

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

WELLINGTON JOSÉ CORRÊA

**Existência de Solução e Taxas de Decaimento
Uniforme para a Equação de Schrödinger em
Variedades Compactas e Não – Compactas**

Maringá - PR

2014

WELLINGTON JOSÉ CORRÊA

**Existência de Solução e Taxas de Decaimento
Uniforme para a Equação de Schrödinger em
Variedades Compactas e Não – Compactas**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti.

Maringá - PR
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

C824e Corrêa, Wellington José
Existência de solução e taxas de decaimento
uniforme para equação de Schrödinger em variedades
compactas e não - compactas / Wellington José
Corrêa. - - Maringá, 2014.
287 f. : il. figs.

Orientador: Profº Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá,
Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática,
2014.

1. Equação de Schrödinger. 2. Equação diferencial
não-linear. 3. Existência de solução. 4. Taxas de
decaimento uniforme. I. Cavalcanti, Marcelo Moreira,
orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro
de Ciências Exatas. Departamento de Matemática.
Programa de Pós-Graduação em Matemática. III.
Título.

CDD 22.ed 515.355


MGC-001413

WELLINGTON JOSÉ CORRÊA

**EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E TAXAS DE DECAIMENTO UNIFORME PARA A
EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER EM VARIEDADES COMPACTAS E NÃO –
COMPACTAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

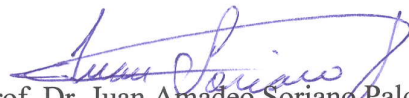
COMISSÃO JULGADORA:


Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)


Prof. Dr. Fagner Dias Araruna
Universidade Federal da Paraíba


Prof. Dr. Jose Felipe Linares Ramirez
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada


Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá


Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 5 de dezembro de 2014.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática - DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

A Deus, por sua infinita misericórdia que nos árduos momentos me amparou e deu forças para prosseguir decididamente na busca deste sonho. Um carinhoso agradecimento ofereço a minha esposa Renata que, neste período de estudos, foi o meu apoio. Como não me lembrar das madrugadas que me levava para o ponto de ônibus, tal como os telefonemas em que me consolava e me reanimava quando enfrentava situações difíceis. Como não agradecer pelos momentos em que cuidou do nosso bebê Miguel, sendo uma super – mãe que, diante as circunstâncias nas quais necessitei me ausentar perante minhas atribuições com o estudo e a pesquisa, multiplicou em dedicação, amor e carinho contribuindo para o menino lindo que hoje alegria a nossa família. Aos meus pais que, com muito sacrifício e esforço propiciaram a mim, a oportunidade de estudar. Agora dedico um agradecimento mais que especial ao meu orientador Marcelo Moreira Cavalcanti. Para mim, é um desafio expressar em tão poucas palavras, seu papel não somente na minha lida com a Matemática, mas em toda a minha vida. Desde os tempos em que fui seu aluno de Cálculo, seu orientando de mestrado e, agora, meu orientador de doutorado, pude conviver com um mestre e amigo. Mestre por ser um exímio profissional: primorosos ensinamentos providos de destreza, didática e conhecimento. Sua dedicação e motivação em transmitir o domínio que adquiriu para seus alunos é um dos dons a pontuar em seu caráter. Um amigo de todas horas, sejam pelos e – mails e telefonemas com o intuito de transmitir um direcionamento ou simplesmente para saber como eu estava naquele momento. Agradeço pela paciência, atenção que teve perante as dificuldades que tive, algumas delas aludidas acima em alguns agradecimentos. Por meio de sua sinceridade, bom humor e convivência agradável, expressei todo o meu reconhecimento e gratidão à sua pessoa. Quero agora agradecer aos amigos e professores que me ajudaram muito neste tempo de estudo. Sejam pela atenção, paciência, confiança e dedicação pelas frutíferas e enriquecedoras discussões que oportunizaram além de novos conhecimentos, uma convivência agradável, sincera e amistosa. Quero destacar de forma especial meus parceiros de pesquisa: César Augusto Bortot, Flávio Roberto Dias Silva e os professores Valéria Neves Domingos Cavalcanti, Nicolas Burq, Christopher Lefler, Irena Lasiecka e Marcelo Moreira Cavalcanti pelo suporte e empenho, pois sem eles, esta tese não seria escrita. Quero registrar minha gratidão aos professores do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Campo Mourão, seja em um primeiro momento na concentração de aulas e absorção de carga horária para dedicar nas disciplinas e, em um segundo momento, de forma plausível, proporcionaram o meu afastamento integral, oportunidade ímpar de concentração, tranquilidade para enfrentar meus desafios. Quero agradecer aos membros da banca examinadora pela leitura cuidadosa e contribuições acerca desta tese. Ao Programa de Pós – Graduação em Matemática que me acolheu, as professoras do corpo docente pelos ensinamentos, convivência e desafios. À secretária Lúcia Kiyoko Kato, por toda a atenção e profissionalismo.

Wellington José Corrêa

A Deus,

à minha querida Renata

e ao meu filho Miguel.

A vida não é uma proposição matemática.

A vida surpreende-nos, inquieta e enche de ansiedades o tempo todo.

E eu já desisti, faz muito tempo, de ter o controle de tudo.

Finalmente, foi o próprio Jesus quem falou: "Não vos preocupeis com o dia de amanhã. O dia de amanhã se preocupará consigo mesmo. A cada dia basta a sua preocupação" (Mt 6. 34).

Dalcides Basquim

Resumo

O presente trabalho concerne a existência e taxas de decaimento uniforme associadas à equação de Schrödinger em três momentos. Primeiramente, sobre uma variedade Riemanniana compacta n – dimensional $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, estabeleceremos taxa de decaimento uniforme para a equação de Schrödinger sujeita à dissipação interna não – linear localmente distribuída sobre a variedade. Assumiremos que a desigualdade inversa para o modelo linear deste problema acontece. Taxas de decaimento uniforme como as de Lasiecka e Tataru [65] serão obtidas. Mostraremos ainda que, quando comparamos o método de multiplicadores com a análise microlocal para a equação da onda, acreditamos que assumir a desigualdade de observabilidade para o nosso modelo ainda seja a melhor escolha. Tal método também é válido para as equações de onda, placa, etc. Posteriormente, estudamos a existência bem como a estabilidade exponencial em nível de H^1 para a equação de Schrödinger *damped* (dissipada) em um domínio exterior bidimensional Ω com fronteira regular $\partial\Omega$. Ela é assim chamada por causa do termo dissipativo, que é o mesmo usado em Dehman, Gérard e Lebeau [48] e Laurent [74]. A prova da existência é baseada em propriedades de operadores pseudo – diferenciais introduzidas por Dehman, Gérard e Lebeau [48]. Um procedimento de ponto fixo e a desigualdade de Brézis – Gallouet [20] serão requeridos ao obter a boa – colocação de soluções sobre o espaço $H^2(\Omega)$. No que diz respeito a obtenção de soluções fracas em $H_0^1(\Omega)$, temos os seguintes resultados: utilizando o método de Özsarı, Kalantarov e Lasiecka [98], obtemos a existência para $N = 2, 3$, o qual é baseado na teoria de operadores monótonos. Além disso, obtemos a existência de soluções $H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega)$ independentemente da dimensão do domínio Ω . O outro resultado com respeito à solução fraca $H_0^1(\Omega)$ é a boa – colocação via método do ponto fixo quando $N = 2$, cujo ingrediente principal é o uso de uma estimativa de Strichartz provada por Anton, [6] para $N = 2$. A estabilidade exponencial é conseguida combinando argumentos primeiramente considerados por Zuazua [122] para a equação de onda adaptado ao presente contexto e um teorema de continuação única global. Por fim, estudamos em dimensões 2 e 3, a equação de Schrödinger não – linear sobre domínios limitados sujeita à condição de fronteira Wentzell. Provamos a existência local e unicidade sobre o espaço de Sobolev $H^2(\Omega)$, donde obtemos a boa – colocação global quando $N = 2$. O primeiro resultado baseia – se provando a boa – colocação do modelo linear tratando o problema como um problema Wentzell, [118], para o qual, métodos de semigrupos serão aplicados. A obtenção da boa – colocação do modelo não – linear requer reformular o problema tendo uma condição de contorno dinâmica, de modo que um argumento ponto fixo é aplicado. Quando $N = 3$, somos capazes de provar a existência global de soluções fracas no espaço de Sobolev $V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ (espaço este a ser definido posteriormente) via método de Faedo – Galerkin, mas, não conseguimos obter a unicidade ou a dependência contínua sobre os dados iniciais, exceto quando substituímos a não – linearidade $|y|^2 y$ por uma função globalmente Lipschitz de V em V . A estabilidade exponencial do modelo linear foi estabelecida anteriormente na literatura. Além disso, adaptamos técnicas do modelo linear para alcançar a estabilidade exponencial do modelo não – linear em nível de H^1 .

Palavras – chave: Equação de Schrödinger. Existência. Taxas de decaimento uniforme.

Abstract

The present work concerns the existence and uniform decay rates associated with the Schrödinger equation in three moments. At first, on a compact n – dimensional Riemannian manifold $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, we establish uniform decay rate estimates for the linear Schrödinger equation subject to an internal nonlinear damping locally distributed on the manifold. We shall assume that the inverse inequality for the linear model of this problem occurs. Uniform decay rate as considered in Lasiecka and Tataru [65] will be obtained. Also show that when we compare the method of multipliers with the microlocal analysis for the wave equation, make us believe that assuming the observability inequality is still the best choice. This method is also valid for the wave equations, plate, etc. Posteriorly, we study the well-posedness as well as the exponential stability in H^1 – level for the damped defocusing Schrödinger equation posed in a two dimensional exterior domain Ω with smooth boundary $\partial\Omega$. It is so called because of the dissipative term, which is the same used in Dehman, Gérard and Lebeau, [48] and Laurent, [74]. The proof of the existence is based on properties of pseudo – differential operators introduced in Dehman, Gérard and Lebeau [48]. A fixed point procedure and the Brézis – Gallouet inequality will be required to obtain the well – posedness for solution in the space $H^2(\Omega)$. With regard the existence of weak solutions on the space $H_0^1(\Omega)$, we have the following results: employing the method used by Özsarı, Kalantarov and Lasiecka [98], we proved the existence for $N = 2, 3$, which is based in monotone operator theory. Moreover, we obtained the existence of the solutions $H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega)$ independent of the dimension of the domain Ω . The other result regarding to the weak solution $H_0^1(\Omega)$ is the well – posedness making use of fixed point procedure and Strichartz estimates proved by Anton, [6]. The exponential stability is achieved combining arguments firstly considered by Zuazua [122] for the wave equation adapted to the present context and a global uniqueness theorem. Finally, in dimensions 2 and 3 we study the nonlinear Schrödinger equation on bounded domains subject to a Wentzell (dynamic) boundary condition. We prove the local well – posedness on the Sobolev space $H^2(\Omega)$, where we obtain the global well – posedness when $N = 2$. The former result relies on first proving the well – posedness of the linear model through treating the problem as a Wentzell problem, [118], to which semigroup methods are applied. Obtaining well – posedness of the nonlinear model requires reformulating the problem as having a dynamic boundary condition, to which a fixed point argument is applied. In three dimensions we are able to prove global existence of weak solutions on the Sobolev space $H^1(\Omega)$ by the Galerkin approach, but we are not able to obtain uniqueness or continuous dependence on the initial data, except when substituting the nonlinearity $|y|^2 y$ by a globally Lipschitz function on V (this space to be set later). The exponential stability of the linear model has been established previously in the literature. Moreover, we adapt techniques from the linear model to achieve exponential stability of the nonlinear model in H^1 – level. Keywords: Schrödinger equation. Existence of solution. Uniform decay rates.

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Equação de Schrödinger	11
1.1.1	Introdução ao Modelo	12
1.1.2	Estudo Matemático	13
1.2	Equação de Schrödinger e Placa com Dissipação Não – Linear Localmente Distribuída	15
1.2.1	Metodologia e Resultado Principal	18
1.3	Equação de Schrödinger Defocusing Dissipada em um Domínio Exterior	21
1.3.1	Objetivo Principal, Metodologia	22
1.3.2	Principais Resultados	31
1.4	Boa – Colocação e Estabilização Uniforme para Equação de Schrödinger Não – Linear com Condições de Fronteira Dinâmica / Wentzell . .	32
1.4.1	Condições de Fronteira Wentzell	34
1.4.2	Resumo da Literatura	35
1.4.3	Resumo dos resultados	40
1.5	Orientação	47
2	Preliminares	48
2.1	Espaços de Funcionais à Valores Vetoriais	48
2.2	Um repasso a Geometria Riemanniana	49
2.3	Resultados Auxiliares	55
2.4	Semigrupos Lineares	65
2.5	Semigrupos Não Lineares	67
2.6	Teoria de Operadores Monótonos	72
2.7	Os Espaços $H_D^s(\Omega)$	74
2.8	Operadores Pseudo – Diferenciais	75



2.9	Estimativas de Strichartz	81
3	Equação de Schrödinger e Placa com Dissipação Não – Linear Localmente Distribuída	85
3.1	Equação de Schrödinger	86
3.1.1	Notação	86
3.1.2	Boa – Colocação de Soluções Regulares	87
3.1.3	Existência e Unicidade de Soluções Fracas	90
3.1.4	Taxas de Decaimento Uniforme	90
3.2	Equação da Placa	94
3.2.1	Notação	94
3.2.2	Boa Colocação de Soluções Regulares	95
3.2.3	Existência e Unicidade de Soluções Fracas	98
3.2.4	Taxas de Decaimento Uniforme	99
3.3	Exemplos	103
3.4	A equação da onda – Multiplicadores versus Análise Microlocal	104
3.4.1	Visão Externa - Multiplicadores Radiais	105
3.4.2	Estimativas de Decaimento Uniforme	105
3.4.3	Multiplicadores Intrínsecos	119
3.4.4	Conclusão Final	128
4	Equação de Schrödinger Defocusing Dissipada em um Domínio Exterior	129
4.1	Notações Utilizadas	130
4.2	Existência de Solução	130
4.2.1	Soluções Regulares	130
4.2.2	Soluções Fracas	142
4.2.2.1	Teoria de Operadores Monótonos	142
4.2.2.2	Método do Ponto Fixo	152
4.3	Estabilização	163
4.4	Apêndice: Resultados de Propagação para a equação de Schrödinger Linear	192
5	Equação de Schrödinger Não – Linear com Condições de Fronteira Dinâmica / Wentzell	199
5.1	Boa – Colocação do Problema Linear	199
5.1.1	Reformulação do Problema Linear como um Problema Wentzell	199
5.1.2	Obtenção de um Semigrupo Linear	201
5.1.3	Problema Linear Não – Homogêneo	205
5.1.4	Regularidade de Soluções	210



5.2	Perturbações Lipschitz do Modelo Linear com Condições de Fronteira Monótonas	214
5.2.1	Obtenção de um Semigrupo Não – Linear para o Problema Wentzell	214
5.3	Boa – Colocação do Modelo Não – Linear	220
5.3.1	Estratégia	220
5.3.2	Estimativas de Termos Não – Lineares	221
5.3.3	Existência Local de Soluções Fortes	223
5.3.4	Soluções Globais em 2D	228
5.4	Existência de soluções fracas Via Método de Faedo – Galerkin	240
5.4.1	Soluções Fracas	242
5.4.2	Problema Aproximado	243
5.4.3	Estimativas <i>A Priori</i>	246
5.4.4	Passagem ao Limite	248
5.4.5	A prova que $\chi = g(y')$	250
5.4.6	Apêndice: Prova da Identidade de Energia	254
5.5	Estabilização Exponencial	265
5.5.1	Construção do Multiplicador	265
5.5.2	Contração da Energia	270
	Referências	273
	Índice Remissivo	283

Introdução

A presente tese tem como objeto de estudo a equação de Schrödinger abordando a existência de solução, bem como taxas de decaimento uniforme associada.

1.1. Equação de Schrödinger

Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (Viena – Erdberg, 12 de Agosto de 1887 – Viena, 4 de Janeiro de 1961) foi um físico teórico austríaco famoso por suas contribuições à Mecânica Quântica, especialmente a Equação de Schrödinger, pela qual recebeu o Nobel de Física em 1933. Ele deixou a Áustria depois da invasão de Hitler e se tornou professor em Dublin, Irlanda. Uma personalidade com interesses extremamente amplos. Ele foi um dedicado estudante de pintura no estilo italiano, botânica e química. No final da sua carreira, ele se tornou um pioneiro no campo conhecido hoje como biofísica e escreveu um popular livro chamado *“What is Life?”* Propôs o experimento mental conhecido como o Gato de Schrödinger.



Figura 1.1: Erwin Schrödinger

Antes de estudar o modelo matemático da equação de Schrödinger, faremos uma breve introdução física desta equação.



• • •

1.1.1. Introdução ao Modelo

A descrição física da dinâmica de uma partícula é dada pela equação de autovalores

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (1.1.1)$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano, dado pela soma dos operadores que representam a energia cinética clássica e potencial ($\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}$). O autovalor E é a energia do sistema e $|\psi\rangle$ é o vetor de estado da partícula. Quando os operadores são aplicados num vetor de estado com bases nas posição da partícula, uma função de onda $\psi(\vec{r}, t)$ é obtida e a equação de Schrödinger é utilizada para descrever sua dinâmica, na forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}, t) + V\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.1.2)$$

onde $\psi(\vec{r}, t)$ é uma função de onda que detem todas as informações da partícula, descrita nas coordenadas espaciais \vec{r} e tempo t . Aqui, ∇^2 é o Laplaciano, dado pelas derivadas segundas parciais nas posições e m é a massa da partícula.

Uma função de onda possui informações temporais sobre sua posição e energia, como dado na equação abaixo para uma partícula submetida a um potencial independente do tempo e em estados estacionários

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}. \quad (1.1.3)$$

Como a função de onda é complexa por natureza, a informação física está contida em

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2, \quad (1.1.4)$$

que representa a probabilidade de encontrar a partícula em determinadas regiões do espaço. Outras grandezas físicas importantes, como a energia e posição, são obtidas dos valores esperados $\langle E \rangle$ e $\langle r \rangle$.

Grandes avanços foram obtidos com a elaboração desta área, como *lasers*, dispositivos eletrônicos e na informação dita quântica.



• • •

1.1.2. Estudo Matemático

Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n . Consideremos abaixo, a equação de Schrödinger não – linear:

$$\begin{cases} i \partial_t y + \Delta y + \lambda |y|^2 y = 0 & \text{em } \Omega \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega = \Gamma \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Procede – se de forma heurística. Formalmente, multiplicando a equação (1.1.5) por \bar{y} e integrando em Ω , obtemos:

$$i \int_{\Omega} \partial_t y \bar{y} dx - \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |y|^4 dx = 0. \quad (1.1.6)$$

Tomando a parte imaginária de (1.1.6), resulta que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |y|^2 dx = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \partial_t y \bar{y} dx = 0,$$

donde,

$$E_0(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y_0|^2 dx \quad (\text{Conservação de massa}). \quad (1.1.7)$$

Por outro lado, ao multiplicar a equação (1.1.6) por $\partial_t \bar{y}$, integrando em Ω , chegamos a

$$i \int_{\Omega} |\partial_t y|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla y \nabla \bar{y}_t dx + \lambda \int_{\Omega} |y|^2 y \bar{y}_t dx = 0.$$

Tomando a parte real da equação acima, decorre que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \frac{\lambda}{4} \int_{\Omega} |y|^4 dx \right] = 0,$$

o que nos fornece que

$$\begin{aligned} E_1(t) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \frac{\lambda}{4} \int_{\Omega} |y|^4 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y_0|^2 dx - \frac{\lambda}{4} \int_{\Omega} |y_0|^4 dx \quad (\text{Conservação de energia}). \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

A seguir, apresentaremos alguns conceitos utilizados no decorrer deste manuscrito. A seguinte definição, pedimos emprestado de Linares e Ponce, [78], página 90.



Definição 1.1.1

Considere a equação de Schrödinger

$$i \partial_t y + \Delta y + \lambda |y|^2 y = 0.$$

Quando $\lambda > 0$, dizemos que a equação de Schrödinger é chamada focusing. Por outro lado, se $\lambda < 0$, dizemos que a equação de Schrödinger é defocusing.

Aqui, usaremos o mesmo conceito empregado por Cazenave, [[41], observação 3.63, página 80]:

Definição 1.1.2

Consideremos a equação de Schrödinger em geral (não necessariamente (1.1.5) ou os modelos apresentados nesta tese). Dizemos que a solução y é dita solução H^2 , se y é uma solução com valor em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Suponha agora que dada equação de Schrödinger admita decaimento exponencial (por exemplo, os modelos (1.2.1), (1.3.1) e (1.4.1) nesta tese). Temos a seguinte definição:

Definição 1.1.3

Dizemos que uma solução y da equação de Schrödinger é uma solução em nível de L^2 se o decaimento exponencial obtido é da forma

$$E_0(t) \leq C e^{-\gamma t} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

onde a energia $E_0(t)$ é dada em (1.1.7).

Analogamente, uma solução em nível de H^1 é assim chamada, se o decaimento exponencial é

$$E_1(t) \leq C e^{-\gamma t} \|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

onde a energia $E_1(t)$ é dada em (1.1.8).

A equação de Schrödinger não – linear possui numerosas aplicações físicas como modelos não – lineares em física de plasma e fibra ópticas, conforme Ozsarı, [98]. No contexto unidimensional, Linares e Ponce [78], apontam que quando a não – linearidade é cúbica, isto é, possui a forma $|y|^2 y$, a equação de Schrödinger não – linear modela a propagação de pacotes de ondas na teoria de ondas de água (*water waves*).

Para uma leitura aprofundada sobre o estudo da equação de Schrödinger em domínios limitados e não – limitados, as seguintes bibliografias são sugeridas: Brézis, [17], Cazenave [41] e Linares e Ponce [78].



O objetivo desta tese é estabelecer a boa – colocação e o decaimento exponencial dos seguintes modelos:

1.2. Equação de Schrödinger e Placa com Dissipação Não – Linear Localmente Distribuída

Considere $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n com fronteira regular e as equações de Schrödinger e placa, respectivamente:

$$\begin{cases} i\partial_t y + \Delta y + ia(x)g(y) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

$$\begin{cases} \partial_{tt} y + \Delta^2 y + ia(x)g(y_t) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y = \Delta y = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0, y_t(0) = y_1, & \text{em } \mathcal{M}. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

A função $a(\cdot)$, responsável pelo efeito de dissipação localizada, satisfaz a seguinte condição:

$$a \in L^\infty(\mathcal{M}); a(x) \geq a_0 \geq 0 \text{ em } \omega \subset \mathcal{M}, \quad (1.2.3)$$

onde ω é um subconjunto aberto de \mathcal{M} propriamente contido em \mathcal{M} .

Considerando $g \equiv 0$, isto é, quando (1.2.1) e (1.2.2) são lineares, assumiremos a hipótese principal:

Hipótese 1.2.1 (Hipótese Principal)

Existe (ω, T_0) , $T_0 > 0, \omega \subset\subset \mathcal{M}$, tal que as seguintes desigualdades de observabilidade acontecem:

$$\|y_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |y(x, t)|^2 dx dt, \quad (1.2.4)$$

para o problema (1.2.1),

$$\|y_1\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|\Delta y_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |\partial_t y(x, t)|^2 dx dt, \quad (1.2.5)$$

para o problema (1.2.2)

para algum $C = C(\omega, T_0)$ e para todo $T > T_0$.



Discutiremos no que segue, alguns exemplos onde as condições (1.2.4) e (1.2.5) ocorrem. Uma condição *suficiente* para (1.2.4) ou (1.2.5) ser satisfeita foi obtida por Lebeau [75] (veja também Dehman, Gérard e Lebeau [48]). É bem conhecida a *Condição de Controle Geométrico* (CCG) devido a Bardos, Lebeau e Rauch [9], a saber:

Condição de Controle Geométrico - CCG

Assuma que as geodésicas de $\overline{\mathcal{M}}$ não têm contato de ordem infinita com $\partial\mathcal{M}$. Seja ω um subconjunto aberto de \mathcal{M} e suponha que exista $T_0 > 0$ tal que toda geodésica de tal forma que cada geodésica viajando na velocidade 1 e emitido no $t = 0$ encontra $\overline{\omega}$ em um tempo $t < T_0$.

Contudo, a condição CCG *não é necessária*, em geral, como segue dos trabalhos de Jaffard [61] ou Burq e Zworski [28]. Por exemplo, quando $\mathcal{M} = \mathbb{T}^2$ é o toro *flat* de dimensão dois equipado com a métrica flat, Jaffard [61] provou o seguinte resultado:

Teorema 1.2.1

Seja $(\mathcal{M}, \mathbf{g}) = (\mathbb{T}^2, flat)$. Dado $T > 0$ e qualquer conjunto aberto $\omega \subset \mathbb{T}^2$ existe uma constante $C > 0$ tal que a estimativa da desigualdade de observabilidade (1.2.4) (ou (1.2.5)) acontece.

A prova do teorema acima contida em Jaffard [61] depende sobre resultados sobre funções pseudo-periódicas devidas a Kahane. Posteriormente, uma nova prova para o teorema (1.2.1) foi provada por Macià [86] fazendo uso de argumentos locais e sua prova é baseada sobre o resultado de estrutura para medidas semi-clássicas para fluxo de Schrödinger sobre o toro.

O teorema de Jafard mostra que embora não esteja satisfeita a CCG para o toro *flat*, a desigualdade inversa acontece. A figura 1.2, a seguir, ilustra um exemplo onde a CCG não é satisfeita. A geodésica γ não encontra ω .

O teorema de Jafard assegura que para a equação de Schrödinger ou placa existe algumas variedades $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ onde (CCG) não é uma condição necessária e suficiente para estabelecer a estimativa da desigualdade de observabilidade. No entanto, Macià [86], provou que a CCG é equivalente a desigualdade de observabilidade (1.2.4) quando $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ tem *fluxo periódico* (também conhecida como variedades Zoll).

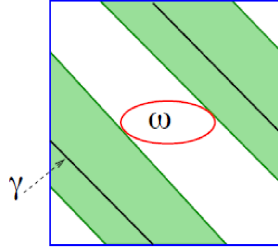


Figura 1.2: Exemplo onde a GCC não acontece. A geodésica γ não encontra ω

Hipótese 1.2.2

As seguintes hipóteses são feitas sobre a função g foram emprestadas de Lasiecka e Triggiani [67]:

- (H₁) (i) $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua , $g(0) = 0$.
(ii) g é a subdiferencial de J_1 , isto é, $g(z) = \partial J_1(z)$, onde $J_1 : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ é uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente.
(iii) $\operatorname{Re} \{(g(z) - g(v))(\bar{z} - \bar{v})\} \geq 0, \forall z, v \in \mathbb{C}$.
(iv) $\operatorname{Im} \{g(z)\bar{z}\} \equiv 0$. Note que para $v = 0$, temos que de (iii) que

$$\operatorname{Re} \{g(z)\bar{z}\} \geq 0,$$

que implica, em vista de (iv), que

$$\operatorname{Re} \{g(z)\bar{z}\} = g(z)\bar{z} \geq 0$$

e, conseqüentemente,

$$g(z)\bar{z} = |g(z)\bar{z}|.$$

(H₂) Existem $m, c > 0$ tal que

- (a) $m|z|^2 \leq g(z)\bar{z}$, se $|z| \leq 1$.
(b) $|g(z)| \leq c|z|$, se $|z| \geq 1$.

Na seção 3.3, página 103, estão alguns exemplos de uma função g que satisfaz a hipótese acima.



Há uma razoável literatura com respeito a questão do controle e estabilização das equações de Schrödinger e Placa. Entre numerosos trabalhos realizados, gostaríamos de mencionar os seguintes: Beauchard e Laurent [10], Burq, Gérard e Tzvetkov [27], Burq [26], Cavalcanti et al. [33] e [39], Dehman, Gérard e Lebeau [48], Laurent [73] e [74], Jaffard [61], Lasiecka e Triggiani [66], [67] e [68], Lasiecka, Triggiani e Zhang [64], [70], [71] e [72], Lebeau [75], Linares e Pazoto [77], Machtyngier e Zuazua [85], Machtyngier [84], Ozsarı [98], Rosier e Zhang [101], [102] e [103], Triggiani [113], Triggiani e Yao [115], dentre outras contidas nas referências bibliográficas. A maioria dos trabalhos encontrados na literatura no tocante à estabilização da equação de Schrödinger (ou placa) sujeita à dissipação localmente distribuída trata o caso linear ou não – linear (equação *focusing* ou *defocusing*), mas a dissipação local possui um caráter linear, isto é, $g(z) = z$. Quando g é não – linear, temos ciência dos trabalho de Charão et al. [44] onde os autores provam o decaimento polinomial para a energia de soluções de uma equação de placa do tipo Euler – Bernoulli com um termo de dissipação não – linear localizado.

• • •

1.2.1. Metodologia e Resultado Principal

O objetivo principal desta proposta é fornecer um método para tratar da estabilidade assintótica para certas equações lineares sujeitas a dissipação não – linear $a(\cdot)g(\cdot)$. Apesar de a prova ser simples, é muito eficaz para o tratamento de equações lineares sujeitos a dissipações não – lineares. No que segue, vamos dar-lhe a ideia principal para o caso específico do modelo de Schrödinger. Contudo, este método funciona bem para placas, ondas, etc...

Note que a solução y do problema (1.2.1), isto é,

$$\begin{cases} i\partial_t y + \Delta y + ia(x)g(y) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \mathcal{M} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

pode ser escrita como a soma $y = \varphi + z$, de modo que φ e z são soluções dos seguintes problemas lineares:

$$\begin{cases} i\partial_t \varphi + \Delta \varphi = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ \varphi(0) = y_0 & \text{em } \mathcal{M} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} i\partial_t z + \Delta z = -ia(x)g(y) & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ z(0) = 0 & \text{em } \mathcal{M}. \end{cases}$$



Com efeito, denotando $w = \varphi + z$, então, w satisfaz

$$\begin{cases} i\partial_t w + \Delta w = -ia(x)g(y) & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ w(0) = y_0 & \text{em } \mathcal{M}. \end{cases}$$

Pondo $v = y - w$, temos que v é solução do problema

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ v(0) = 0 & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases}$$

o que implica que $v \equiv 0$, ou, em outras palavras, que $y = w$, como desejado. Tendo em mente o exposto acima, vamos assumir que a desigualdade de observabilidade para o problema linear acontece, isto é,

$$\|y_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\varphi(x, t)|^2 dx dt, \quad (1.2.7)$$

para algum $C > 0$ e para todo $T > T_0$. Definindo

$$E_y(t) := \frac{1}{2} \|y(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2$$

nossa principal tarefa é provar a seguinte desigualdade:

$$E_y(T) \leq C_T \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(|y|^2 + |g(y)|^2) dx dt. \quad (1.2.8)$$

Assumindo que (1.2.8) ocorre e procedendo do mesmo modo que em Lasiecka e Triggiani [67], a solução do problema (1.2.1) satisfaz a seguinte taxa de decaimento

$$E_y(t) \leq S\left(\frac{1}{T_0}\right) E_y(0) \searrow 0, \text{ para todo } t \geq T_0, t \rightarrow \infty, \quad (1.2.9)$$

onde a função escalar $S(t)$ (contração não – linear) é a solução da seguinte EDO:

$$\frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E_y(0), \quad (1.2.10)$$

de modo que a função q é definida em Lasiecka e Triggiani [67] (veja (2.12) na página 492 de [67]). Outra questão importante é a identidade da energia para o problema



(1.2.1):

$$E_y(t) + 2 \int_s^t \int_{\mathcal{M}} g(y) \bar{y} \, dx dt = E_y(s); \quad E(t) \leq E(s), t \geq s \geq 0. \quad (1.2.11)$$

A última importante etapa na prova é o conhecido resultado que estabelece que a aplicação $\{z_0, f\} \mapsto z$ que associa o dado inicial $\{z_0, f\} \in L^2(\mathcal{M}) \times L^1(0, T; L^2(\mathcal{M}))$ para a única solução do problema linear

$$\begin{cases} i\partial_t z + \Delta z = f & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ z(0) = z_0 & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases}$$

é linear e contínua, isto é,

$$\|z\|_{L^\infty(0, T; L^2(M))} \leq \|z_0\|_{L^2(M)} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(M))}. \quad (1.2.12)$$

Então, combinando (1.2.3), (1.2.7), (1.2.11) e (1.2.12) e tendo em mente que $z_0 = 0$ e $f = -ia(x)g(y)$, deduzimos que

$$\begin{aligned} E_y(T) = \frac{1}{2} \|y(T)\|_{L^2(M)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|y_0\|_{L^2(M)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\varphi(x, t)|^2 \, dx dt \\ &\leq \tilde{C} \int_0^T \int_{\omega} a(x) |\varphi(x, t)|^2 \, dx dt \\ &\leq \hat{C} \int_0^T \int_{\omega} a(x) [|y(x, t)|^2 + |z(x, t)|^2] \, dx dt \\ &\leq C' \int_0^T \int_{\omega} a(x) [|y(x, t)|^2 + |g(y(x, t))|^2] \, dx dt, \end{aligned}$$

o qual estabelece o desejado em (1.2.8).

Da explanação acima, os ingredientes principais para estabelecer estimativas de taxas de decaimento uniforme para o problema (1.2.1) (ou (1.2.2)) são a desigualdade de observabilidade para o problema linear φ acima mencionada e a boa – colocação para o problema (1.2.1) (ou (1.2.2)). Contudo, a desigualdade de observabilidade tem sido estabelecida em alguns importantes trabalhos (veja Jaffard [61], Lebeau [75], Marchyngier e Zuazua [85], Macià [86]).

Consequentemente, resta provar a boa – colocação do problema (1.2.1) (ou (1.2.2)), que não é uma tarefa fácil. Para este propósito, usaremos a teoria de semigrupo não – linear. Do exposto, estamos em condições para delinear nosso resultado principal.

**Teorema 1.2.2**

Assuma que (1.2.3) e as hipóteses 1.2.1 e 1.2.2 estão satisfeitas. Então, o problema (1.2.1) (respectivamente (1.2.2)) possui uma única solução generalizada que satisfaz a taxa de decaimento dada em (1.2.9).

1.3. Equação de Schrödinger Defocusing Dissipada em um Domínio Exterior

Nesta seção, apresentaremos o segundo problema proposto para essa tese, a saber, o estudo da existência bem como exibir taxas de decaimento exponencial da energia em nível de H^1 – relacionada com a equação de Schrödinger *defocusing* dissipada em um domínio exterior:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - |u|^2 u - \lambda u - a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

onde $\lambda \geq 0$ e Ω um domínio exterior *star-shaped* de \mathbb{R}^2 , isto é, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_1$, onde Ω_1 é um conjunto aberto, limitado e conexo de \mathbb{R}^2 com fronteira regular $\partial\Omega_1 := \Gamma$. Dizemos que $\bar{\Omega}_1$ é um obstáculo de \mathbb{R}^2 .

Neste problema, a dissipação localizada $a(\cdot)$, satisfaz as seguintes propriedades:

$$a \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega) \text{ é uma função não – negativa.} \quad (1.3.2)$$

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \omega, \quad (1.3.3)$$

de modo que $\omega \subset \Omega$ é definido como segue: Seja $R > 0$ tal que $\partial\Omega \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < R\}$. Disto, definamos $\omega = \Omega \setminus B_R$ (veja figura 1.3).

Assumiremos que Ω_1 é um domínio *star-shaped* o que implica que Ω_1 é “*non-trapping*” (veja, por exemplo, Ivanovici et al. [60] e Stoyanov [106]), isto é, qualquer raio refletindo sobre a fronteira de Ω de acordo com as leis da óptica geométrica deixa qualquer conjunto compacto em um tempo finito, de acordo com a figura 1.4 (a).

A inspiração para considerar uma dissipação pseudo – diferencial veio do artigo de Dehman, Gérard and Lebeau [48]. Vale ressaltar que, em [48] os autores consideram o problema de uma variedade Riemanniana compacta de dimensão dois, sem fronteira, enquanto que, no presente problema, considera-se colocado em um domínio exterior bidimensional, o que traz dificuldades novas e diferentes a serem superadas. A fim de estudar a existência do problema (1.3.1), consideremos $\lambda \geq 0$. Contudo, de modo a estabelecer o decaimento exponencial em nível de H^1 , somos forçados a considerar

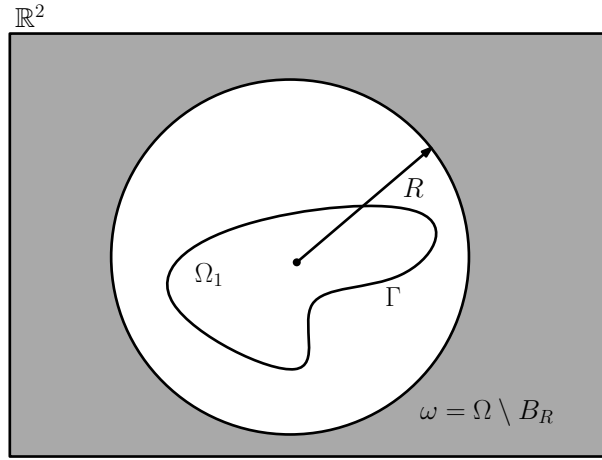
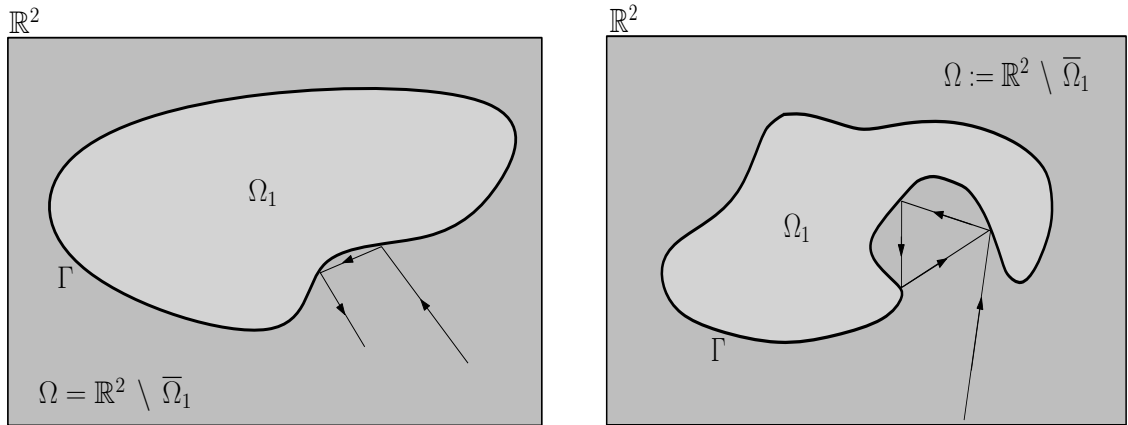


Figura 1.3: A região destacada em cinza escuro caracteriza onde os efeitos dissipativos são efetivos.



(a) Um exemplo de região “non – trapping”.

(b) Um exemplo de região “trapping”.

Figura 1.4: Regiões “non – trapping” e “trapping”.

$\lambda > 0$. Isto será clarificado durante a prova.

Um termo de dissipação mais relevante e interessante fisicamente seria $ia(x)u$. No entanto, a dissipação em (1.3.1) é especialmente utilizada para obter a energia em nível de H^1 , que é a regularidade na qual vamos resolver a equação.

• • •

1.3.1. Objetivo Principal, Metodologia

Como já comentamos, o objetivo principal deste problema é provar a existência de soluções regulares (neste caso, também a unicidade) e fracas para o problema (1.3.1) e, além disso, que tais soluções decaem exponencialmente e uniformemente para zero



na norma de H^1 . Dito de outro modo, existe constantes positivas C, γ , tais que

$$E(T) \leq Ce^{-\gamma T} E(0), \forall t \geq T_0, \quad (1.3.4)$$

onde $E(t)$ é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u(x, t)|^4 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \quad (1.3.5)$$

para toda solução H^2 (regular) para o problema (1.3.1) provido que os dados iniciais u_0 são tomados em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$.

A seguir, empregaremos a seguinte definição variacional de solução fraca:

Definição 1.3.1

Dado $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, u é chamada solução fraca do problema (1.3.1) se

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \quad (1.3.6)$$

e satisfaz

$$\begin{aligned} & \int_0^T -(u(t), \partial_t \varphi(t))_{L^2(\Omega)} + i \int_0^T (\nabla u(t), \nabla \varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & + i \int_0^T \left\langle |u(t)|^2 u(t), \varphi(t) \right\rangle_{L^{4/3}(\Omega), L^4(\Omega)} dt + i \lambda \int_0^T (u(t), \varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & + i \int_0^T \left\langle a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u(t), \varphi(t) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = 0 \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e para quase todo $t \in [0, T]$.

Para esta finalidade, as seguintes ferramentas são consideradas:

1. A fim de provar a existência de soluções regulares e fracas para o problema (1.3.1), nós pedimos emprestados as ideias de Dehman, Gérard e Lebeau, [48], (veja também em Laurent [74]) baseadas em propriedades de operadores pseudo-diferenciais. No caso de soluções H^2 , um argumento de ponto fixo e a desigualdade de Brézis – Gallouet [20] serão usados, no qual será possível obter a unicidade. Com respeito à solução H^1 , estudaremos dois métodos:
 - (a) o procedimento empregado por Özsarı, Kalantarov e Lasiecka, [98] será utilizado. O trunfo deste método é recorrer à teoria de operadores monótonos, motivado pelos recentes estudos no contexto de equações de Ginzburg – Landau (veja por exemplo, Okazawa [90] e Okazawa e Yokota, [91], [92])



e [93]). No que segue, para $N = 2, 3$, disponibilizaremos uma descrição qualitativa para a estratégia utilizada na obtenção de soluções fracas.

- *Etapa 1:* Como feito em Dehman, Gérard e Lebeau, [48], o problema (1.3.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \partial_t v - i \Delta v - R_0 v + i |J^{-1} v|^2 J^{-1} v + i \lambda J^{-1} v = 0 \\ v = Ju \\ v(0) = v_0 = Ju_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases} \quad (1.3.8)$$

onde onde R_0 é um operador pseudo – diferencial de ordem zero definido por

$$R_0 v = (-i \Delta + i \Delta J^{-1}) v, \quad (1.3.9)$$

de modo que J é um isomorfismo sobre $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, assim caracterizado

$$J v = (1 + i a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x)) v. \quad (1.3.10)$$

- *Etapa 2:* Procuraremos por uma solução u da seguinte forma $v := z + w$ onde z é a solução da equação de Schrödinger linear com dado inicial u_0 e w satisfaz o seguinte problema com termo não – linear dependendo sobre z :

$$\begin{cases} \partial_t w - i \Delta w + F_z(w) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ w = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.3.11)$$

onde

$$F_z(w) = i \lambda J^{-1}(z + w) + i |J^{-1}(z + w)|^2 J^{-1}(z + w) - R_0(z + w).$$

- *Etapa 3:* Em seguida, consideremos uma aproximação do problema (1.3.11), definida por w_n com $F_z(w)$ substituída por uma conveniente $F_{z_n}(w_n)$. O termo não – linear $F_{z_n}(w_n)$ é caracterizado pela aproximação de Yosida e uma aproximante regular z_n do problema linear, construída tomando dado inicial u_n^0 regular.
- *Etapa 4:* Para cada valor do parâmetro n e escolhido v_n , obteremos única solução regular da solução w_n , graças a ajuda de um resultado provado por Özsarı, Kalantarov e Lasiescka, [98] (Lema 2.4.1, página 66), levando em conta a força da propriedade Lipschitz da aproximação de Yosida, a regularidade de v_n e o fato que R_0 e J são operadores



pseudo – diferenciais de ordem zero.

- *Etapa 5:* Definamos $v_n := z_n + w_n$. Esta é a aproximação procurada para o problema (1.3.8) e pela equivalência com o problema original, obtemos uma aproximação regular u_n (no espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$) do problema (1.3.1).
- *Etapa 6:* Provaremos estimativas apropriadas *a priori*, ao qual obtemos limites fracos das correspondentes subsequências e mostraremos que estes limites satisfazem (1.3.7).

(b) O outro método utilizado é um procedimento de ponto fixo, inspirado no trabalho de Özsari [97]. Definamos o espaço

$$X_T \equiv C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad p > 3. \quad (1.3.12)$$

Nesta situação, a ferramenta chave é uma estimativa de Strichartz provada por Anton, [6] para $N = 2$, ao qual nós obteremos a boa – colocação de soluções locais em X_T para o problema (1.3.1). Além disso, provaremos que toda solução $u \in X_T$ do problema (1.3.1) pode ser aproximada por soluções regulares. Com isso, podemos estabelecer a identidade de energia (1.3.5), o que garantirá que nossa solução é, de fato, global.

2. Para provar a estabilização exponencial, usamos técnicas encontradas em Zuazua [122] ou, mais recentemente em Cavalcanti et al., [31] combinadas com um teorema de continuação única para soluções regulares. Sobre estas circunstâncias, o termo $-\lambda u$ é crucial para manipular a energia em nível de H^1 . De fato, ao assumir que $\lambda > 0$, este desempenha um papel fundamental na estabilização, o qual ajuda nos a recuperar parcialmente a energia $E(t)$, em $\Omega \setminus B_R$. Para recuperar a energia remanescente em $B_R \setminus \Omega_1$ (e conseqüentemente, a energia total em Ω), nós fazemos uso de multiplicadores radiais, mas, um termo de ordem menor ainda necessita ser absorvido. Para este propósito, como em Dehman, Gérard and Lebeau [48], precisaremos pagar um tributo, a saber, assumir a seguinte hipótese principal:

Hipótese 1.3.1

Para todo $T > 0$, a única solução pertencendo ao espaço $C(]0, T[, H^1(\Omega))$, para o sistema

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v + b_1(x, t)v + b_2(x, t)\bar{v} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{sobre } \omega, \end{cases} \quad (1.3.13)$$

onde as funções $b_1(t, x)$ e $b_2(t, x)$ pertencem a $L^\infty(]0, T[, L^p(\Omega))$ para algum $p > 0$ suficientemente grande, é a solução trivial $v \equiv 0$.



Uma das principais dificuldades na prova das taxas de decaimento (1.3.4) acima mencionada é, como considerado em [48], o uso da propriedade de continuação única. Nós explicaremos no que segue. Com o intuito de absorver um termo de ordem menor que aparece na estimativa de energia, vamos raciocinar por contradição de modo a obter, para um certo $T > 0$, uma sequência de problemas como em (1.3.1) e depois ao passar o limite, obtemos uma função u no espaço $C([0, T]; H_0^1(\Omega))$ solução de

$$\begin{cases} i \partial_t u + \Delta u - \lambda u - |u|^2 u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u^0 \in H_0^1(\Omega), \\ \partial_t u = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1.3.14)$$

Consequentemente, é cabal provar que a única solução do problema (1.3.14) verificando $\partial_t u = 0$ em $\omega \times (0, T)$ é a trivial $u = 0$. A maneira natural de fazer isso é tomar a derivada no tempo, no sentido de distribuição da equação (1.3.14) e considerar o sistema abaixo satisfeito pela nova função desconhecida $v = \partial_t u$, a saber,

$$\begin{cases} i \partial_t v + \Delta v + b_1(x, t)v + b_2(x, t)\bar{v} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{em } \omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1.3.15)$$

onde $b_1(x, t) = -(2|u|^2 + \lambda)$ e $b_2(x, t) = u^2$.

Infelizmente, resultará que $v = \partial_t u \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ e, por conseguinte, tal função não é suficiente regular para empregar o argumento continuação única acima mencionado. Para superar esta dificuldade, vamos provar, como considerado em Dehman, Gérard e Lebeau, [48], que as soluções do problema *defocusing* (1.3.14) são na verdade, regulares. Gostaríamos de enfatizar que ocorreu um problema semelhante na estabilização da equação de onda semilinear (veja Dehman, Lebeau e Zuazua [49]). Neste trabalho, os autores tiveram que estabelecer a propriedade de continuação única para o seguinte sistema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ \partial_t u = 0 & \text{para } \|x\| > R, \end{cases} \quad (1.3.16)$$

onde $u \in L^\infty(]0, T[; H^1(\mathbb{R}^3))$. O mesmo procedimento acima mencionado (uma mudança de função desconhecida $v = \partial_t u$) leva – nos a uma equação linear onda com potencial $f'(u)$ o que não é suficiente integrável e não permite a utilização de resultados clássicos de continuação única. Aproveitando-se das estimativas Strichartz satisfeitas pela solução u , os autores provaram que o termo semilinear $f(u)$ (o qual é, por hipótese, assumido ser subcrítico) está em $L^1(]0, T[, H_{loc}^\varepsilon(\mathbb{R}^3))$ para um certo $\varepsilon > 0$. Assim, foi possível por um resultado de propagação e um argumento de *boot-strap* para melhorar a regularidade da solução e para chegar a um nível admissível



de integrabilidade para o potencial $f'(u)$.

É importante referir que, a fim de atingir a estabilidade uniforme, os autores [48] provaram a seguinte estimativa de observabilidade:

$$E(0) \leq C \int_0^T \left\| (1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t) \right\|_{L^2(M)}^2 dt, \quad (1.3.17)$$

para um certo $C > 0$, onde M é variedade Riemanniana compacta e desde que os dados iniciais são tomados em conjuntos limitados de $H^1(M)$ enquanto em Dehman, Lebeau e Zuazua, [49], os autores estabeleceram uma estimativa observabilidade semelhante:

$$\tilde{E}(0) \leq C \int_0^T \|a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt, \quad (1.3.18)$$

onde $\tilde{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2] dx + \int_{\mathbb{R}^3} F(u(x, t)) dx$, com a não-linearidade $F(u) = \int_0^u f(s) ds$, é a energia de primeira ordem associada com a equação de onda, desde que a energia inicial $\tilde{E}(0)$ é tomada em conjuntos limitados de $H^1 \times L^2$.

Infelizmente, não podemos usar a mesma estratégia acima mencionada em ambos os artigos Dehman, Gerard e Lebeau [48] e Dehman, Lebeau e Zuazua [49] em nosso contexto. Na verdade, não podemos obter uma desigualdade semelhante a (1.3.17), já que não podemos repetir os argumentos de compacidade utilizados em [48] (veja proposições 9 e 10 em [48]). Na mesma forma que não podemos deduzir uma desigualdade semelhante como em (1.3.18) porque na prova do teorema 1 em [49] (ver final da página 537) os autores consideram uma identidade clássica que garante a equipartição de energia que parece funcionar apenas para a equação de onda, isto é, falha para a equação de Schrödinger. Por esta razão, temos de procurar um outro método para superar esta dificuldade. A inspiração foi um artigo devido a Zuazua [122] para a equação de onda adaptado ao contexto atual. Nosso principal objetivo é provar que a seguinte estimativa de energia:

$$\int_0^T E(t) dt \leq C \left[\int_0^T \left\| (1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \right], \quad (1.3.19)$$

onde $\tilde{B}_R^* := B_R^* \setminus \Omega_1$ e B_R^* é uma bola aberta que contém a bola B_R estritamente.

A estratégia para provar (1.3.19) fica a cerca do seguinte:

- *Etapa 1:* Considerar uma função auxiliar para recuperar a energia $E(t)$ em



$\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R^*$, a saber:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R^*} \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 + \frac{\lambda}{2} |u(x, t)|^2 + \frac{1}{4} |u(x, t)|^4 \right] dx dt \quad (1.3.20) \\ & \leq C \left[\int_0^T \left\| (1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \right]. \end{aligned}$$

A fim de alcançar a desigualdade (1.3.20) vamos assumir $\lambda > 0$ (veja as estimativas (4.3.13) – (4.3.16), páginas 167 e 168).

- *Etapa 2:* Considerar multiplicadores radiais para recuperar a energia $E(t)$ dentro da bola \tilde{B}_R^* , a saber,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 + \frac{\lambda}{2} |u(x, t)|^2 + \frac{1}{4} |u(x, t)|^4 \right] dx dt \quad (1.3.21) \\ & \leq C \left[\int_0^T \left\| (1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Com o intuito de obter a estimativa (1.3.20) e (1.3.21) consideremos os multiplicadores radiais $(x - x^0) \cdot \nabla \bar{u}$, por isso, somos forçados a trabalhar com soluções regulares, com $u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, para quase todo $t \in (0, T)$. Por essa razão, a fim de se obter a estimativa principal (1.3.19), trabalharemos com soluções regulares e a estabilidade exponencial de soluções fracas permanece verdadeira por argumentos de densidade.

- *Etapa 3:* Absorver o termo de ordem menor remanescente, isto é,

$$\int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \leq C \left[\int_0^T \left\| (1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right]. \quad (1.3.22)$$

Vale ressaltar que, a fim de provar a estimativa (1.3.22), a propriedade de continuação única dada na hipótese 1.3.1 desempenha um papel essencial. Como mencionado outrora, semelhantes resultados de propagação de regularidade devem ser provados. Se Ω é todo o \mathbb{R}^2 , as demonstrações são literalmente as mesmas como àquelas consideradas em Dehman, Gérard e Lebeau, [48]. Veja, Teoremas 3 e 4, Proposição 13 e Corolário 14 de [48]. Todavia, desde que Ω é um domínio exterior, uma nova prova para a Proposição 13 deve ser feita por causa das interferências de fronteira, ao qual foi mediante contribuição de Nicolas Burq, estabelecido no apêndice do presente manuscrito (ver Proposição 4.4.1). Assim, resultados semelhantes como Corolário 14 (Corolário 4.4.1 na



presente tese) e, conseqüentemente, Teoremas 3 e 4 (respectivamente Teoremas 1.3.5 e 1.3.6 no presente manuscrito) devido à [48] permanecem verdadeiro no presente contexto. Por conveniência, iremos anunciá-los na subseção 1.3.2.

A seguir, gostaríamos de mencionar alguns trabalhos importantes em conexão com o tema do presente problema. Inicialmente, vamos considerar o seguinte problema de Schrödinger *defocusing*:

$$\begin{cases} i \partial_t y + \Delta y - |y|^2 y = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.3.23)$$

onde Ω é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^N . Quanto à sua solvabilidade, o problema acima tem sido extensivamente estudado. Neste sentido e para domínios exteriores, é importante mencionar os trabalhos pioneiros de Brézis – Gallouet [20] para $N = 2$ e Y. Tsutsumi [117] para $N = 2$. Por outro lado, no que diz respeito à estabilização de um domínio exterior, M. Tsutsumi [116] estudou o caso linear $N \geq 3$ assumindo uma especial condição *non – trapping* (condição A, página 99) para o domínio Ω . É importante citar alguns trabalhos importantes que melhoraram ou complementaram consideravelmente os anteriores acima mencionados, a saber: Aloui e Khenissi [3], Aloui [2], Bronski e Jerrard [21], Bourgain [14] e [15], Burq, Gérard e Tzvetkov [23], [24], Burq [26], Carles e Miller [29].

No que diz respeito a equação de Schrödinger dissipada, Aloui et al., [4], provaram estimativas uniformes de energia local de soluções associadas para o seguinte problema:

$$\begin{cases} i \partial_t y - \Delta y + i a(x) y = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2. \\ y(0) = f \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

sob a hipótese do Controle Geométrico Exterior, eles obtiveram a seguinte decaimento uniforme (polinomial) da energia local:

$$\|y(t)\|_{L^2(\Omega \cap B_R)} \leq \frac{C}{t^{n/2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \forall t > 1, \forall f \in L^2_R(\Omega) = \{g \in L^2(\Omega); \text{Supp } g \subset B_R\}.$$

Laurent, [74], estudou a estabilização do problema (1.3.1) com $\lambda = 1$ sobre variedades compactas de dimensão 3. Neste artigo, o autor prova uma taxa de decaimento exponencial semelhante como em (1.3.27) para soluções periódicas, desde que os dados iniciais são tomados em conjuntos limitados de H^1 e para as soluções que pertencem aos espaços de Bourgain (ver Bourgain [14], [15]). Para este propósito, a propagação de compacidade e regularidade combinada com a medida de defeito microlocal introduzida por P. Gérard [53] desempenham um papel essencial na prova. Além disso, o



autor também precisa assumir a conhecida condição de controle geométrico, uma propriedade de continuação única e uma hipótese técnica para garantir a boa – colocação no H^1 .

Em relação à estabilidade exponencial em nível de L^2 para a equação de Schrödinger *defocusing* sujeita à dissipação localmente distribuída e posta em domínios não limitados, ou seja,

$$i\partial_t y + \Delta y - |y|^2 y + ia(x)y = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \quad N = 1, 2, \quad (1.3.24)$$

(aqui $a(x) \geq a_0 > 0$ para $\|x\| > R > 0$), gostaríamos de mencionar os trabalhos de Cavalcanti et. al. [33], [39]. A fim de alcançar o desejado, ou seja, estimativas de taxa de decaimento exponencial, os autores fazem uso de dois ingredientes principais na prova: (i) Estabelecer uma propriedade de continuação única associada com soluções regulares e generalizadas do problema não – dissipado $i\partial_t y + \Delta y - |y|^2 y = 0$ restrito a uma bola de raio fixado $r > R$; (ii) Empregar um efeito regularizante como estabelecido, por exemplo, em Constantin e Saut [47].

Para finalizar, gostaríamos de mencionar o trabalho devido à Dehman, Gérard e Lebeau [48], ao qual foi a inspiração do presente trabalho:

$$i\partial_t y + \Delta y - |y|^2 y - a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x)\partial_t y = 0, \text{ em } M \times (0, \infty), \quad (1.3.25)$$

onde M é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 2, sem fronteira. Neste artigo, os autores estabelecem estimativas de taxa de decaimento para a energia de primeira ordem $E_1(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y(x, t)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |y(x, t)|^4 dx$ para soluções H^1 . Eles provaram, em particular, que o sistema é semi-global exatamente controlável e semi-global exponencialmente estabilizável no espaço $H^1(M)$ assumindo que, ambas, uma condição de controle geométrico e uma condição de continuação única estão satisfeitas. As provas são baseadas sobre um resultado de propagação de singularidades e nas estimativas de dispersão (tipo de desigualdades Strichartz) devido a N. Burq, P. Gérard e N. Tzvetkov [24].

Finalmente, gostaríamos de mencionar algumas obras relevantes em conexão com o assunto da presente tese, dentre as quais, destacamos: Bortot e Cavalcanti [12], Bortot et al. [13], Cavalcanti et al. [32], Lasiecka e Triggiani [66] e [67], Lasiecka, Triggiani e Zhang [71] e [72], Linares e Pazoto [77], Rosier e Zhang [101], Machtyngier e Zuazua [85] e Triggiani e Xu [114].



• • •

1.3.2. Principais Resultados

Do exposto na subseção anterior, somos capazes de apresentar nossos principais resultados para o problema (1.3.1). O primeiro deles, nos diz respeito a soluções regulares, uma vez que usaremos a técnica de multiplicadores para a estabilização (localmente).

Teorema 1.3.1

Para todo dado inicial $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\lambda \geq 0$. Então, existe uma única solução (1.3.1) na classe $u \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Nos que diz respeito as soluções fracas, primeiramente, pela teoria de operadores monótonos, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.3.2

Considere $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda \geq 0$. Então, existe uma solução fraca u dada na definição 1.3.1 para o problema (1.3.1).

Agora, recorrendo ao método de ponto fixo, temos o seguinte:

Teorema 1.3.3

Considere $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda \geq 0$. Então, existe uma única solução fraca u pertencente à classe $C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$ para o problema (1.3.1).

A fim de obter a estabilidade exponencial para problema (1.3.1), assumiremos que o obstáculo Ω_1 é um domínio *star-shaped*, a saber, para um $x_0 \in \mathbb{R}^2$ fixo, temos que

$$(x - x_0) \cdot \nu(x) \leq 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega_1. \quad (1.3.26)$$

Em seguida, temos o seguinte teorema no que diz respeito à estabilização do problema (1.3.1).

Teorema 1.3.4

Vamos supor que (1.3.26) e a Hipótese 1.3.1 estão satisfeitas. Seja u uma solução na classe $C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$ para o problema (1.3.1) de acordo com o Teorema 1.3.3 com $\lambda > 0$ e, seja $E(t)$ a energia definida como em (1.3.5). Então, existem constantes positivas T_0 , C_1 e λ_0 tais que

$$E(t) \leq C_1 e^{-\lambda_0 t} E(0); \quad \forall t \geq T_0, \quad (1.3.27)$$

desde que os dados iniciais sejam tomados em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$.

O teorema abaixo é uma consequência de um resultado de propagação para a equação de Schrödinger linear que pode ser encontrado no Apêndice, seção 4.4, página 192.

**Teorema 1.3.5**

Seja $\omega = \Omega \setminus B_R$ como considerado anteriormente. Sejam $T > 0$ e u uma solução para o sistema da equação de Schrödinger não – linear

$$\begin{cases} i \partial_t u + \Delta u - \lambda u - |u|^2 u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u^0 \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

em $C(]0, T[; H^r(\Omega))$, $r \geq 1$, tal que $u \in L^2(]0, T[, H^{r+\rho}(\omega))$ para algum $\rho > 0$. Então, $u \in C(]0, T[, H^{r+\rho}(\Omega))$. Em particular, se u é da classe C^∞ sobre $\omega \times]0, T[$, então u é C^∞ em todo lugar em $\Omega \times (0, T)$.

Em seguida, vamos mencionar o seguinte resultado de continuação única.

Teorema 1.3.6

Seja $\omega = \Omega \setminus B_R$ e assuma que a Hipótese 1.3.1 esteja satisfeita. Então, para todo $T > 0$, as únicas soluções no espaço $C([0, T], H_0^1(\Omega))$ para o sistema

$$\begin{cases} i \partial_t u + \Delta u - \lambda u - |u|^2 u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t u = 0 \text{ em } \omega \times]0, T[, \end{cases}$$

são independentes de t , isto é, $\partial_t u \equiv 0$. Adicionalmente, $u \equiv 0$.

1.4. Boa – Colocação e Estabilização Uniforme para Equação de Schrödinger Não – Linear com Condições de Fronteira Dinâmica / Wentzell

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado em dimensão $N = 2, 3$. A fronteira de Ω é composta de duas partes regulares, fechadas, disjuntas Γ_0 e Γ_1 , ambas com interior não – vazio.

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y - i|y|^2 y & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -g(y_t) & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Há uma vasta literatura sobre o assunto, no caso quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou condições de contorno correspondem às clássicas condições de Dirichlet ou Neumann.

A novidade do problema em consideração é a presença de condições de contorno dinâmicas. Neste caso, o modelo não cai em um cenário semigrupo no qual estamos



habituaados. As subjacentes dificuldades são em ambos os níveis: teoria linear e não – linear. De fato, a análise já é um desafio no caso linear, onde para nosso melhor conhecimento, não há resultados na literatura. Um dos obstáculos óbvios é a falta de conservação da energia em nível de L^2 (que é um dispositivo clássico quando estudamos equações de Schrödinger não – lineares). Acontece que a dinâmica de (1.4.1) está associada a condições de contorno, chamadas condições Wentzell. E esta será a abordagem adotada neste trabalho. A concretização de uma teoria linear completa na topologia H^1 para o problema não – homogêneo, incluindo teoria que trata da regularidade de soluções, é o primeiro passo da análise realizada. Isto irá permitir que a construção de um ponto fixo adequado para uma aplicação não – linear. As dificuldades encontradas estão relacionadas com a existência de dois efeitos que impedem a regularidade:

1. a não – linearidade cúbica ($f(y) = -i |y|^2 y$) que é supercrítica em H^1 (é limitada de H^1 em L^2) .
2. Os efeitos das condições de contorno dinâmicas que impedem abordagens à teoria padrão de semigrupo (como em Brézis-Gallouet [20]).

Por outro lado, alguns dos novos efeitos benéficos gerados pela estrutura Wentzell – a assim chamada *regularidade escondida* na fronteira, proporcionará meios essenciais para as estimativas. Os resultados obtidos permitem:

- Teoria linear completa – incluindo teoria que trata da regularidade da solução.
- Existência e unicidade de soluções nos casos monótono ou quasi – monótono.
- Existência local e unicidade de soluções regulares H^2 .
- Existência global de soluções regulares no caso $N = 2$.
- Existência global de soluções H^1 nos casos quando $g(s) = s, f(y) = -i |y|^2 y$ ou quando f é globalmente Lipschitz de $V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$ e g assume certas hipóteses declaradas posteriormente. Neste caso, obtemos a unicidade.
- Decaimento uniforme da energia.

Para estudar o modelo não – linear, primeiro, estabeleceremos a boa – colocação do seguinte modelo linear:

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -y_t & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.4.2)$$



A chave para solvabilidade de tal problema¹ é tratar o problema acima como um problema de Wentzell (veja também Venttsel), isto é, pela substituição do termo $i \Delta y$ por y_t sobre a fronteira. Enquanto que as condições de fronteira Wentzell têm sido bem estudadas no contexto da equação do calor e onda, não temos ciência de qualquer tratamento pertinente para equações de Schrödinger. Deste modo, nossa tarefa número 1 é destinada a tal propósito. A vantagem da formulação dada por Wentzell é que esta fornece um semigrupo na variável y . Notemos que o argumento para a boa – colocação do modelo linear acima é independente da dimensão do espaço.

• • •

1.4.1. Condições de Fronteira Wentzell

Wentzell estava interessado no estudo de condições de fronteira mais gerais ao qual restringem um operador elíptico difusivo de segunda ordem para um gerador infinitesimal de um semigrupo positivo de contrações sobre o espaço de funções contínuas sobre o domínio. Seja Ω uma região limitada em \mathbb{R}^N com fronteira regular Γ . O resultado do trabalho de Wentzell [118] foi a descoberta da condição de fronteira generalizada

$$\alpha \Delta y + \beta \partial_\nu y + \gamma y = 0 \text{ sobre } \Gamma \quad (1.4.3)$$

satisfazendo a propriedade desejada para $\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$. Aqui, Δ sobre a fronteira seria interpretado como o Laplaciano vindo do interior:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial n^2} + \partial_\nu y (\text{div } n) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_i^2} = \Delta y \text{ sobre } \Gamma \quad (1.4.4)$$

onde $\{\tau_i\}_{i=1}^{N-1}$ é uma base ortonormal de vetores tangentes à Γ (como visto em Lasiecka – Triggiani [68] na página 305).

Definição 1.4.1

Quando o problema satisfaz (1.4.3), dizemos que o problema é de condição de fronteira Wentzell.

Fisicamente, esta condição de fronteira pode ser interpretada como uma oscilação harmônica dissipada agindo em cada ponto sobre a fronteira. No caso da equação do calor, isto significa que a fronteira pode agir como uma fonte de calor ou um dissipador, dependendo das condições físicas. Estas condições de fronteira também surgem no estudo da equação da onda.

Em particular, condições de fronteira Wentzell generalizada podem ser pensadas como uma subclasse fechada de condições de fronteira acústicas (conforme Lefler,

¹Problemas do tipo (1.4.1) e (1.4.2) são chamados de problemas de condição de fronteira dinâmicas.



[76]). Nesta tese, usaremos as condições de fronteira Wentzell no estudo da equação de Schrödinger.

• • •

1.4.2. Resumo da Literatura

Primeiramente, apresentaremos uma abordagem geral da literatura relacionada com nosso problema.

—

1.4.2.1. Panorama Geral

Devido à natureza dispersiva da equação de Schrödinger, a pesquisa separa naturalmente em duas categorias distintas: resultados em \mathbb{R}^N e resultados para domínios limitados. O primeiro tem sido bem estudado. No \mathbb{R}^N , a equação de Schrödinger é auto – regularizante. Na verdade, é bem sabido que quando há o componente não-linear $k|y|^p y$, com $p > 0$, o problema é globalmente bem – posto em \mathbb{R}^N para soluções H^1 , no caso *defocusing*, enquanto $p < \frac{4}{N-2}$ e, no caso de *focusing*, enquanto $p < \frac{4}{N}$ (veja Cazenave, [42]). Estudos recentes têm estendido a boa – colocação para funções $L^r(\mathbb{R}^N)$. Grande parte da teoria para problemas em domínios ilimitados depende da utilização de estimativas de Strichartz de acordo com Strichartz, [108], que são da forma geral

$$\|y(t)\|_{L_t^p L_x^q} \leq c \|y_0\|_{L^r}. \tag{1.4.5}$$

Estes resultados já foram generalizados para problemas não – homogêneos por Yajima [120] e por Cazenave e Weissler [43]. Na seção 2.9, página 81, apresentaremos mais detalhes sobre as estimativas de Strichartz.

Imaginando que haja um abismo entre problemas de Schrödinger em domínios não – limitados e problemas de Schrödinger em domínios limitados, há poucos resultados que podem ser considerados “pontes” entre esses dois ambientes. Somente na última década, as estimativas Strichartz têm encontrado aplicações para domínios limitados. Para o conhecimento do autor, o primeiro resultado provado por Burq, Gerard e Tzvetkov [25] foi obtido para variedades compactas sem fronteira e este veio com uma certa perda de derivadas, por exemplo, usando limitações da forma $\|y_0\|_{H^s(M)}$. Provou-se que em algumas geometrias esta perda é inevitável. As desigualdades Strichartz foram estendidas a domínios com fronteira por Anton [6] e mais recentemente por Özsarı [97]. Fornecendo uma complicação adicional, a natureza dinâmica do tempo da condição de contorno em (1.4.1) impede a consideração de clássicas estimativas Strichartz, embora algumas estimativas variacionais semelhante ao caso não homogêneo serão aplicadas.



Vários resultados adicionais são discutidos abaixo com riqueza de detalhe. Os próximos resultados têm desempenhado um papel essencial na direção da pesquisa deste problema.

1.4.2.2. Equação de Schrödinger Não – Linear em $2D$

O primeiro resultado conhecido para equações de Schrödinger não – linear sobre um domínio limitado é devido a Brézis e Gallouet [20].

Considere Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^2 com fronteira suave Γ . Então, para dado inicial $y_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, existe uma única solução para a equação

$$\begin{cases} i \frac{dy}{dt} - \Delta y + k|y|^2 y = 0 & \text{em } \Omega \times [0, \infty) \\ y(x, t) = 0 & \text{sobre } \Gamma \times [0, \infty) \\ y(0, t) = y_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.4.6)$$

tal que $y \in C([0, \infty), H^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty), L^2(\Omega))$ provido também que:

a) $k \geq 0$

b) $k < 0$ e $|k| \int |y_0|^2 dx < 4$

Vários lemas fundamentais são usados para provar esse resultado, que por sua vez serão primordiais na aquisição de existência global de soluções fortes para o problema (1.4.1) em dimensão $N = 2$.

O primeiro lema decorre de desigualdades da teoria de espaço de Sobolev:

Lema 1.4.1

Para todo $y \in H^2(\Omega)$,

$$\| |y|^2 y \|_{H^2(\Omega)} \leq C \|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|y\|_{H^2(\Omega)}.$$

A ferramenta mais importante para o problema (1.4.1) é a conhecida desigualdade de Brézis – Gallouet:

Lema 1.4.2

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Para todo $y \in H^2(\Omega)$ tal que $\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$,

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(1 + \sqrt{\log(1 + \|y\|_{H^2(\Omega)})}). \quad (1.4.7)$$



Recentemente, Ozawa e Visciglia [94] obtiveram um ganho na técnica usada por Brézis – Gallouet.

Considere o problema

$$\begin{cases} i \frac{dy}{dt} + \Delta y = \lambda |y|^3 y = 0 & \text{em } \Omega \times [0, \infty) \\ y(x, t) = 0 & \text{sobre } \Gamma \times [0, \infty) \\ y(0, t) = y_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.4.8)$$

onde $\lambda = \pm 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto e satisfaz as seguintes hipóteses:

a) Existe o operador linear $L \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^2(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\mathbb{R}^2))$, tal que $Lu|_{\Omega} = u$ quase sempre em Ω .

b) O operador $A := \Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é auto – adjunto.

Os autores provaram a existência e unicidade de soluções globais regulares, isto é, u pertence à classe $C([0, \infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ (no caso $\lambda = -1$, os autores necessitam impor certas condições sobre o dado inicial).

Se substituirmos a não – linearidade $k|y|^2 y$ por $f(|y|^2) y$ em (1.4.6), onde $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^2 sobre $(0, \infty)$ satisfazendo

$$\begin{cases} 0 < f(s) & \leq C_1 s^{p/2} \\ |f'(s) s^{1/2}| & \leq C_2 s^{(p-1)/2} \\ |f''(s) s| & \leq C_3 s^{(p-2)/2} \end{cases}$$

para todo $s \geq 0, p \in [1, \infty)$ e $C_i, i = 1, 2, 3$ são constantes positivas, M. Tsutsumi [116] provou que para $2 \leq p \leq 3$ e todo dado inicial $y_0 \in X := \{y : y \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega); \Delta y \in H_0^1(\Omega)\}$, existe uma única solução y tal que

$$y \in L^\infty(0, T; X), y_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$

para uma constante $T > 0$ arbitrária. Além disso,

$$\sup_{0 \leq t \leq \infty} \|y(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|y_0\|_{H^1(\Omega)})$$

para algum $C_1 > 0$ e

$$\sup_{0 \leq t \leq \infty} \|y(t)\|_{H^3(\Omega)} \leq C(T).$$

Em nossa análise da existência global, vamos recorrer a desigualdade de Brézis – Gallouet (1.4.7). No entanto, esta abordagem requer uma sequência de estimativas preliminares que não são necessárias no caso das condições de fronteira homogêneas. Um papel crítico em nossos argumentos será interpretado pela chamada “regularidade



escondida” descoberta para o modelo em questão.

1.4.2.3. Complicações que Surgem em Dimensões Maiores

As complicações são em ambos os níveis, a saber, a existência local e global. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, ou não limitado, tal que a fronteira Γ (se de fato, existir) é regular de classe C^∞ . Então, podemos considerar o seguinte problema não homogêneo:

$$\begin{cases} i \frac{dy}{dt} = \Delta y - m|y|^{p-1}y & \text{em } \Omega \\ y(t, x) = Q(t, x) & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Strauss e Bu [107] provaram a existência e unicidade de soluções para este problema quando $m > 0$ com dado inicial $y_0 \in H^1(\Omega)$ e a condição de fronteira não homogênea $Q \in C^3((-\infty, \infty), \partial\Omega)$.

O argumento chave para a prova deste resultado é o uso de funções truncadas (método conhecido como *truncamento*) sobre o termo não – linear $k|y|^{p-1}y$. O truncamento tomado é da forma

$$f_k(y) = \begin{cases} m|y|^{p-1}y; & |y| < k \\ m k^{p-1}y; & |y| \geq k \end{cases}$$

Contudo, enquanto estes truncamentos são Lipschitz em $L^2(\Omega)$, eles não são Lipschitz em $H^1(\Omega)$.

A dificuldade de trabalhar com funções truncadas desempenhou um papel crítico no estudo do problema (1.4.1). Nossa intenção original era adaptar as técnicas pioneiras de Lasiecka e Tataru [65] destinadas à equação da onda para a equação de Schrödinger. Mas, como será visto na subseção seguinte, bem como no capítulo 5, o espaço natural para considerar a equação de Schrödinger com condições de fronteira Wentzell é $H^1(\Omega)$.

Cipolatti, Machtyngier e Siqueira [45] estudaram o seguinte problema:

$$\begin{cases} i y_t + \Delta y = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y + g(y_t) = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.4.10)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ($\Gamma_i \neq \emptyset, i = 0, 1$)



e g deve satisfazer algumas hipóteses técnicas. A solvabilidade deste problema foi obtida recorrendo à teoria de semigrupos não – lineares. Em contrapartida, tal método parece, até o momento, não funcionar quando há a presença da não – linearidade $|y|^2 y$.

Diante do exposto, tal cenário nos obriga a considerar diferentes métodos para o estudo do problema e, conforme dito nesta subsubseção, serão discutidos na próxima subseção.

1.4.2.4. Resultados Conhecidos em Domínios Limitados em $3D$

A boa – colocação da equação de Schrödinger em uma ou duas dimensões tem sido bem estudadas; contudo, não há uma teoria de boa – colocação sobre domínios limitados em três dimensões. O resultado mais antigo que temos ciência para condições de fronteira tipo Dirichlet homogênea dado por Vladimirov [119]. A existência e unicidade de soluções é provada sobre hipóteses na limitação da dissipação.

O estudo da existência de soluções globais para os modelos não – lineares da equação de Schrödinger em dimensão $N \geq 3$ sobre domínios limitados com condições de fronteira não – homogêneas é mais recente. A maior parte da literatura sobre esses modelos tem-se centrada em torno de condições de contorno Dirichlet não homogêneas. Atualmente, a existência global de soluções fracas $H^1(\Omega)$ em qualquer dimensão foi provada para a equação de Schrödinger *defocusing* com condições de Dirichlet não – homogêneas por Özsarı, Kalantarov e Lasiecka, [98]. Existência de soluções globais H^1 para o modelo *focusing* foi alcançado por Özsarı [95] usando regularidade escondida do traço para não – linearidades $|y|^p y$ no caso onde $p \in (0, 4/(n + 2))$. A existência de soluções com condições Neumann de fronteira foi obtida pelo mesmo autor [96], no caso *defocusing* para $p > 0$ e no caso *focusing* para $p \in (0, 4/(n + 2))$. A unicidade e a dependência contínua sobre os dados iniciais não são bem compreendidas em domínios limitados em dimensão $N = 3$ ou dimensões mais altas.

1.4.2.5. Decaimento para a Energia no Modelo Linear

A estabilização de equações de Schrödinger é menos delicada em comparação às técnicas desenvolvidas para a equação da onda (veja por exemplo², Araruna e Maciel [7], Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Martinez [38], Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Soriano [40], Cavalcanti et al. [36] e Lasiecka e Tataru [65]). Cipolatti, Machtyngier e Siqueira [45] provaram o decaimento exponencial / polinomial em nível de

²Citamos alguns trabalhos referentes à equação da onda envolvendo a fronteira $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.



H^1 do problema (1.4.10) impondo algumas hipóteses sobre g . Também, Machtyngier [83], [85] mostrou que o modelo linear

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -(m(x) \cdot \nu(x))y_t & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \end{cases} \quad (1.4.11)$$

é exponencialmente estável, isto é, para todo $C > 1$, existe $\gamma > 0$ tal que a energia decai exponencialmente:

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}. \quad (1.4.12)$$

Esta prova segue o conhecido método de multiplicadores (o multiplicador usado é $q(x) \cdot \nabla \bar{y}$). Isto requer uma hipótese adicional, a saber, que Ω é um domínio *star-shaped*. Este resultado de Machtyngier é estendido para a equação de Schrödinger não-linear na seção 5.5, página 265.

• • •

1.4.3. Resumo dos resultados

Iniciemos esta subseção com a teoria a respeito do problema linear.

—

1.4.3.1. Teoria Linear

Consideremos neste momento, o seguinte modelo com condições de fronteira dinâmicas

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -y_t & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \end{cases} \quad (1.4.13)$$

para Ω limitado em \mathbb{R}^N (onde $N = 2, 3$). É evidente notar que (1.4.13) não está associado com um semigrupo. Enquanto este método é bem sucedido para os operadores de calor e de onda, o problema Schrödinger não acomoda tal estrutura. Não há nenhuma propriedade de boa conservação evoluindo no tempo. Em vista disso, vamos perseguir uma ideia diferente pela reformulação do problema de fronteira dinâmica Wentzell. Isto é exposto no que segue.

Seja $V \equiv H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. Introduzimos o operador $A : V \rightarrow V$ dado por $A = i\Delta$ com domínio

$$D(A) = \{y \in V, \Delta y \in V, \partial_\nu y = -i\Delta|_{\Gamma_1} y \text{ sobre } \Gamma_1\}.$$

Provaremos o seguinte resultado:

**Teorema 1.4.1**

O operador $(A, D(A))$ gera um semigrupo de contrações C_0 sobre o espaço $V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.

Como se observa, o operador introduzido reformula o problema linear acima, com condição de contorno dinâmica como um problema Wentzell com condição de fronteira Wentzell dada por $i\Delta y + \partial_\nu y = 0$ sobre Γ_1 . Enquanto condições de fronteira Wentzell têm sido amplamente estudadas para os operadores de calor e de onda (veja Goldstein [50]), não temos conhecimento de quaisquer resultados referentes ao operador Schrödinger³. É provado que o operador A é dissipativo em $H^1(\Omega)$, mas não em $L^2(\Omega)$. A maximalidade não é uma questão trivial que não segue diretamente de resultados clássicos.

O espaço de Banach

$$Z = \{y \in V, \Delta y \in L^2(\Omega), \partial_\nu y \in L^2(\Gamma_1)\}$$

o qual nós munimos com a norma

$$\|u\|_Z = \|u\|_V + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_1)}$$

sobre o qual é demonstrado que o operador A é contínuo e coercivo, permitindo assim, a obtenção de um semigrupo gerado via resultados conhecidos.

A fim de tratar o problema não – linear, o primeiro passo é o de estudar a equação não homogênea apropriada, onde a não – homogeneidade é, tanto na fronteira e no interior. Isto conduz ao seguinte modelo.

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = f & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y + i\Delta y = g & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (1.4.14)$$

Do exposto, somos capazes de provar o seguinte resultado:

³De fato, a falta de um mecanismo regularizante presente em problemas (dinâmicos) parabólicos e a falta de uma boa estrutura Hamiltoniana cria um desafio para o problema. Isto fica evidenciado no momento de provar a propriedade de maximal dissipatividade.

**Teorema 1.4.2**

Sejam $f \in L^1(0, \infty; V)$ e $g \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$. Então, para cada $y_0 \in V$ existe uma única solução $y \in C(0, \infty; V)$ para (1.4.14). Além disso, a seguinte regularidade “escondida” na fronteira acontece:

$$\partial_\nu y \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)) \quad (1.4.15)$$

Observação 1.4.1

Observe que a estrutura Wentzell supre a regularidade “escondida” dos traços de fronteira. Na verdade, tomando – se $g \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$, tal função propicia soluções H^1 no interior que, por sua vez fornece derivada normal com regularidade L^2 na fronteira. Isto destaca – se em relação à equação de Schrödinger clássica, com fronteira Neumann, de modo que ao considerar a regularidade L^2 na fronteira, resulta em soluções L^2 no interior. Essa regularidade escondida vai ser fortemente aproveitada quando se estuda o modelo não – linear.

Tomando $g = f|_{\Gamma_1}$, podemos fazer a identificação do problema de Wentzell dado acima com o problema dinâmico não – homogêneo

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = f & \text{em } \Omega \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \partial_\nu y + y_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (1.4.16)$$

Então, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.3

Sejam $f \in L^1(0, \infty; V)$ e $f|_{\Gamma_1} \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$. Então para cada $y_0 \in V$ existe uma única solução $y \in C(0, \infty; V)$ to (1.4.16). E ainda, temos a seguinte regularidade escondida: $y_t|_{\Gamma_1} \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$

Como uma consequência, deduzimos

Corolário 1.4.1

Considere $f \in L^2(0, \infty; V)$. Então para cada $y_0 \in V$ existe uma única solução $y \in C(0, \infty; V)$ para (1.4.16). Ademais, obtemos a regularidade escondida: $y_t|_{\Gamma_1} \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$

A fim de estudar problemas dinâmicos não – lineares, são necessárias soluções mais regulares. Estas, são fornecidas pelo seguinte teorema de regularidade.

**Teorema 1.4.4**

Sejam $y_0 \in V$, $\Delta y_0 \in V$, $f \in H^1(0, \infty, V)$ e suponha que a seguinte Condição de Compatibilidade é satisfeita:

$$\partial_\nu y_0 + i\Delta y_0 + f(y_0) = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \quad (1.4.17)$$

Então, a solução de (1.4.16) possui a seguinte regularidade

$$y \in C(0, \infty, H^2(\Omega)) \cap C^1(0, \infty, V)$$

No que segue, serão apresentadas duas situações nas quais exploraremos a teoria não – linear.

1.4.3.2. Teoria Não – Linear I

Podemos, de fato, estender a teoria linear para incluir perturbações Lipschitz (tanto no interior e na fronteira) com dissipação de fronteira não – linear:

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y + f(y) & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -g(y_t) + h(y) & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ y_0 \in V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.4.18)$$

Aqui, assumimos que $f(y) : V \rightarrow V$ e $h(y) : V \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ são funções globalmente Lipschitz e ainda, faremos as seguintes hipóteses sobre a dissipação na fronteira:

Hipótese 1.4.1

Assuma que $g(z)$ é uma função contínua sobre \mathbb{C} tal que ambas $g(z)$ e sua inversa $g^{-1}(z)$ satisfazem:

- (i) $\operatorname{Re}(g(z) - g(v))(\bar{z} - \bar{v}) \geq m|z - v|^2$ (iii) $\operatorname{Im}(g(z)\bar{z}) = 0$
(ii) $\operatorname{Re}(g(z)\bar{z}) \geq m|z|^2$ (iv) $|g(z)| \leq M|z|$

para algumas constantes $m, M \in \mathbb{R}_+$.

O termo de fronteira não – linear desta forma aparece na literatura para as equações da onda e Schrödinger, por exemplo em Lasiecka e Tataru [65] e Lasiecka e Triggiani [66], respectivamente. Em particular, as hipóteses (i) e (iii) caracterizam uma situação no âmbito complexo análogo para a hipótese de monotocidade que surge no estudo da equação da onda.



Este problema é resolvido usando a mesma aproximação empregada no modelo linear. Definamos o operador A_f por

$$A_f y = i\Delta y + f(y) \quad (1.4.19)$$

acompanhado do domínio

$$D(A_f) = \{y \in V, \Delta y \in V, \partial_\nu y = -g(i\Delta|_{\Gamma_1} y + h(y)) \text{ sobre } \Gamma_1\} \quad (1.4.20)$$

para o qual nós aplicamos os mesmos métodos usados anteriormente para o obter o resultado abaixo:

Teorema 1.4.5

O operador $(A, D(A_f))$ gera um semigrupo fortemente contínuo sobre V .

Ao contrário do modelo linear, a ω -maximal dissipatividade é obtida para alguns valores de ω suficientemente grandes. Deste modo, não podemos mais caracterizar o semigrupo como um semigrupo de contrações.

Quando se traduz esses resultados para condições de fronteira dinâmicas, obtém-se:

Corolário 1.4.2

No que diz respeito ao problema (1.4.18), para qualquer dado inicial $y_0 \in V$ existe uma única solução $y \in C(0, \infty; V)$.

1.4.3.3. Teoria Não – Linear II

Retornamos para a equação de Schrödinger não – linear de interesse:

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = F(y) = -i|y|^2 y & \text{em } \Omega \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \partial_\nu y + y_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_1. \end{cases} \quad (1.4.21)$$

Denotando $z = y_t$, definamos os espaços

$$X_0 = \{(y_0, z_0) \in V \times V, \Delta y_0 \in V, z_0 \equiv i\Delta y_0 + F(y_0), \partial_\nu y_0 + z_0 = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}$$

com norma

$$\|(y, z)\|_{X_0}^2 = \|y\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|z\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2$$



e

$$X_T = \{(y, z) : y \in C[0, T; H^2(\Omega) \cap V], z \in C(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)), y_t = z, y(0) = y_0\}$$

com norma

$$\|(y, z)\|_{X_T}^2 = \sup_{t \in [0, T]} \|y\|_{H^2(\Omega)}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|z\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2.$$

Observação 1.4.2

Note que os elementos $\Delta y \in V$ e $\partial_\nu y = z|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ automaticamente implicam que y é um elemento de $H^2(\Omega)$.

Então, temos o seguinte resultado de boa – colocação *local*:**Teorema 1.4.6**

Para todo subconjunto limitado $B \subset X_0$, existe $T > 0$ tal que para todo $(y_0, z_0) \in B$, existe uma única solução y de (1.4.21) com derivada temporal $y_t = z$ tal que o par $(y, z) \in X_T$.

Dada a associação $z = y_t$, podemos reescrever o resultado $(y, z) \in X_T$ como

$$y(x, t) \in C([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)). \quad (1.4.22)$$

Este resultado segue por meio de argumento de ponto fixo. Argumentos recorrentes ao método de ponto fixo são comumente usados no estudo de equações de Schrödinger semilineares no qual são frequentemente acompanhados por estimativas de Strichartz. Devido à natureza não – homogênea da condição de fronteira sobre Γ_1 , estes tipos de estimativas não podem ser aplicadas. A nossa abordagem, em vez disso, baseia-se em associação com o contexto de Wentzell que permite desenvolver estimativas com regularidade adequadas para a condição dinâmica na equação sobre a fronteira. Estas estimativas são realizadas tanto para a norma $\|y\|_{H^2(\Omega)}$ como para $\|z\|_V$. O uso das estimativas sobre $\|z\|_V$ é exclusivo para este problema e destaca um dos desafios desta pesquisa.

A fim de obter soluções globais, recorreremos a desigualdade de Brézis-Gallouet apresentada em (1.4.7), o qual é válida em dimensão dois. A ideia é que a não – linearidade cúbica $|y|^2 y$ é “praticamente” em Lipschitz $H^2(\Omega)$. Isso nos permite encontrar uma limitação na taxa de crescimento da forma $Me^{\alpha e^{\beta t}}$, que por sua vez permite obter o seguinte teorema:

Teorema 1.4.7

Suponha $N = 2$. Para todo $(y_0, z_0) \in X_0$ e para todo $T > 0$, existe uma única solução y de (1.4.21) com derivada temporal $y_t = z$ tal que o par $(y, z) \in X_T$.

**Observação 1.4.3**

A questão de saber se as soluções são globais em 3D permanece, para o nosso melhor conhecimento, aberta.

1.4.3.4. Soluções Fracas

O problema de não conseguir obter uma teoria de boa – colocação global, quando $N = 3$ é típico na literatura. Em particular, não existe teoria de boa colocação global na literatura para equações de Schrödinger semilineares, mesmo para condições de fronteira Dirichlet e Neumann homogêneas em domínios limitados. Atualmente, a literatura está focada em resultados globais de existência de soluções fracas. Somos capazes de fornecer um resultado semelhante existência global usando o conhecido método de Faedo – Galerkin (veja por exemplo J. L. Lions [79]). Estudaremos este problema via Galerkin em duas situações, a saber,

- caso 1: quando $g(s) = s$ e $f(y) = |y|^2 y$;
- caso 2: quando f é globalmente Lipschitz de V em V , sua primitiva G satisfaz certas condições que apresentaremos oportunamente e g , contempla as condições dadas na hipótese 1.4.1.

Definamos uma solução fraca de (1.4.21) como uma solução

$$i(y', v)_{L^2(\Omega)} - (\nabla y, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (g(y'), v)_{L^2(\Gamma_1)} - (f(y), v)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall t \in [0, \infty). \quad (1.4.23)$$

Note-se que, uma vez que obtemos este resultado através da resolução de um problema aproximado de dimensão finita para $y_m \in V_m \subset V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, a condição de fronteira $\partial_\nu y + y_t = 0$ não é preservada. Isso nos impede de buscar soluções fortes, como foi feito pelo argumento de ponto fixo. Em vez disso, obtemos um resultado final de existência:

Teorema 1.4.8

Seja $N \leq 3$. Dado $y_0 \in V$, existe uma solução fraca y de (1.4.1) na classe

$$y \in L^\infty(0, \infty; V); \quad y' \in L^\infty(0, \infty; V'). \quad (1.4.24)$$

e a seguinte regularidade na fronteira toma lugar:

$$g(y_t)|_{\Gamma_1}, \partial_\nu y \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)).$$

A prova do caso 1 é mais simples que no caso 2, uma vez que no segundo caso, pelas estimativas *a priori*, obtemos que $g(y_m)$ converge fraco para uma função χ em $L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ e somente temos que $\{y'_m\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V')$. Para mostrar



que $\chi = g(y)$, onde y é uma solução fraca dada em (1.4.23), é necessário obter a identidade de energia do problema (1.4.1) para soluções fracas, no qual o método via convolução encontrado no livro de J. L. Lions [79] é bastante útil.

1.4.3.5. Taxas de Decaimento Uniforme da Energia

Como foi mencionado anteriormente, a estabilização do modelo linear foi provada em dimensões $N = 2, 3$ por Machtyngier utilizando o método de integração usando o multiplicador $q(x) \cdot \nabla \bar{y}$. Nós somos capazes de provar um resultado similar pelo mesmo método, contudo, atualmente a existência de soluções globais para regulares (1.4.21) tem sido somente provada em dimensão $N = 2$ como visto acima. Provamos o seguinte resultado de estabilização em nível de H^1 :

Teorema 1.4.9 (Estabilização)

Assuma que Ω é um domínio star – shaped e considere y uma solução regular do problema (1.4.1). Então, existem constantes positivas γ e C tal que a energia H^1 – associada ao problema (1.4.1) decai exponencialmente, isto é,

$$E(t) \leq C e^{-\gamma t} E(0), \quad \text{para todo } t > T_0, \quad T_0 > 0 \text{ suficientemente grande.}$$

1.5. Orientação

Este trabalho de tese é composto do seguinte modo:

- No capítulo 2, se concentra as preliminares dos resultados usados nesta tese.
- No capítulo 3, se apresenta a existência e unicidade de solução e taxas de decaimento uniforme para os problemas (1.2.1) e (1.2.2).
- No capítulo seguinte, se encontra as provas da existência e estabilidade exponencial do problema (1.3.1) e os resultados de propagação para a equação de Schrödinger.
- Por fim, o capítulo 5 trata do estudo do problema (1.4.1) caracterizando o mesmo como um problema Wentzell, discutindo em dimensões 2 e 3, expondo a teoria linear e não – linear, no qual são obtidos resultados de existência local, global e o decaimento exponencial, conforme expostos na seção 1.4.

Para uma maior conveniência ao leitor, enunciaremos novamente os resultados de existência de solução e estabilização no decorrer dos capítulos 3, 4 e 5.

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados que serão usados no decorrer deste manuscrito.

2.1. Espaços de Funcionais à Valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$. Dizemos que uma sucessão

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0, T; X)$$

se:

- i) Existe um compacto K de $(0, T)$ tal que $\text{supp}(\varphi_\nu)$ e $\text{supp}(\varphi)$ estão contidos em K , para todo ν ;
- ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{dt^k} \varphi_\nu(t) \rightarrow \frac{d^k}{dt^k} \varphi$ em X , uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0, T) = \mathcal{D}(0, T; \mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ se $S : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ é linear e se $\theta_\nu \rightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(0, T)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X . Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle \text{ em } X, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

O espaço $\mathcal{D}(0, T; X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das *distribuições vetoriais*¹ de $(0, T)$ com valores em X .

¹Para mais detalhes sobre distribuições vetoriais veja Zeidler, [121]



Denota-se por $L^2(0, T; X)$ o espaço das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ mensuráveis em $(0, T)$, com $(0, T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt < \infty.$$

O espaço $L^2(0, T, X)$ munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(0, T, X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

é um espaço de Hilbert.

A seguir, apresentaremos o conceito de funções escalarmente contínuas

Seja X um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^\infty(0, T; X)$ tais que a aplicação $t \rightarrow \langle f(t), x \rangle$ é contínua sobre $[0, T]$, $\forall x \in X'$, onde X' é dual de X . Denotaremos tal espaço por $C_s(0, T; X)$.

Disto segue que $C_s^1(0, T; X) = \{u \in C_s(0, T; X); u' \in C_s(0, T; X)\}$, onde u' é a derivada de u no sentido das distribuições. Da mesma forma temos que $C_s^2(0, T; X) = \{u \in C_s(0, T; X); u'' \in C_s(0, T; X)\}$.

Observação 2.1.1

Se $u \in L^\infty(0, T; X)$ e $u \in C([0, T]; X)$ então $u \in C_s(0, T; X)$.

Lema 2.1.1

Sejam X e Y dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e X um espaço reflexivo. Então,

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_s(0, T; Y) = C_s(0, T; X).$$

Demonstração: Ver Lions – Magenes [81].

□

2.2. Um repasso a Geometria Riemanniana

Seja $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana n -dimensional não compacta, $n \geq 2$, orientável, simplesmente conexa e sem bordo munida de uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ completa, de classe C^∞ . Denotaremos por $(g_{ij})_{n \times n}$ a matriz $n \times n$ relativa à métrica \mathbf{g} . O espaço tangente a \mathcal{M} em $p \in \mathcal{M}$ é denotado por $T_p\mathcal{M}$ e a norma em $T_p\mathcal{M}$ é dada por $|\cdot|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$.



Seja $f \in C^2(\mathcal{M})$, definimos o operador Laplace – Beltrame de f como

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f), \quad (2.2.1)$$

onde ∇f denota o gradiente de f na métrica \mathbf{g} , isto é, para todo campo de vetores X em \mathcal{M}

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \quad (2.2.2)$$

e div denota o divergente, ou seja, se X é um campo de vetores em \mathcal{M} , $\operatorname{div}X(p) :=$ traço da aplicação linear $Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$, $p \in \mathcal{M}$.

De posse de tais definições e notações, enunciamos o seguinte lema.

Lema 2.2.1

Seja $p \in \mathcal{M}$. Considere $f \in C^1(\mathcal{M})$ e H um campo de vetores em \mathcal{M} . Então é válida a seguinte identidade :

$$\langle \nabla f, \nabla(H(f)) \rangle = \nabla H(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{2}[\operatorname{div}(|\nabla f|^2 H) - |\nabla f|^2 \operatorname{div}H], \quad (2.2.3)$$

onde ∇H é a diferencial covariante definida por $\nabla H(X, Y) = \langle \nabla_X H, Y \rangle$.

Demonstração: Ver Lasiecka, Triggiani e Yao, [69].

□

Finalmente definimos a Hessiana de $f \in C^2(\mathcal{M})$ como o tensor simétrico do tipo $(0, 2)$ em \mathcal{M} , isto é,

$$\operatorname{Hess}(f)(X, Y) = \nabla^2 f(X, Y) := \nabla(\nabla f)(X, Y) = \langle \nabla_Y(\nabla f), X \rangle, \quad (2.2.4)$$

para quaisquer X e Y campos de vetores em \mathcal{M} .

Observação 2.2.1

Para simplificar a notação, denotaremos a norma em L^2 sem fazer distinção sobre o argumento, seja ele uma função ou um campo de tensores do tipo $(0, m)$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$. Definimos o espaço $C_k^p(\mathcal{M})$ por

$$C_k^p(\mathcal{M}) = \{u \in C^\infty(\mathcal{M}); \int_{\mathcal{M}} |\nabla^j u|^p d\mathcal{M} < \infty, \forall j = 0, 1, \dots, k\}, \quad (2.2.5)$$

onde $\nabla^j u$ denota a j – ésima diferencial covariante de u ($\nabla^0 u = u, \nabla^1 u = \nabla u$).

Assim definimos os espaço de Sobolev $H_k^p(\mathcal{M})$ como o completado de $C_k^p(\mathcal{M})$ com



respeito à norma

$$\|u\|_{H_k^p(\mathcal{M})}^p = \sum_{j=0}^k \int_{\mathcal{M}} |\nabla^j u|^p d\mathcal{M}. \quad (2.2.6)$$

Desta forma segue que:

(i) $L^2(\mathcal{M}) := H_0^2(\mathcal{M})$ é o completado de $C_0^2(\mathcal{M})$ com respeito a norma

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 = \int_{\mathcal{M}} |u|^2 d\mathcal{M}. \quad (2.2.7)$$

(ii) $H^1(\mathcal{M}) := H_1^2(\mathcal{M})$ é o completado de $C_1^2(\mathcal{M})$ com respeito a norma

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{M})}^2 = \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^2 d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |u|^2 d\mathcal{M}. \quad (2.2.8)$$

(iii) $H^2(\mathcal{M}) := H_2^2(\mathcal{M})$ é o completado de $C_2^2(\mathcal{M})$ com respeito a norma

$$\|u\|_{H^2(\mathcal{M})}^2 = \int_{\mathcal{M}} |\nabla^2 u|^2 d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^2 d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |u|^2 d\mathcal{M}. \quad (2.2.9)$$

Observação 2.2.2

De acordo com as definições anteriores, temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$H^2(\mathcal{M}) \hookrightarrow H^1(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{M}). \quad (2.2.10)$$

Proposição 2.2.1

O espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, denotado por $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ ou $C_0^\infty(\mathcal{M})$, é denso em $H^1(\mathcal{M})$, ou seja, $H_0^1(\mathcal{M}) = H^1(\mathcal{M})$, onde $H_0^1(\mathcal{M}) := \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}^{H^1(\mathcal{M})}$.

Demonstração: Ver Herbey, [58].

□

Por argumentos de densidade podemos estender as fórmulas apresentadas anteriormente aos espaços de Sobolev.

**Teorema 2.2.1**

Seja $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana n – dimensional não compacta, $n \geq 2$, simplesmente conexa, orientável e sem bordo munida de uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ completa, de classe C^∞ .

Sejam $u \in H^1(\mathcal{M})$ tal que $\Delta u \in L^2(\mathcal{M})$ e $v \in H^1(\mathcal{M})$, então é válida a seguinte identidade:

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathcal{M} = \int_{\mathcal{M}} -\Delta u v d\mathcal{M}. \quad (2.2.11)$$

Demonstração: Ver Taylor, [109].

□

Teorema 2.2.2 (Teorema da Divergência de Gauss)

Sejam \mathcal{M}^n uma variedade Riemanniana orientável, $\Omega \subset \mathcal{M}$ aberto, limitado e conexo com bordo $\partial\Omega$ bem regular, $X \in [H^1(\Omega)]^n$ um campo de vetores e ν o campo vetorial normal unitário exterior à $\partial\Omega$, então

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X d\mathcal{M} = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle d\Gamma. \quad (2.2.12)$$

Demonstração: Ver Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Soriano, [35].

□

Teorema 2.2.3 (Teorema de Green 1)

Sejam \mathcal{M}^n uma variedade Riemanniana orientável, $\Omega \subset \mathcal{M}$ aberto, limitado e conexo com bordo $\partial\Omega$ bem regular, $X \in [H^1(\Omega)]^n$ um campo de vetores, $q \in H^1(\Omega)$ e ν o campo vetorial normal unitário exterior à $\partial\Omega$, então

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} X) q d\mathcal{M} = - \int_{\Omega} \langle X, \nabla q \rangle d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega} (\langle X, \nu \rangle) q d\Gamma. \quad (2.2.13)$$

Demonstração: Ver Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Soriano, [35].

□

**Teorema 2.2.4 (Teorema de Green 2)**

Sejam \mathcal{M}^n uma variedade Riemanniana orientável, $\Omega \subset \mathcal{M}$ aberto, limitado e conexo com bordo $\partial\Omega$ bem regular, $f \in H^2(\Omega)$, $q \in H^1(\Omega)$ e ν o campo vetorial normal unitário exterior à $\partial\Omega$, então

$$\int_{\Omega} (\Delta f)q \, d\mathcal{M} = - \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla f, \nabla q \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega} (\partial_{\nu} f)q \, d\Gamma. \quad (2.2.14)$$

Demonstração: Ver Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Soriano, [35].

□

Proposição 2.2.2

Sejam \mathcal{M}^n uma variedade Riemanniana orientável, $\Omega \subset \mathcal{M}$ aberto, limitado e conexo com bordo $\partial\Omega$ bem regular. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então $u|_{\Gamma} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Demonstração: Ver Brézis, [16].

□

Corolário 2.2.1

Sob as hipóteses da Proposição 2.2.2 é válida a seguinte identidade de Green generalizada:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla w, \nabla \psi \rangle \, d\mathcal{M} = \int_{\Omega} \Delta \psi \, w \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} \psi \, w \, d\Gamma,$$

para todo $w \in W^{1,1}(\Omega)$ e $\psi \in C^{\infty}(\mathcal{M})$.

Demonstração: A demonstração é baseada em dois argumentos: 1. Na Proposição 2.2.2, donde faz sentido falar em $w|_{\partial\Omega} \in L^1(\partial\Omega)$;

2. Na imersão contínua e densa $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$, onde $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{w|_{\overline{\Omega}}; w \in C_0^{\infty}(\mathcal{M})\}$.

□

Corolário 2.2.2

Sob as hipóteses da Proposição 2.2.2 é válida a seguinte identidade:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} X)w \, d\mathcal{M} = - \int_{\Omega} \langle X, \nabla w \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega} (\langle X, \nu \rangle)w \, d\Gamma, \quad (2.2.15)$$

para todo $w \in W^{1,1}(\Omega)$ e para todo X campo de vetores sobre $\overline{\Omega}$ de classe C^1 .



Demonstração: A argumentação é análoga a apresentada no Corolário 2.2.1. \square

Proposição 2.2.3

Seja $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana n -dimensional completa munida com uma métrica Riemanniana \mathbf{g} de classe C^∞ . Suponha que a curvatura seccional K é limitada superiormente em todo ponto de \mathcal{M} . As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se $K > 0$, então $d(x) = \frac{1}{2} \text{dist}^2(x, x_0)$ é uma função estritamente convexa em \mathcal{M} quando $\text{dist}(x, x_0) < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$, $\forall x_0 \in \mathcal{M}$.
- (ii) Se $K \leq 0$ e \mathcal{M} é simplesmente conexa, então $d(x) = \frac{1}{2} \text{dist}^2(x, x_0)$ é uma função estritamente convexa em \mathcal{M} .

Demonstração: Ver Triggiani e Xu, [114]. \square

Observação 2.2.3

É importante ressaltar alguns conceitos e notações a respeito de funções a valores complexos.

Seja $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana e $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função regular. Então temos que $\text{Re } u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\text{Im } u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, conseqüentemente podemos falar em $\nabla(\text{Re } u)$ and $\nabla(\text{Im } u)$, definidos intrinsecamente como em (2.2.2).

Seja X um campo de vetores complexo sobre \mathcal{M} , isto é, $X = Y + iZ$, onde Y e Z são campos de vetores reais. Denotaremos por

$$\langle \nabla u, X \rangle = \langle \nabla(\text{Re } u), Y \rangle_{\mathbf{g}} - \langle (\text{Im } u), Z \rangle_{\mathbf{g}} + i(\langle \nabla(\text{Re } u), Z \rangle_{\mathbf{g}} + \langle \nabla(\text{Im } u), Y \rangle_{\mathbf{g}})$$

Logo,

$$\langle \nabla u, \nabla \bar{u} \rangle = \langle \nabla(\text{Re } u), \nabla(\text{Re } u) \rangle_{\mathbf{g}} + \langle \nabla(\text{Im } u), \nabla(\text{Im } u) \rangle_{\mathbf{g}} = |\nabla u|^2.$$



2.3. Resultados Auxiliares

Proposição 2.3.1 (*Desigualdade de Young*)

Sejam $p, q \geq 1$ com $1/p + 1/q = 1$. Temos que

$$a \cdot b \leq \eta a^p + C_\eta b^q$$

de modo que $a, b, \eta > 0$ e $C_\eta := (\eta p)^{-p/q} q^{-1}$.

Proposição 2.3.2 (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*)

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, então

$$|x \cdot y| \leq |x||y|.$$

Proposição 2.3.3 (*Ponto de Lebesgue*)

Seja $v \in L^1(0, T)$. Dizemos que $s \in (0, T)$ é um ponto de Lebesgue de v , se para $h > 0$, $(s - h, s + h) \subset (0, T)$, então,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{s-h}^{s+h} v(\xi) d\xi = v(s).$$

Proposição 2.3.4 (*Fórmula Integral de Leibniz*)

Seja $f(x, \theta)$ uma função tal que $f_\theta(x, \theta)$ existe, e é contínua. Então,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x, \theta) d\theta \right) = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \partial_\theta f(x, \theta) d\theta + f(b(\theta), \theta) b'(\theta) - f(a(\theta), \theta) a'(\theta).$$

Corolário 2.3.1

Sejam E um espaço vetorial normado e F um subespaço vetorial de E . Se para toda forma $f \in E'$ tal que $\langle f, x \rangle = 0$, para todo $x \in F$ se tem $f \equiv 0$ (i.é. $\langle f, x \rangle = 0$ para todo $x \in E$), então F é denso em E (ou seja, $\overline{F} = E$).

Demonstração: Ver Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], corolário 1.29, página 31.

□

Definição 2.3.1

Seja X um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(X, X')$ sobre X é a topologia menos fina sobre X que torna contínuas todas as aplicações $f \in X'$.



Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de X a qual converge para x em X na topologia fraca $\sigma(X, X')$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

Proposição 2.3.5

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X , então:

- (i) $x_n \rightharpoonup x$ em X se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in X'$.
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ em X , então $x_n \rightharpoonup x$ em X .
- (iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em X , então $\|x_n\|_X$ é limitada e $\|x\|_X \leq \liminf \|x_n\|_X$.
- (iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em X e $f_n \rightarrow f$ em X' , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver Cavalcanti e Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], proposição 3.12, página 112.

□

Seja X um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : X' \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in X''$, $\forall x \in X$.

Definamos, agora, $J : X \rightarrow X''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 2.3.2

A topologia fraca $*$, também designada por $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina sobre X' que torna contínuas todas as aplicações J_x .

Proposição 2.3.6

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X' , então:

- (i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ fraco estrela em X' se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall x \in X$.
- (ii) Se $f_n \rightarrow f$ forte em X' , então $f_n \rightharpoonup f$ fraco em X' .
- (iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ fraco em X' , então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ fraco estrela em X' .

Demonstração: Ver Cavalcanti e Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], proposição 3.30, página 123.



□

Lema 2.3.1

Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X , então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $x \in X$, tal que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ fracamente em } X.$$

Demonstração: Consulte Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], teorema 3.63, página 153.

□

Lema 2.3.2

Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X' , então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $f \in X'$, tal que

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ fraco estrela em } X'.$$

Demonstração: Para uma prova, veja Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], corolário 3.60, página 152.

□

Teorema 2.3.1 (Teorema do Gráfico Fechado)

Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Se o gráfico de T é fechado em $E \times F$, então T é contínuo.

Demonstração: Consulte Cavalcanti e Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], teorema 2.26, página 77.

□

Corolário 2.3.2

Sejam M um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H e $f \in H$. Então, $u = P_M f$ se caracteriza por

$$\begin{cases} \text{Existe único } u \in M \text{ tal que} \\ (f - u, v) = 0, \forall v \in M. \end{cases}$$

Além disso, P_M é um operador linear.



Demonstração: Veja Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], corolário 4.9, página 169.

□

Proposição 2.3.7

Seja K um subconjunto convexo, fechado e não – vazio de um espaço de Hilbert H . Então,

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|, \forall f_1, f_2 \in H.$$

Em outras palavras, a projeção $P_K : H \rightarrow K$ é uniformemente contínua.

Demonstração: Veja Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], proposição 4.8, página 168.

□

Teorema 2.3.2 (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet)

Seja H um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \forall u \in H.$$

Além disso,

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}.$$

Demonstração: Ver Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Komornik [37], teorema 4.10, página 171.

□

Seja H um espaço de Hilbert. Uma forma bilinear $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é

1. *contínua* se existe uma constante C tal que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \forall u, v \in H \text{ e}$$

2. *coerciva* se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq K|v|^2, \forall v \in H.$$



Lema 2.3.3 (Lema de Lax – Milgram)

Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H'$ existe único $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração: Ver Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], corolário 4.15, página 181.

□

Teorema 2.3.3 (Teorema de Minty – Browder)

Seja E um espaço de Banach reflexivo. Considere $A : E \rightarrow E'$ uma aplicação não – linear contínua e coerciva tal que

$$\operatorname{Re}\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle_{E', E} > 0, \quad \forall v_1, v_2 \in E.$$

Então, para todo $f \in E'$, existe uma única solução $u \in E$ de modo que $Au = f$.

Demonstração: Ver Brézis, [18], teorema 5.16, página 145.

□

Teorema 2.3.4 (Ponto Fixo de Banach)

Sejam X um espaço métrico completo não – vazio e $S : X \rightarrow X$ uma contração, isto é,

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq kd(v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in X \text{ com } k < 1.$$

Então, S tem um único ponto fixo $u = Su$.

Demonstração: Veja Brézis, [18], Teorema 5.7, página 138.

□



Teorema 2.3.5 (Convergência Dominada de Lebesgue)

Se uma sequência $\{f_k\}$ de funções integráveis à Lebesgue em um conjunto Ω converge quase sempre em Ω para uma função f e, se $|f_k| \leq \psi$ quase sempre em $\Omega, \forall k \in \mathbb{N}$, para uma certa função $\psi \in L^1(\Omega)$, então a integral $\int_{\Omega} f dx$ existe e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_k dx = \int_{\Omega} f dx.$$

Demonstração: Ver Medeiros, [87], Teorema 2.17, página 49.

□

Proposição 2.3.8 (Desigualdade de Poincaré)

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Komornik, [37], proposição 6.22, página 441.

□

Proposição 2.3.9 (Lema de Gronwall)

Sejam $z \in L^\infty(0, T)$ e $\varphi \in L^1(0, T)$ tais que $z(x) \geq 0, \varphi(t) \geq 0$ e seja $c \geq 0$ uma constante. Se

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t z(s)\varphi(s)ds, \forall t \in [0, T],$$

então

$$\varphi(t) \leq c e^{\int_0^t z(s)ds}, \forall t \in [0, T].$$

Demonstração: Ver Gomes, [57], lema 8.22, página 83.

□

**Teorema 2.3.6 (Desigualdade de Gagliardo – Nirenberg)**

Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e considere j, m dois inteiros tais que $0 \leq j < m$. Se

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N} \right) + \frac{(1-a)}{q}$$

para algum $a \in [j/m, 1]$ ($a < 1$ se $r > 1$ e $m - j - \frac{N}{r} = 0$), então existe uma constante $C(N, m, j, p, q, r)$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \right)^a \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{1-a}.$$

O resultado ainda é válido quando Ω é um domínio com fronteira regular (aqui usa-se operador prolongamento), isto é,

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,r}(\Omega)}^a \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

para todo $u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, contanto que $q, r < \infty$ ou $q = \infty$ e $N < m r < \infty$.

Demonstração: Ver Brézis – Cazenave [19], Teorema A. 3. 42, página 193. \square

Teorema 2.3.7 (Teorema da Regularidade Elíptica)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω . Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$ então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Em particular, se $m > \frac{n}{2}$ temos $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, temos $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Ver Brézis, [18], Teorema 9.25, página 298. \square

**Teorema 2.3.8**

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira Γ regular. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \partial_\nu u = h & \text{sobre } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Considere $f \in L^2(\Omega)$ e $h \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. Então o problema (2.3.1) possui uma única solução $u \in H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, onde $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$. Além disso,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}) \quad (2.3.2)$$

e, a aplicação linear

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \mapsto u \in H^2(\Omega),$$

sendo u solução de (2.3.1) é contínua.

Demonstração: Veja Lopes, [82], Lema 1.7.1. e Proposição 1.7.2, páginas 22 – 24.

□

Teorema 2.3.9 (Teorema da compacidade de Aubin-Lions)

Sejam B_0 , B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \xrightarrow{comp} B \xrightarrow{cont} B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u_t \in L^{p_1}(0, T; B_1)\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$. Consideremos W munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u_t\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)},$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração: Ver Lions [79], lema 5.2 na página 57.

□

**Proposição 2.3.10 (Lema de Lions)**

Seja (u_ν) uma sucessão de funções pertencentes à $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se

(i) $u_\nu \rightarrow u$ quase sempre em Q ;

(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C, \forall \nu \in \mathbb{N}$;

então $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração: Veja Lions [79], lema 1.3 na página 12. □

Lema 2.3.4

Sejam H e V espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0, T; H)$ e $u' \in L^1(0, T; V)$ então $u \in C^0([0, T]; V)$.

Demonstração: Ver Ravier e Thomas, [100]. □

Teorema 2.3.10 (Derivação de um Produto)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e consideremos $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com $1 \leq p \leq +\infty$. Então, $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Demonstração: Cavalcanti e Domingos Cavalcanti, [30], proposição 2, página 112. □

Considere $Q = (0, T) \times \Omega$ um aberto do \mathbb{R}^{n+1} , $(t, x) \in Q$ tal que $t \in (0, T)$ e $x \in \Omega$, a função $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Diz-se que a função f satisfaz as condições de Carathéodory se

1. $f(x, t)$ é mensurável em t para cada x fixado;
2. $f(x, t)$ é contínua em x para todo t fixo; e
3. para todo compacto $\mathcal{K} \subset Q$ existe uma função real integrável $m_{\mathcal{K}}(t)$, de modo que $\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_{\mathcal{K}}(t)$, para todo par $(t, x) \in \mathcal{K}$.

**Teorema 2.3.11 (Teorema de Carathéodory)**

Seja $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory. Então o problema (2.3.3) tem uma solução $x(t)$ em algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, com $\beta > 0$.

Demonstração: Ver Coddington e Levinson, [46].

□

Corolário 2.3.3

Sejam $Q = [0, T] \times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, onde $b > 0$ e $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (2.3.3) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I , onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0, T]$.

Agora, recordemos o conhecido Teorema de Holmgren que pode ser encontrado por exemplo em Tréves, [112], Teorema 21.2, página 183:

Teorema 2.3.12 (Teorema de Holmgren)

Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes, \mathbb{R}^n . Seja u uma solução de $Pu = 0$ em Q_1 onde Q_1 é um aberto de \mathbb{R}^n . Suponha que $u = 0$ em Q_2 onde Q_2 é um subconjunto aberto de Q_1 . Então, $u = 0$ em Q_3 , onde Q_3 é um aberto de Q_1 que contém Q_2 e de tal modo que qualquer hiperplano característico do operador P que intersecta Q_3 também intersecta Q_1 .

No caso em que $P = i \partial_t + \Delta_x$ é um operador diferencial em \mathbb{R}^{n+1} e sua parte principal é $P_p = \Delta_x$. Um hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} é característico se seu vetor normal $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é um zero de P_p , isto é, de $P_p(t, x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = |x|^2$.

Assim os vetores normais são da forma $(\pm 1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e os e os hiperplanos característicos são definidos por

$$\Pi_{t_0} := \{(t_0, x); x \in \mathbb{R}^n\}, \text{ para cada } t_0 \in \mathbb{R}.$$

Proposição 2.3.11

Seja V um espaço de Banach denso e continuamente imerso no espaço de Hilbert H . Por meio da identificação $H \cong H'$ de modo que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, temos que o espaço de Banach $W_p(0, T) := \{u \in L^p(0, T; V); u \in L^{p'}(0, T; V')\}$ está contido em $C([0, T]; H)$.

Demonstração: Veja Showalter, [105], Proposição 1.2, página 106.

□



2.4. Semigrupos Lineares

Seja X um espaço de Banach e X' o seu espaço dual.

Definição 2.4.1

Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X , se:

- (i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;
- (ii) $S(t + s) = S(t) \circ S(s)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}_+$. Diz-se ainda que o semigrupo S é de classe C_0 se
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0$, para todo $x \in X$.

Proposição 2.4.1

Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S .

- (i) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, para todo $t \geq 0$, $S(t)x$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \quad (2.4.1)$$

- (ii) Se $x \in D(A)$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\xi)x d\xi = \int_s^t S(\xi)Ax d\xi, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (2.4.2)$$

- (iii) Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\xi)x d\xi \in D(A)$ e

$$A \int_0^t S(\xi)x d\xi = S(t)x - x. \quad (2.4.3)$$

Demonstração: Ver Pazy, [99], Teorema 2.4, página 4.

□

A seguir, temos a definição de operador anti - adjunto.

Definição 2.4.2

Dizemos que um operador A é anti - adjunto (Skew - adjoint) se $A^* = -A$.

Proposição 2.4.2

O operador A é anti - adjunto se, e somente se, A e $-A$ são maximais monótonos.



Demonstração: Consulte Brézis, [17], proposição 1, página 13.

□

Teorema 2.4.1 (Teorema de Lumer – Phillips)

Se $A \in G(1, 0)$, isto é, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de contrações, então:

(i) A é dissipativo relativamente à qualquer aplicação dualidade.

(ii) $\text{Im}(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.

Reciprocamente, se:

(iii) $D(A)$ é denso em X .

(iv) A é dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade.

(v) $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$.

Então $A \in G(1, 0)$.

Demonstração: Ver Pazy, [99], Teorema 4.3, página 14.

□

Lema 2.4.1

Considere a equação de evolução

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} + Aw + L(t, w) = 0, \\ w(0) = w_0 \end{cases} \quad (2.4.4)$$

sobre o espaço complexo $L^2(\Omega)$, onde

(i) $A := -i \Delta : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$;

(ii) $D(A) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$;

(iii) $L(t, w) = F(v + w)(t)$, $F : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é Lipschitz;

(iv) $v \in C([0, T]; H^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$.

Além disso, seja $w_0 \in D(A)$. Então, o problema (2.4.4) possui uma única solução w que pertence à classe $C([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$.

Demonstração: Veja Özsarı, Kalantarov e Lasiecka, [98], Lema 1, página 1847.

□

A seguir, veremos a definição de grupos de classe C_0 .

**Definição 2.4.3**

Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é um grupo de operadores lineares limitados de X , se:

- (i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;
- (ii) $S(t + s) = S(t) \circ S(s)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}_+$. Diz-se ainda que o grupo S é de classe C_0 se
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0$, para todo $x \in X$.

Definição 2.4.4 (Grupo Unitário)

Um grupo S de operadores lineares limitados de um espaço de Hilbert H é dito grupo unitário se $S(t)^* = S(t)^{-1}$, para todo $t \geq 0$.

Teorema 2.4.2 (Stone)

Um operador linear A , de um espaço de Hilbert H é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 se, e somente se, A é anti-adjunto.

Demonstração: Veja Gomes, [56], Teorema 5.8, página 55.

□

2.5. Semigrupos Não Lineares

Seja X um espaço de Banach e X' o seu espaço dual. Denote também por $F : X \rightarrow X'$ a aplicação dualidade de X .

Diz-se operador com domínio em um conjunto X e imagem em um conjunto Y , a toda aplicação $A : X \rightarrow 2^Y$, onde 2^Y representa o conjunto das partes de Y . Diz-se que o gráfico de A é o conjunto de pontos $(x, y) \in X \times Y$ tais que $y \in Ax$, para algum $x \in X$.

Um operador $A : X \rightarrow X$ é dito dissipativo se

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A, \exists f \in F(x_1 - x_2); (y_1 - y_2, f) \leq 0.$$

Seja $\mathcal{C} \subset X$. Diz-se que uma função S de $[0, \infty)$ na família das aplicações de \mathcal{C} em \mathcal{C} é um semigrupo sobre \mathcal{C} se:

1. $S(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ;



2. $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupo).

Diz-se que o semigrupo S é contínuo se

3. $\lim_{t \rightarrow 0_+} S(t)x = x$, $\forall x \in \mathcal{C}$.

E diz-se que S contínuo é do tipo ω , com $\omega \in \mathbb{R}$, se

4. $\|S(t)x - S(t)y\| \leq e^{\omega t} \|x - y\|$.

Quando $\omega \leq 0$, diz-se que S é um semigrupo de contrações.

Estudaremos nessa seção os operadores monótonos que são uma generalização das funções monótonas, conforme apresentado em Gomes, [57].

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona não decrescente, ou seja, se

$$x, y \in D(f) \text{ e } x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

ou equivalentemente,

$$(x - y)(f(x) - f(y)) \geq 0; \forall x, y \in D(f).$$

Seja H um espaço de Hilbert. Um operador linear T de H é dito positivo se

$$(x, Tx)_H \geq 0; \forall x \in H,$$

e um operador A de H é dito monótono se

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)_H \geq 0; \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A.$$

Assim a definição de operador monótono em um espaço de Hilbert é uma generalização natural da definição de função monótona crescente. Em geral temos:

Definição 2.5.1

Seja \mathcal{X} um espaço vetorial topológico real, \mathcal{X}' o seu dual e $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ um operador. Dizemos que A é monótono se

$$\langle x - y, x' - y' \rangle \geq 0, \forall (x, x'), (y, y') \in A.$$

Observamos que se A é um operador unívoco e linear de um espaço de Hilbert então A é monótono se, e somente se, A é positivo.

Para generalizar ainda mais a noção de função monótona não decrescente, observemos que se H é um espaço de Hilbert, então seu dual H' pode ser a ele identificado



e, assim, os operadores monótonos² de H podem ser considerados como operadores $A : H \rightarrow H'$. Sendo assim, o produto interno pode ser encarado como a dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H', H}$. Neste caso a monotonia é caracterizada pela norma, como vemos a seguir.

Proposição 2.5.1

A é um operador monótono de H se, e somente se,

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\|,$$

para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ e para todo $\lambda > 0$.

Demonstração: Ver Brézis, [16], proposição 2.1. □

Dizemos que um operador monótono A é maximal monótono se não admitir extensão monótona própria, em outras palavras, se ele não está propriamente contido em algum outro subconjunto monótono.

Definição 2.5.2

Sejam H um espaço de Hilbert real e $A : H \rightarrow H$ um operador. Dizemos que A é um operador monótono de H se

$$(x - y, Ax - Ay)_H \geq 0, \quad \forall x, y \in D(A).$$

Além disso, A é dito maximal monótono se A é monótono e $Im(I + A) = H$.

Definição 2.5.3

Sejam H um espaço de Hilbert real e $A : H \rightarrow H$ um operador. Dizemos que A é um operador dissipativo de H se $-A$ é monótono. Além disso, A é dito m -dissipativo se A é dissipativo e $Im(I - A) = H$.

Quando A é linear, conhecemos o teorema a seguir como Teorema de Hille – Yosida (veja por exemplo, Gomes [56], Teorema 4.4, página 32).

²Em alguns livros, o termo monótono é substituído por acretivo.



Teorema 2.5.1

Seja A um operador maximal monótono de H . Para todo $u_0 \in D(A)$, existe uma única função $u(t) : [0, \infty[\rightarrow H$, tal que

(i) $u(t) \in D(A)$, $\forall t > 0$;

(ii) $u(t)$ é lipschitziana em $[0, \infty[$, isto é, $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, \infty, H)$;

(iii) $u(t)$ satisfaz o seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Demonstração: Ver Brézis, [16], teorema 3.1, página 54.

□

Para todo $t \geq 0$ definamos

$$S(t)x := u_x(t),$$

e denotemos novamente por $S(t)$ a extensão de $S(t)$ sobre $\overline{D(A)}$. Pelo teorema anterior, verifica-se que $S(t)$ é um semigrupo de contrações não-lineares sobre $\overline{D(A)}$. Portanto, $S(t)$ é o semigrupo gerado por $-A$.

Considerando o Teorema (2.5.1), podemos definir solução forte. Seja X um espaço de Banach e $A : X \rightarrow X$. Diremos que uma função $u(t) : [0, \infty[\rightarrow X$ é uma solução forte do problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \in D(A) \end{cases}$$

se satisfizer:

(i) $u(t) \in D(A)$ para $t \in (0, \infty)$;

(ii) $u(t)$ é lipschitziana em $[0, \infty)$;

(iii) $-\frac{du}{dt} \in Au$ quase sempre, para $t \in (0, \infty)$.

Necessitaremos ainda do seguinte conceito:

**Definição 2.5.4**

Seja H um espaço de Hilbert real e $A : H \rightarrow H$ um operador tal que $D(A) = H$; Dizemos que A é hemicontínuo em H se

$$\lim_{t \rightarrow 0} (A(u + tv), w)_H = (Au, v)_H \quad (2.5.1)$$

Teorema 2.5.2

Seja X reflexivo, e seja B um operador monótono, hemicontínuo e limitado de X em X^* . Seja A um operador maximal monótono em $X \times X^*$. Então $A + B$ é maximal monótono.

Demonstração: Ver Barbu, [8], capítulo 2, corolário 1.1, página 39. □

Em particular, segue que qualquer operador monótono, hemicontínuo, e ainda, limitado de X em X^* é maximal monótono em $X \times X^*$.

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t(t) = Tu(t) + Su(t) & t \in (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.5.2)$$

em um espaço de Banach X . Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.5.3

Sejam H um espaço de Hilbert real, $T : H \rightarrow H$ um operador m -dissipativo e seja $S : H \rightarrow H$ contínuo e dissipativo tal que $D(S) = H$. Então para cada $u_0 \in \overline{D(T)}$ existe uma única função $u : [0, \infty) \rightarrow H$ contínua do problema (2.5.2).

Demonstração: Ver Barbu [8], teorema 3.1, página 152. □

A seguir, um resultado crucial para a obtenção de soluções fracas do problema (1.3.1).

Lema 2.5.1

Seja Ω um domínio limitado ou não-limitado em \mathbb{R}^N com fronteira compacta C^2 denotada por Γ (incluindo o caso $\Omega = \mathbb{R}^N$). Considere o operador não-linear \mathcal{B} em $L^2(\Omega)$ definido por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{B}) &= \{y \in L^2(\Omega); |y|^p y \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{B}y &= |y|^p y, \quad \forall y \in D(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Então, \mathcal{B} é m -acretivo.



Demonstração: Veja Okazawa e Yokota, [92], Lema 3.1, página 258.

□

2.6. Teoria de Operadores Monótonos

Definição 2.6.1

Seja X um espaço topológico e $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ uma função. Dizemos que uma função é *semi - contínua inferiormente (s.c.i.)* se

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in X.$$

Definição 2.6.2

Sejam X um conjunto e $\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função. Dizemos *domínio efetivo* de f , o conjunto $D_e(f) := \{x \in X; f(x) < +\infty\}$. Diz - se que f é uma função *própria* se $D_e(f) \neq \emptyset$.

Definição 2.6.3

Considere X um espaço de Banach e $\psi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função própria, convexa e *semi - contínua inferiormente*. A *subdiferencial* de ψ em $y \in D_e(f)$, denotada por $\partial\psi(y)$ é definida como o conjunto de todos $g \in X$ tal que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \text{Re}(g, v - u)_X, \quad \forall v \in X. \quad (2.6.1)$$

Definição 2.6.4

Seja X um espaço vetorial e A um subconjunto convexo de X . Dizemos que $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é uma função *convexa* se para cada $t \in [0, 1]$, temos

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y), \quad \forall x, y \in A,$$

desde que o segundo membro tenha sentido.

**Definição 2.6.5**

Sejam X um espaço de Banach, o operador $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para todo $\lambda \neq 0$, o operador resolvente \mathcal{J}_λ é definido como

$$\mathcal{J}_\lambda := (I + \lambda \mathcal{A})^{-1}.$$

A aproximação de Yosida \mathcal{A}_λ , é definida por

$$\mathcal{A}_\lambda := \frac{1}{\lambda} (I - \mathcal{J}_\lambda).$$

Proposição 2.6.1

Seja H um espaço de Hilbert e A um operador m – acretivo. Então, \mathcal{J}_λ é uma contração e \mathcal{A}_λ é Lipschitz contínua de constante $2/\lambda$.

Demonstração: Veja Gomes, [57], Proposição 3.9, página 121.

□

Proposição 2.6.2 (Moreau)

Seja $\varphi : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função própria, convexa e semi – contínua inferiormente. Considere ainda, $\mathcal{A} = \partial \varphi$. Definamos para cada $\lambda > 0$

$$\varphi_\lambda(x) \equiv \min \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|_H^2 + \varphi(y); y \in H \right\}, x \in H.$$

Então,

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} \|\mathcal{A}_\lambda\|_H^2 + \varphi(\mathcal{J}_\lambda y).$$

Demonstração: Consulte Showalter, [105], Proposição 1.8, página 162.

□

**Lema 2.6.1**

Seja $\varphi : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função própria, convexa e semi – contínua inferiormente sobre o espaço de Hilbert H com subgradiente $\partial\varphi$. Se $u, \partial_t u \in L^2(0, T; H)$ e existe uma função $g \in L^2(0, T; H)$ com $g \in \partial\varphi(u)$ quase sempre sobre $[0, T]$, então a função $\varphi \circ u$ é absolutamente contínua sobre $[0, T]$ e

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \operatorname{Re} \left(h(t), \frac{du}{dt}(t) \right) \text{ quase sempre em } t \in [0, T]$$

para qualquer função $h \in \partial\varphi(u)$ quase sempre sobre $[0, T]$.

Demonstração: Veja Showalter, [105], Lema 4.3, página 186. □

Considere agora X um espaço de Banach. Para qualquer subconjunto não – vazio C de X , definamos

$$|C| \equiv \inf\{\|x\|; x \in C\}.$$

Proposição 2.6.3

Seja \mathcal{A} um operador acretivo e $\lambda > 0$. Então,

$$\|\mathcal{A}_\lambda x\| \leq |\mathcal{A}x|, \forall x \in D(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Im}(I + \lambda \mathcal{A}).$$

Demonstração: Uma prova deste resultado se encontra em Showalter, [105], Proposição 7.1, item (d), página 211. □

2.7. Os Espaços $H_D^s(\Omega)$

Denotemos, $H_D^s(\Omega)$, para $s \geq 0$, o domínio de $(1 - \Delta)^{s/2}$, onde Δ representa o Laplaciano Dirichlet sobre Ω . Observemos, também que $H_D^s(\Omega) = H^s(\Omega)$ o espaço usual de Sobolev para $s \in [0, 1]$. O espaço $H_D^{-s}(\Omega)$ é o dual de $H_D^s(\Omega)$.

É notório que

$$H_D^1(\Omega) = H_0^1(\Omega).$$

Além disso, temos a seguinte identidade:

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} = \|(1 - \Delta)^{1/2}y\|_{L^2(\Omega)}, \forall y \in H_0^1(\Omega). \quad (2.7.1)$$

Além disso, no que diz respeito ao operador $(1 - \Delta)^{-s/2}$, temos também a útil



identidade :

$$\|y\|_{H^{-s}(\Omega)} = \|(1 - \Delta)^{-s/2}y\|_{L^2(\Omega)}, \forall y \in H^{-s}(\Omega), \forall s \in [0, 1]. \quad (2.7.2)$$

Proposição 2.7.1

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ um domínio regular. Então, as seguintes imersões contínuas são satisfeitas.

$$(i) \ H_D^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \frac{1}{2} - \frac{1}{p} = \frac{s}{d}, s \in [0, 1].$$

$$(ii) \ H_D^{s+1}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega), \frac{1}{2} - \frac{1}{p} = \frac{s}{d}, s \in [0, 1].$$

$$(iii) \ H_D^{s+1/p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega), \frac{1}{p} - \frac{d}{p} = \frac{d}{2}, p \geq 2, s \in [0, 1].$$

Demonstração: Veja proposição 2.1, página 299 em Burq, Gérard and Tzvetkov [24].

□

2.8. Operadores Pseudo – Diferenciais

No capítulo 4, focaremos nossa atenção no operador pseudo – diferencial R_0 e para tanto, é oportuno apresentar alguns fatos sobre este assunto relacionados com nossos objetivos. A teoria de operadores pseudo – diferenciais iniciou – se por volta de 1964 e tal teoria, tornou – se uma ferramenta essencial na teoria moderna de equações diferenciais. Para um tratamento completo do assunto, sugerimos que o leitor consulte por exemplo, Folland [51], Hörmander [59], Taylor [110] e Trèves [111]. Nesta seção, adotaremos as seguintes convenções:

$$D = \frac{1}{2\pi i} \partial, \text{ i. é, } D_j = \frac{1}{2\pi i} \partial_j \text{ e } D^\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha.$$

A conveniência para tanto reside na fórmula da Transformada de Fourier $(\widehat{D^\alpha u})(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)$. Operadores pseudo – diferenciais são a extensão de operadores diferenciais. Qualquer operador linear diferencial com coeficientes C^∞ sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$



pode ser escrito na forma

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha, a_\alpha \in C^\infty(\Omega). \quad (2.8.1)$$

Se nós substituirmos D por $\xi \in \mathbb{R}$, obtemos o então – chamado símbolo do operador diferencial

$$\sigma_L(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (2.8.2)$$

Este pode ser usado para representar o operador L como uma integral de Fourier, a saber, aplicando o Teorema de inversão de Fourier para a fórmula $(\widehat{D^\alpha u})(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$, $u \in C_c^\infty(\Omega)$, obtemos

$$(Lu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} \sigma_L(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \quad (2.8.3)$$

onde $\xi(x)$ é qualquer função no espaço de Schwartz \mathcal{S} ao qual é o conjunto de todas as funções C^∞ , que juntamente com suas derivadas decrescem rapidamente no infinito e $\hat{u}(\xi)$ é a transformada de Fourier de u definida por

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) dx.$$

Vamos reformular (2.8.3) da seguinte forma: operadores diferenciais com coeficientes C^∞ sobre Ω são operadores da forma

$$Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, u \in C_c^\infty(\Omega), \quad (2.8.4)$$

onde $p(x, \xi)$ é um polinômio em ξ com coeficientes que são funções C^∞ de $x \in \Omega$.

A ideia da teoria operadores pseudo – diferenciais, então, é considerar operadores da forma (2.8.4) onde p é um tipo mais geral de função. Na verdade, se considerarmos funções mais gerais ou distribuições p em (2.8.4), obtém – se uma enorme família de operadores que é muito mais diversa e que dá suporte a uma interessante teoria. Temos a seguinte definição:

**Definição 2.8.1**

Suponha Ω um aberto em \mathbb{R}^n (não necessariamente limitado) e m um número real. Definamos o conjunto de símbolos de ordem m , denotado por S^m é o espaço de funções $p(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ tal que para qualquer dois multi-índices α e β e todo compacto $K \subset \Omega$, existe uma constante positiva $C_{\alpha, \beta, K}$, tal que

$$\sup_{x \in K} |(D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi))| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}. \quad (2.8.5)$$

Um operador pseudo-diferencial ou (OΨD para simplificar) de ordem m é uma aplicação linear de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ da forma (2.8.4) onde p é um símbolo de ordem m sobre Ω . Denotaremos de forma geral a aplicação em (2.8.4) por $p(x, D)$, isto é,

$$p(x, D)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (2.8.6)$$

e denotamos o conjunto dos operadores pseudo-diferenciais de ordem m sobre Ω por

$$\Psi(\Omega) = \{p(x, D); p \in S^m(\Omega)\}.$$

Observação 2.8.1

Nossa colocação do fator 2π em (2.8.6) vai de encontro com a convenção apresentada no início. É muito mais comum na literatura sobre operadores pseudo-diferenciais definir a transformada de Fourier sem a quantidade 2π no expoente e com o intuito de modificar (2.8.6) pela omissão do valor 2π do expoente, inserindo um fator $(2\pi)^{-n}$ na frente da integral. Em particular, isto implica definir D como $(1/i)\partial$ ao invés de $(1/2\pi i)\partial$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos:

Exemplo 1.

Se $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$, então $p \in S^k(\Omega)$. Em outras palavras, todo operador diferencial com coeficientes C^∞ sobre Ω é um OΨD sobre Ω .

Exemplo 2.

Dizemos que uma função $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ é homogênea de grau m para valores de ξ grandes se existe $c \geq 0$ tal que $p(x, t\xi) = t^m p(x, \xi)$ sempre quando $t \geq 1$ e $|\xi| \geq c$. Se p é homogênea de grau m para valores de ξ grandes, então $D_x^\beta D_\xi^\alpha p$ é homogênea de grau $m - |\alpha|$ para ξ grande, e segue que $p \in S^m(\Omega)$. De modo geral, se $p = \sum_{j=1}^J p_j$, onde p_j é homogênea de grau m_j para ξ grande, então, $p \in S^m(\Omega)$ de modo que $m = \max_{1 \leq j \leq J} m_j$.



Exemplo 3.

Seja $p(x, \xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}$. Então, $p \in S^s(\mathbb{R}^n)$. O operador $(\widehat{\Lambda^s f}) = (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi)$ desempenha um papel essencial na teoria de espaços de Sobolev, pertence à $\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Se $p \in S^{m_1}(\Omega)$ e $q \in S^{m_2}(\Omega)$, é evidente que $p+q \in S^{\max\{m_1, m_2\}}(\Omega)$ e um simples cálculo com a regra do produto nos mostra que $pq \in S^{m_1+m_2}(\Omega)$. Além disso, se $m_1 < m_2$, claramente temos que $S^{m_1}(\Omega) \subset S^{m_2}(\Omega)$.

Nesta teoria, é possível relaxar a hipótese que u seja regular e com suporte compacto. Para tratar completamente desta questão, consulte por exemplo Folland [51].

Observação 2.8.2

Existem outras classes de símbolos mais gerais. Por exemplos, as classes de Hörmander $S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, de modo que são definidos como $S^m(\Omega)$ exceto que a condição (2.8.5) é substituída por

$$\sup_{x \in K} |(D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi))| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

Disto, temos que $S^m(\Omega) = S_{1,0}^m(\Omega)$. O leitor pode encontrar essa caracterização em Hörmander [59].

Com respeito à composição de OΨD's, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.8.1

Sejam $p_1 \in S^{m_1}(\Omega)$ e $p_2 \in S^{m_2}(\Omega)$. Então, existe algum símbolo $q \in S^{m_1+m_2}(\Omega)$ tal que

$$q(x, D) = p_1(x, D) \circ p_2(x, D).$$

Demonstração: Veja Ruzhansky e Turunen, [104], Teorema 2.5.1, página 271. □

Entre todos os operadores pseudo – diferenciais, existe uma classe de operadores que costumamos lidar com uma grande variedade de aplicações e particularmente fácil trabalhar com estes. Eles são os chamados operadores elípticos.

Definição 2.8.2

Um símbolo $p \in S^m(\Omega)$ ou seu correspondente operador $p(x, D) \in \Psi^m(\Omega)$ é dito elíptico, se para cada compacto $A \subset \Omega$ existem constantes positivas C_A e c_A tais que

$$|p(x, D)| \geq c_A |\xi|^m, \text{ para } x \in A \text{ e } |\xi| \geq C_A.$$

Se L é um operador diferencial sobre Ω , uma parametriz à esquerda (respect. à direita) de L é geralmente definido como um operador (não necessariamente um



OΨD) definido sobre algum espaço conveniente de funções ou distribuições sobre Ω , tal que $TL - I$ (respect. $LT - I$) é um operador regular. Em nosso contexto, definamos a parametriz para um OΨD $P \in \Psi^\infty(\Omega)$, um OΨD Q devidamente com suporte $Q \in \Psi^\infty(\Omega)$ tal que $PQ - I \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$ e $QP - I \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$, que é a inversa aproximada.

Teorema 2.8.2

Suponha que $P \in \Psi^m(\Omega)$ é elíptico. Então, P possui uma parametriz $Q \in \Psi^{-m}(\Omega)$.

Demonstração: Veja Folland, [51], Teorema 8.42, página 298.



Como mencionamos anteriormente, os operadores pseudo – diferenciais são extensão dos operadores diferenciais. Assim, espera-se que eles tenham propriedades de mapeamento semelhantes aos operadores diferenciais entre os espaços de Sobolev. Isto é geralmente verdadeiro. Na verdade, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.8.3

Seja $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Então, o operador pseudo – diferencial $p(x, D)$ é um operador contínuo de $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Veja Hörmander [59], teorema 18.1.13, página 76.



A próxima observação é plausível no que concerne o estudo do problema de Schrödinger no capítulo 4 em um domínio exterior.

Observação 2.8.3

De acordo com Adams [1], página 84, o clássico teorema de prolongamento para um conjunto aberto limitado Ω pode ser usado para o caso quando Ω é um domínio exterior, uma vez que sua fronteira é limitada e suave. Essa construção requer o uso de partição subordinada da unidade à cobertura aberta $\partial\Omega$ escolhido de tal forma que as funções na partição tem derivadas uniformemente limitadas.

Uma das principais aplicações dos OΨD's é em fazer uma análise detalhada de singularidades de funções e distribuições, donde consideramos não somente os lugares onde a distribuição é singular, mas as direções nas quais tal distribuição é singular. Por exemplo, $f(x, y) = |y|$ é perfeitamente regular na direção x , mas não é C^1 na direção y sobre a reta $y = 0$. A ideia de examinar coisas localmente ambas na posição espaço e na direção de espaço recebe o nome de Análise microlocal . A seguir, daremos



uma noção introdutória de uma técnica da análise microlocal, a noção de frente de onda de uma distribuição.

Observação 2.8.4

Grosseiramente falando, o conjunto frente de onda de uma distribuição u é o conjunto de todos os (x, ξ) tal que u deixa de ser suave em x na direção ξ . Para ser mais preciso, suponha por um momento que u tem suporte compacto, então \hat{u} é uma função regular. Consideramos a afirmação “ u é regular na direção ξ_0 ,” de modo que $0 \neq \xi_0 \in \mathbb{R}^n$, significa que $\hat{u}(t\xi)$ é rapidamente decrescente quando $t \rightarrow +\infty$ para todo ξ em alguma vizinhança de ξ_0 . Para uma distribuição u qualquer, então, a afirmação “ u é regular (smooth) na direção ξ_0 ,” significa que para algum $\phi \in C_c^\infty$ com $\phi = 1$ próximo de x_0 , ϕu é regular na direção ξ_0 . O Teorema 2.8.6 caracterizará tal fato.

Antes de definir matematicamente o conjunto frente de onda, precisamos de algumas definições:

Definição 2.8.3

Um subconjunto U de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é chamado cônico se $t\xi \in U$ para todo $t > 0$ sempre que $(x, \xi) \in V$, e um subconjunto V de $T^0\Omega$ (aqui, $T^0\Omega$ é o fibrado cotangente de Ω) é chamada cônica se $(x, t\xi) \in V$ para todo t não – negativo sempre que $(x, \xi) \in V$.

Definição 2.8.4

Um $O\Psi D$ $P = p(x, D) \in \Psi^m(\Omega)$ é chamado elíptico de ordem m em $(x_0, \xi_0) \in T^0\Omega$ se existem constantes positivas c e C e uma vizinhança cônica V de (x_0, ξ_0) tal que

$$|p(x, \xi)| \geq c |\xi|^m \text{ para todo } (x, \xi) \in V \text{ com } |\xi| \geq C.$$

Definição 2.8.5

A variedade característica de P , denotada por $\text{char } P$ é o complementar do conjunto sobre o qual P é elíptico:

$$\text{char } P = \{(x, \xi) \in T^0\Omega : P \text{ não é elíptico em } (x, \xi)\}.$$

Por fim, apresentemos a definição do conjunto frente de onda:

Definição 2.8.6

Definamos o conjunto frente de onda de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como

$$WF(u) = \bigcap \{\text{char } P : P \in \Psi^0(\Omega) \text{ e } Pu \in C^\infty\}.$$



A intuição por trás disto é uma versão microlocal do teorema de regularidade elíptica ao qual será enunciado no Teorema 2.8.5: se P é elíptico em (x_0, ξ_0) e Pu é regular, então u deve ser regular em (x_0, ξ_0) , então, $WF(u)$ consiste dos pontos x_0 e direções ξ_0 onde u deixa de ser C^∞ .

Teorema 2.8.4

Seja $\pi : T^0\Omega \rightarrow \Omega$ a projeção definida por $\pi(x, \xi) = x$. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então, $\pi [WF(u)] = \text{sing supp } u$, onde sing supp , chamado de suporte singular de u , é o conjunto dos pontos ao qual u não é C^∞ .

Demonstração: Consulte Folland, [51], corolário 8.55, página 307. □

Agora, nós obtemos um refinamento microlocal do teorema de regularidade C^∞ para operadores elípticos.

Teorema 2.8.5

Se $P \in \Psi^m(\Omega)$ é elíptico, então, $WF(Pu) = WF(u)$ para qualquer $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração: Veja Folland, [51], corolário 8.55, página 308. □

Teorema 2.8.6

Suponha que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ se, e somente se, existe $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi(x_0) = 1$ e uma vizinhança cônica V de ξ_0 em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$\sup_{\xi \in V} (1 + |\xi|)^M |\widehat{(\phi u)}(\xi)| < \infty, \text{ para todo } M > 0.$$

2.9. Estimativas de Strichartz

Inicialmente, recordemos alguns fatos que serão úteis ao estudar as estimativas de Strichartz.

Considere o problema

$$\begin{cases} \partial_t u = i \Delta u, & x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.9.1}$$



A solução do problema (2.9.1) é da forma $u(x, t) = e^{it\Delta} u_0$. A seguir, descreveremos algumas propriedades da família de operadores $e^{it\Delta}$.

Proposição 2.9.1

Com respeito família de operadores $e^{it\Delta}$, temos as seguintes afirmações:

1. Para todo $t \in \mathbb{R}$, o operador $e^{it\Delta} : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ é uma isometria, o qual implica que

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

2. $e^{it\Delta} e^{it'\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$ com $(e^{it\Delta})^{-1} = e^{-it\Delta} = ((e^{it\Delta}))^*$.

3. $e^{i0\Delta} = 1$.

Demonstração: Veja Linares e Ponce, [78], Proposição 4.3, página 61. □

Graças a precedente proposição, temos que $e^{it\Delta}$ é um grupo unitário. Pelo Teorema de Stone, Teorema 2.4.2, página 67, com respeito ao problema (2.9.1), o operador $A = \Delta$ com $D(A) = H^2(\mathbb{R}^N)$ é o gerador infinitesimal do grupo unitário $e^{it\Delta}$.

Definição 2.9.1

O operador $e^{it\Delta}$ com respeito ao problema (2.9.1) é chamado fluxo linear.

Lema 2.9.1 (Conservação do Fluxo de Schrödinger)

Temos que

$$\|e^{it\Delta} f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)},$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração: De fato, conforme Linares e Ponce, [78], recordemos que $e^{it\Delta}$ é um grupo unitário sobre os espaços de Sobolev³ $H^s(\mathbb{R}^N)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Deste modo, temos que

$$\|e^{it\Delta} f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\Lambda^s(e^{it\Delta} f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|e^{it\Delta}(\Lambda^s f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)},$$

o que prova a afirmação. □

³Note que $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, onde $\Lambda^s f(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

**Observação 2.9.1**

O lema acima continua válido se \mathbb{R}^N é substituído por um domínio exterior ou um domínio limitado, ambos com fronteira regular. Para tanto, veja os trabalhos de Anton, [6] e Özsarı, [97].

Na sequência, temos a definição de par admissível.

Definição 2.9.2 (Par Admissível)

Um par (p, q) é chamado admissível em dimensão d se $p \geq 2$, $(p, q, d) \neq (2, \infty, 2)$ e

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}.$$

Do exposto, enfim, apresentamos o tema desta seção, a saber, as estimativas de Strichartz.

As estimativas de Strichartz são uma ferramenta poderosa no estudo de equações de Schrödinger não – lineares. Em \mathbb{R}^d , as estimativas de Strichartz são assim caracterizadas: para (p, q) um par admissível em dimensão d e $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, temos que

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}))} \leq c \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Strichartz, [108], provou o caso particular $p = q$,

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Isto foi generalizado por Ginibre e Velo, [54] para a norma de $L_t^p L_x^q$ com p e q que satisfazem a definição 2.9.2 para $p > 2$ e por Keel e Tao, [62] para o extremo $p = 2$ e $q = \frac{2d}{d-2}$. Uma extensão para a equação não – homogênea foi obtida por Yajima [120] e Cazenave e Weissler, [43].

Para $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, existem poucos resultados conhecidos. No caso de uma variedade compacta sem fronteira, Burq, Gérard e Tzvetkov, [25] provaram estimativas de Strichartz com perda de derivadas e mostraram que tais percas são em algumas geometrias específicas, inevitáveis.

Blair, Smith e Sogge, [11], provaram que para qualquer par (p, q) , a estimativa de Strichartz

$$\|e^{it\Delta_g} f\|_{L^p(0, T; L^q(M))} \lesssim \|f\|_{H^{\frac{4}{3p}}(M)} \quad (2.9.2)$$

é verdadeira em uma variedade compacta com fronteira de dimensão $d \geq 2$. Aqui, Δ_g é o operador Laplace – Beltrame com métrica g .



No que diz respeito a um domínio geral, Anton, [6], provou a seguinte estimativa de Strichartz onde M é um domínio regular compacto do \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$:

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^p(0,T;L^q(M))} \lesssim \|f\|_{H^{\frac{3}{2p}+\varepsilon}(M)}, \quad (2.9.3)$$

de modo que $\varepsilon > 0$ é um número positivo arbitrariamente pequeno. Além disso, Anton provou (Corolário 1.3, página 4) que para $d = 2$, usando imersão de Sobolev, é possível melhorar (2.9.3) para o caso $q = \infty$, donde temos:

$$\|e^{it\Delta}f\|_{L^p(0,T;L^\infty(M))} \lesssim \|f\|_{H^1(M)}. \quad (2.9.4)$$

Observação 2.9.2

De acordo com Anton, [6] e Blair, Smith e Sogge, [11], as estimativas (2.9.2), (2.9.3) e (2.9.4) permanecem válidas se Ω é o exterior de um domínio regular limitado com fronteira compacta, com a ressalva que no trabalho de [11], é necessário ainda supor que o obstáculo é non – trapping.

A estimativa de Strichartz (2.9.4) terá papel fundamental no capítulo 4, na obtenção da boa – colocação e decaimento exponencial de soluções fracas H^1 do problema (1.3.1).

Equação de Schrödinger e Placa com Dissipação Não – Linear Localmente Distribuída

Este capítulo, realizado em parceria com César Augusto Bortot, Marcelo Moreira Cavalcanti e Valéria Neves Domingos Cavalcanti foi publicado em [13].

Sobre uma variedade Riemanniana compacta n -dimensional $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, estabeleceremos a taxa de decaimento uniforme para a equação de Schrödinger e placa linear sujeitas à dissipação interna não – linear localmente distribuída sobre a variedade. Nossa aproximação também pode ser usada para outras equações de modo que a desigualdade inversa para o modelo linear acontece. No caso particular da equação da onda, onde a conhecida condição de controle geométrico (CCG) é equivalente à desigualdade de observabilidade, nosso método generaliza os resultados de Cavalcanti et. al. [34] e [35], em relação à escolha ideal de regiões dissipativas.

Antes de apresentar os problemas que levam título a este capítulo, apresentaremos as hipóteses comuns aos mesmos.

No que segue, consideraremos a função $a(\cdot)$, responsável pelo efeito de dissipação localizada, satisfaz a seguinte condição:

$$a \in L^\infty(\mathcal{M}); a(x) \geq a_0 \geq 0 \text{ em } \omega \subset \mathcal{M}, \quad (3.0.1)$$

onde ω é um subconjunto aberto de \mathcal{M} propriamente contido em \mathcal{M} .



Hipótese 3.0.1

As seguintes hipóteses são feitas sobre a função g , foram emprestadas de Lasiecka e Triggiani [67]:

- (H_1) (i) $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua , $g(0) = 0$.
(ii) g é a subdiferencial de J_1 , isto é, $g(z) = \partial J_1(z)$, onde $J_1 : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ é uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente.
(iii) $\operatorname{Re} \{(g(z) - g(v))(\bar{z} - \bar{v})\} \geq 0, \forall z, v \in \mathbb{C}$.
(iv) $\operatorname{Im} \{g(z)\bar{z}\} \equiv 0$. Note que para $v = 0$, temos que de (iii) que

$$\operatorname{Re} \{g(z)\bar{z}\} \geq 0,$$

que implica em vista de (iv) que

$$\operatorname{Re} \{g(z)\bar{z}\} = g(z)\bar{z} \geq 0,$$

e, conseqüentemente,

$$g(z)\bar{z} = |g(z)\bar{z}|.$$

(H_2) Existem $m, c > 0$ tal que

- (a) $m|z|^2 \leq g(z)\bar{z}$, se $|z| \leq 1$.
(b) $|g(z)| \leq c|z|$, se $|z| \geq 1$.

3.1. Equação de Schrödinger

Nesta seção, estudaremos o problema

$$\begin{cases} i\partial_t y + \Delta y + ia(x)g(y) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

• • •

3.1.1. Notação

Consideremos $L^2(\mathcal{M})$ de funções de variável complexa sobre \mathcal{M} . Este é um espaço de Hilbert real quando munido com o produto interno

$$(y, z)_{L^2(\mathcal{M})} = \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} y(x)\overline{z(x)} dx$$



com a correspondente norma

$$\|y\|_{L^2(\Omega)}^2 = (y, y)_{\mathcal{M}}.$$

Também consideremos o espaço de Sobolev $H_0^1(\mathcal{M})$ munido com o seguinte produto escalar

$$(y, z)_{H_0^1(\mathcal{M})} = (\nabla y, \nabla z)_{L^2(\mathcal{M})}.$$

Em seguida, vamos escrever o problema (3.1.1) como um problema de Cauchy em $L^2(\mathcal{M})$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \partial_t y + Ay + By = 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

onde $A : D(A) = H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M}) \subset L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M})$ é definido por $Ay = -i\Delta y$, para $y \in D(A)$ (com $D(A)$ denso em $L^2(\mathcal{M})$) e $B : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M})$ é definido em $By = a(\cdot)g(y)$, para $y \in L^2(\mathcal{M})$. Provaremos que $A + B$ é um operador maximal monótono tal que o problema (3.1.1) é bem – posto e, além disso, a energia é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |y(x, t)|^2 dx. \quad (3.1.3)$$

satisfaz a identidade de energia dada em (1.2.11), ou seja,

$$E_y(t) + 2 \int_s^t \int_{\mathcal{M}} g(y)\bar{y} dxdt = E_y(s); E(t) \leq E(s), t \geq s \geq 0. \quad (3.1.4)$$

• • •

3.1.2. Boa – Colocação de Soluções Regulares

De antemão, consideraremos o problema (3.1.1) com dado inicial em $y_0 \in D(A)$. Observemos que $(A, D(A))$ é um operador maximal monótono em \mathcal{M} .

De fato, A é anti – adjunto se, e somente se, iA é auto – adjunto. Notemos que $iA = \Delta$, logo iA é auto – adjunto, conseqüentemente, A é anti – adjunto e, portanto, pela proposição 2.4.2, temos que A é maximal monótono.

Na sequência, provaremos que B é bem definido. De fato, temos que

$$\int_{\mathcal{M}} |a(x)g(y(x))|^2 dx \leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^2 \int_{\mathcal{M}} |g(y(x))|^2 dx. \quad (3.1.5)$$

E, se $|y(x)| \leq 1$, desde que g é contínua, obtemos que $|g(y(x))|^2 \leq K^2$. Se $|y(x)| \geq 1$, levando em conta o item (b) e a hipótese H_2 , decorre que $|g(y(x))|^2 \leq C^2 |y(x)|^2$.



Consequentemente,

$$|g(y(x))|^2 \leq K^2 + C^2 |y(x)|^2, \quad \forall x \in \mathcal{M}. \quad (3.1.6)$$

Substituindo (3.1.6) em (3.1.5), graças à compacidade de \mathcal{M} , resulta que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} |a(x) g(y(x))|^2 dx &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^2 \int_{\mathcal{M}} |g(y(x))|^2 dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^2 \int_{\mathcal{M}} K^2 dx + C^2 \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^2 \|y\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^2 \int_{\mathcal{M}} K^2 \text{med}(\mathcal{M}) + C^2 \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^2 \|y\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 < \infty, \end{aligned}$$

o que prova que B é bem definido e ainda, B é limitado (isto é, leva conjuntos limitados em conjuntos limitados).

Nosso principal escopo, no que segue, é provar que $A + B$ é maximal monótono.

Para tanto, de início, provaremos que B é hemicontínuo. De fato, precisamos mostrar que dados $u, v, w \in L^2(\mathcal{M})$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (B(u + tv), w)_{L^2(\mathcal{M})} = (Bu, w)_{L^2(\mathcal{M})}, \quad (3.1.7)$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B(u + x_n v), w)_{L^2(\mathcal{M})} = (Bu, w)_{L^2(\mathcal{M})}, \quad (3.1.8)$$

para toda sequência $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Seja $f_n := a g(u + x_n v) \bar{w}$, $n \in \mathbb{N}$, então, $(f_n)_n \subset L^1(\mathcal{M})$. De fato,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |a(x) g(u(x) + x_n v(x))| |\bar{w}(x)| \\ &\leq |a(x)| [k + c|u(x) + x_n v(x)|] |\bar{w}(x)| \\ &\leq k|a(x)| |\bar{w}(x)| + c|a(x)| |u(x)| |\bar{w}(x)| + c|a(x)| |x_n| |v(x)| |\bar{w}(x)| \end{aligned}$$

quase sempre em \mathcal{M} . Desde que $a \in L^\infty(\mathcal{M})$ e $|x_n| \leq c_1 \forall n \in \mathbb{N}$, temos direito em afirmar que $f_n \in L^1(\mathcal{M})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $g(x) = k|a(x)| |\bar{w}(x)| + c|a(x)| |u(x)| |\bar{w}(x)| + c_2|a(x)| |v(x)| |\bar{w}(x)|$, onde $c_2 = c_1 c$, então, $g \in L^1(\mathcal{M})$ e $|f_n(x)| \leq g(x)$ quase sempre em \mathcal{M} .

Na sequência, observemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(x) g(u(x) + x_n v(x)) \bar{w}(x) = a(x) g(u(x)) \bar{w}(x),$$

quase sempre em \mathcal{M} , desde que g é contínua. Consequentemente, fazendo uso do



Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 2.3.5, deduzimos que

$$\int_{\mathcal{M}} |a(x)g(u(x) + x_n v(x))\bar{w}(x) - a(x)g(u(x))\bar{w}(x)| dx \rightarrow 0.$$

Deste modo,

$$\left| \int_{\mathcal{M}} [a(x)g(u(x) + x_n v(x))\bar{w}(x) - a(x)g(u(x))\bar{w}(x)] dx \right| \rightarrow 0.$$

o que podemos afirmar que

$$\operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} [a(x)g(u(x) + x_n v(x))\bar{w}(x)] dx \rightarrow \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u(x))\bar{w}(x) dx.$$

o qual prova (3.1.8) e, doravante, a hemicontinuidade de B .

Nosso próximo passo é mostrar que B é monótono. De fato, dado $y \in L^2(\mathcal{M})$, inferimos que

$$\begin{aligned} (By - Bz, y - z)_{L^2(\mathcal{M})} &= \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} a(x) (g(y) - g(z)) (\bar{y} - \bar{z}) dx \\ &= \int_{\mathcal{M}} \underbrace{a(x)}_{\geq 0} \underbrace{\operatorname{Re} [(g(y) - g(z)) (\bar{y} - \bar{z})]}_{\geq 0, \text{ de } H_1, \text{ item (iii)}} dx \geq 0, \end{aligned}$$

o que estabelece o desejado.

Recordemos nosso progresso até o momento: provamos que A é um operador maximal monótono e B é monótono, hemicontínuo e limitado. Então, de acordo com o teorema 2.5.2, página 71, resulta que $A + B$ é maximal monótono. Então, o problema (3.1.1) pode ser escrito como um problema de Cauchy (3.1.2). Se $u_0 \in D(A + B) = H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})$, então, recorrendo ao teorema 2.5.1, página 70, existe uma única solução y para o problema (3.1.2) tal que $y(t) \in D(A + B)$, $\forall t \geq 0$, e

$$y \in C([0, +\infty); L^2(\mathcal{M})); \quad y_t \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\mathcal{M})).$$

A identidade de energia (3.1.4) segue diretamente da classe acima obtida para a solução y multiplicando a equação (3.1.1) by \bar{y} , integrando em \mathcal{M} e considerando a parte imaginária resultante.



• • •

3.1.3. Existência e Unicidade de Soluções Fracas

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \partial_t y = Ty + Sy; 0 < t < \infty \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1.9)$$

onde $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ é um operador m – dissipativo e $S : D(S) \subset X \rightarrow X$ é um operador contínuo e dissipativo sendo X um espaço de Banach. Faremos uso do teorema 2.5.3, página 71. No presente caso, definamos

$$\begin{aligned} T &: D(A + B) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \\ S &= 0 : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \end{aligned}$$

onde A e B foram definidas na subseção anterior. Convém recordar que já provamos que $T = A + B$ é maximal monotónico, logo $-T$ is m – dissipativo. Obviamente, S é contínuo e dissipativo. Deste modo, o problema (3.1.1) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \partial_t y = -Ty + Sy; \quad 0 < t < \infty \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ou, em outras palavras, o problema de Cauchy (1.3.23) satisfaz as hipóteses do precedente resultado dado por Barbu [8], que é o teorema 2.5.3. Então, para todo $y_0 \in \overline{D(A + B)} = \overline{H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})} = L^2(\mathcal{M})$, existe uma única $y \in C([0, +\infty); L^2(\mathcal{M}))$ que é uma solução generalizada do problema (3.1.2).

A identidade de energia (3.1.4) segue de argumentos usuais de densidade.

• • •

3.1.4. Taxas de Decaimento Uniforme

Consideremos os seguintes problemas:

$$\begin{cases} i \partial_t y + \Delta y + i a(x) g(y) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \mathcal{M} \end{cases} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{cases} i \partial_t \varphi + \Delta \varphi = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ \varphi(0) = y_0 & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases} \quad (3.1.11)$$



e

$$\begin{cases} i \partial_t v + \Delta v = -i a(x) g(y) & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ v(0) = 0 & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases} \quad (3.1.12)$$

Assumiremos que a desigualdade de observabilidade satisfaz (1.2.4), isto é,

$$\|y_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq c \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dx dt, \quad \text{para todo } T > T_0 \quad (3.1.13)$$

onde $\omega \subset \mathcal{M}$ é um conjunto aberto contido propriamente em \mathcal{M} e a função $a(\cdot)$ satisfaz a hipótese (3.0.1).

Observemos que $y = \varphi + v$ é a solução de (3.1.10), onde φ provém de (3.1.11) and v é a solução de (3.1.12). Além disso, $y = \varphi + v = 0$ em $\partial\mathcal{M} \times (0, \infty)$ e $y(0) = \varphi(0) + v(0) = y_0$.

Agora, multiplicando (3.1.10) por $i\bar{y}$ e integrando sobre \mathcal{M} , resulta

$$\int_{\mathcal{M}} \partial_t y \bar{y} dx - i \int_{\mathcal{M}} |\nabla y|^2 dx + \int_{\mathcal{M}} a(x) g(y) \bar{y} dx = 0.$$

Tomando a parte real e face a propriedade (H_1) , item (iii), nós deduzimos que

$$\operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \partial_t y \bar{y} dx + \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} a(x) g(y) \bar{y} dx = 0,$$

ou, em outras palavras,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 = - \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} a(x) g(y) \bar{y} dx \leq 0.$$

Tendo em mente que a energia é dada em (3.1.3), inferimos que

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} \|y(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq 0,$$

o que nos diz que $E(t)$ é uma função não – crescente com respeito ao parâmetro t .

No que segue, provaremos que

$$\frac{1}{2} E(T) \leq c(T) \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) [|y|^2 + |g(y)|^2] dx dt \quad (3.1.14)$$

para todo $T > T_0 > 0$, para algum T_0 .



Desde que a energia é não – crescente, de (3.1.13), deduzimos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} E(T) &\leq \frac{1}{2} E(0) = \frac{1}{2} \|y_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 & (3.1.15) \\
 &\leq c \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dx dt \\
 &\leq c_1 \int_0^T \int_{\omega} a(x) |y - v|^2 dx dt \\
 &\leq c_2 \int_0^T \int_{\omega} a(x) (|y|^2 + |v|^2) dx dt \\
 &\leq c_2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) [|y|^2 + |g(y)|^2] dx dt + c_2 \underbrace{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |v|^2 dx dt}_{:=I}
 \end{aligned}$$

Estimativa para I .

Definamos a seguinte forma linear e contínua

$$\begin{aligned}
 T : L^2(\mathcal{M}) \times L^1(0, T; L^2(\mathcal{M})) &\rightarrow L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{M})) \\
 (z_0, f) &\mapsto T(z_0, f) = z
 \end{aligned}$$

onde z é a solução do problema

$$\begin{cases}
 i \partial_t z + \Delta z = f & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\
 z = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\
 z(0) = z_0 \in L^2(\mathcal{M}), &
 \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Veja que claramente T é linear. Provaremos que T é contínua.

Com efeito, z é solução de (3.1.16), temos que z satisfaz a equação integral

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s) f(s) ds$$

onde $S(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador maximal monótono A . Assim, tendo



em mente que $\|S(t)\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq M$, chegamos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 &= \left\| S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \\ &\leq c \|S(t)z_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + c \left\| \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \\ &\leq c_1 \|z_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + c_2 \left(\int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 ds \right)^2 \\ &\leq C(\|z_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2) = C\|(z_0, f)\|_{L^2(\mathcal{M}) \times L^1(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2, \end{aligned}$$

o que nos garante o almejado.

Desta forma, uma vez que $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{M})) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\mathcal{M}))$ e denotando $f(t) = a(x)g(y(t))$, $z_0 = 0$, decorre da desigualdade de Hölder e da continuidade de T que

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|v|^2 dx dt \tag{3.1.17} \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2 \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2 \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \|a(x)g(y)\|_{L^1(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2 \\ &\leq c_3 \left(\int_0^T \left[\int_{\mathcal{M}} a(x)|g(y)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \right)^2 \\ &\leq T^2 c_3 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|g(y)|^2 dx dt \\ &\leq c_4(T) \int_0^T \int_{\mathcal{M}} [a(x)|g(y)|^2 + a(x)|y|^2] dx dt. \end{aligned}$$

Finalmente, combinando (3.1.15) e (3.1.17), nós alcançamos a estimativa desejada de energia dada em (3.1.14).

Deste modo, sendo garantida a estimativa (3.1.14) e, procedendo de maneira análoga feita em Lasiecka e Triggiani [67], a solução do problema (3.1.1) contempla a seguinte taxa de decaimento:

$$E_y(t) \leq S\left(\frac{1}{T_0}\right) E_y(0) \searrow 0, \text{ para todo } t \geq T_0, t \rightarrow \infty, \tag{3.1.18}$$

onde a função S foi apresentada na página 19. Em outras palavras, provamos o seguinte:



Teorema 3.1.1

Assuma que (3.0.1) e a hipóteses 3.0.1 e 3.1.13 estão satisfeitas. Então, o problema (3.1.1) possui uma única solução generalizada que satisfaz a taxa de decaimento dada em (3.1.18).

3.2. Equação da Placa

Nesta seção, estudaremos o problema

$$\begin{cases} \partial_{tt}y + \Delta^2y + ia(x)g(y_t) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y = \Delta y = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0, y_t(0) = y_1, & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

de modo que as hipóteses sobre as funções a e g são as mesmas apresentadas no início deste capítulo.

• • •

3.2.1. Notação

Consideremos $L^2(\mathcal{M})$ o espaço de funções de variável complexa sobre \mathcal{M} . Este é um espaço de Hilbert real quando munido com o produto interno

$$(y, z)_{L^2(\mathcal{M})} = \text{Re} \int_{\mathcal{M}} y(x)\overline{z(x)} dx.$$

Denotemos $V = H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})$ com a seguinte norma em V como

$$\|y\|_V^2 = \|\Delta y\|_{L^2(\mathcal{M})}^2,$$

que é uma norma equivalente em $H^2(\mathcal{M})$.

Seja $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, assim, escrevamos o problema abaixo como um problema de Cauchy em $L^2(\mathcal{M})$ da forma:

$$\begin{cases} \partial_t Y + AY + FY = 0 \\ Y(0) = Y_0, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

onde $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $D(A) = \{u \in H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^4(\mathcal{M}); \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{M}\} \times V$,



o espaço de Hilbert \mathcal{H} é definido por $V \times L^2(\Omega)$ e o operador A é definido por

$$A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ \Delta^2 y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D(A).$$

Note que o produto interno e a norma em $D(A)$ e H são respectivamente

$$\|Y\|_{D(A)}^2 = \|y\|_V^2 + \|z\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|z\|_V^2 + \|\Delta^2 y\|_{L^2(\mathcal{M})}^2; \quad \|Y\|_{\mathcal{H}}^2 = \|y\|_V^2 + \|z\|_{L^2(\mathcal{M})}^2.$$

O operador $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é definido por

$$F \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a(\cdot) g(z) \end{pmatrix}.$$

Provaremos que $A + F$ é um operador maximal monótono tal que o problema (3.2.1) é bem posto e, ademais, a energia é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} [|y_t(x, t)|^2 + |\Delta y(x, t)|^2] dx, \quad (3.2.3)$$

que satisfaz a identidade de energia

$$E(t) + 2 \int_s^t g(y) \overline{y_t} dx dt = E(s), \quad \text{então } E(t) \leq E(s), \quad t \geq s \geq 0. \quad (3.2.4)$$

• • •

3.2.2. Boa Colocação de Soluções Regulares

Inicialmente, considerando o problema (3.2.1) e fazendo uso da mudança de variáveis

$Y = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$, vem que

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \begin{pmatrix} y_t \\ y_{tt} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_t \\ -\Delta^2 y - a(x) g(y_t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_t \\ -\Delta^2 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a(x) g(y_t) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 & 0 \end{pmatrix}}_{:=-A} \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -a(x) g(y_t) \end{pmatrix}}_{:=-F} \end{aligned}$$

obtendo o problema de Cauchy (3.2.2).



Perceba que A é monótono, desde que

$$\begin{aligned}
 \left(A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{pmatrix} -z \\ \Delta^2 y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
 &= (-z, y)_V + (\Delta^2 y, z)_{L^2(\mathcal{M})} \\
 &= (-\Delta z, \Delta y)_{L^2(\mathcal{M})} + \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \Delta^2 y \bar{v} \, dx \\
 &= \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} -\Delta z \overline{\Delta y} \, dx + \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \Delta y \overline{\Delta z} \, dx \\
 &= \int_{\mathcal{M}} \operatorname{Re}(-\Delta z \overline{\Delta y}) \, dx + \int_{\mathcal{M}} \operatorname{Re}(\Delta y \overline{\Delta z}) \, dx = 0,
 \end{aligned}$$

de modo que usamos o fato que $\operatorname{Re}(-z_1 \bar{z}_2) + \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = 0$.

Provemos a seguir que A é maximal.

De fato, gostaríamos de mostrar que dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$, existe uma única $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D(A)$ tal que

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ \Delta^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{3.2.5}$$

De (3.2.5), extraímos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y - z = f \\ z + \Delta^2 y = g \end{cases}$$

Denotando $z = y - f$ e substituindo na segunda equação do sistema acima, chegamos a

$$y - f + \Delta^2 y = g \Leftrightarrow y + \Delta^2 y = f + g. \tag{3.2.6}$$

Neste momento, tomando formalmente o produto interno em $L^2(\mathcal{M})$ da equação (3.2.6) com $\varphi \in H_0^2(\mathcal{M})$, obtemos

$$\begin{aligned}
 (y, \varphi)_{L^2(\mathcal{M})} + (\Delta^2 y, \varphi)_{L^2(\mathcal{M})} &= (f + g, \varphi)_{L^2(\mathcal{M})}, \quad \forall \varphi \in V; \\
 \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} y \bar{\varphi} \, dx + \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \Delta y \overline{\Delta \varphi} \, dx &= \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} (f + g) \bar{\varphi} \, dx, \quad \forall \varphi \in V. \tag{3.2.7}
 \end{aligned}$$



Sejam

$$\begin{aligned} b : H_0^2(\mathcal{M}) \times H_0^2(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (y, \varphi) &\mapsto \int_{\mathcal{M}} y \bar{\varphi} \, dx + \int_{\mathcal{M}} \Delta y \overline{\Delta \varphi} \, dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P : H_0^2(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \int_{\mathcal{M}} (f + g) \bar{\varphi} \, dx \end{aligned}$$

Repare que b é uma forma sesquilinear e, além disso, P e b são contínuas, pela desigualdade de Hölder. Em virtude que a norma $H_0^2(\mathcal{M})$ é equivalente para a norma usual em $H^2(\mathcal{M})$, juntamente com a cadeia de imersões $H_0^2(\mathcal{M}) \hookrightarrow H^2(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{M})$, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle P, \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathcal{M}} |f + g| |\varphi| \, dx \\ &\leq \|f + g\|_{L^2(\mathcal{M})} \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{M})} \\ &\leq C \|f + g\|_{L^2(\mathcal{M})} \|\varphi\|_{H_0^2(\mathcal{M})} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |b(y, \varphi)| &\leq \int_{\mathcal{M}} |y| |\bar{\varphi}| \, dx + \int_{\mathcal{M}} |\Delta y| |\overline{\Delta \varphi}| \, dx \\ &\leq \|y\|_{L^2(\mathcal{M})} \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\Delta y\|_{L^2(\mathcal{M})} \|\Delta \varphi\|_{L^2(\mathcal{M})} \\ &\leq (C + 1) \left(\|y\|_{H_0^2(\mathcal{M})} \|\varphi\|_{H_0^2(\mathcal{M})} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$b(y, y) = \int_{\mathcal{M}} |\Delta y|^2 \, dx + \int_{\mathcal{M}} |y|^2 \, dx \geq \int_{\mathcal{M}} |\Delta y|^2 \, dx = \|y\|_{H_0^2(\mathcal{M})}^2,$$

o que mostra que b é coerciva. Consequentemente, pelo lema de Lax-Milgram, Lema 2.3.3, página 59, existe uma única $y \in H_0^2(\mathcal{M})$ tal que $b(y, \varphi) = \langle P, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in H_0^2(\mathcal{M})$, ou seja, a equação (3.2.7) possui uma única solução $y \in H_0^2(\mathcal{M})$.

Caracterizando o nosso problema agora em $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$, garantimos que $y + \Delta^2 y = f + g$ em $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$. Deste modo,

$$\int_{\mathcal{M}} \Delta y \overline{\Delta \varphi} \, dx + \int_{\mathcal{M}} y \bar{\varphi} \, dx = \int_{\mathcal{M}} f \bar{\varphi} \, dx, \forall \varphi \in H_0^2(\mathcal{M}).$$



Recorrendo a regularidade elíptica, resulta que $u \in H^4(\mathcal{M})$, de modo que a equação $-\Delta^2 y + y = f$ tem uma única solução $y \in D(A)$, o que prova que A é maximal.

Na sequência, provaremos que a função F é bem – definida, monótona, hemi-continua e limitada de \mathcal{H} em \mathcal{H} . À luz das computações que nós fizemos para a equação de Schrödinger, garantimos tais propriedades mencionadas para o operador F , tendo em vista que $F \approx B$ onde B foi definida por :

$$\begin{aligned} B : L^2(\mathcal{M}) &\rightarrow L^2(\mathcal{M}) \\ z &\mapsto a(x)g(z) \end{aligned}$$

Então, de acordo com o Teorema 2.5.2, página 71, resulta que $A + F =: D(A + F) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é maximal monótono (note que $D(A + F) = \{u \in H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^4(\mathcal{M}); \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{M}\} \times V$).

Consequentemente, o problema (3.2.1) pode ser escrito como um problema de Cauchy (3.2.2). Se $Y_0 \in D(A + F)$, isto é, $y_0 \in \{u \in H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^4(\mathcal{M}); \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{M}\}$ e $y_1 \in V$, então, recorrendo ao Teorema 2.5.1, página 70, existe uma única solução Y de (3.2.2) tal que $Y(t) \in D(A + F), \forall t \geq 0$, e

$$Y \in C([0, +\infty); \mathcal{H}); Y_t \in L^\infty(0, +\infty; \mathcal{H}).$$

Dito de outro modo,

$$\begin{aligned} y &\in C([0, +\infty); V) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\mathcal{M})) \\ y_t &\in L^\infty(0, +\infty; V) \cap W^{1,\infty}(0, +\infty; L^2(\mathcal{M})). \end{aligned}$$

• • •

3.2.3. Existência e Unicidade de Soluções Fracas

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \partial_t y = Ty + Sy; 0 < t < \infty \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.2.8)$$

onde $T : D(S) \subset H \rightarrow H$ é um operador m – dissipativo, $S : D(S) \subset H \rightarrow H$ é contínuo e dissipativo e H é um espaço de Banach. Aqui, faremos uso do Teorema 2.5.3.

No nosso caso, definamos

$$\begin{aligned} T : D(A + F) \subset \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ S = 0 : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \end{aligned}$$



onde A e F estão definidos na subseção anterior. Nós já vimos que $T = A + F$ é um operador maximal monótono, donde $-T$ é m – dissipativo. Evidentemente, S é contínuo e dissipativo.

Por conseguinte, o problema (3.2.2) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \partial_t Y &= -TY + SY; & 0 < t < \infty \\ Y(0) &= Y_0 \end{cases}$$

e satisfaz as hipóteses do resultado do Teorema 2.5.3 mencionado anteriormente. Então, para todo $Y_0 \in \overline{D(A + F)} = \mathcal{H}$, existe uma única $Y \in C([0, +\infty); \mathcal{H})$ solução de (3.2.2). Assim, existe uma única $y \in C([0, +\infty); V) \cap C^1((0, +\infty); L^2(\mathcal{M}))$ solução de (3.2.1).

• • •

3.2.4. Taxas de Decaimento Uniforme

Tal como foi feito no caso da equação de Schrödinger, consideremos os problemas:

$$\begin{cases} \partial_{tt}y + \Delta^2y + ia(x)g(y_t) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y = \Delta y = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0, y_t(0) = y_1, & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{cases} \partial_{tt}\varphi + \Delta^2\varphi = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ \varphi = \Delta\varphi = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty), \\ \varphi(0) = y_0 & \text{em } \mathcal{M} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

e

$$\begin{cases} \partial_{tt}v + \Delta^2v = -a(x)g(\partial_t y) & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ v = \Delta v = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ v(0) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Assumiremos que a desigualdade de observabilidade acontece:

$$\int_{\mathcal{M}} [|\varphi_t(0)|^2 + |\Delta\varphi(0)|^2] dx \leq c \int_0^T \int_{\omega} |\varphi_t|^2 dx dt, \quad \text{para todo } T > T_0 \quad (3.2.12)$$

onde $\omega \subset \mathcal{M}$ é um conjunto aberto contido propriamente em \mathcal{M} e a função $a(\cdot)$ satisfaz (3.0.1).



Note que $y = \varphi + v$ é a solução de (3.2.9), tal que φ provém de (3.2.10) e v é a solução de (3.2.11).

E ainda, $y = \varphi + v = 0$ em $\partial\mathcal{M} \times (0, \infty)$ e $y(0) = \varphi(0) + v(0) = y_0$.

Multiplicando (3.2.9) por \bar{y}_t e integrando sobre \mathcal{M} , inferimos que

$$\int_{\mathcal{M}} y_{tt} \bar{y}_t dx + \int_{\mathcal{M}} \Delta^2 y \bar{y}_t dx + \int_{\mathcal{M}} a(x) g(y_t) \bar{y}_t dx = 0.$$

Tomando a parte real e fazendo uso de (H_1) , item (iii), temos que

$$\operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} y_{tt} \bar{y}_t dx + \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} \Delta y \overline{\Delta y_t} dx + \int_{\mathcal{M}} a(x) \underbrace{\operatorname{Re}[g(y_t) \bar{y}_t]}_{\geq 0} dx = 0.$$

Em outras palavras,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|y_t\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \right] = - \int_{\mathcal{M}} a(x) \operatorname{Re}[g(y_t) \bar{y}] dx \leq 0.$$

À luz da identidade de energia dada em (3.2.4), deduzimos que

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|y_t(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|\Delta y(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \right] \leq 0,$$

que implica que $E(t)$ é não – crescente com respeito ao parâmetro t .

Nosso anseio é mostrar que que

$$\frac{1}{2} E(T) \leq c(T) \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) [|y_t|^2 + |g(y_t)|^2] dx dt \quad (3.2.13)$$

para todo $T > T_0$.



Uma vez que a energia é não – crescente, de (3.2.12), deduzimos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} E(T) &\leq \frac{1}{2} E(0) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} [|y_t(0)|^2 + |\Delta y(0)|^2] dx \\
 &\leq c \int_0^T \int_{\omega} |\varphi_t|^2 dx dt \\
 &\leq c_1 \int_0^T \int_{\omega} a(x) |y_t - v_t|^2 dx dt \\
 &\leq c_2 \int_0^T \int_{\omega} a(x) (|y_t|^2 + |v_t|^2) dx dt \\
 &\leq c_2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) [|y_t|^2 + |g(y_t)|^2] dx dt + c_2 \underbrace{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |v_t|^2 dx dt}_{:=I}
 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Estimativa para I .

Definamos neste instante, a seguinte forma o operador linear e contínuo

$$\begin{aligned}
 T : \mathcal{H} \times L^1(0, T; L^2(\Omega)) &\rightarrow L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\
 ((z_0, z_1), f) &\mapsto T(z_0, f) = z_t
 \end{aligned}$$

onde z é a solução do problema

$$\begin{cases} z_{tt} + \Delta^2 z = f & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ z = \Delta z = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty), \\ z(0) = z_0 \in V; z_t(0) = z_1 \in L^2(\mathcal{M}) \end{cases} \tag{3.2.15}$$

Perceba que T é linear. Ainda resta provar a continuidade de T . De fato, uma vez que $Z = \begin{pmatrix} z \\ z_t \end{pmatrix}$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} Z_t + AZ = F \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

onde $A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ \Delta^2 & 0 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$, temos que Z satisfaz a equação integral

$$Z(t) = S(t)Z_0 + \int_0^t S(t-s) F(s) ds$$

de modo que $S(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador maximal monótono A . Assim,



tendo em mente que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M$, vem que

$$\begin{aligned}
 \|z_t(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 &\leq \|Z(t)\|_{\mathcal{H}} \\
 &\leq c \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \|(z_0, z_1)\|_{\mathcal{H}}^2 + c \left\| \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
 &\leq c_1 \|(z_0, z_1)\|_{\mathcal{H}}^2 + c_2 \left(\int_0^t \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 ds \right)^2 \\
 &\leq c_3 \left(\|(z_0, z_1)\|_{\mathcal{H}}^2 + c_3 \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2 \right) \\
 &= c_4 \|(z_0, f)\|_{\mathcal{H} \times L^1(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|z_t\|_{\infty} \leq c_4 \|(z_0, f)\|_{\mathcal{H} \times L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2,$$

de modo que $c_4 = \max\{c_1, c_3\}$, o que prova a continuidade de T .

Neste sentido, desde que $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e assumindo que $f(t) = a(x)g(y(t))$, $z_0 = z_1 = 0$, assegura que $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, visto que pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|a(\cdot)g(y_t)\|_{L^2(\mathcal{M})} dt &= \int_0^T \left(\int_{\mathcal{M}} |a(x)|^2 |g(y_t(x, t))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
 &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \int_0^T \left(\int_{\mathcal{M}} |g(y_t(x, t))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
 &\leq \underbrace{\|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} T^{\frac{1}{2}}}_{:=c_4} \int_0^T \left(\int_{\mathcal{M}} [k^2 + c_3^2 |y_t|^2] dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
 &\leq c_4 \left(k^2 \text{med}(\mathcal{M}) T + c_3^2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |y_t|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c_4 (c_5(T) + c_6 \|y_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))})^{\frac{1}{2}} < +\infty,
 \end{aligned}$$

contanto que $y_t \in C([0, +\infty); L^2(\mathcal{M}))$, então $y_t \in L^\infty(0, T; \mathcal{M}) \hookrightarrow L^2(0, T; \mathcal{M})$.

Assim, pela continuidade de T e, novamente, pela desigualdade de Hölder, chega-



mos que

$$\begin{aligned}
 I &:= c_2 \int_0^T \int_{\omega} a(x) |v_t|^2 dx dt & (3.2.16) \\
 &\leq c_2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |v_t|^2 dx dt \\
 &\leq c_2 \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \|v_t\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2 \\
 &\leq c_3 \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \|v_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2 \\
 &\leq c_4 \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \|a(x) g(y_t)\|_{L^1(0,T;L^2(\mathcal{M}))}^2 \\
 &\leq c_5 \left(\int_0^T \left[\int_{\mathcal{M}} a(x) |g(y_t)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \right)^2 \\
 &\leq c_6(T) \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |g(y)|^2 dx \\
 &\leq c_6(T) \int_0^T \int_{\mathcal{M}} [a(x) |g(y_t)|^2 + a(x) |y_t|^2] dx.
 \end{aligned}$$

Finalmente, combinando (3.2.14) e (3.2.16), obtemos a estimativa de energia desejada dada em (3.2.13). Em suma, obtemos:

Teorema 3.2.1

Assuma que (3.0.1) e as hipóteses 3.0.1 e 3.2.12 estão satisfeitas. Então, o problema (3.2.1) possui uma única solução generalizada que satisfaz a taxa de decaimento dada em (3.1.18).

3.3. Exemplos

Nesta seção, apresentaremos alguns bons exemplos, diferente do decaimento exponencial, que nós pedimos emprestados de Lasiecka e Triggiani [67].

- Exemplo 1: Caso $g(z) = |z|^r z$ perto da origem, $r > 0$.

Neste caso, a taxa de decaimento é dada por

$$E(t) \leq C(E(0)) \left[\left(\frac{E(0)}{4} \right)^{-\frac{r}{2}} + \frac{2}{3} r (t - T) \right]^{-\frac{2}{r}}, \text{ para } t \geq T.$$

- Exemplo 2: Caso $g(z) = |z|^2 e^{-\frac{1}{|z|^2} z}$, perto da origem.



Nesta situação, a taxa de decaimento é caracterizada por

$$E(t) \leq C(E(0)) \left[\ln \left(e^{\frac{4}{E(0)}} + \frac{4}{3}(t - T) \right) \right]^{-1}, \text{ para } t \geq T.$$

- Exemplo 3: Caso $g(z) = \frac{1}{|z|^r}z$, $0 < r < 1$, perto da origem.

A taxa de decaimento neste exemplo é dada por

$$E(t) \leq C(E(0)) \left[\left(\frac{4}{E(0)} \right)^{m-1} + \frac{m-1}{4}(t - T) \right]^{1-m}, m = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1-r} \right), \text{ for } t \geq T.$$

3.4. A equação da onda – Multiplicadores versus Análise Microlocal

Nesta seção, gostaríamos de apresentar, para a equação da onda, uma comparação entre a precisa análise microlocal contra a técnica obtida por multiplicadores. Deste modo, consideremos a equação da onda linear sujeita a um termo dissipativo não – linear localizado dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } M \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) & x \in M. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

É bem conhecido que quando $g \equiv 0$, a *condição de controle geométrico* (CCG) é equivalente a *desigualdade de observabilidade*. Consequentemente, o método apresentado na seção anterior “generaliza” (em um certo sentido) os resultados devidos a Cavalcanti et. al. [34] e [35], em relação a a escolha ideal de regiões dissipativas. De fato, os resultados nos trabalhos de [34] e [35], são obtidos utilizando multiplicadores de primeira ordem. Provou-se em Miller [89] que o uso de multiplicadores de primeira ordem nunca chegará a precisão da análise microlocal. A fim de facilitar esta comparação no presente contexto, consideremos a propagação de ondas em superfícies compactas regulares sem fronteira.

É notório que os multiplicadores trabalham bem com a equação da onda semilinear:

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 \text{ em } M \times (0, \infty).$$

Assim, multiplicadores combinados com estimativas integrais de energia (como em Lasiecka e Tataru [65]) mais um bom princípio de continuação única (como em



Triggiani e Yao [115]) são os principais ingredientes para derivar estimativas gerais de taxa de decaimento da energia evitando colocar dissipação em regiões estratégicas na superfície, no qual apresentaremos nas subseções e subsubseções a seguir:

• • •

3.4.1. Visão Externa - Multiplicadores Radiais

Observemos que no caso particular quando $m(x) = x - x^0$, $x \in \mathbb{R}^3$ e $x^0 \in \mathbb{R}^3$ é um ponto fixo em \mathbb{R}^3 , nós temos

$$\operatorname{div} m = 3, \quad \operatorname{div}_T m_T = 2 + (m \cdot \nu) \operatorname{Tr} B. \quad (3.4.2)$$

onde B é a segunda forma fundamental \mathcal{M} (operador forma) e Tr é o traço. Seja $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função suave e m o campo de vetores definidos acima. Nós também temos,

$$\nabla_T \varphi \cdot \nabla_T m_T \cdot \nabla_T \varphi = |\nabla_T \varphi|^2 + (m \cdot \nu)(\nabla_T \varphi \cdot B \cdot \nabla_T \varphi). \quad (3.4.3)$$

—

3.4.1.1. Operador Forma (Shape Operator)

O sinal de B pode mudar na literatura. No nosso caso, lembremos que $B = -dN$, onde N é a aplicação Gaussiana referente à ν .

As fórmulas (3.4.2) podem ser reescritas como

$$\operatorname{div} m = 3, \quad \operatorname{div}_T m_T = 2 + 2H (m \cdot \nu). \quad (3.4.4)$$

onde $H = \frac{\operatorname{tr} B}{2}$ é a curvatura média de \mathcal{M} .

• • •

3.4.2. Estimativas de Decaimento Uniforme

Nós trabalharemos com soluções regulares e por uso de argumentos de densidade, nós podemos estender nossos resultados para soluções fracas. Nossa tarefa principal é obter a seguinte estimativa:

$$\int_0^T E(t) dt \leq C_1 E(T) + C_2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) (g(u_t)^2 + u_t^2) d\mathcal{M} dt,$$

para algumas constantes positivas $C_i > 0$, $i = 1, 2$, onde C_1 não podem depender sobre T , mas C_2 eventualmente pode depender. Desta estimativa, deduzimos a taxa de decaimento uniforme seguindo (literalmente) as ideias primeiramente introduzidas



por Lasiecka and Tataru [65]. Deste propósito, necessitaremos de duas fundamentais identidades que serão provadas na sequência.

3.4.2.1. Primeira Identidade

Lema 3.4.1

Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta regular, orientada sem fronteira e q um campo de vetores regulares com $q = q_T + (q \cdot \nu)\nu$. Então, para toda solução regular u de (3.4.1) temos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t q_T \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}_T q_T) \{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \} \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \nabla_T u \cdot \nabla_T q_T \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (q_T \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} dt = 0. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Recorrendo à (3.4.5) com $q(x) = m(x) = x - x^0$ para algum $x^0 \in \mathbb{R}^3$ fixado e tomando (3.4.2) e (3.4.3) em conta, inferimos que

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t m_T \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} \right]_0^T + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \} \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} [|\nabla_T u|^2 + (m \cdot \nu) (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u)] \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) H \{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \} \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m_T \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} dt = 0. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

3.4.2.2. Segunda Identidade

A segunda identidade é traduzida no seguinte lema:



Lema 3.4.2

Seja u uma solução fraca do problema (3.4.1) e $\xi \in C^1(\mathcal{M})$. Então,

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \xi u d\mathcal{M} \right]_0^T &= \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \xi |u_t|^2 d\mathcal{M} dt - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \xi |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T \xi) u d\mathcal{M} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) \xi u d\mathcal{M} dt. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Substituindo $\xi = \frac{1}{2}$ em (3.4.7) e combinando o resultado obtido com a identidade (3.4.6), deduzimos que

$$\begin{aligned} &\left[\int_{\mathcal{M}} u_t m_T \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \\ &+ \int_0^T E(t) dt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m_T \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M} dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u d\mathcal{M} dt \\ &= - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) H \{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \} d\mathcal{M} dt. \\ &- \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M} dt. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Observe que alguns termos em (3.4.8) são facilmente manipulados pelo uso das desigualdades de Cauchy – Schwarz e Poincaré, bem como a identidade $ab \leq \frac{1}{4\epsilon} a^2 + \epsilon b^2$ e explorando a identidade de energia

$$E(T) - E(0) = - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u_t d\mathcal{M} dt.$$

3.4.2.3. Análise dos termos que envolvem o operador forma B

Focaremos nossa atenção no operador forma $B : T_x \mathcal{M} \rightarrow T_x \mathcal{M}$. Existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_x \mathcal{M}$ tal que $Be_1 = k_1 e_1$ e $Be_2 = k_2 e_2$ e k_1 e k_2 são as curvaturas principais de \mathcal{M} em x . A matriz de B com respeito à base $\{e_1, e_2\}$ é dada por

$$B := \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4.9)$$



Denotando $\nabla_T u = (\xi, \eta)$ as coordenadas de $\nabla_T u$ na base $\{e_1, e_2\}$, para cada $x \in \mathcal{M}$, deduzimos que

$$\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u = k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2. \quad (3.4.10)$$

Então, de (3.4.10), chegamos que

$$\begin{aligned} (m \cdot \nu) & \left[(\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) - \frac{1}{2} \text{Tr}(B) |\nabla_T u|^2 \right] \\ & = (m \cdot \nu) \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2} \xi^2 + \frac{(k_2 - k_1)}{2} \eta^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Observação 3.4.1

Observe que este é o preciso momento que as propriedades intrínsecas da variedade \mathcal{M} aparecem.

3.4.2.4. Necessidade de regiões umbílicas não dissipativas (por partes)

Nós fortemente precisamos que o termo $-\int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) H u_t^2 d\mathcal{M} dt$ encontra-se em uma região onde o termo de dissipação é efetivo. Lembremos que o termo de dissipação é efetivo sobre um conjunto aberto \mathcal{M}_* ao qual contém $\mathcal{M} \setminus \bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}_{0i}$. Assim, assumindo que $H \leq 0$ e desde $m(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ sobre \mathcal{M}_0 , decorre que

$$-\int_0^T \int_{\mathcal{M}_0} (m \cdot \nu) H |u_t|^2 d\mathcal{M} dt \leq 0.$$

Além disso, supondo que \mathcal{M}_{0i} é umbílico para todo $i = 1, \dots, k$, então, tendo (3.4.11) em mente, nós também temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{M}_{0i}} (m \cdot \nu) [H |\nabla_T u|^2 - (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u)] d\mathcal{M} dt & = 0, \\ i & = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Observe que se \mathcal{M}_0 é um pedaço da superfície cônica \mathcal{M} , isto é, $m(x) \cdot \nu(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{M}_0$, nós também deduzimos que

$$-\int_0^T \int_{\mathcal{M}_0} (m \cdot \nu) H |u_t|^2 d\mathcal{M} dt = 0.$$



$$\int_0^T \int_{\mathcal{M}_0} (m \cdot \nu) [H|\nabla_T u|^2 - (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u)] d\mathcal{M} dt = 0.$$

3.4.2.5. Superfícies constituídas por partes umbílicas:

$$H \leq 0, |k_1 - k_2| < \varepsilon, (x - x_0) \cdot \nu(x) \leq 0.$$

Veja a figura 3.1 abaixo:

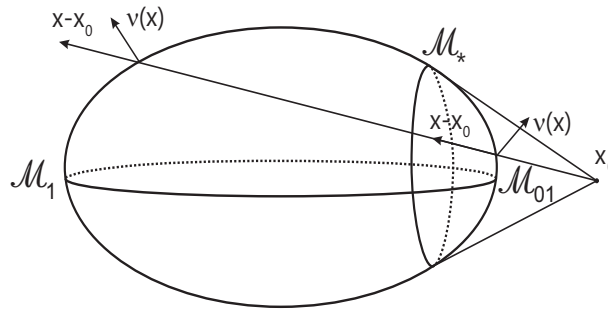


Figura 3.1: O observador está em x_0 . O subconjunto \mathcal{M}_0 é a parte “visível” de \mathcal{M} e \mathcal{M}_1 é seu complementar. O subconjunto \mathcal{M}_* é um conjunto aberto que contém $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{01}$ e a dissipação é efetiva nesta região.

3.4.2.6. Superfícies constituídas por partes cônicas: $(x - x_0) \cdot \nu(x) = 0$.

Veja figura abaixo:

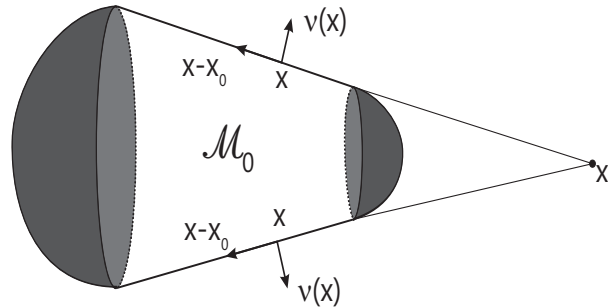


Figura 3.2: \mathcal{M}_0 é uma área não – dissipativa (em branco) que pode ser considerada tão grande quanto possível, enquanto que a área demarcada (em cinza) contém efeitos dissipativos.



3.4.2.7. Desigualdade Inversa

Note que se $a = 0$, ou seja, quando tivermos a equação da onda linear

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathcal{M}}u = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

então, $E(T) = E(0)$ para todo $T \geq 0$ e de (3.4.8), nós facilmente deduzimos a desigualdade inversa

$$E_0 \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} [u_t^2 + |\nabla_T u|^2] d\mathcal{M} dt, \quad (3.4.12)$$

onde C é uma constante positiva e $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \setminus \bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}_{0i}$. A desigualdade inversa (3.4.12)

diz que se u é zero em $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}_{0i}$, então, $u = 0$ no todo \mathcal{M} . Em outras palavras, este é um princípio de continuação única para qualquer união finita de conjuntos cônicos, umbílicos e disjuntos.

Retornando à (3.4.8), agora considerando, novamente, o termo de dissipação $a(x)g(u_t)$ e as considerações geométricas acima mencionadas em conta, deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T E(t) dt &\leq |\chi| + C_1 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) (g(u_t))^2 d\mathcal{M} dt \\ &+ C_1 \int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} [|\nabla_T u|^2 + a(x) u_t^2] d\mathcal{M} dt \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \chi &= - \left[\int_{\mathcal{M}} u_t m_T \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T - \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \\ C_1 &:= \max \{ \|a\|_{\infty} [2^{-1} \lambda_1^{-1} + 8 R^2], \|B\| R + |H| R, R |H| a_0^{-1} \}, \end{aligned}$$

$$\|B\| = \sup_{x \in \mathcal{M}} |B_x| \text{ e } |B_x| = \sup_{\{v \in T_x \mathcal{M}; |v|=1\}} |B_x v|.$$



3.4.2.8. “Cut-off” intrínseco

Resta estimar $\int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M}dt$ em termos da quantidade que envolve a dissipação $\int_0^T \int_{\mathcal{M}} [a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] d\mathcal{M}dt$. Para este propósito, teremos que construir uma função “cut-off” η_ε sobre uma específica vizinhança de \mathcal{M}_2 . Primeiro de tudo, defina $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e este é definido sobre $(0, 1/2)$ de tal forma que $\tilde{\eta}$ é uma função não – crescente de classe C^1 . Para $\varepsilon > 0$, defina $\tilde{\eta}_\varepsilon(x) := \tilde{\eta}(x/\varepsilon)$.

Pode - se mostrar que existe uma constante M que não depende sobre ε tal que

$$\frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(x)|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(x)} \leq \frac{M}{\varepsilon^2}$$

para todo $x < \varepsilon$.

Agora, seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\tilde{\omega}_\varepsilon := \left\{ x \in \mathcal{M}; d(x, \bigcup_{i=1}^k \partial\mathcal{M}_{0i}) < \varepsilon \right\}$$

é uma vizinhança tubular de $\bigcup_{i=1}^k \partial\mathcal{M}_{0i}$ e $\omega_\varepsilon := \tilde{\omega}_\varepsilon \cup \mathcal{M}_2$ é contido em \mathcal{M}_* . Defina $\eta_\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathcal{M}_2 \\ \tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \mathcal{M}_2)) & \text{se } x \in \omega_\varepsilon \setminus \mathcal{M}_2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Também pode - se provar que η_ε é uma função de classe C^1 sobre \mathcal{M} devido ao caráter suave de $\partial\mathcal{M}_2$ e $\partial\omega_\varepsilon$. Veja também que

$$\frac{|\nabla_T \eta_\varepsilon(x)|^2}{\eta_\varepsilon(x)} = \frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \mathcal{M}_2))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \mathcal{M}_2))} \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \quad (3.4.14)$$

para todo $x \in \omega_\varepsilon \setminus \mathcal{M}_2$. Em particular, $\frac{|\nabla_T \eta_\varepsilon|^2}{\eta_\varepsilon} \in L^\infty(\omega_\varepsilon)$.



Tomando $\xi = \eta_\varepsilon$ na identidade (3.4.7), nós obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt \\ &= - \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t u \eta_\varepsilon d\mathcal{M} \right]_0^T + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon |u_t|^2 d\mathcal{M} \\ & - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} u (\nabla_T u \cdot \nabla_T \eta_\varepsilon) d\mathcal{M} dt - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) g(u_t) u \eta_\varepsilon d\mathcal{M} dt. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Depois de algumas estimativas, chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt \\ & \leq |\mathcal{Y}| + \frac{\lambda_1^{-1} \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}}{4\alpha} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |g(u_t)|^2 d\mathcal{M} \\ & + 2\alpha \int_0^T E(t) dt + \frac{M}{2\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 d\mathcal{M} dt, \\ & + a_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) u_t^2 d\mathcal{M} dt, \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

onde $\alpha > 0$ é um número arbitrário e

$$\mathcal{Y} := - \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t u \eta_\varepsilon d\mathcal{M} \right]_0^T. \quad (3.4.17)$$

Então, combinando (3.4.13) e (3.4.16), tendo em mente que

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt$$

e escolhendo $\alpha = 1/16C_1$, deduzimos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_0^T E(t) dt \leq |\mathcal{X}| + 2C_1 |\mathcal{Y}| \\ & + C_2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} [a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] d\mathcal{M} dt \\ & + \frac{MC_1}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 d\mathcal{M} dt, \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

onde $C_2 = \max\{C_1, 8C_1^2 \lambda_1^{-1} \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}, 2C_1 a_0^{-1}\}$.



Por outro lado, a seguinte estimativa assegura que

$$\begin{aligned} |\chi| + 2C_2|\mathcal{Y}| &\leq C(E(0) + E(T)) \\ &= C \left[2E(T) + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u_t d\mathcal{M} \right], \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

onde C é uma constante positiva que depende sobre R . Então,

$$\begin{aligned} T E(T) &\leq \int_0^T E(t) dt \\ &\leq C E(T) + C \left[\int_0^T \int_{\mathcal{M}} [a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] d\mathcal{M} dt \right] \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 d\mathcal{M} dt, \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

de modo que C é uma constante positiva ao qual depende sobre $a_0, \|a\|_\infty, \lambda_1, R, |H|, \|B\|$ e $\frac{M}{\varepsilon^2}$.

Nosso objetivo é estimar o último termo no lado direito de (3.4.20). A fim de fazer isso, vamos considerar o seguinte lema, onde T_0 é uma constante positiva que é suficientemente grande para o nosso propósito.

Lema 3.4.3

Existe uma constante positiva $C(E(0))$ tal que se u solução de (3.4.1) com dado inicial fraco, nós temos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u|^2 d\mathcal{M} dt \\ &\leq C(E(0)) \left\{ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (a(x) g^2(u_t) + a(x) u_t^2) d\mathcal{M} dt \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

para todo $T > T_0$.

Para provar o lema acima, argumentamos por contradição e é essencial para fazer uso do resultado unicidade que vem da desigualdade inversa ou, mais genericamente, podemos também empregar o resultado continuação única de Triggiani e Yao (veja [115]) na prova. Os detalhes da prova do lema 3.4.3 podem ser encontrados em Cavalcanti et. al. [34] e [35] e omitiremos aqui.

As desigualdades (3.4.20) e (3.4.21) nos conduzem ao seguinte resultado.



Proposição 3.4.1

Para $T > 0$ suficientemente grande, a solução u de (3.4.1) satisfaz

$$E(T) \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} [a(x) |u_t|^2 + a(x) |g(u_t)|^2] d\mathcal{M}dt \quad (3.4.22)$$

onde a constante $C = C(T, E(0), a_0, \lambda_1, R, \|B\|, \frac{M}{\varepsilon^2})$.

Deste ponto, nós somos capazes de recorrer ao método de Lasiecka e Tataru [65] a fim de obter estimativas de taxas de decaimento desejadas (1.2.9).

—

**3.4.2.9. Generalização de superfícies cônicas e umbílicas
 – Novas regiões**

Invocando a segunda identidade fundamental mais uma vez, agora com $\xi = (m \cdot \nu)H$, deduzimos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu)H [|u_t|^2 - |\nabla_T u|^2] d\mathcal{M}dt \quad (3.4.23) \\ &= \left[\int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu)H u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \\ &+ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T (m \cdot \nu)H) u d\mathcal{M}dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m \cdot \nu)H u d\mathcal{M}dt. \end{aligned}$$



Substituindo (3.4.23) em (3.4.8), inferimos

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t m_T \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \\
 & + \int_0^T E(t) \, dt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m_T \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} \, dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u \, d\mathcal{M} \, dt = - \left[\int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) H u_t u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \\
 & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T (m \cdot \nu) H) u \, d\mathcal{M} \, dt \\
 & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m \cdot \nu) H u \, d\mathcal{M} \, dt. \\
 & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} \, dt.
 \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

É conveniente observar que a novidade acima são os dois termos $I_1 = - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T (m \cdot \nu) H) u \, d\mathcal{M} \, dt$ e $I_2 = - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} \, dt$. A análise dos termos restantes em (3.4.24) continua ser a mesma que considerada outrora.

Análise de $I_1 = - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T (m \cdot \nu) H) u \, d\mathcal{M} \, dt$.

Temos, para um arbitrário $\varepsilon > 0$,

$$|I_1| \leq \varepsilon \int_0^T E(t) \, dt + C_\varepsilon \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u|^2 \, d\mathcal{M} \, dt.$$

O termo remanescente $C_\varepsilon \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u|^2 \, d\mathcal{M} \, dt$ pode ser absorvido pelo uso da propriedade de continuação única devido a Triggiani e Yao [115], que é válida para variedades compactas gerais com fronteira. Resta analisar o termo I_2 , onde as novas e melhores imposições geométricas não de aparecer.

Análise de $I_2 = - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} \, dt$.

Denotemos $\nabla_T u = (\xi, \eta)$ as coordenadas de $\nabla_T u$ na base $\{e_1, e_2\}$, para cada $x \in \mathcal{M}$, deduzimos que

$$\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u = k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2.$$

3.4.2.10. Novas Condições Geométricas

A sub – superfície \mathcal{M}_0 sem dissipação deve ter curvatura Gaussiana não – negativa, isto é, $K = k_1 k_2 \geq 0$, com $k_1, k_2 \leq 0$ conexo, e o fecho da aplicação de Gauss deve



estar contida em uma semi – esfera aberta (a última condição é requerida afim de garantir que $x - x^0(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathcal{M}_0$. A condição geométrica acima, em termos da **curvatura Gaussiana** $K = k_1 k_2$ ao invés da **curvatura média** $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ nos permite generalizar nossos resultados anteriores. Contudo, observe que *nós fortemente precisamos de uma Propriedade de Continuação Única baseada nas estimativas de Carleman* ao qual foi provada por Triggiani and Yao [115] para propagação da onda sobre variedades compactas. Note que sub – superfícies umbílicas cônicas satisfazem a condição acima. Além disso, podemos considerar novas sub – superfícies sem dissipação. Veja as sub – subseções abaixo.

3.4.2.11. Superfícies cilíndricas ($K = 0$, onde $(x - x_0) \cdot \nu \leq 0$) podem ser também consideradas sem dissipação.

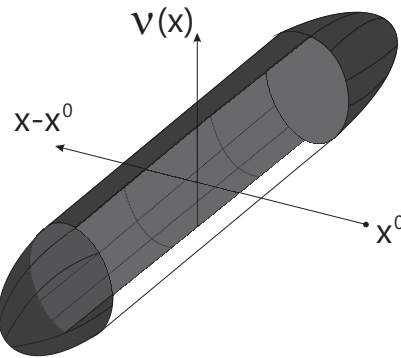


Figura 3.3: Superfícies cilíndricas ($K = 0$, onde $(x - x_0) \cdot \nu \leq 0$) podem ser também consideradas sem dissipação.

3.4.2.12. Toro: a dissipação pode ser evitada onde $m(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ e $K \geq 0$.

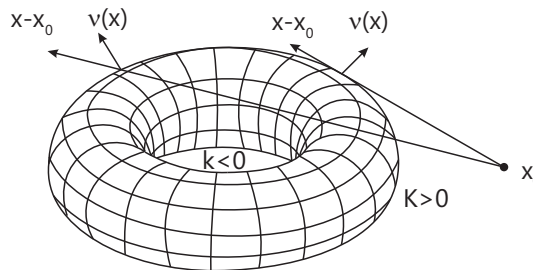


Figura 3.4: Dissipação onde $m(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ e $K \geq 0$



É importante ser mencionado que as técnicas desenvolvidas baseada sobre multiplicadores podem ser naturalmente estendidas para um número finito de observadores x_1, \dots, x_n em conexão com um número finito de *regiões disjuntas satisfazendo nossas imposições geométricas* U_1, \dots, U_n (veja figuras 3.5 e 3.7). De fato, por uma questão de simplicidade vamos considerar o caso simples, onde temos apenas dois observadores situados em x_1 e x_2 e U_1 e U_2 são umbílicos. Deste modo, é suficiente fazer uso do multiplicador $q \cdot \nabla_T u$ de modo que q é definida por

$$q(x) := \begin{cases} x - x_i & \text{se } x \in U_i, i = 1, 2, \\ \text{suavemente estendida em } \mathcal{M} \setminus (U_1 \cup U_2) \end{cases} \quad (3.4.25)$$

em conformidade com a figura 3.5.

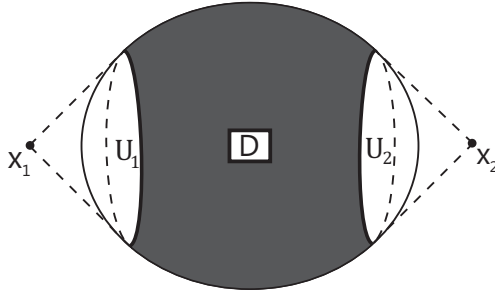


Figura 3.5: O caso da dissipação efetiva em uma vizinhança arbitrariamente pequena da esfera.

Observe que se considerarmos x_1 e x_2 opostos com respeito ao centro da **esfera** e suficientemente distante um do outro, a dissipação pode ser efetiva em uma vizinhança arbitrariamente pequena do meridiano. Isto quase alcança o notável resultado para o caso linear devido a Bardos, Lebeau e Rauch [9]. Contudo, note que temos a dissipação localizada e não – linear. Além disso, podemos estender nossos resultados para a equação da onda semilinear, também tendo em mente uma propriedade de continuação única baseada em estimativas de Carleman.



3.4.2.13. Precisão da Condição de Controle Geométrico

Veja a figura abaixo:

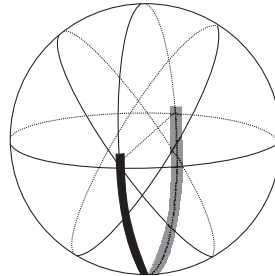


Figura 3.6: Uma das regiões da condição de controle geométrico (em preto) intercepta todos os círculos máximos da esfera, ou seja, todas as geodésicas sobre a esfera.

3.4.2.14. Se A e A' são pontos antípodos, a dissipação pode ser reduzida quando A e A' vão para o infinito.

Visualize as figuras 3.7 e 3.8.

A'



A

Figura 3.7: Note que se considerarmos A e A' observadores opostos com respeito ao centro do **Toro** e suficientemente distantes um do outro, a área sem dissipação pode ser efetiva em uma grande região (em cinza claro).

3.4.2.15. Precisão da Análise Microlocal quando comparada com Multiplicadores Radiais

Das considerações acima, não há dúvida em relação a precisão da análise microlocal (para a propagação da onda) quando comparada com a técnica de multiplicadores (compare as figuras 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8), mesmo para o caso onde há uma não – linear de dissipação distribuída:

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0, \text{ em } M \times (0, \infty).$$

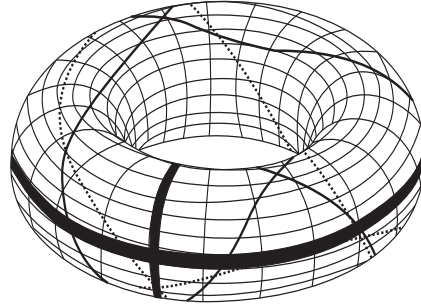


Figura 3.8: Um exemplo de uma região de condição de controle geométrica condição é dada (em preto). Note-se que ela intercepta todas as geodésicas do Toro (curvas negras).

Por outro lado, o método de multiplicador é ainda uma ferramenta poderosa para o tratamento de equações não-lineares. Para este fim, gostaríamos de comentar brevemente na próxima seção os resultados contidos em Cavalcanti et. al. [35]. Neste trabalho, os autores desenvolveram um multiplicador intrínseco como se segue. O objetivo principal deste multiplicador intrínseco é melhorar consideravelmente o seu resultado dado anteriormente *reduzindo arbitrariamente* o volume da região onde o efeito dissipativo se encontra.

• • •

3.4.3. Multiplicadores Intrínsecos

Denotando por \mathbf{g} a métrica the Riemanniana induzida por \mathcal{M} por \mathbb{R}^3 , os autores em [35] provam que para cada $\epsilon > 0$, existe um subconjunto aberto $V \subset \mathcal{M}$ e uma função suficientemente regular $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$meas(V) \geq meas(\mathcal{M}) - \epsilon, Hessf \approx \mathbf{g}$$

sobre V e $\inf_{x \in V} |\nabla f(x)| > 0$. Este novo multiplicador intrínseco $\nabla f(x)$, ao invés do anterior $m(x) = x - x^0$, irá desempenhar um papel crucial no estabelecimento da precisão das taxas de decaimento uniformes desejados da energia.



O primeiro passo é considerar uma identidade já apresentada, a saber

Proposição 3.4.2

Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada compacta sem fronteira e q um campo de vetores de classe C^1 . Então, para toda solução regular u de (3.4.1) temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t q \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}_T q) \{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \} \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \nabla_T u \cdot \nabla_T q \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (q \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} dt = 0. \end{aligned}$$

A prova é baseada na multiplicação da equação por $q \cdot \nabla_T u$ and integração por partes.

Empregando a identidade acima com $q(x) = \nabla_T f$ onde $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^3 a ser determinada posteriormente, inferimos

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \nabla_T f \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} f \{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \} \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \operatorname{Hess}(f) \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} dt = 0. \end{aligned}$$



Lema 3.4.4

Seja u uma solução fraca referente ao problema (3.4.1) e $\xi \in C^1(\mathcal{M})$. Então,

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \xi u \, d\mathcal{M} \right]_0^T = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \xi |u_t|^2 \, d\mathcal{M} dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \xi |\nabla_T u|^2 \, d\mathcal{M} dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T \xi) u \, d\mathcal{M} dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) \xi u \, d\mathcal{M} dt. \end{aligned}$$

A prova é baseada na multiplicação da equação por ξu e fazendo uso de integração por partes.

Substituindo $\xi = \alpha > 0$ na última identidade e combinando o resultado obtido com a identidade anterior, deduzimos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\Delta_{\mathcal{M}} f}{2} - \alpha \right) |u_t|^2 \, d\mathcal{M} dt. \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \left[(\nabla_T u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla_T u) + \left(\alpha - \frac{\Delta_{\mathcal{M}} f}{2} \right) |\nabla_T u|^2 \right] \, d\mathcal{M} dt \\ & = - \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \nabla_T f \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} \right]_0^T - \alpha \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \\ & - \alpha \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u \, d\mathcal{M} dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} dt. \end{aligned}$$

Este é o preciso momento onde as propriedades da função f desempenham um papel importante. Note-se que o que nós apenas precisamos é encontrar um subconjunto V de \mathcal{M} tal que

$$\begin{aligned} & C \int_0^T \int_V [u_t^2 + |\nabla_T u|^2] \, d\mathcal{M} dt \\ & \leq \int_0^T \int_V \left(\frac{\Delta_{\mathcal{M}} f}{2} - \alpha \right) |u_t|^2 \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_V \left[(\nabla_T u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla_T u) + \left(\alpha - \frac{\Delta_{\mathcal{M}} f}{2} \right) |\nabla_T u|^2 \right] \, d\mathcal{M} dt, \end{aligned}$$



para alguma constante positiva C , provida que α é adequadamente escolhida. Assumindo, por um momento, que a última desigualdade ocorre, obtemos

$$\begin{aligned}
 2C \int_0^T E(t)dt &\leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M} \setminus V} [u_t^2 + |\nabla_T u|^2] d\mathcal{M}dt & (3.4.26) \\
 &+ \left| \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \nabla_T f \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T \right| + \alpha \left| \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \right| \\
 &+ \left| \alpha \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u d\mathcal{M}dt \right| \\
 &+ \left| \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M}dt \right|.
 \end{aligned}$$

A desigualdade acima é controlada considerando um procedimento padrão. A idéia principal por trás deste procedimento é a de considerar a área de dissipação, isto é, \mathcal{M}_* , contendo o conjunto $\mathcal{M} \setminus V$. É importante observar que \mathcal{M}_* é tão pequena quanto o grande V pode ser. De (3.4.26) concluímos as estimativas de taxa de decaimento desejados como considerado anteriormente. Assim, é suficiente para provar a desigualdade principal (3.4.26) para V tão grande quanto possível. A prova completa pode ser encontrada em Cavalcanti et. al. [34] e [35].

Os próximos passos são dedicados à construção de uma função f , bem como um subconjunto V de \mathcal{M} de tal modo que a desejada desigualdade é satisfeita.

3.4.3.1. Construção da função f localmente

Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana compacta n -dimensional (sem fronteira) com métrica Riemanniana \mathbf{g} de classe C^2 . Aqui ∇ denota a conexão de Levi-Civita. Fixe $p \in \mathcal{M}$. Nosso objetivo é construir uma função $f : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Hess f \approx \mathbf{g}$ e $\inf_{x \in V_p} |\nabla f(x)| > 0$, onde V_p é uma vizinhança de p e a Hessiana de f é vista como uma forma bilinear definida sobre o espaço tangente $T_p \mathcal{M}$ de \mathcal{M} em p .

Nós começamos com uma base ortonormal (e_1, \dots, e_n) de $T_p \mathcal{M}$. Define um sistema de coordenadas normal (x_1, \dots, x_n) em uma vizinhança \tilde{V}_p de p tal que $\partial/\partial x_i(p) = e_i(p)$ para todo $i = 1, \dots, n$. É bem conhecido que neste sistema de coordenadas, temos que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel com respeito à (x_1, \dots, x_n) .

A Hessiana com respeito à (x_1, \dots, x_n) é dada por

$$Hess f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$



O Laplaciano de f é o traço da Hessiana com respeito à métrica \mathbf{g} . Se \mathbf{g}_{ij} denota os componentes da métrica Riemanniana com respeito à (x_1, \dots, x_n) e \mathbf{g}^{ij} são os componentes da matriz inversa de \mathbf{g}_{ij} , então, o Laplaciano de f é dado por

$$\Delta f = \sum_{i,j} \mathbf{g}^{ij} \text{Hess}f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Considere a função $f : \tilde{V}_p \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

É imediato que $\Delta f(p) = n$ e $|\nabla f(p)| = 1$. Além do mais, $\text{Hess}f(p) = \mathbf{g}(p)$, o que implica que

$$\text{Hess}f(p)(v, v) = |v|_p^2.$$

Nós estamos interessados em encontrar uma vizinhança $V_p \subset \tilde{V}_p$ de p e uma constante estritamente positiva C tal que

$$\begin{aligned} & C \int_0^T \int_{V_p} (|\nabla u|^2 + u_t^2) d\mathcal{M} dt \\ & \leq \int_0^T \int_{V_p} \left[\text{Hess}f(\nabla u, \nabla u) + \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 + \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha \right) u_t^2 \right] d\mathcal{M} dt, \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Afirmamos que se considerarmos $\alpha = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ e $C = 1/4$ nós obtemos a desigualdade desejada, o que significa que é suficiente provar que existe $V_p \subset \tilde{V}_p$ verificando

$$\int_0^T \int_{V_p} \text{Hess}f(\nabla u, \nabla u) + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 d\mathcal{M} dt \geq 0$$

e

$$\int_0^T \int_{V_p} \left(\frac{\Delta f}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) u_t^2 d\mathcal{M} dt \geq 0.$$

A fim de provar a existência de um subconjunto $V_p \subset \tilde{V}_p$ onde a primeira desigualdade é satisfeita, seja θ_1 um campo suave da forma bilinear simétrica sobre \tilde{V}_p definida como

$$\theta_1(X, Y) = \text{Hess}f(X, Y) + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\Delta f}{2} \right) \mathbf{g}(X, Y)$$



onde X e Y são campo de vetores sobre \tilde{V}_p .

Esta é claramente, uma forma bilinear definida positiva sobre p , desde que temos $Hessf(p)(X, Y) = \mathbf{g}(p)(X, Y)$ e

$$\theta_1(p)(X, Y) = \frac{1}{4}\mathbf{g}(p)(X, Y).$$

Portanto, existe uma vizinhança \hat{V}_p tal que θ_1 é positiva definida e

$$\int_0^T \int_{\hat{V}_p} Hessf(\nabla u, \nabla u) + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 d\mathcal{M} dt \geq 0.$$

Para provar a existência de $\check{V}_p \subset \tilde{V}_p$ tal que a desigualdade desejada é mais fácil. É suficiente notar que em p temos que

$$\left(\frac{\Delta f(p)}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

e a existência de $\check{V}_p \subset \tilde{V}_p$ é imediata. Além disso, podemos eventualmente escolher um menor V_p tal que $\inf_{x \in V_p} |\nabla f(x)| > 0$. Portanto, a existência de $V_p \subset \tilde{V}_p$ tal que $\inf_{x \in V_p} |\nabla f(x)| > 0$ e (3.4.27) estão assegurados está resolvida.

No que segue, \bar{V} denota o fecho de V e ∂V denota a fronteira de V . Quando $\bar{V} \subset W$ é limitado, dizemos que V está compactamente contido em W e o denotamos por $V \Subset W$.

Teorema 3.4.1

Seja (M, \mathbf{g}) uma variedade Riemanniana de dimensão dois. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe uma família finita $\{V_i\}_{i=1..k}$ de conjuntos abertos com fronteira regular, funções regulares $f_i : \bar{V}_i \rightarrow \mathbb{R}$ e uma constante $C > 0$ tal que

1. Os subconjuntos \bar{V}_i são disjuntos dois a dois;
2. $\text{vol} \left(\bigcup_{i=1}^k V_i \right) \geq \text{vol}(M) - \epsilon$;
3. A desigualdade (3.4.27) é satisfeita para todo f_i ;
4. $\inf_{x \in V_p} |\nabla f(x)| > 0$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Para provar este teorema, vamos considerar os seguintes passos:



Primeiro de tudo, é possível conseguir subconjuntos abertos $\{\widetilde{W}_j\}_{j=1,\dots,s}$ com fronteiras regulares e uma família de funções regulares $\{\widetilde{f}_j : \widetilde{W}_j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1,\dots,s}$ tal que $\{\widetilde{W}_j\}_{j=1,\dots,s}$ é uma cobertura de \mathcal{M} e cada \widetilde{f}_j satisfaz a desigualdade (3.4.27). E ainda, podemos escolher \widetilde{W}_j de tal maneira que as suas fronteiras interceptam-se transversalmente e três ou mais fronteiras e, não interceptam-se no mesmo ponto. Denote por $A := \bigcup_{j=1}^s \partial\widetilde{W}_j$. Então, $\mathcal{M} \setminus A$ é a união disjunta de conjuntos abertos

conexos $\bigcup_{i=1}^k W_i$ tal que ∂W_i é uma curva suave definida por partes.

Cada W_i está contida em algum \widetilde{W}_j . Portanto, para cada W_i , escolha uma função $\hat{f}_i := \widetilde{f}_j|_{W_i}$. Os subconjuntos abertos V_i , $i = 1, \dots, k$ que estamos procurando são os subconjuntos de W_i . Podemos escolhê-los de tal forma que

1. $V_i \Subset W_i$;
2. ∂V_i é regular;
3. $\text{vol}(W_i) - \text{vol}(V_i) < \epsilon/k$.

Finalmente, se definirmos $f_i = \hat{f}_i|_{V_i}$, nós provamos o teorema.

Teorema 3.4.2

Considere $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana de dimensão dois. Fixe $\epsilon > 0$. Então, existe uma função regular $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a desigualdade (3.4.27) e a condição $\inf_{x \in V_i} |\nabla f(x)| > 0$ ocorre em um subconjunto V com $\text{vol}(V) \geq \text{vol}(\mathcal{M}) - \epsilon$.

Para dar uma ideia da prova, considere Teorema 3.4.1 e as construções feitas em sua prova. Denotemos $\lambda := \min_{i \neq j} \text{dist}(V_i, V_j) > 0$. Considere um vizinhança tubular V^δ de $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$ dos pontos dos quais a distância é menor ou igual a $\delta < \lambda/4$. Em seguida, é possível definir um suave função (*cut-off*) dado por $\eta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1; & \text{se } x \in V \\ 0; & \text{se } x \in \mathcal{M} \setminus V^\delta \\ \text{entre 0 e 1;} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, observe que $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \hat{f}_i(x)\eta(x) & \text{se } x \in W_i; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é regular e satisfaz a desigualdade (3.4.27) e a condição $\inf_{x \in V} |\nabla f(x)| > 0$. Além disso, a desigualdade $\text{vol}(V) \geq \text{vol}(\mathcal{M}) - \epsilon$ satisfeita, o qual estabelece o teorema.



$$\text{meas}(V) \geq \text{meas}(\mathcal{M}) - \epsilon, \text{ Hess}f \approx \mathbf{g}$$

sobre V e $\inf_{x \in V} |\nabla f(x)| > 0$. Este novo multiplicador intrínseco $\nabla f(x)$, no lugar do anterior considerado, a saber, $m(x) = x - x^0$, desempenham um papel crucial no estabelecimento das desejadas taxas de decaimento uniformes da energia.

Embora o *resultado intrínseco* é preciso em relação ao volume em que a dissipação age, não temos qualquer controle sobre as regiões que podem ser deixadas livres de dissipação. As componentes disjuntas e conexas de V podem ser extremamente pequenas. Veja a figura abaixo.

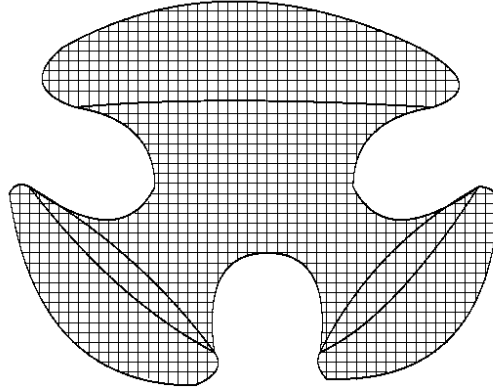


Figura 3.9: M_0 é uma área não – dissipativa (em branco) arbitrariamente grande, enquanto que a área demarcada (em preto) contém efeitos dissipativos e pode ser considerada arbitrariamente pequena, ambas totalmente distribuídas sobre M .

Em outra direção, a *visão externa* afirma que alguns domínios umbílicos de superfícies em \mathbb{R}^3 podem ser deixados livre de dissipação. Portanto, o próximo passo é o de combinar as ideias das duas técnicas e tentar colocar a dissipação em um domínio arbitrariamente pequeno, mas em tal maneira que os domínios com propriedades interessantes podem ser deixados livres de dissipação. Combinando as técnicas desenvolvidas em Cavalcanti et al., [34] e [35], podemos reduzir arbitrariamente a medida superficial da área dissipativa. Aqui o campo vetorial q é definido como

$$q(x) := \begin{cases} x - x_i & \text{se } x \in U_i, i = 1, 2, \\ \nabla f(x), \text{ Hess}(f) \approx \mathbf{g}, & \text{se } x \text{ está em algum pequeno domínio em branco} \\ D & \text{regularmente estendida, caso contrário} \end{cases}$$

onde \mathbf{g} é a métrica Riemanniana sobre \mathcal{M} (veja Figura 3.10).

Finalmente, gostaríamos de enfatizar que em Cavalcanti et. al [35] os autores têm generalizado (em algum sentido) e apenas para a equação de onda, os resultados apresentados anteriormente para variedades Riemannianas n -dimensionais (M, \mathbf{g}) com ou sem fronteira. Eles procederam do seguinte modo:

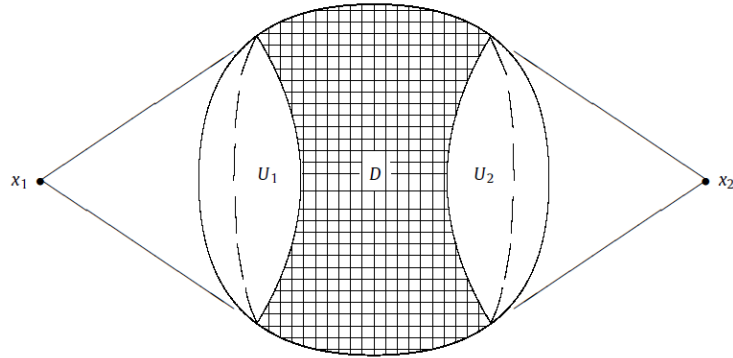


Figura 3.10: Uma superfície compacta M sem fronteira é considerada tal que $U_1 \cup U_2 \cup D$ contém M . Enquanto regiões U_1 e U_2 são umbílicas e livre de dissipação, a região D contém efeitos dissipativos, mas a medida superficial da parte branca pode ser considerada arbitrariamente grande e sua parte complementar (em preto) possui medida superficial arbitrariamente pequena. Isto pode sempre ser feito para um número finito de observadores localizados em x_1, \dots, x_n com correspondentes regiões disjuntas umbílicas U_1, \dots, U_n e uma área dissipativa D tal que a união $\bigcup_{i=1}^n U_i \cup D_i$ cobre toda a superfície M .

1. Os autores provaram que para todo $x \in M$ (incluindo o caso $x \in \partial M$), existe uma vizinhança que pode ser deixada sem dissipação;
2. Eles provaram que uma porção muito precisa de domínios radialmente simétricos pode ser deixada sem dissipação (veja figura 3.11);

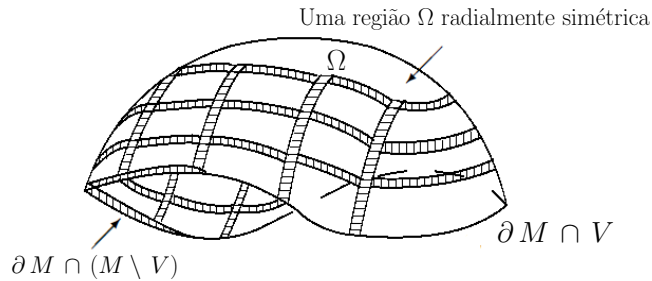


Figura 3.11: A região demarcada $M \setminus V$ (em preto) ilustra a região dissipada sobre a variedade compacta M com fronteira ∂M , o qual pode ser considerada tão pequena quanto desejarmos. O conjunto Ω é uma região radialmente simétrica sem dissipação. A medida de $\partial M \cap (M \setminus V)$ pode ser também arbitrariamente pequena.

3. Seja $\varepsilon > 0$ e V_1, \dots, V_k domínios como em (i) e (ii) cujos fechos são disjuntos dois a dois. Provamos que existe um $V \supset \cup_{i=1}^k V_i$ que pode ser deixado sem dissipação e tal que $med(V) \geq med(M) - \varepsilon$ e $med(V \cap \partial M) \geq med(\partial M) - \varepsilon$.



• • •

3.4.4. Conclusão Final

A hipótese da região de dissipação em termos dos raios da ótica geométrica tem estreita relação quando é comparada com a hipótese da existência de um “comportado” campo de vetores q . Por um lado, os resultados em termos do raio da ótica geométrica ou condição controle geométrico (CCG) são mais gerais para a equação da onda linear com um termo de dissipação não linear localmente distribuída:

$$\partial_t^2 u - \Delta u + a(x)g(\partial_t u) = 0, \text{ em } \mathcal{M} \times (0, \infty).$$

No entanto, os resultados explorando os multiplicadores também consideram a equação de onda semilinear sujeita a um mecanismo de dissipação não – linear e localizada e fornece explicitamente exemplos de regiões que podem ser deixadas sem dissipação, que pode ser uma tarefa difícil, se usarmos a hipótese sobre o raio de ótica geométrica em uma variedade Riemanniana compacta geral. Em nossa opinião, há uma profusão de espaço deixado para futuros estudos sobre as relações entre estes dois tipos diferentes de hipótese.

Por outro lado, para outras equações como equações de placas, Schrödinger, etc. A Condição de Controle Geométrico não nos dá resultados precisos em termos da redução de forma arbitrária da região onde a dissipação age. Para estas equações, mesmo se considerarmos uma dissipação não – linear e localizada na variedade Riemanniana, assumir que a desigualdade de observabilidade é válida para a equação linear, parece para ser ainda, a melhor escolha.

Equação de Schrödinger Defocusing Dissipada em um Domínio Exterior

Este capítulo foi fruto da pesquisa de doutorado em parceria com Nicolas Burq, Marcelo Moreira Cavalcanti, Valéria Neves Domingos Cavalcanti e Flávio Roberto Dias Silva.

Neste momento, estudaremos a existência bem como a estabilidade exponencial em nível de H^1 para a equação de Schrödinger *damped* (dissipada) em um domínio exterior bidimensional Ω com fronteira regular $\partial\Omega$. Usaremos propriedades de operadores pseudo – diferenciais introduzidos no Dehman, Gérard e Lebeau [48]. A boa colocação de soluções regulares é obtida argumento de ponto fixo e a desigualdade de Brézis – Gallouet, enquanto que a existência de solução fraca é alcançada por dois procedimentos: o primeiro, inspirado em Özsarı, Kalantarov e Lasiecka, [98], obtaremos a existência de solução. O outro procedimento baseado em um método de ponto fixo cujo ingrediente principal é a estimativa de Strichartz provada por Anton, [6], no qual também obtemos a unicidade. A estabilidade exponencial de soluções regulares é conseguida combinando argumentos primeiramente considerados por Zuazua [122] para a equação de onda adaptado ao presente contexto e um teorema de continuação única global.

A equação que leva título a este capítulo é a seguinte:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - |u|^2 u - \lambda u - a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.0.1)$$

onde $\lambda \geq 0$ e Ω é um domínio exterior de \mathbb{R}^2 , isto é, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_1$, onde Ω_1 é um conjunto aberto, limitado e conexo de \mathbb{R}^2 com fronteira regular $\partial\Omega_1 := \Gamma$. Dizemos que $\bar{\Omega}_1$ é um obstáculo em \mathbb{R}^2 .

A função a , responsável pela dissipação localizada, satisfaz as seguintes proprie-



dades:

$$a \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega) \text{ é uma função não - negativa.} \quad (4.0.2)$$

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \omega, \quad (4.0.3)$$

onde $\omega \subset \Omega$ é definido como segue: Seja $R > 0$ tal que $\partial\Omega \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < R\}$. Disto, definimos $\omega = \Omega \setminus B_R$.

Assumiremos que Ω_1 é *star - shaped* o que implica que Ω_1 é “*non - trapping*” (veja, por exemplo, Ivanovici et al. [60] e Stoyanov [106]).

4.1. Notações Utilizadas

Consideremos o espaço $L^2(\Omega)$ das funções complexas sobre Ω dotado com o produto interno

$$(y, z)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} y(x)\bar{z}(x) dx$$

com a correspondente norma

$$\|y\|_{L^2(\Omega)}^2 = (y, y)_{L^2(\Omega)}.$$

Também consideremos o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ munido do seguinte produto escalar

$$(y, z)_{H_0^1(\Omega)} = (y, z)_{L^2(\Omega)} + (\nabla y, \nabla z)_{L^2(\Omega)}.$$

Neste momento, nós definimos a energia associada ao problema (4.0.1):

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u(x, t)|^4 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx. \quad (4.1.1)$$

4.2. Existência de Solução

Nesta seção, mostraremos a existência de soluções H^2 e H^1 do problema (4.0.1).

• • •

4.2.1. Soluções Regulares

Inicialmente, apresentaremos as etapas necessárias para alcançar nossos objetivos.

- *Etapa 1:* Provaremos por argumentos de contração que o problema auxiliar (4.2.2) é bem - posto para soluções H^2 .
- *Etapa 2:* Usando o passo 1 e novamente argumentos de contração, provaremos a existência de solução regular local.



- *Etapa 3:* Recorrendo ao multiplicador usual $\partial_t \bar{u}$, obteremos a identidade de energia do problema (4.0.1).
- *Etapa 4:* Por fim, mostraremos na verdade que nossa solução é global, obtendo o Teorema abaixo:

Teorema 4.2.1

Para todo dado inicial $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\lambda \geq 0$, existe uma única solução (4.0.1) na classe $u \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Etapa 1

Inicialmente, lembramos o fato apontado por Dehman et al. [48], página 737 ou Laurent [74], página 794: o operador J dado por

$$Jv = (1 + ia(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x))v. \quad (4.2.1)$$

é um isomorfismo sobre $H^s(\Omega)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Ao longo da prova, denotamos o espaço $X := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e v por Ju . Consideremos o problema

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u = g & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

onde $g \in C([0, T]; X)$ com dados iniciais $u_0 \in X$. Note que o problema acima pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \partial_t v - i\Delta v - R_0 v = g \\ v = Ju \\ v(0) = v_0 = Ju_0 \in X \end{cases} \quad (4.2.3)$$

tal que o operador R_0 é caracterizado como

$$R_0 v = (-i\Delta + i\Delta J^{-1})v. \quad (4.2.4)$$

Pelo Teorema 2.8.3 juntamente com a observação 2.8.3, página 79, existe um operador de prolongamento (linear e limitado) $E : H^2(\Omega) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$E(u(x)) = u(x) \quad \text{q. s. em } \Omega. \quad (4.2.5)$$

$$\|E(u)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq \zeta \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (4.2.6)$$



Deste modo, combinando as propriedades do operador E com o Teorema 2.8.3, página 79 e considerando o operador pseudo – diferencial p of ordem $m = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|p u\|_{H^2(\Omega)} &= \|p E(u)\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{propriedade (4.2.5)}) & (4.2.7) \\ &\leq \|p E(u)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \|E(u)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \quad (\text{Teorema 2.8.3}) \\ &\leq \zeta \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{propriedade (4.2.6)}), \end{aligned}$$

onde a constante ζ provém da continuidade do operador de prolongamento.

Em contrapartida, devido à Dehman et al. [48], página 737, temos que R_0 é um operador pseudo – diferencial de ordem $m = 0$. Com efeito, a chave para provar este fato é observar

$$J = 1 + ia(1 - \Delta)^{-1}a$$

é um operador pseudo – diferencial de ordem 0 (veja Laurent [74], página 794 e observação 2.4). Como J é inversível, temos que J^{-1} é um operador pseudo – diferencial de ordem 0. E ainda, como $1 - \Delta$ é um operador pseudo - diferencial de ordem 2, temos que $(1 - \Delta)^{-1}$ tem ordem -2 e assim,

$$J - 1 = ia(1 - \Delta)^{-1}a$$

é um operador pseudo – diferencial de ordem -2 . Por outro lado, como

$$J^{-1} - 1 = J^{-1} \circ (1 - J)$$

pelo Teorema 2.8.1, página 78, temos que este é um operador pseudo – diferencial de ordem $0 + (-2) = -2$.

Conseqüentemente, recorrendo novamente ao Teorema citado acima, resulta que

$$R_0 = i\Delta(J^{-1} - I)$$

é um operador pseudo – diferencial de ordem $2 + (-2) = 0$.

Logo, à luz deste fato e da desigualdade (4.2.7), temos que o operador $R_0 : H^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$, é contínuo, isto é,

$$\|R_0 u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \zeta \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}. \quad (4.2.8)$$

Agora, a partir dessas considerações, seja o funcional

$$\begin{aligned} \Psi : C([0, T]; H^2(\Omega)) &\rightarrow C([0, T]; H^2(\Omega)) \\ v &\mapsto \Psi(v)(t) := e^{it\Delta}v_0 + \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} [R_0 h(\tau) + g(\tau)] d\tau \end{aligned}$$



que será o candidato a solução do problema, devido ao grupo de Schrödinger $e^{i\Delta}$. Com relação a este funcional, notamos que é unívoco. De fato, se $v_1 = v_2$, então, $Ju_1 = v_1 = v_2 = Ju_2$ e sendo J um isomorfismo, vem que $u_1 = u_2$, ou seja, $J^{-1}v_1 = J^{-1}v_2$. Disto, temos $R_0v_1 = R_0v_2$ e portanto, $\Psi(v_1) = \Psi(v_2)$, o que prova o desejado. Além disso, de (4.2.8) e o fato que $g \in C([0, T]; X)$, decorre que a aplicação Ψ está bem definida.

Provaremos que o Teorema do ponto fixo de Banach, Teorema 2.3.4, página 59, pode ser aplicado a $\Psi : B_R \rightarrow B_R$ onde

$$B_R = \{v \in C([0, T]; X); \|v\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))} \leq R\}$$

de modo que R é adequadamente grande e T é adequadamente pequeno, de modo que Ψ possui um ponto fixo em B_R . Nossa estratégia nesta etapa, bem como na seguinte, é baseada no trabalho de Alves e Cavalcanti, [5].

Observação 4.2.1

Uma vez que as normas $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_X$ são equivalentes em X , trabalharemos todo o tempo com a norma em $H^2(\Omega)$.

Na sequência, vamos mostrar que Ψ aplica B_R em si mesmo para R suficientemente grande e T pequeno suficiente, ou em outras palavras, vamos provar que para R grande o bastante e T suficientemente pequeno, temos

$$\|\Psi(v)\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))} \leq R \tag{4.2.9}$$

contanto que $\|v\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))} \leq R$.

De fato, seja $v \in B_R$ e levando em conta (4.2.8), inferimos

$$\begin{aligned} \|\Psi(v)(t)\|_{H^2(\Omega)} &: = \left\| e^{it\Delta}v_0 + \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} [\mathcal{R}_0v(\tau) + g(\tau)] d\tau \right\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + \zeta \int_0^T \|v(t)\|_{H^2(\Omega)} d\tau + \int_0^T \|g(\tau)\|_{H^2(\Omega)} d\tau \\ &\leq \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + T \zeta \|v\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))} + T \|g\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))} \\ &\leq \mathcal{R}_0 + T (\zeta R + \|g\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))}). \end{aligned}$$

A nossa intenção é escolher a quantidade T pequena o bastante de modo que tenhamos $\mathcal{R}_0 + T (\zeta R + \|g\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))}) < R$. Isso é possível se escolhermos $0 < T < (R - \mathcal{R}_0)(\zeta R + \|g\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))})^{-1}$, na condição que $R > \mathcal{R}_0$. Portanto, tal fato comprova (4.2.9).



Agora, provaremos que Ψ é uma contração em B_R , isto é, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \leq \alpha \|v_1 - v_2\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}; \quad \forall v_1, v_2 \in B_R. \quad (4.2.10)$$

De fato, sejam $v_1, v_2 \in B_R$. Novamente, por (4.2.8), temos a estimativa

$$\begin{aligned} \|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\|_{H^2(\Omega)} &\leq \int_0^t \|R_0(v_1 - v_2)(\tau)\|_{H^2(\Omega)} d\tau & (4.2.11) \\ &\leq T \zeta \|v_1 - v_2\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Esta estimativa implica que se $T < \zeta^{-1}$, a partir da última desigualdade, obtemos o desejado como indicado em (4.2.10). Isto demonstra que existe uma única solução para a equação de Duhamel, isto é,

$$v(t) := e^{it\Delta} v_0 + \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} [R_0 v(\tau) + g(\tau)] d\tau, \quad (4.2.12)$$

e, portanto, existe uma solução única para o problema (4.2.3).

Agora, consideramos o sistema satisfeito por duas soluções v e \tilde{v}

$$\begin{cases} \partial_t(v - \tilde{v}) - i\Delta(v - \tilde{v}) - R_0(v - \tilde{v}) = 0 \\ (v - \tilde{v})(0) = 0 \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Da definição do funcional Ψ , e repetindo argumentos anteriores, temos

$$\|v(t) - \tilde{v}(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \zeta \int_0^t \|v(\tau) - \tilde{v}(\tau)\|_{H^2(\Omega)} d\tau. \quad (4.2.14)$$

Empregando o Lema de Gronwall, Lema 2.3.9, página 60, obtemos a unicidade da solução v do sistema (4.2.3) para $t \in [0, T_{\max})$. No que segue almejamos provar que a solução é global, isto é, $T_{\max} = \infty$. Para tanto, recorramos a conhecida alternativa de *blow-up*, isto é, uma, e apenas uma, das alternativas é válida:

- (i) $T_{\max} = \infty$;
- (ii) $T_{\max} < \infty$ e, neste caso, $\lim_{t \uparrow T_{\max}} \|v(t)\|_{H^2(\Omega)} = \infty$.



Tendo isso em mente, se considerarmos $T_{\max} < +\infty$, por (4.2.12), chegamos a

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^2(\Omega)} &= \left\| e^{it\Delta} v_0 + \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} [\mathcal{R}_0 v(\tau) + g(\tau)] d\tau \right\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \|g(\tau)\|_{H^2(\Omega)} d\tau + \zeta \int_0^t \|v(\tau)\|_{H^2(\Omega)} d\tau \\ &\leq \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + T \|g\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \zeta \int_0^t \|v(\tau)\|_{H^2(\Omega)} d\tau. \end{aligned}$$

Assim, novamente pelo Lema de Gronwall, Lema 2.3.9, temos

$$\|v(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq (\|v_0\|_{H^2(\Omega)} + T \|g\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}) e^{\zeta t}. \quad (4.2.15)$$

Além disso,

$$\|v(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq (\|v_0\|_{H^2(\Omega)} + T \|g\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}) e^{\zeta T} < \infty \quad (4.2.16)$$

o que contradiz a alternativa de *blow-up* e então, podemos estender as soluções para todo o intervalo $[0, +\infty)$.

Portanto, existe uma única v e, conseqüentemente, única solução u na classe $C([0, \infty); H_0^1 \cap H^2(\Omega))$ para o problema (4.2.2), uma vez que $J^{-1}v = u$.

Etapa 2

Neste momento, tomamos $g = -i|u|^2 u - i\lambda u$ no problema (4.2.2). Segundo Brézis – Gallouet, [20], lema 3, página 678, temos que

$$\| |u|^2 u \|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}, \forall u \in H^2(\Omega). \quad (4.2.17)$$

Assim, para $u \in X$, a desigualdade acima permite-nos concluir que $-i|u|^2 u - i\lambda u \in H^2(\Omega)$, tendo em mente a imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, desde que $N = 2$.

Em seguida, para cada $u \in X$, consideremos um novo problema

$$\begin{cases} \partial_t v - i\Delta v - R_0 v = -i|u|^2 u - i\lambda u \\ v = Ju \\ v(0) = v_0 = Ju_0 \in X \end{cases} \quad (4.2.18)$$

de tal modo que o operador R_0 foi caracterizado anteriormente.

O problema (4.2.18) nos permite definir a aplicação $\Phi : C([0, T]; H^2(\Omega)) \rightarrow C([0, T]; H^2(\Omega))$, tal que $u \mapsto \Phi(u) := v$. Como feito para problema (4.2.2), pro-



vemos que o teorema do ponto – fixo de Banach pode ser aplicado para $\Phi : B_R \rightarrow B_R$ onde a bola B_R agora é definida como

$$B_R = \{u \in C([0, T]; X); \|Ju\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))} \leq R\} \quad (4.2.19)$$

contanto que R é suficientemente grande e T é pequeno, o bastante, assim Φ possui um ponto fixo em B_R . Note que $B_R \neq \emptyset$ para $R > \mathcal{R}_0$, onde $\mathcal{R}_0 := \|Ju_0\|_{H^2(\Omega)}$. Em contrapartida, para alcançar nosso objetivo, precisaremos do seguinte lema:

Lema 4.2.1

Seja $v = Ju$ dado anteriormente. Então, temos que

$$\|u(t)\|_{H^s(\Omega)} \leq c_1 \|v(t)\|_{H^s(\Omega)} \leq c_2 \|u(t)\|_{H^s(\Omega)}, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: De fato, primeiramente, recordemos que J é um isomorfismo sobre $H^s(\Omega)$ e um operador pseudo – diferencial de ordem zero (logo, pelo Teorema 2.8.1, página 78, resulta que J^{-1} também é um operador pseudo – diferencial de ordem zero). Assim, novamente de acordo com o Teorema 2.8.3 e a observação 2.8.3, página 79, temos

$$\|u(t)\|_{H^s(\Omega)} : = \|J^{-1}v(t)\|_{H^s(\Omega)} \leq c_1 \|v(t)\|_{H^s(\Omega)} \quad (4.2.20)$$

$$\|v(t)\|_{H^s(\Omega)} : = \|Ju(t)\|_{H^s(\Omega)} \leq c_2 \|u(t)\|_{H^s(\Omega)}, \quad (4.2.21)$$

onde c_1 e c_2 são constantes provenientes da continuidade referida no Teorema 2.8.3.

Assim, a partir de (4.2.20) e (4.2.21), conseguimos o almejado.

□

Na sequência, vamos comprovar que se $u \in B_R$, então $\Phi(u) \in B_R$ para R suficientemente grande e T suficientemente pequeno.

Com efeito, seja $u \in B_R$. Pela definição de B_R dada em (4.2.19), vem que $\|Ju(t)\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))} \leq R$. Tendo em vista a primeira desigualdade do Lema (4.2.1), concluímos que $\|u(t)\|_{C([0, T]; H^2(\Omega))} \leq c_1 R$.

Sendo assim, usando a conclusão acima, recordando a estimativa (4.2.17) e a



imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, observemos que

$$\begin{aligned}
 \| |u|^2 u \|_{C([0,T];H^2(\Omega))} &= \max_{t \in [0,T]} \| |u|^2 u \|_{H^2(\Omega)} \\
 &\leq \max_{t \in [0,T]} \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \} \\
 &\leq C \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^3 \\
 &= C \|u\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}^3 \\
 &\leq c_1 C R^3 := C_0 R^3.
 \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Assim, tendo em mente a substituição $g = -i |u|^2 u - i \lambda u$ em (4.2.15) e, combinando com (4.2.22), deduzimos que

$$\begin{aligned}
 \|v\|_{H^2(\Omega)} &\leq (\|v_0\|_{H^2(\Omega)} + T \| |u|^2 u \|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + T \lambda \|u\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}) e^{\zeta T} \\
 &\leq (\|Ju_0\|_{H^2(\Omega)} + T R [C_0 R^2 + \lambda]) e^{\zeta T} \\
 &= (\mathcal{R}_0 + T R [C_0 R^2 + \lambda]) e^{\zeta T}.
 \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Neste momento, o nosso desejo é escolher T suficientemente pequeno e R suficiente grande de tal forma que

$$F_R(T) := (\mathcal{R}_0 + T R [C_0 R^2 + \lambda]) e^{\zeta T} < R.$$

Vamos assumir que $R > \mathcal{R}_0$ e $T < 1$. Deste modo,

$$\mathcal{R}_0 + T R [C_0 R^2 + \lambda] e^{\zeta T} \leq (\mathcal{R}_0 + T R [C_0 R^2 + \lambda]) e^{\zeta},$$

e, a partir da última desigualdade é suficiente para escolher T de tal modo que $0 < T < \frac{R - \mathcal{R}_0}{e^{\zeta} R [C_0 R^2 + \lambda]}$.

Doravante, de (4.2.23), temos concluído que

$$\|v(t)\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \leq R \quad \text{se} \quad 0 < T < \min \left\{ 1, \frac{R - \mathcal{R}_0}{e^{\zeta} R [C_0 R^2 + \lambda]} \right\}$$

contanto que $R > \mathcal{R}_0$, o qual prova o desejado, isto é, $\Phi(u) \in B_R$, quando $u \in B_R$.

Agora, provaremos que Φ é uma contração em B_R . De fato, sejam $u_1, u_2 \in B_R$, tais que $\Phi(u_1) = v_1$ e $\Phi(u_2) = v_2$ de modo que $v_i = Ju_i$, $i = 1, 2$. Pondo $z := v_1 - v_2$,



então z é a única solução do problema

$$\begin{cases} z' - i \Delta z - R_0 z = -i (|u_1|^2 u_2 - |u_2|^2 u_1) - i \lambda (u_1 - u_2) & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \\ z(0) = 0 \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (4.2.24)$$

Repetindo os passos feitos na obtenção da desigualdade (4.2.15), agora para z , temos

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq \left(\int_0^T \| |u_1(\tau)|^2 u_1(\tau) - |u_2(\tau)|^2 u_2(\tau) \|_{H^2(\Omega)} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_0^T \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{H^2(\Omega)} d\tau \right) e^{\zeta T}. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

Na sequência, vamos provar o seguinte lema:

Lema 4.2.2

Para todo $u_1, u_2 \in B_R$, obtemos

$$\| |u_1|^2 u_1 - |u_2|^2 u_2 \|_{H^2(\Omega)} \leq C(R) \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)}. \quad (4.2.26)$$

Demonstração: Com efeito, D é denotado como qualquer operador diferencial de primeira ordem. Para $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$, vem que

$$\begin{aligned} |D^2(|u_1|^2 u_1 - |u_2|^2 u_2)| &\leq |D^2(|u_1|^2)| |u_1 - u_2| + |u_1|^2 |D^2(u_1 - u_2)| \\ &\quad + |D^2(|u_1|^2 - |u_2|^2)| |u_2| + (|u_1|^2 - |u_2|^2) |D^2 u_2| \\ &\leq 2(|Du_1|^2 + |u_1| |D^2 u_1|) |u_1 - u_2| + |u_1|^2 |D^2(u_1 - u_2)| \\ &\quad + |D^2(|u_1|^2 - |u_2|^2)| |u_2| + |u_1 - u_2| (|u_1| + |u_2|) |D^2 u_2|. \end{aligned}$$

A partir disso, obtemos,

$$\begin{aligned} \|D^2(|u_1|^2 u_1 - |u_2|^2 u_2)\|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq 4 \int_{\Omega} |Du_1|^4 |u_1 - u_2|^2 dx \\ &\quad + 4 \int_{\Omega} |u_1|^2 |D^2 u_1|^2 |u_1 - u_2|^2 dx + 2 \int_{\Omega} |u_1|^4 |D^2(u_1 - u_2)|^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} |u_2|^2 |D^2(|u_1|^2 - |u_2|^2)|^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} (|u_1|^2 + |u_2|^2) |D^2 u_2|^2 |u_1 - u_2|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Estimativa para $I_1 := 4 \int_{\Omega} |Du_1|^4 |u_1 - u_2|^2 dx$.



Inicialmente, utilizando a desigualdade de Gagliardo – Nirenberg¹, Teorema 2.3.6, página 61, inferimos:

$$\|Dy\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|y\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|y\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}, \forall y \in H^2(\Omega). \quad (4.2.28)$$

Graças à (4.2.28) e a imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, vem que

$$\begin{aligned} I_1 : &= 4 \int_{\Omega} |Du_1|^4 |u_1 - u_2|^2 dx \\ &\leq 4 \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |Du_1|^4 dx \\ &\leq C_1 \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)}^2 \|u_1\|_{H^2(\Omega)}^4 \\ &\leq C_1 R^4 \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Estimativa para $I_2 := 4 \int_{\Omega} |u_1|^2 |D^2u_1|^2 |u_1 - u_2|^2 dx$.

Observemos que

$$\begin{aligned} I_2 &= 4 \int_{\Omega} |u_1|^2 |D^2u_1|^2 |u_1 - u_2|^2 dx \\ &\leq 4 \|u_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |D^2u_1|^2 dx \\ &\leq C_2 \|u_1\|_{H^2(\Omega)}^4 \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C_2 R^4 \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Estimativa para $I_3 := 2 \int_{\Omega} |u_1|^4 |D^2(u_1 - u_2)|^2 dx$.

Notemos que

$$2 \int_{\Omega} |u_1|^4 |D^2(u_1 - u_2)|^2 dx \leq C_3 R^4 \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)}. \quad (4.2.31)$$

Estimativa para $I_4 := 2 \int_{\Omega} |u_2|^2 |D^2(|u_1|^2 - |u_2|^2)|^2 dx$.

¹ Considere $p = 4, m = r = N = 2, q = \infty, j = 1$.



Somando e subtraindo termos convenientes, temos que

$$\begin{aligned}
 I_4 &\leq \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|D^2(|u_1|^2 - |u_2|^2)\|_{L^2(\Omega)}^2 & (4.2.32) \\
 &\leq C_4 \|u_2\|_{H^2(\Omega)}^2 \|D^2[(u_1 - u_2)(\overline{u_1 + u_2}) - (u_1 \overline{u_2} - \overline{u_1} u_2)]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\leq C_4 R^2 \left[\|D^2[(u_1 - u_2)(\overline{u_1 + u_2})]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D^2[\overline{u_1}(u_1 - u_2) - u_1(\overline{u_1 - u_2})]\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
 &\leq C_5 R^2 \left(\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \|D^2(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + 2C_5 R^2 \left(\|D^2 u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D^2 u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \|D(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + C_5 R^2 \left[\left(\|D^2 u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D^2 u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)}^2 \right] \\
 &\leq (C_6 R^4 + C_7 R^3) \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Estimativa para $I_5 := 2 \int_{\Omega} (|u_1|^2 + |u_2|^2) |D^2 u_2|^2 |u_1 - u_2|^2 dx$.

Como feito anteriormente para I_2 , obtemos

$$2 \int_{\Omega} (|u_1|^2 + |u_2|^2) |D^2 u_2|^2 |u_1 - u_2|^2 dx \leq C_8 R^4 \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (4.2.33)$$

Finalmente, combinando (4.2.29) – (4.2.33), decorre que

$$\| |u_1|^2 u_1 - |u_2|^2 u_2 \|_{H^2(\Omega)} \leq (C_7 R^3 + (C_2 + C_8) R^4) \|u_1 - u_2\|_{H^2(\Omega)} \quad (4.2.34)$$

o qual prova o lema. □

Assim, de (4.2.25) e (4.2.34), resulta que

$$\begin{aligned}
 \|z(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq (C_7 R^3 + (C_2 + C_8) R^4 + \lambda) e^{\zeta T} \int_0^T \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{H^2(\Omega)} d\tau & (4.2.35) \\
 &\leq (C_7 R^3 + (C_2 + C_8) R^4 + \lambda) T e^{\zeta T} \|u_1 - u_2\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}
 \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 &\|\Phi(u_1)(t) - \Phi(u_2)(t)\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} & (4.2.36) \\
 &= \|z(t)\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \\
 &\leq (C_7 R^3 + (C_2 + C_8) R^4 + \lambda) T e^{\zeta T} \|u_1 - u_2\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}.
 \end{aligned}$$

A desigualdade acima implica que, se escolhermos T suficientemente pequeno de tal modo que $(C_7 R^3 + (C_2 + C_8) R^4 + \lambda) T e^{\zeta T} < 1$, obtemos que Φ é uma contração em B_R . A unicidade segue diretamente da primeira desigualdade de (4.2.35) e o Lema



de Gronwall, Lema 2.3.9, página 60. Portanto, existe única $u \in C([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Etapa 3

Vamos obter no que se segue, a identidade de energia para o problema (4.0.1). Com efeito, se multiplicarmos a primeira equação de (4.0.1) por $-\partial_t \bar{u}$, integrando em Ω e tomando a parte real, chegamos a seguinte identidade energia:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.2.37)$$

e, por conseguinte, a energia $E(t)$ é uma função não crescente na variável tempo t . Além disso,

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \forall t_2 \geq t_1 \geq 0. \quad (4.2.38)$$

Etapa 4

Neste momento, nosso intuito é estender toda solução regular ao intervalo $[0, \infty)$. De fato, suponhamos $T_{\max} < \infty$. De (4.2.12), com $g = -i|u|^2 u - i\lambda u$, obtemos:

$$\|v(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \left[\|R_0 v(s)\|_{H^2(\Omega)} + \|u(s)^2 u(s)\|_{H^2(\Omega)} + \lambda \|u(s)\|_{H^2(\Omega)} \right] ds. \quad (4.2.39)$$

Agora, recorrendo a (4.2.8) e (4.2.17), podemos reescrever a desigualdade acima da seguinte forma:

$$\|v(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t \left[\zeta \|v(s)\|_{H^2(\Omega)} + (\lambda + \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \|u(s)\|_{H^2(\Omega)} \right] ds. \quad (4.2.40)$$

Fazendo $t_2 = t$ e $t_1 = 0$ em (4.2.38), tendo em mente a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, vem que

$$\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\|u^0\|_{H_0^1(\Omega)}). \quad (4.2.41)$$

Assim, de (4.2.41) e uma vez que $N = 2$, podemos recorrer a conhecida desigualdade de Brézis – Gallouet, [20]:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left[1 + \sqrt{\log(1 + \|u(t)\|_{H^2(\Omega)})} \right]; \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M. \quad (4.2.42)$$



Combinando (4.2.40), (4.2.42) e o Lema 4.2.1, inferimos que

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + C \int_0^t \left[\zeta \|v(s)\|_{H^2(\Omega)} + (1 + \lambda + \log(1 + \|u(s)\|_{H^2(\Omega)})) \|u(s)\|_{H^2(\Omega)} \right] ds \\ &\leq \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + C \int_0^t \left[1 + \zeta + \lambda + \log(1 + \|v(s)\|_{H^2(\Omega)}) \right] \|v(s)\|_{H^2(\Omega)} ds. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Vamos denotar por \mathcal{G} o lado direito da última desigualdade de (4.2.43). Observe-mos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(t) &= \left[1 + \zeta + \lambda + \log(1 + \|v(t)\|_{H^2(\Omega)}) \right] \|v(t)\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \left[1 + \zeta + \lambda + \log(1 + \|\mathcal{G}(t)\|_{H^2(\Omega)}) \right] (1 + \mathcal{G}(t)). \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Em contrapartida, recorrendo a (4.2.44), decorre que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log[1 + \zeta + \lambda + \log(1 + \mathcal{G}(t))] &= \frac{1}{[1 + \zeta + \lambda + \log(1 + \mathcal{G}(t))]} \cdot \frac{1}{1 + \mathcal{G}(t)} \cdot \mathcal{G}'(t) \\ &\leq C \frac{[1 + \zeta + \lambda + \log(1 + \mathcal{G}(t))] [1 + \mathcal{G}(t)]}{[1 + \mathcal{G}(t)] [1 + \zeta + \lambda + \log(1 + \mathcal{G}(t))]}, \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{d}{dt} \log[1 + \zeta + \lambda + \log(1 + \mathcal{G}(t))] \leq C.$$

Portanto, tendo em mente novamente o Lema 4.2.1, a desigualdade acima nos permite dizer que

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq e^{\alpha e^{\beta t}} \leq C(T_{\max}),$$

o que é uma contradição. Assim, $T_{\max} = \infty$ e a solução regular é na verdade, global. Por fim, obtemos a prova do Teorema 4.2.1.

• • •

4.2.2. Soluções Fracas

—

4.2.2.1. Teoria de Operadores Monótonos

Neste momento, inspiraremos no trabalho de Özsarı, Kalantarov e Lasiecka, [98], recorrendo à teoria de operadores monótonos. Vale ressaltar, que neste caso, a solução fraca é obtida para $N = 2, 3$. Inicialmente, apresentemos a definição de solução fraca para o problema (4.0.1):



Definição 4.2.1

Dado $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, u é chamada solução fraca do problema (4.0.1) se

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \quad (4.2.45)$$

e satisfaz

$$\begin{aligned} & \int_0^T -(u(t), \partial_t \varphi(t))_{L^2(\Omega)} + i \int_0^T (\nabla u(t), \nabla \varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & + i \int_0^T \langle |u(t)|^2 u(t), \varphi(t) \rangle_{L^{4/3}(\Omega), L^4(\Omega)} dt + i \lambda \int_0^T (u(t), \varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & + i \int_0^T \langle a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u(t), \varphi(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = 0 \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e para quase todo $t \in [0, T]$.

Via teoria de semigrupos lineares, é notório o seguinte resultado:

Teorema 4.2.2

O problema

$$\begin{cases} i \partial_t z + \Delta z = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \\ z(0) = u_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.2.47)$$

admite uma única solução z na classe

$$z \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)) \quad (4.2.48)$$

com dado inicial $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Como exposto na introdução, subseção 1.3.1, no que segue, a prova da existência de soluções fracas é obtida por meio de várias etapas:

A seguir, considere o operador não – linear \mathcal{B} em $L^2(\Omega)$ definido por

$$D(\mathcal{B}) = \{y \in L^2(\Omega); |y|^2 y \in L^2(\Omega)\}, \quad (4.2.49)$$

$$\mathcal{B}y = |y|^2 y, \quad \forall y \in D(\mathcal{B}). \quad (4.2.50)$$

Como já comentado, fazendo uso do Lema 2.5.1, página 71, temos que \mathcal{B} é um operador m – acretivo. Sendo assim, pela proposição 2.6.1, página 73, podemos definir as aproximações de Yosida (que são Lipschitz contínuas) \mathcal{B}_n de \mathcal{B} em termos dos



resolventes \mathcal{J}_n , a saber,

$$\mathcal{J}_n = \left(1 + \frac{1}{n} \mathcal{B}\right)^{-1} \quad (4.2.51)$$

e

$$\mathcal{B}_n := n(I - \mathcal{J}_n) = \mathcal{B} \mathcal{J}_n. \quad (4.2.52)$$

Por meio da teoria geral de operadores monótonos (veja por exemplo, Okazawa, [90], página 271), nós podemos representar os operadores \mathcal{B} e \mathcal{B}_n , respectivamente pelas subdiferenciais de ψ e ψ_n dadas por

$$\psi(y) := \begin{cases} \frac{1}{4} \|y\|_{L^4(\Omega)}^4 & \text{para } y \in L^4(\Omega) \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2.53)$$

e (pela Proposição 2.6.2, página 73)

$$\begin{aligned} \psi_n(y) &:= \min_{v \in L^2(\Omega)} \left\{ \frac{n}{2} \|v - y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \psi_n(v) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \|\mathcal{B}_n u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \psi(\mathcal{J}_n y), \quad y \in L^2(\Omega) \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

de modo que

$$\mathcal{B} = \partial \psi, \mathcal{B}_n = \partial \psi_n$$

e,

$$\psi(\mathcal{J}_n(y)) \leq \psi_n(y) \leq \psi(y). \quad (4.2.55)$$

o o

Etapa 1

De forma análoga ao feito em (4.2.3), nós podemos reescrever o problema (4.0.1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \partial_t v - i \Delta v - R_0 v + i |J^{-1} v|^2 J^{-1} v + i \lambda J^{-1} v = 0 \\ v = Ju \\ v(0) = v_0 = Ju_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.2.56)$$

onde R_0 e J são os operadores pseudo – diferenciais de ordem zero definidos respectivamente, em (4.2.1) e (4.2.4).



o o

Etapa 2

Nós procuraremos por uma solução v descrita como $v := z + w$ onde z é solução de (4.2.47) e w satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{cases} \partial_t w - i \Delta w + F_z(w) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ w = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.2.57)$$

onde

$$F_z(w) = i \lambda J^{-1}(z + w) + i |J^{-1}(z + w)|^2 J^{-1}(z + w) - R_0(z + w).$$

Observação 4.2.2

Veja em (4.2.57) que como na função $F_z(w)$, o termo não-linear $|z + w|^2(z + w)$ não é Lipschitz em $L^2(\Omega)$, nós não podemos empregar o Lema (2.4.1), página 66. Para driblar tal obstáculo, vamos usar a mesma estratégia em Özsari, Kalantarov e Lasiecka, [98], que é a seguinte: nós substituiremos tal não-linearidade por sua aproximação de Yosida. Isto é possível, pois pelo Lema 2.5.1, $|u|^2 u$ é monótona em $L^2(\Omega)$.

o o

Etapa 3

Com tal representação apresentada na etapa 2 em mente, consideremos o seguinte problema aproximado:

$$\begin{cases} \partial_t w_n - i \Delta w_n + F_{n,z_n}(w_n) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ w_n = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \\ w_n(0) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.2.58)$$

onde

$$F_{n,z_n}(w_n) := i \mathcal{B}_n(J^{-1}(z_n + w_n)) - R_0(z_n + w_n) + i \lambda J^{-1}(z_n + w_n).$$

Por outro lado, u_0 é substituído por uma sequência de dados iniciais $\{u_n^0\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ de modo que

$$u_n^0 \rightarrow u_0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega). \quad (4.2.59)$$



o o

Etapa 4

De acordo com o Teorema (4.2.2), página 143, o problema linear

$$\begin{cases} i \partial_t z_n + \Delta z_n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ z_n = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \\ z_n(0) = u_n^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases}$$

admite uma única solução z_n para cada n tal que

$$z_n \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

Além disso,

$$z_n \rightarrow z \quad \text{em } C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$$

e

$$\frac{dz_n}{dt} \rightarrow \frac{dz}{dt} \quad \text{em } C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Agora, recorrendo ao Teorema 2.8.3 e a observação 2.8.3, página 79 para $s = 0$, vem que

$$\begin{aligned} \|R_0 y\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|y\|_{L^2(\Omega)} \\ \|J^{-1} y\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|y\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

uma vez que R_0 e J^{-1} são operadores pseudo – diferenciais de ordem zero. Logo, agregando tais informações juntamente com o fato que \mathcal{B}_n é Lipschitz com constante L_n , temos que F_{n,z_n} é Lipschitz contínua. De fato, sejam $a, b \in L^2(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} \|F_{n,z_n}(a) - F_{n,z_n}(b)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|i (\mathcal{B}_n(J^{-1}(a + z_n)) - \mathcal{B}_n(J^{-1}(b + z_n)))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \lambda \|J^{-1}(a - b)\|_{L^2(\Omega)} + \|R_0(a - b)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\lambda + L_n) \|J^{-1}(a - b)\|_{L^2(\Omega)} + \|R_0(a - b)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(L_n, \lambda, C) \|a - b\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

o que prova o afirmado.

Deste modo, pelo Lema 2.4.4, página 66, o problema (4.2.58) possui uma solução w_n para cada n na classe

$$C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$



o o

Etapa 5

Definindo $v_n := z_n + w_n$, então pela etapa anterior, resulta que

$$v_n \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)) \quad (4.2.60)$$

e resolve o problema

$$\begin{cases} \partial_t v_n - i \Delta v_n + i \lambda J^{-1} v_n + i \mathcal{B}_n(J^{-1} v_n) - R_0 v_n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ v_n = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \\ v_n(0) = v_n^0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.2.61)$$

Sendo obtida a solvabilidade do problema acima para v_n , vamos reescrever este problema em termos de u_n pela mudança de variável $v_n = J u_n$ e a definição de R_0 dada em (4.2.4), de modo a obter

$$\begin{cases} i \partial_t u_n + \Delta u_n - \lambda u_n - \mathcal{B}_n(u_n) - a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u_n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ u_n = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \\ u_n(0) = u_n^0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.2.62)$$

Portanto, para cada n , existe u_n na classe (4.2.60), uma vez que $J^{-1} v_n = u_n$. Notemos que o problema acima é uma aproximação para o nosso problema original.

o o

Etapa 6

O nosso próximo intento é obter estimativas convenientes sobre as soluções aproximantes $\{u_n\}$, de modo a passar o limite para uma subsequência ao qual converge para a solução de nosso problema original.

Para isso, multiplicando a primeira equação de (4.2.62) por $\partial_t \bar{u}_n$, integrando sobre Ω e olhando a parte real, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\nabla u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \mathcal{B}_n u_n \partial_t \bar{u}_n dx \\ & = - \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.2.63)$$

Agora, desde que ψ_n, u_n e $\partial_t u_n$ satisfazem as condições do Lema 2.6.1, página 74,



juntamente com $\partial\psi_n(u_n) = \mathcal{B}_n u_n$, inferimos que

$$\frac{d}{dt}\psi_n(u_n) = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \mathcal{B}_n u_n \partial_t \bar{u}_n dx. \quad (4.2.64)$$

Assim, usando (4.2.64), podemos reescrever (4.2.63) como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\nabla u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\psi_n(u_n) \right] = -\|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.2.65)$$

Em seguida, integrando (4.2.65) de 0 à t , tendo em mente (4.2.55) e (4.2.59) e a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, resulta que

$$\|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\mathcal{J}_n u_n\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq C \left[\|u_n^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_n^0\|_{L^4(\Omega)}^4 \right] \leq C_1. \quad (4.2.66)$$

Da desigualdade acima, podemos concluir que

$$\{u_n\} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (4.2.67)$$

$$\{\mathcal{J}_n u_n\} \quad \text{é limitada em} \quad L^4(0, T; L^4(\Omega)). \quad (4.2.68)$$

Como $\mathcal{B}_n u_n = \mathcal{B} \mathcal{J}_n u_n = |\mathcal{J}_n u_n|^2 \mathcal{J}_n u_n$, temos que

$$\{\mathcal{B}_n u_n\} \quad \text{é limitada em} \quad L^{4/3}(0, T; L^{4/3}(\Omega)). \quad (4.2.69)$$

Portanto, existem subsequências de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\mathcal{J}_n u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{B}_n u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que ainda vamos persistir em manter a notação tais que

$$u_n \xrightarrow{*} u \quad \text{fraco} - \star \text{ em} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (4.2.70)$$

$$\mathcal{J}_n u_n \rightharpoonup \mathcal{Y} \quad \text{fraco} \quad \text{em} \quad L^4(0, T; L^4(\Omega)). \quad (4.2.71)$$

$$\mathcal{B}_n u_n \rightharpoonup \mathcal{Z} \quad \text{fraco} \quad \text{em} \quad L^{4/3}(0, T; L^{4/3}(\Omega)). \quad (4.2.72)$$

Em contrapartida, precisamos exibir uma limitação para $\{\partial_t u_n\}$. Para tanto, devemos uma vez mais explorar a propriedade do operador J dado no Lema 4.2.1.

Com efeito, primeiramente, note que por (4.2.1), podemos reescrever a primeira equação de (4.2.62) como

$$i J \partial_t u_n = i \left[1 + i a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \right] \partial_t u_n = -\Delta u_n + \mathcal{B}_n u_n + \lambda u_n. \quad (4.2.73)$$

Logo, combinando (4.2.67), (4.2.69), (4.2.73) e, levando em consideração a imersão



$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, observemos que para $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \left| (J \partial_t u_n, \varphi)_{L^2(\Omega)} \right| &= \left| i (\Delta u_n, \varphi)_{L^2(\Omega)} = i \langle \mathcal{B}_n u_n, \varphi \rangle_{L^{4/3}(\Omega), L^4(\Omega)} - i \lambda (u_n, \varphi)_{L^2(\Omega)} \right| \\ &\leq \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{B}_n u_n\|_{L^{4/3}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^4(\Omega)} + \lambda \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \left\{ \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\mathcal{B}_n u_n\|_{L^{4/3}(\Omega)} \right\} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq M \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde,

$$\|J \partial_t u_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq L.$$

Agora, usando o Lema 4.2.1

$$\{\partial_t u_n\} \text{ é limitada em } L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (4.2.74)$$

ou ainda,

$$\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u \text{ fraco em } L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (4.2.75)$$

Nossa próxima tarefa é mostrar que $\mathcal{Y} = y$ e $\mathcal{Z} = |y|^2 y$. De fato, seja $\Omega \subset B_i$, de modo que

$$B_i := \{x \in \mathbb{R}^2; \|x_i\| < i\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Veja que $\Omega \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. Então, como fizemos para obter (4.2.67) e (4.2.74), podemos conseguir que

$$\begin{aligned} \{u_n\} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(B_i)) \\ \{\partial_t u_n\} &\text{ é limitada em } L^{4/3}(0, T; H^{-1}(B_i)). \end{aligned}$$

Sendo assim, pelo Teorema de Aubin – Lions, Teorema 2.3.9, página 62, chegamos que

$$u_n \rightarrow u_i \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(B_i)), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (4.2.76)$$

Por outro lado, disto e de (4.2.70), face à unicidade do limite do limite fraco em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, inferimos que $u_i = u$ quase sempre em $B_i \times [0, T]$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, novamente por (4.2.76), vem que

$$u_n \rightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(B_i)), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$u_n \rightarrow u \text{ quase sempre em } B_i \times (0, T), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (4.2.77)$$

Neste momento, tendo em mente que o operador \mathcal{B} é também acretivo (pensando no espaço \mathbb{C}), temos em virtude da Proposição 2.6.1, página 73 que \mathcal{J}_n é uma con-



tração em \mathbb{C} . Disto, juntamente com (4.2.52) e (4.2.77) e a Proposição 2.6.3, página 74, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_n u_n - u| &\leq |\mathcal{J}_n u_n - \mathcal{J}_n u| + |\mathcal{J}_n u - u| \\ &\leq |u_n - u| + \frac{1}{n} |\mathcal{B}_n u| \\ &\leq |u_n - u| + \frac{1}{n} |\mathcal{B}u| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Logo, conseguimos que

$$\mathcal{J}_n u_n \rightarrow u \quad \text{quase sempre em } B_i \times (0, T), \forall i \in \mathbb{N}. \quad (4.2.78)$$

$$\mathcal{B}_n u_n \rightarrow \mathcal{B}u \quad \text{quase sempre em } B_i \times (0, T), \forall i \in \mathbb{N} \quad (4.2.79)$$

onde a última convergência provém de (4.2.78) e o fato que a aplicação $z \mapsto \mathcal{B}z$ é contínua.

Do mesmo modo que foram alcançados (4.2.68) e (4.2.69), temos que $\{\mathcal{J}_n u_n\}$ é limitada em $L^4(0, T; L^4(B_i))$ e $\{\mathcal{B}_n u_n\}$ é limitada em $L^{4/3}(0, T; L^{4/3}(B_i))$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Assim, pelas convergências (4.2.78) e (4.2.79) e as limitações acima, graças ao Lema de Lions, Lema 2.3.10, página 63, vem que

$$\mathcal{J}_n u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } L^4(0, T; L^4(B_i)), \forall i \in \mathbb{N} \quad (4.2.80)$$

$$\mathcal{B}_n u_n \rightharpoonup |u|^2 u \quad \text{em } L^{4/3}(0, T; L^{4/3}(B_i)), \forall i \in \mathbb{N}. \quad (4.2.81)$$

Das convergências acima e de (4.2.71) e (4.2.72) (aqui, como feito antes, substituindo Ω por B_i), concluímos que $\mathcal{Y} = y$ e $\mathcal{Z} = \mathcal{B}y$ quase sempre em $B_i \times (0, T)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Disto, inferimos que $\mathcal{Y} = y$ e $\mathcal{Z} = |y|^2 y$ quase sempre em $\Omega \times (0, T)$. Logo,

$$J_n u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } L^4(0, T; L^4(\Omega)). \quad (4.2.82)$$

$$\mathcal{B}_n u_n \rightharpoonup |u|^2 u \quad \text{em } L^{4/3}(0, T; L^{4/3}(\Omega)). \quad (4.2.83)$$

Recorrendo a (4.0.1), (4.2.62) e as convergências (4.2.70), (4.2.75), (4.2.82) e



(4.2.83), veja que

$$\begin{aligned} & \left\langle a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u_n - a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u, \varphi \right\rangle_{L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega)), L^4(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &= i \left\langle \partial_t u_n - \partial_t u, \varphi \right\rangle_{L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega)), L^4(0,T;H_0^1(\Omega))} - (\nabla u_n - \nabla u, \varphi)_{L^4(0,T;L^2(\Omega))} \\ & - \left\langle \mathcal{B}_n u_n - |u|^2 u, \varphi \right\rangle_{L^{4/3}(0,T;L^{4/3}(\Omega)), L^4(0,T;L^4(\Omega))} - \lambda (u_n - u, \varphi)_{L^4(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u_n \rightharpoonup a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u \text{ fraco em } L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (4.2.84)$$

Por outro lado, de (4.2.70), podemos dizer que

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (4.2.85)$$

Além disso, seja $\varphi \in C_0^\infty([0, T]; H_0^1(\Omega))$. Assim, temos de (4.2.62) a identidade:

$$\begin{aligned} & \int_0^T -(u_n(t), \partial_t \varphi(t))_{L^2(\Omega)} + i \int_0^T (\nabla u_n(t), \nabla \varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & + i \int_0^T \left\langle \mathcal{B}_n u_n(t), \varphi(t) \right\rangle_{L^{4/3}(\Omega), L^4(\Omega)} dt + i \lambda \int_0^T (u_n(t), \varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & + i \int_0^T \left\langle a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u_n(t), \varphi(t) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = 0. \end{aligned}$$

Tendo em mente (4.2.70), (4.2.75), (4.2.83) e (4.2.84), face a passagem ao limite quando $n \rightarrow \infty$ na identidade acima, obtemos a fórmula variacional dada em (4.2.46).

Finalmente, de (4.2.46), segue que u pertence ao espaço

$$\mathcal{W}_4(0, T) = \{u \in L^4(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ tal que } \partial_t u \in L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

Deste modo, empregando a Proposição 2.3.11, página 64, temos que $\mathcal{W}_4(0, T)$ pode ser continuamente imerso no espaço $C([0, T]; L^2(\Omega))$ e, combinando este fato com (4.2.85), obtemos que u possui a regularidade dada em (4.2.45) e, portanto, a prova do Teorema (1.3.2), está concluída, no qual novamente enunciamos:

Teorema 4.2.3

Considere $N = 2, 3$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e a função a satisfazendo (4.0.2) e (4.0.3). Então, existe uma solução fraca u dada na definição 4.2.1 para o problema (4.0.1).

Se substituirmos a não – linearidade $|u|^2 u$ por $|u|^p u$ com $p > 0$ e o dado inicial



$u_0 \in H_0^1(\Omega)$ por $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega)$, repetindo o procedimento feito para obtenção do precedente teorema, temos um resultado análogo (veja o trabalho de Özsarı, Kalantarov e Lasiecka, [98] para as devidas adequações) independente da dimensão do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, a saber:

Teorema 4.2.4

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ nas condições anteriores. Considere $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega)$ e a função a satisfazendo (4.0.2) e (4.0.3). Então, existe uma solução fraca u dada na definição 4.2.1 para o problema (4.0.1) agora, definida na classe

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

—

4.2.2.2. Método do Ponto Fixo

Considere $N = 2$. O objetivo neste momento é obter a boa colocação de soluções fracas no espaço $C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$ para o problema (4.0.1).

Com efeito, inspirados em Özsarı, [97], definamos o espaço:

$$X_T \equiv C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad p > 3 \tag{4.2.86}$$

munido da norma

$$\|u\|_{X_T} := \sup_{t \in [0, T]} \left(\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^p(0, T; L^\infty(\Omega))} \right). \tag{4.2.87}$$

Uma importante ferramenta que será usada no decorrer desta prova conhecida como estimativa de Strichartz, a saber, a estimativa (2.9.4), na página 84, no qual reescrevemos novamente a seguir:

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^p(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq c(p, T) \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{4.2.88}$$

para todo $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ com $2 < p < \infty$ e $N = 2$.

Também, temos a chamada conservação do fluxo de Schrödinger:

$$\|e^{\pm it\Delta} f\|_{H_0^1(\Omega)} = \|f\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{4.2.89}$$



o o

Boa – Colocação

No intuito de obter soluções locais, usaremos o método de ponto fixo. Na sequência, definamos a aplicação Ψ por

$$[\Psi(v)](t) \equiv e^{it\Delta} v_0 + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} [R_0 v(s) - i|u(s)|^2 u(s) - i\lambda u(s)] ds. \quad (4.2.90)$$

O nosso escopo é mostrar que Ψ é uma contração de X_T para T suficientemente pequeno, do qual seguirá que esta aplicação terá um ponto fixo, em outras palavras, uma solução local.

De fato, de antemão, será preciso o seguinte resultado adaptado de Özsarı, [97]:

Lema 4.2.3

Sejam $N = 2$, $u \in X_T$ e $p > 3$. Então,

$$\int_0^T \| |u(s)|^2 u(s) \|_{H_0^1(\Omega)} ds \leq c_1^3 \left(T + 3T^{\frac{p-2}{p}} \right) \|v\|_{X_T}^3.$$

Demonstração: Com efeito, pelo Lema 4.2.1 e a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, inferimos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \| |u(s)|^2 u(s) \|_{H_0^1(\Omega)} ds &\leq \int_0^T \left(\|u\|_{L^6(\Omega)}^3 + 3 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right) dt \\ &\leq c_1^3 T \|v\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))}^3 \\ &\quad + 3 c_1 \|v\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} \left(\int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^p \right)^{2/p} \left(\int_0^T dt \right)^{\frac{p-2}{p}} \\ &\leq c_1^3 T \|v\|_{X_T}^3 + 3 c_1 T^{\frac{p-2}{p}} \|v\|_{X_T} \|e^{it\Delta} e^{-it\Delta} u\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \\ &\leq c_1^3 T \|v\|_{X_T}^3 + 3 c_1 T^{\frac{p-2}{p}} \|v\|_{X_T} \|e^{-it\Delta} u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &= c_1^3 T \|v\|_{X_T}^3 + 3 c_1 T^{\frac{p-2}{p}} \|v\|_{X_T} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq c_1^3 \left(T + 3T^{\frac{p-2}{p}} \right) \|v\|_{X_T}^3, \end{aligned} \quad (4.2.91)$$

onde na quarta desigualdade, usamos a estimativa de Strichartz (4.2.88); na igualdade acima, recorreremos a conservação do fluxo de Schrödinger dado em (4.2.89) e por fim, a última desigualdade provém do Lema 4.2.1.

□

A seguir, adaptamos o seguinte lema encontrado em Özsarı, [97]:



Lema 4.2.4

Sejam $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} & \| |u_1|^2 u_1 - |u_2|^2 u_2 \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ & \leq C \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 (\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)})^4 \\ & + C \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)})^2 (\|u_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)})^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Veja Lema 3.3 em Özsari, [97]. O autor prova este lema em um domínio limitado. Nós adaptamos esta prova para um domínio exterior, uma vez que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

□

Agora, ao denotar

$$B_R = \{z \in X_T; \|z\|_{X_T} \leq R\},$$

mostraremos que Ψ aplica B_R na bola B_R para R suficientemente grande e T pequeno o suficiente. Em outras palavras, provaremos que para R grande o suficiente e T suficientemente pequeno, temos:

$$\|\Psi(v)\|_{X_T} \leq R \tag{4.2.92}$$

desde que $\|v\|_{X_T} \leq R$ e $R > \mathcal{R}_0 := 2\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Com efeito, pela estimativa de Strichartz (4.2.88), chegamos a:

$$\begin{aligned} & \|\Psi(v)\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} \\ & = \left\| e^{it\Delta} v_0 + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} [R_0 v(s) - i|u(s)|^2 u(s) - i\lambda u(s)] ds \right\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} \\ & \leq \|e^{it\Delta} v_0\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} + \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta} R_0 v(s)\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} ds \\ & + \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s)\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} ds + \lambda \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta} u(s)\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} ds \\ & \leq \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \|R_0 v(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T \||u(s)|^2 u(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\ & + \lambda \int_0^T \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds. \end{aligned} \tag{4.2.93}$$



Por outro lado, de (4.2.89), obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\Psi(v)\|_{H_0^1(\Omega)} &= \left\| e^{it\Delta} v_0 + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} [R_0 v(s) - i|u(s)|^2 u(s) - i\lambda u(s)] ds \right\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 &\leq \|e^{it\Delta} v_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta} R_0 v(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 &\quad + \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^2 u(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \lambda \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta} u(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 &= \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \|R_0 v(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T \||u(s)|^2 u(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 &\quad + \lambda \int_0^T \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds.
 \end{aligned} \tag{4.2.94}$$

Combinando (4.2.93) e (4.2.94), resulta que

$$\begin{aligned}
 &\|\Psi(v)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\Psi(v)\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} \\
 &\leq 2 \left(\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \|R_0 v(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T \||u(s)|^2 u(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \right. \\
 &\quad \left. + \lambda \int_0^T \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \right).
 \end{aligned} \tag{4.2.95}$$

Uma vez que R_0 é um operador pseudo-diferencial de zero, tendo em mente o Lema 4.2.1, substituindo J por R_0 , vem que

$$\|R_0 v(s)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_2 \|v(s)\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{4.2.96}$$

Assim, de (4.2.94) e (4.2.96), segue de (4.2.95) que

$$\|\Psi(v)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\Psi(v)\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq \mathcal{R}_0 + 2 \left(T(c_2 + \lambda) \|v\|_{X_T} + c_1^3 \left(T + 3T^{\frac{p-2}{p}} \right) \|v\|_{X_T}^3 \right). \tag{4.2.97}$$

Vamos assumir que $T < 1$. Como $\|v\|_{X_T} \leq R$, temos que

$$\|\Psi(v)\|_{X_T} \leq \mathcal{R}_0 + 2 \left(T(c_2 + \lambda)R + 4c_1^3 TR^3 \right). \tag{4.2.98}$$

Queremos escolher T suficientemente pequeno tal que

$$\mathcal{R}_0 + 2 \left(T(c_2 + \lambda)R + 4c_1^3 TR^3 \right) < R.$$

Isto é possível, se escolhermos

$$0 < T < 2^{-1}(R - \mathcal{R}_0)[(c_2 + \lambda)R + 4c_1^3 TR^3]^{-1},$$



desde que $R > \mathcal{R}_0$. Portanto, resulta o desejado, isto é, (4.2.92).

Agora, almejamos obter uma contração para Ψ . Sejam $v_1, v_2 \in X_T$. Então, novamente pela estimativa de Strichartz (4.2.88), temos:

$$\begin{aligned}
 & \|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} \\
 & \leq \int_0^T \left\| e^{i(t-s)\Delta} R_0 (v_1(s) - v_2(s)) \right\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} ds \\
 & + \lambda \int_0^T \left\| e^{i(t-s)\Delta} (u_1(s) - u_2(s)) \right\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} ds \\
 & + \int_0^T \left\| e^{i(t-s)\Delta} (|u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s)) \right\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} ds \\
 & \leq \int_0^T \|R_0 (v_1(s) - v_2(s))\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T \left\| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & + \lambda \int_0^T \|u_1(s) - u_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & \leq c_2(1 + \lambda) \int_0^T \|v_1(s) - v_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T \left\| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds.
 \end{aligned} \tag{4.2.99}$$

Observemos, agora que por (4.2.89), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 & \leq \int_0^T \left\| e^{i(t-s)\Delta} R_0 (v_1(s) - v_2(s)) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \lambda \int_0^T \left\| e^{i(t-s)\Delta} (u_1(s) - u_2(s)) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & + \int_0^T \left\| e^{i(t-s)\Delta} (|u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s)) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & = \int_0^T \|R_0 (v_1(s) - v_2(s))\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T \left\| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & + \lambda \int_0^T \|u_1(s) - u_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & \leq c_2(1 + \lambda) \int_0^T \|v_1(s) - v_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T \left\| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds.
 \end{aligned} \tag{4.2.100}$$

Combinando (4.2.99) e (4.2.100), resulta que

$$\begin{aligned}
 & \|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 & \leq 2 \left(c_2(1 + \lambda) \int_0^T \|v_1(s) - v_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T \left\| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds \right).
 \end{aligned} \tag{4.2.101}$$



Fazendo uso do Lema 4.2.4, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left\| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & \leq C \int_0^T \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} (\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)})^2 ds \\
 & + C \int_0^T \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)} (\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)}) (\|u_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}) ds \\
 & := I_1 + I_2.
 \end{aligned} \tag{4.2.102}$$

Tendo em mente que $u_1, u_2 \in B_R$, pela desigualdade de Hölder, veja que

$$\begin{aligned}
 I_1 & \leq C \|u_1 - u_2\|_{Y_T} \left[\left(\int_0^T \|u_1\|_{L^\infty(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_0^T \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{2}{p}} \right] \left(\int_0^T dt \right)^{\frac{p-2}{p}} \\
 & = C T^{\frac{p-2}{p}} \|u_1 - u_2\|_{Y_T} [\|u_1\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 + \|u_2\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))}^2] \\
 & \leq C T^{\frac{p-2}{p}} \|u_1 - u_2\|_{X_T} [\|u_1\|_{X_T}^2 + \|u_2\|_{X_T}^2] \\
 & \leq C T^{\frac{p-2}{p}} R^2 \|u_1 - u_2\|_{X_T}.
 \end{aligned} \tag{4.2.103}$$

Agora, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{p-2}{p} = 1$, recorrendo à desigualdade de Hölder generalizada, segue que

$$\begin{aligned}
 I_2 & \leq C [\|u_1\|_{X_T} + \|u_2\|_{X_T}] \left(\int_0^T |u_1 - u_2|_{L^\infty(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \|u_1\|_{L^\infty(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T dt \right)^{\frac{p-2}{p}} \\
 & + C [\|u_1\|_{X_T} + \|u_2\|_{X_T}] \left(\int_0^T |u_1 - u_2|_{L^\infty(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T dt \right)^{\frac{p-2}{p}} \\
 & = C R T^{\frac{p-2}{p}} \|u_1 - u_2\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} [\|u_1\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|u_2\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))}] \\
 & \leq C R T^{\frac{p-2}{p}} \|u_1 - u_2\|_{X_T} [\|u_1\|_{X_T} + \|u_2\|_{X_T}] \\
 & \leq C T^{\frac{p-2}{p}} R^2 \|u_1 - u_2\|_{X_T}.
 \end{aligned} \tag{4.2.104}$$

Combinando (4.2.103) e (4.2.104), de (4.2.102) chegamos a seguinte estimativa:

$$\int_0^T \left\| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds \leq C T^{\frac{p-2}{p}} R^2 \|u_1 - u_2\|_{X_T}. \tag{4.2.105}$$



Deste modo, de (4.2.101) e (4.2.105), inferimos que

$$\begin{aligned}
 & \|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 & \leq 2c_1(1 + \lambda)T \|v_1 - v_2\|_{X_T} + 2c_1^3 C T^{\frac{p-2}{p}} \|v_1 - v_2\|_{X_T} (\|v_1\|_{X_T}^2 + \|v_2\|_{X_T}^2) \\
 & \leq T [2c_1(1 + \lambda) + 2c_1^3 C] \|v_1 - v_2\|_{X_T}
 \end{aligned} \tag{4.2.106}$$

A desigualdade acima implica que se escolhermos T suficientemente pequeno tal que

$$T [2c_1(1 + \lambda) + 2c_1^3 C] < 1,$$

resulta que Φ é uma contração em B_R .

o o

Unicidade

Sejam $v_1, v_2 \in X_T$, soluções do problema (4.2.3). Consequentemente, u_1 e u_2 são soluções de (4.0.1) também em X_T . Então, do Lema 4.2.1, (4.2.89), (4.2.96) e o fato que J é um isomorfismo sobre H^s , temos:

$$\begin{aligned}
 & \|u_1(s) - u_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 & \leq c_1 \|v_1(s) - v_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 & \leq c_1 \|e^{i(t-s)\Delta}(v_1^0 - v_2^0)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 & + c_1 \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta} R_0(v_1(s) - v_2(s))\|_{H_0^1(\Omega)} ds + c_1 \lambda \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta}(u_1(s) - u_2(s))\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & + c_1 \int_0^T \|e^{i(t-s)\Delta}(|u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s))\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & = c_1 \|v_1^0 - v_2^0\|_{H_0^1(\Omega)} + c_1 \int_0^T \|R_0(v_1(s) - v_2(s))\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & + c_1 \int_0^T \| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \|_{H_0^1(\Omega)} ds + c_1 \lambda \int_0^T \|u_1(s) - u_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & \leq c_1 c_2 \|u_1^0 - u_2^0\|_{H_0^1(\Omega)} + c_1 (c_2 + \lambda) \int_0^T \|u_1(s) - u_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & + c_1 \int_0^T \| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \|_{H_0^1(\Omega)} ds.
 \end{aligned} \tag{4.2.107}$$



Por outro lado, pelo Lema 4.2.4, observemos que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left\| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & \leq C \int_0^T \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} (\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)})^2 ds \\
 & + C \int_0^T \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)} (\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)}) (\|u_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}) ds \\
 & := C \int_0^T \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} (\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)})^2 ds + K.
 \end{aligned} \tag{4.2.108}$$

Estimativa para $K := C \int_0^T \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)} (\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)}) (\|u_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}) ds$.

Note que por (4.2.88), (4.2.89), juntamente com a desigualdade de Hölder, levando em conta a hipótese que $p > 3$ em (4.2.86) e, o fato que $u_1, u_2 \in B_R$, temos:

$$\begin{aligned}
 K & \leq R \left[\int_0^T \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^p dt \right]^{1/p} \left\{ \left[\int_0^T \|u_1\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{p}{p-1}} dt \right]^{\frac{p-1}{p}} + \left[\int_0^T \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{p}{p-1}} dt \right]^{\frac{p-1}{p}} \right\} \\
 & \leq C(R, T) T^{\frac{p-2}{p}} \{ \|u_1\|_{L^p(0, T; L^\infty(\Omega))} + \|u_2\|_{L^p(0, T; L^\infty(\Omega))} \} \int_0^T \|u_1 - u_2\|_{L^p(0, T; L^\infty(\Omega))} dt \\
 & \leq C(R, T) \int_0^T \|e^{-it\Delta}(u_1 - u_2)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} dt \\
 & = C(R, T) \int_0^T \|(u_1 - u_2)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} dt.
 \end{aligned} \tag{4.2.109}$$

Em seguida, combinando (4.2.108) e (4.2.109), inferimos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left\| |u_1(s)|^2 u_1(s) - |u_2(s)|^2 u_2(s) \right\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\
 & \leq C \left(\|u_1^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_2^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T \right) \int_0^T \mathcal{L}(t) \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} ds,
 \end{aligned} \tag{4.2.110}$$

onde

$$\mathcal{L}(t) := 1 + C_1 (\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2). \tag{4.2.111}$$

Tendo em mente (4.2.107) e (4.2.110), resulta que

$$\|u_1(s) - u_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(c_1, c_2, \lambda, R, T) \int_0^T \mathcal{L}(t) \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} ds. \tag{4.2.112}$$



Deste modo, fazendo uso do Lema de Gronwall, Proposição 2.3.9, página 60 na precedente desigualdade, concluímos que $u_1 = u_2$ em $H_0^1(\Omega)$ (o que é possível, pois, posteriormente, mostraremos que a quantidade $\mathcal{L}(t)$ é finita).

Assim, como $u_1 = u_2$ em $H_0^1(\Omega)$, novamente por (4.2.88) e (4.2.89), vem que

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} &= \|e^{it\Delta} [e^{-it\Delta}u_1 - u_2]\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} \\ &\leq \|e^{-it\Delta}(u_1 - u_2)(s)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \|(u_1 - u_2)(s)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.2.113}$$

e, portanto, segue que $u_1 = u_2$ em X_T .

Do exposto, alcançamos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.5

Para todo dado inicial $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\lambda \geq 0$, existe uma única solução $u \in X_T$ do problema (4.0.1).

o o

Solução Global

Inicialmente, mostraremos que toda solução em X_T pode ser aproximada por uma sequência de soluções regulares.

Para tanto, é oportuno recordar que na subseção 4.2.1, página 130, o problema

$$\begin{cases} \partial_t v - i \Delta v - R_0 v = g \\ v = Ju \\ v(0) = v_0 = Ju_0 \in X \end{cases} \tag{4.2.114}$$

possui uma única solução regular v na classe:

$$C([0, T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{4.2.115}$$

e, pela substituição $u = J^{-1}v$, resulta que

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{4.2.116}$$

Por outro lado, pela identidade de energia dada em (4.2.38) e a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, segue que

$$\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right). \tag{4.2.117}$$



Levando em conta o fato que $N = 2$, temos a imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, o qual implica que

$$u, v \in C([0, T]; L^\infty(\Omega)),$$

donde, $u, v \in X_T$.

Assim, de (4.2.88), (4.2.89) e (4.2.117), com respeito ao grupo unitário $e^{it\Delta}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} &= \|e^{it\Delta}[e^{-it\Delta}u]\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))} \\ &\leq \|e^{-it\Delta}u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (4.2.118)$$

então, graças a (4.2.117) e (4.2.118), concluímos que

$$\|u\|_{X_T} \leq C \left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right). \quad (4.2.119)$$

Agora, seja $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, então, existe uma sequência $u_\nu^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, tal que

$$u_\nu^0 \rightarrow u^0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \text{ quando } \nu \rightarrow +\infty. \quad (4.2.120)$$

Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, consideremos os problemas

$$\begin{cases} i\partial_t u_\nu + \Delta u_\nu - |u_\nu|^2 u_\nu - \lambda u_\nu - a(x)(1-\Delta)^{-1}a(x)\partial_t u_\nu = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u_\nu = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ u_\nu(0) = u_\nu^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.2.121)$$

e

$$\begin{cases} i\partial_t u_\mu + \Delta u_\mu - |u_\mu|^2 u_\mu - \lambda u_\mu - a(x)(1-\Delta)^{-1}a(x)\partial_t u_\mu = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u_\mu = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ u_\mu(0) = u_\mu^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.2.122)$$

Repetindo o mesmo procedimento realizado na unicidade, agora, para as soluções regulares u_ν e u_μ , tendo em mente a estimativa (4.2.119), obtemos:

$$\begin{aligned} &\|u_\nu(s) - u_\mu(s)\|_{X_T} \\ &\leq c_1 c_2 \|u_\nu^0 - u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot e \int_0^T \left[c_1 (c_2 + \lambda) + C \left(c_1, \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T \right) \mathcal{L}(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (4.2.123)$$



Em contrapartida, novamente pela desigualdade de Hölder e (4.2.118), chegamos a

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left[c_1 (c_2 + \lambda) + C \left(c_1, \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T \right) \mathcal{L}(t) \right] dt \\
 &= \int_0^T \left[c_1 (c_2 + \lambda) + C \left(c_1, \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T \right) (1 + C_1) \left(\|u_\nu\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \right] dt \\
 &= T \left[c_1 (c_2 + \lambda) + C \left(c_1, \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T \right) \right] \\
 &+ C_1 C \left(c_1, \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T \right) \left[\int_0^T \|u_\nu\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right] dt \\
 &\leq C \left(c_1, c_2, \lambda, \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T \right) \left\{ \|u_\nu\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 + \|u_\mu\|_{L^p(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \right\} \\
 &\leq C \left(c_1, c_2, \lambda, \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T \right) \left\{ \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right\} \\
 &= C \left(c_1, c_2, \lambda, \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T \right). \tag{4.2.124}
 \end{aligned}$$

Deste modo, combinando (4.2.123) e (4.2.124), temos que

$$\|u_\nu - u_\mu\|_{X_T} \leq C(\lambda, c_1, c_2, \|u_\nu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}, T) \|u_\nu^0 - u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow 0, \tag{4.2.125}$$

quando $\nu, \mu \rightarrow +\infty$, o que nos permite dizer que existe $u \in X_T$ tal que

$$u_\nu \rightarrow u \text{ em } X_T, \tag{4.2.126}$$

o que prova que toda solução em X_T pode ser aproximada por uma sequência de soluções regulares.

Do exposto, seja $\{u_\nu\}$ uma solução regular do problema (4.0.1). Logo, a identidade de energia (4.2.38) é satisfeita e fazendo uso da convergência (4.2.126), resulta que

$$\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right).$$

donde, ao supor que $T_{\max} < +\infty$, chegaremos a uma contradição pela alternativa de *blow-up*. Portanto, a nossa solução é global e assim, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.6

Dado $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\lambda \geq 0$, existe uma única solução u pertencente à classe $C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$ do problema (4.0.1).

Agradecimentos: Os autores gostariam de agradecer aos professores Patrick Gérard, Camille Laurent e Türker Özsarı por frutíferas discussões durante a preparação deste manuscrito, no qual os dois primeiros nos ajudaram no esclarecimento de algumas propriedades do operador pseudo-diferencial R_0 , enquanto o último nos ajudou no entendimento das estimativas de Strichartz para domínios exteriores.



4.3. Estabilização

Nesta seção, vamos considerar uma bola aberta centrada em zero e raio $R > 0$, B_R , tal que $\Omega_1 \subset B_R$. No que segue, iremos seguir as ideias pioneiras introduzidas por Zuazua, [122] para a equação de onda adaptadas ao nosso contexto. Nossa intenção é obter uma estimativa da energia relativamente ao termo da dissipação acrescida de um “TOM” (onde TOM significa “Termo de Ordem Menor”). Em um primeiro momento, nossa tarefa será recuperar a energia fora da bola, e, em seguida, iremos estimar a parte restante da energia dentro da bola, a fim de recuperar a energia total. No entanto, após alguns cálculos um TOM será obtido o mesmo será absorvido por contradição, explorando um resultado de continuação única. Para tanto, conforme dito na introdução, vamos assumir nossa hipótese principal:

Hipótese 4.3.1

Para todo $T > 0$, a única solução pertencendo ao espaço $C([0, T[, H^1(\Omega))$, para o sistema

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v + b_1(x, t)v + b_2(x, t)\bar{v} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{sobre } \omega, \end{cases} \quad (4.3.1)$$

onde as funções $b_1(t, x)$ e $b_2(t, x)$ pertencem à $L^\infty([0, T[, L^p(\Omega))$ para algum $p > 0$ suficientemente grande, é a solução trivial $v \equiv 0$.

Além disso, será necessário supor que Ω_1 é *Star - shaped*, em outras palavras, dado $x_0 \in \mathbb{R}^2$, fixo temos que

$$(x - x_0) \cdot \nu(x) \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega_1. \quad (4.3.2)$$

Os principal resultados desta seção é o seguinte:

Teorema 4.3.1 (*Soluções Fracas*)

Vamos supor que (4.3.2) e a Hipótese 4.3.1 estão satisfeitas. Seja u uma solução na classe $C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$ para o problema (4.0.1) de acordo com o Teorema 4.2.6 com $\lambda > 0$ e, seja $E(t)$ a energia definida como em (4.1.1). Então, existem constantes positivas T_0 , C_1 e λ_0 tais que

$$E(t) \leq C_1 e^{-\lambda_0 t} E(0); \quad \forall t \geq T_0, \quad (4.3.3)$$

desde que os dados iniciais sejam tomados em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$.

A partir de agora, trabalharemos com soluções regulares (isto é, com soluções H^2). Graças a (4.2.126), a estabilidade exponencial permanece verdadeira para soluções fra-



cas no espaço $C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$ por argumentos de densidade.

Para provar o decaimento exponencial, vamos inicialmente obter uma estimativa para a energia fora da bola. Para tanto, iniciemos com o seguinte lema:

Lema 4.3.1

Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$ e u uma solução regular para o problema (4.0.1). Temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) [|\nabla u|^2 + |u|^4 + \lambda|u|^2] dx dt \\ &= \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \partial_t u \bar{u} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \varphi(x) |u|^2 dx dt \\ & - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u \bar{u} dx dt. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Demonstração:

Multiplicando a primeira equação de (4.0.1) por $\varphi(x)\bar{u}$, tomando a parte real e integrando sobre $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$, deduzimos que

$$0 = \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \{i \partial_t u + \Delta u - \lambda u - |u|^2 u - a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u\} \varphi(x) \bar{u} dx dt. \quad (4.3.5)$$

Uma vez que

$$2 \operatorname{Re} \left[u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} |u|^2 \quad (4.3.6)$$

e tendo em vista que $\varphi \bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $|u|^2 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ (pois $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, para todo $j = 1, 2$), segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta u) \varphi \bar{u} dx dt &= - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \bar{u}) dx dt \\ &= - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla \varphi) \bar{u} dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) |\nabla u|^2 dx dt \\ &= - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \bar{u} dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) |\nabla u|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \varphi |u|^2 dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) |\nabla u|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$



Em seguida, a combinação de (4.3.5) e (4.3.8), nos fornece que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) [|\nabla u|^2 + |u|^4 + \lambda|u|^2] dx dt \\ &= \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \partial_t u \bar{u} dx dt \\ & - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u \bar{u} dx dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \varphi(x) |u|^2 dx dt. \end{aligned}$$

e sendo assim, o lema está provado. □

Vamos considerar, agora $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$0 \leq \varphi \leq 1 \text{ em } B_R^* \setminus B_R, \quad \varphi = 0 \text{ em } B_R, \quad \varphi = 1 \text{ em } \mathbb{R}^2 \setminus B_R^*. \quad (4.3.8)$$

onde $B_R \subset\subset B_R^*$ tal como ilustrado na figura 4.1:

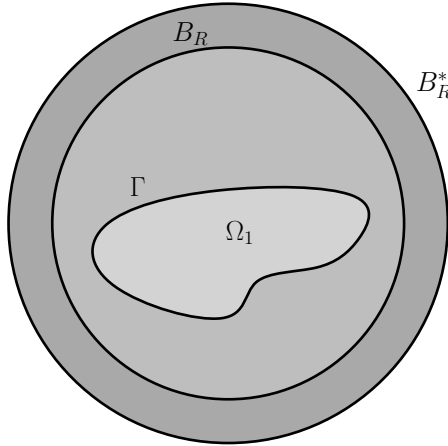


Figura 4.1: Caracterização de B_R e B_R^* .



Definamos $\tilde{B}_R := B_R \setminus \Omega_1$ e $\tilde{B}_R^* := B_R^* \setminus \Omega_1$. Assim, substituindo a função definida em (4.3.8) na identidade (4.3.4), inferimos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) [|\nabla u|^2 + |u|^4 + \lambda|u|^2] dx dt \\ &= \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) \partial_t u \bar{u} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \Delta \varphi(x) |u|^2 dx dt \\ &- \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u \bar{u} dx dt. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Agora, identificando L^2 com seu dual, considerando a identidade (2.7.2) e a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{2} b^2$, para todo $\varepsilon > 0$, e, tendo em mente que $a(x) \geq a_0 > 0$ quase sempre em ω , em particular $a(x) \geq a_0 > 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R$, chegamos a

$$\operatorname{Re} i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) \partial_t u \bar{u} dx dt \quad (4.3.10)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Re} i \int_0^T \langle \partial_t u, \varphi(x) u \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R), H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} dt \\ &\leq \int_0^T \|\partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \|\varphi(\cdot) u(t)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} dt \\ &\leq \frac{1}{2a_0^2 \varepsilon} \int_0^T \|a_0 \partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)}^2 dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \|\varphi(\cdot) u(t)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)}^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2a_0^2 \varepsilon} \int_0^T \|a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)}^2 dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \|\varphi(\cdot) u(t)\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)}^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2a_0^2 \varepsilon} \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\leq 1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) |\nabla u|^2 dx dt + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\leq 1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) |u|^2 dx dt \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |\nabla \varphi(x)|^2 |u|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$



Observação 4.3.1

Para justificar (4.3.11), seja $\partial_t u$ uma distribuição em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)$. De (4.0.2), temos que $a(x) \varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$, para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Assim, fazendo uso de (4.0.3), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \langle a_0 \partial_t u, \varphi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R), H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \right| &= |a_0| \left| \langle \partial_t u, \varphi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R), H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \right| \quad (4.3.12) \\ &\leq |a(x)| \left| \langle \partial_t u, \varphi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R), H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \right| \\ &= \left| a(x) \langle \partial_t u, \varphi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R), H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \right| \\ &= \left| \langle \partial_t u, a(x) \varphi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R), H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \right| \\ &= \left| \langle a(x) \partial_t u, \varphi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R), H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \right|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|a_0 \partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)}^2 &:= \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \leq 1} \left| \langle a_0 \partial_t u, \varphi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R), H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \right| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \leq 1} \left| \langle a(x) \partial_t u, \varphi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R), H_0^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)} \right| \\ &:= \|a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R)}^2. \end{aligned}$$

Pela ε - desigualdade de Young e novamente, face a propriedade do operador $(1 - \Delta)^{-1}$ dada em (2.7.2), página 75, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u \bar{u} \, dx dt \quad (4.3.13) \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} \circ (1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\leq 1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) |u|^2 \, dx dt \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) |u|^2 \, dx dt \\ &\leq \frac{\zeta}{2\varepsilon} \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) |u|^2 \, dx dt, \end{aligned}$$

onde ζ é uma constante proveniente da imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.



Combinando (4.3.9) – (4.3.13), deduzimos

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) |\nabla u|^2 dx dt + (\lambda - \varepsilon) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) |u|^2 dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R} \varphi(x) |u|^4 dx dt \\ & \leq C \left\{ \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(B_R^*)}^2 dt + \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

onde $C = C(a_0, \varepsilon, \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\Delta \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \zeta)$.

Observação 4.3.2

Observe que no segundo termo do lado esquerdo de (4.3.14) é o momento preciso ao qual legitimamos o uso da hipótese $\lambda > 0$.

Neste momento, a finalidade em questão é obter a quantidade $\int_0^T E(t) \Big|_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R^*} dt$ a partir de (4.3.14). Para tal finalidade, queremos escolher ε tal que

$$\begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{2} \\ \lambda - \varepsilon \geq \frac{\lambda}{2} \end{cases} \quad (4.3.15)$$

o que é permissível se considerarmos $\varepsilon \leq \min\{\frac{\lambda}{2}, 1\}$.

Assim, a partir do fato de que $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R^* \subset \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R$, $\varphi = 1$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R^*$, levando (4.3.14) e (4.3.15) em consideração, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R^*} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2} |u|^2 + \frac{1}{4} |u|^4 \right] dx dt & \leq C \left\{ \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(B_R^*)}^2 dt \right. \\ & \left. + \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Portanto, (4.3.16) nos fornece uma estimativa para a energia em $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{B}_R^*$.



Como proposto no início desta seção, a próxima tarefa será recuperar a energia dentro da bola B_R^* .

De fato, para almejar tal propósito, iniciemos com o seguinte lema, no qual sua demonstração foi inspirada no trabalho de Cavalcanti et al. [33]:

Lema 4.3.2

Seja $q \in [C^2(\bar{\Omega})]^2$ um campo de vetores. Então, para toda solução regular de (4.0.1) detém a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{Re} \left[i \int_{\tilde{B}_R^*} u(q \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} dx dt \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) |u|^4 dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} (q \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\gamma dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\gamma dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt \\
 &\quad - \lambda \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) |u|^2 d\gamma dt - \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) |u|^4 d\gamma dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt \\
 &\quad + \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} (\operatorname{div} q) \partial_\nu u \bar{u} d\gamma dt + \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt \\
 &\quad - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) a(x) u (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \\
 &\quad - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla u) a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \\
 &\quad - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\nabla \bar{u} \cdot \nabla (\operatorname{div} q)) u dx dt.
 \end{aligned}$$

Demonstração: De fato, multiplicando a equação (4.0.1) por $q(x) \cdot \nabla \bar{u}$ e integrando sobre $\tilde{B}_R^* \times (0, T)$, obtemos

$$0 = \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} [i \partial_t u + \Delta u - |u|^2 u - \lambda u - a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u] (q \cdot \nabla \bar{u}) dx dt. \quad (4.3.17)$$



Em seguida, vamos analisar o primeiro termo do lado direito de (4.3.17).

Estimativa para $I_1 := \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} i \partial_t u (q \cdot \nabla \bar{u}) dx dt$.

Integrando por partes, deduzimos que

$$I_1 = \left[i \int_{\tilde{B}_R^*} u (q \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T - i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} u (q \cdot \nabla \partial_t \bar{u}) dx dt. \quad (4.3.18)$$

Por outro lado, fazendo uso da fórmula de Gauss, atendendo a que $u = 0$ em Γ , inferimos

$$\begin{aligned} i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla u) \partial_t \bar{u} dx dt &= i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q_k \partial_t \bar{u}) \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt \\ &= -i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k \partial_t \bar{u}) u dx dt + i \int_0^T \int_{\Gamma} (q \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt + i \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt \\ &= -i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) u \partial_t \bar{u} dx dt - i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla \partial_t \bar{u}) u dx dt + i \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} -i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla \partial_t \bar{u}) u dx dt &= i \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt \\ &+ i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla u) \partial_t \bar{u} dx dt + i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) u \partial_t \bar{u} dx dt. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Substituindo (4.3.19) em (4.3.18), chegamos a

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[i \int_{\tilde{B}_R^*} u (q \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T + i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla u) \partial_t \bar{u} dx dt \\ &+ i \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) u \partial_t \bar{u} dx dt + i \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt, \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

e desde que

$$\begin{aligned} i \partial_t u &= -\Delta u + |u|^2 u + \lambda u + a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u \\ \Leftrightarrow \partial_t \bar{u} &= -i \Delta \bar{u} + i |u|^2 u + i \lambda \bar{u} + i a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u}, \end{aligned}$$



de (4.3.20), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left[i \int_{\tilde{B}_R^*} u(q \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla u) \Delta \bar{u} dx dt \\
 &- \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla u) |u|^2 \bar{u} dx dt - \lambda \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla u) \bar{u} dx dt \\
 &- \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla u) a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) \Delta \bar{u} u dx dt - \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) |u|^4 dx dt \\
 &- \lambda \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) |u|^2 dx dt - \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) a(x) u (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \\
 &+ i \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt.
 \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Tomando a parte real de (4.3.17), tendo em mente (4.3.21) e, observando que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$, para todo $z \in \mathbb{C}$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{Re} \left[i \int_{\tilde{B}_R^*} u(q \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \Delta u (q \cdot \nabla \bar{u}) dx dt \\
 &- \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |u|^2 u (q \cdot \nabla \bar{u}) dx dt - 2\lambda \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} u (q \cdot \nabla \bar{u}) dx dt \\
 &- 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (q \cdot \nabla u) a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) \Delta \bar{u} u dx dt - \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) |u|^4 dx dt - \lambda \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) |u|^2 dx dt \\
 &- \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) a(x) u (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt. \\
 &+ \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt.
 \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Nossos próximos passos serão analisar alguns termos do lado direito da identidade dada em (4.3.22).



Estimativa para $I_2 := 2 \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \Delta u (q \cdot \nabla \bar{u}) dx dt$.

Utilizando a fórmula de Gauss, temos que

$$\begin{aligned} I_2 &= -2 \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \nabla u \cdot \nabla (q \cdot \nabla \bar{u}) dx dt + 2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt \\ &+ 2 \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt \\ &= -2 \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} dx dt - 2 \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} q_k \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_k \partial x_j} dx dt \\ &+ 2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt + 2 \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt. \end{aligned}$$

Tomando a parte real de I_2 , assegura-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I_2) &= -2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} dx dt - 2 \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} q_k \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_k \partial x_j} dx dt \\ &+ 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt. \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Face à identidade

$$2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_k \partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right],$$

de (4.3.23) e fazendo uso da fórmula de Gauss, afirma-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I_2) &= -2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} dx dt + \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) |\nabla u|^2 dx dt \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma} (q \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\gamma dt - \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\gamma dt \\ &+ 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u (q \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt. \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Estimativa para $I_3 := -2 \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |u|^2 u (q \cdot \nabla \bar{u}) dx dt$.

Notemos que

$$4 \operatorname{Re} \left(y \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_k} \right) |y|^2 = \frac{\partial}{\partial x_k} [|y|^4],$$



então, como $u = 0$ sobre Γ , recorrendo a fórmula de Gauss, conseguimos a identidade:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I_3) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) |u|^4 dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} (q \cdot \nu) |u|^4 d\gamma dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) |u|^4 d\gamma dt. \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

Estimativa para $I_4 := -2\lambda \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} u(q \cdot \nabla \bar{u}) dx dt$.

Recorrendo novamente a identidade (4.3.6), assim, como foi feito para a estimativa I_3 , deduzimos que

$$\operatorname{Re}(I_4) = \lambda \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) |u|^2 dx dt - \lambda \int_0^T \int_{S_R^*} (q \cdot \nu) |u|^2 d\gamma dt. \quad (4.3.26)$$

Estimativa para $I_5 := \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) \Delta \bar{u} u dx dt$.

Aplicando a fórmula de Green, resulta que

$$\begin{aligned} I_5 &= - \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\nabla \bar{u} \cdot \nabla (\operatorname{div} q)) u dx dt - \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (\operatorname{div} q) |\nabla u|^2 dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma} (\operatorname{div} q) \partial_\nu u \bar{u} d\gamma dt + \int_0^T \int_{S_R^*} (\operatorname{div} q) \partial_\nu u \bar{u} d\gamma dt. \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Combinando (4.3.22), (4.3.24), (4.3.25), (4.3.26) e tomando a parte real de (4.3.27), concluímos o almejado.

□



Então, se substituirmos $q(x) = m(x) = x - x^0, x^0$ (fixo) no Lema 4.3.2, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Re} \left[i \int_{\tilde{B}_R^*} u(m \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T - 2 \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |\nabla u|^2 dx dt - \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |u|^4 dx dt \\
&- \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\gamma dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu u (m \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt \\
&- \int_0^T \int_{S_R^*} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\gamma dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u (m \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt \\
&- \lambda \int_0^T \int_{S_R^*} (m \cdot \nu) |u|^2 d\gamma dt - \int_0^T \int_{S_R^*} (m \cdot \nu) |u|^4 d\gamma dt \tag{4.3.28} \\
&+ 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u \bar{u} d\gamma dt + \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{S_R^*} (m \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt \\
&- 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} a(x) u (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \\
&- 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (m \cdot \nabla u) a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt.
\end{aligned}$$

Uma vez que $u = 0$ sobre Γ , segue que $\nabla \bar{u} = \partial_\nu \bar{u} \nu$ sobre Γ e, por conseguinte, tem-se

$$\begin{cases} |\nabla u|^2 = |\partial_\nu u|^2 & \text{sobre } \Gamma, \\ m \cdot \nabla \bar{u} = (m \cdot \nu) \partial_\nu \bar{u} \Rightarrow \partial_\nu u (m \cdot \nabla \bar{u}) = (m \cdot \nu) |\partial_\nu u|^2 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{4.3.29}$$

Assim, a partir de (4.3.2) e (4.3.29), temos

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\gamma dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu u (m \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt \tag{4.3.30} \\
&= \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\partial_\nu u|^2 d\gamma dt \leq 0.
\end{aligned}$$

Em seguida, devemos descartar os termos que envolvem a fronteira S_R^* em (4.3.28).

Para tal finalidade, considere em \tilde{B}_R^* duas vizinhanças tubulares de $\partial(\tilde{B}_R^*)$, a saber, $\omega_1, \omega_\varepsilon$ e definamos a função ψ

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{em } \omega_1 \\ 0 & \text{em } \tilde{B}_R^* \setminus \omega_{1\varepsilon} \end{cases}, \quad 0 < \psi(x) < 1 \quad \text{em } \tilde{B}_R^*. \tag{4.3.31}$$

onde $\omega_{1\varepsilon} = \omega_\varepsilon \cup \omega_1$.



As vizinhanças tubulares ω_1 e ω_ε são ilustradas na figura 4.2.

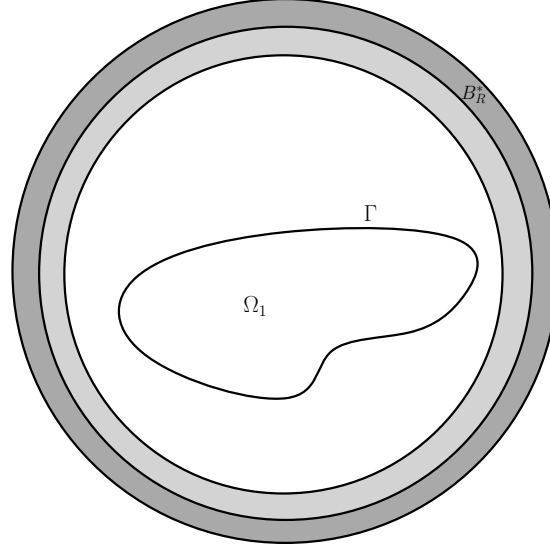


Figura 4.2: A coroa circular em cinza escuro representa ω_1 e em cinza claro representa ω_ε

À luz de (4.3.31), substituindo $q = \psi m$ no lema 4.3.2, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re} \left[i \int_{\omega_{1\varepsilon}} u(\psi m \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T - 2 \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} F \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \frac{\partial m}{\partial x_j} \right) |\nabla u|^2 dx dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} (\operatorname{div}(\psi m)) |u|^4 dx dt - \int_0^T \int_{S_R^*} (\psi m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\gamma dt \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u (\psi m \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt - \lambda \int_0^T \int_{S_R^*} (\psi m \cdot \nu) |u|^2 d\gamma dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{S_R^*} (\psi m \cdot \nu) |u|^4 d\gamma dt + \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} (\operatorname{div}(\psi m)) \partial_\nu u \bar{u} d\gamma dt \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} (\operatorname{div}(\psi m)) a(x) u (1 - \Delta)^{-1} \partial_t a(x) \bar{u} dx dt \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} (\psi m \cdot \nabla u) a(x) (1 - \Delta)^{-1} \partial_t \bar{u} dx dt + \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{S_R^*} (\psi m \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt. \end{aligned}$$



Logo, como $\psi = 1$ sobre S_R^* , notemos que

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{S_R^*} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\gamma dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u (m \cdot \nabla \bar{u}) d\gamma dt \\
& + \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{S_R^*} (m \cdot \nu) u \partial_t \bar{u} d\gamma dt - \lambda \int_0^T \int_{S_R^*} (m \cdot \nu) |u|^2 d\gamma dt \\
& - \int_0^T \int_{S_R^*} (m \cdot \nu) |u|^4 d\gamma dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{S_R^*} \partial_\nu u \bar{u} d\gamma dt \\
& = - \operatorname{Re} \left[i \int_{\omega_{1\varepsilon}} u (\psi m \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T - 2 \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} F \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \frac{\partial m}{\partial x_j} \right) |\nabla u|^2 dx dt \\
& + \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} (\operatorname{div}(\psi m)) a(x) u (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \\
& + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} (\psi m \cdot \nabla u) a(x) (1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} (\operatorname{div}(\psi m)) |u|^4 dx dt.
\end{aligned}$$

Assim, combinando esta última com identidade (4.3.28), tendo em mente (4.3.30), obtemos

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |\nabla u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |u|^4 dx dt \tag{4.3.32} \\
& \leq C \left\{ \operatorname{Re} \left[i \int_{\tilde{B}_R^*} u (m \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u|^2 dx dt \right. \\
& + \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |u|^4 dx dt + \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} a(x) u (1 - \Delta u)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \\
& \left. + \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} (m \cdot \nabla u) a(x) (1 - \Delta u)^{-1} a(x) \partial_t \bar{u} dx dt \right\},
\end{aligned}$$

onde $C = C \left(\|\nabla \psi\|_{L^\infty(\Omega)}, \|F \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \frac{\partial m}{\partial x_j} \right)\|_{L^\infty(\Omega)}, R \right)$ tal que

$$R := \max_{x \in \omega_{1\varepsilon}} \|m(x)\|_{\mathbb{R}^2}.$$



Vamos agora obter uma estimativa para

$$K_0 := \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |u|^4 dx dt.$$

Em contrapartida, uma vez que estamos supondo que os dados iniciais $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ são tomados em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$, por (4.2.38), temos

$$\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right) \leq L. \quad (4.3.33)$$

Assim, fazendo o uso de (4.3.33), inferimos

$$\begin{aligned} K_0 &\leq C \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\omega_{1\varepsilon})}^4 dt \\ &= C \int_0^T \left[\|u_0\|_{H_0^1(\omega_{1\varepsilon})}^2 \|u(t)\|_{H_0^1(\omega_{1\varepsilon})}^2 \right] dt \\ &\leq C(L) \left\{ \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u|^2 dx dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

Na sequência, estamos procurando uma estimativa para

$$\begin{aligned} K_1 : &= \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} a(x)u(1 - \Delta u)^{-1}a(x)\partial_t \bar{u} dx dt \\ &+ \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} (m \cdot \nabla u)a(x)(1 - \Delta u)^{-1}a(x)\partial_t \bar{u} dx dt. \end{aligned}$$



Com efeito, recorrendo novamente à (2.7.2), chegamos a

$$\begin{aligned}
 |K_1| &\leq \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} a(x)|u|(1-\Delta u)^{-1}a(x)\partial_t\bar{u}| \, dx \, dt \\
 &+ R \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u| |a(x)(1-\Delta u)^{-1}a(x)\partial_t\bar{u}| \, dx \, dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |u|^2 \, dx \, dt + \frac{R}{2} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt \\
 &+ \frac{R+1}{2} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T \|(1-\Delta)^{-1/2} \circ (1-\Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \\
 &\leq \frac{R}{2} \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 \, dt \\
 &+ \frac{R+1}{2} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T \|(1-\Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \, dt \\
 &\leq C \left\{ \int_0^T \|(1-\Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt + \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 \, dt \right\},
 \end{aligned} \tag{4.3.35}$$

onde $C = C(R, \zeta, \|a\|_{L^\infty(\Omega)})$ tal que ζ é uma constante que provém da imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

Assim, levando (4.3.32) – (4.3.35) em consideração, concluímos

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |\nabla u|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |u|^4 \, dx \, dt \\
 &\leq C \left\{ \operatorname{Re} \left[i \int_\Omega u(m \cdot \nabla \bar{u}) \, dx \right]_0^T + \int_0^T \|(1-\Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \right. \\
 &\left. + \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 \, dt \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.3.36}$$

Resta calcular a quantidade $\int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt$ em termos do termo de dissipação (*damping*), a saber, $\int_0^T \|(1-\Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt$ acrescido de um TOM $\int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 \, dt$.

Para este efeito, temos de construir uma função “*cut – off*” η_ε em um subconjunto específico de \mathbb{R}^2 . Em primeiro lugar, defina $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



e que é definida em $(0, 1/2)$ de tal forma que $\tilde{\eta}$ é uma função não – crescente de classe C^1 . Para $\varepsilon > 0$, definamos $\tilde{\eta}_\varepsilon(x) := \tilde{\eta}(x/\varepsilon)$. Pode -se mostrar que existe um M constante, que não depende de ε tal que

$$\frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(x)|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(x)} \leq \frac{M}{\varepsilon^2}$$

para todo $x < \varepsilon$. Agora, para $\varepsilon > 0$ fixado na construção (4.3.31), considere uma nova vizinhança tubular $\omega_{\varepsilon'}$ de raio ε , desta vez, fora de B_R^* segundo a figura 4.3

$$\omega_{2\varepsilon} = \omega_{1\varepsilon} \cup \omega_{\varepsilon'} \tag{4.3.37}$$

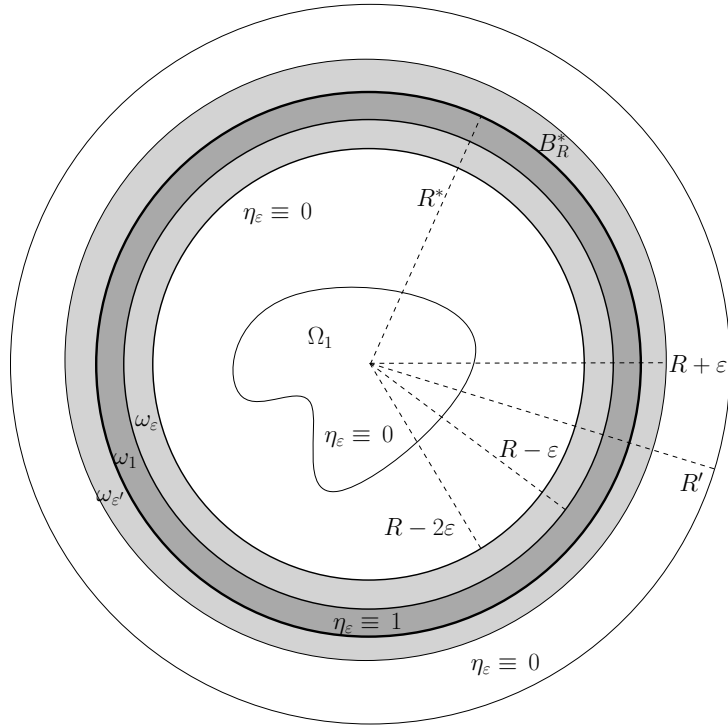


Figura 4.3: Nova vizinhança tubular $\omega_{\varepsilon'}$.

Defina $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \omega_1 \\ \tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \bar{\omega}_1)) & \text{se } x \in \omega_\varepsilon \cup \omega_{\varepsilon'} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Pode-se mostrar que η_ε é uma função de classe C^1 sobre $B_{R'}$ como $R' > R + \varepsilon$ devido a regularidade entre ω_1 e ω_ε . Note também que

$$\frac{|\nabla\eta_\varepsilon(x)|^2}{\eta_\varepsilon(x)} = \frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \bar{\omega}_1))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \bar{\omega}_1))} \leq \frac{M}{\varepsilon^2}, \quad (4.3.38)$$

para cada $x \in \omega_1$. Em particular, $\frac{|\nabla\eta_\varepsilon|^2}{\eta_\varepsilon} \in L^\infty(\omega_{2\varepsilon})$.

Então, construamos, como no Lema 2.4 em Lions [[80], capítulo 7, página 413] um “cut – off” $\eta \in W^{1,\infty}(B_{R'})$, satisfazendo

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1 \text{ q. s. em } B_{R'} \\ \eta = 0 \text{ em } (B_{R'} \setminus \omega_{2\varepsilon}) \\ \eta = 1 \text{ q. s. em } \omega_{1\varepsilon}, \\ \frac{|\nabla\eta|^2}{\eta} \in L^\infty(\omega_{2\varepsilon}), \end{cases} \quad (4.3.39)$$

onde $\omega_{2\varepsilon}$ é a vizinhança considerada em (4.3.37).

Multiplicando a equação (4.0.1) por $\eta\bar{u}$ e integrando sobre $B_{R'} \times (0, T)$, conseguimos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} \eta [|\nabla u|^2 + \lambda|u|^2 + |u|^4] dx dt \\ &= i \int_0^T \langle \partial_t u, \eta u \rangle_{H^{-1}(\omega_{2\varepsilon}), H_0^1(\omega_{2\varepsilon})} dt - \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} u(\nabla\eta \cdot \nabla\bar{u}) dx dt \\ & - \int_0^T (a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u, \eta u)_{L^2(\omega_{2\varepsilon})} dt. \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} u(\nabla\eta \cdot \nabla\bar{u}) dx dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^T \left[\int_{\omega_{2\varepsilon}} \eta |\nabla u|^2 dx + \int_{\omega_{2\varepsilon}} \frac{|\nabla\eta|^2}{\eta} |u|^2 dx \right] dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^T \left[\int_{\omega_{2\varepsilon}} \eta |\nabla u|^2 dx + \left\| \frac{|\nabla\eta|^2}{\eta} \right\|_{L^\infty(\omega_{2\varepsilon})} \int_{\omega_{2\varepsilon}} |u|^2 dx \right] dt, \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

Defina

$$K_2 := i \int_0^T \langle \partial_t u, \eta u \rangle_{H^{-1}(\omega_{2\varepsilon}), H_0^1(\omega_{2\varepsilon})} dt + \int_0^T (a(x)(1 - \Delta)^{-1}a(x)\partial_t u, u)_{L^2(\omega_{2\varepsilon})} dt.$$



Usando as mesmas ideias utilizadas para estimar (4.3.10) e (4.3.13), temos a seguinte estimativa para K_2 dada por

$$|K_2| \leq C \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \quad (4.3.42)$$

$$+ \varepsilon' \|\eta\|_{L^\infty(\omega_{2\varepsilon})}^2 \int_0^T \|u\|_{L^2(\omega_{2\varepsilon})}^2 dt + \varepsilon' \|\eta\|_{L^\infty(\omega_{2\varepsilon})} \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} \eta |\nabla u|^2 dx dt$$

onde $C = \max \left\{ 1, \frac{\|\eta\|_{L^\infty(\omega_{2\varepsilon})}}{4a_0^2\varepsilon} \right\}$.

Coletando nossos resultados em (4.3.40), (4.3.41) e (4.3.42), deduzimos para ε' suficientemente pequeno que

$$\int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} \eta [|\nabla u|^2 + \lambda|u|^2 + |u|^4] dx dt \quad (4.3.43)$$

$$\leq C \left\{ \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \right\},$$

tal que $C = \left\{ \varepsilon', \|\eta\|_{L^\infty(\omega_{2\varepsilon})}, \left\| \frac{|\nabla \eta|^2}{\eta} \right\|_{L^\infty(\omega_{2\varepsilon})} \right\}$.

Tendo em mente que

$$\int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u|^2 dx dt = \int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} \eta |\nabla u|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} \eta |\nabla u|^2 dx dt,$$

de (4.3.43), inferimos

$$\int_0^T \int_{\omega_{1\varepsilon}} |\nabla u|^2 dx dt \leq C \left\{ \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \quad (4.3.44)$$

$$+ \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \right\}.$$

Assim, combinando (4.3.36) e (4.3.44), concluímos

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |\nabla u|^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |u|^4 dx dt \quad (4.3.45)$$

$$\leq C \left\{ \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega_1} u(m \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T + \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right.$$

$$\left. + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \right\}.$$



Somando o termo $\frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\tilde{B}_R^*} |u|^2 dx dt$ em ambos os lados da desigualdade (4.3.45), resulta

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) \Big|_{\tilde{B}_R^*} dt &\leq C \left\{ \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} u(m \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

donde obtemos uma estimativa para a energia dentro da bola \tilde{B}_R^* .

Assim, de (4.3.16) e (4.3.46), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) dt &\leq C \left\{ \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} u(m \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\tilde{B}_R^*)}^2 dt \right\} \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

de modo que o integrando do lado esquerdo de (4.3.47) representa a energia total.

Ainda nos resta estimar o seguinte termo:

$$N_1 : = \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} u(m \cdot \nabla \bar{u}) dx \right]_0^T.$$

Em verdade, notemos que pela identidade de energia (4.2.38), vem que

$$\begin{aligned} |N_1| &\leq C \{E(T) + E(0)\} \\ &= C \left\{ 2E(T) + \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right\} \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

e $C = C(R)$.

Levando (4.3.47) em consideração e o fato que a energia $E(t)$ é não – crescente para todo $t \geq 0$, de (4.3.48), concluímos que

$$\begin{aligned} TE(T) &\leq \int_0^T E(t) dt \\ &\leq C \left\{ 2E(T) + \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(B_R^*)}^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.49)$$



Para T suficientemente grande, obtemos

$$E(T) \leq C \left\{ \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(B_R^*)}^2 dt + \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right\} \quad (4.3.50)$$

de modo que $C = C(T)$.

Com o intuito de provar a desigualdade (4.3.3), em conformidade com (4.3.50), resta a absorver o TOM := $\int_0^T \int_{B_R^*} |u|^2 dx dt$.

À vista disso, temos o seguinte resultado:

Lema 4.3.3

Dado $T > 0$ existe $C = C(T) > 0$ tal que toda solução regular para problema (4.0.1) satisfaz a desigualdade

$$\int_0^T \|u\|_{L^2(B_R^*)}^2 dt \leq C \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \quad (4.3.51)$$

desde que os dados iniciais são tomados em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Argumentaremos por contradição. Suponha que (4.3.51) não se sustenta. Então, existe uma sequência de dados iniciais $\{u_{0\mu}\}_{\mu \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$, assumida a ser tomada em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$ e uma sequência de soluções regulares $\{u_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ referente ao problema (4.0.1), para todo $\mu \in \mathbb{N}$, verificando

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \|u_\mu(t)\|_{L^2(B_R^*)}^2 dt}{\int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt} = +\infty, \quad (4.3.52)$$

isto é,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt}{\int_0^T \|u_\mu(t)\|_{L^2(B_R^*)}^2 dt} = 0. \quad (4.3.53)$$

Sabemos que a energia é uma função não – crescente sobre o parâmetro t , então, $E_\mu(t) \leq E_\mu(0) \leq L$. Assim, existe uma subsequência de $\{u_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$, ainda denotada da mesma forma, e $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ tal que

$$u_\mu \xrightarrow{*} u \text{ fraco-}^* \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (4.3.54)$$

A partir disso, obtemos

$$\{u_\mu\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (4.3.55)$$



Desde que $E_\mu(t)$ é limitada para todo $t \geq 0$ e levando (4.3.53) em conta, inferimos

$$(1 - \Delta)^{-1/2} a(x) \partial_t u_\mu \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.3.56)$$

À luz da identidade (2.7.1), página 74, decorre que

$$\begin{aligned} \|a(\cdot)(1 - \Delta)^{-1} a(\cdot) \partial_t u_\mu(t)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|(1 - \Delta)^{-1} a(\cdot) \partial_t u_\mu(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (4.3.57) \\ &= \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|(1 - \Delta)^{1/2} \circ (1 - \Delta)^{-1} a(\cdot) \partial_t u_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Assim, combinando (4.3.56) e (4.3.57), concluímos que

$$a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u_\mu \longrightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (4.3.58)$$

Além do mais, devido à identidade (2.7.2) e a convergência (4.3.56), vem que

$$a(x) \partial_t u_\mu \rightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (4.3.59)$$

consequentemente, do pressuposto sobre $a(x)$, a saber, $a(x) \geq a_0 > 0$ q. s. em ω , chegamos a seguinte convergência:

$$\partial_t u_\mu \rightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad L^2(0, T; H^{-1}(\omega)). \quad (4.3.60)$$

Por outro lado, a partir de (4.3.54), inferimos

$$\partial_t u_\mu \rightharpoonup \partial_t u \quad \text{fraco em} \quad \mathcal{D}'(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (4.3.61)$$

Assim, combinando (4.3.60), (4.3.61) e a unicidade do limite fraco em $\mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\omega))$, concluímos que

$$\partial_t u = 0 \quad \text{em} \quad \omega \times (0, T). \quad (4.3.62)$$

Agora, observamos que graças a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \leq 6$ e considerando (4.3.55), temos que

$$\{|u_\mu|^2 u_\mu\} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.3.63)$$

Consequentemente, existe $\chi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$|u_\mu|^2 u_\mu \rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.3.64)$$



De (4.3.55), (4.3.58) e (4.3.63), obtemos

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_\mu(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \|\Delta u_\mu(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \lambda \|u_\mu(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \| |u_\mu(t)|^2 u_\mu(t) \|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\quad + \|a(\cdot)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u_\mu(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq C \left\{ \|u_\mu(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \| |u_\mu(t)|^2 u_\mu(t) \|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|a(\cdot)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u_\mu(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \right\} \\ &\leq M, \forall \mu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim, à custa da última desigualdade, temos que

$$\{\partial_t u_\mu\} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (4.3.65)$$

Neste instante, consideremos $B_R \subset B_R^* \subset B_{R'}$. Empregando (4.3.55), (4.3.65) e a cadeia de imersões

$$H_0^1(B_{R'}) \xhookrightarrow{c} L^2(B_{R'}) \equiv [L^2(B_{R'})]' \hookrightarrow H^{-1}(B_{R'}) \quad (4.3.66)$$

devido ao Teorema de Aubin – Lions, Teorema 2.3.9, página 62, chegamos que

$$u_\mu \rightarrow u \quad \text{forte em} \quad L^2(0, T; L^2(B_{R'})). \quad (4.3.67)$$

De (4.3.67), temos

$$|u_\mu|^2 u_\mu \rightarrow |u|^2 u \quad \text{q. s. em} \quad B_{R'} \times (0, T). \quad (4.3.68)$$

Observação 4.3.3

É importante salientar que o limite de u e $|u|^2 u$ em (4.3.67) e (4.3.68) não dependem sobre $R' > 0$ devido a limitação uniforme de $\{u_\mu\}$ de acordo com (4.3.55) e (4.3.63).

Assim, combinando (4.3.63) e (4.3.68), rememorando o Lema de Lions, Lema 2.3.10, página 63, obtemos

$$|u_\mu|^2 u_\mu \rightharpoonup |u|^2 u \quad \text{fraco em} \quad L^2(0, T; L^2(B_{R'})) \quad (4.3.69)$$

para todo $R' > 0$ suficientemente grande. Como consequência, temos que $\chi = |u|^2 u$ q. s. em Ω .

Neste ponto, vamos dividir nossa prova em dois casos: $u \neq 0$ e $u = 0$.



• • •

Caso 1: $u \neq 0$

Inicialmente, vamos considerar a sequência problemas

$$\begin{cases} i\partial_t u_\mu + \Delta u_\mu - |u_\mu|^2 u_\mu - \lambda u_\mu - a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t u_\mu = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u_\mu = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T). \end{cases} \quad (4.3.70)$$

De (4.3.55), (4.3.65) e (4.3.69), na passagem ao limite em (4.3.70), obtemos

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - \lambda u - |u|^2 u = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)), \\ \partial_t u = 0 & \text{q. s. em } \omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T). \end{cases} \quad (4.3.71)$$

Definindo $w := \partial_t u$ e tomando a derivada no sentido distribucional com relação à variável tempo t , temos:

$$\begin{cases} i\partial_t w + \Delta w + \underbrace{(-\lambda w - |u|^2 w - u^2 \bar{w})}_{:=b_1(x,t)w + b_2(x,t)\bar{w}} = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)), \\ w = 0 & \text{q. s. em } \omega. \end{cases} \quad (4.3.72)$$

Observe que por (4.3.65), vem que $w = \partial_t u \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$ e assim, infelizmente, não temos a regularidade necessária para utilizar nosso principal pressuposto, a saber, a hipótese 4.3.1, página 163.

Em contrapartida, temos que $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, logo a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ nos garante que $|u|^2 u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Logo, tendo em mente que $w = \partial_t u = 0$ sobre $\omega \times (0, T)$, o problema (4.3.71) nos diz que

$$\Delta u = \lambda u + |u|^2 u \in L^2(0, T; L^2(\omega)),$$

donde recorrendo à regularidade elíptica (veja que a fronteira de ω é limitada) temos que $u \in L^2(0, T; H^2(\omega))$. Recorramos agora ao seguinte resultado de propagação de regularidade provado no apêndice:

Corolário 4.3.1

Seja $\omega = \Omega \setminus B_R$, com as notações da Proposição 4.4.1 e assumamos que a função $u \in L_{loc}^2([0, T[, H^{r+s}(\omega))$ com $s \in [0, 1]$. Então, $u \in L_{loc}^2([0, T[; H^{r+s}(\Omega))$.

Deste modo, fazendo uso do precedente resultado com $r = 3/2$ e $s = 1/2$, vem que $u \in L_{loc}^2(0, T; H^2(\Omega))$. Agora, pela imersão $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, $s \geq 2$, novamente, empregando por iteração o corolário acima, vem que $u \in L^2(0, T; H^r(\Omega))$ para $r \geq 0$.

Em suma, garantimos o seguinte resultado:



Teorema 4.3.2

Seja $\omega = \Omega \setminus B_R$ como considerado anteriormente. Sejam $T > 0$ e u uma solução para o sistema da equação de Schrödinger não – linear

$$\begin{cases} i \partial_t u + \Delta u - \lambda u - |u|^2 u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u^0 \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

em $C([0, T[; H^r(\Omega))$, $r \geq 1$, tal que $u \in L^2([0, T[, H^{r+\rho}(\omega))$ para algum $\rho \in [0, 1]$. Então, $u \in C([0, T[, H^{r+\rho}(\Omega))$. Em particular, se u é da classe C^∞ sobre $\omega \times]0, T[$, é C^∞ em todo lugar em $\Omega \times (0, T)$.

Observe que graças ao Teorema acima, $w = \partial_t u$ possui a regularidade necessária para aplicabilidade da hipótese 4.3.1. Sendo assim, valendo do direito de usar tal hipótese para o problema (4.3.72), obtemos que $w \equiv 0$, ou seja, $\partial_t u \equiv 0$. Retornando para a equação (4.3.71), temos

$$\Delta u - |u|^2 u = 0 \text{ em } \Omega.$$

Multiplicando a equação acima por \bar{u} , e integrando em Ω , resulta que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^4(\Omega)}^4 = 0 \text{ em } \Omega.$$

Portanto,

$$u = 0 \text{ q. s. em } \Omega,$$

o que é uma contradição. Tal conclusão nos assegura o seguinte resultado de continuação única:

Teorema 4.3.3

Seja $\omega = \Omega \setminus B_R$ anteriormente e assuma que a Hipótese 4.3.1 esteja satisfeita. Então, para todo $T > 0$, as únicas soluções no espaço $C([0, T], H^1(\Omega))$ para o sistema

$$\begin{cases} i \partial_t u + \Delta u - \lambda u - |u|^2 u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t u = 0 \text{ em } \omega \times]0, T[, \end{cases}$$

são independentes de t , i.é, $\partial_t u \equiv 0$. Ademais, $u \equiv 0$.



• • •

Caso 2: $u = 0$

Agora, denotamos

$$c_\mu = \|u_\mu\|_{L^2(0,T;L^2(B_R^*))}, \quad \tilde{u}_\mu = \frac{u_\mu}{c_\mu}, \quad (4.3.73)$$

e dividindo (4.3.70) por c_μ , obtemos

$$\begin{cases} i\partial_t \tilde{u}_\mu + \Delta \tilde{u}_\mu - |u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu - \lambda \tilde{u}_\mu + a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \tilde{u}_\mu = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \tilde{u}_\mu = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ \tilde{u}_\mu(0) = \tilde{u}_\mu^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.3.74)$$

Deste modo, tomando (4.3.52) em consideração, temos

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \|\tilde{u}_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt}{\int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t \tilde{u}_\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 dt} = +\infty. \quad (4.3.75)$$

e por (4.3.73), sabemos que

$$\|\tilde{u}_\mu\|_{L^2(0,T;L^2(B_R^*))}^2 = 1. \quad (4.3.76)$$

Agora, recordando (4.2.38), observemos:

$$\frac{1}{c_\mu^2} E_\mu(0) = \int_0^T \|(1 - \Delta)^{1/2} a(\cdot) \partial_t \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{c_\mu^2} E_\mu(T). \quad (4.3.77)$$

Assim, combinando (4.3.50) e (4.3.77), obtemos

$$\frac{1}{c_\mu^2} E_\mu(0) \leq \tilde{C} \left\{ \int_0^T \|\tilde{u}_\mu(t)\|_{L^2(B_R^*)}^2 dt + \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t \tilde{u}_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right\}. \quad (4.3.78)$$

Deste modo, tendo em mente (4.3.78) e o fato de que a energia é uma função não crescente sobre o parâmetro t , temos, para todo $t \geq 0$, que

$$\frac{E_\mu(t)}{c_\mu^2} \leq \frac{E_\mu(0)}{c_\mu^2} \leq \tilde{C} \left\{ \int_0^T \|(1 - \Delta)^{1/2} a(\cdot) \partial_t \tilde{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + 1 \right\}, \quad (4.3.79)$$

e de (4.3.75), (4.3.76) e (4.3.79) garantimos a existência de uma constante $M > 0$ de tal modo que

$$\|\tilde{u}_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \frac{\|u_\mu^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{c_\mu^2} \leq \frac{2E_\mu(0)}{C c_\mu^2} \leq M, \quad C = \min\{\lambda, 1\}. \quad (4.3.80)$$



para todo $\mu \in \mathbb{N}$, e, portanto, deduzimos que

$$\{\tilde{u}_\mu\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (4.3.81)$$

Em contrapartida, a partir de, (4.3.75) e (4.3.76), resulta que

$$(1 - \Delta)^{-1/2} a(x) \partial_t \tilde{u}_\mu \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.3.82)$$

Como feito antes em (5.4.45) e (4.3.62), temos

$$a(x)(1 - \Delta)^{-1} a(x) \partial_t \tilde{u}_\mu \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (4.3.83)$$

$$\partial_t \tilde{u}_\mu = 0 \text{ quase sempre em } \omega. \quad (4.3.84)$$

De (4.3.81) e (4.3.84), inferimos que

$$\{\tilde{u}_\mu\} \text{ é limitado em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (4.3.85)$$

$$\{\partial_t \tilde{u}_\mu\} \text{ é limitado em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (4.3.86)$$

Assim, de (4.3.66), (4.3.85) e (4.3.86), fazendo uso do teorema de Aubin – Lions, Teorema 2.3.9, existe uma subsequência de $\{\tilde{u}_\mu\}$, Ainda de agora em diante será denotada pela mesma notação, de tal modo que,

$$\tilde{u}_\mu \longrightarrow \tilde{u} \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(B_{R'})) \text{ para todo } R' > 0. \quad (4.3.87)$$

Agora, lembrando o fato de que $u = 0$, a partir da convergência dada em (4.3.67), obtemos

$$u_\mu \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(B_{R'})) \text{ e } c_\mu \rightarrow 0 \text{ quando } \mu \rightarrow +\infty. \quad (4.3.88)$$

Por outro lado, como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, e usando a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, inferimos $|u_\mu|^2 \in L^2(\Omega)$, $\tilde{u}_\mu \in L^3(\Omega)$. Então, recordando a desigualdade de Hölder



generalizada, de (4.3.55) e (4.3.81), para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, chegamos a

$$\begin{aligned}
 \left| (|u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu, \varphi)_{L^2(\Omega)} \right| &= \left| \int_\Omega |u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu \bar{\varphi} \, dx \right| & (4.3.89) \\
 &\leq \int_\Omega |u_\mu|^2 |\tilde{u}_\mu| |\varphi| \, dx \\
 &\leq \| |u_\mu|^2 \|_{L^2(\Omega)} \| \tilde{u}_\mu \|_{L^3(\Omega)} \| \varphi \|_{L^6(\Omega)} \\
 &= \| u_\mu \|_{L^4(\Omega)}^2 \| \tilde{u}_\mu \|_{L^3(\Omega)} \| \varphi \|_{L^6(\Omega)} \\
 &\leq C_1 \| u_\mu \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \| \tilde{u}_\mu \|_{H_0^1(\Omega)} \| \varphi \|_{H_0^1(\Omega)} \\
 &\leq C_2(M) \| \varphi \|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega); \\
 \therefore \| |u_\mu(t)|^2 \tilde{u}_\mu(t) \|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\| \varphi \|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \frac{\left| (|u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu, \varphi)_{L^2(\Omega)} \right|}{\| \varphi \|_{H_0^1(B_{R'})}} \leq C_2(M),
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\{ |u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu \} \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (4.3.90)$$

Consequentemente, existe $\xi \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ tal que

$$|u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu \rightharpoonup \xi \text{ fraco em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (4.3.91)$$

Agora, uma vez que $n = 2$, temos pela desigualdade de Gagliardo – Nirenberg², Teorema 2.3.6, página 61:

$$\| z \|_{L^4(B_{R'})} \leq C \| z \|_{L^2(B_{R'})}^{1/2} \| z \|_{H_0^1(B_{R'})}^{1/2}, \quad \forall z \in H_0^1(B_{R'}). \quad (4.3.92)$$

Mais uma vez, recorrendo a desigualdade generalizada de Hölder, (4.3.55) e (4.3.81), juntamente com (4.3.92), observemos

$$\begin{aligned}
 \left| (|u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu, \varphi)_{L^2(B_{R'})} \right| &= \left| \int_{B_{R'}} |u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu \bar{\varphi} \, dx \right| \\
 &\leq \int_{B_{R'}} |u_\mu|^2 |\tilde{u}_\mu| |\varphi| \, dx \\
 &\leq \| |u_\mu|^2 \|_{L^2(B_{R'})} \| \tilde{u}_\mu \|_{L^3(B_{R'})} \| \varphi \|_{L^6(B_{R'})} \\
 &= \| u_\mu \|_{L^4(B_{R'})}^2 \| \tilde{u}_\mu \|_{L^3(B_{R'})} \| \varphi \|_{L^6(B_{R'})} \\
 &\leq C_3 \| u_\mu \|_{L^2(B_{R'})} \| u_\mu \|_{H_0^1(B_{R'})} \| \tilde{u}_\mu \|_{H_0^1(B_{R'})} \| \varphi \|_{H_0^1(B_{R'})} \\
 &\leq C_4(M) \| u_\mu \|_{L^2(B_{R'})} \| \varphi \|_{H_0^1(B_{R'})}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(B_{R'})
 \end{aligned}$$

²Considere $p = 4, j = 0, m = r = 1, N = q = 2$.



e, podemos afirmar que

$$\| |u_\mu(t)|^2 \tilde{u}_\mu(t) \|_{H^{-1}(B_{R'})} = \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(B_{R'})} \leq 1} \frac{|(|u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu, \varphi)_{L^2(B_{R'})}|}{\|\varphi\|_{H_0^1(B_{R'})}} \leq C_4(M) \|u_\mu\|_{L^2(B_{R'})}. \quad (4.3.93)$$

A partir de (4.3.88) e (4.3.93), conseguimos

$$|u_\mu|^2 \tilde{u}_\mu \rightarrow 0 \quad \text{forte em } L^2(0, T; H^{-1}(B_{R'})) \text{ para todo } R' > 0. \quad (4.3.94)$$

Como resultado de (4.3.91) e (4.3.94), concluímos que $\xi = 0$ em $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

De (4.3.74), na situação limite quando $\mu \rightarrow +\infty$, tomando (4.3.81), (4.3.83) e (4.3.94) em consideração, chegamos a

$$\begin{cases} i\partial_t \tilde{u} + \Delta \tilde{u} - \lambda \tilde{u} = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(B_{R'} \times (0, T)), \\ \partial_t \tilde{u} = 0 & \text{q. s. em } B_{R'} \setminus B_R^*. \end{cases} \quad (4.3.95)$$

Neste momento, seja $\tilde{w} = \partial_t \tilde{u}$, derivando do problema acima no sentido das distribuições, obtemos

$$\begin{cases} i\partial_t \tilde{w} + \Delta \tilde{w} - \lambda \tilde{w} = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(B_{R'} \times (0, T)), \\ \tilde{w} = 0 & \text{q. s. em } B_{R'} \setminus B_R^*. \end{cases} \quad (4.3.96)$$

Em seguida, tome $P\tilde{w} = i\partial_t \tilde{w} + \Delta \tilde{w} - \lambda \tilde{w}$. Deste modo, podemos aplicar o Teorema de Holmgren, Teorema 2.3.12, página 64 com $Q_1 = B_{R'} \times (0, T)$, $Q_2 = (B_{R'} \setminus B_R^*) \times (0, T)$ e $Q_3 = B_{R'} \times (0, T)$, uma vez que $\tilde{w} = 0$ sobre $(B_{R'} \setminus B_R^*) \times (0, T)$ concluímos que

$$\tilde{w} = 0 \text{ q. s. em } B_{R'} \times (0, T), \text{ para todo } R' > 0. \quad (4.3.97)$$

Sendo assim, combinando (4.3.95) e (4.3.97), conseguimos

$$\Delta \tilde{u} - \lambda \tilde{u} = 0 \quad \text{em } B_{R'}.$$

Por último, multiplicando-se a equação acima por \tilde{u} , tendo em vista que $B_R^* \subset B_{R'}$, obtemos que $\tilde{u} = 0$ quase sempre em B_R^* , o qual é uma contradição com (4.3.76), uma vez que por (4.3.88) resulta que

$$\tilde{u}_\mu \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(B_R^*))$$

e, portanto, concluímos a prova do lema. □



Observamos que, tendo (4.3.50) em consideração e usando o lema (4.3.3), obtém-se a desigualdade desejada, ou seja,

$$E(T) \leq C \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \quad (4.3.98)$$

onde C constante positiva.

Agora, combinando a identidade de energia (4.2.38) e (4.3.98), temos

$$\begin{aligned} E(T) &\leq C \int_0^T \|(1 - \Delta)^{-1/2} a(\cdot) \partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= C \{E(0) - E(T)\} \\ \therefore E(T) &\leq \left(\frac{C}{1 + C} \right) E(0). \end{aligned} \quad (4.3.99)$$

Repetindo o procedimento para nT , $n \in \mathbb{N}$, vem que

$$E(nT) \leq \frac{1}{(1 + \hat{C})^n} E(0),$$

para todo $T \geq T_0$.

Consideremos, agora, $t \geq T_0$, então $t = nT_0 + r$, $0 \leq r < T_0$. Por conseguinte,

$$E(t) \leq E(t - r) = E(nT_0) \leq \frac{1}{(1 + \hat{C})^n} E(0) = \frac{1}{(1 + \hat{C})^{\frac{t-r}{T_0}}} E(0).$$

Definindo $C_0 = e^{\frac{r}{T_0} \ln(1 + \hat{C})}$ e $\lambda_0 = \frac{\ln(1 + \hat{C})}{T_0} > 0$, resulta que

$$E(t) \leq C_0 e^{-\lambda_0 t} E(0); \quad \forall t \geq T_0. \quad (4.3.100)$$

o que mostra o decaimento exponencial de soluções regulares ao problema (4.0.1). Doravante, obtemos a prova do Teorema 4.3.1, encontrado na página 163.

4.4. Apêndice: Resultados de Propagação para a equação de Schrödinger Linear

Esta seção é contribuição de Nicolas Burq, no qual dar – se – à uma prova da Proposição 13 em Dehman, Gérard e Lebeau [48] no caso geral dos problemas de valor de fronteira. Mostraremos que este resultado é satisfeito em qualquer dimensão e de qualquer condições (razoáveis) de fronteira.



Recordemos primeiro que um operador pseudo – diferencial A sobre uma variedade d -dimensional, M (cuja fronteira é assumida ser compacta) é dito ser *tangencial perto da fronteira* se existe perto de qualquer ponto da fronteira, $x_0 \in \partial M$, um sistema de coordenadas x tal que perto de x_0 ,

$$M = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d; x_1 > 0\},$$

e o símbolo do operador A , $a(x, \xi)$, não dependem sobre a variável ξ_1 , isto é,

$$(Au)(x_1, x') = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int e^{i(x'-y')} a(x_1, x', \xi') u(x_1, y') dy' d\xi'.$$

O objetivo deste apêndice é provar o seguinte resultado:

Proposição 4.4.1

Considere $T > 0$ e $u \in C([0, T[, H^r(\Omega))$, $r \in \mathbb{R}^+$, solução de

$$(i\partial_t + \Delta)u = f \in L^2_{loc}([0, T[; H^r(\Omega)) \quad (4.4.1)$$

Dado $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in T^*\Omega_b$, assumimos que existe $\chi_0(x, D_x)$, um operador pseudo – diferencial elíptico de ordem 0 em ρ_0 tal que

$$\chi_0(x, D_x)u \in L^2_{loc}([0, T[; H^{r+s}(\Omega)), \quad (4.4.2)$$

para algum $s \in [0, 1]$. Então, para todo $\rho_1 \in \Gamma_{\rho_0}$ (aqui, Γ_{ρ_0} denota o raio da geodésica começando em ρ_0), existe $\chi_1(x, D_x)$, um operador pseudo – diferencial elíptico de ordem 0 em ρ_1 tal que

$$\chi_1(x, D_x)u \in L^2_{loc}([0, T[, H^{r+s}(\Omega)). \quad (4.4.3)$$

Observação 4.4.1

Observe que o resultado acima é mais forte que a Proposição 13 em Dehman, Gérard e Lebeau [48] em que a hipótese $s \in [0, \frac{1}{2}]$ foi feita. Uma inspeção cuidadosa da prova em [48] mostra que (com pequenas modificações de módulo) a prova dada em [48] também poderia lidar com o caso $s \in [0, 1]$ (no contexto em que não há nenhuma fronteira).

Demonstração: Seja $\phi \in C^1_c(0, T)$. Então $v = \phi(t)u$ é solução

$$(i\partial_t + \Delta)v = g = \phi f + i\phi' u,$$



$V = \widehat{v}(\sigma, x)$, $G = \widehat{g}(\sigma, x)$ são soluções de

$$(\Delta - \sigma)V = G. \quad (4.4.4)$$

Note que pela regularidade de f dada em (4.4.1) e sendo $u \in C([0, T[, H^r(\Omega))$, resulta que

$$g = \phi f + i\phi' u \in L^2((0, T); H^r(\Omega)). \quad (4.4.5)$$

Logo, como a transformada de Fourier é uma isometria em $L^2(\mathbb{R}; H)$, se H é um espaço de Hilbert, a proposição 4.4.1 é consequência do seguinte resultado:

Lema 4.4.1

Seja $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in T_b^* \Omega = T^* \Omega \cup T^* \Gamma$ (aqui T^* é o fibrado cotangente), um operador pseudo-diferencial elíptico de ordem 0 em ρ_0 . Para todo $\rho_1 \in \Gamma_{\rho_0}$, o raio da geodésica começando em ρ_0 , existe $\chi_1(x, D_x)$, um operador pseudo-diferencial elíptico de ordem 0 em ρ_1 tal que para qualquer $r \in \mathbb{R}^+$, qualquer $s \in [0, 1]$, existe $C > 0$ tal que para qualquer σ e qualquer solução (V, G) de (4.4.4), temos

$$\|\chi_1(x, D_x)V\|_{H^{r+s}(\Omega)} \leq C(\|G\|_{H^r(\Omega)} + \|V\|_{H^r(\Omega)} + \|\chi_0(x, D_x)V\|_{H^{r+s}(\Omega)}). \quad (4.4.6)$$

Resta provar o Lema 4.4.1. Podemos distinguir três casos com $A > 0$ para ser fixado (suficientemente grande), $|\sigma| \leq A$, $\sigma \geq A$ e $\sigma \leq -A$.

Na primeira situação, $\Delta V = G + \sigma V$, a partir do qual se deduz

$$\|V\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq 2(\|G\|_{H^s(\Omega)} + A\|V\|_{H^s(\Omega)}).$$

No segundo caso, com $h = \sqrt{\sigma}^{-1}$, $(-h^2\Delta + 1)V = -h^2G$, o que implica que

$$\|V\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq 2(\|G\|_{H^s(\Omega)} + A\|V\|_{H^s(\Omega)}).$$

Resta estudar o terceiro caso (a situação hiperbólica de alta frequência). Neste caso, a estimativa é obtida como uma consequência dos resultado de propagação de singularidades de Melrose and Sjöstrand [88]. Agora, nós poderíamos definir $h = \sqrt{-\sigma}^{-1}$ e mostrar que a prova em [88] aplica ao operador $h^2\Delta + 1$. No entanto, preferiu – se deduzir a estimativa de $h^2\Delta + 1$ a partir do resultado de propagação para $\partial_t^2 - \Delta$ (veja também Burq, [23] para resultados de propagação estacionários relacionados).

Sejam

$$U = e^{i\frac{t}{h}}V, F = e^{i\frac{t}{h}}G,$$

soluções para

$$(\partial_t^2 - \Delta)U = F. \quad (4.4.7)$$



Lembre-se – nos que, com $M = \mathbb{R} \times \Omega$,

$$T_b^*(M) = T^*M \cup T^*\partial M.$$

Considere Π a projeção canônica de $T^*\mathbb{R}^2|_{\overline{M}}$ sobre T_b^*M . Seja $\zeta_j = (t_j, \tau_j, x_j, \xi_j)$, $j = 0, 1$ dois pontos, na variedade característica

$$\text{Char} = \Pi(\{(t, x, \tau, \xi); \tau^2 = |\xi|^2\}).$$

Para alcançar nosso objetivo, precisamos do seguinte resultado:

Lema 4.4.2

Vamos supor que os dois pontos ζ_0 e ζ_1 estão na mesma bicaracterística generalizada (veja Melrose e Sjöstrand [88] para uma definição). Considere um operador pseudo – diferencial de ordem 0 (tangencial perto da fronteira), A_0 , elíptico em ζ_0 . Então, existe um operador pseudo – diferencial de ordem 0 (tangencial perto da fronteira), A_1 , elíptico em ζ_1 e $C > 0$ tal que para qualquer soluções U, F de (4.4.7), qualquer $s \in [0, 1]$, $r \in \mathbb{R}$, e qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e t_1 , temos

$$\|A_1(t, D_t, x, D_x)U\|_{H^{s+r}} \leq C(\|A_0(t, D_t, x, D_x)U\|_{H^{s+r}} + \|U\|_{H^r(I \times M)} + \|F\|_{H^r(I \times M)}). \quad (4.4.8)$$

Demonstração: Usamos aqui um truque de Burq [22] para deduzir estimativas H^{r+s} de propagação de C^∞ encontradas em Melrose e Sjöstrand [88]. Observe primeiro que a aplicação de $(1 + |D_t|^2)^{r/2}$, ao qual desde que $\rho_j \in \text{Char}$ são elípticos perto de ρ_j , e comutam com a equação, podemos sem perda de generalidade assumir que $r = 0$. Podemos supor também que $t_0 = 0$ e que o símbolo a_0 de A_0 é igual a 1 perto de ρ_0 .

Seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ igual a 0 para $s < -\epsilon$ e 1 for $s > \epsilon$ (escolhido suficientemente pequeno mais tarde). Usando que $V = \chi(t)U$, este satisfaz

$$(\partial_t^2 - \Delta)V = \chi''(t)U + 2\chi'(t)\partial_t U + \chi(t)F, V|_{t < -\epsilon} = 0, V|_{\partial\Omega} = 0.$$

Agora, decompos para $t > \epsilon$, $V = V_i + V_e$, com V_i solução para

$$(\partial_t^2 - \Delta)V_i = A_0(\chi''(t)U + 2\chi'(t)\partial_t U) + \chi(t)F, V_i|_{t < -\epsilon} = 0, V_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.4.9)$$

e V_e solução para

$$(\partial_t^2 - \Delta)V_e = (\text{Id} - A_0)(\chi''(t)U + 2\chi'(t)\partial_t U), V_e|_{t < -\epsilon} = 0, V_e|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.4.10)$$



O lado direito em (4.4.9) é limitado em H^{s+r-1} por

$$C(\|A_0(t, D_t, x, D_x)U\|_{H^{s+r}} + \|U\|_{H^r(I \times M)} + \|F\|_{H^r(I \times M)}),$$

e assim, V_i é limitado em H^{s+r} (localmente no tempo) pela fórmula de Duhamel (lembramos que $r = 0$ e $s \in [0, 1]$).

Por outro lado, pelo resultado de propagação de singularidades de Melrose e Sjöstrand [88], se $\rho_1 \in WF(V_e)$ (a frente de onda de V_e), então existe uma (generalizada) bicaracterística a partir de ρ_1 que encontra a frente da onda do lado direito em (4.4.9) no ponto ρ_2 tal que $t_2 \in [-\epsilon, t_1]$ (porque $V_e|_{t < -\epsilon} = 0$). Em nosso contexto, só há uma única bicaracterística de ρ_1 que passa através ρ_0 (no tempo $t = 0$), e, por conseguinte, permanece no interior do domínio de onde $a_0 = 1$ para $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ e, conseqüentemente, não encontra

$$WF((\text{Id} - A_0)(\chi''(t)U + 2\chi'(t)\partial_t U)).$$

Deduzimos que, se o suporte de a_1 é tomada perto o suficiente de ρ_1 , temos

$$\rho_1 \notin WF(V_e) \Rightarrow A_i(t, D_t, x, D_x)V_e \in H^1.$$

Pelo teorema do gráfico fechado, teorema 2.3.1, obtemos

$$\|A_1(t, D_t, x, D_x)V_e\|_{H^1} \leq C\|U\|_{L^2(I \times M)},$$

que finaliza a prova do lema 4.4.2. □

Vamos retornar para a prova do Lema 4.4.1. Seja t_1 a distância entre ρ_0 e ρ_1 , de modo que os pontos $\zeta_0 = (t_0 = 0, |\xi_0|, x_0, \xi_0)$ e $\zeta_1 = (t_1, |\xi_0|, x_1, \xi_1)$ estão sobre a mesma bicaracterística. Considere ainda $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ igual a 1 perto t_1 (e com suporte próximo bastante a t_1). Seja $\psi \in C^\infty((1, +\infty))$ igual a 1 sobre $[2, +\infty)$.

Escrevamos

$$\chi(t)\chi_1(x, D_x) = \chi(t)\psi(D_t)\chi_1(x, D_x) + \chi(t)(1 - \psi(D_t))\chi_1(x, D_x) = B_1 + B_2.$$

Veja que,

$$\|\chi_1(x, D_x)V\|_{H^{r+s}(\Omega)} \leq C\|\chi(t)\chi_1(x, D_x)U\|_{L^2(\mathbb{R}_t; H^{r+s}(\Omega))} \quad (4.4.11)$$

Notamos primeiramente de (4.4.11), a contribuição de B_2 é limitada por $\|V\|_{H^r(\Omega)}$.



Com efeito, da equação $(D_t - \frac{1}{h})U = 0$, conseguimos

$$\begin{aligned} \|\chi(t)(1 - \psi(D_t))\chi_1(x, D_x)U\|_{L^2(\mathbb{R}_t; H^{r+s}(\Omega))} &\leq C\chi(t)(1 - \psi(D_t))\sqrt{-\Delta}U\|_{L^2(\mathbb{R}_t; H^{r+s-1}(\Omega))} \\ &\leq C\|\chi(t)(1 - \psi(D_t))\frac{1}{h}U\|_{L^2(\mathbb{R}_t; H^{r+s-1}(\Omega))} \\ &\leq \frac{C}{h}\|\chi(t)(1 - \psi(D_t))(e^{i\frac{t}{h}})\|_{L^2(\mathbb{R}_t)}\|V\|_{H^{r+s-1}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

e concluímos por perceber que

$$\|\chi(t)(1 - \psi(D_t))(e^{i\frac{t}{h}})\|_{L^2(\mathbb{R}_t)} = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Vamos agora lidar com a contribuição de B_1 . Podemos distinguir dois casos, a saber, quando x_1 é um ponto interior ou um ponto de fronteira.

- x_1 é um ponto interior Seja A_0 um operador pseudo – diferencial elíptico de ordem 0 próximo a $(t_0, \tau_0 = |\xi_0|, x_0, \xi_0)$ com símbolo a_0 . O símbolo a_0 é escolhido com suporte próximo suficiente da projeção (x, ξ) do suporte de a_0 , o conjunto onde χ_0 não se anula. Deste propriedade, deduzimos

$$\|A_0(t, D_t, x, D_x)U\|_{H^{s+r}} \leq C\|\chi_0(x, D_x)V\|_{H^{s+r}}.$$

Da mesma forma, seja ζ um símbolo igual a 1 em uma vizinhança cônica de $(t_1, \tau_1 = |\xi_1|, x_1, \xi_1)$. Se o suporte de ζ está perto o suficiente deste conjunto, temos

$$\|\chi(t)\zeta(t, D_t, x, D_x)\psi(D_t)\chi_1(x, D_x)U\|_{H^{s+r}} \leq C\|A_1(t, D_t, x, D_x)U\|_{H^{s+r}},$$

onde A_1 é dado pelo lema 4.4.2. Isto implica

$$\|\chi(t)\zeta(t, D_t, x, D_x)\psi(D_t)\chi_1(x, D_x)U\|_{H^{s+r}} \leq C\|\chi_0(x, D_x)V\|_{H^{s+r}}.$$

Para concluir a prova do Lema 4.4.1, resta limitar

$$\|\chi(t)(1 - \zeta)(t, D_t, x, D_x)\psi(D_t)\chi_1(x, D_x)U\|_{H^{s+r}}.$$

No entanto, se o suporte de χ é escolhido perto suficiente a t_1 , é temos ue

$$\text{supp}(\chi(t)(1 - \zeta)(t, \tau, x, \xi)\psi(\tau)\chi_1(x, \xi)) \cap \text{Char} = \emptyset,$$

o que implica (pelo teorema do gráfico fechado, teorema 2.3.1)

$$\|\chi(t)(1 - \zeta)(t, D_t, x, D_x)\psi(D_t)\chi_1(x, D_x)U\|_{H^{s+r}} \leq C\|V\|_{H^r}.$$

- x_1 é um ponto de fronteira. Neste caso, a única mudança é que tomamos ζ_1



independente sobre ξ_n a variável co-normal, que é compensada no argumento anterior pelo fato de que χ_1 é independente sobre ξ_n .

Portanto, o resultado está provado.

□

Corolário 4.4.1

Seja $\omega = \Omega \setminus B_R$ de acordo com a seção 1.3.1, com as notações da Proposição 4.4.1 assumamos que $u \in L^2_{loc}([0, T[, H^{r+s}(\omega))$, $s \in [0, 1]$. Então, $u \in L^2_{loc}([0, T[; H^{r+s}(\Omega))$.

Existência e Estabilização Uniforme para Equação de Schrödinger Não – Linear com Condições de Fronteira Dinâmica / Wentzell

Este problema foi realizado em parceria com Marcelo Moreira Cavalcanti, Christopher Lefler, [76] e Irena Lasiecka.

5.1. Boa – Colocação do Problema Linear

O objetivo deste capítulo é estudar a boa – colocação e estabilização do problema

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = f(y) & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y + g(y_t) = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.1.1)$$

onde Ω é um domínio limitado regular em R^N , $N \leq 3$, $g(s)$ é uma função monótona e $f(y) = -i|y|^2y$.

Como foi mencionado na introdução, a nossa pesquisa sobre este problema se inicia com a boa – colocação do problema linear.

• • •

5.1.1. Reformulação do Problema Linear como um Problema Wentzell

Considere o modelo

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -y_t & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \end{cases} \quad (5.1.2)$$



com Ω , Γ_0 , e Γ_1 descritos anteriormente. A boa colocação do problema linear requer uma análise cuidadosa. A aparência da parte principal da equação na fronteira impede considerações usuais da teoria de Semigrupo. Em vez disso, nós definimos um operador A por

$$A = i\Delta \quad (5.1.3)$$

com domínio

$$D(A) = \{y \in V, \Delta y \in V, \partial_\nu y = -i\Delta|_{\Gamma_1} y \text{ sobre } \Gamma_1\} \quad (5.1.4)$$

onde $V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. Aqui, $\Delta|_{\Gamma_1}$ deve ser interpretado como a restrição do Laplaciano do interior para o fronteira:

$$\Delta|_{\Gamma} = \frac{\partial^2 y}{\partial \nu^2} + \partial_\nu y (\operatorname{div} \nu) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_i^2}$$

onde $\{\tau_i\}_{i=1}^{n-1}$ é uma base ortonormal de vetores tangentes à Γ (como visto em Lasiecka – Triggiani [68] na página 305).

O operador acima reformula (5.1.2) como um problema Wentzell:

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -i\Delta y & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \end{cases} \quad (5.1.5)$$

o qual nós resolvemos sobre o espaço V .

Vários pontos – chave devem ser feitos. Classicamente, a boa – colocação de problemas Wentzell para a equação do calor é conseguida em espaços de forma $X_p = L^p(\Omega) \cup L^p(\Gamma)$, como é feito por Goldstein [50]. Isto trata o problema como um sistema acoplado de duas edp's: uma atua no interior e outra atua na fronteira. Nós contornamos esta questão, incorporando a condição de contorno para o domínio do operador. No entanto, o semigrupo gerado pelo operador A não é óbvio. A dificuldade principal é que este operador não é dissipativo no espaço mais natural, a saber $L^2(\Omega)$. De fato,

$$(Ay, y)_{L^2(\Omega)} = (i\Delta y, y)_{L^2(\Omega)} = -i(\nabla y, \nabla y)_{L^2(\Omega)} + i(\partial_\nu y, y)_{L^2(\Gamma_1)} \quad (5.1.6)$$

e, como $\partial_\nu y = -i\Delta y$ sobre Γ_1 por (5.1.5), temos

$$\operatorname{Re}(Ay, y)_{L^2(\Omega)} = \operatorname{Re}(-\Delta y, y)_{L^2(\Gamma_1)}. \quad (5.1.7)$$

o que não nos garante que A é dissipativo em $L^2(\Omega)$.



Isto traz para o presente momento a ideia utilizada no passado por Favini, Goldstein e J. Goldstein [50] (em conexão com este, temos também Gal, Goldstein e J. Goldstein [52] e Goldstein [55]) para tratar o problema na topologia de H^1 . Para isso usaremos uma variante adequada da teoria de operador monótono.

• • •

5.1.2. Obtenção de um Semigrupo Linear

Começemos com a

—

5.1.2.1. Dissipatividade sobre V

Para o espaço V , aplicamos a norma do gradiente via Poincaré. Sobre o espaço V a dissipatividade é assegurada. De fato, com $y \in D(A)$ temos

$$(\nabla Ay, \nabla y)_{L^2(\Omega)} = (i\nabla \Delta y, \nabla y)_{L^2(\Omega)} = -i(\Delta y, \Delta y)_{L^2(\Omega)} + i(\Delta y, \partial_\nu y)_{L^2(\Gamma_1)} \quad (5.1.8)$$

em que a substituição $\partial_\nu y = -i\Delta y$ sobre a fronteira Γ_1 , resulta:

$$(\nabla Ay, \nabla y)_{L^2(\Omega)} = i\|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \quad (5.1.9)$$

logo,

$$\operatorname{Re}(\nabla Ay, \nabla y)_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

A maximalidade continua a ser um problema, pois se definirmos uma forma bilinear

$$a(y, v) = (-Ay + \lambda y, v)_V \quad (5.1.10)$$

nós descobrimos que esta não é contínua sobre V . Além disso, não há espaço da forma $H^s(\Omega)$ sobre o qual esta forma bilinear é contínua e coerciva.

—

5.1.2.2. Maximalidade: Escolha do Espaço Correto

Nós introduzimos o espaço

$$Z = \{y \in V, \Delta y \in L^2(\Omega), \partial_\nu y \in L^2(\Gamma_1)\}$$

o qual nós o equipamos com a norma

$$\|u\|_Z^2 = \|u\|_V^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2.$$

Temos a seguir, o seguinte resultado.



Lema 5.1.1

O espaço Z é Banach.

Demonstração: Precisamos mostrar que Z é completo. Sejam

$$\begin{cases} z_n \rightarrow z & \text{em } H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \\ \Delta z_n \rightarrow y & \text{em } L^2(\Omega) \\ \partial_\nu z_n \rightarrow w & \text{em } L^2(\Gamma_1) \end{cases} \quad (5.1.11)$$

Mostraremos que $v = \Delta z$ e $w = \frac{\partial z}{\partial n}$. A primeira afirmação segue desde que o operador $(\Delta, D(\Delta) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = V$ é densamente definido sobre $H^{-1}(\Omega)$, então, pela propriedade que este operador é fechado, vem que

$$\Delta z_n = \Delta z \text{ em } H^{-1}(\Omega) \quad (5.1.12)$$

Para a última afirmação, observa-se que se $z \in V$ é uma solução do problema elíptico, então $w = \partial_\nu z \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$, o qual isto decorre da teoria de traço. Contudo, $\partial_\nu z_n \rightarrow w$ em $L^2(\Gamma_1)$ donde $\partial_\nu z = w$ em $L^2(\Gamma_1)$, o que nos dá o resultado desejado.

□

Nós desejamos evocar o Teorema de Browder – Minty, Teorema 2.3.3, página 59 para mostrar que qualquer fixada $f \in V$, existe uma única solução fraca $y \in V$ satisfazendo

$$a(y, v) = (-f, v)_V$$

para todo $v \in V$. Isto é feito mostrando que $a(y, v)$ é contínua e coerciva sobre Z . Observe que

$$\begin{aligned} a(y, v) &= -i(\Delta y, v)_V + \lambda(y, v)_V \\ &= i(\Delta y, \Delta v)_{L^2(\Omega)} - i(\Delta y, \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)} + \lambda(y, v)_V \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

em que a desigualdade triangular, nos sugere

$$|a(y, v)| \leq |(\Delta y, \Delta v)_{L^2(\Omega)}| + |(\Delta y, \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)}| + |\lambda| |(y, v)_V|. \quad (5.1.14)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy – Schwarz para cada um dos respectivos termos do produto interno, tendo em mente que $\partial_\nu y = -i\Delta y$ sobre Γ_1 , vem que

$$|a(y, v)| \leq C(\lambda) \|y\|_Z \|v\|_Z \quad (5.1.15)$$



o que prova a continuidade. Para a coercividade, veja que

$$|a(y, y)| = |\lambda \|y\|_V^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2. \quad (5.1.16)$$

Note que

$$\operatorname{Re} a(y, y) = \operatorname{Re} \lambda \|y\|_V^2 + \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2$$

$$\operatorname{Im} a(y, y) = \operatorname{Im} \lambda \|y\|_V^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e fazendo uso da identidade envolvendo números complexos¹

$$\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

vem que

$$|a(y, y)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\left| \operatorname{Re} \lambda \|y\|_V^2 + \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right| + \left| \operatorname{Im} \lambda \|y\|_V^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 \right| \right). \quad (5.1.17)$$

Agora, recorrendo a desigualdade triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$ com $a = \operatorname{Re} \lambda \|y\|_V^2 + \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2$ e $b = \operatorname{Im} \lambda \|y\|_V^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2$, temos que

$$\begin{aligned} |a(y, y)| &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left| (\operatorname{Re} \lambda + \operatorname{Im} \lambda) \|y\|_V^2 + \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 \right| \\ &\geq C(\lambda) \|y\|_Z^2. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Deste modo, concluímos do teorema de Minty – Browder, Teorema 2.3.3, página 59 que para todo $f \in Z'$, onde Z' denota o espaço dual de Z , que existe uma solução $y \in Z$ para $a(y, v) = (-f, v)_V$. E ainda, observemos que $D(A) \subset Z \subset V \subset Z'$, então, para todo $f \in V$ existe uma solução $y \in Z \subset V$. Além disso, de $a(y, v) = (-f, v)_V$, vem que

$$i\Delta y - \lambda y = f \in V \quad (5.1.19)$$

então, $\Delta y \in V$, logo $y \in D(A)$. Isto nos diz que

$$A \text{ é } \omega \text{ – máximo dissipativo.} \quad (5.1.20)$$

Ademais, $\Delta y \in V$ implica que $\Delta|_{\Gamma_1} y \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde $\partial_\nu v \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. A teoria de traço nos diz que $y \in H^2(\Omega)$, então, nós sabemos que a regularidade de $D(A)$ é ao menos $H^2(\Omega)$. Queremos usar o teorema de Lummer – Philips, Teorema 2.4.1, página 66. Para tanto, ainda resta mostrar o seguinte fato:

Lema 5.1.2

O conjunto $D(A)$ é denso em V .

¹Para prová-la, note que $(|\operatorname{Re} z| - |\operatorname{Im} z|)^2 \geq 0$ para todo $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.



Demonstração: Queremos fazer uso do Corolário 2.3.1, página 55. Com efeito, seja $f \in V'$ tal que

$$\langle f, z \rangle_{V', V} = 0 \quad (5.1.21)$$

para todo $z \in D(A)$. Fazendo uso do Teorema da Representação de Riesz – Fréchet, Teorema 2.3.2, página 58 para este $f \in V'$ dado, existe único $g \in V$ tal que

$$\langle f, z \rangle_{V', V} = (g, z)_V, \quad \forall z \in V. \quad (5.1.22)$$

$$\|f\|_{V'} = \|g\|_V. \quad (5.1.23)$$

Em contrapartida, de acordo com (5.1.20), o operador A é ω - máximo dissipativo, ou seja, dado qualquer $h \in V$, então em particular, para $g \in V$ obtido acima, existe $\hat{y} \in D(A)$ tal que

$$A\hat{y} - \omega\hat{y} = g. \quad (5.1.24)$$

De (5.1.21), (5.1.22) e (5.1.24), tomando $z = \hat{y}$, obtemos

$$0 = \langle -f, \hat{y} \rangle_{V', V} = (-g, \hat{y})_V = (\omega\hat{y} - A\hat{y}, \hat{y})_V = a(\hat{y}, \hat{y}) \quad (5.1.25)$$

onde $a(\hat{y}, \hat{y})$ é dado em (5.1.16), substituindo λ por ω na definição de $a(\cdot, \cdot)$. Sendo assim, tendo em mente (5.1.25) e, repetindo os mesmos procedimentos usados para mostrar a coercividade de $a(\cdot, \cdot)$, obtemos uma desigualdade análoga à (5.1.18), em outras palavras, existem constantes $c_3, c_4 > 0$ tal que

$$0 = a(\hat{y}, \hat{y}) \geq c_3 \|\hat{y}\|_V^2 + \frac{1}{4} \|\Delta\hat{y}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_4 \|\partial_\nu \hat{y}\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \geq c_3 \|\hat{y}\|_V^2,$$

o que nos diz que $\hat{y} = 0$. Diante disto, recordando (5.1.24), obtemos que $g \equiv 0$ e por (5.1.22), resulta que $\langle f, z \rangle_{V', V} = 0$, para todo $z \in V$.

Portanto, pelo Corolário 2.3.1, decorre que $D(A)$ é denso em V e o lema está provado. □

Sendo assim, estamos aptos a aplicar o teorema de Lumer – Phillips, teorema 2.4.1, página 66 para conseguir o seguinte resultado:

Teorema 5.1.1

O operador $(A, D(A))$ gera um C_0 semigrupo de contrações sobre o espaço $V = H_{\Gamma_0}^1$.

Então, para qualquer $y_0 \in V$, nós podemos escrever

$$y(t) = e^{tA}y_0$$



onde e^{tA} representa o operador para a equação de Schrödinger linear (5.1.5) com condições de fronteira Wentzell. Notemos ainda que o problema de Wentzell considerado acima não é o problema que desejamos estudar, com condições de fronteira dinâmicas. Para prosseguir, é preciso analisar o problema não – homogêneo.

• • •

5.1.3. Problema Linear Não – Homogêneo

Suponha agora que $f(x, s) \in L^1(0, \infty, V)$. Então, pela fórmula de Duhamel,

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s) ds \quad (5.1.26)$$

é uma solução para o problema

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = f & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -i\Delta y & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty). \end{cases} \quad (5.1.27)$$

Desde que $f(x, s) \in L^1(0, \infty, V)$, o teorema fundamental do cálculo nos diz que $y \in C(0, \infty, V)$. Desejamos estender a boa – colocação do problema acima para o problema de Wentzell não – homogêneo

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = f & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y + i\Delta y = g & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty). \end{cases} \quad (5.1.28)$$

É suficiente resolver este problema para $f = 0$ e usar o princípio da superposição de modo a obter a boa – colocação do problema acima. Para tanto, definamos a aplicação de Neumann como segue:

$$\mathcal{N}g = \begin{cases} \Delta \mathcal{N}g = 0 \\ \partial_\nu \mathcal{N}g = g & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \mathcal{N}g = 0 & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases} \quad (5.1.29)$$

Usando teoria elíptica, veja Lions – Magenes [81], página 189, deduzimos que

$$\mathcal{N} : H^s(\Gamma_1) \rightarrow H^{s+3/2}(\Omega) \quad (5.1.30)$$

é contínua para todo $s \in \mathbb{R}$.

Defina agora $\tilde{y} = y - \mathcal{N}g$. Desde que $\Delta \mathcal{N}g = 0$ e $\partial_\nu \mathcal{N}g = g$ sobre Γ_1 , por (5.1.29),



decorre que

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu \tilde{y} &= \partial_\nu y - \partial_\nu \mathcal{N}g \\
 &= g - i \Delta y - g \\
 &= -i \Delta y + i \underbrace{\Delta \mathcal{N}g}_{=0} \\
 &= -i \Delta [y - \mathcal{N}g] = -i \Delta \tilde{y}.
 \end{aligned} \tag{5.1.31}$$

E ainda, como estamos resolvendo o problema para $f = 0$, veja que

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_t &= y_t - \mathcal{N}g_t \\
 &= i \Delta (y - \mathcal{N}g) - \mathcal{N}g_t = i \Delta y - \mathcal{N}g_t
 \end{aligned}$$

e novamente usando o fato que $\Delta \mathcal{N}g = 0$, temos

$$\tilde{y}_t = i \Delta (y - \mathcal{N}g) - \mathcal{N}g_t = i \Delta \tilde{y} - \mathcal{N}g_t. \tag{5.1.32}$$

Combinando (5.1.31) e (5.1.32), o problema com respeito à \tilde{y} torna – se:

$$\begin{cases}
 \tilde{y}_t = i \Delta (y - \mathcal{N}g) - \mathcal{N}g_t = i \Delta \tilde{y} - \mathcal{N}g_t & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\
 \tilde{y} = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\
 \partial_\nu \tilde{y} = -i \Delta \tilde{y} & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\
 \tilde{y}(0) = y_0 - \mathcal{N}g(0).
 \end{cases} \tag{5.1.33}$$

A análise acima nos permite apresentar o primeiro (não ótimo) resultado de regularidade correspondente ao modelo que não é homogêneo na fronteira.

Lema 5.1.3

Se $g \in W^{1,1}(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma_1))$, então existe uma única solução $y \in C(0, \infty; V)$ para (5.1.28).

Demonstração: Veja que se $g \in W^{1,1}(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma_1))$, então $g(0) \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ e $g_t \in L^1(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma_1))$ e por (5.1.30), provém a continuidade de $\mathcal{N} : H^{-1/2}(\Gamma_1) \rightarrow H^1(\Omega)$. Colecionando estes fatos, resulta que

$$\begin{cases}
 \mathcal{N}g_t \in L^1(0, \infty; V) \\
 \mathcal{N}g(0) \in V
 \end{cases} \tag{5.1.34}$$

Assim, (5.1.33) reduz para (5.1.27), o qual foi resolvido acima. Desta maneira, obtém-se que $\tilde{y} \in C(0, \infty, V)$. Retornando para $y = \tilde{y} + \mathcal{N}g$, uma vez que $\tilde{y}, \mathcal{N}g \in C(0, \infty; V)$, concluímos que existe uma única solução $y \in C(0, \infty; V)$ para o problema (5.1.28) para todo $y_0 \in V$.

□



O resultado anterior está abaixo do almejado. De fato, é necessário menos regularidade do termo de fronteira. Isto é devido a uma reminiscência dos efeitos da teoria da equação de onda que relaciona “condições de fronteira”.

Teorema 5.1.2

Sejam $f \in L^1(0, \infty; V)$ e $g \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$. Então, para cada $y_0 \in V$ existe uma única solução $y \in C(0, \infty; V)$ para (5.1.28). Além disso, a seguinte regularidade “escondida” da fronteira toma lugar: $\partial_\nu y \in L^2(0, \infty, L^2(\Gamma_1))$.

Demonstração: De antemão, nós provamos o lema 5.1.3, ao qual mostra que existe uma única solução $y \in C(0, \infty; V)$ para (5.1.28) sobre a hipótese que $g \in W^{1,1}(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma_1))$. Deste modo, é suficiente mostrar que $\sup_t \|y(t)\|_V^2 < \infty$ agora, sobre a hipótese que $g \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$ e então, estender o resultado almejado por densidade. De fato, obteremos um resultado mais forte: $\sup_t \|y(t)\|_V^2 < C$ para alguma constante C (dependendo sobre y_0, g e f). Multiplicando (5.1.28) by \bar{y} em $V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, tomando o produto interno e integrando na variável temporal t , vem que

$$\int_0^t (y_t(s), y(s))_V ds - \int_0^t (i\Delta y(s), y(s))_V ds = \int_0^t (f(s), y)_V ds. \tag{5.1.35}$$

Sem perda de generalidade, tomemos $f = 0$. O caso quando $f \neq 0$ pode ser resolvido *a posteriori* via superposição. O primeiro termo pode ser reescrito como

$$\int_0^t (y_t(s), y(s))_V ds = 2 \int_0^t \frac{d}{dt} \|y(s)\|_V^2 ds = 2\|y(t)\|_V^2 - 2\|y(0)\|_V^2. \tag{5.1.36}$$

Como estamos supondo que $f = 0$, então, por (5.1.28), decorre que $y_t = i\Delta y$ em Ω . Disto, ao integrar por partes o segundo termo do lado esquerdo de (5.1.35), resulta que

$$\int_0^t (i\Delta y(s), y(s))_V ds = \int_0^t \left[-i\|\Delta y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + i(\Delta y(s), \partial_\nu y(s))_{L^2(\Gamma_1)} \right] ds, \tag{5.1.37}$$

em que podemos substituir a condição de fronteira, a saber, $i\Delta y = g - \partial_\nu y$ para obter

$$\int_0^t (i\Delta y(s), y(s))_V ds = \int_0^t \left[-\|\partial_\nu y(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + (g, \partial_n y(s))_{L^2(\Gamma_1)} \right] ds. \tag{5.1.38}$$



Combinando (5.1.38) em (5.1.36), agora obtemos:

$$2\|y(t)\|_V^2 - 2\|y(0)\|_V^2 + \int_0^t i\|\Delta y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\partial_\nu y(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 ds \quad (5.1.39)$$

$$- \int_0^t (g, \partial_\nu y(s))_{L^2(\Gamma_1)} ds = 0.$$

Tendo a atenção para a integral

$$\int_0^t (g, \partial_\nu y(s))_{L^2(\Gamma_1)} ds,$$

podemos estimar:

$$|(g, \partial_\nu y)_{L^2(\Gamma_1)}| \leq c\|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \frac{1}{c}\|g\|_{L^2(\Gamma_1)}^2. \quad (5.1.40)$$

Retornando para (5.1.39) com a escolha de $c = \frac{1}{2}$ em (5.1.40) e tomando a parte real, provém a desigualdade:

$$2\|y(t)\|_V^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\partial_\nu y(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 ds \leq 2\|y(0)\|_V^2 + 2 \int_0^t \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 ds. \quad (5.1.41)$$

De modo geral, para $f \in L^1(0, \infty; V)$, resulta que

$$2\|y(t)\|_V^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\partial_\nu y(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 ds \leq 2\|y(0)\|_V^2 + 2 \int_0^t \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 ds \quad (5.1.42)$$

$$+ c \int_0^t \|f\|_V ds$$

$$\leq C(y_0, g, f)$$

para todo $t \geq 0$. Isto prova o resultado almejado.

□

Observação 5.1.1

Dado $y \in H^1(\Omega)$, a teoria de traço nos diz que $\partial_\nu y \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$; contudo, isto não mostra que $\partial_\nu y \in L^2(\Gamma_1)$. Esta adicional regularidade escondida no problema é descoberta por meio da desigualdade (5.1.42).

Fazendo $g = f|_{\Gamma_1}$, nós podemos identificar (5.1.28) com o problema de condição



de fronteira dinâmica

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = f & \text{em } \Omega \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \partial_\nu y + y_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.1.43)$$

Note que se $f \in L^2(0, \infty; V)$, pela teoria de traço $g \in L^2(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma_1))$, então, está assegurado o seguinte resultado.

Corolário 5.1.1

Seja $f \in L^2(0, \infty; V)$. Então, para cada $y_0 \in V$ existe uma única solução $y \in C(0, \infty; V)$ de (5.1.43). E ainda, $y_t|_{\Gamma_1} \in L^2(0, \infty \times \Gamma_1)$.

Do corolário acima, temos que a aplicação

$$K_1 : (f, y_0) \longmapsto y(t) \quad (5.1.44)$$

é limitada de $L^2(0, \infty, V) \times V$ em $C(0, \infty, H^1(\Omega))$.

No que se segue, é conveniente ter uma representação de semigrupo do nosso “solucionador do problema na fronteira” (*boundary solver*).

Lema 5.1.4

Sejam g, f, y_0 satisfazendo

- (i) $y_0 \in V$
- (ii) $f \in L^1(0, \infty; V)$
- (iii) $g \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$

Então, $y \in C(0, \infty; V)$ e tal solução y do problema (5.1.28) pode ser reescrita como

$$y(t) = e^{At}y_0 - A \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds \quad (5.1.45)$$

Demonstração: Concentraremos nossa atenção para (5.1.33) e aplicaremos resultados da teoria clássica de semigrupo. Pela fórmula de Duhamel, temos que

$$\tilde{y}(t) = e^{At}\tilde{y}(0) - \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g_t(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds$$

A fórmula acima é compreendida com os valores no espaço dual $[D(A)]'$.



Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= e^{At}\tilde{y}(0) - e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)\Big|_0^t - A \int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds \\ &= e^{At}\tilde{y}(0) - \mathcal{N}g(t) + e^{At}\mathcal{N}g(0) - A \int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds \end{aligned} \quad (5.1.46)$$

Substituíndo \tilde{y} por $y - \mathcal{N}g$, temos a representação desejada dada por (5.1.45).

Pelas hipóteses (i) e (ii), o primeiro e o terceiro termo de (5.1.45) pertencem à $C(0, \infty; V)$. Para provar que $y \in C(0, \infty; V)$, de acordo com (5.1.45), resta mostrar que $\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds \in C(0, \infty; V)$. De fato, combinando a hipótese (iii) juntamente com (5.1.30) para $s = 0$, resulta diz que $\mathcal{N}g \in L^2(0, \infty; V)$. Assim, a proposição 2.4.1, item (iii) nos diz que $\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds \in D(A)$, de modo que o termo $A \int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds$ faz sentido e pertence à $C(0, \infty; V)$, graças a argumentos da teoria de semigrupos lineares. Por fim, obtemos o desejado. \square

A última afirmação do lema acima nos diz que a seguinte aplicação é contínua:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)) &\rightarrow C(0, \infty; V) \\ g &\mapsto A \int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds \end{aligned} \quad (5.1.47)$$

• • •

5.1.4. Regularidade de Soluções

Nesta subseção, olharemos para soluções mais regulares. Começamos a análise do problema não – homogêneo (5.1.28).

Teorema 5.1.3

Além da regularidade necessária para soluções fracas, assumamos que:

- $f_t \in L^1(0, \infty; V)$
- $g_t \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$
- $\Delta y_0 \in V$ e $\partial_\nu y_0 - g(0) = -i\Delta y_0$

Então $y_t \in C([0, \infty), V)$ com apropriado controle das estimativas. Isto é dizer que

$$\|y_t\|_{C([0, \infty); V)} \leq C \left[\|f\|_{W^{1,1}(0, \infty; V)} + \|g\|_{H^1(0, \infty; L^2(\Gamma_1))} + \|\Delta y_0\|_V + \|y_0\|_V \right] \quad (5.1.48)$$

Se, além disso, temos que $g \in C([0, \infty); H^{1/2}(\Gamma_1))$ então $y \in C([0, \infty); H^2(\Omega))$.



Demonstração:

No que concerne esta prova, usaremos a fórmula de semigrupo dada pelo lema 5.1.4.

De antemão, notamos que as condições impostas sobre os dados iniciais são equivalentes a dizer que $y_0 - \mathcal{N}g(0) \in D(A)$. Na verdade, isto segue ao notar que $y_0 - \mathcal{N}g(0) \in D(A)$ traduz-se na seguinte condição de compatibilidade:

$$\begin{cases} \partial_\nu y_0 - g(0) = -i\Delta y_0 + \cancel{g(0)} - \cancel{g(0)} = -i\Delta(y_0 - \mathcal{N}g(0)) = -i\Delta y_0. \\ V \ni \Delta(y_0 - \mathcal{N}g(0)) \equiv \Delta y_0 \in V \end{cases} \quad (5.1.49)$$

Nós diferenciamos a solução no sentido da dualidade. Por um lado, fazendo uso da proposição 2.4.1, item (iii), vem que

$$A \int_0^t e^{A\tau} f(t - \tau) d\tau = e^{At} f(0) - f(t) \quad (5.1.50)$$

$$A \int_0^t e^{A\tau} \mathcal{N}g(t - \tau) d\tau = e^{At} \mathcal{N}g(0) - \mathcal{N}g(t). \quad (5.1.51)$$

Por outro, recorrendo à fórmula integral de Leibniz, proposição 2.3.4, tendo em mente (5.1.50) e (5.1.51), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds &= \int_0^t \frac{d}{dt} [e^{A(t-s)} f(s)] ds + f(t) \\ &= A \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s) ds + f(t) \\ &= A \int_0^t e^{A\tau} f(t - \tau) d\tau + \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s) ds + f(t) \\ &= e^{At} f(0) - \cancel{f(t)} + \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s) ds + \cancel{f(t)} \end{aligned} \quad (5.1.52)$$

e,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} A \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g(s) ds &= -A \left[\int_0^t \frac{d}{dt} [e^{A(t-s)} \mathcal{N}g(s)] ds + \mathcal{N}g(t) \right] \\ &= -A \left[A \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g_t(s) ds + \mathcal{N}g(t) \right] \\ &= -A \left[A \int_0^t e^{A\tau} \mathcal{N}g(t - \tau) d\tau + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g_t(s) ds + \mathcal{N}g(t) \right] \\ &= -A \left[e^{At} \mathcal{N}g(0) - \cancel{\mathcal{N}g(t)} + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g_t(s) ds + \cancel{\mathcal{N}g(t)} \right]. \end{aligned} \quad (5.1.53)$$



Combinando (5.1.52) e (5.1.53), temos ao diferenciar (5.1.45) a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
 y_t(t) &= Ae^{At}y_0 - \frac{d}{dt}A \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g(s) ds + \frac{d}{dt} \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds \quad (5.1.54) \\
 &= Ae^{At}y_0 + e^{At}f(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s) ds \\
 &\quad - Ae^{At} \mathcal{N}g(0) - A \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g_t(s) ds \\
 &= Ae^{At}[y_0 - \mathcal{N}g(0)] + e^{At}f(0) \\
 &\quad + \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s) ds - A \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g_t(s) ds \\
 &= Ae^{At}[y_0 - \mathcal{N}g(0)] + e^{At}f(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s) ds - \mathcal{L}g_t(t) \\
 &= I + II + III + IV,
 \end{aligned}$$

onde \mathcal{L} é a aplicação dada em (5.1.47).

Assumindo que $y_0 - \mathcal{N}g(0) \in D(A)$, como e^{tA} é um semigrupo de contrações, isto implica que o primeiro termo I pertence à $C([0, \infty); V)$. Agora, veja que como $f \in W^{1,1}(0, \infty; V) \hookrightarrow C([0, \infty); V)$, também obtemos que $II \in C([0, \infty); V)$. Analogamente, $III \in C([0, \infty); V)$ é obtido por um argumento da teoria de semigrupos. Para o último termo, referimos a regularidade do operador \mathcal{L} estabelecida em (5.1.47). Portanto, $y_t \in C([0, \infty); V)$.

Agora, pela condição de compatibilidade descrita em (5.1.49) e a proposição 2.4.1, item (i), temos que

$$Ae^{At}[y_0 - \mathcal{N}g(0)] = e^{At}A[y_0 - \mathcal{N}g(0)] = e^{At}\Delta y_0. \quad (5.1.55)$$

Neste instante, com o intuito de obter uma estimativa para $\|y_t\|_{C([0, \infty); V)}$ é oportuno repetir a mesma conjuntura feita para \mathcal{L} em (5.1.47) para a $\int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s) ds$. Isto é dizer que a aplicação \mathcal{K} dada por $f_t(t) \mapsto \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s) ds$ é contínua de $L^1(0, \infty; V)$ em $C([0, \infty); V)$, uma vez que por hipótese, $f_t \in L^1(0, \infty; V)$.

Disto, juntamente com (5.1.55), a continuidade da aplicação \mathcal{L} e (5.1.54), vem que

$$\begin{aligned}
 \|y_t\|_{C([0, \infty); V)} &\leq \|\Delta y_0\|_V + \|f\|_{C([0, \infty); V)} + \|\mathcal{K}f_t\|_{C([0, \infty); V)} + \|\mathcal{L}g_t\|_{C([0, \infty); V)} \\
 &\leq C \left[\|y_0\|_V + \|\Delta y_0\|_V + \|f_t\|_{L^1(0, \infty; V)} + \|g_t\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))} \right] \\
 &\leq C \left[\|y_0\|_V + \|\Delta y_0\|_V + \|f\|_{W^{1,1}(0, \infty; V)} + \|g\|_{H^1(0, \infty; L^2(\Gamma_1))} \right]
 \end{aligned}$$

e assim, isto prova a primeira parte do teorema, ou seja, (5.1.48).



Quanto à segunda parte, no que se refere a regularidade espacial, nós argumentamos como segue. Uma vez que $y_t \in C([0, \infty); V)$ e $f \in C([0, \infty); V)$, obtemos que $\Delta y \in C([0, \infty); V)$. Em particular $\Delta y|_{\Gamma_1} \in C([0, \infty); H^{1/2}(\Gamma_1))$. Pela hipótese adicional sobre g , isto é, se $g \in C([0, \infty); H^{1/2}(\Gamma_1))$, então, como $\partial_\nu y = -i \Delta y + g$, concluimos que $\partial_\nu y \in C([0, \infty); H^{1/2}(\Gamma_1))$. Logo, pela regularidade elíptica, teorema 2.3.8, página 62, decorre que $y \in C([0, \infty); H^2(\Omega))$.

□

Observação 5.1.2

A função y obtida no final da demonstração anterior na classe $C([0, \infty); H^2(\Omega))$ é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta y = i y_t - i f & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu y = -i \Delta y + g & \text{sobre } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.1.56)$$

de modo que $f \in V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, conforme teorema 2.3.8. Logo, o mesmo nos permite obter uma estimativa para $\|y(t)\|_{H^2(\Omega)}$. De fato, isto advém de (2.3.2), ou seja,

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C (\|y_t\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} + \|\Delta y\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}) \\ &\leq C (\|y_t\|_V + \|f\|_V + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} + \|\Delta y\|_V) \\ &\leq C (\|y_t\|_V + \|f\|_V + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}) \end{aligned} \quad (5.1.57)$$

de modo que na última desigualdade usamos a primeira equação de (5.1.56) e a continuidade da aplicação traço $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$ na segunda desigualdade. Ademais, pela imersões $H^1(0, \infty; \mathcal{H}) \hookrightarrow C([0, \infty); \mathcal{H})$, $\mathcal{H} = V, H^{1/2}(\Gamma_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{C([0, \infty); H^2(\Omega))} &\leq C (\|y_t\|_{C([0, \infty); V)} + \|f\|_{C([0, \infty); V)} + \|g\|_{C([0, \infty); H^{1/2}(\Gamma_1))}) \\ &\leq C (\|y_t\|_{C([0, \infty); V)} + \|f\|_{H^1(0, \infty; V)} + \|g\|_{H^1(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma_1))}) . \end{aligned} \quad (5.1.58)$$

O teorema de regularidade acima, quando aplicado ao problema de condição de fronteira dinâmica, produz o seguinte resultado:



Teorema 5.1.4

À luz de (5.1.43), além da regularidade necessária para soluções fracas assumimos que:

- $f \in H^1(0, \infty; V)$
- $\Delta y_0 \in V$ e $\partial_\nu y_0 - f|_{\Gamma_1}(0) = -i\Delta y_0$

Então, $y_t \in C(0, \infty; V)$ com apropriado controle de estimativas, isto é,

$$\|y_t\|_{C([0, \infty); V)} + \|y\|_{C([0, \infty); H^2(\Omega))} \leq C[\|f\|_{H^1(0, \infty; V)} + \|\Delta y_0\|_V + \|y_0\|_V].$$

Demonstração: É suficiente aplicar o resultado anterior com $g \equiv f|_{\Gamma_1}$. Desde $f \in H^1(0, \infty; V)$, pela teoria de traço, temos que $f|_{\Gamma_1} \in H^1(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma_1)) \hookrightarrow H^1(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$ – como desejado para aplicabilidade do teorema anterior. Além disso, a hipótese que $f \in H^1(0, \infty; V)$ nos permite dizer que a aplicação \mathcal{K} definida no lema precedente é contínua de $L^2(0, \infty; V)$ em $C([0, \infty); V)$. Disto, a estimativa (5.1.48) torna – se:

$$\|y_t\|_{C([0, \infty); V)} \leq C[\|f\|_{H^1(0, \infty; V)} + \|\Delta y_0\|_V + \|y_0\|_V].$$

Por fim, combinando a desigualdade acima com (5.1.58), resulta a estimativa desejada.

□

5.2. Pertubações Lipschitz do Modelo Linear com Condições de Fronteira Monótonas

Um primeiro passo para a teoria não-linear é considerar fontes (*sources*) localmente Lipschitz interiores e monótonas de dissipação na fronteira. Isso é feito na subseção a seguir.

• • •

5.2.1. Obtenção de um Semigrupo Não – Linear para o Problema Wentzell

Como foi dito na subsubseção 1.4.2.3, a estratégia inicial deste trabalho de tese foi o de resolver a questão da boa – colocação para uma coleção adequada de problemas de aproximação (truncamento) que convergem para o problema não-linear (5.1.1).



Em particular, esta estratégia consistiu-se provando que as perturbações Lipschitz do modelo linear permanecem bem-postas e, em seguida, escolhendo uma série de aproximações Lipschitz para o termo não-linear $|y|^2y$. Embora atualmente não acreditamos que tal construção de uma série de aproximações seja possível, o seguinte resultado permanece interessante para o seu próprio bem:

Hipótese 5.2.1

Assuma que $g(z)$ é uma função contínua sobre \mathbb{C} tal que ambas $g(z)$ e sua inversa $g^{-1}(z)$ satisfazem:

$$(i) \operatorname{Re}(g(z) - g(v))(\bar{z} - \bar{v}) \geq m|z - v|^2$$

$$(ii) \operatorname{Re}(g(z)\bar{z}) \geq m|z|^2$$

$$(iii) \operatorname{Im}(g(z)\bar{z}) = 0$$

$$(iv) |g(z)| \leq M|z|$$

para algumas constantes $m, M \in \mathbb{R}_+$.

Vale a pena notar que os pressupostos acima são satisfeitos para a função identidade. Além disso, nota-se que a condição (i), juntamente com a condição (iii) formam um equivalente complexo à hipótese de monotonia.

Considere agora o modelo

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y + f(y) & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -g(y_t) & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ y_0 \in V = H_{\Gamma_0}^1 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.2.1)$$

onde $V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, Ω , Γ_0 , e Γ_1 são caracterizados na seção anterior e $f(y) : V \rightarrow V$ é Lipschitz contínua. Em outras palavras, para todo par $y, v \in V$,

$$\|f(y) - f(v)\|_V \leq L\|y - v\|_V \quad (5.2.2)$$

para alguma constante fixa L .

Tal como no caso da teoria linear, a boa colocação é conseguida convertendo este problema dinâmico em um problema Wentzell. Ou seja, substituímos $g(y_t)$ sobre a fronteira por $g(i\Delta y + h(y))$. Neste momento, assumamos que $h : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ é



Lipschitz, i. é,

$$\|h(y) - h(v)\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq K\|y - v\|_V. \quad (5.2.3)$$

Em virtude que o operador traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ é contínuo e linear, esta formulação realmente generaliza o problema acima, o qual pode ser reduzido para o caso especial em que $h(y) = \gamma_0(f(y))$. Com isso mente, definamos o operador A_f por

$$A_f y = i\Delta y + f(y) \quad (5.2.4)$$

cujo domínio é

$$D(A_f) = \{y \in V, \Delta y \in V, \partial_\nu y = -g(i\Delta|_{\Gamma_1} y + h(y)) \text{ sobre } \Gamma_1\}. \quad (5.2.5)$$

A presença de f em si, não proporciona qualquer influência sobre o domínio. De acordo com os pressupostos que $g : H^{1/2}(\Gamma_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$ e que a imagem de h também habita em $H^{1/2}(\Gamma)$, então, pelo mesmo argumento aplicado no capítulo anterior, temos que $D(A_f)$ contém elementos de $H^2(\Omega)$. Notemos que desde que o operador traço γ_0 tem imagem em $H^{1/2}(\Gamma)$ – esta hipótese não impõe qualquer restrição sobre f .

Seguindo a mesma estratégia utilizada na teoria linear, o teorema seguinte será provado:

Teorema 5.2.1

O operador $(A_f, D(A_f))$ gera um semigrupo fortemente contínuo sobre V .

Ao contrário do capítulo anterior, onde o modelo de Schrödinger foi discutido, não podemos mais declarar de forma arbitrária que o semigrupo obtido no teorema acima é um semigrupo de contração. Nós, ao contrário, provaremos uma ω -maximal dissipatividade do operador A_f , então a limitação sobre o operador de evolução torna-se:

$$\|e^{tA_f}\|_{\mathcal{L}(V)} \leq C e^{\omega t}. \quad (5.2.6)$$

5.2.1.1. Dissipatividade

Uma vez que (5.2.1) é não – linear, teremos que tomar a diferença entre duas soluções. Antes disto, observemos pelo teorema de Green,

$$\begin{aligned} (A_f y, v)_V &= i(\nabla \cdot \Delta y, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (f(y), v)_V \\ &= -i(\Delta y, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + i(\Delta y, \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)} + (f(y), v)_V \\ &= -i(\Delta y, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + (g^{-1}(-\partial_\nu y), \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)} + (h(y), \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)} + (f(y), v)_V \end{aligned} \quad (5.2.7)$$



Sendo assim, se considerarmos a diferença entre duas soluções $y, v \in V$ e recordar a hipótese (ii) sobre g^{-1} , vem que

$$\begin{aligned} (A_f y - A_f v, y - v)_V &= -i \|\Delta y - \Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 - m \|\partial_\nu y - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ &\quad - (h(y) - h(v), \partial_\nu y - \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\quad + (f(y) - f(v), y - v)_V. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Pela desigualdade de Cauchy – Schwarz, percebeba que

$$(h(y) - h(v), \partial_\nu y - \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)} \leq \|h(y) - h(v)\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\partial_\nu y - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)}$$

e

$$(f(y) - f(v), y - v)_V \leq \|f(y) - f(v)\|_V \|y - v\|_V.$$

É plausível salientar que as hipóteses aos quais as funções h e f são Lipschitzianas, agora, desempenham um papel essencial.

Desde que $\|h(y) - h(v)\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq K \|y - v\|_V$, donde

$$\|h(y) - h(v)\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\partial_\nu y - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq K \|y - v\|_V \|\partial_\nu y - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)} \quad (5.2.9)$$

e uma vez que $\|f(y) - f(v)\|_V \leq L \|y - v\|_V$, tem – se

$$\|f(y) - f(v)\|_V \|y - v\|_V \leq L \|y - v\|_V^2. \quad (5.2.10)$$

Para (5.2.9), aplicamos o notório resultado:

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2. \quad (5.2.11)$$

Usando $\varepsilon = \frac{2}{m}$ em (5.2.9), veja que

$$K \|y - v\|_V \|\partial_\nu y - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \frac{2}{m} K^2 \|y - v\|_V^2 + \frac{m}{2} \|\partial_\nu y - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2. \quad (5.2.12)$$

Combinando (5.2.10) e (5.2.12) com (5.2.8), ao tomar –se a parte real, resulta que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A_f y - A_f v, y - v)_V &\leq -m \|\partial_\nu y - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ &\quad + \frac{2}{m} K^2 \|y - v\|_V^2 + \frac{m}{2} \|\partial_\nu y - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + L \|y - v\|_V^2 \\ &= \left(\frac{2}{m} K^2 + L \right) \|y - v\|_V^2 - \frac{m}{2} \|\partial_\nu y - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \end{aligned} \quad (5.2.13)$$



de modo que, considerando $\omega > \frac{2}{m}K^2 + L$, podemos concluir que

$$\operatorname{Re}(A_f y - A_f v - \omega I(y - v), y - v)_V < 0, \quad (5.2.14)$$

o que prova o almejado.

5.2.1.2. Maximalidade

Tal como acontece com o problema linear (5.1.5), a maximalidade será provada sobre o espaço de Banach Z :

$$Z = \{y \in V, \Delta y \in L^2(\Omega), \partial_\nu y \in L^2(\Gamma_1)\}$$

o qual é equipado com a norma

$$\|y\|_Z = \|y\|_V + \|y\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Como antes, definamos

$$a(y, v) = (\lambda y - A_f y, v)_V.$$

Embora $a(y, v)$ já não se caracteriza como uma forma bilinear, a mesma teoria se aplica. Ou seja, pode ser mostrado que essa forma é contínua e coerciva, então o teorema de Minty – Browder, Teorema 2.3.3, página 59 pode ainda ser aplicado. Por isso, para cada $j \in V \subset Z'$ (onde Z' representa o espaço dual de Z), existe uma única $y \in Z$ satisfazendo

$$a(y, v) = (-j, v)_V \text{ for all } v \in Z$$

para algum valor λ tal que $\operatorname{Re}(\lambda)$ é suficientemente grande.

Para ver que $a(y, v)$ é contínua sobre Z , temos:

$$\begin{aligned} a(y, v) = & \lambda(y, v)_V + i(\Delta y, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + (g^{-1}(\partial_\nu y), \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)} \\ & - (f(y), v)_V + (h(y), \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

pelo qual usando a desigualdade triangular e as limitações sobre f , g , e h ,

$$\begin{aligned} |a(y, v)| \leq & |\lambda(y, v)_V| + |(\Delta y, \Delta v)_{L^2(\Omega)}| + M \left| (\partial_\nu y, \partial_\nu v)_{L^2(\Gamma_1)} \right| \\ & + L\|y\|_V \|v\|_V + K\|y\|_V \|\partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

para o qual existe uma limitação $C(\lambda, M, L, K)$ tal que

$$|a(y, v)| \leq C(\lambda, M, L, K)\|y\|_Z \|v\|_Z. \quad (5.2.17)$$



Para coercividade, observe que

$$a(y, y) = \lambda \|y\|_V^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 + (g^{-1}(\partial_\nu y), \partial_\nu y)_{L^2(\Gamma_1)} - \left[(f(y), y)_V - (h(y), \partial_\nu y)_{L^2(\Gamma_1)} \right]. \quad (5.2.18)$$

Como fizemos outrora, para qualquer número complexo $z = x + iy$, a limitação $|z| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}|x| + \frac{\sqrt{2}}{2}|y|$ pode ser aplicada. Além disso, recorrendo a hipótese 5.2.1, itens (ii) e (iii), considerando $\text{Im}(\lambda) \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} |a(y, y)| &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \text{Re}(\lambda) \|y\|_V^2 + \text{Re}(g^{-1}(\partial_\nu y), \partial_\nu y)_{L^2(\Gamma_1)} - \text{Re}(f(y), y)_V \right. \\ &\quad \left. - \text{Re}(h(y), \partial_\nu y)_{L^2(\Gamma_1)} \right| \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \text{Im}(\lambda) \|y\|_V^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 - \text{Im}(f(y), y)_V - \text{Im}(h(y), \partial_\nu y)_{L^2(\Gamma_1)} \right| \\ &\geq 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\text{Re}(\lambda) \|y\|_V^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 + m \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \underbrace{\text{Im}(\lambda) \|y\|_V^2}_{\geq 0} - \sqrt{2} |(f(y), y)_V| - \sqrt{2} |(h(y), \partial_\nu y)_{L^2(\Gamma_1)}| \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\text{Re}(\lambda) \|y\|_V^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 + m \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right) \\ &\quad - \sqrt{2} \|f(y)\|_V \|y\|_V - \sqrt{2} \|h(y)\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Reciclando as estimativas (5.2.10) e (5.2.12) decorrente das limitações Lipschitz de f e h com a modificação feita em (5.2.12) ao qual atribuímos $\varepsilon = \frac{4}{m}$ ao invés de $\frac{2}{m}$ da desigualdade (5.2.11), chegamos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |a(y, y)| &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{Re}(\lambda) \|y\|_V^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\sqrt{2}m}{2} \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ &\quad - \sqrt{2}L \|y\|_V^2 - \frac{4\sqrt{2}}{m} K^2 \|y\|_V^2 - \frac{\sqrt{2}m}{4} \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\text{Re}(\lambda) - 2L - \frac{8}{m} K^2 \right] \|y\|_V^2 + \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\sqrt{2}m}{4} \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ &\geq C \|y\|_Z^2 \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

para alguma constante $C > 0$ contanto que $\text{Re}(\lambda) > 2L + \frac{8}{m} K^2$.

Assim, recorrendo ao Teorema de Browder – Minty, Teorema 2.3.3, página 59, se

²Nesta passagem, usamos o fato que $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) \leq 2|z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.



$\omega > \sqrt{2}L + \frac{4}{m}K^2$, então o operador $A_f - \omega I$ é maximalmente dissipativo. Deste modo, pelo teorema de Lumer – Philips, Teorema 2.4.1, página 66, o operador A_f gera um semigrupo fortemente contínuo.

5.3. Boa – Colocação do Modelo Não – Linear

• • •

5.3.1. Estratégia

Mostramos que o modelo “forçado” pelas funções $f : H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \rightarrow H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$,

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = f & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \Gamma_0 \\ \partial_\nu y + y_t = 0 & \text{on } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.3.1)$$

é bem – posto V com controle apropriado de estimativas para a solução y .

O nosso escopo é mostrar que *modelo não – linear*

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = F(y) = -i|y|^2y & \text{em } \Omega \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \partial_\nu y + y_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.3.2)$$

é bem – posto globalmente (no tempo) em dimensão $N = 2$ e localmente (no tempo) em dimensão $N = 3$. A boa – colocação do modelo não – linear será considerada em um nível topológico mais alto, isto é, com respeito a *soluções fortes* com os valores em $H^2(\Omega)$. Isto está de acordo com a teoria disponível para as condições de fronteira de Dirichlet homogêneas clássicas dadas em Brézis – Gallouet [20].

A fim de alcançar o nosso objetivo, vamos recorrer a teoria linear, mas, pela teoria não – homogênea desenvolvida nas seções anteriores com termo dado por $f(y) = -i|y|^2y$. Um argumento de ponto fixo será aplicado. A fim de lidar com este nível de energia mais alto são necessárias estimativas *a priori*. Para isso, consideraremos a Equação (5.3.2). Para adquirir estimativas sobre z , nós derivamos a equação (5.3.2) no tempo,

$$\begin{cases} z_t - i\Delta z = F_t(y, z) & \text{em } \Omega \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \frac{\partial z}{\partial n} + z_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ z(0) = z_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.3.3)$$



onde

$$\begin{aligned} F_t(y, z) &= -2i|y|^2 z - iy^2 \bar{z} \\ z_0 &= i\Delta y_0 - i|y_0|^2 y_0 \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

No que se segue vamos também assumir a seguinte condição de compatibilidade referida como (CC):

$$\partial_\nu y_0 + z_0|_{\Gamma_1} = 0 \quad (5.3.5)$$

Fitaremos nosso olhar ao ponto fixo da aplicação

$$K : C(0, T; H^2(\Omega) \cap V \times V) \rightarrow C(0, T; H^2(\Omega) \cap V \times V)$$

definida como

$$K(\hat{y}, \hat{z}) = (y, z)$$

onde y satisfaz (5.3.2) com $F(\hat{y})$ e z satisfaz (5.3.3) com $F_t(\hat{y}, \hat{z})$.

• • •

5.3.2. Estimativas de Termos Não – Lineares

A fim de estabelecer uma existência de um ponto fixo adequado precisamos de estimativas para F e F_t . Estas são baseadas em estimativas obtidas para o problema linear nas seções anteriores. Para tanto, começamos com um lema preliminar de regularidade

Lema 5.3.1

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em dimensão $N = 2, 3$. Considere $F(y) = -i|y|^2 y$, $F_t(y, z)$ dada por (5.3.4) com $y \in H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ e $z \in V$. Então, as seguintes estimativas são asseguradas:

$$\begin{aligned} (A0) \quad & \|F(y)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|y\|_{H^1(\Omega)} \\ (A1) \quad & \|F(y)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|y\|_{H^2(\Omega)} \\ (A2) \quad & \|F(y)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|y\|_{H^2(\Omega)}^3 \\ (B1) \quad & \|F_t(y, z)\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} \leq C \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \|y\|_{H^2(\Omega)} \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \\ (B2) \quad & \|F_t(y, z)\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} \leq \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \|y\|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Demonstração: Note que a desigualdade (A0) é direta. Já a estimativa (A1) foi provada por Brézis – Gallouet (veja lema 1.4.1 na subsubseção 1.4.2.2). Agora, no tocante à obtenção da desigualdade (A2), esta segue diretamente do fato que $H^2(\Omega)$



tem imersão contínua em $L^\infty(\Omega)$, uma vez que $N = 2, 3$ e assim,

$$\|F(y)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|y\|_{H^2(\Omega)}^3. \quad (5.3.6)$$

Para estimar $\|F_t(y, z)\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}$ primeiramente, calculamos $\nabla F_t(y, z)$:

$$\begin{aligned} \nabla(-2i|y|^2z - iy^2\bar{z}) &= \nabla(-2iy\bar{y}z - iy^2\bar{z}) \\ &= -i(2y\bar{y}\nabla z + 2y\nabla\bar{y}z + 2\nabla y\bar{y}z + 2y\nabla y\bar{z} + y^2\nabla\bar{z}). \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Pela desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} \|F_t(y)\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} &\leq 2\|y\bar{y}\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + 2\|y\nabla\bar{y}z\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla y\bar{y}z\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + 2\|y\nabla y\bar{z}\|_{L^2(\Omega)} + \|y^2\nabla\bar{z}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

No que segue, faremos a estimativa de cada termo separadamente. Recorrendo à desigualdade de Hölder, vem que

$$2\|y\bar{y}\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}$$

e da mesma sorte

$$\|y^2\nabla\bar{z}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}.$$

Todavia, a estimativa $2\|y\nabla\bar{y}z\|_{L^2(\Omega)}$ deve ser cuidadosamente construída.

Novamente, usando a desigualdade de Hölder, veja que

$$\|y\nabla\bar{y}z\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\bar{y}z\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.3.9)$$

As escolhas para os espaços no uso da desigualdade de Hölder sobre $\|\nabla\bar{y}z\|_{L^2(\Omega)}$ é particularmente essencial. Em dimensões $n = 2, 3$, as imersões de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, $H^2(\Omega) \hookrightarrow W^{1,3}(\Omega)$ são válidas, então

$$\begin{aligned} \|y\nabla\bar{y}z\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\bar{y}z\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\|\nabla\bar{y}\|_{L^{3/2}(\Omega)} \|z\|_{L^3(\Omega)} \right)^{1/2} \\ &\leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \|z\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla y\|_{L^3(\Omega)} \\ &\leq C\|y\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}\|y\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

e pela imersão e $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$,

$$\|y\nabla\bar{y}z\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}\|y\|_{H^2(\Omega)}^2.$$



A mesma abordagem pode ser utilizada para limitar os dois termos restantes, a saber, $\|\nabla y \bar{y} z\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|y \nabla y \bar{z}\|_{L^2(\Omega)}$. Isso nos deixa com as seguintes estimativas *a priori*:

$$\|F_t(y, z)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \|y\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \|y\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (5.3.10)$$

□

Observação 5.3.1

Notamos que ao assumir a relação $z = y_t$ então $F_t(y, z) = \frac{d}{dt} F(y)$. Esta observação será acionada no processo da prova.

• • •

5.3.3. Existência Local de Soluções Fortes

Para provar a existência e unicidade de soluções, primeiro provaremos a existência local e unicidade. Em dimensão $n = 2$, a existência de soluções globais serão mostradas. No entanto, ao tratar de dimensão $n = 3$, a existência de soluções globais continua a ser uma questão em aberto.

Primeiramente, necessitamos da seguinte condição:

Definição 5.3.1 (CC – Condição de Compatibilidade)

$$\partial_\nu y_0 + i\Delta y_0 + F(y_0) = 0 \text{ sobre } \Gamma_1$$

Também, definamos os seguintes espaços

$$X_0 = \{(y_0, z_0) \in V \times V : z_0 \equiv i\Delta y_0 + F(y_0), \Delta y_0 \in V, y_0 \text{ satisfazendo CC} \}$$

Notamos a seguinte implicação: $(y_0, z_0) \in X_0 \Rightarrow y_0 \in H^2(\Omega)$. De fato, isto segue via teoria elíptica, uma vez que

$$\Delta y_0 \in V \subset H^1(\Omega) \text{ e } \partial_\nu y_0 = -z_0|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma_1).$$

Então, faz sentido equipar X_0 com a seguinte norma:

$$\|(y, z)\|_{X_0}^2 = \|y\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|z\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2$$

e definimos também o espaço de Banach

$$X_T = \{(y, z) : y \in C^1([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)), z \in C(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)), y_t = z\}$$



com a norma:

$$\|(y, z)\|_{X_T}^2 = \sup_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|z(t)\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2.$$

O resultado principal a ser alcançado nesta subseção é o seguinte:

Teorema 5.3.1

Para todo subconjunto limitado $B \subset X_0$, existe $T > 0$ tal que para todo $(y_0, z_0) \in B$, existe uma única solução y de (5.3.2) com derivada temporal $y_t = z$ tal que o par $(y, z) \in X_T$.

Demonstração: Faremos tal prova em vários passos, dividindo - os em subsubseções.

—

5.3.3.1. Passo 1 – Definindo a Aplicação

Para $y_0, z_0 \in X_0$, consideremos a aplicação $K(\hat{y}, \hat{z})$ com $(\hat{y}, \hat{z}) \in X_T$ ao qual “produz” um par de soluções $(y(t), z(t)) \in C^1([0, T]; V)$ com dado inicial $\hat{y}(0) = y_0 \in X_0$ para os seguintes problemas

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = F(\hat{y}) & \text{em } \Omega \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \partial_\nu y + i\Delta y + F(\hat{y}) = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.3.11)$$

e

$$\begin{cases} z_t - i\Delta z = F_t(\hat{y}, \hat{z}) & \text{em } \Omega \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \partial_\nu z + i\Delta z + F_t(\hat{y}, \hat{z}) = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ z(0) = z_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.3.12)$$

Observando cada componente de K , a aplicação $K(\hat{y}, \hat{z})$ pode ser considerada como a composição de aplicações

$$\begin{cases} K(\hat{y}, \cdot) : \hat{y} \mapsto F(\hat{y}) \mapsto y \\ K(\cdot, \hat{z}) : \hat{z} \mapsto F_t(\cdot, \hat{z}) \mapsto z. \end{cases}$$

Estas aplicações sobre cada componente podem ser encontradas explicitamente via o assim chamado “solucionador do problema na fronteira” introduzido no Lema 5.1.4,



página 209, como segue

$$\begin{cases} K(\hat{y}, \cdot) = - \int_0^t e^{A(t-s)} A \mathcal{N} F(\hat{y}(s)) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} F(\hat{y}(s)) ds \\ K(\cdot, \hat{z}) = - \int_0^t e^{A(t-s)} A \mathcal{N} F_t(\cdot, \hat{z}(s)) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} F_t(\cdot, \hat{z}(s)) ds. \end{cases} \quad (5.3.13)$$

Tal como antes, A é o operador de Schrödinger linear com condições de fronteira Wentzell como no Teorema 5.1.1 e \mathcal{N} é a aplicação de Neumann vista em (5.1.31). Para o par (y, z) ser uma solução de (5.3.2) ainda é preciso ser mostrado que a condição de compatibilidade (CC) é verificada.

Isto é feito como segue: dados y_0 e \hat{y} , nós escolhemos \hat{y}_0 de acordo com a fórmula

$$\hat{y}_0 \equiv y_0 - \mathcal{N}(F|_{\Gamma_1}(y_0) - F|_{\Gamma_1}(\hat{y}(0))).$$

Então, \hat{y}_0 é também uma função de \hat{y} . Notemos que pela fórmula acima e tendo em vista $y_0 = \hat{y}(0)$, no “fixado” ponto y_0 , este e \hat{y}_0 coincidem. Disto, e uma vez que $\Delta \mathcal{N}g = 0$ e $\partial_\nu \mathcal{N}g = g$ juntamente com (5.3.11), resulta que

$$\begin{aligned} \partial_\nu \hat{y}_0 &= \partial_\nu y_0 - \partial_\nu (\mathcal{N}(F|_{\Gamma_1}(y_0) - F|_{\Gamma_1}(\hat{y}(0)))) \\ &= -i\Delta y_0 - \overbrace{F|_{\Gamma_1}(\hat{y}(0))} - F|_{\Gamma_1}(y_0) + \overbrace{F|_{\Gamma_1}(\hat{y}(0))} \\ &= -i\Delta y_0 + \underbrace{\Delta (\mathcal{N}(F|_{\Gamma_1}(y_0) - F|_{\Gamma_1}(\hat{y}(0))))}_{=0} - F|_{\Gamma_1}(y_0) \\ &= -i\Delta \hat{y}_0 - F|_{\Gamma_1}(\hat{y}_0). \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Assim, todas as estimativas se enquadram para a aplicação K com uma condição inicial preparada.

5.3.3.2. Passo 2 – As Estimativas: Invariância da Bola em X_T

Recordamos que a aplicação $K(\hat{y}, \hat{z}) = (y, z)$ onde y satisfaz (5.3.2) com $f \equiv F(\hat{y})$ e z satisfaz (5.3.3) donde $f \equiv F_t(\hat{y}, \hat{z})$. Uma vez que os dados iniciais satisfazem as condições de compatibilidade exigidas, estamos em condições de aplicar as estimativas do Teorema 5.1.4. Isso resulta em:

$$\begin{aligned} \|z\|_{C([0,T];V)} + \|y\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} &\leq \|F(\hat{y})\|_{L^2(0,T;V)} + \|F_t(\hat{y}, \hat{z})\|_{L^2(0,T;V)} \\ &+ \|\hat{y}_0\|_V + \|\Delta \hat{y}_0\|_V. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Primeiro precisamos verificar se $K(\hat{y}, \hat{z})$ aplica $B_R(X_T)$ em $B_R(X_T)$, onde B_R denota uma bola no espaço X_T de raio R . Na sequência, faremos uma seleção de escolhas



adequadas para R e T . Desde que $(y_0, z_0) \in B$, que é um limitado de X_0 , vamos tomar $R \geq 2R_0 := C_0 \|y_0\|_{H^2(\Omega)} + \|z_0\|_V + C_1 \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^3$ onde C_0 e C_1 são constantes positivas a serem determinadas posteriormente.

Para alcançar este objetivo, vamos utilizar as estimativas (A0) e (B2) do Lema 5.3.1. Deste modo, vem que

$$\|F(\hat{y})\|_V \leq C \|\hat{y}\|_{H^2(\Omega)}^2 \|\hat{y}\|_V \quad (5.3.16)$$

$$\|F_t(\hat{y}, \hat{z})\|_V \leq C \|\hat{y}\|_{H^2(\Omega)}^2 \|\hat{z}\|_V \quad (5.3.17)$$

Logo,

$$\int_0^T [\|F(\hat{y}(t))\|_V^2 + \|F_t(\hat{y}(t), \hat{z}(t))\|_V^2] dt \leq C \int_0^T [\|\hat{y}(t)\|_{H^2(\Omega)}^4 (\|\hat{z}(t)\|_V + \|\hat{y}(t)\|_V)^2] dt \quad (5.3.18)$$

Em contrapartida, uma vez que $(y_0, z_0) \in B \subset X_0$, temos que $z_0 \equiv i \Delta y_0 + F(y_0)$. Ao agregar isto juntamente com (5.3.16) e o fato que y_0 e \hat{y}_0 coincidem, resulta que

$$\begin{aligned} \|\hat{y}_0\|_V + \|\Delta \hat{y}_0\|_V &\equiv \|y_0\|_V + \|\Delta y_0\|_V \\ &\leq C_0 \|y_0\|_{H^2(\Omega)} + \|z_0\|_V + \|F(y_0)\|_V \\ &\leq C_0 \|y_0\|_{H^2(\Omega)} + \|z_0\|_V + \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \|y_0\|_V \\ &\leq C_0 \|y_0\|_{H^2(\Omega)} + \|z_0\|_V + C_1 \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^3 \\ &:= R_0 \leq \frac{R}{2}, \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

de modo que as constantes C_0 e C_1 provém da imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow V$.

Assim, combinando (5.3.19) com (5.3.15), temos que

$$\begin{aligned} &\|z\|_{C([0,T];V)} + \|y\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \\ &\leq \|F(\hat{y})\|_{L^2(0,T;V)} + \|F_t(\hat{y}, \hat{z})\|_{L^2(0,T;V)} + \frac{R}{2}. \end{aligned} \quad (5.3.20)$$



Por outro lado, por (5.3.18), notemos

$$\begin{aligned}
 \|F(\hat{y})\|_{L^2(0,T;V)} &= \left[\int_0^T \|F(\hat{y}(s))\|_V^2 ds \right]^{1/2} \\
 &\leq \left[C \int_0^T \|\hat{y}(s)\|_{H^2(\Omega)}^4 \|\hat{y}(s)\|_V^2 ds \right]^{1/2} \\
 &\leq \left[CT \sup_{t \in [0,T]} \|\hat{y}(t)\|_{H^2(\Omega)}^4 \sup_{t \in [0,T]} \|\hat{y}(s)\|_V^2 \right]^{1/2} \\
 &= CT^{1/2} \|\hat{y}\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}^2 \|\hat{y}\|_{C([0,T];V)}.
 \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Repetindo argumentos similares, também obtemos

$$\|F_t(\hat{y}, \hat{z})\|_{L^2(0,T;V)} \leq CT^{1/2} \|\hat{y}\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}^2 \|\hat{z}\|_{C([0,T];V)}. \tag{5.3.22}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 &\|z\|_{C([0,T];V)} + \|y\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \\
 &\leq CT^{1/2} \|\hat{y}\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}^2 (\|\hat{y}\|_{C([0,T];V)} + \|\hat{z}\|_{C([0,T];V)}) + \frac{R}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

Como $(\hat{y}, \hat{z}) \in B_R(X_T)$, vem que $\|\hat{y}\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \leq R$ e $\|\hat{z}\|_{C([0,T];V)} \leq R$. Então, ao considerar $T < \left(\frac{1}{4CR^2}\right)^2$, da desigualdade acima, resulta que

$$\begin{aligned}
 \|K(\hat{y}, \hat{z})\|_{X_T} &= \|(y, z)\|_{X_T} \\
 &= \|z\|_{C([0,T];V)} + \|y\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \\
 &< 2CT^{1/2}R^3 + \frac{R}{2} \\
 &< \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R,
 \end{aligned}$$

o que assegura que $K(\hat{y}, \hat{z})$ não deixa a bola $B_R(X_T)$ quando (\hat{y}, \hat{z}) são tomados nesta bola.

5.3.3.3. Passo 3: Método do Ponto Fixo

Precisamos mostrar que a aplicação K é uma contração em $B_R(X_T)$, isto é, existe $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$\|K(\hat{y}_1, \hat{z}_1) - K(\hat{y}_2, \hat{z}_2)\|_{X_T} \leq \beta \|(\hat{y}_1 - \hat{y}_2, \hat{z}_1 - \hat{z}_2)\|_{X_T}, \quad \forall (\hat{y}_1, \hat{z}_1), (\hat{y}_2, \hat{z}_2) \in B_R(X_T).$$



Para tanto, sejam $(\hat{y}_1, \hat{z}_1), (\hat{y}_2, \hat{z}_2) \in X_T$. Então, como y_1 (respect. y_2) satisfaz (5.3.2) com $F(\hat{y}_1)$ (respect. $F(\hat{y}_2)$) e z_1 (respect. z_2) satisfaz (5.3.3) com $F_t(\hat{y}_1, \hat{z}_1)$ (respect. $F_t(\hat{y}_2, \hat{z}_2)$), de (5.3.15), obtemos

$$\begin{aligned} \|K(\hat{y}_1, \hat{z}_1) - K(\hat{y}_2, \hat{z}_2)\|_{X_T} &= \|(y_1 - y_2, z_1 - z_2)\|_{X_T} \\ &= \|y_1 - y_2\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|z_1 - z_2\|_{C([0,T];V)} \\ &\leq \int_0^T \|F(\hat{y}_1(s)) - F(\hat{y}_2(s))\|_{H^2(\Omega)} ds \\ &\quad + \int_0^T \|F(\hat{y}_1(s), \hat{z}_1(s)) - F(\hat{y}_2(s), \hat{z}_2(s))\|_V ds. \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Usando o fato que $N \leq 3$ e tendo em mente que $(\hat{y}_1, \hat{z}_1), (\hat{y}_2, \hat{z}_2) \in B_R(X_T)$, como na demonstração do Lema 4.2.2, página 138, podemos demonstrar que

$$\begin{aligned} \|F(\hat{y}_1) - F(\hat{y}_2)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_1 \left(\|\hat{y}_1\|_{H^2(\Omega)}^2, \|\hat{y}_2\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \|\hat{y}_1 - \hat{y}_2\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C_1(R) \|\hat{y}_1 - \hat{y}_2\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|F_t(\hat{y}_1, \hat{z}_1) - F_t(\hat{y}_2, \hat{z}_2)\|_{L^2(0,T;V)} &\leq C_2 \left(\|\hat{y}_1\|_{H^2(\Omega)}^2, \|\hat{y}_2\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_V \\ &\leq C_2(R) \|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_V, \end{aligned}$$

Logo, de (5.3.24), das estimativas sobre F e F_t dadas acima, ao denotar $C_3 := \max\{C_1(R), C_2(R)\}$, temos que

$$\begin{aligned} \|K(\hat{y}_1, \hat{z}_1) - K(\hat{y}_2, \hat{z}_2)\|_{X_T} &\leq C_3 \int_0^T [\|\hat{y}_1(s) - \hat{y}_2(s)\|_{H^2(\Omega)} + \|\hat{z}_1(s) - \hat{z}_2(s)\|_V] ds \\ &\leq T C_3 [\|\hat{y}_1 - \hat{y}_2\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_{C([0,T];V)}] \\ &= T C_3 \|(\hat{y}_1 - \hat{y}_2, \hat{z}_1 - \hat{z}_2)\|_{X_T}. \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Tomando T suficientemente pequeno tal que $T C_3 < 1$, temos que K é uma contração em $B_R(X_T)$. Logo, pelo teorema do ponto fixo de Banach, Teorema 2.3.4, página 59, existe um ponto fixo $(\hat{y}, \hat{z}) = K(\hat{y}, \hat{z}) = (y, z) \in B_R(X_T)$ tal que $y(t)$ é uma solução forte de (5.1.1) e $y_t(t) = z(t)$.

□

• • •

5.3.4. Soluções Globais em 2D

O objetivo desta subseção é mostrar que, no caso $N = 2$ soluções locais obtidas no Teorema anterior serão globais (no tempo). Uma formulação precisa é dada no



Teorema abaixo.

Teorema 5.3.2

Para dimensão $N = 2$, para todo $(y_0, z_0) \in X_0$ e todo $T > 0$, existe uma única solução y de (5.3.2) com derivada no tempo $y_t = z$ tal que o par $(y, z) \in X_T$.

Demonstração:

A primeira etapa são as estimativas de energia para o já obtido problema com soluções locais.

5.3.4.1. Etapa 1: Limitação para a Energia

Introduzimos o funcional de energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y(x, t)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |y(x, t)|^4 dx \quad (5.3.26)$$

Lema 5.3.2

Seja y uma solução “regular” obtida no Teorema 5.3.1. Então, a seguinte estimativa a priori esta assegurada:

$$\|y(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq CE(0), \text{ para todo } t \in [0, \infty). \quad (5.3.27)$$

Além disso, é satisfeita a seguinte regularidade na fronteira.

$$\int_0^t \|y_t(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt \leq CE(0). \quad (5.3.28)$$

Demonstração: Multiplicando a equação

$$y_t = i\Delta y - i|y|^2 y$$

por \bar{y}_t , integrando em Ω e, tomando parte real resulta a identidade de energia:

$$E(t) + \int_0^t \int_{\Gamma_1} |y_t|^2 d\gamma dt = E(0). \quad (5.3.29)$$

e desta última identidade, temos que a energia é decrescente no tempo, no qual obtemos (5.3.27). Em dimensões $N = 2, 3$, o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^6(\Omega)$. Assim, provém a estimativa

$$E(0) \leq \frac{1}{2} \|y_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + C \|y_0\|_{H^1(\Omega)}^4. \quad (5.3.30)$$



A remanescente desigualdade (5.3.28) resulta de (5.3.29). □

5.3.4.2. Etapa 2: limitações globais

Queremos mostrar que $\|y(t)\|_{H^2(\Omega)}$ e $\|z(t)\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}$ permanecem limitadas para todo $t \in [0, \infty)$. A última não segue imediatamente da primeira, devido à presença do termo não linear. Para verificar que $\|y(t)\|_{H^2(\Omega)}$ e $\|z(t)\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}$ permanecem limitadas, usamos a desigualdade de Brézis – Gallouet (1.4.7), mas de uma maneira sutil, isto é, embora seguimos a estratégia utilizada por Brézis – Gallouet, haverá consideráveis “desvios técnicos”. Estes são devidos à natureza das condições de fronteira dinâmicas (ao contrário da equação de Schrödinger clássica). No caso de condições de fronteira clássicas Dirichlet ou Neumann, é facilmente demonstrado que o semigrupo linear é topologicamente invariante em H^2 . Por outro lado, o termo cúbico em duas dimensões é um elemento de H^2 . Isso qualifica perfeitamente a estratégia dada por Brézis – Gallouet. No nosso caso, primeiramente, não temos um semigrupo como em Brézis – Gallouet [20], daí podemos falar sobre a invariância, contudo, a invariância de soluções fortes para o problema Wentzell requer mais informações do que apenas a topologia H^2 . O domínio do gerador Wentzell requer $\Delta y \in H^1(\Omega)$.

No entanto, há um fator que desempenha para nós a nosso favor – é a regularidade escondida na fronteira (não presente nos problemas de fronteira homogêneos). Este aspecto será explorado de forma crítica em relação às estimativas.

Começamos provando a seguinte estimativa:

$$\|y_t(t)\|_V + \|y(t)\|_{H^2} \leq C_{y_0} + C \left(\int_0^t \|F_t(y(s), y_t(s))\|_V ds + \left[\int_0^t \int_{\Gamma_1} |F_t(y(s), y_t(s))|^2 \right]^{1/2} ds dt \right) \quad (5.3.31)$$

onde as constantes C_{y_0} e C serão apresentadas posteriormente.

De fato, substituindo $f = F(y) = -i|y|^2 y$, tendo em mente que $g = f|_{\Gamma_1}$ e (5.1.55), de (5.1.54), temos

$$y_t = e^{At} \Delta y_0 + e^{At} F(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} F_t(y(s), y_t(s)) ds - A \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N} F_t(y(s), y_t(s)) ds. \quad (5.3.32)$$

Por outro lado, pela propriedade (A0) dada no lema 5.3.1 e as imersões $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow V$ (onde denotamos por ξ e ζ , respectivamente, as constantes



destas imersões), resulta que

$$\|e^{At}F(0)\|_V \leq \|y_0\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|y_0\|_V \leq \zeta \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \|y_0\|_V \leq \xi \zeta \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^3. \quad (5.3.33)$$

Assim, combinando (5.3.32) e (5.3.33), levando em conta a continuidade da aplicação \mathcal{L} dada em (5.1.47) (cuja constante de imersão denotamos por η), obtemos

$$\begin{aligned} \|y_t(t)\|_V &\leq \|\Delta y_0\|_V + \xi \zeta \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^3 + \int_0^t \|F_t(y(s), y_t(s))\|_V ds + \|\mathcal{L}(F_t(y(s), y_t(s)))\|_V \\ &\leq \|\Delta y_0\|_V + \xi \zeta \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^3 + \int_0^t \|F_t(y(s), y_t(s))\|_V ds + \eta \|F_t(y(s), y_t(s))\|_{L^2(0,t;L^2(\Gamma_1))} \\ &= \|\Delta y_0\|_V + \xi \zeta \|y_0\|_{H^2(\Omega)}^3 + \int_0^t \|F_t(y(s), y_t(s))\|_V ds \\ &\quad + \eta \left[\int_0^t \int_{\Gamma_1} |F_t(y(s), y_t(s))|^2 d\gamma ds \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Agora, por (5.1.57) e pela continuidade da aplicação traço $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$ (cuja constante de imersão denotamos por ς), temos que

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_1 (\|y_t(t)\|_V + \|F(y(t))\|_V + \|F(y(t))\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}) \\ &\leq C_1 (\|y_t(t)\|_V + (1 + \varsigma) \|F(y(t))\|_V). \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

Para estimar a norma $\|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}$, usamos apenas interpolação e imersão de Sobolev em duas dimensões:

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|y\|_{H^{1+\theta}(\Omega)} \leq \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^{1-\theta} \|y\|_{H^2(\Omega)}^\theta \leq \zeta \|y\|_{H^2(\Omega)}^\epsilon. \quad (5.3.36)$$

para qualquer ϵ pequeno. Tal fato nos assegura que

$$\|F(y(t))\|_V \leq \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|y(t)\|_V \leq \zeta \|y(t)\|_{H^2(\Omega)}^{2\epsilon} \|y(t)\|_V \leq \zeta \|y(t)\|_{H^2(\Omega)}^{2\epsilon} \|y_0\|_V, \quad (5.3.37)$$

de modo que na última desigualdade usamos o lema 5.3.2.

Em contrapartida, fazendo uso da desigualdade de Young³, Proposição 2.3.1, página 55, vem que

$$C_1(1 + \varsigma) \|F(y(t))\|_V \leq \delta \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} + \underbrace{C_\delta [\zeta C_1(1 + \varsigma)]^{1/(1-2\epsilon)}}_{:=C_0} \|y_0\|_V^{1/(1-2\epsilon)}. \quad (5.3.38)$$

Sendo assim, combinando (5.3.34), (5.3.35) e (5.3.38) e, considerando δ suficiente-

³Tome $p = 1/(2\epsilon)$ e $q = 1/(1 - 2\epsilon)$, uma vez que a constante ϵ é assumida ser pequena, devido a (5.3.36).



mente pequeno, resulta o desejado em (5.3.31), donde

$$C_{y_0} := C(C_0, \|y_0\|_{H^2(\Omega)}, \|\Delta y_0\|_V) \text{ e } C = (1 + C_1) \max\{1, \eta\}.$$

A fim de realizar ao longo da prova o procedimento de Brézis – Gallouet, precisamos estimativas mais refinadas na fronteira. Infelizmente, não é suficiente usar a teoria do traço, como no caso da teoria local. Vamos usar, em vez disso, a seguinte desigualdade de interpolação para o traço. Denotamos por γ o operador traço – restrito à fronteira Γ_1 . Temos que

$$\|\gamma u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.3.39)$$

Recorrendo a esta desigualdade, chegamos à

$$\|\gamma F_t(y, z)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq C \|F_t(y, z)\|_{H^1(\Omega)} \|F_t(y, z)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.3.40)$$

Por outro lado, note que $|F_t(y, z)| \leq 3|y|^2 z$ e, para $N \leq 3$, as imersões de Sobolev e a desigualdade de Hölder nos dão

$$\begin{aligned} \|F_t(y, z)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sqrt{3} \left(\int_{\Omega} |y|^4 |z|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{3} \| |z|^2 \|_{L^3(\Omega)}^{1/2} \| |y|^4 \|_{L^{3/2}(\Omega)}^{1/2} \\ &= \left\{ \left[\int_{\Omega} |z|^6 dx \right]^{1/3} \right\}^{1/2} \left\{ \left[\int_{\Omega} |y|^{4 \cdot \frac{3}{2}} dx \right]^{2/3} \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{3} \left\{ \|z\|_{L^6(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \|y\|_{L^6(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|z\|_{H^1(\Omega)} \|y\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq CE(0) \|z(t)\|_V \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

onde na última passagem, usamos a limitação *a priori* no Lema 5.3.2.

Recordamos agora a estimativa (B1) dada no Lema 5.3.1, temos:

$$\|F_t(y, z)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|z\|_V \|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|z\|_{H^1(\Omega)} \|y\|_{H^2(\Omega)} \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (5.3.42)$$

podemos perceber imediatamente o problema. A estimativa acima é muito “crua” e são necessárias estimativas mais refinadas representando a natureza bidimensional do problema.

Na verdade, vamos mostrar que o segundo termo na desigualdade acima pode ser dispensado, proporcionando assim a estimativa:

$$\|F_t(y, z)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|z\|_V \|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + C \|z\|_V^{3/4} \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \|z|_{\Gamma_1}\|_{L^2(\Gamma_1)}. \quad (5.3.43)$$



Por um momento, assumamos a validade do (5.3.43) e vamos prosseguir a prova.

Assim, substituindo (5.3.41) e (5.3.43) em (5.3.40), resulta que

$$\|\gamma F_t(y, z)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq C \|z(t)\|_V^2 \|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + C \|z\|_V^{7/4} \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \|z|_{\Gamma_1}\|_{L^2(\Gamma_1)}. \quad (5.3.44)$$

Voltando à estimativa principal (5.3.31), as desigualdades (5.3.43) e (5.3.44) nos levam a:

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_V + \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_{y_0} + \int_0^t \|z(s)\|_V \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds + \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^2 \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right]^{1/2} \\ &\quad + \int_0^t \|z(s)\|_V^{3/4} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\gamma z(s)\|_{L^2(\Gamma_1)} ds \\ &\quad + \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{7/4} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\gamma z(s)\|_{L^2(\Gamma_1)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.3.45)$$

É oportuno enfatizar que esta estimativa é válida para $N \leq 3$. À título de informação, ao qual para nós é relevante, é a seguinte “regularidade escondida”, que permite lidar com o traço da fronteira γz .

Observação 5.3.2

Aqui notamos que temos a óbvia estimativa do traço

$$\|\gamma z\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C \|z\|_V$$

no entanto, esta estimativa não é suficiente para concluir limitações globais para as potências da desconhecida norma $\|z\|_V$ dadas em (5.3.45).

Em vez disso, vamos usar a regularidade escondida

$$\int_0^t \|\gamma z(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq CE(0). \quad (5.3.46)$$



Usando a desigualdade anterior e Hölder no tempo, temos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \|z(s)\|_V^{3/4} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\gamma z(s)\|_{L^2(\Gamma_1)} ds + \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{7/4} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\gamma z(s)\|_{L^2(\Gamma_1)} \right]^{1/2} \\
 & \leq \left[\int_0^t \left(\|z(s)\|_V^{3/4} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \right)^2 ds \right]^{1/2} \left[\int_0^t \|\gamma z(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 ds \right]^{1/2} \\
 & + \left\{ \left[\int_0^t \left(\|z(s)\|_V^{7/4} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \right)^2 ds \right]^{1/2} \left[\int_0^t \|\gamma z(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 ds \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \\
 & \leq C(E(0)) \left\{ \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{3/2} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \right]^{1/2} + \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{7/2} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \right]^{1/4} \right\}.
 \end{aligned}$$

Recorrendo novamente a desigualdade (5.3.36), observe que

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{3/2} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \right]^{1/2} + \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{7/2} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \right]^{1/4} \\
 & \leq \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{3/2} \|y(s)\|_{H^2(\Omega)}^{2\epsilon} ds \right]^{1/2} + \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{7/2} \|y(s)\|_{H^2(\Omega)}^{2\epsilon} ds \right]^{1/4}. \quad (5.3.47)
 \end{aligned}$$

O nosso próximo passo é estimar as normas $\|z\|_V^{3/2} \|y\|_{H^2}^\epsilon$ e $\|z\|_V^{7/2} \|y\|_{H^2}^\epsilon$.

Com efeito, pela desigualdade de Young dada na proposição 2.3.1⁴ vem que

$$\|z\|_V^{3/4} \|y\|_{H^2(\Omega)}^\epsilon \leq \eta \|z\|_V + C_\eta \|y\|_{H^2(\Omega)}^{4\epsilon}$$

e, usando novamente tal proposição para a segunda parcela da desigualdade acima⁵, resulta que

$$\|z\|_V^{3/4} \|y\|_{H^2(\Omega)}^\epsilon \leq \eta \|z\|_V + C_\eta \|y\|_{H^2(\Omega)}^{4\epsilon} \leq \delta \|z\|_V + C_\eta \nu \|y\|_{H^2(\Omega)} + C_\eta C_\nu.$$

Deste modo, tomando δ, ν pequenos os suficientes de modo a reescrevê – los em

⁴Considere $p = 4/3$ e $q = 4$.

⁵Tome $p = 1/(4\epsilon)$ e $q = 1/(1 - 4\epsilon)$. É propício aqui referir que o valor de ϵ é considerado pequeno como em (5.3.36).



termos de ϵ , provém que

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{3/2} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \right]^{1/2} &= \left[\int_0^t \left(\|z(s)\|_V^{3/4} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^\epsilon \right)^2 ds \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\int_0^t \left(\epsilon \|z(s)\|_V + \epsilon \|y(s)\|_{H^2(\Omega)} + C_\epsilon \right)^2 ds \right]^{1/2} \\ &\leq \epsilon t^{1/2} \sup_t \left(\|z(t)\|_V + \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} \right) + C_\epsilon t^{1/2}. \end{aligned}$$

Como provamos que há solução local, existe um $T > 0$ tal que a quantidade $\sup_t \left(\|z(t)\|_V + \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} \right)$ é bem definida. Assim, para $t \leq T$, a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{3/2} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \right]^{1/2} \leq 2R\epsilon T^{1/2} + C_\epsilon T^{1/2} := C(\epsilon, R, T). \quad (5.3.48)$$

Uma similar estimativa aplica – se para o segundo termo em (5.3.47). Deste modo, obtemos

$$\left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{3/2} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \right]^{1/2} + \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^{7/2} \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \right]^{1/4} \leq C(\epsilon, R, T). \quad (5.3.49)$$

Note que mediante as estimativas (5.3.48) e (5.3.49), podemos dispensar estes termos em (5.3.45) no sentido em que a limitação obtida por tais termos será combinada com a constante C_{y_0} , conforme resulta a próxima desigualdade:

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_V + \|y(t)\|_{H^2} &\leq \underbrace{C(C_{y_0}, \epsilon, R, T)}_{:=C^*} + C(E(0)) \int_0^t \|z(s)\|_V \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + C(E(0)) \left[\int_0^t \|z(s)\|_V^2 \|y(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.3.50)$$

Agora, vamos usar explorar o fato de que a dimensão do espaço é $N \leq 2$. O trunfo neste caso é a desigualdade de Brézis – Gallouet:

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|y\|_{H^1(\Omega)}) \left(1 + \sqrt{\log(1 + \|y\|_{H^2(\Omega)})} \right).$$



A desigualdade de Brézis – Gallouet quando aplicada a (5.3.45) nos dá que

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_V + \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C^* + C(E(0)) \int_0^t \|z(s)\|_V (1 + \log(1 + \|y(s)\|_{H^2(\Omega)})) ds \\ &\quad + C(E(0)) \left[\int_0^t \|z(s)\|_V (1 + \log(1 + \|y(s)\|_{H^2(\Omega)})) ds \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.3.51)$$

Neste instante, é suficiente trabalhar com

$$\begin{aligned} &\|z(t)\|_V + \|y(t)\|_{H^2} \quad (5.3.52) \\ &\leq C^* + C(E(0)) \int_0^t \|z(s)\|_V (1 + \log(1 + \|y(s)\|_{H^2(\Omega)})) ds. \end{aligned}$$

De fato, para justificar tal fato, suponhamos duas situações, a saber $\|y(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq M$ e $\|y(t)\|_{H^2(\Omega)} > M$, para todo t não – negativo de modo que $M > 0$ é tomado suficientemente grande. Se a primeira situação ocorre, nada temos a fazer, uma vez que temos a estimativa no qual procuramos, ou seja, uma limitação global para y em $H^2(\Omega)$. No segundo caso, note que

$$1 + \sqrt{1 + \log(1 + \|y(s)\|_{H^2(\Omega)})} \leq C [1 + 1 + \log(1 + \|y(s)\|_{H^2(\Omega)})], \quad \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} > M$$

e assim, é assegurada a afirmação em (5.3.52).

$$G(t) \equiv C^* + C(E(0)) \int_0^t \|z(s)\|_V (1 + \log(1 + \|y(s)\|_{H^2(\Omega)})) ds. \quad (5.3.53)$$

Veja que a estimativa (5.3.52) implica que

$$\|z(t)\|_V \leq G(t) \quad \text{e} \quad \|y(t)\|_{H^2} \leq G(t)$$

Logo, como $C^* = C(C_{y_0}, \epsilon, R, T)$, ao derivar (5.3.53) na variável t , resulta que

$$G'(t) = C(E(0)) \|z(t)\|_V [1 + \log(1 + \|y(t)\|_{H^2(\Omega)})] \leq C G(t) [1 + \log(1 + G(t))].$$

Contudo, a desigualdade acima nos diz que que

$$\frac{d}{dt} \log[1 + \log(1 + G(t))] \leq C. \quad (5.3.54)$$

Integrando de 0 à t e, aplicando a exponencial em ambos os lados da precedente



desigualdade, esta fornece a seguinte estimativa:

$$G(t) \leq M e^{\alpha e^{\beta t}} \quad (5.3.55)$$

para algumas constantes M , α e β . Isto dá

$$\|z(t)\|_V + \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq M e^{\alpha e^{\beta t}} \leq C(T), t < T,$$

portanto pela alternativa de *blow-up*, a norma $\|z(t)\|_V$ bem como a norma $\|y(t)\|_{H^2(\Omega)}$ permanecem limitadas sobre todo intervalo de tempo finito, assim, devemos ter que $T_{\max} = \infty$. Isto nos diz que as limitações relatadas são para todo $t \in [0, \infty)$, como desejado para completar a prova, desde que a desigualdade em (5.3.43) seja estabelecida.

5.3.4.3. Prova de (5.3.43)

Voltando então a definição das $F_t(y, z)$ (veja (5.3.8)), temos que

$$\|F_t(y, z)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|z y \nabla y\|_{L^2(\Omega)} + C \|y^2 \nabla z\|_{L^2(\Omega)}.$$

Afim de provar (5.3.43) é suficiente estimar o termo

$$\|(zy \nabla y)(t)\|_V \leq C \|z(t)\|_V \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + C \|z(t)\|_V^{3/4} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\gamma z(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}. \quad (5.3.56)$$

Para continuar, nós aplicamos a desigualdade de Hölder para obter

$$\|(zy \nabla y)(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|z(t)\|_{L^{2q}(\Omega)} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla y(t)\|_{L^{2q^*}(\Omega)}, \quad 1/q + 1/q^* = 1. \quad (5.3.57)$$

Pela desigualdade de Gagliardo – Nirenberg, Teorema 2.3.6 para $N = 2$, temos

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1-a} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^a, \quad a = 1 - 2/p, p < \infty. \quad (5.3.58)$$

Essa desigualdade quando aplicada a (5.3.57) implica que

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{L^{2q}(\Omega)} &\leq \|z(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/q} \|z(t)\|_V^{1-1/q} \\ \|\nabla y(t)\|_{L^{2q^*}(\Omega)} &\leq C \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/q^*} \|y(t)\|_{H^2(\Omega)}^{1-1/q^*}. \end{aligned} \quad (5.3.59)$$



Isto nos dá juntamente com o Lema 5.3.2 , (5.3.59) e (5.3.57) que

$$\begin{aligned} \|(zy\nabla y)(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|z(t)\|_{L^{2q}(\Omega)} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla y(t)\|_{L^{2q^*}(\Omega)} \\ &\leq C \|z(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/q} \|z(t)\|_V^{1-1/q} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/q^*} \|y(t)\|_{H^2(\Omega)}^{1-1/q^*} \\ &\leq C(E(0)) \|z(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/q} \|z(t)\|_V^{1-1/q} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|y(t)\|_{H^2(\Omega)}^{1-1/q^*}. \end{aligned} \quad (5.3.60)$$

Nosso próximo passo é a obtenção de uma melhor caracterização para a estimativa $\|z(t)\|_{L^2(\Omega)}$. Isto é feito através da execução do método para obter a energia na equação primal

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y + F & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu y + y_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{cases} \quad (5.3.61)$$

Com efeito, multiplicando por \bar{y}_t e tomando a parte real, obtemos

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \|F(y(t))\|_{L^2(\Omega)} \|z(t)\|_{L^2(\Omega)} + C \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \left(\|y(t)\|_{L^6(\Omega)}^3 + \|y(t)\|_V \right) \|z(t)\|_V \\ &\leq C \left(\|y(t)\|_V^3 + \|y(t)\|_V \right) \|z(t)\|_V \\ &\leq C(E(0)) (1 + \|z(t)\|_V). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(E(0)) (1 + \|z(t)\|_V). \quad (5.3.62)$$

A partir de (5.3.61), de uma forma semelhante obtém-se

$$\begin{aligned} \|\Delta y(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|z(t)\|_{L^2(\Omega)} + C \|F(y(t))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(E(0)) \|z(t)\|_V^{1/2} + C(E(0)) \\ &\leq C(E(0)) \left(1 + \|z(t)\|_V^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (5.3.63)$$

Agora, escrevendo $y = y_1 + y_2$ de modo que $y_1 \equiv \mathcal{N}y_t$, de (5.3.63), vem que

$$\begin{aligned} \|y_2(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} + \|y_1(t)\|_{H^2(\Omega)} \\ &= \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} + \|\mathcal{N}y_t(t)\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\Delta y(t)\|_{L^2(\Omega)} + \underbrace{\|\Delta \mathcal{N}y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}}_{=0 \text{ por (5.1.29)}} \\ &\leq C(E(0)) [1 + \|z(t)\|_V^{1/2}]. \end{aligned} \quad (5.3.64)$$



A continuidade da aplicação de Neumann dada em (5.1.30) fornece para $s = 0$ que

$$\|\mathcal{N}y_t(t)\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C\|y_t(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}. \quad (5.3.65)$$

Explorando as estimativas acima em (5.3.60), primeiramente usando (5.3.64), vem que

$$\begin{aligned} \|(zy\nabla y_2)(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\left(1 + \|z(t)\|_V^{1/(2q)}\right) \|z(t)\|_V^{1-1/q} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + \|z(t)\|_V^{1/2-1/(2q^*)}\right) \\ &= C\|z(t)\|_V^{1-1/q} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + C\|z(t)\|_V^{3/2-1/(2q^*)-1/(2q)} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + C\|z(t)\|_V^{1-1/q+1/(2q)} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \|z(t)\|_V^{1/(2q)} \|z(t)\|_V^{1-1/q} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|z(t)\|_V^{1/2-1/(2q^*)}, \end{aligned}$$

isto é, como $1/q + 1/q^* = 1$, vem que

$$\begin{aligned} \|(zy\nabla y_2)(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\left(\|z(t)\|_V^{1-1/q} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z(t)\|_V^{1-1/(2q)} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\ &\quad + \|z(t)\|_V \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned} \quad (5.3.66)$$

Agora, dividamos a análise de (5.3.66) em duas situações, a saber,

$$\|z(t)\|_V \leq 1 \text{ ou } \|z(t)\|_V > 1, \forall t \geq 0$$

Se a primeira situação ocorre, temos a almejada limitação para $\|z(t)\|_V$. Desta maneira, consideramos a outra situação. Observe que nesta situação, temos que os dois primeiros termos do lado direito de (5.3.66) são limitados pelo último, o que nos permite afirmar que

$$\|(zy\nabla y_2)(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|z(t)\|_V \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (5.3.67)$$

e em (5.3.57) com $q = 2$ tendo em mente a primeira desigualdade de (5.3.59), juntamente com (5.3.62), (5.3.65) e, lembrando que $\|\nabla y(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|y(t)\|_{H^{3/2}(\Omega)}$,⁶ temos que

$$\begin{aligned} \|(zy\nabla y_1)(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|z(t)\|_{L^4(\Omega)} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla y_1(t)\|_{L^4(\Omega)} \quad (5.3.68) \\ &\leq C\|z(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|z(t)\|_V^{1/2} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|y_1(t)\|_{H^{3/2}(\Omega)} \\ &\leq C\|z(t)\|_V^{1/4} \|z(t)\|_V^{1/2} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|y_1(t)\|_{H^{3/2}(\Omega)} \\ &\leq C\|z(t)\|_V^{3/4} \|y(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\gamma z(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

⁶ Veja que pela desigualdade de Gagliardo – Nirenberg, temos que $\|Dy\|_{L^4(\Omega)} \leq C_0\|y\|_V$, para todo $y \in V$ e, pela imersão $H^{3/2}(\Omega) \hookrightarrow V$, obtemos a afirmada desigualdade.



Ao combinar (5.3.67) e (5.3.68), alcançamos o desejado nesta subseção, isto é, a desigualdade (5.3.43) .

□

5.4. Existência de soluções fracas Via Método de Faedo – Galerkin

Nesta seção, provemos a existência de soluções fracas correspondentes à equação Schrödinger semilinear com termo de fronteira não – linear.

Recordamos a equação a ser considerada

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y - if(y) & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \partial_\nu y = -g(y_t) & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.4.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $N \leq 3$ é limitado. A fronteira de Ω que se presume ser constituída por duas partes disjuntas, fechada, suaves Γ_0 e Γ_1 , ambos os quais têm interiores não vazios.

A função $g(z)$ é contínua, monótona sobre \mathbb{C} de crescimento linear. Em particular, existem constantes $m_0, M \in \mathbb{R}$ tal que a função $g(z)$ satisfaz as seguintes premissas:

$$\operatorname{Re}[(g(z) - g(w)) \cdot (\bar{z} - \bar{w})] \geq m_0 |z - w|^2 \quad (5.4.2)$$

$$\operatorname{Re}[g(z) \cdot \bar{z}] \geq m_0 |z|^2 \quad (5.4.3)$$

$$\operatorname{Im}[g(z) \cdot \bar{z}] = 0 \quad (5.4.4)$$

$$|g(z)| \leq M |z| \quad (5.4.5)$$

Iremos estudar a existência de soluções fracas em duas situações, a saber:

Caso 1: quando $f(y) := |y|^2 y$ e $g(z) = z$;

Caso 2: a função g satisfaz as hipóteses (5.4.2) – (5.4.5) e $f : V \rightarrow V$ is globalmente Lipschitz. Além disso, inspirado em Burq, Gérard e Tzvetkov [24], esta não – linearidade assume a forma $f = \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}$, com $f(0) = 0$ (aqui $\partial/\partial \bar{z}$ é o operador Cauchy – Riemann) onde o “potencial” G é uma função real tal que $G(0) = 0$, e $G(e^{i\theta} z) = G(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Além disso, G satisfaz

$$|G(z) - G(w)| \leq C |z - w|^2. \quad (5.4.6)$$



O operador Cauchy – Riemann é dado por

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad z = x + iy. \quad (5.4.7)$$

Observação 5.4.1

Em ambos os casos, a não – linearidade f satisfaz:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \tilde{G}(y(x, t)) dx = \operatorname{Re} (f(y), y')_{L^2(\Omega)}. \quad (5.4.8)$$

Sabe-se que, no caso 1, isto é, quando $f(y) = |y|^2 y$ na igualdade acima, temos $\tilde{G}(y) = \frac{1}{2} |y|^4$ e no caso 2, de acordo com Burq, Gérard e Tzvetkov, [[24], página 296, identidade (1.4b)], $\tilde{G} = G$. Provaremos abaixo esta identidade para o caso 2.

A partir de agora, consideraremos em nossos cálculos $\tilde{G} = G$, por abuso de notação, quando não há necessidade de especificar cada caso.

Lema 5.4.1

Sejam f e G dadas no caso 2. Então, a identidade (5.4.8) é satisfeita, isto é,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} G(w(x, t)) dx = \operatorname{Re} (f(w(x, t)), w'(x, t))_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração: Para ver isto, inicialmente, consideremos nesta prova que x e y são apenas notações que não tem relação com $y(x, t)$. Note que podemos compreender $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ como definida sobre o \mathbb{R}^2 , isto é, considere a função $G_{\mathbb{R}} :$

$$G_{\mathbb{R}}(x, y) := G(x + iy), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Denotamos por $\frac{\partial G_{\mathbb{R}}}{\partial x}$ e $\frac{\partial G_{\mathbb{R}}}{\partial y}$ as derivadas parciais de $G_{\mathbb{R}}$ com respeito a primeira e a segunda variável. Veja que x e y que aparecem aqui são apenas notações. Então,

$$G(w(x, t)) = G_{\mathbb{R}}(\operatorname{Re}(w(x, t)), \operatorname{Im}(w(x, t))).$$

Pela regra da cadeia, note que

$$\frac{d}{dt} G(w(x, t)) = \operatorname{Re}(w_t(x, t)) \frac{\partial}{\partial x} G_{\mathbb{R}}(w(x, t)) + \operatorname{Im}(w_t(x, t)) \frac{\partial}{\partial y} G_{\mathbb{R}}(w(x, t)).$$



Fazendo a identificação de $G_{\mathbb{R}}$ com G , da identidade acima, obtemos:

$$\frac{d}{dt}G(w(x, t)) = \operatorname{Re}(w_t(x, t))\frac{\partial}{\partial x}G(w(x, t)) + \operatorname{Im}(w_t(x, t))\frac{\partial}{\partial y}G(w(x, t)). \quad (5.4.9)$$

Assim, de (5.4.9) e o fato que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$, para todo $z \in \mathbb{C}$, resulta que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\Omega} \bar{w}_t(x, t) f(w(x, t)) dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Omega} \bar{w}_t(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x}G(w(x, t)) + i \frac{\partial}{\partial y}G(w(x, t)) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Omega} \overline{w_t(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x}G(w(x, t)) - i \frac{\partial}{\partial y}G(w(x, t)) \right)} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Omega} w_t(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x}G(w(x, t)) - i \frac{\partial}{\partial y}G(w(x, t)) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left(w_t(x, t) \frac{\partial}{\partial x}G(w(x, t)) \right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left(i w_t(x, t) \frac{\partial}{\partial y}G(w(x, t)) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{Re} (w_t(x, t)) \frac{\partial}{\partial x}G(w(x, t)) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{Im} (w_t(x, t)) \frac{\partial}{\partial y}G(w(x, t)) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} G(w(x, t)) dx, \end{aligned}$$

o que mostra o desejado. □

Quando se estuda o caso 2, a igualdade dada em (5.4.8) nos motiva definir a identidade da energia do problema (5.4.1):

$$\begin{aligned} &\|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y(x, t)) dx + 2 \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(y'(s)) \bar{y}'(s) d\gamma ds \quad (5.4.10) \\ &= \|\nabla y^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y(x, 0)) dx. \end{aligned}$$

• • •

5.4.1. Soluções Fracas

De antemão, temos a seguinte definição:



Definição 5.4.1

Dizemos que $y \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = V$ é uma solução fraca de (5.4.1) se para toda $v \in V$, temos

$$i(y', v)_{L^2(\Omega)} - (\nabla y, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (g(y'), v)_{L^2(\Gamma_1)} - (f(y), v)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall t \in [0, \infty) \quad (5.4.11)$$

O espaço V' denota o espaço dual de V com respeito ao espaço pivô $L^2(\Omega)$. Isto é dizer que $V \subset L^2(\Omega) \subset V'$. Nosso principal resultado nesta seção diz:

Teorema 5.4.1

Seja $N \leq 3$. Dado $y_0 \in V$, existe uma (única, no caso 2) solução fraca y de (5.4.1) na classe

$$y \in L^\infty(0, \infty; V); \quad y' \in L^\infty(0, \infty; V'). \quad (5.4.12)$$

e a seguinte regularidade na fronteira ocorre:

$$g(y_t)|_{\Gamma_1}, \partial_\nu y \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)).$$

Além disso, a identidade de energia (5.4.10) é satisfeita quando se estuda o caso 2.

Observação 5.4.2

1. Note que o teorema 5.4.1 não fornece unicidade de soluções fracas para o caso 1. Contudo, a unicidade pode ser estabelecida no caso o termo semilinear é Lipschitz em V , ou seja, no caso 2, ou no caso quando $g = 0$. Manter a presença simultaneamente de ambos os termos não – lineares torna-se problemático quando se tenta obter estimativas para a diferença de duas soluções.
2. Provaremos o teorema 5.4.1 para os casos 1 e 2 acima mencionado. Quando necessário, especificaremos cada situação.

• • •

5.4.2. Problema Aproximado

Seja $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal de V . Podemos ter, de fato, $\{\omega_j\}$ como uma base ortonormal correspondente à raiz quadrada de um operador de auto – adjunto $A_N^{1/2}$ onde A_N é gerado por Δ com condição de Neumann nula sobre Γ_1 e condição de Dirichlet nula sobre Γ_0 . Definamos $V_m = [\omega_1, \dots, \omega_m]$ e seja $v \in V_m$. Em seguida, consideramos a aproximação de (5.4.1) dada pela seguinte forma variacional



aproximada definida em V_m , ou seja, para todo $v_m \in V_m$, tem-se

$$\begin{cases} y_m(t) \in V_m \Leftrightarrow y_m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t) \omega_j(t) \\ (i y'_m, v_m)_{L^2(\Omega)} - (\nabla y_m, \nabla v_m)_{L^2(\Omega)} + (g(y'_m), v_m)_{L^2(\Gamma_1)} - (f(y_m), v_m)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ y_m(0) = y_m^0 \quad \text{em } \Omega \\ y_m(0) = y_m^0 \rightarrow y_0 \quad \text{em } V = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \end{cases} \quad (5.4.13)$$

Deve ser demonstrado que o sistema aproximado (5.4.13) dá origem a uma equação diferencial ordinária, que é unicamente solúvel.

Definamos

$$\begin{aligned} A &= [(\nabla \omega_i, \nabla \omega_j)_{L^2(\Omega)}]_{m \times m}, \quad B = [\omega_j]_{1 \times m} \\ C &= [(\omega_i, \omega_j)_{L^2(\Omega)}]_{m \times m}, \quad Y(t) = [h_{im}(t)]_{m \times 1}, \end{aligned}$$

e, substituindo $y_m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t) \omega_j(t)$ e $v = \omega_k, k = 1, \dots, m$, retornando para a segunda equação em (5.4.13), podemos escrever o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} (iC + \mathcal{G})(Y'(t)) = AY(t) + H(Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases} \quad (5.4.14)$$

onde

$$\mathcal{G}(Y'(t)) = \left[\left(g(B \cdot Y'(t)), \omega_i \right)_{L^2(\Gamma_1)} \right]_{m \times 1}$$

e

$$H(Y(t)) = \left[\left(f(B \cdot Y(t)), \omega_i \right)_{L^2(\Omega)} \right]_{m \times 1}.$$

Será mostrado que o operador $iC + \mathcal{G}$ é inversível.

Com efeito, de antemão, ortonormalizando a base $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, a matriz C se torna a matriz identidade em virtude do processo de Gram – Schmidt.



Pondo $Z = \left[\tilde{h}_{im} \right]_{m \times 1}$, note que

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}(Y) - \mathcal{G}(Z), Y - Z)_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{i=1}^m (g(B \cdot Y) - g(B \cdot Z), \omega_i)_{L^2(\Gamma_1)} (h_{im} - \tilde{h}_{im}) \\ &= \left(g(B \cdot Y) - g(B \cdot Z), \sum_{i=1}^m \omega_i (h_{im} - \tilde{h}_{im}) \right)_{L^2(\Gamma_1)} \\ &= (g(B \cdot Y) - g(B \cdot Z), B \cdot Y - B \cdot Z)_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Usando a propriedade de monotonicidade da função g dada na Hipótese 5.4.2, item (ii), de (5.4.15), temos

$$\operatorname{Re} (\mathcal{G}(Y) - \mathcal{G}(Z), Y - Z)_{\mathbb{R}^m} \geq m \|B \cdot (Y - Z)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2.$$

A independência linear dos vetores B nos permite dizer que

$$\|B \cdot (Y - Z)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \geq m_1 \|Y - Z\|_{L^2(\Gamma_1)}^2$$

e assim,

$$\operatorname{Re} (\mathcal{G}(Y) - \mathcal{G}(Z), Y - Z)_{\mathbb{R}^m} \geq m \|Y - Z\|_{L^2(\Gamma_1)}^2. \quad (5.4.16)$$

Deste modo, o operador $iC + \mathcal{G}$ pode ser escrito com a soma de iI e um operador positivo definido \mathcal{G} . Portanto, o operador $iC + \mathcal{G}$ é inversível e podemos escrever para qualquer $v \in V_m$,

$$\begin{cases} Y'(t) = \underbrace{(iI + \mathcal{G})^{-1} (AY(t) + H(Y(t)))}_{:=f(t, Y(t))} \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

Desde que o problema aproximado (5.4.13) pode ser reescrito como uma equação diferencial ordinária e $f(t, Y(t))$ satisfaz as condições de Carathéodory dadas na página 63, o sistema acima tem uma solução local em $[0, t_m)$ garantida pelo teorema de Carathéodory, Teorema 2.3.11 com $y_m(t)$ absolutamente contínua e $y'_m(t)$ existindo quase sempre no sentido de Dini. Desde $y_m \in V_m$, podemos escrever

$$y_m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t) \omega_j \quad (5.4.17)$$

e por (5.4.13), temos para todo $t \in (0, t_m)$

$$y'_m \in L^2(0, t; V') \quad (5.4.18)$$



• • •

5.4.3. Estimativas *A Priori*

Observa-se que, se considerarmos $v = \omega_j, j = 1, \dots, m$ e multiplicando a segunda equação de (5.4.13) por $\overline{h'_{jm}(t)}$ e, em seguida, somando em j , tendo em conta as condições de fronteira, considerando apenas a parte real, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\|\nabla y_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y_m(x, t)) dx \right] + 2 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_1} g(y'_m) \overline{y'_m} d\gamma = 0.$$

Integrando esta expressão no tempo sobre $t \in [0, t_m)$, obtemos para todo $t \in [0, t_m)$,

$$\begin{aligned} & \|\nabla y_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y_m(x, t)) dx + 2 \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(y'_m(s)) \overline{y'_m(s)} d\gamma ds \quad (5.4.19) \\ & = \|\nabla y_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y_m(x, 0)) dx \end{aligned}$$

e pela hipótese (5.4.3), temos

$$\begin{aligned} & \|\nabla y_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y_m(x, t)) dx + 2m_0 \int_0^t \|y'_m(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 ds \quad (5.4.20) \\ & \leq \|\nabla y_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y_m(x, 0)) dx \\ & \leq C(\|\nabla y_m^0\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos para o caso 1 a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e combinando o fato de que $G(0) = 0$ e a hipótese (5.4.6) para o caso 2.

Observe que a desigualdade (5.4.20) é válida para todo $t \in [0, t_m)$ e todo $m \in \mathbb{N}$. Recorrendo ao Corolário 2.3.3, página 64, podemos estender as soluções y_m à todo intervalo $[0, T]$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Consequentemente, resulta que a desigualdade (5.4.20) é válida para o intervalo $[0, T]$ e todo $m \in \mathbb{N}$.

Desde que a sequência $\{\nabla y_m^0\}$ converge em $L^2(\Omega)$ para ∇y_0 , $\sup \{\|\nabla y_m^0\|\}$ deve ser finito e, portanto, o lado esquerdo da estimativa acima é limitado, independentemente de m e, portanto, existe uma subsequência convergente $\{y_m\}$. A natureza dessa convergência será discutida na subseção seguinte. Também pode-se inferir a partir da



estimativa (5.4.20) que

$$\{y_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \quad (5.4.21)$$

$$\{y'_m\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \quad (5.4.22)$$

$$\{g(y'_m)\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \quad (5.4.23)$$

$$\{f(y_m)\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (5.4.24)$$

onde (5.4.23) provém de (5.4.5) e (5.4.22) e, a última limitação resulta da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ e (5.4.21) quando se estuda o caso 1 e, no caso 2, nós garantimos (5.4.24), de novo por (5.4.21), só que agora, combinando com o fato que $f : V \rightarrow V$ é globalmente Lipschitz e $f(0) = 0$.

Também temos que

$$\{y'_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V'). \quad (5.4.25)$$

De fato, seja $v \in V$ e tome $v_m = P_{V_m} v \in V_m$, a projeção de v sobre V_m . Então, como V_m é um subespaço fechado de V , desde que tem dimensão finita, pelo corolário 2.3.2, página 57, temos que

$$(y'_m, v)_{L^2(\Omega)} = (y'_m, P_{V_m} v)_{L^2(\Omega)}, \forall v \in L^2(\Omega) \supset V$$

e, conseqüentemente, chegamos a

$$\begin{aligned} |(iy'_m, v)_{L^2(\Omega)}| &= |(iy'_m, P_{V_m} v)_{L^2(\Omega)}| \\ &= |(iy'_m, v_m)_{L^2(\Omega)}| \\ &= \|\nabla y_m\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} + \|g(y'_m)\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v_m\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\quad + \|f(y_m)\|_{L^2(\Omega)} \|v_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C [\|\nabla y_m\|_{L^2(\Omega)} + \|g(y'_m)\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|f(y_m)\|_{L^2(\Omega)}] \|v_m\|_V, \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

onde a constante C positivo vem de continuidade da aplicação traço $\zeta : V \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ e a desigualdade de Poincaré.

Mais uma vez, levando em consideração o corolário acima citado, temos que P_{V_m} é um operador linear. Assim, recordando a proposição 2.3.7, página 58, conseguimos

$$\|v_m\|_V = \|P_{V_m} v\|_V \leq \|v\|_V. \quad (5.4.27)$$

Colecionando as limitações *a priori* dadas em (5.4.21), (5.4.22) e (5.4.24), de (5.4.26) e (5.4.27), obtemos

$$|(y'_m, v)_{L^2(\Omega)}| \leq C_1 \|v\|_V, \forall v \in V, \quad (5.4.28)$$

ao qual confere a estimativa desejada em (5.4.25).



• • •

5.4.4. Passagem ao Limite

A partir das estimativas *a priori*, existe uma subsequência de $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, que ainda será denotada da mesma maneira, de modo que

$$y_m \xrightarrow{*} y \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T; V). \quad (5.4.29)$$

$$y'_m \xrightarrow{*} y' \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T; V'). \quad (5.4.30)$$

$$y'_m \xrightarrow{*} y' \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \quad (5.4.31)$$

$$g(y'_m) \xrightarrow{*} \chi \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (5.4.32)$$

Usando a cadeia de imersões

$$V \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega) \equiv [L^2(\Omega)]' \hookrightarrow V',$$

segue da limitação de (5.4.21) pelo Teorema de Aubin-Lions, Teorema 2.3.9, página 62, que existe uma subsequência de $\{y_m\}$, ao qual, mais uma vez denotada da mesma forma, de tal modo que,

$$y_m \longrightarrow y \text{ fortemente em } L^2(0, T, L^2(\Omega)), \quad (5.4.33)$$

ou ainda,

$$y_m \longrightarrow y \text{ q. s. em } \Omega \times (0, T). \quad (5.4.34)$$

Pela continuidade da aplicação $z \mapsto f(z)$ de (5.4.34), resulta que

$$f(y_m) \longrightarrow f(y) \text{ quase sempre em } \Omega \times (0, T). \quad (5.4.35)$$

Assim, combinando (5.4.24) e (5.4.35), pelo lema de Lions, Lema 2.3.10, página 63, obtemos

$$f(y_m) \rightharpoonup f(y) \text{ fraco em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.4.36)$$

Por outro lado, no que se refere ao caso 2, a partir de (5.4.6) e (5.4.33), observemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_\Omega G(y_m(t)) dx - \int_0^T \int_\Omega G(y(t)) dx \right| &\leq \int_0^T \int_\Omega |G(y_m(t)) - G(y(t))| dx dt \\ &\leq c \int_0^T \int_\Omega |y_m(t) - y(t)|^2 dx dt \\ &= c \|y_m - y\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.4.37)$$



então, podemos concluir que

$$\int_0^T \int_{\Omega} G(y_m(t)) dx \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} G(y(t)) dx \text{ quando } m \rightarrow +\infty. \quad (5.4.38)$$

Ademais, como $\omega_j \theta \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ e $\omega_j \theta \in L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))$, de (5.4.29) – (5.4.32) e (5.4.36), podemos afirmar as seguintes convergências:

$$\int_0^T (i y'_m, \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (i y', \omega_j)_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} \theta(t) dt. \quad (5.4.39)$$

$$\int_0^T (\nabla y_m, \nabla \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (\nabla y, \nabla \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt. \quad (5.4.40)$$

$$\int_0^T (f(y_m), \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (f(y), \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt. \quad (5.4.41)$$

$$\int_0^T (g(y'_m), \omega_j)_{L^2(\Gamma_1)} \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (\vartheta, \omega_j)_{L^2(\Gamma_1)} \theta(t) dt \quad (5.4.42)$$

onde

$$\vartheta = \begin{cases} y'; & \text{no caso 1} \\ \chi; & \text{no caso 2} \end{cases}$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ e considere $m > j$. Multiplicando a segunda equação de (5.4.13) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, tomando $v = \omega_j$ e integrando de 0 à T ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (i y'_m, \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt - \int_0^T (\nabla y_m, \nabla \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt \\ &+ \int_0^T (g(y'_m), \omega_j)_{L^2(\Gamma_1)} \theta(t) dt - \int_0^T (f(y_m), \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt. \end{aligned} \quad (5.4.43)$$

Pelas convergências (5.4.39) – (5.4.42), face o limite quando $m \rightarrow +\infty$ em (5.4.43) de modo a obter

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \langle i y', \omega_j \rangle_{V', V} \theta(t) dt - \int_0^T (\nabla y, \nabla \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt \\ &- \int_0^T (\vartheta, \omega_j)_{L^2(\Gamma_1)} \theta(t) dt - \int_0^T (f(y), \omega_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt. \end{aligned} \quad (5.4.44)$$



Pela totalidade dos ω'_j s em $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \langle i y', v \rangle_{V', V} \theta(t) dt - \int_0^T (\nabla y, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt \\ &- \int_0^T (\vartheta, v)_{L^2(\Gamma_1)} \theta(t) dt - \int_0^T (f(y), v)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt, \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned} \quad (5.4.45)$$

Logo, para todo $v \in V$,

$$\langle i y'(t), v \rangle_{V', V} - (\nabla y(t), \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (\vartheta(t), v)_{L^2(\Gamma_1)} - (f(y(t)), v)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (5.4.46)$$

é satisfeita para todo $t \in [0, T]$, onde por (5.4.29) – (5.4.31) e (5.4.36), T pode ser tomado arbitrariamente grande. Observe que provamos a existência de solução no caso 1.

Agora, com o respeito ao caso 2, a tarefa principal é identificar o limite de $\chi(t)$, na próxima subsecção.

• • •

5.4.5. A prova que $\chi = g(y')$

De antemão, seja $\alpha(t) \in C([0, t])$ tal que $\alpha \geq 0$. De (5.4.21) e (5.4.38) segue que após nova extração de possível subsequência que

$$\sqrt{\alpha} \nabla y_m \xrightarrow{*} \sqrt{\alpha} \nabla y \quad \text{fraco} - * \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.4.47)$$

$$\alpha \int_0^T \int_{\Omega} G(y_m(x, t)) dx \rightarrow \alpha \int_0^T \int_{\Omega} G(y(x, t)) dx. \quad (5.4.48)$$

Recordando a Proposição 2.3.5, página 56, item (iii), obtemos

$$\int_0^T \|\nabla y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \alpha(s) ds \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\nabla y_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \alpha(s) ds. \quad (5.4.49)$$

Multiplicando (5.4.19) por α , integrando de 0 à T e, de (5.4.49) juntamente com (5.4.48), resulta ao tomar $\lim \inf$ quando $m \rightarrow \infty$ a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \alpha(t) dt + \int_0^T \int_{\Omega} G(y(x, t)) dx \alpha(t) dt \\ &+ 2 \liminf_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^T \alpha(t) \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(y'_m(s)) \bar{y}'_m(s) d\gamma ds dt \\ &\leq \left[\|\nabla y^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y(x, 0)) dx \right] \int_0^T \alpha(t) dt, \end{aligned} \quad (5.4.50)$$



Agora, consideremos $0 < s < T$, $\beta > 0$ tal que $0 < s - \beta < s < s + \beta < T$ e $\alpha : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ onde

$$\alpha(r) = \begin{cases} 0 & ; & \text{se } 0 \leq r \leq s - \beta \\ 1 + \frac{r - s}{\beta} & ; & \text{se } s - \beta \leq r \leq s \\ 1 & ; & \text{se } r = s \\ 1 - \frac{r - s}{\beta} & ; & \text{se } s \leq r \leq s + \beta \\ 0 & ; & \text{se } s + \beta \leq r \leq T \end{cases} \quad (5.4.51)$$

Pela Proposição 2.3.3, página 55, concluimos que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2\beta} \int_{s-\beta}^{s+\beta} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \alpha(t) dt = \|\nabla y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \alpha(s) = \|\nabla y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (5.4.52)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2\beta} \int_{s-\beta}^{s+\beta} \int_{\Omega} G(y(x, t)) dx \alpha(t) dt = \int_{\Omega} G(y(x, s)) dx, \quad (5.4.53)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2\beta} \int_{s-\beta}^{s+\beta} \alpha(t) dt = \alpha(s) = 1, \quad (5.4.54)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2\beta} \int_{s-\beta}^{s+\beta} \alpha(t) \int_0^t \int_{\Gamma_1} \operatorname{Re} g(y'_m(\xi)) \bar{y}'_m(\xi) d\gamma d\xi dt = \int_0^t \int_{\Gamma_1} \operatorname{Re} g(y'_m(\xi)) \bar{y}'_m(\xi) d\gamma d\xi. \quad (5.4.55)$$

Sendo assim, combinando (5.4.52) – (5.4.55) em (5.4.50), chegamos a

$$\begin{aligned} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y(x, t)) dx + 2 \liminf_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(y'_m(s)) \bar{y}'_m(s) d\gamma ds \\ \leq \|\nabla y^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y(x, 0)) dx \end{aligned} \quad (5.4.56)$$

para $0 < t < T$. i. é,

$$\begin{aligned} 2 \liminf_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(y'_m(s)) \bar{y}'_m(s) d\gamma ds \\ \leq - \left[\|\nabla y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y(x, s)) dx \right]_0^t. \end{aligned} \quad (5.4.57)$$

Nossa próxima tarefa é estabelecer a identidade de energia para soluções fracas correspondentes a (5.4.46). No que segue, vamos assumir o seguinte resultado:



Lema 5.4.2

Seja y uma solução de (5.4.46). Então, detém-se a seguinte desigualdade

$$- \left[\|\nabla y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y(s)) dx \right]_0^t \leq 2 \operatorname{Re} \int_0^t (\chi(\xi), y'(\xi))_{L^2(\Gamma_1)} d\xi.$$

Note-se que, devido à definição de soluções fracas e $y_t \in L^2(\Gamma_1)$, cálculos formais levam à desigualdade acima. A questão é justificar o cálculo formal. Existem várias maneiras de fazer isso. Por exemplo, utilizando diferenças finitas $D_h y(t) \equiv \frac{1}{h}[y(t+h) - y(t-h)]$, este operador compartilha muitas propriedades com derivadas. Desde que $D_h y \in V$ para cada $h > 0$ podemos usar esse elemento como função teste na forma variacional dada em Koch e Lasiecka [63]. Outro método é o método de convolução utilizado em J. L. Lions [79]. Em muitos casos, o resultado indicado pelo lema acima pode ser mostrado. Esta é uma questão técnica e no que segue, vamos assumir a sua validade (ver apêndice, subseção 5.4.6).

Assim, pela desigualdade de energia para soluções fracas dadas no lema 5.4.2, inferimos

$$\begin{aligned} & 2 \liminf_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(y'_m(s)) \bar{y}'_m(s) d\gamma ds \quad (5.4.58) \\ & \leq - \left[\|\nabla y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y(x, s)) dx \right]_0^t \\ & \leq 2 \operatorname{Re} \int_0^t (\chi(s), y'(s))_{\Gamma_1} ds. \end{aligned}$$

Isto nos dá que

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \int_0^t (g(y'_m(s)), y'_m(s))_{L^2(\Gamma_1)} ds \leq \operatorname{Re} \int_0^t (\chi(s), y'(s))_{L^2(\Gamma_1)} ds$$

Tomando $t = t_k \rightarrow T$, quando $k \rightarrow \infty$, $\{t_k\}$ arbitrário, assegura que

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (g(y'_m(s)), y'_m(s))_{L^2(\Omega)} dt \leq \operatorname{Re} \int_0^T (\chi(t), y'(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (5.4.59)$$

Finalmente, estamos em condições de provar que $\chi = g(y')$.

De fato, pela hipótese (5.4.2), temos

$$\int_0^T \operatorname{Re}(g(y'_m(t)) - g(\psi), y'_m(t) - \psi)_{L^2(\Gamma_1)} dt \geq 0, \quad \forall \psi \in L^2(\Gamma_1).$$



A última desigualdade nos assegura que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \operatorname{Re}(g(y'_m(t)), \psi)_{L^2(\Gamma_1)} dt + \int_0^T \operatorname{Re}(g(\psi), y'_m(t) - \psi)_{L^2(\Gamma_1)} dt \quad (5.4.60) \\ & \leq \int_0^T \operatorname{Re}(g(y'_m(t)), y'_m(t))_{L^2(\Gamma_1)} dt. \end{aligned}$$

Considerando as convergências (5.4.31), (5.4.32) e a desigualdade (5.4.59), temos que

$$\int_0^T \operatorname{Re}(\chi(t) - g(\psi), y'(t) - \psi)_{L^2(\Gamma_1)} dt \geq 0, \quad \forall \psi \in L^2(\Gamma_1). \quad (5.4.61)$$

Agora, teremos de mostrar que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} g(y' - \lambda v) v d\gamma dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Gamma_1} g(y') v d\gamma dt \quad (5.4.62)$$

quando $\lambda \rightarrow 0$ para todo $v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$.

Com efeito, como

$$y'(x, t) - \lambda v(x, t) \rightarrow y'(x, t)$$

quando $\lambda \rightarrow 0$ quase sempre em $\Omega \times (0, T)$ e g é contínua, então,

$$g(y'(x, t) - \lambda v(x, t)) \rightarrow g(y'(x, t)) \text{ quase sempre em } \Omega \times (0, T) \text{ quando } \lambda \rightarrow 0. \quad (5.4.63)$$

Por outro lado, a partir de (5.4.5),

$$|g(y'(x, t) - \lambda v(x, t))| \leq \underbrace{M (|y'(x, t)| + \lambda |v(x, t)|)}_{\in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))}. \quad (5.4.64)$$

Assim, de (5.4.63) e (5.4.64), pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 2.3.5, página 60, segue (5.4.62).

Na sequência, considerando - se $\psi = y' - \lambda v$, onde $v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$, segue de (5.4.61) que

$$\lambda \int_0^T \operatorname{Re}(\chi - g(y' - \lambda v), v)_{L^2(\Gamma_1)} dt \geq 0. \quad (5.4.65)$$

Vamos separar em duas situações:

(i) $\int_0^T \operatorname{Re}(\chi - g(y' - \lambda v), v)_{L^2(\Gamma_1)} dt \geq 0$ se $\lambda > 0$.



Tomando o limite quando $\lambda \rightarrow 0^+$, vem de (5.4.62) que

$$\int_0^T \operatorname{Re}(\chi - g(y'), v)_{L^2(\Gamma_1)} dt \geq 0, \forall v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (5.4.66)$$

$$(ii) \int_0^T \operatorname{Re}(\chi - g(y' - \lambda v), v)_{L^2(\Gamma_1)} dt \leq 0 \text{ se } \lambda < 0.$$

Passando o limite em (5.4.62), quando $\lambda \rightarrow 0^-$, assegura que

$$\int_0^T \operatorname{Re}(\chi - g(y'), v)_{L^2(\Gamma_1)} dt \leq 0, \forall v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (5.4.67)$$

Combinando (5.4.66) e (5.4.67), assegura que

$$\int_0^T \operatorname{Re}(\chi - g(y'), v)_{L^2(\Gamma_1)} dt = 0, \forall v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (5.4.68)$$

Portanto, se considerarmos $v = \chi - g(y')$, chegamos ao almejado, isto é, que $\chi = g(y')$.

• • •

5.4.6. Apêndice: Prova da Identidade de Energia

Nesta subseção, vamos provar o lema 5.4.2 e, conseqüentemente, a identidade de energia dada em (5.4.10). Como foi mencionado, infelizmente, esses fatos não podem ser provado diretamente. Vamos usar o método via convolução encontrado em J. L. Lions, [79]. Note que as principais dificuldades são de que não podemos avaliar os termos $(\nabla y(t), \nabla y'(t))_{L^2(\Omega)}$ uma vez que $y'(t) \notin V$, bem como o termo $(f(y(t)), y'(t))_{L^2(\Omega)}$, já que $y'(t) \notin L^2(\Omega)$, quando $v = y'(t)$ em (5.4.46).

Na verdade, vamos construir um *cutoff* θ_n . Deste modo, seja $0 < s_0 < t_0 < T$ fixado, e considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \max \left\{ \frac{1}{s_0}, \frac{1}{T-t_0} \right\}$, e para todo $n \geq n_0$, definamos

$$\theta_n(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq \xi \leq s_0 - \frac{1}{n}, \\ 1 + n(\xi - s_0), & \text{se } s_0 - \frac{1}{n} \leq \xi \leq s_0, \\ 1, & \text{se } s_0 \leq \xi \leq t_0, \\ 1 - n(\xi - t_0); & \text{se } t_0 \leq \xi \leq t_0 + \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{se } t_0 + \frac{1}{n} \leq \xi \leq T, \end{cases} \quad (5.4.69)$$



de acordo com a figura 5.1, a seguir:

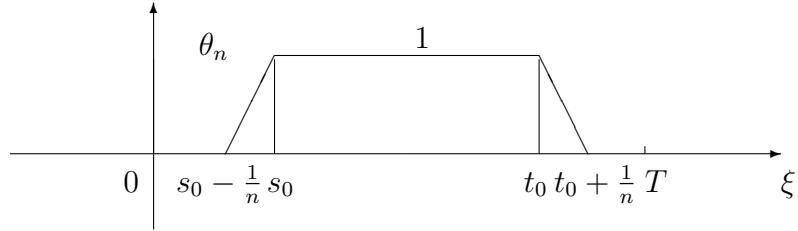


Figura 5.1: Função θ_n

Seja $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão regularizante tal que

$$\rho_k(\xi) = \rho_k(-\xi) = \check{\rho}_k(\xi), \quad \text{e} \quad \text{supp}(\rho_k) \subset \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]. \quad (5.4.70)$$

Com isto em mente, definimos

$$\varphi_{n,k} := \theta_n [(\theta_n y') * \rho_k * \rho_k], \quad (5.4.71)$$

onde a convolução é considerada na variável t . A função acima é bem definida, pois se $\tilde{\theta}_n$ e \tilde{y}' são, respectivamente, extensões de θ_n e y' considerando zero fora do intervalo $[0, T]$, então,

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k}(t) &= \tilde{\theta}_n \left[\left(\tilde{\theta}_n \tilde{y}' \right) * \rho_k * \rho_k \right] \\ &= \tilde{\theta}_n(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\theta}_n(\xi) \tilde{y}'(\xi) (\rho_k * \rho_k)(t - \xi) d\xi \\ &= \theta_n(t) \int_0^T \theta_n(\xi) y'(\xi) (\rho_k * \rho_k)(t - \xi) d\xi, \end{aligned}$$

onde a última identidade vem do fato de que $\theta_n(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R} \setminus]0, T[$.

Por outro lado, é importante observar que

$$\begin{aligned} \text{supp} [(\theta_n y') * \rho_k * \rho_k] &\subset \text{supp}(\theta_n) \cap \text{supp}(y') + \left[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\right] \\ &\subset \text{supp}(\theta_n) + \left[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\right] \\ &\subset \left[s_0 - \frac{1}{n_0}, t_0 + \frac{1}{n_0}\right] + \left[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\right]. \end{aligned} \quad (5.4.72)$$



Assim, seja $x \in \left[s_0 - \frac{1}{n_0}, t_0 + \frac{1}{n_0}\right]$ e $y \in \left[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\right]$, de modo que

$$s_0 - \frac{1}{n_0} - \frac{2}{k} \leq x + y \leq t_0 + \frac{1}{n_0} + \frac{2}{k}. \quad (5.4.73)$$

Desejamos que

$$s_0 - \frac{1}{n_0} - \frac{2}{k} > 0 \quad \text{e} \quad t_0 + \frac{1}{n_0} + \frac{2}{k} < T. \quad (5.4.74)$$

Assim, a fim de obter o desejado em (5.4.74) precisamos que

$$k > \max \left\{ \frac{2n_0}{n_0 s_0 - 1}, \frac{2n_0}{T n_0 - t_0 n_0 - 1} \right\} := k_0. \quad (5.4.75)$$

Assumindo (5.4.75), de (5.4.73) e (5.4.74) deduzimos que $x + y \in]0, T[$, isto é,

$$\left[s_0 - \frac{1}{n_0}, t_0 + \frac{1}{n_0}\right] + \left[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\right] \subset]0, T[.$$

Consequentemente, para todo $k \geq k_0$, de (5.4.72) inferimos que

$$\text{supp} [(\theta_n y') * \rho_k * \rho_k] \subset]0, T[. \quad (5.4.76)$$

A partir de agora, vamos considerar $\{\rho_k\}_{k \geq k_0}$ e $\{\theta_n\}_{n \geq n_0}$. Observemos que

$$(y' \theta_n) * \rho_k * \rho_k = (y \theta_n)' * \rho_k * \rho_k - (y \theta_n') * \rho_k * \rho_k. \quad (5.4.77)$$

Vamos analisar a primeira expressão no lado direito de (5.4.77). Começamos com o seguinte lema:

Lema 5.4.3

Seja $\varphi_{n,k}$ acima considerado. Então,

$$\varphi_{n,k} = \theta_n [(y \theta_n) * \rho_k * \rho_k' - (y \theta_n') * \rho_k * \rho_k].$$

Demonstração: Desde que $\theta_n \in H_0^1(0, T) \subset C^0([0, T])$ e $y \in C_s([0, T]; V) \cap$



$W^{1,\infty}(0, T; V')$, temos para todo $t \geq 0$ que

$$\begin{aligned} & [(y \theta_n)' * \rho_k * \rho_k](t) \\ &= \int_0^T (y \theta_n)'(\xi) (\rho_k * \rho_k)(t - \xi) d\xi \\ &= \underbrace{[(y \theta_n)(\xi) (\rho_k * \rho_k)(t - \xi)]_0^T}_{=0} - \int_0^T (y \theta_n)(\xi) (\rho_k * \rho_k)'(t - \xi) d\xi \\ &= \int_0^T (y \theta_n)(\xi) (\rho_k * \rho_k')(t - \xi) d\xi, \end{aligned}$$

isto é,

$$(y \theta_n)' * \rho_k * \rho_k = (y \theta_n) * \rho_k * \rho_k'. \quad (5.4.78)$$

Substituindo (5.4.78) em (5.4.77) chegamos a

$$(y' \theta_n) * \rho_k * \rho_k = (y \theta_n) * \rho_k * \rho_k' - (y \theta_n') * \rho_k * \rho_k,$$

e da identidade acima e tomando (5.4.71) em conta, obtemos o desejado. \square

Além disso, o lema 5.4.3 nos diz que

$$\varphi_{n,k} \in C_0^\infty(0, T; V) \quad (5.4.79)$$

e, agora, faz sentido considerar $v = \varphi_{n,k}$ e $\vartheta = \chi$ em (5.4.46), isto é,

$$\langle i y'(t), \varphi_{n,k} \rangle_{V',V} - (\nabla y(t), \nabla \varphi_{n,k})_{L^2(\Omega)} - (\chi(t), \varphi_{n,k})_{L^2(\Gamma_1)} - (f(y(t)), \varphi_{n,k})_{L^2(\Omega)} = 0, \quad (5.4.80)$$

e assim, tomando a parte real de (5.4.80) e integrando no tempo t de 0 à T , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re} \int_0^T \langle i y'(t), \varphi_{n,k} \rangle_{V',V} dt - \operatorname{Re} \int_0^T (\nabla y(t), \nabla \varphi_{n,k})_{L^2(\Omega)} dt \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_0^T (\chi(t), \varphi_{n,k})_{L^2(\Gamma_1)} dt - \operatorname{Re} \int_0^T (f(y(t)), \varphi_{n,k})_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned} \quad (5.4.81)$$

Análise da expressão $I_1 = \operatorname{Re} \int_0^T \langle i y'(t), \varphi_{n,k} \rangle_{V',V} dt$.

Analogamente, como foi feito no Lema 5.4.3, conseguimos o seguinte resultado:



Lema 5.4.4

Em igualdade de condições com o lema 5.4.3, temos que

$$(y' \theta_n) * \rho_k = (y \theta_n) * \rho'_k - (y \theta'_n) * \rho_k.$$

Demonstração: De fato, para todo $t \geq 0$, notemos que

$$\begin{aligned} & [(y \theta_n)' * \rho_k](t) \\ &= \int_0^T (y \theta_n)'(\xi) (\rho_k)(t - \xi) d\xi \\ &= \underbrace{[(y \theta_n)(\xi) (\rho_k)(t - \xi)]_0^T}_{=0} + \int_0^T (y \theta_n)(\xi) (\rho'_k)(t - \xi) d\xi \\ &= \int_0^T (y \theta_n)(\xi) (\rho'_k)(t - \xi) d\xi, \end{aligned}$$

isto é,

$$(y \theta_n)' * \rho_k = (y \theta_n) * \rho'_k. \quad (5.4.82)$$

Em contrapartida, temos

$$(y' \theta_n) * \rho_k = (y \theta_n)' * \rho_k - (y \theta'_n) * \rho_k. \quad (5.4.83)$$

Portanto, de (5.4.82) e (5.4.83), concluímos a prova do lema. \square

Do lema 5.4.4, temos que

$$(y' \theta_n) * \rho_k = (y \theta_n) * \rho'_k - (y \theta'_n) * \rho_k \in C_0^\infty([0, T]; V) \hookrightarrow L^2(0, T; V). \quad (5.4.84)$$

Assim, de (5.4.84), obtemos que $(y' \theta_n) * \rho_k \in V$ q. s. em $t \in [0, T]$. Isso nos permite dizer que

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{Re} \int_0^T i \langle y' \theta_n, (y' \theta_n) * \rho_k * \rho_k \rangle_{V', V} dt \\ &= \operatorname{Re} \int_0^T i \langle (y' \theta_n) * \check{\rho}_k, (y' \theta_n) * \rho_k \rangle_V dt, \end{aligned}$$



que, em vista de (5.4.70) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{Re} \int_0^T i ((y' \theta_n) * \rho_k, (y' \theta_n) * \rho_k)_V dt \\ &= \operatorname{Re} \int_0^T i \|(y' \theta_n) * \rho_k\|_V^2 dt = 0. \end{aligned} \quad (5.4.85)$$

Análise da expressão $I_2 = -\operatorname{Re} \int_0^T (\nabla y(t), \nabla \varphi_{n,k})_{L^2(\Omega)} dt$.

Temos que

$$\begin{aligned} I_2 &= -\operatorname{Re} \int_0^T (\nabla y(t), \nabla \varphi_{n,k}(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ &= -\operatorname{Re} \int_0^T (\nabla y \theta_n, (\nabla y' \theta_n) * \rho_k * \rho_k)_{L^2(\Omega)} \\ &= -\operatorname{Re} \int_0^T ((\nabla y \theta_n) * \rho_k, (\nabla y' \theta_n) * \rho_k)_{L^2(\Omega)} \\ &= -\operatorname{Re} \int_0^T ((\nabla y \theta_n) * \rho_k, (\nabla y \theta_n)' * \rho_k)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_0^T ((\nabla y \theta_n) * \rho_k, (\nabla y \theta_n)' * \rho_k)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.4.86)$$

Agora, levando em conta que a convolução empregada em questão é na variável t , temos

$$(z \theta_n) * \rho_k' = [(z \theta_n) * \rho_k]' = (z \theta_n)' * \rho_k. \quad (5.4.87)$$

Se considerar $z = \nabla y$ na segunda igualdade de (5.4.87), vem que

$$(\nabla \theta_n)' * \rho_k = [(\nabla \theta_n) * \rho_k]', \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.4.88)$$

Combinando (5.4.88) com (5.4.86), chegamos a

$$\begin{aligned} I_2 &= -\operatorname{Re} \int_0^T ((\nabla y \theta_n) * \rho_k, [(\nabla y \theta_n) * \rho_k]')_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_0^T ((\nabla y \theta_n) * \rho_k, (\nabla y \theta_n)' * \rho_k)_{L^2(\Omega)} \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^T \frac{d}{dt} (\nabla y \theta_n * \rho_k, \nabla y \theta_n * \rho_k)_{L^2(\Omega)} dt}_{=0 \text{ por (5.4.76)}} \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_0^T (\nabla y \theta_n * \rho_k, \nabla y \theta_n' * \rho_k)_{L^2(\Omega)} dt, \end{aligned} \quad (5.4.89)$$



isto é,

$$I_2 = \operatorname{Re} \int_0^T (\nabla y \theta_n * \rho_k, \nabla y \theta'_n * \rho_k)_{L^2(\Omega)} dt, \quad (5.4.90)$$

Mas, desde que

$$(y \theta_n) * \rho_k \rightarrow y \theta_n \text{ em } L^2(0, T; V) \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

de (5.4.90), obtemos

$$- \operatorname{Re} \int_0^T (\nabla y(t), \nabla \varphi_{n,k})_{L^2(\Omega)} dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \theta'_n \theta_n \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (5.4.91)$$

Análise de $I_3 := - \operatorname{Re} \int_0^T (\chi(t), \varphi_{n,k})_{L^2(\Gamma_1)} dt$

Observe que

$$I_3 = - \operatorname{Re} \int_0^T ((\chi \theta_n) * \rho_k, (y' \theta_n) * \rho_k)_{L^2(\Gamma_1)} dt,$$

donde analogamente deduzimos que

$$- \operatorname{Re} \int_0^T (\chi(t), \varphi_{n,k})_{L^2(\Gamma_1)} dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} - \operatorname{Re} \int_0^T \theta_n^2 (\chi(t), y'(t))_{L^2(\Gamma_1)} dt \quad (5.4.92)$$

Análise de $I_4 := - \operatorname{Re} \int_0^T \langle \varphi_{n,k}, f(y(t)) \rangle_{V', V} dt$.

Como $f(y(t)) \in V$ quase sempre em $t \in [0, T]$, a integral

$$I_4 := - \operatorname{Re} \int_0^T \langle (y' \theta_n) * \rho_k, (f(y) \theta_n) * \rho_k \rangle_{V', V} dt \quad (5.4.93)$$

faz sentido e uma vez que

$$\begin{aligned} (f(y) \theta_n) * \rho_k &\rightarrow f(y) \theta_n \text{ em } L^2(0, T; V) && \text{quando } k \rightarrow +\infty \\ y' \theta_n * \rho_k &\rightarrow y' \theta_n \text{ em } L^2(0, T; V') && \text{quando } k \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

de modo que, fazendo uso das convergências acima ao passar o limite em (5.4.93), chegamos a

$$- \operatorname{Re} \int_0^T (f(y(t)), \varphi_{n,k})_{L^2(\Omega)} dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} - \operatorname{Re} \int_0^T \theta_n^2 \langle y'(t), f(y(t)) \rangle_{V', V} dt. \quad (5.4.94)$$



Então, para cada $n \geq n_0$, de (5.4.81), (5.4.85), (5.4.91), (5.4.92) e (5.4.94), inferimos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \theta'_n \theta_n \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \operatorname{Re} \int_0^T \theta_n^2 \langle y'(t), f(y(t)) \rangle_{V', V} dt \quad (5.4.95) \\ & = \operatorname{Re} \int_0^T \theta_n^2 (\chi(t), y'(t))_{L^2(\Gamma_1)} dt. \end{aligned}$$

O próximo passo é passar o limite em (5.4.95) quando $n \rightarrow +\infty$, que é uma consequência do seguinte lema:

Lema 5.4.5

Sejam $h \in L^1(0, T)$, s_0 e t_0 pontos de Lebesgue de h , com $s_0 < t_0$. Então,

$$- \int_0^T \theta'_n \theta_n h(\xi) d\xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (h(t_0) - h(s_0)). \quad (5.4.96)$$

e

$$\int_0^T \theta_n^2 h(\xi) d\xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{s_0}^{t_0} h(\xi) d\xi. \quad (5.4.97)$$

Demonstração: Com efeito, note que

$$- \int_0^T \theta'_n \theta_n h(\xi) d\xi = - \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} n [1 + n(\xi - s_0)] h(\xi) d\xi + \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} n [1 - n(\xi - t_0)] h(\xi) d\xi.$$

Todavia,

$$\begin{aligned} & \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} n [1 + n(\xi - s_0)] h(\xi) d\xi = \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} n h(\xi) d\xi + \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} n^2 (\xi - s_0) h(\xi) d\xi \\ & = \frac{1}{(1 \setminus n)} \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} h(\xi) d\xi + \frac{1}{(1 \setminus n^2)} \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} (\xi - s_0) h(\xi) d\xi \longrightarrow \frac{1}{2} h(s_0) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{n}} n [1 - n(\xi - t_0)] h(\sigma) d\sigma \longrightarrow \frac{1}{2} h(t_0)$$

o que prova (5.4.96).

Agora, pela definição de θ , temos que

$$\int_0^T \theta_n^2 h(\xi) d\xi = \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} [1 + n(\xi - s_0)]^2 h(\xi) d\xi + \int_{s_0}^{t_0} h(\xi) d\xi + \int_{t_0 - \frac{1}{n}}^{t_0} [1 + n(\xi - t_0)]^2 h(\xi) d\xi.$$



Provaremos que

$$\int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} [1 + n(\xi - s_0)]^2 h(\xi) d\xi + \int_{t_0 - \frac{1}{n}}^{t_0} [1 + n(\xi - t_0)]^2 h(\xi) d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.4.98)$$

De fato, notemos que

$$\int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} [1 + n(\xi - s_0)]^2 h(\xi) d\xi = \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} h(\xi) d\xi + 2n \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} (\xi - s_0) h(\xi) d\xi + n^2 \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} (\xi - s_0)^2 h(\xi) d\xi. \quad (5.4.99)$$

Temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} h(\xi) d\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} (\xi - s_0) h(\xi) d\xi = 0$$

e

$$\left| n^2 \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} (\xi - s_0)^2 h(\xi) d\xi \right| \leq \int_{s_0 - \frac{1}{n}}^{s_0} |h(\xi)| d\xi \rightarrow 0$$

ao qual garante que (5.4.97).

□

Se s e t são pontos de Lebesgue das funções $\|\nabla y(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$, $\langle y'(\cdot), f(y(\cdot)) \rangle_{V', V}$ e $(\chi(\cdot), y'(\cdot))_{L^2(\Gamma_1)}$, então, de (5.4.95) e fazendo uso do lema 5.4.5, deduzimos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \operatorname{Re} \int_s^t \langle y'(\xi), f(y(\xi)) \rangle_{V', V} d\xi \\ &= \operatorname{Re} \int_s^t (\chi(\xi), y'(\xi))_{L^2(\Gamma_1)} d\xi, \end{aligned} \quad (5.4.100)$$

para quase sempre $s, t \in [0, T]$ com $0 < s < t < T$.

Consideremos, agora, $s_\nu \rightarrow 0$ e $t \in [0, T]$ tal que (5.4.100) acontece para t e $s = s_\nu$. Então, para quase todo $t \in [0, T]$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{2} \|\nabla y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \operatorname{Re} \int_{s_\nu}^t \langle y'(\xi), f(y(\xi)) \rangle_{V', V} d\xi \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_{s_\nu}^t (\chi(\xi), y'(\xi))_{L^2(\Gamma_1)} d\xi. \end{aligned} \quad (5.4.101)$$



Tomando $\liminf_{s_\nu \rightarrow 0}$ em (5.4.101), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \frac{1}{2} \liminf_{s_\nu \rightarrow 0} \|\nabla y(s_\nu)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \liminf_{s_\nu \rightarrow 0} \operatorname{Re} \int_{s_\nu}^t \langle y'(\xi), f(y(\xi)) \rangle_{V', V} d\xi \\ &\quad - \liminf_{s_\nu \rightarrow 0} \operatorname{Re} \int_{s_\nu}^t (\chi(t), y'(t))_{L^2(\Gamma_1)} dt \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla y(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \operatorname{Re} \int_0^t \langle y'(\xi), f(y(\xi)) \rangle_{V', V} d\xi \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_0^t (\chi(\xi), y'(\xi))_{L^2(\Gamma_1)} d\xi, \end{aligned} \tag{5.4.102}$$

para quase todo $t \in [0, T]$. Em contrapartida, à luz da identidade (5.4.8) apresentada na observação 5.4.1, podemos reescrever (5.4.102) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \frac{1}{2} \|\nabla y(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{d\xi} \int_{\Omega} G(y(x, t)) dx d\xi \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_0^t (\chi(\xi), y'(\xi))_{L^2(\Gamma_1)} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla y(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} G(y(x, t)) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} G(y(x, 0)) dx - \operatorname{Re} \int_0^t (\chi(\xi), y'(\xi))_{L^2(\Gamma_1)} d\xi, \end{aligned}$$

em outras palavras,

$$- \left[\|\nabla y(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} G(y(x, s)) dx \right]_0^t \leq 2 \operatorname{Re} \int_0^t (\chi(\xi), y'(\xi))_{L^2(\Gamma_1)} d\xi$$

o que prova o lema 5.4.2. Assim, $g(y') = \chi$ e deste modo, obtemos a existência de soluções no caso 2 satisfazendo (5.4.11).

Retornando em (5.4.101), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \operatorname{Re} \int_{s_\nu}^t \int_{\Gamma_1} g(y'(\xi)) \bar{y}'(\xi) d\gamma d\xi &= \frac{1}{2} \|\nabla y(s_\nu)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_{s_\nu}^t \langle y'(\xi), f(y(\xi)) \rangle_{V', V} d\xi. \end{aligned} \tag{5.4.103}$$

Por fim, tendo em atenção novamente (5.4.8), tomando $s_\nu \rightarrow 0$, obtemos (5.4.10), isto é, a identidade de energia para soluções fracas dada no Teorema 5.4.1 quando estudamos o caso 2.



Para que a prova do teorema 5.4.1 esteja completa, ainda permanece pendente a unicidade de soluções no caso 2.

Em verdade, sejam y_1 e y_2 duas soluções de (5.4.1). Deste modo, pondo $w = y_1 - y_2$, temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} w_t = i\Delta w - if(y_1) + if(y_2) & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ w = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial w}{\partial n} = -g(y_{1,t}) + g(y_{2,t}) & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.4.104)$$

Multiplicando (5.4.104) por \bar{w}_t , integrando em Ω e olhando a parte imaginária do que se obtém, levando em conta (5.4.3) e o fato que por (5.4.30), $w_t \in V'$, temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 dx &= -\operatorname{Re} \int_{\Gamma_1} [g(y_{1,t}) - g(y_{2,t})] \bar{w}_t d\gamma - \operatorname{Re} \langle w_t, f(y_1) - f(y_2) \rangle_{V', V} \\ &\leq -m_0 \int_{\Gamma_1} |w_t|^2 d\gamma + \|w_t\|_{V'} \|f(y_1) - f(y_2)\|_V \\ &\leq \|w_t\|_{V'} L \|w\|_V, \end{aligned} \quad (5.4.105)$$

uma vez que $f : V \rightarrow V$ é globalmente Lipschitz (de constante L).

Se novamente recorrermos ao fato que f é globalmente Lipschitz, juntamente com a hipótese que $f(0) = 0$, a partir de (5.4.104), temos

$$\begin{aligned} \|w_t\|_{V'} &\leq \|\Delta w\|_{V'} + \|f(y_1) - f(y_2)\|_{V'} \\ &\leq C \|w\|_V + C_1 \|f(y_1) - f(y_2)\|_V \\ &\leq \underbrace{(C + C_1 L)}_{:=M} \|w\|_V. \end{aligned} \quad (5.4.106)$$

Assim, de (5.4.105) e (5.4.106), decorre que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_V^2 \leq L M \|w\|_V^2. \quad (5.4.107)$$

Integrando de 0 à t , resulta que

$$\|w\|_V^2 \leq 2 L M \int_0^t \|w(s)\|_V^2 ds.$$

Por fim, a desigualdade de Gronwall, proposição 2.3.9, nos assegura que $\|w\|_V = 0$,



em outras palavras, $y_1 = y_2$ e com isso, está garantida a unicidade no caso 2, fato este que encerra a prova do teorema 5.4.1.

5.5. Estabilização Exponencial

Desde que a boa colocação de soluções regulares em dimensão $N = 2$ foi estabelecida, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 5.5.1 (*Estabilização*)

Assuma que Ω é um domínio star – shaped e seja y seja uma solução regular para o problema (5.1.1). Então, existem constantes positivas γ e C tal que a energia em nível de H^1 associada ao problema (5.4.1) decai exponencialmente, isto é,

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t} E(0), \quad \text{para todo } t > T_0,$$

$T_0 > 0$ suficientemente grande.

• • •

5.5.1. Construção do Multiplicador

O método utilizado para alcançar este resultado de estabilidade é clássico. Um multiplicador é usado para construir uma identidade envolvendo integrais. Ao escolher um campo de vetores especial para o multiplicador, é mostrado que a energia contrai no tempo. O uso do multiplicador $h(x) \cdot \nabla w$ foi introduzido por Lasiecka, Lions e Triggiani, [64] no estudo da regularidade da equação de onda. Triggiani [113], recorreu o uso deste multiplicador em um resultado pioneiro na abordagem do operador para a estabilidade da equação de onda. Este método envolvendo multiplicadores foi “traduzido” pela primeira vez para a equação de Schrödinger por Machtyngier [83] para versão linear do problema que estamos interessados em estudar. Este multiplicador complexo torna-se $(q \cdot \nabla \bar{y})$.



Lema 5.5.1

Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^2 , com fronteira regular Γ . Seja $q \in [C^2(\bar{\Omega})]^2$ um campo de vetores. Então, para toda solução regular (por exemplo, no sentido do Teorema 5.3.2) do problema (5.1.1), a seguinte identidade é satisfeita

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_k} dx dt \right) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |y|^4 dx dt \quad (5.5.1) \\ &= \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} y (q \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T + \operatorname{Re} \left(2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (q \cdot \nabla \bar{y}) d\gamma dt \right) \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma} (q \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\gamma dt - \operatorname{Re} \left(\int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \bar{y} \cdot \nabla (\operatorname{div} q)) y dx dt \right) \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) |y|^4 d\gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} \bar{y} (\operatorname{div} q) y d\gamma dt. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (5.1.1) por $(q \cdot \nabla \bar{y})$ e integrando sobre $\Omega \times (0, T)$, obtemos

$$0 = \int_0^T (iy' + \Delta y - |y|^2 y) (q \cdot \nabla \bar{y}) dx dt. \quad (5.5.2)$$

Em seguida, vamos analisar o primeiro termo do lado direito de (5.5.2).

Estimativa para $I_1 := \int_0^T \int_{\Omega} iy' (q \cdot \nabla \bar{y}) dx dt$.

Integrando por partes, deduzimos que

$$I_1 = \left[i \int_{\Omega} y (q \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T - i \int_0^T \int_{\Omega} y (q \cdot \nabla \bar{y}') dx dt. \quad (5.5.3)$$



Por outro lado, fazendo uso da fórmula de Gauss, inferimos

$$\begin{aligned}
 & i \int_0^T \int_{\Omega} (q \cdot \nabla y) \bar{y}' \, dx \, dt \\
 &= i \int_0^T \int_{\Omega} (q_k \bar{y}') \frac{\partial y}{\partial x_k} \, dx \, dt \\
 &= -i \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k \bar{y}') u \, dx \, dt + \underbrace{i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) y \bar{y}' \, d\gamma \, dt}_{\text{desde que } y=0 \text{ sobre } \Gamma_0} \\
 &= -i \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) y \bar{y}' \, dx \, dt - i \int_0^T \int_{\Omega} (q \cdot \nabla \bar{y}') y \, dx \, dt \\
 &+ i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) y \bar{y}' \, d\gamma \, dt.
 \end{aligned}$$

ao qual implica que

$$\begin{aligned}
 & -i \int_0^T \int_{\Omega} (q \cdot \nabla \bar{y}') y \, dx \, dt \tag{5.5.4} \\
 &= i \int_0^T \int_{\Omega} (q \cdot \nabla y) \bar{y}' \, dx \, dt + i \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) y \bar{y}' \, dx \, dt \\
 &- i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) y \bar{y}' \, d\gamma \, dt.
 \end{aligned}$$

Substituindo (5.5.4) em (5.5.3), chegamos à

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left[i \int_{\Omega} y (q \cdot \nabla \bar{y}) \, dx \right]_0^T + i \int_0^T \int_{\Omega} (q \cdot \nabla y) \bar{y}' \, dx \, dt \tag{5.5.5} \\
 &+ i \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) y \bar{y}' \, dx \, dt - i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) y \bar{y}' \, d\gamma \, dt,
 \end{aligned}$$

e desde que

$$iy' = -\Delta y + |y|^2 y \text{ em } \Omega \Leftrightarrow \bar{y}' = -i\Delta \bar{y} + i|y|^2 \bar{y} \text{ em } \Omega,$$



de (5.5.5), podemos escrever

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[i \int_{\Omega} y(q \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} (q \cdot \nabla y) \Delta \bar{y} dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} (q \cdot \nabla y) |y|^2 \bar{y} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) \Delta \bar{y} y dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |y|^4 dx dt - i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) y \bar{y}' d\gamma dt. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Tomando a parte real de (5.5.1), tendo em mente que (5.5.6), e observando que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$, para todo $z \in \mathbb{C}$, deduzimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} y(q \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y (q \cdot \nabla \bar{y}) dx dt \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} (q \cdot \nabla \bar{y}) |y|^2 y dx dt + \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) \Delta \bar{y} y dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |y|^4 dx dt - \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) y \bar{y}' d\gamma dt. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

No que segue, vamos analisar os termos do lado direito de (5.5.7).

Estimativa para $I_2 := 2 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y (q \cdot \nabla \bar{y}) dx dt$.

Empregando a fórmula de Green, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= -2 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla (q \cdot \nabla \bar{y}) dx dt + 2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (q \cdot \nabla \bar{y}) d\gamma dt \\ &= -2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_k} dx dt - 2 \int_0^T \int_{\Omega} q_k \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x_k \partial x_j} dx dt \\ &\quad + 2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (q \cdot \nabla \bar{y}) d\gamma dt. \end{aligned}$$

Tomando a parte real de I_2 , temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I_2) &= \operatorname{Re} \left(-2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_k} dx dt \right) \\ &\quad - 2 \int_0^T \int_{\Omega} q_k \operatorname{Re} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx dt \\ &\quad + \operatorname{Re} \left(2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (q \cdot \nabla \bar{y}) d\gamma dt \right). \end{aligned} \quad (5.5.8)$$



Tendo em mente que

$$2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x_k \partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left| \frac{\partial y}{\partial x_j} \right|^2 \right],$$

usando (5.5.8) e aplicando a fórmula de Green, encontramos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I_2) = & \operatorname{Re} \left(-2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_k} dx dt \right) + \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |\nabla y|^2 dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma} (q \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\gamma dt + \operatorname{Re} \left(2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (q \cdot \nabla \bar{y}) d\gamma dt \right). \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Estimativa para $I_3 := -2 \int_0^T \int_{\Omega} |y|^2 y (q \cdot \nabla \bar{y}) dx dt$.

Temos que

$$I_3 = -2 \int_0^T \int_{\Omega} |y|^2 y q_k \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_k} dx dt,$$

e desde que

$$4 \operatorname{Re} \left(y \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_k} \right) |y|^2 = \frac{\partial}{\partial x_k} [|y|^4].$$

Recorrendo à fórmula de Green, deduzimos que

$$\operatorname{Re}(I_3) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |y|^4 dx dt - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) |y|^4 d\gamma dt}_{\text{desde que } y=0 \text{ sobre } \Gamma_0}. \quad (5.5.10)$$

Estimativa para $I_4 := \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) \Delta \bar{y} y dx dt$.

Novamente, aplicando a fórmula de Green,

$$\begin{aligned} I_4 &= - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \bar{y} \cdot \nabla ((\operatorname{div} q) y) dx dt + \underbrace{\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} \bar{y} (\operatorname{div} q) y d\gamma dt}_{\text{uma vez que } y=0 \text{ sobre } \Gamma_0} \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \bar{y} \cdot \nabla (\operatorname{div} q)) y dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |\nabla y|^2 dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} \bar{y} (\operatorname{div} q) y d\gamma dt. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$



Através da combinação dos resultados que temos obtido, ou seja, (5.5.7), (5.5.9), (5.5.10) e (5.5.11), agora podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} y(q \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |y|^4 dx dt \\
 &- 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_k} dx dt \right) \\
 &- \int_0^T \int_{\Gamma} (q \cdot n) |\nabla y|^2 d\gamma dt + \operatorname{Re} \left(2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (q \cdot \nabla \bar{y}) d\gamma dt \right) \\
 &- \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \bar{y} \cdot \nabla (\operatorname{div} q)) y dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) |y|^4 d\gamma dt \\
 &+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} \bar{y} (\operatorname{div} q) y d\gamma dt - \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) y \bar{y}' d\gamma dt.
 \end{aligned}$$

ao qual termina a prova do lema. □

• • •

5.5.2. Contração da Energia

Até agora, exigimos apenas que Ω seja um domínio conexo, limitado com fronteira regular. Neste momento, precisamos assumir que Ω é *star-shaped*, a saber, para um fixado $x_0 \in \mathbb{R}^2$ temos,

$$(x - x_0) \cdot \nu(x) \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \text{ e } (x - x_0) \cdot \nu(x) > 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \quad (5.5.12)$$

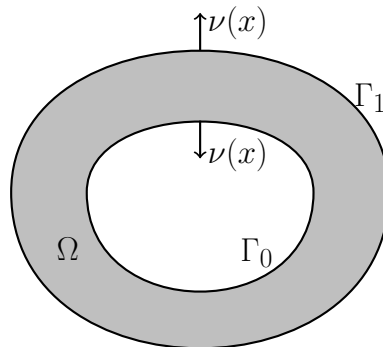


Figura 5.2: Domínio *star-shaped*.



Substituindo o campo de vetores $m(x) = x - x^0$ para o campo vetorial $q(x)$ e tomando $x^0 \in \mathbb{R}^2$ fixo. Então, do lema 5.5.1, obtemos

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |y|^4 dx dt \\
 &= \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} y(m \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T \\
 & - \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\gamma dt + \operatorname{Re} \left(2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (m \cdot \nabla \bar{y}) d\gamma dt \right) \\
 & - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \bar{y} \cdot \nabla (\operatorname{div} m)) y dx dt}_{=0 \text{ desde que } \operatorname{div} m = N} - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |y|^4 d\gamma dt \\
 & + N \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} \bar{y} y d\gamma dt - \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) y \bar{y}' d\gamma dt.
 \end{aligned}$$

e em virtude que $m \cdot \nu > 0$ sobre Γ_1 , deduzimos que

$$\begin{aligned}
 4 \int_0^T E(t) dt &\leq \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} y(m \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T \\
 & - \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\gamma dt + \operatorname{Re} \left(2 \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (m \cdot \nabla \bar{y}) d\gamma dt \right) \\
 & + N \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} \bar{y} y d\gamma dt - \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) y \bar{y}' d\gamma dt.
 \end{aligned} \tag{5.5.13}$$

Uma vez que $y = 0$ sobre Γ_0 , segue que $\nabla \bar{y} = \partial_{\nu} \bar{y} \nu$ sobre Γ_0 , e conseqüentemente

$$\begin{cases} |\nabla y|^2 = |\partial_{\nu} y|^2 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ m \cdot \nabla \bar{y} = (m \cdot \nu) \partial_{\nu} \bar{y} \Rightarrow \partial_{\nu} y (m \cdot \nabla \bar{y}) = (m \cdot \nu) |\partial_{\nu} y|^2 & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases} \tag{5.5.14}$$

Pela combinação de (5.5.13) e (5.5.14), vem que

$$\begin{aligned}
 4 \int_0^T E(t) dt &\leq \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} y(m \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\partial_{\nu} y|^2 d\gamma dt \\
 & - \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\gamma dt + \operatorname{Re} \left(2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} y (m \cdot \nabla \bar{y}) d\gamma dt \right) \\
 & + N \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} \bar{y} y d\gamma dt - \operatorname{Re} i \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) y \bar{y}' d\gamma dt.
 \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

Tendo em mente que $m(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ para todo $x \in \Gamma_0$, $m(x) \cdot \nu(x) \geq \delta > 0$ para



todo $x \in \Gamma_1$, $\partial_\nu y = -y'$ sobre Γ_1 e lembrando que a aplicação traço $\gamma_0 : H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ é contínua, vemos que

$$\begin{aligned}
 4 \int_0^T E(t) dt &\leq \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} y(m \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T - \delta \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla y|^2 d\gamma dt \quad (5.5.16) \\
 &+ \frac{2R^2}{4\eta} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |y'|^2 d\gamma dt + 2\eta \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla y|^2 d\gamma dt \\
 &+ \frac{N^2 \lambda_1}{4\eta} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |y'|^2 d\gamma dt + 2\eta \int_0^T E(t) dt \\
 &+ \frac{R}{4\eta} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |y'|^2 d\gamma dt + \eta \int_0^T E(t) dt,
 \end{aligned}$$

onde

$$R := \max_{x \in \Omega} \|x - x^0\|_{\mathbb{R}^2},$$

$\lambda_1 > 0$ provém da desigualdade de Poincaré e η é uma constante positiva arbitrária.

Escolhendo η suficientemente pequeno (5.5.16), assegura-se que

$$\int_0^T E(t) dt \leq C \operatorname{Re} \left[i \int_{\Omega} y(m \cdot \nabla \bar{y}) dx \right]_0^T + C \int_0^T \int_{\Gamma_1} |y'|^2 d\gamma dt, \quad (5.5.17)$$

onde $C = C(\lambda_1, |\Omega|, N)$ é uma constante positiva.

Combinando (5.5.17) com a identidade de energia dada em (5.3.29), obtém-se

$$E(T) \leq \gamma E(0), \quad \text{para } T > T_0,$$

com T_0 suficientemente grande e $0 < \gamma < 1$, conforme foi feito no capítulo anterior, página 192, obtemos a estabilidade exponencial e doravante, concluímos a prova do teorema (5.5.1).

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975.
- [2] L. Aloui, “Stabilisation Neumann pour l'équation des ondes dans un domaine extérieur. (french) [Neumann stabilization for the wave equation in an exterior domain],” *J. Math. Pures Appl.*, vol. (9) 81, no. 11, pp. 1113–1134, 2002.
- [3] L. Aloui and M. Khenissi, “Stabilization of Schrödinger equation in exterior domains,” *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, vol. 13, no. 3, pp. 570–579, 2007.
- [4] L. Aloui, M. Khenissi, and G. Vodev, “Smoothing effect for the regularized Schrödinger equation with non-controlled orbits,” *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 38, no. 2, pp. 265–275, 2013.
- [5] C. Alves and M. M. Cavalcanti, “On existence, uniform decay rates and blow up for solutions of the 2-d wave equation with exponential source,” *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, vol. 34, no. 3, pp. 377–411, 2009.
- [6] R. Anton, “Strichartz inequalities for lipschitz metrics on manifolds and nonlinear Schrödinger equation on domains,” *Bull. Soc. Math. France* 136, pp. 27–65, 2008.
- [7] F. D. Araruna and A. B. Maciel, “Existence and boundary stabilization of the semilinear wave equation,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 67, no. 4, pp. 1288–1305, 2007.
- [8] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*. Romania, Bucuresti: Noordhoff International Publishing, 1976.



- [9] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch, “Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary,” *SIAM J. Control Optim* 30, no. 5, pp. 1024–1065, 1992.
- [10] K. Beauchard and C. Laurent, “Local controllability of 1d linear and nonlinear Schrödinger equations with bilinear control,” *J. Math. Pures Appl* (9) 94 no. 5, pp. 520–554, 2010.
- [11] M. D. Blair, H. F. Smith, and C. D. Sogge, “On Strichartz estimates for Schrödinger operators in compact manifolds with boundary,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, pp. 247–256, 2008.
- [12] C. A. Bortot and M. M. Cavalcanti, “Asymptotic Stability for the Damped Schrödinger Equation on Noncompact Riemannian Manifolds and Exterior Domains,” *Communications in Partial Differential Equations*, vol. 39, no. 9, pp. 1791–1820, 2014.
- [13] C. A. Bortot, M. M. Cavalcanti, W. J. Corrêa, and V. N. Domingos Cavalcanti, “Uniform decay rate estimates for Schrödinger and plate equations with nonlinear locally distributed damping,” *Journal of Differential Equations*, vol. 254, no. 9, pp. 3729–3764, 2013.
- [14] J. Bourgain, “Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, part i,” *Geometric and Functional Analysis*, vol. 3, pp. 107–156, 1993.
- [15] —, “Global solutions of nonlinear Schrödinger equations,” *American Mathematical Society Colloquium publications, Volume*, vol. 46, p. 105, 1999.
- [16] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert*. Amsterdam: North Holland Publishing Co, 1973.
- [17] —, *Nonlinear Evolution Equations. Autumn Course on Semigroups, Theory and Applications*. Trieste, Italy: International Centre for Theoretical Physics, 1984.
- [18] —, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2010.
- [19] H. Brézis and T. Cazenave, *Nonlinear Evolution Equations. Preliminary version of chapters 1,2 and 3 and the appendix*. UFRJ, 1994.
- [20] H. Brézis and T. Gallouet, “Nonlinear Schrödinger evolution equations,” *Nonlinear Analysis* 4, pp. 677–681, 1980.



- [21] J. C. Bronski and R. L. Jerrard, “Soliton dynamics in a potential,” *Math. Res. Lett.*, vol. 7, no. 2-3, pp. 329–342, 2000.
- [22] N. Burq, “Contrôle de l’équation des plaques en présence d’obstacles strictement convexes. mémoire de la S. M. F.” *Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 55, 1993.
- [23] —, “Semi – classical estimates for the resolvent in non trapping geometries,” *International Mathematics Research Notices*, vol. 5, pp. 221–241, 2001.
- [24] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov, “On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. Équations de Schrödinger non linéaires dans des domaines extérieurs,” *Annales de l’Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, vol. 21, pp. 295–318, 2004.
- [25] —, “Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds,” *Amer. J. Math.* 126, pp. 569–605, 2004.
- [26] —, “Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces,” *Invent. Math* 159 no. 1, pp. 187–223, 2005.
- [27] —, “Global solutions for the nonlinear Schrödinger equation on three-dimensional compact manifolds,” *Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations. Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ*, pp. 111–129, 2007.
- [28] N. Burq and M. Zworski, “Geometric control in the presence of a black box,” *J. Amer. Math. Soc* 17 no. 2, pp. 443–471, 2004.
- [29] R. Carles and L. Miller, “Semiclassical nonlinear Schrödinger equations with potential and focusing initial data,” *Osaka Journal of Mathematics*, vol. 41, no. 3, pp. 693–725, 2004.
- [30] M. M. Cavalcanti and V. N. Domingos Cavalcanti, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Eduem, 2009.
- [31] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, and F. R. Dias Silva, “Uniform decay rates for the wave equation with nonlinear damping locally distributed in unbounded domains with finite measure,” *SIAM J. Control Optim.*, vol. 52 (1), 2014.
- [32] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, A. Faminskii, and F. Natali, “Decay of solutions to damped Korteweg-de Vries type equation, appl,” *Math Optim.*, DOI /s00245-011-, vol. 10, no. 1007, pp. 9156–7, 2012.



- [33] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, and F. Natali, “Exponential stability for the 2-D defocusing Schrödinger equation with locally distributed damping,” *Differential Integral Equations*, vol. 22, no. 7 - 8, pp. 617–636, 2009.
- [34] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, and J. A. Soriano, “Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping—a sharp result,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 361, no. 9, pp. 4561–4580, 2009.
- [35] —, “Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 197, no. 3, pp. 925–964, 2010.
- [36] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, and D. Toundykov, “Stabilization of the damped wave equation with cauchy–ventcel boundary conditions,” *Journal of Evolution Equations*, vol. 9, no. 1, pp. 143–169, 2009.
- [37] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, and V. Komornik, *Introdução à Análise Funcional*. Eduem, 2011.
- [38] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, and P. Martinez, “Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term,” *Journal of Differential Equations*, vol. 203, no. 1, pp. 119–158, 2004.
- [39] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano, and F. Natali, “Qualitative aspects for the cubic nonlinear Schrödinger equations with localized damping: exponential and polynomial stabilization,” *J. Differential Equations*, vol. 248, no. 12, pp. 2955–2971, 2010.
- [40] M. Cavalcanti, V. Domingos Cavalcanti, and J. Soriano, “Global solvability and asymptotic stability for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term,” in *Contributions to Nonlinear Analysis*. Springer, 2006, pp. 161–184.
- [41] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations*. Courant Lect. Notes Math., 2003.
- [42] T. Cazenave and A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford University Press, 1998.
- [43] T. Cazenave and F. B. Weissler, “The cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s ,” *Nonlin. Anal. T.M.A.* 14, pp. 807–836, 1990.



- [44] R. C. Charão, E. Bisognin, V. Bisognin, and A. F. Pazoto, “Asymptotic behavior of a Bernoulli – Euler type equation with nonlinear localized damping,” *Contributions to nonlinear analysis*, vol. 66, pp. 67–91, 2006.
- [45] R. Cipelatti, E. Machtyngier, and E. S. P. Siqueira, “Nonlinear Boundary Feedback Stabilization for Schrödinger Equations,” *Differential and Integral Equations*, vol. 9, no. 1, pp. 137–148, 1996.
- [46] E. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: MacGraw-Hill, 1955.
- [47] P. Constantin and J. C. Saut, “Local smoothing properties of dispersive equations,” *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 1, no. 2, pp. 413–439, 1988.
- [48] B. Dehman, P. Gérard, and G. Lebeau, “Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface,” *Math. Z.*, vol. 254 (4), pp. 729–749, 2006.
- [49] B. Dehman, G. Lebeau, and E. Zuazua, “Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation,” *Anna Sci. Ec Norm. Super.* 36, pp. 525–551, 2003.
- [50] A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, and S. Romanelli, “The heat equation with generalized Wentzell boundary conditions,” *Journal of Evolution Equations*, pp. 1–19, 2002.
- [51] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, 1995.
- [52] C. G. Gal, G. R. Goldstein, and J. A. Goldstein, “Oscillatory boundary conditions for acoustic wave equations,” *J. Evol. Equ.* 3, pp. 623–635, 2003.
- [53] P. Gérard, “Microlocal defect measures,” *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 16, pp. 1762–1794, 1991.
- [54] J. Ginibre and G. Velo, “The global Cauchy problem for the non linear Schrödinger equation,” *Annales de l’institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire*, vol. 2, no. 4, pp. 309–327, 1985.
- [55] G. R. Goldstein, “Derivation and physical interpretation of general boundary conditions,” *Advances in Differential Equations* 11, no. 4, pp. 457–480, 2006.
- [56] A. M. Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.



- [57] —, *Semigrupos Não Lineares e Equações Diferenciais nos Espaços de Banach*. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2003.
- [58] E. Hebey, *Sobolev space on Riemannian manifolds*. Berlin: Springer, 1996.
- [59] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Pseudo-differential Operators*. Springer Verlag, Berlin: Grundlehren Math Wiss, 1985, vol. 274.
- [60] O. P. Ivanovici and F. On, “the energy critical Schrödinger equation in 3d non-trapping domains,” *Annales de l’Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, vol. An. 27, pp. 1153–1177, 2010.
- [61] S. Jaffard, “Contrôle interne exact des vibrations d’une plaque rectangulaire,” *Portugal. Math*, vol. 47, no. 4, pp. 423–429, 1990.
- [62] M. Keel and T. Tao, “Endpoint Strichartz estimates,” *American Journal of Mathematics*, pp. 955–980, 1998.
- [63] H. Koch and I. Lasiecka, “Hadamard well-posedness of weak solutions in nonlinear dynamic elasticity-full von Karman systems,” in *Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis*. Springer, 2002, pp. 197–216.
- [64] I. Lasiecka, J. L. Lions, and R. Triggiani, “Nonhomogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators,” *J. Math. Pures Appl. (9)* 65, no.2, pp. 149–192, 1986.
- [65] I. Lasiecka and D. Tataru, “Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation,” *Differential Integral Equations* 6, pp. 507–533, 1993.
- [66] I. Lasiecka and R. Triggiani, “Optimal regularity, exact controllability and uniform stabilization of Schrödinger equations with dirichlet control.” *Differential Integral Equations*, vol. 5, no. 3, pp. 521–535, 1992.
- [67] —, “Well-posedness and sharp uniform decay rates at the L^2 -level of the Schrödinger equation with nonlinear boundary dissipation,” *J. Evol Equ.*, vol. 6, no. 3, pp. 485–537, 2006.
- [68] —, *Control Theory for Partial Differential Equations: Volume 1, Abstract Parabolic Systems: Continuous and Approximation Theories*. Cambridge University Press, 2010.
- [69] I. Lasiecka, R. Triggiani, and P. F. Yao, “Inverse/observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients,” *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 235, no. 1, pp. 13–57, 1999.



- [70] I. Lasiecka, R. Triggiani, and X. Zhang, “Global uniqueness and observability in one shot nonconservative Schrödinger equations with unobserved Neumann b,” *Analysis and optimization of differential systems (Constanta, 2002)*, Kluwer Acad. Publ., pp. 235–246, 2003.
- [71] —, “Global uniqueness, observability and stabilization of nonconservative Schrödinger equations via pointwise Carleman estimates. i. $H^1(\omega)$ -estimates.” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, vol. 12, no. 1, pp. 43–123, 2004.
- [72] —, “Global uniqueness, observability and stabilization of nonconservative Schrödinger equations via pointwise Carleman estimates. ii. $L^2(\omega)$ - estimates.” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, vol. 12, no. 2, pp. 183–231, 2004.
- [73] C. Laurent, “Global controllability and stabilization for the nonlinear Schrödinger equation on an interval,” *ESAIM Control Optim. Calc. Var* 16 no. 2, pp. 356–379, 2010.
- [74] —, “Global controllability and stabilization for the nonlinear Schrödinger equation on some compact manifolds of dimension 3,” *SIAM J. Math. Anal* 42 no. 2, pp. 785–832, 2010.
- [75] G. Lebeau, “Controle de l’equation de Schrödinger. (french) [control of the Schrödinger equation],” *J. Math. Pures Appl (9)* 71 no. 3, pp. 267–291, 1992.
- [76] C. Lefler, “Well – posedness and stability for nonlinear Schrödinger equations with dynamic / Wentzell boundary conditions,” PhD thesis, University of Virginia, Virginia, May 2014.
- [77] F. Linares and A. Pazoto, “On the exponential decay of the critical generalized korteweg-de vries equation with localized damping,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 135, no. 5, pp. 1515–1522, 2007.
- [78] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Springer, 2009.
- [79] J. L. Lions, *Quelques Méthodes d Résolution des Problèmes aux limites Non Lineaires*. Dunod: Gauthier – Villars, 1969.
- [80] —, *Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, tome 1*. Masson, 1988.
- [81] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux Limites non Homogènes, Applications*. Paris: Dunod, 1968.



- [82] F. Lopes, “Existência de Solução e Estabilidade na Fronteira da Equação da Onda Semilinear,” Master’s thesis, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB, Brazil, 2012.
- [83] E. Machtyngier, “Controlabilite exacte et stabilisation frontiere de l’equation de Schrödinger,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 310, pp. 806–811, 1990.
- [84] —, “Exact controllability for the Schrödinger equation,” *SIAM J. Control Optim.*, vol. 32, no. 1, pp. 24–34, 1994.
- [85] E. Machtyngier and E. Zuazua, “Stabilization of the Schrödinger equation,” *Portugalíae Mathematica*, vol. 51, pp. 243–256, 1994.
- [86] F. Macià, “The Schrödinger flow in a compact manifold: High-frequency dynamics and dispersion, modern aspects of the theory of partial differential equations,” *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 216, pp. 275–289, 2011.
- [87] L. A. Medeiros, *Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações*. Rio de Janeiro: Textos e Métodos Matemáticos 16, IM-UFRJ, 2000.
- [88] R. B. Melrose and J. Sjöstrand, “Singularities of boundary value problems i,” *Communications in Pure Applied Mathematics*, vol. 31, pp. 593 – 617, 1978.
- [89] L. Miller, “Escape function conditions for the observation, control, and stabilization of the wave equation,” *SIAM, J. Control Optim.*, vol. 5, no. 41, pp. 1554–1566, 2002.
- [90] N. Okazawa, “Smoothing effect and strong L^2 – well-posedness in the complex Ginzburg – Landau equation,” *Differential equations: inverse and direct problems*, pp. 265–288, 2006.
- [91] N. Okazawa and T. Yokota, “Perturbations of maximal monotone operators applied to the nonlinear Schrödinger and complex Ginzburg – Landau equation,” *Nonlinear Evolution Equations and Applications*, pp. 102–120, 1998.
- [92] —, “Monotonicity method applied to the complex Ginzburg – Landau and related equations,” *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 267, no. 1, pp. 247–263, 2002.
- [93] —, “The complex Ginzburg-Landau equation on general domain,” *The complex Ginzburg-Landau equation on general domain. Research Institute for Mathematical Sciences*, vol. 1436, pp. 107–116, 2005.



- [94] T. Ozawa and N. Visciglia, “An improvement on the Brézis – Gallouet et technique for 2D NLS and 1D half-wave equation,” *arXiv preprint arXiv:1403.7443*, 2014.
- [95] T. Özşarı, “Weakly-damped focusing nonlinear Schrödinger equations with dirichlet control,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 389, no. 1, pp. 84–97, 2012.
- [96] —, “Global existence and open loop exponential stabilization of weak solutions for nonlinear Schrödinger equations with localized external neumann manipulation,” *Nonlinear Anal.*, vol. 80, pp. 179–193, 2013.
- [97] —, “Well-posedness for nonlinear Schrödinger equations with boundary forces in low dimensions by Strichartz estimates,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015.
- [98] T. Özşarı, V. K. Kalantarov, and I. Lasiecka, “Uniform decay rates for the energy of weakly damped defocusing semilinear Schrödinger equations with inhomogeneous dirichlet boundary control,” *J. Differential Equations*, vol. 251 (7), no. 7, pp. 1841–1863, 2011.
- [99] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1983.
- [100] P. A. Raviart and J. M. Thomas, *Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivées Partielles*. Paris: Masson, 1983.
- [101] L. Rosier and B.-Y. Zhang, “Exact boundary controllability of the nonlinear Schrödinger equation,” *J. Differential Equations*, vol. 246, no. 10, pp. 4129–4153, 2009.
- [102] —, “Local exact controllability and stabilizability of the nonlinear Schrödinger equation on a bounded interval,” *SIAM J. Control Optim.*, vol. 48, no. 2, pp. 972–992, 2009.
- [103] —, “Control and stabilization of the nonlinear Schrödinger equation on rectangles,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 20, no. 12, pp. 2293–2347, 2010.
- [104] M. Ruzhansky and V. Turunen, “Pseudo – Differential Operators and Symmetries. Background Analysis and Advanced Topics. Pseudo –Differential Operators. Theory and Applications,” *Birkhäuser Verlag, Basel*, vol. 2, no. 3, p. 19, 2010.
- [105] R. E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. American Mathematical Soc., 1997, vol. 49.



- [106] L. Stoyanov, “Rigidity of the scattering length spectrum,” *Mathematische Annalen*, vol. 324, pp. 743–771, 2002.
- [107] W. Strauss and C. Bu, “An inhomogeneous boundary value problem for nonlinear Schrödinger equations,” *Journal of Differential Equations* 173, pp. 79–91, 2001.
- [108] R. S. Strichartz, “Restriction of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equation,” *Duke Math. J.*, vol. 44, pp. 705–714, 1977.
- [109] M. Taylor, *Partial Differential Equations I: Basic Theory*. Springer, 1996, vol. 1.
- [110] —, *Pseudodifferential operators*. New York: Springer, 1996.
- [111] F. Trèves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*. Springer, 1980, vol. 1 and 2.
- [112] —, *Basic linear partial differential equations*. Academic press, 1975, vol. 62.
- [113] R. Triggiani, “Wave equation on a bounded domain with boundary dissipation: an operator approach,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 137, pp. 438–461, 1989.
- [114] R. Triggiani and X. Xu, “Pointwise carleman estimates and global uniqueness observability, and stabilization for Schrödinger equations on Riemannian manifolds at the $H^1(\omega)$ – level. control methods in pde – dynamical systems,” *Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI*, vol. 426, pp. 339–404, 2007.
- [115] R. Triggiani and P. F. Yao, “Carleman estimates with no lower-order terms for general riemannian wave equations. global uniqueness and observability in one shot,” *Appl. Math. and Optim*, vol. 46, pp. 331 – 375, 2002.
- [116] M. Tsutsumi, “On smooth solutions to the initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation in two space dimension,” *Nonlinear Analysis*, 1989.
- [117] Y. Tsutsumi, “Global solutions of the nonlinear Schrödinger equation in exterior domains,” *Proc. Japan Acad., Ser. A*, vol. 59, no. 1, pp. 17–20, 1983.
- [118] A. D. Venttsel, “On boundary conditions for multidimensional diffusion processes,” *Theory of Probability and its Applications*, vol. IV, no. 2, pp. 164–177, 1959.
- [119] M. V. Vladimirov, “Solvability of a mixed problem for the nonlinear Schrödinger equation,” *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 130(172), no. 4, pp. 520–536, 1986.



- [120] K. Yajima, “Existence of solutions for Schrödinger evolution equation,” *Comm. Math. Phys.*, vol. 110, pp. 415–426, 1987.
- [121] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III: Variational methods and Optimization*. New York: Springer – Verlag, 1985.
- [122] E. Zuazua, “Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains,” *J. Math. Pures Appl*, vol. **9** 70, no. 4, pp. 513–529, 1991.

Índice Remissivo

A

Alternativa de *blow – up*, 134

Análise microlocal, 79

Aplicação

 Gaussiana, 105

 Neumann, 205

Aproximação de Yosida, 73

C

Condição

 de Carathéodory, 63

 de compatibilidade, 221

 de Controle Geométrico, 16

 de fronteira

 dinâmica, 33

 Wentzell, 34

Conjunto

S^m , 77

 compactamente contido, 124

 dos operadores pseudo –
 diferenciais, 77

 frente de onda, 80

Conservação

 de energia, 13

 de massa, 13

Curvatura

 Gaussiana, 116

 média, 105, 116

Curvaturas principais, 107

D

Desigualdade

 de Cauchy – Schwarz, 55

 de Gagliardo – Nirenberg, 61

 de Poincaré, 60

 de Young, 55

Distribuições vetoriais, 48

Domínio efetivo, 72

E

Equação de Schrödinger

defocusing, 14

focusing, 14

Erwin Schrödinger , 11

Espaço

$C_k^p(\mathcal{M})$, 50

$\mathcal{D}(0, T; X)$, 48

$\mathcal{D}(\mathcal{M})$, 51

$H_k^p(\mathcal{M})$, 50

\mathcal{S} , 76

$H_D^s(\Omega)$, 74

$\mathcal{D}'(0, T; X)$, 48

$L^2(0, T; X)$, 49

 das funções escalarmente
 contínuas, 49



- tangente, 49
- vetorial topológico, 68
- Estimativas
 - de Strichartz, 83
- F**
- Fibrado
 - cotangente, 80
- Fluxo
 - conservação, 82
 - Linear, 82
- Forma bilinear
 - coerciva, 58
 - contínua, 58
- Função
 - convexa, 72
 - homogênea de grau m , 77
 - monótona, 68
 - própria, 72
 - semi – contínua inferiormente, 72
- G**
- Gráfico
 - de um operador, 67
- Grupo
 - de operadores lineares, 67
 - de classe C_0 , 67
 - unitário, 67
- H**
- Hessiana, 50
- Hiperplano característico, 64
- L**
- Lema
 - de Gronwall, 60
 - de Lax – Milgram, 59
 - de Lions, 63
- M**
- Matriz relativa à métrica \mathbf{g} , 49
- O**
- Operador
 - m – dissipativo, 69
 - acretivo, 69
 - anti – adjunto, 65
 - Cauchy – Riemann, 240
 - diferencial linear, 75
 - dissipativo, 67
 - forma, 105, 107
 - Hamiltoniano, 12
 - hemicontínuo, 71
 - Laplace – Beltrame, 50
 - maximal monótono, 69
 - monótono, 68
 - positivo, 68
 - projeção, 57
 - pseudo – diferencial, 77
 - elíptico, 78, 80
 - parametriz, 79
 - resolvente, 73
 - tangencial perto da fronteira, 193
- P**
- Par
 - admissível, 83
- Ponto de Lebesgue, 55
- R**
- Raio da geodésica, 193
- Região
 - non – trapping, 21
 - star shaped, 31
- Regularidade
 - elíptica
 - Dirichlet, 61
 - fronteira tipo $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, 62
 - escondida, 208, 233
- S**
- Símbolo, 77
- Segunda forma fundamental, 105
- Semigrupo
 - contínuo, 68
 - contrações, 68
 - de classe C_0 , 65



- do tipo ω , 68
- linear, 65
- não – linear, 67
- Solução
 - H^2 , 14
 - em nível de H^1 , 14
 - em nível de L^2 , 14
 - forte, 70
- Subconjunto
 - cônico, 80
- Subdiferencial, 72
- Suporte
 - singular, 81
- T**
- Teorema
 - do gráfico fechado, 57
 - da Divergência de Gauss, 52
 - da representação de Riesz, 58
 - de Aubin – Lions, 62
 - de Carathédory, 64
 - de Green
 - versão 1, 52
 - versão 2, 53
 - de Holmgren, 64
 - de Minty – Browder, 59
 - de Stone, 67
 - do Ponto Fixo de Banach, 59
- Topologia
 - fraca, 55
 - fraca \star , 56
- Transformada
 - de Fourier, 76
- V**
- Variedade
 - característica, 80
 - Zoll, 16
- Vizinhança
 - cônica, 80