

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

ANDERSON MACEDO SETTI

SUAVIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE FINSLER DE CLASSE
 C^0

Maringá-PR
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SUAVIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE FINSLER DE CLASSE C^0

ANDERSON MACEDO SETTI

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka.

Maringá-PR

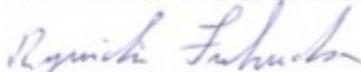
2019

ANDERSON MACEDO SETTI

SUAVIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE FINSLER DE CLASSE C^0

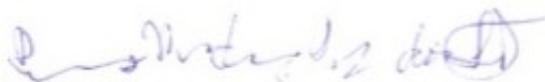
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

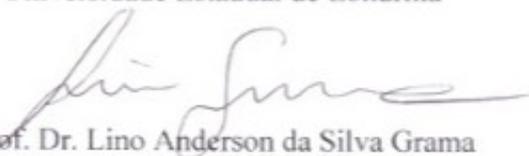


Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka

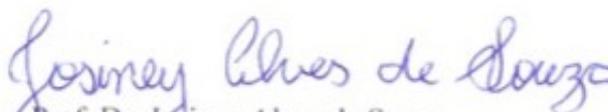
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dr. Bruno Mendonça Rey dos Santos
Universidade Estadual de Londrina



Prof. Dr. Lino Anderson da Silva Grama
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 28 de fevereiro de 2019.

Local de defesa: Sala 107, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*Dedico este trabalho a minha noiva
Juliana Raupp dos Reis.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir concluir mais esta etapa em minha vida.

Aos meus pais, Nelson Setti e Maria Elizabete Macedo Maciel e ao meu irmão Jefferson Macedo Setti, que sem o apoio deles este sonho não teria se realizado.

A minha amável Juliana Raupp dos Reis, por todo o carinho e companheirismo durante esta etapa de minha vida.

A todos os meus amigos em especial a Ademir Benteus Pampu, Bruno Alexandre Rodrigues, Estela Garcia, Giovana Higino de Souza, Hugo Murilo Rodrigues, Julio Cesar Moraes Pezzott, Marcus Vinicius de Andrade Neves e Richard Wagner Maciel Alves. Não só pelos momentos de estudos, mas também pelos momentos de descontração.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática - PMA, pelo conhecimento compartilhado ao longo desses anos através das disciplinas e seminários.

A secretária do PMA Lúcia Kiyoko Kato, pela disponibilidade durante o mestrado e o doutorado.

Ao meu orientador o Professor Doutor Ryuichi Fukuoka, pela confiança depositada neste trabalho, pelo incentivo e por toda paciência com que me orientou.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões e contribuições para este trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro.

*“Faça as coisas o mais simples que você puder,
porém não se restrinja às mais simples.”*

Albert Einstein

RESUMO

Uma estrutura de Finsler de classe C^0 é uma função contínua $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ definida sobre o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M tal que sua restrição a cada espaço tangente é uma norma. Utilizamos a operação convolução entre as funções mollifier padrão e F para construir uma suavização para F , que é uma família a um parâmetro de estruturas de Finsler (de classe C^∞) F_ε que convergem pontualmente para F . Verificamos que quando F é uma estrutura de Finsler absolutamente homogênea, a conexão de Chern e a curvatura flag das estruturas de Finsler F_ε convergem pontualmente para os objetos correspondentes de F .

Palavras-chave: Estruturas de Finsler de classe C^0 , estruturas de Finsler, suavização mollifier, conexão de Chern, curvatura flag.

ABSTRACT

A C^0 -Finsler structure is a continuous function $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ defined on the tangent bundle of a differentiable manifold M such that its restriction to each tangent space is a norm. We use the convolution between the standard mollifier and F to construct a smoothing of F which is a one parameter family of Finsler structures (of class C^∞) F_ε that converges pointwise to F . We prove that when F is an absolutely homogeneous Finsler structure, then the Chern connection and the flag curvature of F_ε converges pointwise for the corresponding objects of F .

Keywords: C^0 -Finsler structures, Finsler structures, mollifier smoothing, Chern connection, flag curvature.

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	16
1.1 Suavização e Convolução	16
1.2 Funções Convexas, Estritamente Convexas e Fortemente Convexas	20
1.3 Estruturas de Finsler	21
1.3.1 Definições e Convenções	21
1.3.2 O Fibrado Vetorial π^*TM e os Tensores Fundamental e de Cartan	24
1.3.3 Símbolos de Christoffel e a Conexão não Linear	26
1.3.4 A Conexão de Chern	28
1.3.5 hh -, hv -, vv -Curvaturas	30
1.3.6 A Curvatura Flag	32
2 Construção da Suavização de uma Estrutura de Finsler de Classe C^0	34
2.1 Suavização de Funções Convexas	34
2.2 Taxas de Crescimento de Normas em \mathbb{R}^n	37
2.3 Suavização Vertical de Estruturas de Finsler de Classe C^0	40
2.4 A Suavização $F_\varepsilon : TM \rightarrow [0, \infty)$	55
2.5 Suavização em Estruturas de Finsler Absolutamente Homogêneas	59
3 Um Espaço com Curvatura Flag não Positiva	71
3.1 Suavização de Estruturas de Finsler de Classe C^0 Verticalmente Suaves	72
3.2 Exemplo	74
Conclusões	86
Referências Bibliográficas	87
Índice Remissivo	89
Notações	89

Lista de Figuras

1.1	$\eta(1-y)f(y)$	18
1.2	$\eta_{\frac{1}{2}}(1-y)f(y)$	19
1.3	$\eta_{\frac{1}{5}}(1-y)f(y)$	19

Lista de Tabelas

3.1	Vizinhanças U'_i s e V'_i s.	76
-----	--	----

Introdução

O conceito de estrutura de Finsler foi apresentado por Georg Friedrich Bernhard Riemann, em sua palestra intitulada *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (On the Hypotheses which lie at the Foundations of Geometry) (vide [18]) na Universidade de Göttingen em junho de 1854. A tradução do alemão para o inglês pode ser encontrada em [19]. Conforme Shiing-Shen Chern afirma em [6], tais estruturas só ficaram conhecidas como estruturas de Finsler na tese de doutorado de Paul Finsler apresentada em 1918 (vide [12]).

A princípio Riemann considerou uma estrutura de Finsler como sendo uma função F que restrita a cada espaço tangente é contínua e absolutamente homogênea, isto é, o comprimento $F(\lambda y)$ de λy é $|\lambda|$ vezes $F(y)$. Ele ainda pedia que a função restrita a cada espaço tangente fosse diferenciável para todo vetor não nulo e que a matriz hessiana de F^2 (obtida em relação a uma base do espaço tangente, logo em relação a qualquer base) fosse positiva semidefinida. Atualmente uma estrutura de Finsler sobre uma variedade diferenciável M é uma função $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$, que é diferenciável em $TM \setminus 0$ (fibrado tangente sem a seção nula), que é positivamente homogênea e tal que a hessiana de F^2 é positiva definida para todo $(x, y) \in TM \setminus 0$ (vide [1] e [5]). Vale ressaltar que a definição de variedade diferenciável naquela época ainda não estava bem formulada segundo [19]. Ele ainda afirma que Riemann estava claramente tentando definir o conceito de variedade diferenciável pelo que expôs em sua palestra.

Depois desta definição, Riemann passa a estudar o caso onde a restrição da função a cada espaço tangente é a raiz quadrada de um produto interno. Então, temos o que é conhecido como métrica Riemanniana. Chern afirma em [6] que a Geometria de Finsler não é uma generalização da Geometria Riemanniana e sim a Geometria Riemanniana sem a condição quadrática. Assim como na Geometria Riemanniana, podemos fazer uso das ferramentas do cálculo diferencial e integral na Geometria de Finsler. Vários objetos geométricos da Geometria Riemanniana, tais como conexões, curvatura e geodésicas podem ser estudados de modo análogo na Geometria de Finsler.

Algumas pesquisas visam determinar objetos que diferenciam as variedades de Finsler das variedades Riemannianas. Por exemplo, se considerarmos uma variedade de Finsler (M, F) é sabido que F é Riemanniana se, e somente se, o tensor de Cartan é nulo (vide [1]). Em [10] é apresentado um teorema de comparação de volumes para vari-

edades de Finsler absolutamente homogêneas, isto é, as variedades de Finsler (M, F) que satisfazem a condição $F(y) = F(-y)$. Seja (x^1, \dots, x^n) um sistema de coordenadas em M e $\left(x^1, \dots, x^n, \sum_i y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \mapsto (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ o sistema de coordenadas induzido em TM . A forma volume canônica em $TM \setminus 0$ é definido localmente por $dV = \det(g_{ij}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$. Se $D \subset TM \setminus 0$ é o conjunto dos vetores de norma menor ou igual a 1, então [10] prova que

$$Vol(D) \leq C(n) \cdot vol(M)$$

onde Vol é o volume com respeito a dV , vol é o volume em relação à forma de Busemann e $C(n)$ é o volume do disco unitário em \mathbb{R}^n . A igualdade vale se, e somente se, F é Riemanniana. Portanto, o conceito de volume em (M, F) não é único.

Uma estrutura de Finsler de classe C^0 sobre uma variedade diferenciável M é uma aplicação contínua $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que restrita a cada espaço tangente é uma norma (vide [3]). Há vários trabalhos na literatura que estudaram as estruturas de Finsler de classe C^0 . Para mais informações consulte as referências [2], [3], [7], [14] e [15].

Neste trabalho consideraremos uma estrutura de Finsler de classe C^0 , $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$, e construiremos uma família a um parâmetro de estruturas de Finsler $F_\varepsilon : TM \rightarrow \mathbb{R}$ que convergem pontualmente para F . Veremos que as aplicações F_ε obtidas são boas no seguinte sentido: se F é uma estrutura de Finsler absolutamente homogênea, então os objetos como a conexão de Chern e a curvatura flag das estruturas de Finsler F_ε convergem pontualmente para os respectivos objetos de F . Essa construção é feita na tentativa de obter ferramentas para estudar objetos das estruturas de Finsler de classe C^0 , via aproximação por objetos das estruturas de Finsler F_ε , já que não podemos utilizar as ferramentas do cálculo diferencial e integral diretamente. Vejamos brevemente como será feita a construção das estruturas de Finsler F_ε .

Seja (M, F) uma variedade de Finsler de classe C^0 , isto é, M é uma variedade diferenciável e $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma estrutura de Finsler de classe C^0 . Considere um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n) : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido em M , com \bar{U} compacto.

O ponto de partida é construir a suavização vertical da aplicação

$$F : TU \rightarrow \mathbb{R}$$

a partir da convolução da aplicação $F(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \approx T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ com a aplicação $\eta_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$, onde η é a aplicação mollifier padrão, obtendo a aplicação

$$\hat{F}_\varepsilon(x, y) = \int \eta_\varepsilon(y - z) F(x, z) dz, \forall (x, y) \in TU.$$

Esta aplicação apresenta boas propriedades, por exemplo ela é contínua e converge uni-

formemente para a aplicação F sobre subconjuntos de $U \times \mathbb{R}^n$ da forma $U \times V$ com V compacto. Além disso, pode-se escolher $r_U > 0$, tal que para cada $x \in U$ o conjunto $T_x M \cap \hat{F}_\varepsilon^{-1}(r_U)$ é uma hipersuperfície de $T_x M$ difeomorfa à esfera euclidiana de raio um. A ideia seguinte seria definir a aplicação contínua

$$G_\varepsilon : TU \longrightarrow \mathbb{R}$$

que restrita a cada espaço tangente é uma norma cuja esfera de raio r_U é $T_x M \cap \hat{F}_\varepsilon^{-1}(r_U)$. O problema é que a matriz hessiana de $G_\varepsilon^2(x, \cdot)$ nem sempre é positiva definida. Para resolver este problema passamos a trabalhar com a aplicação

$$\tilde{F}_\varepsilon(x, y) = \int \zeta_\varepsilon(y - z) F(x, z) dz, \forall (x, y) \in TU,$$

onde $\zeta_\varepsilon(y) = (1 - \varepsilon)\eta_\varepsilon(y) + \varepsilon\eta_{\frac{2r_U}{\rho U}}(y)$. Esta perturbação que fizemos na aplicação η_ε nos permite definir

$$G_\varepsilon : TU \longrightarrow \mathbb{R}$$

de modo que restrita a cada espaço tangente é uma norma, cuja esfera de raio r_U é $T_x M \cap \tilde{F}_\varepsilon^{-1}(r_U)$ e a hessiana de $G_\varepsilon^2(x, \cdot)$ é positiva definida. A única propriedade que falta para que G_ε seja uma estrutura de Finsler é a diferenciabilidade, que nem sempre é garantida, já que F não é necessariamente diferenciável. Por isso realizamos a sua suavização horizontal, obtendo a aplicação

$$\check{F}_\varepsilon(x, y) = \int \eta_\varepsilon(x - z) G_\varepsilon(z, y) dz, \forall (x, y) \in TU_\varepsilon,$$

onde $U_\varepsilon = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$. Esta aplicação é uma estrutura de Finsler sobre TU_ε . Utilizando partição diferenciável da unidade, obteremos as estruturas de Finsler $F_\varepsilon : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ que convergem pontualmente para a aplicação F .

Trabalhos como [8] e [13] nos inspiram a trabalhar com a suavização obtida a partir da convolução com a aplicação η_ε . Em [8], o autor estuda a teoria local das estruturas de Finsler fracas. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma função Borel mensurável $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma estrutura de Finsler fraca em Ω se $F(x, \cdot)$ é positivamente homogênea para todo $x \in \bar{\Omega}$ e $F(x, \cdot)$ é convexa quase sempre. No Teorema 4.5, o autor considera o caso onde F é contínua e define uma suavização horizontal de F , no espírito da Seção 2.4 deste trabalho. Em [13], o autor define métricas Riemannianas com coeficientes g_{ij} em algum espaço de Sobolev local. A suavização destes coeficientes resulta em uma métrica Riemanniana (de classe C^∞). Esta suavização é definida através da convolução dos $g_{ij}'s$ com mollifiers padrão. O autor mostra que se a métrica Riemanniana original for de classe C^∞ , então a conexão Riemanniana e o tensor de curvatura da suavização convergem para os respectivos objetos da métrica original.

Este trabalho está dividido em três capítulos e eles são organizados da seguinte forma: No Capítulo 1, expomos os resultados essenciais para o desenvolvimento do trabalho. Apresentamos os conceitos de suavização mollifier, funções convexas, estritamente convexas e fortemente convexas. Após isto, passamos para uma breve revisão das estruturas de Finsler que abordam os conceitos de tensores fundamental e de Cartan, os símbolos formais de Christoffel, a conexão de Chern e a curvatura flag. No Capítulo 2, construímos as aplicações F_ε e verificamos que se as aplicações F_ε forem a suavização de uma estrutura de Finsler absolutamente homogênea, então os objetos como a conexão de Chern e a curvatura flag das aplicações F_ε convergem pontualmente para os objetos correspondentes de F . Dizemos que uma estrutura de Finsler de classe C^0 , $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$, tem curvatura flag não positiva, se existe uma família a um parâmetro de estruturas de Finsler F_ε satisfazendo:

1. $F_\varepsilon \rightarrow F$ pontualmente;
2. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ a curvatura flag de cada estrutura de Finsler F_ε é não positiva.

No Capítulo 3 estudamos um exemplo de uma estrutura de Finsler de classe C^0 que tem curvatura flag não positiva. Este exemplo é motivado pelo espaço hiperbólico de dimensão n $H^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n; x^n > 0\}$, que munido da métrica Riemanniana

$$a_{ij}(x^1, \dots, x^n) = \frac{\delta_{ij}}{(x^n)^2}$$

tem curvatura seccional constante igual a -1.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Começaremos expondo o conceito de suavização mollifier e em seguida veremos algumas propriedades de funções convexas. Abordaremos também as estruturas de Finsler, a conexão de Chern e a curvatura flag. Faremos uso da convenção de Einstein para somatórios, que omite o somatório numa soma que tem índices repetidos.

1.1 Suavização e Convolução

Nesta seção definiremos a aplicação mollifier padrão, a suavização mollifier e veremos algumas propriedades. Consideraremos a suavização mollifier de funções contínuas, mas esta suavização pode ser feita para as funções localmente integráveis. Para mais detalhes consulte [11].

Se U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $\varepsilon > 0$, escrevemos

$$U_\varepsilon = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Definição 1.1. (i) Definimos $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right), & \text{se } \|x\| < 1, \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante C é tomada de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$;

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$, consideramos

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Chamamos η de mollifier padrão.

Observação 1.2. (1) A constante C na Definição 1.1 pode ser tomada como

$$\left(\int_{B[0,1]} \exp \left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1} \right) dx \right)^{(-1)}.$$

(2) A função η_ε da Definição 1.1 é C^∞ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1 \quad \text{e} \quad \text{supp}(\eta_\varepsilon) = B[0, \varepsilon].$$

Definição 1.3. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Definimos sua suavização mollifier como sendo a convolução das aplicações f e η_ε em U_ε , denotada por $\eta_\varepsilon * f$. Isto é,

$$(\eta_\varepsilon * f)(x) := \int_U \eta_\varepsilon(x - y)f(y)dy = \int_{B[0, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(y)f(x - y)dy,$$

para cada $x \in U_\varepsilon$.

Para verificar a segunda igualdade acima, basta usar o Teorema da Mudança de Variável para a aplicação $y \mapsto x - y$ e que $\text{supp}(\eta_\varepsilon) = B[0, \varepsilon]$.

Apresentaremos propriedades da aplicação $\eta_\varepsilon * f$, mas antes disso veremos a definição de multi-índice.

Definição 1.4. (i) Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, onde cada componente α_i é um inteiro não negativo, é chamado de multi-índice de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n;$$

(ii) Dado um multi-índice α , definimos

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \dots \partial (x^n)^{\alpha_n}},$$

onde f é uma função definida em um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n a valores reais.

Teorema 1.5. (Propriedades das suavizações mollifier). Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) $(\eta_\varepsilon * f) \in C^\infty(U_\varepsilon)$;

(ii) $(\eta_\varepsilon * f) \rightarrow f$ pontualmente;

(iii) $(\eta_\varepsilon * f) \rightarrow f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de U .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [11]. □

Observação 1.6. Na demonstração em [11] do item (i) do Teorema 1.5, prova-se que para cada $x \in U_\varepsilon$ e para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ vale que

$$D^\alpha(\eta_\varepsilon * f)(x) = D^\alpha \left(\int \eta_\varepsilon(x - y)f(y)dy \right) = \int D^\alpha \eta_\varepsilon(x - y)f(y)dy = (D^\alpha \eta_\varepsilon * f)(x).$$

Além disso, fica claro que quando f é de classe C^∞ ,

$$D^\alpha(\eta_\varepsilon * f)(x) = D^\alpha \left(\int \eta_\varepsilon(y)f(x - y)dy \right) = \int \eta_\varepsilon(y)D^\alpha f(x - y)dy = (\eta_\varepsilon * D^\alpha f)(x).$$

Encerraremos esta seção apresentando um exemplo.

Exemplo 1.7. Definimos a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

A função f não é diferenciável no ponto $x = 1$. Vejamos o comportamento da função $\eta_\varepsilon(1 - y)f(y)$ geometricamente, para alguns valores de ε .

Para $\varepsilon = 1$, temos

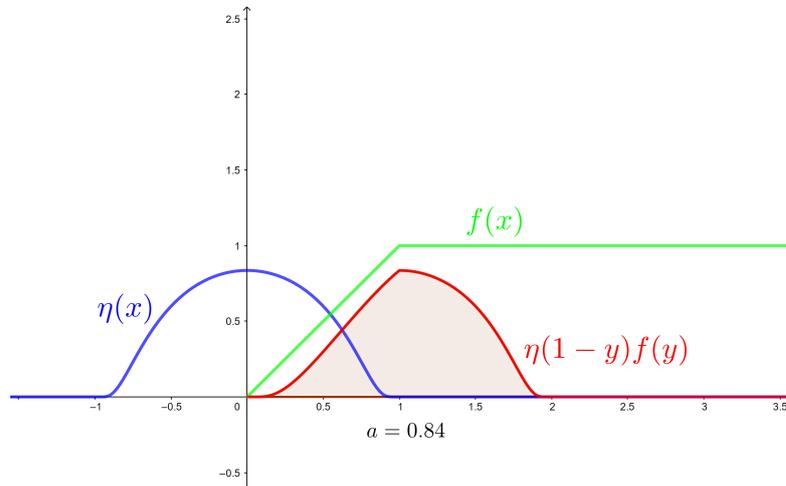


Figura 1.1: $\eta(1 - y)f(y)$.

Imagem construída no software Geogebra.

O valor $a = 0.84$ na Figura 1.1 é uma aproximação para a área da região hachurada, ou seja, é uma aproximação para o valor da convolução das aplicações η e f em $x = 1$.

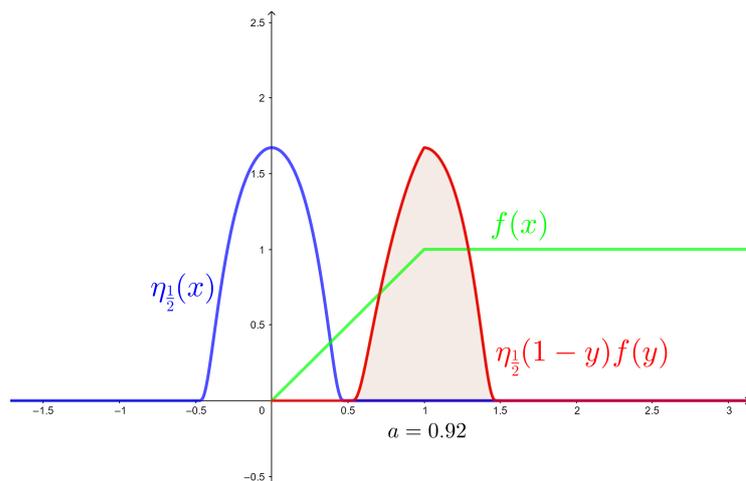


Figura 1.2: $\eta_{\frac{1}{2}}(1 - y)f(y)$.
Imagem construída no software Geogebra.

O valor $a = 0.92$ na Figura 1.2 é uma aproximação para a área da região hachurada, ou seja, é uma aproximação para o valor da convolução das aplicações $\eta_{\frac{1}{2}}$ e f em $x = 1$.

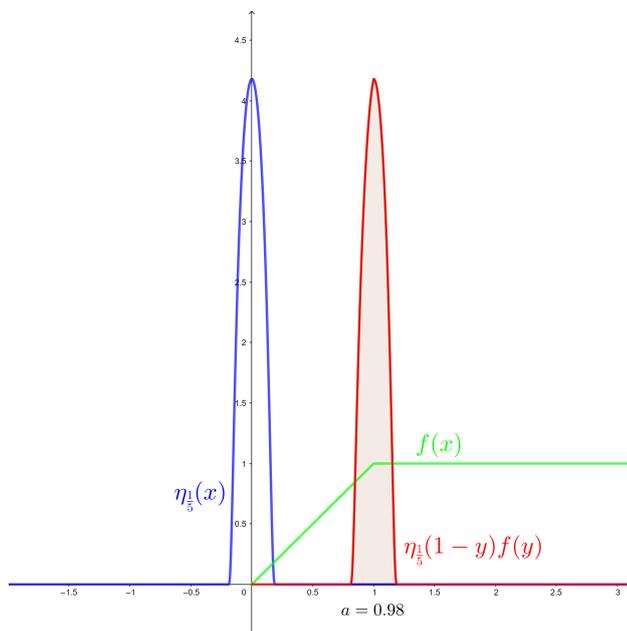


Figura 1.3: $\eta_{\frac{1}{5}}(1 - y)f(y)$.
Imagem construída no software Geogebra.

O valor $a = 0.98$ na Figura 1.3 é uma aproximação para a área da região hachurada, ou seja, é uma aproximação para o valor da convolução das aplicações $\eta_{\frac{1}{5}}$ e f em $x = 1$.

Assim, a medida que diminuirmos o valor de ε , vemos que $(\eta_{\varepsilon} * f)(1)$ se aproxima de $f(1) = 1$.

1.2 Funções Convexas, Estritamente Convexas e Fortemente Convexas

Apresentaremos as definições de funções convexas, estritamente convexas e fortemente convexas e propriedades das mesmas. Estes conceitos podem ser encontrados em [20].

Definição 1.8. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no subconjunto convexo e não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$.*

(i) *Dizemos que f é convexa, se*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

para todo $t \in [0, 1]$ e quaisquer $x, y \in U$;

(ii) *Dizemos que f é estritamente convexa, se*

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y),$$

para todo $t \in (0, 1)$ e quaisquer $x, y \in U$, com $x \neq y$;

(ii) *Dizemos que f é fortemente convexa, se existe uma constante $a > 0$ tal que*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{1}{2}ta(1-t)\|x - y\|^2,$$

para todo $t \in (0, 1)$ e quaisquer $x, y \in U$.

Teorema 1.9. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio, aberto e convexo, e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Então,*

(1) *f é convexa se, e somente se, sua matriz hessiana é positiva semidefinida em U , isto é, dados $x \in U$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, então*

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \xi^i \xi^j \geq 0$$

(estamos fazendo uso da convenção de Einstein);

(2) *f é estritamente convexa se sua matriz hessiana é positiva definida, isto é, dados $x \in U$ e $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, vale que*

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \xi^i \xi^j > 0;$$

(3) f é fortemente convexa se, e somente se, sua matriz hessiana é positiva fortemente definida em U , isto é, existe uma constante $m > 0$ tal que

$$m\|\xi\|^2 \leq \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \xi^i \xi^j, \forall x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [20]. □

1.3 Estruturas de Finsler

Nesta seção definiremos estrutura de Finsler e variedade de Finsler, em seguida apresentaremos os tensores fundamental e de Cartan, que são necessários para definirmos a conexão de Chern e a curvatura Flag. Estes conceitos podem ser encontrados em [1] e [5].

1.3.1 Definições e Convenções

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n , denotaremos por $T_x M$ o espaço tangente em $x \in M$ e por TM o fibrado tangente de M . Cada elemento de TM é da forma (x, y) onde $x \in M$ e $y \in T_x M$. A projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ é dada por $\pi(x, y) = x$. O espaço dual de $T_x M$ é $T_x^* M$, chamado de espaço cotangente em x , a saber

$$T_x^* M = \{A : T_x M \rightarrow \mathbb{R}; A \text{ é um funcional linear}\}.$$

A variedade diferenciável $T^* M$ formada pelos pontos (x, A) , onde $x \in M$ e $A \in T_x^* M$, é chamada de fibrado cotangente de TM . Para maiores detalhes consulte as referências [4], [16], [17] e [21].

Seja $X = (x^1, \dots, x^n) = (x^i) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas locais em torno de $x \in M$ definido no subconjunto aberto U de M . Denotaremos, como é usual, por $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ e $\{dx^i\}$ as respectivas bases para $T_x M$ e $T_x^* M$ em relação a X . O sistema de coordenadas (x^i) induz o sistema de coordenadas (x^i, y^i) em $TU := \pi^{-1}U \subset TM$, onde as coordenadas y^i são definidas por

$$y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Sempre que não houver perigo de confusão não faremos distinção entre (x, y) e sua representação em coordenadas (x^i, y^i) . Usaremos a notação U para indicar tanto U quanto $X(U)$, já que $X : U \rightarrow X(U)$ é um difeomorfismo.

Definição 1.10. *Uma estrutura de Finsler em M é uma aplicação*

$$F : TM \rightarrow [0, \infty)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) **Regularidade:** F é C^∞ em $TM \setminus 0 := \{(x, y) \in TM; y \neq 0\}$;
- (ii) **Homogeneidade positiva:** $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \forall \lambda > 0$;
- (iii) **Convexidade Forte:** Dado $(x, y) \in TM \setminus 0$, seja $X : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas em torno de x e escreva $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Então a matriz hessiana $n \times n$

$$(g_{ij}) := \left(\begin{array}{c} \left[\frac{1}{2} F^2 \right] \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right] \end{array} \right)$$

é positiva definida.

Observação 1.11. (1) A condição (iii) da definição anterior independe da escolha da base para $T_x M$.

- (2) Se a estrutura de Finsler satisfaz $F(x, -y) = F(x, y)$, para todo $y \in T_x M$, dizemos que F é absolutamente homogênea. Neste caso, temos que $F(x, \lambda y) = |\lambda| F(x, y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dada uma variedade diferenciável M e uma estrutura de Finsler F em M , o par (M, F) é chamado de variedade de Finsler.

A função F será expressa localmente por

$$F(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n).$$

Vamos continuar a convenção empregada na condição (iii) acima, isto é, denotaremos por $F_{y^i}, F_{y^i y^j}, \dots$, etc. as derivadas parciais de F com respeito as coordenadas y^i .

Exemplo 1.12. A aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^n)^2}$ é uma estrutura de Finsler em \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.13. Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana g em M é uma família de produtos internos $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_x\}_{x \in M}$ em cada espaço tangente $T_x M$ tal que as funções

$$a_{ij(x)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_x$$

(em sistemas de coordenadas) são de classe C^∞ .

Seja $X : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas em torno de $x \in M$. Dados $u, v \in T_x M$, escreva $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, então

$$\langle u, v \rangle_x = \left\langle u^i \frac{\partial}{\partial x^i}, v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_x = u^i v^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_x = u^i v^j a_{ij(x)}.$$

Podemos definir uma estrutura de Finsler F em M da seguinte forma:

$$F(x, y) = \sqrt{\langle y, y \rangle_x} = \sqrt{y^i y^j a_{ij}(x)}, \quad \forall (x, y) \in TM.$$

É claro que F é de classe C^∞ em $TM \setminus 0$ e positivamente homogênea. Vamos verificar a condição (iii) da Definição 1.10.

Dado $(x, y) \in TM \setminus 0$, temos que

$$g_{ij}(x, y) = \left(\frac{1}{2} F^2(x, y) \right)_{y^i y^j} = \left(\frac{1}{2} y^k y^l a_{kl}(x) \right)_{y^i y^j} = a_{ij}(x).$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ é um produto interno, a matriz $(a_{ij}(x))$ é positiva definida para cada $x \in M$. Logo $(g_{ij}(x, y))$ é positiva definida e, portanto, $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ é uma estrutura de Finsler.

Exemplo 1.14. Sejam M uma variedade diferenciável, $\alpha(x, y) := \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}$ uma métrica Riemanniana e $\beta(x, y) := b_i(x) y^i$ uma 1-forma em M com $\sup_{x \in M} \|\beta_x\|_\alpha < 1$, onde

$$\|\beta_x\|_\alpha := \sup_{y \in T_x M} \frac{\beta(x, y)}{\alpha(x, y)}.$$

Uma métrica de Randers em M é uma aplicação $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y).$$

Pode-se provar que F é uma estrutura de Finsler em M . Além disso, $F(x, y) = F(x, -y)$, para todo $(x, y) \in TM$ se, e somente se, $b_i(x) = 0$. Assim, F é Riemanniana se, e somente se, F é absolutamente homogênea. Para mais detalhes veja [1] e [5].

Este exemplo mostra que existem estruturas de Finsler que não são Riemannianas.

O próximo resultado é conhecido como Teorema de Euler para aplicações homogêneas. Ele nos fornecerá ferramentas para trabalharmos com as estruturas de Finsler.

Teorema 1.15. *Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- f é positivamente homogênea de grau $s \in \mathbb{N}$, isto é,

$$f(\lambda y) = \lambda^s f(y), \quad \forall \lambda > 0.$$

- A derivada radial de f é s vezes f , isto é,

$$y^i f_{y^i}(y) = s f(y).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1]. □

Corolário 1.16. *Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável e positivamente homogênea de grau 1. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

$$(i) \quad y^i f_{y^i}(y) = f(y);$$

$$(ii) \quad y^i f_{y^i y^j}(y) = 0.$$

Proposição 1.17. *Seja $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ uma estrutura de Finsler. Dado $(x, y) \in TM \setminus 0$, temos que*

$$g_{ij(x,y)} = \left(\frac{1}{2} F^2 \right)_{y^i y^j} (x, y)$$

é invariante por redimensionamento positivo em y , isto é, $g_{ij(x,y)} = g_{ij(x,\lambda y)}$, $\forall \lambda > 0$.

Demonstração. Consideremos $(x, y) \in TM \setminus 0$ e $\lambda > 0$. Como $F(x, \cdot)$ é positivamente homogênea, então $F_{y^i}(x, \lambda y) = F_{y^i}(x, y)$ e $F_{y^i y^j}(x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} F_{y^i y^j}(x, y)$. Usando estas igualdades e o fato de $F(x, \cdot)$ ser positivamente homogênea, temos que

$$\begin{aligned} g_{ij(x,\lambda y)} &= \left(\frac{1}{2} F^2 \right)_{y^i y^j} (x, \lambda y) \\ &= F(x, \lambda y) F_{y^i y^j}(x, \lambda y) + F_{y^i}(x, \lambda y) F_{y^j}(x, \lambda y) \\ &= \lambda F(x, y) \frac{1}{\lambda} F_{y^i y^j}(x, y) + F_{y^i}(x, y) F_{y^j}(x, y) \\ &= g_{ij(x,y)}. \end{aligned}$$

Portanto, $g_{ij(x,y)} = g_{ij(x,\lambda y)}$, para todo $(x, y) \in TM \setminus 0$ e para todo $\lambda > 0$. \square

1.3.2 O Fibrado Vetorial π^*TM e os Tensores Fundamental e de Cartan

Agora apresentaremos os tensores fundamental e de Cartan, que são objetos definidos sobre os fibrados vetoriais $\otimes^2 \pi^*T^*M$ e $\otimes^3 \pi^*T^*M$, respectivamente. Abordaremos também a seção distinguida, que é um objeto definido sobre o fibrado vetorial π^*TM . Iniciaremos, então abordando os fibrados vetoriais π^*TM e π^*T^*M . O conceito de fibrado vetorial pode ser encontrado em [17].

Seja $\pi : TM \setminus 0 \rightarrow M$ a projeção canônica. O pull-back do fibrado tangente

$$\pi^*TM = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times (T_x M \setminus \{0\}) \times T_x M)$$

é um fibrado vetorial sobre o fibrado tangente furado $TM \setminus 0$. A fibra de π^*TM sobre um ponto (x, y) , que denotaremos por $\pi^*TM|_{(x,y)}$, é uma cópia de $T_x M$.

O pull-back do fibrado cotangente

$$\pi^*T^*M = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times (T_xM \setminus \{0\}) \times T_x^*M)$$

também é um fibrado vetorial sobre o fibrado tangente furado $TM \setminus 0$, cuja fibra sobre um ponto (x, y) , que denotaremos por $\pi^*T^*M|_{(x,y)}$, é uma cópia de T_x^*M .

Seja (x^i) um sistema de coordenadas locais em M . Essas coordenadas produzem seções $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ e $\{dx^i\}$, respectivamente para π^*TM e π^*T^*M , definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} : TM \setminus 0 &\longrightarrow \pi^*TM, & \frac{\partial}{\partial x^i}(x, y) &= \left(x, y, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right), \\ dx^i : TM \setminus 0 &\longrightarrow \pi^*T^*M, & dx^i(x, y) &= (x, y, d(x^i)_x). \end{aligned}$$

Observe que estas seções são definidas localmente em x e globalmente em y .

Apresentaremos agora as definições da seção distinguida e dos tensores fundamental e de Cartan.

Definição 1.18. *A seção distinguida ℓ é uma seção de π^*TM definida por*

$$\ell = \ell_{(x,y)} := \frac{y^i}{F(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = \frac{y^i}{F} \frac{\partial}{\partial x^i} =: \ell^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Dado $(x, y) \in TM \setminus 0$, podemos considerar a fibra $\pi^*TM|_{(x,y)} = T_xM$ de π^*TM e utilizar os $g_{ij(x,y)}$ para definir um produto interno em T_xM

$$g_{(x,y)}(u, v) = g_{ij(x,y)}u^i v^j, \quad \forall u, v \in T_xM.$$

Pela Proposição 1.17, temos que $g_{ij(x,y)} = g_{ij(x,\lambda y)}$, para todo $\lambda > 0$, então podemos considerar em cada fibra $\pi^*TM|_{(x,\lambda y)} = T_xM$ o mesmo produto interno. Isto nos motiva a trabalhar com objetos que são invariantes por redimensionamento positivo em y .

Variando o ponto (x, y) em $TM \setminus 0$ definimos a correspondência

$$(x, y) \in TM \setminus 0 \mapsto g_{(x,y)} = g_{ij(x,y)}dx^i \otimes dx^j \in \pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M$$

onde $g_{(x,y)} : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g_{(x,y)}(u, v) = g_{ij(x,y)}dx^i \otimes dx^j(u, v) = g_{ij(x,y)}u^i v^j$.

Observe que sendo $g_{(x,y)}$ um produto interno, temos que g é uma seção simétrica em $\pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M$.

Definição 1.19. *A correspondência g definida acima é chamada de **Tensor Fundamental**.*

Observemos que pelo Exemplo 1.13, se F é definida a partir de uma métrica Riemanniana, segue que g_{ij} não depende de y .

Agora consideremos a correspondência A

$$(x, y) \in TM \setminus 0 \mapsto A_{(x,y)} = A_{ijk(x,y)} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \in \otimes^3 \pi^* T^*M$$

onde $A_{(x,y)} : T_x M \times T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $A_{(x,y)}(u, v, w) = A_{ijk(x,y)} u^i v^j w^k$, com $A_{ijk} := FC_{ijk}$ e $C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$.

Como A_{ijk} é simétrico em relação aos seus três índices, temos que o tensor $A_{(x,y)}$ é uma seção simétrica em $\otimes^3 \pi^* T^*M$.

Definição 1.20. *A correspondência A definida acima é chamada de **Tensor de Cartan**.*

Observação 1.21. (1) *Os tensores fundamental e de Cartan independem da escolha do sistema de coordenadas. Para mais detalhes veja a referência [9].*

(2) *Vale que $g(\ell, \ell) = 1$. De fato, dado $(x, y) \in TM \setminus 0$, temos que*

$$\begin{aligned} g_{(x,y)}(\ell_{(x,y)}, \ell_{(x,y)}) &= g_{ij(x,y)} dx^i \otimes dx^j \left(\frac{y^k}{F(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{y^l}{F(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\ &= g_{ij(x,y)} \frac{y^i}{F(x,y)} \frac{y^j}{F(x,y)} \\ &= F(x,y) F_{y^i y^j}(x,y) \frac{y^i}{F(x,y)} \frac{y^j}{F(x,y)} \\ &+ F_{y^i}(x,y) F_{y^j}(x,y) \frac{y^i}{F(x,y)} \frac{y^j}{F(x,y)} \\ &= \frac{y^i}{F(x,y)} F_{y^i}(x,y) \frac{y^j}{F(x,y)} F_{y^j}(x,y) \\ &= 1, \end{aligned}$$

na penúltima e na última igualdade usamos o Corolário 1.16.

1.3.3 Símbolos de Christoffel e a Conexão não Linear

Agora utilizaremos as componentes g_{ij} do tensor fundamental, que são funções em $TM \setminus 0$ e são invariantes por redimensionamento positivo em y , para definirmos os **símbolos formais de Christoffel** de segunda espécie

$$\gamma^i_{jk} := g^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} \right)$$

e a **conexão não linear**

$$N^i_j := \gamma^i_{jk} y^k - C^i_{jk} \gamma^k_{rs} y^r y^s,$$

onde $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ e $C^i_{jk} = g^{is} C_{sjk}$.

Como preferimos trabalhar com objetos que são invariantes por redimensionamento positivo em y , optamos por trabalhar com

$$\frac{N^i_j}{F} := \gamma^i_{jk} \ell^k - A^i_{jk} \gamma^k_{rs} \ell^r \ell^s,$$

onde $A^i_{jk} = FC^i_{jk}$.

O fibrado tangente da variedade diferenciável TM tem uma base de coordenadas locais que consiste dos $\frac{\partial}{\partial x^j}$ e dos $\frac{\partial}{\partial y^j}$. Se considerarmos uma mudança de coordenadas em M

$$x^i = x^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$$

obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^p} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^p \partial \tilde{x}^q} \tilde{y}^q \frac{\partial}{\partial y^i}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^p} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Assim, os vetores $\frac{\partial}{\partial x^j}$ se transformam de uma maneira um pouco complicada. Por outro lado, os $\frac{\partial}{\partial y^j}$ não possuem esse problema. De forma análoga, o fibrado cotangente de TM tem uma base de coordenadas locais $\{dx^i, dy^i\}$, e temos as relações

$$d\tilde{x}^p = \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^i} dx^i$$

e

$$d\tilde{y}^p = \frac{\partial^2 \tilde{x}^p}{\partial x^i \partial x^j} y^j dx^i + \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^i} dy^i.$$

Neste caso, temos que os dx^i se transformam de maneira simples e os dy^i não. Assim, vamos substituir $\frac{\partial}{\partial x^j}$ por

$$\frac{\delta}{\delta x^j} := \frac{\partial}{\partial x^j} - N^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}$$

e dy^i por

$$\delta y^i := dy^i + N^i_j dx^j.$$

Como preferimos trabalhar com objetos que são invariantes por redimensionamento positivo em y , trabalhamos com

$$\frac{\delta y^i}{F} := \frac{1}{F} (dy^i + N^i_j dx^j).$$

Com isso introduzimos duas novas bases naturais (locais):

- $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ para o fibrado tangente de $TM \setminus 0$,
- $\left\{ dx^i, \frac{\delta y^i}{F} \right\}$ para o fibrado cotangente de $TM \setminus 0$.

Ainda, dx^j é o dual natural de $\frac{\delta}{\delta x^j}$ e $\frac{\delta y^i}{F}$ é o dual natural de $F \frac{\partial}{\partial y^i}$, isto é,

$$dx^j \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \frac{\delta y^j}{F} \left(F \frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

1.3.4 A Conexão de Chern

A **conexão de Chern** ∇ que apresentaremos agora, é uma conexão linear em π^*TM . Por ser uma conexão linear ela deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $\nabla_v(fE)(x, y) = (df)_{(x,y)}(v)E(x, y) + f(x, y)(\nabla_v E)(x, y)$,
- $\nabla_v(E_1 + E_2)(x, y) = (\nabla_v E_1 + \nabla_v E_2)(x, y)$,
- $(\nabla_{\lambda v} E)(x, y) = \lambda(\nabla_v E)(x, y)$, para toda constante λ ,
- $(\nabla_{v_1+v_2} E)(x, y) = (\nabla_{v_1} E + \nabla_{v_2} E)(x, y)$,

onde $(x, y) \in TM \setminus 0$, $v, v_1, v_2 \in T_{(x,y)}(TM)$, E, E_1, E_2 são campos tensoriais de π^*TM e $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável.

Uma maneira de conhecer ∇ é através das suas 1-formas ω_j^i de conexão, que são definidas por:

$$\nabla_v \frac{\partial}{\partial x^j} := \omega_j^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Usando que uma conexão linear deve satisfazer as propriedades:

- $\nabla_v(E_1 \otimes E_2) = (\nabla_v E_1) \otimes E_2 + E_1 \otimes (\nabla_v E_2)$,
- $\nabla_v(tr E) = tr(\nabla_v E)$,

onde tr é o traço, obtemos que

$$\nabla_v dx^i = -\omega_j^i(v) dx^j.$$

Estas propriedades podem ser encontradas em [9].

As 1-formas de conexão são determinadas por suas equações de estrutura.

Teorema 1.22. (Chern) *Seja (M, F) uma variedade de Finsler. O pull-back do fibrado tangente π^*TM admite uma única conexão linear, chamada **conexão de Chern**, caracterizada pelas seguintes equações de estrutura:*

* **Torção nula:**

$$d(dx^i) - dx^j \wedge \omega_j^i = -dx^j \wedge \omega_j^i = 0.$$

* **Quase g -compatibilidade:**

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = 2A_{ijs}\frac{\delta y^s}{F}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1]. □

A torção nula é equivalente à ausência dos termos dy^k em ω_j^i , isto é,

$$\omega_j^i = \Gamma^i_{jk} dx^k,$$

junto com a simetria

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

A quase compatibilidade com a métrica implica que

$$\Gamma^l_{jk} = \gamma^l_{jk} - g^{li} \left(A_{ijs} \frac{N^s_k}{F} - A_{jks} \frac{N^s_i}{F} + A_{kis} \frac{N^s_j}{F} \right),$$

ou equivalentemente

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{is}}{2} \left(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j} \right).$$

Vejamos como calcular a derivada covariante da seção distinguida e do tensor fundamental. Temos que

$$\begin{aligned} \nabla_v \ell &= \nabla_v \left(\ell^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= d(\ell^j)(v) \frac{\partial}{\partial x^j} + \ell^j \nabla_v \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= d(\ell^j)(v) \frac{\partial}{\partial x^j} + \ell^j \omega_j^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= (d(\ell^i)(v) + \ell^j \omega_j^i(v)) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_v g &= \nabla_v (g_{ij} dx^i \otimes dx^j) \\ &= d(g_{ij})(v) dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \nabla_v (dx^i) \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes \nabla_v (dx^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d(g_{ij})(v)dx^i \otimes dx^j - g_{ij}\omega_k^i(v)dx^k \otimes dx^j - g_{ij}dx^i \otimes \omega_k^j(v)dx^k \\
&= (d(g_{ij})(v) - g_{kj}\omega_i^k(v) - g_{ik}\omega_j^k(v))dx^i \otimes dx^j.
\end{aligned}$$

1.3.5 hh -, hv -, vv -Curvaturas

Nesta seção estudaremos as 2-formas da curvatura da conexão de Chern. A partir destas 2-formas obteremos as expressões das hh -, hv -, vv -curvaturas.

Definição 1.23. *Seja $a = \sum_I a_I dx_I$ uma r -forma de classe C^k ($k \geq 1$) definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. A diferencial exterior de a é uma $(r+1)$ -forma definida por*

$$da = \sum_I da_I \wedge dx_I,$$

onde $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ e $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$.

As 2-formas da curvatura da conexão de Chern são

$$\Omega_j^i := d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i. \quad (1.1)$$

Escrevendo as 2-formas Ω_j^i em termos da base das 2-formas em $TM \setminus 0$, dada pela base natural dual $\left\{ dx^k, \frac{\delta y^k}{F} \right\}$, temos que

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2}R_j^i{}_{kl}dx^k \wedge dx^l + P_j^i{}_{kl}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2}Q_j^i{}_{kl}\frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}. \quad (1.2)$$

Os objetos R, P e Q são respectivamente os hh -, hv - e vv -tensores de curvatura da conexão de Chern. Sem perda de generalidade podemos supor que

$$R_j^i{}_{kl} = -R_j^i{}_{lk} \quad (1.3)$$

$$Q_j^i{}_{lk} = -Q_j^i{}_{kl}. \quad (1.4)$$

Vamos verificar que $Q_j^i{}_{lk} = 0$, o que simplifica a expressão em (1.2).

A conexão de Chern é de torção nula, isto é, $dx^j \wedge \omega_j^i = 0$, então pela diferencial exterior, obtemos que $dx^j \wedge d\omega_j^i = 0$, pois $d(dx^j) = 0$. Ainda, pela torção nula, temos que $dx^j \wedge \omega_j^k \wedge \omega_k^i = 0$. Segue disto que

$$dx^j \wedge \Omega_j^i = 0,$$

pois $dx^j \wedge \Omega_j^i = dx^j \wedge d\omega_j^i - dx^j \wedge \omega_j^k \wedge \omega_k^i = 0$. Assim,

$$0 = dx^j \wedge \Omega_j^i = \frac{1}{2}R_j^i{}_{kl}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l + P_j^i{}_{kl}dx^j \wedge dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2}Q_j^i{}_{kl}dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}.$$

Os termos da direita são de tipos diferentes, assim eles devem ser nulos. Fixando índices $j < k < l$, a última parcela da última igualdade é,

$$(Q_j^i{}_{kl} - Q_j^i{}_{lk})dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F},$$

logo $Q_j^i{}_{kl} = Q_j^i{}_{lk}$. Segue de (1.4) que $Q_j^i{}_{kl} = 0$, o que simplifica a 2-forma (1.2) para

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2}R_j^i{}_{kl}dx^k \wedge dx^l + P_j^i{}_{kl}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}. \quad (1.5)$$

Vamos determinar fórmulas para R e P em coordenadas naturais. Combinando as fórmulas em (1.1) e (1.5) obtemos

$$d\omega_j^i - \omega_j^h \wedge \omega_h^i = \frac{1}{2}R_j^i{}_{kl}dx^k \wedge dx^l + P_j^i{}_{kl}dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}. \quad (1.6)$$

Como $\omega_j^i = \Gamma^i{}_{jl}dx^l$, então $d\omega_j^i = d\Gamma^i{}_{jl} \wedge dx^l$. Considerando as bases naturais $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^k}, F \frac{\partial}{\partial y^k} \right\}$ e $\left\{ dx^k, \frac{\delta y^k}{F} \right\}$, e expandindo a 1-forma $d\Gamma^i{}_{jl}$ em função destes termos obtemos

$$d\omega_j^i = \frac{\delta \Gamma^i{}_{jl}}{\delta x^k} dx^k \wedge dx^l + F \frac{\partial \Gamma^i{}_{jl}}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{F} \wedge dx^l.$$

Reorganizando os termos, segue que

$$d\omega_j^i = \frac{\delta \Gamma^i{}_{jl}}{\delta x^k} dx^k \wedge dx^l - F \frac{\partial \Gamma^i{}_{jk}}{\partial y^l} dx^k \wedge \frac{\partial y^l}{F}.$$

Temos também que $-\omega_j^h \wedge \omega_h^i = \omega_h^i \wedge \omega_j^h = \Gamma^i{}_{hk} \Gamma^h{}_{jl} dx^k \wedge dx^l$.

Substituindo as últimas duas igualdades no lado esquerdo de (1.6), obtemos

$$\left(\frac{\delta \Gamma^i{}_{jl}}{\delta x^k} + \Gamma^i{}_{hk} \Gamma^h{}_{jl} \right) dx^k \wedge dx^l - F \frac{\partial \Gamma^i{}_{jk}}{\partial y^l} dx^k \wedge \frac{\partial y^l}{F}.$$

Fixando $k < l$, a expressão acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\left(\frac{\delta \Gamma^i{}_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta \Gamma^i{}_{jk}}{\delta x^l} + \Gamma^i{}_{hk} \Gamma^h{}_{jl} - \Gamma^i{}_{hl} \Gamma^h{}_{jk} \right) dx^k \wedge dx^l - F \frac{\partial \Gamma^i{}_{jk}}{\partial y^l} dx^k \wedge \frac{\partial y^l}{F},$$

e o lado direito da igualdade (1.6) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (R_j^i{}_{kl} - R_j^i{}_{lk}) dx^k \wedge dx^l + P_j^i{}_{kl} dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \\ & = R_j^i{}_{kl} dx^k \wedge dx^l + P_j^i{}_{kl} dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (1.3). Assim, devemos ter

$$R_j^i{}_{kl} = \frac{\delta\Gamma^i{}_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta\Gamma^i{}_{jk}}{\delta x^l} + \Gamma^i{}_{hk}\Gamma^h{}_{jl} - \Gamma^i{}_{hl}\Gamma^h{}_{jk}$$

e

$$P_j^i{}_{kl} = -F \frac{\partial\Gamma^i{}_{jk}}{\partial y^l}.$$

1.3.6 A Curvatura Flag

Uma **flag** em $x \in M$ consiste de um vetor não nulo $y \in T_xM$, que serve como flagpole (mastro), e de um vetor transversal $V := V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. A curvatura flag que definiremos não depende do "comprimento" do flagpole. Assim, no lugar de y podemos usar o vetor $\ell = \frac{y^i}{F} \frac{\partial}{\partial x^i}$, pois eles são paralelos.

Dada uma flag em $x \in M$, determinada pelo flagpole $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM$ e pelo vetor transversal $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, podemos pensar neles como seções $(x, y, y^i \frac{\partial}{\partial x^i})$ e $(x, y, V^i \frac{\partial}{\partial x^i})$ no fibrado vetorial π^*TM , e definir a curvatura flag como sendo a correspondência que associa a cada $(x, y) \in TM \setminus 0$ o escalar

$$K(y, V) := \frac{V^i (y^j R_{jikl} y^l) V^k}{g(y, y)g(V, V) - [g(y, V)]^2},$$

onde $R_{jikl} = g_{im} R_j^m{}_{kl}$.

A seguir apresentaremos algumas propriedades da curvatura flag.

Proposição 1.24. *A curvatura flag satisfaz as seguintes condições:*

- (1) $K(y, V) = K(\ell, V)$;
- (2) $K(\ell, V) = \frac{V^i R_{ik} V^k}{g(V, V) - [g(\ell, V)]^2}$, onde $R_{ik} = \ell^j R_{jikl} \ell^l$;
- (3) $K(\ell, V) = K(\ell, \alpha V), \forall \alpha \neq 0$.

Demonstração. (1) Temos que

$$\begin{aligned} K(y, V) &= \frac{F^2}{F^2} \frac{V^i (y^j R_{jikl} y^l) V^k}{g(y, y)g(V, V) - [g(y, V)]^2} \\ &= \frac{V^i \left(\frac{y^j}{F} R_{jikl} \frac{y^l}{F} \right) V^k}{g\left(\frac{y}{F}, \frac{y}{F}\right)g(V, V) - \left[g\left(\frac{y}{F}, V\right)\right]^2} \\ &= \frac{V^i (\ell^j R_{jikl} \ell^l) V^k}{g(\ell, \ell)g(V, V) - [g(\ell, V)]^2} \\ &= K(\ell, V). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Portanto, $K(y, V) = K(\ell, V)$.

(2) Por (1.7), temos que

$$K(\ell, V) = \frac{V^i (\ell^j R_{jikl} \ell^l) V^k}{g(\ell, \ell) g(V, V) - [g(\ell, V)]^2}.$$

Usando que $g(\ell, \ell) = 1$ e $R_{ik} = \ell^j R_{jikl} \ell^l$, segue o desejado.

(3) Consideremos $\alpha \neq 0$, então

$$K(\ell, \alpha V) = \frac{(\alpha V^i) R_{ik} (\alpha V^k)}{g(\alpha V, \alpha V) - [g(\ell, \alpha V)]^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} \frac{V^i R_{ik} V^k}{g(V, V) - [g(\ell, V)]^2} = K(\ell, V).$$

□

Capítulo 2

Construção da Suavização de uma Estrutura de Finsler de Classe C^0

Neste capítulo apresentaremos a suavização de uma estrutura de Finsler $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0 , que é uma família a um parâmetro de estruturas de Finsler $F_\varepsilon : TM \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $F_\varepsilon \rightarrow F$ pontualmente. Verificaremos que esta suavização é boa no seguinte sentido: se $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma estrutura de Finsler absolutamente homogênea, então os objetos como a conexão de Chern e a curvatura flag das estruturas de Finsler F_ε convergem pontualmente para os respectivos objetos da estrutura de Finsler F . Iniciaremos explorando propriedades sobre a suavização de funções convexas, que ajudarão a obter as aplicações $F_\varepsilon : TM \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1 Suavização de Funções Convexas

No resultado abaixo provaremos que se f é uma função convexa, então a sua suavização mollifier também é convexa, o que assegura que sua hessiana é positiva semidefinida.

Lema 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então a suavização mollifier*

$$(\eta_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x - y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)f(x - y)dy$$

também é uma função convexa.

Demonstração. Tomemos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, 1]$. Usando que f é convexa, temos que

$$\begin{aligned} (\eta_\varepsilon * f)(tx_1 + (1 - t)x_2) &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)f(tx_1 + (1 - t)x_2 - y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)f(t(x_1 - y) + (1 - t)(x_2 - y))dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)[tf(x_1 - y) + (1 - t)f(x_2 - y)]dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) f(x_1 - y) dy + (1 - t) \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) f(x_2 - y) dy \\
&= t(\eta_\varepsilon * f)(x_1) + (1 - t)(\eta_\varepsilon * f)(x_2).
\end{aligned}$$

Portanto, $(\eta_\varepsilon * f)(x)$ é uma função convexa. \square

Agora estudaremos o comportamento da aplicação mollifier $\eta : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ a fim de obter condições sobre a hessiana da suavização mollifier de funções convexas.

Exemplo 2.2. Neste exemplo analisaremos a aplicação $\eta : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, a fim de obter seus pontos de máximo e de inflexão.

Temos que

$$\eta'(x) = -\frac{2Cxe^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2} \quad \text{e} \quad \eta''(x) = 2Ce^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{(3x^4-1)}{(x^2-1)^4}.$$

Assim $\eta'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Além disso, $\eta'(x) > 0$ em $(-1, 0)$ e $\eta'(x) < 0$ em $(0, 1)$. Logo $x = 0$ é um ponto de máximo absoluto de η .

Vamos determinar em quais intervalos η tem concavidade para cima ou para baixo.

Temos que

$$\eta''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \right)$$

e

$$\eta''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \setminus \left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \right).$$

Então, η é côncava para cima nos intervalos $\left(-1, -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$ e $\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, 1\right)$ e côncava para baixo no intervalo $\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$. Segue disto que os pontos $-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ e $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ são pontos de inflexão da aplicação η .

De forma análoga prova-se que a aplicação $\eta_\varepsilon : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, tem o mesmo comportamento da aplicação η .

Proposição 2.3. *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa, então $(\eta_\varepsilon * f)''(x) \geq 0$. Ainda, $(\eta_\varepsilon * f)''(x) = 0$ se, e somente se, f é afim em $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, onde $[-\varepsilon, \varepsilon]$ é o suporte da aplicação η_ε .*

Demonstração. Pelo Lema 2.1, temos que $(\eta_\varepsilon * f)$ é convexa, logo $(\eta_\varepsilon * f)''(x) \geq 0$. Resta provar que $(\eta_\varepsilon * f)''(x) = 0$ se, e somente se, f é afim em $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Sejam $-\delta$ e δ os pontos de inflexão da aplicação η_ε . Como

$$(\eta_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(x - y) f(y) dy,$$

segue da Observação 1.6 que

$$(\eta_\varepsilon * f)''(x) = \int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon''(x-y)f(y)dy.$$

Seja $y \mapsto ay + b$ uma parametrização de uma reta tangente de f em x (que pode não ser única). Então

$$(\eta_\varepsilon * f)''(x) = \int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon''(x-y)[f(y) - ay - b]dy, \quad (2.1)$$

pois resolvendo a integral $\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon''(x-y)[-ay - b]dy$ por partes, concluímos que ela é igual a zero.

Suponhamos que f é afim em $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Então $f(y) = ay + b, \forall y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ e, assim, por (2.1) segue que $(\eta_\varepsilon * f)''(x) = 0$.

Agora suponhamos que $(\eta_\varepsilon * f)''(x) = 0$, devemos provar que f é afim em $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Suponhamos por absurdo que f não é afim em $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ e sejam

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{x-\varepsilon}^{x-\delta} \eta_\varepsilon''(x-y)[f(y) - ay - b]dy \\ C_2 &= \int_{x-\delta}^x \eta_\varepsilon''(x-y)[f(y) - ay - b]dy \\ C_3 &= \int_x^{x+\delta} \eta_\varepsilon''(x-y)[f(y) - ay - b]dy \\ C_4 &= \int_{x+\delta}^{x+\varepsilon} \eta_\varepsilon''(x-y)[f(y) - ay - b]dy. \end{aligned}$$

Consideremos a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(y) = f(y) - ay - b$. Então g é convexa, pois é soma de funções convexas. Como f é convexa e $y \mapsto ay + b$ é uma parametrização de uma reta tangente de f em x , temos que x é um ponto de mínimo absoluto de g e $g(x) = 0$. Disto obtemos que $g|_{(-\infty, x)}$ é não crescente e $g|_{(x, \infty)}$ é não decrescente.

Vamos verificar agora que se $g(z) > 0$ e $z > x$, então $g|_{(z, \infty)}$ é estritamente crescente. Consideremos $z_1, z_2 \in (z, \infty)$ com $z_1 < z_2$. Suponhamos por absurdo que $g(z_1) = g(z_2)$. Como $x < z < z_1 < z_2$, então $z_1 \in (x, z_2)$. Assim, existe $t \in (0, 1)$ tal que $z_1 = tx + (1-t)z_2$. Daí

$$\begin{aligned} g(z_1) &= g(tx + (1-t)z_2) \leq tg(x) + (1-t)g(z_2) = (1-t)g(z_1) < g(z_1) \\ &\Rightarrow g(z_1) < g(z_1) \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Como $g(z_1) \leq g(z_2)$, segue que $g(z_1) < g(z_2)$. Portanto, g é estritamente crescente em (z, ∞) . De forma análoga prova-se que g é estritamente decrescente em $(-\infty, z)$ se $g(z) > 0$ e $z < x$.

Como $g(x - \delta) \leq g(y), \forall y \in [x - \varepsilon, x - \delta]$ e $\eta''_\varepsilon(x - y) \geq 0, \forall y \in [x - \varepsilon, x - \delta]$, então

$$C_1 \geq \int_{x-\varepsilon}^{x-\delta} \eta''_\varepsilon(x-y)g(x-\delta)dy = g(x-\delta) \int_{x-\varepsilon}^{x-\delta} \eta''_\varepsilon(x-y)dy \quad (2.2)$$

e como $g(x - \delta) \geq g(y), \forall y \in [x - \delta, x]$ e $\eta''_\varepsilon(x - y) \leq 0, \forall y \in [x - \delta, x]$, então

$$C_2 \geq \int_{x-\delta}^x \eta''_\varepsilon(x-y)g(x-\delta)dy = g(x-\delta) \int_{x-\delta}^x \eta''_\varepsilon(x-y)dy.$$

De forma análoga obtemos que

$$C_3 \geq \int_x^{x+\delta} \eta''_\varepsilon(x-y)g(x+\delta)dy = g(x+\delta) \int_x^{x+\delta} \eta''_\varepsilon(x-y)dy$$

e

$$C_4 \geq \int_{x+\delta}^{x+\varepsilon} \eta''_\varepsilon(x-y)g(x+\delta)dy = g(x+\delta) \int_{x+\delta}^{x+\varepsilon} \eta''_\varepsilon(x-y)dy. \quad (2.3)$$

Como f não é afim em $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, então a desigualdade em (2.2) é estrita ou a desigualdade em (2.3) é estrita. Assim,

$$\begin{aligned} (\eta_\varepsilon * f)''(x) &= \int_{\mathbb{R}} \eta''_\varepsilon(x-y)f(y)dy \\ &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\ &> g(x-\delta) \int_{x-\varepsilon}^x \eta''_\varepsilon(x-y)dy + g(x+\delta) \int_x^{x+\varepsilon} \eta''_\varepsilon(x-y)dy \\ &= g(x-\delta) \int_{x-\varepsilon}^x \eta''_\varepsilon(x-y)dy + g(x+\delta) \int_{x-\varepsilon}^x \eta''_\varepsilon(x-y)dy \\ &= [g(x-\delta) + g(x+\delta)] \int_{x-\varepsilon}^x \eta''_\varepsilon(x-y)dy \\ &= [g(x-\delta) + g(x+\delta)][-\eta'_\varepsilon(x-y)]\Big|_{y=x-\varepsilon}^{y=x} \\ &= [g(x-\delta) + g(x+\delta)][\eta'_\varepsilon(\varepsilon) - \eta'_\varepsilon(0)] \\ &= [g(x-\delta) + g(x+\delta)]0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $(\eta_\varepsilon * f)''(x) > 0$, o que é um absurdo. Portanto, f é afim em $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. \square

2.2 Taxas de Crescimento de Normas em \mathbb{R}^n

Sejam F uma norma arbitrária em \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana. Usaremos as notações $B_{\|\cdot\|}(y, R)$ e $B_F(y, R)$ para denotarmos as bolas abertas com centro em y e raio R com respeito as normas $\|\cdot\|$ e F , respectivamente. A esfera e a bola fechada com respeito a F

serão denotadas por $S_F[y, R]$ e $B_F[y, R]$, respectivamente, e assim por diante.

Uma norma F em \mathbb{R}^n é completamente caracterizada por $S_F[y, 1]$, que é a fronteira do subconjunto convexo $B_F[0, 1]$. Para cada $y \in S_F[0, 1]$ existe um hiperplano suporte H_y de $B_F[0, 1]$ em y , que em geral não é único. Fixado H_y , existe uma única transformação linear L_y tal que $L_y = F(y)$ em H_y . Estamos interessados em encontrar um limitante inferior positivo para o crescimento de F em algumas direções. Para isso, faremos uso da relação $F \geq L_y$.

Definimos

$$r = \max_{y \in S_{\|\cdot\|}[0,1]} F(y) = \max_{y \in B_{\|\cdot\|}[0,1]} F(y) \quad (2.4)$$

e

$$\rho = \min_{y \in S_{\|\cdot\|}[0,1]} F(y). \quad (2.5)$$

Utilizando as relações

$$\max_{y \in S_{\|\cdot\|}[0,t]} F(y) = t \cdot \max_{y \in S_{\|\cdot\|}[0,1]} F(y)$$

e

$$\min_{y \in S_{\|\cdot\|}[0,t]} F(y) = t \cdot \min_{y \in S_{\|\cdot\|}[0,1]} F(y),$$

obtemos que

$$\max_{y \in S_{\|\cdot\|}[0,1]} F(y) = \min_{y \in S_{\|\cdot\|}[0,r/\rho]} F(y). \quad (2.6)$$

Sabemos que a derivada direcional de F em v na direção de $\frac{v}{\|v\|}$ é igual a $\frac{F(v)}{\|v\|}$, que pode ser limitada inferiormente por ρ , devido a (2.5). A próxima proposição é uma versão deste resultado para a "derivada" de F com respeito a $\frac{v}{\|v\|}$, em uma vizinhança de v . É claro que F não é necessariamente diferenciável, e adaptamos isto usando diferenças em vez de derivadas.

Proposição 2.4. *Sejam F uma norma em \mathbb{R}^n e $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. Seja $\|v\| = R$ e considere*

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho R}{4nr}\right]$$

onde r e ρ foram definidas em (2.4) e (2.5), respectivamente. Então

$$F\left(w + t \frac{v}{\|v\|}\right) - F(w) > \frac{\rho}{8}t$$

para todo $w \in B_{\|\cdot\|}[v, \varepsilon]$ e $t > 0$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $v = (0, \dots, 0, R)$. Depois deste caso basta fazer uma mudança de coordenadas ortogonais para apresentar o resultado geral.

Denotamos

$$D = \{(y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n; y^n = 0\} \cap B_{\|\cdot\|}\left[0, \frac{\rho R}{2r}\right]$$

e $E = B_{\|\cdot\|}[v, \varepsilon]$. Notamos que

$$\max_{y \in D} F(y) \leq \max_{y \in S_{\|\cdot\|}[0, (\rho R)/(2r)]} F(y) = \frac{\rho R}{2} = \min_{y \in S_{\|\cdot\|}[0, R/2]} F(y) < \min_{y \in E} F(y) \quad (2.7)$$

por (2.6) e porque $E \cap B_{\|\cdot\|}[0, R/2] = \emptyset$.

Seja $w = (w^1, \dots, w^n) \in E$, então

$$|w^i| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \dots, n-1 \text{ e } w^n \in (R/2, 2R). \quad (2.8)$$

Um hiperplano suporte H_w de $S_F[0, F(w)]$ em w separa \mathbb{R}^n em duas partes, e $B_F(0, F(w))$ está completamente na mesma parte da origem. Por (2.7) segue que $D \subset B_F(0, F(w))$, o que implica que H_w não intercepta D . Em particular, $(0, \dots, 0, 1)$ não é paralelo a H_w , porque a projeção ortogonal de w em $y^n = 0$ pertence a D . Portanto, H_w intercepta o eixo y^n . Esta interseção está na parte positiva do eixo y^n , pois caso contrário, a linha que liga w e esta interseção interceptaria D .

Denotamos a equação de H_w por

$$a^1 y^1 + \dots + a^n y^n = 1,$$

onde

$$|a^i| \leq \frac{2r}{\rho R} \text{ para } i = 1, \dots, n-1 \quad (2.9)$$

devido ao fato de H_w não interceptar o eixo y^i em D . Para estimar a^n notemos que

$$a^n = \frac{1 - a^1 w^1 - \dots - a^{n-1} w^{n-1}}{w^n} \geq \frac{1 - |a^1 w^1| - \dots - |a^{n-1} w^{n-1}|}{w^n},$$

onde $|a^i w^i| \leq \frac{1}{2n}$ e $w^n \in (R/2, 2R)$, por (2.8) e (2.9). Portanto,

$$a^n > \frac{1}{4R}. \quad (2.10)$$

A transformação linear L_w tal que $L_w = F(w)$ em H_w é dada por

$$L_w(y) = F(w)(a^1 y^1 + a^2 y^2 + \cdots + a^n y^n).$$

A derivada direcional de L_w com respeito a $v/\|v\| = (0, \dots, 0, 1)$ é dada por

$$\langle \nabla L_w(y), (0, \dots, 0, 1) \rangle = a^n F(w) > \frac{1}{4R} F(w) > \frac{\rho}{8} \quad (2.11)$$

devido a (2.7) e (2.10).

Usando que $F \geq L_w$ junto com (2.11) concluímos que

$$\begin{aligned} F\left(w + t \frac{v}{\|v\|}\right) - F(w) &\geq L_w\left(w + t \frac{v}{\|v\|}\right) - L_w(w) \\ &= t \langle \nabla L_w(y), (0, \dots, 0, 1) \rangle \\ &> \frac{\rho}{8} t, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. □

2.3 Suavização Vertical de Estruturas de Finsler de Classe C^0

Nesta seção construiremos a suavização vertical de uma estrutura de Finsler de classe C^0 . Este processo será feito em sistema de coordenadas.

Seja (M, F) uma variedade de Finsler de classe C^0 e considere um sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) em um subconjunto aberto U_0 de M . Escolha um subconjunto aberto U de U_0 com fecho compacto tal que

$$\bar{U} \subset U_0. \quad (2.12)$$

Consideramos U com o sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) . Seja

$$(x, y) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \quad (2.13)$$

as coordenadas naturais de TU com respeito a (x^1, \dots, x^n) .

Como na seção anterior, vamos trabalhar com duas normas em cada espaço tangente $T_x U$: F e a norma Euclidiana com respeito ao sistema de coordenadas (y^1, \dots, y^n) . Por

exemplo, a bola fechada centrada em v e raio R em T_xU com respeito a norma F é denotada por $B_F[x, v, R]$ e assim por diante.

Analogamente à seção anterior, definimos

$$r_U = \max_{(x,y) \in \bar{U} \times S_{\|\cdot\|}[x,0,1]} F(x, y) = \max_{(x,y) \in \bar{U} \times B_{\|\cdot\|}[x,0,1]} F(x, y) \quad (2.14)$$

e

$$\rho_U = \min_{(x,y) \in \bar{U} \times S_{\|\cdot\|}[x,0,1]} F(x, y). \quad (2.15)$$

Então, a seguinte versão da Proposição 2.4 é verdadeira.

Lema 2.5. *Sejam F uma estrutura de Finsler de classe C^0 em M , U um aberto satisfazendo (2.12) e $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ um sistema de coordenadas em TU como definido em (2.13). Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo com $R := \|v\|$ e consideremos*

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_U R}{4nr_U}\right], \quad (2.16)$$

onde r_U e ρ_U são definidos por (2.14) e (2.15), respectivamente. Então,

$$F\left(x, w + t \frac{v}{\|v\|}\right) - F(x, w) > \frac{\rho_U}{8} t$$

para todo $x \in U$, $w \in B_{\|\cdot\|}[x, v, \varepsilon]$ e $t > 0$.

Demonstração. Análoga a demonstração da Proposição 2.4. □

A primeira tentativa para a suavização vertical em U seria definindo

$$\hat{F}_\varepsilon(x, y) = \int \eta_\varepsilon(z) F(x, y - z) dz$$

para ε dado em (2.16), que é a suavização mollifier da aplicação $F(x, \cdot)$. Podemos provar que para cada $x \in U$, $T_xU \cap \hat{F}_\varepsilon^{-1}(r_U)$ é uma hipersuperfície em T_xU tal que a projeção radial em $S_{\|\cdot\|}[x, 0, 1]$ é um difeomorfismo. Então, poderíamos definir a suavização vertical como uma estrutura de Finsler de classe C^0 tal que a esfera de raio r_U é dada por $T_xU \cap \hat{F}_\varepsilon^{-1}(r_U)$. Tudo funciona bem, exceto pelo fato de que essas normas não são necessariamente fortemente convexas. Para solucionar este problema usaremos

$$\zeta_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\eta_\varepsilon + \varepsilon\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}$$

ao invés de η_ε , e a "perturbação" devido a $\varepsilon\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}$ é suficiente para garantir a convexidade forte. A Proposição 2.3 e o Lema 2.5 são usados para provarmos o desejado. É claro que

há algum trabalho a ser feito, como redefinir ε para tudo funcionar. Vamos fazer esses cálculos a seguir.

Primeiramente fixamos

$$\varepsilon < \frac{\rho_U}{16nr_U}$$

e definimos

$$\tilde{F}_\varepsilon(x, y) = \int \zeta_\varepsilon(z) F(x, y - z) dz.$$

É simples ver que \tilde{F}_ε é contínua e $\tilde{F}_\varepsilon(x, \cdot)$ é diferenciável para cada $x \in U$. Usaremos a notação $\text{Hess}_y \tilde{F}_\varepsilon(x, y)$ para denotar a Hessiana de \tilde{F}_ε com respeito a (y^1, \dots, y^n) (e x fixo).

Notemos que

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in \bar{U} \times S_{\|\cdot\|}[x,0,1/2]} F(x, y) &= \frac{r_U}{2}, \\ \min_{(x,y) \in \bar{U} \times S_{\|\cdot\|}[x,0,(2r_U)/\rho_U]} F(x, y) &= 2r_U \end{aligned}$$

e

$$A := \{(x, y) \in TU; x \in U, \|y\| \in [1/2, (2r_U)/\rho_U]\}$$

contém $F^{-1}([r_U/2, 2r_U])$. Definimos

$$A_{\frac{1}{2}} := \left\{ (x, y) \in A; \|y\| = \frac{1}{2} \right\}$$

e

$$A_{\frac{2r_U}{\rho_U}} := \left\{ (x, y) \in A; \|y\| = \frac{2r_U}{\rho_U} \right\}.$$

A proposição seguinte será usada para garantir que $\text{Hess}_y \tilde{F}_\varepsilon(x, y)$ é positiva definida em $\text{int}(A)$. Antes disso, consideremos uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de \mathbb{R}^n com $v_n = \xi$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, escreva $y = y^i e_i = z^i v_i$. Pela Regra da Cadeia obtemos

$$\frac{\partial^2 f(y)}{\partial(z^n)^2} = \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^i \partial y^j} \xi^i \xi^j, \quad (2.17)$$

onde $\xi = \xi^i e_i$.

Proposição 2.6. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações diferenciáveis com as mesmas hipersuperfícies de níveis em um nível r , sendo r um valor regular de f e g . Se $y \in f^{-1}(r)$ e $f_{y^i y^j}(y) \xi^i \xi^j \neq 0$, para todo $\xi \in K := \ker(d(f)_y) \setminus \{0\}$ então:*

(i) $g_{y^i y^j}(y) \xi^i \xi^j \neq 0$, para todo $\xi \in K$;

(ii) Se g é convexa, então $g_{y^i y^j}(y) \xi^i \xi^j > 0$, para todo $\xi \in K$.

Demonstração. (i) Suponhamos sem perda de generalidade que $\nabla f(y) = (a, 0, \dots, 0)$ com $a \neq 0$. Como as hipersuperfícies de níveis de f e g no nível r são iguais, então $\nabla g(y) = \lambda \nabla f(y)$ com $\lambda \neq 0$.

Consideremos $\xi \in K$ e seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base para \mathbb{R}^n com $v_1 = \nabla f(y)$, $v_n = \xi$ e é completada de forma que $\ker(d(g)_y) = \text{span}\{v_2, \dots, v_n\}$. Escreva $y = z_0^i v_i$. Pelo Teorema da Função Implícita, existem uma bola $B = B((z_0^2, \dots, z_0^n), \delta)$ e um intervalo $J = (z_0^1 - \mu, z_0^1 + \mu)$ com as seguintes propriedades:

- 1) $\bar{J} \times B \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\frac{\partial f}{\partial z^1}(z^1, \dots, z^n) \neq 0$ para todo $(z^1, \dots, z^n) \in \bar{J} \times B$;
- 2) Para todo $(z^2, \dots, z^n) \in B$ existe um único $z^1 = \phi(z^2, \dots, z^n) \in J$ tal que $f(z^1, z^2, \dots, z^n) = f(\phi(z^2, \dots, z^n), z^2, \dots, z^n) = r$.

Ainda, a função $\phi : B \rightarrow J$ assim definida é de classe C^∞ e suas derivadas parciais em cada ponto $z = (z^2, \dots, z^n) \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial z^i}(\phi(z), z) + \frac{\partial f}{\partial z^1}(\phi(z), z) \frac{\partial \phi}{\partial z^i}(z) = 0,$$

para todo $i = 2, \dots, n$.

A equação acima nos dá

$$\frac{\partial f}{\partial z^n}(\phi(z), z) + \frac{\partial f}{\partial z^1}(\phi(z), z) \frac{\partial \phi}{\partial z^n}(z) = 0. \quad (2.18)$$

Aplicando esta equação no ponto (z_0^2, \dots, z_0^n) , obtemos que $\frac{\partial \phi}{\partial z^n}(z_0^2, \dots, z_0^n) = 0$. Derivando a equação (2.18) em relação a z^n concluímos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^1 \partial z^n}(\phi(z), z) \frac{\partial \phi}{\partial z^n}(z) + \frac{\partial^2 f}{\partial (z^n)^2}(\phi(z), z) + \frac{\partial f}{\partial z^1}(\phi(z), z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial (z^n)^2}(z) + \\ & + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial (z^1)^2}(\phi(z), z) \frac{\partial \phi}{\partial z^n}(z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^n \partial z^1}(\phi(z), z) \right] \frac{\partial \phi}{\partial z^n}(z) = 0. \end{aligned}$$

Avaliando esta equação no ponto (z_0^2, \dots, z_0^n) e usando que $\frac{\partial \phi}{\partial z^n}(z_0^2, \dots, z_0^n) = 0$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial (z^n)^2}(\phi(z_0^2, \dots, z_0^n), (z_0^2, \dots, z_0^n)) \\ & = - \frac{\partial f}{\partial z^1}(\phi(z_0^2, \dots, z_0^n), (z_0^2, \dots, z_0^n)) \frac{\partial^2 \phi}{\partial (z^n)^2}(z_0^2, \dots, z_0^n), \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(z^n)^2}(z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^n) = -\frac{\partial f}{\partial z^1}(z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^n) \frac{\partial^2 \phi}{\partial(z^n)^2}(z_0^2, \dots, z_0^n).$$

Usando a hipótese e a igualdade (2.17), obtemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial(z^n)^2}(z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^n) \neq 0$. Logo, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial(z^n)^2}(z_0^2, \dots, z_0^n) \neq 0$.

Usando que as hipersuperfícies de níveis de f e g no nível r são iguais, obtemos com o mesmo raciocínio que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial(z^n)^2}(z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^n) = -\frac{\partial g}{\partial z^1}(z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^n) \frac{\partial^2 \phi}{\partial(z^n)^2}(z_0^2, \dots, z_0^n).$$

Como $\frac{\partial g}{\partial z^1}(z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^n) \neq 0$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial(z^n)^2}(z_0^2, \dots, z_0^n) \neq 0$, então $\frac{\partial^2 g}{\partial(z^n)^2}(z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^n) \neq 0$. Usando a mesma ideia de (2.17) concluímos que

$$g_{y^i y^j}(y) \xi^i \xi^j \neq 0$$

para todo $\xi \in K$, o que prova (i).

(ii) Como g é convexa, o Teorema 1.9 garante que $g_{y^i y^j}(y) \xi^i \xi^j \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Segue do item anterior que $g_{y^i y^j}(y) \xi^i \xi^j > 0, \forall \xi \in K$. □

O lema abaixo apresenta propriedades da aplicação \tilde{F}_ε .

Lema 2.7. \tilde{F}_ε tem as seguintes propriedades para todo $\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho U}{16nrU}\right)$:

(1) $\text{Hess}_y \tilde{F}_\varepsilon(x, y)$ é positiva definida para cada $(x, y) \in \text{int}(A)$;

(2) A derivada radial de \tilde{F}_ε em relação à y em A é estritamente positiva, isto é,

$$y^i (\tilde{F}_\varepsilon)_{y^i}(x, y) > 0, \forall (x, y) \in A;$$

(3) $\sup_{A_{\frac{1}{2}}} \tilde{F}_\varepsilon(x, y) < r_U$;

(4) $\inf_{A_{\frac{2r_U}{\rho U}}} \tilde{F}_\varepsilon(x, y) > r_U$;

(5) $\tilde{F}_\varepsilon(x, y) < r_U$, para todo $(x, y) \in TU$ com $\|y\| < \frac{1}{2}$;

(6) $\tilde{F}_\varepsilon(x, y) > r_U$, para todo $(x, y) \in TU$ com $\|y\| > \frac{2r_U}{\rho U}$;

Em particular, para cada $x \in U$, temos que $\tilde{F}_\varepsilon^{-1}(r_U) \cap T_x U$ é uma hipersuperfície diferenciável em $T_x U$ tal que a projeção radial em $S_{\|\cdot\|}[x, 0, 1]$ é um difeomorfismo.

Demonstração. (1) Dados $(x, y) \in \text{int}(A)$ e $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, devemos provar que

$$\left(\tilde{F}_\varepsilon\right)_{y^i y^j}(x, y) \xi^i \xi^j > 0.$$

Primeiramente verificaremos que dado $(x, y) \in \text{int}(A)$ vale que $\left(\tilde{F}_\varepsilon\right)_{y^n y^n}(x, y) > 0$.

Tomemos $(x, y) \in \text{int}(A)$. Então,

$$\left(\tilde{F}_\varepsilon\right)_{y^n y^n}(x, y) = (1 - \varepsilon) \left(\hat{F}_\varepsilon\right)_{y^n y^n}(x, y) + \varepsilon \left(\frac{\hat{F}_{2r_U}}{\rho_U}\right)_{y^n y^n}(x, y).$$

Pela Proposição 2.3, temos que $\left(\hat{F}_\varepsilon\right)_{y^n y^n}(x, y) \geq 0$. Agora, usaremos o Teorema de Fubini e a Observação 1.6 para provar que $\left(\frac{\hat{F}_{2r_U}}{\rho_U}\right)_{y^n y^n}(x, y) > 0$. Temos que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\hat{F}_{2r_U}}{\rho_U}\right)_{y^n y^n}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\eta_{2r_U}}{\rho_U}\right)_{y^n y^n}(y - w) F(x, w) dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\eta_{2r_U}}{\rho_U}\right)_{y^n y^n}((y', y^n) - (w', w^n)) F(x, (w', w^n)) dw^n \right) dw' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{y^n - \frac{2r_U}{\rho_U}}^{y^n + \frac{2r_U}{\rho_U}} \left(\frac{\eta_{2r_U}}{\rho_U}\right)_{y^n y^n}((y', y^n) - (w', w^n)) F(x, (w', w^n)) dw^n \right) dw', \end{aligned}$$

onde $y' = (y^1, \dots, y^{n-1})$ e $w' = (w^1, \dots, w^{n-1})$.

Fixemos w' e consideremos as aplicações

$$\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(y' - w', \cdot) : (y^n - (2r_U)/\rho_U, y^n + (2r_U)/\rho_U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$F(x, w', \cdot) : (y^n - (2r_U)/\rho_U, y^n + (2r_U)/\rho_U) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Uma vez que a aplicação $\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(y' - w', \cdot)$ tem o comportamento da aplicação mollifier do Exemplo 2.2 e $F(x, w', \cdot)$ é uma aplicação convexa, então pela Proposição 2.3

$$\int_{y^n - \frac{2r_U}{\rho_U}}^{y^n + \frac{2r_U}{\rho_U}} \left(\frac{\eta_{2r_U}}{\rho_U}\right)_{y^n y^n}((y', y^n) - (w', w^n)) F(x, (w', w^n)) dw^n \geq 0.$$

Consideremos agora a aplicação

$$F(x, 0, \cdot) : (y^n - (2r_U)/\rho_U, y^n + (2r_U)/\rho_U) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Como $0 \in (y^n - (2r_U)/\rho_U, y^n + (2r_U)/\rho_U)$, então $F(x, 0, \cdot)$ é a restrição de uma norma em uma vizinhança da origem e por isso não é uma aplicação afim. Usando novamente a Proposição 2.3, temos que

$$\int_{y^n - \frac{2r_U}{\rho_U}}^{y^n + \frac{2r_U}{\rho_U}} \left(\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}} \right)_{y^n y^n} ((y', y^n) - (0, w^n)) F(x, (0, w^n)) dw^n > 0.$$

Assim, existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ da origem tal que

$$\int_{y^n - \frac{2r_U}{\rho_U}}^{y^n + \frac{2r_U}{\rho_U}} \left(\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}} \right)_{y^n y^n} ((y', y^n) - (w', w^n)) F(x, (w', w^n)) dw^n > 0,$$

para todo $w' \in W$. Logo,

$$\left(\hat{F}_{\frac{2r_U}{\rho_U}} \right)_{y^n y^n} (x, y) > 0.$$

Portanto, $\left(\tilde{F}_\varepsilon \right)_{y^n y^n} (x, y) > 0$.

Agora, consideremos uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ para \mathbb{R}^n com $v_n = \xi$, e escreva $y = z^i v_i$. Como a suavização mollifier é invariante por mudança ortonormal de coordenadas, segue que

$$\left(\tilde{F}_\varepsilon \right)_{z^n z^n} (x, y) > 0.$$

Usando (2.17), concluímos que

$$\left(\tilde{F}_\varepsilon \right)_{y^i y^j} (x, y) \xi^i \xi^j > 0,$$

como queríamos.

(2) Consideremos $(x, y) \in A$. Então,

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_\varepsilon \left(x, y + t \frac{y}{\|y\|} \right) - \tilde{F}_\varepsilon(x, y) \\ &= \int \left[(1 - \varepsilon) \eta_\varepsilon(z) + \varepsilon \eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z) \right] \left[F \left(x, y - z + t \frac{y}{\|y\|} \right) - F(x, y - z) \right] dz \\ &= (1 - \varepsilon) \int_{B_{\|\cdot\|}[x, y, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(y - z) \left[F \left(x, z + t \frac{y}{\|y\|} \right) - F(x, z) \right] dz \\ &+ \varepsilon \int_{B_{\|\cdot\|}[x, 0, (2r_U)/\rho_U]} \eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z) \left[F \left(x, y - z + t \frac{y}{\|y\|} \right) - F(x, y - z) \right] dz \\ &\geq (1 - \varepsilon) \int_{B_{\|\cdot\|}[x, y, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(y - z) \frac{\rho_U}{8} t dz - \varepsilon \int_{B_{\|\cdot\|}[x, 0, (2r_U)/\rho_U]} \eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z) F \left(x, t \frac{y}{\|y\|} \right) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{(1-\varepsilon)\rho_U}{8}t - \varepsilon t \int_{B_{\|\cdot\|}[x,0,(2r_U)/\rho_U]} \frac{\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z)}{\rho_U} F\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) dz \\
&\geq \frac{(1-\varepsilon)\rho_U}{8}t - \varepsilon t r_U \\
&> \frac{15}{16} \frac{\rho_U}{8}t - \frac{\rho_U}{16r_U} t r_U \\
&= \frac{7}{128} \rho_U t,
\end{aligned}$$

para $t > 0$, onde na primeira desigualdade usamos o Lema 2.5 e na terceira desigualdade usamos (2.14). Assim, $\frac{7}{128}\rho_U$ é um limitante inferior para $\frac{y^i}{\|y\|}(\tilde{F}_\varepsilon)_{y^i}(x, y)$ e portanto a derivada radial de \tilde{F}_ε em relação à y em A é positiva.

(3) Consideremos $(x, y) \in A_{\frac{1}{2}}$. Então,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_\varepsilon(x, y) &= \int \left[(1-\varepsilon)\eta_\varepsilon(z) + \varepsilon\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z) \right] F(x, y-z) dz \\
&\leq \int \left[(1-\varepsilon)\eta_\varepsilon(z) + \varepsilon\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z) \right] [F(x, y) + F(x, z)] dz \\
&\leq \int_{B_{\|\cdot\|}[x,0,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(z) [F(x, y) + F(x, z)] dz \\
&\quad + \varepsilon \int_{B_{\|\cdot\|}[x,0,(2r_U)/\rho_U]} \frac{\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z)}{\rho_U} [F(x, y) + F(x, z)] dz \\
&\leq \frac{r_U}{2} + \frac{\rho_U}{16nr_U} r_U + \frac{\rho_U}{16nr_U} \frac{r_U}{2} + \frac{\rho_U}{16nr_U} \frac{2r_U}{\rho_U} r_U \\
&\leq \frac{r_U}{32} 23.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{A_{\frac{1}{2}}} \tilde{F}_\varepsilon(x, y) < r_U.$$

(4) Consideremos $(x, y) \in A_{\frac{2r_U}{\rho_U}}$. Então,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_\varepsilon(x, y) &= \int \left[(1-\varepsilon)\eta_\varepsilon(z) + \varepsilon\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z) \right] F(x, y-z) dz \\
&\geq \int (1-\varepsilon)\eta_\varepsilon(z) F(x, y-z) dz - \int \varepsilon\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z) F(x, y-z) dz \\
&\geq \int (1-\varepsilon)\eta_\varepsilon(z) F(x, y) dz - \int (1-\varepsilon)\eta_\varepsilon(z) F(x, z) dz \\
&\quad - \int \varepsilon\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z) F(x, y) dz - \int \varepsilon\eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(z) F(x, z) dz \\
&\geq (1-\varepsilon)2r_U - (1-\varepsilon)\frac{\rho_U}{16} - \frac{r_U}{8} - \frac{r_U}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 2\frac{15}{16}r_U - \frac{\rho_U}{16} - \frac{r_U}{8} - \frac{r_U}{8} \\
&\geq 2\frac{15}{16}r_U - \frac{r_U}{16} - \frac{r_U}{8} - \frac{r_U}{8} \\
&= \frac{25}{16}r_U.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\inf_{A \subset \frac{2r_U}{\rho_U}} \tilde{F}_\varepsilon(x, y) > r_U.$$

(5) Segue o mesmo raciocínio do item (3).

(6) A demonstração é semelhante a do item (4).

Agora dado $y \in \tilde{F}_\varepsilon^{-1}(r_U) \cap T_x U$, temos que $(x, y) \in F^{-1}([r_U/2, 2r_U]) \subset A$. Logo a derivada radial de $\tilde{F}_\varepsilon(x, \cdot)$ em y é positiva e, portanto, $\tilde{F}_\varepsilon^{-1}(r_U) \cap T_x U$ é uma hipersuperfície diferenciável em $A \subset T_x U$. Se considerarmos a projeção radial π de $T_x U$ sobre $S_{\|\cdot\|}[x, 0, 1]$, o Teorema da Função Inversa nos dá que π restrita a $\tilde{F}_\varepsilon^{-1}(r_U) \cap T_x U$ é um difeomorfismo. \square

A próxima proposição mostra que sendo F uma aplicação contínua, podemos concluir que \tilde{F}_ε converge uniformemente para F sobre conjuntos da forma $U \times V$, com V sendo um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Proposição 2.8. $\tilde{F}_\varepsilon \rightarrow F$ uniformemente sobre subconjuntos de TU da forma $W = U \times V$, com V sendo um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Demonstração. Dado $\delta > 0$, devemos encontrar $\beta > 0$ tal que se $\varepsilon \in (0, \beta)$, então

$$|\tilde{F}_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| < \delta, \forall (x, y) \in W.$$

Como V é compacto existe uma constante positiva N , tal que $V \subset B_{\|\cdot\|}[0, N]$. Sendo $\bar{U} \times B_{\|\cdot\|}[0, N + 1]$ compacto e F uma aplicação contínua, existe uma constante positiva $\beta_1 \leq \min\{1, (\delta\rho_U)/(16r_U^2)\}$ tal que se $(x_1, w_1), (x_2, w_2) \in \bar{U} \times B_{\|\cdot\|}[0, N + 1]$ e

$$\|(x_1, w_1) - (x_2, w_2)\| < \beta_1 \Rightarrow |F(x_1, w_1) - F(x_2, w_2)| < \frac{\delta}{2}.$$

Assim, dados $(x, y) \in W$ e $w \in B_{\|\cdot\|}[0, \varepsilon]$ com $\varepsilon \in (0, \beta_1)$, temos $y - w \in B_{\|\cdot\|}[0, N + 1]$ e $\|(x, y - w) - (x, y)\| = \|w\| \leq \varepsilon < \beta_1$. Logo, $|F(x, y - w) - F(x, y)| < \frac{\delta}{2}$.

Tomemos $\beta = \min\{\beta_1, \rho_U/(16nr_U)\}$. Dado $(x, y) \in W$ temos que

$$|\tilde{F}_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| = \left| (1 - \varepsilon)\hat{F}_\varepsilon(x, y) + \varepsilon\hat{F}_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(x, y) - F(x, y) - \varepsilon F(x, y) + \varepsilon F(x, y) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \varepsilon)|\hat{F}_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| + \varepsilon \left| \hat{F}_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(x, y) - F(x, y) \right| \\
&\leq (1 - \varepsilon) \int \eta_\varepsilon(w)|F(x, y - w) - F(x, y)|dw \\
&+ \varepsilon \int \eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(w)|F(x, y - w) - F(x, y)|dw \\
&\leq \frac{\delta}{2} \int \eta_\varepsilon(w)dw + \varepsilon \int \eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(w)F(x, w)dw \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \varepsilon \frac{2r_U}{\rho_U} r_U \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \delta \frac{\rho_U}{16r_U^2} \frac{2r_U}{\rho_U} r_U \\
&< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\
&= \delta,
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \beta)$.

Portanto, $\tilde{F}_\varepsilon \rightarrow F$ uniformemente sobre subconjuntos de TU da forma $W = U \times V$, com V sendo um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n . \square

Para cada $x \in U$, o Lema 2.7 garante que

$$S_\varepsilon(x, r_U) := \tilde{F}_\varepsilon^{-1}(r_U) \cap T_x U$$

é uma hipersuperfície diferenciável de $T_x U$, para todo $\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_U}{16nr_U}\right)$. Assim, para cada $\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_U}{16nr_U}\right)$ podemos considerar a aplicação

$$G_\varepsilon : TU \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.19}$$

que restrita a cada espaço tangente $T_x U$ é uma norma, cuja esfera de raio r_U é $S_\varepsilon(x, r_U)$.

Seja $(\theta^2, \dots, \theta^n) : S_\theta \rightarrow W_\theta$ um sistema de coordenadas local definido de um subconjunto aberto S_θ da esfera euclidiana $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y\| = 1\}$ em um subconjunto aberto W_θ de \mathbb{R}^{n-1} . Se r é a coordenada radial em \mathbb{R}^n , então $(r, \theta^2, \dots, \theta^n)$ é um sistema de coordenadas no cone $(0, \infty) \times S_\theta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$(x^1, \dots, x^n, r, \theta^2, \dots, \theta^n) : U \times (0, \infty) \times S_\theta \rightarrow \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \times W_\theta, \tag{2.20}$$

é um sistema de coordenadas local em TM .

Utilizaremos o sistema de coordenadas acima para explorar algumas propriedades da aplicação G_ε . Para isso consideraremos as coordenadas deste sistema nos espaços tangentes e aplicaremos o Teorema da Função Implícita à aplicação \tilde{F}_ε . Dado $(x_0, y_0) \in TU$ com $y_0 \in S_\varepsilon(x_0, r_U)$, podemos supor que $y_0 \in (0, \infty) \times W_\theta$. Sejam $(r_0, \theta_0^2, \dots, \theta_0^n)$ as coordenadas de y_0 no sistema de coordenadas definido em (2.20). Pelo item (2) do Lema 2.7 sabemos

que $\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon}{\partial r}(x_0, r_0, \theta_0^2, \dots, \theta_0^n) > 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma aplicação de classe C^∞

$$\phi_\varepsilon(x_0, \cdot) : W_\theta \longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{2r_U}{\rho_U} \right)$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon}{\partial r}(x_0, r, \theta^2, \dots, \theta^n) > 0, \forall (r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in (1/2, (2r_U)/\rho_U) \times W_\theta$;
- (ii) $\tilde{F}_\varepsilon(x_0, \phi_\varepsilon(x_0, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n) = r_U, \forall (\theta^2, \dots, \theta^n) \in W_\theta$;
- (iii) $\frac{\partial \phi_\varepsilon(x_0, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i} = -\frac{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x_0, \phi_\varepsilon(x_0, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}}{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x_0, \phi_\varepsilon(x_0, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}}, \forall (\theta^2, \dots, \theta^n) \in W_\theta$.

Assim, dado $(r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in (0, \infty) \times W_\theta$, temos que

$$G_\varepsilon(x_0, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = \frac{rr_U}{\phi_\varepsilon(x_0, \theta^2, \dots, \theta^n)}.$$

Variando x em U , podemos considerar a aplicação

$$\phi_\varepsilon : U \times W_\theta \longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{2r_U}{\rho_U} \right) \quad (2.21)$$

tal que $\tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n) = r_U, \forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$. Então, dado $(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times (0, \infty) \times W_\theta$, temos que

$$G_\varepsilon(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = \frac{rr_U}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}. \quad (2.22)$$

Apresentaremos propriedades da aplicação $G_\varepsilon : TU \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 2.9. *A aplicação G_ε definida em (2.19) satisfaz as seguintes propriedades para todo $\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_U}{16nr_U}\right)$:*

- (1) G_ε é contínua;
- (2) $G_\varepsilon(x, \cdot)$ é diferenciável em $T_x U \setminus \{0\}$;
- (3) $(G_\varepsilon)_{y^i}$ é contínua em $U \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- (4) $(G_\varepsilon)_{y^i y^j}$ é contínua em $U \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- (5) $\frac{\partial^{|\alpha|} G_\varepsilon}{\partial (y^1)^{\alpha_1} \dots \partial (y^n)^{\alpha_n}}$ é contínua em $U \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$;
- (6) Dado $(x, y) \in TU \setminus 0$, temos que

$$(G_\varepsilon)_{y^i y^j}(x, y) \xi^i \xi^j > 0, \forall \xi \in \ker(d(G_\varepsilon(x, \cdot))_y) \setminus \{0\};$$

(7) $G_\varepsilon \longrightarrow F$ uniformemente sobre subconjuntos de TU da forma $W = U \times V$, sendo V um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Demonstração. (1) Se provarmos que a aplicação ϕ_ε definida em (2.21) é contínua, segue que a aplicação G_ε é contínua, para todo $(x, y) \in TU$ com $y \neq 0$.

Dados $\delta > 0$ e $(\tilde{x}, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n) \in U \times W_\theta$, vamos encontrar uma vizinhança $Z \subset U \times W_\theta$ de $(\tilde{x}, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n)$ tal que

$$|\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n) - \phi_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n)| < \delta, \quad (2.23)$$

para todo $(x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in Z$. Seja $\tilde{r} = \phi_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n)$. Podemos supor que $\tilde{r} - \delta, \tilde{r} + \delta \in (1/2, (2r_U)/\rho_U)$, pois caso contrário, trabalhamos com $0 < \delta' < \delta$ tal que $\tilde{r} - \delta', \tilde{r} + \delta' \in (1/2, (2r_U)/\rho_U)$ e provamos que (2.23) vale para δ' em vez de δ .

Assim, devemos encontrar uma vizinhança Z de $(\tilde{x}, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n)$ tal que

$$\tilde{r} - \delta < \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n) < \tilde{r} + \delta,$$

para todo $(x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in Z$.

Sabemos que $\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon}{\partial r}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) > 0, \forall (x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times (1/2, (2r_U)/\rho_U) \times W_\theta$. Logo a aplicação

$$r \mapsto \tilde{F}_\varepsilon(\tilde{x}, r, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n), \quad r \in (1/2, (2r_U)/\rho_U)$$

é estritamente crescente. Como $\tilde{F}_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n) = r_U$, então

$$\tilde{F}_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{r} - \delta, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n) < r_U,$$

e sendo \tilde{F}_ε uma aplicação contínua, existem uma vizinhança $Z_1 \subset U$ de \tilde{x} e uma vizinhança $Z_2 \subset W_\theta$ de $(\tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n)$ tais que

$$\tilde{F}_\varepsilon(x, \tilde{r} - \delta, \theta^2, \dots, \theta^n) < r_U, \forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in Z_1 \times Z_2.$$

Mas a derivada radial de \tilde{F}_ε é estritamente positiva em A . Logo, dado $(x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in Z_1 \times Z_2$, fixo porém arbitrário, temos que

$$\tilde{r} - \delta < \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n),$$

pois $\tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n) = r_U$.

De forma análoga, encontra-se uma vizinhança $\tilde{Z}_1 \times \tilde{Z}_2 \subset U \times W_\theta$ de $(\tilde{x}, \tilde{\theta}^2, \dots, \tilde{\theta}^n)$ tal que

$$\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n) < \tilde{r} + \delta, \quad \forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in \tilde{Z}_1 \times \tilde{Z}_2.$$

Tomando $Z = (Z_1 \cap \tilde{Z}_1) \times (Z_2 \cap \tilde{Z}_2)$, segue o desejado.

Resta provar que G_ε é contínua nos pontos da forma $(x, 0)$ com $x \in U$. Tome $\tilde{x} \in U$. Dado $\delta > 0$, devemos encontrar $\beta > 0$ tal que se $(x, y) \in TU$,

$$\|(\tilde{x}, 0) - (x, y)\| < \beta \Rightarrow G_\varepsilon(x, y) < \delta.$$

Consideremos a aplicação contínua $f : \bar{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \|y\|$. Seja

$$\mu = \sup_{(x,y) \in \bar{U} \times S_{\|\cdot\|}[x,0,1]} \frac{G_\varepsilon(x, y)}{\|y\|} = \sup_{(x,y) \in \bar{U} \times S_{\|\cdot\|}[x,0,1]} G_\varepsilon(x, y).$$

Notemos que μ é finito, pois

$$\frac{G_\varepsilon(x, y)}{\|y\|} = \frac{G_\varepsilon(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n)}{r} = \frac{r_U}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)} \leq 2r_U$$

devido a (2.21) e (2.22).

Como as aplicações acima são homogêneas, segue que

$$\mu = \sup_{(x,y) \in \bar{U} \times T_x M \setminus \{0\}} \frac{G_\varepsilon(x, y)}{\|y\|}.$$

Assim,

$$G_\varepsilon(x, y) \leq \mu \|y\|, \forall (x, y) \in \bar{U} \times T_x M \setminus \{0\}.$$

Como esta desigualdade vale para o vetor nulo, segue que

$$G_\varepsilon(x, y) \leq \mu \|y\|, \forall (x, y) \in \bar{U} \times T_x M.$$

Agora, usando que f é contínua em $(\tilde{x}, 0)$ existe $\beta > 0$ tal que se $(x, y) \in TU$,

$$\|(\tilde{x}, 0) - (x, y)\| < \beta \Rightarrow f(x, y) = \|y\| < \frac{\delta}{\mu}.$$

Assim, se $(x, y) \in TU$ e $\|(\tilde{x}, 0) - (x, y)\| < \beta$, então

$$G_\varepsilon(x, y) \leq \mu \|y\| < \mu \frac{\delta}{\mu} = \delta,$$

o que prova que G_ε é contínua em $(\tilde{x}, 0)$ como queríamos.

Portanto, $G_\varepsilon : TU \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua.

(2) Segue do fato da aplicação $\phi_\varepsilon(x, \cdot)$ ser de classe C^∞ .

(3) Devemos provar que a aplicação $(G_\varepsilon)_{y^i}(x, y)$ é contínua em $U \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Para isso

usaremos a expressão de G_ε dada em (2.22), e verificaremos que $(G_\varepsilon)_r(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n)$ e $(G_\varepsilon)_{\theta^j}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n)$ são contínuas em $U \times (0, \infty) \times W_\theta$. Sabemos do item (1) que a aplicação $\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)$ é contínua, logo

$$(G_\varepsilon)_r(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = \frac{r_U}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}$$

é contínua em $U \times (0, \infty) \times W_\theta$.

Resta verificar que $(G_\varepsilon)_{\theta^j}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n)$ é contínua. Temos que

$$(G_\varepsilon)_{\theta^j}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = -\frac{rr_U}{(\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n))^2} \frac{\partial \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^j}.$$

O Teorema da Função Implícita garante que

$$\frac{\partial \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^j} = -\frac{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^j}}{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}},$$

para todo $(x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$. Como as aplicações $\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}$, $\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^j}$ e $\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)$ são contínuas, obtemos o desejado.

(4) Segue da fórmula de G_ε dada em (2.22) e do fato que as derivadas das expressões

$$\frac{\partial \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i} = -\frac{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}}{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}}$$

são escritas em funções das aplicações $\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}$, $\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}$ e $\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)$ e suas derivadas.

(5) Segue o mesmo raciocínio dos itens (3) e (4).

(6) Consideremos $(x, y) \in TU \setminus 0$. Suponhamos inicialmente que $y \in S_\varepsilon(x, r_U)$. Sabemos que as aplicações $\tilde{F}_\varepsilon(x, \cdot)$ e $G_\varepsilon(x, \cdot)$ possuem as mesmas hipersuperfícies de níveis no nível r_U , $G_\varepsilon(x, \cdot)$ é convexa e que $\text{Hess}_y \tilde{F}_\varepsilon(x, y)$ é positiva definida pelo Lema 2.7. Segue da Proposição 2.6 que

$$(G_\varepsilon)_{y^i y^j}(x, y) \xi^i \xi^j > 0, \quad \forall \xi \in \ker(d(G_\varepsilon(x, \cdot))_y) \setminus \{0\}.$$

O caso geral segue do fato da aplicação $G_\varepsilon(x, \cdot)$ ser absolutamente homogênea.

(7) Consideremos $\delta > 0$. Utilizaremos o sistema de coordenadas definido em (2.20) para provar o desejado. Seja $R > 0$ uma constante tal que $\|y\| \leq R, \forall y \in V$. Suponhamos inicialmente que $V \subset [0, \infty) \times W_\theta$. Como $\overline{S_\theta}$ é compacto, então $[1/2, (2r_U)/\rho_U] \times \overline{W_\theta}$

é compacto (diminuindo a vizinhança S_θ se necessário). Pela Proposição 2.8, existe $\beta_0 > 0$ tal que se $\varepsilon \in (0, \beta_0)$, então

$$|\tilde{F}_\varepsilon(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) - F(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n)| < \frac{\delta}{2R},$$

para todo $(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times [1/2, (2r_U)/\rho_U] \times \overline{W_\theta}$. Dado $(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times V$, usando a desigualdade acima e o fato de $\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in (1/2, (2r_U)/\rho_U)$, obtemos que

$$\begin{aligned} & |G_\varepsilon(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) - F(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n)| \\ = & \left| G_\varepsilon \left(x, r \frac{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}, \theta^2, \dots, \theta^n \right) - F \left(x, r \frac{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}, \theta^2, \dots, \theta^n \right) \right| \\ = & r \frac{|G_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n) - F(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)|}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)} \\ = & r \frac{|\tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n) - F(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)|}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)} \\ < & \frac{r}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)} \frac{\delta}{2R} \\ < & \delta, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \beta_0)$. Logo, $G_\varepsilon \rightarrow F$ uniformemente sobre $U \times V$.

Agora seja V um subconjunto compacto qualquer. Como S^{n-1} é compacto, existe uma cobertura aberta $\{S_{\theta_1}, \dots, S_{\theta_k}\}$ de S^{n-1} e abertos $W_{\theta_1}, \dots, W_{\theta_k}$ de \mathbb{R}^{n-1} tais que

$$(\theta_i^2, \dots, \theta_i^n) : S_{\theta_i} \rightarrow W_{\theta_i}$$

é um sistema de coordenadas que completa a coordenada radial, para $i = 1, \dots, k$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, a Proposição 2.8 garante que existe $\beta_i > 0$ tal que se $\varepsilon \in (0, \beta_i)$, então

$$|\tilde{F}_\varepsilon(x, r, \theta_i^2, \dots, \theta_i^n) - F(x, r, \theta_i^2, \dots, \theta_i^n)| < \frac{\delta}{2R},$$

para todo $(x, r, \theta_i^2, \dots, \theta_i^n) \in U \times [1/2, (2r_U)/\rho_U] \times \overline{W_{\theta_i}}$. Tomando $\beta = \min\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ e fazendo contas como acima segue que

$$|G_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| < \delta,$$

para todo $(x, y) \in U \times V$ e para todo $\varepsilon \in (0, \beta)$, o que completa a prova do resultado. \square

2.4 A Suavização $F_\varepsilon : TM \longrightarrow [0, \infty)$

Sabemos que a aplicação $G_\varepsilon : TU \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua para cada $\varepsilon \in (0, \rho_U/(16nr_U))$. Podemos então construir sua suavização horizontal e utilizando uma partição da unidade em M definir a aplicação $F_\varepsilon : TM \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sejam $\{(U_\lambda, X_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma estrutura diferenciável em M , localmente finita, tal que U_λ é definido como em (2.12) e $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, denotemos $V_\lambda = \text{int}(\text{supp}(\varphi_\lambda))$ e $\nu_\lambda = \text{dist}_{\mathbb{R}^n}(\partial V_\lambda, \partial U_\lambda)$.

Fixemos $\lambda \in \Lambda$. Sejam r_{U_λ} e ρ_{U_λ} constantes definidas como em (2.14) e (2.15), respectivamente. Seja $\delta_\lambda = \min\{\rho_{U_\lambda}/(16nr_{U_\lambda}), \nu_\lambda\}$. Para cada $\varepsilon \in (0, \delta_\lambda)$ consideramos a aplicação

$$G_{\varepsilon, \lambda} : TU_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida como em (2.19).

A Proposição 2.9 assegura que a aplicação acima é contínua. Assim podemos definir a aplicação

$$\check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) = \int \eta_\varepsilon(x - z) G_{\varepsilon, \lambda}(z, y) dz, \forall (x, y) \in TV_\lambda,$$

que é construída a partir da suavização mollifier da aplicação $G_{\varepsilon, \lambda}(\cdot, y)$.

Como a aplicação $\psi_\lambda : (0, 1) \longrightarrow (0, \delta_\lambda)$ definida por $\psi_\lambda(\varepsilon) = \varepsilon \delta_\lambda$ é uma homotetia, podemos sem perda de generalidade supor que $\varepsilon \in (0, 1)$ e

$$\check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) G_{\psi_\lambda(\varepsilon), \lambda}(z, y) dz, \forall (x, y) \in TV_\lambda. \quad (2.24)$$

Assim, para cada $\varepsilon \in (0, 1)$, podemos definir a aplicação $F_\varepsilon : TM \longrightarrow [0, \infty)$ dada por

$$F_\varepsilon(x, y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) \check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y). \quad (2.25)$$

Vamos verificar que a aplicação definida em (2.25) é uma estrutura de Finsler em M e que converge pontualmente para a aplicação $F : TM \longrightarrow [0, \infty)$.

Lema 2.10. *A aplicação definida em (2.24) satisfaz as seguintes propriedades:*

- (1) $\check{F}_{\varepsilon, \lambda}$ é de classe C^∞ em $\overline{TV_\lambda} \setminus 0$;
- (2) $\check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, \cdot)$ é absolutamente homogênea, para todo $x \in V_\lambda$;
- (3) $\text{Hess}_y \frac{1}{2} \check{F}_{\varepsilon, \lambda}^2(x, y)$ é positiva definida para todo $(x, y) \in TV_\lambda \setminus 0$;

(4) $\check{F}_{\varepsilon,\lambda} \rightarrow F$ pontualmente.

Demonstração. (1) Segue do item (5) da Proposição 2.9 e do fato da aplicação η_δ ser de classe C^∞ para todo $\delta > 0$.

(2) Segue do fato da aplicação $G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(x, \cdot)$ ser uma norma.

(3) Consideremos $(x, y) \in TV_\lambda \setminus 0$. Como

$$\check{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(z, y) dz,$$

segue da Observação 1.6 que

$$(\check{F}_{\varepsilon,\lambda})_{y^i}(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i}(z, y) dz$$

e

$$(\check{F}_{\varepsilon,\lambda})_{y^i y^j}(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i y^j}(z, y) dz.$$

Assim, dado $\xi \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\check{F}_{\varepsilon,\lambda}^2)_{y^i y^j}(x, y) \xi^i \xi^j &= \check{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) (\check{F}_{\varepsilon,\lambda})_{y^i y^j}(x, y) \xi^i \xi^j + (\check{F}_{\varepsilon,\lambda})_{y^i}(x, y) \xi^i (\check{F}_{\varepsilon,\lambda})_{y^j}(x, y) \xi^j \\ &= \check{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i y^j}(z, y) \xi^i \xi^j dz \\ &\quad + \left(\int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i}(z, y) \xi^i dz \right)^2. \end{aligned}$$

Vamos analisar dois casos para concluir que $\text{Hess}_y \frac{1}{2} \check{F}_{\varepsilon,\lambda}^2(x, y)$ é positiva definida.

1º) $\xi \in \text{span}\{y\}$: Então, existe $\mu \neq 0$, tal que $\xi = \mu y$. Pelo Corolário 1.16, temos que

$$\begin{aligned} &\left(\int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i}(z, y) \xi^i dz \right)^2 \\ &= \left(\int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i}(z, y) \mu y^i dz \right)^2 \\ &= \mu^2 \left(\int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i}(z, y) y^i dz \right)^2 \\ &= \mu^2 \left(\int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(z, y) dz \right)^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Como $G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(z, \cdot)$ é uma norma, para todo $z \in U_\lambda$, segue do Teorema 1.9 que $(G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(z, y))_{y^i y^j}(z, y) \xi^i \xi^j \geq 0$, $\forall z \in U_\lambda$, então $\frac{1}{2}(\check{F}_{\varepsilon,\lambda}^2)_{y^i y^j}(x, y) \xi^i \xi^j > 0$.

2º) $\xi \notin \text{span}\{y\}$: Então, existem $\mu \in \mathbb{R}$ e $w \in \ker(d(G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(x, \cdot))_y) \setminus \{0\}$ tais que $\xi = \mu y + w$. Pelo item (ii) do Corolário 1.16, temos que

$$\int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x-z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i y^j}(z, y) \xi^i \xi^j dz = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x-z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i y^j}(z, y) w^i w^j dz.$$

O item (6) da Proposição 2.9 garante que $(G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i y^j}(x, y) w^i w^j$ é positivo. Então, pelo item (4) da mesma Proposição, existe uma vizinhança de x tal que $(G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i y^j}(z, y) w^i w^j > 0$, para todo z nessa vizinhança. Como $G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(z, \cdot)$ é convexa, para todo $z \in U_\lambda$, o Teorema 1.9 assegura que para todo $z \in U_\lambda$, $(G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i y^j}(z, y) \xi^i \xi^j \geq 0$. Assim,

$$\int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x-z) (G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda})_{y^i y^j}(z, y) w^i w^j dz > 0.$$

Logo, $\frac{1}{2}(\check{F}_{\varepsilon,\lambda}^2)_{y^i y^j}(x, y) \xi^i \xi^j > 0$.

Portanto, $\text{Hess}_y \frac{1}{2} \check{F}_{\varepsilon,\lambda}^2(x, y)$ é positiva definida para todo $(x, y) \in TV_\lambda \setminus 0$.

(4) Consideremos $(x, y) \in TV_\lambda$. Se $y = 0$, então $G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(x, y) = 0, \forall \varepsilon$ e $F(x, y) = 0$. Logo $\check{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) \rightarrow F(x, y)$ pontualmente. Suponhamos agora que $y \neq 0$. Dado $\delta > 0$, devemos encontrar $\beta > 0$ tal que se $\varepsilon \in (0, \beta)$, então

$$|\check{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) - F(x, y)| < \delta.$$

Seja $\tilde{\check{F}}_\varepsilon(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x-z) F(z, y) dz$. Pelo item (ii) do Teorema 1.5, temos que $\tilde{\check{F}}_\varepsilon(x, y) \rightarrow F(x, y)$ pontualmente. Assim, existe $\beta_1 > 0$ tal que se $\varepsilon \in (0, \beta_1)$, então

$$|\tilde{\check{F}}_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| < \frac{\delta}{2}. \quad (2.26)$$

Agora, pelo item (7) da Proposição 2.9 existe $\beta_2 > 0$ tal que se $\varepsilon \in (0, \beta_2)$, então

$$|G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(z, y) - F(z, y)| < \frac{\delta}{2}, \quad \forall z \in V_\lambda. \quad (2.27)$$

Tomemos $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$. Dado $\varepsilon \in (0, \beta)$, usando (2.26) e (2.27), obtemos que

$$\begin{aligned} & |\check{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) - F(x, y)| \\ &= |\check{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) - \tilde{\check{F}}_\varepsilon(x, y) + \tilde{\check{F}}_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| \\ &\leq |\check{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) - \tilde{\check{F}}_\varepsilon(x, y)| + |\tilde{\check{F}}_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| \\ &= \left| \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x-z) [G_{\psi_\lambda(\varepsilon),\lambda}(z, y) - F(z, y)] dz \right| + |\tilde{\check{F}}_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x-z) |G_{\psi_\lambda(\varepsilon), \lambda}(z, y) - F(z, y)| dz + |\tilde{F}_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| \\
&< \frac{\delta}{2} \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x-z) dz + \frac{\delta}{2} \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) \rightarrow F(x, y)$ pontualmente.

□

Teorema 2.11. *A aplicação $F_\varepsilon : TM \rightarrow [0, \infty)$ definida em (2.25) satisfaz as seguintes propriedades, para todo $\varepsilon \in (0, 1)$:*

- (1) F_ε é de classe C^∞ em $TM \setminus 0$;
- (2) $F_\varepsilon(x, \cdot)$ é absolutamente homogênea, para todo $x \in M$;
- (3) $\text{Hess}_y \frac{1}{2} F_\varepsilon^2(x, y)$ é positiva definida para todo $(x, y) \in TM \setminus 0$;
- (4) $F_\varepsilon \rightarrow F$ pontualmente.

Demonstração.

- (1) Basta notar que as aplicações $\varphi_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{F}_{\varepsilon, \lambda} : \overline{TV}_\lambda \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ para todo $\lambda \in \Lambda$ e para todo $\varepsilon \in (0, 1)$.
- (2) Segue do item (2) do Lema 2.10.
- (3) Consideremos $(x, y) \in TM \setminus 0$ e seja $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) : \tilde{U} \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas em torno de x . Existe uma quantidade finita de índices $\lambda \in \Lambda$ tais que $\varphi_\lambda(x) \neq 0$, digamos $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Assim, dado $\xi \neq 0$, temos que

$$\frac{1}{2} (F_\varepsilon^2)_{\tilde{y}^i \tilde{y}^j}(x, y) \xi^i \xi^j = \sum_{l=1}^k \varphi_{\lambda_l}(x) \frac{1}{2} (\tilde{F}_{\varepsilon, \lambda_l}^2)_{\tilde{y}^i \tilde{y}^j}(x, y) \xi^i \xi^j.$$

Pelo item (3) do Lema 2.10 e pelo item (1) da Observação 1.11, temos que

$$(\tilde{F}_{\varepsilon, \lambda_l}^2)_{\tilde{y}^i \tilde{y}^j}(x, y) \xi^i \xi^j > 0, \forall l \in \{1, \dots, k\}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} (F_\varepsilon^2)_{\tilde{y}^i \tilde{y}^j}(x, y) \xi^i \xi^j > 0,$$

já que $\varphi_{\lambda_1}(x), \dots, \varphi_{\lambda_k}(x) \in (0, 1]$.

Portanto, $\text{Hess}_y \frac{1}{2} F_\varepsilon^2(x, y)$ é positiva definida para todo $(x, y) \in TM \setminus 0$.

- (4) Tomemos $(x, y) \in TM$. Seja $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) : \tilde{U} \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas em torno de x . Suponhamos que F e F_ε , para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, estão sendo consideradas

no sistema de coordenadas

$$(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n) : T\tilde{U} \subset M \longrightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^n.$$

Então

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(x, y) - F(x, y)| &= \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) \check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) - \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) F(x, y) \right| \\ &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) |\check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) - F(x, y)|. \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.10 segue o desejado. \square

Este Teorema garante que F_ε é uma estrutura de Finsler, para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ e que $F_\varepsilon \longrightarrow F$ pontualmente.

2.5 Suavização em Estruturas de Finsler Absolutamente Homogêneas

Nesta seção suporemos que a aplicação $F : TM \longrightarrow [0, \infty)$ da seção anterior é uma estrutura de Finsler absolutamente homogênea, consideraremos a sua suavização F_ε construída em (2.25) e verificaremos que objetos, como conexão de Chern e curvatura flag, de F_ε convergem pontualmente para os objetos correspondentes de F .

Agora que nossa aplicação F é diferenciável, podemos explorar mais propriedades da aplicação \tilde{F}_ε . O próximo resultado complementa o Lema 2.7 quando F é diferenciável.

Lema 2.12. $\tilde{F}_\varepsilon : TU \longrightarrow \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades para todo $\varepsilon \in \left(0, \frac{\rho_U}{16nr_U}\right)$:

- (1) \tilde{F}_ε é de classe C^∞ em $TU \setminus 0$;
- (2) $(\tilde{F}_\varepsilon)^{-1}(r_U)$ é uma hipersuperfície de TU , onde r_U é definido em (2.14);
- (3) Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n})$ um multi-índice. Então

$$D^\alpha \tilde{F}_\varepsilon \longrightarrow D^\alpha F$$

uniformemente sobre subconjuntos de $TU \setminus 0$ da forma $W = U \times V$, com V sendo um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Demonstração. (1) Dado $(x, y) \in TU \setminus 0$, temos que

$$\tilde{F}_\varepsilon(x, y) = \int \zeta_\varepsilon(y - z) F(x, z) dz.$$

Como as aplicações $\zeta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : TU \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ , segue que \tilde{F}_ε é de classe C^∞ .

(2) Segue do Lema 2.7.

(3) Dado $(x, y) \in TU \setminus 0$, temos que

$$\begin{aligned} D^\alpha \tilde{F}_\varepsilon(x, y) &= \int \zeta_\varepsilon(z) D^\alpha F(x, y - z) dz \\ &= \int \zeta_\varepsilon(z) \frac{\partial^{|\alpha|} F(x, y - z)}{\partial(x^1)^{\alpha_1} \dots \partial(x^n)^{\alpha_n} \partial(y^1)^{\alpha_{n+1}} \dots \partial(y^n)^{\alpha_{2n}}} dz \end{aligned}$$

e

$$D^\alpha F(x, y) = \frac{\partial^{|\alpha|} F(x, y)}{\partial(x^1)^{\alpha_1} \dots \partial(x^n)^{\alpha_n} \partial(y^1)^{\alpha_{n+1}} \dots \partial(y^n)^{\alpha_{2n}}}.$$

Como F é de classe C^∞ em $TU \setminus 0$, então $D^\alpha F(x, y)$ é contínua em $TU \setminus 0$. Usando isto e fazendo cálculos com um raciocínio semelhante ao da Proposição 2.8, segue o desejado. □

Utilizaremos o sistema de coordenadas definido em (2.20) para explorar mais propriedades da aplicação G_ε . Como na Seção 2.3, aplicaremos o Teorema da Função Implícita à aplicação \tilde{F}_ε . Vale observar que sendo \tilde{F}_ε diferenciável, a aplicação ϕ_ε que obteremos também será diferenciável.

Dado $(x_0, y_0) \in TU$, com $y_0 \in S_\varepsilon(x_0, r_U)$, podemos supor que $y_0 \in (0, \infty) \times W_\theta$, pois se necessário aplicamos uma mudança de coordenadas conveniente. Sejam $(r_0, \theta_0^2, \dots, \theta_0^n)$ as coordenadas de y_0 no sistema de coordenadas definido em (2.20). Pelo Lema 2.12, sabemos que $\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon}{\partial r}(x_0, y_0) > 0$ e pelo Teorema da Função Implícita, existe uma aplicação diferenciável

$$\phi_\varepsilon : U \times W_\theta \longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{2r_U}{\rho_U} \right) \quad (2.28)$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon}{\partial r}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) > 0, \forall (x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times (1/2, (2r_U)/\rho_U) \times W_\theta$;
- (ii) $\tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n) = r_U, \forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$;
- (iii) $\frac{\partial \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial x^i} = - \frac{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial x^i}}{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}}, \forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$;
- (iv) $\frac{\partial \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i} = - \frac{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}}{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}}, \forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$.

Então, dado $(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times (0, \infty) \times W_\theta$, temos que

$$G_\varepsilon(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = \frac{rr_U}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}. \quad (2.29)$$

Aplicando o mesmo processo para a aplicação F , obtemos pelo Teorema da Função Implícita uma aplicação diferenciável

$$\phi : U \times W_\theta \longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{2r_U}{\rho_U} \right)$$

com as seguintes propriedades:

- (i) $\frac{\partial F}{\partial r}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) > 0$, $\forall (x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times (1/2, (2r_U)/\rho_U) \times W_\theta$;
- (ii) $F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n) = r_U$, $\forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$;
- (iii) $\frac{\partial \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial x^i} = -\frac{\frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial x^i}}{\frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}}$, $\forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$;
- (iv) $\frac{\partial \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i} = -\frac{\frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}}{\frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}}$, $\forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$.

Daí, dado $(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times (0, \infty) \times W_\theta$, temos que

$$F(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = \frac{rr_U}{\phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}. \quad (2.30)$$

Lema 2.13. *A aplicação ϕ_ε definida em (2.28) tem as seguintes propriedades:*

- (1) $\frac{1}{\phi_\varepsilon} \longrightarrow \frac{1}{\phi}$ uniformemente sobre $U \times W_\theta$;
- (2) $\phi_\varepsilon \longrightarrow \phi$ uniformemente sobre $U \times W_\theta$;
- (3) $\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \theta^i} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \theta^i}$ uniformemente sobre $U \times W_\theta$;
- (4) $\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x^i} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ uniformemente sobre $U \times W_\theta$;
- (5) *Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n})$ um multi-índice. Então*

$$D^\alpha \phi_\varepsilon = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi_\varepsilon}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \dots \partial (x^n)^{\alpha_n} \partial (\theta^2)^{\alpha_{n+2}} \dots \partial (\theta^n)^{\alpha_{2n}}}$$

converge uniformemente para

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \dots \partial (x^n)^{\alpha_n} \partial (\theta^2)^{\alpha_{n+2}} \dots \partial (\theta^n)^{\alpha_{2n}}}$$

sobre $U \times W_\theta$.

Demonstração. (1) Fixemos $r_0 > 0$. Sabemos pelo item (7) da Proposição 2.9 que $G_\varepsilon \rightarrow F$ uniformemente sobre $U \times \{r_0\} \times \overline{W_\theta}$ (diminuindo S_θ se necessário). Usando as expressões em (2.29) e (2.30) segue o desejado.

(2) Como $\frac{1}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)} \in (\rho_U/(2r_U), 2)$ para todo $(x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$, usando o item (1) segue que $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$ uniformemente sobre $U \times W_\theta$.

(3) Dado $(x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$, temos que

$$\frac{\partial \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i} = - \frac{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}}{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}}$$

e

$$\frac{\partial \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i} = - \frac{\frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}}{\frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}}.$$

Combinando o item (3) do Lema 2.12 com o item (2) segue que

$$\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i} \rightarrow \frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}$$

e

$$\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}$$

uniformemente sobre $U \times W_\theta$.

Como $\frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r} > 0, \forall (x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in \overline{U} \times \overline{W_\theta}$ e $\overline{U} \times \overline{W_\theta}$ é compacto, existem constantes positivas δ e a tais que se $\varepsilon \in (0, \delta)$, então

$$\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r} > a,$$

para todo $(x, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times W_\theta$. Logo,

$$\frac{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}}{\frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}} \rightarrow \frac{\frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}}{\frac{\partial F(x, \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}}$$

uniformemente sobre $U \times W_\theta$, o que prova o desejado.

(4) Segue o mesmo raciocínio do item anterior trocando θ^i por x^i .

(5) Observemos que

$$D^\alpha \phi_\varepsilon = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi_\varepsilon}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \dots \partial (x^n)^{\alpha_n} \partial (\theta^2)^{\alpha_{n+2}} \dots \partial (\theta^n)^{\alpha_{2n}}}$$

é formado pela soma e produto das aplicações

$$\begin{aligned} & \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \\ & \frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}, \\ & \frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial x^i}, \\ & \frac{\partial \tilde{F}_\varepsilon(x, \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n), \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial r}, \end{aligned}$$

e suas derivadas: no caso de ϕ_ε , por suas derivadas de ordem inferior. Usando o mesmo raciocínio do item (3) prova-se que

$$D^\alpha \phi_\varepsilon \longrightarrow D^\alpha \phi$$

uniformemente sobre $U \times W_\theta$.

□

Teorema 2.14. *Considere $R > 0$ fixo. A aplicação G_ε definida em (2.29) tem as seguintes propriedades:*

- (1) $(G_\varepsilon)_r \longrightarrow F_r$ uniformemente sobre $U \times (0, R) \times W_\theta$;
- (2) $(G_\varepsilon)_{\theta^i} \longrightarrow F_{\theta^i}$ uniformemente sobre $U \times (0, R) \times W_\theta$;
- (3) $(G_\varepsilon)_{x^i} \longrightarrow F_{x^i}$ uniformemente sobre $U \times (0, R) \times W_\theta$;
- (4) Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n})$ um multi-índice. Então

$$D^\alpha G_\varepsilon \longrightarrow D^\alpha F$$

uniformemente sobre $U \times (0, R) \times W_\theta$.

Demonstração. (1) Dado $(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times (0, R) \times W_\theta$, temos

$$(G_\varepsilon)_r(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = \frac{rU}{\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}$$

e

$$F_r(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = \frac{rU}{\phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}.$$

Segue do item (1) do Lema 2.13 o desejado.

(2) Dado $(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \in U \times (0, R) \times W_\theta$, temos que

$$(G_\varepsilon)_{\theta^i}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = -\frac{rrU}{[\phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)]^2} \frac{\partial \phi_\varepsilon(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}$$

e

$$F_{\theta^i}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) = -\frac{rr_U}{[\phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n)]^2} \frac{\partial \phi(x, \theta^2, \dots, \theta^n)}{\partial \theta^i}.$$

Combinando os itens (1) e (3) do Lema 2.13 juntamente com o fato de $r \in (0, R)$, obtemos que

$$(G_\varepsilon)_{\theta^i}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n) \longrightarrow F_{\theta^i}(x, r, \theta^2, \dots, \theta^n)$$

uniformemente sobre $U \times (0, R) \times W_\theta$.

(3) Segue o mesmo raciocínio do item anterior trocando θ^i por x^i .

(4) Segue o mesmo raciocínio do item (2), usando os itens (1), (2) e (5) do Lema 2.13 juntamente com o fato de $r \in (0, R)$.

□

Corolário 2.15. *A aplicação $G_\varepsilon : TU \longrightarrow \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:*

(1) G_ε é de classe C^∞ em $TU \setminus 0$;

(2) Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n})$ um multi-índice. Então

$$D^\alpha G_\varepsilon = \frac{\partial^{|\alpha|} G_\varepsilon}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \dots \partial (x^n)^{\alpha_n} \partial (y^1)^{\alpha_{n+1}} \dots \partial (y^n)^{\alpha_{2n}}}$$

converge uniformemente para

$$D^\alpha F = \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \dots \partial (x^n)^{\alpha_n} \partial (y^1)^{\alpha_{n+1}} \dots \partial (y^n)^{\alpha_{2n}}}$$

sobre subconjuntos de $TU \setminus 0$ da forma $U \times V$, sendo V um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Proposição 2.16. *Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ um multi-índice e $\check{F}_{\varepsilon, \lambda} : TV_\lambda \longrightarrow [0, \infty)$ a aplicação definida em (2.24). Então,*

$$D^\alpha \check{F}_{\varepsilon, \lambda} \longrightarrow D^\alpha F$$

pontualmente sobre $TV_\lambda \setminus 0$.

Demonstração. Consideremos $(x, y) \in TV_\lambda \setminus 0$. Como

$$\check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(z) G_{\psi_\lambda(\varepsilon), \lambda}(x - z, y) dz,$$

então

$$D^\alpha \check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(z) D^\alpha G_{\psi_\lambda(\varepsilon), \lambda}(x - z, y) dz.$$

Se utilizarmos a aplicação

$$\tilde{F}_\varepsilon(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(z) D^\alpha F(x - z, y) dz$$

juntamente com o Corolário 2.15 e a ideia da demonstração do item (4) do Lema 2.10, segue a convergência desejada. \square

Observação 2.17. *O resultado anterior garante que $D^\alpha \check{F}_{\varepsilon, \lambda} \longrightarrow D^\alpha F$ pontualmente sobre $TV_\lambda \setminus 0$, no sistema de coordenadas $(X_\lambda, Y_\lambda) = (x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n, y_\lambda^1, \dots, y_\lambda^n) : TV_\lambda \longrightarrow V_\lambda \times \mathbb{R}^n$.*

Consideremos um ponto $(x, y) \in TV_\lambda \setminus 0$ e seja $\tilde{X} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) : \tilde{U} \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um outro sistema de coordenadas em torno de x . Como

$$\left(\check{F}_{\varepsilon, \lambda} \circ (\tilde{X}^{-1}, \tilde{Y}^{-1}) \right) (x, y) = \left(\check{F}_{\varepsilon, \lambda} \circ (X_\lambda^{-1}, Y_\lambda^{-1}) \circ (X_\lambda, Y_\lambda) \circ (\tilde{X}^{-1}, \tilde{Y}^{-1}) \right) (x, y)$$

e

$$\left(F \circ (\tilde{X}^{-1}, \tilde{Y}^{-1}) \right) (x, y) = \left(F \circ (X_\lambda^{-1}, Y_\lambda^{-1}) \circ (X_\lambda, Y_\lambda) \circ (\tilde{X}^{-1}, \tilde{Y}^{-1}) \right) (x, y),$$

podemos utilizar a regra da cadeia para concluir que

$$D^\alpha \check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) \longrightarrow D^\alpha F(x, y)$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$ no sistema de coordenadas

$$(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n) : T\tilde{U} \longrightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^n.$$

Isto mostra que a convergência acima independe do sistema de coordenadas.

Vamos recorrer agora à regra geral de Leibniz para derivadas para provarmos que $D^\alpha F_\varepsilon \longrightarrow D^\alpha F$ pontualmente sobre $TM \setminus 0$. Se f e g são aplicações diferenciáveis definidas em um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n a valores reais e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multi-índice, então

$$D^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha - \beta} g, \quad (2.31)$$

onde $\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!}$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ e $\beta \leq \alpha$ significa que $\beta_i \leq \alpha_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. A igualdade em (2.31) é conhecida como regra geral de Leibniz, ela é útil para estudarmos derivadas parciais de ordem superior, pois simplifica a notação.

Teorema 2.18. *Seja $F_\varepsilon : TM \rightarrow [0, \infty)$ a aplicação definida em (2.25). Então,*

$$D^\alpha F_\varepsilon \rightarrow D^\alpha F$$

pontualmente sobre $TM \setminus 0$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ é um multi-índice.

Demonstração. Consideremos $(x, y) \in TM \setminus 0$. Seja $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) : \tilde{U} \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas em torno de x . Suponhamos que F e F_ε , para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, estão sendo consideradas no sistema de coordenadas

$$(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n) : T\tilde{U} \rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^n.$$

Pela regra geral de Leibniz, temos que

$$\begin{aligned} D^\alpha F_\varepsilon(x, y) &= D^\alpha \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) \check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} D^\alpha (\varphi_\lambda(x) \check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y)) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\beta \leq \alpha} D^\beta \varphi_\lambda(x) D^{\alpha - \beta} \check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y). \end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.16 e a Observação 2.17, segue que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\beta \leq \alpha} D^\beta \varphi_\lambda(x) D^{\alpha - \beta} \check{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) \rightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\beta \leq \alpha} D^\beta \varphi_\lambda(x) D^{\alpha - \beta} F(x, y),$$

quando ε tende a 0.

Notemos que se $0 \neq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{2n}) \leq \alpha$, então $\sum_{\lambda \in \Lambda} D^\beta \varphi_\lambda(x) = 0$, pois $\varphi_\lambda(x)$ não depende de y e

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial \varphi_\lambda(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} (1) = 0,$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Obtemos disto que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\beta \leq \alpha} D^\beta \varphi_\lambda(x) D^{\alpha - \beta} F(x, y) = \sum_{\beta \leq \alpha} \left(D^{\alpha - \beta} F(x, y) \sum_{\lambda \in \Lambda} D^\beta \varphi_\lambda(x) \right) = D^\alpha F(x, y).$$

Portanto, $D^\alpha F_\varepsilon \rightarrow D^\alpha F$ pontualmente sobre $TM \setminus 0$. □

Verificaremos agora que a conexão de Chern e as curvaturas flag das estruturas de Finsler F_ε convergem pontualmente para os objetos correspondentes da estrutura de Finsler F . O primeiro objeto que verificaremos a convergência será a conexão de Chern. Para isso precisaremos trabalhar com a seção distinguida, com os tensores fundamental e de

Cartan, com os símbolos formais de Christoffel de segunda espécie e com a conexão não linear.

Seja ℓ_ε a seção distinguida associada à estrutura de Finsler F_ε . Pela Definição 1.18, temos que

$$\ell_\varepsilon = (\ell_\varepsilon)_{(x,y)} = \frac{y^i}{F_\varepsilon(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = \frac{y^i}{F_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x^i} = (\ell_\varepsilon)^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \forall (x,y) \in TM \setminus 0.$$

Pelo item (4) do Teorema 2.11, segue que

$$\ell_\varepsilon \longrightarrow \ell$$

pontualmente.

Sejam

$$(g_\varepsilon)_{ij} = (g_\varepsilon)_{ij(x,y)} = \left(\frac{1}{2} F_\varepsilon^2(x,y) \right)_{y^i y^j} = \left(\frac{1}{2} F_\varepsilon^2 \right)_{y^i y^j}, \forall (x,y) \in TM \setminus 0,$$

e

$$(A_\varepsilon)_{ijk} = (A_\varepsilon)_{ijk(x,y)} = F_\varepsilon(x,y) (C_\varepsilon)_{ijk(x,y)} = F_\varepsilon (C_\varepsilon)_{ijk}, \forall (x,y) \in TM \setminus 0,$$

onde $(C_\varepsilon)_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial (g_\varepsilon)_{ij}}{\partial y^k}$.

O tensor fundamental associado à estrutura de Finsler F_ε é a correspondência

$$(x,y) \in TM \setminus 0 \mapsto (g_\varepsilon)_{(x,y)} = (g_\varepsilon)_{ij(x,y)} dx^i \otimes dx^j \in \pi^* T^* M \otimes \pi^* T^* M$$

e o tensor de Cartan associado à estrutura de Finsler F_ε é a correspondência

$$(x,y) \in TM \setminus 0 \mapsto (A_\varepsilon)_{(x,y)} = (A_\varepsilon)_{ijk(x,y)} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \in \otimes^3 \pi^* T^* M.$$

Dado $(x,y) \in TM \setminus 0$, o Teorema 2.18 assegura que

$$(g_\varepsilon)_{(x,y)} \longrightarrow g_{(x,y)} \tag{2.32}$$

e

$$(A_\varepsilon)_{(x,y)} \longrightarrow A_{(x,y)} \tag{2.33}$$

pontualmente.

Usando o conceito de cofatores podemos escrever os coeficientes g^{ij} e $(g_\varepsilon)^{ij}$ na forma

$$g^{ij} = \frac{\text{polinômio}(g_{11}, \dots, g_{1n}, \dots, g_{n1}, \dots, g_{nn})}{\text{polinômio}(g_{11}, \dots, g_{1n}, \dots, g_{n1}, \dots, g_{nn})}$$

e

$$(g_\varepsilon)^{ij} = \frac{\text{polinômio}((g_\varepsilon)_{11}, \dots, (g_\varepsilon)_{1n}, \dots, (g_\varepsilon)_{n1}, \dots, (g_\varepsilon)_{nn})}{\text{polinômio}((g_\varepsilon)_{11}, \dots, (g_\varepsilon)_{1n}, \dots, (g_\varepsilon)_{n1}, \dots, (g_\varepsilon)_{nn})}.$$

Então, pelo Teorema 2.18, segue que

$$(g_\varepsilon)^{ij} \longrightarrow g^{ij} \quad (2.34)$$

pontualmente. Essa convergência será importante para verificarmos que os símbolos formais de Christoffel de segunda espécie da estrutura F_ε convergem para os símbolos formais de Christoffel de segunda espécie da estrutura F .

Denotaremos os símbolos formais de Christoffel de segunda espécie da estrutura F_ε por

$$(\gamma_\varepsilon)^i_{jk} = (g_\varepsilon)^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (g_\varepsilon)_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial (g_\varepsilon)_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial (g_\varepsilon)_{ks}}{\partial x^j} \right)$$

e a conexão não linear por

$$(N_\varepsilon)^i_j = (\gamma_\varepsilon)^i_{jk} y^k - (C_\varepsilon)^i_{jk} (\gamma_\varepsilon)^k_{rs} y^r y^s,$$

onde $(C_\varepsilon)^i_{jk} = (g_\varepsilon)^{is} (C_\varepsilon)_{sjk}$. Resulta do Teorema 2.18 e de (2.34) que

$$(\gamma_\varepsilon)^i_{jk} \longrightarrow \gamma^i_{jk} \quad (2.35)$$

e

$$(N_\varepsilon)^i_j \longrightarrow N^i_j, \quad (2.36)$$

pontualmente sobre $TM \setminus 0$.

Como $F_\varepsilon \longrightarrow F$ pontualmente, segue que

$$\frac{(N_\varepsilon)^i_j}{F_\varepsilon} = (\gamma_\varepsilon)^i_{jk} (\ell_\varepsilon)^k - (A_\varepsilon)^i_{jk} (\gamma_\varepsilon)^k_{rs} (\ell_\varepsilon)^r (\ell_\varepsilon)^s \longrightarrow \frac{N^i_j}{F} = \gamma^i_{jk} \ell^k - A^i_{jk} \gamma^k_{rs} \ell^r \ell^s \quad (2.37)$$

pontualmente, onde $(A_\varepsilon)^i_{jk} = F_\varepsilon (C_\varepsilon)^i_{jk}$.

Denotaremos a conexão de Chern da estrutura de Finsler F_ε por ∇_ε e as 1-formas de conexão por $(\omega_\varepsilon)_j^i$. Então

$$(\omega_\varepsilon)_j^i = (\Gamma_\varepsilon)^i_{jk} dx^k,$$

onde

$$(\Gamma_\varepsilon)^l_{jk} = (\gamma_\varepsilon)^l_{jk} - (g_\varepsilon)^{li} \left((A_\varepsilon)_{ijs} \frac{(N_\varepsilon)^s_k}{F_\varepsilon} - (A_\varepsilon)_{jks} \frac{(N_\varepsilon)^s_i}{F_\varepsilon} + (A_\varepsilon)_{kis} \frac{(N_\varepsilon)^s_j}{F_\varepsilon} \right).$$

Usando as expressões em (2.33), (2.34), (2.35) e (2.37), obtemos que

$$(\Gamma_\varepsilon)^l_{jk} \longrightarrow \Gamma^l_{jk}$$

pontualmente sobre $TM \setminus 0$ e decorre disso que

$$(\omega_\varepsilon)_j^i \longrightarrow \omega_j^i \quad (2.38)$$

pontualmente.

Teorema 2.19. *Sejam (M, F) e (M, F_ε) variedades de Finsler, sendo F uma estrutura de Finsler absolutamente homogênea e F_ε as aplicações definidas em (2.25), com $\varepsilon \in (0, 1)$. Suponha que $E = E^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ é uma seção arbitrária de π^*TM . Dado $(x, y) \in TM \setminus 0$, temos que*

$$(\nabla_\varepsilon) E \longrightarrow \nabla E$$

pontualmente sobre $T_{(x,y)}(TM)$.

Demonstração. Consideremos $(x, y) \in TM \setminus 0$ e $v \in T_{(x,y)}(TM)$. Então,

$$\begin{aligned} \nabla_v E &= \nabla_v \left(E^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= (dE^i)_{(x,y)}(v) \frac{\partial}{\partial x^i} + E^i(x, y) \nabla_v \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= (dE^i)_{(x,y)}(v) \frac{\partial}{\partial x^i} + E^i(x, y) \omega_i^j(v) \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= ((dE^i)_{(x,y)}(v) + E^j(x, y) \omega_j^i(v)) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

e

$$(\nabla_\varepsilon)_v E = \left((dE^i)_{(x,y)}(v) + E^j(x, y) (\omega_\varepsilon)_j^i(v) \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Segue de (2.38) que $(\nabla_\varepsilon)_v E \longrightarrow \nabla_v E$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Portanto,

$$(\nabla_\varepsilon) E \longrightarrow \nabla E$$

pontualmente. □

Agora estudaremos a curvatura flag. Denotaremos a curvatura flag da estrutura de Finsler F_ε por K_ε . Dado $(x, y) \in TM \setminus 0$, temos que

$$K_\varepsilon(y, V) = \frac{V^i(y^j(R_\varepsilon)_{jikl}y^l)V^k}{g_\varepsilon(y, y)g_\varepsilon(V, V) - [g_\varepsilon(y, V)]^2},$$

onde $V \in T_xM$ é um vetor transversal a y , $(R_\varepsilon)_{jikl} = (g_\varepsilon)_{im}(R_\varepsilon)_j^m{}_{kl}$ e $(R_\varepsilon)_j^m{}_{kl}$ é a hh -tensor de curvatura da conexão de Chern ∇_ε .

Nosso objetivo agora é provar que $K_\varepsilon(y, V) \longrightarrow K(y, V)$ pontualmente. Para isto resta verificar que $(R_\varepsilon)_j^m{}_{kl} \longrightarrow R_j^m{}_{kl}$ pontualmente. Como

$$(R_\varepsilon)_j^i{}_{kl} = \frac{\delta(\Gamma_\varepsilon)^i{}_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta(\Gamma_\varepsilon)^i{}_{jk}}{\delta x^l} + (\Gamma_\varepsilon)^i{}_{hk}(\Gamma_\varepsilon)^h{}_{jl} - (\Gamma_\varepsilon)^i{}_{hl}(\Gamma_\varepsilon)^h{}_{jk}, \quad (2.39)$$

e já estudamos a convergência do objeto $(\Gamma_\varepsilon)^i{}_{jk}$, resta provarmos que $\frac{\delta(\Gamma_\varepsilon)^i{}_{jk}}{\delta x^l} \longrightarrow \frac{\delta\Gamma^i{}_{jk}}{\delta x^l}$ pontualmente.

Temos que

$$\frac{\delta(\Gamma_\varepsilon)^i{}_{jk}}{\delta x^l} = \frac{\partial(\Gamma_\varepsilon)^i{}_{jk}}{\partial x^l} - (N_\varepsilon)^s{}_l \frac{\partial(\Gamma_\varepsilon)^i{}_{jk}}{\partial y^s}.$$

Como $(N_\varepsilon)^s{}_l \longrightarrow N^s{}_l$ pontualmente por (2.36), basta verificarmos que

$$\frac{\partial(\Gamma_\varepsilon)^i{}_{jk}}{\partial x^l} \longrightarrow \frac{\partial\Gamma^i{}_{jk}}{\partial x^l} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\Gamma_\varepsilon)^i{}_{jk}}{\partial y^s} \longrightarrow \frac{\partial\Gamma^i{}_{jk}}{\partial y^s}$$

pontualmente. Mas essas convergências seguem diretamente do Teorema 2.18 e podemos então enunciar o seguinte resultado.

Teorema 2.20. *Sejam (M, F) e (M, F_ε) variedades de Finsler, sendo F uma estrutura de Finsler absolutamente homogênea e F_ε as aplicações definidas em (2.25), com $\varepsilon \in (0, 1)$. Dado $(x, y) \in TM \setminus 0$, temos que*

$$K_\varepsilon(y, V) \longrightarrow K(y, V)$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, para todo vetor $V \in T_xM$ transversal a y .

Demonstração. Segue das identidades em (2.32) e (2.39). □

Capítulo 3

Um Espaço com Curvatura Flag não Positiva

Neste capítulo exibiremos um exemplo que é inspirado no espaço hiperbólico

$$H^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n; x^n > 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

que munido da métrica riemanniana

$$a_{ij}(x^1, \dots, x^n) = \frac{\delta_{ij}}{(x^n)^2}$$

tem curvatura seccional constante igual a -1 .

Para o nosso exemplo necessitaremos da seguinte definição.

Definição 3.1. *Seja (M, F) uma variedade de Finsler de classe C^0 . Dizemos que F tem curvatura flag não positiva, se existe uma família a um parâmetro de estruturas de Finsler F_ε satisfazendo:*

1. $F_\varepsilon \rightarrow F$ pontualmente;
2. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ a curvatura flag de cada estrutura de Finsler F_ε é não positiva.

Além disso, para o exemplo consideraremos o espaço $\mathbb{R}_+^2 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2; x^2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ munido da estrutura de Finsler de classe C^0

$$\begin{aligned} F : T\mathbb{R}_+^2 &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) = \frac{\|y\|}{H(x)} = \frac{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}{H(x)}, \end{aligned}$$

onde

$$H : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow [0, \infty)$$

$$x \longmapsto H(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2 \in (0, 1] \\ 1, & \text{se } x^2 \geq 1, \end{cases}$$

e verificaremos que F tem curvatura flag não positiva. Para isso, vamos construir uma suavização para F . Como $F(x, \cdot) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave, para cada $x \in \mathbb{R}_+^2$, então não precisamos construir sua suavização vertical, sendo suficiente construirmos sua suavização horizontal. Na próxima seção, faremos isso de modo mais geral.

3.1 Suavização de Estruturas de Finsler de Classe C^0 Verticalmente Suaves

Seja (M, F) uma variedade de Finsler de classe C^0 . Suponhamos que para cada sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n) : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação $F : TU \setminus 0 \longrightarrow [0, \infty)$ possui as derivadas parciais de todas as ordens em relação às coordenadas y^1, \dots, y^n contínuas, e que $\text{Hess}_y F^2(x, y)$ é positiva definida, para todo $(x, y) \in TM \setminus 0$. Repetiremos alguns cálculos do capítulo anterior a fim de construir as estruturas de Finsler F_ε obtidas por suavização horizontal e provar que elas convergem pontualmente para F .

Seja $X = (x^1, \dots, x^n) : U_0 \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas definido em M . Escolha um subconjunto aberto U de M tal que

$$\bar{U} \subset U_0. \quad (3.1)$$

Consideremos U com o sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) .

Sejam $\{(U_\lambda, X_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma estrutura diferenciável localmente finita em M tal que U_λ é definido como em (3.1) para todo $\lambda \in \Lambda$ e $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, com $\delta_\lambda = \text{dist}_{\mathbb{R}^n}(\partial U_\lambda, \partial V_\lambda) > 0$, onde $V_\lambda = \text{int}(\text{supp}(\varphi_\lambda))$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Fixemos $\lambda \in \Lambda$. Para cada $\varepsilon \in (0, \delta_\lambda)$ definimos a aplicação $\hat{F}_{\varepsilon, \lambda} : TV_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\hat{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) = \int \eta_\varepsilon(x - z) F(z, y) dz, \forall (x, y) \in TV_\lambda.$$

Usando a homotetia $\psi_\lambda : (0, 1) \longrightarrow (0, \delta_\lambda)$ definida por $\psi_\lambda(\varepsilon) = \varepsilon \delta_\lambda$, podemos sem perda de generalidade supor que $\varepsilon \in (0, 1)$ e

$$\hat{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) F(z, y) dz, \forall (x, y) \in TV_\lambda. \quad (3.2)$$

Assim, podemos considerar para cada $\varepsilon \in (0, 1)$ a aplicação $F_\varepsilon : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_\varepsilon(x, y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) \hat{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y), \forall (x, y) \in TM. \quad (3.3)$$

Vamos verificar que a aplicação F_ε é uma estrutura de Finsler para cada $\varepsilon \in (0, 1)$ e que $F_\varepsilon \longrightarrow F$ pontualmente sobre TM . Esperamos que as notações $\hat{F}_{\varepsilon, \lambda}$ e F_ε não causem confusão com as notações do capítulo anterior.

Lema 3.2. *A aplicação $\hat{F}_{\varepsilon, \lambda} : TV_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em (3.2) satisfaz as seguintes propriedades para todo $\varepsilon \in (0, 1)$:*

- (1) $\hat{F}_{\varepsilon, \lambda}$ é de classe C^∞ em $\overline{TV_\lambda} \setminus 0$;
- (2) $\hat{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, \cdot)$ é absolutamente homogênea, para todo $x \in V_\lambda$;
- (3) $\text{Hess}_y \frac{1}{2} \hat{F}_{\varepsilon, \lambda}^2(x, y)$ é positiva definida, para todo $(x, y) \in TV_\lambda \setminus 0$;
- (4) $\hat{F}_{\varepsilon, \lambda} \longrightarrow F$ pontualmente sobre TV_λ .

Demonstração. (1) Segue dos fatos da aplicação $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ser de classe C^∞ , e da aplicação $F : \overline{TV_\lambda} \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{R}$ admitir as derivadas parciais de todas as ordens contínuas em relação às coordenadas y^1, \dots, y^n .

(2) Segue da aplicação F ser absolutamente homogênea.

(3) A demonstração é semelhante à do item (3) do Lema 2.10.

(4) Segue do item (ii) do Teorema 1.5, já que a aplicação $\hat{F}_{\varepsilon, \lambda}(\cdot, y)$ é a suavização mollifier da aplicação $F(\cdot, y)$ para cada $y \in \mathbb{R}^n$.

□

Teorema 3.3. *A aplicação $F_\varepsilon : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em (3.3) satisfaz as seguintes propriedades para todo $\varepsilon \in (0, 1)$:*

- (1) F_ε é de classe C^∞ em $TM \setminus 0$;
- (2) $F_\varepsilon(x, \cdot)$ é absolutamente homogênea, para todo $x \in M$;
- (3) $\text{Hess}_y \frac{1}{2} F_\varepsilon^2(x, y)$ é positiva definida, para todo $(x, y) \in TM \setminus 0$;
- (4) $F_\varepsilon \longrightarrow F$ pontualmente sobre TM .

Demonstração. Segue diretamente do lema anterior.

□

O teorema anterior garante que para cada $\varepsilon \in (0, 1)$ a aplicação $F_\varepsilon : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma estrutura de Finsler e que $F_\varepsilon \longrightarrow F$ pontualmente sobre TM .

Suporemos agora que a aplicação $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma estrutura de Finsler absolutamente homogênea. Consideraremos sua suavização definida em (3.3) e verificaremos que os objetos como conexão de Chern e curvatura flag das estruturas de Finsler F_ε convergem pontualmente para os objetos correspondentes de F .

Lema 3.4. *Seja $\hat{F}_{\varepsilon,\lambda} : TV_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida em (3.2). Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$,*

$$D^\alpha \hat{F}_{\varepsilon,\lambda} \longrightarrow D^\alpha F$$

pontualmente sobre $TV_\lambda \setminus 0$.

Demonstração. Consideremos $(x, y) \in TV_\lambda \setminus 0$. Temos que

$$\hat{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(z) F(x - z, y) dz,$$

logo

$$D^\alpha \hat{F}_{\varepsilon,\lambda}(x, y) = \int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(z) D^\alpha F(x - z, y) dz,$$

que é a suavização mollifier da aplicação $D^\alpha F(\cdot, y)$. Pelo Teorema 1.5, segue que

$$D^\alpha \hat{F}_{\varepsilon,\lambda} \longrightarrow D^\alpha F$$

pontualmente sobre $TV_\lambda \setminus 0$. □

Teorema 3.5. *Seja $F_\varepsilon : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida em (3.3). Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$,*

$$D^\alpha F_\varepsilon \longrightarrow D^\alpha F$$

pontualmente sobre $TM \setminus 0$.

Demonstração. Segue do lema anterior. □

Esse teorema nos permite reproduzir todas as convergências da Seção 2.5, quando F_ε é definida como em (3.3). Portanto, a conexão de Chern e a curvatura flag das estruturas de Finsler F_ε convergem pontualmente para os objetos correspondentes da estrutura de Finsler F .

3.2 Exemplo

Nesta seção exporemos o exemplo introduzido no início do capítulo.

Exemplo 3.6. Consideremos as aplicações contínuas

$$H : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow [0, \infty)$$

$$x \longmapsto H(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2 \in (0, 1] \\ 1, & \text{se } x^2 \geq 1 \end{cases}$$

e

$$F : T\mathbb{R}_+^2 \longrightarrow [0, \infty)$$

$$(x, y) \longmapsto F(x, y) = \frac{\|y\|}{H(x)} = \frac{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}{H(x)}.$$

O Exemplo 1.7 pode ajudar na compreensão da suavização que construiremos.

Seja $\{(U_i, I|_{U_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma estrutura diferenciável para \mathbb{R}_+^2 , onde $U_1 = \mathbb{R} \times (\frac{1}{3}, \infty)$, $U_i = \mathbb{R} \times (\frac{1}{i+2}, \frac{1}{i}) \forall i \geq 2$ e $I : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $I(x) = x$.

Temos que $F(x, \cdot) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ . Além disso,

$$\left(\left[\frac{1}{2} F^2(x, y) \right]_{y^i y^j} \right) = \frac{1}{H^2(x)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \forall (x, y) \in T\mathbb{R}_+^2 \setminus 0,$$

então $\text{Hess}_y F^2(x, y)$ é positiva definida, para todo $(x, y) \in T\mathbb{R}_+^2 \setminus 0$. Assim, podemos usar a suavização de F definida em (3.3).

Vamos verificar que existe uma partição diferenciável da unidade $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que depende só da coordenada x^2 e com $\text{dist}_{\mathbb{R}^n}(\partial U_i, \partial V_i) > 0$, onde $V_i = \text{int}(\text{supp}(\varphi_i))$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Consideremos a variedade diferenciável $\mathbb{R}_+ = \{x^2 \in \mathbb{R}; x^2 > 0\}$ munido da estrutura diferenciável $\{(\tilde{U}_i, \tilde{I}|_{\tilde{U}_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$, onde $\tilde{U}_1 = (\frac{1}{3}, \infty)$, $\tilde{U}_i = (\frac{1}{i+2}, \frac{1}{i}) \forall i \geq 2$ e $\tilde{I} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\tilde{I}(x^2) = x^2$. Seja $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura $\{\tilde{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Denotemos $\tilde{V}_i = \text{int}(\text{supp}(\tilde{\varphi}_i))$. Notemos que $\delta_i := \text{dist}_{\mathbb{R}^n}(\partial \tilde{U}_i, \partial \tilde{V}_i) > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideramos a aplicação $\varphi_i : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_i(x^1, x^2) = \tilde{\varphi}_i(x^2)$. Então:

- $\text{supp}(\varphi_i) = \mathbb{R} \times \text{supp}(\tilde{\varphi}_i) \subset \mathbb{R} \times \tilde{U}_i = U_i$;
- $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é localmente finita;
- $\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x^1, x^2) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\varphi}_i(x^2) = 1, \forall x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}_+^2$.

Portanto, $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Além disso, se denotarmos $V_i = \text{int}(\text{supp}(\varphi_i))$, então $\text{dist}_{\mathbb{R}^n}(\partial U_i, \partial V_i) = \delta_i > 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para cada $\varepsilon \in (0, 1)$ consideramos a aplicação $F_\varepsilon : T\mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ construída em (3.3), dada por

$$F_\varepsilon(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \hat{F}_{\varepsilon, i}(x, y) = \|y\| \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \int \eta_{\psi_i(\varepsilon)}(x - z) \frac{1}{H(z)} dz, \forall (x, y) \in T\mathbb{R}_+^2.$$

Como comentamos no início do capítulo, nosso objetivo é provar que F tem curvatura flag não positiva. Para isso, precisamos garantir que

$$- \left[\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \int \eta_{\psi_i(\varepsilon)}(x - z) \frac{1}{H(z)} dz \right) \right] \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \int \eta_{\psi_i(\varepsilon)}(x - z) \frac{1}{H(z)} dz \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \int \eta_{\psi_i(\varepsilon)}(x - z) \frac{1}{H(z)} dz \right) \right)^2 \quad (3.4)$$

seja menor ou igual a zero, para todo $x \in \mathbb{R}_+^2$. Redefiniremos as aplicações ψ_i a fim de assegurar esta condição para todo $\varepsilon \in (0, 1)$. Ficará claro a importância desta desigualdade quando calcularmos a curvatura flag de cada estrutura de Finsler.

Analisaremos alguns casos. Estamos sempre supondo que $\psi_i(\varepsilon) < \delta_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. A tabela a seguir pode auxiliar no entendimento dos casos que serão analisados. Na primeira parte da tabela estamos indicando que $U_1 = \mathbb{R} \times (1/3, \infty)$, $U_2 = \mathbb{R} \times (1/4, 1/2)$ e assim por diante. A segunda parte da tabela indica que $V_1 = (1/3 + \delta_1, \infty)$, que $V_2 \subset (1/4 + \delta_2, 1/2 - \delta_2)$, e etc. Observemos que por exemplo $[1/3, 1/2]$ intercepta apenas V_1 e V_2 . Ressaltamos que o valor δ_0 será definido mais adiante.

0	...	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	...
						U_1	U_1	U_1 ...
					U_2	U_2		
			U_3	U_3				
		U_4	U_4					
...		\vdots						

0	...	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \delta_0$	1	...
					δ_1	V_1	V_1	V_1 ...	
				δ_2	V_2	V_2	δ_2		
			δ_3	V_3	V_3	δ_3			
		δ_4	V_4	V_4	δ_4				
...		\vdots							

Tabela 3.1: Vizinhanças U_i 's e V_i 's.

Caso 1: Considere $x_0 = (x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}_+^2$, com $x_0^2 \in [1/2, \infty)$. Temos que $\mathbb{R} \times (1/2 - \delta_2, \infty)$ é uma vizinhança de x_0 que intercepta V_1 e não intercepta nenhum dos outros V_i 's (veja a Tabela 3.1). Assim, a expressão em (3.4) se torna

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right) \right] \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right) \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

para todo $x \in \mathbb{R} \times (1/2 - \delta_2, \infty)$, já que $\varphi_1(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \times (1/2 - \delta_2, \infty)$.

Caso 1 a): Suponha que $x_0^2 - \psi_1(\varepsilon) \geq 1$. Neste caso, temos que $H(z) = 1, \forall z \in B(x_0, \psi_1(\varepsilon))$. Logo, (3.5) avaliada em x_0 é igual a

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0 - z) dz \right) \right] \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0 - z) dz \right) \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0 - z) dz \right) \right)^2 \\ & = 0. \end{aligned}$$

Caso 1 b): Suponha que $1 \in (x_0^2 - \psi_1(\varepsilon), x_0^2 + \psi_1(\varepsilon))$. Então, $H(z) = z^2, \forall z \in \mathbb{R} \times (x_0^2 - \psi_1(\varepsilon), 1]$ e $H(z) = 1, \forall z \in \mathbb{R} \times [1, x_0^2 + \psi_1(\varepsilon))$. Utilizaremos integração por partes para verificar que a expressão em (3.5) avaliada em x_0 é menor que zero sempre que $\psi_1(\varepsilon) < \delta_1$. Temos que

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0 - z)}{\partial x^2} \frac{1}{H(z)} dz \\ & = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^{x_0^2 + \psi_1(\varepsilon)} \frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial x^2} \frac{1}{H(z)} dz^2 \right) dz^1 \\ & = - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^{x_0^2 + \psi_1(\varepsilon)} \frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial z^2} \frac{1}{H(z)} dz^2 \right) dz^1 \\ & = - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial z^2} \frac{1}{z^2} dz^2 \right) dz^1 \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_1^{x_0^2 + \psi_1(\varepsilon)} \frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial z^2} dz^2 \right) dz^1 \\ & = - \int_{\mathbb{R}} \left(\eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{z^2} \Big|_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \right) dz^1 \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{(z^2)^2} dz^2 \right) dz^1 \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}} \left(\eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \Big|_1^{x_0^2 + \psi_1(\varepsilon)} \right) dz^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{(z^2)^2} dz^2 \right) dz^1 \\
&\geq - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{(z^2)^3} dz^2 \right) dz^1
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que

$$\eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, \psi_1(\varepsilon)) = \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, -\psi_1(\varepsilon)) = 0, \forall z^1 \in \mathbb{R}.$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
&- \int \frac{\partial^2 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0 - z)}{\partial(x^2)^2} \frac{1}{H(z)} dz \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^{x_0^2 + \psi_1(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial(x^2)^2} \frac{1}{H(z)} dz^2 \right) dz^1 \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^{x_0^2 + \psi_1(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial(z^2)^2} \frac{1}{H(z)} dz^2 \right) dz^1 \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \frac{\partial^2 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial(z^2)^2} \frac{1}{z^2} dz^2 \right) dz^1 \\
&- \int_{\mathbb{R}} \left(\int_1^{x_0^2 + \psi_1(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial(z^2)^2} dz^2 \right) dz^1 \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial z^2} \frac{1}{z^2} \Big|_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \right) dz^1 \\
&- \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial z^2} \frac{1}{(z^2)^2} dz^2 \right) dz^1 \\
&- \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial z^2} \Big|_1^{x_0^2 + \psi_1(\varepsilon)} \right) dz^1 \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2)}{\partial z^2} \frac{1}{(z^2)^2} dz^2 \right) dz^1 \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left(\eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{(z^2)^2} \Big|_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \right) dz^1 \\
&- \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{2}{(z^2)^3} dz^2 \right) dz^1 \\
&= -2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{(z^2)^3} dz^2 \right) dz^1 \\
&- \int_{\mathbb{R}} \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - 1) dz^1 \\
&< -2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{(z^2)^3} dz^2 \right) dz^1.
\end{aligned}$$

Observe que utilizamos integração por partes três vezes nesta conta.

Defina as constantes

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0 - z) \frac{1}{H(z)} dz \\
A_2 &= \int \frac{\partial \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0 - z)}{\partial x^2} \frac{1}{H(z)} dz = - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{(z^2)^2} dz^2 \right) dz^1 \\
A_3 &= - \int \frac{\partial^2 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0 - z)}{\partial (x^2)^2} \frac{1}{H(z)} dz \\
A_4 &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{(z^2)^3} dz^2 \right) dz^1.
\end{aligned}$$

Assim, a expressão em (3.5) avaliada em x_0 é igual a

$$A_1 A_3 + (A_2)^2$$

e pelos cálculos anteriores é menor do que

$$2A_1 A_4 + A_2 A_4 = A_4 (2A_1 + A_2).$$

Como $A_4 < 0$, devemos verificar que $(2A_1 + A_2) > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
&2A_1 + A_2 \\
&= 2 \int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0 - z) \frac{1}{H(z)} dz - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \frac{1}{(z^2)^2} dz^2 \right) dz^1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \left(\frac{2}{z^2} - \frac{1}{(z^2)^2} \right) dz^2 \right] dz^1 \\
&+ 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_1^{x_0^2 + \psi_1(\varepsilon)} \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) dz^2 \right) dz^1 \\
&\geq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{x_0^2 - \psi_1(\varepsilon)}^1 \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(x_0^1 - z^1, x_0^2 - z^2) \left(\frac{2}{z^2} - \frac{1}{(z^2)^2} \right) dz^2 \right] dz^1 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

porque $z^2 \in (x_0^2 - \psi_1(\varepsilon), 1)$ é maior que $1/2$.

Então, a expressão em (3.5) avaliada em x_0 é negativa, sempre que $\psi_1(\varepsilon) < \delta_1$.

Caso 1 c): Suponha que $x_0^2 + \psi_1(\varepsilon) \leq 1$. Como $\psi_1(\varepsilon) < \delta_1$, então $x_0^2 \in [1/2, 1 - \delta_1]$. Dado

$x \in \mathbb{R}_+^2$ com $x^2 \in [1/2, 1 - \delta_1]$, temos que a expressão em (3.5) avaliada em x é igual a

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(z) \frac{2}{(x^2 - z^2)^3} dz \right) \right] \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(z) \frac{1}{(x^2 - z^2)} dz \right) \\ & + \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(z) \frac{1}{(x^2 - z^2)^2} dz \right)^2. \end{aligned}$$

Sendo $[1/2, 1 - \delta_1]$ compacto, o item (iii) do Teorema 1.5 garante que a expressão acima converge uniformemente para

$$-\frac{2}{(x^2)^3} \cdot \frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{(x^2)^2} \right)^2 = -\frac{1}{(x^2)^4} < -1,$$

sobre $\mathbb{R} \times [1/2, 1 - \delta_1]$. Como a convergência é uniforme, existe uma constante positiva $\mu_1 < \delta_1$ tal que

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(z) \frac{2}{(x^2 - z^2)^3} dz \right) \right] \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(z) \frac{1}{(x^2 - z^2)} dz \right) \\ & + \left(\int \eta_{\psi_1(\varepsilon)}(z) \frac{1}{(x^2 - z^2)^2} dz \right)^2 \\ & < -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+^2$ com $x^2 \in [1/2, 1 - \delta_1]$, sempre que $\psi_1(\varepsilon) \in (0, \mu_1)$. Logo, a expressão (3.5) avaliada em x_0 é menor que zero, sempre que $\psi_1(\varepsilon) \in (0, \mu_1)$.

Caso 2:) Fixe $n \geq 2$. Provaremos que existe $\mu_n > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}_+^2$ com $x^2 \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ e para todo ε tal que $\psi_{n-1}(\varepsilon), \psi_n(\varepsilon) \in (0, \mu_n)$ a expressão em (3.4) é menor que zero. Defina $\delta_0 = 1/4$. Então,

$$\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \subset \left(\frac{1}{n+1} - \delta_{n+1}, \frac{1}{n} + \delta_{n-2} \right),$$

e este aberto intercepta V_{n-1} e V_n e não intercepta nenhum dos outros V_i 's (veja a Tabela 3.1). Assim, a expressão em (3.4) torna-se

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} \left(\varphi_{n-1}(x) \int \eta_{\psi_{n-1}(\varepsilon)}(z) \frac{1}{x^2 - z^2} dz + \varphi_n(x) \int \eta_{\psi_n(\varepsilon)}(z) \frac{1}{x^2 - z^2} dz \right) \right] \\ & \cdot \left(\varphi_{n-1}(x) \int \eta_{\psi_{n-1}(\varepsilon)}(z) \frac{1}{x^2 - z^2} dz + \varphi_n(x) \int \eta_{\psi_n(\varepsilon)}(z) \frac{1}{x^2 - z^2} dz \right) \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\varphi_{n-1}(x) \int \eta_{\psi_{n-1}(\varepsilon)}(z) \frac{1}{x^2 - z^2} dz + \varphi_n(x) \int \eta_{\psi_n(\varepsilon)}(z) \frac{1}{x^2 - z^2} dz \right) \right]^2, \quad (3.6) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \times \left(\frac{1}{n+1} - \delta_{n+1}, \frac{1}{n} + \delta_{n-2} \right)$.

Defina

$$C_{\varepsilon,i}(x) = \int \eta_{\psi_{n-1}(\varepsilon)}(z) \frac{1}{(x^2 - z^2)^i} dz - \int \eta_{\psi_n(\varepsilon)}(z) \frac{1}{(x^2 - z^2)^i} dz$$

e

$$D_{\varepsilon,i}(x) = \int \eta_{\psi_n(\varepsilon)}(z) \frac{1}{(x^2 - z^2)^i} dz,$$

para $i = 1, 2, 3$. Usando que $\varphi_n(x) = 1 - \varphi_{n-1}(x)$, a expressão em (3.6) torna-se

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} (\varphi_{n-1}(x)C_{\varepsilon,1}(x) + D_{\varepsilon,1}(x)) \right] (\varphi_{n-1}(x)C_{\varepsilon,1}(x) + D_{\varepsilon,1}(x)) \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} (\varphi_{n-1}(x)C_{\varepsilon,1}(x) + D_{\varepsilon,1}(x)) \right)^2 \end{aligned}$$

que é igual a

$$\begin{aligned} & - \varphi_{n-1}(x) \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}(x)}{\partial(x^2)^2} C_{\varepsilon,1}^2(x) - 2\varphi_{n-1}(x)C_{\varepsilon,1}(x)D_{\varepsilon,3}(x) - 2\varphi_{n-1}(x)C_{\varepsilon,3}(x)D_{\varepsilon,1}(x) \\ & + 2\varphi_{n-1}(x)C_{\varepsilon,2}(x)D_{\varepsilon,2}(x) + \varphi_{n-1}^2(x)C_{\varepsilon,2}^2(x) - 2\varphi_{n-1}^2(x)C_{\varepsilon,1}(x)C_{\varepsilon,3}(x) \\ & + \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x^2} \right)^2 C_{\varepsilon,1}^2(x) + 2 \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x^2} C_{\varepsilon,2}(x)D_{\varepsilon,1}(x) - 2 \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x^2} C_{\varepsilon,1}(x)D_{\varepsilon,2}(x) \\ & - \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}(x)}{\partial(x^2)^2} C_{\varepsilon,1}(x)D_{\varepsilon,1}(x) \\ & - 2D_{\varepsilon,1}(x)D_{\varepsilon,3}(x) + D_{\varepsilon,2}^2(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \times \left(\frac{1}{n+1} - \delta_{n+1}, \frac{1}{n} + \delta_{n-2} \right)$.

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, o item (iii) do Teorema 1.5 garante que

$$\int \eta_{\psi_{n-1}(\varepsilon)}(z) \frac{1}{(x^2 - z^2)^i} dz \longrightarrow \frac{1}{(x^2)^i}$$

e

$$\int \eta_{\psi_n(\varepsilon)}(z) \frac{1}{(x^2 - z^2)^i} dz \longrightarrow \frac{1}{(x^2)^i}$$

uniformemente sobre $\mathbb{R} \times [1/(n+1), 1/n]$. Combinando isso com o fato das aplicações

$$\varphi_{n-1}(x), \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x^2} \text{ e } \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}(x)}{\partial(x^2)^2}$$

serem limitadas em $\mathbb{R} \times [1/(n+1), 1/n]$ e as propriedades de convergência uniforme,

garantimos a existência de uma constante positiva $\mu_n < \min\{\delta_{n-1}, \delta_n\}$ tal que

$$\begin{aligned}
& - \varphi_{n-1}(x) \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}(x)}{\partial(x^2)^2} C_{\varepsilon,1}^2(x) - 2\varphi_{n-1}(x) C_{\varepsilon,1}(x) D_{\varepsilon,3}(x) - 2\varphi_{n-1}(x) C_{\varepsilon,3}(x) D_{\varepsilon,1}(x) \\
& + 2\varphi_{n-1}(x) C_{\varepsilon,2}(x) D_{\varepsilon,2}(x) + \varphi_{n-1}^2(x) C_{\varepsilon,2}^2(x) - 2\varphi_{n-1}^2(x) C_{\varepsilon,1}(x) C_{\varepsilon,3}(x) \\
& + \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x^2} \right)^2 C_{\varepsilon,1}^2(x) + 2 \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x^2} C_{\varepsilon,2}(x) D_{\varepsilon,1}(x) - 2 \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x^2} C_{\varepsilon,1}(x) D_{\varepsilon,2}(x) \\
& - \frac{\partial^2 \varphi_{n-1}(x)}{\partial(x^2)^2} C_{\varepsilon,1}(x) D_{\varepsilon,1}(x) \\
& < \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

e

$$-2D_{\varepsilon,1}(x)D_{\varepsilon,3}(x) + D_{\varepsilon,2}^2(x) < -\frac{1}{(x^2)^4} + \frac{1}{4},$$

para todo $x \in \mathbb{R} \times [1/(n+1), 1/n]$ e para todo ε tal que $\psi_{n-1}(\varepsilon), \psi_n(\varepsilon) \in (0, \mu_n)$.

Assim, a expressão em (3.6) é menor ou igual a

$$-\frac{1}{(x^2)^4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R} \times [1/(n+1), 1/n]$ e para todo ε tal que $\psi_{n-1}(\varepsilon), \psi_n(\varepsilon) \in (0, \mu_n)$.

Portanto, redefinimos as aplicações $\psi_i, \forall i \in \mathbb{N}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\psi_i : (0, 1) & \longrightarrow (0, \min\{\mu_i, \mu_{i+1}\}) \\
\varepsilon & \longmapsto \psi_i(\varepsilon) = \varepsilon \min\{\mu_i, \mu_{i+1}\}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, fica provado que para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ e para todo $x \in \mathbb{R}_+^2$ a expressão em (3.4) é menor ou igual a zero (usando as aplicações ψ_i definidas acima).

Verificaremos agora que a curvatura flag de cada estrutura de Finsler F_ε é não positiva, para cada $\varepsilon \in (0, 1)$.

Fixe $\varepsilon \in (0, 1)$ e seja $\Theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \int \eta_{\psi_i(\varepsilon)}(x-z) \frac{1}{H(z)} dz}, \forall x \in \mathbb{R}_+^2$. Então,

$$(g_\varepsilon)_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\Theta_\varepsilon^2}$$

e

$$(g_\varepsilon)^{ij} = \delta_{ij} \Theta_\varepsilon^2.$$

Observe que $(g_\varepsilon)_{ij}$ não depende de y , isto implica que os coeficientes $(A_\varepsilon)_{ijk}$ do tensor de Cartan são nulos, logo o tensor de Cartan é nulo e os coeficientes da conexão de Chern

coincidem com os símbolos formais de Christoffel, isto é,

$$(\gamma_\varepsilon)^i_{jk} = (\Gamma_\varepsilon)^i_{jk}.$$

Em outras palavras, a métrica é Riemanniana.

Vamos determinar os símbolos formais de Christoffel. Seja $\vartheta_\varepsilon = \log \Theta_\varepsilon$, então

$$\frac{\partial(g_\varepsilon)_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\delta_{ij}}{\Theta_\varepsilon^2} \right) = -\delta_{ij} \frac{2\Theta_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)_{x^k}}{\Theta_\varepsilon^4} = -2\delta_{ij} \frac{(\Theta_\varepsilon)_{x^k}}{\Theta_\varepsilon^3} = -2\delta_{ij} \frac{(\vartheta_\varepsilon)_{x^k}}{\Theta_\varepsilon^2}.$$

Por definição os símbolos de Christoffel são

$$(\Gamma_\varepsilon)^i_{jk} = (g_\varepsilon)^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(g_\varepsilon)_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial(g_\varepsilon)_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial(g_\varepsilon)_{ks}}{\partial x^j} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} (\Gamma_\varepsilon)^i_{jk} &= (g_\varepsilon)^{ii} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(g_\varepsilon)_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial(g_\varepsilon)_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial(g_\varepsilon)_{ki}}{\partial x^j} \right) \\ &= \Theta_\varepsilon^2 \frac{1}{2} \left(-2\delta_{ij} \frac{(\vartheta_\varepsilon)_{x^k}}{\Theta_\varepsilon^2} + 2\delta_{jk} \frac{(\vartheta_\varepsilon)_{x^i}}{\Theta_\varepsilon^2} - 2\delta_{ki} \frac{(\vartheta_\varepsilon)_{x^j}}{\Theta_\varepsilon^2} \right) \\ &= -\delta_{ij}(\vartheta_\varepsilon)_{x^k} + \delta_{jk}(\vartheta_\varepsilon)_{x^i} - \delta_{ki}(\vartheta_\varepsilon)_{x^j}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\Gamma_\varepsilon)^i_{ij} = -(\vartheta_\varepsilon)_{x^j}, \quad (\Gamma_\varepsilon)^i_{jj} = (\vartheta_\varepsilon)_{x^i}, \quad (\Gamma_\varepsilon)^i_{ii} = -(\vartheta_\varepsilon)_{x^i}.$$

Agora determinaremos os coeficientes $(R_\varepsilon)^i_{jkl}$ da curvatura flag. Por definição

$$(R_\varepsilon)^i_{jkl} = \frac{\delta(\Gamma_\varepsilon)^i_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta(\Gamma_\varepsilon)^i_{jk}}{\delta x^l} + (\Gamma_\varepsilon)^i_{hk}(\Gamma_\varepsilon)^h_{jl} - (\Gamma_\varepsilon)^i_{hl}(\Gamma_\varepsilon)^h_{jk},$$

onde $\frac{\delta}{\delta x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} - (N_\varepsilon)^i_k \frac{\partial}{\partial y^i}$. Como $(\Gamma_\varepsilon)^i_{jl}$ não depende de y , $(R_\varepsilon)^i_{jkl}$ torna-se

$$(R_\varepsilon)^i_{jkl} = \frac{\partial(\Gamma_\varepsilon)^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial(\Gamma_\varepsilon)^i_{jk}}{\partial x^l} + (\Gamma_\varepsilon)^i_{hk}(\Gamma_\varepsilon)^h_{jl} - (\Gamma_\varepsilon)^i_{hl}(\Gamma_\varepsilon)^h_{jk}.$$

Se pelo menos três índices são iguais, segue que $(R_\varepsilon)^i_{jkl} = 0$. Vamos calcular $(R_\varepsilon)^i_{jij}$.

Temos que

$$\begin{aligned} (R_\varepsilon)^i_{jij} &= \frac{\partial(\Gamma_\varepsilon)^i_{jj}}{\partial x^i} - \frac{\partial(\Gamma_\varepsilon)^i_{ji}}{\partial x^j} + (\Gamma_\varepsilon)^i_{hi}(\Gamma_\varepsilon)^h_{jj} - (\Gamma_\varepsilon)^i_{hj}(\Gamma_\varepsilon)^h_{ji} \\ &= (\vartheta_\varepsilon)_{x^i x^i} + (\vartheta_\varepsilon)_{x^j x^j} + (-(\vartheta_\varepsilon)_{x^i}^2 + (\vartheta_\varepsilon)_{x^j}^2) - ((\vartheta_\varepsilon)_{x^j}^2 - (\vartheta_\varepsilon)_{x^i}^2) \\ &= (\vartheta_\varepsilon)_{x^i x^i} + (\vartheta_\varepsilon)_{x^j x^j} \\ &= (\vartheta_\varepsilon)_{x^1 x^1} + (\vartheta_\varepsilon)_{x^2 x^2}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \int \eta_{\psi_i(\varepsilon)}(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{H(z)} \left(\int_{x^1 - \psi_i(\varepsilon)}^{x^1 + \psi_i(\varepsilon)} \frac{\partial \eta_{\psi_i(\varepsilon)}(x^1 - z^1, x^2 - z^2)}{\partial x^1} dz^1 \right) dz^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

então $(\vartheta_\varepsilon)_{x^1 x^1} = 0$. Assim, a expressão de $(R_\varepsilon)_j^i{}_{ij}$ é simplificada para

$$(R_\varepsilon)_j^i{}_{ij} = (\vartheta_\varepsilon)_{x^2 x^2}.$$

Dados $x \in \mathbb{R}_+^2$ e vetores transversais $y, V \in T_x \mathbb{R}_+^2$, temos que

$$K_\varepsilon(y, V) = \frac{V^i (y^j (R_\varepsilon)_{jikl} y^l) V^k}{(g_\varepsilon)(y, y)(g_\varepsilon)(V, V) - [(g_\varepsilon)(y, V)]^2}.$$

Assim, para verificarmos que a curvatura flag é não positiva, basta estudarmos

$$V^i (y^j (R_\varepsilon)_{jikl} y^l) V^k.$$

Notemos que $(R_\varepsilon)_{2^1 12} = -(R_\varepsilon)_{2^1 21} = -(R_\varepsilon)_{1^2 12} = (R_\varepsilon)_{1^2 21}$ e os demais termos são todos nulos. Assim,

$$\begin{aligned}
& V^i (y^j (R_\varepsilon)_{jikl} y^l) V^k \\
&= V^i (y^j (g_\varepsilon)_{im} (R_\varepsilon)_j^m{}_{kl} y^l) V^k \\
&= V^i (y^j (g_\varepsilon)_{i1} (R_\varepsilon)_j^1{}_{kl} y^l) V^k + V^i (y^j (g_\varepsilon)_{i2} (R_\varepsilon)_j^2{}_{kl} y^l) V^k \\
&= V^1 (y^j (g_\varepsilon)_{11} (R_\varepsilon)_j^1{}_{kl} y^l) V^k + V^2 (y^j (g_\varepsilon)_{22} (R_\varepsilon)_j^2{}_{kl} y^l) V^k \\
&= (g_\varepsilon)_{11} (V^1 (y^j (R_\varepsilon)_j^1{}_{kl} y^l) V^k + V^2 (y^j (R_\varepsilon)_j^2{}_{kl} y^l) V^k) \\
&= (g_\varepsilon)_{11} (V^1 (y^2 (R_\varepsilon)_{2^1 12} y^2) V^1 + V^1 (y^2 (R_\varepsilon)_{2^1 21} y^1) V^2) \\
&+ (g_\varepsilon)_{11} (V^2 (y^1 (R_\varepsilon)_{1^2 12} y^2) V^1 + V^2 (y^1 (R_\varepsilon)_{1^2 21} y^1) V^2) \\
&= (g_\varepsilon)_{11} (V^1 (y^2 (R_\varepsilon)_{2^1 12} y^2) V^1 - V^1 (y^2 (R_\varepsilon)_{2^1 12} y^1) V^2) \\
&- (g_\varepsilon)_{11} (V^2 (y^1 (R_\varepsilon)_{1^2 12} y^2) V^1 + V^2 (y^1 (R_\varepsilon)_{1^2 12} y^1) V^2) \\
&= (g_\varepsilon)_{11} (R_\varepsilon)_{2^1 12} ((V^1)^2 (y^2)^2 - 2V^1 V^2 y^1 y^2 + (V^2)^2 (y^1)^2) \\
&= (g_\varepsilon)_{11} (V^1 y^2 - V^2 y^1)^2 (R_\varepsilon)_{2^1 12}.
\end{aligned}$$

Sendo $(g_\varepsilon)_{11} > 0$, o trabalho de verificar que a curvatura flag é não positiva se reduz a

estudar $(R_\varepsilon)_2^1{}_{12}$. Como $(\vartheta_\varepsilon)_{x^2x^2}(x^1, x^2)$ é igual a

$$-\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \int \eta_{\psi_i(\varepsilon)}(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right) \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) \int \eta_{\psi_i(\varepsilon)}(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right) \\ \frac{\left(\int \eta_\varepsilon(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right)^2}{\left(\int \eta_\varepsilon(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right)^2} \\ + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\int \eta_\varepsilon(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right) \right)^2}{\left(\int \eta_\varepsilon(x-z) \frac{1}{H(z)} dz \right)^2}$$

segue de (3.4) que $(R_\varepsilon)_2^1{}_{12} \leq 0$. Isto prova que a curvatura flag de cada estrutura de Finsler F_ε é menor ou igual a zero, para todo $\varepsilon \in (0, 1)$. Portanto, a curvatura flag de F é não positiva.

Conclusões

Neste trabalho definimos uma suavização para uma estrutura de Finsler de classe C^0 qualquer. Mostramos que esta suavização é boa no seguinte sentido: se F for uma estrutura de Finsler absolutamente homogênea, então os objetos como a conexão de Chern e a curvatura flag das estruturas de Finsler F_ε convergem pontualmente para os respectivos objetos de F . Isto é importante, uma vez que estamos querendo utilizar a suavização de uma estrutura de Finsler de classe C^0 para definir objetos na variedade de Finsler de classe C^0 .

No exemplo do capítulo 3, trabalhamos com uma estrutura de Finsler de classe C^0 que é diferenciável na sua parte vertical. Isto se mostrou interessante para a criação de um primeiro exemplo, bem como para a construção de sua suavização e a condição que queríamos garantir sobre a curvatura flag de cada estrutura de Finsler F_ε . É claro que este trabalho se encontra em fase inicial, e um caminho natural é explorarmos propriedades deste exemplo e tentarmos generalizar estas propriedades para um espaço de curvatura flag não positiva de dimensão n . Vejamos outros tópicos que gostaríamos de abordar futuramente:

- Estudar novos exemplos onde podemos aplicar as técnicas exibidas neste trabalho.
- Construir ferramentas que nos ajudarão a trabalhar com a suavização no caso geral.

Acreditamos que este trabalho possa contribuir no desenvolvimento da teoria das estruturas de Finsler de classe C^0 . Esperamos que ele sirva de inspiração para novas pesquisas.

Referências Bibliográficas

- [1] D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen - An Introduction to Riemann-Finsler Geometry, Graduate Texts in Mathematics, vol. 200, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [2] V. N. Berestovskii - Homogeneous Manifolds with Intrinsic Metric. I, Sibirsk. Mat. Zh. vol. 29, no. 6, p. 17–29, 1988. MR985283.
- [3] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov - A Course in Metric Geometry, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2001.
- [4] M. P. do Carmo - Geometria Riemanniana, ed. 5, IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- [5] S. S. Chern, Z. Shen - Riemann-Finsler Geometry, vol. 6, World Scientific Publishing Company, 2005.
- [6] S. S. Chern - Finsler Geometry is just Riemannian Geometry without the Quadratic Restriction, Notices Amer. Math. Soc. vol. 43, no. 9, p. 959–963, 1996.
- [7] N. Cordova, R. Fukuoka, E. A. Neves - Sequence of Induced Hausdorff Metrics on Lie Groups, arXiv:1702.01725.
- [8] A. Davini - Smooth Approximation of Weak Finsler Metrics, Differential Integral Equations, vol. 18, no. 5, p. 509–530, 2005.
- [9] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov - Modern Geometry: Methods and Applications, Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields, Graduate Texts in Mathematics, vol. 93, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [10] C. E. Durán - A volume comparison theorem for Finsler manifolds, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 126, no. 10, p. 3079-3082, 1998.
- [11] L. C. Evans - Partial Differential Equations, ed. 2, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
- [12] P. Finsler - Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Tese de doutorado, Göttingen, 1918.

- [13] R. Fukuoka - Mollifier Smoothing of Tensor Fields on Differentiable Manifolds and Applications to Riemannian Geometry, arXiv:math/0608230.
- [14] R. Fukuoka, D. Benetti - Induced Hausdorff Metrics on Quotient Spaces, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), vol. 48, no. 4, p. 551–598, 2017. MR3735748.
- [15] I. A. Gribanova - The Quasihyperbolic Plane, Sibirsk. Mat. Zh. vol. 40, no. 2, p. 288–301, 1999. MR1698304.
- [16] S. Kobayashi, K. Nomizu - Foundations of Differential Geometry, vol. I, Interscience publishers, New York, 1963.
- [17] J. Lee - Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2012.
- [18] G. F. B. Riemann, H. Weyl - Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Springer-Verlag , 1919.
- [19] M. Spivak - A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, ed. 3, vol.2, Perish, 1999.
- [20] W. Sun, Y. X. Yuan - Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming, vol. 1, Springer-Verlag, 2006.
- [21] F. W. Warner - Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics, vol 94, Springer-Verlag, New York, 1983.

Notações

Capítulo 1

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$	Multi-índice.
$D^\alpha f(x)$	$\frac{\partial^{ \alpha } f(x)}{\partial(x^1)^{\alpha_1} \dots \partial(x^n)^{\alpha_n}}$.
ε	Constante real positiva.
$B[0, \varepsilon]$	Bola fechada com centro em 0 e raio ε com respeito a norma euclidiana.
U_ε	$\{x \in U; \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$.
$\eta(x)$	Mollifier padrão.
$(\eta_\varepsilon * f)(x)$	Convolução de η_ε e f.
$\eta_\varepsilon(x)$	$\frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
π^*TM	Pull-back do fibrado tangente.
π^*T^*M	Pull-back do fibrado cotangente.
g_{ij}	$\left(\frac{1}{2}F^2\right)_{y^i y^j}$.
l	Seção distinguida.
A_{ijk}	Coefficientes do tensor de Cartan.
γ^i_{jk}	Símbolos formais de Christoffel.
N^i_j	Conexão não linear.
$\frac{\delta}{\delta x^j}$	$\frac{\partial}{\partial x^j} - N^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}$.
δy^i	$dy^i + N^i_j dx^j$.
∇	Conexão de Chern.
ω_j^i	Coefficientes da conexão de Chern.
Γ^i_{jk}	$\frac{g^{is}}{2} \left(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j} \right)$.
Ω_j^i	2-formas da curvatura de Chern.
R, P, Q	Respectivamente os hh, hv, vv-tensores de curvatura da conexão de Chern.
K	Curvatura flag.

Capítulo 2

$B_{\ \cdot\ }(y, R)$	Bola aberta com centro em y e raio R com respeito a norma $\ \cdot\ $.
$B_{\ \cdot\ }[y, R]$	Bola fechada com centro em y e raio R com respeito a norma $\ \cdot\ $.
$S_{\ \cdot\ }[y, R]$	Esfera com centro em y e raio R com respeito a norma $\ \cdot\ $.
$B_F(y, R)$	Bola aberta com centro em y e raio R com respeito a norma $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
$B_F[y, R]$	Bola fechada com centro em y e raio R com respeito a norma $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
$S_F[y, R]$	Esfera com centro em y e raio R com respeito a norma $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
H_y	Hiperplano suporte.
r	$\max_{y \in S_{\ \cdot\ }[0,1]} F(y)$.
ρ	$\min_{y \in S_{\ \cdot\ }[0,1]} F(y)$.
$B_{\ \cdot\ }(x, v, R)$	Bola aberta com centro em v e raio R em $T_x U$ com respeito a norma $\ \cdot\ $.
$B_{\ \cdot\ }[x, v, R]$	Bola fechada com centro em v e raio R em $T_x U$ com respeito a norma $\ \cdot\ $.
$S_{\ \cdot\ }[x, v, R]$	Esfera com centro em v e raio R em $T_x U$ com respeito a norma $\ \cdot\ $.
$B_F(x, v, R)$	Bola aberta com centro em v e raio R em $T_x U$ com respeito a F .
$B_F[x, v, R]$	Bola fechada com centro em v e raio R em $T_x U$ com respeito a F .
$S_F[x, v, R]$	Esfera com centro em v e raio R em $T_x U$ com respeito a F .
r_U	$\max_{(x,y) \in \bar{U} \times S_{\ \cdot\ }[x,0,1]} F(x, y)$.
ρ_U	$\min_{(x,y) \in \bar{U} \times S_{\ \cdot\ }[x,0,1]} F(x, y)$.
$\hat{F}_\varepsilon(x, y)$	$\int \eta_\varepsilon(z) F(x, y - z) dz$.
$\zeta(y)$	$(1 - \varepsilon)\eta_\varepsilon(y) + \varepsilon \eta_{\frac{2r_U}{\rho_U}}(y)$.
$\tilde{F}_\varepsilon(x, y)$	$\int \zeta_\varepsilon(z) F(x, y - z) dz$.
$\text{Hess}_y \tilde{F}_\varepsilon(x, y)$	Hessiana de $\tilde{F}_\varepsilon(x, y)$ com x fixo.
A	$\{(x, y) \in TU; x \in U, \ y\ \in [1/2, 2r_U/\rho_U]\}$.
$A_{\frac{1}{2}}$	$\{(x, y) \in A; \ y\ = 1/2\}$.

$$\frac{A_{2r_U}}{\rho_U}$$

$$S_\varepsilon(x, r_U)$$

$$G_\varepsilon : TU \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\{(x, y) \in A; \|y\| = 2r_U/\rho_U\}.$$

$$\tilde{F}_\varepsilon^{-1}(r_U) \cap T_x U.$$

Aplicação que restrita a cada espaço tangente é uma norma cuja esfera de raio r_U é $S_\varepsilon(x, r_U)$.

$$\psi_\lambda(\varepsilon)$$

$$\tilde{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y)$$

$$\{\varphi_\lambda\}$$

$$F_\varepsilon(x, y)$$

$$\varepsilon \delta_\lambda.$$

$$\int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) G_{\psi_\lambda(\varepsilon), \lambda}(z, y) dz$$

Partição da unidade.

$$\sum \varphi_\lambda(x) \tilde{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y).$$

Capítulo 3

$$\hat{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y)$$

$$F_\varepsilon(x, y)$$

$$\int \eta_{\psi_\lambda(\varepsilon)}(x - z) F(z, y) dz.$$

$$\sum \varphi_\lambda(x) \hat{F}_{\varepsilon, \lambda}(x, y).$$