UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
(Mestrado)

ROGÉRIO SANTANA CALEGARI

DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DA AMIZADE

Maringá-PR
2018

ROGÉRIO SANTANA CALEGARI

DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DA AMIZADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins

Maringá
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Calegari, Rogério Santana.
C153d Demonstrações do Teorema da Amizade / Rogério Santana Calegari.--- Maringá (PR), 2018.
99 f.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática, 2018.

1. Teorema da Amizade. 2. Grafos da Amizade. 3. Teoria dos Grafos. I. Martins, Rodrigo, orient. II. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências exatas, Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática. III. Título.

CDD 512.5

Rosângela A. A. Silva – CRB 9ª/1810

ROGÉRIO SANTANA CALEGARI

DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DA AMIZADE

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Rodrigo Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Rio Claro

Prof. Dr. Laerte Bemm
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 06 de abril de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses últimos anos de estudos, em especial a minha esposa, pelo companheirismo e pela compreensão.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço primeiramente a Deus e à Nossa Senhora Aparecida, que me iluminou até aqui, me mantendo saudável, forte e rodeado de anjos para enfrentar os obstáculos do caminho.

Aos meus pais, José Pedro Calegari e Nair Santana Calegari, por acreditarem em mim, mesmo quando nem eu mesmo acreditava, por me educarem, pelas orações e principalmente por me amarem tanto.

Aos meus irmãos Alessandra Santana Calegari e Alex Sandro Santana Calegari, por serem bem mais que irmãos nesta jornada, sendo que Alessandra arrumou ainda um grupo de caronas para dividir as despesas do deslocamento até as aulas.

Agradeço minha esposa, Lucivana Pelicioli Calegari. É uma das poucas pessoas que tenho certeza que lerá esses agradecimentos. Obrigado pela disposição em me ajudar. Obrigado por ser amiga em todas as horas. Obrigado pela compreensão e paciência que teve comigo. Obrigado por ser a rainha do nosso lar e a dona do meu coração. Saiba que meus dias não seriam os mesmos, se você não tivesse ao meu lado. Superamos, e superaremos muitos desafios juntos e vamos fazer do nosso Deus orgulhoso de ter nos unido.

Aos amigos e colegas do PROFMAT da turma de 2013 em especial Marcelo Ezio e Danielli Ovsiany Becker, pelos momentos de estudo juntos, companheirismo nos deslocamentos semanais para nossas aulas e me fazer odiar Games of Thrones sem assistir e a Suelen Fujimori por ceder o espaço de sua casa e pouso nas vésperas de provas.

Aos amigos e colegas do PROFMAT da turma de 2016, em especial ao Ângelo Márcio, Cristina Kozan de Brito e Fernanda Campanha Rejani pelas dicas e ajudas no estudo para obter sucesso no exame de qualificação e nas disciplinas, pelo companheirismo e pelos momentos de descontração e alegria principalmente em nossos almoços no shopping nos dias de aula.

Além de todos os colegas das turmas mencionados acima, reservo um parágrafo para agradecer muito a dois amigos que obtive nesta caminhada difícil. O primeiro: Wagner

Spak que esteve comigo desde da turma 2013, tivemos as mesmas frustrações, mas com muito apoio desse grande amigo que retornamos, me auxiliou muito nos estudos, nos momentos de descontração que foram muitos bons; e o Denir Costa de Oliveira que juntou-se a nós nessa mesma maratona em 2016, com suas dicas aprendemos nos momentos estudos e o companheirismo nos deslocamentos para aula. Meu sincero obrigado aos dois.

Ao meu orientador Prof. Dr. Rodrigo Martins, pelo suporte prestado, pelas correções e incentivos ao longo do desenvolvimento desse trabalho. O seu conhecimento enriqueceu os meus estudos.

Ao Coordenador do Programa de Metrado Profissional da Uem, Prof. Dr. Eduardo Amorim Neves, pela sua competência em nos direcionar e motivar a irmos além.

Aos Professores do PROFMAT -UEM, em especial, Prof. Dr Laerte Bemm e Prof. Dr. Luciene Parron Gimenes Arantes, pelas lições e ensinamentos no decorrer das disciplinas do programa.

Agradeço a instituição Universidade Estadual de Maringá - UEM sem a qual não teria sido possível realizar o meu mestrado e por me acolher como parte de seu corpo discente.

À secretaria acadêmica do departamento de Matemática, em especial à Lúcia pelas orientações e informações do PROFMAT.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro na minha primeira passagem pelo programa em 2013, a qual permitiu focar nos meus estudos mesmo não tendo sucesso.

Por fim, agradeço a você que lê esse documento. Espero que ele seja importante em sua jornada de estudos.

“A amizade é uma predisposição recíproca

que torna dois seres igualmente ciosos

da felicidade um do outro.”

Platão.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar duas demonstrações do teorema, conhecido na Matemática, como Teorema da Amizade, sendo enunciado da maneira: Numa reunião com n pessoas, onde quaisquer duas pessoas tem exatamente um amigo comum, há alguém na reunião que conhece todas as pessoas. Iniciamos o trabalho com algumas definições relacionadas à Matemática Discreta, Álgebra Linear e Teoria dos Grafos. Em seguida, apresentamos uma linha do tempo sobre as demonstrações do teorema nas últimas décadas, com informações obtidas através de pesquisa em canais digitais. Finalizamos o trabalho apresentando as duas demonstrações do Teorema da Amizade, a primeira utilizando conteúdos da Teoria dos Grafos e Álgebra Linear e a segunda por meio da Análise Combinatória.

Palavras-chave: Teorema da Amizade, Grafos da Amizade, Teoria dos Grafos.

Abstract

This paper aims to present two demonstrations of the theorem, known in Mathematics, as Friendship Theorem, being stated in this way: In a meeting with n people, where both have exactly one common friend, there is someone in the meeting who knows all the people . We begin the work with some definitions related to Discrete Mathematics, Linear Algebra and Graph Theory. Next, we present a timeline about demonstrations of the theorem in the last decades, with information obtained through digital channel search. We conclude the work by presenting the two demonstrations of the Theory of Friendship, the first using contents of Graph Theory and Linear Algebra and the second by Combinatorial Analysis.

Keywords: Friendship Theorem, Friendship Graphs, Theory of Graphs.

Lista de Figuras

1.1 Diagrama de Venn 18

1.2 Diagrama de Venn que representa a União de A e B 20

1.3 Diagrama de Venn que representa a Intersecção de A e B 21

1.4 Representação do Exemplo 1.8 21

3.1 As setes pontes de Königsberg 52

3.2 Grafo das setes pontes de Königsberg 53

3.3 Grafos Não Orientado e Orientado 54

3.4 Grafo de Ligações 54

3.5 Grafos de Caminhos 55

3.6 Grafo Conexo e Não Conexo 56

3.7 Grafo Regular de grau 3 56

3.8 Grafos de Ciclos 57

3.9 Grafo do Exemplo 23 58

3.10 Tetraedro 61

4.1 Grafo da reunião composta por 3 pessoas 67

4.2 Grafo da Etapa 1 73

4.3 Grafo da Etapa 2 74

4.4 Grafo 1 da Etapa 3 74

4.5 Grafo 2 da Etapa 3 75

4.6 Grafo 1 Etapa 4 75

4.7 Grafo do Primeiro Caso da Etapa 4 76

4.8 Grafo do Segundo Caso da Etapa 4 76

4.9 Grafo do Terceiro Caso da Etapa 4 77
4.10 Grafo do Quarto Caso da Etapa 4 77
4.11 Grafo da Etapa 5 78
4.12 Grafo da Etapa 6 (Moinho de Vento) 78
4.13 Grafo da Etapa 7 82

Sumário

Introdução **15**

1 Matemática Discreta **17**

1.1 Noções de Conjuntos 17

1.2 Análise Combinatória 22

1.3 Indução Matemática 23

1.4 Recorrência Linear de Primeira Ordem 25

2 Noções de Álgebra Linear **26**

2.1 Matrizes 26

2.2 Operações de Matrizes 29

2.3 Determinantes 32

2.4 Autovalor, Autovetor 41

2.5 Polinômio Mínimo de Uma Matriz 44

2.6 Potência de Matriz e Diagonalização 45

2.7 Matriz semelhantes 49

3 Teoria dos Grafos **52**

3.1 Algumas noções de Grafos 53

3.2 Número de Caminhos Possíveis de Tamanho n 58

4 Teorema da Amizade **65**

4.1 Demonstração do Teorema através da Álgebra Linear e Grafos 73

4.2 Demonstração do Teorema através da Análise Combinatória 83

Considerações Finais **92**

Referências **96**

INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência que não tem nenhum compromisso com o mundo físico, sua condição de abstração só é limitada pela capacidade humana mas, vez ou outra, perguntas ingênuas e simples do mundo real abrem portas para o estudo aprofundado de teorias.

Um exemplo interessante é o início da Teoria dos Grafos e um dos avanços da Topologia é o problema das setes pontes de Königsberg, que cruzavam o rio Pregel. Elas conectavam duas ilhas entre si e as ilhas com as margens. Perguntavam-se se era possível cruzar as setes pontes numa caminhada continua sem passar duas vezes por qualquer uma delas.

Neste trabalho lançamos mão de um problema simplório do mundo real para avançar nos assuntos da matemática. Assim, nesta dissertação apresentamos duas demonstrações do teorema conhecido no "folclore matemático"como o *Teorema da Amizade.*

"Numa reunião com n pessoas onde quaisquer duas pessoas tem exatamente um amigo comum, existe alguém da reunião que conhece todas as pessoas."

Não se tem conhecimento exato de quem enunciou este teorema, mas ele em si não foi apresentado desta maneira pela primeira vez, em 1966 pelo matemático Paul Erdös, dizendo: "Se G_n é um grafo no qual dois pontos conectados por um caminho de comprimento 2 e que não contém qualquer ciclo de comprimento 4, então $n = 2k + 1$ e G_n consiste em triângulos que têm um vértice em comum".

O enunciado do teorema apresentado Paul Erdös é muito incomum. Em 1971 o matemático Hilbert Will traduziu para linguagem da Teoria de Grafos: "Se G é um grafo no qual dois vértices distintos têm exatamente um vizinho comum, então G tem um vértice unindo todos os outros.

Por meio dessa linguagem fica fácil perceber que os vértices são as pessoas, o grafo em questão simboliza a reunião, o vizinho comum será o amigo comum entre as duas pessoas e o vértice que une todos os outros é a pessoa que conhece todas as outras pessoas da reunião, assim teremos o Teorema da Amizade conforme anunciado no início.

Apresentamos duas demonstrações do teorema, e notaremos que estas são ricas em conteúdos matemáticos do ensino médio.

A dissertação foi estruturada em quatro capítulos, sendo que nos três primeiros apresentamos algumas definições, exemplos e resultados necessários para as demonstrações do Teorema da Amizade.

O capítulo 1, é subdividido em quatro partes e aborda uma parte da Matemática Discreta: Noções de Conjuntos, Análise Combinatória, Indução Matemática e Recorrência Linear de Primeira Ordem. As Noções de Conjuntos trazem os conceitos primitivos de conjuntos, a representação de um conjunto, operações de União e Intersecção de conjuntos e Partição de Conjuntos. Na Análise Combinatória a ênfase é voltada para o Princípio Multiplicativo da Contagem e o Princípio Aditivo da Contagem. Para finalizar o capítulo abordaremos as definições e exemplos de: Indução Matemática e Recorrência Lineares de Primeira Ordem e um lema demonstrado por indução matemática utilizado nas demonstrações do teorema.

No capítulo 2, em torno de Noções de Álgebra Linear, reunimos definições e exemplos desse ramo da Matemática, para nos auxiliar nas duas demonstrações do teorema.

O capítulo 3, apresentamos noções da Teoria dos Grafos, a qual não é conteúdo muito explorado no Ensino Médio. O capítulo inicia com um breve histórico do surgimento da Teoria dos Grafos, que é o problema das setes pontes de Königsberg (devido ao matemático suíço Leonhard Euler). Em seguida traz algumas definições e exemplos de como representar um grafo, matriz adjacência e o número de caminhos possíveis que define quantos caminhos distintos existe de um vértice à outro.

No quarto e último capítulo, encontra-se as duas demonstrações do Teorema da Amizade. O capítulo inicia-se com um breve histórico do surgimento do teorema, em seguida apresentamos o resultado da pesquisa que realizamos em canais de busca digital, sobre matemáticos que escreveram ou demonstraram o teorema ao longo dos anos. Apresentamos também cinco versões de escrita do teorema, duas propriedades sobre a matriz adjacência do teorema e dois lemas.

Capítulo 1

Matemática Discreta

Neste capítulo utilizamos: Dante[9], Fernandes [11], Lipschutz [19], Morgado [24] [23], Paiva [26] e Rosen [27].

A Matemática Discreta, também chamada de Matemática Finita, é o ramo da Matemática que estuda as estruturas matemáticas que são fundamentalmente discretas, no sentido de não suportarem ou requererem a noção de continuidade. Grande parte (não todos), dos objetos estudados na Matemática Discreta são conjuntos contáveis, como os inteiros.

A Matemática Discreta tornou-se popular em décadas recentes devido às aplicações na Ciência da Computação. Conceitos e notações da Matemática Discreta são úteis para o estudo ou a expressão de objetos ou problemas em algoritmos de computador e linguagens de programação.

1.1 Noções de Conjuntos

A Teoria dos Conjuntos foi formulada em 1872 pelo matemático George Cantor (1845-1918) e o seu colega Richard Dedekind (1831 - 1916), os conceitos que iniciam uma teoria são aceitos sem definição, pois não existindo ainda a teoria, não há como defini-los, assim são chamados de **Conceitos Primitivos** e na Teoria de Conjuntos esses conceitos são: **Conjunto, Elemento de um Conjunto** e **Pertinência entre Elementos e Conjuntos**.

Aqui diremos que um **Conjunto** é uma coleção não ordenada de objetos.

Exemplo 1.1. Conjunto dos números primos: $P = \{2,3,5,7,11,13,...\}$.

Um conjunto é formado por **Elementos**. Um objeto a qualquer pode ser elemento de um determinado conjunto A, quando for, dizemos que:

• a pertence a A e escrevemos $a \in A$.

Caso contrário, dizemos que:

• a não pertence A e escrevemos $a \notin A$.

No exemplo 1.1 acima temos:

• $2 \in P$.

• $6 \notin P$.

É usual dar nomes aos conjuntos usando letras maiúsculas e representar os elementos por letras minúsculas.

Para representar um conjunto podemos usar qualquer das três formas abaixo:

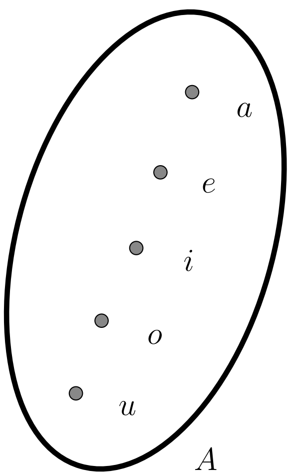
• **Representação Tabular**: é aquela em que os elementos são representados entre chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula, conforme no exemplo abaixo:

Exemplo 1.2. $A = \{a, e, i, o, u\}; B = \{1, 2, 3, 4\}$.

• **Representação por um Diagrama de Venn**: é aquela em que os elementos são simbolizados por pontos interiores a uma região plana, delimitada por uma linha fechada que não se entrelaça, como Exemplo 1.3:

Exemplo 1.3. A Figura 1.1, representa o conjunto A na forma de Diagrama de Venn.

Figura 1.1: Diagrama de Venn



• **Representação por uma Propriedade**: é aquela em que os elementos são descritos por uma propriedade que os determina, por exemplo:

Exemplo 1.4. $A = \{x|x \text{ é um número natural par}\}$.

No Exemplo 1.4 acima lê-se: "A é o conjunto de todos elementos x, tais que x é um número natural par".

Dizer que um conjunto B é **Subconjunto** de um conjunto A, equivale a dizer que todos os elementos do conjunto B, pertencem também ao conjunto A.

Exemplo 1.5. Dado o conjunto $A = \{1{,}2{,}3{,}5{,}7{,}9\}$ e o conjunto $B = \{2{,}3{,}5\}$, B é subconjunto de A?

Respondendo o Exemplo 1.5, observamos que os elementos do conjunto B pertencem também ao conjunto A, logo B é um subconjunto de A.

É dito **Conjunto Unitário** todo conjunto formado por um único elemento.

Conjunto Vazio é aquele que não possui elemento algum. Representa-se o conjunto vazio por $\varnothing$ ou por $\{\ \}$.

Existem alguns tipos de relações entre conjuntos.

A **Relação de Pertinência**, indica se o elemento **Pertence** ($\in$) ou **Não Pertence** ($\notin$) ao determinado conjunto, por exemplo:

Dado o conjunto $D = \{w, x, y, z\}$.

$w \in D$ (w pertence ao conjunto D);

$j \notin D$ (j não pertence ao conjunto D).

A **Relação de Inclusão** aponta se tal conjunto **Está Contido** ($\subset$) ou **Não Está Contido** ($\not\subset$); se um conjunto **Contém** o outro ($\supset$) ou **Não Contém** o outro ($\not\supset$). Por exemplo:

Dados os conjuntos:

$A = \{a, e, i, o, u\}$;

$B = \{a, e, i, o, u, m, n\}$;

$C = \{p, q, r, s, t\}$.

Temos:

$A \subset B$ (A está contido em B, ou seja, todos os elementos de A estão em B).

$C \not\subset B$ (C não está contido em B, na medida em que o elementos do conjuntos são diferentes).

$B \supset A$ (B contém o conjunto A, donde os elementos de A estão em B).

Definição 1.1. Sejam A e B conjuntos. A **União** dos conjuntos A e B, indicada por $A \bigcup B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A ou em B, ou em ambos.

Exemplo 1.6. Dado o conjunto $A = \{1,3,5\}$ e o conjunto $B = \{1,2,3\}$, determine $A \bigcup B$.

Logo $A \bigcup B = \{1,2,3,5\}$.

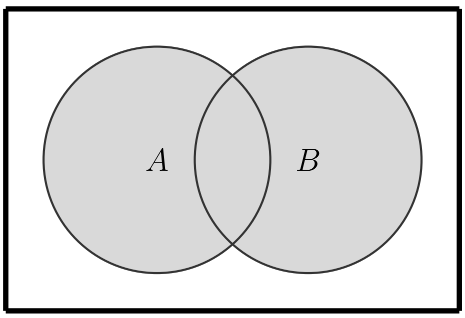
A intersecção de conjuntos é definida como:

Definição 1.2. Sejam A e B conjuntos. A **Intersecção** dos conjuntos A e B, indicada por $A \cap B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A e em B, simultaneamente.

Exemplo 1.7. Dado o conjunto $A = \{1,3,5,7,9\}$ e o conjunto $B = \{1,2,3,4,5\}$, determine $A \cap B$.

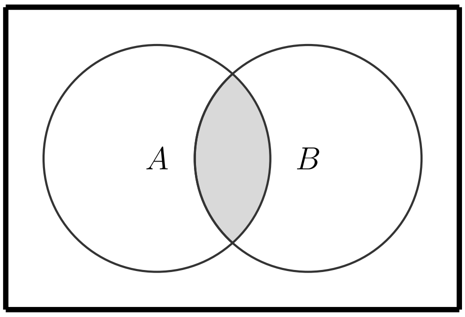
A solução do Exemplo 1.7 é dada por:$A \cap B = \{1,3,5\}$. O Diagrama de Veen mostrado na Figura 1.2 representa a União de dois conjuntos A e B. A área que representa $A \bigcup B$ é área sombreada dos círculos que representam ou A ou B, já na Figura 1.3 representa a Intersecção dos conjuntos A e B. A área sombreada, que está entre os dois círculos que representam os conjuntos A e B, é a área que representa a intersecção de A e B.

Figura 1.2: Diagrama de Venn que representa a União de A e B



$A \bigcup B$ está sombreado

Figura 1.3: Diagrama de Venn que representa a Intersecção de A e B



$A \cap B$ está sombreado

Definição 1.3. Dois conjuntos são chamados de **Disjuntos** se sua intersecção é um conjunto vazio.

Definição 1.4. Seja S um conjunto não vazio. Uma **Partição** de S é qualquer coleção A_i de subconjuntos não vazios de S, tais que:

i. Cada a em S pertence a algum dos A_i;

ii. Os conjuntos em A_i são disjuntos dois a dois; isto é se:

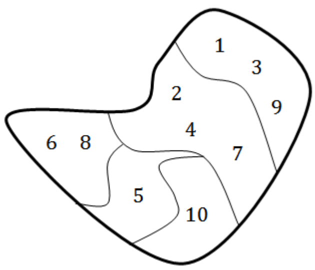
$$A_i \neq A_j, \text{ então } A_i \cap A_j = \varnothing.$$

E, ainda:

Definição 1.5. Cada subconjunto da coleção A_i, é chamado de **Bloco** da partição S.

Exemplo 1.8. Se S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, então A_i = {{1,3,9}, {2,4,7}, {5}, {6,8}, {10}} é uma partição de S, com cinco blocos.

Figura 1.4: Representação do Exemplo 1.8



Fonte : clubes.obmep.org.br/blog/teoria − de − conjuntos − particao/

1.2 Análise Combinatória

A Análise Combinatória analisa estruturas e relações discretas, esse assunto vem sendo estudado desde antes do século XVII, quando questões combinatórias apareceram no estudo de jogos. A enumeração, contagem dos objetos com certas propriedades é uma parte muito importante da combinatória, realizamos o seu estudo na Lógica Matemática, analisando possibilidades e combinações.

Para esta enumeração de objetos, apresentaremos dois princípios básicos de contagem, **Princípio Multiplicativo da Contagem**, também conhecido como **Princípio Fundamental da Contagem** e o **Princípio Aditivo da Contagem**.

Definição 1.6. (**Princípio Fundamental da Contagem**)

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy.

Exemplo 1.9. Jeniffer precisa comprar uma saia, a loja em que está possui 3 modelos de saias (m_1, m_2, m_3) diferentes nas cores: preto, rosa, azul e amarelo. Quantas opções de escolha Jeniffer possuí?

Para solucionar essa questão utilizamos o princípio fundamental da contagem.

d_1 : Modelos diferentes de saias;

d_2: Cores das saia.

Como d_1 pode ser tomada de 3 maneiras e, depois disso, d_2 pode ser tomada de 4 maneiras, o número de maneiras de se comprar uma saia (isto é, tomar a decisões d_1 e d_2) é 3 x 4 = 12.

Note que uso do Princípio Multiplicativo permite obter o número de elementos do conjunto:

{ $m_1$preto, $m_1$amarelo, $m_1$rosa, $m_1$azul, $m_2$preto, $m_2$amarelo,

$m_2$rosa, $m_2$azul, $m_3$preto,$m_3$amarelo, $m_3$rosa, $m_3$azul}.

Constituído por todos as saias possíveis, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Definição 1.7. (**Princípio Aditivo da Contagem**)

Se uma tarefa puder ser realizada de n_1 formas ou de n_2 formas, em que nenhum dos elementos do conjunto das n_1 formas é o mesmo que algum elemento do conjunto das n_2 formas, então há $n_1 + n_2$ formas de realizar a tarefa.

Exemplo 1.10. Suponha que um professor da escola ou um estudante seja escolhido como representante para um Comitê da Escola. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas para esse representante se houver 14 professores da escola e 75 estudantes?

O Exemplo 1.10 diz que há 14 maneiras de escolher um professor da escola e há 75 maneiras de escolher um estudante. Escolher um professor da escola não é o mesmo que escolher um estudante porque nenhum deles é ao mesmo tempo professor e estudante. Então, pelo princípio aditivo da contagem, temos que há $14 + 75 = 89$ maneiras possíveis de escolher esse representante.

1.3 Indução Matemática

A Indução Matemática é um método de comprovação da Matemática usado para estabelecer verdades matemáticas válidas sobre subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

Segundo Rosen [27], o primeiro uso conhecido da Indução Matemática é o trabalho do matemático Francesco Maurolico (1494 - 1575), no século XVI. Em seu livro, *Arithmeticorum Libri Duo*, Maurolico apresentou várias propriedades de números inteiros juntamente com as demonstrações dessas propriedades. Para demonstrar algumas dessas propriedades, ele desenvolveu a Indução Matemática e seu primeiro uso foi para demonstrar que a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares é igual a n^2.

Em geral, a Indução Matemática pode ser usada para demonstrar proposições que afirmam que *P(n)* é verdadeira para todos os números naturais n, em que *P(n)* é uma função proposicional.

(Princípio de Indução Matemática): Se *P(n)* é uma propriedade relativa ao número natural n, tal que:

i) $P(1)$ é verdadeira;

ii) sempre que a propriedade for válida para um número natural arbitrário $n = k$, ela será válida para o seu sucessor $n = k + 1$ (ou seja, *P(k)* verdadeira implica *P(k + 1)* verdadeira).

Então *P(n)* é verdadeira para todo número natural n.

Exemplo 1.11. Mostre que se n for um número natural, então:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Solução: Considere *(P(n))*: $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \geq 1$.

Verificamos se $P(1)$ é verdadeira:

$$1=\frac{1(1+1)}{2} \Longrightarrow 1=1.$$

Logo P (1) é verdadeira.

Para a hipótesede Indução, assumimos que *P(k)* é verdadeira para um número natural arbitrário k, ou seja, assumimos que:

$$P(k): 1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Considerando essa hipótese, devemos mostrar que *P(k* $+$ 1) é verdadeira, ou seja, que:

$$P(k+1): 1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Adicionando *(k +1)* em ambos lados da hipótese, temos que:

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2+k+2k+2}{2} \\
&= \frac{k^2+3k+2}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Esta última equação mostra que *P(k*+1) é verdadeira, portanto pelo princípio de indução matemática *P(n)* é verdadeira para todo $n \geq 1$.

1.4 Recorrência Linear de Primeira Ordem

A relação de recorrência é uma técnica da Matemática Discreta utilizada para definir sequências, conjuntos e operações partindo de problemas particulares para problemas genéricos. Ou seja, por intermédio de uma regra pode-se calcular qualquer termo em função do antecessor imediato. Existem vários tipos de recorrência, neste trabalho utilizaremos a recorrência linear de primeira ordem.

Uma recorrência de primeira ordem expressa x_{n+1} em função de x_n. Ela é dita linear se, e somente se, essa função for de primeiro grau.

Não há grandes dificuldades na resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem veja o Exemplo 1.12 abaixo:

Exemplo 1.12. Resolva $x_{n+1} = x_n + n, x_1 = 0$.

Solução: Temos:

$$x_2 = x_1 + 1$$

$$x_3 = x_2 + 2$$

$$x_4 = x_3 + 3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = x_{n-1} + (n-1).$$

Somando, resulta:

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdot + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{1}. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Noções de Álgebra Linear

Álgebra Linear é um ramo da Matemática que surgiu do estudo detalhado de sistemas, utilizando-se de alguns conceitos e estruturas fundamentais como vetores, sistemas de equações, matrizes e outras.

Neste capítulo, reunimos algumas definições básicas da Álgebra Linear que serão necessários para a compreensão das duas demonstrações do Teorema da Amizade, tendo utilizado como fonte os livros: Boldrini[5], Hefez [12], Iezzi [15] [16], Kolman [17], Paiva [25] [26], Silva [29] e Souza [30].

2.1 Matrizes

As matrizes são ferramentas básicas da Álgebra Linear, pois elas fornecerem meios para a resolução dos sistemas de equações e representam as transformações lineares entre os espaços vetoriais.

Chamamos de **Matriz** com entradas reais, uma tabela de números reais dispostos em m linhas e n colunas (indica-se $m \times n$), é usual indicarmos as entradas de uma matriz arbitrária A pelos símbolos A_{ij}, ou ainda a_{ij}, onde os índices indicam, nessa ordem, a linha e coluna onde o elemento se encontra. Assim, uma matriz $m \times n$ é representada por:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Muitas vezes uma matriz deste tipo também é denotada por $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplo 2.1. $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Ao trabalharmos com matrizes, observamos que existem algumas que, pela quantidade de linhas ou colunas, ou ainda, pela natureza de seus elementos, tem propriedades que as diferenciam de uma matriz qualquer. Por isso recebem nomes especiais.

Matriz Quadrada de ordem n é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, uma matriz que tem o mesmo número de linhas e colunas.

Exemplo 2.2. $A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \\ \frac{3}{5} & 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$.

Chamamos de **Diagonal Principal** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm $i = j$, isto é:

$$\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}\}.$$

Chamamos de **Diagonal Secundária** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm a soma dos índices igual a $n + 1$, ou seja:

$$\{a_{ij} | i + j = n + 1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \cdots, a_{n1}\}.$$

Exemplo 2.3. $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 12 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Assim os elementos da diagonal principal (em azul) são 3,0,4 e sua diagonal secundária (em amarelo) é {6,0,5}.

Chamada de **Matriz Coluna** é toda matriz do tipo $m \times 1$, ou seja, toda matriz que possui somente uma coluna.

Exemplo 2.4. $A_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, toda matriz que tenha uma única linha é chamada de **Matriz Linha**.

Exemplo 2.5. $A_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Matriz Nula é toda matriz onde todos os seus elementos de números reais são nulos, ou seja, todos iguais a zero.

Exemplo 2.6. $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Matriz Diagonal é toda matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo 2.7. $A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Uma matriz diagonal, ainda pode ser representada da seguinte maneira:

$$D = diag(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}),$$

$d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$ são os elementos da diagonal dessa matriz. A representação da matriz A_3 do Exemplo 2.7 é:

$$A_3 = diag(7, 3, 2).$$

Toda matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a zero, é chamado de **Matriz Identidade** e denotada usualmente por I_n.

Exemplo 2.8. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$, A^t é denominada **Matriz Transposta** de A.

Exemplo 2.9. $A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 12 \\ 5 & 3 & -5 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 9 & 3 & 2 \\ 12 & -5 & 8 \end{bmatrix}$.

Toda matriz quadrada de ordem n, e $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i \neq j$, ou seja, $\mathrm{A} = \mathrm{A}^t$, é chamada de **Matriz Simétrica**.

Exemplo 2.10. Seja: $A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Note que sua matriz transposta é: $A_4^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Logo A_4 é simétrica.

2.2 Operações de Matrizes

Ao utilizarmos matrizes, surge naturalmente a necessidade de efetuarmos certas operações. Dizemos que duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, de mesma ordem, são iguais, escrevendo A = B, quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 2.11. Sejam x e y números reais, temos que as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

são iguais quando $x = 8$ e $y = 3$.

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a **Adição** de A e B, denotada $A + B$, é a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 2.12. $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 7 & 3 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$.

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, a **Matriz Oposta** de A, é a matriz $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$. Tendo definido a operação de adição de matrizes, definimos a **Subtração** de matrizes da seguinte maneira:

Sejam as matrizes A=$[a_{ij}]_{m\times n}$ e B=$[b_{ij}]_{m\times n}$ temos que:

$$A - B = A + (-B).$$

Sejam a matriz A=$[a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número real, definimos o **Mutiplicação por um Escalar**, sendo a matriz;

$$k \cdot A = [ka_{ij}]_{m\times n}.$$

Exemplo 2.13. $2 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 4 \\ 4 & -10 & 24 \end{bmatrix}.$

Segundo Hefez [12], a definição de produto de matrizes foi apresentada por Arthur Cayley (1821 - 1895), no trabalho intitulado "A Memoir on the Theory of Matrices", publicado em 1858 na revista *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* da seguinte maneira:

Sejam A= $[a_{ij}]_{m\times n}$ e B= $[b_{ij}]_{n\times p}$ duas matrizes. O **Produto** de A por B, denotado por AB, é definido como a matriz C = $[c_{ij}]_{m\times p}$ tal que:

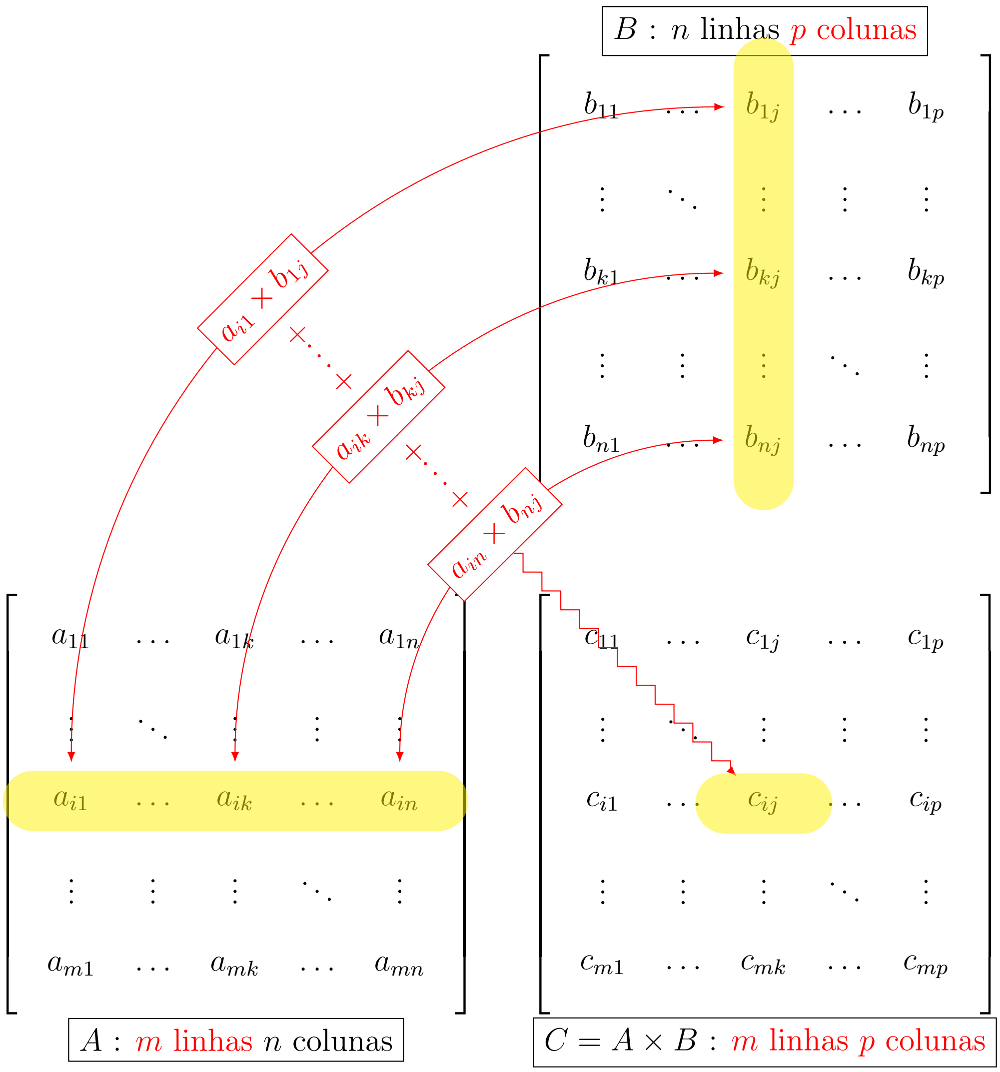
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$.

Observamos que só é possível multiplicarmos duas matrizes quando número de colunas da primeira matriz for igual número de linhas da segunda matriz.

Vamos explicitar essa fórmula para obter o elemento da matriz AB que se encontra na i - *ésima* linha e j -*ésima* coluna.

Na matriz A, destaque a i -*ésima* linha, e na matriz B, a j-*ésima* coluna. Feito isso, multiplica-se ordenadamente o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna, o segundo elemento da linha pelo segundo da coluna e assim por diante até o último elemento da linha pelo último elemento da coluna, e finalmente soma-se todos estes números, conforme o esquema abaixo.



Exemplo 2.14. Determine $A \times B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Temos que:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 7 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 4 & 2 \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ -7 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Note que para o produto de A por B estar definido, o número de colunas de A deve ser igual número de linhas de B. Assim, se A e B são matrizes 2×3 e 3×2, respectivamente, logo o produto AB está definido e é uma matriz 2×2. Entretanto, o produto BA não está definido.

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de uma **Matriz Inversa** de A qualquer matriz quadrada B de ordem n tal que:

$$AB = BA = I_n.$$

Escrevemos A^{-1}, para denotar a matriz inversa de A.

Propriedade 2.1. *Sejam A, B e C, matrizes quadradas tais que:*

$$AB = I \quad e \quad CA = I.$$

Então, $B = C = A^{-1}$ é a ***única*** *inversa da matriz A.*

Demonstração:

Como $AB = I$ e $CA = I.$, temos que:

$$(CA)B = C(AB) \Longrightarrow B = C$$

Portanto, pela definição de Matriz Inversa, temos que $B = C = A^{-1}$. Assim, mostramos que a inversa da matriz A é única. $\square$

Exemplo 2.15. Dada a matriz A $= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ temos que a matriz B $= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma inversa de A, já que AB =BA $= I_2$.

Consideremos uma matriz quadrada. Chamamos de **Traço da Matriz** (representado por tr) a função que associa a matriz à soma dos elementos da sua diagonal principal, ou seja, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ então:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Exemplo 2.16. Seja $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow tr(A) = 8 + 7 + 9 + 2 = 26.$

2.3 Determinantes

Segundo Paiva [25], o estudo dos sistemas lineares levou alguns matemáticos do século XVII a desenvolver a **Teoria dos Determinantes**.

Essa teoria surgiu, quase simultaneamente no Japão e na Europa, embora o matemático japonês Seki a tenha publicado primeiro, em 1683, na obra *Kake Fukudai no ho*, em que apresenta um método geral para o cálculo de determinantes.

De acordo com Boldrini [5], na Europa a partir do século XVII, nesta época surgem trabalhos de Leibniz (1646 -1716), de G. Cramer (1704 - 1752) que desenvolveu um método de resolução de sistemas através de determinantes, conhecido por "Regra de Cramer".

Só no século XIX é que os determinantes passaram a ser estudados mais sistematicamente, a começar pelo longo tratado de A. L. Cauchy (1789 -1857) em 1812, tendo sido realizados, em seguida, trabalhos de C. G. Jacobi (1804 - 1851).

A partir de então, o uso de determinantes difundiu-se muito e este conceito de um número associado a uma matriz quadrada mostrou-se extremamente útil para caracterizar muitas situações, como a de saber se uma matriz é inversível e se um sistema admite ou não solução.

Para definir determinantes precisamos de alguns conceitos preliminares.

Consideremos o sistema $a_{11}x_1 = b_1$ com $a_{11} \neq 0$. A solução deste sistema é $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$.

Observe que o denominador está associado à matriz dos coeficientes do sistema, ou seja, $[a_{11}]$.

Nun sistema 2×2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

resolvendo (desde que sejam possíveis as operações), encontramos :

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \text{ e } x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Observe que os denominadores são iguais e estão associados à matriz dos coeficientes do sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Num sistema 3×3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad ,$$

(desde que sejam possíveis as operações), ao procurarmos os valores de x_1, x_2 e x_3, vemos que eles têm o mesmo denominador $a_{11}a_{22}a_{33}$ - $a_{11}a_{23}a_{32}$ - $a_{12}a_{21}a_{33}$ $+ a_{12}a_{23}a_{31}$ $+ a_{13}a_{21}a_{32}$ - $a_{13}a_{32}a_{31}$, que também está associado à matriz dos coeficientes do sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Vamos rever estes números que aparecem nos denominadores associados às matrizes (quadradas). Estes números são casos particulares do que é chamado **Determinante de Uma Matriz Quadrada**.

Quando nos referirmos ao determinante, isto é, ao número associado a uma matriz, a representação do determinante de uma matriz A, que será designado por $detA$.

Dada .

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$detA$ também é denotada por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

O **Determinante de 1ª Ordem** é o determinante da matriz $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ que é igual ao número que a constitui:

$$detA = a_{11}.$$

O **Determinante de 2ª Ordem**, ou seja, o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$, é o número real obtido através do produto dos elementos da diagonal principal *menos* o produto dos elementos da diagonal secundária:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Logo:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}) - (a_{21}a_{12}).$$

O **Determinante de 3ª Ordem** pode também ser obtido através de uma regra prática denominada **Regra de Sarrus**. Essa regra foi criada pelo matemático francês Pierre Frederic Sarrus(1798 - 1861), para facilitar o cálculo desse determinante.

Consideremos a matriz: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$

1º passo: Escrevemos a matriz e repetimos a 1ª e 2ª colunas a direita da 3ª coluna.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

2º passo: Efetuamos a adição algébrica dos produtos dos elementos indicados pelas setas conforme o esquema:

$$\begin{vmatrix} + & + & + & & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & & \end{vmatrix}.$$

Logo:

$$detA= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

É conveniente salientar que o conceito de determinantes no caso geral envolve muitos símbolos, o que dificulta a leitura, para tornar a discussão mais simples e organizada, vamos introduzir algumas definições necessárias. Comecemos lembrando o que significa uma **Permutação**. Dados n objetos distintos $a_1, \ldots, a_n$, uma permutação destes objetos consiste em dispô-los e uma determinada ordem. Por exemplo, (1 2 3) é uma permutação dos números 1, 2 e 3, (2 1 3) é outra permutação etc. A quantidade de permutações de n objetos é dada por $n!$, que é lido n fatorial e $n! = (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ (se $n > 0$). Por exemplo $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Define-se ainda $0! = 1$.

Definição 2.1. Dada uma permutação dos inteiros $1, 2, \ldots, n$, existe uma **inversão** quando um inteiro precede outro menor que ele.

Consideremos as permutações de 1,2,3 e vejamos em cada permutação o número de inversões.

Permutação	Número de inversões
(1 2 3)	0
(1 3 2)	1
(2 1 3)	1
(2 3 1)	2
(3 1 2)	2
(3 2 1)	3

Como um outro exemplo, podemos tomar duas das $4! = 24$ permutações de 1,2,3,4. Assim (3 2 1 4) tem 3 inversões e (4 3 2 1) possui 6 inversões.

Voltemos ao determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Observe que aparecem todos os produtos $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}$, onde ($j_1j_2j_3$) são as permutações de 1,2 e 3. Além disso, vemos que o sinal do termo é negativo, se a permutação tiver um número ímpar de inversões. (Veja a tabela acima para verificar os sinais.)

Como generalização, o determinante de matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é dado pela definição a seguir.

Definição 2.2.

$$det[a_{ij}] = \sum_{\rho}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n},$$

onde $J = J(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, é o número de inversões da permutação $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ e ρ indica que a soma é estendida a todas as $n!$ permutações de $(1\ 2\ \ldots\ n)$.

Em relação a esta definição podemos fazer três observações:

i) Se a permutação $(j_1 j_2, \ldots, j_n)$ tem um número par de inversões, o coeficiente $(-1)^J$ do termo correspondente na somatória terá sinal positivo, caso contrário, terá sinal negativo.

ii) Em cada termo da somatória, existe um e apenas um elemento de cada linha, e um e apenas um elemento de cada coluna da matriz.

iii) Por meio de uma reordenação conveniente dos termos, mostra -se que também é possível definir um determinante por:

$$det[a_{ij}] = \sum_{\rho}(-1)^J a_{j_1 1}a_{j_2 2}\ldots a_{j_n n}.$$

No estudo dos determinantes podemos destacar o Teorema de Jacobi.

Teorema 2.1 (**Teorema de Jacobi**)**.** *Ao adicionarmos a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada A, outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz B tal que $detA = detB$.*

Exemplo 2.17. Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

temos pela Regra de Sarrus:

$$detA = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \text{-48} + 28 + 0 + 6 + 0 + 28 = 14.$$

Ao adicionarmos à 2ª linha da matriz A a 3ª linha multiplicada por 2, obtemos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

sendo pela Regra de Sarrus:

$$detB = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \text{-48} + 56 + 0 + 6 + 0 + 0 = 14.$$

Note que a matriz B foi obtida a partir da matriz A de acordo com o Teorema de Jacobi (2.1), portanto, $detA = detB = 14$. Para calcular o determinante de uma matriz quadrada A, de ordem n (para $n \geq 2$), existem alguns modelos como: Processo de Triangulação, Teorema Laplace e Regra de Chió, sendo este último que daremos maior ênfase.

Desenvolvida pelo matemático italiano Felice Chió (1813-1871), a **Regra de Chió** é um artifício utilizado para reduzir a ordem de uma matriz sem alterar o valor do determinante. Essa regra pode ser utilizada em uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ de ordem $n \geq 2$, em que $a_{11} = 1$.

A Regra de Chió está resumida nos passos seguintes, conforme a demonstração do livro do IEZZI [15], **Fundamentos de Matemática Elementar**, páginas 94-D e 95 -D.

1) Consideremos a matriz A de ordem $n \geq 2$, com $a_{11} = 1$;

2) Suprimimos a 1ª linha e a 1ª coluna de A;

3) Para cada elemento a_{ij} restante, subtraímos o produto dos elementos suprimidos da mesma coluna e linha de a_{ij}, ou seja, $a_{1j} \cdot a_{i1}$;

4) Com as diferenças obtidas construímos uma matriz B obtida, de ordem $n - 1$, cujo determinante é igual da matriz A;

A Regra de Chió somente pode ser aplicada à matriz quadrada A em que $a_{11} = 1$. Contudo, nos casos em que $a_{11} \neq 1$, pode ser utilizado inicialmente o Teorema de Jacobi para se obter uma matriz B, de mesma ordem de A, com b_{11} e, na sequência, aplicar a Regra de Chió.

Consideremos a matriz quadrada de ordem n com $a_{11} = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Aplicando a Regra de Chió, teremos um determinante de matriz quadrada de ordem $n-1$.

$$\begin{bmatrix} a_{22} - (a_{12} \cdot a_{21}) & a_{23} - (a_{13} \cdot a_{21}) & \cdots & a_{2n} - (a_{1n} \cdot a_{21}) \\ a_{32} - (a_{12} \cdot a_{31}) & a_{33} - (a_{13} \cdot a_{31}) & \cdots & a_{3n} - (a_{1n} \cdot a_{31}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} - (a_{12} \cdot a_{n1}) & a_{n3} - (a_{13} \cdot a_{n1}) & \cdots & a_{nn} - (a_{1n} \cdot a_{n1}) \end{bmatrix}.$$

Assim podemos repetir esse processo até obter uma matriz quadrada, por exemplo, de ordem 3 para aplicar a Regra Sarrus, ou de ordem 2 e encontraremos o determinante da matriz original, conforme Determinante 2ª ordem.

Exemplo 2.18. Para calcular o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos utilizar a Regra de Chió. Nesse caso, obtemos uma matriz B de ordem 3, tal que $detA = detB$.

- Inicialmente suprimimos a 1ª linha e a 1ª coluna de A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

• Subtraímos de cada elemento restante de a_{ij} o produto dos elementos suprimidos de a_{1j} e a_{i1}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5-[0\cdot(-2)] & 4-[3\cdot(-2)] & 5-[2\cdot(-2)] \\ 7-[0\cdot 0] & 1-[3\cdot 0] & 3-[2\cdot 0)] \\ -3-[0\cdot 4)] & 2-[3\cdot 4] & 0-[2\cdot 4] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 7 & 1 & 3 \\ -3 & -10 & -8 \end{bmatrix}.$$

• Como pela Regra de Chió os determinantes das matrizes A e $\begin{bmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 7 & 1 & 3 \\ -3 & -10 & -8 \end{bmatrix}$ são iguais, podemos utilizar a Regra de Sarrus e teremos:

$$detA = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 7 & 1 & 3 \\ -3 & -10 & -8 \end{vmatrix} = \text{-40 - 630 - 90 + 27 + 150 + 560} = \text{- 23.}$$

Existem algumas propriedades para os determinantes, demos enfase à duas propriedades:

Propriedade 2.2. *Quando multiplicamos todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) de uma matriz A por um número real k, o determinante fica multiplicando por esse número, ou seja,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Entretanto, quando várias linhas (ou colunas) da matriz A têm todos os elementos multiplicados por um mesmo número real, o determinante fica multiplicado por esse número real elevado à quantidade de linhas (ou colunas) que ele estava multiplicando a matriz.

Exemplo 2.19. $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Propriedade 2.3. *Seja a matriz A, quando permutamos uma linha (coluna) com outra linha (coluna) gerando a matriz B, temos que: $detA = -detB$.*

Assim, permutando duas linhas (colunas) de uma matriz, o determinante não se altera!

Propriedade 2.4. *Seja A uma matriz quadrada e tenha inversa, isto é A^{-1}, então $detA \neq 0$ e o $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$.*

Demonstração:

Seja A uma matriz inversível e A^{-1} a sua inversa, temos que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n.$$

Usando o determinante, temos que:

$$det(A \cdot A^{-1}) = detI_n.$$

Então:

$$detA \cdot detA^{-1} = 1.$$

Desse produto concluímos que se A tem inversa:

i) $detA \neq 0$;

ii) $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$.

□

2.4 Autovalor, Autovetor

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz $A - \lambda I_n$, onde λ é incógnita, é chamada **Matriz Característica** de A. O determinante dessa matriz é um polinômio em λ, chamado **Polinômio Característico** da matriz A e denotado por $P_A(\lambda)$.

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Exemplo 2.20. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, a matriz característica de A é a matriz:

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 6 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é o polinômio:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 6 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4.$$

Definição 2.3. Os autovalores de uma matriz A são as raízes do seu polinômio característico.

Pelo exemplo 2.20, os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ são 4 e -1, pois estes são as raízes de $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$.

Chamados **Autovetores** associados a um autovalor λ os vetores não nulos obtidos da solução do sistema $(\lambda I_n - A)X = 0$ associado a cada autovetor.

No exemplo 2.20, para encontrar os autovetores devemos resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 6 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para cada λ.

Para o autovalor $\lambda_1 = 4$, temos o sistema:

$$\begin{cases} -3x + 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos x = 2y, logo a solução geral é (2y, y) = y(2,1), assim os autovetores podem ser gerados por (2,1) ou (-2,-1).

Para o autovalor λ_1 = -1, temos:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos x = -3y, logo a solução geral é (-3y, y) = y(-3,1), assim os autovetores podem ser gerados por (-3,1) ou (3,-1).

Nas próximas três propriedades consideraremos A uma matriz quadrada de ordem n com autovalor λ.

Propriedade 2.5. *A soma dos autovalores da matriz A é igual ao traço desta matriz.*

Propriedade 2.6. *O determinante de uma matriz A é o produto dos seus autovalores.*

A demonstração das propriedades 2.5 e 2.6 podem ser encontradas em Meyer[22], página 495.

Propriedade 2.7. *O coeficiente λ^{n-1} do polinômio característico de A é igual - tr(A).*

Demonstração:

O polinômio característico de $P_A(\lambda)$ de A, é dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Por outro lado, os autovalores de A, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, são pela Definição 2.3, as raízes do polinômio característico. Logo:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n).$$

Expandindo-se essa expressão, conclui-se que o coeficiente λ^{n-1} é:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n),$$

ou seja:

$$-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

Pela Propriedade 2.5, conclui-se que o coeficiente λ^{n-1} no polinômio caraterístico de A é:

$$-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = -tr(A).$$

□

Utilizando o exemplo 2.20, notemos que o coeficiente do termo de grau *n-1* determinando é -3, ou seja, seu valor oposto é 3, calculando o traço de A, temos:

$$tr(A) = 1 + 2 = 3.$$

2.5 Polinômio Mínimo de Uma Matriz

Dado um polinômio com coeficientes em $\mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, faz sentido definir a matriz $p(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m$, formamos assim o conjunto das expressões matriciais envolvento uma matriz fixa A.

Suponhamos por um instante que dada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ existe um polinômio não nulo $p(x)$, com coeficientes em $\mathbb{R}$ e tal que $p(x) = 0$ é a matriz nula $n \times n$. Escolha dentre todos os polinômios não nulos que se anulam em A aquele de menor grau e com coeficiente líder unitário. Esse é o **Polinômio Mínimo** de A.

Propriedade 2.8. *Seja A uma matriz quadrada com coeficientes reais, $p(x)$ seu polinômio mínimo e $f(x)$ um polinômio qualquer que se anula em A, isto é $f(A) = 0$. Então $p(x)$ divide $f(x)$.*

Demonstração: Suponhamos que $p(x)$ não divide $f(x)$.

A divisão euclidiana de $f(x)$ por $p(x)$ nos fornece quociente $q(x)$ e resto $r(x)$ que é nulo ou possui grau menor que o grau de f. Supondo que $r(x)$ não é o polinômio nulo, então:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x).$$

Aplicando A na igualdade acima, temos que:

$$0 = 0 + r(A).$$

Que é um absurdo, portanto, $p(x)$ divide $f(x)$ □

Propriedade 2.9. *Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz cujo polinômio mínimo tem grau d, então toda expressão polinomial em A pode ser reduzida à uma de grau menor que d.*

Demonstração:

Seja $f(A)$ uma expressão polinomial qualquer em A e $f(x)$ o polinômio associado. A divisão euclidiana de $f(x)$ por $p(x)$ nos fornece quociente $q(x)$ e resto $r(x)$ que é nulo ou possui grau menor que o grau de f, em todo caso podemos escrever $r(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{d-1}x^{d-1}$, dai como:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x).$$

Aplicando A, obtemos:

$$f(A) = r(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{d-1}A^{d-1}.$$

□

2.6 Potência de Matriz e Diagonalização

Seja a matriz $A = [a_{[ij]}]_{n\times n}$. Então, chamamos de **Potência de Matriz**, o produto obtido da matriz A por ela mesma m vezes.

$$A^M = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ \ldots \ \cdot A}_{m \text{ vezes a matriz A}}$$

.

Este processo do cálculo de potências de matrizes é uma tarefa de custo computacional muito elevado, pois neste caso é necessário calcular $m-1$ produtos de matrizes para determinar A^m. Entretanto, se soubermos que A é uma matriz diagonalizável, o cálculo de A^m fica bastante simplificado.

Definição 2.4. Uma matriz quadrada A de ordem n é **Diagonalizável** se existir uma matriz invertível P de ordem n, e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$, ou equivalentemente, $D = P^{-1}AP$.

Seja a matriz A_n e a matriz P_n invertível. Então é fácil verificar que:

$$(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP. \tag{2.1}$$

Portanto, se A é diagonalizável e se $P^{-1}AP = D$ é uma matriz diagonal, temos que:

$$D^m = P^{-1}A^mP, \tag{2.2}$$

ou equivalente,

$$A^m = PD^mP^{-1}. \tag{2.3}$$

Então, uma vez que:

$$D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}) \Longrightarrow D^m = diag(d_{11}^m, d_{22}^m, \dots, d_{nn}^m), \tag{2.4}$$

Seja $D = (d_{ij})$ uma matriz diagonal $n \times n$, temos que $d_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$. Pela definição de produto de matrizes que o termo geral (c_{ij}) de D^2 é:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}d_{kj} = d_{i1}d_{1j} + \cdots + d_{in}d_{nj},$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e para todo $1 \leq j \leq n$, como $d_{ij} = 0$ se $i \neq j$, logo:

$$c_{ij} = d_{ij}^2.$$

Repetindo por m vezes, temos que D^m tem termo geral igual à d_{ij}^m, com $d_{ij}^m = 0$ se $i \neq j$.

Portanto, $D^m = diag(d_{11}^m, d_{22}^m, \dots, d_{nn}^m)$ se $D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$.

Suponhamos que a matriz A, é diagonalizável com $A = PDP^{-1}$, sendo D diagonal. Dado um polinômio de coeficientes reais $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, podemos calcular $f(A)$ utilizando a Equação (2.3).

$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$

$f(A) = a_0(PIP^{-1}) + a_1(PDP^{-1}) + a_2(PD^2P^{-1}) + \cdots + a_n(PD^nP^{-1})$

$f(A) = P(a_0I + (a_1D) + (a_2D^2) + \cdots + (a_nD^n))P^{-1}$

$f(A) = Pf(D)P^{-1}$.

Segue de (2.4) que:

$$f(D) = diag(f(d_1), f(d_2), \ldots, f(d_n)).$$

Assim, é mais fácil obter *f(D)* do que *f(A)*.

Temos ainda:

Definição 2.5. Seja A uma matriz quadrada, é **Ortogonal** se $AA^t = A^tA = I$, ou seja, A ela é ortogonal se for invertível, com $A^{-1} = A^t$.

Teorema 2.2. ***(Espectral)*** *Seja A uma matriz quadrada e simétrica, então existe uma matriz quadrada ortogonal P tal que $P^{-1}AP = P^tAP$ é diagonal. Ainda, os elementos da diagonal principal de $P^{-1}AP$ são exatamente os autovalores de A.*

Seja A uma matriz simétrica. Se a matriz A é diagonal da forma :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ então } A^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^m \end{bmatrix}.$$

Se a matriz A não é uma matriz diagonal, então pela Definição 2.4 temos que:

$$A = PDP^{-1} \text{ em que } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Corolário 2.1. *Se $D = P^{-1}AP$, então as colunas da matriz P são os n autovetores de A.*

Exemplo 2.21. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, vamos calcular A^5.

Como $A = A^t$, então A é simétrica.

Se A é uma matriz simétrica, então pelo Teorema Espectral 2.2, existe uma matriz P e uma matriz diagonal D, tal que:

$$D = P^{-1}AP.$$

Assim, pela Definição 2.4, a matriz A é diagonalizável.

Obtendo o polinômio característico de A:

$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}.$

Temos a equação $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$.

Assim, $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$ são autovalores da matriz A e $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Para o autovalor λ_1 = -2, temos:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos y = 2x, a solução geral é (x, 2x) = x(1,2), logo o autovetor é (1,2).

Para o autovalor λ_1 = 3, temos:

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos x = -2y, a solução geral é (-2y,y) = y(-2,1), logo o autovetor é (-2,1).

Temos pelo Corolário 2.1 que $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Utilizando definição de matriz inversa , temos que:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Então:

$$
\begin{aligned}
A^5 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^5 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-2)^5 & 0 \\ 0 & 3^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 188 & -110 \\ -110 & 23 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

2.7 Matrizes Semelhantes

Definição 2.6. Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, dizemos que B é **semelhante** a A, quando existir uma matriz invertível tal que $B = P^{-1}AP$.

Com a definição de matriz semelhante, temos as seguintes propriedades:

Propriedade 2.10. *(**Reflexividade**) Toda matriz quadrada **A** é semelhante a si mesma.*

Demonstração:

Como $A = I^{-1}AI$, temos que A é semelhante a A. □

Propriedade 2.11. *(**Simetria**) Se A é semelhante a $\boldsymbol{B}$, B é semelhante a A.*

Demonstração: Se $A = M^{-1}BM$ e $B = N^{-1}AN$ com $N = M^{-1}$. □

Propriedade 2.12. *(Transitividade) Se A é semelhante a B e B é semelhante a C então A é semelhante a $\boldsymbol{C}$.*

Demonstração: Se $A = M^{-1}BM$ e $B = N^{-1}CN$ então $A = P^{-1}CP$ com $P = NM$. □

Propriedade 2.13. *Sejam A e B matrizes semelhantes, então $detA = detB$.*

Demonstração: Se A e B são semelhantes, temos que existe uma matriz invertível M tal que $A = M^{-1}BM$. Pelas propriedades do determinantes segue que:

$$\begin{aligned} detA &= det(M^{-1}BM) \\ &= detM^{-1} \cdot detB \cdot detM. \end{aligned}$$

Pela propriedade 2.4 temos que $detM^{-1} = \dfrac{1}{detM}$, assim:

$$\begin{aligned} detA &= \frac{1}{detM} \cdot detB \cdot detM \\ &= detB. \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.14. *Sejam A e B matrizes semelhantes, então A é invertível se, e somente se, B também for invertível.*

Demonstração: Se A e B são semelhantes, temos que existe uma matriz invertível M tal que $A = M^{-1}BM$, ou equivalente, $B = MAM^{-1}$. Suponhamos que A seja invertível. Afirmamos que $(MAM^{-1})^{-1} = MA^{-1}M^{-1}$ é matriz inversa de B. De fato:

$B(MA^{-1}M^{-1}) = (MAM^{-1})(MA^{-1}M^{-1}) = MA^{-1}(MM^{-1})AM^{-1} = I$

e

$(MA^{-1}M^{-1})B = (MA^{-1}M^{-1})(MAM^{-1}) = MA^{-1}(MM^{-1})AM^{-1} = I.$

Isto mostra que se A é invertível, então B é invertível. A recíproca segue raciocínio análogo. □

Propriedade 2.15. *Duas matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.*

Demonstração: Se A e B são semelhantes, existe uma matriz invertível M tal que $A = M^{-1}BM$. Por definição, o polinômio característico de B é dado por $p_B(\lambda) = det(B - \lambda I)$.

Desta forma:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= det(M^{-1})det(B - \lambda I)det(M) \\ &= det[M^{-1}(B - \lambda I)M] \\ &= det(M^{-1}BM - \lambda M^{-1}M) \\ &= det(A - \lambda I) \\ &= p_A(\lambda). \end{aligned}$$

□

Propriedade 2.16. *Quaisquer duas matrizes semelhantes, têm o mesmo traço matriz.*

Demonstração: Segue da Propriedade 2.15, pois o traço de uma matriz n x n é o valor oposto ao do coeficiente do termo de grau *n-1* do seu polinômio característico (conforme a Propriedade 2.7) e como $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, o coeficiente do termo de grau *n-1* são iguais. Portanto o traço da matriz A é igual o traço da matriz B. □

Capítulo 3

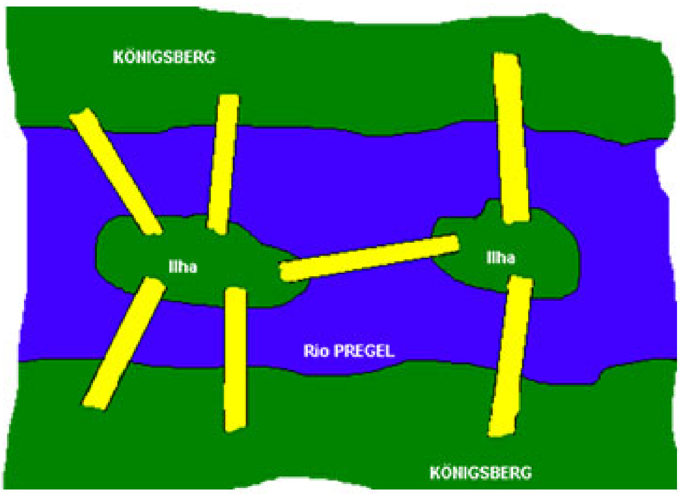
Teoria dos Grafos

Neste capítulo utilizaremos como fonte: Boaventura [3], Jurkiewicz [4], Santos [28] e Tomei [32].

A Teoria dos Grafos é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto, os grafos são estruturas que consistem em vértices e arestas que ligam os referidos vértices.

Por volta do ano de 1700, um enigma mobilizou a pequena cidade de Königsberg, uma importante cidade da Prússia, localizada ao norte da Europa, próximo à costa do Mar Báltico, e que atualmente é chamada de Kaliningrad. Tratava-se do desafio das sete pontes de Königsberg. A cidade possuía duas ilhas cortada pelo Rio Pregel e, na época, seis pontes ligavam às margens e outra fazia a ligação das duas ilhas entre si.

Figura 3.1: As setes pontes de Königsberg

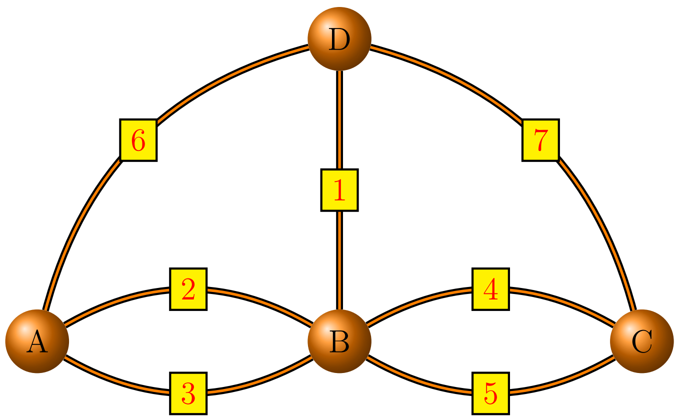


Fonte : http : //extensao.cecierj.edu.br/material_didatico/mat609/html/mat_aula01.html

Aproximadamente em 1735, os moradores de Königsberg se desafiaram com o seguinte problema: como seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das setes pontes e retornar ao ponto de partida? Na época, foi o matemático Leonhard Euler quem decifrou o enigma, revelando ser impossível tal façanha, da resposta ao enigma, de acordo com Jurkiewicz [4], surgiu a Teoria da Grafos.

Euler abstraiu o problema na Teoria dos Grafos representado pela Figura 3.2 abaixo:

Figura 3.2: Grafo das setes pontes de Königsberg



Fonte: http://texample.net/tikz/examples/bridges-of-konigsberg/

Transformando os caminhos em linhas e suas intersecções em pontos, o problema de atravessar as setes pontes é, agora, substituído pelo problema de traçar o grafo em questão sem levantar a ponta do lápis do papel e sem passar duas vezes ou mais na mesma linha.

Euler provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições. Ele percebeu que só era possível se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde se saísse um número ímpar de caminhos. Se houvesse dois pontos com caminhos ímpares, seria ao início e ao final do percurso. Se todos os pontos tivessem caminhos pares, pode-se (e deve -se) iniciar e terminar o percurso no mesmo ponto, podendo esse ser qualquer ponto do grafo.

3.1 Algumas noções de Grafos

Um grafo que denotemos por $G(V, A)$, consiste de um conjunto não vazio chamados V cujos elementos são chamado vértices, nós ou pontos e o valor n $= |V|$ é a **Ordem do Grafo** (número de vértices de G) e A é um conjunto de arestas, arcos ou ligações e o valor m = $|A|$ (tamanho do grafo). G é uma função que associa cada aresta a um vértice ou a um par não ordenado de vértices, chamados de suas extremidades. Dizemos que cada aresta liga ou conecta as extremidades.

Os grafos podem ser orientados ou não, um **Grafo Orientado** $G(V, A)$ é constituído por um conjunto de V não vazios e um conjunto A de pares ordenados de elementos de V. Podem ser desenhados através de uma diagrama onde os vértices são representados por pontos e cada aresta é representada por uma linha ligando dois vértices com uma seta apontando o sentido, caso a aresta não tiver a seta indicando o sentido o grafo é chamado de **Grafo Não Orientado**, conforme Figura 3.3.

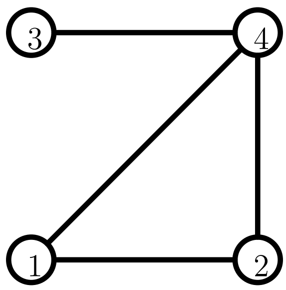
Figura 3.3: Grafos Não Orientado e Orientado

Uma ligação que envolver apenas um vértice é chamada de *Laço*.

Um grafo é denominado **Simples** quando ele não tem laços e apenas uma aresta ligando dois vértices.

Quando dois vértices participam de uma ligação são denominados **Adjacentes**. Observamos:

Figura 3.4: Grafo de Ligações



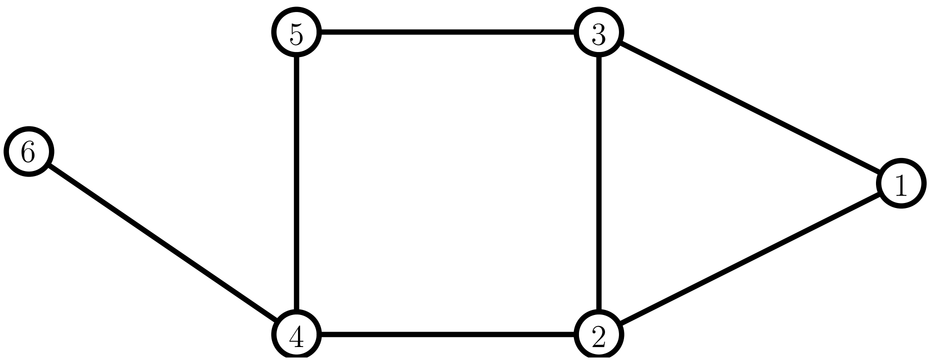
A Figura 3.4 apresentam um grafo não orientado simples, sendo que cada aresta liga os vértices dizendo que eles são adjacentes. Desta forma, o vértice 4 é adjacente aos vértices 1, 2 e 3; o vértice 2 é adjacente aos vértices 1 e 4; o vértice 3 é adjacente ao vértice 4; os vértices 1 e 2 não são adjacentes ao vértice 3.

Representaremos que o vértice x é adjacente ao vértice u da seguinte forma:

$$x \sim u.$$

Um **Caminho** em um grafo não orientando simples, consiste numa sequência finita de vértices $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ começando e terminando por vértices, tal que cada aresta é incidente ao vértice que a precede e ao que sucede, de modo que cada par de vértice v_i, v_{i+1} sejam adjacentes. Se nenhum dos vértices no caminho se repete é chamado de **Caminho Simples**. Dois caminhos que não tenham nenhum vértice em comum, exceto o primeiro e o último, são ditos **Caminhos Independentes**. Considerando cada aresta como um caminho a percorrer, define-se como **Comprimento de Um Caminho** o número de arestas a serem percorridas para o deslocamento de um vértice para outro. Consideremos o grafo G:

Figura 3.5: Grafos de Caminhos



O grafo G da Figura 3.5 é composto pelo conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o conjunto de arestas $A = \{(1, 2), (1, 3)(2, 3), (2, 4)(3, 5), (4, 5), (4, 6)\}$. O conjunto de vizinhos de um vértice, consiste de todos os vértices adjacentes a ele. No grafo G da figura 3.5 temos:

- Vértice 1 é adjacente aos vértices 2 e 3;
- Vértice 2 é adjacente aos vértices 1, 3 e 4;
- Vértice 3 é adjacente aos vértices 1, 2 e 5;
- Vértice 4 é adjacente aos vértices 2, 5 e 6;
- Vértice 5 é adjacente aos vértices 3 e 4;
- Vértice 6 é adjacente ao vértice 4.

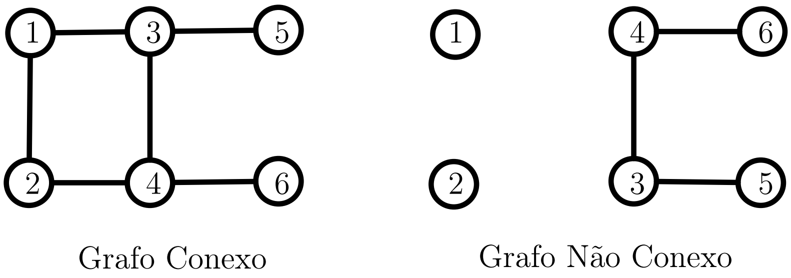
Ainda no grafo G da Figura 3.5, $(1, 2, 3, 5, 4, 2, 1)$ é um caminho de comprimento 6, e $(1, 3, 5)$ é um caminho simples de comprimento 2.

O caminho mais curto entre dois vértices em grafo conexo é chamado de **Distância entre os Vértices**.

Exemplo 3.1. No grafo da Figura 3.5 a distância entre os vértices 1 e 6 é igual a três, pois o menor caminho percorrido é $(1, 2, 4, 6)$, ou seja, tendo três arestas percorridas.

Um grafo é dito **Grafo Conexo** se há pelo menos um caminho ligando cada par de vértice. Caso contrário o grafo é dito **Não Conexo**.

Figura 3.6: Grafo Conexo e Não Conexo

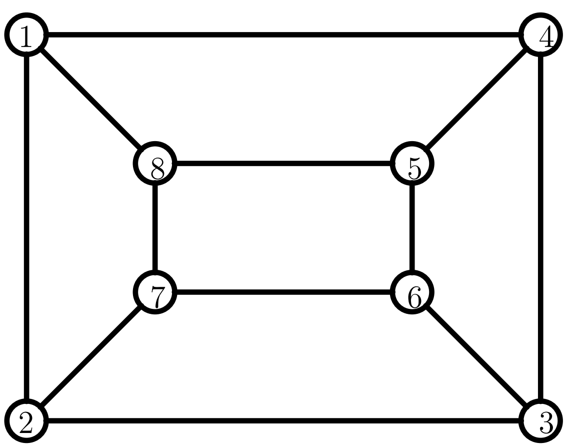


O **Grau** de um vértice (representado por d) é o número de arestas incidentes nele.

Observando o Grafo 3.4, notemos que o grau do vértice 4 é três e o grau do vértice 2 é dois.

Quando todos os vértices de um grafo tem o mesmo grau ele é dito **Grafo Regular**. O grafo da Figura 3.7, por exemplo, é dito grafo regular de grau três, pois todos os vértices tem grau 3.

Figura 3.7: Grafo Regular de grau 3

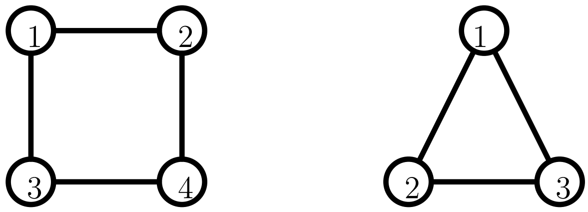


Um vértice é chamado **Ímpar**, se partem desse vértice um número ímpar de arestas, e chamado de **Vértice Par**, se partem número par de arestas desse vértice.

Um **Ciclo** de um grafo é um caminho fechado em que o primeiro e o último vértice coincidem, mas nenhum outro vértice é repetido.

Um ciclo de comprimento quatro com vértices diferentes é chamado de quadrilátero ou quadrado. Um ciclo de comprimento três com vértices diferentes é chamado de triângulo.

Figura 3.8: Grafos de Ciclos



Ciclo de comprimento 4 Ciclo de comprimento 3

Na Figura 3.8, o caminho do quadrado pode ser $(1, 2, 3, 4, 1)$ e o do triângulo $(1, 2, 3, 1)$. Segundo Boaventura [3], há diversas representações matriciais de estruturas de grafo e o seu uso, está associado à necessidade da realização de cálculos envolvendo dados estruturais, sendo a mais utilizada a **Matriz Adjacência**. A matriz adjacência é uma matriz quadrada A de ordem n (mesma ordem do grafo) na qual associa cada linha e cada coluna a um vértice, sendo que cada entrada a_{ij} é o número de arestas que ligam o vértice i ao vértice j.

Definição 3.1. Dado um grafo $G(V, A)$ com n vértices, sua matriz adjacência é a matriz $Adj(G) = [a_{ij}]_{n\times n}$, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, se\{i, j\} \in A \\ 0, caso\ contrário \end{cases}.$$

Lema 3.1. *A matriz de adjacência de um grafo não orientado simples é simétrica, com zeros na diagonal principal.*

Demonstração: Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ a matriz de um grafo G. Uma vez que só consideramos grafos não orientados simples, temos $a_{ii} = 0$, para $1 \leq i \leq n$. Por outro lado, $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq n$, temos:

$$a_{ij} = 1 \Longleftrightarrow \{i, j\} \in A \Longleftrightarrow \{j, i\} \in A \Longleftrightarrow a_{ji} = 1;$$

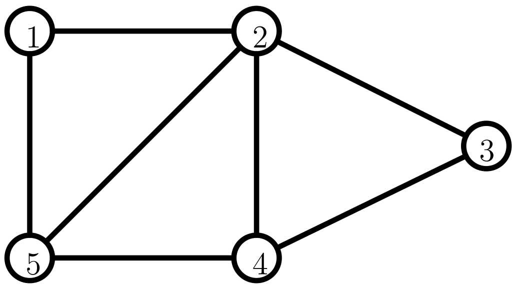
Portanto, a matriz de adjacência de G é simétrica. $\square$

O mesmo não acontece quando o grafo é orientado.

As entradas a_{ij} da matriz de adjacência, correspondem a valores nulos associados à ausência de ligações e valores não nulos associados à presença de ligações.

Exemplo 3.2. Seja um grafo $G(V, A)$ com vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e com arestas $A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3)(2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$, representada graficamente da seguinte maneira:

Figura 3.9: Grafo do Exemplo 23



A matriz adjacência que representa o grafo da Figura 3.9 é:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2 Número de Caminhos Possíveis de Tamanho n

A contagem de caminhos significa saber quantos caminhos distintos de comprimento n saindo do vértice i até o vértice j. Por exemplo, no grafo da Figura 3.9 vamos determinar o número de caminhos distintos para ir do vértice i para o vértice j com comprimento igual a 2, denotado por a_{ij}^2, o elemento em A^2.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

De acordo com Boaventura [3], por exemplo, o elemento $a_{41}^2 = 2$, ou seja, temos 2 caminhos distintos para ir do vértice 4 para o vértice 1 de comprimento 2, sendo eles: $(4, 2, 1)$ e $(4, 5, 1)$ que podemos observar no grafo da Figura 3.9.

Para saber o número de caminhos que conectam os vértices i e j e conforme o comprimento desejado, o seguinte teorema a respeito da matriz adjacência pode ser enunciado

Teorema 3.1. *Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ a matriz de adjacência associada ao grafo $G(V, A)$ de n vértices, rotulados pelos números $1, 2, 3, \ldots, n$. Para $m \in \mathbb{N}$, o número de caminhos de comprimento m ligando os vértices i e j é a entrada (i, j) da matriz A^m.*

Demonstração: Seja A a matriz de adjacência, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pela Definição 3.1 cada a_{ij} só pode ser 1, se os vértices são adjacentes, e 0, se não adjacentes. Assim, a própria matriz de adjacência conta os caminhos de comprimento $m = 1$.

Agora, supondo que o resultado seja válido m= *k-1*. Devemos mostrar que o resultado é válido quando $m = k$. Consideremos a matriz $A^{(k-1)}$, como:

$$A^{(k-1)} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por hipótese de indução, a quantidade de caminhos de comprimento *k -1* ligando o vértice i ao vértice j é dada pelo valor que aparece na posição b_{ij} da matriz B.

Note o que acontece quando $m = k$:

$$A^{(k)} = A^{(k-1)}A = BA = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Analisando o elemento c_{11} temos que:

$$c_{11} = b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + \cdots + b_{1n} \cdot a_{n1}.$$

Cada b_{1j} conta a quantidade de caminhos de comprimento $k-1$ ligando os vértices 1 e j. Por outro lado, o elemento a_{j1} nos diz se há ou não um caminho (de comprimento 1) conectando o vértice j ao vértice 1. Assim, o produto $b_{1j}a_{j1}$ conta o número de caminhos de comprimento k ligando o vértice 1 a si mesmo, obtidos a partir de um caminho de comprimento $k-1$ ligando os vértices 1 e j (observe que tal produto será igual a zero, se os vértices 1 e j não forem adjacentes). Sendo assim, o elemento c_{11} nos diz exatamente que podemos percorrer um caminho de comprimento k, começando e acabando no vértice 1.

De maneira totalmente análoga, podemos concluir que cada c_{ij} contará os caminhos de comprimento k que inicia no vértice i e termina em j.

Portanto cada elemento $c_{ij}da$ matriz A^k, nos diz quantos caminhos distintos de comprimento k existem conectando os vértices i ao j. $\square$

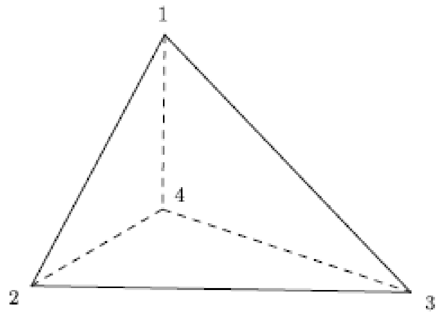
Pelo Teorema Espectral 2.2, temos que as matrizes adjacência de uma grafo são diagonalizáveis, portanto seu polinômio mínimo tem todas as raízes distintas. Daí aplicando a Propriedade 2.9, temos:

Proposição 3.1. *Qualquer potência de A, A^m pode ser expressa como combinação linear de $I, A, \ldots, A^{d-1}$. Ou seja:*

$$A^m = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{d-1}A^{d-1}.$$

Exemplo 3.3. Calcular quantos caminhos de comprimento 100 vão do vértice 1 ao 3 na Figura 3.10 abaixo.

Figura 3.10: Tetraedro



$Fonte : www.sbm.org.be/docs/coloquios/NE - 3 - 06.pdf$

Solução: Pelo Teorema 3.1 basta calcular a_{13}^{100} de A^{100} , para isso precisamos determinar A^{100}.

A matriz adjacência associada a esse grafo é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar o polinômio característico vamos calcular o determinante de:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Utilizando propriedade de determinantes permutamos a primeira coluna com a segunda coluna, logo:

$$det(A - \lambda I) = - \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Podemos utilizar a Regra de Chió. Nesse caso, obtemos uma matriz B de ordem 3, tal que det $(A-\lambda I)$= - detB.

• Inicialmente suprimimos a 1ª linha e a 1ª coluna de $(A-\lambda I)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

• Subtraímos de cada elemento restante a_{ij} o produto dos elementos suprimidos de a_{1j} e a_{i1}:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1-[-\lambda\cdot(-\lambda)] & 1-[1\cdot(-\lambda)] & 1-[1\cdot(-\lambda)] \\ 1-[-\lambda\cdot 1] & -\lambda-[1\cdot 1] & 1-[1\cdot 1] \\ 1-[-\lambda\cdot 1] & 1-[1\cdot 1] & -\lambda-[1\cdot 1] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda^2 & 1+\lambda & 1+\lambda \\ 1+\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 0 & -\lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda^2 & 1+\lambda & 1+\lambda \\ 1+\lambda & -(1+\lambda) & 0 \\ 1+\lambda & 0 & -(1+\lambda) \end{bmatrix}.$$

Assim: $det(A-\lambda I) = -\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & 1+\lambda & 1+\lambda \\ 1+\lambda & -(1+\lambda) & 0 \\ 1+\lambda & 0 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}.$

Utilizando a Regra de Sarrus, temos que:

$$
-\begin{vmatrix}
1-\lambda^2 & 1+\lambda & 1+\lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda \\
1+\lambda & -(1+\lambda) & 0 & 1+\lambda & -(1+\lambda) \\
1+\lambda & 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda & 0
\end{vmatrix} = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3.
$$

Assim o polinômio característico é: $P(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$.

Que se fatora como:

$P(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^3$.

Assim: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores da matriz adjacência.

Sendo o polinômio mínimo de A de segundo grau. Pela Propriedade 2.9 toda expressão polinomial em A pode ser reduzida a uma do primeiro grau, ou seja:

Como A é simétrica, diagonalizável, e já calculamos seus autovalores: -1 e 3. Precisamos então encontrar um polinômio que leva 3 a 3^m e - 1 a $(-1)^m$.

Para isso, um polinômio $p(x) = a_1 x + a_0$ resolve o nosso problema, devemos calcular o valor de a e b, de maneira que:

$$
\begin{cases} a_1 \cdot 3 + a_0 = 3^m \\ a_1 \cdot (-1) + a_0 = (-1)^m \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3a_1 + a_0 = 3^m \\ -a_1 + a_0 = (-1)^m \end{cases} .
$$

Resolvendo o sistema, encontramos,

$$
a_1 = \frac{3^m - (-1)^m}{4} \text{ e } a_0 = \frac{3^m + 3 \cdot (-1)^m}{4}.
$$

Aplicando o polinômio a matriz A pela Proposição 3.1 em que:

$$
A^m = a_1 A + a_o I.
$$

Como queremos A^{100}, logo:

$$
A^{100} = \frac{3^{100} - (-1)^{100}}{4} \cdot A + \frac{3^{100} + 3 \cdot (-1)^{100}}{4} \cdot I.
$$

Assim basta calcular a equação e observar o valor do elemento a_{13}^{100} que será a quantidade de caminhos distintos que temos do vértice 1 até o vértice 3, com comprimento igual a 100.

Capítulo 4

Teorema da Amizade

Supondo uma reunião onde todas as pessoas se conhecem, ou sorteando pessoas por acaso, onde elas podem se conhecer ou não, o que podemos afirmar sobre os grupos formados por essas pessoas? Nessa linha de análise apresentaremos o Teorema da Amizade, que traz suas raízes aos primeiros dias da teoria de grafos, é bem conhecido principalmente no idioma inglês.

Ao longo das últimas décadas contamos com várias demonstrações do Teorema da Amizade, conforme comprovado em pesquisas de canais digitais de busca pelo nome original em inglês *Friendship Theorem* . A maioria dos autores reconhece que primeira demonstração publicada deu-se pelos Matemáticos Paul Erdös, Alfréd Rényi e Vera T. Sós em 1966 [10] em uma revista húngara, embora apenas como um teorema não nomeado. O teorema foi originalmente apresentado em linguagem muito incomum.

Teorema 4.1. *(Erdös) Se G é um grafo em que quaisquer dois vértices distintos são conectados por um caminho de comprimento 2 e que não contém qualquer ciclo de comprimento 4, então $n = 2k + 1$ e G consiste em triângulos que têm um vértice em comum.*

Teorema 4.2. *Se G é um grafo em que quaisquer dois vértices distintos têm exatamente um vizinho comum, então G tem um vértice que une todos os outros vértices.*

Traduzido para linguagem da teoria dos grafos temos uma versão que se assemelha muito mais a afirmação de Wilf do Teorema da Amizade.

Hilbert Wilf [35], em 1971 forneceu uma demonstração geométrica do Teorema da Amizade.

Em 1972, Judith Longyear e T.D. Parsons [20] desenvolveram uma prova baseada em contagem de vizinhos, caminhadas e ciclos de grafos regulares. O artigo também incorpora uma extensão na teoria dos conjuntos e tanto na prova de Wilf e Longyear fazem referência à prova inédita apresentada por Graham Higman em forma de palestra na conferência de "Combinatorial Mathematics and Its Applications", Oxford, em 1969 sobre combinatória, mas não há registro impresso desse raciocínio.

No ano de 1983, J M. Hammersley [13] em uma conferência forneceu uma prova que envolveu técnicas numéricas complicadas evitando o uso de autovalores e ainda estendeu o teorema da amizade ao que ele chama de "Problema do Amor", publicado em "The Friendship Theorem and The Love Problem".

Em 2001, Aigner e Ziegler mencionaram o Teorema da Amizade em *The Book* [1] como um dos maiores teoremas de Erdös de todos os tempos. Em *Intrudoction to Graph Theory* no ano de 2001, West [34] inclui uma prova semelhante à de Longyear e Parsons, contanto vizinhos e ciclos comuns.

Craig Huneke [14] afirma ter ouvido sobre o teorema em 1975, criando uma prova baseada em contagem de comprimento, mas somente em 2002 publicou no *American Mathematical Monthly* duas provas, sendo uma mais combinatória e uma que articula combinações e álgebra linear.

Em 2005, Katie Leonard [18] trouxe em sua dissertação uma demonstração idêntica a de Wilf.

Em 2016, Elizabeth Walker [33] em seu artigo, explorou uma prova do teorema da amizade, seguido de duas extensões. A primeira extensão diz respeito ao número de vizinhos comuns que um nó deve ter. O segundo traz a condição de amizade, de modo que qualquer dois nós não podem ter um vizinho comum ou podem ter um vizinho comum.

Ainda disponível em catalão o artigo de Josep Brunat [6], realiza uma demonstração utilizando métodos elementares, baseado neste artigo, este trabalho realiza a primeira demonstração do teorema.

No Brasil, em 1979, Claúdio Leonardo Lucchesi, [21], apresentou uma demonstração utilizando contagens e grafos. Mario Casarin e Carlos Tomei [31], em 1987 publicaram na revista Matemática Universitária, um artigo contendo uma demonstração elementar do Teorema. Já em 2007 Gleicy T.F. Cézar [8] em sua monografia apresentou uma demonstração utilizando grafos e álgebra baseada na demonstração de Brunat.

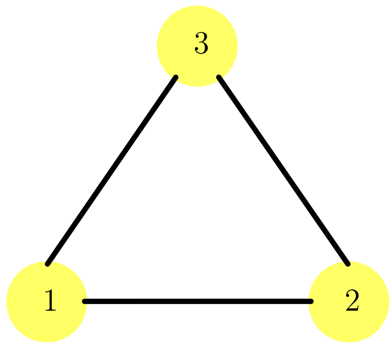
Consideremos uma reunião em que cada duas pessoas têm exatamente um amigo em comum, segundo Lucchesi [21] uma relação de amizade é simetrica, ou seja, a pessoa a é amiga da pessoa b, logo a pessoa b é amiga da pessoa a e irreflexiva (ninguém conhece a si mesmo, infelizmente talvez).

Analisando todas as versões apresentadas, o Teorema da Amizade na versão reunião é enunciado como:

Teorema 4.3. *Numa reunião com n pessoas onde quaisquer duas pessoas tem exatamente um amigo comum, há alguém na reunião que conhece todas as pessoas.*

Se a reunião é composta por apenas três pessoas, logo a solução do problema é trivial, pois nesta situação cada uma conhece uma das três pessoas que conhecem as outras, logo grafo associado é um triângulo, conforme o grafo da Figura 4.1.

Figura 4.1: Grafo da reunião composta por 3 pessoas



Assim, resta resolver os casos que temos mais do que 3 pessoas, ou seja:

Teorema 4.4. *Numa reunião com $n \geq 4$ pessoas onde quaisquer duas pessoas tem exatamente um amigo comum, há alguém na reunião que conhece todas as pessoas.*

Demonstraremos que esse alguém que conhece todas as pessoas na reunião é única, ou seja:

Corolário 4.1. *Numa reunião com $n \geq 4$ pessoas onde quaisquer duas pessoas tem exatamente um amigo comum, há uma* ***única*** *pessoa da reunião que conhece todas as pessoas.*

A matriz de adjacência do problema da amizade satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 4.1. *A matriz é simétrica com todos os elementos sendo 0 ou 1 e os elementos da diagonal principal são todos zeros.*

Propriedade 4.2. *A quantidade de 1's na linha i representa o grau do vértice i ou número de amigos de i na reunião.*

O Teorema da Amizade no entanto, segundo Brunat [6], pode ser apresentado em outras duas versões: grafos e matricial. Na versão com grafos:

Teorema 4.5. *Se $G(V, A)$ é um grafo com $n = |V| \geq 4$ e tal que para quaiquer dois vértices diferentes x e y existe um único vértice z tal que $x \sim z$ e $y \sim z$, há um **único** vértice u tal que $x \sim u$ para todo $x \in V$ - $\{u\}$.*

Na versão matricial:

Teorema 4.6. *Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz simétrica de ordem ≥ 4 com todos as entradas sendo 0 ou 1, com zeros na diagonal principal e para todo i e j com $i \neq j$, há um único k, tal que, $a_{ik} = a_{jk} = 1$. Então, há uma única linha de 1's exceto o elemento da diagonal principal.*

Assim temos a seguinte matriz:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Para demonstração do Teorema da Amizade precisaremos dos dois seguintes lemas:

Lema 4.1. *Seja:* $A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 & & \cdots & & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & & \cdots & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 & \cdots & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & t & \vdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & t & \vdots & 1 \\ \vdots & & & & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & \cdots & & & t \end{bmatrix}_{n\times n}.$

Então $detA = (t-1)^{n-1}(t+n-1)$.

Demonstração:

Considere as seguintes operações em A:

Adicionar na linha 1 a linha 2 multiplicada por -1.

Adicionar na linha 2 a linha 3 multiplicada por -1.

Adicionar na linha 3 a linha 4 multiplicada por -1.

Adicionar na linha 4 a linha 5 multiplicada por -1.

Assim por diante até a linha n-1.

Adicionar na linha n-1 a linha n multiplicada por -1.

Assim teremos a seguinte matriz:

$$B = \begin{bmatrix} t-1 & 1-t & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & t-1 & 1-t & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 1-t & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 & 1-t & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 & 1-t & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & t-1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & t-1 & 1-t \\ 1 & 1 & 1 & & \cdots & & 1 & t \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Pelo Teorema de Jacobi temos que $detA = detB$.

Observamos que em todas as linhas (exceto na última linha) da matriz B tem o fator (t-1). Aplicando a propriedade 2.2, temos que:

$$detA = (t-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & -1 & & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & & \cdots & & 1 & t \end{vmatrix}_{n \times n}$$

$$= (t-1)^{n-1} \cdot \, detC, \text{ sendo a } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & & \cdots & & 1 & t \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Para calcular o determinante da matriz C (como $c_{11} = 1$), aplicando a Regra de Chió, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & & \cdots & & 1 & t \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1-(0\cdot(-1)) & -1-(0\cdot 0) & 0-(0\cdot 0) & \cdots & 0-(0\cdot 0) \\ 0-(0\cdot(-1)) & 1(0\cdot 0) & -1(0\cdot 0) & \vdots & 0(0\cdot 0) \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1(0\cdot 0) & -1(0\cdot 0) \\ 1-(1\cdot(-1)) & 1-(1\cdot 0) & \cdots & 1-(1\cdot 0) & t-(1\cdot 0) \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)},$$

$$\text{obtemos a matriz } D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & & \cdots & & 1 & t \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

Logo, $detC = detD$.

Novamente fixando a primeira linha, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & & \cdots & & 1 & t \end{bmatrix}.$$

Aplicando a Regra de Chió na matriz acima, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1-(0\cdot(-1)) & -1-(0\cdot 0) & 0-(0\cdot 0) & \cdots & 0-(0\cdot 0) \\ 0-(0\cdot(-1)) & 1(0\cdot 0) & -1(0\cdot 0) & \vdots & 0(0\cdot 0) \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1(0\cdot 0) & -1(0\cdot 0) \\ 2-(1\cdot(-1)) & 1-(1\cdot 0) & \cdots & 1-(1\cdot 0) & t-(1\cdot 0) \end{bmatrix}_{(n-2)\times(n-2)},$$

$$\text{obtemos a matriz } E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & & \cdots & 1 & t \end{bmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}.$$

Logo, $detC = detD = detE$.

Conforme vamos reduzindo a matriz utilizando a Regra de Chió, o elemento da linha n e coluna 1, ele vai aumentando uma unidade, observemos que o valor desse elemento é o número de reduções feita mais 1, e os determinantes das matrizes de C até a matriz de ordem 2, são iguais. Aplicando $n-2$ vezes a Regra de Chió na matriz C, obtemos uma matriz de ordem 2, e o elemento da linha 2 e coluna 1 terá aumentado n - 2 vezes do valor inicial e mais o termo inicial que é igual 1, assim o elemento da linha 2 e coluna 1 é igual $n-1$, assim temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ n-1 & t \end{bmatrix}_{2\times 2},$$

calculando o determinante dessa matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ n-1 & t \end{vmatrix}_{2\times 2} = t - (-n+1) = t + n - 1.$$

Portanto $detC = t + n - 1$ e ainda:

$$detA = detB = (t-1)^{n-1} \cdot detC$$

$$detA = (t-1)^{n-1} \cdot (t+n-1).$$

□

Lema 4.2. *Se $d \in \mathbb{Z}$, com $d > 2$, então $\dfrac{d}{\sqrt{d-1}} \notin \mathbb{Z}$.*

Demonstração:

Supondo primeiro que $(d-1)$ é um quadrado perfeito. Nesse caso, $(d-1)$ e $\sqrt{(d-1)}$ têm os mesmos divisores próprios. Assim:

$$m.d.c.(d, \sqrt{d-1}) = m.d.c.(d, d-1) = 1.$$

Logo $\sqrt{d-1}$ não dividem d . Portanto, neste caso $\dfrac{d}{\sqrt{d-1}}$ é um racional e não inteiro.

Suponha agora que $(d-1)$ não é um quadrado perfeito. Sabemos que se $q_1, \ldots, q_s$ são diferentes números primos, então $\sqrt{q_1 \cdot \ \ldots \ \cdot q_s}$ é irracional. A prova é fácil, similar a de $\sqrt{2}$ que é irracional. Seja $d - 1 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ \ldots \ \cdot p_r^{2\alpha_r} \cdot q_1^{2\beta_1+1} \cdot \ \ldots \ \cdot q_s^{2\beta_s+1}$ a sua decomposição por fatores primos, como $d-1$ não é um quadrado perfeito, $s \geq 1$. Então,

$\sqrt{d-1} = c \cdot \sqrt{q_1 \cdot \ \ldots \ \cdot q_s}$ para algum inteiro c. Se $\sqrt{d-1}$ for racional, $\sqrt{q_1 \cdot \ \ldots \ \cdot q_s}$ seria racional que não é o caso. Portanto $\sqrt{d-1}$ é irracional e isso implica que $\dfrac{d}{\sqrt{d-1}}$ não é inteiro. □

4.1 Demonstração do Teorema através da Álgebra Linear e Grafos

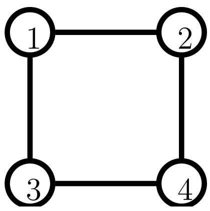
Seja $G = (V, A)$ um grafo que satisfaz a hipótese do Teorema 4.5, ou seja, com um mínimo de quatro vértices e de modo que, para cada dois vértices x e y diferentes há um outro vértice z que é o único adjacente a x e a y. Assim sendo, queremos mostrar que há um único $u \in$ V tal que x $\sim$ u para todo x $\in$ V $-$ $\{u\}$. Vamos dividir esta demonstração em oito etapas.

Etapa 1. O grafo G não tem ciclos de comprimento 4.

Demonstração:

Suponhamos que os vértices $1, 2, 3$ e 4, sejam os vértices do grafo G de ciclo de comprimento 4, ou seja, G é um grafo de ciclo de comprimento 4, conforme a representação abaixo:

Figura 4.2: Grafo da Etapa 1



Considerando os vértices 1 e 3 da figura 4.2, temos como exemplo:

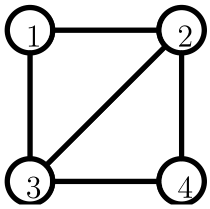
O vértice 2 é adjacente ao vértice 1 e o vértice 4 adjacente ao vértice 3, ou seja, os vértices 2 e 4 são respectivamente adjacentes ao par 1 e 3, contradizendo a hipótese do Teorema 4.5 que deveria existir pelo menos um vértice adjacente qualquer a um par de vértices, portanto G não possui ciclos de comprimento 4. □

Etapa 2. Cada aresta pertence exatamente a um triângulo.

Demonstração:

Suponhamos que os vértices 2 e 3 que formam a aresta (2,3) pertencem aos triângulos de vértice (1, 2, 3) e (2, 3, 4), logo a única representação possível é o grafo da Figura 4.3.

Figura 4.3: Grafo da Etapa 2



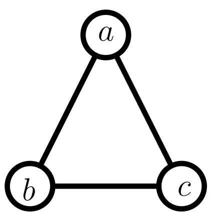
Notemos que os vértices $1, 2, 3, 4$ formam um ciclo de comprimento 4, contradizendo a demonstração da Etapa 1, portanto cada aresta só pode pertencer a exatamente um único triângulo. $\square$

Etapa 3. Todo vértice tem um grau par e maior ou igual a 2.

Demonstração:

Sejam $a \in V$ e $b \in V$ adjacente ao vértice a. Então para o par ab existe um único vértice c tal que, a adjacente a c e b ajacente a c. Lembrando que pela Etapa 2, a aresta ac pertence a um único triângulo, ou seja:

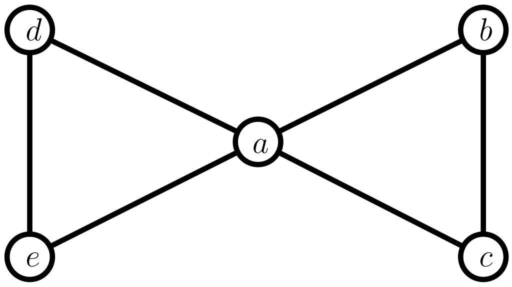
Figura 4.4: Grafo 1 da Etapa 3



Se mais nenhuma aresta sair de a, logo o grau do vértice a é dois, que é par.

Por outro lado, se temos mais alguma aresta saindo do vértice a, como por exemplo a aresta ad. Então conforme visto na Etapa 2 ela pertence a um único triângulo, logo teremos um vértice e sendo $e \neq b$ e $e \neq c$ e pela Etapa 1 não podemos ter um ciclo de comprimento 4 como *abde* ou *acde*, logo temos dois triângulos *abc* e *ade*, assim o grau do vértice a será quatro e o grau dos vértices b,c,d,e será igual a dois para cada, conforme o grafo da Figura 4.5:

Figura 4.5: Grafo 2 da Etapa 3



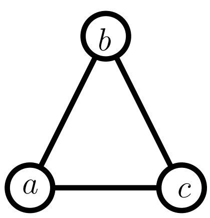
Notemos então que a cada aresta nova saindo do vértice a temos um triângulo, cujas arestas são separadas das arestas dos triângulos anteriores, tendo novamente um número par de arestas saindo do vértice a, deixando o grau de a par, e para os demais vértices grau igual à dois. Como temos um número finito de vértices, logo só podemos ter um número par de arestas saindo do vértice a, e sendo a um vértice independente sempre manterá seu grau um número par e demais com grau dois, assim todos os vértices tem grau par e maior ou igual a dois. $\square$

Etapa 4. Existe um vértice de grau maior ou igual a 4.

Demonstração:

Consideremos uma aresta ab conforme a Etapa 2, existe um único triângulo abc, sendo que $a,b,c \in V$.

Figura 4.6: Grafo 1 Etapa 4



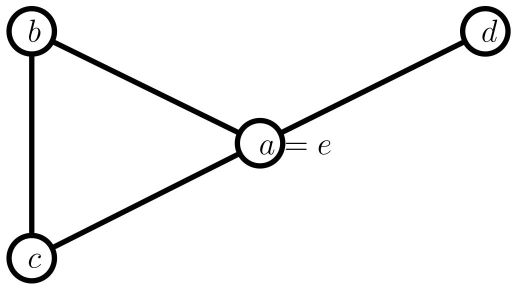
Assim o grau dos vértices a,b,c é igual a dois pela Etapa 2. Como queremos um vértice n de grau maior ou igual a 4, existe um vértice d diferente dos anteriores, para aresta ad

existe um único vértice e de maneira que $e \sim a$ e $e \sim d$, temos 4 casos possíveis para o vértice e:

- $e = a$;
- $e = b$;
- $e = c$;
- O vértice e ser diferente dos vértices a,b,c.

Primeiro Caso: Se $e = a$, observamos a Figura 4.7:

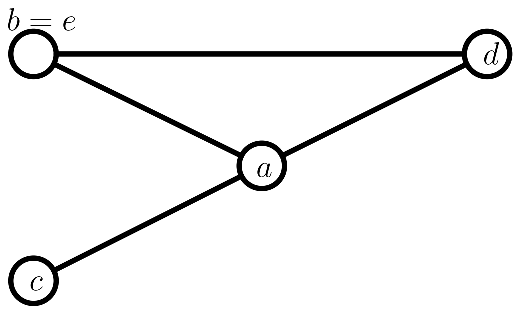
Figura 4.7: Grafo do Primeiro Caso da Etapa 4



Notemos que $d(a) = 3$.

Segundo Caso: Se $e = b$, observamos na Figura 4.8:

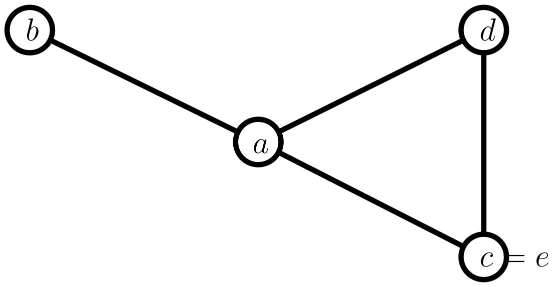
Figura 4.8: Grafo do Segundo Caso da Etapa 4



Assim o $d(a) = 3$, pela Etapa 2 não temos a aresta bc.

Terceiro Caso: Se $e = c$, observamos a Figura 4.9

Figura 4.9: Grafo do Terceiro Caso da Etapa 4

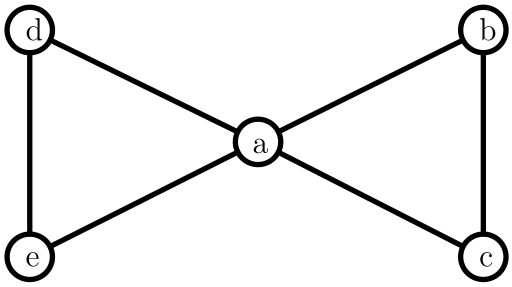


Assim o $d(a) = 3$, pela Etapa 2 não temos a aresta cb.

Quarto Caso : O vértice e ser diferente dos vértices a,b,c.

Como o vértice e é adjacente a e d, teremos um novo triângulo ade, ou seja:

Figura 4.10: Grafo do Quarto Caso da Etapa 4



Notemos na Figura 4.10 o $d(a) = 4$.

Nos três primeiros casos, sempre algum vértice a,b ou c terá grau maior ou igual três, contradizendo a Etapa 3. No quarto caso pelo menos o vértice a terá um grau maior ou igual a quatro e pela Etapa 3 o vértice a, b e c tem grau maior ou igual a 2. Portanto existe um vértice de grau maior ou igual a 4. $\square$

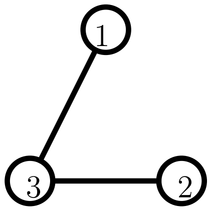
Etapa 5. Cada dois vértices diferentes estão à distância de 1 ou 2.

Demonstração:

Sejam os vértices 1 e 2 $\in V$, logo temos duas opções de adjacência entre 1 e 2, ou seja, $1 \sim 2$ ou $1 \nsim 2$.

Se o vértice $1 \sim 2$, logo o a distância entre os vértices 1 e 2 é igual a 1. Agora se o vértice $1 \nsim 2$, então existe um vértice $3 \in V$, tal que $3 \sim 1$ e $3 \sim 2$, assim a distância entre os vértices 1 e 2 é igual a 2. Como podemos observar no grafo da Figura 4.11.

Figura 4.11: Grafo da Etapa 5



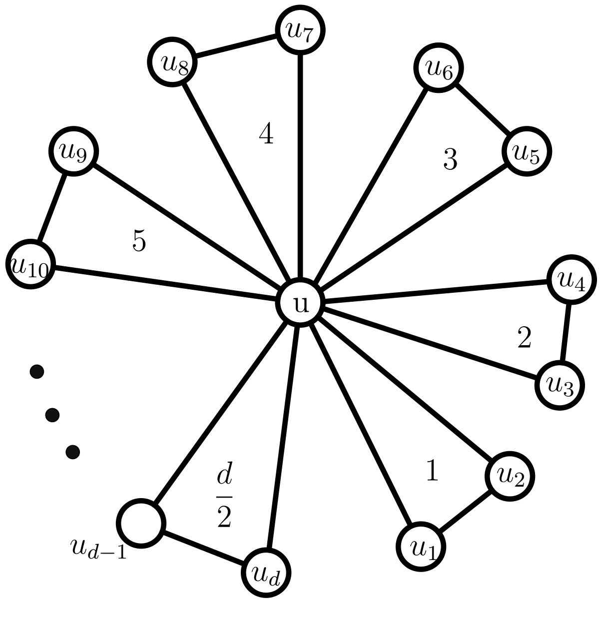
Portanto a distância entre dois vértices é 1 ou 2. □

Etapa 6. O grafo G não é regular.

Demonstração:

Suponha que G seja um grafo regular de grau d e pelas Etapas 4 e 5 d é par e $d \geq 4$. Seja n = |V|. Fixamos um vértice $u \in$ com $d(u) = d$. Exitem $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_d$ vértices adjacentes a u. Fixando a aresta uu_1, pela Etapa 2, uu_1 pertence a um único triângulo, cujo outro vértice é algum u_i com $i \neq j$. Refazendo esse processo sucessivamente e numerando os triângulos obtidos, temos $\frac{d}{2}$ triângulos, conforme o grafo abaixo.

Figura 4.12: Grafo da Etapa 6 (Moinho de Vento)



Calculando o número de vértices n, conforme a distância que eles estão do vértice u.

Observamos que existe um único vértice que, a distância do mesmo até u é zero, ou seja, o próprio u. Como temos d vértices e todos eles adjacentes a u, existem d vértices com distância igual a 1 em relação a u. Conforme a Etapa 5, exceto os vértices o $u, u_{1,2}, \cdots, u_d$, todos os demais tem distância 2 para vértice u. Considerando um vértice u_i sendo $i = 1, 2, 3, \cdots, d$, quantos vértices estão a distância 2 de u passando por u_i?

Fixe vértice u_1. Para obter um grafo regular de grau d, ou seja, $d(u_1) = d$. Temos uma aresta que faz ligação com u e uma outra por exemplo com o vértice u_2, a distância de u a u_2 é 1, logo restando $d - 2$ vértices que estará à uma distância 2 de u passando pelo vértice u_1, esse processo é análogo para os demais vértices u_i, logo temos um total d(d-2) vértices com distância 2 em relação ao vértice u.

O valor de n é definido pela soma de vértices de distância zero à u, pelos vértices de distância 1 e pelos vértices de distância 2, ou seja:

$$n = 1 + d + d(d-2) = d^2 - d + 1. \tag{4.1}$$

Sejam A $= [a_{ij}]_{n \times n}$ a matriz adjacência de G, onde será composta em cada linha uma quantidade d de 1's e uma quantidade de (n-d) zeros, temos que:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d \\ \vdots \\ d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

isto é, d é um autovalor de A.

A Propriedade 4.1, garante que a matriz A é simétrica e quadrada, então existe uma matriz quadrada ortogonal P tal que: $P^{-1}AP = P^tAP$ é uma matriz diagonal D e os elementos da diagonal principal de $P^{-1}AP$ são exatamente os autovalores de A, conforme Teorema de Espectral 2.2.

Se existe uma matriz P invertível, e uma matriz D conforme a definição 2.4 é diagonalizável, tais que $A = P^{-1}DP$, equivalente a, $D = PAP^{-1}$, assim pela definição 2.6 a matriz A é semelhante a matriz D, temos que:

$$D = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

assim $(PAP^{-1}) \cdot (PAP^{-1}) = PA^2P^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix}.$

Por outro lado, sendo que a distância entre dois vértices de G é 1 ou 2, conforme a Etapa 5, A^2 é da forma:

$$A^2 = \begin{bmatrix} d & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & d \end{bmatrix},$$

isso que dizer que para cada dois vértices $i \neq j$ existe um único caminho possível de comprimento 2.

Temos o polinômio caraterístico de A^2:

$$p(x) = det(A^2 - xI_d) = \begin{vmatrix} d-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & d-x \end{vmatrix}.$$

Utilizando o lema 4.1 temos que:

$$p(x) = (t-1)^{n-1}(t+n-1).$$

Tomando $t = d - x$ e como $n = d^2 - d + 1$, logo:

$$p(x) = (d-x-1)^{n-1}(d^2 - x).$$

Logo os autovalores de A^2 são $d-1$ e d^2.

Como visto os autovalores de A^2 são raízes de $p(x) = 0$, ou seja:

$$\lambda_1^2 = d^2, \lambda_2^2 = d-1, \lambda_3^2 = d-1, \cdots, \lambda_n^2 = d-1.$$

Seja d o autovalor da matriz A. Então $\lambda_1 = d$ é autovalor da matriz D e os demais autovalores são: $\lambda_i = \pm\sqrt{d-1}$, com $i = 2, 3, \ldots, n$.. Suponhamos que existe uma quantidade r de autovalores iguais a $\sqrt{d-1}$ e uma quantidade s iguais a $-\sqrt{d-1}$. Observamos que a diagonal de A é composta somente com zeros, logo pela definição de traço de matriz, $tr(A) = 0$. Como a matriz A é semelhante a D, assim pela Propriedade 2.16 o valor do traço da matriz D é igual o valor do traço da matriz A, ou seja:

$$tr(D) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = 0$$

Daí:

$$\begin{aligned} d + r\sqrt{d-1} - s\sqrt{d-1} &= 0 \\ \Longrightarrow d + (r-s)\sqrt{d-1} &= 0 \\ \Longrightarrow d &= (s-r)\sqrt{d-1} \\ \Longrightarrow (s-r) &= \frac{d}{\sqrt{d-1}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como (s -r) é um inteiro e pelo lema 4.2 em que $\dfrac{d}{\sqrt{d-1}}$ não é inteiro, logo a igualdade da equação 4.2 é um absurdo, portanto G não é um grafo regular. $\square$

Como G não é grafo regular, logo nem todos os vértices são de mesmo grau. Na próxima etapa, veremos que um vértice de grau máximo é adjacente a todos os outros.

Etapa 7. Se u é um vértice de grau máximo e x é um vértice de grau não máximo, então x $\sim u$.

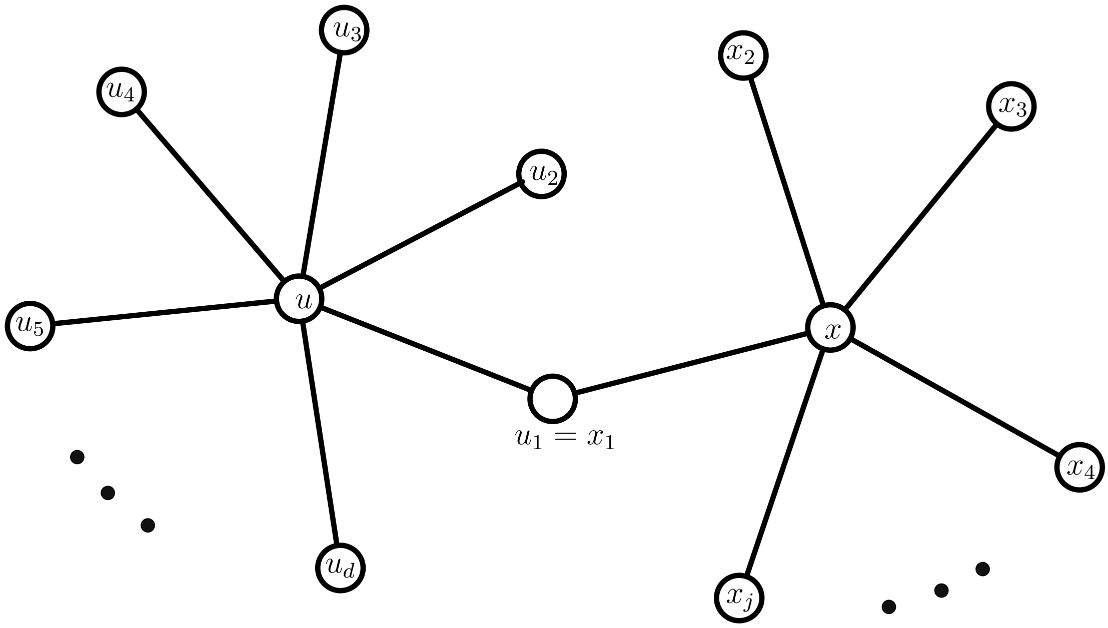
Demonstração: Suponhamos que x não é adjacente a u ($x \nsim u$) e ainda u_1 é o único vértice que é adjacente ao vértice u e ao vértice x. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_d$ os vértices adjacentes a u sabendo que d é par e $d \geq 4$ é grau máximo pelas respectivas Etapas 3 e 4. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_j$ os vértices adjacentes ao vértice x, em que $j \leq d-2$ e é par.

Para não existência de ciclos de comprimento 4, temos que:

$$\{u_1, u_2, \cdots, u_d\} \cap \{x_1, x_2, \cdots, x_j\} = \{u_1 = x_1\}.$$

Conforme o grafo da Figura 4.13:

Figura 4.13: Grafo da Etapa 7



Notemos que x não é adjacente a nenhum dos vértices $\{u_2, \ldots, u_d\}$ porque, de outra forma, um ciclo de comprimento 4.

Para cada u_i com $i = 2, 3, 4, \ldots, d$, o vértice adjacente ao vértice x e adjacente ao vértice u_i é um dos vértices x_j, como $j \leq d - 2$, existe u_i e u_j diferentes, de modo que o mesmo x_p é adjacente comum aos pares x, u_i e x, u_j, assim u, u_i, u_j, x_p seria um ciclo de comprimento 4, que demonstrado pela Etapa 1 é um absurdo, portanto se u é de grau máximo e x não é de grau máximo logo são adjacentes. □

Finalizada a demonstração que existe um vértice de grau máximo, na etapa a seguir demonstraremos a unicidade desse vértice de grau máximo.

Etapa 8. Seja G, um grafo com uma quantidade de vértices maior ou igual a 4. Então, há um único vértice de grau máximo.

Demonstração:

Seja G um grafo finito. Então o grau de cada vértice é finito. Na Etapa 6, G é um grafo não regular, assim existe pelo menos um vértice de grau máximo. Suponhamos que existem dois vértices distintos de grau máximo u_1 e u_2. Então para cada um deles existem outros vértices de grau não máximo como $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Existem x_1 e x_2, que através da

Etapa 7: x_1 é adjacente a u_1 e u_2; x_2 é adjacente u_1 e u_2. Assim, temos que: u_1, u_2, x_1, x_2 é um ciclo do comprimento 4, contradizendo com a Etapa 1. Portanto em G há um único vértice de grau máximo. $\square$

Desta forma, pela Teoria dos Grafos e auxílio da Álgebra Linear temos a demonstração por completo.

4.2 Demonstração do Teorema através da Análise Combinatória

Nesta demonstração do Teorema da Amizade usaremos a versão do Teorema 4.3 e na última etapa da demonstração a unicidade para todas as reuniões com 4 ou mais pessoas conforme o Corolário 4.1. A demonstração consiste numa sequência de etapas com resultados intermediários até a demonstração estar completa.

Etapa I. Seja 1 uma pessoa qualquer da reunião e que tenha A_1 o conjunto de conhecidos de 1. Então A_1 tem um número de elementos igual à *2k* e divididos em pares de pessoas amigas que conhecem 1.

Demonstração: Denotamos que a pessoa 1 seja a que conhece todos na reunião. Suponhamos que A_1 é vazio, logo a reunião é composta por uma única pessoa, ou seja, a própria pessoa 1. Caso contrário, suponhamos que temos a pessoa 2, que seja amiga da pessoa 1, assim pela hipótese do teorema temos como exemplo a pessoa 3 que é amiga comum das pessoas 1 e 2.

Suponhamos que existe a pessoa 4, logo a pessoa 5 vai ser o único amigo comum das pessoas 1 e 4. A pessoa 5 não pode ser amigo da pessoa 2, senão as pessoas 1 e 2 teriam dois amigos em comum.

Do mesmo modo, a pessoa 4 não pode ser amiga da pessoa 3, senão as pessoas 1 e 3 teriam dois amigos em comum.

Assim cada vez que supomos que existe uma pessoa, precisamos de mais uma pessoa para ela ser o amigo em comum entre a pessoa 1 e a pessoa suposta, ou seja, os amigos da pessoa 1 aumentam de dois em dois.

Esse processo pode ser repetir por k vezes. Assim, o conjunto de amigos da pessoa 1 será:

$$A_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots, (2k+1)\},$$

o conjunto A_1 terá $2k$ elementos.

Portanto o conjunto A_1 tem $2k$ elementos e divididos em pares de elementos. $\square$

Para cada amigo i da pessoa 1, chamaremos de A_i o conjunto de amigos de i diferentes da pessoa 1 e do amigo em comum da pessoa i com a pessoa 1. O conjunto A_i pode ser vazio.

Etapa II. Os conjuntos A_i, com i = *2,3, ..., 2k +1*, formam uma partição do conjunto das pessoas da reunião diferente da pessoa 1.

Demonstração: Vamos dividir em duas partes:

• Os conjuntos são disjuntos, para as pessoas $i \neq j$, ambas diferentes da pessoa 1.

Suponhamos que existe uma pessoa p que pertence a A_i e A_j, logo seria um amigo comum de i e j diferente da pessoa 1. Assim teremos que $A_i \cap A_j = \{p\}$ além da pessoa 1, ou seja, as pessoas i e j teriam dois amigos em comum 1 e p.

Da mesma forma, suponhamos uma pessoa p em A_1 e A_i seria um amigo comum entre as pessoas i e 1. Temos que $A_1 \cap A_i = \{p\}$ e como a pessoa $i \in A_1$, logo existe uma pessoa $q \in A_1$ que é o par de i e amiga em comum entre 1 e i, conforme a Etapa I. Assim as pessoas 1 e i teriam dois amigos em comum p e q.

Em ambas situações citadas, é contradição a hipótese do teorema. Portanto, não existe esta pessoa p e os conjuntos são distintos dois a dois, desta forma $A_i \cap A_j = \varnothing$.

• (2) - Seja R o conjunto de todas as pessoas da reunião. Então existe uma pessoa $x \in R \Longrightarrow$ se $x \neq 1$, logo a pessoa x pode ser ou não amigo da pessoa 1. Se x e 1 são amigos, logo $x \in A_1$. Se x e 1 não são amigos, logo existe um amigo comum j. Desta forma x $\in A_j$ e o conjunto $A_j \subset A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_{(2k+1)},$. Assim, $R \supset A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_{(2k+1)}$.

Portanto, os conjuntos A_i, com $i = 2, 3, \cdots 2k+1$ forma uma partição do conjunto das pessoas da reunião R diferentes da pessoa 1. $\square$

Etapa III. Todos os conjuntos A_i, com $i = 2, 3, 4, \ldots, (2k+1)$, tem um número par de pessoas.

Demonstração: Tomando como exemplo o conjunto A_2.

Seja $2^1 \in A_2$ e ainda $2^1 \notin A_i, \forall\ i \neq 2$. Então existe uma pessoa 2^2 que é o amigo comum entre as pessoas 2^1 e 2, assim $2^2 \in A_2$.

Suponhamos que existe a pessoa $2^3 \in A_2$, 2^3, não pode ser amigo comum entre as pessoas 2^1 e 2^2, caso contrário, 2^1 e 2^2 teriam dois amigos em comum 2 e 2^3. Do mesmo modo, 2^3 não pode ser amigo comum de 2 e 2^1, pois 2 e 2^1 teriam dois amigos em comum 2^2 e 2^3. A pessoa 2^3, também não pode ser amigo comum entre 2 e 2^2, senão eles teriam dois amigo em comum 2^1 e 2^3. Então existe a pessoa 2^4 que é o amigo comum entre 2 e 2^3, logo $2^4 \in A_2$. Este argumento pode ser repetido sucessivamente por k vezes aumentando seus elementos em 2 em 2 para cada repetição conforme a Etapa I, temos que:

$$A_2 = \{2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{2k}\}.$$

O número de elementos em A_2 é igual há *2k*, ou seja, uma quantidade par de elementos.

O processo é análogo para os demais A_i com i = 3,4, $\cdots$, $2k$ +1.

Portanto os conjuntos A_i, com $i = 2, 3, 4, \cdots, 2k+1$ têm um número par de elementos, ou seja, de pessoas. □

Etapa IV. Para toda pessoa i entre 2 e $(2k + 1)$, ninguém em A_i conhece 1.

Demonstração: Tomamos com exemplo a pessoa 2, ou seja, temos que provar que ninguém em A_2 conhece a pessoa 1. Pela Etapa I, a pessoa 2 é amigo comum por exemplo, da pessoa 1 e j, sendo $j \in A_1$.

Suponhamos que existe um $2^p \in A_2$ que é amiga também da pessoa 1. Então, $2^p \in A_1$.

Observamos que as pessoas 1 e 2 terão dois amigos comuns: 2^p e j e $A_1 \bigcap A_2 = \{2^p\}$, que é um absurdo, contradizendo a hipótese do teorema e a Etapa II respectivamente. Assim, não existe um $2^p \in A_2$ que conhece a pessoa 1 e este argumento é análogo para os demais i com i entre 3 e (k +1). Portanto, ninguém de A_i com i = 2,3,..., ($2k$ +1) conhece a pessoa 1. □

Etapa V. Se existe alguém na reunião que conhece exatamente duas pessoas. Então ninguém de A_2 tem amigo comum com alguém em A_3 ou um dos dois conjuntos (A_2 e A_3) devem ser vazios.

Demonstração: Seja a lista de pessoas da reunião, a pessoa 1, A_1 (as pessoas 2 e 3 amigos de 1), A_2 e A_3

Suponhamos que A_2 e A_3 não seja vazio Então, existe um $2^p \in A_2$ e um $3^q \in A_3$. Assim 2^p e 3^q tem um amigo em comum.

Pela Etapa III, a pessoa 1 não pode ser o amigo comum entre 2^p e 3^q, pois ninguém de A_2 e A_3 conhece 1. Que o amigo comum entre 2^p e 3^q seja a pessoa 2, é um absurdo, pois as pessoas *2* e *3* teriam dois amigos em comum *1* e 3^q, contradizendo a hipótese do teorema. Seja a pessoa 3 o amigo comum de 2^p e 3^q. Então as pessoas 2 e 3 terão dois amigos em comum: *1* e 2^p, contradizendo a hipótese do teorema.

Assim, o amigo comum de 2^p e 3^q está em A_2 ou em A_3. Então, existem duas pessoas diferentes, $2^r \in A_2$ e $3^q \in A_3$, que seriam o amigo comum de 2^p e 3^s.

Se o amigo comum 2^p e 3^q for 2^r, logo 2^p e 2^r teriam dois amigos em comum 2 e 3^q, contradizendo a hipótese do teorema. O mesmo acontece se 3^s é o amigo comum entre 2^p e 3^q, desta forma teriam dois amigos em comum 3 e 3^q. Portanto nenhuma pessoa de A_2 tem amigo comum com alguém de A_3 ou um dos conjuntos é vazio.

$\square$

Etapa VI. Se alguém na reunião conhece exatamente duas pessoas, então o Teorema da Amizade estará demonstrado para todas as reuniões de três pessoas.

Demonstração:

Pela Etapa V, existe alguém que conhece exatamente duas pessoas. Suponhamos que esta pessoa seja a pessoa 1 e que conhece as pessoas 2 e 3. Então, temos os conjuntos $A_1 = \{2,3\}$, A_2 e A_3. Ainda, pela mesma etapa temos que: A_2 ou A_3 é vazio, assumimos que A_3 seja vazio.

A Etapa III, garante que A_2 tem um número par de elementos, sendo sempre aumentado em dois a dois e o amigo comum entre esses dois elementos é a pessoa, logo a pessoa 2 seria pessoa que conhece todos da reunião, satisfazendo o teorema.

Caso A_2 e A_3 ambos forem vazios, temos somente as pessoas 1, 2 e 3 na reunião. Como a pessoa 1 conhece 2 e 3 por ser amigo em comum entre os dois, logo existe uma pessoa que conhece todos na reunião satisfazendo o teorema. Portanto, o Teorema da Amizade está demonstrado para todas reuniões as de três pessoas.

$\square$

Basta demonstrar o teorema para as reuniões cujo o número de participantes é pelo menos quatro pessoas.

Etapa VII. Se i e j são dois amigos de 1 que não se conhecem, então i e j têm o mesmo número de amigos (ou, A_i e A_j têm o mesmo número de elementos).

Demonstração:

Suponhamos inicialmente que A_i e A_j não são vazios. Note que o único amigo comum entre i e uma pessoa $q \in A_j$ é algum $p \in A_i$. Temos que:

- $p \neq 1$, pois ninguém de A_j conhece 1.

- Se p for o amigo comum entre i e 1, temos um absurdo, assim i e p teriam dois amigos em comum 1 e q, contradizendo a hipótese do teorema. Logo, p não pode ser amigo comum de i e 1.

Consideramos o mínimo de duas pessoas em A_j (as pessoas s e q), que tenham o mesmo amigo comum em $x \in A_i$. Observamos que as pessoas s e q têm dois amigos comuns diferentes x e j, ou seja, contradizendo a hipótese do teorema que diz que cada duas pessoas tem um único amigo comum. Assim, o número de pessoas do conjunto A_j é menor ou igual o número de pessoas do conjunto A_i.

Consideramos, no mínimo duas pessoas agora em A_i que tenham o mesmo amigo comum em A_j, utilizando o mesmo argumento anterior chegaremos novamente em absurdo, pois essas duas pessoas de A_i teriam dois amigos em comum a pessoa i e pessoa em comum de A_j, desta forma o conjunto A_i terá um número de pessoas menor ou igual ao número de pessoas A_j.

Concluímos que A_i e A_j contêm o mesmo número de pessoas, quando os conjuntos A_i e A_j não são vazios, se A_j é vazio, logo A_i também será vazio. Portanto, A_i e A_j terão o mesmo número de pessoas sendo que i e j são dois amigos da pessoa 1 que não se conhecem. $\square$

Etapa VIII. Todos os conjuntos de A_i, para i entre 2 e $(2k + 1)$ têm o mesmo número de elementos.

Demonstração:

Pela Etapa VII, tomamos como exemplo 2 e 3 em A_1 e os quais não se conhecem. Assim, os conjuntos A_2 e A_3 tem o mesmo número de pessoas. Na Etapa I, onde as pessoas são divididas em pares de pessoas amigas que conhecem 1, ou seja, a pessoa 1 tem pelo menos quatro amigos. Então existe uma pessoa 4 que é o amigo comum de *1* e 2 que não conhece a pessoa 3 e uma pessoa 5 que é o amigo comum de 1 e 3 que não conhece a pessoa 2.

A pessoa 4 não conhece a pessoa 3 e ambas conhecem 1, logo A_4 e A_3 têm o mesmo número de pessoas também pela Etapa VII. Do mesmo modo, a pessoa 5 não conhece 2, assim os conjuntos A_5 e A_2 têm o mesmo número de pessoas. Concluímos que A_2, A_3, A_4 e A_5 todos tem o mesmo número de pessoas e isso vale para todos os conjuntos A_i. Portanto, todos os conjuntos A_i, para i entre 2 e (2k +1), têm o mesmo números de elementos (pessoas). $\square$

A escolha da pessoa que chamamos de 1, foi totalmente arbitrária, assim dada qualquer pessoa com mais de dois amigos, todos os seus amigos conhecem o mesmo número de pessoas.

A demonstração da próxima etapa utilizaremos princípios da Álgebra Linear apresentado no Capítulo 2 e ainda a etapa será idêntica à Etapa 6, da primeira demonstração do Teorema da Amizade (seção 4.1).

Etapa IX. Todas as pessoas da reunião, não têm a mesma quantidade de amigos.

Demonstração:

Suponhamos que todas as pessoas na reunião têm 2k amigos, calculando o número de pessoas que tem na reunião tomando como exemplo a pessoa 1:

- 1, que é a própria pessoa 1;
- 2k, que são amigos da pessoa 1.

Ainda falta (2k - 2) pessoas de cada amigo de 1, pois supomos que cada pessoa têm 2k amigos, então por exemplo, a pessoa 2 é amiga de 1 e tem um amigo comum a 1 que está no conjunto dos amigos de 1, faltando ainda (2k -2) amigos da pessoa 2. Esse processo é análogo para os demais amigos de 1, Assim, reunião possui:

$$n = 1 + 2k + 2k(2k - 2) = 4k^2 - 2k + 1. \tag{4.3}$$

Numerando as pessoas de 1 a $n = 4k^2 - 2k + 1$.

Seja M a matriz adjacência n por n, sendo que: $M_{ij} = 1$, se i e j se conhecem, ou $M_{ij} = 0$ se i e j não se conhecem. Então M é simétrica, todos os elementos da diagonal são iguais a zero e podendo observar que os os elementos iguais *1* na linha i por exemplo, correspondem aos amigos de i, onde M será composta em cada linha a uma quantidade *2k* de 1's e uma quantidade de*(n - 2k)* zeros, ou seja:

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ 2k \\ \vdots \\ 2k \end{bmatrix} = 2k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

isto é, *2k* é um autovalor de *M*.

A Propriedade 4.1, garante que a matriz A é simétrica e quadrada, então existe uma matriz quadrada ortogonal P tal que: $P^{-1}AP = P^tAP$ é uma matriz diagonal D e os elementos da diagonal principal de $P^{-1}AP$ são exatamente os autovalores de A, conforme Teorema de Espectral 2.2.

Se existe uma matriz P invertível, e uma matriz D conforme a definição 2.4 é diagonalizável, tais que $M = P^{-1}DP$, equivalente a, $D = PMP^{-1}$, assim pela definição 2.6 a matriz M é semelhante a matriz D. A partir desse ponto utilizamos o raciocínio da Etapa 6, na primeira demonstração do teorema, mas no lugar de d utilizamos o *2k*. Portanto, nem todas as pessoas da reunião tem a mesma quantidade de amigos. □

Etapa X. Existe uma pessoa que tem pelo menos quatro amigos ou mais e as demais pessoas têm o mesmo número de amigos.

Demonstração: Escolhemos duas pessoas arbitrárias p e q que tem um amigo comum

j pela hipótese do teorema. Temos duas situações: p e q se conhecem ou p e q não se conhecem.

As pessoas p e q se conhecem, pela Etapa VI o teorema está demonstrado, pois temos somente três pessoas na reunião, e como queremos provar o teorema para as reuniões com quatro ou menos pessoas, neste momento importa que p e q não se conheçam

As pessoas p e q não se conhecem, pela Etapa VII temos que p e q têm o mesmo número de amigos. Conforme demonstrado na Etapa VIII, temos que: a pessoa r teria pelo menos quatro amigos e que esses outros dois amigos (s e j) e ainda teriam o mesmo número de amigos de p e q. Pela Etapa I os amigos de r estão divididos em pares, assim o processo é análogo para as demais pessoas da reunião, ou seja, as demais pessoas tem o mesmo número de amigos que p e q. Portanto todas as pessoas têm o mesmo números de amigos e existe uma pessoa que tem quatro ou mais amigos. $\square$

Para a demonstração das duas últimas etapas utilizaremos novamente princípios da Álgebra Linear, apresentado no Capítulo 2 e ainda serão idênticas as etapas 7 e 8 respectivamente, da primeira demonstração do Teorema da Amizade (Seção 4.1).

Etapa XI. Se i é a pessoa que mais têm amigos e j é uma pessoa que não é a que mais tem amigos, então j é amiga de i.

Demonstração:

Suponhamos que j não é amigo de i e ainda i_1 é o único amigo comum entre as pessoas i e j. Sejam $i_1, i_2, \ldots, i_d$ os amigos de i, sabendo que i tem uma quantidade de $2k$ amigos, que essa quantidade é e pelo menos quatro amigos pelas respectivas Etapas I e X. Sejam $j_1, j_2, \ldots, j_p$ os amigos de j, em que j tem uma quantidade de amigos menor *2k* e uma quantidade par, conforme a Etapa II. Seguindo o raciocínio da Etapa 7 da primeira demonstração do Teorema da Amizade, teremos que i e j teriam dois amigos comuns que é um absurdo. Portanto se i é a pessoa que tem mais amigos e j não é a pessoa que tem mais amigos, logo i e j são amigos. $\square$

Etapa XII. Numa reunião com 4 ou mais pessoas, há uma única pessoa que conhece todos as outras pessoas presentes.

Demonstração:

Seja uma reunião finita, então o número de pessoas presentes é finita. Na Etapa IX, foi demonstrando que as pessoas da reunião não tem a mesma quantidade de amigos, então existem pelos uma pessoa que conhece todas as pessoas. Suponhamos que existe duas pessoas que conhecem todos que estão na reunião, 1 e 2. Então, para cada uma delas existe um conjunto de amigos, onde esses amigos tem menos amigos que elas, assim existe u_1 e u_2. Através da Etapa XI, a pessoa 1 é amiga de u_1 e u_2 e pessoa 2 também é amiga de u_1 e u_2, utilizando o raciocínio da Etapa 8 da primeira demonstração do Teorema da Amizade, temos que as pessoas 1 e 2 teriam dois amigos em comum, contradizendo a hipótese do problema. Portanto numa reunião com 4 ou mais pessoas, há uma única pessoa que conhece todos da reunião. $\square$

Portanto com a utilização dos conceitos da matemática discreta, temos a demonstração do teorema da Amizade por completo, que: em uma reunião com n pessoas onde cada duas pessoas tem exatamente um amigo comum, então, alguém da reunião conhece todas as pessoas.

Considerações Finais

Este trabalho apresentou duas demonstrações do Teorema da Amizade. Para isso, inicialmente realizou-se uma pesquisa bibliográfica para aprofundar conhecimentos sobre o tema proposto. Tão logo iniciamos as pesquisas, as primeiras dificuldades surgiram, devido a escassez de publicações sobre o tema na língua portuguesa, obrigando a recorrer à produções em outras línguas. Dessa forma, esse trabalho foi norteado pelos estudos de dois autores bases: Josep Brunat e Carlos Tomei, sendo este último, precursor dos primeiros estudos relacionados ao tema.

Após o conhecimento das razões que impulsionaram o estudo e comprovação do Teorema da Amizade, aprofundamo-nos teoricamente nos conteúdos que embasariam as duas demonstrações.

Os primeiros conteúdos foram os da Álgebra Linear, aprofundando conhecimentos obtidos no Ensino Médio, na formação acadêmica e na disciplina de Álgebra Linear do Mestrado. Na sequência, retomou-se com mais afinco os conceitos matemáticos de matrizes semelhantes, potência de matriz e diagonalização, os quais foram essenciais para algumas etapas das duas demonstrações, destacando a Regra de Chió que caminhou principalmente para demonstração do Lema 4.1, de maneira que a demonstração do lema ficou diferente de todas as maneiras encontradas na literatura.

Conforme a demonstração do teorema se desenvolvia, houve necessidade de "desenhos" para melhor compreensão, surgindo a necessidade da Teoria dos Grafos, que até então não passava de um conteúdo abstrato, ou seja, um tema ausente na formação acadêmica do professor de escola de Ensino Fundamental e Médio, sendo também ignorado pelos livros didáticos de Ensino Médio.

Como aprendizado e ampliação de algumas noções da Teoria de Grafos, este estudo foi incorporado nas demonstrações de quase todas as etapas da primeira demonstração do teorema, proporcionando a compreensão e visualização dos resultados das etapas.

Para a segunda demonstração do teorema, fez-se necessário o estudo de matemática discreta, com os conteúdos de Noções de Conjuntos e Análise Combinatória. Esta segunda demonstração apresentou algumas dificuldades de compreensão das etapas propostas por Carlos Tomei. Primeiramente, todas as etapas foram desenvolvidas utilizando novamente os grafos, deixando a demonstração em alguns momentos muito parecida com a primeira perdendo a importância de tê-la no trabalho.

Após aos encontros de orientação e de aprofundamento teórico de conteúdos específicos como o de partição de conjuntos, troca de algumas nomenclaturas para representar as pessoas e mais utilização dos conceitos de Análise Combinatória, concluímos a demonstração de maneira que ficasse cativante e diferente da primeira demonstração, ou seja, sem uso dos grafos.

Aproveitamos aqui para registrar a importância da abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, pois a mesma possibilita aos alunos uma visualização geométrica da resolução de determinados problemas, facilitando o raciocínio lógico matemático levando os alunos a desenvolverem suas próprias habilidades e estratégias para resolução destes problemas. Tentamos deixar a segunda demonstração de maneira plausível, para uma boa compreensão dos resultados com os recursos da Análise Combinatória, mas nada impede de usar os grafos para obter uma visualização geometricamente ajudando na interpretação dos resultados apresentados.

Com o trabalho quase finalizado foi tomando forma a ideia de mostrar que o Teorema da Amizade era válido para todas as reuniões com número de pessoas ímpares e maior do que três. Observamos que na primeira demonstração do Teorema da Amizade na Seção 4.1, obtivemos precisamente na equação 4.1, que números de vértices no grafo G são iguais:

$$d^2 - d + 1 = (d-1)d + 1.$$

Notemos, que $(d-1)d$ é o produto de dois números consecutivos, que é par, somando com 1, temos uma quantidade ímpar de vértices.

Na segunda demonstração Teorema da Amizade na Seção 4.2 obtivemos na equação 4.3 que reunião é composta por:

$$4k^2 - 2k + 1 = (2k-1)2k + 1.$$

Notemos,que $(2k-1)2k$ é o produto de dois números consecutivos que é par, somando 1

(1 é um número ímpar), temos uma quantidade ímpar de pessoas na reunião.

Portanto, por intermédio das duas demonstrações o Teorema da Amizade funciona para todas as reuniões que tiverem uma quantidade ímpar de pessoas, como foi mencionado na versão do Teorema 4.1 de Paul Erdös, que o número de pessoas é igual à *2k +1* que é ímpar.

Além disso, observamos na Figura 4.12 da Etapa 6 da primeira demonstração do Teorema da Amizade, teremos k triângulos para *2k + 1* vértices, demonstraremos este resultado através de uma recorrência linear de primeira ordem da expressão $x_{n+1} = 2n+3$, $x_1 = 3$, temos:

$$x_2 = 5 = x_1 + 2$$

$$x_3 = 7 = x_2 + 2$$

$$x_4 = 9 = x_3 + 2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = x_{n-1} + 2$$

Somando, resulta:

$x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = x_1 + (x_2 + 2) + (x_3 + 2) + \cdots + (x_{n-1} + 2)$

$\Longrightarrow x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1 \text{vezes o número } 2}$

$\Longrightarrow x_n = x_1 + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1 \text{vezes o número } 2}$

$\Longrightarrow x_n = 3 + (n-1)2$

$\Longrightarrow x_n = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$

Portanto, para k triângulos teremos *2k + 1* vértices, esses triângulos serão interligados pelo vértice comum há todos eles, aonde os vértices são as pessoas da reunião e o vértice comum é a pessoa que conhece todos na reunião.

Na Teoria dos Grafos, o Grafo da Amizade G (Figura 4.12) pode ser construído com n cópias do ciclo de comprimento 3, com um vértice comum entre eles.

Além de apresentarmos que o Teorema da Amizade funciona para todas as reuniões com número ímpar e maior do que três pessoas, demonstramos a unicidade da pessoa que conhece todos na reunião, concluindo então que existe uma **única** pessoa que conhece todas as pessoas na reunião.

Destacamos que o trabalho atingiu os objetivos propostos e abrangendo os temas abordados de maneira esperada ao apresentar as duas demonstrações do Teorema da Amizade.

Referências

[1] AIGNER, Martin e ZIEGLER, Gunter M., *Proofs from THE BOOK,*. 2 edition, Ed. New York; Springer, 2001.

[2] BIANCHINI, Edwaldo *Matemática Bianchini* 6^o *ano*/ Edwaldo Bianchini. 7.ed., São Paulo; Moderna,2001.

[3] BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo, *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos/ Paulo Oswaldo Boaventura Netto.* São Paulo; Ed. Blucher, 2006.

[4] BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo e JURKIEWICZ, Samuel; *Grafos: Introdução e prática/ Paulo Oswaldo Boaventura Netto e Samuel Jurkiewicz.*. São Paulo; Ed. Blucher, 2009.

[5] BOLDRINI, José Luis., *Álgebra linear/ José Luiz Boldrini.* 3^o ed., São Paulo; Harper & Row do Brasil, 1980.

[6] BRUNAT, Josep, *Uma demostracíon de l'amistat per métdes elementals.* Bulll, SCM, 1992. Disponível em: <https://publicacions.iec.cat/repository/pdf/00000035/00000031.pdf>. Acesso em: 20 de agosto de 2017.

[7] CALLIOLI,Carlos A. *Álgebra linear e aplicações/Carlos A. Callioli, Hygiano H. Domingues, Roberto C. F. Costa.* 6 ed., São Paulo; Atual, 1990.

[8] CEZAR, Gleicy Terezinha F., *Grafos, Matrizes e o Teorema da Amizade.* Universidade Federal de Minas Gerais, Disponível em: <www.mat.ufmg.br/∼espec/monografiasPdf/Monografia_Gleicy.pdf>. Acesso em: 21 de Agosto de 2017.

[9] DANTE, Luiz Roberto, *Matemática: contexto & aplicações*. Vol. 1 e 2, São Paulo; Ed. Ática, 2013.

[10] ERDÖS, Paul, RÉNYI, Alfred e SÓS, Vera.T, *On a Problem of graph Theory*. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 1966. Disponível em: <www.math-inst.hu/~ p_erdos/1966 - 06.pdf>. Acesso em: 23 de outubro de 2017.

[11] FERNANDES, Angela Maria Vidigal. *Fundamentos de álgebra*/ Angela Maria Vidigal Fernandes [et al.]. Belo Horizonte; Editora UFMG, 2005.

[12] HEFEZ,Abramo, *Introdução à Álgebra Linear/ Abramo Hefez; Cecília de Souza Fernandez*. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro; SBM, 2016.

[13] HAMMERSLEY, J.M, *The friendship problem and the love problem*. Cambridge University Press, 1983.

[14] HUNEKE, Craig, *The Friendship Theorem*. American Mathematical Monthly, ed. 109, 2002. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2695332?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 23 de outubro de 2017.

[15] IEZZI, Gelson e outros, *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol. 4, São Paulo; Ed. Atual, 1977.

[16] IEZZI, Gelson e outros, *Matemática: ciência e aplicações, volume 2*. 7ed., São Paulo; Ed. Saraiva, 2013.

[17] KOLMAN, Bernard *Introdução à álgebra linear: com aplicações / Bernanrd Kolman, David R. Hiill*; tradução Alessandra Bosquilha. Rio de Janeiro, LTC,2012.

[18] LEONARD, Katie, *The friendship theorem and projective planes*. Portland State University, 2005. Disponível em: <http://web.pdx.edu/ caughman/Katie.pdf>. Acesso em: 20 de outubro de 2017.

[19] LIPSCHUTZ,S. *Teoria e problemas de matemática discreta / S. Lipschutz e M. Lipson; trad. Heloisa Bauzer Medeiros*. 2.ed., Porto Alegre; Bookman, 2004.

[20] LONGYEAR, Judith Q. e PARSONS, Douglas T.; *The Friendship Theorem.* Indagationes Math, 1972. Disponível em: <https://ac.els-cdn.com/1385725872900637/1-s2.0-1385725872900637-main.pdf?_tid=2f5e42ac-b8d2-11e7-a11b-00000aab0f27&acdnat=1508860033_ec9b4a66816208c3df51d4eca349d4e2>. Acesso em: 24 de outubro de 2017.

[21] LUCCHESI, Claúdio L., *Introdução à Teoria dos Grafos.* IMPA(Instituto de Matemática Pura e Aplicada), Livro do 12° Colóquio Brasileiro de Matemática, 1979.

[22] MEYER, Carl. D, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Society for Industrial & Applied Mathematics, U.S., 2000.

[23] MORGADO, Augusto César e outros, *Análise Combinatória e Probabilidade.* Nona Edição;Coleção Professor de Matemática,Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[24] MORGADO, Augusto César, *Matemática Discreta / Augusto César Morgado, Paulo Cezar Pinto Carvalho.* Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro; SBM, 2013.

[25] PAIVA,Manoel Rodrigues, *Matemática: Paiva/Manoel Paiva.* 3. ed, São Paulo; Ed. Moderna, 2015.

[26] PAIVA,Manoel Rodrigues, *Matemática/ Manoel Rodrigues Paiva.* Vol. 1 e 2, São Paulo; Ed. Moderna, 1995.

[27] ROSEN,Kenneth H. *Matemática Discreta e suas Aplicações; [Tradução João Giudice].* São Paulo; McGraw-Hill, 2009.

[28] SANTOS, Macella Feitosa dos. *Contando caminhos.../Marcela Feitosa dos Santos, Rodrigo Gondim.* 3 º Colóquio de Matemática da Região Nordeste,Ilhéus; SBM, 2014. Disponível em: <www.sbm.org.be/docs/coloquios/NE-3-06.pdf>. Acesso em: 23 de dezembro 2017.

[29] SILVA, Claudio Xavier da, *Matemática aula por aula/ Claudio Xavier da Silva,Beningno, Barreto Filho.* 2.ed., São Paulo; Ed, FTD, 2005.

[30] SOUZA, Joamir Roberto de, *Novo olhar matemática: 2/ Joamir Roberto de Souza.* 2.ed., São Paulo; Ed. FTD, 2013.

[31] TOMEI, Carlos & JUNIOR, Mário A. C., *Uma Demonstração Elementar do Teorema da Amizade*. Revista Matemática Universitária, SBM(Sociedade Brasileira de Matemática), 1987.

[32] TOMEI, Carlos. *Autovalores e autovetores - além de* $n = 2$, Notas da bienal de Matemática da SBM, Salvador, 2004. Disponível em: <www.bienasbm.ufba.br/M1.pdf>. Acesso em: 23 de dezembro de 2017.

[33] WALKER, Elizabeth, *The Friendship Theorem*. 2016. Disponível em: <https://math.mit.edu/∼post/courses/18.204-2016/18.204_Elizabeth_Walker_final_paper.pdf.> .Acesso em: 24 de outubro de 2017.

[34] WEST, Douglas .B, *Introduction to Graph Theory*. 2 edition, Prentice Hall, 2001.

[35] WILF, Herbert S. *The Friendship Theorem*. Combinatorial Mathematics and Its Applications, New York; Academic Press, 1971.