UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

ADEMIR BENTEUS PAMPU

Ondas não lineares: taxas de decaimento uniforme e turbulência fraca

Maringá-PR
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Ondas não lineares: taxas de decaimento uniforme e turbulência fraca

Ademir Benteus Pampu

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino.
Co-Orientador: Prof. Dr. Nicolas Burq, Université Paris-Sud, Paris-XI.

Maringá-PR, 9 de novembro de 2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Pampu, Ademir Benteus
P186o Ondas não lineares : taxas de decaimento uniforme e turbulência fraca / Ademir Benteus Pampu. -- Maringá, 2018.
95 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino.
Coorientador: Prof. Dr. Nicolas Burq.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2018.

1. Equação da onda – Semi-linear. 2. Dissipação não linear. 3. Decaimento uniforme. 4. Crescimento das normas de Sobolev. 5. Espaços de Sobolev. 6. Semilinear wave equation. 7. Nonlinear damping. 8. Uniform decay rates. 9. Growth of Sobolev norms. 10. Sobolev spaces. I. Soriano Palomino, Juan Amadeo, orient. II. Burq, Nicolas, orient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. IV. Título.

CDD 22.ed. 515.3535

Edilson Damasio CRB9-1.123

ADEMIR BENTEUS PAMPU

ONDAS NÃO LINEARES: TAXAS DE DECAIMENTO UNIFORME E TURBULÊNCIA FRACA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Profa. Dra. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Claudete Webler

Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 11 de outubro de 2018.
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os professores, tanto dos cursos de graduação, de mestrado e de doutorado, que contribuíram imensamente em minha formação profissional. Em especial agradeço a meu orientador durante os cursos de mestrado e doutorado, o Professor Juan Amadeo Soriano Palomino, o Professor Nicolas Burq, com o qual eu fiz um estágio de doutorado sanduíche na Université Paris Sud - Paris XI em Orsay na França, experiência de fundamental importância na minha formação profissional, a Professora Luci Harue Fatori, que me orientou em diversos projetos de iniciação científica durante o curso de graduação em matemática e ao Professor Marcelo Moreira Cavalcanti, com o qual eu muito aprendi durante os cursos de mestrado e doutorado.

Agradeço a minha família pelo apoio durante estes últimos anos, em especial, agradeço a meus pais, Ademir e Sandra, por todo incentivo durante minha formação.

Agradeço a todos os amigos de doutorado, e também aos que não estão no doutorado, pela companhia nestes últimos anos.

Enfim, agradeço à Capes pelo apoio financeiro durante o doutorado e pelo financiamento do projeto de doutorado sanduíche, Proc. PDSE No. 88881.132931/2016-01, durante o período de Abril/2017 e Março/2018 na Université Paris-Sud - Paris XI.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos questões relativas a existência e unicidade de solução global, bem como o comportamento assintótico, para modelos de equações da onda semi-lineares.

O primeiro problema abordado neste trabalho diz respeito ao estudo do modelo introduzido por P. Rosenau em [46] posto em domínios limitados e sob a ação de um termo de relaxamento. Posteriormente, abordamos a equação da onda semi-linear, posta em uma variedade riemanniana tridimensional, sob a ação de um termo de dissipação não linear, ao qual provamos a existência de taxas de decaimento uniforme para a solução global deste problema. Por fim, provamos a existência de limitantes polinomiais para o crescimento das normas de Sobolev para a equação de Klein-Gordon semi-linear, posta em uma variedade riemanniana tri-dimensional.

PALAVRAS-CHAVE: Equação da onda semi-linear, dissipação não linear, decaimento uniforme, crescimento das normas de Sobolev.

ABSTRACT

In this thesis we study questions related to the existence and uniqueness of global solutions and asymptotic behavior for semilinear wave models.

The first problem addressed here is the study of the model introduced by P. Rosenau in [46], posed in a bounded domain with a relaxation term. In the next chapter, we prove the existence of solution and the existence of uniform decay rates for a semilinear wave equation, posed in a three dimensional riemannian manifold, with a nonlinear damping. In the last chapter we study higher order Sobolev norms' growth in time for the semilinear Klein-Gordon equation.

KEYWORDS: Semilinear wave equation, nonlinear damping, uniform decay rates, growth of Sobolev norms.

Sumário

Introdução

Esta tese é dedicada ao estudo da existência e comportamento assintótico de soluções para modelos semi-lineares para equação da onda.

O primeiro problema abordado aqui diz respeito ao decaimento assintótico para o seguinte modelo de equação da onda

$$u_{tt} - au_{xx} + u_{xxxx} - \int_0^t g(t-s)u_{xxxx}(s)ds + u_{xxxxtt} = \alpha|u_x|_x^p \tag{0.0.1}$$

tal modelo, introduzido por P. Rosenau em [46], descreve a propagação de ondas em meios densos (*dense lattices*). Aplicando a abordagem de [40] e o método do poço potencial (*potential well method*) nós provamos a existência de solução global para este problema posto em um domínio limitado, quando considerado com dados iniciais pequenos. Feito isso passamos a análise do comportamento assintótico da solução, então seguindo a metodologia desenvolvida em [38], [39] nós provamos a existência de taxas de decaimento para a energia associada a este modelo.

A próxima questão abordada neste trabalho é a existência e comportamento assintótico para a equação da onda semilinear, com dissipação não linear,

$$u_{tt} - \Delta_G u + a(x)g(u_t) + f(u) = 0 \tag{0.0.2}$$

posta em uma variedade riemanniana compacta tri-dimensional (Ω, G) com bordo, ie, $\partial\Omega \neq \emptyset$. Neste caso, inspirados pelos trabalhos [41], [4], nós relacionamos o comportamento assintótico da solução deste problema ao comportamento das geodésicas de Ω com a métrica G, provando que a solução decai uniformemente para zero desde que a dissipação não linear seja efetiva em um subconjunto aberto $\omega \subset \Omega$, cobrindo uma vizinhança da fronteira e satisfazendo a condição geométrica de controle (que abreviaremos como GCC, que indica o termo em inglês *Geometric Control Condition*). O argumento usado para obtenção de tais taxas de decaimento combina a abordagem usada em [20], com o principio de continuação única provado em [35] e as estimativas de Strichartz provadas em [11] e [5]. É importante observar que o princípio de continuação única que usamos aqui exige apenas que termo de dissipação seja efetivo em uma região satisfazendo a GCC, sem exigências acerca do termo de dissipação ser efetivo em uma região cobrindo uma vizinhança da fronteira.

O último problema abordado neste trabalho descreve o comportamento, com relação ao tempo, das normas em espaços de Sobolev de ordem superior da solução $(u, \partial_t u)$ para a equação de Klein-Gordon semilinear

$$\partial_{tt} u - \Delta_G u + a(x)\partial_t u + f(u) = 0 \tag{0.0.3}$$

posta em uma variedade riemanniana tri-dimensional (Ω, G), compacta, sem bordo. Mais precisamente, provamos que as normas $H^{m+1} \times H^m$, $m \in \mathbb{N}$, tem um crescimento, no máximo, polinomial. Como consequência deste fato destacamos que, quando consideramos os termo de dissipação $\gamma(x)\partial_t u$ efetivo em uma região $\omega \subset \Omega$ satisfazendo a condição geométrica de controle, temos que as normas $H^{s+1} \times H^s$, $0 < s < m$, de $(u, \partial_t u)(t)$ decaem exponencialmente quando $t \to \infty$. De fato, dos trabalhos [4], [19], [20] e [41] temos que a norma $H^1 \times L^2$ de $(u, \partial_t u)(t)$ decaí exponencialmente quando $t \to \infty$, combinando este fato com o crescimento polinomial da norma $H^{m+1} \times H^m$ de $(u, \partial_t u)(t)$ e um argumento de interpolação podemos encontrar taxas de decaimento exponencial para a norma de $H^{s+1} \times H^s$, $0 < s < m$, de $(u, \partial_t u)(t)$.

O interesse físico no estudo do comportamento das normas de $(u, \partial_t u)$ em $H^{m+1} \times H^m$ vem do fato que o comportamento destas normas captam o quanto de energia é movido de baixas para altas frequências, quando o tempo tende a infinito. Tal fenômeno é conhecido como turbulência fraca. Desta forma nosso resultado mostra que, esta transferência pode acontecer, no máximo, a uma taxa polinomial.

No contexto da equação de Schrodinger o primeiro grande avanço em descrever este fenômeno foi dado por Bourgain em [7] e, posteriormente, tais resultados foram extendidos por Staffilani em [54]. É válido ainda mencionar o trabalho de S. Zhong [60], o qual estende para contextos mais abstratos os resultados antes obtidos para a equação de Schrodinger cúbica.

A principal contribuição que damos ao estudo do fenômeno de turbulência fraca para a equação (0.0.3) vem do fato que, inspirados em [43], obtemos nosso resultado sem nenhum outro requerimento sobre a geometria da variedade em que a equação esta posta.

CAPÍTULO 1

Resultados preliminares

Apresentaremos, neste capítulo, notações e resultados básicos utilizados no decorrer deste texto, tais resultados não são inéditos, por este motivo são apresentados, em sua maioria, apenas o enunciado destes acompanhado da referência onde é possível encontrar sua demonstração. No entanto, com o intuito de reunir os prerrequisitos para uma boa compreensão dos resultados contidos neste trabalho, reformularemos a exposição de certos resultados e conceitos já clássicos na literatura em uma forma mais didática.

1.1 Espaços de Sobolev, semigrupos não lineares e notações

Ao longo deste texto, denotaremos por (Ω, G) uma variedade riemanniana compacta e completa, com ou sem bordo, de dimensão $n \geq 1$, com conexão riemanniana ∇_G e denotaremos por Δ_G o operador de Laplace-Beltrami. Em particular, usaremos a notação S^{d-1} para a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^d$ Denotamos por $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$ os espaços das funções p-integráveis a Lebesgue e os espaços de Sobolev usuais, com suas normas definidas por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.1}$$

$$\|h\|_{H^m} = \left(\sum_{j=1}^{m} \int_\Omega |\nabla_G^j h(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.2}$$

onde $dx = dvol_G$ é o elemento de volume induzido em Ω pela métrica riemanniana G e $\nabla_G^j h$ é a j-ésima derivada covariante de h.

Denotamos por $L^p(0,T;X) = L^p_T(X)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $T > 0$, o espaço das funções p-integráveis à valores em um espaço de Banach X. No caso especial onde $X = L^q(\Omega)$, para $1 \leq q \leq \infty$, denotaremos também $L^p(0,T;L^q(\Omega))$ por L^pL^q, $L^p_tL^q_x$ ou $L^p_T(L^q)$.

Teorema 1.1.1. *Seja (Ω, G) uma variedade riemanniana compacta de dimensão n,*

(i) Se $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{k}{n}$, então $H^k(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^r(\Omega)$.

(ii) A imersão acima é compacta, se a desigualdade é estrita.

Demonstração: Ver [31]. ■

A seguir, concluímos esta seção com dois resultados da teoria de semigrupos não-lineares. Para isto, considere $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ um operator maximal monótono sobre o espaço de Hilbert H. Vamos considerar o seguinte problema de valor inicial.

$$u_t + Au \ni f \quad \text{em} \quad u = u^0 \in H. \tag{1.1.3}$$

Teorema 1.1.2. *Seja A um operador maximal monótono sobre H e assuma que $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ e $f \in W^{1,1}(0,t;H)$ para todo $t > 0$. Então, existe uma única solução forte $u \in W^{1,\infty}(0,t;H)$ e $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \geq 0$.*

Além disso, se $u^0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e $f \in L^1(0,t;H)$ para todo $t > 0$, então existe uma única solução solução generalizada $u \in C([0,\infty);H)$ para a equação (1.1.3).

Demonstração: Ver [18]. ■

Considere agora o seguinte problema de valor inicial,

$$u_t + Au + Bu \ni f \quad \text{e} \quad u = u^0 \in H, \tag{1.1.4}$$

onde $B : H \to H$ é localmente Lipschitz, isto é,

$$\|Bv_1 - Bv_2\| \leq L(K)\|v_1 - v_2\| \tag{1.1.5}$$

para todo $v_1, v_2 \in H$ tais que $\|v_1\|, \|v_2\| \leq K$.

Teorema 1.1.3. *Suponha que A é um operador maximal monótono e que $0 \in A0$. Assumindo que $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $f \in W^{1,1}(0,t;H)$ para todo $t > 0$ e B é uma aplicação localmente Lipschitz satisfazendo* (1.1.5) *então existe $t_{max} \leq \infty$ tal que* 1.1.4 *tem uma única solução forte u no intervalo $[0, t_{max})$.*

Além disso, se assumimos somente $u^0 \in \overline{D(A)}$ e $f \in L^1(0,t;H)$ para todo $t > 0$ nós obtemos uma única solução generalizada $u \in C([0,t_{max});H)$ para (1.1.4).

Em ambos os casos, $\lim_{t \to t_{max}} \|u(t)\| < \infty$ implica que $t_{max} = \infty$.

Demonstração: Ver [18]. ∎

1.2 Operadores pseudo-diferenciais e medida microlocal de defeito

Quando analisamos o comportamento de uma função $f = f(x)$ a transformada de Fourier nos fornece uma importante ferramenta para a análise de f com relação a variável de momentum (ou variável espectral) ξ, além disso estabelece uma conexão entre a variável ξ e a variável de posição x. Com o objetivo de descrever o comportamento da função f com relação a todo espaço de fase (x, ξ) introduzimos nesta seção o conceito de operadores pseudo-diferenciais, o que permite também introduzir o conceito de medida microlocal de defeito.

Os resultados e a abordagem que enunciamos nesta seção seguem o roteiro exposto nas notas de aula [12], as demonstrações destes resultados podem ser encontrados nesse material. Para o leitor interessado em uma abordagem completa deste assunto sugerimos [33] e [57] para o estudo do calculo simbólico envolvendo operadores pseudo-diferenciais e [21], [55] para o estudo de medidas microlocais de defeito.

Definição 1.2.1. *Seja $m \in \mathbb{R}$. Definimos um símbolo de ordem no máximo m em Ω uma função $a : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ de classe C^∞, com suporte em $K \times \mathbb{R}^d$, onde K é um subconjunto compacto de Ω, e verificando as seguintes estimativas: Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, existe* *uma constante* $C_{\alpha\beta} > 0$ *tal que*

$$\sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \tag{1.2.6}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$*. Denotamos por* $S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ *o espaço vetorial dos símbolos de ordem no máximo* m *em* Ω*.*

Observação 1.2.2. *Nosso objetivo nesta seção é introduzir o conceito de medida microlocal de defeito (que abreviaremos como m.d.m, em virtude do termo em inglês microlocal defect measure), que é uma ferramenta útil para obter informações sobre a convergência de uma sequência de funções em um subconjunto compacto de* Ω *- no sentido que iremos tornar mais preciso no decorrer deste texto - isto justifica nossa escolha em trabalhar com símbolos a suporte compacto na variável* x *na definição acima.*

Proposição 1.2.3. *Se* $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$*, a fórmula*

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \tag{1.2.7}$$

define para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$*, um elemento* Au *de* $C_0^\infty(\Omega)$*.*

A fórmula (1.2.7) define, então, uma aplicação linear $A : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$, a qual chamaremos de **operador pseudo-diferencial de símbolo** a.

Dizemos que o operador pseudo-diferencial A admite um símbolo principal, denotado por $\sigma_m(A)$, se existe uma função $a_m = \sigma_m(A) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\}))$ com suporte, na primeira variavel, compacto em $K \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ e homogênea de ordem m, na segunda variável, tal que, se $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ valendo 0 em uma vizinhança da origem e 1 fora de um compacto suficientemente grande, segue que,

$$a(x,\xi) = a_m(x,\xi)\chi(\xi) + r(x,\xi), \tag{1.2.8}$$

onde $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$ e $r \in S_c^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$. Nestas condições, $a_m = \sigma_m(A)$ é chamado de simbolo principal de A.

Observe que, no caso em que $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ a aplicação $a \mapsto A$ não é injetora, isto é, um operador pseudo-diferencial não é definido unicamente por um símbolo, por outro lado é possível provar a unicidade do símbolo principal. Além disso notamos que a função de corte χ, na definição de símbolo principal não possui nenhum outro papel que não tornar o produto $\xi(.)a_m(.,.)$ uma função na classe $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d)$, o que se faz necessário uma vez que uma função homogênea nunca é C^∞ na origem, a menos que seja uma função polinomial.

Apesar de termos definido operadores pseudo-diferenciais sobre o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é possível estender a ação de operadores pseudo-diferenciais a espaços de Sobolev. Considerando K um subconjunto compacto contido em Ω e $s \in \mathbb{R}$, denotamos por $H_K^s(\Omega)$ o espaço das distribuições com suporte compacto em K, onde o prolongamento como 0 fora de Ω está em $H^s(\mathbb{R}^d)$. Denotamos por $H_{comp}^s(\Omega) = \bigcup_K H_K^s(\Omega)$, onde K é tomado sobre todos os compactos de Ω, em particular, quando $s = 0$, denotaremos tal espaço por $L_{comp}^2(\Omega)$.

Teorema 1.2.4. *Seja $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ e seja K a projeção sobre Ω do suporte de a. Então, para todo real s, o operador definido em* (1.2.7) *se prolonga de forma única em uma aplicação linear e contínua de $H_{comp}^s(\Omega)$ em $H_K^{s-m}(\Omega)$.*

Estamos agora em boa posição para introduzir o conceito de medida microlocal de defeito. Para isto consideramos uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $L_{loc}^2(\Omega)$, isto é, para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ temos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |u_n(x)|^2 dx < +\infty.$$

Assumimos ainda que (u_n) converge fracamente para 0, isto é, para todo $f \in L_{comp}^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega u_n(x) f(x) dx \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{1.2.9}$$

Teorema 1.2.5. *Nas condições acima, existem uma subsequência $(u_{\varphi(n)})$ e uma medida de Radon positiva μ sobre $\Omega \times S^{d-1}$ tais que, para todo operador pseudo-diferencial A de ordem menor ou igual a zero sobre Ω admitindo símbolo principal de ordem zero, para toda função $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo $\chi\sigma_0(A) = \sigma_0(A)$, temos,*

$$(A(\chi u_{\varphi(n)}), \chi u_{\varphi(n)})_{L^2} \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu(x,\xi). \tag{1.2.10}$$

Definição 1.2.6. *Na situação do Teorema* 1.2.5, *nós dizemos que μ é a medida de defeito microlocal da sequência $(u_{\varphi(n)})$.*

Observação 1.2.7. *Veja que, na definição acima, a medida de Radon definida em* (1.2.10) *não depende da função de corte χ.*

Uma importante observação com relação a definição acima é que, para toda sequência limitada (u_n) em $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fracamente para 0 o Teorema 1.2.5 assegura a existência de uma subsequência admitindo uma medida microlocal de defeito, além disso, se em (1.2.10) tomarmos $A = f \in C_0^\infty(\Omega)$ teremos que

$$\int_\Omega f(x)|u_{\varphi(n)}(x)|^2 dx \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} f(x) d\mu(x,\xi) \tag{1.2.11}$$

de modo que $(u_{\varphi(n)})$ converge forte para zero se, e somente se, $\mu \equiv 0$.

Observação 1.2.8. *Observe que, dados duas sequências $(y^k), (x^k)$ limitadas em $L^2_{loc}(\Omega)$, convergindo fraco para zero, podemos associar a estas sequências, mesmo que passando a uma subsequência, medidas de microlocais de defeito μ_y e μ_x, respectivamente. Afirmamos que, se $y^k - x^k \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ então $\mu_x = \mu_y$.*

De fato, dado A um operador pseudo-diferencial de ordem zero e $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função nas condições do Teorema 1.2.5, *temos,*

$$\begin{aligned} (A(\chi x^k), \chi x^k)_{L^2} &\to \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_x \\ (A(\chi y^k), \chi y^k)_{L^2} &\to \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_y \end{aligned}$$

com $\sigma_0(A)$ sendo o símbolo principal de A, isto nos leva a:

$$(A(\chi x^k), \chi x^k)_{L^2} - (A(\chi y^k), \chi y^k)_{L^2} \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y)$$

agora, observando que, por hipótese, $x^k - y^k \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ e o fato que $A\chi$ é um operador contínuo em $L^2_{loc}(\Omega)$, de acordo com o Teorema 1.2.4 *temos*

$$A(\chi(x^k - y^k)) \to 0 \quad em \quad L^2(\Omega), \tag{1.2.12}$$

assim

$$\begin{aligned}(A(\chi x^k),\chi x^k)_{L^2}-(A(\chi y^k),\chi y^k)_{L^2} &= (A(\chi x^k),\chi x^k)_{L^2}-(A(\chi y^k),\chi x^k)_{L^2}\\ &+(A(\chi y^k),\chi x^k)_{L^2}-(A(\chi y^k),\chi y^k)_{L^2}\\ &=(A(\chi(x^k-y^k)),\chi x^k)_{L^2}\\ &+(A(\chi y^k),\chi(x^k-y^k))_{L^2}\\ &\to 0\end{aligned}$$

por unicidade de limite,

$$\int_{\Omega\times S^{d-1}}\sigma_0(A)d(\mu_x-\mu_y)=0 \tag{1.2.13}$$

para todo A. Lembre que a medida microlocal de defeito μ_x ou μ_y fica bem determinada analisando seus valores em funções $C^\infty(\Omega\times S^{d-1})$ com suporte compacto na primeira variável, assim como fizemos em (1.2.13)*, portanto* (1.2.13) *nos diz que $\mu_x=\mu_y$.*

Teorema 1.2.9. *Seja P um operador de ordem m sobre Ω e seja (u_n) uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fraco para* 0 *e admitindo medida microlocal de defeito μ. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $Pu_n\to 0$, quando $n\to\infty$, fortemente em $H^{-m}_{loc}(\Omega)$.

(ii) $supp(\mu)\subset\{(x,\xi)\in\Omega\times S^{d-1};\sigma_m(P)=0\}$.

Dados duas funções $a,p\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^d)$, definimos o colchete de Poisson de a com p como,

$$\{a,p\}(x,\xi)=\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial a}{\partial\xi_i}\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial\xi_i}\right)$$

onde $(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^d$. Deste modo, dados dois operadores pseudo-diferenciais A, de ordem m, e P, de ordem n, o comutador $[A,P]=AP-PA$ é um operador pseudo-diferencial de ordem $m+n-1$ com simbolo principal dado por $\frac{1}{i}\{a,p\}$.

Teorema 1.2.10. *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω, verificando $P^*=P$, e seja (u_n) uma sequência limitada de $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fraco para* 0 *e admitindo* *m.d.m.* μ. *Suponhamos que* $Pu_n \to 0$, *quando* $n \to \infty$ *fortemente em* $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$. *Então, para toda função* $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\}))$ *homogênea de grau* $1-m$ *na segunda variável e a suporte compacto na primeira,*

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a,p\} d\mu(x,\xi) = 0.$$

Definimos o campo hamiltoniano de uma função $p \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\}))$ a valores reais como o campo de vetores sobre $\Omega \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\}))$ definido por

$$H_p(x,\xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x,\xi), ..., \frac{\partial p}{\partial \xi_d}(x,\xi), -\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,\xi), ..., -\frac{\partial p}{\partial x_d}(x,\xi) \right).$$

Uma curva hamiltoniana de p é uma curva integral do campo de vetores H_p, isto é, uma solução maximal $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ do sistema de equações

$$\dot{x} = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi), \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial p}{\partial x}(x,\xi)$$

onde I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$. Uma vez que $H_p p = \{p,p\} = 0$, segue que a função p mantém um valor constante sobre cada uma de suas curvas hamiltonianas. Dizemos que tal curva é uma bicaracterística de p se este valor é nulo.

Teorema 1.2.11. *Seja* P *um operador diferencial de ordem* m *sobre* Ω, *auto-adjunto e de símbolo principal* p. *Seja* (u_n) *uma sequência limitada de* $L^2_{loc}(\Omega)$, *convergindo fraco para* 0 *e de medida de defeito microlocal* μ. *Suponhamos que* Pu_n *tende a* 0 *em* $H^{-(m-1)}_{loc}(\Omega)$. *Então o suporte de* μ *é uma união de curvas do tipo* $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|} \right)$, *onde* $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ *é uma bicaracterística de* p.

1.3 Resultados básicos acerca da equação da onda não linear

Nesta seção nós reunimos alguns resultados básicos com relação a equação da onda sobre variedades riemannianas que serão úteis para os próximos capítulos.

Teorema 1.3.1 (Estimativas de Strichartz)**.** *Seja* (Ω, G) *uma variedade riemanniana* *compacta com ou sem bordo de dimensão* $n \geq 1$. *Suponha que* (p, q, λ) *e* $(r', s', 1-\lambda)$ *satisfazem as condições*

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \lambda \tag{1.3.14}$$

e, quando consideramos $\partial\Omega = \emptyset$,

$$\frac{2}{p} + \frac{n-1}{q} \leq \frac{n-1}{2} \tag{1.3.15}$$

e, no caso em que $\partial\Omega \neq \emptyset$,

$$\frac{3}{p} + \frac{n-1}{q} \leq \frac{n-1}{2}, \ \textit{se} \quad n \leq 4 \quad \textit{e} \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} \quad \textit{se}\ n \geq 4, \tag{1.3.16}$$

então existe uma única solução $u \in L^p(0,T; L^q(\Omega)) \cap C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ *para o problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_G u = F_0 \ \textit{em}\ \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \quad \textit{sobre}\ \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1 \quad \textit{em}\ \Omega. \end{cases} \tag{1.3.17}$$

com $F_0 \in L^r(0,T; L^s(\Omega))$ *e* (r,s) *sendo o expoente de Holder dual a* (r', s'), *além disso nós temos a seguinte estimativa,*

$$\|u\|_{L^p([0,T];L^q(\Omega))} \leq C\left(\|u_0\|_{H^\lambda(\Omega)} + \|u_1\|_{H^{\lambda-1}(\Omega)} + \|F_0\|_{L^r([-T,T];L^s(M))}\right) \tag{1.3.18}$$

com $C > 0$ *uma constante dependendo de* Ω *e* T.

Demonstração: A demonstração para o caso $\partial\Omega = \emptyset$ pode ser encontrado em [32] e para o caso de uma variedade com bordo citamos [5]. Note que, assim como provado por O. Ivanovic em [34], não é esperado que as estimativas de Strichartz sejam verdadeiras para todos os valores em (1.3.15). ■

No que segue, vamos considerar $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função à valores reais tal que

$$f(0) = 0, sf(s) \geq 0, |f(s)| \leq C(1+|s|)^p, |f'(s)| \leq C(1+|s|)^{p-1} \tag{1.3.19}$$

com $1 \leq p < 5$ e vamos relembrar alguns resultados com relação a equação da onda semi-linear considerada sobre uma variedade riemanniana compacta Ω de dimensão 3.

$$u_{tt} - \Delta_G u + a(x)\partial_t u + f(u) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \tag{1.3.20}$$

$$u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \quad \text{se } \partial\Omega \neq \emptyset, \tag{1.3.21}$$

$$u(0) = u_0 \quad u_t(0) = u_1. \tag{1.3.22}$$

No que concerne a boa colocação para o problema (1.3.20)−(1.3.22) observamos que, considerando $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ a existência da unicidade de soluções em $C([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega))$ segue combinando as estimativas de Strichartz (1.3.18), assim como podemos encontrar em [24], [25]. Observe que para o caso da equação da onda com a não linearidade crítica, isto é $p = 5$, o resultado provando a existência de solução é devido a [11], artigo o qual extende os resultados provados em [26] e [51] no caso $\Omega = \mathbb{R}^n$. Além disso, argumentando como em [11] é possível mostrar que tomando os dados iniciais em $H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, satisfazendo as condições de compatibilidade como em [49], e a não linearidade suficientemente regular obtemos uma solução ao level $H^{m+1} \times H^m$.

Associado ao problema (1.3.20)−(1.3.22) consideramos o seguinte funcional de energia

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_G u(t)\|_{L^2}^2\right) + \int_\Omega V(u)dx \tag{1.3.23}$$

onde $V(u) = \int_0^u f(s)ds \geq 0$, assim é simples observar que E é não-crescente.

Lema 1.3.2. *Dados $T > 0$, $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $F \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ existe uma única solução para o problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_G u + f(u) = F \ \textit{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \quad \textit{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, \ u_t(0) = u_1 \quad \textit{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.3.24}$$

tal que $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^q(0, T; L^r(\Omega))$, além disso, considerando $E_0, M_1 > 0$ duas constantes, para todo (u_0, u_1) e F tais que $E(u(0)) \leq E_0$ e

$\|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq M_1$, *temos a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))} \leq C\left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)} + \|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right) \tag{1.3.25}$$

com $C = C(T,\Omega) > 0$, $q \in \left[\frac{7}{2}, \infty\right]$ *e*

$$\frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}. \tag{1.3.26}$$

Demonstração. Primeiro, considere $(q,r) = (5,10)$ e defina

$$X_{T'} = \left\{v \in L^5(0,T';L^{10}(\Omega));\, \|v\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} \leq C_{X_{T'}}\right\} \tag{1.3.27}$$

onde $C_{X_{T'}} = C\left(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + 1\right) > 0$ e $T' > 0$ suficientemente pequeno, a ser determinado. Considerando a topologia induzida por $L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$, temos que $X_{T'}$ é um espaço métrico completo. Defina a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} S : X_{T'} &\rightarrow L^5(0,T';L^{10}(\Omega)) \\ v &\mapsto u = S(v) \in L^5(0,T';L^{10}(\Omega)) \end{aligned}$$

onde u é solução para o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_G u = F - f(v) \text{ em } \Omega \times (0,T'), \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T'), \\ u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.3.28}$$

Vamos provar que S esta bem definida, $S : X_{T'} \to X_{T'}$ e, além disso, S é uma contração.

Observe que $v \in L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$ garante que $f(v) \in L^1(0,T';L^2(\Omega))$ e, além disso,

$$\|f(v)\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))} \leq CT'^{\frac{4}{5}}\|v\|_{L_t^5 L_x^{10}} + CT'^{\frac{5}{5-p}} C_{X_{T'}}^{p-1}\|v\|_{L_t^5 L_x^{10}}. \tag{1.3.29}$$

De fato, por hipótese, $|f(v)| \leq C\left(1 + |v|^{p-1}\right)|v|$, assim usando a desigualdade de Holder e o fato que $\frac{p-1}{4} < 1$ temos,

$$
\begin{aligned}
\|f(v)\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))} &\leq C\|v\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))} + C\||v|^{p-1}v\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))} \\
&\leq CT'^{\frac{4}{5}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} + C\int_0^{T'} \|v\|^{p-1}_{L^{10\frac{p-1}{4}}}\|v\|_{L^{10}}dt \\
&\leq CT'^{\frac{4}{5}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} + CT'^{\frac{5}{5-p}}\|v\|^{p-1}_{L^5_tL^{10}_x}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} \\
&\leq CT'^{\frac{4}{5}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} + CT'^{\frac{5}{5-p}}C^{p-1}_{X_{T'}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x},
\end{aligned}
$$

o que prova (1.3.29).

Da afirmação acima e tomando $T' < T$ temos $F - f(v) \in L^1(0,T';L^2(\Omega))$ e então pelo Teorema 1.3.1 segue que $u \in L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$ e, além disso,

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} &\leq C\left(\|u_0\|_{H^1_0} + \|u_1\|_{L^2} + \|F - f(v)\|_{L^1_tL^2_x}\right) \\
&\leq C_{X_{T'}}
\end{aligned}
$$

onde, esta última desigualdade é válida considerando um valor suficientemente pequeno para $T' = T'(\|u_0\|_{H^1_0}, \|u_1\|_{L^2}, \|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}) > 0$. O que nos leva a concluir que $u \in X_{T'}$. Considerando $v, \tilde{v} \in X_{T'}$, $u = S(v), \tilde{u} = S(\tilde{v})$ e pondo $U = u - \tilde{u}$, temos que U é solução de

$$
\begin{cases}
U_{tt} - \Delta_G U = f(\tilde{v}) - f(v) \text{ em } \Omega \times (0,T'), \\
U = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T') \\
U(0) = 0,\ U_t(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{cases}
$$

aplicando o Teorema 1.3.1 junto com a desigualdade de Holder e a hipótese assumida sobre f,

$$
\begin{aligned}
\|S(v) - S(\tilde{v})\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} &\leq C\|f(\tilde{v}) - f(v)\|_{L^1_tL^2_x} \\
&\leq C\left(T'^{\frac{4}{5}} + T'^{\frac{5}{5-p}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} + T'^{\frac{5}{5-p}}\|\tilde{v}\|_{L^5_tL^{10}_x}\right)\|v - \tilde{v}\|_{L^5_tL^{10}_x} \\
&\leq \frac{1}{2}\|v - \tilde{v}\|_{L^5_tL^{10}_x}
\end{aligned}
$$

para $T' > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, podemos concluir que S é uma contração, logo possui um único ponto fixo $u \in L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$ que é solução de (1.3.24), além disso,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} &\leq C\left(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L_t^1L_x^2} + \|f(u)\|_{L_t^1L_x^2}\right)\\
&\leq C\left(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L_t^1L_x^2}\right)\\
&\quad +C\left(T'^{\frac{4}{5}}\|u\|_{L_t^5L_x^{10}} + C_{X_{T'}}^{p-1}T'^{\frac{5}{5-p}}\|u\|_{L_t^1L_x^2}\right) \qquad (1.3.30)
\end{aligned}$$

como temos um limitante uniforme, em t, para as normas de u_0, u_1 e F em $H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)$ e $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente, podemos tomar $T' > 0$ suficientemente pequeno, dependendo apenas de E_0 e M_1 de modo que os termos em (1.3.30) podem ser absorvidos no lado esquerdo de (1.3.30), donde segue que:

$$\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} \leq C\left(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))}\right). \qquad (1.3.31)$$

Agora, observe que, argumentando via desigualdade de Gronwall, podemos concluir que esta solução é única em $L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$, além disso, para todo $t \in [0,T']$ temos

$$\|u_t(t)\|_{L^2} + \|u(t)\|_{H_0^1} \leq C\left(\|u_1\|_{L^2} + \|u_0\|_{H_0^1} + \|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right),$$

isto é, a norma da solução não explode em tempo finito, o que nos permite expandir a solução para $[0,T]$, além disso, supondo $F \in L^1(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega))$ temos que a solução pode ser definida globalmente, além disso, iterando o processo para obtenção de (1.3.31)podemos obter esta estimativa para a norma $L_t^5L_x^{10}$ no intervalo $[0,T]$.

Considerando agora $(q,r) \neq (5,10)$ tal que $q \in \left[\frac{7}{2},\infty\right]$ e satisfazendo (1.3.26), observando primeiro que $u \in L^5(0,T;L^{10}(\Omega))$ garante que $f(u) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, podemos aplicar o Teorema 1.3.1 para obter que $u \in L^q(0,T;L^r(\Omega))$, além disso, para $T' < T$ temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(0,T';L^r(\Omega))} &\leq C(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F - f(u)\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))})\\
&\leq C(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))})\\
&\quad +CT'^{\frac{4}{5}}\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} + CT'^{\frac{5}{5-p}}C_{X_T}^{p-1}\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))}
\end{aligned}$$

somando esta última desigualdade, com a desigualdade provada no caso $(5,10)$ obtemos, para uma constante $C > 0$, possivelmente maior, porém que dependa apenas de $f, E_0, M_1 > 0$ e Ω

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(0,T';L^r(\Omega))} + \|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} \;\leq\; & C(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))}) \\
& + CT'^{\frac{4}{5}}\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} \\
& + CT'^{\frac{5}{5-p}} C_{X_T}^{p-1}\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))}
\end{aligned}$$

assim tomando $T' > 0$ suficientemente pequeno, podemos absorver os termos envolvendo a norma $\|u\|_{L^5L^{10}}$ no lado esquerdo desta desigualdade no lado direito, obtendo assim

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(0,T';L^r(\Omega))} & \leq \|u\|_{L^q(0,T';L^r(\Omega))} + \|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} \\
& \leq C(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))})
\end{aligned}$$

provando o resultado para $T' > 0$ suficientemente pequeno, porém dependendo somente de $f, M_1, E_0 > 0$ e Ω, podemos iterar este processo para obter (1.3.25) para $T > 0$.

$\square$

Considere (u^n) uma sequência de soluções para o problema

$$\begin{aligned}
& u^n_{tt} - \Delta_G u^n + f(u^n) = F^n \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\
& u^n = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \\
& u^n(0) = u^n_0 \quad \partial_t u^n(0) = u^n_1 \quad \text{em } \Omega,
\end{aligned}$$

com (Ω, G) uma variedade riemanniana compacta com ou sem bordo e $F^n \in L^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ tal que $\|F^n\|_{L^1(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega))} \leq C$,para algum $C > 0$, e supondo válido a limitação $E(u_n(t)) \leq E_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tal limitação implica que $(\partial_t u^n), (\nabla_g u^n)$ são uniformemente limitados em $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Denotaremos por (v^n) a sequência de soluções para a equação da onda linear com os mesmos dados iniciais, ie,

$$\begin{aligned}
& v^n_{tt} - \Delta_G v^n = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\
& v^n = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \\
& v^n(0) = u^n_0 \quad \partial_t v^n(0) = u^n_1,
\end{aligned}$$

assim temos que $E(v^n) \leq E_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ o que nos da que $(\partial_t v^n), (\nabla_g v^n)$ são uniformemente limitados em $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$.

Definição 1.3.3. *Sejam $(u^n), (v^n)$ sequências nas condições acima. Dizemos que (u^n) é linearizável sobre um intervalo compacto I se*

$$\sup_{t\in I}\left[\int_\Omega |\partial_t(u^n - v^n)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla_G(u^n - v^n)|^2 dx\right] \to 0 \tag{1.3.32}$$

quando $n \to \infty$.

Observação 1.3.4. *Observe que podemos associar as sequências $(\partial_t u^n), (\nabla_G u^n)$ e $(\partial_t v^n), (\nabla_G v^n)$ medidas microlocal de defeito μ_1, μ_2, as quais chamamos de medida microlocal de defeito H^1 associada a equação da onda semilinear e linear, respectivamente. De acordo com a Observação* 1.2.8 *temos que $\mu_1 = \mu_2$.*

Observação 1.3.5. *O conceito de sequência linearizável, tal como em* (1.3.32) *foi introduzido por P. Gerard em [22].*

Observação 1.3.6. *Nas condições acima, assuma que*

$$K^n = F^n - f(u^n) \to 0 \tag{1.3.33}$$

fortemente em $L^1(0, T; L^2(\Omega))$, para algum $T > 0$, então a sequência (u^n) é linearizável no sentido da Definição 1.3.3*. De fato, considere (v^n) uma sequência de soluções para a equação da onda linear com os mesmos dados iniciais, isto é,*

$$\begin{aligned}
&v^n_{tt} - \Delta_G v^n = 0 \ \text{em } \Omega \times (0, T),\\
&v^n = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T),\\
&v^n(0) = u^n_0 \quad \partial_t v^n(0) = u^n_1,
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
&(u^n - v^n)_{tt} - \Delta_G(u^n - v^n) = K^n \ \text{em } \Omega \times (0, T),\\
&u^n - v^n = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T),\\
&u^n - v^n(0) = 0 \quad \partial_t(u^n - v^n)(0) = 0,
\end{aligned}$$

e, então, pela desigualdade de Gronwall obtemos que,

$$\|\partial_t(u^n - v^n)(t)\|_{L^2} + \|\nabla_G(u^n - v^n)(t)\|_{L^2} \;\leq\; C\int_0^T \|K^n(t)\|_{L^2}dt$$

para todo $t \in [0,T]$, *assim,*

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\partial_t(u^n - v^n)(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_G(u^n - v^n)(t)\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \;\leq\; C\int_0^T \|K^n(t)\|_{L^2}dt \to 0$$

onde usamos (1.3.33) *para obter esta última convergência. Temos assim que a sequência* (u^n) *é linearizavel no sentido da Definição* 1.3.3.

Definimos como

$$\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}) = \{f \in C^1(\mathbb{R}); \exists C > 0 \text{ e } p \in [1,5) \text{ tal que (1.3.19) é verificado}\} \qquad (1.3.34)$$

e induzimos neste espaço a topologia de Whitney gerada pela seguinte família de vizinhanças,

$$\mathcal{N}_{f,\delta} = \{h \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}); \max\{|f(s) - h(s)|, |f'(s) - h'(s)|\} < \delta(s), \forall s \in \mathbb{R}\}$$

onde f é qualquer função em $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ e δ é qualquer função positiva contínua. Munido com essa topologia, $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ é um espaço de Baire, o que significa que qualquer conjunto genérico, isto é, qualquer conjunto contendo uma interseção enumerável de abertos densos, é denso em $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ (veja [35] para a prova deste fato).

Proposição 1.3.7 (Princípio de continuação única). *Dado* $E_0 \geq 0$, *existe* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ *um conjunto genérico tal que, se* $\omega \subset \Omega$ *é um aberto satisfazendo a condição geométrica de controle, então existe* $T > 0$ *tal que a única solução de*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta_G u + f(u) = 0 \quad \Omega \times [0,T] \\ &\partial_t u = 0 \quad \text{em} \quad \omega \times [0,T] \end{aligned}$$

com $E(u(0)) \leq E_0$ *é* $u \equiv 0$.

Demonstração: Ver [35], Teorema 1.2 e Corolário 6.2. ■

O Teorema 1.3.7 estabelece um princípio de continuação única que será de fundamental importância para o Capítulo 3, por esta razão comentaremos brevemente detalhes de sua prova. Em primeiro lugar, observe que a demonstração do Teorema 1.3.7 é obtida provando a seguinte propriedade para o modelo de equação da onda semi-linear com dissipação linear (1.3.20) − (1.3.22):

(DE) : Para qualquer $E_0 \geq 0$, existem K e λ constantes positivas tal que, toda solução de (1.3.20) − (1.3.22) com $E(u(0)) \leq E_0$ (lembrando que o funcional de energia definido em (1.3.23)), temos a estimativa:

$$E(u(t)) \leq K e^{-\lambda t} E(u(0)), \qquad \text{para todo } t \geq 0.$$

A prova de que a propriedade (DE) implica na validade do Teorema 1.3.7 é feita na Proposição 2.5 em [35] e esta fortemente baseada no fato que a propriedade (DE) é equivalente a existência de $T, C > 0$ tais que:

$$E(u(0)) \leq C \int\int_{[0,T]\times\Omega} a(x)|\partial_t u(x,t)|^2 dxdt.$$

para toda solução u de (1.3.20) − (1.3.22) com $E(u(0)) \leq E_0$.

Observado essa equivalência, é provado que a propriedade (DE) é válida assumindo que a função $f \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ seja analítica. Tipicamente os exemplos considerados de função em $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ são funções do tipo $f(u) = |u|^{p-1}u$, que não são funções analíticas salvo quando $p = 1$ ou $p = 3$, mas podemos citar como exemplo funções como $f(u) = \left(\frac{u}{tanh(u)}\right)^{p-1} u$ que é analítica para todo $1 \leq p < 5$. Posteriormente, fazendo uso da propriedade (DE) provada para f analítica, (DE) é obtida para "quase todas"as funções $f \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$. Mais precisamente, o Teorema 1.2 em [35], prova que, definindo $\mathfrak{B} = \bigcap \mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$, onde $\mathfrak{B}_n$ é o conjunto de toda função $f \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ tal que (DE) é válida com $E(u(0)) \leq n$, temos que $\mathfrak{B}_n$ é aberto e denso em $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$, com respeito a topologia de Whitney, assim como $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ é um espaço de Baire temos que $\mathfrak{B}$ é um conjunto denso em $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$.

Capítulo 2

Existência de solução e taxas de decaimento para uma classe de equações da onda semi-linear de sexta ordem em domínios limitados

Neste capítulo estudaremos a existência e comportamento assintótico de solução para o problema,

$$u_{tt} - au_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} - \int_0^t g(t-s)u_{xxxx}(s)ds = \alpha|u_x|_x^p \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.1)$$

$$u = 0, \quad u_x = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (2.0.2)$$

$$u(0) = u_0 \quad u_t(0) = u_1 \quad \text{em } \Omega \quad (2.0.3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto e limitado, $a, \alpha \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. No que concerne a função g assumimos as seguintes hipóteses.

(G1) $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é uma função de classe C^1 não crescente satisfazendo

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s)ds = I > 0.$$

(G2) Existe uma função diferenciável positiva $\xi = \xi(t)$ satisfazendo

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \quad t \geq 0$$

e

$$\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| \leq k, \quad \xi(t) > 0, \xi'(t) \leq 0, \forall t > 0, \quad \int_0^\infty \xi(t)dt = +\infty.$$

Observação 2.0.1. *Podemos citar os seguintes exemplos de funções satisfazendo as condições* $(G1)$ *e* $(G2)$ *acima:*

(i) $g(t) = c(1+t)^\nu$, *para* $\nu < 1$*;*

(ii) $g(t) = ae^{-b(1+t)^{\nu_1}}$, *para* $0 < \nu_1 \leq 1$*.*

Pondo $M = \xi(0)$ *notamos que* $\xi(t) \leq M$ *para todo* $t \geq 0$*.*

A equação (2.0.1) foi introduzida por Rosenau em [46] e é uma resposta à questão de como descrever a dinâmica de um meio denso (*dense lattice*).

O modelo acima, no caso onde o termo dissipativo é nulo, isto é, quando $g = 0$ foi estudado em [61], [63] e [50]. Nestes casos, o problema foi considerado com a equação posta em $\Omega = \mathbb{R}$ e foi provada a existência de solução para dados iniciais pequenos e a não existência de solução (com *blow up* em tempo finito) para certos dados iniciais. A prova é baseada numa combinação de um argumento envolvendo o Teorema de ponto fixo de Banach, para obtenção de uma solução local, e o uso do método do poço potencial (*potential well method*), como introduzido em [42] e [48], para descrever o conjunto de dados iniciais onde existe solução global e onde a solução tem blow up em tempo finito. A principal diferença, com relação ao problema abordado neste capítulo é a presença do termo de dissipação que torna o problema não autônomo e portanto a existência de solução não é mais uma consequência imediata dos argumentos desenvolvidos em [61], [63] e [50]. Para contornar esta questão seguimos as ideias contidas em [40] para provar o resultado de existência de solução local

Vale a pena mencionar que o problema $(2.0.1)-(2.0.3)$ compartilha varias propriedades da "boa"equação de Boussinesq, à qual referimos os seguintes artigos [47], [56], [62], [64] e as referencias neles contidas para um amplo estudo acerca desta equação.

Outra questão estudada neste capítulo diz respeito ao comportamento assintótico da solução global, para fazer isso, consideramos o seguinte funcional de energia associado com (2.0.1) – (2.0.3),

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + a\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \right. \\ &\left. + \|u_{xxt}(t)\|_{L^2}^2 + (g \diamond u_{xx})(t)\right) + \frac{\alpha}{p+1}\int_\Omega |u_x|^p u_x dx \end{aligned} \tag{2.0.4}$$

onde usamos a notação

$$(g \diamond u_{xx})(t) = \int_0^t g(t-s)\|u_{xx}(s) - u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 ds. \tag{2.0.5}$$

e observando a identidade,

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-s)(u_{xx}(s), u_{xxt}(t))ds &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g \diamond u_{xx})(t) - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2\right\} \\ &+ \frac{1}{2}(g' \diamond u_{xx})(t) - \frac{1}{2}g(t)\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

então, podemos provar a seguinte estimativa para o funcional de energia

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq \frac{1}{2}(g' \diamond u_{xx})(t) - \frac{1}{2}g(t)\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \tag{2.0.6}$$

o que mostra que a energia é não-crescente no tempo. Seguindo as ideias em [38], [39] obtemos taxas de decaimento para E.

Nosso principal resultado neste capítulo é o seguinte

Teorema 2.0.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p \geq 2$ temos que, existe uma única solução $u \in C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega))$ para o problema (2.0.1) – (2.0.3) desde que tenhamos $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, $E(0) \leq d$ e*

$$a\|u_{0x}\|_{L^2}^2 + \|u_{0xx}\|_{L^2}^2 \leq \frac{2(p+1)}{I(p-1)}d$$

além disso temos, para cada $t_0 > 0$, que existem $K, \beta > 0$ tais que,

$$E(t) \leq Ke^{-\beta\int_{t_0}^t \xi(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.0.7}$$

Observação 2.0.3. *Note que, se consideramos $\xi(t) \equiv c$, para alguma constante $c > 0$,* *obtemos taxas de decaimento exponencial para o funcional de energia e se tomarmos* $\xi(t) \equiv c(1+t)^{-1}$ *obtemos taxas de decaimento polinomial para o funcional de energia. Observamos também que, as estimativas* (2.0.7) *são também válidas para* $t \in [0, t_0]$ *uma vez que* $E(t)$ *e* $\xi(t)$ *são contínuas e limitadas.*

Observação 2.0.4. *Nas mesmas condições do Teorema 2.0.2 podemos provar a existência de uma solução local para os dados iniciais em* $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ *com* $E(0) \leq d$ *e*

$$a\|u_{0x}\|_{L^2}^2 + \|u_{0xx}\|_{L^2}^2 > \frac{2(p+1)}{I(p-1)}d$$

entretanto, a presença do termo de dissipação impossibilita provar que tal solução tem blow up em tempo finito, assim como é provado para o caso conservativo em [61]. A existência ou não existência de solução global neste caso continua um problema em aberto.

2.1 Existência de solução local

A estratégia para provar a existência de solução para o problema $(2.0.1)-(2.0.3)$ consiste em uma aplicação do Teorema de ponto fixo. Para isto, começamos provando um resultado com respeito a existência de solução para o problema linearizado, em que o termo não linear na equação (2.0.1) é substituído por uma função $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, tal resultado e as estimativas obtidas para a solução do problema homogêneo associado serão de grande importância para aplicarmos este método do ponto fixo.

Proposição 2.1.1. *Sejam* $T > 0$*,* $u_0, u_1 \in H_0^2(\Omega)$ *e* $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$*. Existe uma única solução* $u \in C^1([0, T]; H_0^2(\Omega))$*, que depende continuamente dos dados iniciais, para o problema:*

$$u_{tt} - au_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} - \int_0^t g(t-s)u_{xxxx}(s)ds = f \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \tag{2.1.8}$$

$$u = 0, \quad u_x = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \tag{2.1.9}$$

$$u(0) = u_0 \quad u_t(0) = u_1 \quad \text{em } \Omega. \tag{2.1.10}$$

Além disso, temos a seguinte estimativa,

$$\begin{aligned}\|u_t(t)\|_{L^2} + a\|u_x(t)\|_{L^2} + I\|u_{xx}(t)\|_{L^2} &+ \|u_{xxt}(t)\|_{L^2} \leq \|u_1\|_{L^2} + a\|u_{0x}\|_{L^2} + \|u_{0xx}\|_{L^2} + \\ &+ \|u_{1xx}\|_{L^2} + \int_0^t \|f(t)\|_{L^2} dt \qquad (2.1.11)\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração: A prova deste resultado é uma aplicação imediata do método de Galerkin, para a comodidade do leitor indicamos as principais passagens dessa demonstração.

Provamos inicialmente a existência de solução forte, isto é, inicialmente consideramos $u_0, u_1 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ e $f \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega))$, então podemos estender este resultado para $u_0, u_1 \in H_0^2(\Omega)$ e $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ por densidade, sem maiores problemas.

Considere $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ base ortogonal de $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ dada por auto-funções do problema,

$$\begin{cases} w_{xxxx} = \lambda w \quad em \quad \Omega \\ w = w_x = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tal que $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ seja ortogonal em $H_0^1(\Omega), H_0^2(\Omega), H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ e ortonormal em $L^2(\Omega)$. Denotando por $W_m = [\omega_1, ..., \omega_m]$, devemos provar a existência de funções

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j$$

para $t \in [0, T]$, com u^m satisfazendo o problema aproximado,

$$\begin{aligned}&(u_{tt}^m(t), \omega_j)_{L^2} + (au_x^m(t), \omega_{jx})_{L^2} + (u_{xx}^m(t), \omega_{jxx})_{L^2} + (u_{xxtt}^m(t), \omega_{jxx})_{L^2} \\ &- \int_0^t g(t-s)(u_{xx}^m(s), \omega_{jxx})ds = (f(t), \omega_j)_{L^2} \qquad (2.1.12)\end{aligned}$$

com as condições iniciais

$$u^m(0) = u_0^m \quad \text{em} \quad u_t^m(0) = u_1^m$$

onde

$$\begin{aligned} u_0^m &\to u_0 \quad \text{em} \quad H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)\\ u_1^m &\to u_1 \quad \text{em} \quad H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega). \end{aligned}$$

Veja que, por uma aplicação do Teorema Caratheódory garantimos a existência de solução u^m sobre um intervalo $[0,t_m)$, $m\in\mathbb{N}$. As próximas estimativas permitirão estender a solução à $[0,T]$.

Estimativa I: Compondo o problema aproximado com u_t^m, e usando a identidade,

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-s)(u_{xx}^m(s),u_{xxt}^m(t))ds &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\diamond u_{xx}^m)(t)-\int_0^t g(s)ds\|u_{xx}^m(t)\|_{L^2}^2\right\}\\ &\quad +\frac{1}{2}(g'\diamond u_{xx}^m)(t))-\frac{1}{2}g(t)\|u_{xx}^m(t)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

obtemos a estimativa,

$$\begin{aligned} &\|u_t^m(t)\|_{L^2}+a\|u_x^m(t)\|_{L^2}+I\|u_{xx}^m(t)\|_{L^2}+\|u_{xxt}^m(t)\|_{L^2} \qquad (2.1.13)\\ &\le C\left(\|u_t^m(0)\|_{L^2}+a\|u_x^m(0)\|_{L^2}+\|u_{xx}^m(0)\|_{L^2}+\|u_{xxt}^m(0)\|_{L^2}+\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right)\\ &\le C \end{aligned}$$

para todo $t\in[0,t_m)$, com $C>0$ não dependendo de $m\in\mathbb{N}$, assim podemos estender u^m ao intervalo $[0,T]$, além disso, desta estimativa concluímos que:

$$\begin{aligned} (u_t^m) &\quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\\ (u^m) &\quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\\ (u^m),(u_t^m) &\quad \text{são limitadas em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Estimativa II: Compondo o problema aproximado com u_{xxxxt}^m e usando a Estimativa I, obtemos:

$$\|u_{xxt}^m(t)\|_{L^2}^2+\|u_{xxxxt}^m(t)\|_{L^2}^2+\|u_{xxxx}^m(t)\|_{L^2}^2\le C+C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$$

para todo $t \in [0,T]$. Donde,

$$(u^m), (u_t^m) \quad \text{são limitadas em } L^\infty(0,T;H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)).$$

Estimativa III: Por fim, podemos provar que $u_{tt}^m \in L^1(0,T;H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))$, além disso, compondo o problema aproximado com u_{xxxxtt}^m obtemos que

$$(u_{tt}^m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)).$$

Fazendo uso das Estimativas I, II, III obtemos uma função $u \in C^1([0,T];H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))$ e passado ao limite em (2.1.12) obtemos que u é solução forte de $(2.1.8)-(2.1.10)$ e depende continuamente dos dados iniciais. Por um argumento de densidade, obtemos a existência de solução fraca para este problema, assim como desejado.

Para provarmos que a estimativa (2.1.11) é válida, basta procedermos como em (2.1.13).

■

Teorema 2.1.2. *Sejam $u_0, u_1 \in H_0^2(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $p > 1$ e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ satisfazendo as hipóteses $(G1)$ e $(G2)$. Então, existe uma única solução, definida em um intervalo maximal $[0,T_0)$, para o problema não linear*

$$u_{tt} - au_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} - \int_0^t g(t-s)u_{xxxx}(s)ds = \alpha|u_x|_x^p$$
$$\text{em } \Omega\times(0,T_0), \tag{2.1.14}$$

$$u = 0, \quad u_x = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\times(0,T_0), \tag{2.1.15}$$

$$u(0) = u_0 \quad u_t(0) = u_1 \quad \text{em } \Omega. \tag{2.1.16}$$

Além disso, se

$$\sup_{t\in[0,T_0)} (\|u(t)\|_{H^2} + \|u_t(t)\|_{H^2}) < \infty, \tag{2.1.17}$$

então $T_0 = \infty$.

Demonstração. Consideramos a seguinte aplicação $S : B(R,T_*) \to B(R,T_*)$, definida na bola fechada $B(R,T_*) = \{u \in C([0,T_*];H_0^2(\Omega)); \|u\|_{C^1([0,T_*];H_0^2(\Omega))} \le R\}$ munida com a topologia induzida por $C^1([0,T_*];H_0^2(\Omega))$ para $R,T_*>0$ que serão apropriadamente escolhidos. Definimos a aplicação S tal que, cada $v\in B(R,T_*)$ é mapeado em $u=S(v)\in C^1([0,T_*];H_0^2(\Omega))$ solução de

$$u_{tt}-au_{xx}+u_{xxxx}+u_{xxxxtt}-\int_0^t g(t-s)u_{xxxx}(s)ds=\alpha|v_x|_x^p \quad \text{em } \Omega\times(0,T_*), \tag{2.1.18}$$

$$u=0,\quad u_x=0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\times(0,T_*), \tag{2.1.19}$$

$$u(0)=u_0,\quad u_t(0)=u_1 \quad \text{em } \Omega. \tag{2.1.20}$$

Afirmamos que S está bem definida e é uma contração. De fato, em primeiro lugar observe que $\alpha|v_x|_x^p\in L^1(0,T_*;L^2(\Omega))$, para qualquer $T_*>0$ fixo, então a existência de solução para (2.1.18) – (2.1.20) é dada pela Proposição 2.1.1. Além disso, considerando

$$R>\frac{2}{I}\left(\|u_0\|_{L^2}+a\|u_{0x}\|_{L^2}+\|u_{0xx}\|_{L^2}+\|u_{1xx}\|_{L^2}\right)$$

e observando a desigualdade (2.1.11) temos

$$\frac{I}{2}\left(\|u_{xx}(t)\|_{L^2}+\|u_{xxt}(t)\|_{H^2}\right)\le\left(\|u_1\|_{L^2}+a\|u_{0x}\|_{L^2}+\|u_{0xx}\|_{L^2}+\|u_{1xx}\|_{L^2}+|\alpha|CR^pT_*\right)$$

isto é,

$$\|u(t)\|_{H_0^2}+\|u_t(t)\|_{H_0^2}\le\frac{2}{I}\left(\|u_1\|_{L^2}+a\|u_{0x}\|_{L^2}+\|u_{0xx}\|_{L^2}+\|u_{1xx}\|_{L^2}+|\alpha|CR^pT_*\right)$$

donde podemos concluir que, tomando $T>0$ tal que,

$$\frac{2}{I}\left(\|u_1\|_{L^2}+a\|u_{0x}\|_{L^2}+\|u_{0xx}\|_{L^2}+\|u_{1xx}\|_{L^2}\right)+\frac{2|\alpha|C}{I}R^pT_*=R$$

$u\in B(R,T_*)$. Portanto $S:B(R,T_*)\to B(R,T_*)$ está bem definida. Considerando

$v, \tilde{v} \in B(R, T_*)$ e $U = S(v) - S(\tilde{v})$, solução de

$$\begin{aligned}
&U_{tt} - aU_{xx} + U_{xxxx} + U_{xxxxtt} - \int_0^t g(t-s)U_{xxxx}(s)ds = \alpha\left(|v_x|_x^p - |\tilde{v}_x|_x^p\right) \\
&\qquad \text{em } \Omega \times (0, T_*) \\
&U = 0, \quad U_x = 0 \quad \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T_*) \\
&U(0) = 0 \quad U_t(0) = 0 \quad \text{ em } \Omega
\end{aligned}$$

temos, por (2.1.11),

$$\frac{I}{2}\left(\|U_{xx}(t)\|_{L^2} + \|U_{xxt}(t)\|_{L^2}\right) \leq |\alpha| \int_0^{T_*} \||v_x|_x^p - |\tilde{v}|_x^p\|_{L^2} dt.$$

Note que, para cada $t \in [0, T_*]$ fixo,

$$\||v_x|_x^p(t) - |\tilde{v}_x|_x^p(t)\|_{L^2} \leq C|\alpha| R^p \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_{H_0^2}$$

assim

$$\|U\|_{C^1([0,T_*];H_0^2(\Omega))} \leq \frac{2}{I} C|\alpha| R^p T^* \|v - \tilde{v}\|_{C^1([0,T_*];H_0^2)}$$

e tomando $T_* > 0$ suficientemente pequeno, tal que,

$$\frac{2}{I} C|\alpha| R^p T_* < 1$$

podemos concluir que S é uma contração, donde segue que, existe um único ponto fixo para S, que é uma solução de (2.1.14) $-$ (2.1.16), tal solução é única na bola fechada $B(R, T_*)$, para provar a unicidade em todo espaço $C^1([0, T_*]; H_0^2(\Omega))$ temos que fazer uso da desigualdade de Gronwall. A solução obtida, então, pode ser extendida a um intervalo maximal $[0, T_0)$ e $T_0 = \infty$ se (2.1.17) é válido. □

Observação 2.1.3. *Note que, de acordo com* (2.1.17) *para provar que $T_0 = \infty$, isto é, a solução é globalmente definida no tempo, nós devemos encontrar um limite uniforme para* *a norma* $H_0^2 \times H_0^2$ *de* (u, u_t)*, esta condição é satisfeita desde que,*

$$C_* = \sup_{t\in[0,T_0)} \|u_x(t)\|_{L^\infty} < \infty. \tag{2.1.21}$$

De fato, fazendo uso da estimativa de energia (2.0.6) *nós temos, para todo* $t \in [0, T_0)$*,*

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{H_0^2} + \|u_t(t)\|^2_{H_0^2} &= \|u_{xx}(t)\|^2_{L^2} + \|u_{xxt}(t)\|^2_{L^2} \\
&\leq CE(0) + \frac{|\alpha|}{p+1}\int_\Omega |u_x|^p|u_x|dx \\
&\leq CE(0) + \frac{|\alpha|}{p+1}C_*^{p+1}|\Omega|
\end{aligned}$$

donde nós temos (2.1.17).

2.2 Existência de solução global

Considere o funcional de energia potencial J definido como

$$J(u) = \frac{I}{2}\left(a\|u_x(t)\|^2_{L^2} + \|u_{xx}(t)\|^2_{L^2}\right) + \frac{\alpha}{p+1}\int_\Omega |u_x|^p u_x dx \tag{2.2.22}$$

assim, uma vez que $I = \left(1 - \int_0^\infty g(s)ds\right) \leq 1$, temos,

$$J(u) \leq E(u) \leq E(0)$$

além disso, considerando a constante

$$C_0 = \sup_{0\neq u(t)\in H_0^2} \frac{\|u_x(t)\|_{L^{p+1}}}{\left(a\|u_x(t)\|_{L^2} + \|u_{xx}(t)\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}} > 0. \tag{2.2.23}$$

Segue que,

$$\frac{I}{2}\left(a\|u_x(t)\|^2_{L^2} + \|u_{xx}(t)\|^2_{L^2}\right) - \frac{|\alpha|C_0^{p+1}}{p+1}\left(a\|u_x(t)\|^2_{L^2} + \|u_{xx}(t)\|^2_{L^2}\right)^{\frac{p+1}{2}} \leq J(u(t))$$

o que nos leva a considerar a função

$$h(y) = \frac{I}{2}y - \frac{|\alpha| C_0^{p+1}}{p+1} y^{\frac{p+1}{2}}$$

e definindo $d = \max_{y \in \mathbb{R}_+} h(y) = h(y_0) > 0$, onde $y_0 = I^{\frac{2}{p-1}} |\alpha|^{-\frac{2}{p-1}} C_0^{-\frac{2(p+1)}{p-1}}$, notamos que $y_0 = \frac{2(p+1)}{I(p-1)} d$ e definimos o conjunto estável (poço potencial) como segue,

$$W = \left\{ u(t) \in H_0^2(\Omega); a\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{2(p+1)}{I(p-1)} d \right\}. \tag{2.2.24}$$

Lema 2.2.1. *Sejam $u_0, u_1 \in H_0^2(\Omega)$ e $u \in C^1([0, T_0); H_0^2(\Omega))$ a solução para o problema* (2.1.14) - (2.1.16). *Assumindo que $E(0) \leq d$ temos, para todo $t \in [0, T_0)$, $u(t) \in W$.*

Demonstração. Seja $u_0 \in W$ e suponha que existe $t \in [0, T_0)$ tal que $u(t) \notin W$, então existe $t_0 \in (0, T_0)$ tal que

$$a\|u_x(t_0)\|_{L^2}^2 + \|u_{xx}(t_0)\|_{L^2}^2 = \frac{2(p+1)d}{I(p-1)} = y_0 \neq 0 \tag{2.2.25}$$

donde segue que $J(u(t_0)) \geq d$, então

$$d \leq J(u(t_0)) \leq E(t_0) \leq E(0) \leq d$$

isto é, $J(u(t_0)) = E(t_0)$ e

$$\begin{aligned} 0 &= E(t_0) - J(u(t_0)) \\ &= \|u_t(t_0)\|_{L^2}^2 + \int_{t_0}^{\infty} g(s)ds \|u_t(t_0)\|_{L^2}^2 + \|u_{xxt}(t_0)\|_{L^2}^2 + (g \diamond u_{xx})(t_0) \end{aligned}$$

portanto $(g \diamond u_{xx})(t_0) = \int_0^{t_0} g(t_0 - s)\|u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds = 0$, assim como $g > 0$ segue que

$$\|u_{xx}(s)\|_{L^2} = 0, \quad \forall s \in [0, t_0]$$

como estamos lidando com um domínio limitado podemos concluir que $u_x(t_0) = u_{xx}(t_0) = 0$ uma contradição com (2.2.25). $\square$

Observação 2.2.2. *Notamos que, definindo o conjunto:*

$$V = \left\{ u(t) \in H_0^2(\Omega); a\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 > \frac{2(p+1)d}{I(p-1)} \right\}$$

e considerando $u \in C^1([0,T_0); H_0^2(\Omega))$ *solução para o problema* (2.1.14) - (2.1.16) *obtida no Teorema* 2.1.2, *prova-se que, se* $E(0) \leq d$ *e* $u_0 \in V$, *então* $u(t) \in V$ *para todo* $t \in [0, T_0)$.

Teorema 2.2.3. *Sejam* $u_0, u_1 \in H_0^2(\Omega)$ *e* $p > 1$. *Se* $E(0) \leq d$ *e* $a\|u_{0x}\|_{L^2}^2 + \|u_{0xx}\|_{L^2}^2 \leq \frac{2(p+1)d}{I(p-1)}$ *então o problema* $(2.1.14) - (2.1.16)$ *possui uma única solução global* $u \in C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega))$ *e* $u(t) \in W$ *para todo* $t \in [0, \infty)$.

Demonstração. Para mostrar que a solução dada pelo Teorema 2.1.2 é globalmente definida, devemos provar que (2.1.21) é válido. Observe que, pelo Lema 2.2.1, temos $u(t) \in W$ para todo $t \in [0, T_0)$, então

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T_0)} \|u_x(t)\|_{L^\infty}^2 &\leq C \sup_{t\in[0,T_0)} \left(a\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \|u_{xx}(t)\|_{L^\infty}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\frac{2(p+1)}{I(p-1)}d. \end{aligned}$$

Portanto, pela Observação 2.1.3, $T_0 = \infty$. □

2.3 Taxas de decaimento para soluções globalmente definidas no tempo e com dados iniciais pequenos

Considerando a solução global $u \in C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega))$ para $(2.1.14) - (2.1.16)$, obtida no Teorema 2.2.3, e definindo o seguinte funcional de energia modificado:

$$F(t) = E(t) + \epsilon_1\psi(t) + \epsilon_2\chi(t) \tag{2.3.26}$$

com

$$\psi(t) = \xi(t)\left(\int_\Omega u(t)u_t(t)dx + \int_\Omega u_{xx}(t)u_{xxt}(t)dx\right), \tag{2.3.27}$$

$$\begin{aligned}\chi(t) &= -\xi(t)\left(\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx\right. \\ &\left. + \int_\Omega u_{xxt}(t)\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx\right),\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

onde $\xi = \xi(t)$ é dado em $(G2)$.

Lema 2.3.1. *Seja* $u \in C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega))$ *a solução global para o problema* (2.1.14) − (2.1.16) *obtida no Teorema* 2.2.3. *Então, existe uma constante* $\epsilon_0 > 0$ *tal que para todo* $\epsilon_1 < \epsilon_0$ *e todo* $\epsilon_2 < \epsilon_0$ *temos*

$$\frac{1}{2}E(t) \leq F(t) \leq 2E(t). \tag{2.3.29}$$

Demonstração. Primeiro observamos que,

$$\begin{aligned} A &:= \int_\Omega u_{xxt}\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2dx + \frac{C}{2}\int_0^t g(t-s)\|u_{xx}(t)-u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds\end{aligned}$$

então, pela desigualdade de Holder e por imersões de Sobolev,

$$\begin{aligned} F(t) \leq\ & E(t) + \frac{\epsilon_1 M}{2}\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{\epsilon_1 MC}{2}\int_\Omega |u_x(t)|^2dx \\ &+\frac{\epsilon_1 M}{2}\int_\Omega |u_{xx}(t)|^2dx + \frac{\epsilon_1 M}{2}\int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2dx \\ &+\frac{\epsilon_2 M}{2}\int_\Omega |u_t(t)|^2dx + \frac{\epsilon_2 MC}{2}(g\diamond u_{xx})(t) + \frac{\epsilon_2 MC}{2}\int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2dx \\ &+\frac{\epsilon_2 MC}{2}\int_0^t g(t-s)\|u_{xx}(t)-u_{xx}(s)\|_{L^2}^2ds\end{aligned}$$

onde $M = \xi(0)$ e usamos o fato que $\xi(t) \leq M$, assim,

$$
\begin{aligned}
2E(t) - F(t) \ \geq \ & \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_1 M}{2} - \frac{\epsilon_2 M}{2}\right] \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx + \\
& \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_1 M}{2} - \frac{\epsilon_2 CM}{2}\right] \int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2 dx \\
& + \left[\frac{a(1-I)}{2} - \frac{\epsilon_1 MC}{2}\right] \int_\Omega |u_x(t)|^2 dx \\
& + \left[\frac{1-I}{2} - \frac{\epsilon_1 M}{2} - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\right] \int_\Omega |u_{xx}(t)|^2 dx \\
& + \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_2 M}{2} - \frac{\epsilon_2 CM}{2}\right] (g \diamond u_{xx})(t) + J(u(t))
\end{aligned}
$$

observamos que, pelo Teorema 2.2.3, $u(t) \in W$ e, então, $J(u(t)) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Portanto tomando $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno temos $F(t) \leq 2E(t)$, para todo $t \geq 0$. Analogamente, prova-se que $\frac{1}{2}E(t) \leq F(t)$. □

Lema 2.3.2. *Seja* $u \in C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega))$ *a solução global para* (2.1.14) $-$ (2.1.16) *obtida no Teorema* 2.2.3*. Então, o funcional* ψ *definido por* (2.3.27) *satisfaz:*

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) \ \leq \ & \left[1 + \frac{|\xi'(t)|}{4\alpha'\xi(t)}\right] \xi(t) \int_\Omega |u_t|^2 dx + \left[1 + \frac{C|\xi'(t)|}{4\alpha'\xi(t)}\right] \xi(t) \int_\Omega |u_{xxt}|^2 dx \\
& + \left[\frac{C\alpha'|\xi'(t)|}{\xi(t)} - a\right] \xi(t) \int_\Omega |u_x|^2 dx + \frac{\xi(t)}{4\eta}(g \diamond u_{xx})(t) \\
& + \left[\frac{\alpha'|\xi'(t)|}{\xi(t)} - 1 + (1-I) + \eta(1-I)\right] \xi(t) \int_\Omega |u_{xx}|^2 dx - \alpha\xi(t) \int_\Omega |u_x|^p u_x dx
\end{aligned}
$$

para todo $\alpha' > 0$ *e todo* $\eta > 0$.

Demonstração. Observe que,

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) \ = \ & \xi'(t) \int_\Omega u(t)u_t(t)dx + \xi'(t) \int_\Omega u_{xx}(t)u_{xxt}(t)dx + \xi(t) \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx \\
& + \xi(t) \int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2 dx + \xi(t) \left\langle u_{xxxxtt} + u_{tt}, u \right\rangle_{H^{-2}, H_0^2}
\end{aligned}
$$

usando a equação (2.1.14) podemos reescrever o último termo da expressão acima como

$$\begin{aligned}
\langle u_{xxxxtt} + u_{tt}, u\rangle_{H^{-2},H_0^2} &= \left\langle au_{xx} - u_{xxxx} + \int_0^t g(t-s)u_{xxxx}(s)ds + \alpha|u_x|_x^p, u\right\rangle_{H^{-2},H_0^2} \\
&= -a\int_\Omega |u_x(t)|^2dx - \int_\Omega |u_{xx}(t)|^2dx \\
&\quad + \int_0^t g(t-s)(u_{xx}(s), u_{xx}(t))_{L^2}ds - \alpha\int_\Omega |u_x|^p u_x dx
\end{aligned}$$

e observando que, para todo $\eta > 0$,

$$\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(s), u_{xx}(t))ds \leq (1-I)\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \eta(1-I)\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\eta}(g\diamond u_{xx})(t)$$

obtemos que, para todo $\alpha' > 0$,

$$\begin{aligned}
\psi'(t) \leq\ & \frac{|\xi'(t)|}{4\alpha'}\int_\Omega |u_t(t)|^2dx + C\alpha'|\xi'(t)|\int_\Omega |u_x(t)|^2dx + \alpha'|\xi'(t)|\int_\Omega |u_{xx}(t)|^2dx \\
&+ \frac{|\xi'(t)|}{4\alpha'}\int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2dx + \xi(t)\int_\Omega |u_t(t)|^2dx + \xi(t)\int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2dx \\
&- \alpha\xi(t)\int_\Omega |u_x|^p u_x dx - a\xi(t)\int_\Omega |u_x(t)|^2dx - \xi(t)\int_\Omega |u_{xx}(t)|^2dx \\
&+ (1-I)\xi(t)\int_\Omega |u_{xx}(t)|^2dx + \eta(1-I)\xi(t)\int_\Omega |u_{xx}(t)|^2dx + \frac{\xi(t)}{4\eta}(g\diamond u_{xx})(t)
\end{aligned}$$

e o resultado segue somando todos os termos similares.

□

Lema 2.3.3. *Seja* $u \in C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega))$ *uma solução global para* $(2.1.14) - (2.1.16)$*. Então, o funcional* χ *definido por* $(2.3.28)$ *satisfaz:*

$$\begin{aligned}
\chi'(t) \leq\ & \left[\delta\left(\frac{|\xi'(t)|}{\xi(t)} + 1\right) - \int_0^t g(s)ds\right]\xi(t)\int_\Omega |u_t(t)|^2dx \\
&+ \left[\delta\left(\frac{|\xi'(t)|}{\xi(t)} + 1\right) - \int_0^t g(s)ds\right]\xi(t)\int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2dx + a\delta\xi(t)\int_\Omega |u_x(t)|^2dx \\
&+ \delta\left[1 + 2(1-I)^2 + C\right]\xi(t)\int_\Omega |u_{xx}(t)|^2dx + K_\delta\xi(t)(g\diamond u_{xx})(t) \\
&- C_\delta g(0)\xi(t)(g'\diamond u_{xx})(t)
\end{aligned}$$

para todo $\delta > 0$ *e constantes* $K_\delta, C_\delta > 0$.

Demonstração. Note que,

$$
\begin{aligned}
\chi'(t) &= \xi'(t)\int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\
&\quad -\xi'(t)\int_\Omega u_{xxt}\int_0^t g(t-s)u_{xx}(t)-u_{xx}(s)dsdx \\
&\quad -\xi(t)\left\langle u_{tt}+u_{xxxxtt}, \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle_{H^{-2},H_0^2} \\
&\quad -\xi(t)\int_\Omega u_t\left[\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right]' dx \\
&\quad -\xi(t)\int_\Omega u_{xxt}\left[\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))ds\right]' dx.
\end{aligned}
$$

Pela regra de Leibniz, obtemos,

$$
\begin{aligned}
(*_1) &:= -\xi(t)\int_\Omega u_t\left[\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right]' dx \\
&= -\xi(t)\int_\Omega u_t\int_0^t (g'(t-s)(u(t)-u(s)))dsdx \\
&\quad -\xi(t)\int_\Omega |u_t(t)|^2dx\int_0^t g(s)ds
\end{aligned}
$$

analogamente,

$$
\begin{aligned}
(*_2) &:= -\xi(t)\int_\Omega u_{xxt}\left[\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))ds\right]' dx \\
&= -\xi(t)\int_\Omega u_{xxt}\int_0^t (g'(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s)))dsdx \\
&\quad -\xi(t)\int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2dx\int_0^t g(s)ds.
\end{aligned}
$$

Fazendo uso da equação (2.1.14) temos que,

$$\begin{aligned}
(*_3) \quad &:= \quad \left\langle u_{tt} + u_{xxxxtt}, \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds \right\rangle_{H^{-2},H_0^2} \\
&= \quad -a\xi(t)\int_\Omega u_x(t)\int_0^t g(t-s)(u_x(t)-u_x(s))dsdx \\
&\quad\ -\xi(t)\int_\Omega u_{xx}(t)\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\
&\quad\ +\xi(t)\int_\Omega\int_0^t g(t-s)u_{xx}(s)ds\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\
&\quad\ -\xi(t)\alpha\int_\Omega |u_x|^p\int_0^t g(t-s)(u_x(t)-u_x(s))dsdx.
\end{aligned}$$

Combinando as expressões em $(*_1), (*_2)$ e $(*_3)$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\chi'(t) \quad = \quad & \xi'(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\
& -\xi'(t)\int_\Omega u_{xxt}(t)\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\
& -\xi(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t (g'(t-s)(u(t)-u(s)))dsdx \\
& -\xi(t)\int_\Omega |u_t(t)|^2dx\int_0^t g(s)ds - \xi(t)\int_\Omega u_{xxt}(t)\int_0^t (g'(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s)))dsdx \\
& -\xi(t)\int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2dx\int_0^t g(s)ds + a\xi(t)\int_\Omega u_x(t)\int_0^t g(t-s)(u_x(t)-u_x(s))dx \\
& -\xi(t)\int_\Omega u_{xx}\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\
& +\xi(t)\int_\Omega\int_0^t g(t-s)u_{xx}(s)ds\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\
& -\xi(t)\alpha\int_\Omega |u_x|^p\int_0^t g(t-s)(u_x(t)-u_x(s))dsdx.
\end{aligned}$$

Agora, temos que estimar as integrais acima. Para fazer isso, observe que, aplicando a desigualdade de Holder obtemos, para qualquer $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
I_1 &:= -\alpha\xi(t)\int_\Omega |u_x|^p \int_0^t g(t-s)(u_x(t)-u_x(s))dsdx \\
&\leq \delta|\alpha|\xi(t)\int_\Omega |u_x|^{2p}dx + \frac{1}{4\delta}|\alpha|\xi(t)\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(u_x(t)-u_x(s))ds\right)^2 dx \\
&\leq \delta|\alpha|C\xi(t)\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^{2p-2}\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{C}{4\delta}\xi(t)(g\diamond u_{xx})(t) \\
&\leq C\delta\xi(t)\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \xi(t)(g\diamond u_{xx})(t)
\end{aligned}$$

onde, nesta última passagem, fizemos uso do fato que $u(t) \in W$ para todo $t \in [0,\infty)$ como provado no Teorema 2.2.3, com W definido em (2.2.24). Podemos estimar os outros termos usando a desigualdade de Holder e conseguimos então, para qualquer $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
I_2 &:= \int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\
&\leq \delta\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{(1-I)}{4\delta}C(g\diamond u_{xx})(t), \\
I_3 &:= \int_\Omega u_{xxt}\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\
&\leq \delta\int_\Omega |u_{xxt}|^2dx + \frac{(1-I)}{4\delta}(g\diamond u_{xx})(t), \\
I_4 &:= \int_\Omega\int_0^t g(t-s)u_{xx}(s)ds\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\
&\leq \left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)(1-I)(g\diamond u_{xx})(t) + 2\delta(1-I)^2\int_\Omega |u_{xx}(t)|^2dx, \\
I_5 &:= \int_\Omega u_{xx}(t)\int_0^t g(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\
&\leq \delta\int_\Omega |u_{xx}(t)|^2dx + \frac{(1-I)}{4\delta}(g\diamond u_{xx})(t), \\
I_6 &:= \int_\Omega u_x\int_0^t g(t-s)(u_x(t)-u_x(s))dsdx \\
&\leq \delta\int_\Omega |u_x|^2dx + \frac{(1-I)C}{4\delta}(g\diamond u_{xx})(t), \\
I_8 &:= -\int_\Omega u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\
&\leq \delta\int_\Omega |u_t(t)|^2dx - \frac{Cg(0)}{4\delta}(g'\diamond u_{xx})(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_9 &:= -\int_\Omega u_{xxt}\int_0^t g'(t-s)(u_{xx}(t)-u_{xx}(s))dsdx \\ &\leq \delta\int_\Omega |u_{xxt}(t)|^2dx - \frac{Cg(0)}{4\delta}(g'\diamond u_{xx})(t), \end{aligned}$$

e o resultado segue, então, somando as estimativas $I_1, ..., I_9$ e agrupando os termos similares. $\square$

Agora estamos em boa posição para provar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.3.4. *Sejam* $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)$ *tal que* $u_0 \in W$ *e* $u \in C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega))$ *a solução de* (2.1.14) – (2.1.16), *obtida no Teorema* 2.2.3. *Então, existem* $K, \beta > 0$ *e, para cada* $t_0 > 0$, *nós temos para todo* $t \geq t_0$

$$E(t) \leq Ke^{-\beta\int_0^t \xi(s)ds}. \tag{2.3.30}$$

Demonstração. Em primeiro lugar observe que, pelo Lemma 2.3.2 e o Lemma 2.3.3, temos:

$$\begin{aligned} F'(t) &= E'(t) + \epsilon_1\psi'(t) + \epsilon_2\chi'(t) \\ &\leq \left[\epsilon_1\left(1+\frac{k}{4\alpha'}\right) + \epsilon_2\left(\delta(k+1) - \int_0^t g(s)ds\right)\right]\xi(t)\int_\Omega |u_t|^2dx \\ &+ \left[\epsilon_1\left(1+\frac{kC}{4\alpha'}\right) + \epsilon_2\left(\delta(k+1) - \int_0^t g(s)ds\right)\right]\xi(t)\int_\Omega |u_{xxt}|^2dx \\ &+ \left[\epsilon_1\left(C\alpha'k - a\right) + \epsilon_2 a\delta\right]\xi(t)\int_\Omega |u_x|^2dx \\ &+ \left[\epsilon_1\left(\alpha'k - I + \eta(1-I)\right) + \epsilon_2\left(\delta(1+2(1-I)^2+C)\right)\right]\xi(t)\int_\Omega |u_{xx}|^2dx \\ &- \epsilon_1\alpha\xi(t)\int_\Omega |u_x|^p u_x dx + \left(\frac{\epsilon_1}{4\eta} + \epsilon_2 K_\delta\right)\xi(t)(g\diamond u_{xx})(t) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_2 g(0)M}{4\delta}\right)(g'\diamond u_{xx})(t) \end{aligned}$$

como temos, pelo Teorema 2.2.3, que $u(t) \in W$ para todo $t \in [0,\infty)$, concluímos que, com $J(u(t)) \geq 0$ para todo $t \in [0,\infty)$, temos assim a seguinte estimativa,

$$\begin{aligned} -\epsilon_1\alpha\xi(t)\int_\Omega |u_x(t)|^p u_x dx &= (p+1)\xi(t)\frac{I}{2}\epsilon_1(a\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2) \\ &\quad -(p+1)\xi(t)\epsilon_1 J(u(t)) \end{aligned}$$

Para algum $t_0 > 0$ fixo, como $g(0) > 0$ segue que $g_0 = \int_0^{t_0} g(s)ds > 0$ então, para todo $t \geq t_0$ e tomando $\delta, \alpha', \eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&g_0 - \delta(k+1) > \frac{g_0}{2}\\
&a - \alpha' k C > \frac{a}{2}\\
&I - \alpha' k - \eta(1-I) > \frac{I}{2}\\
&\delta(1 + 2(1-I)^2 + C) < \frac{I}{4}\frac{g_0}{2k'}\\
&\delta a < \frac{a}{4}\frac{g_0}{2k'}
\end{aligned}$$

com $k' = \max\left\{1 + \frac{kC}{2\alpha'}, 1 + \frac{k}{2\alpha'}\right\}$ e $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tal que,

$$\frac{g_0\epsilon_2}{4k'} < \epsilon_1 < \frac{g_0}{2k'}\epsilon_2$$

assim,

$$\begin{aligned}
k_1 &= \epsilon_2\left(g_0 - \delta(k+1)\right) - \epsilon_1\left(1 + \frac{k}{4\alpha'}\right) > 0\\
k_2 &= \epsilon_2(g_0 - \delta(k+1)) - \epsilon_1\left(1 + \frac{kC}{4\alpha'}\right) > 0\\
k_3 &= \epsilon_1\left(a - C\alpha' k\right) - \epsilon_2 a\delta > 0\\
k_4 &= \epsilon_1\left(I - \alpha' k - \eta(1-I)\right) - \epsilon_2\left(\delta(1 + 2(1-I)^2 + C)\right) > 0
\end{aligned}$$

e então, tomando $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ possivelmente menores tal que,

$$k_5 := \frac{1}{2} - \frac{\epsilon_2 g(0)M}{4\delta} - \left(\frac{\epsilon_1}{4\eta} + \epsilon_2 K_\delta\right) > 0$$

portanto,

$$\left(\frac{\epsilon_1}{4\eta} + \epsilon_2 K_\delta\right)\xi(t)(g \diamond u_{xx})(t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_2 g(0)M}{4\delta}\right)(g' \diamond u_{xx})(t) \leq -k_5(g \diamond u_{xx})(t)$$

donde segue que, existe $\beta' > 0$ tal que, para todo $t \geq t_0$,

$$F'(t) \leq -\beta'\xi(t)E(t) \leq -\frac{\beta'}{2}\xi(t)F(t) \tag{2.3.31}$$

onde usamos (2.3.29) nesta última desigualdade. Portanto, usando (2.3.29) novamente, obtemos, para todo $t \geq t_0$ e, para $\beta = \frac{\beta'}{2}$

$$E(t) \leq 2F(t) \leq Ke^{-\beta \int_0^t \xi(s)ds}, \tag{2.3.32}$$

onde $K, \beta > 0$ são constantes que dependem da norma dos dados iniciais, do valor de $p > 1$ e de $\Omega \subset \mathbb{R}$. $\square$

Capítulo 3

Taxas de decaimento uniforme para a equação da onda semilinear em um meio não homogêneo com dissipação não linear distribuída

Neste capítulo estudamos o problema

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \ \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega \neq \emptyset$. Nosso principal interesse é provar, sob as hipóteses adequadas, a boa colocação do problema e além disso provar que a solução decai uniformemente quando consideramos a função $a = a(x)$ efetiva numa região $\omega \subset \Omega$ satisfazendo uma condição ligeiramente mais forte que a condição geométrica de controle.

O estudo de problemas de estabilização para sistema de evolução vem despertando grande interesse e sendo extensivamente estudado nos últimos anos. No caso onde se considera a equação da onda linear sobre uma variedade Riemanniana M compacta sem bordo, ie, quando consideramos $g(s) = s$, $\partial M = \emptyset$ e na ausência do termo não linear dado por f, é devido a Rauch-Taylor [41] o trabalho pioneiro relacionando o decaimento exponencial da energia a uma condição geométrica conectando a região $\omega \subset M$, onde o termo de dissipação é efetivo, e os raios da ótica geométrica, condição hoje conhecida como condição geométrica de controle (termo que é usualmente abreviado como GCC, em função do termo em inglês *Geometric Control Condition*). O estudo do comportamento assintótico da energia associado a equação da onda linear, posta em uma variedade Riemanniana M, com bordo, ie, $\partial M \neq \emptyset$, é devido a Bardos, Lebeau e Rauch [4], trabalho este fortemente influenciado pelos resultados de propagação de singularidade na presença da fronteira ∂M, devido a Melrose, Sjostrand [36], [37]. Fazendo uma conexão a teoria de medida microlocal de defeito (que abreviaremos como m.d.m. em função do termo em inglês *microlocal defect measure*), desenvolvida simultaneamente por P. Gerard [21] e L. Tartar [55], o trabalho [28] devido a G. Lebeau explora as propriedades quantitativas relacionadas ao resultado de estabilização, estabelecendo o resultado de propagação para medida de defeito associado a uma sequência de soluções fracas para equação da onda linear com dissipação efetiva em uma região satisfazendo a condição geométrica de controle. Note que a condição geométrica de controle não só é suficiente mas também necessária para obtenção do decaimento exponencial da energia, quando consideramos a equação posta em um domínio com fronteira regular, em casos onde esta condição não é válida, então, somente taxas de decaimento logaritmo podem ser atingidas, assim como mostrado em [28], [29] e [10].

Uma vez que consideramos a presença do termo não linear $f(u)$ e a ação de uma dissipação linear (ie, $g(s) = s$) existe um grande número de trabalhos acerca do decaimento exponencial da energia quando consideramos a não linearidade f sub-crítica às imersões de Sobolev, dentre os quais podemos citar [19], [59] e [30]. Fazendo uso das estimativas de Strichartz, o trabalho devido a Dehman, Lebeau e Zuazua [20], prova o decaimento exponencial da energia para a equação da onda semi-linear posta em $\mathbb{R}^3$. O resultado provado em [20], é baseado em uma combinação de resultados acerca de propagação de medida de defeito e um princípio de continuação única, o que leva os autores a exigirem que o termo de dissipação seja efetivo fora de uma bola aberta. Neste sentido, o trabalho devido a Joly, Laurent [35], faz um significativo avanço estendendo os resultados provados em [20] para um contexto onde é obtido resultados de decaimento exponencial para energia exigindo-se apenas que o termo de dissipação seja efetivo em uma região ω satisfazendo a condição geométrica de controle, quando a equação é posta sobre uma variedade compacta, com ou sem bordo, e também a geometrias não-flat no caso de variedades não limitadas.

No que concerne o estudo da equação da onda sob ação de um damping não-linear, dentre os trabalhos que lidam com a estabilização da energia, na ausência do termo $f(u)$, ou ainda na presença do termo $f(u)$, no entanto sub-crítico às imersões de Sobolev, podemos citar [1], [13], [14], [15], [16] e [27]. No entanto, em nenhum destes trabalhos é estudado a relação entre a condição geométrica de controle e o comportamento assimptótico da solução. Nossa contribuição neste capítulo é estender o entendimento acerca do comportamento assimptótico da energia associado a equação da onda na presença do termo não linear $f(u)$ e da dissipação não linear $g(u_t)$ efetiva em uma região satisfazendo a condição geométrica de controle e uma pequena vizinhança da fronteira.

3.1 Descrição do problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto e limitado, com fronteira suave $\partial\Omega$, neste capítulo consideramos o problema

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \;\partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\; \partial_t u(x,0) = u_1(x) \;\; x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

onde $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $k_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \le i,j \le 3$ são funções $C^\infty(\Omega)$ e tal que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha_0 \le \rho(x) \le \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \le \xi^T \cdot K(x) \cdot \xi \le \beta|\xi|^2, \tag{3.1.3}$$

onde $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ são constantes positivas e $K = K(x) = (k_{ij}(x))_{i,j}$ é uma matriz simétrica positiva definida. Denotamos por $\omega \subset \Omega$ o conjunto aberto dado pela intersecção de uma vizinhança aberta da fronteira $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^3$ e que controla geometricamente a equação (3.1.2), em um sentido a ser precisado a diante. Devemos assumir as seguintes condições sobre f.

- O termo não linear $f \in C^2(\mathbb{R})$ é uma função a valores reais e satisfaz, para $1 \leq p < 5$,

$$f(0) = 0, \quad |f^j(s)| \leq k_0(1 + |s|)^{p-j}, \ j = 1, 2, \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.1.4}$$

o que implica, em particular, que, para alguma constante $C > 0$,

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq C\left(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}\right)|s_1 - s_2|, \ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.1.5}$$

- Sua primitiva $V(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$ verifica

$$-\frac{\beta}{2}|s|^2 \leq V(s) \leq f(s)s + \frac{\beta}{2}|s|^2, \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.1.6}$$

onde $k_0 > 0$, $\beta \in [0, \lambda_1)$, onde $\lambda_1 > 0$ é o autovalor principal correspondente ao problema linear

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K(x)\nabla u) = \lambda u \ \text{ em } \ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Além disso, para provarmos a existência de taxas de decaimento uniforme para o problema (3.1.2), faremos uso do Teorema 1.3.7, para isso precisaremos exigir que $f \in \mathfrak{B}$, o conjunto genérico cuja existência é garantida por este teorema.

A função não negativa $a = a(x)$, responsável pela localização do efeito dissipativo, satisfaz a seguinte condição:

$$a \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\omega}); \ a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \omega \subset \Omega. \tag{3.1.7}$$

Além disso, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função monótona, crescente, tal que

$$\begin{cases} g(s)s > 0 \text{ para todo } s \neq 0, \\ k_1|s| \leq |g(s)| \leq k_2|s| \text{ para todo } |s| \geq 1, \end{cases} \tag{3.1.8}$$

para constantes positivas k_1, k_2. Inspirado em [1], [2] e [27], seja h uma função côncava e estritamente crescente, com $h\,(0) = 0$, e tal que,

$$h\,(s\,h(s)) \geq s^2 + g^2(s), \text{ para } |s| < 1. \tag{3.1.9}$$

Com esta função, definimos

$$r(.) = h\left(\frac{.}{meas(Q_T)}\right)$$

onde $Q_T = \Omega \times (0, T)$, temos que r é monótona e contínua, então $cI + r$ é inversível para todo $c \geq 0$. Para $L = (Cmeas(Q_T)) > 0$, C uma constante positiva, definimos

$$p(x) = (cI + r)^{-1}(Lx)$$

segue que p é uma função contínua, positiva, estritamente crescente com $p(0) = 0$. Por fim, definimos ainda,

$$q(x) = x - (I + p)^{-1}(x). \tag{3.1.10}$$

Além disso assumimos que ω controla geometricamente Ω, ie, que existe $T_0 > 0$ tal que, para toda geodésica da métrica definida pela matriz $G(x) = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$ viajando com velocidade 1 e com inicio em $t = 0$, entra na região ω em um tempo $t < T_0$.

O principal objetivo deste capítulo é provar a existência e unicidade de solução fraca para o problema (3.1.2) e, adicionalmente, que esta solução decaí uniformemente para zero, isto é, definindo

$$E_u(t) := \int_\Omega \big(\rho(x)|\partial_t u(x,t)|^2 + \nabla u(x,t)^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t) + V(u(x,t))\big)\, dx, \tag{3.1.11}$$

onde $V(\lambda) = \int_0^\lambda f(s)ds$, deste modo

$$E_u(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0, \tag{3.1.12}$$

com $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$, onde o semigrupo de contrações é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{3.1.13}$$

onde q é a função definida em (3.1.10), desde que os dados iniciais (u_0, u_1) sejam tomados em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Tendo em mente que $\rho \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0$, fixando um sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) sobre (Ω, G), com G sendo a métrica riemanniana definida pela matriz $(g_{ij}) = \left(\frac{K_{ij}(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$, temos $\rho(x) = \sqrt{det(g_{ij})}$ e sua inversa denotada por $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$, desde modo o operador de Laplace-Beltrami é dado por

$$\Delta_G u = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{\rho(x)} \operatorname{div}(K(x)\nabla u)$$

onde ∇ é o gradiente usual associado a métrica euclidiana. Consequentemente,

$$\rho(x)\partial_t^2 u - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] = 0 \;\Leftrightarrow\; \partial_t^2 u - \Delta_G u = 0,$$

e, então, a análise do problema (3.1.2) é uma consequência dos resultados obtidos para o problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_G u + f(u) + a(x) g(\partial_t u) = 0 \;\text{ em } M \times (0,\infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \partial M \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \in H_0^1(M);\; \partial_t u(x,0) = u_1(x) \in L^2(M). \end{cases} \tag{3.1.14}$$

com $M = (\Omega, G)$ e a energia associada definida como

$$E_u(t) := \int_M \left[\frac{1}{2}|u_t(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_G u(x,t)|^2 + V(u(x,t))\right] dx. \tag{3.1.15}$$

Observe que, segue diretamente de (3.1.14) que a energia definida em (3.1.15) é decrescente. Em ordem de obter as taxas de decaimento em (3.1.12) provaremos que existem $T_0, C > 0$ tais que a seguinte desigualdade é verificada

$$E_u(T) \leq C \int_0^T \int_M a(x) \left[|\partial_t u(t)|^2 + |g(u_t)(t)|^2\right] dx dt \tag{3.1.16}$$

para todo $T > T_0$. Uma vez provado (3.1.16) a estimativa (3.1.12) segue de modo análogo aos argumentos usados em [17].

Observação 3.1.1. *Neste capítulo lidamos, assim como é comum na literatura relacionada a este tipo de problema, com a equação posta num domínio tridimensional, no entanto os métodos que usamos aqui são facilmente adaptados para um domínio compacto de dimensão n e com fronteira suave. A diferença neste caso é o intervalo no qual tomamos os valores de p em (3.1.4), no caso $n \geq 3$ devemos considerar $1 \leq p < \frac{n+2}{n-1}$, e então o resultado segue sendo uma consequência das estimativas de Strichartz, assim como fazemos neste capítulo. Para o caso de $n = 1, 2$, basta tomar $p \geq 1$, então podemos obter os mesmos resultados deste capítulo fazendo uso de imersões de Sobolev, no lugar das estimativas de Strichartz.*

3.2 Boa colocação

Nós consideramos o espaço de fase fraco

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L_\rho(\Omega),$$

onde $L_\rho(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |v(x)|^2 \rho(x) dx < \infty \right\}$ e tal integral é entendida no sentido da integração de Lebesgue. Munimos $\mathcal{H}$ com o seguinte produto interno

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (\nabla u_1^T \cdot K(x) \cdot \nabla u_2 + \rho v_1 v_2) dx.$$

Vamos considerar $A : D(A) \subset H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definido por $Au = -\frac{1}{\rho(x)} div(K(x)\nabla u)$ e $B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definido por $\langle Bv, w \rangle = \int_\Omega a(x) \frac{1}{\rho(x)} g(v(x)) w(x) dx$. Denotando por $v = u_t$ nós podemos reescrever o problema (3.1.2) como o problema de Cauchy em $\mathcal{H}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u, v) + \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{F}(u, v) = 0 \\ (u, v)(0) = (u_0, v_0), \end{cases} \tag{3.2.17}$$

onde o operador não-linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A}(u, v) = (-u, Au + Bv), \tag{3.2.18}$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in \mathcal{H} : v \in H_0^1(\Omega),\ Au + Bv \in L^2(\Omega)\} \tag{3.2.19}$$

e $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o operador não linear

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(0, -\frac{1}{\rho} f(u)\right). \tag{3.2.20}$$

Observe que, de acordo com os resultados provados por Cavalcanti et. al. [17], o operador $\mathcal{A}$ é maximal e monótono no espaço de energia $\mathcal{H}$, além disso, se $1 \leq p \leq 3$, como consequência da desigualdade de Holder e de imersões de Sobolev, prova-se que $\mathcal{F}$ define um operador contínuo localmente Lipschitz. De fato, considere $B \subset \mathcal{H}$ um conjunto limitado e $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in B$. Então, pelas hipóteses assumidas sobre f, usando a desigualdade de Holder e o fato que $H^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{2q}(\Omega)$, $1 \leq q \leq 3$, temos,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u_1, v_1) - \mathcal{F}(u_2, v_2)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(1 + \|u_1\|_{L^{2^*}} + \|u_2\|_{L^{2^*}})\|u_1 - u_2\|_{L^{2q}}^2 \\ &\leq C_0\|u_1 - u_2\|_{H^1}^2 \leq C_0\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Portanto, podemos garantir a existência de uma única solução local, com relação a variável t, de acordo com o Teorema 1.1.3, a qual pode ser prolongada globalmente no tempo, uma vez que a energia associada ao problema (3.1.2) é uniformemente limitada, em t, e controla a norma de (u, u_t) em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Tal raciocínio não pode ser repetido quando consideramos $3 < p < 5$, uma vez que neste caso não temos mais que $\mathcal{F}$ define um operador localmente Lipschitz, no entanto, no que segue será de fundamental importância o fato que o problema (3.2.17) possui uma única solução global sempre que a função f definir um operador localmente Lipschitz, quando considerado como uma aplicação que associa a cada $u \in H_0^1(\Omega)$ a função $f(u) \in L^2(\Omega)$, assim como provado no Teorema 1.1.3.

No que segue, inspirados pela abordagem primeiramente usada em [44], faremos uso do seguinte truncamento

$$f_k(u) = f(u)\eta_k(u) \tag{3.2.22}$$

onde $\eta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ é uma função de corte suave tal que $0 \leq \eta_k \leq 1$, $\eta_u = 1$ se $|u| \leq k$ e $\eta_k(u) = 0$ se $|u| \geq 2k$ e $\eta_k' \leq \frac{C}{k}$. Então, temos o seguinte resultado provado em [45].

Proposição 3.2.1. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função f_k, definida em* (3.2.22) *define um operador contínuo globalmente Lipschitz $f_k : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, onde $f_k(u) := \eta_k(u)f(u)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, com constante de Lipschitz dependendo de k.*

Teorema 3.2.2. *Seja $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e (Ω, G) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão três, assim como introduzida na seção anterior. Então, considerando $E_0 > 0$ e $E_u(0) \leq E_0$ e considerando válidas as hipóteses introduzidas na seção anterior para as funções f e g temos que existe uma única solução $(u, \partial_t u) \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ para o problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_G u + a(x)g(u_t) + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 \ \text{sobre} \ \ \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2.23}$$

Demonstração. Vamos considerar a função truncada f_k definida em (3.2.22) e tomar $\{(u_0^k, u_1^k)\}$ uma sequência de dados iniciais regulares tais que

$$(u_0^k, u_1^k) \to (u_0, u_1) \qquad \text{fortemente em } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \tag{3.2.24}$$

argumentando como em (3.2.21) e usando a Proposição 3.2.1 podemos encontrar para cada $k \in \mathbb{N}$ uma única $u^k \in C([0,T_k]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T_k]; L^2(\Omega))$ solução para o problema

$$\begin{cases} u_{tt}^k - \Delta_G u^k + a(x)g(u_t^k) + f_k(u^k) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T_k), \\ u^k = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega \times (0,T_k), \\ u^k(x,0) = u_0^k(x), \qquad u_t^k(x,0) = u_1^k(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.2.25}$$

além disso, definindo

$$E_{u^k}(t) = \frac{1}{2}\|u_t^k(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_G u^k(t)\|_{L^2}^2 + \int_\Omega V_k(u^k)dx \tag{3.2.26}$$

onde $V_k(u^k) = \int_0^{u^k} \eta_k(s)f(s)ds$, temos que

$$E_{u^k}(t) \leq E_{u^k}(0) \leq E_0, \quad \forall t \in [0, T_k) \quad \text{ e } \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.2.27}$$

como $E_{u^k}(t)$ controla a norma $\|(u^k, u_t^k)(t)\|_{H_0^1 \times L^2}$ concluímos que, podemos estender esta solução globalmente no tempo, isto é, $u^k \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$, além disso, como (3.2.27) garante que, para todo $T > 0$ fixo, $(u^k), (u_t^k)$ são sequências limitadas em $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ e $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, respectivamente, existem subsequências, ainda denotadas por $(u^k), (u_t^k)$, e uma função $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ tal que

$$u^k \rightharpoonup u \quad \text{fraco-* em } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{3.2.28}$$

$$u_t^k \rightharpoonup u_t \quad \text{fraco-* em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \tag{3.2.29}$$

e pelo Lema de Aubin,

$$u^k \to u \qquad \text{fortemente em } L^2(0,T; L^2(\Omega)). \tag{3.2.30}$$

então usando (3.1.8) e (3.2.30),

$$\|g(u_t^k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq k_1 \text{meas}(\Omega) + k_2\|u_t^k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C = C(E_0, T, \Omega) \tag{3.2.31}$$

e então, existe $g^* \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ tal que

$$g(u_t^k) \rightharpoonup g^* \qquad \text{fraco em } L^2(0,T; L^2(\Omega))$$

como $a \in L^\infty(\Omega)$ segue que o operador $S : L^2((0,T) \times \Omega) \to L^2((0,T) \times \Omega)$ tal que $S(w)(x) = a(x)w(x)$, para quase todo $x \in \Omega$, é linear e limitado, então

$$ag(u_t^k) \rightharpoonup ag^* \qquad \text{fraco em } L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

Neste ponto é importante observar que, $f_k(u^k) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $T > 0$ fixo, e pode ser estimado por uma constante que não depende de k, além disso $\|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^1(0,T;L^2)} \to 0$ quando $k, m \to \infty$. De fato, para provar a primeira afirmação, começamos por observar que podemos fazer uso das estimativas de Strichartz assim como no Lema 1.3.2 e das estimativas obtidas em (3.2.31) e (3.2.27), para conseguir a estimativa

$$\begin{aligned}
\|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} &\leq C\left(\|u_0^k\|_{H^1} + \|u_1^k\|_{L^2} + \|a(.)g(u_t^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right) \\
&\leq C\left(E_0 + \|a\|_{L^\infty} k_1 \text{meas}(\Omega) + k_2\|a\|_{L^\infty}\|u_t^k\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right) \\
&\leq C \qquad (3.2.32)
\end{aligned}$$

como $\|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}$ controla a norma de $f_k(u^k)$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ concluímos que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|f_k(u^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &\leq T^{\frac{1}{2}}\|f_k(u^k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}}\|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} \\
&\leq C = C(T, f, E_0).
\end{aligned}$$

Observe que, como $f_k(u^k)$ é uniformemente limitado em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, existe uma subsequência, ainda denotada com o mesmo indice, e uma função $f^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$f_k(u^k) \rightharpoonup f^* \text{ fraco em } L^2(0,T,L^2(\Omega)) \qquad (3.2.33)$$

e então, passando o limite em (3.2.25) obtemos

$$\begin{cases}
u_{tt} - \Delta_G u = -ag^* - f^* & \text{em } \Omega \times (0,T), \\
u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\
u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega,
\end{cases} \qquad (3.2.34)$$

com $F = -ag^* - f^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e então, obtemos, fazendo uso das estimativas de Strichartz que, $u \in L^5(0,T;L^{10}(\Omega))$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} &\leq C\|(u_0,u_1)\|_{H_0^1\times L^2(\Omega)} + \|f^*\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ &+\|a\|_{L^\infty}\|g^*\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Agora observamos que,

$$\begin{aligned} \|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \|f_k(u^k) - f_k(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ &+\|f_k(u) - f_m(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ &+\|f_m(u) - f_m(u^m)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \end{aligned}$$

e afirmamos que é válida a seguinte convergência,

$$\|f_k(u) - f_m(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0 \quad \text{quando } k,m\to\infty. \tag{3.2.36}$$

De fato, note que,

$$f_k(u) - f_m(u) = [\eta_k(u) - \eta_m(u)]\, f(u) \tag{3.2.37}$$

como $\eta_k(u) = \eta_m(u) = 1$ para k,m suficientemente grande, temos que $f_k(u) - f_m(u) \to 0$ para quase todo $(t,x) \in [0,T]\times\Omega$ e

$$|f_k(u) - f_m(u)| \leq 2|f(u)| = h(x,t) \tag{3.2.38}$$

com $h \in L^2((0,T)\times\Omega)$, então $\|f_k(u) - f_m(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \to 0$ e consequentemente

$$\begin{aligned} \|f_k(u) - f_m(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &\leq T^{\frac{1}{2}}\|f_k(u) - f_m(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\to 0. \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

Para provar que

$$\|f_k(u^k) - f_k(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0$$

observamos em primeiro lugar que, como $|\eta_k(u)| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f_k(u^k) - f_k(u)| &= |\eta_k(u)\left[f(u^k) - f(u)\right]| \\ &\leq C(1 + |u^k|^{p-1} + |u|^{p-1})|u^k - u| \end{aligned}$$

e, usando a desigualdade de Holder e técnicas de interpolação,

$$\begin{aligned} \||u^k|^{p-1}|u^k - u|\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \int_0^T \|u^k\|_{L^{2p}}^{p-1} \|u^k - u\|_{L^{2p}} dt \\ &\leq C \int_0^T \|u^k - u\|_{L^2}^{\theta} \|u^k\|_{L^{2p}}^{p-1} \|u^k - u\|_{L^{10}}^{1-\theta} dt \end{aligned}$$

com $\theta = \frac{5-p}{4p}$, portanto usando novamente a desigualdade de Holder com $q_1 = \frac{5}{p-1}$, $q_2 = \frac{8p}{5-p}$ e $q_3 = \frac{4p}{p-1}$ temos

$$\begin{aligned} \||u^k|^{p-1}|u^k - u|\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &\leq T^{\delta} \|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}^{p-1} \|u^k - u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^{\theta} \|u^k - u\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}^{1-\theta} \\ &\to 0 \quad \text{quando } k, m \to \infty \end{aligned}$$

uma vez que, de (3.2.32) e (3.2.35), $\|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}, \|u^k - u\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} \leq C$ para todo $T > 0$ fixo, e $\|u^k - u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \to 0$, por (3.2.30). Lidando com os outros termos da mesma forma, concluímos que

$$\|f_k(u^k) - f_k(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0$$

da mesma forma é possível mostrar que

$$\|f_m(u^m) - f_m(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0$$

portanto,

$$\|f_m(u^m) - f_k(u^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0 \quad \text{quando } k, m \to \infty$$

então, $(f_k(u^k))$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ donde segue que

$$f_k(u^k) \to f(u) \quad \text{em} \quad L^1(0, T; L^2(\Omega)). \tag{3.2.40}$$

De fato, em primeiro lugar observe que, uma vez que a sequência $f^k(u^k)$ é de Cauchy em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ temos a existência de $f^* \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ tal que,

$$f^k(u^k) \to f^* \quad \text{em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.2.41}$$

Por outro lado, pela convergência (3.2.30) podemos obter, passando a uma subsequência se necessário,

$$u^k(x,t) \to u(x,t), \quad \text{quando } k \to \infty \tag{3.2.42}$$

para quase todo $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, deste modo, como f é uma função contínua,

$$f(u^k(x,t)) \to f(u(x,t)) \tag{3.2.43}$$

para quase todo $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, além disso, observando que, fixado $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ temos $|\eta^k(x,t)| = 1$ para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, donde segue que,

$$\begin{aligned} |f^k(u^k(x,t)) - f(u(x,t))| &= |\eta^k(u^k(x,t))f(u(x,t)) - f(u(x,t))| \\ &\to 0. \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

Por outro lado, da convergência 3.2.41, passando a uma subsequência se necessario, temos que,

$$f^k(u^k(x,t)) \to f^*(x,t) \tag{3.2.45}$$

para quase todo $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Assim, de (3.2.44) e (3.2.45), podemos concluir que $f^*(x,t) = f(u(x,t))$ para quase todo $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, donde concluímos que $f^* = f(u)$ e que é válida a convergência em (3.2.40).

Segue de (3.2.25) que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_t^k - u_t^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_G(u^k - u^m)(t)\|_{L^2}^2 \\
&+ \int_0^T \int_\Omega a(g(u_t^k) - g(u^m))(u_t^k - u_t^m)dxdt \leq \frac{1}{2}\|(u_0^k - u_0^m, u_1^k - u_1^m)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}^2 \\
&+ \int_0^t \|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^2}\|u_t^k - u_t^m\|_{L^2}dt
\end{aligned}$$

definindo $(\phi_{k,m}(t))^2 = \frac{1}{2}\|u_t^k - u_t^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_G(u^k - u^m)(t)\|_{L^2}^2$, e observando que, para todo $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $(g(s_1) - g(s_2))(s_1 - s_2) \geq 0$ temos

$$(\phi_{k,m}(t))^2 \leq (\phi_{k,m}(0))^2 + \int_0^t \|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^2}\phi_{k,m}(s)ds \tag{3.2.46}$$

e então, pela desigualdade de Gronwall,

$$\phi_{k,m}(t) \leq C\left(\|(u_0^k - u_0^m, u_1^k - u_1^m)\|_{H_0^1\times L^2(\Omega)} + \int_0^T \|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^2}ds\right)$$

e observando as convergencias (3.2.24) e (3.2.36) nós temos

$$\begin{aligned}
\|u^k - u^m\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_t^k - u_t^m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \;&\leq\; C\Big(\|(u_0^k - u_0^m, u_1^k - u_1^m)\|_{H_0^1\times L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \int_0^T \|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^2}ds\Big) \\
&\to\; 0
\end{aligned} \tag{3.2.47}$$

este último limite nos permite concluir que $g^* = g(u_t)$. De fato, em primeiro lugar observamos que,

$$g(u_t^k) \to g^* \quad \text{fraco em } L^2((0,T)\times\Omega) \tag{3.2.48}$$

e g é uma função crescente, então $g(.) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador monótono e hemicontínuo e assim é maximal monótono. Assim, com isso em mãos e observando que, por (3.2.47) temos, para todo $T > 0$,

$$\int_{(0,T)\times\Omega} (g(u_t^k) - g(u_t^m))(u_t^k - u_t^m)dxdt \to 0 \tag{3.2.49}$$

o que nos leva a concluir que $g^* = g(u_t)$ (veja o Lema 2.3 em [3]). Observe que, $(u^k, \partial_t u^k) \in C([0,T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e então a convergencia uniforme em (3.2.47) implica que $(u, \partial_t u) \in C([0,T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ e passando ao limite em (3.2.25) obtemos que

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_G u + a(x)g(u_t) + f(u) = 0 \qquad \text{em } \Omega \times [0,T], \\ u = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \ \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.2.50}$$

Além disso, considerando a energia $E_u(t) = \frac{1}{2}\left(\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_G u(t)\|_{L^2}^2\right) + \int_\Omega V(u)dx$ associado com o problema (3.2.50) nós temos que, $\frac{d}{dt}E_u(t) \leq 0$ e então, $E_u(t) \leq E_u(0)$, para todo $t \in [0,T]$, isto é, a solução não tem blow up em tempo finito, então a solução pode ser globalmente estendida no tempo.

Unicidade: Vamos supor que existe $v \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ outra solução para o problema (3.2.50), assim denotando por $w = u - v$ nós temos

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta_G w + a(x)\left(g(u_t) - g(v_t)\right) + \left(f(u) - f(v)\right) = 0 \qquad \text{em } \Omega \times [0,T], \\ w = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega \times (0,T), \\ w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0 \ \ x \in \Omega, \end{cases}$$

donde segue que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t - v_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla_G(u-v)(t)\|_{L^2}^2\right] &\leq \int_\Omega |f(u) - f(v)||u_t - v_t|dx \\ &\leq C(1 + \|u\|_{L^{3(p-1)}}^{p-1} + \|v\|_{L^{3(p-1)}}^{p-1})\|u - v\|_{L^6}\|u_t - v_t\|_{L^2} \\ &\leq C(1 + \|u\|_{L^{12}}^{p-1} + \|v\|_{L^{12}}^{p-1})\left[\|u - v\|_{H_0^1}^2 + \|u_t - v_t\|_{L^2}^2\right] \end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Gronwall junto com as estimativas de Strichartz, podemos concluir que $u = v$ o que conclui a prova. $\square$

3.3 Taxas de decaimento uniforme

Nesta seção nos provamos taxas de decaimento uniforme para o problema (3.2.23), quando $3 < p < 5$. Assim como observado na Seção 3.1 é suficiente provar a seguinte desigualdade de observabilidade não linear

$$E_u(0) \leq C \int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|u_t(x,t)|^2 + |g(u_t(x,t))|^2\right) dxdt, \quad \text{para todo } T > T_0, \tag{3.3.1}$$

onde T_0 e C são constantes positivas e assumindo que $E_u(0) \leq R$. Para provar tal resultado nos combinamos estimativas de Strichartz para equação da onda linear com o principio de continuação única, como enunciado na Proposição 1.3.7.

Observação 3.3.1. *O caso $1 \leq p \leq 3$ pode ser tratado de maneira análoga, substituindo as estimativas de Strichartz por imersões de Sobolev.*

Observação 3.3.2. *É importante notar que, no decorrer desta seção sera de fundamental importância o princípio de continuação única provado na Proposição 1.3.7, sendo assim devemos assumir que f esta nas hipóteses desta proposição.*

Assuma que (3.3.1) não vale, então existe uma sequência de funções $\{u^k\}$ de soluções fracas para o problema (3.2.23), tal que $E_{u^k}(0) \leq R$ e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E_{u^k}(0)}{\int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|u_t^k(x,t)|^2 + |g(u_t^k)|^2\right) dxdt} = +\infty. \tag{3.3.2}$$

De (3.3.2) segue que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|u_t^k(x,t)|^2 + |g(u_t^k)|^2\right) dxdt}{E_{u^k}(0)} = 0. \tag{3.3.3}$$

Vamos considerar a seguinte sequência de problemas em consideração

$$\begin{cases} u_{tt}^k - \Delta_G u^k + f(u^k) + a(x) g(u_t^k) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u^k = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u^k(0) = u_0^k, \; u_t^k(0) = u_1^k(0). \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Agora, nós definimos,

$$\alpha_k := [E_{u^k}(0)]^{1/2}, \ v^k := \frac{u^k}{\alpha_k}. \tag{3.3.5}$$

Não é díficil provar que existe $C > 0$ tal que $1/C \leq E_{v^k}(0) \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e a sequência (α_k) é limitada. Para obtermos uma contradição vamos mostrar que $E_{v_k}(0)$ converge para 0. De fato, de (3.3.3) e (3.3.5) em consideração nós concluimos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|v_t^k(x,t)|^2 + \frac{1}{\alpha_k^2} |g(u_t^k)|^2 \right) dxdt = 0. \tag{3.3.6}$$

Além disso, uma vez que $E_{v^k}(0) \leq C$ podemos tomar uma subsequência, ainda denotada por (v^k), tal que,

$$v^k \rightharpoonup v \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.3.7}$$

$$v_t^k \rightharpoonup v_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.3.8}$$

$$v_k \to v \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.3.9}$$

Considerando a sequência de problemas normalizados

$$\begin{cases} v_{tt}^k - \Delta_G v^k + \dfrac{1}{\alpha_k} f(u^k) + \dfrac{1}{\alpha_k} a(x) g(u_t^k) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v^k = 0 \quad \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ v^k(0) = v_0^k, \ v_t^k(0) = v_1^k(0). \end{cases} \tag{3.3.10}$$

e observando que $\alpha_k \to \alpha \in [0, R^{\frac{1}{2}}]$, dividiremos a prova em dois casos $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$. Caso (i): $\alpha > 0$. Tomando o limite quando $k \to \infty$ em (3.3.10) e observando que,

$$\begin{aligned} \|a(.)v_t^k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T \int_\Omega a(x)^2 |v_t^k(x,t)|^2 dxdt \\ &\leq \|a\|_{L^\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x) |v_t^k(x,t)|^2 dxdt \\ &\to 0 \end{aligned}$$

combinando esta convergência com (3.3.8) temos que

$$\int_0^T \int_\Omega a(x)|v_t(x,t)|^2 dxdt = 0$$

como $a(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in \omega$ podemos concluir que $v_t(x,t) = 0$ para quase todo $(x,t) \in \omega \times (0,T)$, assim

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta_G v + \dfrac{1}{\alpha} f(\alpha v) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v_t = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.3.11}$$

e então, pelo princípio de continuação única provado na Proposição 1.3.7 temos que $v \equiv 0$.
Caso (ii): $\alpha = 0$. Neste caso $\alpha_k \to 0$. Note que podemos escrever,

$$f(s) = f'(0)s + R(s), \text{ onde } |R(s)| \leq C(|s|^2 + |s|^p).$$

assim,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha_k} f(\alpha_k v^k) = f'(0)v^k + \frac{R(\alpha_k v^k)}{\alpha_k}, \\ &\frac{R(\alpha_k v^k)}{\alpha_k} \leq C\left(\alpha_k |v_k|^2 + |\alpha_k|^{p-1}|v^k|^p\right), \end{aligned}$$

afirmamos que,

$$|\alpha_k|^{p-1} \| |v_k|^p \|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0 \quad \text{ quando } k \to \infty. \tag{3.3.12}$$

De fato, pela hipótese de contradição (3.3.2) e o fato que $a \in L^\infty(\Omega)$ temos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $a(.)g(u_t^k) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, além disso se $f(u_k) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ podemos usar a equação (3.3.10) resolvida para v^k, com $F = -a(.)g(u_t^k) - f(u^k)$ para concluir que

$$\|v^k\|_{L^5 L^{10}} \leq C\left([E_{v^k}(0)]^{\frac{1}{2}} + \|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right) \tag{3.3.13}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $k \in \mathbb{N}$. Analogamente podemos mostrar que, usando a equação (3.3.4) e o Lema 1.3.2 nós temos a seguinte estimativa

$$\|u^k\|_{L^5L^{10}} \leq C((E_{u_k}(0))^{\frac{1}{2}} + \|a(.)g(u_t^k)\|_{L^1L^2}) \leq C$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto nos podemos concluir que $f(u^k) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e como a norma $\|f(u^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$ pode ser controlada pela norma $\|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}$ que é uniformemente limitada, em $k \in \mathbb{N}$, nós temos

$$\|v^k\|_{L^5L^{10}} \leq C \tag{3.3.14}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, do exposto acima, como $\||v^k|^p\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$ pode ser controlado pela norma $\|v^k\|_{L^5L^{10}}$ podemos concluir que $(|v^k|^p)$ é uma sequência limitada em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, portanto como $\alpha_k \to 0$ podemos concluir que (3.3.12) é verdadeiro, o que nos leva a

$$\frac{1}{\alpha_k} f(\alpha_k v^k) \rightharpoonup f'(0)v \text{ fraco em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.3.15}$$

Donde segue que, passando o limite em (3.3.10) temos

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta_G v + f'(0)v = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v_t = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.3.16}$$

e para $w = v_t$ de (3.3.16) concluimos que

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta_G w + f'(0)w = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ w = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.3.17}$$

o que nos leva a concluir, aplicando novamente o princípio de continuação única, que $w = 0$ e, consequentemente, $v = 0$. Assim em ambos os casos $v = 0$. Como consequência $v = 0$ em todas as convergências em (3.3.7), (3.3.8) e (3.3.9). Note que, nosso principal objetivo é provar que E_{v^k} converge para zero. Para isto, considere

$$Pv^k := \Box_G v^k = \partial_t^2 v^k - \Delta_G v^k.$$

Pelas convergencias acima nos sabemos que

$$v^k \rightharpoonup 0 \text{ fraco em } H^1(\Omega \times (0,T)).$$

Então vamos considerar μ a medida microlocal de defeito associada com (v^k) em $H^1(\Omega \times (0,T))$, i.é., μ é a *m.d.m* associada com $(\partial_t v^k)$ e $(\nabla_G v^k)$ em $L^2_{loc}(\Omega \times (0,T))$. Devido ao resultado de convergência em (3.3.6) e os casos (i) e (ii) acima temos a seguinte convergência:

$$G^k = \frac{1}{\alpha_k} f(u^k) - \frac{1}{\alpha_k} a(x) g(u_t^k) \to 0$$

em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e, ainda, tendo em vista a Observação 1.3.6 temos que esta sequência é linearizável no sentido da Definição 1.3.3, assim podemos concluir que μ se propaga como a H^1-m.d.m. associada a equação da onda linear com os mesmos dados iniciais. Então, de acordo com o exposto no Capítulo 1, Seção 1.2, lembrando que o símbolo principal do operador da onda é dado por $p(t,x,\tau,\xi) = \tau^2 - (\mathbf{g}_{ij}(x))^{-1}|\xi|^2$, segue que

$$\text{supp}(\mu) \subset \{\tau^2 = (\mathbf{g}_{ij})^{-1}|\xi|^2\}.$$

e que μ se propaga ao longo do fluxo bi-característico definido pelo operador da onda.

Por outro lado,

$$\partial_t v^k \to 0 \text{ fortemente em } L^2(\omega \times (0,T)). \tag{3.3.18}$$

Pelo exposto acima, deduzimos que

$$\text{supp}(\mu) \cap \{(t,x,\tau,\xi) : x \in \omega\} \subset \{\tau = 0\},$$

o que implica que μ é zero em $\omega \times (0,T)$. Então, uma vez que as geodésicas dentro de $\Omega \backslash \omega$, pela principal hipótese, entram necessariamente na região ω, para toda geodésica da métrica $G = (\mathbf{g}_{ij})$, temos por propagação que $\mu \equiv 0$, isto é, ω é disjunto ao suporte da medida microlocal de defeito μ, dado uma geodésica qualquer de G temos que ao menos um ponto desta geodésica pertence a ω, donde segue que esta geodésica inteira esta contida em ω, isto é, esta inteiramente fora do suporte de μ, como podemos repetir este raciocínio para qualquer geodésica de G temos que o suporte de μ é vazio, logo $\mu \equiv 0$. Consequentemente,

$$v^k \to 0 \text{ fortemente em } H^1((\Omega \backslash \omega) \times [0,T]),$$

o que significa que $\partial_t v^k \to 0$ fortemente em $L^2((\Omega/\omega) \times [0,T])$ e observando (3.3.18) conseguimos $\partial_t v^k \to 0$ fortemente em $L^2(\Omega \times [0,T])$ e, então, usando uma equipartição da energia podemos concluir o desejado. De fato, já observamos aqui que $\partial_t v^k \to 0$ forte em $L^2_{loc}(0,T;L^2(\Omega))$ vamos mostrar que isto nos da $E_{v^k}(0) \to 0$, para isso note que, multiplicando a equação

$$\partial_t^2 v^k - \Delta_G v^k + \frac{1}{\alpha_k} f(\alpha_k v^k) + \frac{1}{\alpha_k} g(u_t^k) = 0 \tag{3.3.19}$$

por v_t^k no intervalo $I = (0,t)$, $0 < t < T$ temos,

$$E_{v^k}(t) - E_{v^k}(0) \leq \int_0^t \left\| \frac{1}{\alpha_k} a(.) g(u_t^k) \right\|_{L^2} \|v_t^k\|_{L^2} dt$$

para qualquer $t \in (0,T)$usando que (v^k) é limitada em L^2, e observando (3.3.6) o termo a direita na desigualdade acima tende a zero, então tomando o supremo com $t \in (0,t_1)$ obtemos,

$$\sup_{t \in (0,t_1)} [E_{v^k}(t) - E_{v^k}(0)] \to 0.$$

por outro lado, multiplicando (3.3.19) por χv^k, onde $\chi \in C_0^\infty(]0,T[)$ com $\chi \equiv 1$ em $(\epsilon, 2\epsilon)$, para $\epsilon > 0$, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \chi(t) |\nabla_G v^k|^2 dx dt &= \int_0^T \int_\Omega \chi(t) |\partial_t v^k(t)|^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\alpha_k} |f(\alpha_k v^k)| \chi(t) |v^k| dx dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\alpha_k} |g(u_t^k)| |\chi(t) v^k| \end{aligned}$$

como $\partial_t v^k \to 0$ forte em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ a primeira integral na expressão acima tende a zero. A segunda integral tende a zero pois, dos casos (i) e (ii) acima temos $\frac{1}{\alpha_k} f(\alpha_k v^k) \to$

0 forte em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e $(v^k(t))$ é uniformemente limitada em L^2. Por fim, pela desigualdade (3.3.6) e novamente do fato de que $(v^k(t))$ é uniformemente limitada em L^2 concluímos que esta terceira integral também tende a zero. Em resumo,

$$\int_0^T \int_\Omega \chi(t)|\nabla_G v^k|^2 dxdt \to 0$$

donde, podemos concluir que,

$$\int_\epsilon^{2\epsilon} E_{v^k}(t)dt \to 0$$

quando $k \to \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
\epsilon E_{v^k}(0) &= \int_\epsilon^{2\epsilon} E_{v^k}(t)dt - \int_\epsilon^{2\epsilon} E_{v^k}(t) - E_{v^k}(0)dt \\
&= \int_\epsilon^{2\epsilon} E_{v^k}(t)dt + \epsilon \sup_{t\in(\epsilon,2\epsilon)} (|E_{v^k}(t) - E_{v^k}(0)|) \to 0
\end{aligned}$$

o que prova a contradição que desejávamos.

Capítulo 4

Estimativas polinomiais para o crescimento das normas em espaços de Sobolev de ordem superior de soluções para a equação de Klein-Gordon semi-linear

Neste capítulo consideramos a equação de Klein-Gordon não linear posta em uma variedade riemanniana tridimensional e compacta (M^3, G),

$$\partial_t^2 u - \Delta_G u + \beta u + \gamma(x)\partial_t u + f(u) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}_+ \times M^3, \tag{4.0.1}$$

$$(u, \partial_t u)(0) = (u_0, u_1) \quad \text{sobre } M^3, \tag{4.0.2}$$

e estudamos o problema de descrever o comportamento das normas da solução $(u, \partial_t u)$ desta equação em espaços de Sobolev $H^{m+1}(M^3) \times H^m(M^3)$, $m \in \mathbb{N}$. Mais precisamente, nosso principal resultado mostra que tais normas não podem crescer mais rápido que um polinômio.

O problema da descrição do comportamento, em relação ao tempo, das normas em espaços de Sobolev de ordem superior para equações dispersivas vem atraindo grande atenção nos últimos anos, principalmente por sua conexão com o problema de descrever o quão rápido o sistema em consideração move energia de baixas frequências para altas frequências. No contexto de equações de Schrodinger o primeiro grande avanço no estudo deste tipo de problema foi feito por Bourgain em [7] trabalho posteriormente complementado por Staffilani em [54]. Seguindo o método desenvolvido por Bourgain vale a pena citar Zhong [60], trabalho que considerou o problema para uma equação de Schrodinger com uma não linearidade cubica posta em certas variedades riemannianas (M^d, G), $d \geq 2$. Citamos também, aos interessados, os seguintes trabalhos [6], [8], [9], [23], [52], [53], [58], bem como as referências em que neles se encontram.

A estratégia utilizada para estudar o problema (4.0.1), (4.0.2) foi inspirada no trabalho de Planchon, Tzvetkov e Visciglia [43] e tem como principal argumento o fato que, em ordem de estudar a norma de $(u, \partial_t u)$ em $H^{m+1} \times H^m$, $m \in \mathbb{N}$, é suficiente estudar as normas de derivadas, no tempo, da solução $(u, \partial_t u)$ em $H^1 \times L^2$. Como principal vantagem desta linha de argumentação, não precisamos de nenhum outro requerimento sobre a geometria da variedade o que diferencia esta abordagem dos métodos já existentes na literatura.

4.1 Descrição do problema e resultados básicos

Neste capítulo consideramos a equação de Klein-Gordon posta em uma variedade riemanniana tridimensional M^3 compacta, mais precisamente nós estudamos o comportamento da norma, em $H^{m+1}(M^3) \times H^m(M^3)$, $m \in \mathbb{N}$, da solução para o problema de Cauchy

$$\partial_{tt}^2 u - \Delta_G u + \beta u + \gamma(x)\partial_t u + f(u) = 0 \quad \text{em } M^3 \times (0, T), \tag{4.1.3}$$

$$(u, \partial_t u)(0) = (u_0, u_1) \quad \text{em } M^3, \tag{4.1.4}$$

com $\beta > 0$, $\gamma \in W^{m,\infty}(M^3)$ uma função não negativa e $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ uma função a valores reais tal que $f(0) = 0$ e, para todo $s \in \mathbb{R}$, $f(s)s \geq 0$ e

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|)^p \quad \text{e} \quad |f'(s)| \leq C(1 + |s|)^{p-1}. \tag{4.1.5}$$

com $1 \leq p < 5$. Nestas condições é fato bem conhecido que tomando $(u_0, u_1) \in H^1(M^3) \times L^2(M^3)$ o problema (4.1.3), (4.1.4) admite uma única solução $u \in C([0, T]; H^1(M^3)) \cap$

$C^1([0,T];L^2(M^3))$ e definindo o funcional de energia

$$\begin{aligned} E_u(t) &= \frac{1}{2}\left[\|\partial_t u(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla_G u(t)\|^2_{L^2} + \beta\|u(t)\|^2_{L^2}\right] \\ &+ \int_{M^3} V(u)dvol_g \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

onde $V(u) = \int_0^u f(s)ds$, então $E_u(t)$ é uma função não crescente, isto é,

$$E_u(t) \leq E_u(0) = E(u_0, u_1)$$

em outras palavras, a norma de $(u, \partial_t u)(t)$ em $H^1(M^3) \times L^2(M^3)$ é uniformemente limitada, em t, por uma constante dependendo apenas da norma dos dados iniciais em $H^1(M^3) \times L^2(M^3)$, de f e da norma de γ em $L^2(M^3)$. A questão que nos propomos a responder neste capítulo é: O que podemos dizer sobre o comportamento de $\|(u, \partial_t u)(t)\|_{H^{m+1}\times H^m}$, $m \in \mathbb{N}$? Nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 4.1.1. *Seja $T > 0$, $(u_0, u_1) \in H^{m+1}(M^3) \times H^m(M^3)$, $\beta > 0$, $\gamma \in W^{m,\infty}(M^3)$ e $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ uma função a valores reais tal que $f(0) = 0$, $f(s)s \geq 0$,*

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|)^p, \qquad |f'(s)| \leq C(1 + |s|)^{p-1} \tag{4.1.7}$$

com $1 \leq p < 5$. Então nós temos a seguinte estimativa para a solução $(u, \partial_t u) \in C([0,T], H^{m+1}(M^3) \times H^m(M^3))$ do problema (4.1.3), (4.1.4), (??) posto em uma variedade tridimensional,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|(u, \partial_t u)(t)\|_{H^{m+1}\times H^m} \leq C(1+T)^\delta \tag{4.1.8}$$

com

$$\delta = \begin{cases} 1 + \epsilon, & \text{para } 1 \leq p \leq 3 \\ \dfrac{2}{5-p} + \epsilon, & \text{para } 3 < p < 5 \end{cases} \tag{4.1.9}$$

para $m = 1$, $\epsilon > 0$ pequeno e uma variedade sem fronteira, e $\delta = 1$ para $m \geq 2$.

Observação 4.1.2. *A existência de solução com a regularidade que precisamos segue de um argumento que combina o Teorema de ponto fixo e as estimativas de Strichartz e* *pode ser encontrado em [32], sendo assim neste capítulo não mais iremos fazer menção a questão da boa colocação da equação de Klein-Gordon semilinear que estamos considerando.*

Podemos obter, seguindo os mesmos argumentos usados na prova do Teorema 4.1.1, que as normas em $H^{m+1} \times H^m$, $m \in \mathbb{N}$, da solução $(u, \partial_t u)$ para a equação de Klein-Gordon posta e uma variedade riemanniana compacta de dimensão dois, não tem crescimento mais rápido que um polinômio, neste caso nos substituimos as estimativas de Strichartz pelas imersões de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^q$, $q \geq 2$ e consideramos a não linearidade $f = f(s)$, $s \in \mathbb{R}$, com crescimento polinomial.

Observação 4.1.3. *Seja $\omega \subset M^3$ um conjunto aberto tal que*

$$\gamma(x) \geq \alpha > 0 \qquad \textit{para todo} \quad x \in \omega \tag{4.1.10}$$

e ω satisfazendo a condição geométrica de controle (GCC), isto é,

- *Existe $L > 0$ tal que, qualquer geodésica generalizada de M^3 com comprimento L encontra o conjunto ω, onde a dissipação γ é efetiva.*

então, como é provado em [4], [20] e [35], o funcional de energia $E = E(t)$ definido em (4.1.6) *decai exponencialmente, assim existem constantes $\lambda, K > 0$ tais que*

$$\|(u, \partial_t u)(t)\|^2_{H^1 \times L^2} \leq E(t) \leq KE(u(0))e^{-\lambda t} \qquad \textit{para todo } t \geq 0. \tag{4.1.11}$$

Além disso, considerando $(u_0, u_1) \in H^{m+1}(M^3) \times H^m(M^3)$ e γ, f como no Teorema 4.1.1 *segue que,*

$$\|(u, \partial_t u)(t)\|^2_{H^{m+1} \times H^m} \leq C(1+t)^\delta \tag{4.1.12}$$

com $\delta > 0$ dado no Teorema 4.1.1*. Destas observações obtemos que, para todo $0 < l < m$,*

$$\begin{aligned}
\|(u, \partial_t u)(t)\|^2_{H^{l+1} \times H^l} &\leq C\|(u, \partial_t u)(t)\|^{2\theta}_{H^1 \times L^2} \|(u, \partial_t u)(t)\|^{2(1-\theta)}_{H^{m+1} \times H^m} \\
&\leq C\frac{(1+t)^{\delta_1}}{e^{\lambda_1 t}} \\
&\leq C_1 e^{-\lambda_1 t}
\end{aligned}$$

para $\theta = \frac{l}{m}$ *e alguma constante* $C_1 > 0$ *suficientemente grande. Portanto, podemos concluir que, nas condições do Teorema* 4.1.1*, para* $(u_0, u_1) \in H^{m+1}(M^3) \times H^m(M^3)$ *e a dissipação* γ *efetiva numa região satisfazendo a condição geométrica de controle nós temos o decaimento exponencial da norma* $H^{l+1} \times H^l$ *da solução da equação de Klein-Gordon para todo* $0 < l < m$.

Observação 4.1.4. *Note que, ao longo deste capítulo, será de grande importância o fato que, dado* $v \in C(\mathbb{R}_+; X)$*, onde* X *é um espaço de Banach, então a estimativa:*

$$\|v(t+\tau)\|_X^2 \leq \|v(\tau)\|_X^2 + C_1\|v(\tau)\|_X^{2-\delta} \tag{4.1.13}$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ *e* $\tau \in (0,1)$ *e um dado* $0 < \delta < 2$*, implica que, existe uma constante* $C > 0$*, dependendo somente de* C_1*, tal que,*

$$\|v(t)\|_X \leq C(1+t)^{\frac{1}{\delta}}. \tag{4.1.14}$$

De fato, em primeiro lugar observe que definindo a sequência $\alpha_n = 1 + \|v(n\tau)\|_X^2$ temos que $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n + C\alpha_n^{1-\frac{\delta}{2}}$, sendo assim, por indução prova-se que $\alpha_n \leq Cn^{\frac{2}{\delta}}$. Com efeito, para $n = 1$, trivialmente termos $\alpha_1 \leq C$ e, supondo o resultado válido para $n \in \mathbb{N}$, temos,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\leq \alpha_n + C\alpha_n^{1-\frac{\delta}{2}} \\ &\leq n^{\frac{2}{\delta}} + Cn^{\frac{2}{\delta}-1} \leq C(1+n^{-1})n^{\frac{2}{\delta}} \\ &= Cn^{\frac{2}{\delta}-1}(n+1) \leq C(n+1)^{\frac{2}{\delta}}. \end{aligned}$$

Provando assim que o resultado é válido para $n+1$ e completando o raciocínio por indução. Vejamos agora que este resultado implica na estimativa (4.1.14). Para isto, dado $t \in \mathbb{R}_+$ observe que, se t não é um número natural, existe $0 < \tau < 1$ tal que, $t = \tau([t]+1)$, onde $[t]$ denota a parte inteira de t, assim,

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2 &\leq \alpha_{[t]+1} \\ &\leq C([t]+1)^{\frac{2}{\delta}} \\ &\leq C(1+t)^{\frac{2}{\delta}} \end{aligned}$$

o que implica em (4.1.14).

4.2 Limites polinomiais para o crescimento da norma $H^2 \times H^1$ em uma variedade sem bordo

Para estimar o crescimento da norma $H^2 \times H^1$ da solução para o problema (4.1.3) − (4.1.4) consideramos a seguinte energia modificada

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|\Delta_G u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_G \partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{2}\|\nabla_G u(t)\|_{L^2}^2. \tag{4.2.15}$$

note que, segue diretamente da equação (4.1.3) que,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\int_{M^3} \gamma(x)|\nabla_G \partial_t u(t)|^2 dvol_G - (\nabla_G \partial_t u, \partial_t u \nabla_G \gamma)_{L^2} - (\nabla_G \partial_t u, \nabla_G f(u))_{L^2}. \tag{4.2.16}$$

Proposição 4.2.1. *Sejam* $(u_0, u_1) \in H^2(M^3) \times H^1(M^3)$, f *como em* (4.1.5) *e* $\gamma \in W^{1,\infty}(M^3)$ *uma função não negativa. Então, para* $\epsilon > 0$ *pequeno, temos para todo* $\tau \in (0,1)$

$$\mathcal{E}(\tau) - \mathcal{E}(0) \leq C\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty(0,\tau;H^2\times H^1)} + C\tau\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty(0,\tau;H^2\times H^1)}^{1+\epsilon}, \tag{4.2.17}$$

para $1 \leq p \leq 3$, *e*

$$\mathcal{E}(\tau) - \mathcal{E}(0) \leq C\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty(0,\tau;H^2\times H^1)} + C\tau \left(\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty(0,\tau;H^2\times H^1)}^2\right)^{1-\frac{5-p}{4}+\epsilon} \tag{4.2.18}$$

para $3 < p < 5$, *com* $C = C(\|u_0\|_{H^1}, \|u_1\|_{L^2}, \|\gamma\|_{W^{1,\infty}}, p) > 0$, *em ambos os casos.*

Demonstração. Integrando (4.2.16) sobre $(0, \tau)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\tau) - \mathcal{E}(0) &= -\int_0^\tau \int_{M^3} \gamma(x)|\nabla_G \partial_t u(t)|^2 dvol_G dt - \int_0^\tau (\nabla_G \partial_t u, \partial_t u \nabla_G \gamma)_{L^2} dt \\
&\quad - \int_0^\tau (\nabla_G \partial_t u, \nabla_G f(u))_{L^2} dt \\
&\leq \int_0^\tau \int_{M^3} |\nabla_G \partial_t u||\partial_t u||\nabla_G \gamma| dvol_G dt + \int_0^\tau \int_{M^3} |\nabla_G \partial_t u||\nabla_G f(u)| dvol_G dt
\end{aligned}$$

uma vez que $\gamma \in W^{1,\infty}(M^3)$,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_{M^3} |\nabla_G \partial_t u||\partial_t u||\nabla_G \gamma| dvol_G dt &\leq \int_0^\tau \|\gamma\|_{W^{1,\infty}} \|\partial_t u\|_{L^2} \|\nabla_G \partial_t u\|_{L^2} dt \\ &\leq C\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)} \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

onde $C = C(\|u_1\|_{L^1}, \|\gamma\|_{W^{1,\infty}}) > 0$. Na sequência lidamos com o termo não linear, primeiro observamos que $\nabla_G f(u) = f'(u)\nabla_G u$. Para o caso $1 \leq p \leq 3$, usando a hipótese (4.1.5), desigualdade de Holder e resultados de interpolação

$$\begin{aligned} (*) \quad & \int_0^\tau \int_{M^3} |\nabla_G f(u)||\nabla_G \partial_t u| dvol_G dt \\ \leq \quad & C\int_0^\tau \int_{M^3} |\nabla_G u||\nabla_G \partial_t u| dvol_G dt + C\int_0^\tau \int_{M^3} |u|^{p-1} |\nabla_G u||\nabla_G \partial_t u| dvol_G dt \\ \leq \quad & C\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)} + C\int_0^\tau \|u\|^{p-1}_{L^{2(2n+1)(p-1)}} \|\nabla_G u\|_{L^{2+\frac{1}{n}}} \|\nabla_G \partial_t u\|_{L^2} dt \\ \leq \quad & C\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)} + C\int_0^\tau \|u\|^{p-1}_{L^{(2(2n+1)(p-1))}} \|\nabla_G u\|^{\frac{4n-1}{2(2n+1)}}_{L^2} \|\nabla_G u\|^{\frac{3}{2(2n+1)}}_{L^6} \|\nabla_G \partial_t u\|_{L^2} dt \\ \leq \quad & C\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)} + C\int_0^\tau \|u\|^{p-1}_{L^{2(2n+1)(p-1)}} dt \|(u, \partial_t u)\|^{1+\epsilon}_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)} \end{aligned}$$

com $\epsilon = \frac{3}{2(2n+1)} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tão pequeno quando queremos e notando que podemos estimar esta última integral usando as estimativas de Strichartz, uma vez que $p - 1 \leq 2$, podemos combinar esta desigualdade com (4.2.19) para obter (4.2.17).

A seguir consideramos o caso $3 < p < 5$, note que, como no último caso o ponto principal é a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} (**) \quad & \int_0^\tau \int_{M^3} |u|^{p-1} |\nabla_G u||\nabla_G \partial_t u| dvol_G dt \\ \leq \quad & \int_0^\tau \|u\|^{p-3}_{L^\infty} \|u\|^2_{L^{4(2n+1)}} \|\nabla_G u\|_{L^{2+\frac{1}{n}}} \|\nabla_G \partial_t u\|_{L^2} dt \\ \leq \quad & \int_0^\tau \|u\|^{\frac{p-3}{2}}_{H^1} \|u\|^{\frac{p-3}{2}}_{H^2} \|u\|^2_{L^{4(2n+1)}} \|\nabla_G u\|^{\frac{4n-1}{2(2n+1)}}_{L^2} \|\nabla_G u\|^{\frac{3}{2(2n+1)}}_{L^6} \|\nabla_G \partial_t u\|_{L^2} dt \\ \leq \quad & C\int_0^\tau \|u\|^2_{L^{4(2n+1)}} dt \left[\|(u, \partial_t u)\|^2_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)}\right]^{\frac{1}{2}+\frac{p-3}{4}+\frac{3}{2(2n+1)}} \end{aligned}$$

podemos estimar esta última integral usando as estimativas de Strichartz, tomando $n >$

$\frac{1+p}{2(5-p)}$ e pondo $\epsilon = \frac{3}{2(2n+1)} > 0$ conseguimos, para $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente,

$$\frac{1}{2} + \frac{p-3}{4} + \epsilon = 1 - \frac{5-p}{4} + \epsilon < 1.$$

Portanto, combinando esta desigualdade com (4.2.19) e argumentando como no último caso, concluímos que (4.2.18) é válido.

□

Observação 4.2.2. *Uma observação importante que segue da proposição* 4.2.1*, é que, para,* $\tau \in (0,1)$*, nós temos*

$$\|(u, \partial_t u)\|_{L^\infty(0,\tau;H^2\times H^1)} \leq C\|(u,\partial_t u)(0)\|_{H^2\times H^1} + C$$

com $C > 0$*. De fato, considere* $3 < p < 5$ *o outro caso é análogo, para* $t \in (0,\tau)$*,*

$$\begin{aligned}\|(u,\partial_t u)(t)\|^2_{H^2\times H^1} - \|(u,\partial_t u)(0)\|^2_{H^2\times H^1} &\leq C\tau\|(u,\partial_t u)\|^{2-\frac{5-p}{2}-\epsilon}_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)} + C\|(u,\partial_t u)\|_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)} \\ &\leq C\tau\|(u,\partial_t u)\|^{2-\frac{5-p}{2}-\epsilon}_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)} + C\end{aligned}$$

e então, tomando $\tau \in (0,1)$ *pequeno o suficiente,*

$$\|(u,\partial_t u)\|_{L^\infty_\tau(H^2\times H^1)} \leq C\|(u,\partial_t u)(0)\|_{H^2\times H^1} + C.$$

Teorema 4.2.3. *Seja* $(u,\partial_t u) \in C([0,T]; H^2(M^3) \times H^1(M^3))$ *a solução para o problema* $(4.1.3) - (4.1.4)$ *nós temos, para* $\epsilon > 0$ *pequeno,*

$$\sup_{t\in(0,T)} \|(u,\partial_t u)(t)\|_{H^2\times H^1} \leq C(1+T)^{1+\epsilon} \tag{4.2.20}$$

para $1 \leq p \leq 3$*, e*

$$\sup_{t\in(0,T)} \|(u,\partial_t u)(t)\|_{H^2\times H^1} \leq C(1+T)^{\frac{2}{5-p}+\epsilon} \tag{4.2.21}$$

para $3 < p < 5$*.*

Demonstração. Vamos mostrar como se prova a desigualdade (4.2.21), a desigualdade

(4.2.20) pode, então, ser obtida de maneira análoga. Observe que, tomando $\tau = \tau(\|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2}) \in (0,1)$ dado pela teoria de Cauchy, observando a Observação 4.2.2 e a estimativa (4.2.18) temos a seguinte estimativa

$$\|(u, \partial_t u)(t+\tau)\|^2_{H^2 \times H^1} \leq \|(u, \partial_t u)(t)\|^2_{H^2 \times H^1} + C(\|(u, \partial_t u)\|^{2\left(1-\frac{5-p}{4}+\epsilon\right)}_{L^\infty(H^2 \times H^1)} + 1)$$

e, então, uma vez que

$$\|(u, \partial_t u)\|^2_{L^\infty((t,t+\tau);H^2 \times H^1)} \leq C\left(\|(u, \partial_t u)(t)\|^2_{H^2 \times H^1} + 1\right)$$

obtemos

$$\|(u, \partial_t u)(t+\tau)\|^2_{H^2 \times H^1} \;\; \leq \;\; \|(u, \partial_t u)(t)\|^2_{H^2 \times H^1} + C\left(\|(u, \partial_t u)(t)\|^{2\left(1-\frac{5-p}{4}+\epsilon\right)}_{H^2 \times H^1} + 1\right)$$

donde segue que, podemos argumentar como na Observação 4.1.4 e, então, definindo a sequência $\alpha_n = 1 + \|(u, \partial_t u)(n\tau)\|^2_{H^2 \times H^1}$ temos $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n + C\alpha_n^{1-\delta}$, com $\delta = \frac{5-p}{4} - \epsilon$ e então, por indução sobre n, nós obtemos $\alpha_n \leq Cn^{\frac{1}{\delta}}$ o que nos leva a (4.2.21).

□

4.3 Limites polinomiais para o crescimento da norma $H^{m+1} \times H^m$ em uma variedade sem bordo

Nesta seção obtemos estimativas polinomiais para o crescimento da norma $H^{m+1}(M^3) \times H^m(M^3)$, $m \in \mathbb{N}$, para a solução $(u, \partial_t u)$ do problema (4.1.3) – (4.1.4). Observe que, definindo $X_m = H^{m+1}(M^3) \times H^m(M^3)$, dividiremos a análise em dois casos, primeiro consideramos $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, assim temos, para $\tau \in (0,1)$ e $t \in (0, \tau)$, que,

$$\begin{aligned}
\|(u, \partial_t u)(t)\|^2_{X_{2k}} \;\; \lesssim \;\; & \|(u, \partial_t u)(t)\|^2_{X_{2k-1}} + \|\nabla_G(\Delta_G^k u - \partial_t^{2k} u)(t)\|^2_{L^2} \\
& + \|(\Delta_G^k \partial_t u - \partial_t^{2k+1} u)(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla_G \partial_t^{2k} u(t)\|^2_{L^2} \\
& + \|\partial_t^{2k+1} u(t)\|^2_{L^2}. \qquad (4.3.22)
\end{aligned}$$

analogamente, se considerarmos $m=2k+1$, temos,

$$\begin{aligned}\|(u,\partial_t u)(t)\|^2_{X_{2k+1}} \;\lesssim\;& \|(u,\partial_t u)(t)\|^2_{X_{2k}}+\|(\Delta_G^{k+1}u-\partial_t^{2(k+1)}u)(t)\|^2_{L^2}\\ &+\|\nabla_G(\Delta_G^k\partial_t u-\partial_t^{2k+1}u)(t)\|^2_{L^2}+\|\nabla_G\partial_t^{2k+1}u(t)\|^2_{L^2}\\ &+\|\partial_t^{2(k+1)}u(t)\|^2_{L^2}. \qquad (4.3.23)\end{aligned}$$

Então, nosso objetivo é aplicar um argumento de indução sobre m, para obter a seguinte desigualdade,

$$\|(u,\partial_t u)(\tau)\|^2_{X_m}-\|(u,\partial_t u)(0)\|^2_{X_m}\le C+C\tau\|(u,\partial_t u)\|_{L^\infty(0,\tau;X_m)} \qquad (4.3.24)$$

com $C=C(\|u_0\|_{H^1},\|u_1\|_{L^2},p,\|\gamma\|_{W^{m,\infty}(M^3)})>0$.

Observação 4.3.1. *Argumentando como na observação* 4.2.2*, segue da desigualdade* (4.3.24) *que*

$$\|(u,\partial_t u)\|_{L^\infty(0,\tau;X_m)}\le 2\|(u,\partial_t u)(0)\|_{X_m}+C \qquad (4.3.25)$$

assim, combinando (4.3.24) *e* (4.3.25)*, obtemos, para* $\tau=\tau(\|(u_0,u_1)\|_{H^1\times L^2})>0$*, que*

$$\|(u,\partial_t u)(t+\tau)\|^2_{X_m}\le\|(u,\partial_t u)(t)\|^2_{X_m}+C\left(\|(u,\partial_t u)(t)\|_{X_m}+1\right). \qquad (4.3.26)$$

Portanto, a sequência $\alpha_n=1+\|(u,\partial_t u)(n\tau)\|^2_{X_m}$ *satisfaz* $\alpha_{n+1}\le\alpha_n+C\alpha_n^{\frac{1}{2}}$ *o que implica em* $\alpha_n\lesssim n^2$ *levando a*

$$\|(u,\partial_t u)(t)\|_{X_m}\le C(1+t)^1. \qquad (4.3.27)$$

onde $C=C(\|u_0\|_{H^1},\|u_1\|_{L^2},p,\|\gamma\|_{W^{m,\infty}(M^3)})>0$.

Nas próximas proposições assumimos já ter provado a existência de estimativas polinomiais para as normas $H^{m+1}(M^3)\times H^m(M^3)$ de $(u,\partial_t u)$ para $m=1,...,2k-1$ então mostramos como obter a estimativa (4.3.24) para as normas $H^{2k+1}(M^3)\times H^{2k}(M^3)$ e $H^{2(k+1)}(M^3)\times H^{2k+1}(M^3)$.

Lema 4.3.2. *Seja* $(u,\partial_t u)$ *a solução para o problema* (4.1.3) $-$ (4.1.4) *e assumimos já* *provado a existência de estimativas polinomiais para as normas*

$$\|(u, \partial_t u)(t)\|_{H^{m+1}\times H^m} \tag{4.3.28}$$

para $m = 1, ..., 2k-1$, $k \geq 1$, *então temos, para* $l \geq 2$ *e* $l \leq m+1$

$$\|\partial_t^l u(t)\|_{H^{m+1-l}} \leq C, \quad \forall t \in (0,\tau), \tag{4.3.29}$$

onde $C = C(\|u_0\|_{H^1}, \|u_1\|_{L^2}, p, \|\gamma\|_{W^{m,\infty}(M^3)}) > 0$.

Demonstração. Provaremos este resultado por indução sobre $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$. Para o primeiro caso $l = 2$ nós temos,

$$\partial_t^2 u = \Delta_G u - \beta u - \gamma(x)\partial_t u - f(u) = F \tag{4.3.30}$$

como estamos considerando o crescimento polinomial de (4.3.28), segue que

$$\|\Delta_G u(t)\|_{H^{m-1}} \leq \|u(t)\|_{H^{m+1}} \leq C, \quad \forall t \in (0,\tau)$$

e expandindo as derivadas de $f(u)$ e observando que temos o controle sobre o crescimento das normas $\|\nabla_G^j u(t)\|_{L^\infty} \leq C\|u(t)\|_{H^{j+2}} \leq C$ para $j = 1, 2, ..., m-1$, podemos estimar a norma $\|f(u)(t)\|_{H^{m-1}}$ por uma constante, uniformemente em $t \in (0,\tau)$. Analogamente, podemos estimar os termos remanescentes em (4.3.30) para provar que $F \in H^{m-1}$ e

$$\|\partial_t^2 u(t)\|_{H^{m-1}} \leq C \quad \forall t \in (0,\tau). \tag{4.3.31}$$

Assumindo o resultado provado para $2, ..., l-1$ e usando a equação resolvida para $\partial_t^{l-2} u$, obtemos

$$\partial_t^l u = \Delta_G \partial_t^{l-2} u - \beta \partial_t^{l-2} u - \gamma(x)\partial_t^{l-1} u - \partial_t^{l-2} f(u) \tag{4.3.32}$$

observamos que,

$$\|\Delta_G \partial_t^{l-2} u\|_{H^{m+1-l}} \leq C\|\partial_t^{l-2} u\|_{H^{m+1-(l-2)}} \leq C, \quad \forall t \in (0,\tau) \tag{4.3.33}$$

onde usamos a hipótese de indução para obter esta última desigualdade. Em ordem de estimar o termo não linear $\partial_t^{l-2} f(u)$, observamos em primeiro lugar que

$$\begin{aligned} \|\nabla_G^j \partial_t^k u(t)\|_{L^\infty} &\leq C\|\partial_t^k u\|_{H^{2+j}} \\ &\leq C\|\partial_t^k u\|_{H^{m+1-k}} \leq C \quad \forall t \in (0,\tau) \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

desde que $j+2 \leq m+1-k$, ie, $j \leq m-1-k$, então, por exemplo, quando $k = l-2$, (4.3.34) nos da o controle sobre as normas $\|\nabla_G^j \partial_t^{l-2} u(t)\|_{L^\infty} \leq C$ para todo $j \leq m+1-l$, então expandindo as derivadas no tempo e espaço, (4.3.34) nos leva a,

$$\|\partial_t^{l-2} f(u)(t)\|_{H^{m+1-l}} \leq C \quad \forall t \in (0,\tau). \tag{4.3.35}$$

Os outros termos em (4.3.32) podem ser analogamente estimados. Portanto, combinando estas estimativas podemos concluir que (4.3.29) vale para l. $\square$

Proposição 4.3.3. *Seja $(u, \partial_t u)$ solução para o problema (4.1.3) − (4.1.4) e assuma que existam limites polinomiais para o crescimento da norma $\|(u, \partial_t u)\|_{H^{2k} \times H^{2k-1}}$, então,*

$$\|\nabla_G(\Delta_G^k u - \partial_t^{2k} u)(t)\|_{L^2} \leq C, \quad \forall t \in (0,\tau), \tag{4.3.36}$$

$$\|(\Delta_G^k \partial_t u - \partial_t^{2k+1} u)(t)\|_{L^2} \leq C, \quad \forall t \in (0,\tau). \tag{4.3.37}$$

Além disso, assumindo que temos o crescimento polinomial para a norma $\|(u, \partial_t u)(t)\|_{H^{2k+1} \times H^{2k}}$ podemos obter

$$\|(\Delta_G^{k+1} u - \partial_t^{2(k+1)} u)(t)\|_{L^2} \leq C, \quad \forall t \in (0,\tau), \tag{4.3.38}$$

$$\|\nabla_G(\Delta_G^k \partial_t u - \partial_t^{2k+1} u)(t)\|_{L^2} \leq C, \quad \forall t \in (0,\tau), \tag{4.3.39}$$

onde, nas estimativas acima temos que $C = C(\|u_0\|_{H^1}, \|u_1\|_{L^2}, p, \|\gamma\|_{W^{m,\infty}(M^3)}) > 0$.

Demonstração. Temos a seguinte identidade que pode ser provada usando a equação

(4.1.3) e indução sobre k,

$$\begin{aligned}\partial_t^{2k} u - \Delta_G^k u &= -\beta \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_G^{(k-1)-j} \partial_t^{2j} u - \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_G^{(k-1)-j} \partial_t^{2j} (\gamma(x) \partial_t u) \quad (4.3.40)\\ &- \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_G^{(k-1)-j} \partial_t^{2j} (f(u)) = F. \quad (4.3.41)\end{aligned}$$

Para provar a estimativa em (4.3.36) é necessario provar que $F \in H^1(M^3)$ e $\|F(t)\|_{H^1} \leq C$. Primeiro observe que, como $\gamma \in W^{2k,\infty}(M^3)$ e usando (4.3.29) obtemos

$$\begin{aligned}\|\nabla_G (\Delta_G^{k-1-j} (\gamma(x) \partial_t^{2j+1} u))\|_{L^2} &\leq C \|\partial_t^{2j+1} u\|_{H^{2k-(2j+1)}}\\ &\leq C\end{aligned}$$

o outro termo no lado direito de (4.3.40) pode ser analogamente estimado. A seguir lidamos com o termo não linear em (4.3.41), para fazer isso começamos com o caso $j = 0$, usando a identidade $\nabla_G f(u) = f'(u) \nabla_G u$ e expandindo as derivadas espaciais obtemos

$$\|f(u)\|_{H^{2k-1}} \leq C(\|u\|_{W^{2k-2,\infty}}) \|u\|_{H^{2k-1}}$$

note que $\|u\|_{W^{2k-2,\infty}} \leq C \|u\|_{H^{2k}} \leq C$, donde segue que

$$\|f(u)(t)\|_{H^{2k-1}} \leq C \quad \forall t \in (0, \tau).$$

Para lidar com $j \neq 0$ primeiro expandimos as derivadas na variável temporal e, então, temos que lidar com os seguintes termos

$$I = \|f^{(l)}(u) (\partial_t u)^{b_1} (\partial_t^2 u)^{b_2} ... (\partial_t^{2j} u)^{b_j}\|_{H^{2k-1-2j}} \quad (4.3.42)$$

com $b_1, ..., b_{2j}$ sendo todas as soluções inteiras não negativas de $b_1 + 2b_2 + ... + 2jb_{2j} = 2j$ e $l = b_1 + ... + b_{2j}$, pondo $h = \max\{h_j ; b_{h_j} \neq 0, h_j = 1, ..., 2j\}$ e expandindo as derivadas na variável espacial obtemos,

$$I \leq C \|f^{(l)}(u)\|_{W^{k_0,\infty}} \|\partial_t u\|_{W^{k_1,\infty}}^{b_1} ... \|\partial_t^{h-1} u\|_{W^{k_{h-1},\infty}}^{b_{h-1}} \|\partial_t^h u\|_{W^{k_h,\infty}}^{b_h - 1} \|\partial_t^h u\|_{H^{k_h}} \quad (4.3.43)$$

com $k_0 + ... + k_h = 2k - 1 - 2j$. Devido as hipóteses sobre as normas $H^{2k} \times H^{2k-1}$ temos que

$$\|u\|_{W^{k_0,\infty}} \leq C\|u\|_{H^{k_0+2}} \leq C\|u\|_{H^{2k}} \leq C \quad \forall t \in (0, \tau)$$

uma vez que $k_0 \leq 2k - 1 - 2j$ e $j \neq 0$, o que nos da a estimativa

$$\|f^{(l)}(u)\|_{W^{k_0,\infty}} \leq C \quad \forall t \in (0, \tau)$$

combinando a hipótese sobre a norma $H^{2k} \times H^{2k-1}$ e o Lema 4.3.2 podemos analogamente estimar os outros termos em (4.3.43) portanto, para todo $t \in (0, \tau)$,

$$\|\nabla_G(\Delta_G^k u - \partial_t^{2k} u)(t)\|_{L^2} \leq C.$$

As estimativas em $(4.3.37), (4.3.38)$ e $(4.3.39)$ podem ser analogamente provadas.

$\square$

A última etapa para provar que a estimativa (4.3.24) é válida é mostrar como estimar as normas das derivadas temporais em (4.3.22) e (4.3.23), para fazer isso, defina

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2}\left[\|\partial_t^{m+1} u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_G \partial_t^m u(t)\|_{L^2}^2 + \beta\|\partial_t^m u(t)\|_{L^2}^2\right]. \tag{4.3.44}$$

Então, segue diretamente da equação (4.1.3) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}_m(t) &= \left\langle \partial_t^{m+2} u - \Delta_G \partial_t^m u + \beta \partial_t^m u, \partial_t^{m+1} u \right\rangle \\ &= -\int_{M^3} \gamma(x)|\partial_t^{m+1} u(t)|^2 dvol_G - \int_{M^3} \partial_t^m f(u) \partial_t^{m+1} u dvol_G \\ &\leq \int_{M^3} |\partial_t^m f(u)||\partial_t^{m+1} u| dvol_G \end{aligned} \tag{4.3.45}$$

Proposição 4.3.4. *Seja $(u, \partial_t u)$ solução para o problema $(4.1.3) - (4.1.4)$ e assuma que sejam válidos os limites polinomiais para o crescimento das normas $\|(u, \partial_t u)\|_{H^{m+1} \times H^m}$,*

$m = 1, ..., 2k-1$. *Então*

$$\mathcal{E}_{2k}(\tau) - \mathcal{E}_{2k}(0) \leq C\tau \sup_{t\in(0,\tau)} (\mathcal{E}_{2k}(t))^{\frac{1}{2}} \tag{4.3.46}$$

com $C = C(\|u_0\|_{H^1}, \|u_1\|_{L^2}, p, \|\gamma\|_{W^{2k,\infty}}) > 0$.

Demonstração. Observe que, integrando (4.3.45) sobre $(0,\tau)$ e usando a desigualdade de Holder,

$$\mathcal{E}_{2k}(\tau) - \mathcal{E}_{2k}(0) \leq \int_0^\tau \|\partial_t^{2k} f(u)\|_{L^2} \|\partial_t^{2k+1} u\|_{L^2} dt. \tag{4.3.47}$$

Expandindo as derivadas de $f(u)$ obtemos

$$\partial_t^{2k} f(u) = \sum \frac{(2k)!}{b_1!...b_{2k}!} f^{(l)}(u) \left(\frac{\partial_t u}{1!}\right)^{b_1} ... \left(\frac{\partial_t^{2k} u}{(2k)!}\right)^{b_{2k}}$$

onde a soma é tomada sobre todas as soluções inteiras e não negativas $b_1, ..., b_{2k}$ de $b_1 + 2b_2 + ... + (2k)b_{2k} = 2k$ and $l = b_1 + b_2 + ... + b_{2k}$. Para os termos envolvendo somente derivadas de ordem menor ou igual a $2k-2$, isto é, $b_{2k} = b_{2k-1} = 0$ temos

$$\|f^{(l)}(u)(\partial_t u)^{b_1} ... (\partial_t^{k_i} u)^{b_i}(t)\|_{L^2} \leq C\|f^{(l)}(u)(t)\|_{L^\infty} \|\partial_t u(t)\|_{L^\infty}^{b_1} ... \|\partial_t^{k_{i-1}} u\|_{L^\infty}^{b_{i-1}} \|\partial_t^{k_i} u\|_{L^\infty}^{b_i - 1} \|\partial_t^{k_i} u\|_{L^2}$$

com $k_i = \max\{k_j; b_{k_j} \neq 0, k_j = 1, 2, ..., 2k-2\} \leq 2k-2$. Então observando que, para $h = 1, ..., k_i$ podemos afirmar que, aplicando o Lema 4.3.2,

$$\|\partial_t^h u(t)\|_{L^\infty} \leq C\|\partial_t^h u(t)\|_{H^2} \leq C, \quad \forall t \in (0,\tau)$$

uma vez que $2k - l \geq 2$ e, também pelo Lema 4.3.2 segue que,

$$\|\partial_t^{k_i} u(t)\|_{L^2} \leq C, \quad \forall t \in (0,\tau).$$

Quando $b_{2k-1} \neq 0$, $b_1 = 1$ e $b_j = 0$ for $j = 2, ..., 2k-2, 2k$, então temos que estimar

$$\|f^{(2)}(u)\partial_t u \partial_t^{2k-1} u\|_{L^2}$$

se $2k-1=1$,

$$\begin{aligned}
\|f^{(2)}(u)(\partial_t u)^2(t)\|_{L^2} &\leq \|f^{(2)}(u)(t)\|_{L^\infty}\|\partial_t u(t)\|_{L^4}^2 \\
&\leq \|f^{(2)}(u)(t)\|_{L^\infty}\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\partial_t u(t)\|_{L^6}^{\frac{3}{2}} \leq C \quad \forall t \in (0,\tau)
\end{aligned}$$

onde usamos a imersão de Sobolev $H_0^1(M^3) \hookrightarrow L^6(M^3)$ na última desigualdade. Se $2k-1 \neq 1$

$$\|f^{(2)}(u)\partial_t u \partial_t^{2k-1}u(t)\|_{L^2} \leq \|f^{(2)}(u)(t)\|_{L^\infty}\|\partial_t u(t)\|_{L^\infty}\|\partial_t^{2k-1}u(t)\|_{L^2} \leq C \quad \forall t \in (0,\tau).$$

Considere o caso em que $b_{2k} \neq 0$, então, $b_1 = ... = b_{2k-1} = 0$ e $b_{2k} = 1$, neste caso

$$\|f'(u)\partial_t^{2k}u(t)\|_{L^2} \leq \|f'(u)\|_{L^\infty}\|\partial_t^{2k}u\|_{L^2} \leq C \quad t \in (0,\tau)$$

combinando as estimativas acima obtemos

$$\mathcal{E}_{2k}(\tau) - \mathcal{E}_{2k}(0) \leq \int_0^\tau \|\partial_t^{2k} f(u)(t)\|_{L^2}\|\partial_t^{2k+1}u(t)\|_{L^2} dt \leq C\tau \sup_{t\in(0,\tau)} (\mathcal{E}_{2k}(t))^{\frac{1}{2}}$$

com $C = C(\|u_0\|_{H^1}, \|u_1\|_{L^2}, p, \|\gamma\|_{W^{2k,\infty}}) > 0$, o que leva a (4.3.46).

□

Observe que, pelo Teorema 4.2.3 provamos a existência de estimativas polinomiais para o crescimento da norma $H^2 \times H^1$ da solução $(u, \partial_t u)$ para o problema $(4.1.3) - (4.1.4)$. Além disso, como uma consequência da Proposição 4.3.3 e Proposição 4.3.4, assumindo a hipótese de indução que já temos provado a existência de estimativas polinomiais para o crescimento das normas $H^{m+1} \times H^m$, $m = 1, 2, ..., 2k-1$, obtemos pela desigualdade (4.3.22) que

$$\|(u, \partial_t u)(\tau)\|_{H^{2k+1}\times H^{2k}}^2 \leq C + \mathcal{E}_{2k}(0) + C\tau \sup_{t\in(0,\tau)} (\mathcal{E}_{2k}(t))^{\frac{1}{2}} \qquad (4.3.48)$$

então, usando novamente a proposição 4.3.3 temos

$$\sup_{t\in(0,\tau)} (\mathcal{E}_{2k}(t))^{\frac{1}{2}} \leq C + C\tau \sup_{t\in(0,\tau)} \|(u, \partial_t u)(t)\|_{H^{2k+1}\times H^{2k}} \quad (4.3.49)$$

$$\mathcal{E}_{2k}(0) \leq C + \|(u, \partial_t u)(0)\|^2_{H^{2k+1}\times H^{2k}} \quad (4.3.50)$$

o que nos leva a

$$\|(u, \partial_t u)(\tau)\|^2_{H^{2k+1}\times H^{2k}} - \|(u, \partial_t u)(0)\|^2_{H^{2k+1}\times H^{2k}} \leq C + C\tau \sup_{t\in(0,\tau)} \|(u, \partial_t u)(t)\|_{H^{2k+1}\times H^{2k}}. \quad (4.3.51)$$

Portanto, como argumentando de forma análoga a Observação 4.3.1 e a Observação 4.1.4, nos provamos o seguinte Teorema.

Teorema 4.3.5. *Seja* $(u, \partial_t u)$ *uma solução para o problema* (4.1.3)−(4.1.4), *com* $(u_0, u_1) \in H^{m+1} \times H^m(M^3)$, $m \geq 1$, $\gamma \in W^{m,\infty}(M^3)$ *e* $f \in C^m(\mathbb{R})$ *uma função a valores reais como em* (4.1.5). *Então,*

$$\sup_{t\in(0,T)} \|(u, \partial_t u)(t)\|_{H^{m+1}\times H^m} \leq C(1+T)^1 \quad (4.3.52)$$

onde $C = C(\|u_0\|_{H^1}, \|u_1\|_{L^2}, p, \|\gamma\|_{W^{m,\infty}(M^3)}) > 0$.

Referências Bibliográficas

[1] Alabau-Boussouira, F., *Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems,* Appl. Math. Optim. 51(1), (2005), 61-105.

[2] Alabau-Boussouira, F, *A unified approach via convexity for optimal energy decay rates of finite and infinite dimensional vibrating damped systems with applications to semi-discretized vibrating damped systems.* J. Differential Equations 248 (2010), no. 6, 1473-1517.

[3] Barbu, V., *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces,* Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[4] Bardos, C., Lebeau, G., Rauch, J. *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary.* SIAM J. Control Optim. 30 (1992), no. 5, 1024-1065.

[5] M. D. Blair, H. F. Smith, C. D. Sogge, *Strichartz estimates for the wave equation on manifolds with boundary.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26:5 (2009), 1817-1829.

[6] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, II: The KdV-equation*, Geom. Funct. Anal. 3:3 (1993), 209-262.

[7] J. Bourgain, *On the growth in time of higher Sobolev norms of smooth solutions of Hamiltonian PDE.* Internat. Math. Res. Notices 6 (1996), 277-304.

[8] J. Bourgain, *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations.* American Mathematical Society Colloquium Publications 46 (1999), Amer. Math. Soc., Providence, RI,

[9] J. Bourgain, *On growth of Sobolev norms in linear Schrödinger equations with smooth time dependent potential*, J. Anal. Math. 77 (1999), 315-348.

[10] Burq, N., *Décroissance de l'energie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel,* Acta Math. 180 (1998), no. 1, 1-29.

[11] N. Burq, G. Lebeau, F. Planchon, *Global existence for energy critical waves in 3-D domains.* J. Amer. Math. Soc. 21 (2008) 831-845.

[12] N. Burq, P. Gerard, *Contrôle optimal des équations aux dérivées partialles*, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2003.

[13] Cavalcanti, M., Domingos Cavalcanti, V.N, Lasiecka,I. *Wellposedness and optimal decay rates for wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction,* J. Differential Equations 236 (2007), 407-459.

[14] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Fukuoka, R., Soriano, J. A. *Uniform stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping.* Methods Appl. Anal. 15 (2008), no. 4, 405-425.

[15] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti,V. N., Fukuoka,R., Soriano, J.A., *Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result.* Arch. Ration. Mech. Anal. 197 (2010), no. 3, 925-964.

[16] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti,V. N., Fukuoka,R., Soriano, J.A., *Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping-a sharp result.* Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 9, 4561-4580.

[17] Cavalcanti, M.M, Dias Silva, F. R., Domingos Cavalcanti, V.N, *Uniform decay rates for the wave equation with nonlinear damping locally distributed in unbounded domains with finite measure* SIAM J. Control Optim. 52 (2014), no.1, 545-580.

[18] Chueshov, I., Eller, M., Lasiecka, I., *On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation* Communication in Partial Differential Equations, Vol.27, Nos. 9-10, pp. 1901-1951, 2002.

[19] Dehman, B., *Stabilisation pour l'équation des ondes semilinéaire,* Asymptotic Anal. 27, (2001) 171-181.

[20] Dehman, B., Lebeau, G., Zuazua, E., *Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation,* Anna. Sci. Ec. Norm. Super. 36 (2003) 525-551.

[21] Gérard, P., *Microlocal defect measures,* Comm. Partial Differential equations. 18 (1991), 1761-1794.

[22] P. Gerard, *Oscillations and Concentration Effects in Semilinear Dispersive Wave Equations*, J. Func. Anal. (1996), 141, 60-98.

[23] P. Gérard, S. Grellier, *On the growth of Sobolev norms for the cubic Szego equation*, Exposé 11, 20 pp. in Séminaire Laurent Schwartz: équations aux dérivées partielles et applications, 2014 - 2015, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2016.

[24] J. Ginibre, G. Velo, *The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation*, Math. Z. 189:4 (1985), 487-505.

[25] J. Ginibre, G. Velo, *The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 6:1 (1989), 15-35.

[26] M. G. Grillakis, *Regularity for the wave equation with a critical nonlinearity*, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1995), 50-68,

[27] Lasiecka, I., Tataru, D, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping,* Differential and integral Equations, 6 (1993), 507-533.

[28] Lebeau, G., *Équation des ondes amorties,* Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993), Math. Phys. Stud. 19, 73-109, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[29] Lebeau, G., Robbiano, L., *Contrôle exact de l'equation de la chaleur,* Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 335-356.

[30] Haraux, A., *Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations,* J. Differential Equations 59 (1985) 145-509.

[31] Hebey, E., *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities* Courant Lecture Notes in Mathematics, V. 5, 1999.

[32] L. Kapitanski, *Some generalizations of the Strichartz-Brener inequality* Leningrad Math, J. 1:3 (1990), 693-726.

[33] L. Hormander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators.* vol. III of Grundlehrem der Math. Wiss., Springer-Verlag,Berlin, 1983.

[34] O. Ivanovic, *Counterexamples to the Strichartz inequalities for the wave equation in general boundary domains*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 14:5 (2012), 1357-1388.

[35] Joly, R., Laurent, C., *Stabilization for the semilinear wave equation with geometric control,* Analysis & PDE, Vol. 6 (2013), No. 5, 1089-1119.

[36] Melrose, R.B., Sjostrand, J., *Singularities of the boundary value problems. I* Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), no. 5, 593-617.

[37] Melrose, R.B., Sjostrand, J., *Singularities of the boundary value problems. II.* Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), no. 2, 129-168.

[38] Messaoudi, S.A., *General decay of the solution energy in a viscoeslastic equation with a nonlinear source*, Nonlinear Analysis, 69 (2008) 2589-2598.

[39] Messaoudi, S.A., *On the control of solutions of a viscoelastic equation*, Journal of The Franklin Institute 344 (2007) 765-776.

[40] Milla Miranda, M., San Gil Jutuca, L. P., *Existence and boundary stabilization of solutions for the Kirchoff equation*, Communication in Partial Differential Equations (1999)24:9-10, 1759-1800.

[41] Rauch, J., Taylor, M. *Exponential decay of solutions to hyperbolic equation in bounded domains.* Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 79-86.

[42] L.E. Payne, D.H. Sattinger, *Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations*, Israel J. Math 22 (1975) 273-303.

[43] F. Planchon, N. Tzvetkov and N. Visciglia, *On the growth of Sobolev norms for NLS on 2- and 3-dimensional manifolds.* Analysis & PDE Vol.10 (2017), No. 5, 1123-1147.

[44] Petronela Radu, *Weak solutions to the Cauchy problem of a semilinear wave equation with damping and source terms.* Adv. Differential Equations 10(11) (2005) 1261-1300.

[45] Mohammad A. Rammaha, Zahava Wilstein, *Hadamard well-posedness for wave equation with p-Laplacian damping and supercritical sources.* Adv. Differential Equations 17(1-2) (2012) 105-150.

[46] P. Rosenau, *Dynamics of dense lattices*, Phys. Rev. B. 36 (11)(1987) 5868 - 5876.

[47] Runzhang, X., *Cauchy Problem of Generalized Boussinesq Equation with Combined Power-Type Nonlinearities*, Math. Meth. Appl. Sci. 2011, 34 2318-2328.

[48] D.H. Sattinger, *On global solution of nonlinear hyperbolic equations*, Arch. Ration. Mech. Anal.30 (1968)148-172.

[49] H.F. Smith, C.D. Sogge, *On the critical semilinear wave equations outside convex obstacles.* J. Amer. Math. Soc., 8(4): 879-916, 1995.

[50] Shen, J. Yang, Y., Xu, R., *Global existence of solutions for 1-D nonlinear wave equation of sixth order at high initial energy level*, Boundary Value Problems 2014, 2014:31.

[51] J. Shatah, M. Struwe, *Regularity for the wave equation woth a critical nonlinearity*, Internat. Math. Res. Notices 7(1994) 303-310.

[52] V. Sohinger, *Bounds on the growth of high Sobolev norms of solutions to nonlinear Schrödinger equations on* $\mathbb{R}$. Indiana Univ. Math. J. 60:5 (2011), 1487-1516.

[53] V. Sohinger, *Bounds on the growth of high Sobolev norms of solutions to nonlinear Schrödinger equations on S1.* Differential Integral Equations 24:7-8 (2011), 653-718.

[54] G. Staffilani, *On the growth of high Sobolev norms of solutions for KdV and Schrödinger equations.* Duke Math J. 86:1 (1997), 109 - 142.

[55] Tartar, L. *H-measures: a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 115 (1990), 193-230.

[56] Taskesen, H., Polat, N., Ertas, A., *On global solution for the Cauchy problem of a Boussinesq-type equation*, Abstract and Applied Analysis Volume 2012, Article ID 535031.

[57] M. Taylor, *Partial Differential Equatioons II: Qualitative Studies of Linear Equations* 2ed. Vol. 116 of Applied Mathematical Sciences. Springer 2011.

[58] J. Thirouin, *On the growth of Sobolev norms of solutions of the fractional defocusing NLS equation on the circle.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 34:2 (2017), 509-531.

[59] Zuazua, E., *Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains,* J. Math. Pures Appl. 70 (1992) 513-529.

[60] S. Zhong, *The growth in time of higher Sobolev norms of solutions to Schrödinger equations on compact Riemannian manifolds*, J. Differential Equations 245:2 (2008), 359-376.

[61] Wang, YZ, Wang, YX, *Existence and Nonexistence of global solutions for a class of nonlinear wave equation of higher order*, Nonlinear Anal. 72, 4500-4507 (2010).

[62] Wang, S., Xue, H., *Global Solution for a Generalized Boussinesq Equation,* Applied Mathematics an Computation, 204 (2008) 130-136.

[63] Wang, S., Xu, G., *The Cauchy problem for the Rosenau equation,* Nonlinear Analysis 71 (2009) 456 - 466.

[64] Wang, Y., Mu, C., *Blow-up and scattering of solution for a generalized Boussinesq equation,* Applied Mathematics and Computation 188 (2007) 1131-1141.