Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas Departamento de Matemática
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional

Trigonometria e Aplicações

por Reges Vanclei Gaieski

Orientador: Prof. Dr. Laerte Bemm

Maringá - PR
2014

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas Departamento de Matemática
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional

Trigonometria e Aplicações

por Reges Vanclei Gaieski

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - do Departamento de Matemática da UEM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Laerte Bemm

Maringá
2014

G137 t Gaieski, Reges Vanclei
Trigonometria e Aplicações/ Reges Vanclei Gaieski.- Maringá: UEM/ PROFMAT, 2014.
51 p.: il.: tabelas.
Inclui bibliografia
Dissertação (mestrado) Universidade Estadual de Maringá, 2014
Orientador: Prof. Dr. Laerte Bemm
1. Matemática. 2. Trigonometria. I. Título.
CDD 20ª ed. 510
514
516.24

Bibliotecária - Hebe Negrão de Jimenez – CRB 101/9

Agradecimentos

Quero manifestar aqui minha sincera gratidão a todas as pessoas que de alguma forma me ajudaram a conquistar mais essa vitória, dentre a quais destaco:

- aos meus pais Jacir e Inês, por sempre estarem do meu lado e me apoiarem nessa etapa da minha vida, para o meu sonho de conseguir o diploma de graduação e certificado de mestre;

- aos meus avós Arcila e Estevão e a minha irmã Karina pela torcida, além do meu avô Alberto, que no decorrer do curso veio a faltar, pelas rezas para que esse dia chegasse;

- aos meus amigos e colegas de trabalho pelo apoio e incentivo, para que eu pudesse dar mais esse passo na minha vida;

- a meu orientador, Prof. Dr. Laerte Bemm, pela coragem de me orientar, pelos incentivos constantes, pela escolha do tema e, principalmente, pela excelente orientação;

- a minha namorada Patrícia, pela paciência, compreensão e, especialmente, por ter suportado meu stress nos últimos meses de mestrado;

Finalmente, quero agradecer ao departamento de Matemática da UEM pela oportunidade de estudar e a CAPES pelo incentivo financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um breve estudo sobre a Trigonometria. Iniciamos com algumas definições e resultados sobre esse tema, como a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Mostramos como a Trigonometria foi utilizada na antiguidade e apresentamos algumas situações problemas que podem ser resolvidos utilizando a trigonometria. Finalmente apresentamos aplicações em outras áreas, como por exemplo em topografia.

Abstract

In this work we present a brief study of trigonometry. We begin with some definitions and results on this topic, as the Law of Sines and Law of cosines. We show how trigonometry was used in antiquity and present some situations problems that can be solved using trigonometry. Finally we present some applications in other areas, such as in surveying.

Índice de Notação

$\overrightarrow{AB}$	Semirreta com origem em A passando por B.
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta determinada pelos pontos A e B.
$\overset{\frown}{AB}$	Arco de uma circunferência passando pelos pontos A e B.
$\widehat{BAC}$	Ângulo com vértice em A e lados BA e CA.
$B\hat{A}C$	Medida do ângulo $B\hat{A}C$.
$\overline{AB}$	Medida do segmento AB.
$C(O,r)$	Circunferência com centro O e raio r.
ΔABC	Triângulo ABC.
$\hat{Z}$	Ângulo Zênital.
D_N	Diferença de nível.
D_i	Distância Inclinada.
D_H	Distância horizontal.
D_V	Distância vertical.
h_i	Altura do teodolito.
h_s	Altura da baliza.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem por objetivo principal apresentar ao leitor, principalmente ao aluno de Ensino Médio, aplicações práticas da trigonometria. Para tanto, dividimos o trabalho em quatro capítulos.

No capítulo 1, introduzimos alguns conceitos básicos de Geometria Euclidiana, algumas notações que usamos no desenvolvimento do trabalho e também apresentamos alguns resultados de Geometria Euclidiana que nos serão úteis nos capítulos seguintes.

No capítulo 2, falamos um pouco sobre a história da trigonometria e o surgimento de alguns termos da trigonometria. Demonstramos o Teorema de Pitágoras, apresentamos os conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo e na circunferência .

No capítulo 3, apresentamos a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, com suas respectivas demonstrações.

No capítulo 4, abordamos algumas aplicações da trigonometria, algumas elementares, outras nem tanto. Faremos uma breve abordagem da aplicação da trigonometria na antiguidade, onde foi usada para determinar o raio da terra, e as atuais, aplicação na área de nivelamento topografico.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste primeiro capítulo vamos estabelecer alguns conceitos e resultados de Geometria Euclidiana, que serão úteis para o desenvolvimento do trabalho. Em geral não apresentamos as demonstrações destes resultados, porém o leitor poderá encontrá-las em [5].

Esperamos que o leitor domine tópicos básicos da Geometria Euclidiana tais como: segmento de retas, medidas de segmentos, semirretas, triângulos, congruência e semelhança de triângulos, circunferências, quadrados, etc.

Observamos que as notações aqui usadas são as clássicas e encontradas na maioria dos livros relacionados a Geometria Euclidiana. Caso o leitor tenha dúvidas quanto a isso, basta consultar o Índice de Notação no início desse trabalho.

1.1 Ângulos

O principal "objeto"de estudo desse trabalho é o ângulo. Para defini-lo, precisamos do conceito de região convexa apresentado a seguir.

Definição 1.1 *Uma região R do plano é dita convexa se, para quaisquer dois pontos $A, B \in R$, tivermos o segmento AB contido em R. Caso contrário, diremos que R é uma região não convexa.*

A definição anterior diz que, para uma região R ser não convexa basta que existam pontos $A, B \in R$ tais que pelo menos um ponto do segmento AB não pertença a R.

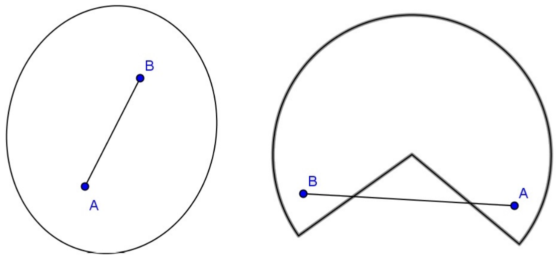


Figura 1.1: Região convexa (esq.) e região não convexa (dir.)

Definição 1.2 *Dadas num plano duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, num mesmo plano, um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

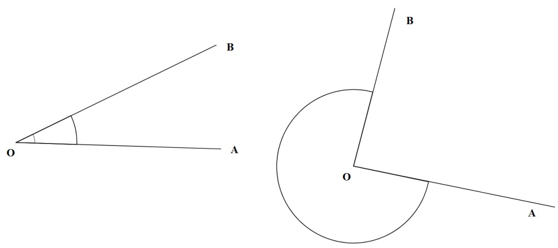


Figura 1.2: Região angular no plano

Um ângulo pode ser convexo ou não convexo. Denotamos um ângulo de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ por $\widehat{AOB}$. O contexto deixará claro se estamos nos referindo ao ângulo convexo ou ao não convexo.

Podemos associar a todo ângulo uma medida da região do plano que ele ocupa. Para isso, dividimos uma circunferência Π, de centro O, em 360 arcos congruentes e consideramos pontos A e B, extremos de um desses 360 arcos. Dizemos que a medida do ângulo $\widehat{AOB}$ é 1 *grau*, e denotamos por 1^o. Para indicar que o ângulo $\widehat{AOB}$ mede 1^o, escrevemos $A\hat{O}B = 1^o$(ver figura 1.3).

A definição de grau dada acima apresenta uma certa inconsistência. Como podemos garantir que ela não depende da circunferência escolhida? De outro modo, como

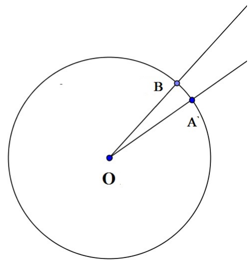


Figura 1.3: $A\hat{O}B = 1^{\circ}$

podemos saber se, dividindo outra circunferência Σ, de centro O, em 360 partes iguais, obtemos um ângulo $\widehat{A'OB'}$ o qual podemos dizer também medir 1°? Para responder essa pergunta, consideramos duas circunferência Σ e Π, de mesmo centro O, como os pontos $A, B \in \Pi$ (veja figura 1.4). Sejam A' e B' os pontos de intersecção das semirreta $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ com Σ. Vamos assumir como axioma, que a fração de Π que o arco menor $\overset{\frown}{AB}$ representa é igual a fração de Σ, que o menor arco $\overset{\frown}{A'B'}$ representa. Portanto, se, na definição de grau, tivéssemos tomado uma circunferência Σ de raio diferente do raio de Π, mas com mesmo centro O, teremos um mesmo ângulo representando a medida de 1°.

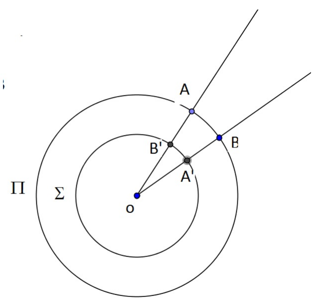


Figura 1.4: Ângulo

Pela definição de grau, é óbvio que uma circunferência corresponde a 360°. Por outro lado, dado um ângulo $\widehat{AOB}$, como podemos medi-lo? Para responder essa pergunta, fazemos a seguinte construção: traçamos uma circunferência qualquer Π, de centro O, e marcamos os pontos A' e B' em que Π intersecta os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de $\widehat{AOB}$. Em seguida, vemos qual fração do comprimento total de Π o arco $\overset{\frown}{A'B'}$ representa. A medida

$A\hat{O}B$ do ângulo $\widehat{AOB}$ será essa fração de 360º. Por exemplo, se o comprimento do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ for $\frac{1}{6}$ do comprimento total de Π, então a medida de $\widehat{AOB}$ será

$$A\hat{O}B = \frac{1}{6}.360^o = 60^o.$$

Observação 1.3

i. Diremos que dois ângulos são congruentes se suas medidas forem iguais.

ii. Muitas vezes usamos, por economia de notação, letras gregas minúsculas para denotar medidas de ângulos. Por exemplo, escrevemos $A\hat{O}B = \theta$ para dizer que a medida do ângulo $\widehat{AOB}$ é θ graus.

iii. De agora em diante, a notação $A\hat{O}B$ denota tanto o ângulo $\widehat{AOB}$, como sua medida. O contexto deixará claro de qual estamos falando.

Observamos que todo diâmetro de uma cirunferência a divide em duas partes de mesma medida. Assim, se tivermos um ângulo $A\hat{O}B$ tal que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ sejam semirretas opostas, então $A\hat{O}B = 180^o$. Tal ângulo é chamado de *ângulo raso.*

Raras vezes utilizamos ângulos maiores que 180º. Por isso, quando A e B coincidem, digamos que o ângulo $A\hat{O}B$ mede 0º. Tal ângulo é chamado de *ângulo nulo.* Assim, no que segue, quando escrevermos $A\hat{O}B$ estamos nos referindo, ao ângulo $A\hat{O}B$ tal que $0^o \leq A\hat{O}B \leq 180^o$. Diremos que um ângulo $A\hat{O}B$ é *agudo* quando $0^o < A\hat{O}B < 90^o$, *reto* quando $A\hat{O}B = 90^o$ e *obtuso* quando $90^o < A\hat{O}B < 180^o$.

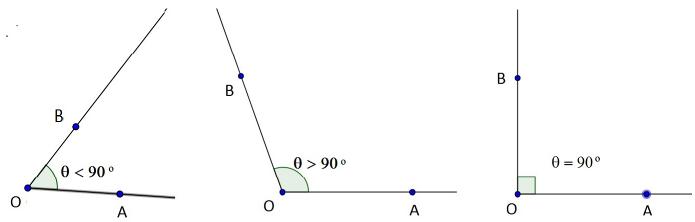


Figura 1.5: Ângulo agudo (esq.), ângulo obtuso (central), ângulo reto (dir.)

Dizemos que dois ângulos são *complementares* se a soma de suas medidas é 90º. Nesse caso, dizemos que um ângulo é o *complemento* do outro. Também diremos que dois ângulos são *suplementares* se a soma de suas medidas é 180^o. Nesse caso, diremos que um ângulo é o *suplemento* do outro.

Assim como o metro tem submedidas, o grau também tem submedidas: o minuto e o segundo. Um *minuto*, denotado por $1'$, é definido como a sexagésima parte de 1^o, isto é, $1' = \frac{1}{60}.1^o$ e um *segundo*, denotado por $1''$, é igual a sexagésima parte de $1'$, isto é, $1'' = \frac{1}{60}.1'$.

1.2 Triângulos e Circunferências

Lembramos que três pontos não colineares A, B e C, definem um triângulo que denotamos por ΔABC ou ABC.

Num triângulo ABC, os segmentos AB, AC e BC são os lados do triângulo, e denotamos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.

Num triângulo ABC, os ângulos convexos $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ são chamados *internos*. Os ângulos internos de um triângulo são denotados da seguinte maneira: $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$ e $\hat{C} = \widehat{ACB}$.

Teorema 1.4 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é* 180^o.

Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras básicas: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos. Quanto a medida dos lados, temos:

Definição 1.5 *Um triângulo ABC é denominado:*

(a) Equilátero, se seus três lados forem congruentes.

(b) Isósceles, se ao menos dois de seus lados forem congruentes.

(c) Escaleno, se não há lados congruentes entre si.

Agora vamos a classificação dos triângulos quanto aos seus ângulos.

Definição 1.6 *Um triângulo ABC é denominado:*

(a) Acutângulo, quando os três ângulos internos são menores que 90^o, ou seja, os três ângulos internos são agudos.

(b) Obtusângulo, quando apresenta um ângulo interno maior que 90^o, ou seja, que possui um ângulo obtuso.

(c) Retângulo, quando apresenta um ângulo interno reto, ou seja, que possui um ângulo medindo 90^o.

A seguir definimos três elementos importantes de um triângulos.

Definição 1.7 *Seja ABC um triângulo e D um ponto da reta $\overleftrightarrow{BC}$.*

(a) Se D for o ponto médio do segmento BC, AD é chamado de mediana do triângulo ABC relativa ao lado BC (ou ao vértice A).

(b) Se D é um ponto tal que $\overrightarrow{AD}$ divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos de mesma medida, dizemos que AD é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

(c) Se D é um ponto, tal que $\overleftrightarrow{AD}$ é perpendicular a reta $\overleftrightarrow{BC}$, dizemos que AD é a altura do triângulo relativa ao lado BC (ou vértice A).

Teorema 1.8 *Em um triângulo equilátero, a bissetriz, a mediana e a altura relativa a um mesmo ângulo coincidem.*

Teorema 1.9 *Os três ângulos internos de um triângulo iquilátero são congruentes e cada um mede 60^o.*

Definição 1.10 *Dizemos que dois triângulos ABC e DEF são semelhantes se existe uma correspondência entre os vértices, tal que $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}.$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade entre os triângulos.

Usaremos a notação $ABC \sim DEF$ para indicar que os dois triângulos são semelhantes e a correspondência entre os vértices é dada exatamente na ordem que eles aparecem.

Os próximos três teoremas afirmam que não é necessário todas as condições da definição de semelhança de triângulos, basta verificar algumas delas.

Teorema 1.11 (Casso AAA de semelhança) *Se em dois triângulos ABC e DEF tem-se $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$, então $ABC \sim DEF$.*

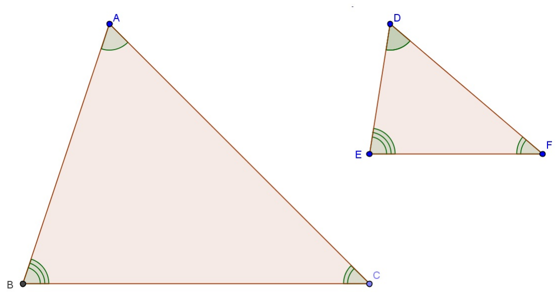


Figura 1.6: Caso AAA de semelhança

Teorema 1.12 (Caso LAL de semelhança) *Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\hat{A} = \hat{D}$ e*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}},$$

então $ABC \sim DEF$.

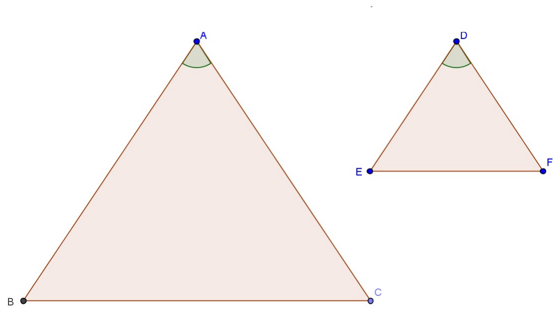


Figura 1.7: Caso LAL de semelhança

Teorema 1.13 (Caso LLL de semelhança) *Se em dois triângulos ABC e DEF tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}},$$

então $ABC \sim DEF$.

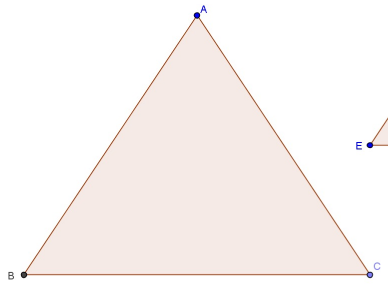


Figura 1.8: Caso LLL de semelhança

Definição 1.14 *Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:*

1. *Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e*

2. *Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

Há quatro teoremas que nos ajudam a decidir de maneira mais rápida se dois triângulos são conguentes.

Teorema 1.15 (Caso LLL) *Se dois triângulos ABC e A'B'C' possuem $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, overline$AC$ = $\overline{A'C'}$, então os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.*

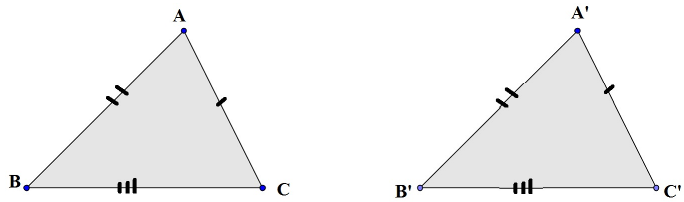


Figura 1.9: Caso LLL

Teorema 1.16 (Caso LAL) *Se dois triângulos ABC e A'B'C' possuem* $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\hat{A} = \hat{A'}$ *e* $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, *então os triângulos* ABC *e* $A'B'C'$ *são congruentes.*

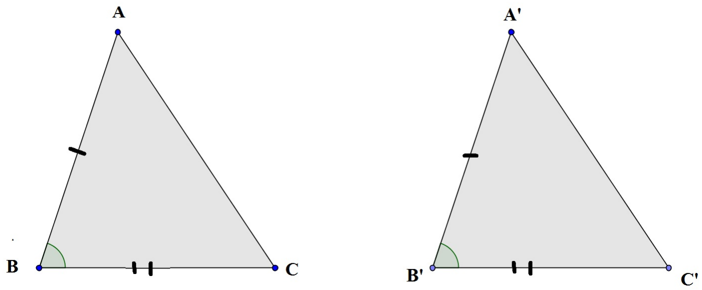


Figura 1.10: Caso LAL

Teorema 1.17 (Caso ALA) *Se dois triângulos ABC e A'B'C' possuem* $\hat{B} = \hat{B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$, *então triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.*

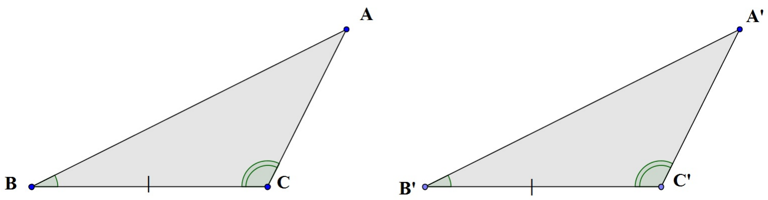


Figura 1.11: Caso ALA

Teorema 1.18 (Caso LAA_o) *Se os triângulos ABC e A'B'C' possuem* $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\hat{A} = \hat{A'}$ *e* $\hat{B} = \hat{B'}$ *então, os triângulo* ABC *e* $A'B'C'$ *são congruentes.*

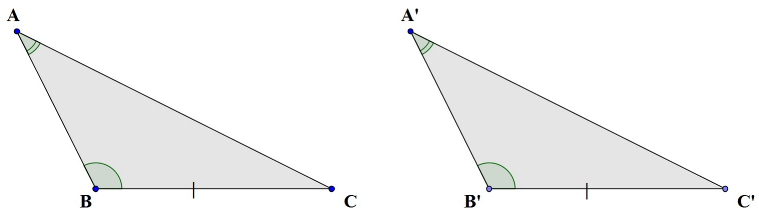


Figura 1.12: Caso LAA_o

Dizemos que uma circunferência Π e uma reta r são *tangentes*, ou que a reta r é tangente a circunferência Π, se r e Π tiverem exatamente um ponto P em comum. Nesse caso, P é denominado o *ponto de tangência* de r e Π.

Teorema 1.19 *Uma reta é tangente a uma cincunferência se, e somente se, ela é perpendicular a reta determinado pelo ponto de tangência e pelo centro da circunferência.*

Definição 1.20 *Um ângulo é dito inscrito numa circunferência se seu vértice é um ponto da circunferência e seus lados interceptam a circunferência em dois pontos distintos do vértice. O arco determinado pelos dois pontos e que não contém o vértice do ângulo inscrito, é dito arco subentendido pelo ângulo ou que o ângulo subentende o arco.*

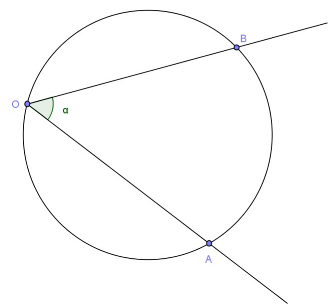
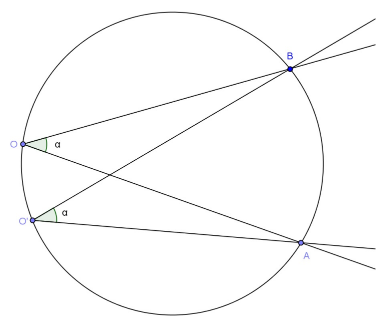


Figura 1.13: Ângulo inscrito

Teorema 1.21 *Ângulos inscritos numa circunferência é que subentendem o mesmo arco são congruentes.*



Teorema 1.22 *Seja Π uma circunferência de centro O e raio r e $B\hat{A}C$ um ângulo inscrito a Π com vértice A. Então a medida de $B\hat{A}C$ é a metade do ângulo central $B\hat{O}C$. Em particular, um ângulo inscrito $B\hat{A}C$ que subentende um semicircunferência é reto.*

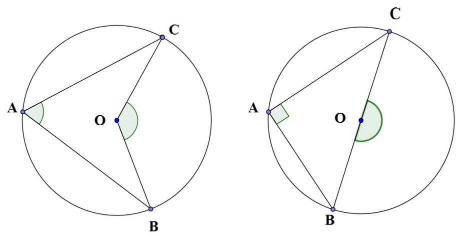


Figura 1.14: $B\hat{A}C = \dfrac{1}{2}.B\hat{O}C$

Definição 1.23 *Dizemos que uma circunferência está inscrita em um polígono se todos os lados do polígono são tangentes à circunferência. Neste caso, o polígono é dito circunscrito a circunferência.*

Definição 1.24 *Dizemos que uma circunferência està circunscrita a um polígono se a circunferência intercepta todos os vértices do polígono. Neste caso, o polígono é dito inscrito a circunferência.*

Teorema 1.25 *Um quadrilátero inscrito em uma circunferência possui ângulos opostos suplementares.*

Teorema 1.26 *As diagonais de um quadrado são bissetrizes dos ângulos internos e perpendiculares entre si.*

Capítulo 2

Conceitos Básicos de Trigonometria

Nesse capítulo será abordado um pouco da história da trigonometria, descrevendo alguns fatos históricos na busca de justificativas para a existência dessa ferramenta matemática tão utilizada por outras ciências e áreas do conhecimento humano. Além disso, apresentamos o Teorema de Pitágoras, as razões trigonométricas e a relação trigonométrica fundamental.

2.1 Um Breve Histórico da Trigonometria

A trigonometria tem sua origem incerta, entretanto, pode-se dizer que o início do seu desenvolvimento se deu principalmente devido aos problemas gerados pela astronomia, agrimensura e navegação. Estima-se que isso tenha ocorrido entre o século IV e V a.C., no Egito e na Babilônia, onde foram encontrados problemas envolvendo a cotangente, no Papiro Rhind, e também uma tábua de secantes na tábula cuneiforme babilônica, a Plimpton 322.

Uma certa quantidade de papiros egípcios que resistiram com o passar dos anos, foram encontrados com mais de 3000 anos de idade. O maior deles, contendo conteúdos matemáticos tem cerca de 0,30m de altura e 5m de comprimento, e atualmente se encontra no "British Museum". Tal papiro foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind, que lhe emprestou o nome. Às vezes, é chamado de Papiro de Ahmes em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio, de cerca de 2000 a 1800 a.C., e é possível que parte desse conhecimento tenha provindo de Imhotep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5000 anos.

A palavra trigonometria vem do grego *"trigonon"*, que significa triângulo, e *"metron"*, que significa medida , ou seja, medida das partes de um triângulo. Não se sabe ao certo se o conceito da medida de ângulo surgiu com os gregos ou se eles, por contato com a civilização babilônica, adotaram as frações sexagesimais, um sistema de numeração de base 60, criado pela antiga civilização Suméria. Porém, os gregos fizeram um estudo sistemático das relações entre ângulos ou arcos numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

O astrônomo Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria", por ter feito um tratado em doze livros no qual trata da construção na primeira tabela trigonométrica por volta na segunda metade do século II a.C. Na época, a trigonometria baseava-se no estudo da relação entre um arco arbitrário de uma circunfêrencia e sua corda. Hiparco escreve a respeito do cálculo de comprimentos das cordas através de uma relação chamada *seno* de um ângulo ou *seno* de um arco. Apesar da corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo é justamente esse valor. Em particular, para uma circunferência de raio unitário, o comprimento da corda subtendida por um ângulo θ é $2.sen(\frac{\theta}{2})$.

Na figura a seguir, a medida do segmento AB é $2.sen(\dfrac{\theta}{2})$, onde θ é o ângulo $A\hat{O}B$.

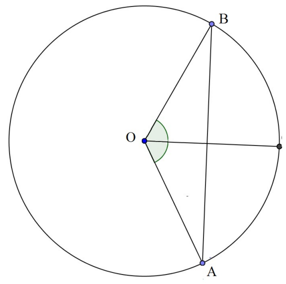


Figura 2.1: comprimento da corda

O conceito de *cosseno* de um ângulo surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente, ao que parece, surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

Ptolomeu usando as ideias de Hiparco, dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes, usando $\frac{377}{120}$ como aproximação para o número π. Ainda sem mencionar os termos seno e cosseno, mas das cordas, utilizou o que pode ser considerado a primeira relação fundamental $sen(\theta)^2 + cos(\theta)^2 = 1$, sendo θ o ângulo formado pelo centro da circunferência e da extremidades da corda.

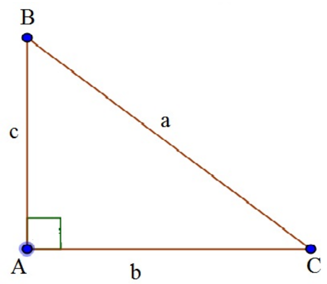
Também construiu uma tabela de cordas de uma circunferência, para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0^o e 180^o, calculou comprimentos de cordas, a partir de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 10 lados inscritos em uma circunferência. Isso lhe possibilitou encontrar a corda subtendida por ângulos de 36^o, 60^o, 72^o, 90^o e 120^o. Mais tarde surgiu uma nova unidade de medida para os ângulos, o *radiano*, denominado *radian*, por necessidade de se utilizar uma expressão para ângulo em termos de π, que primeiramente foi chamada π-*medida*, *circular* ou *medida arcual*.

2.2 O Teorema de Pitágoras

A seguir vamos ver um importante teorema enunciado pela primeira vez pelo filósofo e matemático grego Pitágoras, mas conhecido pelos babilônios, que será muito utilizado nos conceitos que envolvem as relações trigonométricas. Este teorema estabelece uma forte relação entre os quadrados dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

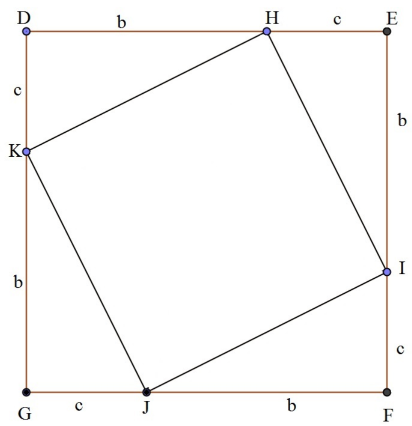
Teorema 2.2.1 (Teorema de Pitágoras) *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Demonstração: Consideramos um triângulo retângulo ABC, reto em A, tal que os lados AC e AB medem b e c, respectivamente, e a hipotenusa BC mede a.



Agora consideramos dois quadrados, DEFG e D'E'F'G', ambos com lados medindo $b+c$. Sobre os lados DE, EF, FG e GD consideramos, respectivamente, os pontos H, I, J e K, tais que:

$$\overline{DH} = \overline{EI} = \overline{FJ} = \overline{GK} = b$$
$$\overline{HE} = \overline{IF} = \overline{JG} = \overline{KD} = c$$



Afirmação: O quadrilátero HIJK é um quadrado de lado medindo a.

De fato, os triângulos DHK e HEI são retângulos e congruêntes ao triângulo ABC. Assim temos:

$$\overline{KH} = \overline{HI} = a,$$
$$D\hat{H}K = E\hat{I}H$$
$$D\hat{K}H = E\hat{H}I$$

Além disso, pelo Teorema 1.4, temos que

$$D\hat{K}H + D\hat{H}K = 90^{\circ}$$
$$E\hat{H}I + E\hat{I}H = 90^{\circ}.$$

Disso e d $D\hat{H}K + K\hat{H}I + E\hat{H}I = 180^{\circ}$ seque que $K\hat{H}I = 90^{\circ}$.

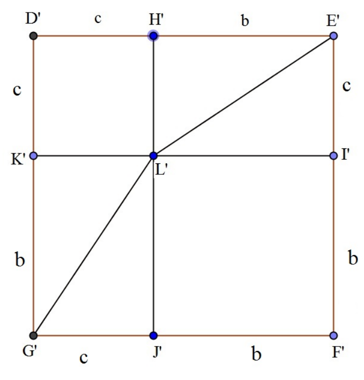
Analogamente, $H\hat{I}J = J\hat{K}H = I\hat{J}K = 90^{\circ}$ e $\overline{IJ} = \overline{KH} = a$. Portanto HIJK é um quadrado de lado medindo a.

Note que, por construção, a área do quadrado DEFG é igual a soma das áreas do quadrado HIJK e dos triângulos DHK, HEI, IFG e JGK. Portanto,

$$(b+c)^2 = a^2 + 4.\frac{bc}{2} = a^2 + 2.b.c \tag{2.1}$$

Consideramos agora o quadrado D'E'F'G' de lado $b+c$ e sobre os lados D'E', E'F', F'G' e G'D' consideramos, respectivamente, os pontos H',I',J' e K', tais que:

$$\overline{D'H'} = \overline{E'I'} = \overline{G'J'} = \overline{D'K'} = c$$
$$\overline{H'E'} = \overline{I'F'} = \overline{J'F'} = \overline{K'G'} = b.$$



Seja L' o ponto de intersecção de H'J' e I'K' formando assim quatro quadriláteros: H'E'I'L', J'G'K'L', D'H'L'K' e L'I'F'J'. É fácil ver que H'E'I'L' e J'G'K'L' são retângulos de lados b e c e os quadriláteros D'H'L'K' e L'I'F'J, são ambos quadrados de lados c e b, respectivamente.

Potanto por construção, a área do quadrado D'E'F'G' é igual a soma das áreas dos quadrados D'H'L'K' e L'I'F'J e dos retângulos H'E'I'L' e J'G'K'L'. Logo,

$$(b+c)^2 = b^2 + c.b + c.b + c^2 = b^2 + c^2 + 2.c.b. \tag{2.2}$$

Logo, por (2.1) e (2.2) temos,

$$a^2 + 2.b.c = b^2 + c^2 + 2.b.c$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

□

Exemplo 2.1 *Uma escada de 12 metros de comprimento está apoiada sob um muro que é perpendicular ao solo. A base da escada está distante do muro cerca de 8 metros. Determine a altura do muro.*

Resolução: Como temos um triângulo retângulo com a escada e o solo. Chamando a altura do muro de x e usando o Teorema de Pitágoras, temos,

$$12^2 = 8^2 + x^2,$$

$$144 = 64 + x^2,$$

$$144 - 64 = x^2$$

$$x = \sqrt{80}$$

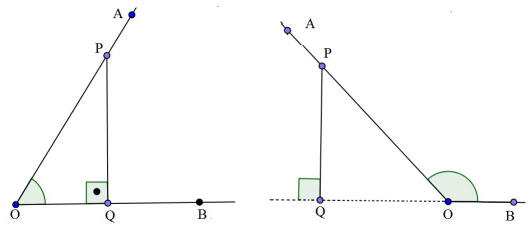
$$x \cong 8,94m.$$

Logo, o muro tem aproximadamente $8,94metros$.

2.3 Razões Trigonométricas

Nesta seção definimos os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo α tal que $0^{\text{o}} \leq \alpha \leq 180^{\text{o}}$.

Consideramos um ângulo $\alpha = A\hat{O}B$ tal que $0^{\text{o}} < \alpha < 180^{\text{o}}$. Sobre o lado OA, consideramos um ponto P, distinto do vértice O. Denotamos por Q o pé da perpendicular ao lado OB baixado por P.

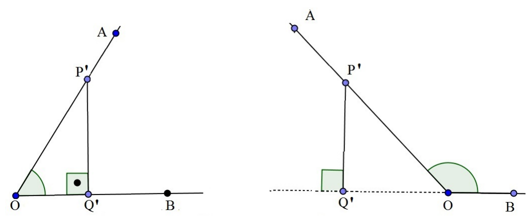


Definição 2.2 *Chamamos de seno de α, e denotamos por sen α, o quociente*

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}.$$

Definição 2.3 *Se $0^o < \alpha \leqslant 90^o$, chamamos de cosseno de α o quociente $\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$ e se $90^o < \alpha < 180^o$ chamamos de cosseno de α o quociente $-\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$. O cosseno de α é denotado por $\cos\alpha$.*

Observação 2.4 *As definições de seno e cosseno dadas acima, independem da escolha do ponto P. De fato, escolha outro ponto P' sobre o lado OA, diferente de O e P, e seja Q' o pé da perpendicular baixada por P' sobre o lado OB. Como os triângulos OPQ e OP'Q' são semelhantes, temos que:*



$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = sen\,\alpha\,(se\,0^o \;<\; \alpha \;< 180^o)$$

$$e$$

$$\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = cos\,\alpha\,(se\,0^o \;<\; \alpha \;\leqslant 90^o)$$

$$e$$

$$-\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}} = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = cos\,\alpha\,(se\,90^o \;<\; \alpha \;< 180^o).$$

Ainda definimos:

$$sen\,0^{\text{o}} \;=\; sen\,180^{\text{o}} \;=\; 0$$

e

$$cos\,0^{\text{o}} \;=\; 1 \text{ e } cos\,180^{\text{o}} \;=\; -1.$$

Com a notação anterior, note que se $\alpha \;=\; A\hat{O}B \;=\; 90^{\text{o}}$, então o ponto Q coincide com o ponto O. Portanto,

$$sen\,90^{\text{o}} \;= \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{OP}} = 1.$$

Além disso,

$$cos\,90^{\text{o}} \;= \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OO}}{\overline{OP}} = \frac{0}{\overline{OP}} = 0.$$

Finalmente temos:

Definição 2.5 *Chamamos de tangente de $\alpha = A\hat{O}B$, e denotamos por $tan\alpha$, o quociente*

$$tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\alpha},$$

desde que $\alpha \;\neq\; 90^o$.

Note que a $tan\,90^{\text{o}}$ não está definida, pois $cos\,90^{\text{o}} \;=\; 0$.

O próximo teorema nos permite calcular o seno e o cosseno de alguns ângulos a partir do seu suplemento.

Teorema 2.3.1 *Para todo α, tal que $0^o \leq \alpha \leq 180^o$, temos que:*

(i) $sen(180^o - \alpha) = sen\alpha.$

(ii) $cos(180^o - \alpha) = -cos\alpha.$

Demonstração: Quando α for igual a 0º, 90º e 180º o teorema é facilmente verificado por substituição direta. Agora consideramos os pontos C e C' em uma semicircunferência de diâmetro AB e centro O, de tal forma que $C\hat{O}A = \alpha$ e $C'\hat{O}A = 180º - \alpha$. Sejam D e D' os pés das perpendiculares baixadas por C e C', respectivamente, à reta determinada por A e B.

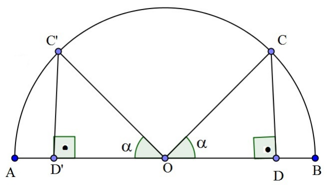


Figura 2.2: Teorema 2.3.1

pelo caso LAA_o, os triângulos OCD e $OC'D'$ são congruentes, e portanto, os ângulos $O\hat{C}D$ e $O\hat{C'}D'$ são congruentes e

$$\overline{CD} = \overline{C'D'} \text{ e } \overline{DO} = \overline{D'O}.$$

Por definição,

$$sen(180º - \alpha) = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'O}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CO}} = sen\alpha$$

e

$$|cos(180º - \alpha)| = \frac{\overline{D'O}}{\overline{C'O}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{CO}} = |cos\,\alpha|.$$

Como $\alpha \neq 90º$, então ou α ou $(180º - \alpha)$ é obtuso. Logo $cos\alpha$ e $cos(180º - \alpha)$ tem sinais opostos. Portanto,

$$cos(180º - \alpha) = -cos\alpha.$$

□

2.4 A Relação Trigonométrica Fundamental

Consideramos uma circunferência de centro O e raio 1. Tracemos uma reta x que passa pelo ponto O e intercepta a circunferência em dois pontos A e A'. Finalmente tracemos uma reta y que passa por O e é perpendicular a reta x. Esta reta intercepta a circunferência em dois pontos B e B'(ver a figura abaixo):

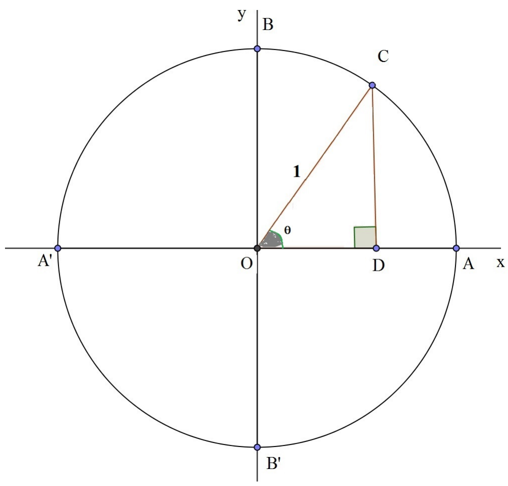


Figura 2.3:

Consideramos agora um ponto C sobre o arco $\widehat{AB}$ diferente de A e B. Tracemos por C uma reta que intercepta perpendicularmente a reta x no ponto D. Seja $C\hat{O}A = \theta$. Temos que $0 < \theta < 90^o$.

Pelo Teorema de Pitágoras, no triângulo ODC temos

$$\overline{OD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{OC}^2 \tag{2.3}$$

Podemos ainda enumerar as seguintes relações:

$$\overline{OD} = cos\, \theta \tag{2.4}$$

$$\overline{DC} = sen\, \theta \tag{2.5}$$

$$\overline{OC} = 1 \tag{2.6}$$

Fazendo as substituições de (2.4), (2.5) e (2.6) na relação (2.3), obtemos:

$$sen(\theta)^2 + cos(\theta)^2 = 1.$$

Agora consideramos um ponto C' sobre o arco $\widehat{A'B}$ diferente de A' e B. Tracemos por C' uma reta que intercepta perpendicularmente a reta x no ponto D'. Seja $A\hat{O}C' = \theta$. Temos $90^o < \theta < 180^o$.

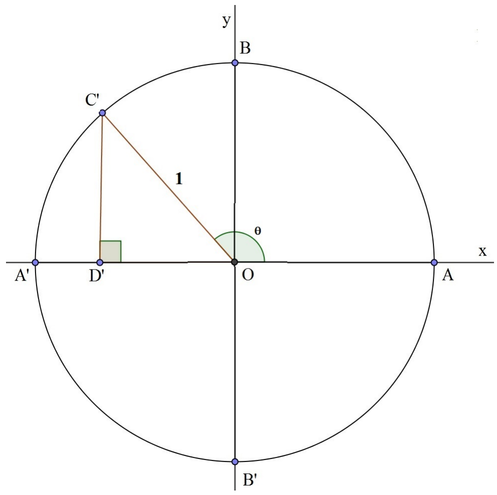


Figura 2.4:

No triângulo $OC'D'$ temos a seguinte relação:

$$\overline{OD'}^2 + \overline{D'C'}^2 = \overline{OC'}^2. \tag{2.7}$$

Como $C'\hat{O}D' = (180 - \theta)$, segue do Teorema 2.3.1 que,

$$\overline{OD'} = cos(180^o - \theta) = -cos\,\theta \tag{2.8}$$

e

$$\overline{D'C'} = sen(180 - \theta) = sen\,\theta. \tag{2.9}$$

Além disso,

$$\overline{OC'} = 1 \tag{2.10}$$

Fazendo as substituições de (2.8), (2.9) e (2.10) na relação (2.7), obtemos:

$$sen(\theta)^2 + (-cos(\theta))^2 = 1$$

$$sen(\theta)^2 + cos(\theta)^2 = 1$$

Logo, se $0^o < \theta < 90^o$ ou $90^o < \theta < 180^o$ então $sen(\theta)^2 + cos(\theta)^2 = 1$. Por simples verificação, obtemos que esta relação é válida também para $\theta = 0^o$, $\theta = 90^o$ e $\theta = 180^o$.

Exemplo 2.6 *Sendo* $sen\,\theta = \dfrac{3}{5}$ *e* $90^o < \theta < 180^o$*, calcule* $cos\,\theta$*.*

Resolução: Da relação fundamental da Trigonometria, $sen\theta^2 + cos\theta^2 = 1$, substituindo o valor de $sen\,\theta$,

$$(\frac{3}{5})^2 + cos\theta^2 = 1,$$

$$(\frac{9}{25}) + cos\theta^2 = 1,$$

$$cos\theta^2 = 1 - \frac{9}{25},$$

$$cos\theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}},$$

$$cos\theta = \pm\frac{4}{5}.$$

Como $90^o < \theta < 180^o$, o valor $cos\theta = -\dfrac{4}{5}$.

Exemplo 2.7 *Calcule o valor de* $sen\,\theta$*, sabendo que* $cos\,\theta = \dfrac{1}{5}$ *e que* $0^o < \theta < 180^o$*.*

Resolução: Da relação fundamental da Trigonometria, $sen\theta^2 + cos\theta^2 = 1$, substituindo $cos\,\theta = \dfrac{1}{5}$ temos

$$sen\,\theta^2 + (\frac{1}{5})^2 = 1,$$

$$sen\,\theta^2 + \frac{1}{25} = 1,$$

$$sen\theta^2 = 1 - \frac{1}{25},$$

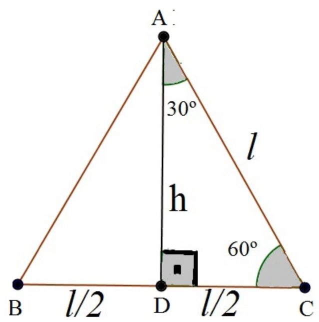
$$sen\theta = \pm\sqrt{\frac{24}{25}},$$

$$sen\theta = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Como $0^o < \theta < 180^o$, $sen\,\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

2.5 Seno, Cosseno e Tangente de 30º, 45º e 60º

Vamos determinar o seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º, pois a partir deste, podemos calcular o seno, cosseno e tangente de alguns outros ângulos. Para isso, vamos considerar um triângulo equilátero ABC, cujos lados medem l. Seja AD a bissetriz de BÂC. Pelo teorema 1.8 temos que AD é a mediana de BC e que AD também é a altura do triângulo ABC relativa ao ângulo Â. Assim, pelo Teorema 1.9 temos que $\hat{C} = 60^o$ e $D\hat{A}C = 30^o$. Seja $\overline{AD} = h$.



Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Logo pela definição de seno e cosseno, obtemos:

$$sen(30^o) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2}.\frac{1}{l} = \frac{1}{2}.$$

$$sen(60^o) = \frac{\overline{AD}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$cos(30^o) = \frac{h}{l} =. \frac{l\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(60^o) = \frac{h}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Finalmente:

$$tan(30^o) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$tan(60^o) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Para o cálculo do seno, cosseno e tangente de 45^o, vamos considerar um quadrado ABCD de lados medindo l e diagonal AC medindo d.

Novamente pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = l^2 + l^2$$
$$d^2 = 2l^2$$
$$d = \sqrt{2l^2}$$
$$d = l\sqrt{2}.$$

Logo,

$$sen(45^o) = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$cos(45^o) = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$tan(45^o) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Assim podemos construir a seguinte tabela trigonométrica:

	30^o	45^o	60^o
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Capítulo 3

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Faremos um estudo sobre a Lei dos Senos e Lei dos Cossenos e analisaremos algumas de suas aplicações na trigonometria.

3.1 Lei dos Senos

A Lei dos Senos é uma relação matemática de proporção entre as medidas dos lados de triângulos arbitrários e seus ângulos.

Teorema 3.1.1 (Lei dos Senos) *Qualquer que seja o triângulo ABC, seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja,*

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2r,$$

onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ *e* r *é o raio da circuferência circunscrita ao triângulo* ABC.

Demonstração:

Consideramos um triângulo ABC qualquer inscrito em uma circunferência de raio r e seja BD um diâmetro dessa circunferência. Suponha $\hat{A} \leqslant 90^o$. Pelo teorema 1.18, o triângulo BCD é retângulo, com o ângulo reto em C.

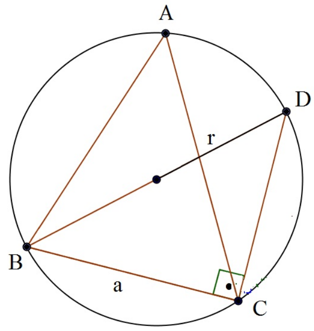


Figura 3.1: Lei dos Senos$\hat{A} \leq 90^o$

Daí,

$$sen\,\hat{D} = \frac{a}{2r}$$

Observe que $\hat{D} = \hat{A}$, pois ambos são ângulos inscritos na circunferência e subentendem o arco $\overset{\frown}{BC}$.

Desse modo

$$sen\,\hat{A} = sen\,\hat{D} = \frac{a}{2r}$$

Logo,

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = 2r$$

Procedendo de modo análogo para os outros ângulos e lados, teremos:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2r$$

Para $\hat{A} > 90^o$, considere um ponto E sobre o arco maior determinado por B e C. Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ são suplementares. Logo, $sen\,\hat{A} = sen\,\hat{E}$. Pelo caso anterior, $\dfrac{a}{sen\,\hat{E}} = 2r$. Logo, $\dfrac{a}{sen\,\hat{A}} = 2r$.

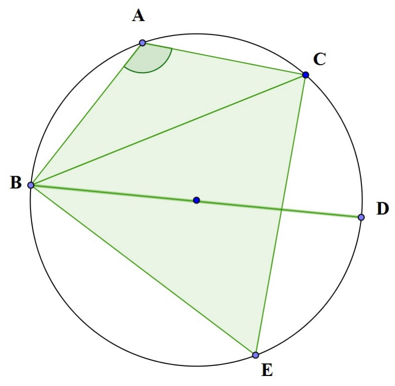
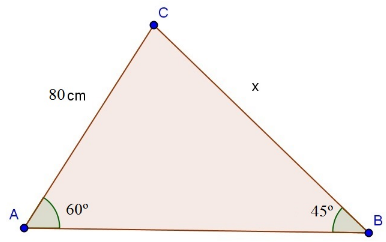


Figura 3.2: Lei dos Senos $\hat{A} > 90^{\text{o}}$

$\square$

Exemplo 3.1 *Em um triângulo ABC, temos* $\overline{AC} = 80cm$, $\hat{A} = 60^o$ *e* $\hat{B} = 45^o$. *Calcule a medida do lado* $\overline{BC}$.



Resolução: Pela Lei dos Senos,

$$\frac{\overline{BC}}{sen\ \hat{A}} = \frac{\overline{AC}}{sen\ \hat{B}} =.$$

Substituindo os valores dados, temos

$$\frac{\overline{BC}}{sen 60^{\text{o}}} = \frac{80}{sen 45^{\text{o}}},$$

$$\frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{80}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\overline{BC} = 80.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Logo, $\overline{BC} = 40.\sqrt{6}cm$.

3.2 Lei dos Cossenos

A Lei dos Cossenos nos ajuda a determinar um lado de um triângulo em função dos outros dois lados e do ângulo entre eles.

Teorema 3.2.1 (Lei dos Cossenos) *Num triângulo ABC qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual a soma das medidas dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado, ou seja,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\hat{A},$$

onde $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ *e* $c = \overline{AB}$.

Demonstração:

A demonstração é dividida em três casos: $\hat{A} < 90^o$, $\hat{A} > 90^o$ e $\hat{A} = 90^o$.

Caso $\hat{A} < 90^o$.

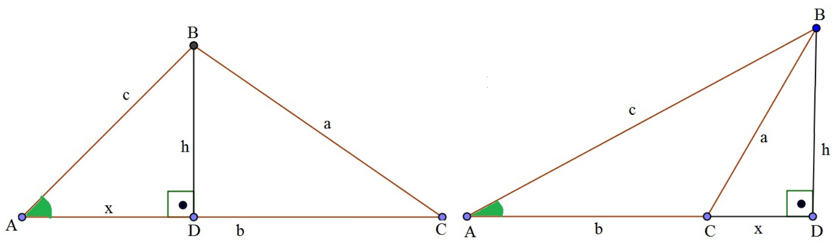


Figura 3.3: $\hat{A} < 90^o$

Sejam D o pé da perpendicular baixada do vértice B sobre a reta $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overline{AD} = x$. Como Â $< 90^o$, D está na semirreta $\overrightarrow{AC}$. Se o ponto D está entre A e C, temos pelo Teorema de Pitágoras que

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2,$$

ou seja,

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 = h^2 + b^2 + x^2 - 2bx, \tag{3.1}$$

onde $h = \overline{BD}$.

Se ocorrer de D estar A e D a igualdade será a mesma, pois $\overline{AD} = x$ e $\overline{DC} = (x - b)$.

Agora, como o triângulo ABD é reto em D, temos pelo Teorema de Pitágoras que $c^2 = h^2 + x^2$.

Substituíndo $x = c.cos\,\hat{A}$ e $c^2 = h^2 + x^2$ na equação (3.1), temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\,\hat{A}.$$

Caso $\hat{A} > 90^o$.

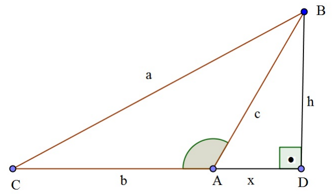


Figura 3.4: $\hat{A} > 90^o$

Sejam D o pé da perpendicular baixada do vértice B sobre a reta $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overline{AD} = x$. Como Â $> 90^o$, D está na semirreta $\overrightarrow{CA}$. Como o ponto A está entre C e D, temos que $\overline{DC} = b + x$. Mas, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2.$$

Assim,

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2 \tag{3.2}$$

onde $h = \overline{BD}$.

Como o triângulo ABD é reto em D, temos do Teorema de Pitágoras que $h^2 = c^2 - x^2$. Substituindo na equação (3.2) temos,

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + 2bx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$$

Além disso,

$$cos B\hat{A}D = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{x}{c}$$

e pelo Teorema 2.3.1 temos

$$cos\, B\hat{A}D = -cos(180^o - B\hat{A}D) = -cos\, B\hat{A}C.$$

Assim

$$x = c.(-cos\, B\hat{A}C) = -c.cos\hat{A}$$

e portanto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\, \hat{A}.$$

Caso $\hat{A} = 90^o$.

Se $\hat{A} = 90^o$, $cos\, 90^o = 0$ e, portanto, pelo Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\, \hat{A}.$$

□

Exemplo 3.2 *Em um triângulo ABC temos* $\overline{AC} = 8m$, $\overline{AB} = 12m$ *e* $B\hat{A}C = 120^o$. *Calcule é o valor do lado* $\overline{BC}$ *do triângulo.*

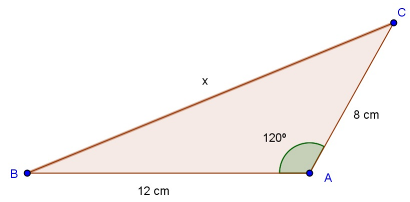


Figura 3.5: Exemplo 3.2

Resolução: Pela Lei dos Cossenos, temos

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 12^2 - 2.8.12.cos\, 120^o,$$

$$\overline{BC}^2 = 64 + 144 - 2.8.12.(-0,5),$$

$$\overline{BC} = \sqrt{304}.$$

Logo,

$$\overline{BC} = 4.\sqrt{19}.$$

Capítulo 4

Aplicações da Trigonometria

Como a trigonometria relaciona ângulos com segmentos, ela é muito utilizada para medir distâncias entre pontos inacessíveis. Tais aplicações da trigonometria já eram feitas na antiguidade, séculos antes de Cristo. Atualmente está presente em várias áreas da topografia, engenharias, arquitetura, agronomia, física e matemática.

4.1 Aplicações da Trigonometria na Antiguidade

Tentando resolver problemas de navegação, os gregos se interessaram em determinar o raio da Terra e a distância da Terra à Lua. Para determinar, aproximadamente, o raio da terra eles utilizaram a noção de seno. Em linguagem moderna, esse problema pode ser resolvido da seguinte forma: consideramos uma torre de altura h e representamos o seu topo por um ponto B. Consideramos também um ponto C sobre a superfície da terra (alguns metros de distância da torre), tal que BC seja tangente a superfície e denotamos por O o centro da terra e θ a medida do ângulo $O\hat{B}C$.

Se supomos que a terra é uma esfera, então a interseção do plano determinado pelos pontos B, O e C e a superfície da terra é uma circunferência de centro O e raio r, digamos (veja a figura 4.1).

Além disso, o ângulo $B\hat{C}O$ é reto, pois BC é tangente a circunferência de centro O e

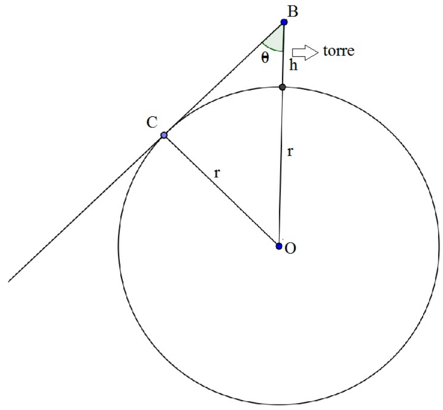


Figura 4.1: Cálculo do raio da terra pelo gregos

raio r. Portanto,

$$sen\,\theta = \frac{\overline{CO}}{\overline{BO}} = \frac{r}{r+h},$$

ou seja,

$$r = \frac{h.sen\,\theta}{1 - sen\,\theta}.$$

4.2 Problemas Elementares

Nesta seção usamos a trigonometria para resolver situações problemas, utilizando as relações trigonométricas do triângulo retângulo, a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos em situações diversas. Utizamos nos exemplos os ângulos de 30º, 45º e 60º por ser fácil de calcular seus valores de seno, cosseno e tangente. Na prática, a probabilidade de termos um destes ângulos é pequena, porém a ideia de resolução é a mesma para qualquer ângulo.

Exemplo 4.1 *Para determinar a altura de um edifício, um observador coloca-se a 30m de distância da base e o observa segundo um ângulo de* 30^o, *conforme mostra a figura. Calcule a altura do edifício.*

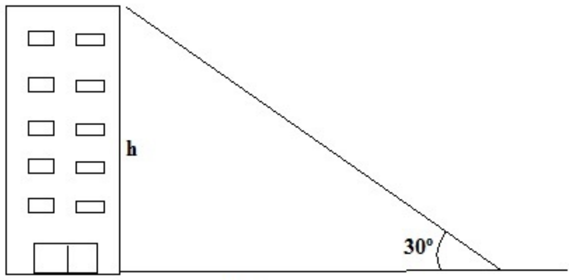


Figura 4.2: Exemplo 4.1

Resolução: Como a parede do prédio é perpendicular ao solo, usamos as razões trigonométricas do triângulo retângulo. Em relação ao ângulo de 30º a altura h do prédio é a medida do cateto oposto e a distância do prédio ao abservador é a medida cateto adjacente.

Seja A a localização do observador e B o ponto que representa o topo do prédio. Primeiramente calculamos o valor da distância y do observador até o topo do prédio, utilizando o seno do ângulo 30º.

Temos,

$$sen\,30^o = \frac{30}{y}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{30}{y},$$

$$y = 60..$$

Finalmente, para calcular a altura h, iremos utilizar o cosseno do ângulo de 30º. Por definição,

$$cos\,30^o = \frac{h}{y}.$$

Substituindo $cos\,30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = 60$ temos,

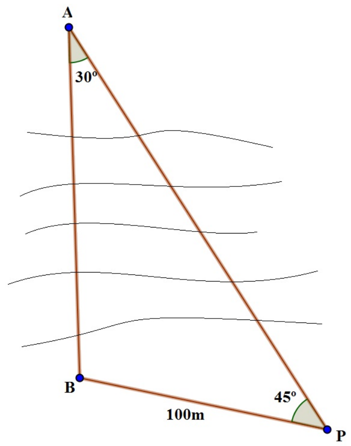
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{60}$$

$$h = \frac{60.\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a altura do prédio e

$$h = 30.\sqrt{3}.$$

Exemplo 4.2 *Em um certo trecho de um rio deseja-se construir uma ponte de um ponto A até um ponto B. De um ponto P,na mesma margem de B, a 100m de B, mediu-se o ângulo $A\hat{P}B = 45^o$ e do ponto A, mediu-se o ângulo $P\hat{A}B = 30^o$. Calcular o comprimento da ponte.*



Resolução: Com os dados fornecidos pelo problema, conhecemos apenas a medida de um dos lados e de dois ângulos do triângulo APB. Por isso, utilizaremos a Lei dos Senos para determinar $\overline{AB}$, que é o comprimento da ponte.

Pela Lei dos Senos temos,

$$\frac{\overline{PB}}{sen\hat{A}} = \frac{\overline{AB}}{sen\,\hat{P}}.$$

Chamando $\overline{AB} = x$ e substituindo na equação acima temos,

$$\frac{100}{sen\,30^{\text{o}}} = \frac{x}{sen\,45^{\text{o}}}$$

$$\frac{100}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$100.\frac{\sqrt{2}}{2} = x.\frac{1}{2}$$

$$50.\sqrt{2} = \frac{x}{2}.$$

Assim temos que,

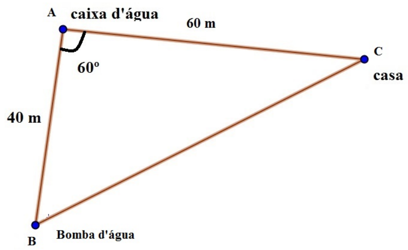
$$x = 100.\sqrt{2}.$$

Logo, a ponte tem aproximadamente $141,40$ metros de comprimento.

Exemplo 4.3 *A água utilizada na casa de uma fazenda é captada e bombeada de um rio para uma caixa-d'água a* $40m$ *de distância do rio. A casa está a* $60m$ *de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções caixa d'água-bomba e caixa d'água-casa é de* 60^o*. Se pretende-se bombear água do ponto de captação direto à casa em linha reta, quantos metros de encanamento são necessários, desconsiderando possíveis irregularidades no terreno?*

Resolução: Como a situação envolve um triângulo e o problema nos fornece duas medidas de lados e o ângulo formada por eles, então usamos a Lei dos Cossenos.

Com os dados do problema podemos representá-lo geometricamente da seguinte forma:



Representando a caixa d'água pelo ponto A, a bomba d'água pelo ponto B e a casa pelo ponto C temos:

$$\overline{BC}^2 = 40^2 + 60^2 - 2.40.60.cos\,60^o,$$

$$\overline{BC}^2 = 1600 + 3600 - 4800.\frac{1}{2},$$

$$\overline{BC}^2 = 2800,$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2800},$$

$$\overline{BC} = 20.\sqrt{7}m.$$

$$\overline{BC} \cong 52,91m.$$

Logo, serão necessários aproximadamente $52,91$ metros de encanamento.

Exemplo 4.4 *Entre duas cidades está sendo construída uma estrada na direção Leste-Oeste. Em um determinado trecho há uma montanha que está dificultando o trabalho. Conforme a figura abaixo.*

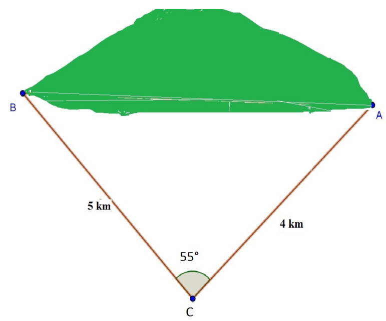


Figura 4.3: Exemplo 4.4

Os engenheiros querem saber a distância entre a base da montanha a Leste (ponto A) e base da montanha a Oeste (ponto B). Para tanto eles encontraram um ponto C ao Sul da montanha, distante $5km$ de B e $4km$ de A, tal que do ângulo $A\hat{C}B$ mede 55^o. Com esses dados, chegaram a conclusão que esse tunel teria aproximadamente $4,25km$. Eles estavam certos?

Resolução: Para determinar a distância entre os pontos A e B, primeiramente, temos que $\overline{AC} = 4km$, $\overline{BC} = 5km$ e $A\hat{C}B = 55^{\circ}$. Para encontrarmos $\overline{AB}$, usamos a Lei dos Cossenos. Temos:

$$\overline{AB}^2 = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.cos 55^{\circ}$$

$$\overline{AB}^2 = 16 + 25 - 40.(0,57)$$

$$\overline{AB}^2 = 18,05$$

$$\overline{AB} = \sqrt{18,05}$$

$$\overline{AB} \cong 4,25km.$$

Logo, a distância entre os pontos A e B é de aproximadamente $4,25km$ e portanto, os engenheiros estavam corretos.

Exemplo 4.5 *O topo de uma torre vertical AB é visto por uma pessoa de um ponto C do solo sob um ângulo de* 30^o. *A distância da pessoa a base da torre é* $100m$. *Se a pessoa mede* $1,80m$, *qual a altura da torre?*

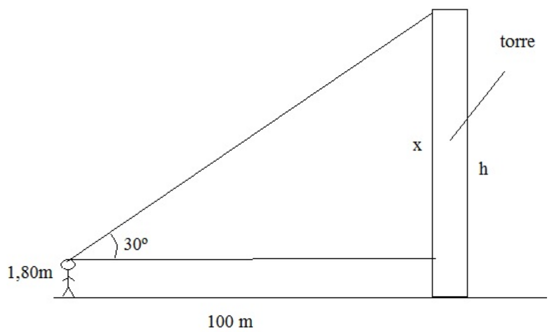


Figura 4.4: Exemplo 4.5

Resolução: Seja A a localização da pessoa e B o ponto que representa o topo da torre. Primeiramente calculamos a distância y da pessoa até o topo da torre, usando a Lei dos Senos.

Temos,

$$sen\,30^o = \frac{100}{y}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{100}{y},$$

$$y = 200.$$

Finalmente, para calcular h a altura da torre, e x, o ponto de visão da pessoa até o topo da torre, escrevemos $h = x + 1,80$. Temos,

$$cos\, 30^o = \frac{x}{y}.$$

Substituindo o $cos\, 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = 200$ temos,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{200}$$

$$x = \frac{200.\sqrt{3}}{2}.$$

Logo,

$$x = 100.\sqrt{3} \cong 173,20\, metros,$$

e portanto,

$$h = x + 1,80 \cong 173,20 + 1,80 = 175m.$$

Logo a altura da torre é de aproximadamente $175\, metros$.

Exemplo 4.6 *Rotacionando-se um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos, obtemos um cone circular reto, chamado de cone de revolução. É possível determinar uma fórmula para o volume deste cone conhecendo-se apenas a medida de um cateto e o ângulo formado por tal cateto e a hipotenusa?*

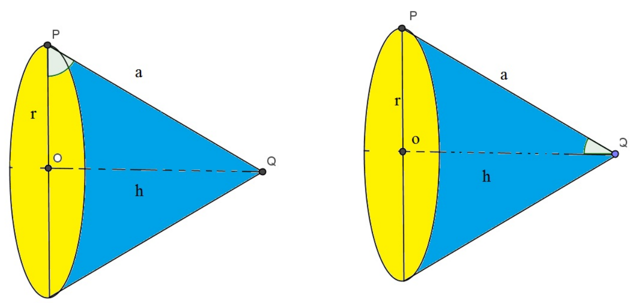


Figura 4.5: Exemplo 4.6

Resolução: Na figura 4.4 temos um cone formado pela rotação do triângulo retângulo OPQ, reto em O, em torno do cateto OQ. Denotamos $\overline{OP} = r$, $\overline{OQ} = h$ e $\overline{PQ} = a$. Como queremos determinar uma fórmula do volume desse cone conhecendo apenas a medida de um cateto e o ângulo formado por este cateto e a hipotenusa, podem ocorrer dois casos:

1º caso: conhecemos $\overline{OP} = r$ e o ângulo $O\hat{P}Q$.

2º caso: conhecemos $\overline{OQ} = h$ e o ângulo $O\hat{Q}P$.

No primeiro caso, no qual conhecemos o valor de r e o ângulo $O\hat{P}Q = \theta$, temos,

$$a = \frac{r}{cos\theta} \tag{4.1}$$

e

$$h = a.sen\theta. \tag{4.2}$$

Substituindo (4.1) em (4.2), temos:

$$h = \frac{r}{cos\theta}.sen\theta$$

$$h = r.tan\theta \tag{4.3}$$

Pela Geometria Espacial, a fórmula do volume do cone acima é dada por $V = \dfrac{\pi.r^2.h}{3}$. Substituindo a equação (4.3) na fórmula do volume do cone temos,

$$V = \frac{\pi.r^2.r.tan\theta}{3}$$

$$V = \frac{\pi.r^3.tan\theta}{3}.$$

Já no segundo caso, isto é, se conhecemos o valor de h e o ângulo $O\hat{Q}P = \theta$, temos,

$$a = \frac{h}{cos\theta} \tag{4.4}$$

e

$$r = a.sen\theta. \tag{4.5}$$

Substituindo (4.4) em (4.5), temos:

$$r = \frac{h}{cos\theta}.sen\theta$$

$$r = h.tan\theta. \tag{4.6}$$

Substituindo a equação (4.6) na fórmula do volume do cone, temos,

$$V = \frac{\pi.(h.tan\theta)^2.h}{3}.$$

Logo,

$$V = \frac{\pi.h^3.tan^2\theta}{3}.$$

4.3 Nivelamento Trigonométrico

Pelas normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (NBR), na NBR 13133/1994, que trata da execução de levantamento topográfico, o nivelamento trigonométrico é definido como sendo o nivelamento que realiza a medição da diferença de nível entre pontos do terreno, indiretamente, a partir da determinação do ângulo vertical da direção que os une e da distância entre estes, fundamentando-se na relação trigonométrica entre o ângulo e a distância medidos, levando em consideração a altura do centro do limbo vertical do teodolito ao terreno e a altura sobre o terreno do sinal visado.

O nivelamento trigonométrico baseia-se na análise trigonométrica de um triângulo retângulo específico. Para tanto, é necessário coletar em campo, informações relativas à distância (horizontal ou inclinada) dos pontos de desníveis, ângulos (verticais, zenitais), além da altura do instrumento utilizado para coletar os dados e da baliza. Pode ser utilizado para pequeno alcance, até 150m, ou grande alcance, acima de 150m, devendo nesse último caso ser considerada a influência da curvatura da Terra e refração atmosférica, através da inserção de uma correção. Neste trabalho estudaremos apenas o caso de pequeno alcance.

Para determinar o desnível entre dois pontos A e B, primeiramente fixa-se o teodolito (instrumento óptico de precisão equipado com luneta e microscópio que lê ângulos horizontais e ângulos verticais também chamados zênital e de inclinação), em um ponto A, em seguida no ponto B coloca-se uma baliza perpendicularmente com a normal.

Denotamos A' o ponto superior do teodolito tal que a reta $\overleftrightarrow{A'A}$ é perpendicular com a linha do horizonte e B' denota o ponto superior da baliza, e C denota o pé da perpendicular a linha do horizonte baixada por B.

O *ângulo zênital* $\hat{Z}$ é o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{A'B'}$ medido no sentido horário de $\overrightarrow{AA'}$ para $\overrightarrow{A'B'}$, tal que $0^o < \hat{Z} < 180^o$.

O ângulo $B'\hat{A}'C = \alpha$ é chamado *ângulo de elevação* ou *inclinação* entre os pontos de desnível. Também, h_i é a medida $\overline{AA'}$ (altura do teodolito), h_s é a medida $\overline{BB'}$(altura da baliza) e $\overline{A'B'} = D_i$ é chamada *distância inclinada*. Finalmente, $\overline{A'C} = D_h$ é a *distância horizontal*, D_N é a diferença de nível e $\overline{B'C} = D_V$ é chamada *distância vertical*.

No nivelamento trigonométrico podemos ter dois casos diferentes no momento de determinar o desnível: $\hat{Z} < 90^o$ e $\hat{Z} > 90^o$. Em ambos os casos, o objetivo é determinar D_N.

Caso $\hat{Z} < 90^o$.

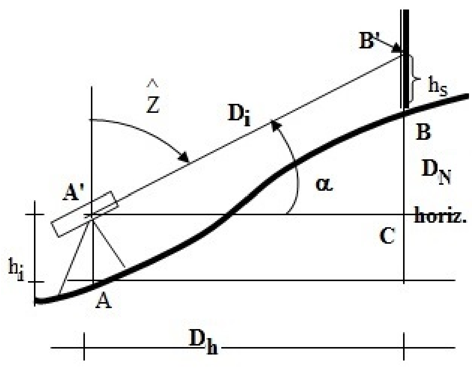


Figura 4.6: Desnível: Z<90°

No triângulo A'B'C, temos $\overline{A'B'} = D_i$, $\overline{A'C} = D_h$ e $\overline{B'C} = D_V$. Por construção, o triângulo A'B'C é retângulo em C, e assim obtemos a seguinte relação:

$$D_V = D_i.sen\,\alpha, \tag{4.7}$$

com $\alpha = 90^o - \hat{Z}$.

Para determinar a diferença de nível entre A e B, caso $\hat{Z} < 90^o$, temos a seguinte equação:

$$D_N = D_V + h_i - h_s \tag{4.8}$$

Substituindo a equação (4.7) em (4.8), temos,

$$D_N = D_i.sen\,\alpha + h_i - h_s.$$

Caso $\hat{Z} > 90^o$.

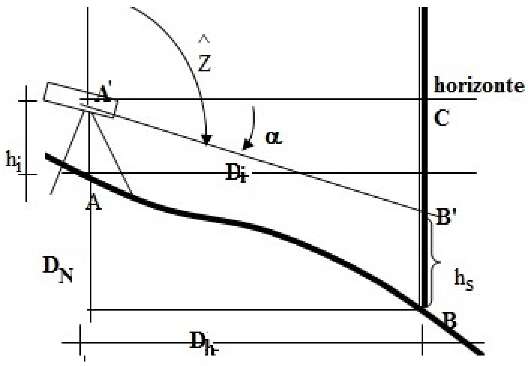


Figura 4.7: Desnível: $\hat{Z} > 90^o$

Nesse caso, para determinar a diferença de nível entre A e B, o processo é similar ao caso $\hat{Z} < 90^o$.

Temos que, $\overline{B'C} = D_i.sen\alpha$, onde $\alpha = \hat{Z} - 90^o$.

Como

$$D_N = \overline{B'C} + \overline{B'B} - \overline{AA'}$$

temos:

$$D_N = D_i.sen\alpha + h_s - h_i$$

Logo, a diferença de nível, D_N é igual a $D_i.sen\alpha + h_i - h_s$, se $\hat{Z} < 90^{\text{o}}$, e é igual $D_i.sen\alpha + h_s - h_i$, se $\hat{Z} > 90^{\text{o}}$.

Observação 4.7 *Se $\hat{Z} = 90^o$ não há desnível entre A e B.*

Exemplo 4.8 *Um engenheiro cartográfico foi contratado para determinar o desnível entre um marco geodésico localizado na praça pública de uma cidade e uma colina afastada de aproximadamente 100 metros. Os dados coletados no campo são os seguintes: $D_i = 124,32m$; $\hat{Z} = 81^o10'25''$; $h_i = 1,45m$; $h_s = 1,67m$.*

Resolução: Temos que $\hat{Z} < 90^{\text{o}}$ e $\alpha = 90^{\text{o}} - \hat{Z}$. Substituindo na fórmula de diferença de níveis temos:

$$D_N = D_i.sen\,\alpha + h_i - h_s$$

$$D_N = 124,32.sen(8^{\text{o}}49'25\text{"}) + 1,45 - 1,67$$

$$D_N \cong 124,32.0,148 + 1,45 - 1,67.$$

Logo, $D_N \cong 18,179m$.

Exemplo 4.9 *A fim de obter a altura de uma torre de alta tensão, estacionou se um teodolito de $1,62m$ de altura, a 98 metros da torre visando o topo e a base da mesma, obtendo-se, respectivamente, os ângulos zenitais $\hat{Z}_1 = 88^o14'48\text{"}$ e $\hat{Z}_2 = 93^o30'13\text{"}$, sendo $\hat{Z}_1$ o ângulo zênital relativo a topo e $\hat{Z}_2$ o ângulo relativo a base da torre. Qual é a altura da torre?*

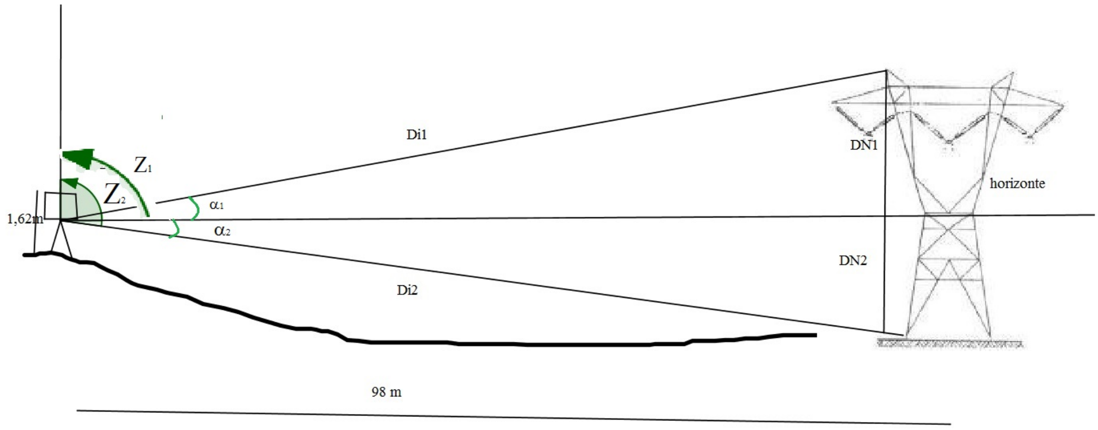


Figura 4.8: Exemplo 4.9

Resolução: Primeiramente vemos que nessa situação temos que calcular duas diferenças de níveis para se possa determinar a altura da torre. Como não temos as distâncias inclinadas para determinar as diferenças de níveis, iremos calculá-las.

A distância entre o teodolito até o topo da torre denotada por D_{N1}, será determinada usando o caso de $\hat{Z}_1 < 90^o$ e $\alpha_1 = 90^o - \hat{Z}_1$. Para determinar D_{i1} (distância entre o teodolito e o topo da torre) dessa situação, iremos usar o cosseno. Temos que:

$$cos\alpha_1 = \frac{D_h}{D_{i1}}$$

$$cos 1^o 45' 12'' = \frac{98}{D_{i1}},$$

$$D_{i1} \cong \frac{98}{0,99},$$

$$D_{i1} \cong 99\, metros.$$

Substituindo na fórmula de diferença de níveis temos:

$$D_{N1} = D_{i1}.sen\,\alpha_1 + h_{i1} - h_{s1}$$

$$D_{N1} = 99.sen(1^o 45' 12") + 1,62 - 0$$

$$D_{N1} \cong 99.0,035 + 1,62 - 0.$$

Logo,

$$D_{N1} \cong 5,09m.$$

Na segunda parte devemos considerar a diferença de nível entre o teodolito e a base na torre. Seja D_{i2} a distância inclinada entre estes dois pontos, como não temos D_{i2} calculamos usando novamente o cosseno. Como $\hat{Z}_2 > 90^o$ e $\alpha_2 = \hat{Z}_2 - 90^o$, temos:

$$cos\alpha_2 = \frac{D_h}{D_{i2}}$$

$$cos3^o30'13'' = \frac{98}{D_{i2}},$$

$$D_{i2} = \frac{98}{0,998}$$

$$D_{i2} \cong 98,2metros.$$

Substituindo na fórmula de diferença de níveis temos:

$$D_{N2} = D_{i2}.sen\,\alpha_2 + h_{s2} - h_{i2}$$

$$D_{N2} = 98,2.sen(3^o30'13") + 0 - 1,62$$

$$D_{N2} = 98,2.0,061 - 1,62.$$

Logo,

$$D_{N2} \cong 4,37m.$$

Para determinar a altura H da torre, vemos claramente que,

$$H = D_{N1} + D_{N2},$$

$$H = 5,09 + 4,37,$$

Logo,

$$H = 9,46m.$$

Portanto, a altura da torre é de $9,46$ metros, aproximadamente.

Exemplo 4.10 *Nos trabalhos para se determinar a profundidade de uma erosão aberta por uma forte chuva, um engenheiro obteve os seguintes dados:* $D_i = 66,85\,m$, $\hat{Z} = 110^o14'55''$, $h_i = 1,74\,m$ *e* $h_s = 1,65\,m$. *Determine a profundidade da erosão.*

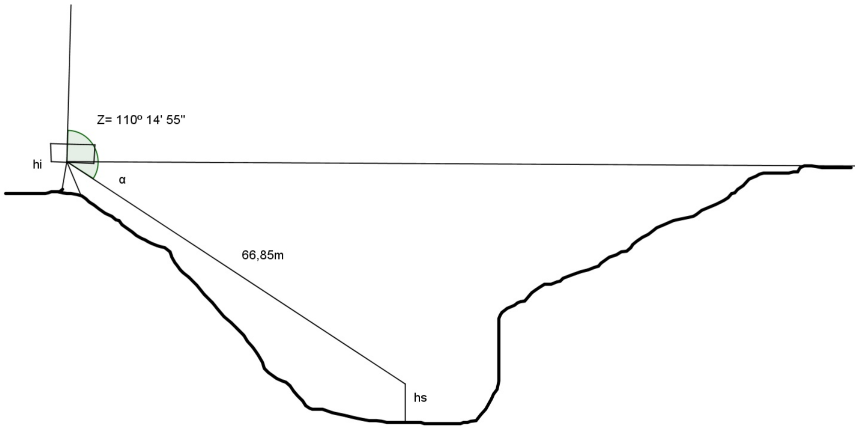


Figura 4.9: Exemplo 4.9

Resolução: Temos que $\hat{Z} > 90^o$ e $\alpha = \hat{Z} - 90^o$. Substituindo na fórmula de diferença de níveis temos:

$$D_N = D_i.sen\,\alpha + h_s - h_i$$

$$D_N = 66,85.sen(20^o14'55'') + 1,65 - 1,74$$

$$D_N = 66,85.0,346 + 1,65 - 1,74.$$

Logo, $D_N \cong 22,23m$. Portanto, a profundidade da erosão é de apoximadamente $22,23$ metros.

Bibliografia

[1] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* 11.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] BORGES, A. C. *Topografia.* 2ºed. São Paulo, Edgard Blucher,1977.

[3] CARMO, M.; MORGADO, A; WAGNER, E. *Trigonometria e Números Complexos.* Rio de Janeiro: SBM, 1992.

[4] EVES, H. *Introdução a História da Matemática*, trad. de Hygino H. Domingues, Editora da UNICAMP, 1995.

[5] FRANCO, V. S.; GERONIMO, J. R. *Geometria Plana e Espacial: um estudo axiomático*, 2º ed. Editora EDUEM, 2010.

[6] IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar*, Volume 3, São Paulo: Atual, 1993.

[7] PAIVA, M. R.*Matemática/Manoel Paiva*, 1ª ed. Volume 1, São Paulo: Moderna, 1995.

[8] *Norma ABNT.* Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR13133 – execução de levantamento topográfico. Rio de Janeiro, 1994.

[9] *Aplicações da Trigonometria.* Disponível em: <http://www.fund198.ufba.br/trigo-pa/5-1aplic.pdf >. Acesso em: 2 de Janeiro de 2014.

[10] *Movimentos simétricos de um polígono regular de n lados*. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/ftorres/ensino/monografias>. Acesso em: 4 de Janeiro de 2014.

[11] *Geometria*Disponível em: < http://www.mat.uc.pt/ mat0822/Geometria.pdf >. Acesso em: 4 de Janeiro de 2014.

[12] *Portal do Professor*. Disponível em: < http://portaldoprofessor.mec.gov.br /fichaTecnicaAula.html >. Acesso em: 4 de Janeiro de 2014.

[13] *O início da trigonometria.* Disponível em:< http://www.matematica.br/ historia/trigonometria.html>. Acessado em: 06 de janeiro de 2014.

[14] *Teorema de Pitágoras.* Disponível em: < http://www.obmep.org.br/docs/Apostila3-teoremadepitagoras.pdf >. Acessado em 20 de Dezembro de 2013.

[15] *Um pouco de história da trigonometria.* Disponível em:< http://ecalculo.if.usp.br/historia/historiatrigonometria.htm>. Acessado em: 06 de Janeiro de 2014.