UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

Automorfismos de álgebras de incidência finitárias e de idealizações dos espaços de incidência

ROGER EMANUEL MORAES PEZZOTT

Orientadora: Érica Zancanella Fornaroli

Maringá - PR

2019

Automorfismos de álgebras de incidência finitárias e de idealizações dos espaços de incidência

Roger Emanuel Moraes Pezzott

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Érica Zancanella Fornaroli

Maringá - PR

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Pezzott, Roger Emanuel Moraes
P522a Automorfismos de álgebras de incidência finitárias e de idealizações dos espaços de incidência / Roger Emanuel Moraes Pezzott. -- Maringá, 2019.
92 f. : il.

Orientadora: Profª. Drª. Érica Zancanella Fornaroli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas,Programa de Pós-Graduação emMatemática - Área de Concentração: Álgebra, 2019.

1. Álgebra de incidência finitária. 2. Idealização. 3. Automorfismo. 4. Finitary incidence algegras. 5. Idealization. 6. Automorphism. I. Fornaroli, Érica Zancanella, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Àlgebra. III. Título.

CDD 22.ed. 512.4

Edilson Damasio CRB9-1.123

ROGER EMANUEL MORAES PEZZOTT

AUTOMORFISMOS DE ÁLGEBRAS DE INCIDÊNCIA FINITÁRIAS E DE IDEALIZAÇÕES DOS ESPAÇOS DE INCIDÊNCIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Érica Zancanella Fornaroli
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Mykola Khrypchenko
Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis

Profa. Dra. Rosali Brusamarello
Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 26 de fevereiro de 2019.
Local de defesa: Sala 107, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

A Deus, por me fornecer todo o conhecimento para concluir essa nova etapa.

Aos meus pais que, em todo momento de minha vida, me apoiaram e se dedicaram para que meus sonhos se tornassem realidade. Aos meus irmãos, pelo companheirismo e conhecimentos compartilhados. À minha família, que acreditou e torceu por mim.

À minha namorada, que esteve presente em todos os momentos dessa caminhada, me incentivando e motivando sempre que necessário. Também à sua família, pelas orações à mim dedicadas.

À minha orientadora Profª. Drª. Érica Zancanella Fornaroli pela paciência, sabedoria, atenção e empenho na realização deste trabalho. Aos professores da banca, Rosali Brusamarello e Mykola Khrypchenko, pelas sugestões e correções que ajudaram na melhoria do trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UEM por contribuírem com minha formação.

Aos meus amigos, do ensino médio e superior, que me proporcionaram momentos de alegrias e diversões.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Sejam $FI(P,K)$ e $I(P,K)$ a álgebra de incidência finitária e o espaço de incidência de um conjunto parcialmente ordenado P sobre um corpo K, respectivamente. Neste trabalho, apresentamos uma caracterização dos automorfismos de $FI(P,K)$ e da idealização $FI(P,K)(+)I(P,K)$ de $I(P,K)$ por $FI(P,K)$.

Palavras-chave: Álgebra de incidência finitária, idealização, automorfismo.

Abstract

Let $FI(P,K)$ and $I(P,K)$ be the finitary incidence algebra and the incidence space of a partially ordered set P over a field K, respectively. In this work, we present a characterization of the automorphisms of $FI(P,K)$ and of the idealization $FI(P,K)(+)I(P,K)$ of $I(P,K)$ by $FI(P,K)$.

Key words: Finitary incidence algebras, idealization, automorphism.

Sumário

Introdução **ix**

1 Preliminares **1**
1.1 Posets 1
1.2 Anéis e álgebras 5
1.3 Produto semidireto de grupos 17

2 Álgebras de Incidência Finitárias **22**
2.1 Definição e conceitos básicos 22
2.2 Elementos diagonais e idempotentes 30
2.3 O centro da álgebra de incidência finitária 32

3 Isomorfismos e Automorfismos de $FI(P, K)$ **36**
3.1 O problema do isomorfismo 36
3.2 Automorfismos de $FI(P, K)$ 39

4 Automorfismos da idealização $FI(P, K)(+)I(P, K)$ **55**
4.1 Extensões dos automorfismos de $FI(P, K)$ 55
4.2 Idealização do $FI(P, K)$-bimódulo $I(P, K)$ 58
4.3 Derivações 66
4.4 Automorfismos de $D(P, K)$ 72

Referências **90**

Índice **90**

Introdução

As álgebras de incidência foram definidas em 1964 por Rota em [9], como ferramentas para estudar problemas combinatórios. Rapidamente, passaram a ser vistas pelos algebristas como um interessante objeto de estudo, uma vez que tais álgebras podem ser consideradas como uma generalização das álgebras de matrizes triangulares superiores. As álgebras de incidência são definidas sobre um conjunto parcialmente ordenado (poset) localmente finito e um anel comutativo com unidade. Um dos problemas relacionados a tais álgebras é determinar se o fato de duas álgebras de incidência sobre um anel R serem isomorfas implica em um isomorfismo entre os posets que as definem. Este problema ficou conhecido como problema do isomorfismo e teve uma resposta positiva dada por Stanley em [12] no caso em que R é um corpo. Este feito de Stanley proporcionou alguns resultados, ainda em [12], sobre os automorfismos das álgebras de incidência sobre posets finitos. Tais resultados ajudaram Baclawski a descrever os automorfismos das álgebras de incidência de posets localmente finitos sobre corpos.

Em 2009, Khripchenko e Novikov apresentaram em [6] uma generalização das álgebras de incidência para posets arbitrários e as intitularam álgebras de incidência finitárias. Nesse trabalho, Khripchenko e Novikov descreveram algumas propriedades das álgebras de incidência finitárias e também obtiveram uma resposta positiva para o problema do isomorfismo para tais álgebras. Em seguida, Kripchenko forneceu em [7] uma caracterização de seus automorfismos.

No estudo de uma álgebra, um dos principais interesses é descrever os seus automorfismos. Nesse sentido, esta dissertação tem por objetivo descrever os automorfismos das álgebras de incidência finitárias $FI(P, K)$ de um poset P sobre um corpo K e da idealização $D(P, K) = FI(P, K)(+)I(P, K)$ do espaço de incidência $I(P, K)$.

No Capítulo 1 apresentamos um estudo sobre conjuntos parcialmente ordenados e resultados relacionados à sua teoria. Também introduzimos definições e resultados da Teoria de Anéis que serão necessários para o estudo das álgebras de incidência finitárias. Finalmente, a última seção contém informações essenciais sobre o produto semidireto de grupos.

No Capítulo 2 definimos a álgebra de incidência finitária de um poset sobre um corpo

e mostramos alguns resultados envolvendo essa álgebra, entre tais, a descrição dos elementos inversíveis, idempotentes e também do centro dessa álgebra.

O terceiro capítulo está disposto em duas seções. A primeira seção visa somente o Problema do Isomorfismo para álgebras de incidência finitárias. Já na segunda seção, apresentamos um teorema de decomposição de todos os automorfismos de $FI(P, K)$ através da composição de três automorfismos específicos.

No quarto capítulo, realizamos um estudo sobre os elementos idempotentes da idealização $D(P, K)$ e mostramos que duas idealizações $D(P, K)$ e $D(Q, K)$ são isomorfas como K-álgebras se, e somente se, os posets P e Q são isomorfos. Apresentamos ainda uma caracterização das derivações de $FI(P, K)$ em $I(P, K)$. Finalmente, descrevemos os automorfismos de $D(P, K)$ e, mais especificamente, seus automorfismos internos.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem por objetivo introduzir conceitos fundamentais que serão utilizados no decorrer do trabalho. Aqui estão expostos resultados sobre conjuntos parcialmente ordenados, Teoria de Anéis e produto semidireto de grupos.

1.1 Posets

Nesta seção apresentamos conceitos e resultados sobre conjuntos parcialmente ordenados, os quais podem ser encontrados em [10]. Tais conjuntos são indispensáveis, uma vez que são necessários para definir as álgebras de incidência finitárias.

Definição 1.1.1. Um **conjunto parcialmente ordenado** (poset) é um conjunto munido de uma relação de ordem parcial.

Recordemos que uma relação R em um conjunto P é uma relação de ordem parcial se a mesma é reflexiva, antissimétrica e transitiva, ou seja:

1. xRx, para todo $x \in P$;
2. se xRy e yRx então $x = y$;
3. se xRy e yRz então xRz.

Denotaremos a relação de ordem parcial de um poset P por $\leq$. Dizemos que $p, q \in P$ são **comparáveis** se $p \leq q$ ou $q \leq p$. Escreve-se $p < q$ se $p \leq q$ e $p \neq q$.

Exemplo 1.1.2. Os conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$, dos inteiros $\mathbb{Z}$, dos racionais $\mathbb{Q}$ e dos reais $\mathbb{R}$ com suas ordens usuais são posets.

Exemplo 1.1.3. Um conjunto formado por subconjuntos de um conjunto X, com a ordem $\subseteq$ (inclusão) é um poset. Um exemplo simples deste caso pode ser visto quando tomamos um conjunto A e P como sendo o conjunto das partes de A.

Exemplo 1.1.4. Dado um poset $(P, \leq)$, constrói-se o **poset dual** a P, denotado por $\tilde{P}$, formado pelos elementos de P, com a ordem $\preceq$ dada por $x \preceq y$ se $y \leq x$.

Exemplo 1.1.5. Outra ordenação também pode ser estabelecida sobre os números naturais: para p,$q \in \mathbb{N}$ dizemos que $p \mid q$ se p divide q. Entende-se que p divide q se existe um número natural c de modo que $q = cp$. Podemos ver que $(\mathbb{N}, |)$ é um poset. Note que 1 divide todos os números naturais e todos os naturais (incluindo o 0) dividem 0.

Definição 1.1.6. Um elemento x de um poset P é dito **maximal** se sempre que $x \leq y$, com $y \in P$, então $x = y$. Se P tem um elemento x tal que $y \leq x$ para todo $y \in P$, então x é dito o elemento **máximo** de P. Analogamente define-se elemento **minimal** e elemento **mínimo**.

Exemplo 1.1.7. Considere o poset dos números naturais como definido no Exemplo 1.1.5. Neste caso, 1 é o mínimo e 0 é o máximo. Se considerarmos o subconjunto Q dos naturais maiores ou iguais a 2 com a mesma ordem citada anteriormente, temos agora que cada número primo é um elemento minimal desse novo poset que não possui elemento mínimo nem máximo.

Observação 1.1.8. Nota-se que elementos máximos (mínimos) de um poset são maximais (minimais), mas a recíproca nem sempre ocorre.

Seja $(P, \leq)$ um poset e seja $Q \subseteq P$ um subconjunto. É facil ver que, restringindo a Q a ordem de P temos que Q também é um poset. Diremos então que $(Q, \leq)$ é um **subposet** de P.

Definição 1.1.9. Um subconjunto C de um poset é uma **cadeia** se para quaisquer x,$y \in C$ temos $x \leq y$ ou $y \leq x$. Um subconjunto B de um poset é dito uma **anticadeia** se para qualquer par de elementos distintos x,$y \in B$ tem-se $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$. Uma cadeia C é dita ter **comprimento** n se C tem n elementos.

Definição 1.1.10. Dados x e z elementos de um poset P, o **intervalo** ou **segmento** de x a z é o conjunto

$$[x, z] = \{y \in P : x \leq y \leq z\}.$$

Um poset P é **localmente finito** se todo intervalo de P é finito. Um intervalo $[x, y]$ de um poset é dito ter **comprimento** n se existe uma cadeia de comprimento n em $[x, y]$ e qualquer outra cadeia neste intervalo tem comprimento menor ou igual a n.

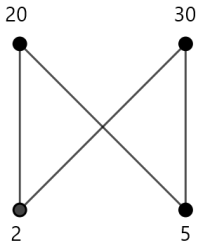
Definição 1.1.11. Dizemos que os elementos x e y de um poset P são **conexos** se para algum inteiro positivo n existem $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ elementos de P com $x_i \leq x_{i+1}$

ou $x_{i+1} \leq x_i$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Observe que a conexidade de elementos de P é uma relação de equivalência cujas classes são chamadas de **componentes conexas** de P. Todo poset P pode então ser escrito como a união disjunta das suas componentes conexas.

Definição 1.1.12. Um poset P é dito **conexo** quando possui apenas uma componente conexa, ou seja, dados quaisquer $x, y \in P$, existe uma sequência $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ de elementos de P tal que $x_i \leq x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \leq x_i$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

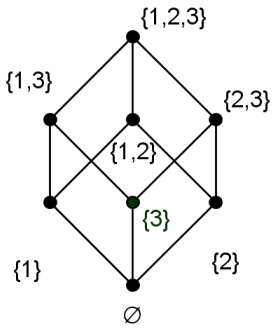
Os posets finitos (e alguns casos particulares de enumeráveis) podem ser representados visualmente pelos diagramas de Hasse. Tais diagramas consistem de pontos, que chamamos de vértices, que representam os elementos do poset, e segmentos de reta, que determinam a relação entre os elementos. Sempre que um elemento y "cobrir"um elemento x (ou seja, $x \leq y$ e $[x, y] = \{x, y\}$) ambos devem ser ligados por um segmento de reta, e a posição do ponto que representa o elemento coberto, no caso x, deve ser inferior à do ponto que representa o elemento que o cobre, no caso y.

Exemplo 1.1.13. Considere o subconjunto $Q = \{2, 5, 20, 30\} \subseteq \mathbb{N}$ com a ordem $|$ de $\mathbb{N}$. Um diagrama de Hasse que representa esse poset é o seguinte:



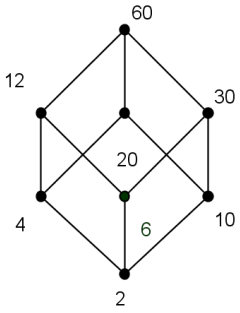
Note que Q é um poset conexo.

Exemplo 1.1.14. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e considere o poset P como sendo o conjunto das partes do conjunto A com a ordem $\subseteq$ (inclusão) dada no Exemplo 1.1.3. Um diagrama de Hasse que representa esse poset é o seguinte:

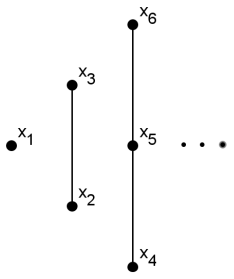


O poset P também é conexo.

Exemplo 1.1.15. Considere $Q = \{2, 4, 6, 10, 12, 20, 30, 60\} \subseteq \mathbb{N}$ onde Q herda a ordem $|$ de divisão dos naturais. Observe que Q e o poset P do Exemplo 1.1.14 possuem diagramas de Hasse semelhantes.



Exemplo 1.1.16. Seja $P = \{x_i : i \in \mathbb{N},\ i \geq 1\}$ o poset enumerável representado pelo diagrama de Hasse a seguir:



Observe que P não é conexo, uma vez que existem pontos de P que não podem ser ligados por nenhuma sequência de segmentos de reta.

Definição 1.1.17. Sejam $(P, \leq_P)$ e $(Q, \leq_Q)$ posets e seja $\alpha : P \to Q$ uma bijeção. Dizemos que α é um **isomorfismo** se para todos $x, y \in P$,

$$x \leq_P y \Leftrightarrow \alpha(x) \leq_Q \alpha(y).$$

Um isomorfismo $P \to P$ é dito um **automorfismo** de P.

Exemplo 1.1.18. Considere os posets P e Q como dados nos Exemplos 1.1.14 e 1.1.15, respectivamente, e considere a aplicação $\alpha : Q \to P$ definida da seguinte forma: $\alpha(2) = \varnothing$, $\alpha(4) = \{2\}$, $\alpha(6) = \{3\}$, $\alpha(10) = \{1\}$, $\alpha(12) = \{2, 3\}$, $\alpha(20) = \{1, 2\}$, $\alpha(30) = \{1, 3\}$, $\alpha(60) = \{1, 2, 3\}$.

É fácil ver que α é um isomorfismo de posets.

Observação 1.1.19. Note que elementos máximos e mínimos são preservadas por isomorfismos de posets.

Proposição 1.1.20. *Sejam $(P, \leq_P)$,$(Q, \leq_Q)$,$(Z, \leq_Z)$ posets e sejam $\alpha : P \to Q$ e $\beta : Q \to Z$ isomorfismos. Então $\beta \circ \alpha$ e α^{-1} são isomorfismos.*

Demonstração. Dados $x, y \in P$ temos

$$x \leq_P y \Leftrightarrow \alpha(x) \leq_Q \alpha(y) \Leftrightarrow \beta(\alpha(x)) \leq_Z \beta(\alpha(y)) \Leftrightarrow (\beta \circ \alpha)(x) \leq_Z (\beta \circ \alpha)(y).$$

Como α e β são bijetoras, $\beta \circ \alpha$ tambem é. Portanto $\beta \circ \alpha$ é um isomorfismo. Agora, como α é bijetora, α^{-1} também é. Sejam $y_1, y_2 \in Q$. Como α é bijetora, existem $x_1, x_2 \in P$ tais que $\alpha(x_1) = y_1$ e $\alpha(x_2) = y_2$, ou seja, $\alpha^{-1}(y_1) = x_1$ e $\alpha^{-1}(y_2) = x_2$. Assim,

$$y_1 \leq_Q y_2 \Leftrightarrow \alpha(x_1) \leq_Y \alpha(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_P x_2 \Leftrightarrow \alpha^{-1}(y_1) \leq_P \alpha^{-1}(y_2)$$

e α^{-1} é um isomorfismo. □

1.2 Anéis e álgebras

A presente seção contém alguns tópicos da Teoria de Anéis que serão utilizados no decorrer da dissertação.

Definição 1.2.1. Um **anel** R é um conjunto não vazio dado com duas operações binárias

$$\begin{array}{rccccc} + : & R \times R & \longrightarrow & R & \text{e} \quad \cdot : & R \times R \longrightarrow R \\ & (a, b) & \longmapsto & a + b & & (a, b) \longmapsto ab \end{array}$$

chamadas **adição** e **multiplicação**, respectivamente, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todos $a, b, c \in R$;

(ii) $a + b = b + a$, para todos $a, b \in R$;

(iii) Existe $0 \in R$ tal que $a + 0 = a$, para todo $a \in R$;

(iv) Para cada $a \in R$ existe $-a \in R$ tal que $a + (-a) = 0$;

(v) $a(bc) = (ab)c$, para todos $a, b, c \in R$;

(vi) $a(b + c) = ab + ac$ e $(a + b)c = ac + bc$, para todos $a, b, c \in R$;

(vii) Existe $1 \in R$ tal que $a1 = 1a = a$, para todo $a \in R$ (o elemento 1 é chamado **unidade** de R).

Se, além disso, R satisfazer

(viii) $ab = ba$, para todos $a, b \in R$,

dizemos que R é um **anel comutativo**.

Exemplo 1.2.2. Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são anéis comutativos com as operações usuais de adição e multiplicação.

Exemplo 1.2.3. Seja R um anel e seja $n \geq 1$ um inteiro. O conjunto das matrizes de ordem $n \times n$ sobre R, $M_n(R)$, com as operações usuais de adição e multiplicação de matrizes, é um anel. Os subconjuntos $UT_n(R)$ e $LT_n(R)$ de $M_n(R)$ formados pelas matrizes triagulares superiores e pelas matrizes triangulares inferiores, respectivamente, também são anéis com as operações usuais. Note que se $n > 1$ e R é não nulo, então $M_n(R)$, $UT_n(R)$ e $LT_n(R)$ são anéis não comutativos.

Exemplo 1.2.4. Seja $\{R_i : i \in I\}$ um conjunto de anéis. O produto cartesiano $\prod_{i \in I} R_i$ é um anel com as operações

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) \text{ e } (a_i)(b_i) = (a_i b_i),$$

chamado **produto direto** dos anéis R_i, $i \in I$.

Exemplo 1.2.5. O conjunto $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ $(n \geq 2)$ dos inteiros módulo n é um anel comutativo com as operações $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$ e $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$.

Definição 1.2.6. Dado um anel R, definimos o **centro** de R como sendo o conjunto

$$\text{Cen}(R) = \{r \in R : rs = sr, \text{ para todo } s \in R\}.$$

Exemplo 1.2.7. Seja $\{R_i : i \in I\}$ um conjunto de anéis e considere o produto direto $\prod_{i \in I} R_i$. Então $\text{Cen}\left(\prod_{i \in I} R_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Cen}(R_i)$.

Definição 1.2.8. Dado um anel R, um elemento $a \in R$ é **inversível à direita** se existir $b \in R$ tal que $ab = 1$. O elemento b é chamado de **inverso à direita** de a. Analogamente a é **inversível à esquerda** se existir $c \in R$ tal que $ca = 1$. Neste caso, o elemento c é chamado de **inverso à esquerda** de a.

Proposição 1.2.9. *Seja R um anel e seja $a \in R$. Se a possui um inverso à direita e um inverso à esquerda então estes coincidem e, neste caso, dizemos que a é **inversível** em R e seu inverso será denotado por a^{-1}.*

Demonstração. Sejam $r, t \in R$ tais que $ra = at = 1$. Então

$$r = r1 = r(at) = (ra)t = 1t = t.$$

□

O conjunto de todos os elementos inversíveis de um anel R será denotado por $U(R)$.

Definição 1.2.10. Um anel não nulo R tal que $U(R) = R - \{0\}$ é dito um **anel com divisão**. Um anel com divisão comutativo R é chamado de **corpo**.

Exemplo 1.2.11. Os anéis $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, onde p é primo, são anéis com divisão comutativos, isto é, são corpos.

Exemplo 1.2.12. Os anéis $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$, onde n não é primo, não são corpos.

Definição 1.2.13. Um subconjunto S de um anel R é um **subanel** de R se:

(i) $1 \in S$;

(ii) Dados $a, b \in S$, $a - b \in S$;

(iii) Dados $a, b \in S$, $ab \in S$.

Exemplo 1.2.14. Sejam $M_n(R)$, $UT_n(R)$ e $LT_n(R)$ os conjuntos de matrizes definidos no Exemplo 1.2.3. Então $UT_n(R)$ e $LT_n(R)$ são subanéis de $M_n(R)$.

Exemplo 1.2.15. Se R é um anel, então $\mathrm{Cen}(R)$ é um subanel de R. De fato, claramente $1 \in \mathrm{Cen}(R)$ e se $a, b \in \mathrm{Cen}(R)$ e $s \in R$, então

$$(a - b)s = as - bs = sa - sb = s(a - b)$$

e

$$(ab)s = a(bs) = a(sb) = (as)b = (sa)b = s(ab).$$

Assim, $a - b, ab \in \mathrm{Cen}(R)$ e, portanto, $\mathrm{Cen}(R)$ é um subanel de R.

Definição 1.2.16. Um subconjunto I de um anel R é dito um **ideal à esquerda** de R se

(i) $0 \in I$;

(ii) Dados $a, b \in I$, $a + b \in I$;

(iii) Dados $a \in I$ e $r \in R$, $ra \in I$.

A definição de ideal à direita é simétrica.

Definição 1.2.17. Um subconjunto I de um anel R é um **ideal** (ou **ideal bilateral**) de R se I for um ideal à esquerda e à direita de R.

Exemplo 1.2.18. O subconjunto de $UT_n(R)$ formado pelas matrizes com diagonal nula é um ideal de $UT_n(R)$.

Exemplo 1.2.19. Seja R um anel e seja $\{A_i : i \in I\}$ um conjunto formado por ideais à esquerda (direita) de R. É fácil ver que $\bigcap_{i \in I} A_i$ é um ideal à esquerda (direita) de R.

Exemplo 1.2.20. Se R é um anel e $a \in R$, então $aR = \{ar : r \in R\}$ é um ideal à direita e $Ra = \{ra : r \in R\}$ é um ideal à esquerda de R.

Proposição 1.2.21. *Sejam I e J ideais à esquerda (direita) de um anel R. Então $I + J = \{i + j : i \in I \text{ e } j \in J\}$ é um ideal à esquerda (direita) de R.*

Demonstração. Como $0 \in I$ e $0 \in J$, então $0 = 0 + 0 \in I + J$. Se $a, b \in I + J$, temos que a e b são da forma $a = i + j$ e $b = k + l$, onde $i, k \in I$ e $j, l \in J$. Daí,

$$a + b = (i + j) + (k + l) = (i + k) + (j + l) \text{ onde } i + k \in I \text{ e } j + l \in J,$$

concluindo que $a + b \in I + J$. E, se $r \in R$, temos

$$ra = r(i + j) = ri + rj \text{ onde } ri \in I \text{ e } rj \in J,$$

concluindo assim que $ra \in I + J$.

O caso à direita é análogo. □

Proposição 1.2.22. *Seja R um anel e seja I um ideal à esquerda (direita) de R. Se I possui um elemento inversível à esquerda (direita) então $I = R$.*

Demonstração. Suponhamos que I seja um ideal à esquerda de R e que $a \in I$ seja um elemento inversível à esquerda. Então existe $b \in R$ tal que $ba = 1$ e assim $1 \in I$. Consequentemente, para todo $r \in R$ temos que $r = r1 \in I$, assim $R \subseteq I$ e, portanto, $I = R$.

O caso à direita é análogo. □

Definição 1.2.23. Seja R um anel e seja M um ideal à esquerda de R. Dizemos que M é um **ideal à esquerda maximal** de R se $M \neq R$ e, sempre que existir um ideal à esquerda I de R tal que $M \subseteq I$, então $I = M$ ou $I = R$.

Analogamente, definimos ideal à direita maximal.

Se R é um anel não nulo é possível mostrar, usando o Lema de Zorn, que todo ideal à esquerda (direita) próprio de R está contido em um ideal à esquerda (direita) maximal. Em particular, R contém ideais à esquerda (direita) maximais.

Definição 1.2.24. Seja R um anel não nulo. O **radical de Jacobson** de R, denotado por $J(R)$, é a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de R. Se $R = \{0\}$, definimos $J(R) = \{0\}$.

Observação 1.2.25. É possível verificar que $J(R)$ é igual à interseção de todos os ideais à direita maximais e, assim, poderíamos trocar esquerda por direita na definição acima.

Exemplo 1.2.26. Se R é um anel com divisão, então $J(R) = \{0\}$, uma vez que o único ideal à esquerda próprio de R é $\{0\}$.

Proposição 1.2.27. *Seja R um anel. Então $J(R)$ é o conjunto de todos elementos $r \in R$ tais que $1 - tr$ é inversível à esquerda para todo $t \in R$.*

Demonstração. Se $r \in J(R)$, então $r \in M$ para todo ideal à esquerda maximal M de R. Logo, por M ser ideal à esquerda, $tr \in M$, para todo $t \in R$. Pela Proposição 1.2.22, $1 \notin M$, então $1 - tr \notin M$, para todo ideal à esquerda maximal M de R. Segue que o ideal à esquerda $R(1 - tr)$ de R não está contido em nenhum ideal à esquerda maximal de R. Logo $R(1 - tr) = R$ e, portanto, existe $a \in R$ tal que $a(1 - tr) = 1$, ou seja, $1 - tr$ é inversível à esquerda em R.

Reciprocamente, seja $r \in R$ tal que $1 - tr$ é inversível à esquerda para todo $t \in R$. Então, pela Proposição 1.2.22, $1 - tr \notin M$ para cada ideal à esquerda maximal M de R, uma vez que $M \neq R$. Logo, $m \neq 1 - tr$ para cada $m \in M$, ou seja, $1 \neq m + tr$ para cada $m \in M$. Segue que $1 \notin M + Rr$. Pela Proposição 1.2.21, $M + Rr$ é um ideal à esquerda e ainda $M \subseteq M + Rr \neq R$. Pela maximalidade de M, $M = M + Rr$ e, consequentemente, $Rr \subseteq M$. Portanto $r \in M$ para cada ideal à esquerda maximal de R, ou seja, $r \in J(R)$. □

Proposição 1.2.28. *Seja R um anel. Então $J(R)$ é um ideal de R.*

Demonstração. Pelo Exemplo 1.2.19 temos que $J(R)$ é um ideal à esquerda, assim basta mostrar que $J(R)$ é um ideal à direita.

Sejam $s \in J(R)$ e $r \in R$. Queremos mostrar que $sr \in J(R)$. Pela proposição anterior, basta mostrar que $1 - usr$ é inversível à esquerda, para todo $u \in R$. Como $s \in J(R)$

temos que $rus \in J(R)$, para todo $u \in R$, pois $J(R)$ é um ideal à esquerda de R. Pela proposição anterior, existe $v \in R$ tal que $v(1 - rus) = 1$, então $vrus = v - 1$. Segue que $(1 + usvr)(1 - usr) = 1 - usr + usvr - us(vrus)r = 1 - usr + usvr - usvr + usr = 1$. Portanto, $1 - usr$ é inversível à esquerda, para todo $u \in R$. □

Definição 1.2.29. Dizemos que um elemento $e \in R$ é um **idempotente** se $e^2 = e$. Um idempotente não nulo e é **primitivo** se $re = er = r$, para algum idempotente $r \in R$, implica que $r = 0$ ou $r = e$.

Definição 1.2.30. Dados R e S anéis, um **homomorfismo** de R em S é uma função $f : R \to S$ tal que

(i) $f(1_R) = 1_S$;

(ii) $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in R$;

(iii) $f(ab) = f(a)f(b)$, para todos $a, b \in R$.

Se, além disso, f for bijetora, então diremos que f é um **isomorfismo** de anéis. Um isomorfismo de R em R é dito um **automorfismo** de R.

É fácil ver que a composta de homomorfismos de anéis é um homomorfismo e que a inversa de um isomorfismo é um isomorfismo.

Exemplo 1.2.31. Se $f : R \to S$ é um homomorfismo de anéis, então $\ker f = \{a \in R : f(a) = 0_S\}$ é um ideal de R e $\operatorname{Im} f$ é um subanel de S.

Teorema 1.2.32. (*Teorema do Isomorfismo*) *Seja $f : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Então $\dfrac{R}{\ker f}$ é isomorfo a $\operatorname{Im} f$.*

Demonstração. Seja $\psi : \dfrac{R}{\ker f} \to \operatorname{Im} f$ dada por $\psi(r + \ker f) = f(r)$, para todo $r + \ker f \in \dfrac{R}{\ker f}$. Se $r_1, r_2 \in R$ são tais que $r_1 + \ker f = r_2 + \ker f$, então $r_1 - r_2 \in \ker f$, ou seja, $f(r_1 - r_2) = 0_S$ e, consequentemente, $f(r_1) = f(r_2)$. Logo $\psi(r_1 + \ker f) = f(r_1) = f(r_2) = \psi(r_2 + \ker f)$ e, portanto, ψ está bem definida. Mostremos que ψ é um homomorfismo de anéis. Sejam $r_1, r_2 \in R$. Temos

$$\psi(1_R + \ker f) = f(1_R) = 1_S,$$

$$\begin{aligned}\psi([r_1 + \ker f] + [r_2 + \ker f]) = \psi([r_1 + r_2] + \ker f) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)\\ = \psi(r_1 + \ker f) + \psi(r_2 + \ker f)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\psi([r_1 + \ker f][r_2 + \ker f]) &= \psi([r_1 r_2] + \ker f) = f(r_1 r_2) = f(r_1)f(r_2) \\ &= \psi(r_1 + \ker f)\psi(r_2 + \ker f).\end{aligned}$$

Portanto, ψ é um homomorfismo. Claramente, ψ é sobrejetor. Além disso, se $r + \ker f \in \ker(\psi)$, então $r \in \ker f$ e, consequentemente, $r + \ker f = 0_R + \ker f$. Logo, $\ker \psi = \{0_R + \ker f\}$ e f é injetora. Portanto ψ é um isomorfismo. □

Proposição 1.2.33. *Sejam R e S anéis e seja $\psi : R \to S$ um homomorfismo.*

(i) Se $e \in R$ é um idempotente, então $\psi(e)$ é um idempotente de S.

(ii) Se ψ é um isomorfismo e $e \in R$ é um idempotente primitivo, então $\psi(e)$ é um idempotente primitivo de S.

Demonstração. (i) Se $e \in R$ é idempotente então $\psi(e) = \psi(e^2) = \psi(e)\psi(e) = \psi(e)^2$. Portanto $\psi(e)$ é um idempotente de S.

(ii) Seja $e \in R$ um idempotente primitivo. Pelo item (i) segue que $\psi(e)$ é idempotente. Suponha que $s\psi(e) = \psi(e)s = s$ para algum idempotente $s \in S$. Como ψ é sobrejetora, existe $r \in R$ tal que $\psi(r) = s$. Logo, $\psi(re) = \psi(r)\psi(e) = s\psi(e) = s = \psi(r)$ e, como ψ é injetora, $re = r$. Analogamente, $er = r$ e, portanto, $re = er = r$. Como ψ^{-1} é um isomorfismo, segue pelo (i) que r é idempotente, uma vez que $r = \psi^{-1}(s)$. Logo, pela primitividade de e, segue que $r = 0$ ou $r = e$ e, consequentemente, $s = 0$ ou $s = \psi(e)$. Portanto $\psi(e)$ é idempotente primitivo. □

Definição 1.2.34. Seja R um anel. Um R-**módulo à direita** é um grupo abeliano aditivo M dado com uma função (**produto por escalar**)

$$\begin{array}{ccc} M \times R & \longrightarrow & M \\ (m, r) & \longmapsto & mr \end{array}$$

tal que

(i) $(m + n)r = mr + nr$, para todos $m, n \in M$ e $r \in R$;

(ii) $m(r + s) = mr + ms$, para todos $m \in M$ e $r, s \in R$;

(iii) $m(rs) = (mr)s$, para todos $m \in M$ e $r, s \in R$;

(iv) $m1_R = m$, para todo $m \in M$.

R-módulos à esquerda são definidos simetricamente.

Exemplo 1.2.35. Se R é um anel e I um ideal à direita de R, então I é um R-módulo à direita.

Exemplo 1.2.36. Seja $\{M_i : i \in I\}$ um conjunto de R-módulos à direita. O produto cartesiano $\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i) : m_i \in M_i\}$ tem uma estrutura de R-módulo à direita dada por

$$(m_i) + (n_i) = (m_i + n_i) \text{ e } (m_i)r = (m_i r), r \in R,$$

chamado **produto direto** dos R-módulos M_i, $i \in I$.

Definição 1.2.37. Seja M um R-módulo à direita. Um subconjunto N de M é um **submódulo** de M se N é não vazio e, dados $m, n \in N$ e $r \in R$,

(i) $m + n \in N$;

(ii) $nr \in N$.

Exemplo 1.2.38. Seja $\{M_i : i \in I\}$ um conjunto de R-módulos à direita e seja N o subconjunto de $M = \prod_{i\in I} M_i$ formado pelos elementos (x_i) para os quais o conjunto $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ é finito. Então N é um submódulo de M, o qual é denotado por $\bigoplus_{i\in I} M_i$ e é chamado de **soma direta** dos R-módulos M_i, $i \in I$.

Definição 1.2.39. Sejam R e S anéis e seja M um grupo abeliano aditivo. Dizemos que M é um (R, S)-**bimódulo** se M for um R-módulo à esquerda, um S-módulo à direita e $(rm)s = r(ms)$, para todos $r \in R$, $s \in S$ e $m \in M$. Se $R = S$, dizemos apenas que M é um R-bimódulo.

Exemplo 1.2.40. Dado um anel R, se I for um ideal de R, então I é um R-bimódulo.

Definição 1.2.41. Sejam M e N R-módulos à direita. Um **homomorfismo** de M em N é uma função $\varphi : M \to N$ tal que, dados $m, n \in M$ e $r \in R$

(i) $\varphi(m + n) = \varphi(m) + \varphi(n)$;

(ii) $\varphi(mr) = \varphi(m)r$.

Se, além disso, φ for bijetora, então diremos que φ é um **isomorfismo** de R-módulos. Simetricamente, definimos homomorfismo (isomorfismo) entre R-módulos à esquerda.

Proposição 1.2.42. *Sejam M e N R-módulos à direita.*

(i) $\mathrm{Hom}_R(M,N) = \{f : M \to N : f$ *é um homomorfismo*$\}$ *é um grupo abeliano com a operação de adição dada por*

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m),$$

para todos $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$*, para todo* $m \in M$*.*

(ii) $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M,M)$ *é um anel com a operação de adição definida acima e a multiplicação dada por*

$$(fg)(m) = (f \circ g)(m),$$

para todos $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$*, para todo* $m \in M$*.*

A demonstração da proposição acima é longa, mas rotineira e por isso vamos omiti-la. Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_n$ R-módulos à direita e seja

$$[\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)] = \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_R(M_1,M_1) & \mathrm{Hom}_R(M_2,M_1) & \cdots & \mathrm{Hom}_R(M_n,M_1) \\ \mathrm{Hom}_R(M_1,M_2) & \mathrm{Hom}_R(M_2,M_2) & \cdots & \mathrm{Hom}_R(M_n,M_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Hom}_R(M_1,M_n) & \mathrm{Hom}_R(M_2,M_n) & \cdots & \mathrm{Hom}_R(M_n,M_n) \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} : \phi_{ij} \in \mathrm{Hom}_R(M_j, M_i) \right\}.$$

Em $[\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)]$ definimos as seguintes operações

$$(\phi_{ij}) + (\psi_{ij}) = (\phi_{ij} + \psi_{ij}) \text{ e } (\phi_{ij})(\psi_{ij}) = (\rho_{ij}), \text{ onde } \rho_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik} \circ \psi_{kj}.$$

Com essas operações, é fácil ver que $[\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)]$ é um anel, onde

$$1_{[\mathrm{Hom}_R(M_j,M_i)]} = \begin{bmatrix} Id_{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Id_{M_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Id_{M_n} \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.2.43. *O anel* $[\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)]$ *é isomorfo a* $\mathrm{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right)$.

Demonstração. Seja $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ e considere as funções projeções e inclusões definidas, respectivamente, por

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_j : & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i & \longrightarrow & M_j & \text{e} & \mu_j : & M_j & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \\ & (a_i) & \longmapsto & a_j & & & b & \longmapsto & (b_i) \end{array},$$

onde $b_i = \begin{cases} b & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$. É fácil ver que π_j e μ_j são homomorfismos de R-módulos à direita, para todo $j = 1, \ldots, n$. Defina $\Phi : \mathrm{End}_R(M) \to [\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)]$ e $\Psi : [\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)] \to \mathrm{End}_R(M)$ por $\Phi(\phi) = (\pi_i \circ \phi \circ \mu_j)$ e $\Psi((\phi_{ij})) = \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \circ \phi_{ij} \circ \pi_j$. Sabendo que $\pi_j \circ \mu_k = \delta_{jk} Id_{M_j}$, onde δ_{jk} é o delta de Kronecker e $\sum_{j=1}^{n} \mu_j \circ \pi_j = Id_M$, facilmente verifica-se que Φ é um homomorfismo de anéis e que $\Phi^{-1} = \Psi$. Portanto Φ é um isomorfismo de anéis. □

Observação 1.2.44. Pela proposição anterior, dado $\phi \in \mathrm{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right)$, ϕ pode ser visto como uma matriz (ϕ_{ij}) com $\phi_{ij} = \pi_i \circ \phi \circ \mu_j \in \mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)$ e $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Seja $(a_i) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ e denotemos $(b_i) = \phi((a_i))$. Temos

$$\begin{aligned} b_l = \pi_l((b_i)) &= (\pi_l \circ \phi)((a_i)) = (\pi_l \circ \phi)((a_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, a_n)) \\ &= (\pi_l \circ \phi)(\mu_1(a_1) + \cdots + \mu_n(a_n)) = (\pi_l \circ \phi \circ \mu_1)(a_1) + \cdots + (\pi_l \circ \phi \circ \mu_n)(a_n) \\ &= \phi_{l1}(a_1) + \cdots + \phi_{ln}(a_n). \end{aligned}$$

Logo, $\phi((a_i)) = (\phi_{i1}(a_1) + \cdots + \phi_{in}(a_n))$.

Identificando ϕ com (ϕ_{ij}) e (a_i) com $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ podemos escrever

$$\phi((a_i)) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(a_1) + \cdots + \phi_{1n}(a_n) \\ \phi_{21}(a_1) + \cdots + \phi_{2n}(a_n) \\ \vdots \\ \phi_{n1}(a_1) + \cdots + \phi_{nn}(a_n) \end{pmatrix}.$$

Definição 1.2.45. Sejam K um anel comutativo e R um anel. Se R é um K-módulo à esquerda satisfazendo

$$k(ab) = (ka)b = a(kb), \text{ para todo } k \in K \text{ e para todos } a, b \in R,$$

então R é dito uma K**-álgebra**.

Observação 1.2.46. Se K é um corpo, então uma K-álgebra R é, em particular, um K-espaço vetorial.

Exemplo 1.2.47. Seja $\{A_i : i \in I\}$ um conjunto de K-álgebras. O produto direto $\prod_{i\in I} A_i$ é uma K-álgebra com o produto por escalar dado por $k(a_i) = (ka_i)$, para todos $k \in K$ e $(a_i) \in \prod_{i\in I} A_i$. Tal K-álgebra é denominada **produto direto** das K-álgebras A_i, $i \in I$.

Exemplo 1.2.48. Seja K um anel comutativo e seja $M_n(K)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ sobre K. Com a adição e a multiplicação usual de matrizes e o produto por escalar usual, $M_n(K)$ é uma K-álgebra.

Definição 1.2.49. Um subanel S de uma K-álgebra A é uma **subálgebra** se $ka \in S$, para todos $k \in K$ e $a \in S$.

Exemplo 1.2.50. Seja K um anel comutativo. Então $UT_n(K)$ e $LT_n(K)$ são subálgebras de $M_n(K)$.

Exemplo 1.2.51. Seja K um anel comutativo e seja R uma K-álgebra. Então $\text{Cen}(R)$ é uma subálgebra de R. De fato, já sabemos que $\text{Cen}(R)$ é um subanel de R. Sejam $k \in K$, $s \in \text{Cen}(R)$ e $r \in R$. Temos

$$(ks)r = k(sr) = k(rs) = r(ks)$$

e, portanto, $ks \in \text{Cen}(R)$.

Definição 1.2.52. Dadas duas K-álgebras A e B, uma função $f : A \to B$ é um **homomorfismo de K-álgebras** se f for um homomorfismo de anéis e um homomorfismo de K-módulos à esquerda. Se f for bijetora, então diremos que f é um **isomorfismo de K-álgebras**. E, além disso, se f for um isomorfismo de uma K-álgebra A sobre ela mesma, diremos que f é um **automorfismo** de A.

Observação 1.2.53. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ homomorfismos de K-álgebras. Então $g \circ f : A \to C$ é um homomorfismo de K-álgebras. Se f é um isomorfismo, então f^{-1} também é um isomorfismo.

Exemplo 1.2.54. Seja A uma K-álgebra e seja $a \in U(A)$. Então $\psi_a : A \to A$ definida por $\psi_a(x) = axa^{-1}$ é um automorfismo de A, denominado **automorfismo interno**. De fato, sejam $x, y \in A$ e $k \in K$. Temos

$$\psi_a(1) = a1a^{-1} = aa^{-1} = 1,$$

$$\psi_a(x+y) = a(x+y)a^{-1} = axa^{-1} + aya^{-1} = \psi_a(x) + \psi_a(y),$$

$$\psi_a(xy) = a(xy)a^{-1} = ax1ya^{-1} = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \psi_a(x)\psi_a(y),$$

e

$$\psi_a(kx) = a(kx)a^{-1} = k(ax)a^{-1} = k\psi_a(x).$$

Logo ψ_a é um homomorfismo de K-álgebras. Além disso, note que $\psi_a \circ \psi_{a^{-1}} = \psi_{a^{-1}} \circ \psi_a = Id_A$, isto é, $\psi_{a^{-1}} = (\psi_a)^{-1}$. Portanto ψ_a é um isomorfismo.

Definição 1.2.55. Seja K um corpo. Uma K-álgebra A é dita **central** se $\mathrm{Cen}(A) = \{k1_A : k \in K\}$ e é dita **fracamente central** se para cada $x \in \mathrm{Cen}(A)$, existe um idempotente $e \in A$ tal que $x + e$ é inversível em A e $xe = ex = 0$.

Observação 1.2.56. Se A é uma K-álgebra central, então A é fracamente central. De fato, seja $x \in \mathrm{Cen}(A)$. Se $x = 0_A$, tome o idempotente $1_A \in A$. Se $x \neq 0_A$, então existe $k \in K - \{0\}$ tal que $x = k1_A$. Como K é corpo, x é inversível e assim, basta tomar o idempotente 0_A.

Proposição 1.2.57. *Sejam K um corpo e $\{A_i : i \in I\}$ um conjunto de K-álgebras centrais. Então o produto direto $\prod_{i\in I} A_i$ é uma K-álgebra fracamente central.*

Demonstração. Para cada $i \in I$, temos que $\mathrm{Cen}(A_i) = \{k1_{A_i} : k \in K\}$, uma vez que A_i é central. Seja $x = (x_i) \in \mathrm{Cen}\left(\prod_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Cen}(A_i)$. Assim, $x_i \in \mathrm{Cen}(A_i)$ e, consequentemente, $x_i = k_i 1_{A_i}$, para cada $i \in I$. Tome $e = (e_i) \in \prod_{i\in I} A_i$, onde $e_i = \begin{cases} 1_{A_i} & \text{se } k_i = 0 \\ 0_{A_i} & \text{se } k_i \neq 0 \end{cases}$. Temos que $e^2 = (e_i)(e_i) = (e_ie_i) = (e_i) = e$ e $x + e = (n_i)$ com $n_i = \begin{cases} 1_{A_i} & \text{se } k_i = 0 \\ k_i 1_{A_i} & \text{se } k_i \neq 0 \end{cases}$. Assim, e é idempotente e $x + e$ é inversível. Além disso,

$$xe = (x_i)(e_i) = (x_ie_i) = (0_{A_i}) = (e_ix_i) = (e_i)(x_i) = ex.$$

Portanto $\prod_{i\in I} A_i$ é fracamente central. □

1.3 Produto semidireto de grupos

Nesta seção, introduziremos um grupo chamado produto semidireto. Propriedades desse grupo aqui expostas podem ser encontradas em [4] e serão utilizadas no estudo dos grupos de automorfismos das álgebras de incidência finitárias e de idealizações dos espaços de incidência. Assumiremos conhecidos resultados básicos da Teoria de Grupos e alguns conceitos como subgrupos (normais) e homomorfismos.

Sejam K e H grupos e seja $\gamma : K \to \mathrm{Aut}(H)$ um homomorfismo do grupo K no grupo dos automorfismos de H. Em $K \times H$ definimos uma operação $\cdot_\gamma$ dada por

$$(k_1, h_1) \cdot_\gamma (k_2, h_2) = (k_1 k_2, h_1 \gamma(k_1)(h_2)).$$

Com isso, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.3.1. *Sejam K, H grupos e $\gamma : K \to \mathrm{Aut}(H)$ um homomorfismo. Então $(K \times H, \cdot_\gamma)$ é um grupo.*

Demonstração. Sejam $(k_1, h_1), (k_2, h_2), (k_3, h_3) \in K \times H$. Temos

$$\begin{aligned}
[(k_1, h_1) \cdot_\gamma (k_2, h_2)] \cdot_\gamma (k_3, h_3) &= (k_1 k_2, h_1 \gamma(k_1)(h_2)) \cdot_\gamma (k_3, h_3) \\
&= ([k_1 k_2] k_3, h_1 \gamma(k_1)(h_2) \gamma(k_1 k_2)(h_3)) \\
&= ([k_1 k_2] k_3, h_1 \gamma(k_1)(h_2) \gamma(k_1)(\gamma(k_2)(h_3))) \\
&= (k_1 [k_2 k_3], h_1 \gamma(k_1)(h_2 \gamma(k_2)(h_3))) \\
&= (k_1, h_1) \cdot_\gamma (k_2 k_3, h_2 \gamma(k_2)(h_3)) \\
&= (k_1, h_1) \cdot_\gamma [(k_2, h_2) \cdot_\gamma (k_3, h_3)],
\end{aligned}$$

isto é, a operação $\cdot_\gamma$ é associativa. Agora, considere $(e_K, e_H) \in K \times H$. Note que

$$(k_1, h_1) \cdot_\gamma (e_K, e_H) = (k_1 e_K, h_1 \gamma(k_1)(e_H)) = (k_1, h_1 e_H) = (k_1, h_1)$$

e

$$(e_K, e_H) \cdot_\gamma (k_1, h_1) = (e_K k_1, e_H \gamma(e_K)(h_1)) = (k_1, Id_H(h_1)) = (k_1, h_1).$$

Logo, (e_K, e_H) é o elemento neutro da operação $\cdot_\gamma$. Por fim, dado $(k_1, h_1) \in K \times H$, considere o elemento $(k_1^{-1}, \gamma(k_1^{-1})(h_1^{-1})) \in K \times H$. Temos

$$\begin{aligned}
(k_1, h_1) \cdot_\gamma (k_1^{-1}, \gamma(k_1^{-1})(h_1^{-1})) &= (k_1 k_1^{-1}, h_1 \gamma(k_1)(\gamma(k_1^{-1})(h_1^{-1}))) \\
&= (e_K, h_1 (\gamma(k_1) \circ \gamma(k_1^{-1}))(h_1^{-1})) \\
&= (e_K, h_1 (\gamma(k_1 k_1^{-1})(h_1^{-1})) \\
&= (e_K, h_1 (\gamma(e_K)(h_1^{-1})) = (e_K, h_1 Id_H(h_1^{-1})) \\
&= (e_K, h_1 h_1^{-1}) = (e_K, e_H)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(k_1^{-1}, \gamma(k_1^{-1})(h_1^{-1})) \cdot_\gamma (k_1, h_1) &= (k_1^{-1}k_1, \gamma(k_1^{-1})(h_1^{-1})\gamma(k_1^{-1})(h_1)) \\ &= (e_K, \gamma(k_1^{-1})(h_1^{-1}h_1)) \\ &= (e_K, \gamma(k_1^{-1})(e_H)) = (e_K, e_H).\end{aligned}$$

Assim, $(k_1^{-1}, \gamma(k_1^{-1})(h_1^{-1}))$ é o inverso de (k_1, h_1). Portanto, $(K \times H, \cdot_\gamma)$ é um grupo. □

Definição 1.3.2. O grupo $(K \times H, \cdot_\gamma)$ é chamado de **produto semidireto** de H por K com homomorfismo γ. Tal grupo será também denotado por $K \times_\gamma H$.

Proposição 1.3.3. *Sejam K, H grupos e $\gamma : K \to \mathrm{Aut}(H)$ um homomorfismo. Então*

(i) $K \times \{e_H\}$ é um subgrupo de $K \times_\gamma H$.

(ii) $\{e_K\} \times H$ é um subgrupo normal de $K \times_\gamma H$.

Mais ainda, $\{e_K\} \times H \cong H$ e $K \times \{e_H\} \cong K$. (O símbolo $\cong$, nesta dissertação, refere-se aos isomorfismos de grupos, anéis, álgebras ou módulos.)

Demonstração. (i) Primeiramente, $K \times \{e_H\} \neq \varnothing$ uma vez que $(e_K, e_H) \in K \times \{e_H\}$. Sejam $(k_1, e_H), (k_2, e_H) \in K \times \{e_H\}$. Temos

$$(k_1, e_H) \cdot_\gamma (k_2, e_H) = (k_1k_2, e_H\gamma(k_1)(e_H)) = (k_1k_2, e_H) \in K \times \{e_H\}$$

e

$$(k_1, e_H)^{-1} = (k_1^{-1}, \gamma(k_1^{-1})(e_H^{-1})) = (k_1^{-1}, e_H) \in K \times \{e_H\}.$$

Portanto $K \times \{e_H\}$ é subgrupo de $K \times_\gamma H$.

(ii) Observe que $\{e_K\} \times H \neq \varnothing$ pois $(e_K, e_H) \in \{e_K\} \times H$. Sejam $(e_K, h_1), (e_K, h_2) \in \{e_K\} \times H$. Temos

$$(e_K, h_1) \cdot_\gamma (e_K, h_2) = (e_K, h_1\gamma(e_K)(h_2)) = (e_K, h_1h_2) \in \{e_K\} \times H$$

e

$$(e_K, h_1)^{-1} = (e_K^{-1}, \gamma(e_K^{-1})(h_1^{-1})) = (e_K, h_1^{-1}) \in \{e_K\} \times H.$$

Logo, $\{e_K\} \times H$ é um subgrupo de $K \times_\gamma H$. Por fim, seja $(k, h) \in K \times_\gamma H$.

$$\begin{aligned}(k, h) \cdot_\gamma (e_K, h_1) \cdot_\gamma (k, h)^{-1} &= (k, h\gamma(k)(h_1)) \cdot_\gamma (k^{-1}, \gamma(k^{-1})(h^{-1})) \\ &= (e_K, h\gamma(k)(h_1)\gamma(k)(\gamma(k^{-1})(h^{-1}))) \\ &= (e_K, h\gamma(k)(h_1)(\gamma(k) \circ \gamma(k^{-1}))(h^{-1})) \\ &= (e_K, h\gamma(k)(h_1)\gamma(kk^{-1})(h^{-1})) \\ &= (e_K, h\gamma(k)(h_1)h^{-1}) \in \{e_K\} \times H\end{aligned}$$

e, portanto, $\{e_K\} \times H$ é um subgrupo normal de $K \times_\gamma H$.

Finalmente, considere $\psi : K \to K \times_\gamma H$ dada por $\psi(k) = (k, e_H)$, para todo $k \in K$. Se $k_1, k_2 \in K$, então

$$\psi(k_1) \cdot_\gamma \psi(k_2) = (k_1, e_H) \cdot_\gamma (k_2, e_H) = (k_1 k_2, e_H \gamma(k_1)(e_H)) = (k_1 k_2, e_H) = \psi(k_1 k_2)$$

ou seja, ψ é um homomorfismo. Além disso, se $k \in \ker \psi$ então $(k, e_H) = \psi(k) = (e_K, e_H)$ e, assim, $k = e_K$. Logo, ψ é injetor e, portanto, $K \cong \operatorname{Im} \psi = K \times \{e_H\}$.

De forma análoga, definindo $\varphi : H \to K \times_\gamma H$ por $\varphi(h) = (e_K, h)$ para todo $h \in H$, mostra-se que φ é um homomorfismo injetor e que $H \cong \operatorname{Im} \varphi = \{e_K\} \times H$. □

Lema 1.3.4. *Sejam K, H grupos e $\gamma : K \to \operatorname{Aut}(H)$ um homomorfismo. Sejam K_1 e H_1 grupos isomorfos a K e H, respectivamente. Então existe um homomorfismo $\gamma_1 : K_1 \to \operatorname{Aut}(H_1)$ tal que $K \times_\gamma H$ e $K_1 \times_{\gamma_1} H_1$ sejam isomorfos.*

Demonstração. Sejam $\varphi : K \to K_1$ e $\psi : H \to H_1$ isomorfismos e considere $\Phi : \operatorname{Aut}(H) \to \operatorname{Aut}(H_1)$ dada por $\Phi(f) = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$, para todo $f \in \operatorname{Aut}(H)$. Claramente, $\psi \circ f \circ \psi^{-1} \in \operatorname{Aut}(H_1)$ e Φ é um isomorfismo com inverso $\Phi^{-1} : \operatorname{Aut}(H_1) \to \operatorname{Aut}(H)$ dado por $\Phi^{-1}(g) = \psi^{-1} \circ g \circ \psi$, para todo $g \in \operatorname{Aut}(H_1)$. Tome o homomorfismo $\gamma_1 = \Phi \circ \gamma \circ \varphi^{-1} : K_1 \to \operatorname{Aut}(H_1)$ e mostremos que a aplicação $\Psi : K \times_\gamma H \to K_1 \times_{\gamma_1} H_1$ definida por $\Psi(k, h) = (\varphi(k), \psi(h))$, para todos $(k, h) \in K \times_\gamma H$, é um isomorfismo.

Sejam $(k_1, h_1), (k_2, h_2) \in K \times_\gamma H$. Então

$$\begin{aligned}
\Psi((k_1, h_1) \cdot_\gamma (k_2, h_2)) &= \Psi(k_1 k_2, h_1 \gamma(k_1)(h_2)) = (\varphi(k_1 k_2), \psi(h_1 \gamma(k_1)(h_2))) \\
&= (\varphi(k_1)\varphi(k_2), \psi(h_1)\psi(\gamma(k_1)(h_2))) \\
&= (\varphi(k_1)\varphi(k_2), \psi(h_1)(\psi \circ \gamma(k_1))(h_2)) \\
&= (\varphi(k_1)\varphi(k_2), \psi(h_1)(\Phi(\gamma(k_1)) \circ \psi)(h_2)) \text{ pela definição de } \Phi \\
&= (\varphi(k_1)\varphi(k_2), \psi(h_1)(\gamma_1(\varphi(k_1)) \circ \psi)(h_2)) \text{ pela definição de } \gamma_1 \\
&= (\varphi(k_1)\varphi(k_2), \psi(h_1)(\gamma_1(\varphi(k_1)))(\psi(h_2))) \\
&= (\varphi(k_1), \psi(h_1)) \cdot_{\gamma_1} (\varphi(k_2), \psi(h_2)) = \Psi(k_1, h_1) \cdot_{\gamma_1} \Psi(k_2, h_2)
\end{aligned}$$

e, portanto, Ψ é um homomorfismo. Além disso, temos que $\Upsilon : K_1 \times_{\gamma_1} H_1 \to K \times_\gamma H$ dada por $\Upsilon(x, y) = (\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(y))$ para todos $(x, y) \in K_1 \times_{\gamma_1} H_1$, é tal que $\Psi \circ \Upsilon = Id_{K_1 \times_{\gamma_1} H_1}$ e $\Upsilon \circ \Psi = Id_{K \times_\gamma H}$. Assim, $\Upsilon = \Psi^{-1}$ e, portanto, Ψ é um isomorfismo. □

Teorema 1.3.5. *Sejam G, H e K grupos. Existe um homomorfismo $\gamma : K \to \operatorname{Aut}(H)$ tal que G seja isomorfo a $K \times_\gamma H$ se, e somente se, G possui subgrupos $H_1 \cong H$ e $K_1 \cong K$ tais que:*

1) $G = K_1 H_1$.

2) $H_1 \triangleleft G$.

3) $K_1 \cap H_1 = \{e_G\}$.

Demonstração. Seja $\gamma : K \to \mathrm{Aut}(H)$ um homomorfismo e seja $\varphi : K \times_\gamma H \to G$ um isomorfismo. Pela Proposição 1.3.3, $\varphi(\{e_K\} \times H) \triangleleft G$ e $\varphi(K \times \{e_H\}) \leq G$. Denote $H_1 = \varphi(\{e_K\} \times H)$ e $K_1 = \varphi(K \times \{e_H\})$. Novamente pela Proposição 1.3.3, temos $H_1 = \varphi(\{e_K\} \times H) \cong \{e_K\} \times H \cong H$ e $K_1 = \varphi(K \times \{e_H\}) \cong K \times \{e_H\} \cong K$.

Seja $g \in G$. Como φ é sobrejetora, existe $(k, h) \in K \times_\gamma H$ tal que $\varphi(k, h) = g$. Note que

$$g = \varphi(k, h) = \varphi((e_K, h) \cdot_\gamma (k, e_H)) = \varphi(e_K, h)\varphi(k, e_H) \in H_1K_1.$$

Como $H_1 \triangleleft G$ segue que $H_1K_1 \leq G$ e, consequentemente, $H_1K_1 = K_1H_1$. Assim, $g \in K_1H_1$ e, daí, $G = K_1H_1$. Por fim, se $g \in K_1 \cap H_1$, então existem $h \in H$ e $k \in K$ tais que $\varphi(e_K, h) = g = \varphi(k, e_H)$. Como φ é injetora, segue que $h = e_H$ e $k = e_K$ e, assim, $g = e_G$.

Reciprocamente, sejam $H_1 \cong H$ e $K_1 \cong K$ subgrupos de G satisfazendo as condições $1), 2), 3)$. Para cada $k \in K_1$, podemos considerar o automorfismo $\psi_k : G \to G$ definido por $\psi_k(g) = kgk^{-1}$, para todo $g \in G$. Como $H_1 \triangleleft G$, então $\psi_k(H_1) = kH_1k^{-1} = H_1$. Assim, tomando a restrição $\psi_k|_{H_1}$, que denotaremos por ψ'_k, temos que $\psi'_k \in \mathrm{Aut}(H_1)$. Com isso, obtemos uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & K_1 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(H_1) \\ & k & \longmapsto & \psi'_k \end{array}$$

que, por sua vez, é um homomorfismo. De fato, sejam $k_1, k_2 \in K_1$ e $h \in H_1$.

$$\begin{aligned} \gamma_1(k_1k_2)(h) &= \psi'_{k_1k_2}(h) = \psi_{k_1k_2}(h) = k_1k_2hk_2^{-1}k_1^{-1} \\ &= \psi_{k_1}(\psi_{k_2}(h)) = \psi'_{k_1}(\psi'_{k_2}(h)) \\ &= (\gamma_1(k_1) \circ \gamma_1(k_2))(h), \end{aligned}$$

ou seja, $\gamma_1(k_1k_2) = \gamma_1(k_1) \circ \gamma_1(k_2)$. Logo, pelo lema anterior, como $H_1 \cong H$, $K_1 \cong K$ e γ_1 é um homomorfismo, existe um homomorfismo $\gamma : K \to \mathrm{Aut}(H)$ tal que $K \times_\gamma H$ é isomorfo a $K_1 \times_{\gamma_1} H_1$. Assim, afim de mostrar que G é isomorfo a $K \times_\gamma H$, basta mostrar que G é isomorfo a $K_1 \times_{\gamma_1} H_1$.

Considere $\rho : K_1 \times_{\gamma_1} H_1 \to G$ dada por $\rho(k, h) = hk$, para todo $(k, h) \in K_1 \times_{\gamma_1} H_1$. Note que para $(k_1, h_1), (k_2, h_2) \in K_1 \times_{\gamma_1} H_1$,

$$\begin{aligned} \rho((k_1, h_1) \cdot_{\gamma_1} (k_2, h_2)) &= \rho(k_1k_2, h_1\gamma_1(k_1)(h_2)) = h_1\gamma_1(k_1)(h_2)k_1k_2 \\ &= h_1\psi'_{k_1}(h_2)k_1k_2 = h_1k_1h_2k_2 \\ &= \rho(k_1, h_1)\rho(k_2, h_2), \end{aligned}$$

ou seja, ρ é um homomorfismo. Seja $(k_1, h_1) \in \ker \rho$. Então $h_1 k_1 = \rho(k_1, h_1) = e_G$ e, assim, $k_1 = h_1^{-1} \in K_1 \cap H_1 = \{e_G\}$. Logo $k_1 = h_1 = e_G$ e ρ é injetor. Dado $g \in G$, como $G = K_1 H_1 = H_1 K_1$, existem $h \in H_1$ e $k \in K_1$ tal que $g = hk = \rho(k, h)$. Logo ρ é sobrejetor e, portanto, ρ é um isomorfismo. □

Observação 1.3.6. Se G é um grupo contendo subgrupos H e K satisfazendo as condições $1), 2), 3)$ do teorema anterior, então existe um homomorfismo $\gamma : K \to \mathrm{Aut}(H)$ tal que G é isomorfo a $K \times_\gamma H$. Nesse caso, denotaremos $G = K \blacktriangleright H$.

Capítulo 2

Álgebras de Incidência Finitárias

Neste capítulo será definida a álgebra de incidência finitária de um poset P sobre um corpo K e serão apresentadas algumas de suas propriedades básicas como a descrição dos elementos inversíveis, idempotentes e também do centro dessa álgebra.

O capítulo baseia-se no artigo de Khripchenko e Novikov [6]. A partir desse capítulo, K sempre denotará um corpo e P um poset.

2.1 Definição e conceitos básicos

O **espaço de incidência** $I(P,K)$ é o conjunto

$$I(P,K) = \{f : P \times P \to K : \ f(x,y) = 0 \text{ se } x \not\leq y\}$$

com as operações de soma e produto por escalar definidas por:

$$\begin{aligned}(f+g)(x,y) &= f(x,y) + g(x,y),\\ (rf)(x,y) &= rf(x,y),\end{aligned}$$

para todos $f, g \in I(P,K)$, $r \in K$ e $x, y \in P$. Com essas operações, verifica-se que $I(P,K)$ é um espaço vetorial sobre K.

Uma função $f \in I(P,K)$ é dita **finitária** se, para todos $x, y \in P$ com $x < y$, existe somente um número finito de subsegmentos $[u,v] \subseteq [x,y]$ tal que $u < v$ e $f(u,v) \neq 0$. O conjunto de todas as funções finitárias é denotado por $FI(P,K)$ e tal conjunto é um subespaço vetorial de $I(P,K)$.

Em $FI(P,K)$, definimos uma operação de multiplicação da seguinte forma:

$$(fg)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)g(z,y)$$

para todos $f, g \in FI(P,K)$ e $x \leq y \in P$. Note que $fg \in I(P,K)$, uma vez que existe um número finito de elementos $z \in [x,y]$ tais que $f(x,z) \neq 0$ e $g(z,y) \neq 0$ e, portanto, a soma acima é finita.

Teorema 2.1.1. *Seja K um corpo e seja P um poset. Então $FI(P,K)$ é uma K-álgebra e $I(P,K)$ é um $FI(P,K)$-bimódulo.*

Demonstração. É fácil ver que a soma de duas funções finitárias e o produto de uma função finitária por um escalar são funções finitárias. Mostraremos agora que se $f, g \in FI(P,K)$ então $fg \in FI(P,K)$.

Sejam $f, g \in FI(P,K)$ e denote $h = fg$. Sejam $x, y \in P$ com $x < y$ e suponha que existam subsegmentos $[u_s, v_s] \subseteq [x,y]$ tais que $u_s < v_s$ e $h(u_s, v_s) \neq 0$. Note que $|\{u_s\}| < \infty$, pois caso $|\{u_s\}| = \infty$, como $h(u_s, v_s) \neq 0$, para cada s existiria $z_s \in [u_s, v_s]$ tal que $f(u_s, z_s) \neq 0$ e $g(z_s, v_s) \neq 0$. Então, como $f \in FI(P,K)$ e $[u_s, v_s] \subseteq [x,y]$, deveríamos ter $z_s = u_s$ para um número infinito de índices. Porém, teríamos $g(u_s, v_s) = g(z_s, v_s) \neq 0$ com $z_s = u_s < v_s$ para esse conjunto infinito de índices, e assim $g \notin FI(P,K)$. Logo $|\{u_s\}| < \infty$. Analogamente, segue que $|\{v_s\}| < \infty$ e, consequentemente, $\{[u_s, v_s]\}$ é finito. Portanto, $fg \in FI(P,K)$.

Com isso, verifica-se facilmente que $FI(P,K)$ é uma K-álgebra com unidade $\delta : P \times P \to K$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Por fim, sejam $f \in FI(P,K)$, $g \in I(P,K)$ e $x, y \in P$ com $x \leq y$. Seja

$$h(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z) g(z,y). \tag{2.1}$$

Como $f \in FI(P,K)$, então existe um número finito de subsegmentos $[x,z] \subseteq [x,y]$ tais que $f(x,z) \neq 0$. Logo a soma do lado direito de (2.1) é finita e, consequentemente, $h(x,y) \in K$. Portanto $fg \in I(P,K)$. Analogamente, se $f \in I(P,K)$ e $g \in FI(P,K)$, $fg \in I(P,K)$.

Com isso, é fácil verificar que $I(P,K)$ é um $FI(P,K)$-bimódulo. □

A K-álgebra $FI(P,K)$ é chamada **álgebra de incidência finitária** de P sobre K.

Observação 2.1.2. Se P é um poset localmente finito então $FI(P,K) = I(P,K)$. Nesse caso, a álgebra $I(P,K)$ é usualmente chamada de **álgebra de incidência** de P sobre K.

Definição 2.1.3. Se X é um subconjunto do poset P, então a função $\delta_X \in FI(P,K)$ definida por

$$\delta_X(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \in X \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

é chamada **função característica** de X. Quando $X = P$, chamamos δ_X apenas de **função característica** e, nesse caso, δ_X coincide com a função δ definida na demonstração do teorema anterior.

Além disso, dados $x, y \in P$ com $x \leq y$, definimos $\delta_{xy} \in FI(P, K)$ por

$$\delta_{xy}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u = x \text{ e } v = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e escrevemos δ_x para δ_{xx}.

Observação 2.1.4. Seja $f \in FI(P, K)$ e sejam $x, y \in P$. Para $u, v \in P$, note que

$$(\delta_x f \delta_y)(u, v) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } u = x \text{ e } v = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{2.2}$$

Em particular, se $x \leq y$, temos

$$\delta_x f \delta_y = f(x, y)\delta_{xy}. \tag{2.3}$$

A proposição a seguir nos fornece uma base de $FI(P, K)$ como K-espaço vetorial no caso em que P é um poset finito.

Proposição 2.1.5. *Se P é um poset finito então $I(P, K) = \bigoplus_{x \leq y} K\delta_{xy}$.*

Demonstração. Seja $f \in I(P, K)$. Note que para todos $u, v \in P$,

$$\left(\sum_{x \leq y} f(x, y)\delta_{xy} \right)(u, v) = \sum_{x \leq y} f(x, y)\delta_{xy}(u, v) = f(u, v)$$

e, portanto, $f = \sum_{x \leq y} f(x, y)\delta_{xy}$. Além disso, se $\sum_{x \leq y} r_{xy}\delta_{xy} = 0$ com $r_{xy} \in K$, então $r_{xy} = 0$ para todos $x \leq y$, uma vez que $\delta_{xy}(x, y) = 1$. Logo, $r_{xy}\delta_{xy} = 0$ para todos $x \leq y \in P$ e, consequentemente, $I(P, K) = \bigoplus_{x \leq y} K\delta_{xy}$. □

Teorema 2.1.6. *Seja P um poset qualquer e seja $f \in FI(P, K)$. Então f tem inverso multiplicativo em $FI(P, K)$ se, e somente se, $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$.*

Demonstração. Suponhamos que $f \in FI(P, K)$ seja inversível. Então existe $g \in FI(P, K)$ tal que $fg = \delta$. Para cada $x \in P$ temos

$$1 = \delta(x, x) = (fg)(x, x) = \sum_{x \leq z \leq x} f(x, z)g(z, x) = f(x, x)g(x, x).$$

Portanto, tem-se que $f(x,x) \neq 0$, para cada $x \in P$.

Reciprocamente, suponhamos que $f(x,x) \neq 0$ para todo $x \in P$. Vamos definir $g \in I(P,K)$ tal que $fg = \delta = gf$, onde g será um inverso de f. Observe que se existir $g \in FI(P,K)$ satisfazendo:

(i) $g(x,x) = f(x,x)^{-1}$, para todo $x \in P$;

(ii) $g(u,v) = -f(u,u)^{-1} \sum_{u<t\leq v} f(u,t)g(t,v)$, para todos $u,v \in P$ com $u < v$,

então g será um inverso à direita de f. De fato, se $u < v$ em P então, por (ii), $f(u,u)g(u,v) = -\sum_{u<t\leq v} f(u,t)g(t,v)$. Com isso,

$$\begin{aligned}(fg)(u,v) &= \sum_{u\leq t\leq v} f(u,t)g(t,v)\\ &= f(u,u)g(u,v) + \sum_{u<t\leq v} f(u,t)g(t,v)\\ &= 0 = \delta(u,v).\end{aligned}$$

Além disso, se $g(x,x) = f(x,x)^{-1}$ para cada $x \in P$, então

$$(fg)(x,x) = f(x,x)g(x,x) = 1 = \delta(x,x).$$

Assim, $fg = \delta$ e, portanto, g é um inverso à direita de f.

Provemos a existência de $g \in FI(P,K)$ satisfazendo (i) e (ii).

Para cada $x \in P$ defina $g(x,x) = f(x,x)^{-1}$. Sejam $u,v \in P$, $u < v$. Denote por $C_f(u,v)$ o número de subsegmentos $[x,y] \subseteq [u,v]$ tais que $x \neq y$ e $f(x,y) \neq 0$. Como $f \in FI(P,K)$, temos que $C_f(u,v)$ é finito. Façamos a demonstração por indução sobre $C_f(u,v)$.

Se $C_f(u,v) = 0$ então $f(x,y) = 0$ para todos $x,y \in [u,v]$ com $x < y$. Nesse caso, definimos $g(u,v) = 0$ e a condição (ii) está satisfeita. Se $C_f(u,v) = 1$, então existe um único subsegmento $[x,y] \subseteq [u,v]$ com $x \neq y$ e $f(x,y) \neq 0$. Temos duas possibilidades para tal subsegmento, a saber, $[u,x_0]$ com $u < x_0 \leq v$ ou $[x_0,y_0]$ com $u < x_0 < y_0 \leq v$. No primeiro caso, temos $f(u,x_0) \neq 0$ e $C_f(x_0,v) = 0$. Assim,

$$g(x_0,v) = \begin{cases} f(v,v)^{-1} & \text{se } x_0 = v\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}.$$

Definamos

$$g(u,v) = -f(u,u)^{-1}f(u,x_0)g(x_0,v) = \begin{cases} -f(u,u)^{-1}f(u,v)f(v,v)^{-1} & \text{se } x_0 = v\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}.$$

No outro caso, $f(u,x) = 0$ para todo $x \in P$ tal que $u < x \leq v$. Logo, definamos $g(u,v) = 0$. Portanto, se $C_f(u,v) = 1$, definimos $g(u,v)$ satisfazendo (ii).

Agora, suponhamos que $g(x,y)$ esteja definido para todos $x, y \in P$ tais que $C_f(x,y) < n$. Suponhamos que $C_f(u,v) = n$. Se $f(u,x) \neq 0$ para algum $x \in P$ tal que $u < x \leq v$, então $C_f(x,v) \leq n-1$ e, pela hipótese de indução, $g(x,v)$ está definido. Assim, todas as parcelas de (ii) estão definidas e, portanto, $g(u,v)$ está definido. Se $f(u,x) = 0$ para todo $x \in P$ tal que $u < x \leq v$, definimos $g(u,v) = 0$. Logo $g(u,v)$ está definido de modo que (ii) é satisfeito. Segue que existe $g \in I(P,K)$ satisfazendo as condições (i) e (ii), ou seja, tal que $fg = \delta$.

Analogamente é possível construir $h \in I(P,K)$ tal que $hf = \delta$. Tal h pode ser construída de modo que $h(x,x) = f(x,x)^{-1}$ e $h(u,v) = -f(v,v)^{-1} \sum_{u \leq t < v} h(u,t)f(t,v)$.

Como $f \in FI(P,K)$, $g, h \in I(P,K)$ e $hf, fg \in FI(P,K)$, temos $(hf)g = h(fg) \in I(P,K)$. Assim, $g = \delta g = (hf)g = h(fg) = h\delta = h$. Portanto, $fg = gf = \delta$.

Por fim, mostremos que $g \in FI(P,K)$. Seja $[x,y]$ com $x < y$ um segmento qualquer de P e suponha que existam subsegmentos $[u_s, v_s] \subseteq [x,y]$ com $u_s \neq v_s$ e $g(u_s, v_s) \neq 0$. Como $gf = \delta$ e $u_s < v_s$ temos

$$\begin{aligned} 0 = \delta(u_s, v_s) = (gf)(u_s, v_s) &= \sum_{u_s \leq z_s \leq v_s} g(u_s, z_s) f(z_s, v_s) \\ &= g(u_s, v_s) f(v_s, v_s) + \sum_{u_s \leq z_s < v_s} g(u_s, z_s) f(z_s, v_s), \end{aligned}$$

ou seja,

$$g(u_s, v_s) = -f(v_s, v_s)^{-1} \sum_{u_s \leq z_s < v_s} g(u_s, z_s) f(z_s, v_s). \tag{2.4}$$

Analogamente, uma vez que $fg = \delta$, temos

$$g(u_s, v_s) = -f(u_s, u_s)^{-1} \sum_{u_s < z_s \leq v_s} g(u_s, z_s) f(z_s, v_s). \tag{2.5}$$

Como $g(u_s, v_s) \neq 0$, segue de (2.4) que para cada s existe $z_s < v_s$ tal que $f(z_s, v_s) \neq 0$. Sendo $f \in FI(P,K)$, o número de segmentos $[z_s, v_s]$ que satisfazem $f(z_s, v_s) \neq 0$ é finito. Daí $|\{v_s\}| < \infty$. Analogamente, de (2.5) segue que $|\{u_s\}| < \infty$. Assim, o número de subintervalos $[u_s, v_s] \subseteq [x,y]$ com $u_s < v_s$ e $g(u_s, v_s) \neq 0$ é finito. Logo $g \in FI(P,K)$ e, portanto, f é inversível em $FI(P,K)$ com inverso g. □

Exemplo 2.1.7. Seja $I_n = \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ com a relação de ordem usual dos números naturais. Seja $UT_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Podemos identificar $I(I_n, \mathbb{R})$ com a álgebra $UT_n(\mathbb{R})$ associando cada elemento $f \in I(I_n, \mathbb{R})$ à matriz A com entradas $a_{ij} = f(i,j)$, notando que se $i \not\leq j$ então $f(i,j) = 0$, isto é,

$$f \longleftrightarrow \begin{bmatrix} f(1,1) & f(1,2) & f(1,3) & \cdots & f(1,n) \\ 0 & f(2,2) & f(2,3) & \cdots & f(2,n) \\ 0 & 0 & f(3,3) & \cdots & f(3,n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(n,n) \end{bmatrix}.$$

Assim, é simples vizualizar o teorema anterior, sabendo que uma matriz triangular superior só possui inversa se nenhum elemento de sua diagonal principal é nulo.

Corolário 2.1.8. *Os elementos inversíveis à direita, à esquerda e bilaterais em $FI(P,K)$ coincidem.*

Demonstração. Suponhamos que $f \in FI(P,K)$ seja inversível à direita. Então existe $g \in FI(P,K)$ tal que $fg = \delta$. Assim, para todo $x \in P$, temos $1 = \delta(x,x) = fg(x,x) = f(x,x)g(x,x)$ e, portanto, $f(x,x) \neq 0$. Logo, pelo teorema anterior, f é inversível em $FI(P,K)$ e, consequentemente, $g = f^{-1}$.

De modo análogo, se $f \in FI(P,K)$ é inversível à esquerda, mostra-se que f também é inversível. □

Corolário 2.1.9. *Seja $f \in FI(P,K)$. Então $f \in J(FI(P,K))$ se, e somente se, $f(x,x) = 0$ para todo $x \in P$.*

Demonstração. Seja $f \in FI(P,K)$. Pela Proposição 1.2.27, $f \in J(FI(P,K))$ se, e somente se, $\delta - gf$ é inversível à esquerda, para cada $g \in FI(P,K)$. Pelo teorema anterior, $\delta - gf$ é inversível à esquerda se, e somente se, $0 \neq (\delta - gf)(x,x) = 1 - g(x,x)f(x,x)$, para todo $x \in P$. Logo $g(x,x)f(x,x) \neq 1$ para todo $g \in FI(P,K)$ e qualquer $x \in P$, ou seja, $f(x,x)$ não é inversível em K, para todo $x \in P$. Logo, $\delta - gf$ é inversível à esquerda se, e somente se, $f(x,x)$ não é inversível em K, para todo $x \in P$. Uma vez que K é um corpo segue que $f \in J(FI(P,K))$ se, e somente se, $f(x,x) = 0$ para todo $x \in P$. □

Exemplo 2.1.10. No Exemplo 2.1.7, temos que se $f \in J(I(I_n, \mathbb{R}))$ então, pelo corolário anterior, f pode ser representada como

$$f \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & f(1,2) & f(1,3) & \cdots & f(1,n) \\ 0 & 0 & f(2,3) & \cdots & f(2,n) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(3,n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Corolário 2.1.11. *O anel quociente $\dfrac{FI(P,K)}{J(FI(P,K))}$ é isomorfo a $\prod_{x \in P} K$. Em particular, $\dfrac{FI(P,K)}{J(FI(P,K))}$ é um anel comutativo.*

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rccc} \varphi : FI(P,K) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{x\in P} K & \\ f & \longmapsto & (f(x,x))_{x\in P} & . \end{array}$$

Mostremos que φ é um homomorfismo sobrejetor com $\ker\varphi = J(FI(P,K))$. Assim, o teorema do isomorfismo nos garantirá o resultado.

Primeiramente, note que $\varphi(\delta) = ((\delta(x,x))_{x\in P} = (1)_{x\in P}$. Sejam $f, g \in FI(P,K)$. Então

$$\begin{aligned} \varphi(f+g) &= ((f+g)(x,x))_{x\in P} = (f(x,x)+g(x,x))_{x\in P} \\ &= (f(x,x))_{x\in P} + (g(x,x))_{x\in P} = \varphi(f)+\varphi(g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(fg) &= ((fg)(x,x))_{x\in P} = (f(x,x)g(x,x))_{x\in P} \\ &= (f(x,x))_{x\in P}(g(x,x))_{x\in P} = \varphi(f)\varphi(g). \end{aligned}$$

Logo φ é um homomorfismo.

Agora, dado $(a_x)_{x\in P} \in \displaystyle\prod_{x\in P} K$, considere $g \in FI(P,K)$, tal que

$$g(x,y) = \begin{cases} a_x & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Note que $\varphi(g) = (a_x)_{x\in P}$, mostrando a sobrejetividade de φ.

Seja $f \in FI(P,K)$. Então $\varphi(f) = (0)_{x\in P}$ se, e somente se, $(f(x,x))_{x\in P} = (0)_{x\in P}$ se, e somente se, $f(x,x) = 0$ para todo $x \in P$. Pelo Corolário 2.1.9, $f(x,x) = 0$ para todo $x \in P$ se, e somente se, $f \in J(FI(P,K))$. Portanto $\ker\varphi = J(FI(P,K))$.

Em particular, como $\displaystyle\prod_{x\in P} K$ é um anel comutativo temos que $\dfrac{FI(P,K)}{J(FI(P,K))}$ é um anel comutativo. □

Escrevendo P como união disjunta de suas componentes conexas, $P = \displaystyle\bigcup_{i\in I} P_i$, podemos considerar cada P_i como um subposet de P. O próximo resultado nos permite relacionar $FI(P,K)$ e cada $FI(P_i,K)$.

Teorema 2.1.12. *Seja $P = \displaystyle\bigcup_{i\in I} P_i$ um poset escrito como a união disjunta de suas componentes conexas. Então $FI(P,K) \cong \displaystyle\prod_{i\in I} FI(P_i,K)$.*

Demonstração. Defina

$$\psi : FI(P,K) \longrightarrow \prod_{i\in I} FI(P_i,K)$$

tal que $\psi(f) = (f_i)_{i\in I}$, $f \in FI(P,K)$, onde $f_i = f|_{P_i\times P_i}$, $i \in I$. Note que ψ está bem definida, isto é, $\psi(FI(P,K)) \subseteq \prod_{i\in I} FI(P_i,K)$. De fato, se $\psi(FI(P,K)) \nsubseteq \prod_{i\in I} FI(P_i,K)$ então existe $f \in FI(P,K)$ tal que $(f_i)_{i\in I} = \psi(f) \notin \prod_{i\in I} FI(P_i,K)$. Logo $f_i \notin FI(P_i,K)$ para algum $i \in I$ e, assim, existe um segmento $[x,y] \subseteq P_i$ e infinitos subsegmentos $[u_s,v_s] \subseteq [x,y]$ com $u_s < v_s$ e $f_i(u_s,v_s) \neq 0$. Como $f_i = f|_{P_i\times P_i}$ e $P_i \subseteq P$, segue que $[x,y] \subseteq P$ contém infinitos subsegmentos $[u_s,v_s] \subseteq [x,y]$ com $u_s < v_s$ e $f(u_s,v_s) \neq 0$, contradizendo o fato de que $f \in FI(P,K)$.

Mostremos que ψ é um isomorfismo de K-álgebras. Sejam $f,g \in FI(P,K)$ e seja $k \in K$. É fácil ver que $(f+g)_i = f_i + g_i$ e $(kf)_i = kf_i$ para cada $i \in I$. Agora, sejam $x,y \in P_i$ com $x \leq y$. Para cada elemento $z \in P$ tal que $x \leq z \leq y$, temos que x,z e y estão na mesma componente conexa de P e, portanto, $z \in P_i$. Isso implica que $(fg)_i = f_ig_i$ para cada $i \in I$. Com isso,

$$\psi(f+g) = ((f+g)_i)_{i\in I} = (f_i+g_i)_{i\in I} = (f_i)_{i\in I} + (g_i)_{i\in I} = \psi(f) + \psi(g),$$

$$\psi(fg) = ((fg)_i)_{i\in I} = (f_ig_i)_{i\in I} = (f_i)_{i\in I}(g_i)_{i\in I} = \psi(f)\psi(g),$$

$$\psi(kf) = ((kf)_i)_{i\in I} = (kf_i)_{i\in I} = k(f_i)_{i\in I} = k\psi(f)$$

e, claramente, $\psi(\delta) = (\delta_i)_{i\in I} = (\delta_{P_i})_{i\in I}$. Logo, ψ é um homomorfismo de K-álgebras.

Se $\psi(f) = 0$, então $f_i = 0$, para todo $i \in I$. Sejam $x,y \in P$ tais que $x \leq y$. Então $x,y \in P_j$, para algum $j \in I$. Logo $f(x,y) = f_j(x,y) = 0$ e, consequentemente, $f = 0$. Portanto ψ é injetora.

Dado $(f_i) \in \prod_{i\in I} FI(P_i,K)$, seja $f : P\times P \to K$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} f_i(x,y) & \text{se } x,y \in P_i, \text{ para algum } i \in I \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostremos que $f \in FI(P,K)$. Sejam $x,y \in P$. Suponhamos que $x \nleq y$. Se x e y não pertencem a uma mesma componente conexa, então $f(x,y) = 0$. Se $x,y \in P_i$, para algum $i \in I$, então $f(x,y) = f_i(x,y) = 0$. Logo $f \in I(P,K)$. Agora, note que se $x \leq y$ e $f(u,v) \neq 0$ para $x \leq u < v \leq y$, então existe $i \in I$ talque $x,y,u,v \in P_i$ e $f_i(u,v) = f(u,v) \neq 0$. Logo, como $f_i \in FI(P_i,K)$, segue que $f \in FI(P,K)$. Além disso, $\psi(f) = (f_i)_{i\in I}$ e, portanto, ψ é sobrejetora. □

2.2 Elementos diagonais e idempotentes

Esta seção tem por objetivo descrever os elementos idempotentes de $FI(P,K)$ e apresentar o conceito de elemento diagonal. Dentre os resultados postos aqui, ressaltamos que estão descritos os elementos idempotentes primitivos de $FI(P,K)$, que serão de grande utilidade nos capítulos posteriores.

Proposição 2.2.1. *Seja $f \in FI(P,K)$ um elemento idempotente. Então $f(x,x) = 0$ ou $f(x,x) = 1$, para cada $x \in P$.*

Demonstração. Seja $f \in FI(P,K)$ um idempotente e seja $x \in P$. Temos

$$f(x,x) = f^2(x,x) = \sum_{x \leq t \leq x} f(x,t)f(t,x) = f(x,x)f(x,x).$$

Então $f(x,x)(f(x,x)-1) = 0$, ou seja, $f(x,x) = 0$ ou $f(x,x) = 1$. □

Definição 2.2.2. Dado um elemento $f \in FI(P,K)$, dizemos que f é **diagonal** se $f(x,y) = 0$ para todos $x, y \in P$ com $x \neq y$.

Observação 2.2.3. Note que se $f \in U(FI(P,K))$ é diagonal, então f^{-1} é diagonal com $f^{-1}(x,x) = [f(x,x)]^{-1}$, para todo $x \in P$.

Corolário 2.2.4. *Seja $f \in FI(P,K)$ um elemento diagonal. Então f é idempotente se, e somente se, $f(x,x) = 0$ ou $f(x,x) = 1$, para cada $x \in P$.*

Demonstração. Seja $f \in FI(P,K)$ diagonal tal que $f(x,x) = 0$ ou $f(x,x) = 1$, para todo $x \in P$. Sejam $x, y \in P$. Temos

$$f^2(x,x) = f(x,x)f(x,x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x,x) = 1 \\ 0 & \text{se } f(x,x) = 0 \end{cases} = f(x,x).$$

E, se $x < y$, como f é diagonal, temos

$$f^2(x,y) = \sum_{x \leq t \leq y} f(x,t)f(t,y) = 0 = f(x,y).$$

Portanto f é idempotente.

A recíproca segue da proposição anterior. □

Corolário 2.2.5. *Um elemento $f \in FI(P,K)$ é idempotente diagonal se, e somente se, $f = \delta_X$ para algum subconjunto $X \subseteq P$.*

Teorema 2.2.6. *Dado $f \in FI(P,K)$ idempotente, existe $e \in FI(P,K)$ idempotente diagonal tal que f é conjugado a e, de modo que $f(x,x) = e(x,x)$, para todo $x \in P$.*

Demonstração. Sejam $f, e \in FI(P,K)$ tais que f é idempotente e e é diagonal definida por $e(x,x) = f(x,x)$, para todo $x \in P$. Como f é idempotente, segue da Proposição 2.2.1 e do Corolário 2.2.4 que e é idempotente. Denotemos $g = f - e$ e seja $h = \delta + (2e - \delta)g$. Dado $x \in P$, temos que $h(x,x) = 1$, uma vez que $g(x,x) = 0$. Então, $h(x,x) \neq 0$ para todo $x \in P$ e, pelo Teorema 2.1.6, h é inversível em $FI(P,K)$. Agora, note que

$$hf = [\delta + (2e - \delta)g]f = f + (2e - \delta)(f - ef) = f + 2ef - 2ef - f + ef = ef$$

e

$$eh = e(\delta + 2eg - \delta g) = e + eg = e(e + g) = ef.$$

Assim, $hf = eh$, donde segue que $f = h^{-1}eh$. Portanto f e e são conjugados. □

Corolário 2.2.7. *Dado $f \in FI(P,K)$ idempotente, existe $X \subseteq P$ tal que f é conjugado a δ_X, de modo que $f(x,x) = \delta_X(x,x)$, para todo $x \in P$.*

Demonstração. Segue diretamente do Corolário 2.2.5 e do Teorema 2.2.6. □

Observação 2.2.8. Observe que se δ_X é conjugado a δ_Y, isto é, existe $f \in U(FI(P,K))$ tal que $\delta_X = f\delta_Y f^{-1}$, então

$$\begin{aligned} x \in X &\Leftrightarrow 1 = \delta_X(x,x) \Leftrightarrow 1 = f(x,x)\delta_Y(x,x)f(x,x)^{-1} \\ &\Leftrightarrow 1 = \delta_Y(x,x) \Leftrightarrow x \in Y, \end{aligned}$$

ou seja, $X = Y$. Em particular, se δ_x é conjugado a δ_y, para alguns $x, y \in P$, então $x = y$.

Teorema 2.2.9. *Um idempotente $f \in FI(P,K)$ é primitivo se, e somente se, ele é conjugado a δ_x, para algum $x \in P$. Além disso, este elemento $x \in P$ é unicamente determinado por f.*

Demonstração. Vimos no Exemplo 1.2.54 que a conjugação é um automorfismo. Além disso, pela Proposição 1.2.33, item (ii), a conjugação preserva a primitividade. Pelo Teorema 2.2.6, cada idempotente de $FI(P,K)$ é conjugado a um idempotente diagonal. Assim, se f é idempotente primitivo, f é conjugado a algum idempotente diagonal, que por sua vez, será um idempotente primitivo. Mostremos que os idempotentes primitivos diagonais de $FI(P,K)$ são os elementos δ_x, $x \in P$.

Seja $e \in FI(P,K)$ um idempotente tal que $e\delta_x = e = \delta_x e$. Então, para $u \leq v$ em P, temos

$$e(u,v) = (e\delta_x)(u,v) = \sum_{u \leq z \leq v} e(u,z)\delta_x(z,v) = \begin{cases} e(u,x) & \text{se } v = x \\ 0 & \text{se } v \neq x \end{cases}$$

e

$$e(u,v) = (\delta_x e)(u,v) = \sum_{u\leq z\leq v} \delta_x(u,z)e(z,v) = \begin{cases} e(x,v) & \text{se } u = x \\ 0 & \text{se } u \neq x \end{cases}.$$

Assim, $e(u,v) = 0$ se $(u,v) \neq (x,x)$. Como e é idempotente, $e(x,x) = 0$ ou $e(x,x) = 1$. Se $e(x,x) = 0$, então $e = 0$. Se $e(x,x) = 1$, então $e = \delta_x$. Portanto δ_x é primitivo.

Agora, seja $g \in FI(P,K)$ um idempotente primitivo diagonal. Como $g \neq 0$, então existe $x \in P$ tal que $g(x,x) = 1$. Considere o idempotente δ_x. Temos, para $u \leq v$ em P,

$$g\delta_x(u,v) = \sum_{u\leq z\leq v} g(u,z)\delta_x(z,v) = \begin{cases} g(u,x) & \text{se } v = x \\ 0 & \text{se } v \neq x \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } u = v = x \\ 0 & \text{se } u \neq x \text{ ou } v \neq x \end{cases}$$

e

$$(\delta_x g)(u,v) = \sum_{u\leq z\leq v} \delta_x(u,z)g(z,v) = \begin{cases} g(x,v) & \text{se } u = x \\ 0 & \text{se } u \neq x \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } u = v = x \\ 0 & \text{se } u \neq x \text{ ou } v \neq x \end{cases}.$$

Logo, $g\delta_x = \delta_x = \delta_x g$. Como g é primitivo e $\delta_x \neq 0$, temos que $g = \delta_x$.

Portanto, um idempotente $f \in FI(P,K)$ é primitivo se, e somente se, ele é conjugado a δ_x, para algum $x \in P$. E a unicidade do elemento $x \in P$ é verificada pela observação anterior. □

2.3 O centro da álgebra de incidência finitária

Nesta seção iremos descrever o centro da álgebra de incidência finitária. Inicialmente, observemos que se $|P| = 1$, então $FI(P,K)$ é isomorfa a K e $\mathrm{Cen}(FI(P,K)) = FI(P,K)$, uma vez que K é comutativo. Devido a isso, nesta seção assumiremos que $|P| > 1$.

Definição 2.3.1. Seja $f \in FI(P,K)$ uma função diagonal. Dizemos f é **constante no subconjunto** A de P se $f(x,x) = f(y,y)$ para todos $x, y \in A$.

Teorema 2.3.2. *Seja P um poset e seja K um corpo. Então* $\mathrm{Cen}(FI(P,K))$ *é o conjunto de todas as funções diagonais que são constantes em cada componente conexa de P.*

Demonstração. Suponha que f seja uma função diagonal constante em cada componente conexa de P e seja $g \in FI(P,K)$. Mostremos que $fg = gf$. Se $x, y \in P$ com $x \leq y$, então x e y estão na mesma componente conexa de P e $f(x,x) = f(y,y)$. Como f é diagonal, então

$$(fg)(x,y) = \sum_{x\leq z\leq y} f(x,z)g(z,y) = f(x,x)g(x,y)$$

e, por outro lado,

$$(gf)(x,y) = \sum_{x\leq z\leq y} g(x,z)f(z,y) = g(x,y)f(y,y).$$

Como $f(x,x) = f(y,y)$ e K é corpo, temos

$$(fg)(x,y) = f(x,x)g(x,y) = f(y,y)g(x,y) = g(x,y)f(y,y) = (gf)(x,y).$$

Portanto, $f \in \mathrm{Cen}(FI(P,K))$.

Agora, mostremos que cada elemento de $\mathrm{Cen}(FI(P,K))$ é uma função diagonal constante em cada componente conexa de P. Seja $h \in \mathrm{Cen}(FI(P,K))$ e sejam $x, y \in P$ com $x < y$. Temos

$$h(x,y) = \delta_x(x,x)h(x,y) = (\delta_x h)(x,y) = (h\delta_x)(x,y) = \sum_{x\leq z\leq y} h(x,z)\delta_x(z,y) = 0.$$

Portanto h é diagonal.

Suponhamos agora que x, y sejam elementos distintos na mesma componente conexa de P. Então existe uma sequência $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ de elementos de P tal que $x_i \leq x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \leq x_i$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Devemos mostrar que $h(x,x) = h(y,y)$ e para isto usaremos indução sobre n.

Se $n = 1$, então $x \leq y$ ou $y \leq x$. Suponhamos que $x \leq y$. Como h é diagonal, então

$$h(x,x) = h(x,x)\delta_{xy}(x,y) = (h\delta_{xy})(x,y) = (\delta_{xy}h)(x,y) = \delta_{xy}(x,y)h(y,y) = h(y,y).$$

Se $y \leq x$, a prova é análoga. Suponhamos que $n \geq 2$ e que o resultado seja válido para $n-1$. Então $h(x,x) = h(x_{n-1}, x_{n-1})$. Pelo caso $n = 1$, temos que $h(x_{n-1}, x_{n-1}) = h(y,y)$ e com isto conclui-se que $h(x,x) = h(y,y)$, como queríamos. □

Corolário 2.3.3. *Seja $P = \bigcup_{j\in J} P_j$ um poset escrito como união disjunta das suas componentes conexas e seja K um corpo. Então $\mathrm{Cen}(FI(P,K))$ é isomorfo a $\prod_{j\in J} K$.*

Demonstração. A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Cen}(FI(P,K)) &\longrightarrow \prod_{j\in J} K \\ f &\longmapsto (f(x,x))_{j\in J} \end{aligned}$$

para todo $x \in P_j$, é um isomorfismo de anéis. □

Corolário 2.3.4. *O poset P é conexo se, e somente se, $FI(P,K)$ é uma álgebra central.*

Demonstração. Suponhamos que P seja conexo. Claramente,

$$\{k\delta : k \in K\} \subseteq \mathrm{Cen}(FI(P,K)).$$

Seja $h \in \mathrm{Cen}(FI(P,K))$. Como P tem apenas uma componente conexa, pelo Teorema 2.3.2, temos que h é diagonal e constante, isto é, existe $k \in K$ tal que $h(x,x) = k$ para todo $x \in P$, e $h(x,y) = 0$ para $x \neq y$. Portanto, $h = k\delta$ e $\mathrm{Cen}(FI(P,K)) = \{k\delta : k \in K\}$.

Reciprocamente, suponha que $FI(P,K)$ seja uma álgebra central e que P não seja conexo. Então, existem $x, y \in P$ tais que a componente conexa P_1 de x é diferente da componente conexa P_2 de y. Considere o elemento $\delta_{P_1} \in FI(P,K)$. Vimos que δ_{P_1} é diagonal e, além disso, se P_j é uma componente conexa qualquer de P e $u \in P_j$, temos $\delta_{P_1}(u,u) = \begin{cases} 1 & \text{se } P_j = P_1 \\ 0 & \text{se } P_j \neq P_1 \end{cases}$. Logo δ_{P_1} é constante em cada componente conexa. Pelo Teorema 2.3.2, $\delta_{P_1} \in \mathrm{Cen}(FI(P,K)) = \{k\delta : k \in K\}$, isto é, existe $k \in K$ tal que $\delta_{P_1} = k\delta$. Assim, $1 = \delta_{P_1}(x,x) = k\delta(x,x) = k$ e $0 = \delta_{P_1}(y,y) = k\delta(y,y) = k$, o que é um absurdo, pois $K \neq \{0\}$. Portanto, P é conexo. □

Proposição 2.3.5. *Seja P um poset arbitrário. Então $FI(P,K)$ é fracamente central.*

Demonstração. Escreva $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ como união disjunta de suas componente conexas. Pelo Teorema 2.1.12, $FI(P,K) \cong \prod_{i \in I} FI(P_i,K)$. Como cada P_i é conexo, $FI(P_i,K)$ é uma álgebra central, pelo corolário anterior. Logo, pela Proposição 1.2.57, $\prod_{i \in I} FI(P_i,K)$ é fracamente central e, portanto, $FI(P,K)$ é fracamente central. □

Definição 2.3.6.

1. O conjunto $C_{I(P,K)}(FI(P,K)) = \{i \in I(P,K) : if = fi, \text{ para toda } f \in FI(P,K)\}$ é chamado de **centralizador de** $FI(P,K)$ **em** $I(P,K)$.

2. O conjunto $C_{FI(P,K)}(I(P,K)) = \{f \in FI(P,K) : if = fi, \text{ para toda } i \in I(P,K)\}$ é chamado de **centralizador de** $I(P,K)$ **em** $FI(P,K)$.

Proposição 2.3.7. $\mathrm{Cen}(FI(P,K)) = C_{I(P,K)}(FI(P,K)) = C_{FI(P,K)}(I(P,K))$.

Demonstração. Claramente $C_{FI(P,K)}(I(P,K)) \subseteq \mathrm{Cen}(FI(P,K)) \subseteq C_{I(P,K)}(FI(P,K))$. Seja $i \in C_{I(P,K)}(FI(P,K))$. Então $i \in I(P,K)$ e $if = fi$ para toda $f \in FI(P,K)$. Logo, para $x, y \in P$ com $x < y$, temos

$$i(x,y) = (\delta_x i)(x,y) = (i\delta_x)(x,y) = 0,$$

ou seja, i é diagonal. Logo $i \in FI(P,K)$ e, consequentemente, $i \in \mathrm{Cen}(FI(P,K))$. Assim, i também é constante em cada componente conexa. Logo, se $j \in I(P,K)$ e $x \leq y$ em P, então x, y estão na mesma componente conexa e assim

$$\begin{aligned}(ij)(x,y) &= \sum_{x\leq z\leq y} i(x,z)j(z,y) = i(x,x)j(x,y) = j(x,y)i(y,y)\\ &= \sum_{x\leq z\leq y} j(x,z)i(z,y) = (ji)(x,y).\end{aligned}$$

Logo $ij = ji$ para todo $j \in I(P,K)$. Como $i \in FI(P,K)$ temos que $i \in C_{FI(P,K)}(I(P,K))$ e, portanto, $C_{I(P,K)}(FI(P,K)) \subseteq C_{FI(P,K)}(I(P,K))$. Temos assim as igualdades desejadas. □

Capítulo 3

Isomorfismos e Automorfismos de $FI(P,K)$

Neste capítulo apresentaremos o Problema do Isomorfismo para as álgebras de incidência finitárias. Também será visto que todo automorfismo de $FI(P,K)$ pode ser escrito como um produto de três automorfismos específicos. Os resultados aqui apresentados estão baseados nos artigos [2], [6] e [7].

3.1 O problema do isomorfismo

O problema do isomorfismo consiste em saber se um isomorfismo de K-álgebras entre $FI(P,K)$ e $FI(Q,K)$ implica em um isomorfismo entre os posets P e Q. Nesta seção, veremos que é possível afirmar isso. Primeiramente, precisamos do lema a seguir.

Lema 3.1.1. *Seja P um poset, seja K um corpo e considere $x, y \in P$. Então $x \leq y$ se, e somente se, $\delta_x FI(P,K)\delta_y \neq \{0\}$.*

Demonstração. Suponhamos que $x \leq y$ e considere $\delta_{xy} \in FI(P,K)$. Então

$$(\delta_x \delta_{xy} \delta_y)(x,y) = \delta_{xy}(x,y) = 1.$$

Logo, $\delta_x \delta_{xy} \delta_y \neq 0$ e, portanto, $\delta_x FI(P,K)\delta_y \neq \{0\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\delta_x FI(P,K)\delta_y \neq \{0\}$. Então existe $g \in FI(P,K)$ tal que $\delta_x g \delta_y \neq 0$. Logo $g(x,y) \neq 0$, por (2.2), o que implica que $x \leq y$, pois $g \in FI(P,K)$. □

Sejam P e Q posets arbitrários. No teorema a seguir usaremos a notação δ_{xy}^P para o elemento δ_{xy} de $FI(P,K)$ e δ_{zw}^Q para o elemento δ_{zw} de $FI(Q,K)$.

Teorema 3.1.2. *Seja K um corpo e sejam P e Q posets. As K-álgebras $FI(P,K)$ e $FI(Q,K)$ são isomorfas se, e somente se, os posets P e Q são isomorfos.*

Demonstração. Seja $\Phi : FI(P,K) \to FI(Q,K)$ um isomorfismo de K-álgebras. Dado $x \in P$, considere o idempotente primitivo δ_x^P de $FI(P,K)$. Pela Proposição 1.2.33, $\Phi(\delta_x^P)$ é um idempotente primitivo de $FI(Q,K)$. Então, pelo Teorema 2.2.9, existe um único $y \in Q$ tal que $\Phi(\delta_x^P)$ é conjugado a δ_y^Q. Dessa forma, Φ induz uma aplicação $\beta : P \to Q$ tal que dado $x \in P$, $\Phi(\delta_x^P)$ é conjugado a $\delta_{\beta(x)}^Q$. Mostremos que β é um isomorfismo de posets.

Sejam $x, y \in P$ tais que $\beta(x) = \beta(y)$. Sejam $f, g \in U(FI(Q,K))$ tais que $\Phi(\delta_x^P) = f\delta_{\beta(x)}^Q f^{-1}$ e $\Phi(\delta_y^P) = g\delta_{\beta(y)}^Q g^{-1}$. Temos

$$\begin{aligned}\delta_x^P &= \Phi^{-1}(f)\Phi^{-1}(\delta_{\beta(x)}^Q)\Phi^{-1}(f)^{-1} = \Phi^{-1}(f)\Phi^{-1}(\delta_{\beta(y)}^Q)\Phi^{-1}(f)^{-1} \\ &= \Phi^{-1}(f)\Phi^{-1}(g)^{-1}\delta_y^P\Phi^{-1}(g)\Phi^{-1}(f)^{-1} = (\Phi^{-1}(f)\Phi^{-1}(g)^{-1})\delta_y^P(\Phi^{-1}(f)\Phi^{-1}(g)^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

Logo, $x = y$ e, portanto, β é injetora.

Dado $z \in Q$, $\Phi^{-1}(\delta_z^Q)$ é um idempotente primitivo de $FI(P,K)$ e, pelo Teorema 2.2.9, é conjugado a δ_x^P, para algum $x \in P$. Logo, $\Phi(\delta_x^P)$ é conjugado a δ_z^Q e, portanto, $\beta(x) = z$. Segue que β é sobrejetora.

Sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$. Como $\Phi(\delta_x^P)$ e $\Phi(\delta_y^P)$ são conjugados a $\delta_{\beta(x)}^Q$ e $\delta_{\beta(y)}^Q$, respectivamente, existem $g_1, g_2 \in U(FI(Q,K))$ tais que

$$\Phi(\delta_x^P) = g_1\delta_{\beta(x)}^Q g_1^{-1} \text{ e } \Phi(\delta_y^P) = g_2\delta_{\beta(y)}^Q g_2^{-1}.$$

Pelo lema anterior, como $x \leq y$, temos que $\delta_x^P FI(P,K)\delta_y^P \neq \{0\}$ e, assim,

$$\begin{aligned}\Phi(\delta_x^P FI(P,K)\delta_y^P) \neq \{0\} &\Rightarrow \Phi(\delta_x^P)FI(Q,K)\Phi(\delta_y^P) \neq \{0\} \\ &\Rightarrow g_1\delta_{\beta(x)}^Q g_1^{-1} FI(Q,K) g_2\delta_{\beta(y)}^Q g_2^{-1} \neq \{0\} \\ &\Rightarrow g_1\delta_{\beta(x)}^Q FI(Q,K)\delta_{\beta(y)}^Q g_2^{-1} \neq \{0\}.\end{aligned}$$

Logo, $\delta_{\beta(x)}^Q FI(Q,K)\delta_{\beta(y)}^Q \neq \{0\}$ e, pelo lema anterior, $\beta(x) \leq \beta(y)$.

Agora, suponha que $\beta(x) \leq \beta(y)$, com $x, y \in P$. Então, pelo lema anterior, $\delta_{\beta(x)}^Q FI(Q,K)\delta_{\beta(y)}^Q \neq \{0\}$. Como $\Phi(\delta_x^P)$ e $\Phi(\delta_y^P)$ são conjugados a $\delta_{\beta(x)}^Q$ e $\delta_{\beta(y)}^Q$, respectivamente, existem $h_1, h_2 \in U(FI(Q,K))$ tais que

$$\Phi(\delta_x^P) = h_1\delta_{\beta(x)}^Q h_1^{-1} \text{ e } \Phi(\delta_y^P) = h_2\delta_{\beta(y)}^Q h_2^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\delta_{\beta(x)}^Q FI(Q,K)\delta_{\beta(y)}^Q \neq \{0\} &\Rightarrow h_1^{-1}\Phi(\delta_x^P)h_1 FI(Q,K) h_2^{-1}\Phi(\delta_y^P)h_2 \neq \{0\} \\ &\Rightarrow h_1^{-1}\Phi(\delta_x^P)FI(Q,K)\Phi(\delta_y^P)h_2 \neq \{0\} \\ &\Rightarrow h_1^{-1}\Phi(\delta_x^P FI(P,K)\delta_y^P)h_2 \neq \{0\} \\ &\Rightarrow \Phi(\delta_x^P FI(P,K)\delta_y^P) \neq \{0\}.\end{aligned}$$

Logo, $\delta_x^P FI(P,K)\delta_y^P \neq \{0\}$ e, pelo lema anterior, segue que $x \leq y$. Portanto β é um isomorfismo de posets.

Reciprocamente, seja $\alpha : P \to Q$ um isomorfismo de posets. Defina a aplicação $\widehat{\alpha} : FI(P,K) \to FI(Q,K)$ por $\widehat{\alpha}(f)(x,y) = f(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y))$, para cada $f \in FI(P,K)$ e cada par $x, y \in Q$. Note que $\widehat{\alpha}$ está bem definida, ou seja, $\widehat{\alpha}(f) \in FI(Q,K)$, para toda $f \in FI(P,K)$. De fato, se $x \not\leq y$ em Q, então $\alpha^{-1}(x) \not\leq \alpha^{-1}(y)$ em P e, assim, $\widehat{\alpha}(f)(x,y) = f(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) = 0$. Logo, $\widehat{\alpha}(f) \in I(Q,K)$. Agora, sejam $[s,t] \subseteq [u,v] \subseteq Q$. Então, existem $[a,b] \subseteq [z,w] \subseteq P$ tais que $s = \alpha(a), t = \alpha(b), u = \alpha(z)$ e $v = \alpha(w)$. Assim, se existir um número infinito de subintervalos $[s,t]$ de $[u,v]$ satisfazendo $\widehat{\alpha}(f)(s,t) \neq 0$, o número de subintervalos $[a,b]$ de $[z,w]$ satisfazendo $f(a,b) \neq 0$ também será infinito, o que não ocorre pois $f \in FI(P,K)$. Logo $\widehat{\alpha}(f) \in FI(Q,K)$.

Mostremos que $\widehat{\alpha}$ é um isomorfismo de K-álgebras. Primeiramente, para $\delta \in FI(P,K)$ e $x, y \in Q$, note que

$$\widehat{\alpha}(\delta)(x,y) = \delta(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha^{-1}(x) = \alpha^{-1}(y) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \delta(x,y).$$

Portanto $\widehat{\alpha}(\delta) = \delta$. Agora, sejam $f, g \in FI(P,K)$, $k \in K$ e $x, y \in Q$. Temos

$$\widehat{\alpha}(f+g)(x,y) = (f+g)(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) = f(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) + g(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y))$$
$$= \widehat{\alpha}(f)(x,y) + \widehat{\alpha}(g)(x,y) = [\widehat{\alpha}(f) + \widehat{\alpha}(f)](x,y),$$

e, portanto, $\widehat{\alpha}(f+g) = \widehat{\alpha}(f) + \widehat{\alpha}(g)$. Também temos

$$\widehat{\alpha}(fg)(x,y) = (fg)(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) = \sum_{\alpha^{-1}(x) \leq t \leq \alpha^{-1}(y)} f(\alpha^{-1}(x), t) g(t, \alpha^{-1}(y)).$$

Como α^{-1} é um isomorfismo de posets, temos que para cada $t \in P$ existe um único $z \in Q$ tal que $t = \alpha^{-1}(z)$ e como a ordem é preservada por α, temos que $x \leq z \leq y$ se $\alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(z) \leq \alpha^{-1}(y)$. Assim,

$$\widehat{\alpha}(fg)(x,y) = \sum_{\alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(z) \leq \alpha^{-1}(y)} f(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(z)) g(\alpha^{-1}(z), \alpha^{-1}(y))$$
$$= \sum_{x \leq z \leq y} \widehat{\alpha}(f)(x,z)\widehat{\alpha}(g)(z,y) = (\widehat{\alpha}(f)\widehat{\alpha}(g))(x,y).$$

Logo, $\widehat{\alpha}(fg) = \widehat{\alpha}(f)\widehat{\alpha}(g)$. E mais

$$\widehat{\alpha}(kf)(x,y) = (kf)(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) = kf(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) = k\widehat{\alpha}(f)(x,y).$$

Logo, $\widehat{\alpha}(kf) = k\widehat{\alpha}(f)$ e, portanto, $\widehat{\alpha}$ é um homomorfismo de K-álgebras. Para mostrar que $\widehat{\alpha}$ é bijetora, mostremos que $\widehat{\alpha^{-1}} = (\widehat{\alpha})^{-1}$. Se $x, y \in P$ e $f \in FI(P,K)$, então

$$\begin{aligned}(\widehat{\alpha^{-1}} \circ \widehat{\alpha})(f)(x,y) &= \widehat{\alpha^{-1}}(\widehat{\alpha}(f))(x,y) = (\widehat{\alpha}(f))(\alpha(x), \alpha(y)) \\ &= f(\alpha^{-1}(\alpha(x)), \alpha^{-1}(\alpha(y))) = f(x,y).\end{aligned}$$

Logo $\widehat{\alpha^{-1}} \circ \widehat{\alpha} = Id_{FI(P,K)}$. Analogamente, para $u, v \in Q$ e $g \in FI(Q,K)$ temos $(\widehat{\alpha} \circ \widehat{\alpha^{-1}})(g)(u,v) = g(u,v)$, ou seja, $\widehat{\alpha} \circ \widehat{\alpha^{-1}} = Id_{FI(Q,K)}$. Portanto, $\widehat{\alpha}$ possui inversa, que é $\widehat{\alpha^{-1}}$, concluindo que $\widehat{\alpha}$ é bijetora. □

Definição 3.1.3. Seja P um poset e seja $\alpha : P \to P$ um automorfismo. O automorfismo $\widehat{\alpha} : FI(P,K) \to FI(P,K)$ definido no teorema anterior é chamado de **automorfismo induzido** por α.

Corolário 3.1.4. *Seja P um poset não localmente finito. Então não existe um poset localmente finito Q tal que $FI(P,K) \cong I(Q,K)$.*

Demonstração. Se existisse um poset localmente finito Q satisfazendo $FI(P,K) \cong I(Q,K)$, teríamos que $FI(P,K) \cong FI(Q,K)$, uma vez que $I(Q,K) = FI(Q,K)$. Assim, pelo teorema anterior, teríamos que $P \cong Q$, o que é um absurdo pois P não é localmente finito.

□

3.2 Automorfismos de $FI(P,K)$

Começamos esta seção apresentando alguns tipos particulares de automorfismos de $FI(P,K)$ bem como alguns resultados que os relacionam. Dentre esses automorfismos estão os automorfismos internos, os induzidos e os multiplicativos, os quais, como veremos, caracterizam todos os automorfismos de $FI(P,K)$.

Denotemos por $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$ o grupo dos automorfismos de $FI(P,K)$ com a operação de composição. Vimos no Exemplo 1.2.54, que para $f \in U(FI(P,K))$ podemos definir o automorfismo interno ψ_f, dado por $\psi_f(g) = fgf^{-1}$, para cada $g \in FI(P,K)$. O conjunto de todos os automorfismos internos de $FI(P,K)$ é denotado por $\mathrm{Inn}(FI(P,K)) = \{\psi_f : f \in U(FI(P,K))\}$.

Proposição 3.2.1. *O conjunto* $\mathrm{Inn}(FI(P,K))$ *é um subgrupo normal de* $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$.

Demonstração. Primeiramente, note que $\psi_\delta(g) = \delta g \delta^{-1} = g$ para toda $g \in FI(P,K)$, isto é, $\psi_\delta = Id_{FI(P,K)}$ e, portanto, $Id_{FI(P,K)} \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$. Agora, sejam $\psi_f, \psi_g \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$ e seja $h \in FI(P,K)$. Temos

$$(\psi_f \circ \psi_g)(h) = \psi_f(\psi_g(h)) = f(\psi_g(h))f^{-1} = f(ghg^{-1})f^{-1} = (fg)h(fg)^{-1} = \psi_{fg}(h),$$

isto é, $\psi_f \circ \psi_g = \psi_{fg}$. Portanto $\psi_f \circ \psi_g \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$. Por fim,

$$\psi_f \circ \psi_{f^{-1}} = \psi_{ff^{-1}} = \psi_\delta = \psi_{f^{-1}f} = \psi_{f^{-1}} \circ \psi_f.$$

Portanto $(\psi_f)^{-1} = \psi_{f^{-1}} \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$. Logo, $\mathrm{Inn}(FI(P,K))$ é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$. Para mostrar que esse subgrupo é normal, seja $\varphi \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$. Para $h \in FI(P,K)$, temos

$$\varphi \circ \psi_f \circ \varphi^{-1}(h) = \varphi(f\varphi^{-1}(h)f^{-1}) = \varphi(f)h\varphi(f)^{-1} = \psi_{\varphi(f)}(h),$$

isto é, $\varphi \circ \psi_f \circ \varphi^{-1} = \psi_{\varphi(f)} \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$ e, portanto, $\mathrm{Inn}(FI(P,K))$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$. □

Seja $\widehat{\mathrm{Aut}}(P) = \{\widehat{\alpha} : \alpha \text{ é um automorfismo de } P\}$ o conjunto de todos os automorfismos de $FI(P,K)$ induzidos por automorfismos de P.

Proposição 3.2.2. *O conjunto* $\widehat{\mathrm{Aut}}(P)$ *é um subgrupo de* $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$.

Demonstração. A aplicação identidade $Id_P : P \to P$ é, claramente, um automorfismo e, portanto, $\widehat{Id_P} \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P)$. Agora, sejam $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P)$ e seja $f \in FI(P,K)$. Para todos $x, y \in P$, temos

$$\begin{aligned}(\widehat{\alpha} \circ \widehat{\beta})(f)(x,y) &= \widehat{\alpha}(\widehat{\beta}(f))(x,y) = \widehat{\beta}(f)(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) = f(\beta^{-1}(\alpha^{-1}(x)), \beta^{-1}(\alpha^{-1}(y))) \\ &= f((\alpha \circ \beta)^{-1}(x), (\alpha \circ \beta)^{-1}(y)) = \widehat{\alpha \circ \beta}(f)(x,y).\end{aligned}$$

Assim, $\widehat{\alpha} \circ \widehat{\beta} = \widehat{\alpha \circ \beta} \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P)$. Por fim, para $\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P)$ já vimos que $(\widehat{\alpha})^{-1} = \widehat{\alpha^{-1}} \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P)$. □

Observação 3.2.3. Seja α um automorfismo de P e seja $x \in P$. Para $u \leq v$ em P, temos

$$\widehat{\alpha}(\delta_x)(u,v) = \delta_x(\alpha^{-1}(u), \alpha^{-1}(v)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha^{-1}(u) = x \text{ e } \alpha^{-1}(v) = x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } u = \alpha(x) \text{ e } v = \alpha(x) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \delta_{\alpha(x)}(u,v).$$

Portanto $\widehat{\alpha}(\delta_x) = \delta_{\alpha(x)}$ para todo $x \in P$ e todo automorfismo α de P.

Definição 3.2.4. Uma função $\sigma \in I(P,K)$ é **multiplicativa** se:

1. Para todos $x \leq y \in P$, $\sigma(x,y) \neq 0$;
2. Para todos $x \leq z \leq y \in P$, $\sigma(x,y) = \sigma(x,z)\sigma(z,y)$.

Observe que se σ é multiplicativa, então para cada $x \in P$, $\sigma(x,x) \neq 0$ e $\sigma(x,x) = \sigma(x,x)\sigma(x,x)$, o que implica em $\sigma(x,x) = 1$. Além disso, se P não é localmente finito, existem $x < y$ e infinitos z's com $x < z < y$. Logo, $\sigma(x,z) \neq 0$ para todo subintervalo $[x,z] \subseteq [x,y]$ e, portanto, $\sigma \notin FI(P,K)$.

Definição 3.2.5. Dados $i, j \in I(P,K)$, o **produto de Hadamard** de i por j, denotado por $i * j$, é dado por $(i * j)(x,y) = i(x,y)j(x,y)$, para todos $x, y \in P$.

O produto de Hadamard é associativo, comutativo e distributivo sobre a adição. Além disso, a função $\Delta \in I(P,K)$ dada por

$$\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é tal que $i * \Delta = i$, para todo $i \in I(P,K)$, ou seja, Δ é o elemento neutro do produto de Hadamard.

Observe também que se $i \in I(P,K)$ e $f \in FI(P,K)$ então $i * f \in FI(P,K)$, uma vez que $f(x,y) = 0$ implica $(i * f)(x,y) = 0$.

Observação 3.2.6. Sejam σ e γ duas funções multiplicativas em $I(P,K)$. Então $\sigma * \gamma$ é multiplicativa. De fato, se $x \leq z \leq y$ são elementos de P, então $(\sigma * \gamma)(x,y) = \sigma(x,y)\gamma(x,y) \neq 0$. E mais,

$$\begin{aligned}(\sigma * \gamma)(x,y) &= \sigma(x,z)\sigma(z,y)\gamma(x,z)\gamma(z,y) = \sigma(x,z)\gamma(x,z)\sigma(z,y)\gamma(z,y) \\ &= (\sigma * \gamma)(x,z)(\sigma * \gamma)(z,y).\end{aligned}$$

Note também que a função Δ é multiplicativa, pois se $x \leq z \leq y$ então $\Delta(x,y) = 1 \neq 0$ e $\Delta(x,z)\Delta(z,y) = 1 = \Delta(x,y)$.

Proposição 3.2.7. *Seja $\sigma \in I(P,K)$ uma função multiplicativa. A aplicação $M_\sigma : FI(P,K) \to FI(P,K)$ definida por $M_\sigma(f) = \sigma * f$ para toda $f \in FI(P,K)$, é um automorfismo de $FI(P,K)$, chamado **automorfismo multiplicativo**. Além disso, para quaisquer elementos multiplicativos $\sigma, \tau \in I(P,K)$, $M_\sigma \circ M_\tau = M_{\sigma * \tau}$.*

Demonstração. Sejam $\sigma, \tau \in I(P,K)$ multiplicativas. Se $f \in FI(P,K)$ então

$$(M_\sigma \circ M_\tau)(f) = M_\sigma(\tau * f) = \sigma * (\tau * f) = (\sigma * \tau) * f = M_{\sigma * \tau}(f).$$

Portanto $M_\sigma \circ M_\tau = M_{\sigma * \tau}$.

Mostremos que M_σ é um homomorfismo de K-álgebras. Dados $x, y \in P$, temos

$$M_\sigma(\delta)(x,y) = (\sigma * \delta)(x,y) = \sigma(x,y)\delta(x,y) = \begin{cases} \sigma(x,y) & \text{se } x = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \delta(x,y),$$

uma vez que $\sigma(x,x) = 1$ para todo $x \in P$. Portanto $M_\sigma(\delta) = \delta$.

Agora, sejam $f, g \in FI(P,K)$ e seja $k \in K$. Temos

$$M_\sigma(f+g)(x,y) = (\sigma * (f+g))(x,y) = (\sigma * f)(x,y) + (\sigma * g)(x,y)$$
$$= (M_\sigma(f) + M_\sigma(g))(x,y).$$

Logo, $M_\sigma(f+g) = M_\sigma(f) + M_\sigma(g)$. E

$$M_\sigma(fg)(x,y) = (\sigma * (fg))(x,y) = \sigma(x,y)(fg)(x,y) = \sigma(x,y) \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)g(z,y).$$

Como σ é multiplicativa, temos que $\sigma(x,y) = \sigma(x,z)\sigma(z,y)$ sempre que $x \leq z \leq y$. Então

$$M_\sigma(fg)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} \sigma(x,z)f(x,z)\sigma(z,y)g(z,y) = \sum_{x \leq z \leq y} (\sigma * f)(x,z)(\sigma * g)(z,y)$$
$$= (\sigma * f)(\sigma * g)(x,y) = (M_\sigma(f)M_\sigma(g))(x,y),$$

e, portanto, $M_\sigma(fg) = M_\sigma(f)M_\sigma(g)$. Agora,

$$M_\sigma(kf)(x,y) = (\sigma * kf)(x,y) = \sigma(x,y)(kf)(x,y) = k\sigma(x,y)f(x,y)$$
$$= k(\sigma * f)(x,y) = kM_\sigma(f)(x,y)$$

e, portanto, $M_\sigma(kf) = kM_\sigma(f)$. Logo, M_σ é um homomorfismo de K-álgebras.

Por fim, mostremos a bijetividade de M_σ. Para isso, defina $\overline{\sigma} \in I(P,K)$ por

$$\overline{\sigma}(x,y) = \begin{cases} \sigma(x,y)^{-1} & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostremos que $\overline{\sigma}$ é multiplicativa e que $M_{\overline{\sigma}} \circ M_\sigma = Id_{FI(P,K)} = M_\sigma \circ M_{\overline{\sigma}}$. Se $x \leq z \leq y$ são elementos de P, então $\overline{\sigma}(x,y) = \sigma(x,y)^{-1} \neq 0$ e mais, como σ é multiplicativa, temos que $\sigma(x,y) = \sigma(x,z)\sigma(z,y)$. Então $\sigma(x,y)^{-1} = \sigma(z,y)^{-1}\sigma(x,z)^{-1} = \sigma(x,z)^{-1}\sigma(z,y)^{-1}$, isto é, $\overline{\sigma}(x,y) = \overline{\sigma}(x,z)\overline{\sigma}(z,y)$, concluindo que $\overline{\sigma}$ é multiplicativa. Além disso, para $x \leq y$, temos

$$(\overline{\sigma} * \sigma)(x,y) = \overline{\sigma}(x,y)\sigma(x,y) = \sigma(x,y)^{-1}\sigma(x,y) = 1 = \Delta(x,y)$$

e, portanto, $\overline{\sigma} * \sigma = \Delta$. Logo $M_{\overline{\sigma}} \circ M_\sigma = M_{\overline{\sigma}*\sigma} = M_\Delta = Id_{FI(P,K)}$. Analogamente, $M_\sigma \circ M_{\overline{\sigma}} = Id_{FI(P,K)}$ concluindo que M_σ é bijetora e $(M_\sigma)^{-1} = M_{\overline{\sigma}}$. □

Proposição 3.2.8. *O conjunto* $\mathrm{Mult}(FI(P,K)) = \{M_\sigma : \sigma \text{ é multiplicativa}\}$ *é um subgrupo de* $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$.

Demonstração. Como $Id_{FI(P,K)} = M_\Delta \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))$, então $\mathrm{Mult}(FI(P,K)) \neq \varnothing$. Se $\sigma, \gamma \in I(P,K)$ são multiplicativas, então $M_\sigma \circ M_\gamma = M_{\sigma * \gamma} \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))$. Além disso, $(M_\sigma)^{-1} = M_{\overline{\sigma}} \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))$. Portanto, $\mathrm{Mult}(FI(P,K))$ é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$. □

Proposição 3.2.9. *Seja* $\psi \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$. *Então* $\psi \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))$ *se, e somente se,* $\psi(\delta_x) = \delta_x$, *para cada* $x \in P$.

Demonstração. Se $\psi \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))$, então $\psi = M_\sigma$ para alguma função σ multiplicativa. Assim se $y \leq z$, para cada $x \in P$, temos

$$M_\sigma(\delta_x)(y,z) = (\sigma * \delta_x)(y,z) = \sigma(y,z)\delta_x(y,z) = \begin{cases} \sigma(y,z) & \text{se } z = y = x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } z = y = x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \delta_x(y,z).$$

Portanto $M_\sigma(\delta_x) = \delta_x$.

Reciprocamente, suponhamos que ψ seja um automorfismo de $FI(P,K)$ tal que $\psi(\delta_x) = \delta_x$, para cada $x \in P$. Seja $f \in FI(P,K)$ e sejam $x \leq y$ elementos de P. Por (2.3), $\delta_x f \delta_y = f(x,y)\delta_{xy}$ e assim $\delta_x FI(P,K)\delta_y \subseteq K\delta_{xy}$. Por outro lado, para $k_1 \in K$ podemos definir uma função $g \in FI(P,K)$ dada por

$$g(u,w) = \begin{cases} k_1 & \text{se } (u,w) = (x,y) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

tal que $k_1\delta_{xy} = g(x,y)\delta_{xy} = \delta_x g \delta_y \in \delta_x FI(P,K)\delta_y$. Logo $K\delta_{xy} \subseteq \delta_x FI(P,K)\delta_y$ e assim $K\delta_{xy} = \delta_x FI(P,K)\delta_y$. Em consequência disso, temos

$$K\psi(\delta_{xy}) = \psi(K\delta_{xy}) = \psi(\delta_x)\psi(FI(P,K))\psi(\delta_y) = \delta_x FI(P,K)\delta_y = K\delta_{xy},$$

isto é, $K\psi(\delta_{xy}) = K\delta_{xy}$ para todos $x \leq y$ em P. Portanto, dado $k_1 \in K$ existe $\mu \in K$ tal que $k_1\psi(\delta_{xy}) = \mu\delta_{xy}$. Em particular, para $k_1 = 1$ existe $k \in K$ tal que $\psi(\delta_{xy}) = k\delta_{xy}$.

Defina $\sigma(x,y) = k$ e então $\psi(\delta_{xy}) = \sigma(x,y)\delta_{xy}$. Novamente, pela igualdade $K\psi(\delta_{xy}) = K\delta_{xy}$, temos que $K\sigma(x,y)\delta_{xy} = K\delta_{xy}$, assim, existe $k_1' \in K$ tal que $k_1'\sigma(x,y)\delta_{xy} = \delta_{xy}$. Então $k_1'\sigma(x,y)\delta_{xy}(x,y) = \delta_{xy}(x,y)$, isto é, $k_1'\sigma(x,y) = 1$ o que implica que $\sigma(x,y) \neq 0$ uma vez que K é um corpo. Defina ainda, $\sigma(x,y) = 0$ se $x \not\leq y$. Então $\sigma \in I(P,K)$. Mostremos que σ é multiplicativa.

Se $x \leq z \leq y$ são elementos de P, então

$$\begin{aligned}\sigma(x,y)\delta_{xy} &= \psi(\delta_{xy}) = \psi(\delta_{xz}\delta_{zy}) = \psi(\delta_{xz})\psi(\delta_{zy}) \\ &= (\sigma(x,z)\delta_{xz})(\sigma(z,y)\delta_{zy}) = \sigma(x,z)\sigma(z,y)\delta_{xy}.\end{aligned}$$

Logo $\sigma(x,y) = \sigma(x,z)\sigma(z,y)$ e, portanto, σ é multiplicativa. Por fim, mostremos que $\psi = M_\sigma$. Como $\psi(\delta_x) = \delta_x$ para todo $x \in P$, temos

$$\delta_x\psi(f)\delta_y = \psi(\delta_x f \delta_y) = \psi(f(x,y)\delta_{xy}) = f(x,y)\psi(\delta_{xy}) = f(x,y)\sigma(x,y)\delta_{xy}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\psi(f)(x,y) &= (\psi(f)(x,y)\delta_{xy})(x,y) = (\delta_x\psi(f)\delta_y)(x,y) = (f(x,y)\sigma(x,y)\delta_{xy})(x,y) \\ &= f(x,y)\sigma(x,y) = (f*\sigma)(x,y) = M_\sigma(f)(x,y).\end{aligned}$$

Portanto $\psi = M_\sigma$. □

No caso em que o poset P é localmente finito, alguns automorfismos multiplicativos podem ser escritos mais especificamente, como pode ser visto em [11]. Mostraremos a seguir que o mesmo pode ser feito para o caso em que P é um poset arbitrário.

Seja h uma função de P em K^*. A função $\tau_h : P \times P \to K$ dada por

$$\tau_h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{h(x)}{h(y)} & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma função multiplicativa de $I(P,K)$. De fato, se $x \leq z \leq y$ em P, então $\tau_h(x,y) = h(x)[h(y)]^{-1} \neq 0$ e

$$\tau_h(x,y) = \frac{h(x)}{h(y)} = \frac{h(x)h(z)}{h(y)h(z)} = \frac{h(x)}{h(z)}\frac{h(z)}{h(y)} = \tau_h(x,z)\tau_h(z,y).$$

A função τ_h é dita uma função **fracionária** e o automorfismo multiplicativo M_{τ_h} é dito um **automorfismo fracionário**.

Dadas $h_1, h_2 : P \to K^*$ definimos uma multiplicação h_1h_2 pontualmente, ou seja, $(h_1h_2)(x) = h_1(x)h_2(x)$. Então

$$\tau_{h_1h_2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(h_1h_2)(x)}{(h_1h_2)(y)} & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{h_1(x)h_2(x)}{h_1(y)h_2(y)} & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$= \tau_{h_1}(x,y)\tau_{h_2}(x,y) = (\tau_{h_1} * \tau_{h_2})(x,y).$$

Logo $\tau_{h_1h_2} = \tau_{h_1} * \tau_{h_2}$ e assim $\tau_{h_1h_2}$ é multiplicativa, pela Observação 3.2.6.

Proposição 3.2.10. *O conjunto* $\mathrm{Frac}(FI(P,K)) = \{M_{\tau_h} : \tau_h$ *é fracionária*$\}$ *é um subgrupo de* $\mathrm{Mult}(FI(P,K))$.

Demonstração. Note que se $h'(x) = 1$ para todo $x \in P$, então $\tau_{h'} = \Delta$ e, portanto, $M_\Delta = M_{\tau_{h'}} \in \mathrm{Frac}(FI(P,K))$.

Sejam $M_{\tau_{h_1}}, M_{\tau_{h_2}} \in \mathrm{Frac}(FI(P,K))$. Então

$$M_{\tau_{h_1}} \circ M_{\tau_{h_2}} = M_{\tau_{h_1} * \tau_{h_2}} = M_{\tau_{h_1 h_2}} \in \mathrm{Frac}(FI(P,K)).$$

Por fim, seja $M_{\tau_h} \in \mathrm{Frac}(FI(P,K))$. Defina $\overline{h} : P \to K^*$ por $\overline{h}(x) = (h(x))^{-1}$. Então

$$\tau_{\overline{h}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{h(y)}{h(x)} & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostremos que $M_{\tau_{\overline{h}}} = (M_{\tau_h})^{-1}$. Temos

$$\tau_{h\overline{h}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{h(x)\overline{h}(x)}{h(y)\overline{h}(y)} & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{h(x)h(y)}{h(y)h(x)} & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \Delta(x,y).$$

Assim, $\tau_{h\overline{h}} = \Delta$. Analogamente, temos que $\tau_{\overline{h}h} = \Delta$. Com isso

$$M_{\tau_{\overline{h}}} \circ M_{\tau_h} = M_{\tau_{\overline{h}h}} = M_\Delta = M_{\tau_{h\overline{h}}} = M_{\tau_h} \circ M_{\tau_{\overline{h}}}.$$

Portanto $(M_{\tau_h})^{-1} = M_{\tau_{\overline{h}}} \in \mathrm{Frac}(FI(P,K))$. □

Proposição 3.2.11. $\mathrm{Frac}(FI(P,K)) = \mathrm{Mult}(FI(P,K)) \cap \mathrm{Inn}(FI(P,K))$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que $\mathrm{Frac}(FI(P,K)) \subseteq \mathrm{Inn}(FI(P,K))$ e, assim, teremos $\mathrm{Frac}(FI(P,K)) \subseteq \mathrm{Mult}(FI(P,K)) \cap \mathrm{Inn}(FI(P,K))$, uma vez que $\mathrm{Frac}(FI(P,K))$ é subgrupo de $\mathrm{Mult}(FI(P,K))$. Seja M_{τ_h} um automorfismo fracionário de $FI(P,K)$ onde τ_h é uma função fracionária. Defina $f \in I(P,K)$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Observe que f é um elemento diagonal de $FI(P,K)$ e $f(x,x) = h(x) \neq 0$ para cada $x \in P$, ou seja, f é inversível. Assim, considere o automorfismo interno ψ_f de $FI(P,K)$.

Para cada $g \in FI(P,K)$ e $x \leq y$ em P, segue pela Observação 2.2.3 que

$$\begin{aligned}\psi_f(g)(x,y) &= (fgf^{-1})(x,y) = f(gf^{-1})(x,y) = \sum_{x\leq t\leq y} f(x,t)(gf^{-1})(t,y)\\ &= h(x)(gf^{-1})(x,y) = h(x)\sum_{x\leq z\leq y} g(x,z)f^{-1}(z,y) = h(x)g(x,y)(h(y))^{-1}\\ &= \frac{h(x)}{h(y)}g(x,y) = \tau_h(x,y)g(x,y) = (\tau_h * g)(x,y) = M_{\tau_h}(x,y).\end{aligned}$$

Portanto $M_{\tau_h} = \psi_f$, concluindo que $\mathrm{Frac}(FI(P,K)) \subseteq \mathrm{Inn}(FI(P,K))$.

Por outro lado, seja $\rho \in \mathrm{Mult}(FI(P,K)) \cap \mathrm{Inn}(FI(P,K))$. Então existem $f \in FI(P,K)$ e $\tau \in I(P,K)$ com f inversível e τ multiplicativa, tais que para cada $g \in FI(P,K)$ e para todos $x, y \in P$ tem-se

$$\rho(g)(x,y) = (fgf^{-1})(x,y) = (\tau * g)(x,y) = \tau(x,y)g(x,y).$$

Em particular, para $g = \delta_{xy}$, temos $(f\delta_{xy}f^{-1})(x,y) = \tau(x,y)\delta_{xy}(x,y)$, ou seja, $\tau(x,y) = f(x,x)f^{-1}(y,y)$. Seja $h : P \to K^*$ dada por $h(x) = f(x,x)$. Então $h(x) \neq 0$, pois $f(x,x) \neq 0$ para todo $x \in K$. Note que $\tau(x,y) = \tau_h(x,y)$, isto é, $\tau(x,y) = \dfrac{h(x)}{h(y)}$, se $x \leq y$. Logo

$$\rho(g)(x,y) = \tau(x,y)g(x,y) = \tau_h(x,y)g(x,y) = (\tau_h * g)(x,y) = M_{\tau_h}(g)(x,y)$$

e, consequentemente, $\rho = M_{\tau_h}$. Logo $\mathrm{Mult}(FI(P,K)) \cap \mathrm{Inn}(FI(P,K)) \subseteq \mathrm{Frac}(FI(P,K))$. □

Proposição 3.2.12. *Se existe $x_0 \in P$ tal que todo elemento de P é comparável com x_0, então* $\mathrm{Mult}(FI(P,K)) \subseteq \mathrm{Inn}(FI(P,K))$. *Portanto,* $\mathrm{Frac}(FI(P,K)) = \mathrm{Mult}(FI(P,K))$.

Demonstração. Seja $\sigma \in I(P,K)$ uma função multiplicativa. Definimos

$$f(x,y) = \begin{cases} \sigma(x,x_0) & \text{se } x = y \leq x_0 \\ \sigma(x_0,x)^{-1} & \text{se } x_0 \leq x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Temos que $f \in FI(P,K)$ e é uma função diagonal. Além disso, para cada $x \in P$, $f(x,x) = \sigma(x,x_0) \neq 0$ ou $f(x,x) = \sigma(x_0,x)^{-1} \neq 0$, ou seja, $f(x,x) \neq 0$, para todo $x \in P$. Logo, pelo Teorema 2.1.6, f é inversível. Mostremos que $M_\sigma = \psi_f$. Seja $g \in FI(P,K)$ e sejam $x \leq y$ em P. Então

$$\psi_f(g)(x,y) = fgf^{-1}(x,y) = \sum_{x\leq z\leq w\leq y} f(x,z)g(z,w)f^{-1}(w,y) = f(x,x)g(x,y)f^{-1}(y,y).$$

Se $x \leq y \leq x_0$ então, como σ é multiplicativa, $\sigma(x,x_0) = \sigma(x,y)\sigma(y,x_0)$ e assim

$$\sigma(x,y) = \sigma(x,x_0)\sigma(y,x_0)^{-1} = f(x,x)f(y,y)^{-1}.$$

Analogamente, se $x_0 \leq x \leq y$ temos $\sigma(x_0,y) = \sigma(x_0,x)\sigma(x,y)$ e então

$$\sigma(x,y) = \sigma(x_0,y)\sigma(x_0,x)^{-1} = \sigma(x_0,x)^{-1}[\sigma(x_0,y)^{-1}]^{-1} = f(x,x)f(y,y)^{-1}.$$

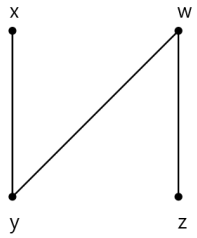
Por fim, se $x \leq x_0 \leq y$ temos $\sigma(x,y) = \sigma(x,x_0)\sigma(x_0,y) = f(x,x)f(y,y)^{-1}$. Logo,

$$\psi_f(g)(x,y) = f(x,x)g(x,y)f(y,y)^{-1} = \sigma(x,y)g(x,y) = (\sigma * g)(x,y) = M_\sigma(g)(x,y)$$

e, portanto, $M_\sigma = \psi_f \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$.

Segue da Proposição 3.2.11 que $\mathrm{Frac}(FI(P,K)) = \mathrm{Mult}(FI(P,K))$. □

A existência de um elemento de P comparável com todos os demais elementos não é necessária para garantir que todos os automorfismos multiplicativos de $FI(P,K)$ sejam internos. Por exemplo, considere o poset $P = \{x,y,w,z\}$ representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



Claramente, P não possui um elemento x_0 tal que todo elemento de P seja comparável com x_0. Como P é finito, $FI(P,K) = I(P,K)$. Seja $\sigma \in I(P,K)$ uma função multiplicativa. Por definição, $\sigma(u,v) \neq 0$ para todos $u \leq v \in P$. Com isso, podemos definir uma aplicação $h : P \to K^*$ de forma que $h(x) = 1, h(y) = \sigma(y,x), h(w) = \sigma(y,x)(\sigma(y,w))^{-1}$ e $h(z) = \sigma(y,x)(\sigma(y,w))^{-1}\sigma(z,w)$. Observe que

$$\tau_h(y,x) = \frac{h(y)}{h(x)} = \sigma(y,x),$$

$$\tau_h(y,w) = \frac{h(y)}{h(w)} = \frac{\sigma(y,x)}{\sigma(y,x)(\sigma(y,w))^{-1}} = \sigma(y,w)$$

e

$$\tau_h(z,w) = \frac{h(z)}{h(w)} = \frac{\sigma(y,x)(\sigma(y,w))^{-1}\sigma(z,w)}{\sigma(y,x)(\sigma(y,w))^{-1}} = \sigma(z,w).$$

Logo $\sigma = \tau_h$ e, consequentemente, $M_\sigma = M_{\tau_h}$. Com isso, $\mathrm{Mult}(I(P,K)) = \mathrm{Frac}(I(P,K))$ e, portanto, $\mathrm{Mult}(I(P,K)) \subseteq \mathrm{Inn}(I(P,K))$ pela Proposição 3.2.11.

Considere, agora, o poset Q do Exemplo 1.1.13 e defina $\sigma \in I(Q,\mathbb{R})$ da seguinte forma: $\sigma(2,20) = \sigma(2,30) = \sigma(5,30) = 1$, $\sigma(5,20) = -1$ e $\sigma(x,x) = 1$, para todo $x \in Q$. Claramente, σ é uma função multiplicativa. Suponha que σ seja fracionária e seja $h : P \to \mathbb{R}^*$ tal que $\sigma = \tau_h$. Então

$$1 = \tau_h(2,20) = \tau_h(2,30) = \tau_h(5,30)$$

e, consequentemente, $h(x) = h(y)$ para todos $x, y \in Q$. Por outro lado, como $\tau_h(5,20) = -1$ então $h(5) = -h(20)$, o que é uma contradição. Portanto, $\mathrm{Frac}(I(Q,\mathbb{R})) \subsetneq \mathrm{Mult}(I(Q,\mathbb{R}))$.

Agora, seja Φ um automorfismo de $FI(P,K)$. Temos que Φ induz um automorfismo α de P tal que $\Phi(\delta_x)$ é conjugado a $\delta_{\alpha(x)}$, pelo Teorema 3.1.2. Para cada $x \in P$, seja $g_x \in U(FI(P,K))$ tal que $\Phi(\delta_x) = g_x\delta_{\alpha(x)}g_x^{-1}$. Então

$$\delta_x = \Phi^{-1}(g_x\delta_{\alpha(x)}g_x^{-1}) = \Phi^{-1}(g_x)\Phi^{-1}(\delta_{\alpha(x)})\Phi^{-1}(g_x)^{-1}$$

e, assim, $\Phi^{-1}(\delta_{\alpha(x)}) = \Phi^{-1}(g_x)^{-1}\delta_x\Phi^{-1}(g_x)$. Como α é bijetora, segue que

$$\Phi^{-1}(\delta_x) = \Phi^{-1}(g_{\alpha^{-1}(x)})^{-1}\delta_{\alpha^{-1}(x)}\Phi^{-1}(g_{\alpha^{-1}(x)})$$

para todo $x \in P$. Portanto, o automorfismo Φ^{-1} induz o automorfismo α^{-1} de P. Isso será utilizado nos lemas seguintes.

Lema 3.2.13. *Seja Φ um automorfismo de $FI(P,K)$ e seja α o automorfismo de P induzido por Φ. Sejam $x, y \in P$ com $x \leq y$. Então temos as seguintes condições:*

(i) $\Phi(\delta_x)(\alpha(x),\alpha(y)) = 0 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\delta_{\alpha(y)})(x,y) = 0$.

(ii) $\Phi(\delta_y)(\alpha(x),\alpha(y)) = 0 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\delta_{\alpha(x)})(x,y) = 0$.

Demonstração. Façamos o item (i). O item (ii) é análogo.

Denote $u = \alpha(x)$ e $v = \alpha(y)$. Como $x \leq y$ então $u = \alpha(x) \leq \alpha(y) = v$, uma vez que α é um automorfismo. Sabemos por (2.3) que

$$\delta_u\Phi(\delta_x)\delta_v = \Phi(\delta_x)(u,v)\delta_{uv}. \tag{3.1}$$

Sejam $f, g \in U(FI(P,K))$ tais que

$$\Phi^{-1}(\delta_u) = f\delta_{\alpha^{-1}(u)}f^{-1} = f\delta_x f^{-1} \text{ e } \Phi^{-1}(\delta_v) = g\delta_{\alpha^{-1}(v)}g^{-1} = g\delta_y g^{-1}. \tag{3.2}$$

Então

$$\Phi^{-1}(\delta_u\Phi(\delta_x)\delta_v) = \Phi^{-1}(\delta_u)\delta_x\Phi^{-1}(\delta_v) = (f\delta_x f^{-1})\delta_x(g\delta_y g^{-1}) = f(\delta_x f^{-1}\delta_x g\delta_y)g^{-1}. \tag{3.3}$$

Mas

$$\begin{aligned}\delta_x f^{-1}\delta_x g\delta_y = (f^{-1}\delta_x g)(x,y)\delta_{xy} &= \left(\sum_{x\leq w\leq z\leq y} f^{-1}(x,w)\delta_x(w,z)g(z,y)\right)\delta_{xy} \\ &= f^{-1}(x,x)g(x,y)\delta_{xy} = f(x,x)^{-1}g(x,y)\delta_{xy}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Além disso, por (3.2), temos

$$g(x,y)g^{-1}(y,y) = g(x,y)\delta_y(y,y)g^{-1}(y,y) = \sum_{x\leq t\leq z\leq y} g(x,t)\delta_y(t,z)g^{-1}(z,y)$$
$$= (g\delta_y g^{-1})(x,y) = \Phi^{-1}(\delta_v)(x,y) = \Phi^{-1}(\delta_{\alpha(y)})(x,y). \tag{3.5}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi(\delta_x)(\alpha(x),\alpha(y)) = 0 &\Leftrightarrow \Phi(\delta_x)(u,v) = 0\\
&\Leftrightarrow \Phi(\delta_x)(u,v)\delta_{uv} = 0\\
&\Leftrightarrow \delta_u\Phi(\delta_x)\delta_v = 0 \quad \text{por (3.1)}\\
&\Leftrightarrow \Phi^{-1}(\delta_u\Phi(\delta_x)\delta_v) = 0\\
&\Leftrightarrow f(\delta_x f^{-1}\delta_x g\delta_y)g^{-1} = 0 \quad \text{por (3.3)}\\
&\Leftrightarrow \delta_x f^{-1}\delta_x g\delta_y = 0\\
&\Leftrightarrow f(x,x)^{-1}g(x,y)\delta_{xy} = 0 \quad \text{por (3.4)}\\
&\Leftrightarrow g(x,y)\delta_{xy} = 0\\
&\Leftrightarrow g(x,y) = 0\\
&\Leftrightarrow g(x,y)g^{-1}(y,y) = 0\\
&\Leftrightarrow \Phi^{-1}(\delta_{\alpha(y)})(x,y) = 0 \quad \text{por (3.5).}
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.14. *Seja Φ um automorfismo de $FI(P,K)$ e seja α o automorfismo de P induzido por Φ. Sejam $x,y \in P$ com $x \leq y$. Então, para qualquer subconjunto $X \subseteq P$, $\Phi(\delta_X)(\alpha(x),\alpha(y)) = \Phi(\delta_{X'})(\alpha(x),\alpha(y))$, onde X' consiste de todos os $z \in X$ tais que $\Phi(\delta_z)(\alpha(x),\alpha(z)) \neq 0$ e $\Phi(\delta_z)(\alpha(z),\alpha(y)) \neq 0$.*

Demonstração. Denote $u = \alpha(x)$ e $v = \alpha(y)$. Sejam $f, g \in U(FI(P,K))$ tais que

$$\Phi^{-1}(\delta_u) = f\delta_{\alpha^{-1}(u)}f^{-1} = f\delta_x f^{-1} \text{ e } \Phi^{-1}(\delta_v) = g\delta_{\alpha^{-1}(v)}g^{-1} = g\delta_y g^{-1}.$$

Assim como na equação (3.3), temos

$$\Phi^{-1}(\delta_u\Phi(\delta_X)\delta_v) = f\delta_x(f^{-1}\delta_X g)\delta_y g^{-1}. \tag{3.6}$$

Seja $z \in P$ tal que $x \leq z \leq y$. Então

$$\Phi^{-1}(\delta_{\alpha(x)})(x,z) = \Phi^{-1}(\delta_u)(x,z) = (f\delta_x f^{-1})(x,z) = \sum_{x\leq t\leq w\leq z} f(x,t)\delta_x(t,w)f^{-1}(w,z)$$
$$= f(x,x)\delta_x(x,x)f^{-1}(x,z) = f(x,x)f^{-1}(x,z).$$

Logo

$$\Phi^{-1}(\delta_{\alpha(x)})(x,z) = f(x,x)f^{-1}(x,z) \text{ e } \Phi^{-1}(\delta_{\alpha(y)})(z,y) = g(z,y)g^{-1}(y,y), \tag{3.7}$$

por (3.5). Usando o lema anterior e (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} X' &= \{z \in X : \Phi(\delta_z)(\alpha(x),\alpha(z)) \neq 0 \text{ e } \Phi(\delta_z)(\alpha(z),\alpha(y)) \neq 0\} \\ &= \{z \in X : \Phi^{-1}(\delta_{\alpha(x)})(x,z) \neq 0 \text{ e } \Phi^{-1}(\delta_{\alpha(y)})(z,y) \neq 0\} \\ &= \{z \in X : f(x,x)f^{-1}(x,z) \neq 0 \text{ e } g(z,y)g^{-1}(y,y) \neq 0\} \\ &= \{z \in X : f^{-1}(x,z) \neq 0 \text{ e } g(z,y) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} (f^{-1}\delta_X g)(x,y) &= \sum_{x\leq t\leq w\leq y} f^{-1}(x,t)\delta_X(t,w)g(w,y) \\ &= \sum_{\substack{x\leq z\leq y \\ z\in X}} f^{-1}(x,z)g(z,y) \\ &= \sum_{\substack{x\leq z\leq y \\ z\in X'}} f^{-1}(x,z)g(z,y) \\ &= \sum_{x\leq t\leq w\leq y} f^{-1}(x,t)\delta_{X'}(t,w)g(w,y) \\ &= (f^{-1}\delta_{X'}g)(x,y) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} f[\delta_x(f^{-1}\delta_X g)\delta_y]g^{-1} &= f[(f^{-1}\delta_X g)(x,y)\delta_{xy}]g^{-1} = f[(f^{-1}\delta_{X'}g)(x,y)\delta_{xy}]g^{-1} \\ &= f[\delta_x(f^{-1}\delta_{X'}g)\delta_y]g^{-1}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Assim

$$\begin{aligned} \Phi(\delta_X)(\alpha(x),\alpha(y)) &= \Phi(\delta_X)(u,v) = \Phi(\delta_X)(u,v)\delta_{uv}(u,v) = (\delta_u\Phi(\delta_X)\delta_v)(u,v) \\ &= \Phi(f\delta_x f^{-1}\delta_X g\delta_y g^{-1})(u,v) \quad \text{por (3.6)} \\ &= \Phi([f\delta_x f^{-1}]\delta_{X'}[g\delta_y g^{-1}])(u,v) \quad \text{por (3.8)} \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(\delta_u)\delta_{X'}\Phi^{-1}(\delta_v))(u,v) \\ &= (\delta_u\Phi(\delta_{X'})\delta_v)(u,v) \\ &= \Phi(\delta_{X'})(u,v)\delta_{uv}(u,v) \\ &= \Phi(\delta_{X'})(\alpha(x),\alpha(y)). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.15. *Se Φ é um automorfismo de $FI(P,K)$, então $\Phi = \psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha}$, para algum automorfismo interno ψ_f, algum automorfismo multiplicativo M_σ e algum automorfismo α de P.*

Demonstração. Seja α o automorfismo de P induzido por Φ. Considere o automorfismo $\widehat{\alpha^{-1}}$ de $FI(P,K)$. Pela Observação 3.2.3, $\widehat{\alpha^{-1}}(\delta_x) = \delta_{\alpha^{-1}(x)}$, para cada $x \in P$. Defina $f \in I(P,K)$ por

$$f(u,v) = (\Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}})(\delta_v)(u,v) = \Phi(\delta_{\alpha^{-1}(v)})(u,v).$$

Mostremos que $f \in FI(P,K)$. Seja $[z,w] \subseteq P$ e suponha que o conjunto $\{[u_s,v_s]\}_{s\in S}$ de todos os subsegmentos $[u_s,v_s] \subseteq [z,w]$ com $u_s < v_s$ e $f(u_s,v_s) \neq 0$ seja infinito. Então

$$\Phi(\delta_{\alpha^{-1}(v_s)})(u_s,v_s) \neq 0 \tag{3.9}$$

e, consequentemente,

$$\Phi^{-1}(\delta_{u_s})(\alpha^{-1}(u_s),\alpha^{-1}(v_s)) \neq 0 \tag{3.10}$$

pelo item (i) do Lema 3.2.13.

Segue de (3.9) que para cada $p_0 \in P$ existe apenas um número finito de v_s tal que $p_0 = v_s$. De fato, se $p_0 = v_s \in [z,w]$ para algum conjunto de índices $S' \subseteq S$ então $\Phi(\delta_{\alpha^{-1}(p_0)})(u_s,p_0) \neq 0$ para esse tal conjunto. Como $\Phi(\delta_{\alpha^{-1}(p_0)}) \in FI(P,K)$ e $[u_s,p_0] \subseteq [z,w]$ são tais que $u_s < v_s = p_0$, devemos ter S' finito. Analogamente, segue de (3.10) que para cada $p_1 \in P$ existe apenas um número finito de u_s tal que $p_1 = u_s$. De fato, se $p_1 = u_s \in [z,w]$ para algum conjunto de índices $S'' \subseteq S$ então $\Phi^{-1}(\delta_{p_1})(\alpha^{-1}(p_1),\alpha^{-1}(v_s)) \neq 0$ para tal conjunto S''. Como $\Phi^{-1}(\delta_{p_1}) \in FI(P,K)$ e $[\alpha^{-1}(p_1),\alpha^{-1}(v_s)] \subseteq [\alpha^{-1}(z),\alpha^{-1}(w)]$ são tais que $\alpha^{-1}(p_1) = \alpha^{-1}(u_s) < \alpha^{-1}(v_s)$, pois α^{-1} é um automorfismo, devemos ter S'' finito.

Agora, seja $[u_1,v_1]$ um segmento de $\{[u_s,v_s]\}_{s\in S}$. Mostremos que existe $[u_2,v_2] \in \{[u_s,v_s]\}_{s\in S}$ tal que

$$[u_1,v_2],[u_2,v_1],[u_1,u_2],[v_1,v_2] \notin \{[u_s,v_s]\}_{s\in S}.$$

Suponha que isso não aconteça. Então, para cada $r \in S$, pelo menos um dos intervalos $[u_1,v_r],[u_r,v_1],[u_1,u_r]$, $[v_1,v_r]$ pertence a $\{[u_s,v_s]\}_{s\in S}$. Considere os seguintes subconjuntos de S:

- $S_1 = \{r \in S : [u_1,v_r] \in \{[u_s,v_s]\}_{s\in S}\}$;
- $S_2 = \{r \in S : [u_r,v_1] \in \{[u_s,v_s]\}_{s\in S}\}$;
- $S_3 = \{r \in S : [u_1,u_r] \in \{[u_s,v_s]\}_{s\in S}\}$;
- $S_4 = \{r \in S : [v_1,v_r] \in \{[u_s,v_s]\}_{s\in S}\}$.

Claramente, $S = \bigcup_{i=1}^{4} S_i$ e, portanto, devemos ter S_i infinito para algum $i \in \{1,2,3,4\}$,

uma vez que S é infinito. Sem perda de generalidade, suponha que S_1 seja infinito. Como $[u_1, v_r] \in \{[u_s, v_s]\}_{s\in S}$ para cada $r \in S_1$, então existem infinitos índices $r \in S$ tais que $u_r = u_1$, o que é uma contradição.

Da mesma forma, existe $[u_3, v_3] \in \{[u_s, v_s]\}_{s\in S}$ tal que

$$[u_1, v_3], [u_3, v_1], [u_1, u_3], [v_1, v_3], [u_2, v_3], [u_3, v_2], [u_2, u_3], [v_2, v_3] \notin \{[u_s, v_s]\}_{s\in S}.$$

Como $\{[u_s, v_s]\}_{s\in S}$ é infinito, obtemos um conjunto infinito $\{[u_i, v_i]\}_{i=1}^{\infty}$ de segmentos satisfazendo (3.9) e (3.10). Além disso, se $[u_j, v_j] \in \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^{\infty}$ e $j > 1$, então

$$[u_k, v_j], [u_j, v_k], [u_k, u_j], [v_k, v_j] \notin \{[u_s, v_s]\}_{s\in S}$$

para $k = 1, \ldots, j-1$.

Tome $X = \{\alpha^{-1}(v_i)\}_{i=1}^{\infty}$ e considere $\delta_X \in FI(P,K)$. Pelo lema anterior, para cada $[u_j, v_j] \in \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^{\infty}$, temos

$$\Phi(\delta_X)(u_j, v_j) = \Phi(\delta_{X'_j})(u_j, v_j)$$

onde X'_j consiste dos elementos $t \in X = \{\alpha^{-1}(v_i)\}_{i=1}^{\infty}$ tais que

$$\Phi(\delta_t)(u_j, \alpha(t)) \neq 0 \text{ e } \Phi(\delta_t)(\alpha(t), v_j) \neq 0,$$

ou seja, X'_j consiste dos elementos $t = \alpha^{-1}(v_k)$ tais que

$$\Phi(\delta_{\alpha^{-1}(v_k)})(u_j, v_k) \neq 0 \text{ e } \Phi(\delta_{\alpha^{-1}(v_k)})(v_k, v_j) \neq 0. \tag{3.11}$$

Observe que, para $k < j$, $[u_k, v_j], [u_j, v_k], [u_k, u_j], [v_k, v_j] \notin \{[u_s, v_s]\}_{s\in S}$ pois $[u_j, v_j] \in \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^{\infty}$. Em particular, como $[u_j, v_k] \notin \{[u_s, v_s]\}_{s\in S}$, temos que $\Phi(\delta_{\alpha^{-1}(v_k)})(u_j, v_k) = 0$. Analogamente, para $j < k$, $[u_j, v_k], [u_k, v_j], [u_j, u_k], [v_j, v_k] \notin \{[u_s, v_s]\}_{s\in S}$ pois $[u_k, v_k] \in \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^{\infty}$ e, consequentemente, $\Phi(\delta_{\alpha^{-1}(v_k)})(u_j, v_k) = 0$. Portanto, o único k que satisfaz a primeira desigualdade de (3.11) é j. Logo, $X'_j = \{\alpha^{-1}(v_j)\}$ e, por (3.9), temos que

$$\Phi(\delta_X)(u_j, v_j) = \Phi(\delta_{X'_j})(u_j, v_j) = \Phi(\delta_{\alpha^{-1}(v_j)})(u_j, v_j) \neq 0.$$

Assim, para cada $[u_j, v_j] \in \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^{\infty}$ temos $u_j < v_j$ e $[u_j, v_j] \subseteq [z, w]$ com $\Phi(\delta_X)(u_j, v_j) \neq 0$, contradizendo o fato que $\Phi(\delta_X) \in FI(P,K)$. Portanto $f \in FI(P,K)$.

Seja $y \in P$. Para $u \leq v$ em P, temos

$$\begin{aligned}((\Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}})(\delta_y)f)(u,v) &= \sum_{u\leq t\leq v} (\Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}})(\delta_y)(u,t)(\Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}})(\delta_v)(t,v) \\ &= [(\Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}})(\delta_y)(\Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}})(\delta_v)](u,v) \\ &= [(\Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}})(\delta_y\delta_v)](u,v) \\ &= \begin{cases} (\Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}})(\delta_y)(u,y) & \text{se } v = y \\ 0 & \text{se } v \neq y \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(u,y) & \text{se } v = y \\ 0 & \text{se } v \neq y \end{cases} \\ &= \sum_{u\leq t\leq v} f(u,t)\delta_y(t,v) \\ &= (f\delta_y)(u,v)\end{aligned}$$

e, portanto, $(\Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}})(\delta_y)f = f\delta_y$, para todo $y \in P$.

Para cada $x \in P$, seja $g_x \in U(FI(P,K))$ tal que $\Phi(\delta_x) = g_x\delta_{\alpha(x)}g_x^{-1}$. Então

$$f(x,x) = \Phi(\delta_{\alpha^{-1}(x)})(x,x) = (g_{\alpha^{-1}(x)}\delta_x g^{-1}_{\alpha^{-1}(x)})(x,x) = g_{\alpha^{-1}(x)}(x,x)g^{-1}_{\alpha^{-1}(x)}(x,x) = 1$$

e f é inversível. Assim, $(\Phi\circ\widehat{\alpha^{-1}})(\delta_y) = f\delta_y f^{-1} = \psi_f(\delta_y)$ e, portanto, $(\psi_{f^{-1}}\circ\Phi\circ\widehat{\alpha^{-1}})(\delta_y) = \delta_y$, para todo $y \in P$. Pela Proposição 3.2.9, existe $\sigma \in I(P,K)$ multiplicativa tal que $\psi_{f^{-1}} \circ \Phi \circ \widehat{\alpha^{-1}} = M_\sigma$. Lembrando que, $\widehat{\alpha^{-1}} = (\widehat{\alpha})^{-1}$, temos $\Phi = \psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha}$. □

Corolário 3.2.16. *Seja P um poset e seja K um corpo. Se existir $x_0 \in P$ tal que todo elemento de P é comparável com x_0, então todo automorfismo de $FI(P,K)$ é a composição de um automorfismo interno de $FI(P,K)$ com um automorfismo de $FI(P,K)$ induzido por um automorfismo de P.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, todo automorfismo de $FI(P,K)$ é composição de um automorfismo interno com um automorfismo multiplicativo e um automorfismo de $FI(P,K)$ induzido por um automorfismo de P. Pela Proposição 3.2.12, $\mathrm{Mult}(FI(P,K)) \subseteq \mathrm{Inn}(FI(P,K))$, e por $\mathrm{Inn}(FI(P,K))$ ser um subgrupo de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$, temos o resultado. □

Corolário 3.2.17. *O conjunto* $\mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K)) = \{\psi_f \circ M_\sigma : \psi_f \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$ *e* $M_\sigma \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))\}$ *é um subgrupo normal de* $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$.

Demonstração. Pelas Proposições 3.2.1 e 3.2.8, $\mathrm{Inn}(FI(P,K))$ é um subgrupo normal e $\mathrm{Mult}(FI(P,K))$ é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$. Logo $\mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$

é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$. Sejam $\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P)$ e $M_\sigma \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))$. Pela Proposição 3.2.9,

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha} \circ M_\sigma \circ (\widehat{\alpha})^{-1}(\delta_x) &= \widehat{\alpha} \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha^{-1}}(\delta_x) = \widehat{\alpha} \circ M_\sigma(\delta_{\alpha^{-1}(x)}) \\ &= \widehat{\alpha}(\delta_{\alpha^{-1}(x)}) = \delta_{\alpha\circ\alpha^{-1}(x)} = \delta_x,\end{aligned}$$

para cada $x \in P$. Novamente pela Proposição 3.2.9,

$$\widehat{\alpha} \circ M_\sigma \circ (\widehat{\alpha})^{-1} \in \mathrm{Mult}(FI(P,K)). \tag{3.12}$$

Sejam $\varphi \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$ e $\psi_g \circ M_{\sigma_1} \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$. Pelo teorema anterior, existem $\psi_f \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$, $M_\sigma \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))$ e $\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P)$ tais que $\varphi = \psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha}$. Assim

$$\begin{aligned}\varphi \circ \psi_g \circ M_{\sigma_1} \circ \varphi^{-1} &= (\psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha}) \circ (\psi_g \circ M_{\sigma_1}) \circ (\widehat{\alpha^{-1}} \circ M_{\overline{\sigma}} \circ \psi_{f^{-1}}) \\ &= (\psi_f \circ M_\sigma) \circ (\widehat{\alpha} \circ \psi_g \circ \widehat{\alpha^{-1}}) \circ (\widehat{\alpha} \circ M_{\sigma_1} \circ \widehat{\alpha^{-1}}) \circ (M_{\overline{\sigma}} \circ \psi_{f^{-1}}) \\ &= (\psi_f \circ M_\sigma) \circ (\psi_{g_1} \circ M_{\sigma_2}) \circ (M_{\overline{\sigma}} \circ \psi_{f^{-1}}),\end{aligned}$$

pois $\mathrm{Inn}(FI(P,K))$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$, e por (3.12). Logo, como $\mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K)) = \mathrm{Mult}(FI(P,K))\,\mathrm{Inn}(FI(P,K))$, temos

$$(\psi_f \circ M_\sigma) \circ (\psi_{g_1} \circ M_{\sigma_2}) \circ (M_{\overline{\sigma}} \circ \psi_{f^{-1}}) \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$$

e, consequentemente, $\varphi \circ \psi_g \circ M_{\sigma_1} \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$. Portanto $\mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$. □

Teorema 3.2.18. *Para qualquer poset P e qualquer corpo K, temos* $\mathrm{Aut}(FI(P,K)) = \widehat{\mathrm{Aut}}(P) \blacktriangleright \mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$.

Demonstração. Seja $\varphi \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P) \cap \mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$. Logo, existem $\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P)$ e $\psi_f \circ M_\sigma \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$ tais que $\widehat{\alpha} = \varphi = \psi_f \circ M_\sigma$. Assim, para todo $x \in P$, temos

$$\delta_{\alpha(x)} = \widehat{\alpha}(\delta_x) = \psi_f \circ M_\sigma(\delta_x) = f\delta_x f^{-1}.$$

Logo, pela Observação 2.2.8, $\alpha(x) = x$ para todo $x \in P$, ou seja, $Id_{FI(P,K)} = \widehat{Id_P} = \widehat{\alpha} = \varphi$. Disso, segue que $\widehat{\mathrm{Aut}}(P) \cap \mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K)) = \{Id_{FI(P,K)}\}$. Pelo corolário anterior, $\widehat{\mathrm{Aut}}(P)\,\mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$ é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$ e, portanto, é igual a $\mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))\widehat{\mathrm{Aut}}(P)$. Pelo Teorema 3.2.15, $\mathrm{Aut}(FI(P,K)) = \widehat{\mathrm{Aut}}(P)\,\mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$. Como $\widehat{\mathrm{Aut}}(P)$ é subgrupo de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$ e $\mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$ é subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(FI(P,K))$, pelo Teorema 1.3.5, $\mathrm{Aut}(FI(P,K)) = \widehat{\mathrm{Aut}}(P) \blacktriangleright \mathrm{Inn}(FI(P,K))\,\mathrm{Mult}(FI(P,K))$. □

Capítulo 4

Automorfismos da idealização $FI(P,K)(+)I(P,K)$

Neste capítulo introduzimos o conceito de idealização $R(+)M$ de um R-bimódulo M. Nosso principal objetivo é caracterizar todos os automorfismos da idealização $FI(P,K)(+)I(P,K)$.

Este capítulo baseia-se nos resultados apresentados em [3].

4.1 Extensões dos automorfismos de $FI(P,K)$

Apresentamos aqui a definição de aplicação semilinear com o intuito de estender cada automorfismo de $FI(P,K)$ a uma aplicação semilinear e bijetiva de $I(P,K)$ em $I(P,K)$. Tais extensões serão essenciais para caracterizar os automorfismos da idealização $FI(P,K)(+)I(P,K)$.

Definição 4.1.1. Uma aplicação $\phi : M \to N$ de um R-bimódulo M em um S-bimódulo N é dita β-**semilinear** se existir um homomorfismo de anéis $\beta : R \to S$ tal que para todos $m, n \in M$ e $r, s \in R$ tivermos

1. $\phi(m+n) = \phi(m) + \phi(n)$;
2. $\phi(rms) = \beta(r)\phi(m)\beta(s)$.

Observação 4.1.2. Se $\beta : FI(P,K) \to FI(Q,K)$ é um homomorfismo de K-álgebras e $\Phi : I(P,K) \to I(Q,K)$ é uma aplicação β-semilinear, então Φ é K-linear. De fato, se $k \in K$ e $i \in I(P,K)$, então

$$\Phi(ki) = \Phi((k\delta)i\delta) = \beta(k\delta)\Phi(i)\beta(\delta) = k\beta(\delta)\Phi(i)\delta = k\delta\Phi(i)\delta = k\Phi(i).$$

Definição 4.1.3. Sejam P e Q posets e K um corpo. Sejam $\varphi : FI(P,K) \to FI(Q,K)$ e $\Phi : I(P,K) \to I(Q,K)$ aplicações. Dizemos que Φ é uma **extensão** de φ ou que φ **se estende** a Φ se a restrição de Φ a $FI(P,K)$ é φ, ou seja, se $\Phi(f) = \varphi(f)$, para toda $f \in FI(P,K)$. Nesse caso, escrevemos $\Phi \restriction_{FI(P,K)} = \varphi$.

Lema 4.1.4. *Sejam $\varphi \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$ e $\Phi \in U(\mathrm{End}_K(I(P,K))$.*

1. *Se $\Phi \restriction_{FI(P,K)} = \varphi$ então $\Phi^{-1} \restriction_{FI(P,K)} = \varphi^{-1}$.*
2. *Se Φ é φ-semilinear então Φ^{-1} é φ^{-1}-semilinear.*

Demonstração. 1. Seja $f \in FI(P,K)$ e seja $g \in FI(P,K)$ tal que $\varphi(g) = f$. Como $\Phi(g) = \varphi(g)$ por hipótese, segue que

$$\Phi^{-1}(f) = \Phi^{-1}(\varphi(g)) = \Phi^{-1}(\Phi(g)) = g = \varphi^{-1}(f).$$

Portanto, $\Phi^{-1} \restriction_{FI(P,K)} = \varphi^{-1}$.

2. Para $h, g \in FI(P,K)$ e $i \in I(P,K)$ temos

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(hig) &= \Phi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(h))\Phi(\Phi^{-1}(i))\varphi(\varphi^{-1}(g))) \\ &= \Phi^{-1}(\Phi(\varphi^{-1}(h)\Phi^{-1}(i)\varphi^{-1}(g))) \text{ pois } \Phi \text{ é } \varphi\text{-semilinear} \\ &= \varphi^{-1}(h)\Phi^{-1}(i)\varphi^{-1}(g),\end{aligned}$$

ou seja, Φ^{-1} é φ^{-1}-semilinear. □

Lema 4.1.5. *Sejam $M_\sigma \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))$, $\psi_f \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$ e $\alpha : P \to Q$ um isomorfismo de posets.*

(i) $\widehat{\alpha} : FI(P,K) \to FI(Q,K)$ se estende a uma aplicação bijetiva $\overline{\alpha} : I(P,K) \to I(Q,K)$ que é $\widehat{\alpha}$-semilinear.

(ii) M_σ se estende a uma aplicação bijetiva $\overline{M_\sigma} : I(P,K) \to I(P,K)$ que é M_σ-semilinear.

(iii) ψ_f se estende a uma aplicação bijetiva $\overline{\psi_f} : I(P,K) \to I(P,K)$ que é ψ_f-semilinear.

Demonstração. (i) Considere a aplicação $\overline{\alpha} : I(P,K) \to I(Q,K)$ definida por $\overline{\alpha}(i)(x,y) = i(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y))$ para cada $i \in I(P,K)$ e cada par $x, y \in Q$. Note que $\overline{\alpha}$ está bem definida, ou seja, $\overline{\alpha}(i) \in I(Q,K)$ para toda $i \in I(P,K)$. De fato, se $x \not\leq y$ em Q, então $\alpha^{-1}(x) \not\leq \alpha^{-1}(y)$ em P e assim $\overline{\alpha}(i)(x,y) = i(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) = 0$. Logo, $\overline{\alpha}(i) \in I(Q,K)$. Claramente, $\overline{\alpha}$ é aditiva. Agora, sejam $u \leq v \in P$, $i \in I(P,K)$, $f, g \in FI(P,K)$. Temos

$$\overline{\alpha}(f)(u,v) = f(\alpha^{-1}(u), \alpha^{-1}(v)) = \widehat{\alpha}(f)(u,v),$$

ou seja, $\overline{\alpha} \restriction_{FI(P,K)} = \widehat{\alpha}$. Além disso,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}(fig)(u,v) = (fig)(\alpha^{-1}(u), \alpha^{-1}(v)) &= \sum_{\alpha^{-1}(u) \leq w \leq t \leq \alpha^{-1}(v)} f(\alpha^{-1}(u), w) i(w,t) g(t, \alpha^{-1}(v)) \\ &= \sum_{\alpha^{-1}(u) \leq \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y) \leq \alpha^{-1}(v)} f(\alpha^{-1}(u), \alpha^{-1}(x)) i(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)) g(\alpha^{-1}(y), \alpha^{-1}(v)) \\ &= \sum_{u \leq x \leq y \leq v} \widehat{\alpha}(f)(u,x) \overline{\alpha}(i)(x,y) \widehat{\alpha}(g)(y,v) = (\widehat{\alpha}(f)\overline{\alpha}(i)\widehat{\alpha}(g))(u,v).\end{aligned}$$

Logo, $\overline{\alpha}$ é uma aplicação $\widehat{\alpha}$-semilinear. Por fim, mostremos que $\overline{\alpha}$ é bijetiva. Como α^{-1} é um isomorfismo de posets, temos que $\overline{\alpha^{-1}} : I(Q,K) \to I(P,K)$ dada por $\overline{\alpha^{-1}}(j)(u,v) = j(\alpha(u),\alpha(v))$ para toda $j \in I(Q,K)$ e $u,v \in P$, é uma extensão $\widehat{\alpha^{-1}}$-semilinear de $\widehat{\alpha^{-1}}$ tal que $\overline{\alpha^{-1}} \circ \overline{\alpha} = Id_{I(P,K)}$ e $\overline{\alpha} \circ \overline{\alpha^{-1}} = Id_{I(Q,K)}$. Portanto, $\overline{\alpha^{-1}} = (\overline{\alpha})^{-1}$ e $\overline{\alpha}$ é bijetiva.

(ii) Considere $\overline{M_\sigma} : I(P,K) \to I(P,K)$ definida por $\overline{M_\sigma}(i) = \sigma * i$ para toda $i \in I(P,K)$. Claramente $\overline{M_\sigma}$ está bem definida e é uma aplicação aditiva que estende M_σ. Sejam $u,v \in P$, $f,g \in FI(P,K)$ e $i \in I(P,K)$. Temos

$$\begin{aligned}
\overline{M_\sigma}(fig)(u,v) = (\sigma * fig)(u,v) &= \sigma(u,v) \sum_{u\leq w\leq t\leq v} f(u,w)i(w,t)g(t,v) \\
&= \sum_{u\leq w\leq t\leq v} \sigma(u,w)f(u,w)\sigma(w,t)i(w,t)\sigma(t,v)g(t,v) \\
&= \sum_{u\leq w\leq t\leq v} (\sigma * f)(u,w)(\sigma * i)(w,t)(\sigma * g)(t,v) \\
&= \sum_{u\leq w\leq t\leq v} M_\sigma(f)(u,w)\overline{M_\sigma}(i)(w,t)M_\sigma(g)(t,v) \\
&= (M_\sigma(f)\overline{M_\sigma}(i)M_\sigma(g))(u,v).
\end{aligned}$$

Logo, $\overline{M_\sigma}$ é M_σ-semilinear.

Mostremos que $\overline{M_\sigma}$ é bijetiva, para isso, considere a extensão $\overline{M_{\overline{\sigma}}}$ de $M_{\overline{\sigma}}$. Temos que $\overline{M_\sigma} \circ \overline{M_{\overline{\sigma}}} = Id_{I(P,K)} = \overline{M_{\overline{\sigma}}} \circ \overline{M_\sigma}$. Portanto $\overline{M_{\overline{\sigma}}} = (\overline{M_\sigma})^{-1}$ e $\overline{M_\sigma}$ é bijetiva.

(iii) Seja $\overline{\psi_f} : I(P,K) \to I(P,K)$ dada por $\overline{\psi_f}(i) = fif^{-1}$. Claramente, $\overline{\psi_f}$ está bem definida e é uma aplicação aditiva tal que $\overline{\psi_f} \restriction_{FI(P,K)} = \psi_f$. Além disso, para $h,g \in FI(P,K)$ e $i \in I(P,K)$, temos

$$\overline{\psi_f}(hig) = f(hig)f^{-1} = (fhf^{-1})(fif^{-1})(fgf^{-1}) = \psi_f(h)\overline{\psi_f}(i)\psi_f(g).$$

Logo, $\overline{\psi_f}$ é ψ_f-semilinear. Por fim, $\overline{\psi_{f^{-1}}}$ é tal que $\overline{\psi_f} \circ \overline{\psi_{f^{-1}}} = Id_{I(P,K)} = \overline{\psi_{f^{-1}}} \circ \overline{\psi_f}$. Portanto $\overline{\psi_{f^{-1}}} = (\overline{\psi_f})^{-1}$ e $\overline{\psi_f}$ é bijetiva. □

Proposição 4.1.6. *Seja $\varphi \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$. Então φ se estende unicamente a uma aplicação $\overline{\varphi} : I(P,K) \to I(P,K)$ bijetiva e φ-semilinear. Além disso, $(\overline{\varphi})^{-1} = \overline{\varphi^{-1}}$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$. Pelo Teorema 3.2.15, $\varphi = \psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha}$, com $\psi_f \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$, $M_\sigma \in \mathrm{Mult}(FI(P,K))$ e $\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathrm{Aut}}(P)$. Sejam $\overline{\psi_f}, \overline{M_\sigma}$ e $\overline{\alpha}$ as extensões de ψ, M_σ e $\widehat{\alpha}$, respectivamente, dadas no lema anterior e considere $\overline{\varphi} = \overline{\psi_f} \circ \overline{M_\sigma} \circ \overline{\alpha}$. Claramente, $\overline{\varphi}$ é uma bijeção aditiva que estende φ. Mostremos que $\overline{\varphi}$ é φ-semilinear. Sejam $i \in I(P,K)$ e $h,g \in FI(P,K)$. Como $\overline{\alpha}$ é $\widehat{\alpha}$-semilinear, $\overline{M_\sigma}$ é M_σ-semilinear e $\overline{\psi_f}$

é ψ_f-semilinear, temos

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(hig) &= (\overline{\psi_f} \circ \overline{M_\sigma} \circ \overline{\alpha})(hig) = \overline{\psi_f}(\overline{M_\sigma}(\overline{\alpha}(hig))) \\ &= \overline{\psi_f}(\overline{M_\sigma}(\widehat{\alpha}(h)\overline{\alpha}(i)\widehat{\alpha}(g))) \\ &= \overline{\psi_f}((M_\sigma \circ \widehat{\alpha}(h))(\overline{M_\sigma} \circ \overline{\alpha}(i))(M_\sigma \circ \widehat{\alpha}(g))) \\ &= (\psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha}(h))(\overline{\psi_f} \circ \overline{M_\sigma} \circ \overline{\alpha}(i))(\psi_f \circ M_\sigma \circ \widehat{\alpha}(g)) \\ &= \varphi(h)\overline{\varphi}(i)\varphi(g).\end{aligned}$$

Logo, para cada $\varphi \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$ existe uma aplicação bijetiva $\overline{\varphi} : I(P,K) \to I(P,K)$ φ-semilinear que estende φ.

Por fim, suponha que φ se estenda às aplicações φ-semilineares bijetivas $\eta, \gamma : I(P,K) \to I(P,K)$ e considere $\Phi = \gamma^{-1} \circ \eta$. Por *1.* do Lema 4.1.4, para toda $h \in FI(P,K)$ temos

$$\Phi(h) = (\gamma^{-1} \circ \eta)(h) = \gamma^{-1}(\eta(h)) = \varphi^{-1}(\varphi(h)) = h.$$

Logo $\Phi \restriction_{FI(P,K)} = Id_{FI(P,K)}$. Agora, por *2.* do Lema 4.1.4, γ^{-1} é φ^{-1}-semilinear e assim para quaisquer $g, h \in FI(P,K)$ e $i \in I(P,K)$, temos

$$\Phi(hig) = (\gamma^{-1} \circ \eta)(hig) = \gamma^{-1}(\varphi(h)\eta(i)\varphi(g)) = h(\gamma^{-1} \circ \eta(i))g = h\Phi(i)g.$$

Logo, Φ é $Id_{FI(P,K)}$-semilinear. Assim, para todo $a \in I(P,K)$ e $x \leq y \in P$ temos

$$\Phi(a)(x,y)\delta_{xy} = \delta_x\Phi(a)\delta_y = \Phi(\delta_x a \delta_y) = \Phi(a(x,y)\delta_{xy}) = a(x,y)\delta_{xy}.$$

Logo $\Phi = Id_{I(P,K)}$ e, portanto, $\eta = \gamma$.

Pelo que acabamos de mostrar, φ^{-1} se estende unicamente a uma aplicação bijetiva e φ^{-1}-semilinear $\overline{\varphi^{-1}} : I(P,K) \to I(P,K)$. Mas, como $\overline{\varphi} \restriction_{FI(P,K)} = \varphi$ e $\overline{\varphi}$ é φ-semilinear, então $(\overline{\varphi})^{-1} \restriction_{FI(P,K)} = \varphi^{-1}$ e $(\overline{\varphi})^{-1}$ é φ^{-1}-semilinear pelo Lema 4.1.4. Logo, $\overline{\varphi^{-1}} = (\overline{\varphi})^{-1}$. □

Exemplo 4.1.7. Considere o automorfismo identidade $Id_{FI(P,K)} : FI(P,K) \to FI(P,K)$ e a aplicação $Id_{I(P,K)} : I(P,K) \to I(P,K)$. Como $Id_{I(P,K)}$ é bijetiva, $Id_{FI(P,K)}$-semilinear e $Id_{I(P,K)} \restriction_{FI(P,K)} = Id_{FI(P,K)}$, então $\overline{Id_{FI(P,K)}} = Id_{I(P,K)}$.

4.2 Idealização do $FI(P,K)$-bimódulo $I(P,K)$

Aqui introduzimos o conceito de idealização $R(+)M$ de um R-bimódulo M. Assim como no problema do isomorfismo para álgebras de incidência finitárias, podemos nos perguntar se um isomorfismo de K-álgebras entre as idealizações de $FI(P,K)(+)I(P,K)$ e $FI(Q,K)(+)I(Q,K)$ implica em um isomorfismo entre os posets P e Q. E, tal como veremos no Teorema 4.2.4, a resposta é afirmativa.

Sejam R um anel, M um R-bimódulo e considere a soma direta $R \oplus M$. Definimos em $R \oplus M$ a multiplicação

$$(r,m)(s,n) = (rs, rn + ms)$$

para todos $(r,m),(s,n) \in R \oplus M$. Com essa multiplicação segue que $R \oplus M$ é um anel chamado de **idealização** do R-bimódulo M ou **extensão trivial** de R por M e é denotado por $R(+)M$.

Denotaremos um elemento (r,m) de $R(+)M$ por $\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix}$. Com essa notação, temos

$$\begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r+s \\ m+n \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} r \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs \\ rn+ms \end{bmatrix},$$

para todos $r,s \in R$ e $m,n \in M$. Além disso, $0_{R(+)M} = \begin{bmatrix} 0_R \\ 0_M \end{bmatrix}$ e $1_{R(+)M} = \begin{bmatrix} 1_R \\ 0_M \end{bmatrix}$.

Exemplo 4.2.1. Seja R um anel e seja I um ideal de R. Um exemplo simples de idealização é o subanel

$$\left\{ \begin{bmatrix} r & i \\ 0 & r \end{bmatrix} : r \in R \text{ e } i \in I \right\}$$

de $UT_2(R)$, uma vez que podemos identificá-lo com a idealização $R(+)I$ do R-bimódulo I.

Lembrando que $I(P,K)$ é um $FI(P,K)$-bimódulo. A idealização $FI(P,K)(+)I(P,K)$ será denotada simplesmente por $D(P,K)$. Dada $i \in I(P,K)$, $i(x,y)$ é um elemento de K para todos $x,y \in P$. Com isso, é fácil verificar que $D(P,K)$ é uma K-álgebra cuja unidade é $\begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}$.

Algumas propriedades sobre os elementos idempotentes da idealização $D(P,K)$ são dadas na proposição seguinte.

Proposição 4.2.2. *(1) O elemento $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \in D(P,K)$ é idempotente se, e somente se, f é idempotente e $i = fi + if$.*

(2) O idempotente $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \in D(P,K)$ é primitivo se, e somente se, f é primitivo.

(3) Seja $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \in D(P,K)$ um idempotente primitivo. Então existe um único $x \in P$ tal que $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}$ é conjugado a $\begin{bmatrix} \delta_x \\ 0 \end{bmatrix}$ em $D(P,K)$.

Demonstração. (1) Seja $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Temos

$$\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f^2 \\ fi+if \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \Leftrightarrow f^2 = f \text{ e } i = fi+if.$$

(2) Suponhamos que o idempotente $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}$ seja primitivo. Pelo item *(1)*, temos

$$f^2 = f \text{ e } i = fi+if. \tag{4.1}$$

Seja $e \in FI(P,K)$ um idempotente tal que

$$fe = ef = e. \tag{4.2}$$

Mostremos que $e = 0$ ou $e = f$. Por (4.1), temos $fif = fif + fif$ e, assim, $fif = 0$. Com isso e (4.2),

$$0 = (fif)e = fi(fe) = fie \text{ e } 0 = e(fif) = (ef)if = eif \tag{4.3}$$

donde

$$eie = efie + eifе = 0. \tag{4.4}$$

Considere o elemento $\theta = \begin{bmatrix} e \\ ei+ie \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Temos que e é idempotente e por (4.4), $e(ei+ie)+(ei+ie)e = ei+ie$, ou seja, θ é idempotente, pelo item *(1)*. Além disso, por (4.2) e (4.3)

$$\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\theta = \begin{bmatrix} fe \\ f(ei+ie)+ie \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fe \\ (fe)i+fie+ie \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ ei+ie \end{bmatrix}$$

e

$$\theta\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ef \\ ei+(ei+ie)f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ef \\ ei+eif+i(ef) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ ei+ie \end{bmatrix}$$

ou seja, $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\theta = \theta\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} = \theta$. Logo, como θ é idempotente e $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}$ é primitivo segue que

$$\begin{bmatrix} e \\ ei+ie \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} e \\ ei+ie \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}.$$

Assim, $e = 0$ ou $e = f$ e, portanto, f é primitivo.

Reciprocamente, suponha que f seja um idempotente primitivo e seja $\epsilon = \begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}$ um idempotente. Mostremos que ϵ é primitivo. Seja $\nu = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ j \end{bmatrix}$ um idempotente tal que $\epsilon\nu = \nu\epsilon = \nu$. Logo

$$\begin{bmatrix} f\varepsilon \\ fj + i\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon f \\ \varepsilon i + jf \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ j \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Como ϵ e ν são idempotentes de $D(P,K)$, segue que f e ε são idempotentes de $FI(P,K)$ e

$$i = fi + if \text{ e } j = \varepsilon j + j\varepsilon. \tag{4.6}$$

Por (4.5) temos que $f\varepsilon = \varepsilon f = \varepsilon$ e como f é primitivo, temos que $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = f$.

Se $\varepsilon = 0$, por (4.6), $j = 0$ e, portanto, $\nu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Se $\varepsilon = f$, de (4.5) e (4.6), temos

$$fj + if = fi + jf = j = fj + jf$$

e, assim,

$$jf = if \text{ e } fj = fi,$$

por (4.5). Logo, $j = fj + jf = fi + if = i$ e, consequentemente, $\nu = \epsilon$. Portanto, ϵ é primitivo.

(3) Seja $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \in D(P,K)$ um idempotente primitivo. Então $f \in FI(P,K)$ é um idempotente primitivo. Logo, pelo Teorema 2.2.9, existe um único $x \in P$ tal que f é conjugado a δ_x, ou seja, existe $g \in U(FI(P,K))$ tal que $f = g\delta_x g^{-1}$. Note que $\begin{bmatrix} g^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ é o inverso de $\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}$ em $D(P,K)$. Como $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}$ é idempotente então $\begin{bmatrix} g^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ g^{-1}ig \end{bmatrix}$ é idempotente. Denotando $j = g^{-1}ig \in I(P,K)$, temos que $j = \delta_x j + j\delta_x$.

Considere $\kappa = \begin{bmatrix} \delta \\ j(\delta - 2\delta_x) \end{bmatrix}$ e observe que $\kappa^{-1} = \begin{bmatrix} \delta \\ -j(\delta - 2\delta_x) \end{bmatrix}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\kappa \begin{bmatrix} \delta_x \\ j \end{bmatrix} \kappa^{-1} &= \begin{bmatrix} \delta \\ j(\delta - 2\delta_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ -j(\delta - 2\delta_x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \delta_x \\ j\delta_x - 2j\delta_x + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ -j(\delta - 2\delta_x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \delta_x \\ -j\delta_x + j - \delta_x j + 2\delta_x j\delta_x \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \delta_x \\ -(\delta_x j + j\delta_x) + j + 2\delta_x j\delta_x \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \delta_x \\ 2\delta_x j\delta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

pois $j = \delta_x j + j\delta_x$ e, consequentemente, $\delta_x j\delta_x = 0$. Logo

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ 0 \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} g^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} \kappa^{-1} = \kappa\xi \begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} (\kappa\xi)^{-1},$$

onde $\xi = \begin{bmatrix} g^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$. Portanto, $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}$ é conjugado a $\begin{bmatrix} \delta_x \\ 0 \end{bmatrix}$. □

Corolário 4.2.3. *Se $\epsilon \in D(P,K)$ é um idempotente, então existe um único subconjunto X de P tal que ϵ é conjugado a $\begin{bmatrix} \delta_X \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Demonstração. Seja $\epsilon = \begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}$ um idempotente de $D(P,K)$. Então, pela proposição anterior, temos que $f \in FI(P,K)$ é idempotente. Pelo Corolário 2.2.7, existe $X \subseteq P$ tal que f é conjugado a δ_X. Além disso, esse subconjunto $X \subseteq P$ é único, pela Observação 2.2.8. Assim, trocando x por X na demonstração do item *(3)* da proposição anterior, temos o resultado. □

Teorema 4.2.4. *Seja K um corpo e sejam P e Q posets. As K-álgebras $D(P,K)$ e $D(Q,K)$ são isomorfas se, e somente se, P e Q são isomorfos.*

Demonstração. Seja $\Phi : D(P,K) \to D(Q,K)$ um isomorfismo de K-álgebras. Dado $x \in P$, como δ_x^P é um idempotente primitivo de $FI(P,K)$ e $\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}$ é um idempotente, segue

que $\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}$ é um idempotente primitivo de $D(P,K)$, pelo item *(2)* da Proposição 4.2.2. Pela Proposição 1.2.33, segue que $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ é um idempotente primitivo de $D(Q,K)$. Então, pelo item *(3)* da Proposição 4.2.2, existe um único $y \in P$ tal que $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ é conjugado a $\begin{bmatrix} \delta_y^Q \\ 0 \end{bmatrix}$ em $D(Q,K)$. Dessa forma, Φ induz uma aplicação $\beta : P \to Q$ tal que, dado $x \in P$, $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ é conjugado a $\begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix}$. Mostremos que β é um isomorfismo de posets.

Sejam $x, y \in P$ tais que $\beta(x) = \beta(y)$ e sejam $\theta, \kappa \in U(D(Q,K))$ tais que $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \theta \begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \theta^{-1}$ e $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \kappa \begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \kappa^{-1}$. Note que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} &= \Phi^{-1}(\theta)\Phi^{-1}\left(\begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix}\right)\Phi^{-1}(\theta)^{-1} = \Phi^{-1}(\theta)\Phi^{-1}\left(\begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix}\right)\Phi^{-1}(\theta)^{-1} \\
&= \Phi^{-1}(\theta)\Phi^{-1}(\kappa)^{-1}\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\Phi^{-1}(\kappa)\Phi^{-1}(\theta)^{-1} \\
&= (\Phi^{-1}(\theta)\Phi^{-1}(\kappa)^{-1})\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}(\Phi^{-1}(\theta)\Phi^{-1}(\kappa)^{-1})^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo item *(3)* da Proposição 4.2.2, $x = y$ e, portanto, β é injetora.

Dado $z \in Q$, $\Phi^{-1}\left(\begin{bmatrix} \delta_z^Q \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ é um idempotente primitivo de $D(P,K)$ e, pela proposição anterior, é conjugado a $\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}$, para algum $x \in P$. Logo, $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ é conjugado a $\begin{bmatrix} \delta_z^Q \\ 0 \end{bmatrix}$ e, portanto, $\beta(x) = z$.

Mostremos agora que, dados $x, y \in P$, $u, v \in Q$,

(i) $x \leq y$ se, e somente se, $\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} D(P,K) \begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix} \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$;

(ii) $u \leq v$ se, e somente se, $\begin{bmatrix} \delta_u^Q \\ 0 \end{bmatrix} D(Q,K) \begin{bmatrix} \delta_v^Q \\ 0 \end{bmatrix} \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Suponha que $x \leq y$. Então, pelo Lema 3.1.1, $\delta_x^P FI(P,K)\delta_y^P \neq \{0\}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} D(P,K) \begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FI(P,K) \\ I(P,K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta_x FI(P,K)\delta_y \\ \delta_x I(P,K)\delta_y \end{bmatrix} \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Agora, suponha que $\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} D(P,K) \begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix} \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Então, existe $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \in D(P,K)$ tal que $\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja, $\delta_x^P f \delta_y^P \neq 0$ ou $\delta_x^P i \delta_y^P \neq 0$.

Se $\delta_x^P f \delta_y^P \neq 0$, então $\delta_x^P FI(P,K)\delta_y^P \neq \{0\}$ e, portanto, $x \leq y$, pelo Lema 3.1.1.

Se $\delta_x^P i \delta_y^P \neq 0$, então existem $w, z \in P$ tais que $\delta_x^P i \delta_y^P(w,z) \neq 0$ e, consequentemente, devemos ter $w = x$ e $z = y$. Logo, $x \leq y$ e, portanto, vale (i). De forma análoga mostra-se que vale (ii).

Sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$. Como $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ e $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ são conjugadas, respectivamente, à $\begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix}$, existem $\theta_1, \theta_2 \in U(D(Q,K))$ tais que

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \theta_1 \begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^{-1} \text{ e } \Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \theta_2 \begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \theta_2^{-1}.$$

Por (i), como $x \leq y$, temos que $\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} D(P,K) \begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ e, assim,

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} D(P,K) \begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\Rightarrow \Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) D(Q,K) \Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\Rightarrow \theta_1 \begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^{-1} D(Q,K) \theta_2 \begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \theta_2^{-1} \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\Rightarrow \theta_1 \begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} D(Q,K) \begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \theta_2^{-1} \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Logo, $\begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} D(Q,K) \begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ e, pelo item (ii), $\beta(x) \leq \beta(y)$.

Agora, suponha que $\beta(x) \leq \beta(y)$, com $x, y \in P$. Então, $\begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} D(Q,K) \begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \neq$

$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, pelo item (ii). Como $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ e $\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ são conjugadas à $\begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix}$, respectivamente, existem $\kappa_1, \kappa_2 \in U(FI(Q,K))$ tais que

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \kappa_1 \begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \kappa_1^{-1} \text{ e } \Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \kappa_2 \begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \kappa_2^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \delta_{\beta(x)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} D(Q,K) \begin{bmatrix} \delta_{\beta(y)}^Q \\ 0 \end{bmatrix} \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&\Rightarrow \kappa_1^{-1}\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) \kappa_1 D(Q,K) \kappa_2^{-1} \Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) \kappa_2 \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&\Rightarrow \kappa_1^{-1}\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) D(Q,K) \Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) \kappa_2 \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&\Rightarrow \kappa_1^{-1}\Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} D(P,K) \begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) \kappa_2 \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&\Rightarrow \Phi\left(\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} D(P,K) \begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix}\right) \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Logo, $\begin{bmatrix} \delta_x^P \\ 0 \end{bmatrix} D(P,K) \begin{bmatrix} \delta_y^P \\ 0 \end{bmatrix} \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ e, pelo item (i), segue que $x \leq y$. Portanto β é um isomorfismo de posets.

Reciprocamente, seja $\alpha : P \to Q$ um isomorfismo de posets. Pela demonstração do Teorema 3.1.2, $\widehat{\alpha} : FI(P,K) \to FI(Q,K)$ é um isomorfismo de K-álgebras. Pelo Lema 4.1.5, $\overline{\alpha} : I(P,K) \to I(Q,K)$ é uma aplicação bijetiva e $\widehat{\alpha}$-semilinear tal que $\overline{\alpha} \restriction_{FI(P,K)} = \widehat{\alpha}$. Assim, defina

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & D(P,K) & \longrightarrow & D(Q,K) \\ & \begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(f) \\ \overline{\alpha}(i) \end{bmatrix}, \end{array}$$

para todo $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Mostremos que Ψ é um isomorfismo de K-álgebras.

Sejam $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix} \in D(P,K)$ e $k \in K$. Temos que

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(\delta) \\ \overline{\alpha}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right) = \Psi\left(\begin{bmatrix} f+g \\ i+j \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(f+g) \\ \overline{\alpha}(i+j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(f)+\widehat{\alpha}(g) \\ \overline{\alpha}(i)+\overline{\alpha}(j) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(f) \\ \overline{\alpha}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(g) \\ \overline{\alpha}(j) \end{bmatrix} = \Psi\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\right) + \Psi\left(\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right),$$

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right) = \Psi\left(\begin{bmatrix} fg \\ fj+ig \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(fg) \\ \overline{\alpha}(fj+ig) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(f)\widehat{\alpha}(g) \\ \overline{\alpha}(fj\delta)+\overline{\alpha}(\delta ig) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(f)\widehat{\alpha}(g) \\ \widehat{\alpha}(f)\overline{\alpha}(j)\widehat{\alpha}(\delta)+\widehat{\alpha}(\delta)\overline{\alpha}(i)\widehat{\alpha}(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(f)\widehat{\alpha}(g) \\ \widehat{\alpha}(f)\overline{\alpha}(j)+\overline{\alpha}(i)\widehat{\alpha}(g) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(f) \\ \overline{\alpha}(i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(g) \\ \overline{\alpha}(j) \end{bmatrix} = \Psi\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\right)\Psi\left(\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right)$$

e

$$\Psi\left(k\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\right) = \Psi\left(\begin{bmatrix} kf \\ ki \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(kf) \\ \overline{\alpha}(ki) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\widehat{\alpha}(f) \\ k\overline{\alpha}(i) \end{bmatrix}$$
$$= k\begin{bmatrix} \widehat{\alpha}(f) \\ \overline{\alpha}(i) \end{bmatrix} = k\Psi\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\right).$$

Logo, Ψ é um homomorfismo de K-álgebras. Além disso, $\Phi : D(Q,K) \to D(P,K)$ dada por $\Phi\left(\begin{bmatrix} h \\ l \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha^{-1}}(f) \\ \overline{\alpha^{-1}}(i) \end{bmatrix}$ para todos $\begin{bmatrix} h \\ l \end{bmatrix} \in D(Q,K)$ é tal que $\Phi \circ \Psi = Id_{D(P,K)}$ e $\Psi \circ \Phi = Id_{D(Q,K)}$. Logo $\Psi^{-1} = \Phi$ e, portanto, Ψ é um isomorfismo. □

Corolário 4.2.5. *Seja K um corpo e sejam P e Q posets. As K-álgebras $D(P,K)$ e $D(Q,K)$ são isomorfas se, e somente se, as K-álgebras $FI(P,K)$ e $FI(Q,K)$ são isomorfas.*

Demonstração. Segue diretamente do teorema anterior e do Teorema 3.1.2. □

4.3 Derivações

Para caracterizar os automorfismos de $D(P,K)$ precisamos do conceito de derivação.

Definição 4.3.1. Seja A uma K-álgebra e seja M um A-bimódulo. Uma aplicação $D : A \to M$ é dita uma **derivação** se satisfaz

(I) $D(ka) = kD(a)$, para todos $a \in A$ e $k \in K$;

(II) $D(a+b) = D(a) + D(b)$, para todos $a, b \in A$;

(III) $D(ab) = D(a)b + aD(b)$, para todos $a, b \in A$.

Segue de (III) que $D(1_A) = 0$.

Nesta seção estudaremos as derivações $D : FI(P,K) \to I(P,K)$, em especial, as derivações aditivas e internas. Quando o poset P é localmente finito, toda derivação $D : I(P,K) \to I(P,K)$ é a soma de uma derivação aditiva e uma derivação interna, pelo Teorema 7.1.4 de [11]. Nesta seção, veremos que esse resultado não é uma particularidade dos posets localmente finitos. Resultados sobre derivações de anéis de incidência mais gerais podem ser encontrados em [5].

Denotamos por $\mathrm{Der}(P,K)$ o conjunto de todas as derivações de $FI(P,K)$ em $I(P,K)$.

Observação 4.3.2. Note que os ítens (I) e (II) acima são equivalentes a dizer que $D \in \mathrm{Hom}_K(FI(P,K), I(P,K))$, para cada $D \in \mathrm{Der}(P,K)$. Assim, se $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(P,K)$ segue que $D_1 + D_2 \in \mathrm{Hom}_K(FI(P,K), I(P,K))$. Também, para $f, g \in FI(P,K)$, temos

$$\begin{aligned}(D_1 + D_2)(fg) &= D_1(fg) + D_2(fg) = D_1(f)g + fD_1(g) + D_2(f)g + fD_2(g)\\ &= (D_1 + D_2)(f)g + f(D_2 + D_2)(g).\end{aligned}$$

Logo, $D_1 + D_2 \in \mathrm{Der}(P,K)$. Agora, se $h \in \mathrm{Cen}(FI(P,K))$, temos

$$(hD_1)(kf) = hD_1(kf) = h(kD_1(f)) = k(hD_1)(f),$$

$$(hD_1)(f+g) = hD_1(f+g) = h(D_1(f) + D_1(g)) = (hD_1)(f) + (hD_1)(g)$$

e

$$(hD_1)(fg) = h(D_1(f)g + fD_1(g)) = (hD_1)(f)g + f(hD_1)(g).$$

Assim, $hD_1 \in \mathrm{Der}(P,K)$. Portanto $\mathrm{Der}(P,K)$ é fechado para a adição e $hD \in \mathrm{Der}(P,K)$, para todos $D \in \mathrm{Der}(P,K)$ e $h \in \mathrm{Cen}(FI(P,K))$.

Proposição 4.3.3. *Sejam $D \in \mathrm{Der}(P,K)$ e $\delta_x \in FI(P,K)$. Então $D(\delta_x)(u,u) = 0$, para todo $u \in P$.*

Demonstração. Temos

$$D(\delta_x) = D(\delta_x\delta_x) = D(\delta_x)\delta_x + \delta_x D(\delta_x). \tag{4.7}$$

Logo, $\delta_x D(\delta_x)\delta_x = 0$ e, consequentemente, $D(\delta_x)(x,x) = 0$, por (2.3). Agora, para $u \neq x$, temos $\delta_u\delta_x = 0 = \delta_x\delta_u$. Com isso, por (4.7)

$$\delta_u D(\delta_x)\delta_u = \delta_u D(\delta_x)\delta_x\delta_u + \delta_u\delta_x D(\delta_x)\delta_u = 0$$

e, assim, $D(\delta_x)(u,u) = 0$, por (2.3). Portanto, $D(\delta_x)(u,u) = 0$ para todo $u \in P$. □

Seja $j \in I(P,K)$ e considere a aplicação $D_j : FI(P,K) \to I(P,K)$ dada por $D_j(f) = fj - jf$, para cada $f \in FI(P,K)$. Note que para $f, g \in FI(P,K)$ e $k \in K$,

$$D_j(kf) = kfj - jkf = k(fj - jf) = kD_j(f),$$

$$D_j(f+g) = (f+g)j - j(f+g) = fj - jf + gj - jg = D_j(f) + D_j(g)$$

e

$$\begin{aligned} D_j(fg) &= (fg)j - j(fg) = (fg)j - j(fg) + f(jg) - f(jg) \\ &= (fj - jf)g + f(gj - jg) = D_j(f)g + fD_j(g). \end{aligned}$$

Portanto, $D_j \in \mathrm{Der}(P,K)$ e é chamada **derivação interna**. O conjunto de todas as derivações internas será denotado por $\mathrm{IDer}(P,K)$ e é fácil verificar que dados $D_i, D_j \in \mathrm{IDer}(P,K)$, temos $D_i + D_j = D_{i+j}$ e $-D_i = D_{-i}$.

Definição 4.3.4. Uma função $\tau \in I(P,K)$ é chamada **aditiva** se $\tau(x,y) = \tau(x,z) + \tau(z,y)$ para $x \leq z \leq y$ em P.

Observação 4.3.5. Se $\tau \in I(P,K)$ é aditiva, então para cada $x \in P$, $\tau(x,x) = \tau(x,x) + \tau(x,x)$. Portanto $\tau(x,x) = 0$, para todo $x \in P$.

Exemplo 4.3.6. Seja $m : P \to K$ uma função e seja $\tau_m \in I(P,K)$ definida por

$$\tau_m(x,y) = \begin{cases} m(y) - m(x) & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Para $x \leq z \leq y$ em P, temos

$$\begin{aligned} \tau_m(x,y) &= m(y) - m(x) = (m(y) - m(z)) + (m(z) - m(x)) \\ &= \tau_m(z,y) + \tau_m(x,z) = \tau_m(x,z) + \tau_m(z,y). \end{aligned}$$

Portanto, τ_m é aditiva.

Seja $\tau \in I(P,K)$ uma função aditiva. Defina $L_\tau : FI(P,K) \to I(P,K)$ por $L_\tau(f) = \tau * f$, para toda $f \in FI(P,K)$. Já sabemos que $i * f \in FI(P,K)$ se $i \in I(P,K)$ e $f \in FI(P,K)$. Logo $L_\tau(FI(P,K)) \subseteq FI(P,K)$. Além disso, para $f, g \in FI(P,K)$, $k \in K$ e $u \leq v \in P$, temos

$$\begin{aligned} L_\tau(kf)(u,v) &= (\tau * (kf))(u,v) = \tau(u,v)(kf)(u,v) = \tau(u,v)kf(u,v) \\ &= k\tau(u,v)f(u,v) = kL_\tau(f)(u,v), \end{aligned}$$

ou seja, $L_\tau(kf) = kL_\tau(f)$. Também,

$$\begin{aligned} L_\tau(f+g)(u,v) &= (\tau * (f+g))(u,v) = \tau(u,v)(f+g)(u,v) \\ &= \tau(u,v)f(u,v) + \tau(u,v)g(u,v) = L_\tau(f)(u,v) + L_\tau(g)(u,v) \\ &= (L_\tau(f) + L_\tau(g))(u,v). \end{aligned}$$

Logo, $L_\tau(f+g) = L_\tau(f) + L_\tau(g)$. Além disso, como τ é aditiva, temos

$$\begin{aligned} L_\tau(fg)(u,v) &= (\tau * fg)(u,v) = \tau(u,v) \sum_{u\leq z\leq v} f(u,z)g(z,v) \\ &= \sum_{u\leq z\leq v} (\tau(u,z) + \tau(z,v))f(u,z)g(z,v) \\ &= \sum_{u\leq z\leq v} [(\tau * f)(u,z)g(z,v) + f(u,z)(\tau * g)(z,v)] \\ &= \sum_{u\leq z\leq v} (\tau * f)(u,z)g(z,v) + \sum_{u\leq z\leq v} f(u,z)(\tau * g)(z,v) \\ &= (L_\tau(f)g)(u,v) + (fL_\tau(g))(u,v) \\ &= (L_\tau(f)g + fL_\tau(g))(u,v). \end{aligned}$$

Assim, $L_\tau(fg) = L_\tau(f)g + fL_\tau(g)$ e, consequentemente, $L_\tau \in \mathrm{Der}(P,K)$. Cada L_τ é chamada de **derivação aditiva** e denotaremos por $\mathrm{ADer}(P,K)$ o conjunto de todas as derivações aditivas, isto é, $\mathrm{ADer}(P,K) = \{L_\tau \in \mathrm{Der}(P,K) : \tau \text{ é aditiva}\}$.

Proposição 4.3.7. *Seja $D \in \mathrm{Der}(P,K)$. Então $D \in \mathrm{ADer}(P,K)$ se, e somente se, $D(\delta_x) = 0$ para cada $x \in P$.*

Demonstração. Suponha que $D \in \mathrm{ADer}(P,K)$ e seja $\delta_x \in FI(P,K)$. Então existe $\tau \in I(P,K)$ aditiva tal que $D(f) = L_\tau(f)$ para cada $f \in FI(P,K)$. Logo, para $u, v \in P$ com $u \neq v$, temos $D(\delta_x)(u,v) = \tau(u,v)\delta_x(u,v) = 0$ pois $\delta_x(u,v) = 0$. Além disso, pela Proposição 4.3.3, $D(\delta_x)(u,u) = 0$ para todo $u \in P$ e, portanto, $D(\delta_x) = 0$.

Reciprocamente, suponha que $D(\delta_x) = 0$ para todo $x \in P$. Para $x \leq y \in P$ e $f \in FI(P,K)$, temos

$$D(\delta_x f \delta_y) = D(\delta_x)f\delta_y + \delta_x D(f\delta_y) = \delta_x D(f)\delta_y + \delta_x f D(\delta_y) = \delta_x D(f)\delta_y.$$

Logo,

$$D(\delta_x f \delta_y) = \delta_x D(f)\delta_y. \tag{4.8}$$

Como $\delta_{xy} = \delta_x \delta_{xy} \delta_y$, pela equação (4.8), temos

$$D(\delta_{xy}) = D(\delta_x \delta_{xy} \delta_y) = \delta_x D(\delta_{xy})\delta_y = D(\delta_{xy})(x,y)\delta_{xy}. \tag{4.9}$$

Defina $\tau \in I(P,K)$ por $\tau(x,y) = D(\delta_{xy})(x,y)$, para todos $x \leq y$ em P. Por (4.9), $D(\delta_{xy}) = \tau(x,y)\delta_{xy}$. Mostremos τ é aditiva e $L_\tau = D$.

Para $u \leq t \leq v \in P$ temos

$$\begin{aligned}\tau(u,v)\delta_{uv} &= D(\delta_{uv}) = D(\delta_{ut}\delta_{tv}) = D(\delta_{ut})\delta_{tv} + \delta_{ut}D(\delta_{tv}) \\ &= \tau(u,t)\delta_{ut}\delta_{tv} + \delta_{ut}\tau(t,v)\delta_{tv} = \tau(u,t)\delta_{uv} + \tau(t,v)\delta_{uv} \\ &= (\tau(u,t) + \tau(t,v))\delta_{uv}\end{aligned}$$

e, assim, $\tau(u,v) = \tau(u,t) + \tau(t,v)$. Logo, τ é aditiva. Seja $f \in FI(P,K)$. Por (4.8), temos

$$\begin{aligned}D(f)(x,y)\delta_{xy} &= \delta_x D(f)\delta_y = D(\delta_x f \delta_y) \\ &= D(f(x,y)\delta_{xy}) = f(x,y)D(\delta_{xy}) \\ &= f(x,y)\tau(x,y)\delta_{xy} = (\tau * f)(x,y)\delta_{xy} \\ &= L_\tau(f)(x,y)\delta_{xy}.\end{aligned}$$

Logo, $D(f)(x,y) = L_\tau(f)(x,y)$, para todos $x \leq y$ em P. Portanto $D = L_\tau$. □

Teorema 4.3.8. $\mathrm{Der}(P,K) = \mathrm{IDer}(P,K) + \mathrm{ADer}(P,K)$.

Demonstração. Seja $D \in \mathrm{Der}(P,K)$ e defina $j \in I(P,K)$ por $j(x,y) = D(\delta_y)(x,y)$ para quaisquer $x \leq y$ em P. Seja $A = D + D_j$. Pela Observação 4.3.2, temos que A é uma derivação. Mostremos que A é uma derivação aditiva, para isso, usaremos a proposição anterior. Seja $x \in P$. Para quaisquer $u \leq v \in P$, temos

$$\begin{aligned}(j\delta_x)(u,v) &= \sum_{u\leq t\leq v} D(\delta_t)(u,t)\delta_x(t,v) = \begin{cases} D(\delta_x)(u,x) & \text{se } v = x \\ 0 & \text{se } v \neq x \end{cases} \\ &= (D(\delta_x)\delta_x)(u,v),\end{aligned}$$

ou seja, $j\delta_x = D(\delta_x)\delta_x$. Logo

$$\begin{aligned}A(\delta_x) &= D(\delta_x) + D_j(\delta_x) = D(\delta_x\delta_x) + \delta_x j - j\delta_x \\ &= D(\delta_x)\delta_x + \delta_x D(\delta_x) + \delta_x j - D(\delta_x)\delta_x = \delta_x(D(\delta_x) + j).\end{aligned}$$

Seja $u < v$ em P. Temos

$$\begin{aligned}A(\delta_x)(u,v) = [\delta_x(D(\delta_x) + j)](u,v) &= \sum_{u\leq t\leq v} \delta_x(u,t)[D(\delta_x) + j](t,v) \\ &= \begin{cases} (D(\delta_x) + j)(x,v) & \text{se } u = x \\ 0 & \text{se } u \neq x \end{cases}.\end{aligned}$$

Logo, $A(\delta_x)(u,v) = 0$ se $u \neq x$. Se $u = x$, então

$$\begin{aligned} A(\delta_x)(x,v) &= (D(\delta_x) + j)(x,v) = D(\delta_x)(x,v) + j(x,v) = D(\delta_x)(x,v) + D(\delta_v)(x,v) \\ &= (D(\delta_x)\delta_v)(x,v) + (\delta_x D(\delta_v))(x,v) = D(\delta_x\delta_v)(x,v) = 0, \end{aligned}$$

pois $x \neq v$. Logo, $A(\delta_x)(u,v) = 0$, para $u < v \in P$. Pela Proposição 4.3.3, $A(\delta_x)(u,u) = 0$, para todo $u \in P$ e, consequentemente, $A(\delta_x)(u,v) = 0$, para $u \leq v \in P$. Assim, $A(\delta_x) = 0$ e $A = D + D_j$ é aditiva. Sabendo que $-D_j = D_{-j}$, segue que $D = D_{-j} + A \in \mathrm{IDer}(P,K) + \mathrm{ADer}(P,K)$ e, portanto, $\mathrm{Der}(P,K) = \mathrm{IDer}(P,K) + \mathrm{ADer}(P,K)$. □

O seguinte resultado diz respeito apenas aos posets que não são localmente finitos.

Teorema 4.3.9. *Seja $j \in I(P,K)$ tal que $D_j(FI(P,K)) \subseteq FI(P,K)$. Então $j \in FI(P,K)$.*

Demonstração. Suponha que $j \notin FI(P,K)$ e seja $[z,w] \subseteq P$ tal que o conjunto $\{[u_s,v_s]\}$ de todos os subsegmentos de $[z,w]$ com $u_s < v_s$ e $j(u_s,v_s) \neq 0$ seja infinito. Então, para cada $p_0 \in P$ existe apenas um número finito de v_s tal que $p_0 = v_s$. De fato, se $p_0 = v_s \in [z,w]$ para algum conjunto de índices S_0 então $j(u_s,p_0) \neq 0$ para esse tal conjunto. Como $D_j(\delta_{p_0}) \in FI(P,K)$ e

$$D_j(\delta_{p_0})(u_s,p_0) = (\delta_{p_0}j)(u_s,p_0) - (j\delta_{p_0})(u_s,p_0) = -j(u_s,p_0) \neq 0$$

com $[u_s,p_0] \subseteq [z,w]$ tais que $u_s < v_s = p_0$, então devemos ter S_0 finito. Analogamente, segue que para cada $p_1 \in P$ existe apenas um número finito de u_s tal que $p_1 = u_s$.

Agora, considere um segmento $[u_1,v_1]$ de $\{[u_s,v_s]\}$. Pelo que foi observado acima, existe somente um número finito de segmentos em $\{[u_s,v_s]\}$ tais que $\{u_s,v_s\} \cap \{u_1,v_1\} \neq \varnothing$. Retire de $\{[u_s,v_s]\}$ todos esses segmentos exceto $[u_1,v_1]$. Entre os segmentos restantes, escolha $[u_2,v_2] \neq [u_1,v_1]$ e repita o processo, ou seja, retire todos $[u_s,v_s] \neq [u_2,v_2]$ tais que $\{u_s,v_s\} \cap \{u_2,v_2\} \neq \varnothing$ (observe que foi retirado apenas um número finito de segmentos e, além disso, $[u_1,v_1]$ permaneceu no conjunto pois $\{u_2,v_2\} \cap \{u_1,v_1\} = \varnothing$, pela etapa anterior). Novamente, tome $[u_3,v_3] \neq [u_1,v_1],[u_2,v_2]$ entre os segmentos restantes e repita o processo. Repetindo esse processo sucessivamente, como $\{[u_s,v_s]\}$ é infinito, obtemos um conjunto infinito $\{[u_i,v_i]\}_{i=1}^{\infty}$ de segmentos satisfazendo $j(u_i,v_i) \neq 0$ e, além disso, para cada i existe um único segmento com extremo esquerdo u_i e um único segmento com extremo direito v_i (o segmento $[u_i,v_i]$). Também, não há segmento com extremo direito u_i ou com extremo esquerdo v_i, pois $\{u_i,v_i\} \cap \{u_k,v_k\} = \varnothing$ se $i \neq k$.

Tome $X = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ e considere $\delta_X \in FI(P,K)$. Temos, para $[u_k,v_k] \in \{[u_i,v_i]\}_{i=1}^{\infty}$,

$$\begin{aligned} D_j(\delta_X)(u_k,v_k) &= (\delta_X j)(u_k,v_k) - (j\delta_X)(u_k,v_k) \\ &= \sum_{u_k \leq z_k \leq v_k} \delta_X(u_k,z_k)j(z_k,v_k) - \sum_{u_k \leq z_k \leq v_k} j(u_k,z_k)\delta_X(z_k,v_k) \\ &= j(u_k,v_k) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, para cada $[u_k, v_k] \in \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^{\infty}$ temos $u_k < v_k$ e $[u_k, v_k] \subseteq [z, w]$ com $D_j(\delta_X)(u_k, v_k) \neq 0$, contradizendo o fato que $D_j(\delta_X) \in FI(P,K)$. Portanto $j \in FI(P,K)$. □

4.4 Automorfismos de $D(P,K)$

Nesta última seção descrevemos os automorfismos de $D(P,K)$. Aqui será explicitada a relevância dos estudos das derivações e das extensões de automorfismos de $FI(P,K)$ realizados nos capítulos anteriores, uma vez que nos ajudarão a introduzir alguns tipos de automorfismos de $D(P,K)$ para formalizar uma decomposição do grupo $\mathrm{Aut}(D(P,K))$ em um produto semidireto. Por fim, apresentamos uma descrição dos automorfismos internos de $D(P,K)$.

Seja $\varphi \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$. Então $\varphi \in \mathrm{End}_K(FI(P,K) \oplus I(P,K))$. Assim, pela Proposição 1.2.43, podemos escrever $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}$ com $\varphi_{11} \in \mathrm{End}_K(FI(P,K))$, $\varphi_{12} \in \mathrm{Hom}_K(I(P,K), FI(P,K))$, $\varphi_{21} \in \mathrm{Hom}_K(FI(P,K), I(P,K))$ e $\varphi_{22} \in \mathrm{End}_K(I(P,K))$. Além disso, para qualquer $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} \in D(P,K)$, temos

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(f) + \varphi_{12}(i) \\ \varphi_{21}(f) + \varphi_{22}(i) \end{bmatrix},$$

pela Observação 1.2.44.

Lema 4.4.1. *Seja* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$. *Então* $\varphi_{12} = 0$.

Demonstração. Sejam $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Como φ é um automorfismo, segue que $\varphi\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\right)\varphi\left(\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right)$, ou seja, $\begin{bmatrix} \varphi_{11}(fg) + \varphi_{12}(fj + ig) \\ \varphi_{21}(fg) + \varphi_{22}(fj + ig) \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} (\varphi_{11}(f) + \varphi_{12}(i))(\varphi_{11}(g) + \varphi_{12}(j)) \\ (\varphi_{11}(f) + \varphi_{12}(i))\,(\varphi_{21}(g) + \varphi_{22}(j)) + (\varphi_{21}(f) + \varphi_{22}(i))(\varphi_{11}(g) + \varphi_{12}(j)) \end{bmatrix}$. Assim, comparando a primeira coordenada, temos

$$\varphi_{11}(fg) + \varphi_{12}(fj + ig) = (\varphi_{11}(f) + \varphi_{12}(i))(\varphi_{11}(g) + \varphi_{12}(j)).$$

Analizemos alguns casos.

Para $i = 0 = j$, temos

(1) $\varphi_{11}(fg) = \varphi_{11}(f)\varphi_{11}(g)$ para todos $f, g \in FI(P,K)$.

Para $f = 0 = g$, temos

(2) $0 = \varphi_{12}(i)\varphi_{12}(j)$ para todos $i, j \in I(P,K)$. Em particular, $[\varphi_{12}(\delta)]^2 = 0$.

Para $f = 0 = j$, segue que

(3) $\varphi_{12}(ig) = \varphi_{12}(i)\varphi_{11}(g)$ para todos $i \in I(P,K)$ e $g \in FI(P,K)$.

Para $g = 0 = i$,

(4) $\varphi_{12}(fj) = \varphi_{11}(f)\varphi_{12}(j)$ para todos $j \in I(P,K)$ e $f \in FI(P,K)$. Em particular, $\varphi_{12}(f) = \varphi_{12}(f\delta) = \varphi_{11}(f)\varphi_{12}(\delta)$, para toda $f \in FI(P,K)$.

Agora, analisando a segunda coordenada, temos

$$\begin{aligned}\varphi_{21}(fg) + \varphi_{22}(fj + ig) =&(\varphi_{11}(f) + \varphi_{12}(i))(\varphi_{21}(g) + \varphi_{22}(j)) \\ &+ (\varphi_{21}(f) + \varphi_{22}(i))(\varphi_{11}(g) + \varphi_{12}(j)).\end{aligned}$$

Para $i = 0 = j$, temos

(5) $\varphi_{21}(fg) = \varphi_{11}(f)\varphi_{21}(g) + \varphi_{21}(f)\varphi_{11}(g)$ para todos $f, g \in FI(P,K)$.

Para $f = 0 = g$,

(6) $0 = \varphi_{12}(i)\varphi_{22}(j) + \varphi_{22}(i)\varphi_{12}(j)$ para todos $i, j \in I(P,K)$.

Para $f = 0 = j$,

(7) $\varphi_{22}(ig) = \varphi_{12}(i)\varphi_{21}(g) + \varphi_{22}(i)\varphi_{11}(g)$ para todos $i \in I(P,K)$ e $g \in FI(P,K)$.

E, para $g = 0 = i$, temos

(8) $\varphi_{22}(fj) = \varphi_{11}(f)\varphi_{22}(j) + \varphi_{21}(f)\varphi_{12}(j)$ para todos $j \in I(P,K)$ e $f \in FI(P,K)$.

Sabemos que φ é um automorfismo, então segue que $\varphi\left(\begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja, $\begin{bmatrix} \varphi_{11}(\delta) \\ \varphi_{21}(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo

(9) $\varphi_{11}(\delta) = \delta$ e $\varphi_{21}(\delta) = 0$.

Claramente $\varphi_{11}(FI(P,K)) + \varphi_{12}(I(P,K)) \subseteq FI(P,K)$, uma vez que $\varphi_{11} : FI(P,K) \to FI(P,K)$ e $\varphi_{12} : I(P,K) \to FI(P,K)$. Por outro lado, dado $f \in FI(P,K)$ temos que $\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Como φ é sobrejetor, existe $\begin{bmatrix} g_1 \\ j_1 \end{bmatrix} \in D(P,K)$ tal que $\varphi\left(\begin{bmatrix} g_1 \\ j_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo $f = \varphi_{11}(g_1) + \varphi_{12}(j_1)$, onde $g_1 \in FI(P,K)$ e $j_1 \in I(P,K)$. Portanto, $FI(P,K) \subseteq \varphi_{11}(FI(P,K)) + \varphi_{12}(I(P,K))$. Assim,

(10) $FI(P,K) = \varphi_{11}(FI(P,K)) + \varphi_{12}(I(P,K))$.

Sejam $h \in FI(P,K)$ e $l \in I(P,K)$. Por (10), segue que

$$h = \varphi_{11}(h_1) + \varphi_{12}(l_1),$$

para alguns $h_1 \in FI(P,K)$ e $l_1 \in I(P,K)$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} h\varphi_{12}(l) &= [\varphi_{11}(h_1) + \varphi_{12}(l_1)]\varphi_{12}(l) \\ &= \varphi_{11}(h_1)\varphi_{12}(l) + \varphi_{12}(l_1)\varphi_{12}(l) \\ &= \varphi_{11}(h_1)\varphi_{12}(l) \text{ por (2)} \\ &= \varphi_{12}(h_1 l) \text{ por (4)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(l)h &= \varphi_{12}(l)[\varphi_{11}(h_1) + \varphi_{12}(l_1)] \\ &= \varphi_{12}(l)\varphi_{11}(h_1) + \varphi_{12}(l)\varphi_{12}(l_1) \\ &= \varphi_{12}(l)\varphi_{11}(h_1) \text{ por (2)} \\ &= \varphi_{12}(lh_1) \text{ por (3).} \end{aligned}$$

Assim, $\varphi_{12}(l)h, h\varphi_{12}(l) \in \varphi_{12}(I(P,K))$ e como φ_{12} é um homomorfismo de K-módulos, então

(11) $\varphi_{12}(I(P,K))$ é um ideal de $FI(P,K)$.

Observe que,

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(\delta)h &= \varphi_{12}(\delta)[\varphi_{11}(h_1) + \varphi_{12}(l_1)] \\ &= \varphi_{12}(\delta)\varphi_{11}(h_1) \text{ por (2)} \\ &= \varphi_{12}(\delta h_1) \text{ por (3).} \\ &= \varphi_{12}(h_1\delta) \\ &= \varphi_{11}(h_1)\varphi_{12}(\delta) \text{ por (4)} \\ &= [\varphi_{11}(h_1) + \varphi_{12}(l_1)]\varphi_{12}(\delta) \text{ por (2)} \\ &= h\varphi_{12}(\delta), \end{aligned}$$

ou seja, $\varphi_{12}(\delta) \in \mathrm{Cen}(FI(P,K))$. Pelo Teorema 2.3.2, $\varphi_{12}(\delta)$ é diagonal e constante em cada componente conexa de P. Mas, por (2), temos $[\varphi_{12}(\delta)]^2 = 0$. Logo, para cada $x \in P$

$$0 = [\varphi_{12}(\delta)]^2(x,x) = \varphi_{12}(\delta)(x,x)\varphi_{12}(\delta)(x,x)$$

e, assim, $\varphi_{12}(\delta)(x,x) = 0$. Como $\varphi_{12}(\delta)$ é diagonal, segue que

(12) $\varphi_{12}(\delta) = 0$.

Com isso e (4), temos $\varphi_{12}(f) = \varphi_{11}(f)\varphi_{12}(\delta) = 0$, para toda $f \in FI(P,K)$. Daí,

(13) $\varphi_{12}(FI(P,K)) = \{0\}$.

Aplicando (6) para $j = \delta$ obtemos

$$0 = \varphi_{12}(i)\varphi_{22}(\delta) + \varphi_{22}(i)\varphi_{12}(\delta) = \varphi_{12}(i)\varphi_{22}(\delta),$$

para todo $i \in I(P,K)$. E tomando $i = \delta$ em (6), obtemos

$$0 = \varphi_{12}(\delta)\varphi_{22}(j) + \varphi_{22}(\delta)\varphi_{12}(j) = \varphi_{22}(\delta)\varphi_{12}(j),$$

para todo $j \in I(P,K)$. Logo,

(14) $\{0\} = \varphi_{12}(I(P,K))\varphi_{22}(\delta)$ e $\{0\} = \varphi_{22}(\delta)\varphi_{12}(I(P,K))$.

Agora, considerando em (7), $i = \delta$ e $g = f$, obtemos

$$\varphi_{22}(f) = \varphi_{22}(\delta f) = \varphi_{12}(\delta)\varphi_{21}(f) + \varphi_{22}(\delta)\varphi_{11}(f) = \varphi_{22}(\delta)\varphi_{11}(f)$$

e, assim,

(15) $\varphi_{22}(f) = \varphi_{22}(\delta)\varphi_{11}(f)$ para toda $f \in FI(P,K)$.

Também, tomando $j = \delta$ em (8), obtemos

$$\varphi_{22}(f) = \varphi_{22}(f\delta) = \varphi_{11}(f)\varphi_{22}(\delta) + \varphi_{21}(f)\varphi_{12}(\delta) = \varphi_{11}(f)\varphi_{22}(\delta).$$

Logo,

(16) $\varphi_{22}(f) = \varphi_{11}(f)\varphi_{22}(\delta)$ para toda $f \in FI(P,K)$.

De (15) e (16), segue

(17) $\varphi_{11}(f)\varphi_{22}(\delta) = \varphi_{22}(\delta)\varphi_{11}(f)$ para toda $f \in FI(P,K)$.

Observe que para $h = \varphi_{11}(h_1) + \varphi_{12}(l_1) \in FI(P,K)$, temos

$$\begin{aligned} h\varphi_{22}(\delta) &= [\varphi_{11}(h_1) + \varphi_{12}(l_1)]\varphi_{22}(\delta) \\ &= \varphi_{11}(h_1)\varphi_{22}(\delta) \text{ por (14)} \\ &= \varphi_{22}(\delta)\varphi_{11}(h_1) \text{ por (17)} \\ &= \varphi_{22}(\delta)[\varphi_{11}(h_1) + \varphi_{12}(l_1)] \text{ por (14)} \\ &= \varphi_{22}(\delta)h, \end{aligned}$$

ou seja,

(18) $h\varphi_{22}(\delta) = \varphi_{22}(\delta)h$ para toda $h \in FI(P,K)$.

Segue que $\varphi_{22}(\delta) \in C_{I(P,K)}(FI(P,K)) = \mathrm{Cen}(FI(P,K))$, pela Proposição 2.3.7. Logo, $\varphi_{22}(\delta) \in FI(P,K)$ e é um elemento diagonal e constante em cada componente conexa de P. Seja $X = \{x \in P : \varphi_{22}(\delta)(x,x) = 0\}$ e seja $Y = P - X$. Cada um desses conjuntos é uma união de componente conexas de P. Considere os conjuntos

$$F_X = \{f \in FI(P,K) : f(x,y) = 0 \text{ se } (x,y) \notin X \times X\}$$

e

$$F_Y = \{f \in FI(P,K) : f(x,y) = 0 \text{ se } (x,y) \notin Y \times Y\}.$$

Observe que F_X é uma K-álgebra com unidade $\delta_X \in FI(P,K)$. De fato, seja $\Phi : F_X \to FI(X,K)$, dada por $\Phi(f) = f|_{X\times X}$ para toda $f \in F_X$. Claramente, $\Phi(f+g) =$

$\Phi(f)+\Phi(g)$, $\Phi(fg)=\Phi(f)\Phi(g)$ e $\Phi(kf)=k\Phi(f)$ para quaisquer $f,g\in F_X$, $k\in K$. Além disso, se $u,v\in X$,

$$\Phi(\delta_X)(u,v)=\delta_X|_{X\times X}(u,v)=\begin{cases}1 \text{ se } u=v\\ 0 \text{ se } u\neq v\end{cases}=\delta(u,v),$$

ou seja, $\Phi(\delta_X)=\delta$, onde δ é a unidade de $FI(X,K)$. Além disso, se $f\in\ker\Phi$, então $f|_{X\times X}=0$, ou seja, $f(u,v)=0$ para todos $u,v\in X$. Agora, se $u\notin X$ ou $v\notin X$, então $(u,v)\notin X\times X$ e, portanto, $f(u,v)=0$, pela definição de F_X. Assim, $f(u,v)=0$ para todos $u,v\in P$ e, consequentemente, Φ é injetor. Finalmente, se $g\in FI(X,K)$, tome $h\in FI(P,K)$ dada por

$$h(u,v)=\begin{cases}g(u,v) & \text{se } (u,v)\in X\times X\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}.$$

Temos que $h\in F_X$ e $\Phi(h)=g$. Logo Φ é sobrejetor e, portanto, um isomorfismo de K-álgebras.

Analogamente, F_Y é uma K-álgebra com unidade δ_Y isomorfa a $FI(Y,K)$.

Se $f\in F_X\cap F_Y$ então $f(u,v)=0$ se $(u,v)\notin X\times X$, pois $f\in F_X$. Agora, se $(u,v)\in X\times X$, então $(u,v)\notin Y\times Y$ e, portanto, $f(u,v)=0$, pois $f\in F_Y$. Portanto, $F_X\cap F_Y=\{0\}$. Também, para $f\in FI(P,K)$, temos que $f=f_X+f_Y$, onde $f_X,f_Y\in FI(P,K)$ são dadas por $f_X(u,v)=\begin{cases}f(u,v) & \text{se } (u,v)\in X\times X\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$ e $f_Y(u,v)=\begin{cases}f(u,v) & \text{se } (u,v)\in Y\times Y\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$. Assim, $FI(P,K)=F_X+F_Y$ com $F_X\cap F_Y=\{0\}$.

Mostremos que $\varphi_{12}(I(P,K))\subseteq F_X$. Sejam $s\in I(P,K)$ e $u\leq v$ em P com $(u,v)\notin X\times X$. Por (14),

$$0=\varphi_{22}(\delta)\varphi_{12}(s)(u,v)=\sum_{u\leq z\leq v}\varphi_{22}(\delta)(u,z)\varphi_{12}(s)(z,v)=\varphi_{22}(\delta)(u,u)\varphi_{12}(s)(u,v),$$

pois $\varphi_{22}(\delta)$ é diagonal. Como u e v estão na mesma componente conexa, segue que $u,v\notin X$, uma vez que X é união de componentes conexas de P. Logo, como $u\notin X$, $\varphi_{22}(\delta)(u,u)\neq 0$ e, portanto, $\varphi_{12}(s)(u,v)=0$. Assim, $\varphi_{12}(s)\in F_X$ e, consequentemente, $\varphi_{12}(I(P,K))\subseteq F_X$. Com isso, por (10) obtemos

$$\begin{aligned}F_X&=FI(P,K)\cap F_X=(\varphi_{12}(I(P,K))+\varphi_{11}(FI(P,K)))\cap F_X\\&=\varphi_{12}(I(P,K))+(\varphi_{11}(FI(P,K))\cap F_X).\end{aligned}$$

Seja $\varphi_{11}^{-1}(F_X)=\{a\in FI(P,K):\varphi_{11}(a)\in F_X\}$ a imagem inversa de F_X por φ_{11}. Então $\varphi_{11}(FI(P,K))\cap F_X=\varphi_{11}(\varphi_{11}^{-1}(F_X))$. De fato, se $b\in\varphi_{11}(FI(P,K))\cap F_X$, existe

$a \in FI(P,K)$ tal que $\varphi_{11}(a) = b \in F_X$. Logo, $a \in \varphi_{11}^{-1}(F_X)$ e, portanto, $b = \varphi_{11}(a) \in \varphi_{11}(\varphi_{11}^{-1}(F_X))$. Por outro lado, se $b \in \varphi_{11}(\varphi_{11}^{-1}(F_X))$ então existe $a \in \varphi_{11}^{-1}(F_X)$ tal que $\varphi_{11}(a) = b$. Pela definição de $\varphi_{11}^{-1}(F_X)$, $a \in FI(P,K)$ e $b = \varphi_{11}(a) \in F_X$. Logo, $b \in \varphi_{11}(FI(P,K)) \cap F_X$ e vale a igualdade desejada. Assim

(19) $F_X = \varphi_{12}(I(P,K)) + \varphi_{11}(\varphi_{11}^{-1}(F_X))$.

Se $i \in \ker\varphi_{12} \cap \ker\varphi_{22}$ então $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \varphi_{12}(i) \\ \varphi_{22}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, como φ é injetor, $i = 0$. Daí,

(20) $\ker\varphi_{12} \cap \ker\varphi_{22} = \{0\}$.

Seja $f \in \varphi_{11}^{-1}(F_X)$ e sejam $u \leq v \in P$. Por (15), temos

$$\varphi_{22}(f)(u,v) = [\varphi_{22}(\delta)\varphi_{11}(f)](u,v) = \varphi_{22}(\delta)(u,u)\varphi_{11}(f)(u,v).$$

Se $u \in X$, então $\varphi_{22}(\delta)(u,u) = 0$ e se $u \notin X$, então $(u,v) \notin X \times X$ e, portanto $\varphi_{11}(f)(u,v) = 0$. Logo $\varphi_{22}(f) = 0$ para toda $f \in \varphi_{11}^{-1}(F_X)$. Disso e de (13) temos

$$\varphi_{11}^{-1}(F_X) \subseteq \ker\varphi_{22} \cap FI(P,K) \subseteq \ker\varphi_{22} \cap \ker\varphi_{12} = \{0\},$$

por (20). Segue de (19) que

(21) $F_X = \varphi_{12}(I(P,K))$.

Então, por (2), $F_X^2 = [\varphi_{12}(I(P,K))]^2 = \{0\}$. Assim, se existir $x \in X$, devemos ter

$$0 = (\delta_X\delta_X)(x,x) = \delta_X(x,x)\delta_X(x,x) = 1,$$

o que é um absurdo. Logo $X = \varnothing$ e, consequentemente, $\varphi_{22}(\delta)$ é inversível em $FI(P,K)$. Portanto, $\varphi_{12} = 0$, por (14). □

Proposição 4.4.2. *Seja* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$. *Então* $\varphi_{11} \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$ *e* $\varphi_{22} \in U(\mathrm{End}_K(I(P,K)))$.

Demonstração. Sabemos que $\varphi_{11} \in \mathrm{End}_K(FI(P,K))$ e por (1) e (9) do lema anterior, φ_{11} é um homomorfismo de K-álgebras. Mostremos que φ_{11} é bijetor. Pelo lema anterior, podemos escrever $\varphi^{-1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$ com $\phi_{11} \in \mathrm{End}_K(FI(P,K)), \phi_{21} \in \mathrm{Hom}_K(FI(P,K), I(P,K))$ e $\phi_{22} \in \mathrm{End}_K(I(P,K))$. Para toda $f \in FI(P,K)$, temos

$$\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = (\varphi^{-1} \circ \varphi)\left(\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix} \varphi_{11}(f) \\ \varphi_{21}(f) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(\varphi_{11}(f)) \\ \phi_{21}(\varphi_{11}(f)) + \phi_{22}(\varphi_{21}(f)) \end{bmatrix}$$

e assim $f = (\phi_{11} \circ \varphi_{11})(f)$. Analogamente, $f = (\varphi_{11} \circ \phi_{11})(f)$, para toda $f \in FI(P,K)$. Logo, $\phi_{11} \circ \varphi_{11} = Id_{FI(P,K)} = \varphi_{11} \circ \phi_{11}$ e $(\varphi_{11})^{-1} = \phi_{11}$. Portanto, $\varphi_{11} \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$.

Por fim, resta mostrar que φ_{22} é bijetor, uma vez $\varphi_{22} \in \mathrm{End}_K(I(P,K))$. Para todo $i \in I(P,K)$, temos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = (\varphi^{-1} \circ \varphi)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right) = \varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_{22}(i) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_{22}(\varphi_{22}(i)) \end{bmatrix},$$

ou seja, $(\phi_{22} \circ \varphi_{22})(i) = i$. Analogamente, $(\varphi_{22} \circ \phi_{22})(i) = i$, para todo $i \in I(P,K)$. Logo $\varphi_{22} \circ \phi_{22} = Id_{I(P,K)} = \phi_{22} \circ \varphi_{22}$ e, consequentemente, $(\varphi_{22})^{-1} = \phi_{22}$. Portanto, $\varphi_{22} \in U(\mathrm{End}_K(I(P,K)))$. □

Observação 4.4.3. Dado $\varphi \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$, pelo Lema 4.4.1 e pela Proposição 4.4.2, podemos escrever $\varphi = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}$, onde $\rho \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$, $\varphi_{22} \in U(\mathrm{End}_K(I(P,K)))$ e $\varphi_{21} \in \mathrm{Hom}_K(FI(P,K), I(P,K))$. Além disso, $\varphi^{-1} = \begin{bmatrix} \rho^{-1} & 0 \\ \psi & \varphi_{22}^{-1} \end{bmatrix}$ para algum $\psi \in \mathrm{Hom}_K(FI(P,K), I(P,K))$. Mais ainda, as igualdades (5), (7) e (8) do lema anterior podem ser reescritas da seguinte forma:

(5)* $\varphi_{21}(fg) = \varphi_{21}(f)\rho(g) + \rho(f)\varphi_{21}(g)$, para todos $f, g \in FI(P,K)$.

(7)* $\varphi_{22}(ig) = \varphi_{22}(i)\rho(g)$, para todos $g \in FI(P,K)$ e $i \in I(P,K)$.

(8)* $\varphi_{22}(fj) = \rho(f)\varphi_{22}(j)$, para todos $f \in FI(P,K)$ e $j \in I(P,K)$.

E, de (7)* e (8)*, temos

(22) $\varphi_{22}(fjg) = \rho(f)\varphi_{22}(j)\rho(g)$, para todos $f, g \in FI(P,K)$ e $j \in I(P,K)$. Segue que φ_{22} é ρ-semilinear.

Pela Proposição 4.1.6, para cada $\rho \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$, existe uma única aplicação bijetiva ρ-semilinear $\overline{\rho} : I(P,K) \to I(P,K)$ tal que $\overline{\rho} \restriction_{FI(P,K)} = \rho$. Com isso, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.4.4. *Se $\rho \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$, então $\widetilde{\rho} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \overline{\rho} \end{bmatrix} \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$.*

Demonstração. Observe que $\widetilde{\rho} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \overline{\rho} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_K(M_1,M_1) & \mathrm{Hom}_K(M_2,M_1) \\ \mathrm{Hom}_K(M_1,M_2) & \mathrm{Hom}_K(M_2,M_2) \end{bmatrix}$ onde $M_1 = FI(P,K)$ e $M_2 = I(P,K)$. Pela Proposição 1.2.43, $\widetilde{\rho} \in \mathrm{End}_K(FI(P,K) \oplus I(P,K)) = \mathrm{End}_K(D(P,K))$. Sejam $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Temos

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right) &= \widetilde{\rho}\left(\begin{bmatrix} fg \\ fj + ig \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \rho(fg) \\ \overline{\rho}(fj + ig) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(f)\rho(g) \\ \rho(f)\overline{\rho}(j) + \overline{\rho}(i)\rho(g) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho(f) \\ \overline{\rho}(i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho(g) \\ \overline{\rho}(j) \end{bmatrix} = \widetilde{\rho}\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\right)\widetilde{\rho}\left(\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\widetilde{\rho}\left(\begin{bmatrix}\delta\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\rho(\delta)\\\overline{\rho}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta\\0\end{bmatrix}.$$

Assim, $\widetilde{\rho}$ é um homomorfismo de K-álgebras. Mostremos que $\widetilde{\rho}$ é bijetora, para isso, considere $\widetilde{\rho^{-1}}=\begin{bmatrix}\rho^{-1}&0\\0&\overline{\rho^{-1}}\end{bmatrix}$. Pela Proposição 4.1.6, $\overline{\rho^{-1}}=(\overline{\rho})^{-1}$ e, portanto, $\widetilde{\rho^{-1}}=\begin{bmatrix}\rho^{-1}&0\\0&(\overline{\rho})^{-1}\end{bmatrix}$. Logo $\widetilde{\rho^{-1}}\circ\widetilde{\rho}=Id_{D(P,K)}=\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\rho^{-1}}$, ou seja, $\widetilde{\rho^{-1}}=(\widetilde{\rho})^{-1}$ e $\widetilde{\rho}\in\mathrm{Aut}(D(P,K))$. □

Proposição 4.4.5. *O conjunto* $\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)})=\{\widetilde{\rho}:\rho\in\mathrm{Aut}(FI(P,K))\}$ *é um subgrupo de* $\mathrm{Aut}(D(P,K))$.

Demonstração. Como $Id_{FI(P,K)}\in\mathrm{Aut}(FI(P,K))$, então

$$Id_{D(P,K)}=\begin{bmatrix}Id_{FI(P,K)}&0\\0&Id_{I(P,K)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Id_{FI(P,K)}&0\\0&\overline{Id_{FI(P,K)}}\end{bmatrix}\in\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)}).$$

Sejam $\widetilde{\eta},\widetilde{\rho}\in\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)})$. Então

$$\widetilde{\eta}\circ\widetilde{\rho}=\begin{bmatrix}\eta&0\\0&\overline{\eta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho&0\\0&\overline{\rho}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta\circ\rho&0\\0&\overline{\eta}\circ\overline{\rho}\end{bmatrix}.$$

Claramente, $\overline{\eta}\circ\overline{\rho}$ é uma bijeção e $\overline{\eta}\circ\overline{\rho}\restriction_{FI(P,K)}=\eta\circ\rho$. Além disso, para $f,g\in FI(P,K)$ e $i\in I(P,K)$, temos

$$\begin{aligned}(\overline{\eta}\circ\overline{\rho})(fig)&=\overline{\eta}(\rho(f)\overline{\rho}(i)\rho(g))\text{ pois }\overline{\rho}\text{ é }\rho\text{-semilinear}\\&=\eta(\rho(f))\overline{\eta}(\overline{\rho}(i))\eta(\rho(g))\text{ pois }\overline{\eta}\text{ é }\eta\text{-semilinear.}\end{aligned}$$

Logo $\overline{\eta}\circ\overline{\rho}$ é $\eta\circ\rho$-semilinear. Como, $\eta\circ\rho\in\mathrm{Aut}(FI(P,K))$ então, pela Proposição 4.1.6, $\overline{\eta}\circ\overline{\rho}=\overline{\eta\circ\rho}$ e, portanto,

$$\widetilde{\eta}\circ\widetilde{\rho}=\begin{bmatrix}\eta\circ\rho&0\\0&\overline{\eta\circ\rho}\end{bmatrix}=\widetilde{\eta\circ\rho}\in\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)}).$$

Além disso, pela proposição anterior, $(\widetilde{\rho})^{-1}=\widetilde{\rho^{-1}}\in\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)})$. Portanto, $\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)})$ é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(D(P,K))$. □

Definição 4.4.6. Seja A uma K-álgebra. Um elemento $a\in A$ é dito uma **unidade central** se $a\in\mathrm{Cen}(A)\cap U(A)$.

Proposição 4.4.7. *Seja* $\varphi = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$. *Então*

$$\widetilde{\rho^{-1}} \circ \varphi = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D & \lambda \end{bmatrix},$$

onde $D \in \mathrm{Der}(P,K)$ *e* $\lambda : I(P,K) \to I(P,K)$ *é um isomorfismo de* $FI(P,K)$*-bimódulos tal que* $\lambda(f) = fg$ *para toda* $f \in FI(P,K)$*, onde* g *é uma unidade central de* $FI(P,K)$.

Demonstração. Como $\widetilde{\rho^{-1}}, \varphi \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$, então $\widetilde{\rho^{-1}} \circ \varphi = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ \overline{\rho^{-1}} \circ \varphi_{21} & \overline{\rho^{-1}} \circ \varphi_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$. Considere $D = \overline{\rho^{-1}} \circ \varphi_{21} \in \mathrm{Hom}_K(FI(P,K), I(P,K))$. Mostremos que D é uma derivação. Sejam $f, h \in FI(P,K)$. Utilizando (5)* da Observação 4.4.3 e sabendo que $\overline{\rho^{-1}}$ é ρ^{-1}-semilinear, temos

$$\begin{aligned} D(fh) &= \overline{\rho^{-1}}(\varphi_{21}(fh)) = \overline{\rho^{-1}}(\varphi_{21}(f)\rho(h) + \rho(f)\varphi_{21}(h)) \\ &= \overline{\rho^{-1}}(\varphi_{21}(f)\rho(h)) + \overline{\rho^{-1}}(\rho(f)\varphi_{21}(h)) \\ &= \overline{\rho^{-1}}(\varphi_{21}(f))h + f\overline{\rho^{-1}}(\varphi_{21}(h)) \\ &= D(f)h + fD(h). \end{aligned}$$

Portanto $D \in \mathrm{Der}(P,K)$.

Agora, seja $\lambda = \overline{\rho^{-1}} \circ \varphi_{22} \in \mathrm{End}_K(I(P,K))$. Mostremos que λ é um isomorfismo de $FI(P,K)$-bimódulos. Claramente, λ é bijetora pois $\overline{\rho^{-1}}, \varphi_{22}$ são. Sejam $i \in I(P,K)$ e $f, h \in FI(P,K)$. Por (22) da Observação 4.4.3 e sabendo que $\overline{\rho^{-1}}$ é ρ^{-1}-semilinear, segue que

$$\lambda(fih) = \overline{\rho^{-1}}(\varphi_{22}(fih)) = \overline{\rho^{-1}}(\rho(f)\varphi_{22}(i)\rho(h)) = f(\overline{\rho^{-1}}(\varphi_{22}(i))h = f\lambda(i)h.$$

Portanto λ é um isomorfismo de $FI(P,K)$-bimódulos. Com isso, $\lambda(f) = \lambda(f\delta) = f\lambda(\delta) = fg$, para toda $f \in FI(P,K)$, onde $g = \lambda(\delta) = \overline{\rho^{-1}}(\varphi_{22}(\delta)) = \rho^{-1}(\varphi_{22}(\delta))$, uma vez que $\overline{\rho^{-1}} \restriction_{FI(P,K)} = \rho^{-1}$, e $\varphi_{22}(\delta) \in \mathrm{Cen}(FI(P,K)) \cap U(FI(P,K))$, pela demonstração do Lema 4.4.1. Portanto, como $\rho^{-1} \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$, segue que, $g = \rho^{-1}(\varphi_{22}(\delta)) \in \mathrm{Cen}(FI(P,K)) \cap U(FI(P,K))$, isto é, g é uma unidade central de $FI(P,K)$. □

Proposição 4.4.8. *Seja* $g \in FI(P,K)$ *uma unidade central. Então* $g\cdot : I(P,K) \to I(P,K)$ *dada por* $g \cdot (j) = gj$*, para todo* $j \in I(P,K)$*, é um isomorfismo de* $FI(P,K)$*-bimódulos. Em particular,* $g\cdot$ *é* K*-linear.*

Demonstração. Sejam $i, j \in I(P,K)$, $f, h \in FI(P,K)$. Temos,

$$g \cdot (i+j) = g(i+j) = gi + gj = g \cdot (i) + g \cdot (j)$$

e

$$g\cdot(fjh) = gfjh = f(gj)h = fg\cdot(j)h.$$

Logo, $g\cdot$ é um homomorfismo de $FI(P,K)$-bimódulos. Como g é uma unidade central, então g^{-1} também é. Assim, considerando $g^{-1}\cdot : I(P,K)\to I(P,K)$, temos

$$(g\cdot\circ g^{-1}\cdot)(i) = g\cdot(g^{-1}i) = g(g^{-1}i) = i = g^{-1}(gi) = g^{-1}\cdot(gi) = (g^{-1}\cdot\circ g\cdot)(i),$$

para todo $i\in I(P,K)$. Portanto, $g^{-1}\cdot = (g\cdot)^{-1}$ e $g\cdot$ é um isomorfismo de $FI(P,K)$-bimódulos. Em particular, para $k\in K$ e $i\in I(P,K)$,

$$g\cdot(ki) = g\cdot((k\delta)i) = k\delta(g\cdot(i)) = k(g\cdot(i)).$$

□

Proposição 4.4.9. *Seja g uma unidade central de $FI(P,K)$. Então*

$$\widetilde{g} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g\cdot \end{bmatrix} \in \mathrm{Aut}(D(P,K)).$$

Demonstração. Observe que $\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g\cdot \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_K(M_1,M_1) & \mathrm{Hom}_K(M_2,M_1) \\ \mathrm{Hom}_K(M_1,M_2) & \mathrm{Hom}_K(M_2,M_2) \end{bmatrix}$ onde $M_1 = FI(P,K)$ e $M_2 = I(P,K)$. Pela Proposição 1.2.43, $\widetilde{g}\in \mathrm{End}_K(FI(P,K)\oplus I(P,K)) = \mathrm{End}_K(D(P,K))$. Sejam $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ j \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Temos

$$\begin{aligned}\widetilde{g}\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ j \end{bmatrix}\right) = \widetilde{g}\left(\begin{bmatrix} fh \\ fj+ih \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)}(fh) \\ g\cdot(fj+ih) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fh \\ g(fj)+g(ih) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} fh \\ f(gj)+(gi)h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ gi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ gj \end{bmatrix} = \widetilde{g}\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\right)\widetilde{g}\left(\begin{bmatrix} h \\ j \end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

e

$$\widetilde{g}\left(\begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)}(\delta) \\ g\cdot(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto $\widetilde{g}$ é um homomorfismo de K-álgebras. Sendo g^{-1} uma unidade central, considere $\widetilde{g^{-1}}$. Lembrando que $(g\cdot)^{-1} = g^{-1}\cdot$, temos

$$\begin{aligned}\widetilde{g}\circ\widetilde{g^{-1}} &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g\cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g^{-1}\cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g\cdot\circ g^{-1}\cdot \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = Id_{D(P,K)}.\end{aligned}$$

Analogamente, $\widetilde{g^{-1}}\circ\widetilde{g} = Id_{D(P,K)}$. Portanto, $\widetilde{g^{-1}} = (\widetilde{g})^{-1}$ e $\widetilde{g}\in\mathrm{Aut}(D(P,K))$. □

Proposição 4.4.10. *O conjunto $\widetilde{U} = \{\widetilde{g} : g \text{ é uma unidade central de } FI(P,K)\}$ é um subgrupo de* $\mathrm{Aut}(D(P,K))$.

Demonstração. Uma vez que δ é uma unidade central de $FI(P,K)$, temos

$$Id_{D(P,K)} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & \delta\cdot \end{bmatrix} = \widetilde{\delta} \in \widetilde{U}.$$

Sejam $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{U}$. Então

$$\begin{aligned} \widetilde{f} \circ \widetilde{g} &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & f\cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g\cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & f\cdot \circ g\cdot \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & (fg)\cdot \end{bmatrix} = \widetilde{fg} \in \widetilde{U}, \end{aligned}$$

pois fg é uma unidade central de $FI(P,K)$. Além disso, como $(\widetilde{f})^{-1} = \widetilde{f^{-1}} \in \widetilde{U}$, segue que $\widetilde{U}$ é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(D(P,K))$. □

Proposição 4.4.11. *Seja $D \in \mathrm{Der}(P,K)$. Então*

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \in \mathrm{Aut}(D(P,K)).$$

Demonstração. Como $\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_K(M_1,M_1) & \mathrm{Hom}_K(M_2,M_1) \\ \mathrm{Hom}_K(M_1,M_2) & \mathrm{Hom}_K(M_2,M_2) \end{bmatrix}$ onde $M_1 = FI(P,K)$ e $M_2 = I(P,K)$, então $\widetilde{D} \in \mathrm{End}_K(FI(P,K) \oplus I(P,K)) = \mathrm{End}_K(D(P,K))$, pela Proposição 1.2.43. Sejam $\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ j \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Temos

$$\begin{aligned} \widetilde{D}\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ j \end{bmatrix}\right) &= \widetilde{D}\left(\begin{bmatrix} fh \\ fj+ih \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)}(fh) \\ D(fh)+fj+ih \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} fh \\ D(f)h + fD(h) + fj + ih \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fh \\ f(D(h)+j) + (D(f)+i)h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f \\ D(f)+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ D(h)+j \end{bmatrix} = \widetilde{D}\left(\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix}\right)\widetilde{D}\left(\begin{bmatrix} h \\ j \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\widetilde{D}\left(\begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)}(\delta) \\ D(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $\widetilde{D}$ é um homomorfismo de K-álgebras. Além disso, como $D \in \mathrm{Der}(P,K)$, então $-D \in \mathrm{Der}(P,K)$. Com isso, observe que

$$\begin{aligned}\widetilde{D} \circ \widetilde{-D} &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ -D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D-D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = Id_{D(P,K)}.\end{aligned}$$

Analogamente, $\widetilde{-D} \circ \widetilde{D} = Id_{D(P,K)}$. Portanto, $\widetilde{-D} = (\widetilde{D})^{-1}$ e $\widetilde{D} \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$. □

Teorema 4.4.12. *Seja* $\varphi = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$. *Então* $\varphi = \widetilde{\rho} \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{D}$, *com* $D \in \mathrm{Der}(P,K)$, $\rho \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$ *e* g *uma unidade central de* $FI(P,K)$.

Demonstração. Pela Proposição 4.4.7, $\widetilde{\rho^{-1}} \circ \varphi = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$, onde $D_1 \in \mathrm{Der}(P,K)$ e λ_1 é um isomorfismo de $FI(P,K)$-bimódulos tal que $\lambda_1(f) = fg$ para toda $f \in FI(P,K)$, onde $g \in FI(P,K)$ é uma unidade central. Sabendo que $(\widetilde{g})^{-1} = \widetilde{g^{-1}} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g^{-1}\cdot \end{bmatrix}$, considere $\eta = (\widetilde{g})^{-1} \circ \widetilde{\rho^{-1}} \circ \varphi$, ou seja,

$$\eta = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g^{-1}\cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_1 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ g^{-1} \cdot \circ D_1 & g^{-1} \cdot \circ \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Denote $D = g^{-1} \cdot \circ D_1$ e $\lambda = g^{-1} \cdot \circ \lambda_1$. Como $D = g^{-1}D_1$ e $g^{-1} \in \mathrm{Cen}(FI(P,K))$, pela Observação 4.3.2, segue que $D \in \mathrm{Der}(P,K)$. Agora, para toda $f \in FI(P,K)$, temos

$$\lambda(f) = g^{-1} \cdot (\lambda_1(f)) = g^{-1}fg = f.$$

Além disso, como $g^{-1}\cdot, \lambda_1$ são isomorfismos de $FI(P,K)$-bimódulos, então λ também é. Com isso, para todos $i \in I(P,K)$ e $x \leq y \in P$, temos

$$\lambda(i)(x,y)\delta_{xy} = \delta_x \lambda(i) \delta_y = \lambda(\delta_x i \delta_y) = \lambda(i(x,y)\delta_{xy}) = i(x,y)\lambda(\delta_{xy}) = i(x,y)\delta_{xy},$$

ou seja, $\lambda(i) = i$, para todo $i \in I(P,K)$. Logo $\lambda = Id_{I(P,K)}$ e, consequentemente, $\eta = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ g^{-1} \cdot \circ D_1 & g^{-1} \cdot \circ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = \widetilde{D}$. Portanto, lembrando que $\widetilde{\rho^{-1}} = (\widetilde{\rho})^{-1}$, temos $\varphi = \widetilde{\rho} \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{D}$. □

Corolário 4.4.13. *O conjunto* $\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)} = \{\widetilde{D} : D \in \mathrm{Der}(P,K)\}$ *é um subgrupo normal abeliano de* $\mathrm{Aut}(D(P,K))$.

Demonstração. Temos que $\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)} \neq \varnothing$, pois se considerarmos $D : FI(P,K) \to I(P,K)$ dada por $D(f) = 0$ para toda $f \in FI(P,K)$, temos que $D \in \mathrm{Der}(P,K)$ e

$$Id_{D(P,K)} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = \widetilde{D} \in \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}.$$

Sejam $\widetilde{D_1}, \widetilde{D_2} \in \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$. Então

$$\begin{aligned} \widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2} &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_1 & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_2 & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_1 + D_2 & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \\ &= \widetilde{D_1 + D_2} \in \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}, \end{aligned}$$

pois $D_1 + D_2 \in \mathrm{Der}(P,K)$, pela Observação 4.3.2. Também, temos que $(\widetilde{D_1})^{-1} = \widetilde{-D_1} \in \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$. Além disso, pelas contas acima $\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2} = \widetilde{D_1 + D_2} = \widetilde{D_2 + D_1} = \widetilde{D_2} \circ \widetilde{D_1}$, ou seja, $\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$ é um subgrupo abeliano de $\mathrm{Aut}(D(P,K))$.

Sejam $\rho \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$ e $D \in \mathrm{Der}(P,K)$. Temos

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho} \circ \widetilde{D} \circ (\widetilde{\rho})^{-1} &= \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \overline{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\rho^{-1}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ \overline{\rho} \circ D & \overline{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\rho^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ \overline{\rho} \circ D \circ \rho^{-1} & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Denote $D_\rho = \overline{\rho} \circ D \circ \rho^{-1} \in \mathrm{Hom}_K(FI(P,K), I(P,K))$. Para $f, g \in FI(P,K)$, temos

$$\begin{aligned} D_\rho(fg) &= (\overline{\rho} \circ D \circ \rho^{-1})(fg) = \overline{\rho}(D(\rho^{-1}(f)\rho^{-1}(g)) \\ &= \overline{\rho}(D(\rho^{-1}(f))\rho^{-1}(g) + \rho^{-1}(f)D(\rho^{-1}(g))) \text{ pois } D \in \mathrm{Der}(P,K) \\ &= \overline{\rho}(D(\rho^{-1}(f)))g + f\overline{\rho}(D(\rho^{-1}(g))) \text{ pois } \overline{\rho} \text{ é } \rho\text{-semilinear} \\ &= D_\rho(f)g + fD_\rho(g), \end{aligned}$$

ou seja,

$$D_\rho \in \mathrm{Der}(P,K) \text{ e } \widetilde{\rho} \circ \widetilde{D} \circ (\widetilde{\rho})^{-1} = \widetilde{D_\rho} \in \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}. \tag{4.10}$$

Agora, se $h \in FI(P,K)$ é uma unidade central e $D \in \mathrm{Der}(P,K)$, então

$$\begin{aligned} \widetilde{h} \circ \widetilde{D} \circ (\widetilde{h})^{-1} &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & h\cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & h^{-1}\cdot \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ h\cdot \circ D & h\cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & h^{-1}\cdot \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ hD & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = \widetilde{hD} \in \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\widetilde{h} \circ \widetilde{D} \circ (\widetilde{h})^{-1} = \widetilde{hD} \in \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}. \tag{4.11}$$

Sejam $\varphi \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$ e $D \in \mathrm{Der}(P,K)$. Pelo teorema anterior, existem $\rho \in \mathrm{Aut}(FI(P,K)), D_1 \in \mathrm{Der}(P,K)$ e $g \in FI(P,K)$ uma unidade central de forma que $\varphi = \widetilde{\rho} \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{D_1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \widetilde{D} \circ \varphi^{-1} &= (\widetilde{\rho} \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{D_1}) \circ \widetilde{D} \circ (\widetilde{D_1}^{-1} \circ (\widetilde{g})^{-1} \circ (\widetilde{\rho})^{-1}) \\
&= \widetilde{\rho} \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{D} \circ (\widetilde{g})^{-1} \circ (\widetilde{\rho})^{-1} \text{ pois } \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)} \text{ é abeliano} \\
&= \widetilde{\rho} \circ \widetilde{gD} \circ (\widetilde{\rho})^{-1} \text{ por (4.11)} \\
&= \widetilde{(gD)_\rho} \in \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)} \text{ por (4.10).}
\end{aligned}$$

Portanto, $\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(D(P,K))$. □

Corolário 4.4.14. *O conjunto* $\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)} = \{\widetilde{g} \circ \widetilde{D} : \widetilde{g} \in \widetilde{U} \text{ e } \widetilde{D} \in \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}\}$ *é um subgrupo normal de* $\mathrm{Aut}(D(P,K))$.

Demonstração. Como $\widetilde{U}$ é subgrupo de $\mathrm{Aut}(D(P,K))$ e $\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$ é subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(D(P,K))$, então $\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$ é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(D(P,K))$. Para provar que esse subgrupo é normal, considere primeiramente, $\rho \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$ e $\widetilde{g} \in \widetilde{U}$. Note que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho} \circ \widetilde{g} \circ (\widetilde{\rho})^{-1} &= \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \overline{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g\cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\rho^{-1}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \overline{\rho} \circ g\cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\rho^{-1}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & \overline{\rho} \circ g \cdot \circ \overline{\rho^{-1}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Agora, para todo $i \in I(P,K)$, temos

$$\overline{\rho} \circ g \cdot \circ \overline{\rho^{-1}}(i) = \overline{\rho}(g\overline{\rho^{-1}}(i)) = \rho(g)\overline{\rho}(\overline{\rho^{-1}}(i)) = \rho(g)i.$$

Como $g \in FI(P,K)$ é uma unidade central e $\rho \in \mathrm{Aut}(FI(P,K))$, então $\rho(g)$ é uma unidade central de $FI(P,K)$. Assim, $\overline{\rho} \circ g \cdot \circ \overline{\rho^{-1}} = \rho(g)\cdot$ e, portanto,

$$\widetilde{\rho} \circ \widetilde{g} \circ (\widetilde{\rho})^{-1} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & \rho(g)\cdot \end{bmatrix} = \widetilde{\rho(g)} \in \widetilde{U}. \tag{4.12}$$

Seja $\varphi \in \mathrm{Aut}(D(P,K))$. Segue do Teorema 4.4.12 que $\varphi = \widetilde{\rho} \circ \widetilde{h} \circ \widetilde{D_1}$ para alguns $\rho \in \mathrm{Aut}(FI(P,K)), D_1 \in \mathrm{Der}(P,K)$ e h uma unidade central de $FI(P,K)$. Logo, se

$\widetilde{g}\circ\widetilde{D}\in\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$, então

$$\begin{aligned}\varphi\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{D}\circ\varphi^{-1} &= (\widetilde{\rho}\circ\widetilde{h}\circ\widetilde{D_1})\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{D}\circ((\widetilde{D_1})^{-1}\circ(\widetilde{h})^{-1}\circ(\widetilde{\rho})^{-1})\\ &= \widetilde{\rho}\circ(\widetilde{h}\circ\widetilde{D_1})\circ(\widetilde{g}\circ\widetilde{D})\circ((\widetilde{D_1})^{-1}\circ(\widetilde{h})^{-1})\circ(\widetilde{\rho})^{-1}.\end{aligned}$$

Como $\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}=\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}\widetilde{U}$ então $(\widetilde{h}\circ\widetilde{D_1})\circ(\widetilde{g}\circ\widetilde{D})\circ((\widetilde{D_1})^{-1}\circ(\widetilde{h})^{-1})\in\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$. Logo, existem $D_2\in\mathrm{Der}(P,K)$ e h_1 uma unidade central de $FI(P,K)$ tais que

$$\begin{aligned}\varphi\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{D}\circ\varphi^{-1} &= \widetilde{\rho}\circ(\widetilde{h_1}\circ\widetilde{D_2})\circ(\widetilde{\rho})^{-1} = (\widetilde{\rho}\circ\widetilde{h_1}\circ(\widetilde{\rho})^{-1})\circ(\widetilde{\rho}\circ\widetilde{D_2}\circ(\widetilde{\rho})^{-1})\\ &= \widetilde{\rho(h_1)}\circ\widetilde{(D_2)_\rho}\in\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)},\ \text{por (4.10) e (4.12).}\end{aligned}$$

Portanto, $\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(D(P,K))$. □

Observação 4.4.15. Note que

$$\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}=\left\{\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0\\ D & g\cdot\end{bmatrix} : D\in\mathrm{Der}(P,K)\text{ e }g\in FI(P,K)\text{ é uma unidade central}\right\}.$$

De fato, sejam $D\in\mathrm{Der}(P,K)$ e $g\in FI(P,K)$ uma unidade central. Então

$$\widetilde{g}\circ\widetilde{D}=\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0\\ 0 & g\cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0\\ D & Id_{I(P,K)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0\\ gD & g\cdot\end{bmatrix}$$

onde $gD\in\mathrm{Der}(P,K)$. Por outro lado,

$$\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0\\ D & g\cdot\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0\\ 0 & g\cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0\\ g^{-1}D & Id_{I(P,K)}\end{bmatrix}\in\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}.$$

Portanto, temos a igualdade desejada.

Teorema 4.4.16. $\mathrm{Aut}(D(P,K))=\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)})\blacktriangleright(\tilde{U}\blacktriangleright\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)})$.

Demonstração. Primeiramente, seja $\phi\in\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)})\cap\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$. Pela observação anterior, existem $D\in\mathrm{Der}(P,K)$, h unidade central de $FI(P,K)$ e $\rho\in\mathrm{Aut}(FI(P,K))$ tais que

$$\begin{bmatrix}\rho & 0\\ 0 & \overline{\rho}\end{bmatrix}=\phi=\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0\\ D & h\cdot\end{bmatrix}.$$

Assim, pela Proposição 1.2.43, $D=0,\rho=Id_{FI(P,K)}$ e $h\cdot=\overline{\rho}=\overline{Id_{FI(P,K)}}=Id_{I(P,K)}$. Logo, $\phi=Id_{D(P,K)}$, ou seja, $\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)})\cap\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}=\{Id_{D(P,K)}\}$. Além disso, $\mathrm{Aut}(D(P,K))=\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)})(\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)})$, pelo Teorema 4.4.12. Portanto, pelo Corolário 4.4.14, pela Proposição 4.4.5 e pelo Teorema 1.3.5,

$$\mathrm{Aut}(D(P,K))=\mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)})\blacktriangleright(\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}).$$

Agora, observe que se $\varphi \in \widetilde{U} \cap \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$, então existem $D \in \mathrm{Der}(P,K)$ e g uma unidade central de $FI(P,K)$ tais que

$$\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = \varphi = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ 0 & g\cdot \end{bmatrix}.$$

Logo, pela Proposição 1.2.43, $D = 0$ e $g\cdot = Id_{I(P,K)}$ e, portanto, $\varphi = Id_{D(P,K)}$. Logo $\widetilde{U} \cap \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)} = \{Id_{D(P,K)}\}$. Como $\widetilde{U}$ é um subgrupo e $\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(\widetilde{D(P,K)})$, então $\widetilde{U}$ é um subgrupo de $\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$ e $\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$ é um subgrupo normal de $\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$. Logo, pelo Teorema 1.3.5, $\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)} = \widetilde{U} \blacktriangleright \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$. Portanto,

$$\mathrm{Aut}(D(P,K)) = \mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)}) \blacktriangleright (\widetilde{U}\widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}) = \mathrm{Aut}(\widetilde{FI(P,K)}) \blacktriangleright (\widetilde{U} \blacktriangleright \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}).$$

□

Agora, vejamos como podem ser escritos os automorfismos internos de $D(P,K)$.

Proposição 4.4.17. *Seja $\psi_\theta \in \mathrm{Inn}(D(P,K))$. Então, $\psi_\theta = \widetilde{\psi_f} \circ \widetilde{D_i}$, para alguns $\psi_f \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$ e $D_i \in \mathrm{IDer}(P,K)$.*

Demonstração. Seja $\theta = \begin{bmatrix} f \\ j \end{bmatrix} \in U(D(P,K))$ e considere $\theta^{-1} = \begin{bmatrix} f^{-1} \\ -f^{-1}jf^{-1} \end{bmatrix}$. Para $\begin{bmatrix} g \\ l \end{bmatrix} \in D(P,K)$, temos

$$\begin{aligned}
\psi_\theta\left(\begin{bmatrix} g \\ l \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} f \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f^{-1} \\ -f^{-1}jf^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fg \\ fl + jg \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f^{-1} \\ -f^{-1}jf^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} fgf^{-1} \\ -fgf^{-1}jf^{-1} + (fl+jg)f^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_f(g) \\ f(-gf^{-1}j + f^{-1}jg)f^{-1} + flf^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \psi_f(g) \\ \overline{\psi_f}(g(-f^{-1}j) - (-f^{-1}j)g) + \overline{\psi_f}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_f(g) \\ \overline{\psi_f}(D_{-f^{-1}j}(g)) + \overline{\psi_f}(l) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \psi_f & 0 \\ \overline{\psi_f} \circ D_{-f^{-1}j} & \overline{\psi_f} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_f & 0 \\ 0 & \overline{\psi_f} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_{-f^{-1}j} & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ l \end{bmatrix} \\
&= \widetilde{\psi_f} \circ \widetilde{D_{-f^{-1}j}}\left(\begin{bmatrix} g \\ l \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, tomando $i = -f^{-1}j$, temos $\psi_\theta = \widetilde{\psi_f} \circ \widetilde{D_i}$, onde $\psi_f \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))$ e $D_i \in \mathrm{IDer}(P,K)$. □

Corolário 4.4.18. *O conjunto $\widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)} = \{\widetilde{D_i} : D_i \in \mathrm{IDer}(P,K)\}$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Inn}(D(P,K))$.*

Demonstração. Primeiramente, note que $Id_{D(P,K)} = \widetilde{D_0} \in \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$. Seja $\widetilde{D_i} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_i & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \in \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$ e considere $\theta = \begin{bmatrix} \delta \\ -i \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Então θ é inversível com $\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \delta \\ i \end{bmatrix}$. Assim, para cada $\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix} \in D(P,K)$ temos

$$\begin{aligned}\psi_\theta\left(\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \delta \\ -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ -ig+j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ gi-ig+j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g \\ D_i(g)+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_i & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix} = \widetilde{D_i}\left(\begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}\right),\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{D_i} = \psi_\theta$ e, consequentemente, $\widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)} \subseteq \mathrm{Inn}(D(P,K))$.

Sejam $\widetilde{D_i}, \widetilde{D_j} \in \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$. Como $\widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)} \subseteq \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$, segue que

$$\widetilde{D_i} \circ \widetilde{D_j} = \widetilde{D_i + D_j} = \widetilde{D_{i+j}} \in \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$$

e

$$(\widetilde{D_i})^{-1} = \widetilde{-D_i} = \widetilde{D_{-i}} \in \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}.$$

Logo, $\widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$ é um subgrupo de $\mathrm{Inn}(D(P,K))$. Por fim, sejam $\widetilde{D_i} \in \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$ e $\psi_\kappa \in \mathrm{Inn}(D(P,K))$. Pela proposição anterior, $\psi_\kappa = \widetilde{\psi_f} \circ \widetilde{D_j}$, para alguns $f \in U(FI(P,K))$ e $j \in I(P,K)$. Assim,

$$\begin{aligned}\psi_\kappa \circ \widetilde{D_i} \circ \psi_\kappa^{-1} &= (\widetilde{\psi_f} \circ \widetilde{D_j}) \circ \widetilde{D_i} \circ ((\widetilde{D_j})^{-1} \circ (\widetilde{\psi_f})^{-1}) \\ &= (\widetilde{\psi_f} \circ \widetilde{D_{j+i-j}} \circ \widetilde{\psi_f^{-1}}) = \widetilde{\psi_f} \circ \widetilde{D_i} \circ \widetilde{\psi_{f^{-1}}} \\ &= \begin{bmatrix} \psi_f & 0 \\ 0 & \overline{\psi_f} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_i & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_{f^{-1}} & 0 \\ 0 & \overline{\psi_{f^{-1}}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ \overline{\psi_f} \circ D_i \circ \psi_{f^{-1}} & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ (D_i)_{\psi_f} & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

onde $(D_i)_{\psi_f} = \overline{\psi_f} \circ D_i \circ \psi_{f^{-1}} \in \mathrm{Der}(P,K)$, por (4.10). Mais ainda, para toda $g \in FI(P,K)$, temos

$$(D_i)_{\psi_f}(g) = \overline{\psi_f} \circ D_i \circ \psi_{f^{-1}}(g) = \overline{\psi_f}(f^{-1}gfi - if^{-1}gf) = gfif^{-1} - fif^{-1}g = D_{\overline{\psi_f}(i)}(g).$$

Logo, $(D_i)_{\psi_f} = D_{\overline{\psi_f}(i)} \in \mathrm{IDer}(P,K)$ e, assim,

$$\psi_\kappa \circ \widetilde{D_i} \circ \psi_\kappa^{-1} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ (D_i)_{\psi_f} & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{FI(P,K)} & 0 \\ D_{\overline{\psi_f}(i)} & Id_{I(P,K)} \end{bmatrix} \in \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}.$$

Portanto, $\widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Inn}(D(P,K))$. □

Proposição 4.4.19. *O conjunto* $\widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))} = \{\widetilde{\psi_f} : \psi_f \in \mathrm{Inn}(FI(P,K))\}$ *é um subgrupo de* $\mathrm{Inn}(D(P,K))$.

Demonstração. Primeiramente, $Id_{D(P,K)} = \widetilde{\psi_\delta} \in \widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))}$. Seja $f \in U(FI(P,K))$ e tome $\theta = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \in U(D(P,K))$. Temos

$$\psi_\theta\left(\begin{bmatrix} g \\ i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fgf^{-1} \\ fif^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_f(g) \\ \overline{\psi_f}(i) \end{bmatrix} = \widetilde{\psi_f}\left(\begin{bmatrix} g \\ i \end{bmatrix}\right),$$

para cada $\begin{bmatrix} g \\ i \end{bmatrix} \in D(P,K)$. Logo, $\widetilde{\psi_f} = \psi_\theta \in \mathrm{Inn}(D(P,K))$ e, consequentemente, $\widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))} \subseteq \mathrm{Inn}(D(P,K))$.

Sejam $\widetilde{\psi_f}, \widetilde{\psi_g} \in \widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))}$. Como $\widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))} \subseteq \widetilde{\mathrm{Aut}(FI(P,K))}$, pela Proposição 4.4.5, temos

$$\widetilde{\psi_f} \circ \widetilde{\psi_g} = \widetilde{\psi_f \circ \psi_g} = \widetilde{\psi_{fg}} \in \widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))}$$

e

$$(\widetilde{\psi_f})^{-1} = \widetilde{(\psi_f)^{-1}} = \widetilde{\psi_{f^{-1}}} \in \widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))}.$$

Portanto, $\widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))}$ é um subgrupo de $\mathrm{Inn}(D(P,K))$. □

Observação 4.4.20. Sabemos que $\widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))} \subseteq \widetilde{\mathrm{Aut}(FI(P,K))}$ e $\widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)} \subseteq \widetilde{\mathrm{Der}(P,K)}$
$\subseteq \widetilde{U\mathrm{Der}(P,K)}$. Além disso, pela demostração do Teorema 4.4.16, $\widetilde{\mathrm{Aut}(FI(P,K))} \cap \widetilde{U\mathrm{Der}(P,K)} = \{Id_{D(P,K)}\}$ e, assim, $\widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))} \cap \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)} = \{Id_{D(P,K)}\}$.

Teorema 4.4.21. $\mathrm{Inn}(D(P,K)) = \widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))} \blacktriangleright \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$.

Demonstração. Temos que $\widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))}$ e $\widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$ são, respectivamente, subgrupo e subgrupo normal de $\mathrm{Inn}(D(P,K))$ tais que $\widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))} \cap \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)} = \{Id_{D(P,K)}\}$. Além disso, $\mathrm{Inn}(D(P,K)) = \widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))}\widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$, pela Proposição 4.4.17. Portanto, pelo Teorema 1.3.5, temos que $\mathrm{Inn}(D(P,K)) = \widetilde{\mathrm{Inn}(FI(P,K))} \blacktriangleright \widetilde{\mathrm{IDer}(P,K)}$. □

Referências

[1] Baclawski, K., Automorphisms and derivations of incidence algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **36** (1972), 351-356.

[2] Brusamarello, R., Fornaroli, E. Z., Santulo Jr., E. A., Classification of involutions on finitary incidence algebras, *Internat. J. Algebra Comput.* **24** (2014) 8, 1085-1098.

[3] Dugas, M., Wagner, B., Finitary incidence algebras and idealizations, *Linear Multilinear Algebra* **64** (2016), 1936-1951.

[4] Garcia, A., Lequain, Y., *Elementos de Álgebra*, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[5] Khripchenko, N. S., Derivations of finitary incidence rings, *Comm. Algebra* **40** (2012), 2503-2522.

[6] Khripchenko, N. S., Novikov, B. V., Finitary incidence algebras, *Comm. Algebra* **37** (2009) 5, 1670-1676.

[7] Khripchenko, N. S., Automorphisms of finitary incidence rings, *Algebra Discrete Math.* **9** (2010) 2, 78-97.

[8] Lam, T. Y, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[9] Rota, G-C. On the foundations of combinatorial theory I: Theory of Möbius functions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **2** (1964), 340-368.

[10] Schröder, B. S. W., *Ordered sets. An introduction*, Birkhäuser Boston, Boston, 2003.

[11] Spiegel, E., O'Donnell, C. J., *Incidence Algebras*, Marcel Dekker, New York, 1997.

[12] Stanley, R. P., Structure of incidence algebras and their automorphism groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), 1936-1939.

Índice Remissivo

álgebra, 15
    central, 16
    de incidência, 23
    de incidência finitária, 23
    fracamente central, 16

anel, 5
    com divisão, 7
    comutativo, 6
anticadeia, 2
aplicação semilinear, 55
automorfismo
    de álgebra, 15
    de anel, 10
    de poset, 5
    fracionário, 44
    induzido, 39
    interno, 15
    multiplicativo, 41

bimódulo, 12

cadeia, 2
    comprimento de uma, 2
centralizador, 34
centro, 6
componentes conexas, 3
corpo, 7

derivação, 66
    aditiva, 69
    interna, 68

elemento
    idempotente, 10
    idempotente primitivo, 10
    inversível, 7
    inversível à direita, 7
    inversível à esquerda, 7
    máximo, 2
    mínimo, 2
    maximal, 2
    minimal, 2
espaço de incidência, 22
extensão, 55
    trivial, 59

função
    aditiva, 68
    característica, 24
    constante no subconjunto, 32
    diagonal, 30
    finitária, 22
    fracionária, 44
    multiplicativa, 40

homomorfismo
    de álgebras, 15
    de anéis, 10
    de módulos, 12

ideal, 8
    à direita, 8
    à direita maximal, 9
    à esquerda, 8

à esquerda maximal, 9
idealização de um módulo, 59
isomorfismo
de álgebras, 15
de anéis, 10
de módulos, 12
de posets, 5

módulo
à direita, 11
à esquerda, 11

poset, 1
conexo, 3
dual, 2
intervalo intervalo de um, 2
localmente finito, 2
produto
de Hadamard, 41
direto de álgebras, 15
direto de anéis, 6
direto de módulos, 12
semidireto, 18

radical de Jacobson, 9

soma direta, 12
subálgebra, 15
subanel, 7
submódulo, 12
subposet, 2

unidade central, 79