l_1+\varepsilon_0}^{l_2-\varepsilon_0}\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+\rho_1\omega_t^2+b\psi_x^2\\ &+k\varphi_x^2+k_0\omega_x^2+k\psi^2+kl^2\omega^2+k_0l^2\varphi^2\ dx\ dt.\end{aligned} \tag{3.100}$$

Nosso próximo passo é eliminar os termos que têm derivada em relação a x na estimativa acima, ou seja, queremos obter uma desigualdade do tipo

$$\int_{\varepsilon_0}^{T-\varepsilon_0}\int_{l_1+\varepsilon_0}^{l_2-\varepsilon_0} b\psi_x^2+k\varphi_x^2+k_0\omega_x^2\,dx\,dt\ \leq C\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}\varphi_t^2+\psi_t^2+\omega_t^2+\varphi^2+\psi^2+\omega^2\,dx\,dt. \tag{3.101}$$

Faremos isto considerando as funções "cut-off" definidas a seguir

$$\left|\begin{array}{l}\eta\in C_0^\infty([0,T]);\\ 0\leq\eta(t)\leq 1,\ \forall t\in[0,T];\\ \eta(0)=\eta(T)=0;\\ \eta(t)=1,\ \text{em}\ (\varepsilon_0,T-\varepsilon_0).\end{array}\right. \tag{3.102}$$

e

$$\left|\begin{array}{l}\gamma\in C^\infty([0,L])\ \text{tal que}\ \mathrm{supp}(\gamma)\subset(0,L);\\ 0\leq\gamma(x)\leq 1,\ \forall x\in[0,L];\\ \gamma(x)=1\ \text{em}\ (l_1+\varepsilon_0,l_2-\varepsilon_0);\\ \gamma(x)=0,\ \text{em}\ [0,L]\setminus(l_1,l_2).\end{array}\right. \tag{3.103}$$

Uma vez escolhidas as funções η e γ defina

$$p(x,t)=\gamma^2(x)\eta(t)\in C^\infty([0,L]\times[0,T]).$$

É fácil ver que

$$\left|\begin{array}{l}0\leq p(x,t)\leq 1,\ \forall(x,t)\in[0,L]\times[0,T];\\ p(x,t)=1,\ \forall(x,t)\in(l_1+\varepsilon_0,l_2-\varepsilon_0)\times(\varepsilon_0,T-\varepsilon_0);\\ p(x,t)=p_t(x,t)=p_x(x,t)=0,\ \forall(x,t)\in[[0,L]\setminus(l_1,l_2)]\times(0,T);\\ p(x,0)=p(x,T)=0,\ \forall x\in[0,L].\end{array}\right. \tag{3.104}$$

Multiplicando-se as primeira, a segunda e a terceira equações de 3.57 por φp, ψp, ωp, respectivamente, e integrando-se por partes sobre $(0,L)\times(0,T)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
(I) \qquad & \int_0^T\int_0^L \left(k\varphi_x^2+b\psi_x^2+k_0\omega_x^2\right) p\ dx\ dt\\
\leq \quad & \int_0^T\int_0^L \left[\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+\rho_1\omega_t^2+k_0l^2\varphi^2+k\psi^2+kl^2\omega^2\right] p\ dx\ dt\\
& +\int_0^T\int_0^L \rho_1|\varphi_t p_t\varphi|+\rho_2|\psi_t p_t\psi|+\rho_1|\omega_t p_t\omega|+2klp|\psi\omega|\ dx\ dt\\
& +\int_0^T\int_0^L k|\varphi_x p_x\varphi|+k|\psi\varphi_x p|+k|\psi\varphi p_x|+kl|\varphi_x\omega p|+kl|\varphi\omega p_x|\ dx\ dt\\
& +\int_0^T\int_0^L k_0l|\varphi\omega_x|+b|\psi\psi_x p_x|+k|\varphi_x\psi p|+\frac{m\gamma}{k_1}|\psi_t\psi p|\\
& +\frac{m\gamma}{k_1L}|\int_0^L\psi_t dx\psi p|\ dx\ dt\\
& +\int_0^T\int_0^L k_0|\omega\omega_x p_x|+k_0l|\varphi\omega_x p|+k_0|\varphi\omega p_x|+kl|\varphi_x\omega p|\ dx\ dt.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
& \int_0^T\int_0^L \frac{m\gamma}{k_1L}|\int_0^L\psi_t dx\psi p|\ dx\ dt\\
& \leq \int_0^T\int_0^L \varepsilon\frac{m\gamma}{k_1L}\int_0^L|\psi_t|^2dx\ dx\ dt+\int_0^T\int_0^L\frac{m\gamma}{4\varepsilon k_1L}|\psi p|^2\ dx\ dt
\end{aligned}
$$

o termo

$$
\int_0^T\int_0^L \varepsilon\frac{m\gamma}{k_1L}\int_0^L|\psi_t|^2dx\ dx\ dt
$$

pode ser feito tal que

$$
\int_0^T\int_0^L \varepsilon\frac{m\gamma}{k_1L}\int_0^L|\psi_t|^2dx\ dx\ dt\leq\frac{1}{2}E(0)
$$

para ε suficientemente pequeno.

Note que pelo feito acima e usando-se a desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ para os termos onde não temos derivada em relação a x, e os termos com derivada em relação a x do lado esquerdo da estimativa (I) podem ser absorvidos pelos termos da direita com uso de desigualdades do tipo $ab \leq \delta a^2+\frac{1}{4\delta}b^2$, para $\delta>0$ apropriado, e propriedades da função p dadas em (3.104), o que nos permitem chegar a (3.101) mais $\frac{1}{2}E(0)$.

Portanto, de (3.100), vem que

$$E(0) \;\; \leq \;\; C\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} \varphi_t^2+\psi_t^2+\omega_t^2+\psi^2+\varphi^2+\omega^2\;dx\;dt. \tag{3.105}$$

Para finalizar a prova da desigualdade de observabilidade basta mostrar que

$$\int_0^T\int_0^L \varphi^2+\psi^2+\omega^2 dx\;dt \leq C\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} \varphi_t^2+\psi_t^2+\omega_t^2\;dx\;dt. \tag{3.106}$$

Demonstraremos este fato usando argumentos de contradição. De fato, suponha que (3.106) não se verifica. Então, podemos encontrar uma sequência de soluções não nulas de (3.57), denotada por $\{\widetilde{\varphi}_n,\widetilde{\psi}_n,\widetilde{\omega}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, satisfazendo

$$\int_0^T\int_0^L \widetilde{\varphi}_n^2+\widetilde{\psi}_n^2+\widetilde{\omega}_n^2\;dx\;dt > n\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} \widetilde{\varphi}_{nt}^2+\widetilde{\psi}_{nt}^2+\widetilde{\omega}_{nt}^2\;dx\;dt, \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

o que implica que

$$\frac{\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} \widetilde{\varphi}_{nt}^2+\widetilde{\psi}_{nt}^2+\widetilde{\omega}_{nt}^2\;dx\;dt}{\int_0^T\int_0^L \widetilde{\varphi}_n^2+\widetilde{\psi}_n^2+\widetilde{\omega}_n^2\;dx\;dt} \longrightarrow 0, \text{ quando } n\longrightarrow\infty. \tag{3.107}$$

Denotando

$$\begin{aligned}
\varphi_n \;&:=\; \frac{\widetilde{\varphi}_n}{\sqrt{\int_0^T\int_0^L \widetilde{\varphi}_n^2+\widetilde{\psi}_n^2+\widetilde{\omega}_n^2\;dx\;dt}}\\
\psi_n \;&:=\; \frac{\widetilde{\psi}_n}{\sqrt{\int_0^T\int_0^L \widetilde{\varphi}_n^2+\widetilde{\psi}_n^2+\widetilde{\omega}_n^2\;dx\;dt}}\\
\omega_n \;&:=\; \frac{\widetilde{\omega}_n}{\sqrt{\int_0^T\int_0^L \widetilde{\varphi}_n^2+\widetilde{\psi}_n^2+\widetilde{\omega}_n^2\;dx\;dt}}
\end{aligned}$$

vemos facilmente que

$$\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} \varphi_{nt}^2+\psi_{nt}^2+\omega_{nt}^2\;dx\;dt < \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \text{ quando } n\longrightarrow\infty \tag{3.108}$$

e, além disso,

$$\int_0^T\int_0^L \varphi_n^2+\psi_n^2+\omega_n^2\;dx\;dt = 1, \text{ para cada } n\in\mathbb{N}. \tag{3.109}$$

De (3.105), (3.109), (3.108) e pelo fato de $CE_0(0) \leq E_n(t) \leq C_1E_n(0)$ ser limitado, onde E_n é o funcional de energia associado ao sistema normalizado de solução $\{\varphi_n, \psi_n, \omega_n, \}$. Então, por equivalência de normas, resulta que

$$\{\varphi_{nt}\}, \{\psi_{nt}\}, \{\omega_{nt}\} \text{ são limitadas em } L^2(0, T, L^2(0, L)),$$
$$\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}, \{\omega_n\} \text{ são limitadas em } L^2(0, T, H_0^1(0, L)),$$

e, consequentemente, temos a convergência fraca de cada uma das sequências acima. Pelo teorema de Aubin-Lions, passando a subsequências se necessário, temos

$$\begin{aligned} &\varphi_n \to \varphi \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(0, L)),\\ &\psi_n \to \psi \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(0, L)),\\ &\omega_n \to \omega \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(0, L)). \end{aligned} \tag{3.110}$$

As convergências fortes acima, juntamente com (3.109) implicam em

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^L \varphi_n^2 + \psi_n^2 + \omega_n^2 \; dx \; dt = \int_0^T \int_0^L \varphi^2 + \psi^2 + \omega^2 \; dx \; dt. \tag{3.111}$$

Por outro lado, as convergências fracas de $\{\varphi_{nt}\}, \{\psi_{nt}\}, \{\omega_{nt}\}$ em

$L^2(0, T, L^2(0, L))$ nos permitem obter

$$\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_t^2 + \psi_t^2 + \omega_t^2 \; dx \; dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_{nt}^2 + \psi_{nt}^2 + \omega_{nt}^2 \; dx \; dt = 0, \tag{3.112}$$

o que implica que

$$\varphi_t = \psi_t = \omega_t = 0, \text{ em } (l_1, l_2) \times (0, T). \tag{3.113}$$

Derivando-se no sentido das distribuições

$$\varphi_{tt} = \psi_{tt} = \omega_{tt} = 0, \text{ em } (l_1, l_2) \times (0, T). \tag{3.114}$$

No que segue, denotaremos $z = \varphi_t$, $u = \psi_t$ e $v = \omega_t$. Note que $\{z, u, v\}$ é solução ultrafraca de

$$\begin{cases} \rho_1 z_{tt} - k(z_x + u + lv)_x - k_0 l[v_x - lz] = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T),\\ \rho_2 u_{tt} - bu_{xx} + k(z_x + u + lv) + \frac{m\gamma}{k_1} P u_t = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T),\\ \rho_1 v_{tt} - k_0[c(x)v_x - lz]_x + kl(z_x + u + lv) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T),\\ z = u = v = 0, & \text{em } (l_1, l_2) \times (0, T). \end{cases} \tag{3.115}$$

Antes de chegar à contradição propriamente dita, precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.7 (Regularidade escondida dos dados iniciais)**.** *A solução ultrafraca* $\{z, u, v\}$ *de (3.115) satisfaz*

$$z(\cdot, 0), u(\cdot, 0), v(\cdot, 0) \in H_0^1(0, L),$$

$$z_t(\cdot, 0), u_t(\cdot, 0), v_t(\cdot, 0) \in L^2(0, L).$$

Demonstração: [Prova do lema 3.7] Considere a sequência de funções regularizantes ρ_ν tais que

$$\left| \begin{array}{l} \rho_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \\ \rho_\nu(t) \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{supp}(\rho_\nu) \subset \left(-\frac{1}{\nu}, 0\right), \\ \displaystyle\int_{-\frac{1}{\nu}}^{0} \rho_\nu(t) dt = 1, \end{array} \right. \tag{3.116}$$

para cada $\nu \in \mathbb{N}$. Considere também as extensões de z, u e v dadas por

$$\widetilde{z}(x,t) = \begin{cases} z(x,t), & \text{se } t \in [0, T], \\ z(x,T)[T+1-t], & \text{se } t \in (T, T+1], \\ z(x,0)[t+1], & \text{se } t \in [-1, 0), \\ 0, & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, T+1]; \end{cases} \tag{3.117}$$

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{se } t \in [0, T], \\ u(x,T)[T+1-t], & \text{se } t \in (T, T+1], \\ u(x,0)[t+1], & \text{se } t \in [-1, 0), \\ 0, & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, T+1]; \end{cases} \tag{3.118}$$

$$\widetilde{v}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & \text{se } t \in [0, T], \\ v(x,T)[T+1-t], & \text{se } t \in (T, T+1], \\ v(x,0)[t+1], & \text{se } t \in [-1, 0) \\ 0, & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, T+1]. \end{cases} \tag{3.119}$$

Note que $\widetilde{z}, \widetilde{u}, \widetilde{v}$ são elementos de $C(\mathbb{R}; L^2(0,L))$ pois $z, u, v \in C([0,T]; L^2(0,L))$. Consequentemente, $\widetilde{z}, \widetilde{u}, \widetilde{v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; L^2(0,L))$. Fazendo a convolução com a sequência regularizante ρ_ν definimos

$$\widetilde{z}_\nu := \widetilde{z} * \rho_\nu, \quad \widetilde{u}_\nu := \widetilde{u} * \rho_\nu, \quad \widetilde{v}_\nu := \widetilde{v} * \rho_\nu, \tag{3.120}$$

as quais, por sua vez, pertencem a $C^\infty(\mathbb{R}; L^2(0,L))$, para cada $\nu \in \mathbb{N}$ (veja proposição 1.19). Portanto, suas derivadas

$$\frac{d^k}{dt^k}(\widetilde{z}_\nu) = \widetilde{z} * \frac{d^k}{dt^k}\rho_\nu, \quad \frac{d^k}{dt^k}(\widetilde{u}_\nu) = \widetilde{u} * \frac{d^k}{dt^k}\rho_\nu, \quad \frac{d^k}{dt^k}(\widetilde{v}_\nu) = \widetilde{v} * \frac{d^k}{dt^k}\rho_\nu, \tag{3.121}$$

ainda estão em $C^\infty(\mathbb{R}; L^2(0,L))$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Agora, dado $0 < \varepsilon < T - T_0$, considere $\nu \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de tal forma que $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$. Isto nos permite definir as seguintes sequências:

$$z_\nu(x,t) = \int_{-\frac{1}{\nu}}^{0} z(t-s)\rho_\nu(s)\ ds,\ \forall t \in [0, T-\varepsilon],$$

$$u_\nu(x,t) = \int_{-\frac{1}{\nu}}^{0} u(t-s)\rho_\nu(s)\ ds,\ \forall t \in [0, T-\varepsilon],$$

$$v_\nu(x,t) = \int_{-\frac{1}{\nu}}^{0} v(t-s)\rho_\nu(s)\ ds,\ \forall t \in [0, T-\varepsilon].$$

Das definições de $\widetilde{z}_\nu, \widetilde{u}_\nu, \widetilde{v}_\nu$ e z_ν, u_ν, v_ν, acima, vem que

$$\frac{d^k}{dt^k}(z_\nu) = \frac{d^k}{dt^k}(\widetilde{z}_\nu), \quad \frac{d^k}{dt^k}(u_\nu) = \frac{d^k}{dt^k}(\widetilde{u}_\nu), \quad \frac{d^k}{dt^k}(v_\nu) = \frac{d^k}{dt^k}(\widetilde{v}_\nu), \tag{3.122}$$

em $C^\infty([0, T-\varepsilon]; L^2(0,L)),\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Desta forma, se $t \in [0, T-\varepsilon]$ e $s \in \left(-\frac{1}{\nu}, 0\right)$ temos que $t - s \in [0, T]$. Assim, podemos reescrever o sistema (3.115) inicialmente trocando-se t por $t - s$, e em seguida multiplicando-se essas novas equações por ρ_ν e integrando-se com s variando em $\left[-\frac{1}{\nu}, 0\right]$, ou seja, chegamos a

$$\left|\begin{array}{l} \rho_1 z_{\nu tt} - k(z_{\nu x} + u_\nu + l v_\nu)_x - k_0 l[v_{\nu x} - l z_\nu] = 0, \\ \rho_2 u_{\nu tt} - b u_{\nu xx} + k(z_{\nu x} + u_\nu + l v_\nu) + \frac{m\gamma}{k_1} P u_{\nu t} = 0, \\ \rho_1 v_{\nu tt} - k_0[v_{\nu x} - l z_\nu]_x + kl(z_{\nu x} + u_\nu + l v_\nu) = 0, \end{array}\right. \tag{3.123}$$

o que implica, em vista das regularidades acima, que

$$z_{\nu xx}, u_{\nu xx}, v_{\nu xx} \in C([0, T-\varepsilon]; H^{-1}(0,L)), \tag{3.124}$$

e, consequentemente,

$$z_\nu, u_\nu, v_\nu \in C([0, T-\varepsilon]; H_0^1(0,L)). \tag{3.125}$$

De fato, faremos apenas para z_ν. Lembre que $(a(\cdot)z_{\nu x})_x = A z_\nu$ e que A é uma isometria de $L^2(0,L)$ em $D(A)'$, extensão da isometria de $H_0^1(0,L) \longrightarrow H^{-1}(0,L)$, e tem imagem em $H^{-1}(0,L)$ para cada $t \in [0, T-\varepsilon]$. De onde segue que

$$\begin{aligned}
\|z_\nu\|_{C([0,T-\varepsilon];H_0^1(0,L))} &= \sup\nolimits_{t\in[0,T-\varepsilon]} \|z_\nu(t)\|_{H_0^1(0,L)} && (3.126)\\
&= \sup\nolimits_{t\in[0,T-\varepsilon]} \|A^{-1}Az_\nu(t)\|_{H_0^1(0,L)} && (3.127)\\
&\leq \|A^{-1}\| \sup\nolimits_{t\in[0,T-\varepsilon]} \|Az_\nu(t)\|_{H^{-1}(0,L)} && (3.128)\\
&= \|A^{-1}\| \|(a(\cdot)z_{\nu x})_x\|_{C([0,T-\varepsilon];H^{-1}(0,L))} && (3.129)\\
&< \infty, && (3.130)
\end{aligned}$$

provando-se que $z_\nu \in C([0,T-\varepsilon];H_0^1(0,L))$.

Logo, de (3.122) e (3.125) temos que

$$z_\nu(\cdot,0), u_\nu(\cdot,0), v_\nu(\cdot,0) \in H_0^1(0,L),$$

$$z_{\nu t}(\cdot,0), u_{\nu t}(\cdot,0), v_{\nu t}(\cdot,0) \in L^2(0,L).$$

Desta forma, $\{z_\nu, u_\nu, v_\nu\}$ é solução fraca de (3.123) e por argumentos de densidade satisfaz à estimativa 3.105, i.e.,

$$E_\nu(0) \leq C \int_0^{T-\varepsilon} \int_{l_1}^{l_2} z_{\nu t}^2 + u_{\nu t}^2 + v_{\nu t}^2 + z_\nu^2 + u_\nu^2 + v_\nu^2 \; dx\; dt. \tag{3.131}$$

Observe que o termo da direita de (3.131) é igual a zero. De fato, de (3.113) vem que $z(x,t) = 0$ quase sempre em $(l_1,l_2) \times (0,T)$ e da definição de z_ν temos que

$$z_\nu(x,t) = \int_{-\frac{1}{\nu}}^0 \underbrace{z(x,t-s)}_{=0} \rho_\nu(s)\; ds = 0, \text{ para todo } (x,t) \in [l_1,l_2] \times [0,T-\varepsilon],$$

e consequentemente

$$z_{\nu t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{z_\nu(x,t)}_{=0} = 0, \text{ para todo } (x,t) \in [l_1,l_2] \times [0,T-\varepsilon].$$

Analogamente, $u_\nu = u_{\nu t} = v_\nu = v_{\nu t} = 0$ em $[l_1,l_2] \times [0,T-\varepsilon]$. Substituindo isto em (3.131) resulta que $E_\nu(0) = 0$. E como $CE_\nu(0) \leq E_\nu(t) \leq C_1E_\nu(0)$

$$E_\nu(t) = 0, \; \forall t \in [0,T-\varepsilon], \; \forall \nu \in \mathbb{N} \tag{3.132}$$

e, da definição de E_ν, segue que

$$z_\nu, u_\nu, v_\nu \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T-\varepsilon;H_0^1(0,L)), \tag{3.133}$$

$$z_{\nu t}, u_{\nu t}, v_{\nu t} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T-\varepsilon;L^2(0,L)). \tag{3.134}$$

Então, existem $\overline{z},\overline{u},\overline{v}$ tais que

$$z_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{z}, \text{ em } L^\infty(0,T-\varepsilon;H_0^1(0,L)) \tag{3.135}$$

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u}, \text{ em } L^\infty(0,T-\varepsilon;H_0^1(0,L)) \tag{3.136}$$

$$v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{v}, \text{ em } L^\infty(0,T-\varepsilon;H_0^1(0,L)) \tag{3.137}$$

$$z_{\nu t} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{z}_t, \text{ em } L^\infty(0,T-\varepsilon;L^2(0,L)) \tag{3.138}$$

$$u_{\nu t} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u}_t, \text{ em } L^\infty(0,T-\varepsilon;L^2(0,L)) \tag{3.139}$$

$$v_{\nu t} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{v}_t, \text{ em } L^\infty(0,T-\varepsilon;L^2(0,L)) \tag{3.140}$$

Das propriedades de convolução (ver proposição 1.21) também sabemos que, para $t \in [0,T-\varepsilon]$,

$$z_\nu = \rho_\nu * \widetilde{z} \to \widetilde{z} = \widetilde{z}|_{[0,T-\varepsilon]} = z, \tag{3.141}$$

$$u_\nu = \rho_\nu * \widetilde{u} \to \widetilde{u} = \widetilde{u}|_{[0,T-\varepsilon]} = u, \tag{3.142}$$

$$v_\nu = \rho_\nu * \widetilde{v} \to \widetilde{v} = \widetilde{v}|_{[0,T-\varepsilon]} = v, \tag{3.143}$$

uniformemente para todo $t \in [0,T-\varepsilon]$ na norma de $L^2(0,L)$, quando $\nu \to \infty$. Isto implica que as convergências (3.141)-(3.143) ocorrem em $L^\infty(0,T-\varepsilon;L^2(0,L))$. Então, por unicidade de limites, as convergências (3.135)-(3.143) nos permitem concluir que

$$\{\overline{z},\overline{u},\overline{v}\} = \{z,u,v\}, \text{ em } \left[L^\infty(0,T-\varepsilon;H_0^1(0,L))\right]^3, \tag{3.144}$$

$$\{\overline{z}_t,\overline{u}_t,\overline{v}_t\} = \{z_t,u_t,v_t\}, \text{ em } \left[L^\infty(0,T-\varepsilon;L^2(0,L))\right]^3. \tag{3.145}$$

Além disso, a partir do fato que $\{z,u,v\} \in [C([0,T-\varepsilon];L^2(0,L))]^3$, de (3.144) e da proposição 1.60 obtemos que

$$\{z,u,v\} \in \left[C_s([0,T-\varepsilon];H_0^1(0,L))\right]^3, \tag{3.146}$$

resultando que

$$z(0), u(0), v(0) \in H_0^1(0, L). \tag{3.147}$$

Da limitação (3.133) e das equações do sistema (3.123) vem que

$$z_{\nu tt}, u_{\nu tt}, v_{\nu tt} \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T-\varepsilon; H^{-1}(0, L)), \tag{3.148}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
z_{\nu tt} &\overset{*}{\rightharpoonup} z_{tt} \text{ em } L^\infty(0, T-\varepsilon; H^{-1}(0, L)),\\
u_{\nu tt} &\overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \text{ em } L^\infty(0, T-\varepsilon; H^{-1}(0, L)),\\
v_{\nu tt} &\overset{*}{\rightharpoonup} v_{tt} \text{ em } L^\infty(0, T-\varepsilon; H^{-1}(0, L)).
\end{aligned}$$

Estas convergências, associadas a (3.145), nos permitem concluir que

$$z_t, u_t, v_t \in C_s([0, T-\varepsilon]; L^2(0, L)), \tag{3.149}$$

ou seja,

$$z_t(0), u_t(0), v_t(0) \in L^2(0, L). \tag{3.150}$$

Portanto, de (3.147) e (3.150) concluímos a demonstração do lema 3.7. $\square$

Retornemos agora à demonstração do teorema 3.6. Pelo lema 3.7, vem que $\{z, u, v\}$ é, na verdade, uma solução fraca do sistema (3.115). Em outras palavras, podemos usar a desigualdade (3.105) e juntamente com as equações (3.113)-(3.114) obtemos

$$\mathcal{E}(0) \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} z_t^2 + u_t^2 + v_t^2 + z^2 + u^2 + v^2 \; dx \; dt = 0,$$

onde $\mathcal{E}$ denota a energia do sistema (3.115). Logo, $z = u = v = 0$ em $(0, L) \times (0, T)$. Devido ao fato que $z = \varphi_t$, $u = \psi_t$ e $v = \omega_t$, temos que

$$\varphi_t = \psi_t = \omega_t = 0 \text{ quase sempre em } (0, L) \times (0, T), \tag{3.151}$$

ou seja, as funções φ, ψ, ω não dependem de $t \in (0,T)$ e, portanto, satisfazem

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = 0, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \\ -k_0[\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + \omega) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = \omega(0) = \omega(L) = 0, \end{cases} \tag{3.152}$$

o que implica que

$$\int_0^L b\psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0[\omega_x - l\varphi]^2 \, dx = 0. \tag{3.153}$$

Agora, note que o primeiro termo da integral acima, junto com a desigualdade de Poincaré, implica que $\psi = 0$. Assim, os dois últimos termos da integral acima nos fornecem

$$\begin{cases} \varphi_x + l\omega = 0, \\ \omega_x - l\varphi = 0, \\ \varphi, \omega \in H_0^1(0,L), \end{cases} \tag{3.154}$$

implicando que $\varphi = \omega = 0$. Isto é, $\varphi = \psi = \omega = 0$, o que contradiz 3.111. Em outras palavras, está provada a desigualdade 3.106.

De (3.105) e (3.106) concluímos a demonstração do teorema 3.6. $\square$

Proposição 3.8. *Para $T > 2\alpha R$ e para todo $B \subset L^2(0,L)$ limitado, existe um $\delta = \delta(B) > 0$ tal que*

$$\delta \leq \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (|u|^2 + |u|^2 + |z|^2) \, dx \, dt \tag{3.155}$$

para solução de (3.6) com dados iniciais tal que

$$\|((\rho_1 u_1, \rho_2 v_1 + mp_{0x}, \rho_1 z_1), (u_0, v_0, z_0))\|_{(H^{-1}(0,L))^3 \times (L^2(0,L))^3} \geq 1 \quad p_0 \in B.$$

Como vimos na solução de (3.6) a proposição anterior é equivalente a

Proposição 3.9. *Para $T > 2\alpha R$ e para todo $B \subset L^2(0,L)$ limitado existe um $\delta = \delta(B) > 0$ tal que*

$$\delta \leq \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (|U_t|^2 + |V_t|^2 + |Z_t|^2) \, dx \, dt \tag{3.156}$$

para $\{U, V, Z, p\}$ solução de (3.158) com dados iniciais tal que

$$\|\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}, \{u_0, v_0, z_0\}\|_{H_0^1(0,L)^3 \times L^2(0,L)^3} \geq 1, \quad p_0 \in B \tag{3.157}$$

onde

$$\begin{cases} \rho_1 U_{tt} - k(U_x + V + lZ)_x + k_0 l[Z_x - lU] = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \rho_2 V_{tt} - bV_{xx} + k(U_x + V + lZ) + mp_x = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \rho_1 Z_{tt} - k_0[Z_x - lU]_x + kl(U_x + V + lZ) = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ -p_t - k_1 p_{xx} - \gamma V_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ U(0,t) = U(L,t) = V(0,t) = V(L,t) = Z(0,t) = Z(L,t) \\ = p(0,t) = p(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ U(.,T) = \chi_1, \quad U_t(.,T) = u_0, \quad em \quad (0,L) \\ V(.,T) = \chi_2, \quad V_t(.,T) = v_0, \quad em \quad (0,L) \\ Z(.,T) = \chi_3, \quad Z_t(.,T) = z_0, \quad em \quad (0,L) \\ p(.,T) = p_0, \quad em \quad (0,L), \end{cases} \tag{3.158}$$

e o sistema desacoplado associado ao sistema (3.158)

$$\begin{cases} \rho_1 \widetilde{U}_{tt} - k(\widetilde{U}_x + \widetilde{V} + l\widetilde{Z})_x + k_0 l[\widetilde{Z}_x - l\widetilde{U}] = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \rho_2 \widetilde{V}_{tt} - b\widetilde{V}_{xx} + k(\widetilde{U}_x + \widetilde{V} + l\widetilde{Z}) - \frac{m\gamma}{k_1} P\widetilde{V}_t = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \rho_1 \widetilde{Z}_{tt} - k_0[\widetilde{Z}_x - l\widetilde{U}]_x + kl(\widetilde{U}_x + \widetilde{V} + l\widetilde{Z}) = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ -\widetilde{p}_t - k_1 \widetilde{p}_{xx} - \gamma \widetilde{v}_{xt} = 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ \widetilde{U}(0,t) = \widetilde{U}(L,t) = \widetilde{V}(0,t) = \widetilde{V}(L,t) = \widetilde{Z}(0,t) = \widetilde{Z}(L,t) \\ = \widetilde{p}(0,t) = \widetilde{p}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ \widetilde{U}(.,T) = \chi_1, \quad \widetilde{U}_t(.,T) = u_0, \quad em \quad (0,L) \\ \widetilde{V}(.,T) = \chi_2, \quad \widetilde{V}_t(.,T) = v_0, \quad em \quad (0,L) \\ \widetilde{Z}(.,T) = \chi_3, \quad \widetilde{Z}_t(.,T) = z_0, \quad em \quad (0,L) \\ \widetilde{p}(.,T) = p_0, \quad em \quad (0,L), \end{cases} \tag{3.159}$$

Proposição 3.10. *Para $T > 2\alpha R$ e para todo $B \subset L^2(0,L)$ limitado existe um $\delta = \delta(B) > 0$ tal que*

$$\delta \leq \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (|U_t|^2 + |V_t|^2 + |Z_t|^2) \, dx \, dt \tag{3.160}$$

para $\{U, V, Z, p\}$ solução de (3.158) com dados iniciais tal que

$$\|\{\chi_1,\chi_2,\chi_3\},\{u_0,v_0,z_0\}\|_{H_0^1(0,L)^3\times L^2(0,L)^3}\geq 1,\quad p_0\in B. \tag{3.161}$$

Demonstração: Fazendo-se uma mudança na variável temporal em (3.159) teremos um sistema igual ao (3.6) nas três primeiras equações, e por (3.6) chegamos a

$$\|\{\chi_1,\chi_2,\chi_3\}\|_{H^{-1}(0,L)}+\|\{u_0,v_0,z_0\}\|_{L^2(0,L)}\leq\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}(|\widetilde{U}_t|^2+|\widetilde{V}_t|^2+|\widetilde{Z}_t|^2)\;dx\;dt. \tag{3.162}$$

decompondo-se $(U,V,Z,p)=(\widetilde{U},\widetilde{V},\widetilde{Z},\widetilde{p})+(\phi,\psi,w,\theta)$ teremos

$$\begin{cases}\rho_1\varphi_{tt}-k(\varphi_x+\psi+lw)_x+k_0l[w_x-l\varphi]=0, & em\quad(0,L)\times(0,T)\\ \rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)=-\frac{m\gamma}{k_1}P\widetilde{V}_t-mp_x, & em\quad(0,L)\times(0,T)\\ \rho_1w_{tt}-k_0[w_x-l\varphi]_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)=0, & em\quad(0,L)\times(0,T)\\ \theta_t-k_1\theta_{xx}+m\psi_{xt}=0, & em\quad(0,L)\times(0,T)\\ \varphi(0,t)=\varphi(L,t)=\psi(0,t)=\psi(L,t)=w(0,t)=w(L,t)\\ =\theta(0,t)=\theta(L,t)=0,\quad t\in(0,T)\\ \varphi(.,T)=\varphi_0,\quad\varphi_t(.,T)=\varphi_1, & em\quad(0,L)\\ \psi(.,T)=\psi_0,\quad\psi_t(.,T)=\psi_1, & em\quad(0,L)\\ w(.,T)=w_0,\quad w_t(.,T)=w_1, & em\quad(0,L)\\ \theta(.,T)=\theta_0, & em\quad(0,L).\end{cases} \tag{3.163}$$

De (3.162) segue que

$$\begin{aligned}&\|\{\chi_1,\chi_2,\chi_3\}\|_{H^{-1}(0,L)}+\|\{u_0,v_0,z_0\}\|_{L^2(0,L)}\\ &\leq C\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}(|U_t|^2+|V_t|^2+|Z_t|^2)\;dx\;dt+\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}(|\varphi_t|^2+|\psi_t|^2+|w_t|^2)\;dx\;dt\end{aligned} \tag{3.164}$$

Suponhamos que (3.160) seja falso. Então existe um $B\subset L^2(0,l)$ limitado e uma sequência de dados iniciais $(\chi_1^j,\chi_2^j,\chi_3^j,u_0^j,v_0^j,z_0^j,p_0^j)$ com $p_0^j\in B$ satisfazendo (3.161) tal que

$$\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (|U_t^j|^2 + |V_t^j|^2 + |Z_t^j|^2)\ dx\ dt \to 0, \quad j \to \infty. \tag{3.165}$$

De (3.164) e (3.165) e $\|\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}, \{u_0, v_0, z_0\}\|_{H_0^1(0,L)^3 \times L^2(0,L)^3} \geq 1$, deduzimos

$$\liminf_{j \to 0} [\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (|\varphi_t|^2 + |\psi_t|^2 + |w_t|^2)\ dx\ dt] > 0. \tag{3.166}$$

Introduzimos dados normalizados

$$(\widehat{\chi}_1^j, \widehat{\chi}_2^j, \widehat{\chi}_3^j, \widehat{u}_0^j, \widehat{v}_0^j, \widehat{z}_0^j, \widehat{p}_0^j) = \frac{(\chi_1^j, \chi_2^j, \chi_3^j, u_0^j, v_0^j, z_0^j, p_0^j)}{\|(\varphi_t^j, \psi_t^j, w_t^j)\|_{(L^2(l_1, l_2; (0,T)))^3}} \tag{3.167}$$

e $(\widehat{U}^j, \widehat{V}^j, \widehat{Z}^j, \widehat{p}_j)$, $(\widehat{\varphi}^j, \widehat{\psi}^j, \widehat{w}^j, \widehat{\theta}^j)$, soluções de (3.158) e (3.163), respectivamente.

Temos então que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} |\widehat{\varphi}^j| + |\widehat{\psi}^j| + |\widehat{w}^j|\ dx\ dt = 1, \forall j \geq 1; \\ &\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} |\widehat{U}^j| + |\widehat{V}^j| + |\widehat{Z}^j|\ dx\ dt \to 0. \end{aligned} \tag{3.168}$$

De (3.164) deduzimos que

$$\|\{\widehat{\chi}_1^j, \widehat{\chi}_2^j, \widehat{\chi}_3^j\}\|_{H^{-1}(0,L)} + \|\{\widehat{u}_0^j, \widehat{v}_0^j, \widehat{z}_0^j\}\|_{L^2(0,L)} \leq C$$

Por outro lado de (3.166) e de $p_0^j \in B$, logo $\widehat{p}_0^j$ é limitado em $\widehat{B} \subset L^2(0, L)$, com B limitado em $L^2(0, L)$.

Portanto, podemos extrair uma subsequência tal que

$$((\widehat{\chi}_1^j, \widehat{\chi}_2^j, \widehat{\chi}_3^j), (\widehat{u}_0^j, \widehat{v}_0^j, \widehat{z}_0^j)) \rightharpoonup ((\widehat{\chi}_1, \widehat{\chi}_2, \widehat{\chi}_3), (\widehat{u}_0, \widehat{v}_0, \widehat{z}_0))$$

$$em \quad H_0^1(0, L)^3 \times L^2(0, L)^3 \tag{3.169}$$

$$\widehat{p}_0^j \to \widehat{p}_0 \quad em \quad L^2(0, L) \tag{3.170}$$

e

$$(\widehat{\varphi}_t^j, \widehat{\psi}_t^j, \widehat{w}_t^j) \rightharpoonup (\widehat{\varphi}_t, \widehat{\psi}_t, \widehat{w}_t) \quad em L^2((0,L)\times(0,T))^3, \tag{3.171}$$

$$(\widehat{U}_t^j, \widehat{V}_t^j, \widehat{Z}_t^j) \rightharpoonup (\widehat{U}_t, \widehat{V}_t, \widehat{Z}_t) \quad em L^2((0,L)\times(0,T))^3, \tag{3.172}$$

onde $(\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{z}, \widehat{p})$, $(\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{Z}, \widehat{p})$, $(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{w}, \widehat{\theta})$ são soluções de (3.6), (3.158) e (3.163) respectivamente $(\widehat{U}_t = \widehat{u}, \widehat{V}_t = \widehat{v}, \widehat{Z}_t = \widehat{z})$.

Por outro lado, do Teorema 3.1 $\{\widehat{\varphi}_t^j, \widehat{\psi}_t^j, \widehat{w}_t^j\}$ é compacto em $C([0,T];L^2(0,L))^3$ e, portanto,

$$(\widehat{\varphi}_t^j, \widehat{\psi}_t^j, \widehat{w}_t^j) \rightarrow (\widehat{\varphi}_t, \widehat{\psi}_t, \widehat{w}_t) \quad em \quad L^2((0,L)\times(0,T))^3. \tag{3.173}$$

De (3.168) e (3.172) deduzimos que

$$\begin{array}{l} \widehat{U}_t = \widehat{u} \quad em \quad (l_1, l_2)\times(0,T), \\ \widehat{V}_t = \widehat{v} \quad em \quad (l_1, l_2)\times(0,T), \\ \widehat{Z}_t = \widehat{z} \quad em \quad (l_1, l_2)\times(0,T), \end{array} \tag{3.174}$$

de (3.174) e (3.5) temos

$$\begin{array}{l} \widehat{u}_0 \equiv 0, \\ \widehat{v}_0 \equiv 0, \\ \widehat{z}_0 \equiv 0, \\ \widehat{p}_0 \equiv 0, \\ \widehat{u}_1 \equiv 0, \\ \widehat{v}_1 \equiv 0, \\ \widehat{z}_1 \equiv 0, \end{array} \tag{3.175}$$

o que implica que

$$(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{w}) = (0,0,0). \tag{3.176}$$

Por outro lado, de (3.168) e (3.173) temos que

$$\|(\widehat{\varphi}_t, \widehat{\psi}_t, \widehat{w}_t)\| = 1 \tag{3.177}$$

o que contradiz (3.175) e (3.176).

$\square$

Dado $(\Phi_0, \Phi_1, \Psi_0, \Psi_1, W_0, W_1, \eta_0) \in \widetilde{H} = L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L) \times L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L) \times L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L) \times L^2(0,L)$ introduzimos o funcional $J : \widetilde{H} \to \mathbb{R}$ definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &J(u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1,p_0) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (|u|^2 + |v|^2 + |z|^2)\ dx\ dt \\ &-\rho_1 \int_0^L \Phi_1 u_0 dx - \rho_2 \int_0^L \Psi_1 v_0 dx - \rho_1 \int_0^L W_1 z_0 dx + \rho_1 \langle \Phi_0, u_1\rangle + \rho_2 \langle \Psi_0, v_1 \rangle \\ &+\rho_1 \langle W_0, z_1\rangle - \int_0^L (\eta_0 + m\Psi_x) p_0\ dx + \varepsilon \|p_0\|_{L^2(0,L)} \end{aligned} \tag{3.178}$$

Lema 3.11. *Suponhamos que $T > 2\alpha R$, então*

$$\liminf_{\|\{u_0,v_0,z_0\},\{\rho_2 v_1 + m p_{0x}, \rho_1 z_1, p_0\}\|_{\widetilde{H}} \to \infty} \frac{J(u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1,p_0)}{\|(u_0, \rho_1 u_1, v_0, \rho_2 v_1 + m p_{0x}, z_0, \rho 1 z_1, p_0)\|_{\widetilde{H}}} \geq \varepsilon. \tag{3.179}$$

Demonstração: Consideremos uma sequência de dados $(u_0^j, u_1^j, v_0^j, v_1^j, z_0^j, z_1^j, p_0^j)$ em $\widetilde{H}$ tal que

$$N_j = \|(u_0^j, \rho_1 u_1^j, v_0^j, \rho_2 v_1^j + m p_{0x}^j, z_0^j, \rho_1 z_1^j, p_0^j)\| \to \infty, \quad j \to \infty.$$

Introduzimos os dados normalizados

$$(\widehat{u}_0^j, \widehat{u}_1^j, \widehat{v}_0^j, \widehat{v}_1^j, \widehat{z}_0^j, \widehat{z}_1^j, \widehat{p}_0^j) = \frac{(u_0^j, u_1^j, v_0^j, v_1^j, z_0^j, z_1^j, p_0^j)}{N_j}$$

e a correspondente solação de (3.6)

$$(\widehat{u}^j, \widehat{v}^j, \widehat{z}^j, \widehat{p}^j) = \frac{(u^j, v^j, z^j, p^j)}{N_j};$$

logo

$$
\begin{aligned}
&\frac{J_j(u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1,p_0)}{N_j} = \frac{N_j}{2}\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}(|\widehat{u}^j|^2+|\widehat{v}^j|^2+|\widehat{z}^j|^2)\ dx\ dt \\
&-\rho_1\int_0^L \Phi_1\widehat{u}_0^j dx-\rho_2\int_0^L \Psi_1\widehat{v}_0^j dx-\rho_1\int_0^L W_1\widehat{z}_0^j dx+\rho_1\langle\Phi_0,\widehat{u}_1^j\rangle+\rho_2\langle\Psi_0,\widehat{v}_1^j\rangle \\
&+\rho_1\langle W_0,\widehat{z}_1^j\rangle-\int_0^L(\eta_0+m\Psi_x)\widehat{p}_0^j\ dx+\varepsilon\|\widehat{p}_0^j\|_{L^2(0,L)}.
\end{aligned}
\tag{3.180}
$$

Temos dois casos a considerar

$$
i)\ \liminf_{j\to\infty}\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}(|\widehat{u}^j|^2+|\widehat{v}^j|^2+|\widehat{z}^j|^2)\ dx\ dt>0 \tag{3.181}
$$

ou existe uma sequência tal que

$$
ii)\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}(|\widehat{u}^j|^2+|\widehat{v}^j|^2+|\widehat{z}^j|^2)\ dx\ dt\to 0,\ \ j\to\infty. \tag{3.182}
$$

Claramente no caso i)
$\liminf_{j\to\infty}\frac{J_j(u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1,p_0)}{N_j}=\infty.$

No caso ii), temos

$(\widehat{u}_0^j,\widehat{u}_1^j,\widehat{v}_0^j,\widehat{v}_1^j,\widehat{z}_0^j,\widehat{z}_1^j,\widehat{p}_0^j)$ é limitada em $\widetilde{H}$, assim podemos extrair uma subsequência tal que

$$
(\widehat{u}_0^j,\widehat{u}_1^j,\widehat{v}_0^j,\widehat{v}_1^j,\widehat{z}_0^j,\widehat{z}_1^j,\widehat{p}_0^j)\rightharpoonup(\widehat{u}_0,\widehat{u}_1,\widehat{v}_0,\widehat{v}_1,\widehat{z}_0,\widehat{z}_1,\widehat{p}_0)\quad em\quad \widetilde{H}. \tag{3.183}
$$

Denotamos $(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{z},\widehat{p})$ a solução de (3.6)

De (3.182) $\widehat{u}=\widehat{v}=\widehat{z}=0$ em $(l_1,l_2)\times(0,T)$.

Pela proposição (3.5)

$(\widehat{u}_0,\widehat{u}_1,\widehat{v}_0,\widehat{v}_1,\widehat{z}_0,\widehat{z}_1,\widehat{p}_0)\equiv(0,0,0,0,0,0,0)$.

Assim

$$(\widehat{u}_0^j, \widehat{u}_1^j, \widehat{v}_0^j, \widehat{v}_1^j, \widehat{z}_0^j, \widehat{z}_1^j, \widehat{p}_0^j) \rightharpoonup (0,0,0,0,0,0,0) \quad em \quad \widetilde{H}. \tag{3.184}$$

De (3.184) deduzimos

$$\begin{aligned} &\liminf_{j\to\infty} \frac{J_j(u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1,p_0)}{N_j} \\ &= \liminf_{j\to\infty} (\frac{N_j}{2} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (|\widehat{u}^j|^2 + |\widehat{v}^j|^2 + |\widehat{z}^j|^2)\ dx\ dt + \|\widehat{p}_0^j\|_{L^2(0,L)}). \end{aligned} \tag{3.185}$$

Se

$$\liminf_{j\to\infty} \|\widehat{p}_0^j\|_{L^2(0,L)} \geq 1 \tag{3.186}$$

então (3.179) é imediato.

Por outro lado, se $\liminf_{j\to\infty} \|\widehat{p}_0^j\|_{L^2(0,L)} < 1$,

então, como

$$\|(\widehat{u}_0^j, \rho_1\widehat{u}_1^j, \widehat{v}_0^j, \rho_2\widehat{v}_1^j + m\widehat{p}_{0x}^j, \widehat{z}_0^j, \rho_1\widehat{z}_1^j, \widehat{p}_0^j)\|_{\widetilde{H}} = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

segue que

$$\liminf_{j\to\infty} \|(\widehat{u}_0^j, \rho_1\widehat{u}_1^j, \widehat{v}_0^j, \rho_2\widehat{v}_1^j + m\widehat{p}_{0x}^j, \widehat{z}_0^j, \rho 1\widehat{z}_1^j\| > 0. \tag{3.187}$$

De (3.187) e $\widehat{p}_0^j$ ser limitado em $L^2(0,L)$ e pela proposição(3.8), temos que

$$\liminf_{j\to\infty} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (|\widehat{u}^j|^2 + |\widehat{v}^j|^2 + |\widehat{z}^j|^2)\ dx\ dt > 0 \tag{3.188}$$

o que contradiz (3.182).

Portanto necessariamente temos (3.186) e assim (3.182), ou seja o funcional J é coercivo em $\widetilde{H}$. $\square$

O funcional J é semicontinuo inferiormente, pois é contínuo e também é estritamente convexo (basta observar que $\displaystyle\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}|u|^2+|v|^2+|z|^2\,dx\,dt$ é estritamente convexo, pois $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definido por $f(x)=x^2$ é estritamente convexo, os outros termos de J são convexos.)

A derivada segundo Gateaux é

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0}\frac{J((u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1,p_0)+\lambda(U_0,U_1,V_0,V_1,Z_0,Z_1,P_0))-J(u_0,u_1,v_0,v_1,z_0,z_1,p_0)}{\lambda}\\
&\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}(uU+vV+zZ)\,dx\,dt\\
&-\rho_1\int_0^L\Phi_1U_0dx-\rho_2\int_0^L\Psi_1V_0dx-\rho_1\int_0^L W_1Z_0dx\\
&+\rho_1\langle\Phi_0,U_1\rangle+\rho_2\langle\Psi_0,V_1\rangle+\rho_1\langle W_0,Z_1\rangle\\
&-\int_0^L(\eta_0+m\Psi_{0x})P_0\,dx+\varepsilon\frac{\int_0^L p_0P_0\,dx}{(\int_0^L|p_0|^2)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
\tag{3.189}
$$

Da coercividade do Lema (3.11) a semicontinuidade e o fato de J ser estritamente convexo, garantem que o funcional J possui um único ponto de mínimo $(\widehat{u}_0,\widehat{u}_1,\widehat{v}_0,\widehat{v}_1,\widehat{z}_0,\widehat{z}_1,\widehat{p}_0)$ em $\widetilde{H}$. Logo, para o mínimo do funcional J

$$
\begin{aligned}
&|\int_0^T\int_{l_1}^{l_2}(\widehat{u}U+\widehat{v}V+\widehat{z}Z)\,dx\,dt\\
&-\rho_1\int_0^L\Phi_1U_0dx-\rho_2\int_0^L\Psi_1V_0dx-\rho_1\int_0^L W_1Z_0dx\\
&+\rho_1\langle\Phi_0,U_1\rangle+\rho_2\langle\Psi_0,V_1\rangle+\rho_1\langle W_0,Z_1\rangle\\
&-\int_0^L(\eta_0+m\Psi_{0x})P_0\,dx|\le\|P_0\|_{L^2(0,L)}
\end{aligned}
\tag{3.190}
$$

para todo $(U_0,U_1,V_0,V_1,Z_0,Z_1,P_0)\in\widetilde{H}$ e $\widehat{u},\widehat{v},\widehat{z},\widehat{p}$ solução de (3.6) com dados $(\widehat{u}_0,\widehat{u}_1,\widehat{v}_0,\widehat{v}_1,\widehat{z}_0,\widehat{z}_1,\widehat{p}_0)$ e (U,V,Z,P) solução de (3.6) com dados $(U_0,U_1,V_0,V_1,Z_0,Z_1,P_0)$.

Observe que a solução de (3.1) com dados iniciais nulos e controles $f_1=\widehat{u}$,

$f_2 = \widehat{v}$, $f_3 = \widehat{z}$ tem-se que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \widehat{u}U + \widehat{v}V + \widehat{z}Z \; dx \; dt = \\
&\rho_1 \int_0^L \varphi_t(T) U_0 \; dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t(T) V_0 \; dx + \rho_1 \int_0^L w_t(T) Z_0 \; dx \\
&-\rho_1 \langle \varphi(T), U_1 \rangle - \rho_2 \langle \psi(T), V_1 \rangle - \rho_1 \langle w(T), Z_1 \rangle + \int_0^L (\theta(T) + m\psi_x(T)) P_0 \; dx.
\end{aligned} \tag{3.191}$$

de (3.190), (3.191) tomando $P_0 = 0$ obtemos

$$\begin{array}{ll}
\varphi(T) = \Phi_0 & \varphi_t(T) = \Phi_1 \\
\psi(T) = \Psi_0 & \psi_t(T) = \Psi_1 \\
w(T) = W_0 & w_t(T) = W_1.
\end{array} \tag{3.192}$$

De (3.190) − (3.192) obtemos que

$$|\int_0^L (\theta(T) - \eta_0) P_0| \leq \varepsilon |P_0|_{L^2(0,L)}$$

o que, por sua vez é equivalente a

$$|\theta(T) - \eta_0|_{L^2(0,L)} \leq \varepsilon.$$

Bibliografia

[1] Alabau-Boussouira - Leautaud F. Alabau-Boussouira e M. Léautaud, Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications. *J. Math. Pures Appl.*, (9)**99**, 2013, no. 5, 544-576.

[2] V. Barbu, Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Translated from the Romanian. Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest; *Noordhoff International Publishing*, Leiden, 1976, 352 pp.

[3] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50). North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. vi+183 pp.

[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications *Collection Science Sup, Dunod*, Paris, 2005.

[5] M. M. Cavalcanti e V. N. Domingos Cavalcanti, Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, Eduem, Maringá, Brasil, 2009.

[6] M. M. Cavalcanti e V. N. Domingos Cavalcanti, A integral de Bochner, notas de aula, Brasil.

[7] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti e V. Komornik, Introdução à análise funcional , Eduem, Maringá, Brasil, 2011.

[8] Cavalcanti et al1 M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, A. Rocha, e J. A. Soriano, Exact controllability of a second-order integro-differential equation with a pressure term. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 1998, no. 9, 18 pp.

[9] E. Coddington e N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Mac Graw-Hill, New York, 1955.

[10] R. Dautray e J. L. Lions, Analyse Mathématique et Calcul Numérique Pour les Sciences el les Techniques, Vol. 8 (Evolution: semi-groupe, varationnel), Masson, Paris, 1984.

[11] Enrique Zuazua, Controllability of the linear system of thermoelasticity 28040 Madrid, Spain, 1994.

[12] Fabre C. Fabre, Comportement au voisinage du bord de quelques équations d'évolution linéaire. Thèse de Doctorat d l'université Pierre et Marie Curie, Paris, 1990.

[13] Fabre-Puel C. Fabre e J.-P. Puel, Behavior near the boundary for solutions of the wave equation. *J. Differential Equations*, **106**, 1993, no. 1, 186-213.

[14] Fatori-Rivera L. H. Fatori e J. E. Muñoz Rivera, Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. *IMA J. Appl. Math.*, **75**, 2010, no. 6, 881-904.

[15] H. Frid, Introdução a Integral de Lebesque, IMCA - Instituto de Matemáticas y Ciências Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Peru.

[16] A. M. Gomes, Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às equações de Evolução, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2ed., 2000.

[17] L. F. Ho, Exact controlability of the one-dimensional wave equations with locally distributed control. *SIAM J. Control and Optimization*, **28**, 1990, no 3, 733-748.

[18] F. John, Partial differential equations, Applied Mathematical Sciences 1, quarta edição, Springer Verlag, New York, 1986.

[19] Kapitonov-Rupp B. V. Kapitonov e M. A. Raupp, Exact boundary controllability in problems of transmission for the system of electromagneto-elasticity, *Math. Methods Appl. Sci.*, **24**, 2001, no. 4, 193-207.

[20] Komornik V. Komornik, Exact controllability in short time for the wave equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **6**, 1989, no. 2, 153-164.

[21] Lange-Teismann H. Lange e H. Teismann, Controllability of the nonlinear Schrödinger equation in the vicinity of the ground state, *Math. Methods Appl. Sci.*, **30**, 2007, no. 13, 1483-1505.

[22] Lebeau-Zuazua G. Lebeau e E. Zuazua, Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **141**, 1998, no. 4, 297-329.

[23] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1. *Recherches en Mathématiques Appliquées*, **8**, 1988, Masson, Paris.

[24] J.-L. Lions, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.* **30**, 1988, no. 1, 1-68.

[25] J.-L. Lions e E. Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol.1, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[26] Z. Liu e S. Zheng, Semigroups associated with dissipative systems. *Research Notes in Mathematics*, **389**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

[27] Medeiros L. A. Medeiros, Exact controllability for a Timoshenko model of vibrations of beams. *Adv. Math. Sci. Appl.*, **2**, 1993, no. 1, 47-61.

[28] L. A. Medeiros, Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações, Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 16, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

[29] L. A. Medeiros e E. A. de Mello, A Integral de Lebesgue, Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 18, ed. 4, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.

[30] Milla Miranda M. Milla Miranda, Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des domaines non cylindriques., *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **317**, 1993, no. 5, 495-499.

[31] M. Milla Miranda, Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev, Instituto de Matemática - UFRJ.

[32] J. E. Muñoz Rivera, Teoria de Distribuições e Equações Diferenciais Parciais. *Textos Avançados*, LNCC, Petrópolis - RJ, 1999.

[33] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, *Springer-Verlag*, New York, 1983.

[34] J. P. Puel, Global Carleman inequalities for the wave equations and applications to controllability and inverse problems, notas.

[35] R. A. Schulz, Controlabilidade exata interna do sistema de Bresse com coeficientes variáveis e estabilização do sistema de termodifusão com dissipações localizadas linear e não- linear, tese de doutorado, Universidade estadual de Maringá, Maringá 2014.

[36] Jacques Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica Pura ed Applicata, pp. 65-96 1987.

[37] J. A. Soriano, Controlabilidade exata da equação de ondas com coeficientes variáveis, tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993.

[38] Soriano-Rivera-Fatori J. A. Soriano, J. E. Muñoz Rivera e L. H. Fatori, Bresse system with indefinite damping, *J. Math. Anal. Appl.*, **387**, 2011, no. 1, 284-290.