



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ - UEM
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Emparelhamento em Grafos Bipartidos

Gizelle Cristina Guisso de Lima

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador
Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

L732e	<p>Lima, Gizelle Cristina Guisso de Emparelhamento em grafos bipartidos / Gizelle Cristina Guisso de Lima. -- Maringá, 2017. 48 f. : il. color., figs., grafs.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2017.</p> <p>1. Grafos. 2. Problemas combinatórios. 3. Grafos bipartidos. 4. Coberturas de arestas. 5. Emparelhamento. 6. Graphs. 7. Combinatorial problems. 8. Bipartite grafs. 9. Coverage. 10. Matching. I. Castelani, Emerson Vitor, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.</p> <p>CDD 21.ed. 511.5</p>
-------	---

GIZELLE CRISTINA GUISSO DE LIMA

EMPARELHAMENTO EM GRAFOS BIPARTIDOS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dr. Jair da Silva
Universidade Federal do Paraná – Jandaia do Sul



Prof. Dr. Emerson Luiz do Monte Carmelo
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 23 de fevereiro de 2017.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Ao meu amado esposo Miguel e às razões da minha existência meus filhos Luara e Tales, pela compreensão e carinho demonstrado durante a trajetória de estudo.

Aos meus familiares, em especial minha mãe Jandira, minha segunda mãe Tia Maria José e minha sogra Antônia, que foram de suma importância nessa conquista, pois com toda a dedicação e carinho cuidaram dos meus filhos durante minhas ausências, MUITO OBRIGADA!.

À Universidade Estadual de Maringá, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela por onde vislumbro um horizonte superior.

Ao meu orientador Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani, pelo suporte prestado, pelas correções e pelo incentivo.

Ao Prof. Dr. Emerson Luiz do Monte Carmelo, pela apoio em compartilhar seu conhecimento a cerca da Matemática Discreta.

Ao Coordenador do Programa de Mestrado Profissional da UEM, Prof. Dr. Laerte Bemm, pela sua competência em nos direcionar e motivar a irmos além.

Aos colegas de curso, em especial, a uma amiga que o profmat me deu, Lauseli, pela horas de estudos, ao Tenani com auxilio do Latex, enfim aos colegas de curso, pela ajuda nas dúvidas e pela motivação durante todo o mestrado.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O fim real de toda a ciência é honrar a mente humana.

Carl Gustav Jakob Jacobi

Resumo

Uma etapa crucial na resolução de um problema real é a sua representação por um diagrama. O grafo pode ser tal ferramenta, ideal para a esquematização de situações em diversas áreas, por exemplo, redes físicas, redes viárias, circuitos elétricos, assim como as interações que ocorrem entre indivíduos num ecossistema ou numa teia de relações sociais. Os conceitos introdutórios da Teoria de Grafos são de fácil compreensão, mesmo por alunos numa fase inicial da sua formação, tanto no ensino fundamental como no médio. Dessa forma, tal teoria é um tópico motivador e um auxiliar na compreensão, modelagem e resolução de problemas em que exista um conjunto de objetos de algum modo relacionados. Neste sentido, nosso trabalho versa sobre uma introdução aos problemas de emparelhamento em grafos bipartidos e coberturas.

Palavras-chave: Grafos, Problemas Combinatórios, Emparelhamentos em Grafos Bipartidos, Cobertura.

Abstract

A crucial step in solving a real problem is its representation by a diagram. The graph can be such a tool, ideal for the schematization of situations in several areas, for example, physical networks, road networks, electrical circuits, as well as the interactions that occur between individuals in an ecosystem or in a web of social relations. The introductory concepts of Graph Theory are easy to understand, even by students at an early stage of their formation, both in elementary and middle school. Thus, such theory is a motivating topic and an aid in the understanding, modeling and resolution of problems in which there is a set of objects in some way related. In this sense, our work is about an introduction to the problems of pairing in bipartite graphs and covers.

Keywords: Graphs, Combinatorial Problems, Pairing in Bipartite Graphs, Coverage.

Lista de Figuras

2.1	Ilustração da sete pontes de Konigberg (<i>Fonte: http://wikipedia.qwika.com</i>).	3
2.2	Modelo de grafo para a representação da sete pontes de Konigberg. . .	4
2.3	Mapa das Regiões (<i>Fonte: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas</i>). . . .	4
2.4	Grafo das Regiões e Fronteira de um Mapa.	5
2.5	Sociograma (<i>http://doportugalprofundo.blogspot.com.br/sociograma</i>). . .	5
2.6	Esquema do Bairro.	6
2.7	Exemplo de Adjacência e Incidência.	7
2.8	Exemplo de ciclo e caminho.	9
2.9	Exemplo de grafo conexo e regular (<i>Fonte: http://pt.wikipedia.org/grafos</i>)	10
2.10	Exemplo de multigrafos.	12
2.11	Exemplo de Subgrafo.	13
2.12	Exemplo de subgrafo induzido.	13
2.13	Grafos Isomorfos (<i>Fonte: http://francis.naukas.com/2015/12/11/babai-dice-que-el-isomorfismo</i>).	15
2.14	Grafo para as Matrizes.	16
2.15	Grafo Direcionado.	17
3.1	Grafo Bipartido.	18
3.2	Ilustração de Grafo Bipartido.	19
3.3	Ilustração de Grafo Bipartido Completo.	19
3.4	Ilustração Test Drive.	20
3.5	1º distribuição.	21
3.6	Grafo do exemplo 3.3.	22
3.7	M Emparelhamento Maximal.	22
3.8	M' Emparelhamento Máximo.	22
3.9	M Emparelhamento.	24
3.10	Caminho M _alternante.	24
3.11	Grafo do Emparelhamento M e M'	25
3.12	ciclo e caminho extraíndo a intersecção.	25
3.13	Caminho Aumentante P	26
3.14	1º distribuição.	29

3.15	2º distribuição.	29
3.16	Nova configuração do teste drive.	30
3.17	Distribuição test drive.	30
3.18	Emparelhamento perfeito test drive.	30
3.19	Condição $V_2 \geq V_1$	31
3.20	Fere a condição do resultado.	31
3.21	Emparelhamento Perfeito.	31
3.22	Ilustração do caminho Z	32
3.23	Aplicação do Teorema de Hall.	34
3.24	Aplicação do Teorema de Hall.	34
3.25	Preferências em Adicionais.	35
3.26	Fluxograma do Teorema de Hall.	36
3.27	Ilustração das k arestas.	37
3.28	Ilustração dos subconjuntos S e $N(S)$	37
3.29	Condição de Exatamente.	37
3.30	Instalações de Câmeras.	41
3.31	Instalação de duas Câmeras.	41
3.32	$ M^* < K' $	42
3.33	Exemplo 3.14.	43
3.34	Exemplo 3.15.	43
A.1	Modelo de grafo para a representação da sete pontes de konigberg.	45
A.2	Ilustração da demonstração.	46

Sumário

Introdução	i
1 Introdução	ix
2 Grafos	2
2.1 Motivação - Problemas Clássicos de Grafos	2
2.2 Definições e Conceitos Preliminares	7
2.3 Grafos via Matrizes	15
3 Emparelhamento em Grafos Bipartidos	18
3.1 Emparelhamento Perfeito	22
3.2 Aplicação do Teorema de Berge	27
3.3 Teorema de Hall e Aplicações	30
3.4 Coberturas	40
4 Considerações Finais	44
A Apêndice	45
A.1 Demonstração do Teorema de Euler - Pontes de Konigberg	45
Referências Bibliográficas	47

1 Introdução

A Teoria dos Grafos não é tema da escola básica nem secundária brasileira, embora haja muitos autores que defendem a sua inserção na grade curricular do ensino médio, devido a sua importância histórica e aplicabilidade na tecnologia com os GPS, celular, malha aérea, etc. Até mesmo em cursos de graduação não é visto e explorado esse conteúdo, exceto em congressos, mini cursos, exposições e projetos. A ideia do estudo de grafos surgiu a partir da leitura de alguns problemas do capítulo 5 e 13 do livro: *Círculos Matemáticos a Experiência Russa*, de Dimitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg. Queríamos estudar problemas combinatórios cuja resolução iriam além da Análise Combinatória vista no segundo ano do ensino médio, que é apenas uma das ramificações das técnicas de resolução de problemas de contagem.

No Ensino Médio brasileiro, percebe-se que a Matemática Discreta tem se reduzido ao estudo de análise combinatória e probabilidade. A inclusão de grafos no Ensino Médio em sala de aula, vem de acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais que defendem que

“estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa [...] enfrentar problemas de diferentes naturezas” [1].

Nesse sentido, estudar elementos da Matemática Discreta pode significar diversificação da Matemática para além dos elementos algébricos, tão marcantes em estudantes da Escola Básica. É importante destacar que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio sugerem discussão do uso de problema da Teoria dos Grafos no Ensino Médio:

No Ensino Médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola, são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler[2].

Na esfera pública, o estado do Espírito Santo traz em sua grade Curricular a “Introdução

à Teoria dos Grafos” [3] para o segundo ano do Ensino Médio e “Resolução de Problemas Utilizando Grafos” [3] para o terceiro ano.

De acordo com, Malta [4],

“a Teoria dos Grafos apresenta aspectos pertinentes que merecem espaço no currículo da Escola Básica”.

Contudo, para que essa abordagem possa ser efetivada de forma adequada no Ensino Médio, é importante que os professores tenham conhecimento específico e pedagógico acerca do tema em questão.

O objetivo deste trabalho é apresentar da forma mais explícita possível a Teoria dos Grafos, incidindo especialmente sobre alguns exemplos de aplicação de carácter prático. Estes exemplos permitem uma melhor compreensão dos grafos e a sua utilidade na vida real. Com o desenvolvimento da teoria, o problema proposto foi tomando uma roupagem específica da Teoria de Grafos que são os *Emparelhamentos*, em particular, *Emparelhamentos em Grafos Bipartidos*. Em nosso cotidiano, podemos vislumbrar situações que podem ser representadas por um conjunto de pontos e linhas que ligam aos pares esses pontos, alguns exemplos são:

- estradas que ligam pares de cidades,
- relação de amizade, onde as linhas representam amizade entre pares de pessoas,
- problemas de alocação.

Considerando a última classe de problemas, vamos analisar o problema nominado por nós "Test Drive". Este problema consiste em um grupo 5 pessoas (A, B, C, D e E) que estão em uma concessionária e todas elas gostariam de fazer um Test Drive em 5 modelos de carros (Bravo, Punto, Idea, Siena e Uno) que entraram na promoção IPI 0% só que cada uma tem suas preferências.

Tendo em vista o problema proposto acima, temos a seguinte situação: suponha que a concessionária só disponibiliza um modelo de cada carro para esse serviço de Test Drive, é possível agradar todos os clientes de modo que todos consigam fazer o Test Drive ao mesmo tempo respeitando suas preferências?

Essa situação pode ser representada através de um *Grafo Bipartido*, onde cada aresta liga um cliente da concessionária a um modelo de carro. A questão no momento seria: É possível realizar o "Test Drive" de maneira simultânea, respeitando as preferências?

O primeiro estudo relacionado com Emparelhamento em grafos foi desenvolvido pelo matemático Húngaro *Dénes Kőnig (1884)*, que em 1914, em Paris, no congresso de Filosofia Matemática, apresenta uma comunicação onde se referia que *todo o grafo bipartido regular admite um emparelhamento perfeito*. Em (1931) *descreve equivalência entre o emparelhamento máximo e o problema de cobertura de vértices mínimos em*

grafos bipartidos. Desde então, muitos autores tem dedicado atenção ao tema, e apresentado inúmeros resultados sobre Emparelhamentos em Grafos Bipartidos, com muita aplicação na própria Teoria de Grafos e também em outras áreas de conhecimento da matemática.

Considerando problemas de emparelhamento, iremos abordar neste trabalho questões do tipo: como encontrar um caminho aumentante que nos forneça um emparelhamento máximo, passando pelo *Teorema de Berge*, e também investigar a existência de um *Emparelhamento Perfeito*, conhecido como *Teorema de Hall*.

Nosso trabalho está organizado da seguinte maneira. Consideramos a Introdução sendo nosso primeiro capítulo. No segundo capítulo iremos expor alguns problemas clássicos da Teoria de Grafos, fixando notação, definições preliminares e alguns resultados usuais na literatura para um bom entendimento da teoria. No terceiro capítulo falaremos de Emparelhamento em Grafos Bipartidos, faremos uma contextualização dos resultados encontrados por meio de exemplos. Veremos resultados acerca do conceito de coberturas de arestas por vértices, que tem diversas finalidades, por exemplo, monitoramento de ruas, onde queremos instalar câmeras em pontos estratégicos que são os vértices, de modo que, a partir desses vértices é possível obter um número mínimo de câmeras, que monitore todas as ruas que são representadas pelas arestas. Por fim, expomos nossas considerações finais sobre o trabalho proposto.

2 Grafos

Neste capítulo, iremos abordar alguns problemas clássicos que servirão como suporte para o desenvolvimento da teoria e estabeleceremos conceitos básicos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Os conteúdos propostos no capítulo poderão ser encontrados em [5], [6] e [7].

2.1 Motivação - Problemas Clássicos de Grafos

Quando é contextualizada, a matemática torna-se mais agradável no âmbito escolar. Alunos desejam aplicabilidade em conteúdos propostos em sala de aula. Contudo, a matemática aplicada requer ferramentas mais sofisticadas que estão além da grade curricular do ensino médio¹. Na contramão, a ideia intuitiva de grafos traz conhecimento do ensino superior em forma de situações problemas, que envolve elementos do cotidiano dos alunos. Exemplos de aplicações surgem no contexto de rede sociais, redes de computadores (é possível encontrar o melhor caminho para enviar uma mensagem em rede), representar cidades e suas distâncias para calcular as melhores rotas (o GPS disponibiliza essa ferramenta), organograma de uma empresa, etc. Estes exemplos são facilmente relacionados ao ambiente do aluno e portanto, iniciaremos nosso estudo por detalhar alguns casos clássicos.

Problema 1: Ponte de Konigberg

Por volta do ano de 1736, a Teoria dos Grafos começa a desenvolver-se, quando o matemático e geômetra Leonhard Euler visita a cidade de Konigberg, na então Prussia Oriental, atualmente chamada Kaliningrad. De acordo com [8],

"pouco menor do que o Estado de Sergipe com uma área de 15.100 km^2 , e está entre a Polônia e Lituânia, é banhada por 148 km pelo Mar Báltico. Debruçada sobre uma vasta planície, a região de Kaliningrad, com a capital administrativa do mesmo nome, é o território mais ocidental da Federação

¹quando perguntam "Para que serve?".

Russa, totalmente separada da Rússia por fronteiras terrestres de países estrangeiros e águas marítimas internacionais.

Fundada em 1255 pelos Cavaleiros Teutônicos (Ordem dos Cruzados germânicos) sob o nome de Königsberg (que em alemão significa “Montanha do Rei”) a região pertenceu à Polônia de 1466 a 1656, à Prússia e à Alemanha. Para assegurar as fronteiras contra a Rússia e outros invasores, o Rei prussiano Frederic Willian IV (1795-1861) ordenou que a cidade de Königsberg fosse fortificada. Durante vários séculos, a pequena cidade costeira viveu enclausurada por uma fortaleza, chamada de “Anel de Defesa”.

Destaca-se ainda, treze fortes, cada um deles com torres fortificadas, construídos com tijolos de rocha vermelha, e estrutura de castelo, que davam acesso à cidadela de arquitetura única. Hoje, esse lugar vem atraindo a atenção do visitante que viaja em busca de um turismo diferente. A mudança do nome foi após a II Guerra, depois de um embate entre as forças aliadas e a Alemanha, Königsberg foi anexada à Rússia, e passou a se chamar Kaliningrado, em homenagem a Mikhail Kalinin, um revolucionário bolchevique e político soviético. O idioma oficial é o russo, mas o alemão e polonês são idiomas comuns entre a população."

Euler tomou conhecimento de um problema que estava intrigando os intelectuais dessa região que parecia simples no primeiro momento, mas ainda não se tinha uma solução. O rio Pregel corta a cidade e nele havia duas ilhas ligadas entre si por uma ponte, e as duas ilhas eram conectada às margens do rio por mais seis pontes, como mostra a Figura 2.1. O problema com o qual moradores se deparavam era: seria possível fazer um passeio partindo de uma determinada margem passando pelas sete pontes uma única vez e retornando para a margem de partida?

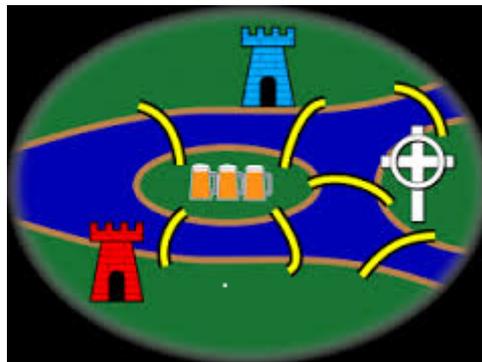


Figura 2.1: Ilustração da setecima ponte de Königsberg (*Fonte: <http://wikipedia.qwika.com>*).

Euler observou que o número de passagens de uma margem para ilha, ou entre duas ilhas, era sempre ímpar, isso significa que a travessia pode ocorrer, mas em algum

momento não é possível retornar ao local de origem. Ele provou que o passeio era possível se cada margem tivesse um número par de pontes ligando umas às outras (vide demonstração no apêndice). Na Figura 2.2 representamos as sete pontes de Konigberg em linguagem de grafos que formalizaremos em seção posterior do presente trabalho.

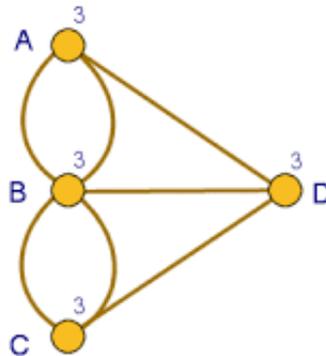


Figura 2.2: Modelo de grafo para a representação da sete pontes de Konigberg.

Problema 2: Coloração de Mapas

A história do problema das quatro cores começou em 1852, quando Francis Guthrie, aluno de Augustus de Morgan, tentava colorir o mapa da Inglaterra com cores diferentes de maneiras que não houvesse regiões vizinhas com a mesma cor. Surgindo então o Problema das Quatro Cores.

É de conhecimento prático entre os cartógrafos que ao desenhar seus mapas são necessárias no máximo 4 cores distintas para colorir as regiões representadas. Uma visão mais formal para a situação de coloração de mapas, é associar pontos à cada uma das regiões e unimos por uma linha esses pontos dois a dois se houver fronteiras entre às regiões, como mostra as Figuras 2.3 e 2.4. O problema de provar que, para qualquer mapa é necessário usar no máximo 4 cores, não era uma missão fácil. Formulado em meados do século XIX, foi somente em 1976 que se conseguiu um resultado significativo, porém com ajuda de computadores.

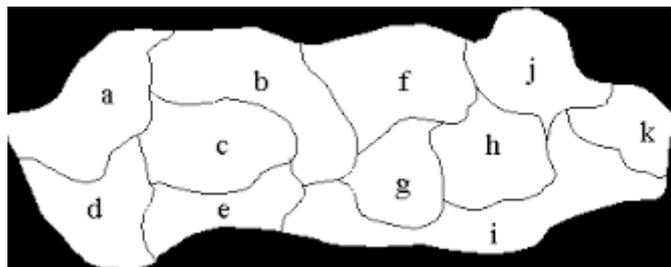


Figura 2.3: Mapa das Regiões (*Fonte: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas>*).

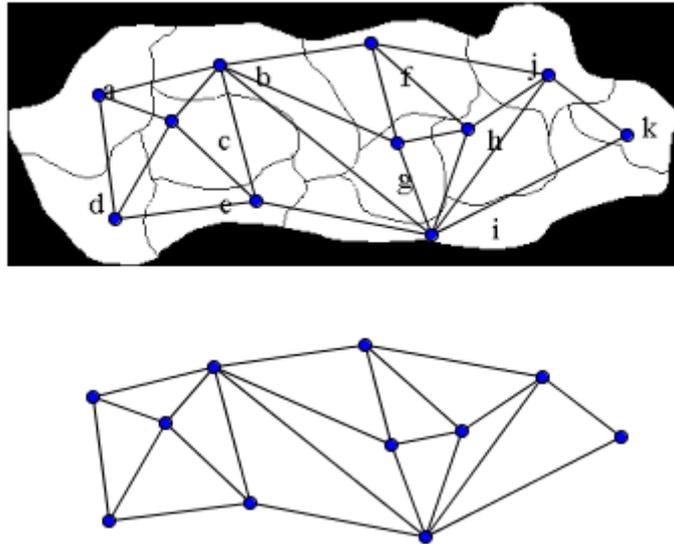


Figura 2.4: Grafo das Regiões e Fronteira de um Mapa.

Ao longo do século XX, cresceu o interesse de muitos matemáticos pelo estudo de grafos e pela sua aplicabilidade. A partir da década de 1950, a pesquisa operacional teve um grande avanço, e começou a utilizar grafos, em busca de melhores soluções para problemas de projeto, organização e distribuição. A Teoria dos Grafos está em ascendência e suas aplicações vão desde problemas envolvendo localização e rotas, processadores eletrônicos, estrutura do DNA, códigos, interligação elétrica até engenharia molecular.

Problema 3: Sociograma

Considere o seguinte problema: em uma sala de aula poderíamos pedir que cada aluno indique os colegas que possui mais afinidade. A partir desse levantamento colocamos os nomes no papel e utilizamos uma seta para representar afinidade entre os alunos. O Facebook usa a ideia do sociograma, para indicar relações de amizades. Considere o sociograma dado pela Figura 2.5 onde cada letra indica um aluno.

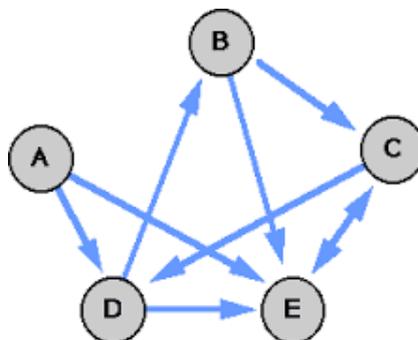


Figura 2.5: Sociograma (<http://doportugalprofundo.blogspot.com.br/sociograma>).

Através do esquema acima, podemos extrair algumas conclusões, como por exemplo:

- o aluno A é o mais deslocado,
- o aluno E é querido de todos,
- se uma suposta fofoca dita pelo aluno E, se propaga entre os alunos, o único que não ficará sabendo da fofoca é o aluno A.

Todas as motivações descritas acima pertencem a um leque de *Problemas Combinatórios* que são, em geral, problemas que possuem uma coleção finita de objetos que satisfazem critérios específicos determinados, e se preocupa, em particular, com a "contagem" de objetos nessas coleções e sua solução é à combinação de um subconjunto de seus elementos. Diferentes situações práticas, geram modelos combinatórios distintos. De modo geral, estamos interessados em obter uma solução que otimize e represente uma "boa solução prática". Por exemplo, suponha que um bairro da cidade de Maringá tenha sua estrutura física dada pela Figura 2.6, querendo evitar desperdício a coleta seletiva de lixo deve passar uma única vez em cada rua. Uma possível solução seria o caminho percorrendo os vértices nessa sequência A, B, E, C, D, A, C, B e D.

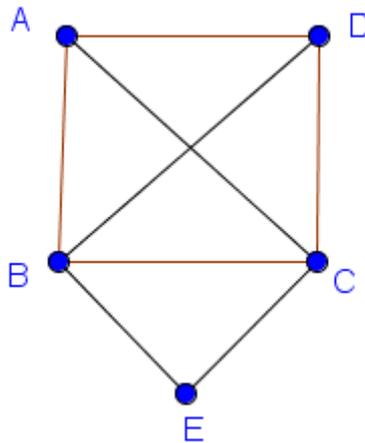


Figura 2.6: Esquema do Bairro.

Problema 4: Test Drive

Retornando ao problema do Test Drive. Considere a situação de 5 pessoas (A, B, C, D e E) que estão em uma concessionária e todas elas gostariam de fazer um test drive em 5 modelos de carros (Bravo, Punto, Idea, Siena e Uno) que entraram na promoção IPI 0%. Contudo, cada pessoa tem suas preferências sendo elas descritas por:

- A gostaria de fazer test drive no Idea e Bravo;
- B no Uno e Punto;
- C no Punto, Siena e Idea;

- D no Siena e Uno;
- E no Bravo e Siena.

Supondo que a concessionária só disponibiliza um modelo de cada carro para esse serviço de Test Drive, é possível agradar todos os clientes de modo que todos consigam fazer o Test Drive respeitando suas preferências?

Observe que nosso problema não corresponde à pergunta: de quantas maneiras distintas 5 pessoas podem fazer Test Drive em 5 modelos de carros diferentes? Temos que respeitar as preferências impostas e desta forma, nosso problema toma outro rumo. Veremos com mais detalhe sua resolução nas páginas seguintes. Outros exemplos podem ser encontrados em Boaventura [5].

2.2 Definições e Conceitos Preliminares

Nesta seção, iniciaremos alguns conceitos e resultados preliminares da Teoria dos Grafos. Os conceitos abordados podem ser encontrados em [9], [7], e [10].

Definição 2.1 (Grafo). *Um Grafo é um par ordenado $G = (V, A)$, onde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ denota um conjunto finito não vazio de vértices e $A = \{\{v_i, v_j\}; v_i, v_j \in V\}$ um conjunto de arestas, onde as arestas são pares não ordenados do conjunto de vértices.*

Notação: Denominamos a cardinalidade de V o número de vértices do grafo G e denominamos a cardinalidade de A o número de arestas do grafo G .

Notação $|V(G)| = n$ e $|A(G)| = m$.

Definição 2.2 (Adjacência e Incidência). *Os vértices que são extremidades de uma aresta são denominados adjacentes, dizemos que a aresta é incidente a um vértice, quando o mesmo é extremidade da aresta, e duas arestas que tem vértice em comum são chamadas **adjacentes**. Na Figura 2.7, temos um grafo que ilustra tais conceitos.*

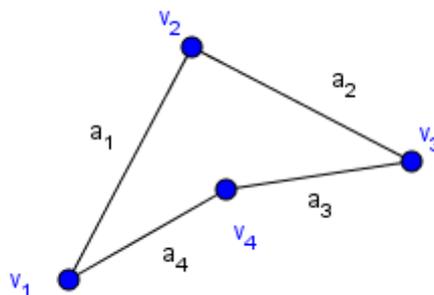


Figura 2.7: Exemplo de Adjacência e Incidência.

Algebricamente, $G = (V, A)$ onde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}\}$. Note que, os vértices v_2 e v_4 são adjacentes ao vértice v_1 e v_3 , a aresta a_1 é incidente aos vértices v_1 e v_2 , assim como a aresta a_2 é incidente a v_2 e v_3 , então podemos dizer que a_1 e a_2 são adjacentes, pois v_2 é vértice comum.

Definição 2.3 (Grau). *O grau de um vértice é o número de arestas incidentes ao vértice v , denotado por $d(v)$. Na Figura 2.7, todos os vértices têm grau dois, ou seja, $d(v) = 2$.*

Teorema 2.1. *Para todo grafo $G = (V, A)$, a soma de todos os graus dos vértices é igual ao dobro do número de aresta, isto é,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|A|.$$

Demonstração. Quando contamos os graus dos vértices, estamos contando as extremidades das arestas. Como cada aresta tem duas extremidades, logo contamos duas vezes cada aresta. O que acabamos de fazer foi contar de duas maneiras o número de arestas: uma maneira do ponto de vista dos vértices e outro do ponto de vista das arestas. Esse procedimento descreve o que chamamos de contagem dupla. □

Normalmente, nos problemas de grafos que são resolvidos com contagem dupla, contamos algo envolvendo pares de vértices, para que apareçam graus e arestas mais naturalmente. Aliando isso ao teorema importante acima e eventualmente, a alguma desigualdade, chega-se aos resultados.

Corolário 2.1. *O número de vértice de grau ímpar de um grafo é par.*

Demonstração. Considere o grafo $G = (V, A)$ e d_i o grau do vértice i . Pelo Teorema 2.1,

$$\sum_{v_i \in V} d_i = 2|A|.$$

Separando o somatório em duas parcelas, definindo-as com $P = \{i \in \mathbb{N}; i \equiv 0 \pmod{2}\}$ e $I = \{i \in \mathbb{N}; i \equiv 1 \pmod{2}\}$, temos

$$\sum_{i \in P} d_i + \sum_{i \in I} d_i = 2|A|.$$

Assim, a primeira parcela é par. Como a igualdade é par pelo Teorema 2.1, o somatório dos vértices de grau ímpar tem que ser par. □

Notação:

Seja $G = (V, A)$ um grafo, denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o grau mínimo e máximo de um vértice de G , respectivamente.

Proposição 2.1. *Seja $G = (V, A)$ um grafo, então $\delta(G) \leq \frac{2|A|}{|V|} \leq \Delta(G)$.*

Demonstração. Sabemos pelo Teorema 2.1 que

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|A|.$$

Como $\delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G)$ para todo $v \in V$, temos que, $|V|\delta(G) \leq 2|A| \leq |V|\Delta(G)$. Portanto, $\delta(G) \leq \frac{2|A|}{|V|} \leq \Delta(G)$. \square

Exemplo 2.1. Em uma festa com 100 convidados, houve 2017 apertos de mão. Sabendo que nenhum par de pessoas se cumprimentou mais de uma vez, podemos afirmar que alguém apertou a mão de quantas pessoas?

Solução: Podemos associar este exemplo ao grafo onde cada vértice corresponde a uma pessoa e cada aperto de mão a uma aresta. Em termos deste grafo, a pergunta é: existe algum vértice de grau maior ou igual a 41. Pela Proposição 2.1, temos:

$$\Delta(G) \geq \frac{2 \cdot 2017}{100} = 40,34.$$

Assim como o grau máximo tem que ser um número inteiro, concluímos que ele é pelo menos 41.

Definição 2.4 (Caminho e Ciclo). *Caminho é um grafo $P = (V, A)$, cujo $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $A = \{\{v_i, v_{i+1}\}, 1 \leq i \leq n\}$. Num grafo, um caminho ligando dois vértices $v_i, v_j \in V$, é uma sequência de arestas que ligam v_i a v_j . Um Ciclo é um grafo $C = (V, A)$, cujo $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$. Representamos o caminho com n arestas por P_n que é obtido retirando uma aresta do ciclo C_{n+1} . Como exemplifica a Figura 2.8.*

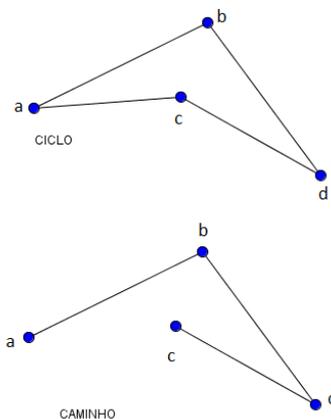


Figura 2.8: Exemplo de ciclo e caminho.

De acordo com a Figura 2.8, temos uns dos possíveis ciclos e caminhos, percorrendo os vértices na ordem que aparecem $C = (a, b, d, c, a)$ e $P = (a, b, d, c)$

Exemplo 2.2. Em uma festa com n pessoas, onde cada pessoa conhece pelo menos 3 pessoas, é possível formar uma mesa circular com pelo menos 4 pessoas de modo que cada pessoa conheça seus dois vizinhos?

Solução: Considere um grafo com n vértices onde cada vértice corresponde a uma pessoa e existe uma aresta entre duas pessoas se elas se conhecem. Em termos do grafo, o objetivo é mostrar que existe um ciclo de comprimento maior ou igual a 4.

Seja $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ um caminho de comprimento máximo do grafo. Um dos vizinhos de v_k é v_{k-1} . Pela condição do problema sabemos que v_k tem pelo menos outros dois vizinhos. Sejam x e y outros dois vizinhos de v_k . Os vértices x e y estão no caminho P , caso contrário existiria um caminho mais longo que P . Seja $x = v_i$ e $y = v_j$, com $1 \leq i < j \leq k - 2$. Logo, $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$ é um ciclo no grafo com pelo menos quatro vértices e portanto, é possível formar uma roda com pelo menos 4 pessoas de modo que cada pessoa conheça seus dois vizinhos.

Definição 2.5 (Conexo). Dizemos que um grafo é conexo se qualquer par de vértices tem ao menos um caminho conectando tais vértices. Podemos dizer ainda que grafo conexo não possui pontos isolados. O grafo da Figura 2.9 é conexo.

Definição 2.6 (Regular). Um grafo é dito K -regular quando todos os vértices tem o mesmo grau K . O grafo da Figura 2.9, exemplifica um grafo regular, pois todos os vértices tem grau 3.

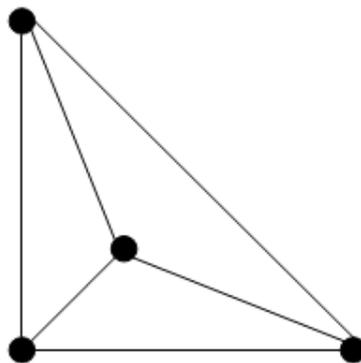


Figura 2.9: Exemplo de grafo conexo e regular (*Fonte: <http://pt.wikipedia.org/grafos>*)

Exemplo 2.3. Em um certo país, há 21 cidades e o governo pretende construir n estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente duas das cidades do país. Qual o menor valor de n para que, independente de como as estradas sejam

construídas, seja possível viajar entre quaisquer duas cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?

Solução: Queremos encontrar o menor número de arestas que um grafo de 21 vértices deve ter para garantir que ele é conexo. Considerando um grafo com 20 vértices, todos conectados entre si, e 1 vértice isolado, temos que este grafo não é conexo e possui $\binom{20}{2} = 190$ arestas. Desta maneira, obtemos que $n \geq 191$.

Provemos agora que todo grafo com 21 vértices e 191 aresta é conexo. Suponha por absurdo que não é conexo. Desta maneira, G possui pelo menos duas componentes conexas. Agrupando componentes conexas, se necessário, podemos dividir G em dois conjuntos A e B com a e b ($a + b = 21$) elementos, respectivamente, de maneira que não haja arestas ligando vértices de A até B .

Com isso, o número máximo de arestas em G é $\binom{a}{2} + \binom{b}{2}$ e, assim, obtemos

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} \geq 191.$$

Logo,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - a - b &\geq 382, \\ a^2 + b^2 - (a + b) &\geq 382, \quad (1) \end{aligned}$$

Substituindo $a + b = 21$ e $(a + b)^2 - 2ab = 441 - 2ab$ em (1), segue que

$$441 - 2ab - 21 \geq 382 \Leftrightarrow ab \leq 19$$

Como a e b são inteiros positivos tais que $a + b = 21$, o menor valor possível de ab é 20 e chegamos a uma contradição.

Os exemplos 2.1, 2.2 e 2.3, podem ser encontrados em [11].

Definição 2.7. *Uma Árvore é um grafo conexo acíclico, ou seja, um grafo conexo sem ciclos.*

Teorema 2.2. *Seja G uma árvore então G é conexo e possui $(n - 1)$ arestas.*

Demonstração. Note que, por hipótese G é uma árvore, logo G é conexo. Para mostrar que G possui $(n - 1)$ arestas, usaremos indução matemática sobre n . Vamos verificar o resultado para um valor particular de n . Por exemplo para $n = 1$ e $n = 2$.

- Para $n = 1$, temos 0 arestas.
- Para $n = 2$ temos 1 aresta.

Vamos supor agora que o resultado vale para um grafo G' com $k - 1$ vértices. Isto é, G' é uma árvore então G' é conexo e possui $k - 2$ arestas. Vamos acrescentar uma nova aresta (u, w) a este grafo. Para manter o grafo conexo e sem ciclos um e apenas

um dos vértices (u, w) pode pertencer a G' . Assim ao acrescentar a aresta (u, w) a G' , precisamos acrescentar também um vértice. Assim teremos um novo grafo G'' com k vértices e $k - 1$ arestas. A forma como G'' foi construído garante que é conexo e sem ciclos. Portanto temos que G'' é uma árvore. Mostramos assim, se G é uma árvore então G é conexo com $n - 1$ arestas. \square

Proposição 2.2. *Todo grafo G com n vértices e pelo menos n arestas possui um ciclo.*

Demonstração. Suponha que G não possua ciclos e sejam C_1, \dots, C_k suas componentes conexas, $k > 1$, onde C_i tem x_i vértices. Como G não possui ciclos, cada C_i , $1 \leq i \leq k$ é uma árvore e, portanto C_i possui $x_i - 1$ arestas, como vimos no Teorema 2.2. Logo o número de arestas de G é

$$\sum_{i=1}^k (x_i - 1) = n - k < n,$$

o que é um absurdo. \square

Definição 2.8 (Laço e Multigrafo). *Chamamos de Laço uma aresta que incide ao mesmo vértice, sendo que contamos seu grau duas vezes, uma para cada extremidade. Quando dois vértice tem duas ou mais arestas incidentes trataremos-o por Multigrafo. A Figura 2.10 ilustra, a Definição 2.10.*

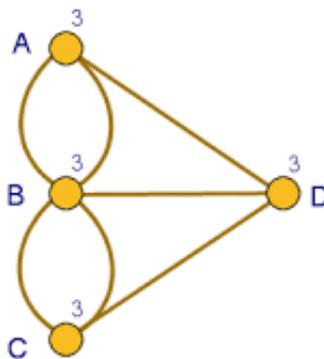


Figura 2.10: Exemplo de multigrafos.

Definição 2.9 (Conjunto Vizinhaça). *A vizinhaça do vértice v é o conjunto de vértices que são adjacentes a ele, sua notação é dada por $N(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in A\}$.*

Definição 2.10 (Grafo Orientado). *Quando o conjunto de arestas é formado por pares ordenados dizemos que o grafo é orientado ou direcionado. Nesse caso, ao desenhar o grafo, devemos usar uma seta partindo do primeiro vértice do par até o segundo vértice.*

Definição 2.11 (Subgrafo). *Subgrafo de um grafo G é o conjunto de vértices e de arestas que também é um subconjunto de G , cuja a relação de adjacência do grafo G é preservada. A Figura 2.11, temos um grafo e um dos subconjuntos possíveis para representar um subgrafo do grafo dado.*

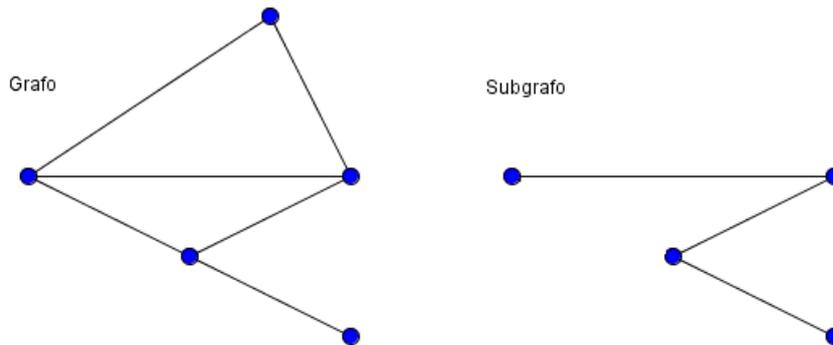


Figura 2.11: Exemplo de Subgrafo.

Definição 2.12 (Subgrafo Induzido). *Seja $F = (V_1, A_1)$ um subgrafo de $G = (V, A)$, tal que todas as arestas $(u, w) \in F$ sempre que para todo $u \neq w \in V_1$ $(u, w) \in G$, então F é um subgrafo induzido pelo subconjunto de vértices de V_1 . Note que, na Figura 2.12, tanto o grafo H quanto o F são subgrafos de G , porém F é subgrafo induzido e H não é subgrafo induzido, pois as arestas $a'c'$ e $a'd'$ não pertence ao subgrafo.*

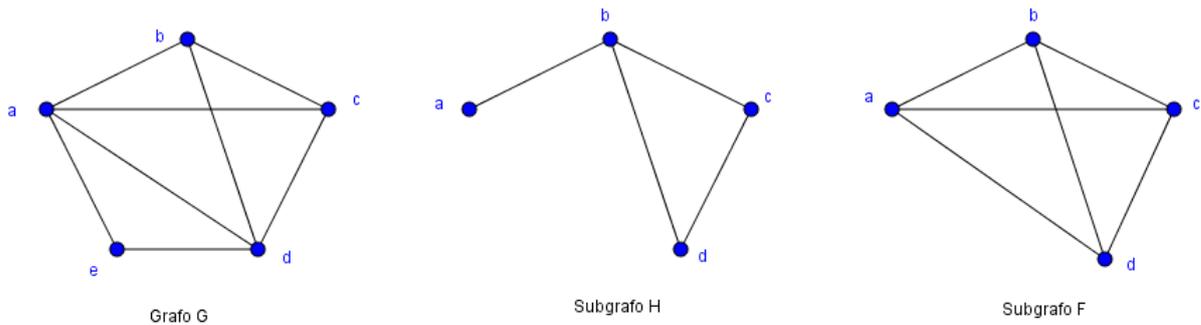


Figura 2.12: Exemplo de subgrafo induzido.

Teorema 2.3. *Seja G um Grafo que contém exatamente dois vértices de grau ímpar. Então, existe um caminho ligando esses dois vértices.*

Demonstração. Se G é um grafo onde todos os vértices são de grau par, exceto v_1 e v_2 , pelo Corolário 2.1, não existe um grafo que tem um número ímpar de vértices que possuem grau ímpar. Então v_1 e v_2 devem pertencer ao mesmo grafo e deve existir um caminho entre eles. \square

Teorema 2.4. *O número de arestas em um grafo completo com n vértice é $\frac{n(n-1)}{2}$.*

Demonstração. Uma forma de chegar nesse resultado é considerar que o número de aresta em um grafo completo com n vértices são todos os possíveis pares de vértices u e w . Cada escolha de 2 vértices distintos u e w forma uma aresta em A , a saber, (u, w) . Usando combinação e propriedades de fatorial, temos:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

Outra maneira seria usando indução sobre n .

Demonstração. Seja G_n um grafo que contém n vértice.

Verificamos que para $n = 1$ é impossível definir aresta que não seja o laço, logo,

$$\frac{1(1-1)}{2} = 0.$$

Por hipótese suponha que para todo $n \geq 1$, vale:

$$G_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Vamos provar que G_{n+1} , também é verdadeira.

De fato, seja v_{n+1} o vértice adicional que se encontra em G_{n+1} e não em G_n . O número máximo de arestas no grafo G_{n+1} é igual ao número máximo o grafo G_n mais todas as ligações possíveis entre v_{n+1} e cada vértice de G_n . Como esse número de ligações é igual ao de vértices de G_n , temos:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = G_{n+1}.$$

□

Definição 2.13 (Isomorfismo de Grafos). *Dois grafos $G_1 = (V_1, A_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2)$, são ditos isomorfos, se existe um função bijetora $f : V_1 \rightarrow V_2$, tal que $(v, w) \in A_1$ se e somente se $(f(v), f(w)) \in A_2$, para todo $v, w \in V_1$.*

Observe a Figura 2.13. Há grafos visualmente diferentes, porém quando associamos devidamente uma letra de um grafo a um número do outro grafo, estabelecemos a correspondência biunívoca. Por exemplo, considere o conjunto vizinhança dos vértices $N(a) = \{g, h, i\}$ e $N(1) = \{2, 4, 5\}$. Note que, $2 \rightarrow h$, $4 \rightarrow i$, e $5 \rightarrow g$, ou seja, eles representam o mesmo grafo com disposição dos vértices diferente.

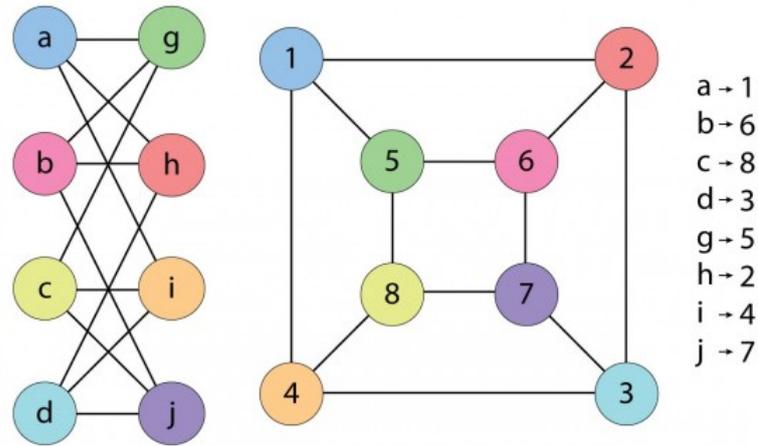


Figura 2.13: Grafos Isomorfos (*Fonte: <http://francis.naukas.com/2015/12/11/babai-dice-que-el-isomorfismo>*).

2.3 Grafos via Matrizes

O primeiro contato que um aluno da escola básica tem com o termo *Matriz* é no segundo ano do ensino médio. Até então ele manipula tabelas. Uma das formas mais comum de informar uma estrutura de um grafo para um computador é por meio de uma matriz. Uma matriz nada mais é do que uma estrutura de entradas distribuídas em uma tabela com linhas e colunas. Vamos representar um grafo via dois tipos de matrizes, adjacência e incidência.

Definição 2.14 (Matriz Adjacência). *Dado um grafo $G = (V, A)$, a matriz de adjacências $M_A = [m_{ij}]$ é uma matriz de ordem $|V| \times |V|$, tal que, suas entradas são do tipo,*

$$M_A = \begin{cases} m_{ij} = 1, & \text{se existir aresta de } i \text{ a } j \\ m_{ij} = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 2.15 (Matriz Incidência). *Dado um grafo $G = (V, A)$ a matriz incidência é dada por $M_I = [m_{ij}]_{n \times m}$, onde n vértices, m arestas. Os elementos da matriz incidência indicam se a aresta incide sobre o vértice.*

$$M_I = \begin{cases} m_{ij} = 1, & \text{se vértice } i \text{ incide sobre aresta } j \\ m_{ij} = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 2.4. Vamos determinar a matriz adjacência e a matriz incidência, do grafo representado pela Figura 2.14.

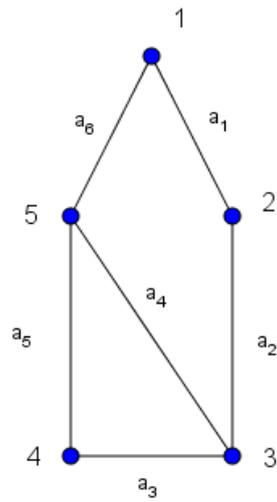


Figura 2.14: Grafo para as Matrizes.

Neste caso, temos

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.5. Vamos determinar a matriz adjacência e a matriz incidência. Considerando o grafo direcionado, dado pela Figura 2.15.

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

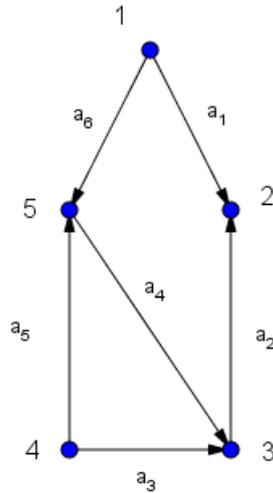


Figura 2.15: Grafo Direcionado.

$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quando temos grafo direcionado, as entradas na matriz incidências podem assumir valores negativos devido ao sentido da aresta que está incidindo no vértice i .

Definição 2.16. Dado um grafo $G = (V, A)$ a matriz incidência de grafo direcionado é dada por $M_I = [m_{ij}]_{n \times m}$ cada entrada m_{ij} relaciona o vértice i à aresta j assumindo os valores:

$$M_I = \begin{cases} m_{ij} = -1, & \text{se } j \text{ tem origem em } i \\ m_{ij} = 0, & \text{se } j \text{ não é incidente em } i. \\ m_{ij} = 1, & \text{se } j \text{ tem destino em } i. \end{cases}$$

3 Emparelhamento em Grafos

Bipartidos

Neste capítulo, iremos dissertar sobre Emparelhamentos bem como o Teorema de Hall que é um dos resultados mais importantes dentro de Emparelhamentos, juntamente com Berge, apresentaremos uma relação entre emparelhamento máximo e cobertura mínima. As definições expressas neste capítulo podem ser encontradas em [12], [13], [14], [15], [16] e [17].

Definição 3.1. (*Grafos Bipartidos*) Um grafo $G = (V, A)$ é Bipartido se o conjunto de vértice V pode ser particionado em dois conjuntos X e Y , com $V = X \cup Y$, e $X \cap Y = \emptyset$, onde vértice de X conectam-se apenas a vértices em Y (e vice-versa).

Exemplo 3.1. Considere o grafo G ilustrado na Figura 3.1. Podemos particionar o conjunto de vértices em dois subconjuntos distintos. Tomando os conjuntos $X = \{A, C\}$ e $Y = \{B, D\}$, caracterizando um grafo bipartido.

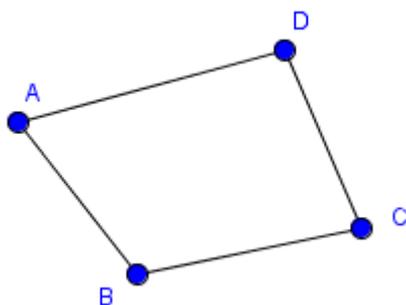


Figura 3.1: Grafo Bipartido.

Exemplo 3.2 (Exame Final). Suponha que se deve agendar exame final para três alunos que ficaram entre 4 matérias: Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cálculo e Fundamentos da Matemática. Podemos representar essa situação em um grafo bipartido, pois temos o conjunto $X = \{Alunos\}$ e $Y = \{Disciplinas\}$, onde $X \cap Y = \emptyset$. Uma das possíveis situações de exames dos 3 alunos é mostrada na Figura 3.2, onde cada aresta indica qual a matéria que o aluno ficou de exame.

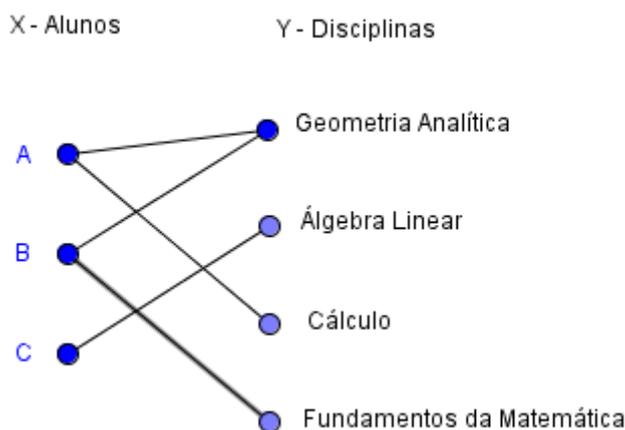


Figura 3.2: Ilustração de Grafo Bipartido.

Definição 3.2 (Grafo Bipartido Completo). *Grafo Bipartido Completo é o grafo onde todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y . Denota-se por $K_{m,n}$ onde $m = |X|$ e $n = |Y|$. Um Grafo Bipartido Completo $K_{m,n}$ tem $m \cdot n$ arestas. Na Figura 3.3 temos uma representação de Grafos Bipartidos Completo, para $m = n = 2$ e $m = n = 3$.*

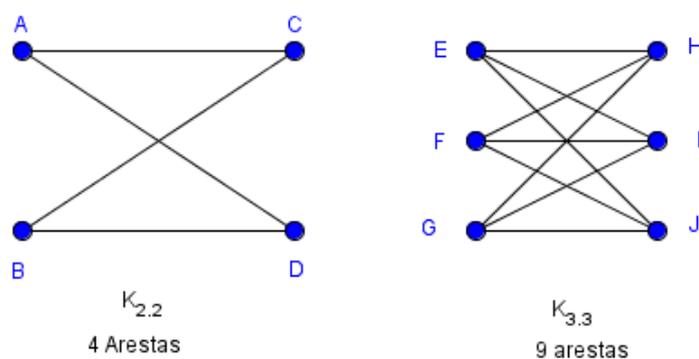


Figura 3.3: Ilustração de Grafo Bipartido Completo.

Teorema 3.1. *Um grafo é bipartido se, e somente se, não contém ciclos ímpares, ou seja, todo ciclo de G possui comprimento par.*

Demonstração. Seja G um Grafo Bipartido, iremos mostrar que este não contém ciclos ímpares. Seja X e Y as duas partições de G . Todas as arestas de G não são adjacentes a vértice de mesmo conjunto, ou seja, cada aresta tem uma extremidade em X e a outra em Y , isso decorre da definição de bipartido. Suponha que um ciclo contenha o vértice v_i (um vértice qualquer de G) em uma das duas partições, para retornarmos a esse vértice teríamos que ir na outra partição e voltar um número de par de vezes. Reciprocamente, seja G um grafo onde todo ciclo é de comprimento par. Seja um vértice v_i de G tal que $v_i \in X$ e todos os outros vértices que estão a uma distância par

de v_i também são elementos da partição X , os outros vértices formam o conjunto Y . Se não houvesse aresta ligando vértice da mesma partição G seria Bipartido. Suponha que exista tal aresta com extremidade l e t , onde $l, t \in X$, já temos um caminho par entre l e t e acrescentando mais uma aresta teremos um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto não pode existir outra aresta entre qualquer par de vértice da mesma partição e assim concluímos que o grafo G é bipartido. \square

Voltando ao nosso problema inicial (Test Drive), exposto como motivação no Capítulo 2, vimos que a concessionária só disponibiliza um modelo de cada carro para esse serviço de Test Drive. Queremos agradar todos os clientes de modo que todos consigam fazer o Test Drive respeitando suas preferências.

Com essa configuração, a solução do problema proposto vai além das ferramentas da análise combinatória vista no ensino médio, pois não queremos contar de quantas formas distintas podemos realizar o Test Drive. Caso contrário, a resposta seria simples e usando Fatorial. Neste caso teríamos 5 possibilidades de escolha de carro para a pessoa A, 4 (pois é distinta) possibilidades para B, 3 possibilidades para C, 2 possibilidades para a D e enfim 1 possibilidade para E, ou seja, teríamos $5!$ maneiras distintas para realizar o Test Drive.

Quando inserimos as preferências, o problema veste outra roupagem, que são os *Emparelhamentos*. Durante a resolução dessa situação problema, iremos apresentar e definir alguns resultados da Teoria dos Grafos que nos auxiliarão no desfecho do problema do Test Drive.

Note que o problema proposto Test Drive, descreve um grafo bipartido, pois se considerarmos $X = \{A, B, C, D, E\}$ e $Y = \{Bravo, Idea, Uno, Punto, Siena\}$, temos que $X \cap Y = \emptyset$ e podemos ilustrar as preferências em um grafo bipartido dado pela Figura 3.4.

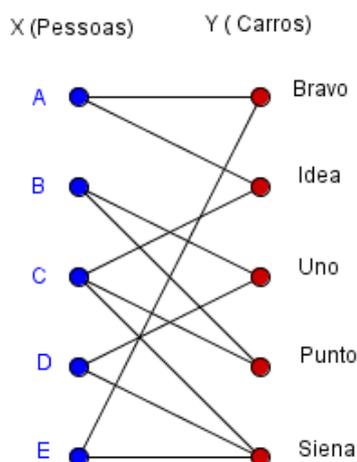


Figura 3.4: Ilustração Test Drive.

Suponha agora que o vendedor da concessionária, para tentar agilizar as saídas dos veículos, distribuiu as pessoas para realizar o Test Drive de acordo com a representação dada pela Figura 3.5.

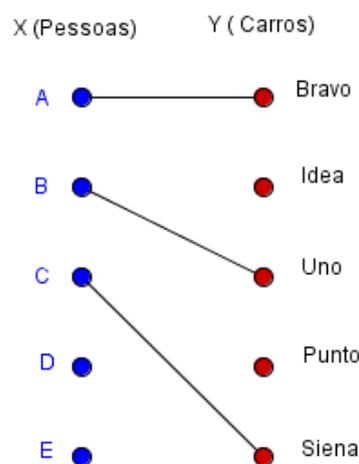


Figura 3.5: 1º distribuição.

Dessa forma, as pessoas D e E sairiam insatisfeitas, pois as mesmas não conseguiriam realizar o Teste Drive, já que os veículos de suas preferências já haviam sido distribuídos e isso acarretaria em prejuízo a concessionária, já que o Test Drive é uma possível pré venda.

Estamos interessados em satisfazer cada cliente, que cada um consiga fazer o Test Drive com um dos carros de sua preferência, supondo que os cinco carros saiam simultaneamente para a realização do Test Drive. A Teoria dos Grafos nos fornece ferramentas adequadas para solucionarmos a questão do Test Drive. Matematicamente, estamos em busca de um *Emparelhamento Perfeito*.

Definição 3.3 (Emparelhamento). *Dado um grafo $G = (V, A)$. um subconjunto M , com $M \neq \emptyset$, das arestas de A , é um Emparelhamento se duas arestas de M não incidem um mesmo vértice.*

Definição 3.4 (Máximo, Maximal e M _Saturado). *Um emparelhamento M é máximo se não existe um emparelhamento M' tal que $|M'| > |M|$, ou seja, não existe nenhum outro emparelhamento de cardinalidade maior.*

Um emparelhamento M é dito maximal se não existe um emparelhamento M' do qual M faça parte própria, isto é, $M \subset M'$. Portanto, M é maximal se não existe aresta a fora de M tal que $M + \{a\}$ também é um emparelhamento.

Dizemos que um emparelhamento M satura um vértice v se alguma aresta de M incide em v . Caso contrário, o vértice v é dito não - saturado ou vértice livre.

Exemplo 3.3. Considere o grafo G disposto na Figura 3.6. Note que $M = \{a_4, a_7, a_9\}$

é um emparelhamento de G maximal enquanto que $M' = \{a_2, a_4, a_{11}, a_{12}\}$ é o emparelhamento máximo de G .

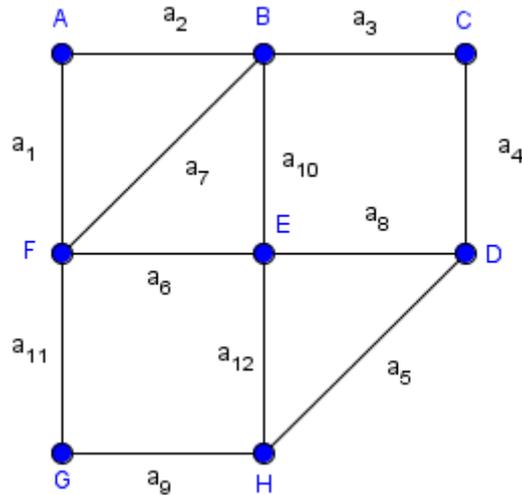


Figura 3.6: Grafo do exemplo 3.3.

Podemos representar os emparelhamentos maximal e máximo do Exemplo 3.3 em uma estrutura de grafo bipartido, como mostra Figura 3.7 e 3.8, pois desta forma fica explícito os emparelhamentos M e M' .

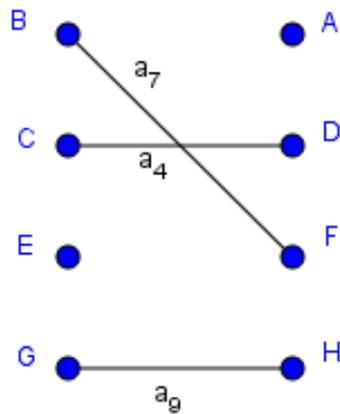


Figura 3.7: M Emparelhamento Maximal.

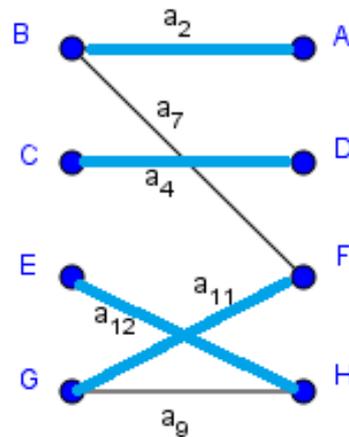


Figura 3.8: M' Emparelhamento Máximo.

3.1 Emparelhamento Perfeito

Definição 3.5 (Emparelhamento Perfeito). *Seja G um grafo bipartido, um emparelhamento M é perfeito se satura todos os vértices do grafo G .*

É claro que nem todo grafo tem um emparelhamento perfeito. A dificuldade do problema está em decidir se o grafo tem ou não um emparelhamento perfeito. Portanto, expomos mais resultados relacionados aos emparelhamentos que nos embasam para a discussão da existência de emparelhamento perfeito.

Observação 3.1. Se M é um Emparelhamento Perfeito de G , então M é emparelhamento máximo. A recíproca nem sempre é verdadeira. Um contra exemplo é exibido na Figura 3.8 do Exemplo 3.3.

Proposição 3.1. Se M é um Emparelhamento Perfeito de G , então $|V|$ é par.

Demonstração. Se M é um emparelhamento perfeito de G , então M é um conjunto de arestas que induz uma partição de V .

Seja $M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ um emparelhamento, enxergando a aresta m_i como um subconjunto de dois elementos de V , sendo $m_i \cap m_j = \emptyset$ com $i \neq j$.

Como M é emparelhamento perfeito $\bigcup_{i=1}^k m_i = V$, assim $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ forma partição de V , pelo princípio aditivo obtemos,

$$|V| = \sum |m_i| = \sum_{i=1}^k 2 = 2 \cdot k.$$

Logo, $|V|$ é par.

□

No processo para se aprender o procedimento de busca do emparelhamento máximo, são abordados novos conceitos, como os de caminho alternante e caminho aumentante, que serão utilizados em problemas similares, tal como o de busca por um emparelhamento perfeito.

Definição 3.6 (Caminho Alternante). *Seja M um Emparelhamento em G . Um caminho é M -alternante, se suas arestas ora pertencem M ora não pertencem a M .*

Definição 3.7 (Caminho Aumentante). *O caminho será M -aumentante, quando:*

- i) O caminho é M -alternante;*
- ii) Tal caminho comece e termine com vértices livres.*

Considere o emparelhamento dado pela Figura 3.9, que representa um emparelhamento maximal do grafo do Exemplo 3.3. A partir desse emparelhamento vamos entender as Definições 3.6 e 3.7, e encontrar um caminho M -aumentante, dado na Figura 3.10.

Na Figura 3.10, note que, o caminho ABFE é alternante, pois alterna entre arestas que pertencem e não pertencem ao emparelhamento. O caminho construído de A até E é aumentante, pois além de serem alternante ele começou e terminou em vértices livres e têm comprimento igual a 3 arestas.

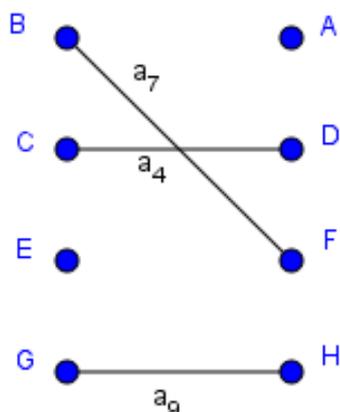


Figura 3.9: M Emparelhamento.

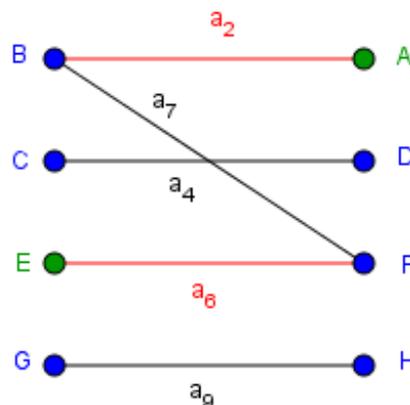


Figura 3.10: Caminho M _alternante.

Note que o comprimento de um caminho M _aumentante é sempre ímpar, como ilustra a Figura 3.10. Além disso, a existência de um caminho M _aumentante P indica uma forma de construir um emparelhamento M' com $|M'| > |M|$. Basta remover de M as arestas de $P \cap M$, e a seguir acrescentar as arestas de $P \setminus M$. Esta operação pode ser melhor formalizada utilizando a diferença simétrica de conjuntos.

Definição 3.8 (Diferença Simétrica). *Dados dois grafos G e H , a Diferença Simétrica $G \Delta H$ é o subgrafo de $G \cup H$, cujas arestas de $G \cup H$ estão exclusivamente em G ou exclusivamente em H . (Em particular, se M e M' são emparelhamentos, então, $M \Delta M' = (M \cup M') - (M \cap M')$).*

Lema 3.1. *Sejam $G = (V, A)$ um grafo, M e M' emparelhamentos de G . Denotamos por F a diferença simétrica entre M e M' , as componentes conexas de $H = (V, F)$ são de um dos seguintes tipos:*

- i) *Ciclo de comprimento par cujas arestas pertencem alternadamente a M e a M' ;*
- ii) *Caminhos, com arestas pertencentes alternadamente a M e a M' , e cujos extremos são vértices livres num dos emparelhamentos.*

Demonstração. O maior grau de H é 2, pois, não existe mais do que uma aresta de M , nem de M' , incidentes a um vértice de H , ou seja, um dos emparelhamentos contém mais de uma aresta incidente no mesmo vértice, o que contradiz a definição de emparelhamento. Se o grau de um vértice de H for 2 então uma das arestas é proveniente de M e outra de M' .

Sendo o $d_H(V) \leq 2$, ou seja, o grau de qualquer vértice de H é menor ou igual a 2, cada componente conexa ou é um ciclo ou um caminho. Os ciclos têm comprimento par, porque M e M' são emparelhamentos, caso contrario teríamos duas arestas adjacentes provenientes do mesmo emparelhamento. Os caminhos podem ser de comprimento

par ou ímpar. Cada caminho tem dois vértices de grau 1 que são os extremos, cada um destes tem uma aresta incidente pertencente a um dos emparelhamentos. Estes vértices são necessariamente livres no outro emparelhamento, pois senão o vértice não seria extremo, e o caminho prosseguiria. \square

Exemplo 3.4. Considere o grafo representado pela Figura 3.11. M representa um emparelhamento com 5 arestas vermelhas, M' um emparelhamento com 6 arestas azuis, e as arestas em preto não pertencem a nenhum dos dois emparelhamentos M e M' . Note que $M' \cap M = e$. Logo, a diferença simétrica $M \Delta M' = (M \cup M') - (M \cap M')$, forma um ciclo de comprimento 6 e um caminho de comprimento 3.

Na Figura 3.12, representa as componentes conexas da diferença simétrica, que exemplifica o Lema 3.1, desconsiderando as arestas em preto, pois as mesmas não pertence ao emparelhamento.

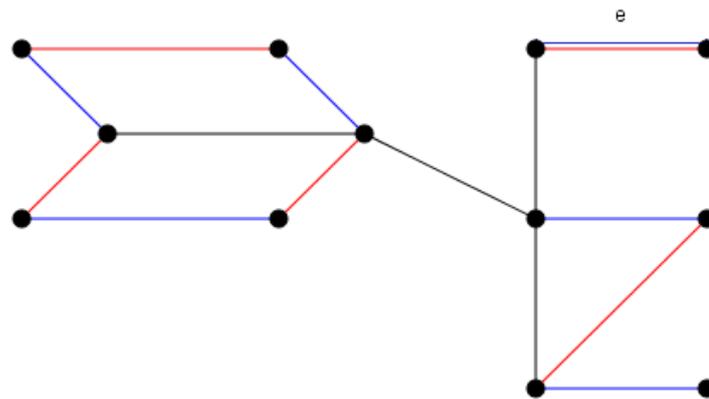


Figura 3.11: Grafo do Emparelhamento M e M' .

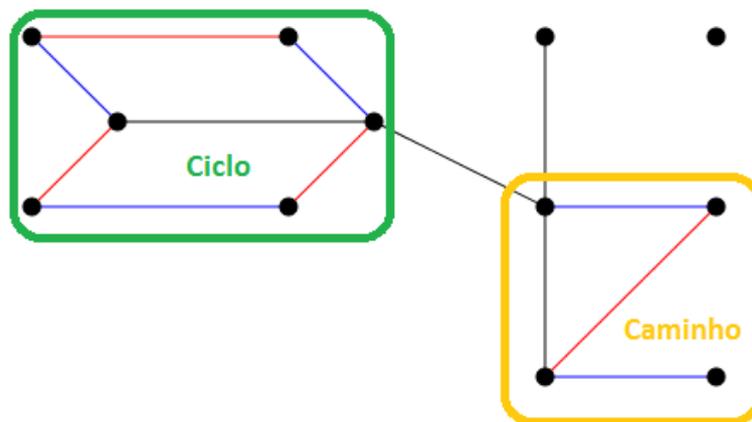


Figura 3.12: ciclo e caminho extraído a intersecção.

O Teorema apresentado a seguir é de suma importância para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos em especial de um algoritmo que resolve os problemas de emparelhamentos em grafos bipartidos. Este resultado permite verificar se um emparelhamento é ou não máximo em função da existência de um caminho aumentável entre vértice livres do emparelhamento.

Teorema 3.2 (Teorema de Berge, 1957). *Seja M um emparelhamento em G . Então as proposições são equivalentes:*

- i) M é um emparelhamento Máximo;
- ii) Não existe caminho M -aumentante em G .

Demonstração. Faremos as duas implicações usando a contra positiva.

Vamos mostrar que se existe um caminho M -aumentante então o emparelhamento não é máximo. Seja P um caminho M -aumentante em G , logo P tem a característica que mostra Figura 3.13.

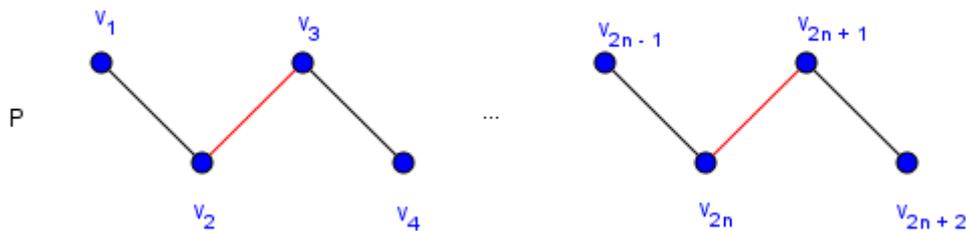


Figura 3.13: Caminho Aumentante P .

Defina

$$M^* = (M - \{v_2v_3, \dots, v_{2n}v_{2n+1}\}) \cup \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}, v_{2n+1}v_{2n+2}\}.$$

Note que, M^* é um emparelhamento de G , pois P é M -aumentante e que v_1 e v_{2n+2} são vértices livres. Então $|M^*| = |M| + 1$ e assim M não é o máximo.

Reciprocamente, se M não é emparelhamento máximo, então existe um caminho M -aumentante.

Seja $F = (V_1, A_1)$ um subgrafo de $G = (V, A)$ que possui toda aresta (u, w) em G , tal que ambos, $u, w \in V_1$, então F é um subgrafo induzido pelo subconjunto de vértices de V_1 , conforme a Definição 2.12.

Suponha que se M^* é um emparelhamento de G com $|M^*| > |M|$. Considere a diferença simétrica $M^* \Delta M = (M^* \cup M) - (M^* \cap M)$.

Defina $F = G[M^* \Delta M]$ o subgrafo induzido por $M^* \Delta M$. Em F certamente $\forall v \in V$, $d_F(v) \leq 2$. As componentes conexas de F são do tipo: ciclo, ponto isolados ou caminho, como vimos no Lema 3.1 e Exemplo 3.4.

Mais ainda, os ciclos em F são de ordem par pois M e M^* são emparelhamentos. Como $|M^*| > |M|$ obrigatoriamente existe um caminho M -aumentante em F , ou seja, é um caminho M -aumentante em G . □

Nota Histórica

Claude Berge (1926 - 2002) foi um matemático francês, fundador da moderna combinatória e teoria dos grafos. É conhecido pela conjectura do grafo perfeito e pelo Lema de Berge. Em termos artístico, foi um dos fundadores do Oulipo, em 1960 que é uma corrente literária formada por escritores e matemáticos que propõe a libertação da literatura, aparentemente de maneira paradoxal, através de constrangimentos literários

O Teorema de Berge fornece um algoritmo para obter um emparelhamento máximo. A ideia é procurar caminhos aumentáveis, a partir de vértices livres.

3.2 Aplicação do Teorema de Berge

Problema 1 - Jogo do Slither - Estratégias vencedoras para o jogo de Slither.

O jogo consiste em duas pessoas A e B disputam um jogo sobre um grafo G , escolhendo alternadamente vértices distintos v_1, v_2, \dots formando um caminho. O primeiro vértice, digamos v_0 , é escolhido pelo jogador A . A escolha dos demais vértices tem a seguinte restrição: se no último vértice escolhido, digamos v_i , i é par, então o jogador B deve escolher um vértice v_{i+1} , adjacente a v_i e distinto de v_0, v_1, \dots, v_{i-1} . Da mesma forma, se i é ímpar, então o jogador A deve fazer uma jogada análoga. Vence o jogo aquele que puder fazer a última escolha de vértice.

Afirmção 1: *Se um grafo G não tem um emparelhamento perfeito, então o jogador A tem uma estratégia vencedora.*

Demonstração. A estratégia para o jogador A é a seguinte: escolha inicialmente um emparelhamento máximo M e um vértice livre em M , digamos v_0 . Nas jogadas subsequentes, qualquer que seja o vértice v_i que o jogador B escolha, o jogador A deve escolher o vértice v_{i+1} , tal que $v_i v_{i+1}$ seja aresta de M . É claro que tal procedimento produz um caminho alternante maximal em relação a M , restando mostrar que tal caminho tem comprimento par (o que garante a vitória do jogador A); vamos fazer isso provando o Lema 3.2. □

Afirmção 2: *Seja G um grafo que não tem um emparelhamento perfeito, e M um emparelhamento máximo de G . Todo caminho alternante maximal em relação a M , com um extremo livre por arestas de M , tem comprimento par.*

Demonstração. Suponha, por um instante, que exista um caminho alternante maximal P , com um dos extremos livre, de comprimento ímpar. Pela Definição 3.6. de caminhos alternantes, para P ter tal comprimento ambos os extremos devem ser livres, o que caracteriza P como um caminho aumentante, conforme Definição 3.7. Todavia, sabemos pelo Teorema 3.2.(Berge) que se existe um caminho de aumento para um emparelhamento, então tal emparelhamento não é máximo, o que contradiz o fato de M ser máximo. Dessa forma, todo caminho alternante maximal em relação a M , com um extremo livre por esse emparelhamento, tem comprimento par. □

Afirmção 3: *Se um grafo G tem um emparelhamento perfeito, então o jogador B tem uma estratégia vencedora.*

Demonstração. A estratégia para o jogador B é a seguinte: escolha inicialmente um emparelhamento perfeito M . A cada jogada, qualquer que seja o último vértice v_i escolhido por A , o jogador B deve escolher um vértice v_{i+1} , tal que $v_i v_{i+1}$ seja aresta de M . É claro que esse procedimento produz um caminho alternante em relação a M ; resta mostrar que ao final do procedimento também é produzido um caminho alternante de comprimento ímpar, o que garante a vitória do jogador B .

Suponha, por um instante, que o procedimento produza um caminho alternante P , de comprimento par. Para isso acontecer, o último vértice escolhido, digamos a , seria livre, pois do contrário o seria por uma aresta de M que ainda não estaria em P , logo o jogador B ainda teria opção de jogo. Todavia, o vértice a não pode ser livre, pois M é um emparelhamento perfeito. Dessa forma, o procedimento sempre produz um caminho alternante de comprimento ímpar. □

Observação 3.2. Note que, uma consequência muito interessante das Afirmções 1 e 3 é que elas garantem mutuamente suas recíprocas:

Segue imediatamente da Afirmção 3, que vale a recíproca da Afirmção 1.

Afirmção 4: *Se o jogador A tem uma estratégia vencedora para um grafo G , então G não tem um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Suponha, que A tenha uma estratégia vencedora e que G tenha um emparelhamento perfeito. Pelo teorema 3.4, se G tem um emparelhamento perfeito então B tem uma estratégia vencedora. Porém, dois jogadores não podem ter simultaneamente estratégias vencedoras, o que torna inválida a suposição inicial. □

Segue imediatamente da Afirmção 1, que vale a recíproca da Afirmção 3.

Afirmção 5: *Se o jogador B tem uma estratégia vencedora para um grafo G , então G tem um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Análoga a Afirmção 4. □

Resolução "Test Drive"

Retomando o problema do Test Drive da Página 21, vimos que o vendedor distribuiu as pessoas de maneira equivocada, deixando duas insatisfeitas. Vamos aplicar o Teorema de Berge e ajudar o vendedor a solucionar essa distribuição.

A Figura 3.14 mostra o equivoco do vendedor, o emparelhamento que ele construiu não é o máximo. Se encontrarmos um caminho alternante que comece e termine com vértices livres, encontraremos um caminho aumentante e pelo Teorema 3.2 (Berge), teremos um emparelhamento maior que o da Figura 3.14.

Vamos construir um caminho aumentante como mostra em destaque a Figura 3.15. Começando o caminho M _aumentante pelo vértice livre E , obtendo assim a aresta $\{E, Bravo\}$, como o caminho é alternante temos que a próxima aresta tem que pertencer ao emparelhamento, ou seja, tomamos então a aresta $\{A, Bravo\}$. Note que, o caminho tem que terminar com vértice livre e obedecendo as preferências podemos então tomar a aresta $\{A, Idea\}$, e assim conseguimos aumentar uma aresta no nosso emparelhamento, visto que, eliminamos a aresta $\{A, Bravo\}$ que já pertencia ao emparelhamento no caminho aumentante criado, e assim ficando insatisfeito apenas o cliente D .

Logo, encontramos um caminho M _aumentante e temos uma nova configuração na distribuição do Test Drive, dada pela Figura 3.16.

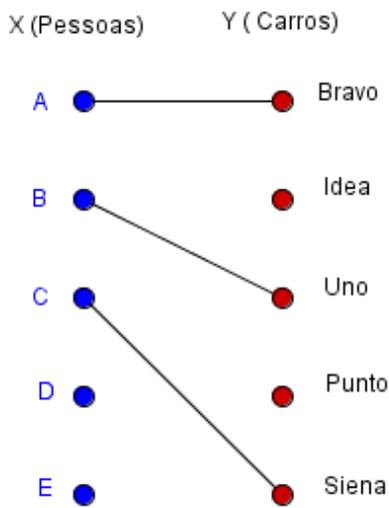


Figura 3.14: 1º distribuição.

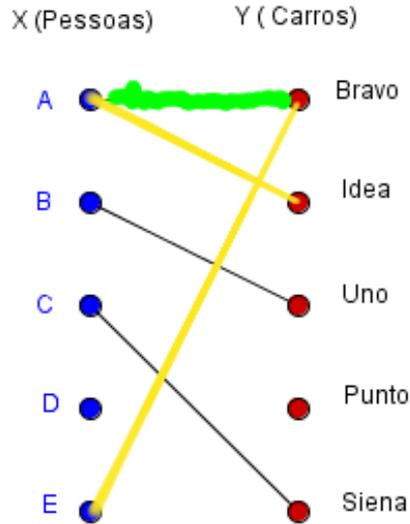


Figura 3.15: 2º distribuição.

Agora resta atender as preferências da pessoa D , de modo análogo a pessoa E . Começando do vértice livre D , obtendo a aresta $\{D, Siena\}$, percorrendo uma aresta que pertence ao emparelhamento $\{C, Siena\}$, pois o caminho é alternante, para ser um caminho aumentante precisamos terminar em vértice livre, logo, criamos a aresta $\{C, Punto\}$ e chegamos enfim ao emparelhamento perfeito e respeitando as preferências de cada cliente e aumentando a perspectiva de venda da concessionaria. Novamente, ex-

traindo a aresta $\{C, Siena\}$ do caminho aumentante que pertence ao emparelhamento, ilustrada pela Figura 3.17.

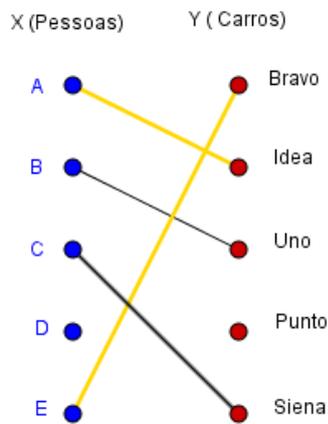


Figura 3.16: Nova configuração do teste drive.

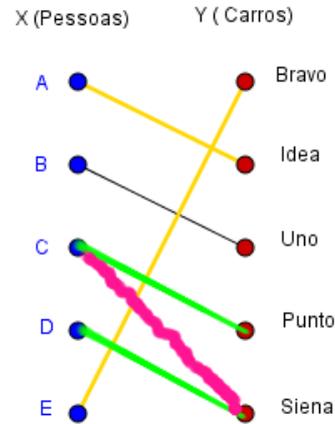


Figura 3.17: Distribuição teste drive.

Na Figura 3.18, encontramos a solução do problema Test Drive, ou seja, obtemos um emparelhamento perfeito que sature todos os vértices e assim o vendedor consegue realizar o Test Drive de maneira que todos saíssem satisfeitos e aumentando assim a eventual rentabilidade da concessionária.

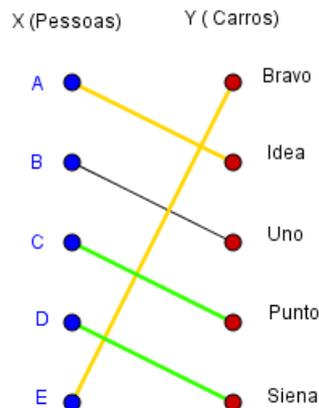


Figura 3.18: Emparelhamento perfeito teste drive.

3.3 Teorema de Hall e Aplicações

A teoria desenvolvida até momento e a resolução do problema Test Drive, nos impulsiona a levantar a seguinte questão: *"Sempre é possível encontrar um caminho M aumentante de tal forma que o emparelhamento seja perfeito?"*

Para responder tal questão, vamos apresentar o resultado obtido pelo

Matemático Britânico Philip Hall, que foi Professor de Matemática Pura da Universidade de Cambridge, de 1953 a 1967. Sua área de pesquisa foi teoria dos grupos e combinatória. Hall, em 1953 conseguiu apresentar uma condição necessária e suficiente para a existência de um emparelhamento perfeito, pois até então a comunidade científica não tinha clareza dessa existência.

Durante o passar do tempo surgiram algumas condições como por exemplo: *Dado um emparelhamento M de grafo bipartido G , com $V_1 \cup V_2$, conjunto de vértices. A condição para que exista o emparelhamento perfeito seria que $V_2 \geq V_1$. Tal condição não é o suficiente, como mostra a Figura 3.19. Note que, não é possível obtermos emparelhamento perfeito com apenas essa condição.*

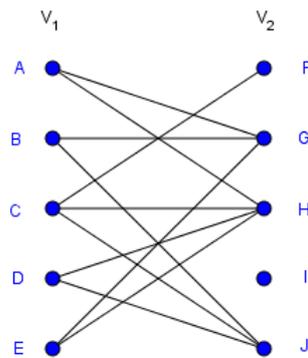


Figura 3.19: Condição $V_2 \geq V_1$.

A próxima situação nos dá uma condição suficiente porém não necessária para um emparelhamento perfeito. Veja o exemplo: *Seja G um emparelhamento perfeito num grafo bipartido com dois subconjuntos de vértices V_1 e V_2 disjuntos, é possível encontrar um emparelhamento perfeito se existir um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d_{V_1}(G) \geq k$ e $d_{V_2}(G) \leq k$. Considere as Figuras 3.20 e 3.21.*

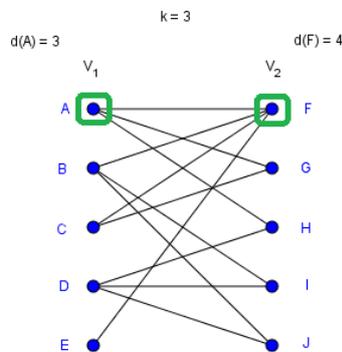


Figura 3.20: Fere a condição do resultado.

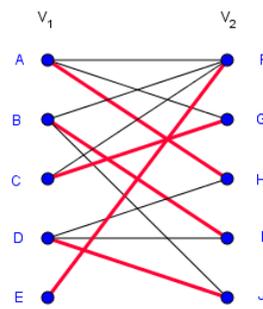


Figura 3.21: Emparelhamento Perfeito.

Como já descrito, esse resultado não nos dá um condição necessária, e por isso, o grafo da Figura 3.20, contradiz a condição de $d_{V_1}(G) \geq k$ e o $d_{V_2}(G) \leq k$ (em destaque os vértices A e E na Figura 3.20.) Apesar de admitir um emparelhamento perfeito, se considerarmos as arestas $\{A, H\}, \{B, I\}, \{C, G\}, \{D, J\}$ e $\{E, F\}$ como é visto na Figura 3.21.

Vimos algumas tentativas frustradas de caracterizar um parâmetro de existência de um emparelhamento perfeito em grafos bipartidos, mas foi em 1953 que *Philip Hall* estabelece uma condição necessária e suficiente para tal existência.

Teorema 3.3 (Teorema de Hall). *Seja $G = (V, A)$ um grafo bipartido, com $V = X \cup Y$ sem pontos isolados em X , sendo $|X| \leq |Y|$. G admite emparelhamento perfeito se, e somente se, $|N(S)| \geq |S|$ para todo o subconjunto $0 \neq S \subseteq X$.¹*

Demonstração. Vamos mostrar se M é um emparelhamento perfeito, então $|N(S)| \geq |S|$.

Em um emparelhamento perfeito, todos os vértices de X estão emparelhados com vértices diferentes de Y . Qualquer que seja o subconjunto S de X selecionado, temos que a vizinhança de conjunto é $|N(S)| \geq |S|$.

Vamos usar a contra-positiva para provar a volta.

Se M não é um emparelhamento perfeito, então, $|N(S)| < |S|$. Suponha que não admite emparelhamento perfeito. Seja M um emparelhamento máximo de G , esse não satura todos os vértices de X . Portanto existe, pelo menos, um vértice de X que é livre em M , considere x_0 esse vértice livre. Como M é emparelhamento máximo, pelo *Teorema de Berge*, não admite um caminho aumentável em G . Assim, se Z é um caminho alternante em G , que começa com x_0 e que termina em um vértice qualquer saturado de M , então Z possui uma das seguintes formas, como é ilustrado na Figura 3.22:

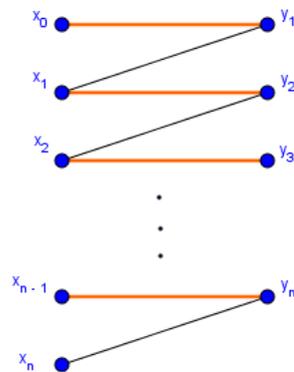


Figura 3.22: Ilustração do caminho Z .

¹A condição $|N(S)| \geq |S|$ é necessariamente natural. O difícil é provar a sua recíproca.

- (1) $x_0y_1x_1y_2x_2\dots x_{n-1}y_nx_n$;
 (2) $x_0y_1x_1y_2x_2\dots x_{n-1}y_n$.

Sejam y_1x_1, y_2x_2, \dots arestas que pertencem ao emparelhamento M e as outras x_0y_1, x_1y_2, \dots não estão em M . Note que em (2) y_n é o vértice saturado de M . Além disso a aresta $x_{n-1}y_n$ não está em M , mas como y_n é um vértice saturado podemos estender o caminho, no caso adicionamos a aresta y_nx_n , em que x_n está emparelhado com y_n em M , transformando o caminho no tipo (1).

Seja R o conjunto formado por todos os vértices de X , que podem ser estendidos a partir de x_0 num caminho alternante em M .

Seja T o conjunto formado por todos os vértices de Y que podem ser estendidos a partir de x_0 num caminho alternante em M .

Temos que $|R| = |T|$, pois cada um dos x_0, x_1, \dots, x_n tem um correspondente em Y sendo ele qualquer y_i .

Considere $S = R \cup \{x_0\}$, se um vértice y_i é adjacente a um vértice de S , pode ocorrer as seguintes situações:

- i) y_i é adjacente a x_0 ;
 ii) y_i é adjacente a um dos vértices $x_i \in X$, que ocorre em qualquer caminho alternante que comece com x_0 .

Por i), temos que $y_i \in T$, assim y_i é o vértice que termina o caminho alternante de comprimento 1.

Por ii), se Z é um caminho alternante do vértice x_0 até o vértice x_i , então y_i pertence ao caminho ou o caminho é aumentante adicionado a aresta x_iy_i , obtendo um caminho alternante maior. Neste caso, $y_i \in T$. Isso prova que $N(S) \subseteq T$. Pela construção de T , tem-se que $T \subseteq N(S)$ e portanto $N(S) = T$.

Por outro lado, como $S = R \cup \{x_0\}$, temos que $|S| = |R| + 1$. Como $|R| = |T|$, tem-se:

$$|S| = |R| + 1 = |T| + 1 = |N(S)| + 1 \implies |S| > |N(S)|,$$

o que é absurdo. Assim, concluímos que G admite emparelhamento perfeito. \square

Para ilustrar o Teorema de Hall, vamos fazer alguns exemplos, sendo o último a situação problema do Test Drive, fazendo uma releitura com o foco na existência de um emparelhamento perfeito.

Exemplo 3.5. Considere o grafo $G = (X \cup Y, A)$ e M o conjunto das arestas $\{\{B, E\}, \{C, F\}, \{D, H\}\}$, um emparelhamento máximo que não incide em todo X de G . Defina $X_0 = A$, $Z = \{A, E, B, F, C\}$, $S = \{A, B, C\}$ e $T = \{E, F\}$.

Portanto, o grafo dado pela Figura 3.23, não admite emparelhamento perfeito. De fato, tomando os conjuntos definidos acima, temos que, $S - \{A\}$ estão emparelhados com $T = \{E, F\} = N(S)$. Então, há uma bijeção entre $S - \{A\}$ e T . Assim, $2 = |N(S)| < |S| = 3$, o que contradiz o Teorema de Hall.

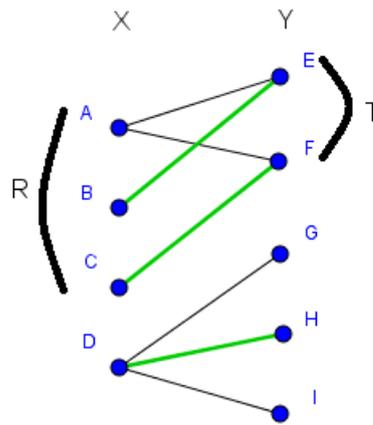


Figura 3.23: Aplicação do Teorema de Hall.

Exemplo 3.6. Considere o grafo $G = (X \cup Y, A)$ e M o conjunto das arestas $\{\{B, E\}, \{C, G\}, \{D, H\}, \{J, K\}\}$, um emparelhamento máximo que não incide em todo X de G . Defina $X_0 = A$, $Z = \{A, H, D, k, J, G, C\}$, $S = \{A, C, D, J\}$ e $T = \{G, H, K\}$.

Portanto, o grafo dado pela Figura 3.24 não admite emparelhamento perfeito. Visto que não há arestas ligando S a $Y - T$. Seja $u \in S$ e $v \in Y - T$, se $\{u, v\} \in M$ temos, $u \neq A$, pois M não incide em A . Se $u \neq A$, por construção, M incide em u o que contradiz a condição de ser emparelhamento.

Se $\{u, v\} \in A - M$, como M incide em u com um caminho $Ay_i u$ M_- alternante, assim $Ay_i uv$, é M_- aumentante, o que contradiz o Teorema de Berge. Logo, $S - \{A\} = \{C, D, J\}$ está emparelhado com $T = \{G, H, K\} = N(S)$. Assim, $3 = |N(S)| < |S| = 4$, o que contradiz o Teorema de Hall.

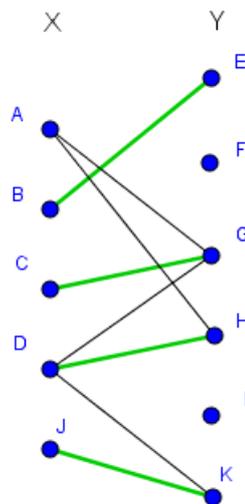


Figura 3.24: Aplicação do Teorema de Hall.

Exemplo 3.7. Suponha que a concessionária, com a queda de vendas resolva incrementar um adicional como cortesia na compra de uns dos modelos. Os adicionais disponíveis são: Ar Condicionado (AC), Roda Liga Leve (RL), Direção Hidráulica (DH) e Vidros Elétricos (VE). Em contrapartida, no estoque da concessionária só possui um adicional de cada tipo, que se adapta em quaisquer um dos modelos, ou seja, 1 (AC), 1(RL), 1(DH) e 1 (VE) e as preferências de cada cliente pelos adicionais estão disposta em um grafo bipartido como mostra a Figura 3.25. E nossa pergunta é: seria possível agregar a compra de exatamente quatro modelos de carro, um adicional de acordo com a preferência de cada cliente?

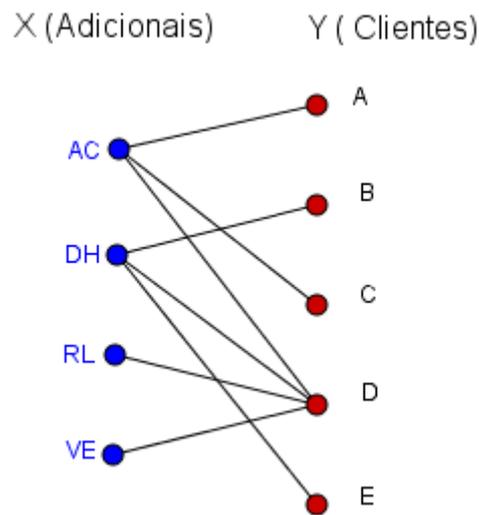


Figura 3.25: Preferências em Adicionais.

Com essa configuração a concessionária perderá uma venda, pois o único cliente que optou pela Roda de Liga Leve e Vidros Elétrico é o mesmo e supondo que ele não pode levar simultaneamente dois adicionais de cortesia.

Analisando a situação descrita do ponto de vista de grafos temos um conjunto $S = \{RL, VE\}$, cuja a cardinalidade é dada por $|S| = 2$, e o vértice adjacente aos vértices do conjunto S é o cliente D e portanto $|N(S)| = 1$ e pelo Teorema de Hall, não é possível agregar adicional aos quatro clientes, pois $|S| > |N(S)|$.

Corolário 3.1. *Seja $G = (V, A)$ um grafo bipartido, com $V = X \cup Y$ e $|X| = |Y|$. Existe um emparelhamento perfeito em G se, e somente se, $|N(S)| \geq |S|$, para todo o subconjunto $S \neq \emptyset \subseteq X$.*

Demonstração. Vamos mostrar que, se M é um emparelhamento perfeito, então, $|N(S)| \geq |S|$.

Se M é emparelhamento que incide em X , pelo Teorema de Hall vale $|N(S)| \geq |S|$. Reciprocamente, existe um emparelhamento que incide em todo X . A quantidade de

elementos de Y tais que M incide nele é $|X|$. Como $|Y| = |X|$, logo M incide em todo Y . \square

Através do Teorema de Hall, é possível obter um procedimento, mais conhecido como *representação algorítmica do Teorema de Hall* que identifica se tal emparelhamento é perfeito. A Figura 3.26 representa um fluxograma do algoritmo.

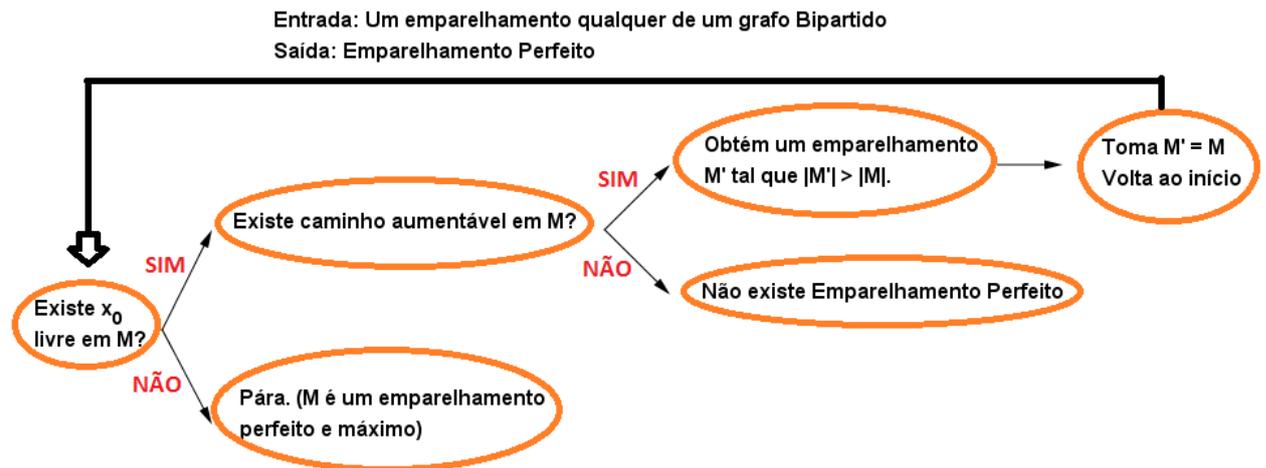


Figura 3.26: Fluxograma do Teorema de Hall.

Descrevemos agora alguns exemplos que envolvam *O problema do emparelhamento estável* que são aplicações do teorema de Hall.

Os pesquisadores americanos David Gale e L. S. Shapley foram os primeiros a desenvolver um algoritmo eficiente para resolver esses problemas. Uma situação que envolve tal algoritmo poderia ser descrita através do exemplo a seguir, que pode ser obtido em [18].

A fim de analisar as questões de existência, vamos estudar um problema mais simples: o Problema do Casamento Estável.

Exemplo 3.8 (Casamento Estável). Esse consiste em uma comunidade de n homens e n mulheres, onde cada mulher conhece **exatamente** k homens e cada homem conhece exatamente k mulheres, com $k > 0$, então é possível casar toda mulher com um homem conhecido do sexo oposto por ordem de preferência para o casamento.

Solução: Seja $\emptyset \neq S \subseteq X$, considere:

$$N = \{(x, y); x \in S\};$$

$$M = \{(x, y); y \in N(S)\}.$$

Pelo princípio multiplicativo, cada $x \in S$ gera k arestas em N . Pelo princípio multiplicativo, temos $|S|$ modos de escolher x e k modos de escolher y assim $|N| = |S| \cdot k$.

Analogamente, cada $y \in N(S)$ gera k aresta em M . Podemos escolher y de $|N(S)|$ maneiras e escolher x de k modos, logo $|M| = k \cdot |N(S)|$.

Afirmamos que: $N \subseteq M$. De fato, se $(x, y) \in N$, então $x \in S$ e $y \in N(S)$ e portanto $(x, y) \in M$. Assim, $|N| \leq |M| \Rightarrow |S| \cdot k \leq k \cdot |N(S)| \Rightarrow |S| \leq |N(S)|$. Pelo Teorema de Hall temos o resultado.

As Figuras 3.27 e 3.28, exemplificam o que acabamos de descrever.

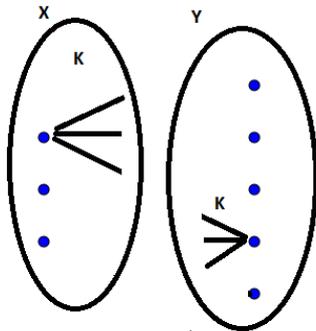


Figura 3.27: Ilustração das k arestas.

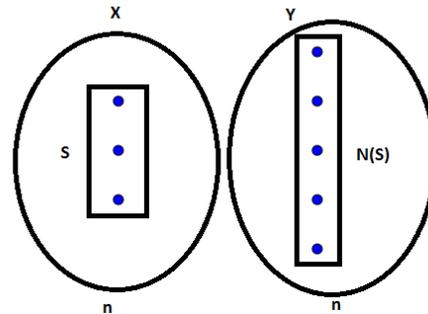


Figura 3.28: Ilustração dos subconjuntos S e $N(S)$.

Observação 3.3. Note que a condição de "exatamente" não pode ser trocada por "pelo menos". Com efeito, pela Figura 3.29, temos que $d(x) \geq 2 \forall x \in V(G)$, mas não existe emparelhamento perfeito.

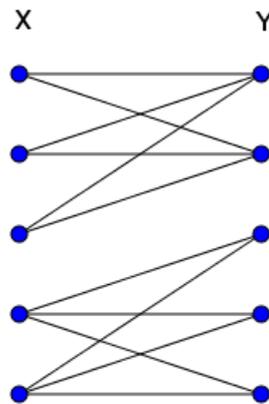


Figura 3.29: Condição de Exatamente.

Teorema 3.4. *Sempre existe um subconjunto de casamentos estáveis.*

Demonstração. Vamos dividir em duas etapas:

1º etapa: Determinação dos casais.

O teorema será provado apresentando-se um método para encontrar o emparelhamento estável. Inicialmente, cada homem propõe casamento à sua mulher favorita. Cada

mulher rejeita todas as propostas que recebeu, exceto a sua favorita. Os casais formados são então considerados noivos. Na segunda etapa, os homens que foram rejeitados propõem casamento a sua próxima escolha. Cada mulher então escolhe o seu favorito entre os novos proponentes e seu noivo. O favorito torna-se então (ou permanece sendo) seu noivo. Esse procedimento então continua sendo repetido. Em algum momento (não mais do que n^2 estágios), todas as mulheres terão recebido propostas, pois se alguma mulher não recebeu proposta, ela não está noiva e ainda há homens disponíveis efetuando propostas. Além disso, os homens não podem propor casamento à mesma mulher duas vezes. Assim que a última mulher recebeu sua proposta, o procedimento é encerrado, e cada mulher deve então casar-se com seu noivo. Note que, como todas as mulheres recebem propostas, todas ficam noivas, pois uma mulher só troca seu noivo por outro melhor.

2º etapa: O conjunto de casamentos assim obtido é estável.

Suponha que um homem H e uma mulher M não estão casados, mas H prefere M à sua mulher. Então em algum momento H propôs a M e em algum momento foi rejeitado em favor de alguém que M preferia. Dessa forma, M prefere seu marido a H e não há instabilidade. \square

Observe que, o procedimento acima funciona de maneira similar quando a quantidade de homens e mulheres não é a mesma. No caso de haver mais mulheres do que homens, o procedimento termina assim que todos os homens ficam noivos. No caso de haver mais homens que mulheres, o procedimento termina assim que todos os homens ou estão noivos ou foram rejeitados por todas as mulheres.

O procedimento descrito no qual os homens propõem casamento às mulheres resulta em uma solução ótima para os homens. Adotando um procedimento análogo no qual as mulheres é que propõem casamento aos homens, a solução é ótima para as mulheres. As soluções obtidas nesses dois procedimentos somente serão iguais quando houver um único conjunto de casamentos estáveis.

O exemplo seguinte mostra como as ideias da demonstração do teorema dos casamentos, além do próprio teorema, podem ser aplicadas.

Exemplo 3.9. Prove que, se todos os graus de elementos da mesma classe de um grafo bipartido são iguais, então é possível realizar um emparelhamento completo com os vértices da classe menor.

Solução: Sejam V_1 e V_2 as classes do grafo bipartido, onde $|V_1| = a$ e $|V_2| = b$ com $a \leq b$. Seja D o grau de cada vértice de V_1 e d o grau de cada vértice de V_2 . A quantidade de arestas do grafo é $D \cdot a = d \cdot b$, de modo que $D \geq d$. Seja $S \subset V_1$, temos que provar que $|N(S)| \geq |S|$. Como saem $|S| \cdot D$ arestas de S e cada elemento de $N(S)$ recebe no máximo d arestas, $|S| \cdot D \geq |N(S)| \cdot d \Rightarrow |S| \cdot d \geq |N(S)| \cdot d \Leftrightarrow |S| \geq |N(S)|$.

Como o grafo satisfaz a condição de Hall $|N(S)| \geq |S|$ $0 \neq S \subseteq X$, o teorema fica resolvido pelo Teorema 3.26 (Casamento Estáveis).

Exemplo 3.10. Uma herança deve ser dividida entre n pessoas, cujos valores pessoais sobre diversos elementos da herança podem ser diferentes, isto é, é possível que uma casa valha metade da herança para uma pessoa e dois quintos para outra. É possível dividir a herança de modo que todos achem que têm pelo menos $\frac{1}{n}$ da herança?

Solução: É possível. Um dos herdeiros divide a herança no que ele considera n partes iguais. Para cada parte, ele pergunta para cada herdeiro se ele quer essa parte, ou seja, se cada parte é, para ele, pelo menos $\frac{1}{n}$ da herança. Com isso, ele obtém uma lista. Agora se todo conjunto de k herdeiros está satisfeito com pelo menos k partes do total, segue pelo teorema dos casamentos é possível fazer a divisão.

Caso contrário, seja P que é o maior conjunto de herdeiros tal que, em conjunto, eles estejam satisfeitos com menos do que $|P|$ partes. Considere o conjunto P' de herdeiros fora de P ; todo conjunto $S \subset P'$ desses herdeiros está satisfeito com pelo menos $|S|$ partes, pois caso contrário juntamos S a P , obtendo um conjunto maior, o que por hipótese não é possível, pois P é máximo. Assim, pelo teorema dos casamentos é possível dar as partes da herança de P' .

Note que $|P| < n$, pois o primeiro herdeiro não está em P . Deste modo, tomamos os elementos de P e refazemos a divisão entre os elementos de P , já que o primeiro elemento está em P' e já pegou sua parte.

Observação 3.4. Na verdade, mesmo que não valha a condição do Teorema dos Casamentos, temos cobertura mínima² e emparelhamentos máximos bem comportados em grafos bipartidos.

Exemplo 3.11 (Teste seletivo para universidade). Vamos supor que um determinado estudante foi aceito pela universidade A e encontra-se na lista de espera da universidade B (que ele prefere em relação à A). Se por algum motivo, o estudante venha a ser chamado pela universidade B , ele provavelmente abandonaria a universidade A para estudar na universidade B , e deixaria A com uma vaga ociosa. Com essa vaga disponível, A também poderia chamar algum candidato de sua lista de espera, e deixaria uma vaga ociosa em alguma outra universidade. Essa situação poderia fazer com que terminássemos o processo seletivo com vagas ociosas em algumas universidades e alunos interessados nelas, mas que não foram aceitos em nenhuma universidade.

O objetivo do algoritmo é distribuir os candidatos entre as vagas de forma a satisfazer ambos os grupos, candidatos e universidades. Vamos fazer alguns considerações para obtermos um resultado satisfatório tanto para as universidades, quanto para o candidatos.

²Veremos na próxima seção

Considere um processo seletivo no qual n candidatos devem ser designados para m universidades, onde q_i é a quantidade de vagas na i -ésima universidade. Cada candidato deve listar as universidades por ordem de preferência (sem empates), excluindo apenas aquelas em que não deseja estudar em hipótese alguma. Da mesma forma, cada universidade deve listar os candidatos (dentre os que aplicaram para ela), excluindo apenas aqueles estudantes que não admitiria de forma alguma.

Considere um processo seletivo em que haja dois candidatos α e β e duas universidades A e B com uma vaga cada uma. O candidato α prefere a universidade A e o candidato β tem interesse pela universidade B , mas a preferência da universidade A é o candidato β e a universidade B prefere o candidato α . Nesse caso, não há uma distribuição que satisfaça todas as preferências.

Considerando que as universidades existem para atender os estudantes, e não o contrário, vamos designar α para universidade A e β para a universidade B . Assim, será adotada como premissa que, quando outros aspectos forem iguais, o desejo dos candidatos terá prioridade em relação ao das universidades.

O ponto central é obter uma distribuição onde não ocorra a situação definida a seguir.

Definição 3.9. *Uma designação de candidatos para universidades é considerada instável se há dois candidatos α e β designados para as universidades A e B , respectivamente, embora β prefira a universidade A à universidade B , e a universidade A prefira o candidato β ao candidato α .*

Supondo que a situação definida acima ocorra, o candidato β tentaria transferir-se para a universidade A , que o admitiria em detrimento do candidato α . Essa mudança seria vantajosa tanto para β quanto para A . Dessa forma, a distribuição original é considerada instável, pois pode ser subvertida por β e A agindo juntos, de maneira que ambos sejam beneficiados.

A condição essencial que deve ser satisfeita para uma designação de candidatos para universidades é que ela não tenha instabilidades. Entretanto, não sabemos se é sempre possível obter uma designação sem instabilidades, ou seja, um emparelhamento estável para qualquer combinação de candidatos, universidades e preferências.

3.4 Coberturas

Quando trabalhamos com emparelhamentos, estamos interessados em encontrar um emparelhamento máximo, e para tanto, uma forma de estimar esse emparelhamento é a ideia de *Coberturas*.

Definição 3.10. *Uma Cobertura de um grafo, $G = (V, A)$ é um subconjunto K de vértices, tal que todas as arestas de G têm pelo menos uma extremidade em K .*

Exemplo 3.12. Suponha que queremos instalar câmeras de segurança nas ruas do bairro "gaviões da fiel". Em quais pontos deveríamos fazer tal instalação de modo de minimizar o uso de câmeras? Considere o grafo G das Figuras 3.30 e 3.31 que representam as ruas do bairro.

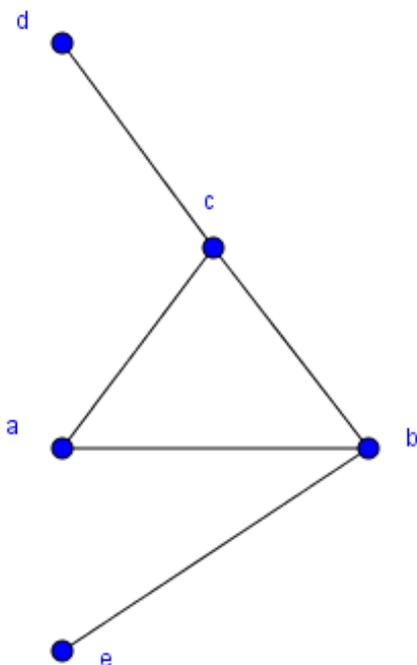


Figura 3.30: Instalações de Câmeras.

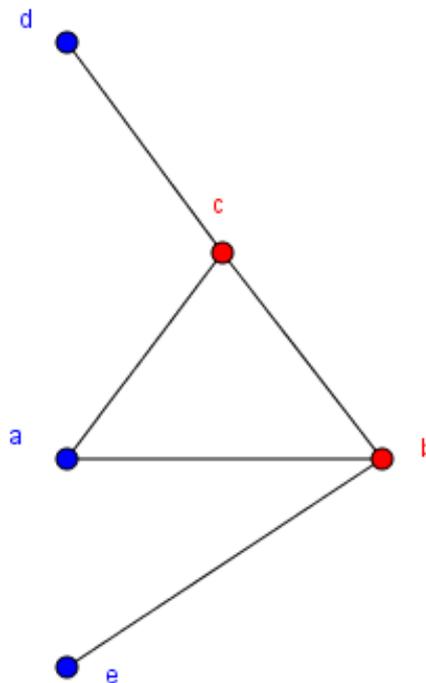


Figura 3.31: Instalação de duas Câmeras.

Se considerarmos a cobertura $K_1 = \{a, b, d\}$, Assim K_1 dariam conta de vigiar todo bairro, mas não seria a cobertura minimal. Já a cobertura $K_2 = \{b, c\} \subsetneq K_1$ vigia todas as ruas, e é a situação que usamos o menor número de câmeras. Note que $M = \{ab, cd\}$ é um emparelhamento em G , mas $|M| = 2 \leq |K|$, onde K é uma cobertura.

Observação 3.5. Seja K uma cobertura e M um emparelhamento de G , assim $|M| \leq |K|$. De fato, como M é emparelhamento as arestas em M são disjuntas duas a duas e cada aresta deve conter pelo menos um extremo em K , logo $|M| \leq |K|$.

Definição 3.11. Denotamos K' uma cobertura mínima e M^* um emparelhamento máximo.

Observação 3.6. Há casos onde $|M^*| < |K'|$, ou seja, a cardinalidade do emparelhamento máximo é estritamente menor que a cardinalidade da cobertura mínima. O Exemplo 3.13 ilustra essa situação.

Exemplo 3.13. Considere o grafo G disposto em forma de um ciclo, como exposto na Figura 3.32. Note que $|M^*| = 2$ e $|K'| = 3$, onde $M^* = \{ab, de\}$ e $|K'| = \{a, c, d\}$, ou seja, $|M^*| < |K'|$.

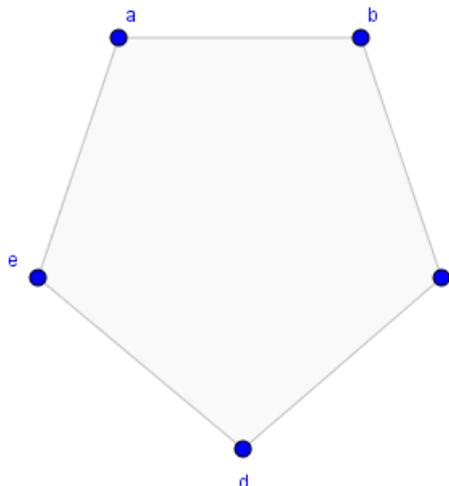


Figura 3.32: $|M^*| < |K'|$.

Proposição 3.2. *Seja M um emparelhamento e K uma cobertura com $|M| = |K|$. Então M é emparelhamento máximo e K é cobertura mínima.*

Demonstração. Note que $|M| \leq |M^*| \leq |K'| \leq |K|$. Se $|M| = |K|$ então $|M| = |M^*| = |K'| = |K|$.

□

Teorema 3.5 (Konig - Egeryáry). *Em um grafo bipartido $|M^*| = |K'|$.*

Demonstração. Seja $G = (X \cup Y, A)$ um grafo bipartido. Seja $|M^*|$ um emparelhamento máximo. Pelo proposição 3.2, basta exibir uma cobertura $|K'|$ com $|K'| = |M^*|$. Defina $U = \{\text{vértices de } X \text{ tais que } M^* \text{ não incide em } X\}$

$Z = \{v \in V; v \text{ está ligado a algum vértice } u \in U \text{ via um caminho } M^* \text{ alternante}\}$

Seja $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Temos os seguintes casos:

1º caso: Se $U = \emptyset$, tome $K' = X$.

2º caso: se $U \neq \emptyset$, note que $U \subseteq S$.

Vimos que $T = N(S)$. Tome $K' := (X - S) \cup T$, que é a cobertura.

Não existe aresta de S a $(Y - T)$.

$$\begin{aligned} |K'| &= |X| - |S| + |T| \\ &= |X| - |U| \\ &= |M^*|. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6. *Seja G um grafo e $\alpha(G)$ a quantidade de arestas de um emparelhamento máximo de G e $\beta(G)$ é a quantidade de vértices de uma cobertura mínima de G . Então $\alpha(G) \leq \beta(G)$.*

Demonstração. Vamos provar que para todo emparelhamento M e cobertura K , sempre $|M| \leq |K|$. Basta observar que para cada aresta de M podemos escolher a ponta da aresta que está em K . Se as duas pontas estiverem em K , escolha qualquer uma, note que não pode ter vértices repetidos, então $|M| \leq |K|$, ou seja, $\alpha(G) \leq \beta(G)$. □

Exemplo 3.14. Considere o grafo da Figura 3.33, onde $\beta(G) = 3, \alpha(G) = 3$ e $\alpha'(G) = 4$. Neste grafo, temos os conjuntos relacionados aos parâmetros β, α e α' são $K' = \{b, c, d\}, M^* = \{ab, cd, fe\}$ e $S = \{a, d, g, e\} = V - K'$, respectivamente.

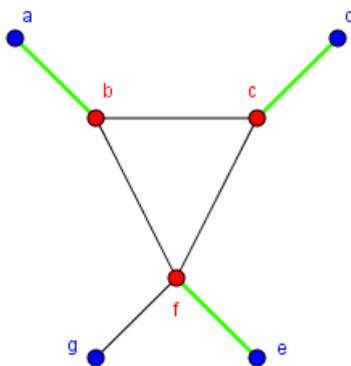


Figura 3.33: Exemplo 3.14.

Exemplo 3.15. Vejamos mais um exemplo de aplicação da notação. Considere o grafo da Figura 3.34, onde $\beta(G) = 2, \alpha(G) = 2$ e $\alpha'(G) = 4$. Neste grafo, temos os conjuntos relacionados aos parâmetros β, α e α' são $K' = \{a, b\}, M^* = \{ca, bf\}$ e $S = \{c, d, e, f\} = V - K'$, respectivamente.

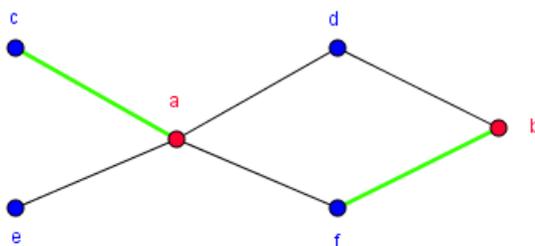


Figura 3.34: Exemplo 3.15.

4 Considerações Finais

No transcorrer da pesquisa, foi possível notar o potencial da Teoria dos Grafos. Por se tratar de um conteúdo abrangente e interdisciplinar, fica um questionamento sobre sua inserção na grade curricular dos cursos de licenciatura em matemática.

No trabalho proposto, vimos alguns problemas clássicos da Teoria de Grafos e fizemos uma introdução à teoria elementar. Num segundo momento formalizamos os emparelhamentos em grafos bipartidos. Procuramos expor várias figuras exemplificando a teoria para facilitar o entendimento, o que é visto com bom olhos entre professores. Dessa forma, esta dissertação se posiciona como um material introdutório para professores que desejam se familiarizar sobre o tema.

Abordamos desde o princípio do trabalho o problema Test Drive, que foi modelado através de grafo bipartido para aplicarmos o Teorema de Berge e conseqüentemente analisar a existência de Emparelhamento Perfeito em Grafos Bipartidos. Em linhas gerais, a Teoria dos Grafos é um conteúdo relevante para a compreensão de várias situações do cotidiano, o que é significativo quando propomos atividades que relacionam teoria e prática de forma conjunta, estando, portanto, em consonância com o educador matemático Ubiratam D'Ambrósio que preceitua:

conteúdo..."Toda teorização se dá em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. Isto é, partir para a prática é como um mergulho no desconhecido (D'Ambrósio, 1998, p.79)[19]. E continua: "A pesquisa é um elo entre a teoria e a prática" (D'Ambrósio, 1998, p.80)[19].

A Apêndice

A.1 Demonstração do Teorema de Euler - Pontes de Konigberg

Pontes de Konigberg

Euler transformou o problema das pontes de Konigberg, em (multi)grafos precisamos encontrar um circuito que percorra cada aresta exatamente uma vez, (multi)grafos para os quais isso é possível são chamados de *eulerianos*, como mostra a Figura A.1.

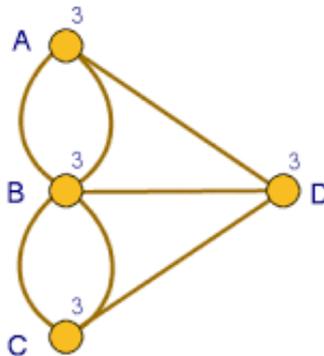


Figura A.1: Modelo de grafo para a representação da sete pontes de konigberg.

Teorema A.1. *O (multi)grafo conexo $G = (V, A)$ é euleriano se, e somente se, os graus de todos os vértice de G são pares.*

Demonstração. Vamos prova que, se G é um grafo euleriano, então os graus de todos os vértices de G são pares.

Suponha que o (multi)grafo seja euleriano. Então G possui um circuito euleriano. Podemos contar os vértices durante o percurso, já que esse contém todas as arestas, pois é euleriano. Em cada vértice vamos acrescentar uma unidades a contagem partindo do valor zero de um vértice qualquer, pois em cada vértice tem uma entrada e uma saída, portanto os graus dos vértices serão pares.

Reciprocamente, suponha agora que todos os vértices de G tenham grau par. Tome um vértice qualquer de G , digamos o vértice i , e comece a percorrer o (multi)grafo a partir dele, sem repetir aresta, até não conseguir mais prosseguir, onde todas as arestas incidentes a esse vértice já tenham sido percorridas. Como todo vértice tem grau par, esse vértice tem que ser o i . Se o circuito C assim construído tiver todas as arestas, a demonstração estará concluída. Suponha, no entanto, que G contém uma aresta e que não foi percorrida. Como G é conexo, existe um caminho entre algum vértice do circuito e alguma das extremidades da aresta e , por exemplo entre j , vértice do circuito e k , extremidade de e , este caminho não contém aresta de C . Comece o circuito do (multi)grafo a partir de j utilizando o caminho até k , em seguida a aresta e , e depois percorra livremente, sem repetir aresta ou utilizar aresta de C . Como C é um circuito, mesmo tirando as arestas de C do (multi)grafo, os vértices continuam a ter grau par, portanto essa nova incursão pelo (multi)grafo só pode parar em j , completando um novo circuito, C_0 . Note que podemos combinar os dois circuitos de modo a formar um só que contenha todas as arestas de C e C_0 . Basta percorrer C começando em j e quando voltar a j percorrer C_0 em seguida. Portanto, G é um (multi)grafo euleriano. Como mostra a Figura A.2.

□

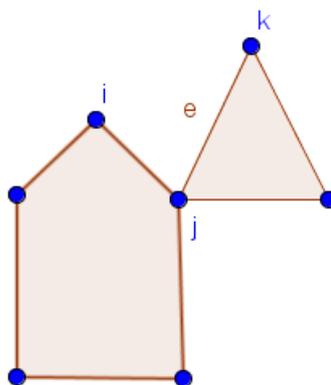


Figura A.2: Ilustração da demonstração.

Referências Bibliográficas

- [1] BRASIL, P. Ensino médio—orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, p. 32, 2002.
- [2] BRASIL, M. Orientações curriculares para o ensino médio. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. *Secretaria de Educação Média e Tecnológica/MEC. Brasília*, 2006.
- [3] ES, S. *Curriculo Básico Escola Estadual - SEDU*. 2009. Governo do Estado do Espírito Santo. [Http://sedu.es.gov.br/Media/sedu/pdf](http://sedu.es.gov.br/Media/sedu/pdf).
- [4] MALTA, G. H. S. *Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, 2008.
- [5] NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. Grafos: introdução e prática. *Editora Edgard Blücher*, 2009.
- [6] JURKIEWICZ, S. Grafos—uma introdução. *São Paulo: OBMEP*, 2009.
- [7] SANTOS, J. P. de O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à análise combinatória*. [S.l.]: Ed. Ciencia Moderna, 2007.
- [8] VIAGENS, D. das . *Kaliningrado*. acesso – dezembro/2016. [Www.diario1001viagens.com/kaliningrado.html](http://www.diario1001viagens.com/kaliningrado.html).
- [9] CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar volume 4: Combinatória*. [S.l.]: SBM, 2012.
- [10] FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. Círculos matemáticos: A experiência russa. *Rio de Janeiro, Impa*, 2010.
- [11] LABER, E. *Estruturas Discretas*. acesso – dezembro/2016. [Http://www.di.inf.puc.rio.br/labber/lista-grafos-gab.pdf](http://www.di.inf.puc.rio.br/labber/lista-grafos-gab.pdf).
- [12] BERGE, C.; MINIEKA, E. *Graphs and hypergraphs*. [S.l.]: North-Holland publishing company Amsterdam, 1973.

-
- [13] FERREIRA, V. C. D. S. De grafos a emparelhamentos: uma possibilidade viável de encantar-se com a matemática. *Tese de Mestrado*, 2014.
- [14] PAZINATTO, C. B. Emparelhamentos em grafos bipartidos: Uma introdução. *Tese de Mestrado*, 2011.
- [15] WEST, D. B. et al. *Introduction to graph theory*. [S.l.]: Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001.
- [16] GALE, D.; SHAPLEY, L. S. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, v. 120, n. 5, p. 386–391, 2013.
- [17] CARMELO, E. L. do M. *Matemática Discreta*. 2012. Notas de Aula.
- [18] WIKIPEDIA. *Problema do casamento estável*. acesso – dezembro/2016. www.wikipedia.org/wiki/Problema_do_emparelhamento.
- [19] D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: Da Teoria à Prática, 4ª edição [1a. [S.l.]: Campinas, Ed. Papyrus, 1998.*