

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PABLO HENRIQUE PERONDI

**Números de Ramsey multipartidos via estruturas
discretas**

Maringá-PR

2019

PABLO HENRIQUE PERONDI

Números de Ramsey multipartidos via estruturas discretas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Emerson Luiz do Monte Carmelo

Maringá-PR

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

P453n Perondi, Pablo Henrique
Números de Ramsey multipartidos via estruturas discretas /
Pablo Henrique Perondi. -- Maringá, 2019.
122 f. : il.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Emerson Luiz do Monte Carmelo.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro
de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática -
Área de Concentração: Matemática Aplicada, 2019.

1. Teoria de Ramsey. 2. Números de Ramsey. 3. Grafos
multipartidos. 4. Grafo estrela. 5. Grafo fortemente regular. 6.
Matriz de Hadamard. 7. Ramsey theory. 8. Ramsey numbers. 9.
Multipartite graphs. 10. Star graph. 11. Strongly regular graph.
12. Hadamard matrix. I. Monte Carmelo, Emerson Luiz do, orient.
II. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências
Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de
Concentração: Matemática Aplicada. III. Título.

CDD 22.ed. 511.66

Edilson Damasio CRB9-1.123

PABLO HENRIQUE PERONDI

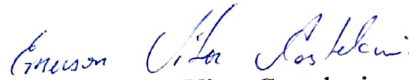
NÚMEROS DE RAMSEY MULTIPARTIDOS VIA ESTRUTURAS DISCRETAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

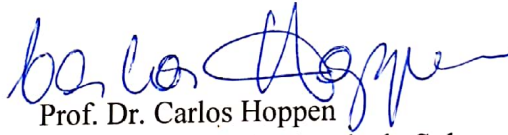
COMISSÃO JULGADORA:



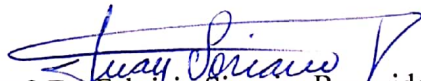
Prof. Dr. Emerson Luiz do Monte Carmelo
Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



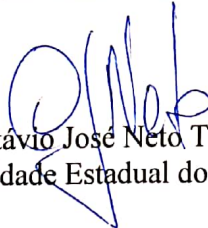
Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Carlos Hoppen
Universidade Federal do Rio Grande do Sul



Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides
Universidade Federal do Ceará



Prof. Dr. Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos
Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul

Aprovada em: 24 de setembro de 2019.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Física, Bloco G67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Primeiramente, à Deus pelo dom da vida e por ter me proporcionado chegar até aqui.

Aos meus pais Ari e Genaide, pelo apoio incondicional.

Aos meus irmãos Cleber, Marcelo e Romerito, pelo companheirismo.

À minha irmã Indianara, pelas inúmeras ajudas, incluindo financeiras.

Ao meu filho Eduardo e seu irmão Lukas, por tornarem minha vida mais alegre.

Aos meus amigos André e Carlos, pelos incentivos no início da minha caminhada.

Ao meu amigo Aldevino, pelas ajudas e acolhimento.

Aos meus colegas de casa, pelos compartilhamentos de experiências. Em especial, aos meus amigos Edson e Thiago que me acompanharam mais de perto.

Aos meus colegas e ex-colegas de graduação, mestrado e doutorado, pelo companheirismo. Em especial, aos meus ex-colegas de graduação Jéssica, Marcelo e Sidney e ex-colega de mestrado e doutorado André, pelo conhecimento que compartilhamos durante nossos estudos.

Ao Prof. Dr. Emerson Luiz do Monte Carmelo, pelas inúmeras ajudas e por acreditar em mim orientando-me academicamente desde meus primeiros passos na universidade.

Aos demais membros da banca, Carlos Hoppen (UFRGS), Emerson Vitor Castelani (UEM), Fabricio Siqueira Benevides (UFC) e Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos (UEMS), pelas valiosas correções e sugestões apontadas na avaliação deste trabalho.

Aos professores do departamento de matemática da Universidade Estadual de Maringá, por contribuírem com minha formação e me estimularem à vida acadêmica.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Números de Ramsey multipartidos via estruturas discretas

Resumo

Este trabalho aborda a versão multipartida dos números de Ramsey, com ênfase na obtenção de classes exatas. Como ferramentas, utilizaremos conceitos e resultados da teoria dos designs combinatórios bem como da teoria dos grafos. Em particular, computaremos o número de Ramsey multipartido para grafos estrela utilizando o índice cromático de certos grafos multipartidos completos, estendendo assim resultados de Burr e Roberts (1973), Chvátal e Harary (1972) e Irving (1974). Além disso, abordaremos o problema na versão multicolorida onde um dos grafos é ou um caminho, ou um ciclo, ou um emparelhamento e os demais grafos são todos estrelas. Neste caso, obtemos várias classes exatas, estendendo resultados de Parsons (1974), Cockayne e Lorimer (1975), Lawrence (1973) e Omidi, Raeisi e Rahimi (2018). Na literatura, vários números de Ramsey foram obtidos utilizando-se exatamente de uma classe de designs. Em contraste a isto, um dos principais resultados desta tese utiliza-se de duas classes de designs para obter uma classe exata dos números de Ramsey. Algo que parece ser sem precedentes na literatura e estende a construção de Exoo, Harborth e Mengersen (1991).

Palavras chave: Teoria de Ramsey. Número de Ramsey. Grafo multipartido. Grafo estrela. Grafo fortemente regular. Matriz de Hadamard.

Multipartite Ramsey numbers via discrete structures

Abstract

This thesis deals with the multipartite version of Ramsey numbers, with an emphasis on obtaining exact classes. As tools, we will use concepts and results from combinatorial design theory as well as graph theory. In particular, we will compute the multipartite Ramsey number for star graphs using the chromatic index of certain complete multipartite graphs, thus extending results of Burr and Roberts (1973), Chvátal and Harary (1972) and Irving (1974). In addition, we will address the problem in the multicolored version where one of the graphs is either a path, or a cycle, or a matching and the other graphs are all stars. In this case, we obtain several exact classes, extending results of Parsons (1974), Cockayne and Lorimer (1975), Lawrence (1973) and Omid, Raeisi and Rahimi (2018). In the literature, several Ramsey numbers were obtained using exactly one class of designs. In contrast to this, one of the main results of this thesis uses two classes of designs to obtain an exact class of Ramsey numbers. Something that seems to be unprecedented in the literature and extends the construction of Exoo, Harborth and Mengersen (1991).

Keywords: Ramsey theory. Ramsey number. Multipartite graph. Star graph. Strongly regular graph. Hadamard matrix.

SUMÁRIO

Introdução	9
1 Teoria de Ramsey para grafos	14
1.1 Grafos	14
1.1.1 Conceitos preliminares	15
1.1.2 Alguns tipos de grafos	17
1.1.3 Grafos t -fatoráveis e índice cromático	20
1.1.4 Grafos hamiltonianos e pancíclicos	22
1.1.5 Grafos fortemente regulares	24
1.2 Números de Ramsey	27
1.2.1 Número de Ramsey clássico	27
1.2.2 Número de Ramsey bipartido	31
1.2.3 Número de Ramsey multipartido	32
2 Design combinatório	38
2.1 Conceito e resultados básicos	39
2.2 Matriz de Hadamard	42
2.2.1 Definição algébrica	43
2.2.2 Caracterização via designs simétricos	45
2.2.3 Matriz de Hadamard simétrica	48
3 Números de Ramsey via designs combinatórios	50

3.1	Construção do limite inferior	50
3.2	Construção do limite superior	54
3.3	Classes exatas	57
4	Número de Ramsey multipartido para estrelas	60
4.1	Cálculo do valor exato	61
4.2	Uma conexão com a distância de Lee	68
5	Número de Ramsey multipartido para estrelas versus outros grafos	79
5.1	Estrelas versus caminho	80
5.2	Estrelas versus ciclo ímpar	92
5.3	Estrelas versus emparelhamentos	101
5.3.1	Classes exatas para um único emparelhamento	101
5.3.2	Classes exatas para vários emparelhamentos	111
	Bibliografia	116

INTRODUÇÃO

Número de Ramsey clássico

Suponha que a relação “conhecer” entre as pessoas seja simétrica, isto é, se A conhece B , então B conhece A . Um simples argumento mostra que, em qualquer conjunto com seis pessoas, obrigatoriamente existem três delas que se conhecem duas a duas, ou três que são estranhas entre si. Por outro lado, é possível exemplificar uma configuração com cinco pessoas, tal que a propriedade “se conhecem duas a duas ou são estranhas entre si” não é verificada em qualquer subconjunto com três delas. Deste modo:

Uma festa precisa ter *no mínimo* seis pessoas para garantir que existam três delas que se conhecem duas a duas, ou três que são estranhas entre si.

A reflexão acima é naturalmente ampliada a uma descrição intuitiva dos números de Ramsey, atribuída ao lendário Paul Erdős, conforme segue.

Qual é o menor inteiro $r = r(t, n)$ onde podemos garantir que, em toda festa com r pessoas, existem t delas que se conhecem duas a duas ou n que são estranhas entre si?

Embora pareça ser um questionamento simples, surpreendentemente não existe uma resposta geral e precisa para esta pergunta levantada por volta de 1930. Poucos valores exatos são conhecidos. Mais especificamente, para $n \geq t > 2$, foram determinados apenas $r(3, 3) = 6$, $r(3, 4) = 9$, $r(3, 5) = 14$, $r(3, 6) = 18$, $r(3, 7) = 23$, $r(3, 8) = 28$, $r(3, 9) = 36$, $r(4, 4) = 18$ e $r(4, 5) = 25$ ao longo dos últimos 90 anos.

O problema pode ser modelado via grafos. De fato, seja K_n o grafo completo sobre n vértices, então $r(t, n)$ corresponde ao menor número r tal que toda bicoloração de arestas

do grafo completo K_r contém um subgrafo K_t monocromático azul ou um K_n vermelho. Chamamos $r(t, n)$ de *número de Ramsey*. Seu estudo foi sistematizado no século passado e recebe este nome devido ao influente trabalho [73] do matemático, filósofo e economista britânico Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), embora o mesmo não tenha sido o primeiro a abordar o tema. Parte da relevância de Frank Plumpton Ramsey na teoria, que posteriormente recebeu seu nome, se deve ao fato dele ter mostrado que o número $r(t, n)$ está bem definido, isto é, mostrado que existe um número suficientemente grande $r(t, n)$ que satisfaz a definição. Essa garantia da existência inspirou o renomeado matemático Theodore Samuel Motzkin a descrever a teoria na frase: *desordem completa é impossível*. Uma frase famosa que retrata de maneira compacta e enigmática o fato de que mesmo sob a ação de um determinado particionamento, um sistema suficientemente grande preserva um subsistema específico fixado.

A complexidade dos cálculos fomentou a teoria, fazendo com que se tornasse um ramo de pesquisa de destaque em combinatória. Com isso, surgiram na literatura variações naturais do problema, como por exemplo, o *número de Ramsey generalizado* $r(G_1, G_2)$ que é o menor inteiro r de modo que toda bicoloração de arestas de K_r contém um subgrafo G_1 azul ou G_2 vermelho. Além disto, um argumento indutivo atesta uma versão multicolorida para o problema, isto é, para quaisquer grafos arbitrários G_1, \dots, G_k , existe um número r suficientemente grande de modo que toda k -coloração de arestas de K_r contém um G_i monocromático de cor i para algum $i = 1, \dots, k$. O menor número r com tal propriedade é chamado de *número de Ramsey multicolorido generalizado* e denotado por $r(G_1, \dots, G_k)$, mas por simplicidade, alguns autores costumam omitir uma das palavras “multicolorido” e “generalizado” ou até mesmo as duas, chamando $r(G_1, \dots, G_k)$ simplesmente por *número de Ramsey*. Existem centenas de artigos que abordam esta versão para as mais diversas classes de grafos, dentre eles, citamos: [10, 11, 15, 19, 20, 21, 22, 30, 32, 38, 42, 46, 52, 55, 59, 61, 63, 64, 72, 73].

Número de Ramsey bipartido

Outra variante famosa nos números de Ramsey é a variante bipartida, a qual deriva da seguinte questão.

Dados inteiros positivos m e n , qual é o menor inteiro b de modo que em toda festa contendo b homens e b mulheres, ou garantimos que existe um grupo de m homens e m mulheres onde cada homem conhece cada mulher deste grupo, ou garantimos que exista um grupo de n homens e n mulheres de modo que cada homem não conhece nenhuma mulher deste grupo?

Assim como antes, este problema também pode ser moldado em termos de grafos e colorações. De fato, a pergunta acima corresponde a encontrar o menor inteiro b , de modo que toda bicoloração de arestas do $K_{b,b}$ possui um subgrafo $K_{m,m}$ monocromático azul ou um $K_{n,n}$ vermelho. Tal número é chamado de *número de Ramsey bipartido* e frequentemente denotado por $b(m, n)$. A complexidade de determinar tais números não é menor que na versão clássica. Na verdade, até hoje poucos valores exatos são conhecidos, a saber, $b(2, 2) = 5$, $b(2, 3) = 9$, $b(2, 4) = 14$, $b(2, 5) = 17$ e $b(3, 3) = 17$. Assim como o caso clássico, o número de Ramsey bipartido também pode ser naturalmente estendido a uma versão multicolorida com grafos bipartidos arbitrários. Alguns artigos que estudam esta versão são [6, 17, 23, 24, 33, 35, 40, 45].

Número de Ramsey multipartido

A variante do número de Ramsey em grafos bipartidos inspirou outra mais geral: trabalhar com grafos multipartidos como grafos hospedeiros. Mais especificamente, investigar k -colorações em grafos multipartidos completos balanceados. Neste caso, há duas variáveis a considerar: o número de classes e a quantidade de vértices nessas classes. Duas observações interessantes são destacadas abaixo.

1. Se fixarmos apenas um vértice em cada classe, então investigar k -colorações em grafos multipartidos completos balanceados corresponde, na verdade, a investigar k -colorações em grafos completos. Deste modo, fixar uma quantidade arbitrária s de vértices estende o número de Ramsey clássico que investiga apenas o caso $s = 1$.
2. Se fixarmos apenas duas classes, então investigar k -colorações em grafos multipartidos completos balanceados equivale a investigar k -colorações em grafos bipartidos completos balanceados. Assim, fixar uma quantidade arbitrária c de classes engloba o número de Ramsey bipartido, ao qual é restrito ao caso $c = 2$.

As duas observações feitas acima naturalmente induzem duas variações do número de Ramsey as quais generalizam os números de Ramsey clássico e bipartido. Tais generalizações foram introduzidas e sistematizadas por Burger, Grobler, Stipp e van Vuuren [12, 13, 14]. Ressaltamos que nosso trabalho se desenvolve neste âmbito multipartido e a maioria dos resultados originais que apresentaremos aqui serão desenvolvidos sob esta perspectiva. Alguns artigos que também trabalham neste âmbito são [4, 5, 12, 13, 14, 28, 54, 56, 67, 68, 69, 78].

Vale a pena frisar que a teoria de Ramsey é muito vasta e possui várias outras variantes que também são amplamente estudadas, mas que não serão abordadas aqui. Por exemplo, as referências [2, 31, 53] apresentam alguns resultados assintóticos recentes para outras três versões dos números de Ramsey envolvendo grafos e podem ser adotadas pelo leitor interessado em conhecer variantes aqui não tratadas.

Esquema e contribuições desta monografia

Baseado no conhecimento introdutório dos números de Ramsey que adquirimos, descreveremos sucintamente como esta monografia será esquematizada.

No primeiro capítulo, veremos alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Iniciaremos estudando brevemente a teoria dos grafos, fixando notações importantes e destacando algumas classes especiais. Dentre elas, grafos t -fatoráveis, grafos hamiltonianos e grafos fortemente regulares. Na segunda parte, discutiremos mais sobre algumas variantes dos números de Ramsey. Além disso, exibiremos alguns lemas técnicos que nos servirão de ferramenta durante toda a monografia.

No segundo capítulo, falaremos brevemente sobre designs combinatórios. Embora esta rica teoria exerça imensa importância na combinatória devido à sua gama de aplicações, faremos nesta tese apenas uma breve introdução destacando algumas pontes com os números de Ramsey. Nossa ênfase será dada em designs associados a matrizes de Hadamard pelo fato de tal estrutura desempenhar papel fundamental na determinação de classes exatas, conforme veremos no decorrer do trabalho.

No terceiro capítulo, abordaremos a versão bicolorida do número de Ramsey multipartido envolvendo grafos do tipo $K_{2,n}$. Apresentaremos limitantes superiores utilizando argumentos

de densidade e limitantes inferiores usando matrizes de Hadamard e grafos fortemente regulares. Como consequência, serão construídas classes exatas para certos números de Ramsey em grafos multipartidos utilizando não apenas uma, mas sim duas classes de designs. Isto parece ser inédito na literatura. Destacamos que a maioria dos resultados deste capítulo foram recentemente publicados em [68].

O quarto capítulo será basicamente dividido em duas partes. Na primeira, determinaremos o número de Ramsey multipartido para um número arbitrário de estrelas, utilizando fortemente o conceito de índice cromático. Por sua vez, na segunda parte, exibiremos uma fatoração de grafos utilizando como ferramenta a célebre distância de Lee. Embora esta distância tenha inúmeras aplicações na teoria dos códigos, esta parece ser a primeira vez em que ela é aplicada no âmbito de fatoração de grafos. Destacamos que os resultados da primeira seção do Capítulo 4 foram recentemente publicados em [67], enquanto que os resultados da segunda seção integram parte do trabalho [70], no qual desenvolve-se uma pesquisa corrente ainda em construção.

O quinto e último capítulo desta monografia concentrará estimativas dos números de Ramsey multipartidos para grafos estrela versus outros grafos (emparelhamentos, caminhos e ciclos). Neste sentido, exibiremos várias classes exatas que generalizam resultados de Cockayne e Lorimer [22] e Omid, Raeisi e Rahimi [59] (estrelas versus emparelhamentos), Lawrence [52] (estrelas versus ciclos) e Parsons [61] (estrelas versus caminhos). Assim como os Capítulos 3 e 4, o quinto capítulo também será basicamente formado por resultados originais. No entanto, tais resultados ainda não foram publicados e estão exclusivamente redigidos nesta tese.

Para não ter dificuldade com a leitura deste trabalho, é recomendável que o leitor tenha como pré-requisito cursos introdutórios de álgebra linear e análise combinatória.

Adotamos um estilo de escrita onde cada resultado cuja referência não está acompanhada pelo nome do autor indica que a referência contém a prova, mas o autor não foi necessariamente o primeiro a mostrá-lo.

Teoria de Ramsey para grafos

Desde a sua origem, a teoria de Ramsey tem sido um ramo da pesquisa em combinatória de grande destaque. A grosso modo, nela estuda-se a estrutura mínima necessária de um sistema que, sob a ação de um determinado particionamento, preserva um subsistema específico. Sua origem data dos anos 30 e recebe este nome devido ao influente trabalho [73] do matemático, filósofo e economista britânico Frank Plumpton Ramsey (1903-1930).

Dividiremos este capítulo em duas seções. Na primeira, trabalharemos com alguns conceitos da teoria dos grafos indispensáveis na nossa pesquisa. Já na segunda seção, introduziremos algumas variantes dos números de Ramsey, dentre as quais, a variante multipartida, que é onde se concentram a maioria dos nossos resultados. Vale a pena destacarmos que este capítulo tem caráter introdutório e serve de base para os resultados presentes nos Capítulos 3, 4 e 5 (estes sim contendo resultados originais). Neste sentido, o leitor que tem familiaridade com o assunto pode omitir este capítulo em uma primeira leitura e usá-lo como referência nos demais, sempre que achar necessário.

1.1 Grafos

Mesmo ainda sem ser sistematizada, as primeiras aplicações da teoria dos grafos datam do século XVIII quando o prestigiado matemático Leonhard Euler resolveu o famoso problema das sete pontes de Königsberg. Desde então, diversas aplicações foram descobertas nas mais diversas áreas. A grosso modo, a teoria dos grafos estuda objetos combinatórios que são um bom modelo para muitos problemas em vários ramos da matemática, da informática, da engenharia e da indústria. Muitos dos problemas sobre grafos tornaram-se célebres pelo

desafio intelectual e porque têm importantes aplicações práticas. Nesta seção, estudaremos brevemente esta rica teoria exibindo apenas conceitos relevantes para a nossa pesquisa. Para o leitor que tiver interesse no tema em um contexto mais aprofundado, sugerimos os livros [8, 18].

1.1.1 Conceitos preliminares

Começaremos já pela definição formal. Um *grafo* é um par $G = (V, E)$, onde V denota um conjunto não vazio finito e E é uma família formada por subconjuntos de dois elementos de V . Chamaremos os elementos de V de *vértices* (de G) enquanto que os elementos de E serão chamados de *arestas* (de G). Quando apenas o grafo G é dado, denotaremos por $V(G)$ e $E(G)$ o conjunto de vértices e arestas de G , respectivamente. A título de exemplificação, um exemplo simples de grafo é dado pelo par

$$G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}). \quad (1.1)$$

É comum ilustrarmos um grafo dispondo os vértices em um plano e ligando dois vértices se, e somente se, eles formam uma aresta no grafo. Assim, o grafo G definido em (1.1) pode ser ilustrado pela Figura 1.1.

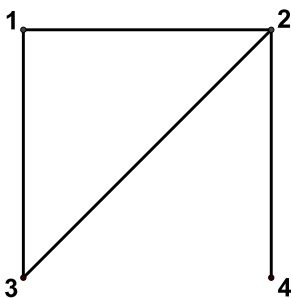


Figura 1.1: um grafo qualquer

Para nós, os grafos $(\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$ e $(\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}\{c, d\}\})$ são essencialmente iguais, pois podem ser ilustrados pela mesma figura. Esta essência motiva a próxima definição.

Definição 1.1. Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são ditos *isomorfos* se existe uma correspondência entre seus conjuntos de vértices que preserva adjacência, isto é, se existe

uma bijeção $\theta : V' \rightarrow V$ tal que $\{x, y\} \in E'$ se, e somente se, $\{\theta(x), \theta(y)\} \in E$. Neste caso denotamos $G \approx G'$ e dizemos que G' é uma *cópia* de G .

Claramente a relação \approx entre grafos é uma relação de equivalência. Visto que grafos isomorfos apresentam rigorosamente as mesmas características, então a grosso modo podemos tratar dois grafos isomorfos como iguais.

Um grafo $G' = (V', E')$ é dito ser um *subgrafo* de $G = (V, E)$ quando $V' \subset V$ e $E' \subset E$. Para fins teóricos, tratamos grafos isomorfos a G' também como subgrafos de G . Neste sentido, uma definição mais abrangente é apresentada abaixo.

Definição 1.2. Um grafo $G' = (V', E')$ é um *subgrafo* de $G = (V, E)$ se existe uma função injetora $\theta : V' \rightarrow V$ tal que $\{\theta(x), \theta(y)\} \in E$ sempre que $\{x, y\} \in E'$. Neste caso, denotamos $G' \subseteq G$ e dizemos que G contém G' .

Na definição acima, considere o grafo $\theta(G') = (\theta(V'), \theta(E'))$ onde $\theta(V') = \{\theta(v) : v \in V'\}$ e $\theta(E') = \{\{\theta(x), \theta(y)\} : \{x, y\} \in E'\}$. Note que $G' = (V', E')$ é isomorfo a $\theta(G') = (\theta(V'), \theta(E'))$ com $\theta(V') \subset V$ e $\theta(E') \subset E$. Isto justifica nossa ideia intuitiva de subgrafo tratado no parágrafo prévio à definição formal. Neste sentido, dado $G' = (V', E')$ um subgrafo de $G = (V, E)$, daqui em diante iremos assumir sem maiores menções e sem perda de generalidade que $V' \subset V$ e $E' \subset E$.

Seja $H = (V', E')$ um subgrafo de $G = (V, E)$. O subgrafo de G definido por $(V, E - E')$ será denotado por \overline{H}^G e chamado de *grafo complementar de H em relação a G* .

Sejam G um grafo, v_1, v_2 vértices distintos de G e e_1, e_2 arestas distintas de G . Dizemos que:

- (i) v_1 e v_2 são *adjacentes* se $\{v_1, v_2\} \in E(G)$.
- (ii) v_1 e e_1 são *incidentes* se $v_1 \in e_1$, isto é, se $e_1 = \{v_1, v\}$ para algum $v \in V(G)$.
- (iii) e_1 e e_2 são *adjacentes* se $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, isto é, se existe um vértice v em G que incide tanto em e_1 como em e_2 .

Dado v_0 um vértice de um grafo G , chamamos o conjunto de vértices adjacentes a v_0 de *vizinhança* de v_0 e o denotamos por $N_G(v_0)$. A cardinalidade deste conjunto é chamada de

grau de v_0 em G e denotado por $d_G(v_0)$, isto é,

$$d_G(v_0) = |N_G(v_0)| = |\{v \in V(G) : \{v, v_0\} \in E(G)\}|.$$

Além disso, denotamos o menor e o maior grau dos vértices de G por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$, respectivamente. Em termos matemáticos,

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\},$$

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Quando $\delta(G) = \Delta(G)$, G é dito ser um grafo *regular*. Mais especificamente, diremos que G é *k-regular* quando o grau de todo vértice de G for exatamente k . Neste sentido, dados dois grafos G e H , G é dito ser um *k-fator* de H quando G é um subgrafo *k-regular* de H com $V(G) = V(H)$.

Para finalizar nossas preliminares, definiremos agora o conceito de subgrafo induzido.

Definição 1.3. Dados G um grafo e $V_0 \subset V(G)$ um subconjunto de vértices de G . O *subgrafo de G induzido por V_0* , denotado por $G[V_0]$, é o subgrafo de G definido da seguinte forma:

- (i) o conjunto de vértices de $G[V_0]$ é V_0 .
- (ii) o conjunto de arestas de $G[V_0]$ é $\{\{v_1, v_2\} \in E(G) : v_1, v_2 \in V_0\}$.

Na definição acima, note que o conjunto de arestas de $G[V_0]$ é formado por todas as arestas de G que incidem apenas em vértices de V_0 . Em particular, se considerarmos G o grafo definido em (1.1) (ilustrado na Figura 1.1), então para $V_0 = \{2, 3, 4\}$ temos

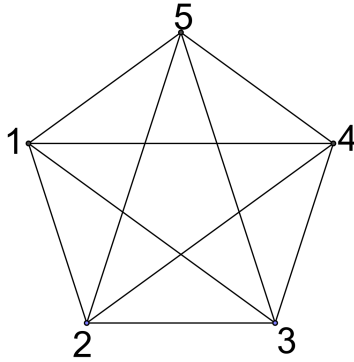
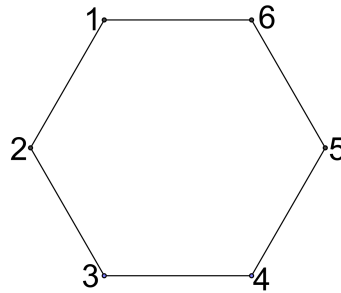
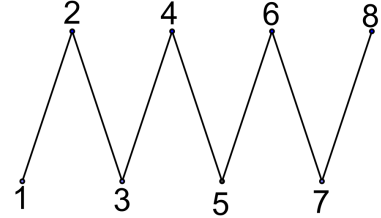
$$G[V_0] = (\{2, 3, 4\}, \{\{2, 3\}, \{2, 4\}\}).$$

1.1.2 Alguns tipos de grafos

Alguns grafos serão muito utilizados no decorrer da monografia e desta forma é conveniente defini-los previamente. Faremos isto nesta subseção.

Um grafo $G = (V, E)$ é dito ser *completo* quando dois vértices quaisquer são adjacentes, isto é, quando $E = \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$. Tal grafo será denotado por K_n onde n é a quantidade de vértices. Um *caminho* P_m é um grafo isomorfo ao grafo J , onde $V(J) =$

$\{1, 2, \dots, m\}$ e $E(J) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{m-1, m\}\}$. Um *ciclo* C_m é um grafo isomorfo ao grafo H , onde $V(H) = \{1, 2, \dots, m\}$ e $E(H) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{m-1, m\}, \{m, 1\}\}$. Ilustrações para estes três tipos de grafos são dadas nas Figuras 1.2, 1.3 e 1.4.

Figura 1.2: completo K_5 Figura 1.3: ciclo C_6 Figura 1.4: caminho P_8

Outro tipo de grafo importante para bom entendimento do contexto deste trabalho é o grafo *multipartido*. Um grafo é dito ser *m-partido* (ou *bipartido* para $m = 2$) se podemos particionar seu conjunto de vértices em m classes, digamos V_1, V_2, \dots, V_m , de modo que não há vértices de uma mesma classe que são adjacentes. Mais ainda, se dois vértices de classes distintas são sempre adjacentes, dizemos que o grafo é *multipartido completo* ou *m-partido completo*. Neste caso, o denotamos por K_{n_1, n_2, \dots, n_m} onde $n_i = |V_i|$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Note que, se $r_i = n_{\alpha_i}$ para alguma permutação α de $\{1, 2, \dots, m\}$, então $K_{n_1, n_2, \dots, n_m} \approx K_{r_1, r_2, \dots, r_m}$. Deste modo, a ordem dos elementos n_1, n_2, \dots, n_m não é relevante na definição de K_{n_1, n_2, \dots, n_m} . Quando $n_1 = n_2 = \dots = n_m = s$, denotamos $K_{s, s, \dots, s}$ simplesmente por $K_{m \times s}$. Além disso, grafos bipartidos da forma $K_{1, n}$ serão chamados de *estrelas*. Seguem nas Figuras 1.5, 1.6 e 1.7 ilustrações do grafo estrela $K_{1, 7}$ e dos grafos multipartidos completos $K_{5, 5}$ e $K_{3 \times 2}$, respectivamente.

Dado um inteiro positivo m e um grafo arbitrário G , denotaremos por mG o grafo obtido a partir da união de m cópias disjuntas do grafo G . A título de exemplificação, ilustramos na Figura 1.8 um grafo $3K_5$.

Dado um grafo G , dizemos que duas arestas de G são *independentes* se elas não são adjacentes. De modo mais geral, um subconjunto W de arestas é dito ser um *conjunto de arestas independentes*, se suas arestas são duas a duas independentes, isto é, se $e_1 \cap e_2 = \emptyset$

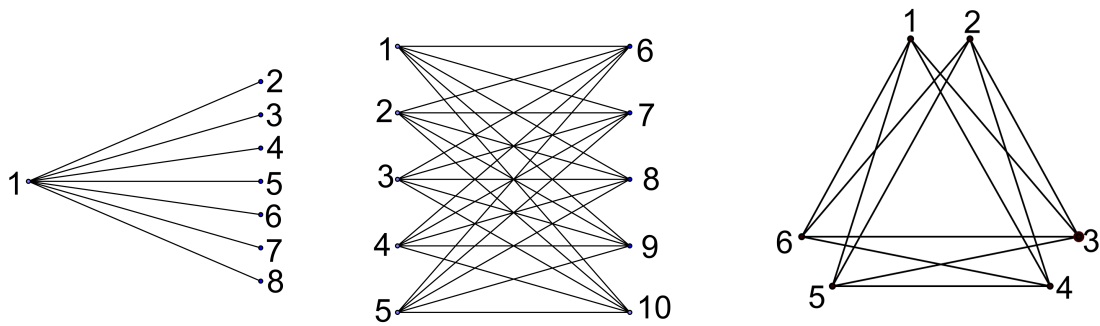


Figura 1.5: estrela $K_{1,7}$. Figura 1.6: bipartido $K_{5,5}$. Figura 1.7: 3-partido $K_{3 \times 2}$

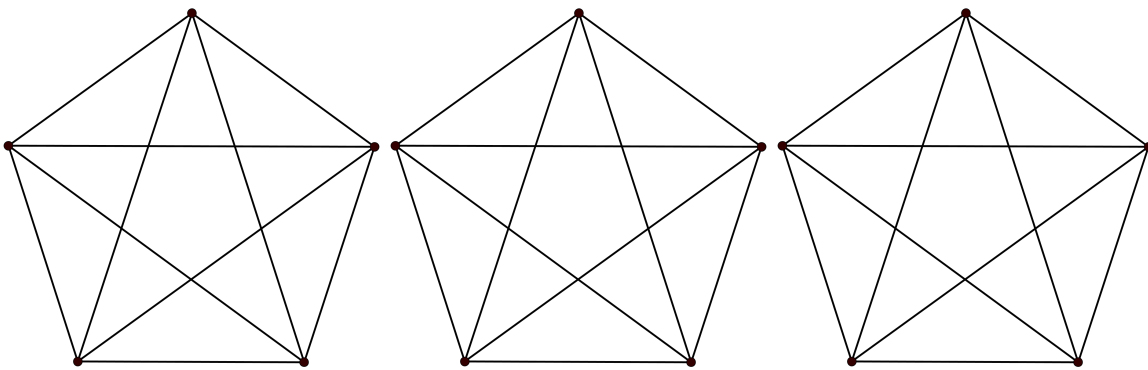


Figura 1.8: grafo $3K_5$

para quaisquer $e_1, e_2 \in W$ com $e_1 \neq e_2$.

Na literatura, também é comum encontrarmos conjuntos de arestas independentes em um grafo sendo chamados de *emparelhamentos*. Deste modo, embora seja um pouco de abuso na notação, estenderemos o termo *emparelhamento* para nomear grafos do tipo mK_2 , onde $m \geq 1$ é um inteiro. Neste sentido, ilustramos nas Figuras 1.9 e 1.10 dois emparelhamentos $3K_2$ e $6K_2$, respectivamente.

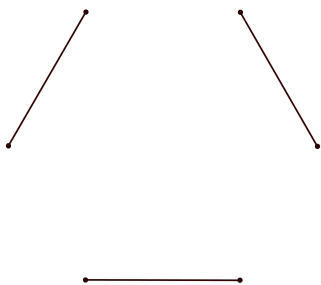


Figura 1.9: emparelhamento $3K_2$

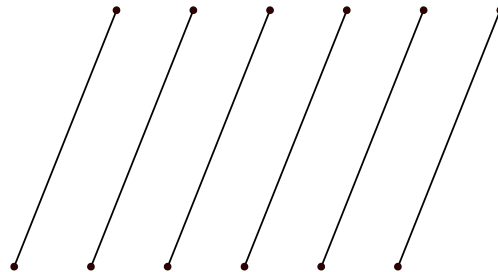


Figura 1.10: emparelhamento $6K_2$

Outra propriedade que usaremos neste trabalho é o conceito de conexidade. Um grafo G é dito ser *conexo* se, para quaisquer dois vértices u e v , G possui como subgrafo um caminho ligando u a v . A título de exemplificação, os grafos nas Figuras 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 e 1.7 são conexos. Já os grafos ilustrados nas Figuras 1.8, 1.9 e 1.10 não são conexos.

Observe na Figura 1.8 que o grafo $3K_5$ pode ser ilustrado a partir de três “partes conexas”. Na verdade, estas “partes conexas” são formalmente chamadas de componentes conexas. De modo geral, uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo maximal conexo de G , isto é, um subgrafo conexo que não está contido propriamente em nenhum outro subgrafo conexo de G . Segue diretamente da definição que todo grafo conexo apresenta uma única componente conexa. Além disso, é fácil ver que os grafos das Figuras 1.8 e 1.9 apresentam exatamente três componentes conexas cada, enquanto que o grafo da Figura 1.10 possui seis.

1.1.3 Grafos t -fatoráveis e índice cromático

Dado um grafo arbitrário G , qual é o número mínimo de conjuntos necessários para particionar as arestas de G em conjuntos de arestas independentes? A resposta para esta pergunta tem tamanha importância no âmbito de aplicações a ponto de receber um nome especial.

Definição 1.4. Dado G um grafo, o *índice cromático* de G , denotado por $\chi'(G)$, é o número mínimo de conjuntos necessários para particionar as arestas de G em conjuntos de arestas independentes.

É claro que arestas adjacentes não estão em um conjunto de arestas independentes. Assim, uma estimativa trivial para o índice cromático é $\Delta(G) \leq \chi'(G)$. Vizing [79] mostrou que tal estimativa é ótima ou quase ótima.

Teorema 1.5. (Vizing [79]) Para todo grafo G , temos $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

O Teorema de Vizing garante que $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Quando $\chi'(G) = \Delta(G)$, diremos que G é um grafo de *classe 1*. Por outro lado, se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, diremos que G é de *classe 2*. De modo geral, não é uma tarefa simples descobrir se G é de classe 1 ou 2, tanto que, na literatura, existem vários artigos que se dedicam unicamente nesta classificação. Por exemplo, o artigo [41] classifica grafos multipartidos completos e nos

sede resultados fundamentais em demonstrações no decorrer do nosso trabalho. Dois dos resultados pertinentes em nossa pesquisa são dados nos dois próximos teoremas.

Teorema 1.6. (Hoffman e Rodger [41]) Se G é um grafo multipartido completo com um número par de vértices, então G é de classe 1, isto é, $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Teorema 1.7. (König [50]) Todo grafo bipartido é de classe 1, isto é, $\chi'(G) = \Delta(G)$ para todo grafo bipartido G .

Outro conceito de fundamental importância nos nossos estudos é a fatoração de grafos. Para ver tal conceito, precisamos antes definir soma direta.

Definição 1.8. Dados grafos G, G_1, \dots, G_k . Dizemos que G é a *soma direta* dos grafos G_1, \dots, G_k se:

(i) $V(G_i) \subset V(G)$ para todo $i = 1, \dots, k$.

(ii) $E(G) = \bigcup_{i=1}^k E(G_i)$ e $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ para todo $1 \leq i < j \leq k$.

Neste caso, denotamos $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$. Em particular, se H é um subgrafo de G , então $G = H \oplus \overline{H}^G$.

Diremos que um grafo G é *t-fatorável* se ele pode ser escrito como a soma direta de t -fatores (de G), isto é, G é *t-fatorável* se existem grafos t -regulares G_1, \dots, G_k tais que $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ com $V(G_i) = V(G)$ para todo $i = 1, \dots, k$. Neste caso, dizemos que $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ é uma *t-fatoração* de G .

É imediato que todo grafo t -fatorável é um grafo kt -regular para algum inteiro positivo k . Mas e quanto a sua recíproca? Será que todo grafo kt -regular é t -fatorável? A resposta é negativa. Por exemplo, tomando $t = 1$, temos que o grafo K_3 é um grafo 2-regular, no entanto, não é 1-fatorável. Um fato interessante é que a recíproca é verdadeira para o caso $t = 2$, conforme teorema abaixo.

Teorema 1.9. (Petersen [71]) Um grafo G é 2-fatorável se, e somente se, G é $2k$ -regular para algum inteiro positivo k .

Uma consequência quase imediata é a extensão do teorema acima de $t = 2$ para t par, conforme corolário abaixo.

Corolário 1.10. Seja t um inteiro positivo par. Um grafo G é t -fatorável se, e somente se, G é tk -regular para algum inteiro positivo k .

Demonstração: Se G é t -fatorável, então existem t -fatores de G , digamos G_1, \dots, G_k , tais que $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$. Deste modo, para todo $v \in V(G)$,

$$d_G(v) = \sum_{i=1}^k d_{G_i}(v) = \sum_{i=1}^k t = tk, \quad (1.2)$$

logo G é tk -regular. Para mostrar a recíproca, suponha agora que G é tk -regular. Como t é par, segue pelo Teorema 1.9 que G é 2-fatorável. Assim, existem 2-fatores de G , digamos H_1, \dots, H_m , tais que $G = H_1 \oplus \dots \oplus H_m$. De modo análogo ao feito em (1.2), verifica-se que G é $2m$ -regular e portanto $tk = 2m$, isto é, $m = (t/2)k$. Deste modo, podemos particionar os m grafos H_1, \dots, H_m em k conjuntos, digamos A_1, \dots, A_k , contendo $t/2$ grafos cada. Para cada $i = 1, \dots, k$, defina G_i como sendo a soma direta de todos grafos em A_i . Como A_i possui exatamente $t/2$ 2-fatores de G , segue que G_i é um t -fator de G . Além disso, $G = H_1 \oplus \dots \oplus H_m = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$. Logo G é t -fatorável. \square

Para t ímpar, não é uma tarefa simples determinar se uma classe de grafos kt -regulares são t -fatoráveis ou não. Na verdade, caracterizar grafos t -fatoráveis ainda é um problema em aberto. Para o caso $t = 1$, o problema corresponde em classificar os grafos nas classes 1 e 2. De fato, não é difícil de verificar que um grafo k -regular G é 1-fatorável se, e somente se, G é de classe 1. Em particular, podemos usar o Teorema 1.6 para construir exemplos de grafos regulares 1-fatoráveis.

1.1.4 Grafos hamiltonianos e pancíclicos

Começaremos com o seguinte questionamento.

Questão 1.11. É possível uma banda musical fazer uma turnê por todos os estados do Brasil (o que não inclui o distrito federal) sem repetir nenhum estado durante o percurso da viagem?

Usando o método de tentativa e erro, é possível verificar que a resposta é afirmativa, conforme podemos ver pela Figura 1.11.

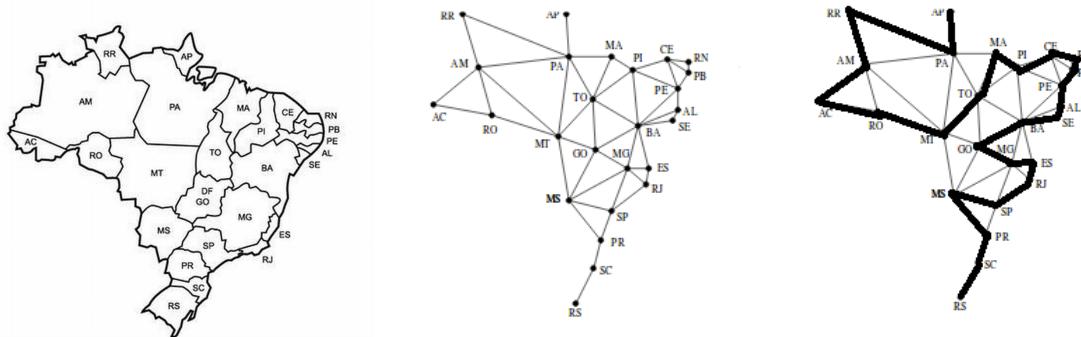


Figura 1.11: um caminho por todos os estados do Brasil

Observe que o Amapá e o Rio Grande do Sul são os únicos estados do Brasil que fazem fronteira única (isto é, com apenas um estado). Deste modo, é possível mostrar que qualquer trajeto no território nacional que passa por todos os estados sem repetir nenhum tem que começar e terminar no Amapá e no Rio Grande do Sul (não necessariamente nesta ordem). Note que estes dois estados são distantes um ao outro, assim, se houvesse a necessidade da banda retornar ao ponto de origem, então o trajeto sem repetir nenhum estado pode não ser uma boa opção. Por outro lado, se a viagem fosse restrita apenas aos estados do Sudeste, então seria possível passar por todos os estados partindo de qualquer ponto e chegando em um estado vizinho, conforme Figura 1.12.

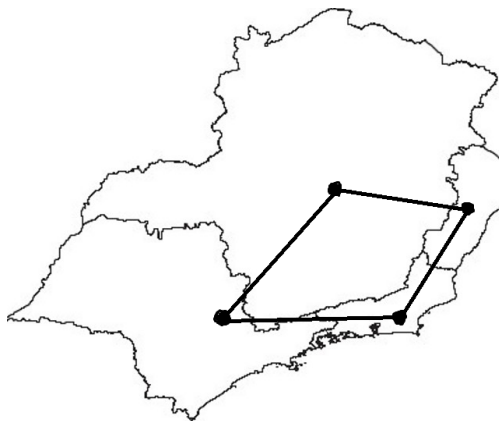


Figura 1.12: um ciclo C_4

Caminhos e ciclos que percorrem todos os vértices de um grafo são chamados de *caminhos hamiltonianos* e *ciclos hamiltonianos*, respectivamente. De modo mais geral, temos a definição abaixo.

Definição 1.12. Um grafo é dito ser *hamiltoniano* se possui (como subgrafo) um ciclo hamiltoniano, isto é, um ciclo que passa por todos os seus vértices. Do mesmo modo, um grafo é dito ser *semi-hamiltoniano* se possui um caminho hamiltoniano.

O lema abaixo pode ser visto como uma ferramenta para identificar se um grafo é semi-hamiltoniano. O usaremos em nossos resultados no Capítulo 5.

Lema 1.13. (Broersma, Li e Zhang [11]) Todo grafo conexo G contém um caminho P_t onde $t = \min\{2\delta(G) + 1, |V(G)|\}$.

Outro resultado relevante para nossa pesquisa é o célebre Teorema de Dirac.

Teorema 1.14. (Dirac [25]) Se G é um grafo com $\delta(G) \geq |V(G)|/2$, então G é hamiltoniano.

Um grafo semi-hamiltoniano G possui um caminho de ordem $|V(G)|$. Em particular, G possui também um caminho de ordem t para todo $t = 2, 3, \dots, |V(G)|$. A mesma ideia não se aplica para grafos hamiltonianos, isto é, um grafo ter um ciclo de ordem $|V(G)|$ não garante que este grafo possui ciclos de tamanhos menores. Grafos com tal característica são chamados de pancíclicos.

Definição 1.15. Um grafo G é dito ser *pancíclico* se G possui como subgrafo um ciclo C_t (de tamanho t) para todo $t = 3, 4, \dots, |V(G)|$.

É claro que todo grafo pancíclico é hamiltoniano, mas nem todo grafo hamiltoniano é pancíclico. Neste sentido, uma extensão do Teorema de Dirac é dada abaixo.

Teorema 1.16. (Bondy [9]) Se G é um grafo tal que $\delta(G) \geq |V(G)|/2$, então ou G é pancíclico ou $|V(G)|$ é par e G é isomorfo ao grafo bipartido $K_{|V(G)|/2, |V(G)|/2}$.

1.1.5 Grafos fortemente regulares

Já vimos que grafos regulares são grafos onde o grau de todos os vértices é constante. Uma classe especial dentro desta categoria são os grafos fortemente regulares.

Definição 1.17. Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é dito ser um *grafo fortemente regular* com parâmetros (v, k, λ, μ) , ou simplesmente, um (v, k, λ, μ) -GFR se:

- (i) G possui v vértices;
- (ii) G é regular de ordem k ;
- (iii) Dados vértices $v_1, v_2 \in V(G)$ com $\{v_1, v_2\} \in E(G)$, então $|N_G(v_1) \cap N_G(v_2)| = \lambda$;
- (iv) Dados vértices $v_1, v_2 \in V(G)$ com $\{v_1, v_2\} \notin E(G)$, então $|N_G(v_1) \cap N_G(v_2)| = \mu$.

A título de exemplificação, o *grafo de Petersen* ilustrado na Figura 1.13 é um grafo fortemente regular com parâmetros $(10,3,0,1)$. Já o *grafo de Paley* ilustrado na Figura 1.14 é um grafo fortemente regular com parâmetros $(13,6,2,3)$. Outro exemplo é o grafo bipartido completo $K_{m,m}$, o qual é um $(2m, m, 0, m)$ -GFR.

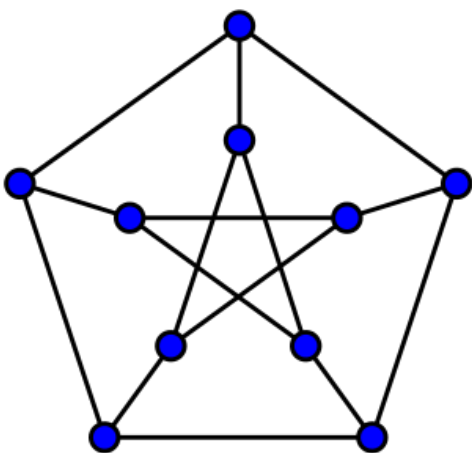


Figura 1.13: grafo de Petersen

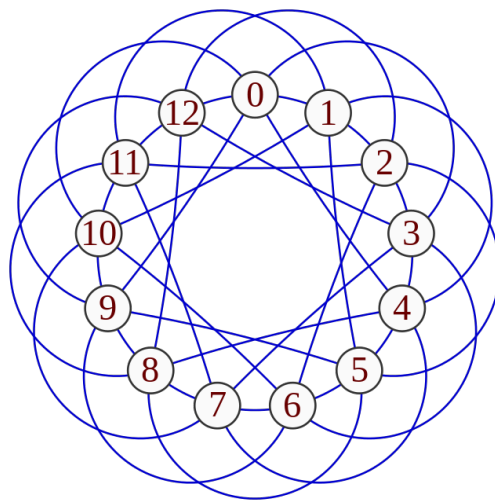


Figura 1.14: grafo de Paley

Algumas classes de grafos fortemente regulares estão diretamente ligadas a designs combinatórios. Por exemplo, quando $\lambda = \mu$, sabe-se que existe um (v, k, λ, λ) -GFR se, e somente se, existe um (v, k, λ) -design com polaridade e sem pontos absolutos (ver [43]). Conexões como esta permitem retratarmos tais grafos como uma classe especial de designs. Para o leitor interessado em mais dessas conexões, sugerimos a leitura de [43] bem como suas respectivas referências. De qualquer modo, falaremos um pouco mais sobre estas conexões no Capítulo 2.

Para parâmetros arbitrários v, k, λ e μ , nem sempre existe um (v, k, λ, μ) -GFR. Uma condição necessária (porém não suficiente) é dada pela seguinte relação.

Proposição 1.18. [44] Se existe um (v, k, λ, μ) -GFR, então

$$k(k - \lambda - 1) = \mu(v - k - 1).$$

É possível mostrar que o grafo complementar de um grafo fortemente regular também é fortemente regular. Os parâmetros deste grafo são especificados pela relação abaixo.

Proposição 1.19. [44] Se G é um (v, k, λ, μ) -GFR, então o complementar de G (em relação a K_v) é um $(v, v - k - 1, v - 2 - 2k + \mu, v - 2k + \lambda)$ -GFR.

Vimos na Figura 1.14 um grafo fortemente regular com parâmetros $(13, 6, 2, 3)$. A Proposição 1.19 garante que o complementar deste grafo também é um $(13, 6, 2, 3)$ -GFR. Será que este é um fenômeno isolado ou ocorre para alguma classe de grafos? A proposição abaixo responde parcialmente a esta pergunta.

Proposição 1.20. Seja G um (v, k, λ, μ) -GFR. Então o complementar de G também é um grafo fortemente regular com parâmetros (v, k, λ, μ) se, e somente se, $k = (v - 1)/2$, $\lambda = (v - 5)/4$ e $\mu = (v - 1)/4$.

A demonstração do resultado acima é uma simples aplicação das Proposições 1.18 e 1.19.

Note que a Proposição 1.20 garante que, se G e seu complementar são grafos fortemente regulares com parâmetros (v, k, λ, μ) , então $v \equiv 1 \pmod{4}$. Assim, v é da forma $v = 4n - 3$ para algum inteiro positivo n e conseqüentemente $k = 2n - 2$, $\lambda = n - 2$ e $\mu = n - 1$. Em particular, vale o resultado abaixo.

Corolário 1.21. Se G é um $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR, então o complementar de G também é um $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR.

Para q potência de primo com $q \equiv 1 \pmod{4}$, considere \mathbb{F}_q o corpo finito com q elementos. O *grafo de Paley* \mathcal{P}_q é o grafo cujo conjunto de vértices é dado por \mathbb{F}_q e dois vértices v_1 e v_2 são adjacentes se, e somente se, existe $x \in \mathbb{F}_q$ tal que $v_1 - v_2 = x^2$ (ver [16]). Pode-se mostrar que o grafo de Paley \mathcal{P}_q é um $(q, \frac{q-1}{2}, \frac{q-5}{4}, \frac{q-1}{4})$ -GFR (ver Exemplo 3.13 em [44]). Deste modo, em complemento ao Corolário 1.21, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.22. Se $4n - 3$ é potência de primo, existe um $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR.

1.2 Números de Ramsey

Em 1930, Frank Plumpton Ramsey [73] publicou um resultado popularmente conhecido como *Teorema de Ramsey* e, a partir daí, surgiu o que hoje chamamos de *números de Ramsey*. Com o passar dos anos, as conexões e aplicações descobertas neste âmbito impulsionaram a pesquisa e assim a computação de tais números ganhou maior visibilidade. Com esta intensificação, surgiram também muitas versões e generalizações do problema, dentre as quais, a variante multipartida, que é onde se concentram nossos resultados. Nesta seção, discutiremos um pouco sobre as principais variantes dos números de Ramsey.

1.2.1 Número de Ramsey clássico

Suponha que a relação “conhecer” entre as pessoas seja simétrica, isto é, se x conhece y , então y conhece x . Consideremos a questão abaixo.

Questão 1.23. Dados inteiros positivos t e n , existe um número (suficientemente grande) r de modo que podemos garantir que, em toda festa com r pessoas, existem t que se conhecem duas a duas ou n que são estranhas entre si?

A pergunta acima pode ser moldada em termos de grafos. Mas, para isto, precisamos do conceito de coloração.

Definição 1.24. Dado um grafo G , uma k -coloração de arestas de G é uma função $\psi : E(G) \rightarrow M$, onde M é um conjunto qualquer com cardinalidade k . Em outras palavras, uma k -coloração de arestas de G é uma função que associa cada aresta de G a uma cor, onde dispomos de um conjunto com k cores.

Algumas observações podem ser destacadas na definição acima. A primeira delas é que, na literatura, também é comum trabalharmos com colorações de vértices, mas como não abordaremos este conceito nesta monografia, então vamos chamar uma k -coloração de arestas de G simplesmente por k -coloração de G , ou ainda, quando $k = 2$, *bicoloração de G* . A segunda observação se refere a nomenclatura. A função $\psi : E(G) \rightarrow M$ é chamada de coloração pois podemos associar os elementos de M a cores (no sentido literal da palavra).

Neste caso, a função $\psi : E(G) \rightarrow M$ pode ser ilustrada pelo grafo G colorindo cada aresta $e \in E(G)$ pela cor $\psi(e) \in M$ (ver Figura 1.15, caso disponha de uma versão colorida desta monografia).

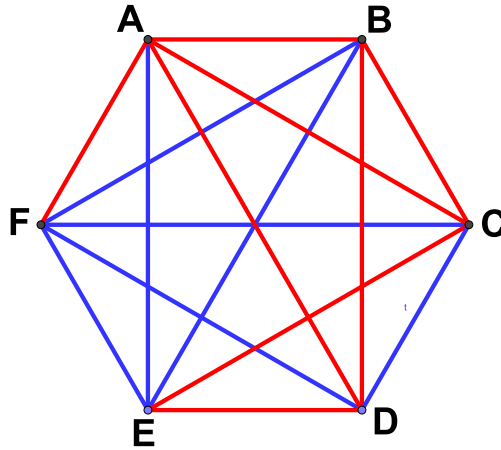


Figura 1.15: uma bicoloração do K_6 nas cores azul e vermelho

Retomemos ao problema da festa descrito na Questão 1.23. Mencionamos que o problema podia ser moldado em termos de grafos e agora já conseguimos explicar o porquê. De fato, se associarmos as r pessoas da festa aos vértices do grafo completo K_r e pintarmos a aresta que liga duas pessoas (vértices) pela cor 1 se elas se conhecem ou pela cor 2 se elas são estranhas entre si, então o menor r que satisfaz a pergunta da festa corresponde ao $r(t, n)$ definido abaixo.

Definição 1.25. Sejam inteiros $t, n \geq 2$. O número de Ramsey $r = r(t, n)$ é o número mínimo de vértices necessários para garantimos que toda bicoloração do K_r possui um subgrafo K_t monocromático na cor 1 ou um K_n monocromático na cor 2.

Uma pergunta natural que surge é se o número de Ramsey está bem definido, isto é, existe um $r = r(t, n)$ suficientemente grande que satisfaz a definição? A resposta é afirmativa e decorre do teorema abaixo.

Teorema 1.26. (Ramsey [73]) Dados inteiros $t, n \geq 2$, o número de Ramsey $r(t, n)$ existe e satisfaz a relação

$$r(t, n) \leq r(t - 1, n) + r(t, n - 1). \quad (1.3)$$

A existência do número $r(t, n)$ segue diretamente de (1.3) aplicando o princípio da indução. Em particular, a relação (1.3) garante não apenas a existência do número, mas também uma estimativa superior para o mesmo, conforme segue no teorema abaixo cuja demonstração é imediata usando a Relação de Stifel.

Teorema 1.27. (Ramsey [73]) Para todos inteiros $t, n \geq 2$,

$$r(t, n) \leq \binom{t+n-2}{t-1}. \quad (1.4)$$

Apesar de os números de Ramsey serem estudados há quase um século, os cálculos deles revelaram-se muito intrigantes e desafiadores. Surpreendentemente, poucos valores exatos são conhecidos. De acordo com [72], para $n \geq t \geq 3$, os únicos valores que foram determinados são $r(3, 3) = 6$, $r(3, 4) = 9$, $r(3, 5) = 14$, $r(3, 6) = 18$, $r(3, 7) = 23$, $r(3, 8) = 28$, $r(3, 9) = 36$, $r(4, 4) = 18$ e $r(4, 5) = 25$.

A estimativa (1.4) tem a vantagem de ser geral, mas muitos casos podem ser refinados. O trabalho [72] faz um resumo da literatura a partir de centenas de referências e é atualizado periodicamente de acordo com a descoberta de novos resultados. Na sua atual versão (2017), exibe a Tabela 1.1 com as estimativas de $r(t, n)$ conhecidas até a data de publicação. Para melhor entendimento da dinâmica desta tabela, deixamos em negrito as atualizações feitas na última versão (2017) em relação à penúltima (2014). Observe que apenas um limite superior foi modificado. Note também que a diferença entre as estimativas inferior e superior conhecidas na literatura aumentam à medida que os valores de n e t crescem. Para $n = t = 10$, por exemplo, até hoje só foi mostrado que $798 \leq r(10, 10) \leq 23556$. Neste sentido, vale a pena destacar que qualquer melhora nesta tabela, por menor que possa parecer, representa um avanço significativo para a área.

O número $r(t, n)$ corresponde originalmente à parte clássica da teoria de Ramsey, no entanto, existem variações deste problema na literatura, como por exemplo, investigar o comportamento de mais de duas cores. A definição abaixo retrata esta generalização.

Definição 1.28. Dados k, n_1, n_2, \dots, n_k inteiros maiores ou iguais a dois, o *número de Ramsey multicolorido* $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$ é o menor inteiro r tal que toda k -coloração do grafo K_r contém um subgrafo K_{n_i} monocromático da cor i para algum $i = 1, 2, \dots, k$.

Tabela 1.1: estimativas para o número $r(t, n)$

$t \setminus n$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40-42
4		18	25	36-41	49-61	59-84	73-115	92-149
5			43-48	58-87	80-143	101-216	133-316	149-442
6				102-165	115-298	134-495	183-780	204-1171
7					205-540	217-1031	252-1713	292-2826
8						282-1870	329-3583	343-6090
9							565-6588	581-12677
10								798-23556

Assim como no caso $k = 2$, a princípio não podemos garantir a existência do número $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$. No entanto, usando argumentos indutivos, o trabalho [73] mostra que o número de Ramsey multicolorido também existe e satisfaz a relação

$$r(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k) \leq r(n_1, n_2, \dots, n_{k-2}, r(n_{k-1}, n_k)). \quad (1.5)$$

Apesar de termos apresentado o número de Ramsey em sua forma clássica usando grafos completos, o conceito pode ser generalizado um pouco mais usando grafos de um modo geral, isto é, dados grafos quaisquer G_1, G_2, \dots, G_k , o número de Ramsey $r(G_1, G_2, \dots, G_k)$ é definido como sendo o menor r de modo que toda k -coloração do grafo K_r contém um subgrafo G_i monocromático da cor i para algum $i = 1, 2, \dots, k$. Por simplicidade, denotamos $r(\underbrace{G, G, \dots, G}_k \text{ vezes})$ por $r(G; k)$.

A partir da existência do número $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$, garantimos também a existência do $r(G_1, G_2, \dots, G_k)$. De fato, como cada G_i é subgrafo de um grafo completo K_{n_i} , vale a relação

$$r(G_1, G_2, \dots, G_k) \leq r(K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_k}) = r(n_1, n_2, \dots, n_k). \quad (1.6)$$

Assim como para duas cores, o número de Ramsey para k cores também é difícil de ser calculado até mesmo computacionalmente. Tanto que, para $k > 2$, o único valor não trivial conhecido na Definição 1.28 é $r(3, 3, 3) = r(K_3; 3) = 17$ (calculado em [32]). Observe que, neste caso, vale a igualdade na estimativa superior $r(K_3; k) \leq \lceil k!(e - e^{-1} + 3)/2 \rceil$ exibida

no trabalho [42]. Outro trabalho que estima o número $r(K_3; k)$ é [46]. Tal trabalho contém também estimativas para o $r(K_4; k)$ e determina o valor exato do $r(P_3; k)$ e do $r(P_4; k)$ para todo $k \geq 2$.

Apesar da dificuldade em determinar o valor exato do número de Ramsey, muitas estimativas e classes exatas foram obtidas para os mais diversos grafos. O leitor interessado em maiores detalhes pode consultar [72] e suas referências.

1.2.2 Número de Ramsey bipartido

Na seção anterior, descrevemos o número de Ramsey $r(m, n)$ como sendo o menor número de pessoas necessárias em uma festa para garantirmos que existem m delas que se conhecem mutuamente ou n delas que são estranhas entre si. Agora, vamos continuar assumindo que a relação conhecer é simétrica, mas dividiremos as pessoas em dois conjuntos de mesmo tamanho. Suponha que em uma festa o número de homens e mulheres seja o mesmo, digamos b . Dados inteiros $m, n \geq 2$, qual é o menor número $b = b(m, n)$ que nos garante que, nesta festa, existem m homens que conhecem mutuamente m mulheres, ou ainda, que exista um grupo de n homens e n mulheres de modo que toda mulher (do grupo) não conhece nenhum dos homens (do grupo) e vice-versa?

O problema das festas descrito acima pode ser moldado via grafos bipartidos conforme definição abaixo.

Definição 1.29. Dados grafos bipartidos K_{m_1, m_2} e K_{n_1, n_2} , o *número de Ramsey bipartido* $b(K_{m_1, m_2}, K_{n_1, n_2})$ é o menor inteiro b tal que toda bicoloração do $K_{b, b}$ contém um K_{m_1, m_2} monocromático de cor 1 ou um K_{n_1, n_2} monocromático de cor 2.

Na notação usada acima, o número $b(K_{m, m}, K_{n, n})$ corresponde ao $b(m, n)$ definido no problema das festas. Neste sentido, denotaremos o número de Ramsey bipartido $b(K_{m, m}, K_{n, n})$ simplesmente por $b(m, n)$.

Em 1998, Hatting e Henning [40] mostraram que o número $b(m, n)$ está bem definido e estabeleceram a relação

$$b(m, n) \leq b(m - 1, n) + b(m, n - 1)$$

usando argumentos análogos aos do Teorema 1.26. Além disso, mostraram também que

$$b(m, n) < \binom{m+n}{m}$$

e garantiram a existência do número $b(K_{m_1, m_2}, K_{n_1, n_2})$ uma vez que

$$b(K_{m_1, m_2}, K_{n_1, n_2}) \leq b(\max\{m_1, m_2\}, \max\{n_1, n_2\}).$$

Poucas instâncias do número de Ramsey bipartido são conhecidas, dentre elas, $b(2, 2) = 5$, $b(3, 3) = 17$, $b(2, 3) = 9$ e $b(2, 4) = 14$. Os dois primeiros resultados foram apresentados em [6] enquanto que os dois últimos se devem ao trabalho [40]. Recentemente, a igualdade $b(2, 5) = 17$ foi determinada em [23].

Assim como o número de Ramsey clássico, o número de Ramsey bipartido também pode ser expandido a multicolorações. De modo geral, dados grafos $K_{n_1, m_1}, K_{n_2, m_2}, \dots, K_{n_k, m_k}$ com $k \geq 2$, definimos $b(K_{n_1, m_1}, K_{n_2, m_2}, \dots, K_{n_k, m_k})$ como sendo o menor inteiro b de modo que toda k -coloração do grafo bipartido $K_{b, b}$ possui um K_{n_i, m_i} monocromático da cor i para algum $i = 1, 2, \dots, k$.

Não faremos maiores menções à versão bipartida dos números de Ramsey neste trabalho. Destacamos apenas que os artigos [6, 17, 23, 24, 33, 35, 40, 45] trabalham exclusivamente com esta versão e podem ser adotadas como referência para o leitor interessado no tema.

1.2.3 Número de Ramsey multipartido

Discutimos anteriormente os números de Ramsey nas versões clássica e bipartida. Agora, exibiremos generalizações destas versões para o âmbito multipartido. Tais generalizações foram introduzidas em 2004 por Burger, Grobler, Stipp e van Vuren [12, 13, 14]. Em particular, em [12, 13] são investigadas bicolorações em grafos multipartidos completos e é levantado o seguinte questionamento.

Questão 1.30. Dado um grafo multipartido $K_{n \times m}$ e um inteiro positivo s , qual é o menor inteiro c de modo que toda bicoloração do $K_{c \times s}$ contém um $K_{n \times m}$ monocromático?

Tanto em [12] quanto em [13], foi mostrado que este número c suficientemente grande realmente existe e foram dadas algumas estimativas para o mesmo. Por sua vez, em [56] o

problema foi trabalhado em um contexto multicolorido e muitos dos resultados de [12, 13] foram generalizados para um número arbitrário de cores.

Apesar de as primeiras referências no tema terem trabalhado apenas com grafos multipartidos completos, este conceito foi naturalmente ampliado a grafos arbitrários, conforme a definição abaixo.

Definição 1.31. Sejam k e s inteiros positivos com $k \geq 2$. Dados grafos G_1, G_2, \dots, G_k , o *número de Ramsey multipartido por classes* $M_s(G_1, G_2, \dots, G_k)$ é o menor inteiro c de modo que toda k -coloração do $K_{c \times s}$ possui um subgrafo G_i monocromático na cor i para algum $i = 1, 2, \dots, k$.

Algumas observações importantes na definição acima devem ser destacadas.

Observação 1.32. Como o grafo multipartido $K_{c \times 1}$ é isomorfo ao grafo completo K_c , então o número de Ramsey multipartido $M_1(G_1, G_2, \dots, G_k)$ corresponde ao número clássico, isto é,

$$M_1(G_1, G_2, \dots, G_k) = r(G_1, G_2, \dots, G_k).$$

Sob esta perspectiva, podemos ver o número de Ramsey por classes como uma generalização do número de Ramsey clássico.

Observação 1.33. Por simplicidade, quando os grafos G_1, G_2, \dots, G_k são iguais (isomorfos) a um grafo G , denota-se $M_s(G_1, G_2, \dots, G_k)$ simplesmente por $M_s(G; k)$. Além disso, é comum chamar esta versão dos números de Ramsey simplesmente por *número de Ramsey multipartido*, mesmo existindo uma outra variante multipartida para o problema, conforme veremos na sequência.

O número $M_s(G_1, G_2, \dots, G_k)$ não é a única versão dos números de Ramsey onde os grafos hospedeiros são multipartidos. Historicamente, em 1975, Beineke e Schwenk [6] pesquisaram colorações em grafos bipartidos e introduziram o número de Ramsey bipartido para duas cores. Em 2001, Day, Goddard, Henning e Swart [24] expandiram a ideia e trabalharam com a versão multicolorida. Em 2004, Burger e van Vuuren [14] também trabalharam com o problema no contexto multipartido, mas ao contrário da Definição 1.31, fixaram a quantidade

de classes e variaram a cardinalidade delas. Uma definição precisa que engloba a todas estas versões é dada abaixo.

Definição 1.34. Sejam k e c inteiros positivos com $k \geq 2$. Dados grafos G_1, G_2, \dots, G_k , o número de Ramsey multipartido por tamanhos $m_c(G_1, G_2, \dots, G_k)$ é o menor inteiro s (caso exista) de modo que toda k -coloração do $K_{c \times s}$ possui um G_i monocromático na cor i para algum $i = 1, 2, \dots, k$.

Observe que o caso $c = 2$ na definição acima corresponde ao número de Ramsey bipartido $b(G_1, G_2, \dots, G_k)$ abordado na subseção anterior. Neste sentido, esta variante multipartida é uma generalização da versão bipartida. Nos trabalhos [67, 69] exibimos algumas classes exatas para esta versão generalizada. No entanto, optamos por não as abordar nesta tese. Sendo assim, aqui nos limitaremos a trabalhar apenas com a versão multipartida exibida na Definição 1.31. Neste sentido, dedicaremos o resto desta seção na exibição de resultados que nos servirão como ferramenta para a construção de classes exatas nos Capítulos 3, 4 e 5. Deste modo, o leitor pode omitir a leitura em um primeiro momento e retomar sempre que achar necessário, a título de referência, nas futuras demonstrações.

Começaremos exibindo um resultado que naturalmente caracteriza os números Ramsey como um problema extremal em fatoração de grafos.

Proposição 1.35. Dados inteiros $s \geq 1$, $c \geq 2$ e grafos G_1, \dots, G_k , temos $M_s(G_1, \dots, G_k) > c$ se, e somente se, existem grafos H_1, \dots, H_k tais que $K_{c \times s} = H_1 \oplus \dots \oplus H_k$ com $G_i \not\subseteq H_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Demonstração: Se $M_s(G_1, \dots, G_k) > c$, então pela definição do número de Ramsey multipartido, existe uma k -coloração do $K_{c \times s}$ sem G_i monocromático na cor i , para todo $i = 1, \dots, k$. Definindo H_i o grafo induzido pela cor i , temos que $K_{c \times s} = H_1 \oplus \dots \oplus H_k$ e $G_i \not\subseteq H_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Por outro lado, se existem grafos H_1, \dots, H_k tais que $K_{c \times s} = H_1 \oplus \dots \oplus H_k$ e $G_i \not\subseteq H_i$ para todo $i = 1, \dots, k$. Defina a k -coloração $\psi : E(K_{c \times s}) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, onde

$$\psi(e) = i \iff e \in E(H_i).$$

Temos que ψ está bem definida pois $\{E(H_1), \dots, E(H_k)\}$ é uma partição de $E(K_{c \times s})$. Além disso, na coloração ψ não há G_i monocromático na cor i para todo $i = 1, \dots, k$. Portanto, $M_s(G_1, \dots, G_k) > c$. \square

Os dois próximos lemas nos afirmam que o conceito de índice cromático pode desempenhar um papel fundamental nas estimativas de números de Ramsey quando os grafos envolvidos são estrelas.

Lema 1.36. Dados inteiros $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$ e um grafo G , denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se tivermos $\chi'(G) \leq S - k$, então existem grafos G_1, \dots, G_k tais que $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ e $K_{1, n_i} \not\subseteq G_i$ para todo $i = 1, \dots, k$. (Equivalentemente, existe uma k -coloração de G sem K_{1, n_i} monocromático na cor i para todo $i = 1, \dots, k$).

Demonstração: Como $\chi'(G) \leq S - k$, podemos particionar as arestas de G em $S - k$ conjuntos de arestas independentes, digamos A_1, \dots, A_{S-k} . Mas $S - k = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)$, assim podemos particionar $\{A_1, \dots, A_{S-k}\}$ em k famílias, digamos B_1, \dots, B_k , onde $|B_i| = n_i - 1$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Para cada $i = 1, \dots, k$, defina o grafo $G_i = (V(G_i), E(G_i))$ onde $V(G_i) = V(G)$ e $E(G_i) = \bigcup_{A_j \in B_i} A_j$. Note que $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$. Além disso, como duas arestas em um mesmo A_j não são adjacentes, segue que, para cada vértice v existem no máximo $|B_i|$ arestas em $\bigcup_{A_j \in B_i} A_j$ que incidem em v , isto é, existem no máximo $n_i - 1$ arestas em $E(G_i)$ que incidem em v . Assim, K_{1, n_i} não é um subgrafo de G_i e, portanto, o lema é válido. \square

Lema 1.37. Dados um grafo Z e inteiros $s, k \geq 1, c, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se existem grafos G e H tais que $K_{c \times s} = G \oplus H$ com $\chi'(G) \leq S - k$ e $Z \not\subseteq H$, então

$$M_s(K_{1, n_1}, \dots, K_{1, n_k}, Z) > c.$$

Demonstração: Como $\chi'(G) \leq S - k$, então o lema anterior garante que existem grafos G_1, \dots, G_k tais que $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ com $K_{1, n_i} \not\subseteq G_i$ para todo $i = 1, \dots, k$. Assim, segue que $K_{c \times s} = G \oplus H = G_1 \oplus \dots \oplus G_k \oplus H$ com $Z \not\subseteq H$ e $K_{1, n_i} \not\subseteq G_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Portanto, a Proposição 1.35 assegura que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, Z) > c$. \square

Já mencionamos que a literatura sobre o número de Ramsey clássico é muito vasta. Sendo assim, relacionar a versão multipartida à clássica pode ser muito útil pois permite resgatar muitos resultados já estabelecidos a esta nova variante. Neste sentido, exibiremos agora dois lemas técnicos que nos permitirão estimar números de Ramsey multipartidos utilizando estimativas já conhecidas para a versão clássica. Veremos que tais lemas desempenham papel fundamental em muitos resultados, incluindo a determinação de algumas classes exatas.

Lema 1.38. (Monte Carmelo e Sanches [56]) Dados inteiros $s \geq 1$, $k \geq 2$ e grafos G_1, \dots, G_k , temos

$$\left\lceil \frac{r(G_1, \dots, G_k)}{s} \right\rceil \leq M_s(G_1, \dots, G_k).$$

Lema 1.39. Dados um inteiro positivo s e um grafo conexo H com $|V(H)| \geq s + 1$. Para quaisquer grafos G_1, \dots, G_k , vale a estimativa

$$M_s(G_1, \dots, G_k) \leq \left\lceil \frac{r(G_1, \dots, G_k, H)}{s} \right\rceil.$$

Demonstração: Denote $c = M_s(G_1, \dots, G_k) - 1$. Pela escolha de c , existe uma k -coloração ϕ do $K_{c \times s}$ sem cópia monocromática do grafo G_i na cor i para todo $i = 1, \dots, k$. Como $K_{cs} = K_{c \times s} \oplus cK_s$, podemos complementar a k -coloração ϕ de $K_{c \times s}$ para uma $(k + 1)$ -coloração do K_{cs} colorindo cK_s pela cor $(k + 1)$. Como H não é um subgrafo de cK_s (pois H é conexo e $|V(H)| \geq s + 1$), segue que $r(G_1, \dots, G_k, H) > cs$, donde

$$r(G_1, \dots, G_k, H) \geq cs + 1 = (M_s(G_1, \dots, G_k) - 1)s + 1,$$

ou seja,

$$M_s(G_1, \dots, G_k) \leq \frac{r(G_1, \dots, G_k, H) - 1}{s} + 1.$$

Tomando o menor inteiro em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos a estimativa

$$M_s(G_1, \dots, G_k) \leq \left\lceil \frac{r(G_1, \dots, G_k, H) - 1}{s} \right\rceil + 1 \leq \left\lceil \frac{r(G_1, \dots, G_k, H)}{s} \right\rceil,$$

completando a demonstração. \square

O último resultado que apresentaremos neste capítulo afirma que encontrar o valor do número de Ramsey multipartido $M_s(G_1, \dots, G_k)$ quando $s = 2$ corresponde ao problema de Ramsey na versão clássica com uma cor a mais. Destacamos que este resultado já foi mostrado por Magnant e Yuskov [54] no caso particular $k = 2$. A demonstração para o caso geral que exibiremos aqui é uma extensão natural.

Proposição 1.40. Para quaisquer grafos G_1, \dots, G_k , temos

$$M_2(G_1, \dots, G_k) = \left\lceil \frac{r(G_1, \dots, G_k, K_{1,2})}{2} \right\rceil.$$

Demonstração: A estimativa $M_2(G_1, \dots, G_k) \leq \lceil r(G_1, \dots, G_k, K_{1,2})/2 \rceil$ é um caso particular do Lema 1.39 com $s = 2$ e $H = K_{1,2}$. Vamos mostrar então que $M_2(G_1, \dots, G_k) \geq \lceil r(G_1, \dots, G_k, K_{1,2})/2 \rceil$. Para isto, considere $n = r(G_1, \dots, G_k, K_{1,2}) - 1$. Pela escolha de n , existe uma $(k + 1)$ -coloração do grafo completo K_n sem G_i monocromático na cor i , para todo $i = 1, \dots, k$ e sem $K_{1,2}$ monocromático na cor $(k + 1)$. Note que o conjunto de arestas do K_n coloridas pela cor $(k + 1)$ é um conjunto de arestas independentes pois não contém o grafo $K_{1,2}$. Portanto, podemos selecionar um subconjunto de arestas independentes de $E(K_n)$ contendo todas as arestas da cor $(k + 1)$ e formado por exatamente $\lfloor n/2 \rfloor$ arestas.

Se n é ímpar, considere V_0 o conjunto formado pelo único vértice do K_n que não incide em nenhuma das $\lfloor n/2 \rfloor$ arestas previamente selecionadas. Já se n é par, considere $V_0 = \emptyset$.

Denote por $K_n[V(K_n) - V_0]$ o subgrafo de K_n induzido pelos vértices de $V(K_n) - V_0$ e por W o subgrafo de $K_n[V(K_n) - V_0]$ formado pelas $\lfloor n/2 \rfloor$ arestas independentes selecionadas. Note que

$$K_n[V(K_n) - V_0] = W \oplus K_{\lfloor n/2 \rfloor \times 2}. \quad (1.7)$$

Como todas as arestas do K_n coloridas pela cor $(k + 1)$ estão em W , segue de (1.7) que podemos induzir uma k -coloração no grafo $K_{\lfloor n/2 \rfloor \times 2}$ sem G_i monocromático na cor i , para todo $i = 1, \dots, k$. Portanto,

$$M_2(G_1, \dots, G_k) \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1 = \lceil (n + 1)/2 \rceil = \lceil r(G_1, \dots, G_k, K_{1,2})/2 \rceil.$$

□

Design combinatório

A teoria de designs é um ramo de pesquisa ativo na combinatória, possuindo conexões com as mais diversas áreas dentro da matemática, tais como: teoria dos grupos, teoria dos grafos, teoria dos números, corpos finitos, geometrias finitas, entre outros. Os resultados pioneiros desta teoria datam dos séculos XVIII e XIX e contam com a contribuição de nomes como Euler, Kirkman, Cayley, Hamilton, Sylvester e Moore. No entanto, segundo Stinson [76], as bases desta teoria foram sistematizadas apenas na década de 1930 por Bose e sua escola.

Além de expor algumas relações com temas clássicos, Bose ressaltou também a importância do tema na teoria dos códigos corretores de erros, a qual foi posteriormente muito estudada. Hoje em dia, aplicações são conhecidas também em áreas como criptografia, comunicação ótica, sistemas de armazenamento, comunicação sem fio, entre outras (recomendamos ver [7]).

Apesar da grande importância da teoria de designs combinatórios dentro da matemática, destacamos que este capítulo descreve apenas alguns resultados relevantes para a nossa pesquisa e tem caráter introdutório nesta monografia. Neste sentido, antecipamos que todos os resultados presentes aqui já são conhecidos na literatura. Assim, omitiremos a maioria das demonstrações e citaremos apenas referências onde tais provas podem ser encontradas. Para o leitor interessado em um conhecimento mais aprofundado sobre esta rica teoria, indicamos os livros [7, 44, 76, 80].

2.1 Conceito e resultados básicos

Muitos conceitos matemáticos podem ser moldados em termos de conjuntos. Por exemplo, na geometria euclidiana, as retas e os planos podem ser vistos como conjuntos de pontos do espaço que satisfazem certas propriedades geométricas. Já em topologia, os abertos também são conjuntos de pontos satisfazendo certos axiomas. Por sua vez, na teoria dos grafos, as arestas são conjuntos formados por dois vértices e os vértices nada mais são do que um conjunto não-vazio finito qualquer. O conceito de design segue este mesmo modelo, isto é, também é definido em termos de conjuntos.

Definição 2.1. Dado X um conjunto finito e β uma família de subconjuntos de X . Um par (X, β) é dito ser um (v, k, λ) -*design* se:

- (i) X possui v elementos. Os elementos de X são chamados de *pontos*.
- (ii) Cada $B \in \beta$ satisfaz $|B| = k$. Os elementos de β são chamados de *blocos*.
- (iii) Cada par de elementos de X está contido em exatamente λ blocos.

Além disso, usualmente denotamos por b o número de blocos do design.

Quando o conjunto X e os parâmetros v, k e λ estiverem implícitos ou forem irrelevantes no contexto, chamaremos um (v, k, λ) -design simplesmente de *design*.

A existência de algumas classes de designs é muito relevante ao estimar certos números de Ramsey, conforme podemos ver em [19, 36, 55, 62, 63, 64]. Exibiremos alguns resultados do gênero no Capítulo 3, resultados estes publicados em [68]. Destacamos que nossa pesquisa neste âmbito engloba também o trabalho [69], no qual apresentamos conexões de designs com a versão multipartida por tamanhos dos números de Ramsey, mas conforme mencionado, não abordaremos esta versão nesta tese.

Observação 2.2. Algumas referências definem o termo *design* em um contexto mais geral, como por exemplo, substituindo a propriedade (ii) pela propriedade:

- (ii') Cada subconjunto com t elementos de X está contido em exatamente λ blocos.

Neste caso, o par (X, β) é chamado de t - (v, k, λ) -*design*. No entanto, no decorrer do nosso texto, trabalharemos apenas com o caso em que $t = 2$.

Vejamos dois simples exemplos.

Exemplo 2.3. Considere $X = \{1, 2, \dots, 7\}$ e $\beta = \{B_1, B_2, \dots, B_7\}$ a família de subconjuntos de X definida por $B_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_2 = \{3, 4, 5\}$, $B_3 = \{1, 5, 6\}$, $B_4 = \{1, 4, 7\}$, $B_5 = \{2, 5, 7\}$, $B_6 = \{3, 6, 7\}$ e $B_7 = \{2, 4, 6\}$. Observe que cada um desses conjuntos pode ser representado por uma das retas ou pelo círculo na Figura 2.1. Tal ilustração é conhecida como *Plano de Fano* e, por simples inspeção, podemos verificar que corresponde a um $(7,3,1)$ -design.

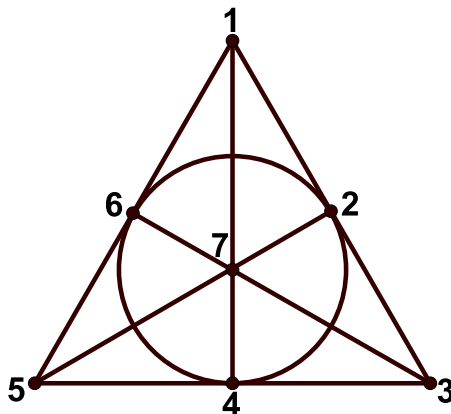


Figura 2.1: Plano de Fano

Exemplo 2.4. Considere o par (X, β) definido por

$$\begin{aligned}
 X &= \{1, 2, \dots, 9\}, & \beta &= \{B_1, B_2, \dots, B_{12}\}, \\
 B_1 &= \{1, 2, 3\}, & B_2 &= \{4, 5, 6\}, & B_3 &= \{7, 8, 9\}, & B_4 &= \{1, 4, 7\}, \\
 B_5 &= \{2, 5, 7\}, & B_6 &= \{3, 6, 9\}, & B_7 &= \{1, 5, 9\}, & B_8 &= \{2, 6, 7\}, \\
 B_9 &= \{3, 4, 8\}, & B_{10} &= \{1, 6, 8\}, & B_{11} &= \{2, 4, 9\} & \text{e} & B_{12} &= \{3, 5, 7\}.
 \end{aligned}$$

Também por inspeção, verifica-se que (X, β) é um $(9,3,1)$ -design.

Definimos um (v, k, λ) -design para inteiros positivos arbitrários, no entanto, nos parece ser intuitivo que nem sempre é possível construir designs com parâmetros arbitrários, deste modo, é natural o questionamento abaixo.

Questão 2.5. Para quais parâmetros v, k e λ , existe um (v, k, λ) -design?

Esta pergunta, embora simples, é uma das mais intrigantes na teoria e tem fundamental importância devido às inúmeras aplicações.

Embora não exista uma classificação de quando existe e quando não existe um (v, k, λ) -design para valores v, k e λ arbitrários, há na literatura algumas condições necessárias e outras suficientes (ver [44] e [80]). Citamos uma condição necessária abaixo.

Proposição 2.6. [44] Suponha que β é um (v, k, λ) -design com b blocos. Então todo ponto está contido em um mesmo número de blocos, digamos r blocos. Além disso, r satisfaz as equações

$$r(k - 1) = \lambda(v - 1) \quad (2.1)$$

$$bk = vr. \quad (2.2)$$

A equação (2.1) nos garante, por exemplo, que se λ é ímpar e v é par, então para que exista um (v, k, λ) -design é necessário que k seja par. Deste modo, não existe um $(2m, 2n+1, 2s+1)$ -design para quaisquer inteiros positivos m, n e s .

Para qualquer conjunto finito X , observe que $(X, \{X\})$ é um (v, k, λ) -design onde $v = k = |X|$ e $\lambda = 1$. Chamamos tal design de *trivial*. Note que se $|X| \geq 2$, o design trivial possui mais pontos do que blocos. Será que isto ocorre nos designs não triviais também? A resposta é negativa, pois designs não triviais satisfazem a proposição abaixo.

Proposição 2.7. (Desigualdade de Fisher [44]) O número de blocos de um design não trivial é maior ou igual ao número de pontos.

Conforme podemos ver no Exemplo 2.3, existem designs onde vale a igualdade na Desigualdade de Fisher. Designs com esta propriedade são denominados *designs simétricos*, isto é, um design é dito simétrico se possui o mesmo número de pontos e blocos.

Designs simétricos recebem um tratamento especial dentro da teoria de designs. O simples fato de termos $v = b$ garante uma série de propriedades adicionais que não valem nos demais designs. Uma delas se refere à cardinalidade da interseção de blocos, conforme segue no próximo resultado.

Proposição 2.8. [76] Dado (X, β) um (v, k, λ) -design simétrico com $\beta = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$, vale a igualdade $|B_i \cap B_j| = \lambda$ para quaisquer blocos distintos B_i e B_j .

O resultado acima nos garante que o número de elementos na interseção de dois blocos arbitrários de um design simétrico é sempre o mesmo. Em particular, esta propriedade é atingida no Exemplo 2.3. Por outro lado, no design não-simétrico do Exemplo 2.4, a cardinalidade da interseção de dois blocos pode ser 0 ou 1, isto é, a propriedade é “quase atingida”. Neste caso, dizemos que o design é quase-simétrico. Em termos mais rigorosos, temos a definição abaixo.

Definição 2.9. Um (v, k, λ) -design é dito ser *quase-simétrico* se existem dois valores x e y tais que $|B_i \cap B_j| = x$ ou $|B_i \cap B_j| = y$ para quaisquer blocos distintos B_i e B_j .

Conforme mencionado no início deste capítulo, não discutiremos a fundo os resultados da teoria de designs. Neste sentido, por enquanto nos limitamos apenas em informar que designs quase-simétricos estão intimamente ligados com outros conceitos combinatórios tais como planos afins e grafos fortemente regulares (ver [34, 44, 58]). Por sua vez, o conceito de grafo fortemente regular servirá como base para alguns dos nossos resultados no Capítulo 3, incluindo aqueles em [68] e [69]. Outra estrutura que usaremos em nossos resultados é a matriz de Hadamard, a qual descreveremos brevemente na próxima seção.

2.2 Matriz de Hadamard

A desigualdade de Fisher (Proposição 2.7) afirma que o número b de blocos em um design não trivial é sempre maior ou igual ao número de pontos v deste design. Além disso, vimos que existem casos onde a igualdade é atingida, como no $(7,3,1)$ -design exibido no Exemplo 2.3. Visto que designs simétricos satisfazem $b = v$, então podemos caracterizar esta classe de designs a partir de uma simples aplicação da Proposição 2.6.

Proposição 2.10. [76] Um (v, k, λ) -design é simétrico se, e somente se,

$$k(k - 1) = \lambda(v - 1). \quad (2.3)$$

Pela proposição acima, dois dos três parâmetros v , k e λ de um design simétrico são livres e o terceiro é determinado pela igualdade (2.3).

Talvez a categoria mais especial de designs simétricos seja o caso $\lambda = 1$, isto é, designs com parâmetros $(k(k - 1) + 1, k, 1)$. Esta classe de designs corresponde a uma estrutura muito famosa no estudo de geometrias finitas chamada de *plano projetivo*. Tal caracterização decorre do fato de (X, β) ser um $(v, k, 1)$ -design com $k > 2$ se, e somente se, (X, β) é um plano projetivo (ver Teorema 2.21 do livro [44]).

Existem várias conexões entre planos projetivos e números de Ramsey, como por exemplo, as estabelecidas em [17, 19, 36, 55, 63]. Já estudamos brevemente algumas destas relações

em [66]. No entanto, no nosso trabalho atual não abordaremos planos projetivos, mas sim outra classe de designs simétricos, as chamadas matrizes de Hadamard.

2.2.1 Definição algébrica

Definição 2.11. Uma matriz quadrada H de ordem n é dita ser uma *matriz de Hadamard* quando:

- (i) toda entrada de H é igual a 1 ou -1;
- (ii) $HH^T = nI_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

Visto que as entradas de H devem ser formadas pelos elementos 1 e -1, então o item (ii) da definição acima pode ser substituído pela seguinte condição:

- (ii') os vetores formados pelas linhas de H são dois a dois ortogonais, isto é, possuem produto escalar nulo.

Outra propriedade que decorre ainda é:

- (ii'') os vetores formados pelas colunas de H são dois a dois ortogonais.

A título de exemplificação, exibimos abaixo matrizes de Hadamard de ordens 1, 2 e 4, respectivamente. Destacamos que com ordem 3 não existe.

Exemplo 2.12.

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Segue das propriedades (ii') e (ii'') que a permutação de linhas ou de colunas em uma matriz de Hadamard ainda a deixa de Hadamard. Do mesmo modo, se multiplicarmos uma linha ou uma coluna de uma matriz de Hadamard por -1 , então a matriz resultante também continua sendo de Hadamard. Neste sentido, surge o conceito de normalização.

Definição 2.13. Uma matriz de Hadamard é dita ser *normalizada* se todas as entradas da primeira linha e da primeira coluna desta matriz são iguais a 1.

Observe que as matrizes de ordem 1 e 2 no Exemplo 2.12 são normalizadas, por sua vez, a matriz de ordem 4 não é. No entanto, podemos a normalizar multiplicando a primeira e a terceira linha por -1, gerando

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

O fato de podermos normalizar qualquer matriz de Hadamard assegura que existe uma matriz de Hadamard de ordem n se, e somente se, existe uma matriz de Hadamard normalizada de ordem n . Um questionamento natural é dado abaixo.

Questão 2.14. Para quais valores de n existe uma matriz de Hadamard (normalizada) de ordem n ?

Como os vetores formados pelas linhas distintas de uma matriz de Hadamard devem ter produto escalar nulo, então uma condição imediata é que, para $n > 1$, a ordem da matriz não pode ser ímpar, isto já explica a não existência de uma matriz de Hadamard de ordem 3. Utilizando argumento um pouco mais elaborado, é possível mostrar que se existe uma matriz de Hadamard de ordem $n \geq 3$, então $n \equiv 0 \pmod{4}$. Acredita-se que a recíproca deste resultado é verdadeira. Na verdade, esta é uma emblemática conjectura que perdura a várias décadas.

Conjectura 2.15. (Jacques Hadamard, 1893) Para $n \geq 3$, existe uma matriz de Hadamard de ordem n se, e somente se, $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Embora não saibamos sobre a existência de uma matriz de Hadamard de ordem n para n (múltiplo de 4) arbitrário, na literatura existem construções de várias classes, algumas das principais exibidas por Paley [60]. Os casos remanescentes costumam ser tratados de modo isolado. Neste sentido, os artigos [26, 27, 48] exibem matrizes de Hadamard de ordem 956, 764 e 428, respectivamente. Segundo [27], os únicos valores $n \leq 1000$ para os quais não se sabe ainda a veracidade da conjectura são $n=668, 716$ e 892 . Para o leitor mais interessado no assunto, sugerimos a leitura de [75].

2.2.2 Caracterização via designs simétricos

Seja (X, β) um (v, k, λ) -design com $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ e $\beta = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$. Podemos associar uma *matriz de incidência* a este design indexando as linhas dessa matriz pelos b blocos de β e as colunas pelos v elementos de X . Neste caso, para cada $B_i \in \beta$ e para cada $x_j \in X$, a entrada $a_{i,j}$ da matriz é definida por

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j \in B_i; \\ 0 & \text{se } x_j \notin B_i. \end{cases}$$

Em particular, a matriz de incidência de um design simétrico é quadrada pois, neste caso, $b = v$. Vejamos um exemplo simples.

Exemplo 2.16. Considere (X, β) o $(7, 3, 1)$ -design exibido no Exemplo 2.3. A matriz de incidência deste design é, a menos de permutação de linhas ou colunas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que se trocarmos 0 por -1 e adicionarmos uma primeira linha e uma primeira coluna formado apenas pelo elemento 1, obtemos a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que os vetores formados pelas linhas da matriz acima são dois a dois ortogonais, gerando assim uma matriz de Hadamard normalizada de ordem 8. Um questionamento natural segue.

Questão 2.17. A construção da matriz de Hadamard acima foi coincidência ou existe alguma forte relação com designs?

A construção acima não é um caso isolado. De modo geral, se considerarmos a matriz de incidência de um $(4t - 1, 2t - 1, t - 1)$ -design (simétrico), trocarmos o elemento 0 por -1 e adicionarmos uma linha e uma coluna de 1's a esta matriz, então a matriz quadrada de ordem $4t$ resultante é uma matriz de Hadamard. Um fato interessante é que a recíproca também é verdadeira. Isto é, seja H uma matriz de Hadamard de ordem $4t$ na forma normalizada e A uma matriz quadrada com ordem $4t - 1$ de modo que

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Se trocarmos todos as estradas -1 da matriz A por 0, a matriz resultante será a matriz de incidência de um $(4t - 1, 2t - 1, t - 1)$ -design.

Em termos mais precisos, seja J a matriz quadrada de ordem $4t - 1$ com todas as entradas sendo 1. Considere duas matrizes D e A com esta mesma ordem tais que

$$2D = A + J. \tag{2.4}$$

É possível mostrar algebricamente que D é a matriz de incidência de um $(4t-1, 2t-1, t-1)$ -design se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

é uma matriz de Hadamard (recomendamos ver [77]). Em particular, esta caracterização assegura o seguinte resultado.

Teorema 2.18. [77] Existe um $(4t-1, 2t-1, t-1)$ -design (simétrico) se, e somente se, existe uma matriz de Hadamard de ordem $4t$.

O resultado acima permite tratarmos matrizes de Hadamard como um caso particular de designs simétricos. No início desta subseção, já construímos uma matriz de Hadamard via design exibido no Exemplo 2.3. A título de exemplificação, agora faremos o inverso, isto é, construiremos um design a partir de uma matriz de Hadamard.

Exemplo 2.19. Considere H a matriz de Hadamard normalizada de ordem 12 abaixo

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eliminando a primeira linha e a primeira coluna desta matriz, obtemos uma matriz quadrada

A de ordem 11. Aplicando equação (2.4), chegamos na matriz D abaixo, a qual é a matriz de incidência de um $(11,5,2)$ -design (simétrico)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.3 Matriz de Hadamard simétrica

De acordo com a Conjectura 2.15, acredita-se existir uma matriz de Hadamard de ordem $4t$ para todo inteiro positivo t . Embora esta conjectura ainda perdure há mais de 100 anos, existem na literatura muitas classes já conhecidas. Tanto que, para $t \leq 250$, só não se conhece ainda uma matriz de Hadamard de ordem $4t$ para $t = 167, 179, 223$. Já para $t \leq 500$, segundo [27], a conjectura ainda está aberta para 13 casos:

$$t = 167, 179, 223, 251, 283, 311, 347, 359, 419, 443, 479, 487, 491. \quad (2.5)$$

Coincidência ou não, todos estes números são primos e congruentes a 3 (mod 4).

Embora menos badalada, existe uma versão mais forte para a conjectura de Hadamard.

Conjectura 2.20. Para $n \geq 3$, existe uma matriz de Hadamard *simétrica* de ordem n se, e somente se, $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Por ser uma versão mais forte, é natural que o número de casos abertos na Conjectura 2.20 seja maior do que na Conjectura 2.15. Segundo [3], é conhecida uma matriz de Hadamard

Tabela 2.1: Construções de matrizes de Hadamard simétricas

ordem	hipótese
2^t	t inteiro positivo
$p^t + 1$	$p^t \equiv 3 \pmod{4}$ potência de primo
$2(p^t + 1)$	$p^t \equiv 1 \pmod{4}$ potência de primo
$(a - 1)^2$	a e $a - 2$ potências de primos
$4k^2$	existe um $(2k^2 - k, k, 1)$ -design
h^2	h a ordem de uma matriz de Hadamard
k	k o produto da ordem de outras matrizes de Hadamard simétricas

simétrica de ordem $4t$ para todo inteiro positivo $t \leq 100$, exceto para 6 casos:

$$t = 59, 65, 67, 81, 89, 93.$$

Em contraste com os valores que exibimos em (2.5), os menores valores em aberto para esta versão não são todos primos e nem todos congruentes a 3 (mod 4). Porém, são todos números ímpares.

Em nossa pesquisa, utilizamos fortemente como hipótese a existência de classes de designs para determinar com exatidão certos números de Ramsey. Dentre estas classes, inclui-se matrizes de Hadamard. No entanto, as propriedades desta classe de designs por si só não foram suficientes para o êxito em nossos resultados. Felizmente, conforme [68], veremos no Capítulo 3 que a hipótese adicional de simetria na matriz em questão permite a construção de classes exatas para os números de Ramsey. Neste sentido, vale a pena destacar algumas construções de matrizes de Hadamard simétricas já conhecidas na literatura. Seguem na Tabela 2.1 algumas classes listadas no apêndice em [77]. Ressaltamos ainda que existem muitas outras construções que não colocamos nesta tabela por envolver conceitos não trabalhados aqui nesta tese. Para o leitor interessado em uma leitura mais aprofundada sobre este tema, sugerimos a referência [77].

Números de Ramsey via designs combinatórios

Nosso objetivo agora é estudar o número de Ramsey $M_s(K_{2,n}; 2)$ bem como algumas de suas conexões com certos designs combinatórios. Mais especificamente, usaremos propriedades de matrizes de Hadamard e grafos fortemente regulares para construir uma estimativa inferior para o $M_s(K_{2,n}; 2)$. Após isto, iremos em busca de estimativas superiores para verificar o quão perto nossos resultados estão do valor exato. Veremos que as estimativas inferior e superior obtidas diferem em apenas uma unidade. Deste modo, qualquer refinamento desses limitantes, por menor que seja, produz a computação de valores exatos. Neste sentido, buscaremos condições (hipóteses) para o refinamento do limitante superior em uma unidade e assim produzir classes exatas. Deste modo, ficará provado que nossa construção é, sob certas hipóteses, ótima.

Destacamos que todos os resultados não referenciados nas duas primeiras seções deste capítulo constam no artigo [68].

3.1 Construção do limite inferior

Muitas das estimativas que conhecemos para os números de Ramsey foram obtidas a partir de certas classes de designs combinatórios, tais como planos projetivos ([46, 63]), design resolúveis ([29]), grafos fortemente regulares ([30]), conjuntos diferença ([20]), designs que admitem polaridade ([35, 64]), entre outros. Para o leitor interessado em maiores detalhes sobre algumas destas conexões, salientamos que várias delas são brevemente descritas em

[37, 65]. Destacamos um destes célebres resultados no teorema abaixo.

Teorema 3.1. (Exoo, Harborth e Mengersen [30]) Para todo inteiro $n \geq 2$, temos

$$r(K_{2,n}; 2) = 4n - 2 \text{ se, e somente se, existe um } (4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)\text{-GFR.}$$

Em particular, o teorema acima afirma que a existência de um grafo fortemente regular com parâmetros $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ produz a estimativa $M_1(K_{2,n}; 2) \geq 4n - 2$. Tal fato pode ser generalizado para o número $M_s(K_{2,n}; 2)$. Mas neste caso, apenas a existência de grafos fortemente regulares não é capaz de produzir boas estimativas. No entanto, a combinação de tal estrutura com matrizes de Hadamard faz com que a existência destas duas classes de designs produza limitantes ótimos. Acreditamos que esta construção pode ser encarada como o principal resultado desta monografia. De fato, segundo nossas pesquisas, esta parece ser a primeira vez onde uma classe exata para um número de Ramsey é produzida a partir da existência de não apenas uma, mas sim duas classes de designs.

Para construção do limite inferior, faremos uso dos dois lemas abaixo.

Lema 3.2. Seja G um $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR. Dados vértices distintos a e b , denote

$$G_1 = \{c \in V(G) - \{a, b\} : \{a, c\} \in E(G), \{b, c\} \in E(G)\};$$

$$G_2 = \{c \in V(G) - \{a, b\} : \{a, c\} \notin E(G), \{b, c\} \notin E(G)\};$$

$$G_3 = \{c \in V(G) - \{a, b\} : \{a, c\} \in E(G), \{b, c\} \notin E(G)\};$$

$$G_4 = \{c \in V(G) - \{a, b\} : \{a, c\} \notin E(G), \{b, c\} \in E(G)\}.$$

Temos $|G_i| \leq n - 1$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

Demonstração: Denote por \overline{G} o complementar do grafo G em relação ao grafo completo K_{4n-3} . Pela hipótese e pelo Corolário 1.21, G e \overline{G} são $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR. Deste modo, convém dividirmos a demonstração em dois casos.

Caso 1: Se $\{a, b\} \in E(G)$. Então o fato de G ser um $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR implica que $|G_1| = n - 2$. Além disso, como $\{a, b\} \notin E(\overline{G})$ e \overline{G} também é um $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR, temos que $|G_2| = n - 1$. Sendo G um grafo $(2n - 2)$ -regular,

$$|G_1| + |G_3| + |\{b\}| = d_G(a) = 2n - 2 \quad \text{e} \quad |G_1| + |G_4| + |\{a\}| = d_G(b) = 2n - 2,$$

donde concluimos que $|G_3| = |G_4| = n - 1$.

Caso 2: De modo análogo, se tivermos $\{a, b\} \notin E(G)$, então $|G_1| = n - 1$ e $|G_2| = n - 2$. Além disso, como $|G_1| + |G_3| = d_G(a) = 2n - 2$ e $|G_1| + |G_4| = d_G(b) = 2n - 2$, obtemos $|G_3| = |G_4| = n - 1$. \square

Lema 3.3. Seja $M = (m_{i,j})$ uma matriz de Hadamard de ordem m . Dados inteiros distintos i, j com $1 \leq i, j \leq m$, denote

$$\begin{aligned} I_1 &= \{k \in \{1, 2, \dots, m\} : m_{i,k} = 1 \text{ e } m_{j,k} = 1\}; \\ I_2 &= \{k \in \{1, 2, \dots, m\} : m_{i,k} = -1 \text{ e } m_{j,k} = -1\}; \\ I_3 &= \{k \in \{1, 2, \dots, m\} : m_{i,k} = 1 \text{ e } m_{j,k} = -1\}; \\ I_4 &= \{k \in \{1, 2, \dots, m\} : m_{i,k} = -1 \text{ e } m_{j,k} = 1\}. \end{aligned}$$

Temos $|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| = m$ e $|I_1| + |I_2| = m/2$.

Demonstração: Note que $\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ é uma partição do conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$. Assim,

$$|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| = m. \quad (3.1)$$

Além disso, como M é uma matriz de Hadamard e $i \neq j$, temos que $\sum_{k=1}^m m_{i,k} \cdot m_{j,k} = 0$. Portanto,

$$|I_1| + |I_2| - |I_3| - |I_4| = 0. \quad (3.2)$$

Somando as igualdades (3.1) e (3.2), concluimos que $|I_1| + |I_2| = m/2$. \square

De posse dos dois lemas acima, estamos aptos a demonstrar uma das nossas principais construções, conforme resultado abaixo.

Teorema 3.4. Suponha que exista um $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR e uma matriz de Hadamard simétrica de ordem m , então

$$M_m(K_{2, m(n-1)+1}; 2) \geq 4n - 2.$$

Demonstração: Seja G um $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR e $M = (m_{i,j})$ uma matriz de Hadamard simétrica de ordem m . Denote os vértices de G por $\{1, 2, \dots, 4n - 3\}$ e as $4n - 3$ classes

de vértices do grafo $K_{(4n-3) \times m}$ por $L_1, L_2, \dots, L_{4n-3}$ onde $L_i = \{(i, 1), (i, 2), \dots, (i, m)\}$ para cada $i = 1, 2, \dots, 4n - 3$.

Considere a bicoloração de arestas $\psi : E(K_{(4n-3) \times m}) \longrightarrow \{-1, 1\}$ definida por

$$\psi(\{(a, i), (b, j)\}) = \begin{cases} m_{i,j} & \text{se } \{a, b\} \in E(G); \\ -m_{i,j} & \text{se } \{a, b\} \notin E(G). \end{cases}$$

Observe que ψ está bem definida pois M é uma matriz simétrica com $m_{i,j} \in \{-1, 1\}$ para todo $1 \leq i, j \leq m$.

Afirmção: Na bicoloração ψ , dois vértices distintos do $K_{(4n-3) \times m}$ estão simultaneamente ligados a no máximo outros $m(n - 1)$ vértices por uma mesma cor.

Dados vértices distintos $v_1 = (a, i)$ e $v_2 = (b, j)$ e uma cor $w \in \{-1, 1\}$, seja $\delta(v_1, v_2, w)$ o número de vértices do $K_{(4n-3) \times m}$ que estão simultaneamente ligados a $v_1 = (a, i)$ e $v_2 = (b, j)$ pela cor w . Devemos mostrar que $\delta(v_1, v_2, w) \leq m(n - 1)$. Para isto, dividiremos a demonstração em três casos:

- (i) $a \neq b$ e $i = j$;
- (ii) $a = b$ e $i \neq j$;
- (iii) $a \neq b$ e $i \neq j$.

Caso (i) Vamos estimar a quantidade de vértices (c, k) que estão simultaneamente ligados a $v_1 = (a, i)$ e $v_2 = (b, i)$ pela cor w . Se $w = m_{i,k}$, devemos ter $\{a, c\}, \{b, c\} \in E(G)$. Por outro lado, se $w = -m_{i,k}$, devemos ter $\{a, c\}, \{b, c\} \notin E(G)$. Mas G é um $(4n-3, 2n-2, n-2, n-1)$ -GFR, assim, de ambas as formas temos no máximo $n - 1$ possibilidades para c e, portanto, no máximo $m(n - 1)$ possibilidades para (c, k) . Isto garante que $\delta(v_1, v_2, w) \leq m(n - 1)$.

Caso (ii) Considerando a notação do Lema 3.3, temos que o número de vértices simultaneamente ligados a $v_1 = (a, i)$ e $v_2 = (a, j)$ pela cor w é $|I_1|(2n - 2) + |I_2|(2n - 2)$ pois o grau do vértice a tanto em G quanto em \overline{G} é $2n - 2$. Assim, pelo Lema 3.3,

$$\delta(v_1, v_2, w) = (|I_1| + |I_2|)(2n - 2) = m(n - 1).$$

Caso (iii) Se $w = 1$, para que um vértice (c, k) esteja simultaneamente ligado a $v_1 = (a, i)$ e $v_2 = (b, j)$ pela cor w é necessário e suficiente que um dos casos abaixo ocorra:

- a) $\{a, c\} \in E(G)$, $\{b, c\} \in E(G)$, $m_{i,k} = 1$ e $m_{j,k} = 1$;
- b) $\{a, c\} \notin E(G)$, $\{b, c\} \notin E(G)$, $m_{i,k} = -1$ e $m_{j,k} = -1$;
- c) $\{a, c\} \in E(G)$, $\{b, c\} \notin E(G)$, $m_{i,k} = 1$ e $m_{j,k} = -1$;
- d) $\{a, c\} \notin E(G)$, $\{b, c\} \in E(G)$, $m_{i,k} = -1$ e $m_{j,k} = 1$.

Deste modo, usando as notações dos Lemas 3.2 e 3.3, segue que

$$\delta(v_1, v_2, 1) = |G_1||I_1| + |G_2||I_2| + |G_3||I_3| + |G_4||I_4|.$$

Mas o Lema 3.2 garante que $|G_i| \leq (n - 1)$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$ e o Lema 3.3 afirma que $|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| = m$, logo

$$\delta(v_1, v_2, 1) \leq (n - 1)(|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4|) = m(n - 1).$$

Por outro lado, se $w = -1$, para que o vértice (c, k) esteja simultaneamente ligado a $v_1 = (a, i)$ e $v_2 = (b, j)$ pela cor w é necessário e suficiente que um dos casos abaixo ocorra:

- a) $\{a, c\} \in E(G)$, $\{b, c\} \in E(G)$, $m_{i,k} = -1$ e $m_{j,k} = -1$;
- b) $\{a, c\} \notin E(G)$, $\{b, c\} \notin E(G)$, $m_{i,k} = 1$ e $m_{j,k} = 1$;
- c) $\{a, c\} \in E(G)$, $\{b, c\} \notin E(G)$, $m_{i,k} = -1$ e $m_{j,k} = 1$;
- d) $\{a, c\} \notin E(G)$, $\{b, c\} \in E(G)$, $m_{i,k} = 1$ e $m_{j,k} = -1$.

Pelo mesmo argumento utilizado quando $w = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta(v_1, v_2, -1) &= |G_1||I_2| + |G_2||I_1| + |G_3||I_4| + |G_4||I_3| \\ &\leq (n - 1)(|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4|) \\ &= m(n - 1). \end{aligned}$$

Em todos os possíveis casos, garantimos que $\delta(v_1, v_2, w) \leq m(n - 1)$. Portanto, na bicoloração ψ não há $K_{2, m(n-1)+1}$ monocromático. Isto mostra que $M_m(K_{2, m(n-1)+1}; 2) \geq 4n - 2$. \square

3.2 Construção do limite superior

Sabemos que existe uma matriz de Hadamard simétrica M de ordem 1, a saber, $M = (1)$. Deste modo, o Teorema 3.4 afirma que a existência de um grafo fortemente regular com

parâmetros $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ garante o limitante $M_1(K_{2,n}; 2) \geq 4n - 2$. Por outro lado, já sabemos pelo Teorema 3.1 que este limitante é ótimo. Neste sentido, surge um questionamento natural: será que a construção exibida no Teorema 3.4 é ótima para m arbitrário ou apenas $m = 1$?

Em busca de respostas para esta pergunta, podemos utilizar o próximo resultado como ferramenta. Tal resultado foi inicialmente apresentado na dissertação [66] e posteriormente publicado em [68]. Neste sentido, omitiremos sua demonstração.

Teorema 3.5. Dados $s, k, n_1, n_2, \dots, n_k$ inteiros positivos com $k \geq 2$. Se c é um inteiro positivo tal que

$$kcs \binom{\frac{(c-1)s}{k}}{2} > \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \binom{cs}{2} \quad (3.3)$$

então $M_s(K_{2,n_1}, K_{2,n_2}, \dots, K_{2,n_k}) \leq c$.

Como consequência imediata da ferramenta acima, as seguintes estimativas foram obtidas em [66] e [68].

Teorema 3.6. Dados k, n_1, n_2, \dots, n_k inteiros positivos com $k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Valem as estimativas:

- (i) $M_1(K_{2,n_1}, K_{2,n_1}, \dots, K_{2,n_1}) \leq k(S - k + 1) + 2$.
- (ii) Para todo $s \geq 2$, $M_s(K_{2,n_1}, K_{2,n_1}, \dots, K_{2,n_1}) \leq \left\lceil \frac{k(S - k + 1) - 1}{s} \right\rceil + 2$.

Vimos no Teorema 3.4 que, sob certas hipóteses nas variáveis m e n , vale a estimativa

$$4n - 2 \leq M_m(K_{2,m(n-1)+1}; 2). \quad (3.4)$$

Por outro lado, uma simples aplicação do Teorema 3.6 assegura que

$$M_m(K_{2,m(n-1)+1}; 2) \leq 4n - 1 \quad (3.5)$$

para todo $m \geq 2$. Como estes limites diferem em apenas uma unidade, então para cada instância m e n fixada (satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.4), ou vale a igualdade na desigualdade (3.4) ou na desigualdade (3.5). Note que para $m = 1$, o Teorema 3.1 garante que a igualdade válida é no limite inferior. Neste sentido, surge o indagação: será que é

possível refinar em uma unidade o limite superior (3.5) ou o limite inferior só vale quando $m = 1$?

O próximo resultado nos auxiliará a mostrar que se m é suficientemente grande em relação a n , então a estimativa (3.5) pode sim ser melhorada.

Proposição 3.7. Dados inteiros $s, n \geq 2$ tais que $s \geq 2\sqrt{n} + 1$, temos

$$M_s(K_{2,n}; 2) \leq \left\lceil \frac{4n - 4}{s} \right\rceil + 2.$$

Demonstração: Denote $c_0 = \lceil (4n - 4)/s \rceil + 2$. Pelo Teorema 3.5, é suficiente mostrarmos que $c = c_0$ satisfaz a inequação

$$cs \binom{\frac{(c-1)s}{2}}{2} > (n-1) \binom{cs}{2},$$

ou equivalentemente,

$$s^2c^2 - (2s + 4n - 2)sc + s^2 + 2s + 4n - 4 > 0.$$

Sejam $\beta = 2s + 4n - 2$ e $\gamma = s^2 + 2s + 4n - 4$. Considere a função $f(c) = s^2c^2 - \beta sc + \gamma$ para $c \in \mathbb{R}$. Precisamos mostrar que $f(c_0) > 0$. Como f é uma função quadrática cuja maior raiz é $(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma})/(2s)$, então basta mostrarmos que

$$c_0 > (\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma})/(2s).$$

A hipótese $s \geq 2\sqrt{n} + 1$ implica que $(s - 1)^2 \geq 4n$. Conseqüentemente, a inequação $s^2 - 2s - 4n + 15/4 \geq 0$ é válida. Equivalentemente, $(\beta - 4)^2 \geq \beta^2 - 4\gamma + 1$. Combinando os argumentos acima, verifica-se que

$$c_0 = \left\lceil \frac{\beta + \sqrt{(\beta - 4)^2}}{2s} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma + 1}}{2s} \right\rceil > \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2s}.$$

Portanto, a prova está completa. \square

De posse do resultado acima, conseguimos melhorar a estimativa (3.5) em uma unidade quando $m \geq 4n$, conforme segue.

Corolário 3.8. Dados inteiros n, m com $m \geq 4n$, temos

$$M_m(K_{2,m(n-1)+1}; 2) \leq 4n - 2.$$

Demonstração: Basta verificarmos que $m \geq 2\sqrt{m(n-1)+1}+1$ e aplicarmos a Proposição 3.7, isto é, basta mostrarmos que $(m-1)^2 \geq 4m(n-1)+4$. Mas isto é claramente válido pois $m \geq 4n$. \square

Uma combinação do Teorema 3.4 com o Corolário 3.8 produz um dos principais resultados do artigo [68], resultado este retratado abaixo.

Teorema 3.9. Suponha que exista um $(4n-3, 2n-2, n-2, n-1)$ -GRF e uma matriz de Hadamard simétrica de ordem m com $m \geq 4n$, então

$$M_m(K_{2,m(n-1)+1}; 2) = 4n - 2.$$

Segundo os Teoremas 3.1 e 3.9, a existência de um $(4n-3, 2n-2, n-2, n-1)$ -GRF e uma matriz de Hadamard simétrica de ordem m produz a igualdade $M_m(K_{2,m(n-1)+1}; 2) = 4n - 2$ para $m = 1$ e para $m \geq 4n$, respectivamente. Mas o que será que acontece quando m está no intervalo $1 < m < 4n$? Neste caso, as estimativas inferior e superior exibidas nos Teoremas 3.4 e 3.6 diferem em uma unidade e o Corolário 3.8 não é aplicável. No entanto, acreditamos que a construção do Teorema 3.4 também é ótima neste caso, isto é, temos a seguinte conjectura.

Conjectura 3.10. Suponha que exista um $(4n-3, 2n-2, n-2, n-1)$ -GRF e uma matriz de Hadamard simétrica de ordem m , então

$$M_m(K_{2,m(n-1)+1}; 2) = 4n - 2.$$

3.3 Classes exatas

Observe que a hipótese do Teorema 3.9 envolve grafos fortemente regulares e matrizes de Hadamard. Por sua vez, conforme já mencionado no Capítulo 2, tais estruturas estão intimamente ligadas com designs quase-simétricos e designs simétricos, respectivamente. Neste

sentido, nosso objetivo agora é determinar algumas classes exatas numéricas para os números de Ramsey utilizando como ferramenta o Teorema 3.9 juntamente com classes de designs já conhecidas na literatura.

Vimos na Proposição 1.22 que existe um grafo fortemente regular com parâmetros $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ quando $4n - 3$ é potência de primo. Deste modo, uma aplicação do Teorema 3.9 assegura o resultado abaixo.

Teorema 3.11. Sejam p, r e α inteiros positivos com p primo e $p^\alpha \equiv 1 \pmod{4}$. Se existe uma matriz de Hadamard simétrica de ordem $4r$ com $4r > p^\alpha$, então

$$M_{4r}(K_{2,r(p^\alpha-1)+1}; 2) = p^\alpha + 1.$$

Demonstração. Seja $n = (p^\alpha + 3)/4$ e $m = 4r$. Então n é um inteiro com $4n - 3$ potência de primo, logo a Proposição 1.22 assegura que existe um $(4n - 3, 2n - 2, n - 2, n - 1)$ -GFR. Além disso, as hipóteses $4r > p^\alpha$ e $p^\alpha \equiv 1 \pmod{4}$ implicam que $m = 4r \geq p^\alpha + 3 = 4n$. Portanto, a demonstração segue do Teorema 3.9. \square

Jacques Hadamard conjecturou em 1893 que para todo inteiro positivo r existe uma matriz de Hadamard de ordem $4r$. Vimos na Conjectura 2.20 uma versão mais forte na qual afirma existir uma matriz de Hadamard simétrica com tal ordem. De acordo com [3], o menor valor de r para o qual ainda não se sabe se existe uma matriz de Hadamard simétrica de ordem $4r$ é $r = 59$. Note que se esta conjectura for válida, então a relevância dos Teoremas 3.4, 3.9 e 3.11 aumenta. Em particular, teremos o resultado abaixo.

Conjectura 3.12. Para inteiros positivos p, r, α com p primo, $p^\alpha \equiv 1 \pmod{4}$ e $4r > p^\alpha$, vale a igualdade

$$M_{4r}(K_{2,r(p^\alpha-1)+1}; 2) = p^\alpha + 1.$$

Mesmo que a Conjectura 2.20 não seja válida, ainda assim existem várias classes de matrizes de Hadamard simétricas, dentre as quais, aquelas que destacamos na Tabela 2.1. Portanto, uma simples aplicação do Teorema 3.11 garante as classes exatas abaixo.

Teorema 3.13. Sejam p, r e α inteiros positivos com p primo, $p^\alpha \equiv 1 \pmod{4}$ e $4r > p^\alpha$. Se $4r$ satisfaz uma das hipóteses da Tabela 3.1, então

$$M_{4r}(K_{2,r(p^\alpha-1)+1}; 2) = p^\alpha + 1.$$

Tabela 3.1: hipótese adicional ao Teorema 3.13

4r=	hipótese adicional
2^t	t inteiro positivo
$q^t + 1$	$q^t \equiv 3 \pmod{4}$ potência de primo
$2(q^t + 1)$	$q^t \equiv 1 \pmod{4}$ potência de primo
$(a - 1)^2$	a e $a - 2$ potências de primos
$4k^2$	existe um $(2k^2 - k, k, 1)$ -design
h^2	h a ordem de uma matriz de Hadamard
k	k o produto da ordem de matrizes de Hadamard simétricas

Número de Ramsey multipartido para estrelas

Há vários trabalhos dedicados ao estudo dos números de Ramsey envolvendo estrelas, isto é, grafos bipartidos do tipo $K_{1,n}$. Particularmente interessante, este tema está diretamente relacionado com o grau dos vértices. De fato, um grafo G não contém uma estrela $K_{1,n}$ se, e somente se, $\Delta(G) \leq n - 1$. Neste sentido, temos que:

O maior valor t para o qual podemos particionar K_t em dois grafos G_1 e G_2 tais que $\Delta(G_1) < n$ e $\Delta(G_2) < n$ é $t = r(K_{1,n}, K_{1,n}) - 1$.

Relações como a destacada logo acima fazem com que o número de Ramsey para estrelas esteja diretamente relacionado com temas na teoria dos grafos nos quais os graus dos vértices desempenham papel importante, como por exemplo, grafos t -fatoráveis e índices cromáticos, abordados brevemente no Capítulo 1. Utilizaremos algumas destas relações no decorrer deste capítulo dividindo-o em duas seções independentes.

Na primeira seção, determinaremos o valor do número de Ramsey multipartido para estrelas, estendendo inclusive alguns resultados clássicos na literatura. Destacamos que parte dos resultados presentes nesta seção foram recentemente publicados em [67].

Na segunda seção, exibiremos uma relação de fatorações de grafos com a métrica de Lee, estabelecendo assim uma rara conexão entre ambos os temas. Os resultados desta seção integram uma pesquisa corrente ainda não finalizada, cuja versão preliminar é dada em [70].

4.1 Cálculo do valor exato

Em 1972, Chvátal e Harary [21, 38] calcularam o número de Ramsey para duas estrelas arbitrárias $r(K_{1,n}, K_{1,m})$. No entanto, conforme mencionado por Irving [46], “muitos dos mais interessantes problemas aparecem no caso $k > 2$ ”. Em particular, Irving utilizou o índice cromático de grafos completos para calcular o número $r(K_{1,2}, \dots, K_{1,2})$. Neste mesmo trabalho, Irving determinou também o valor de $r(K_{1,3}, \dots, K_{1,3})$. Todos estes resultados foram estendidos por Burr e Roberts [15], conforme segue.

Teorema 4.1. (Burr e Roberts [15]) Dados inteiros positivos $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Então

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) = \begin{cases} S - k + 1 & \text{se } S - k \text{ e algum } n_i \text{ são pares.} \\ S - k + 2 & \text{se } n_1, n_2, \dots, n_k \text{ são ímpares ou } S - k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Em particular, o teorema acima assegura que

$$S - k + 1 \leq r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \leq S - k + 2$$

para parâmetros arbitrários. Tal estimativa pode ser facilmente estendida para o âmbito dos números de Ramsey multipartidos conforme resultado abaixo.

Proposição 4.2. Dados inteiros $s \geq 1, k, n_1, \dots, n_k \geq 2$, seja $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Temos

$$\lfloor (S - k)/s \rfloor + 1 \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \leq \lfloor (S - k)/s \rfloor + 2. \quad (4.1)$$

Demonstração: O limite inferior segue do Lema 1.38 e do Teorema 4.1, notando que

$$\lceil (S - k + 1)/s \rceil = \lfloor (S - k)/s \rfloor + 1.$$

Resta então mostrarmos o limite superior. Seja $c = \lfloor (S - k)/s \rfloor + 2$. Tome uma k -coloração do grafo $K_{c \times s}$. Para cada $1 \leq i \leq k$, considere H_i o subgrafo de $K_{c \times s}$ induzido pela cor i . Fixando um vértice v de $K_{c \times s}$ e denotando por $d_i(v)$ o grau de v em H_i , note que $\sum_{i=1}^k d_i(v) = (c - 1)s$. Logo, pela escolha de c ,

$$\sum_{i=1}^k d_i(v) = (c - 1)s > (S - k) = \sum_{i=1}^k (n_i - 1).$$

Assim $d_j(v) > n_j - 1$ para algum j com $1 \leq j \leq k$. Deste modo, existe uma cópia monocromática do K_{1,n_j} na cor j e, portanto, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \leq c = \lfloor (S - k)/s \rfloor + 2$. \square

O limitante inferior produzido no resultado acima foi uma simples aplicação do Lema 1.38 e do Teorema 4.1. Podemos refiná-lo usando o Lema 1.36 e o Teorema 1.5.

Proposição 4.3. Sejam inteiros $s \geq 1$, $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$. Para $S = \sum_{i=1}^k n_i$,

$$\lfloor (S - k - 1)/s \rfloor + 2 \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}).$$

Demonstração: Seja $c = \lfloor (S - k - 1)/s \rfloor + 1$. Pelo Teorema de Vizing (Teorema 1.5),

$$\chi'(K_{c \times s}) \leq \Delta(K_{c \times s}) + 1 = (c - 1)s + 1 = \lfloor (S - k - 1)/s \rfloor s + 1 \leq S - k.$$

Assim, pelo Lema 1.36, existe uma k -coloração do grafo $K_{c \times s}$ sem cópia monocromática de K_{1,n_i} na cor i para todo $i = 1, \dots, k$. Em outras palavras, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \geq c + 1$. \square

Quando s não divide $S - k$, vale $\lfloor (S - k - 1)/s \rfloor = \lfloor (S - k)/s \rfloor$. Deste modo, uma simples aplicação das Proposições 4.2 e 4.3 garante a classe exata a seguir.

Corolário 4.4. Dados inteiros $s \geq 1$, $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se s não divide $S - k$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) = \lfloor (S - k)/s \rfloor + 2.$$

Em vista do resultado acima, podemos assumir, daqui em diante, que s divide $S - k$. Neste caso, a estimativa $\chi'(K_{c \times s}) \leq s(c - 1) + 1$ obtida via Teorema de Vizing (Teorema 1.5) não é forte o suficiente para calcular o valor exato do $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$. No entanto, seu refinamento em uma única unidade revela-se proveitoso na obtenção de novas classes exatas. Deste modo, conhecer o valor exato do número $\chi'(K_{c \times s})$ pode ser muito útil. Neste sentido, uma forte ferramenta para o nosso estudo é o resultado abaixo.

Teorema 4.5. (Hoffman e Rodger [41]) Dados inteiros $c \geq 2$ e $s \geq 1$, o grafo $K_{c \times s}$ é de classe 1 se, e somente se, cs é par. Em particular, se cs é par, então $\chi'(K_{c \times s}) = \Delta(K_{c \times s}) = (c - 1)s$.

Munidos do Teorema 4.5, podemos exibir a seguinte classe exata.

Proposição 4.6. Dados inteiros $s \geq 1$, $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Suponha que s divide $S - k$. Se $(S - k)/s$ é ímpar ou s é par, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) = (S - k)/s + 2.$$

Demonstração: O limite superior é um caso particular da Proposição 4.2 enquanto que o limite inferior é uma variação da Proposição 4.3. De fato, denotando $c = (S - k)/s + 1$, temos por hipótese que cs é par. Logo, o Teorema 4.5 afirma que $\chi'(K_{c \times s}) = \Delta(K_{c \times s}) = (c - 1)s = S - k$. Deste modo, uma aplicação do Lema 1.36 garante a existência de uma k -coloração do $K_{c \times s}$ sem cópia monocromática do K_{1,n_i} na cor i para todo $i = 1, \dots, k$ e, portanto, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \geq c + 1 = (S - k)/s + 2$. \square

Ambas as classes exatas apresentadas até agora (Corolário 4.4 e Proposição 4.6) atingem o limite superior na estimativa (4.1). Um questionamento natural que poderia ser feito a esta altura é se isto sempre ocorre, mas já anteciparemos que a resposta é negativa. Exibiremos agora uma classe exata que atinge o limite inferior em (4.1). Ressaltamos que este resultado já foi previamente relatado na dissertação [66], mas devido a sua importância no nosso contexto, sua demonstração será apresentada novamente. A importância desse resultado é intensificada pelo fato de ser o único caso onde o limite superior em (4.1) não é atingido. Isto é um fato novo que não sabíamos durante a dissertação e será provado no decorrer desta seção.

Proposição 4.7. Dados inteiros $s \geq 1$, $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$ com algum n_i par e s ímpar, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $(S - k)/s$ é um inteiro par, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) = (S - k)/s + 1. \quad (4.2)$$

Demonstração: A Proposição 4.2 produz $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \geq (S - k)/s + 1$. Vamos mostrar então que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \leq (S - k)/s + 1$. Para isto, denote $c = (S - k)/s + 1$ e suponha por absurdo que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) > c$. Deste modo, existe uma k -coloração do $K_{c \times s}$ que não contém cópia monocromática do K_{1,n_i} da cor i para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Para cada $i = 1, \dots, k$, seja H_i o subgrafo de $K_{c \times s}$ induzido pela cor i e $d_i(v)$ o grau de um vértice v em H_i . Como $K_{1,n_i} \not\subseteq H_i$, segue que $d_i(v) \leq n_i - 1$ para todo $v \in V(K_{c \times s})$.

Observe que $\sum_{i=1}^k d_i(v) = (c-1)s$, logo

$$(c-1)s = \sum_{i=1}^k d_i(v) \leq \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = S - k = (c-1)s. \quad (4.3)$$

Deste modo, a desigualdade acima força que $d_i(v) = n_i - 1$ para todo $v \in V(K_{c \times s})$ e todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Fixe $j \in \{1, \dots, k\}$ de modo que n_j seja par (tal j existe por hipótese). Note que

$$2|E(H_j)| = \sum_{v \in V(H_j)} d_j(v) = \sum_{v \in V(K_{c \times s})} (n_j - 1) = cs(n_j - 1) = \left(\frac{S-k}{s} + 1 \right) s(n_j - 1). \quad (4.4)$$

Donde segue que $\left(\frac{S-k}{s} + 1 \right) s(n_j - 1)$ é par (pois é igual a $2|E(H_j)|$). Absurdo, pois os números $\left(\frac{S-k}{s} + 1 \right)$, s e $(n_j - 1)$ são todos ímpares. Portanto, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \leq c = (S-k)/s + 1$, completando a demonstração. \square

O Corolário 4.4 e as Proposições 4.6 e 4.7 determinam o valor exato do número de Ramsey $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$ exceto quando $(S-k)/s$ é um inteiro par, s é ímpar e n_i é ímpar para todo $i = 1, \dots, k$. Felizmente, também é possível calcular $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$ para este caso remanescente. Faremos isto de dois modos, primeiro exibiremos uma demonstração construtiva publicada no artigo [67]. Em seguida falaremos de uma demonstração alternativa mais curta feita de maneira existencial utilizando resultados da literatura.

Proposição 4.8. Dados inteiros $s \geq 1$, $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$ com n_i ímpar para todo $i = 1, \dots, k$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $(S-k)/s$ é um inteiro par e s é ímpar, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) = (S-k)/s + 2.$$

Demonstração: A Proposição 4.2 garante o limite superior. Deste modo, basta mostrarmos que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \geq (S-k)/s + 2$. Para isto, tome $q = (S-k)/s$ e denote as $q+1$ classes de vértices do $K_{(q+1) \times s}$ por $L_1, \dots, L_q, L_\infty$, onde $L_a = \{(a, 1), \dots, (a, s)\}$ para todo $a = 1, \dots, q, \infty$. Para mostrar o desejado, precisamos construir uma k -coloração do grafo $K_{(q+1) \times s}$ sem cópia monocromática do K_{1,n_i} na cor i para todo $i = 1, \dots, k$. Tal coloração será definida por uma composição de três funções auxiliares, as quais exibiremos a seguir em três passos, sendo uma em cada passo.

Passo 1: Inicialmente, considere a $(S - k)$ -coloração $\psi : E(K_{(q+1) \times s}) \rightarrow \mathbb{Z}_{S-k}$ definida por

$$\psi(\{(a, b), (c, d)\}) = \begin{cases} \overline{(a+c)s + b + d} & \text{se } a, c \leq q; \\ \overline{2as + b + d} & \text{se } c = \infty; \\ \overline{2cs + b + d} & \text{se } a = \infty; \end{cases}$$

onde \bar{x} denota a classe de x módulo $S - k$.

A quantidade de cores incidentes em um vértice (a, b) difere nos casos $a \neq \infty$ e $a = \infty$. Descreveremos essa diferença com mais detalhes nas duas próximas afirmações.

Afirmção 1: Para cada $a = 1, \dots, q$ e cada $b = 1, \dots, s$, as $S - k (= qs)$ arestas incidentes no vértice (a, b) possuem $S - k$ cores diferentes.

Para provar esta afirmação, suponha por absurdo que existam dois vértices distintos, digamos (c_1, d_1) e (c_2, d_2) com $c_1 \neq a \neq c_2$, que estejam ligados ao vértice (a, b) por uma mesma cor. Em particular,

$$\psi(\{(a, b), (c_1, d_1)\}) = \psi(\{(a, b), (c_2, d_2)\}). \quad (4.5)$$

Vamos dividir nossa análise em três casos e encontrar um absurdo em cada um deles.

1. Se $c_1 = \infty$ e $c_2 = \infty$. Neste caso, (4.5) implica $\overline{d_1} = \overline{d_2}$, isto é, $d_1 = d_2$. Como $c_1 = c_2$, obtemos a contradição $(c_1, d_1) = (c_2, d_2)$.
2. Se $c_1 \leq q$ e $c_2 \leq q$. Como $a, c_1, c_2 \leq q$, temos que (4.5) implica $\overline{(c_1 - c_2)s} = \overline{d_2 - d_1}$. Mas $|d_2 - d_1| < s$, assim, $d_2 - d_1 = 0$. Consequentemente, $\overline{(c_1 - c_2)s} = \overline{0}$. Observe que a condição $|(c_1 - c_2)s| \leq (q - 1)s < S - k$ implica $(c_1 - c_2)s = 0$, isto é, $c_1 = c_2$. Assim, novamente obtemos a contradição $(c_1, d_1) = (c_2, d_2)$.
3. Se $c_1 = \infty$ e $c_2 \leq q$. Neste caso, (4.5) implica $\overline{(a - c_2)s} = \overline{d_2 - d_1}$. Procedendo como no caso 2, encontramos o absurdo $a = c_2$.

Afirmção 2: Para cada $b \in \{1, \dots, s\}$, na $(S - k)$ -coloração ψ , as $S - k$ arestas incidentes no vértice (∞, b) são coloridas por exatamente $(S - k)/2$ cores, sendo duas arestas de cada cor. Além disso, o conjunto dessas $(S - k)/2$ cores é $A_b = \{\overline{b + 2js + l} : 1 \leq j \leq q/2, 1 \leq l \leq s\}$.

Para mostrarmos a Afirmação 2, tome vértices distintos de $K_{(q+1) \times s}$, digamos (c_1, d_1) e (c_2, d_2) com $c_2 \geq c_1$, tais que $\psi(\{(\infty, b), (c_1, d_1)\}) = \psi(\{(\infty, b), (c_2, d_2)\})$. Em particular, $\overline{2(c_1 - c_2)s} = \overline{d_2 - d_1}$. Como $|d_2 - d_1| < s$, temos $d_2 - d_1 = 0$ e conseqüentemente $\overline{2(c_1 - c_2)s} = \overline{0}$. Assim, existe um inteiro z tal que $2(c_1 - c_2)s = z(S - k) = zqs$. Em particular, $2(c_1 - c_2) = zq$. Como $1 \leq c_1, c_2 \leq q$, então duas situações podem ocorrer: $c_1 - c_2 = 0$ ou $|c_1 - c_2| = q/2$. Mas (c_1, d_1) e (c_2, d_2) são distintos e $d_1 = d_2$. Assim, devemos ter $c_1 \neq c_2$. De $|c_1 - c_2| = q/2$ e $c_2 \geq c_1$ obtemos $(c_2, d_2) = (c_1 + q/2, d_1)$. Por outro lado, se $(c_2, d_2) = (c_1 + q/2, d_1)$, temos $\psi(\{(\infty, b), (c_1, d_1)\}) = \psi(\{(\infty, b), (c_2, d_2)\})$. Deste modo, para vértices distintos (c_1, d_1) e (c_2, d_2) (com $c_2 \geq c_1$),

$$\psi(\{(\infty, b), (c_1, d_1)\}) = \psi(\{(\infty, b), (c_2, d_2)\}) \iff (c_2, d_2) = (c_1 + q/2, d_1).$$

Portanto, as $S - k$ arestas incidentes no vértice (∞, b) são de $(S - k)/2$ cores, sendo duas de cada cor. Resta mostrar que o conjunto de cores é A_b , mas isto é consequência das igualdades $\psi(\{(\infty, b), (c_1, d_1)\}) = \overline{b + 2c_1s + d_1}$ e $\psi(\{(\infty, b), (c_1, d_1)\}) = \psi(\{(\infty, b), (c_1 - q/2, d_1)\})$ se $c_1 > q/2$.

Passo 2: Considere a função $\omega : \mathbb{Z}_{S-k} \rightarrow \mathbb{Z}_{S-k}$ definida como segue: dado $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{S-k}$ com $1 \leq x \leq S - k (= qs)$, existem únicos inteiros m e r com $0 \leq m \leq q - 1$ e $1 \leq r \leq s$ tais que $x = ms + r$. Defina $\omega(\bar{x}) = \bar{x} = \overline{ms + r}$ se m é par e $\omega(\bar{x}) = \bar{x} - \bar{s} = \overline{(m - 1)s + r}$ se m é ímpar. Note que a imagem de ω é dada por $Im(\omega) = \{\overline{2ms + r} : 0 \leq m \leq q/2 - 1, 1 \leq r \leq s\}$ e $|Im(\omega)| = (q/2)s = (S - k)/2$.

Afirmação 3: Na $(S - k)/2$ -coloração $\omega \circ \psi : E(K_{(q+1) \times s}) \rightarrow Im(\omega)$, um vértice (a, b) está conectado por cada cor a exatamente dois vértices.

Para mostrar esta afirmação, tome $\bar{x} \in Im(\omega)$. Note que $\omega^{-1}(\bar{x}) = \{\bar{x}, \bar{x} + \bar{s}\}$, assim, se $a \leq q$, segue pela Afirmação 1 que na $(S - k)/2$ -coloração $\omega \circ \psi$, o vértice (a, b) está conectado a exatamente dois vértices pela cor \bar{x} . Por outro lado, se $a = \infty$, observe que apenas um elemento de $\omega^{-1}(\bar{x}) = \{\bar{x}, \bar{x} + \bar{s}\}$ está no conjunto $A_b = \{\overline{b + 2js + l} : 1 \leq j \leq q/2, 1 \leq l \leq s\}$. Deste modo, segue pela Afirmação 2 que na $(S - k)/2$ -coloração $\omega \circ \psi$, o vértice (∞, b) está conectado a exatamente dois vértices pela cor \bar{x} .

Passo 3: Note que $(n_1 - 1)/2, \dots, (n_k - 1)/2$ são inteiros satisfazendo

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1)/2 = (S - k)/2 = |Im(\omega)|.$$

Assim, podemos selecionar uma função $\phi : Im(\omega) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de modo que $|\phi^{-1}(i)| = (n_i - 1)/2$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Após os três passos acima, estamos prontos para apresentar a k -coloração desejada. Considere a k -coloração $\phi \circ (\omega \circ \psi) : E(K_{(q+1) \times s}) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Como na $(S - k)/2$ -coloração $\omega \circ \psi$, todo vértice está conectado a exatamente dois outros vértices por uma mesma cor $\bar{x} \in Im(\omega)$, segue que na k -coloração $\phi \circ (\omega \circ \psi)$, todo vértice de $K_{(q+1) \times s}$ está conectado a exatamente outros $2|\phi^{-1}(i)| = n_i - 1$ vértices pela cor i para $i = 1, \dots, k$. Assim, a k -coloração $\phi \circ (\omega \circ \psi)$ não contém cópia monocromática do K_{1, n_i} na cor i , para todo $i = 1, \dots, k$. Isto garante que $M_s(K_{1, n_1}, \dots, K_{1, n_k}) \geq q + 2 = (S - k)/s + 2$ e conclui a demonstração. \square

Observe que a demonstração da proposição anterior é construtiva no sentido que ela exhibe explicitamente a lei da coloração que garante o limitante inferior. Demonstrações construtivas na combinatória costumam ser mais bem vistas do que demonstrações existenciais, pois possibilitam uma investigação mais precisa de propriedades. De fato, conhecer “a cara” do nosso objeto de estudo pode facilitar mais a pesquisa do que saber apenas que tal objeto existe. Isto justifica nossa opção pela apresentação da demonstração construtiva. No entanto, poderíamos também ter feito de modo existencial, utilizando o Teorema 1.9. Uma vez que esta segunda prova é mais simples, vamos exibi-la abaixo.

Demonstração alternativa da Proposição 4.8: Seja $q = (S - k)/s$. Devemos mostrar que $M_s(K_{1, n_1}, \dots, K_{1, n_k}) = q + 2$. O limite superior decorre da Proposição 4.2. Basta mostrarmos então que $M_s(K_{1, n_1}, \dots, K_{1, n_k}) > q + 1$.

Note que o grafo $K_{(q+1) \times s}$ é qs -regular. Sendo q par, segue pelo Teorema 1.9 que existem 2-fatores de $K_{(q+1) \times s}$, digamos H_1, \dots, H_u , tais que $K_{(q+1) \times s} = H_1 \oplus \dots \oplus H_u$. Fixando um vértice v , observamos que

$$qs = \sum_{i=1}^u d_{H_i}(v) = \sum_{i=1}^u 2 = 2u,$$

logo $u = qs/2 = (S - k)/2 = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)/2$. Como cada $(n_i - 1)/2$ é inteiro (pois n_i é ímpar), podemos particionar o conjunto dos u grafos H_1, \dots, H_u em k conjuntos, digamos A_1, \dots, A_k , onde $|A_i| = (n_i - 1)/2$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Para cada $i = 1, \dots, k$, defina G_i como sendo a soma direta de todos grafos em A_i . Como A_i possui exatamente $(n_i - 1)/2$ 2-fatores de $K_{(q+1) \times s}$, segue que G_i é um $(n_i - 1)$ -fator de $K_{(q+1) \times s}$. Em particular, G_i não contém o grafo K_{1, n_i} .

Uma vez que $K_{(q+1) \times s} = H_1 \oplus \dots \oplus H_u = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ com $K_{1, n_i} \not\subseteq G_i$ para todo $i = 1, \dots, k$, a Proposição 1.35 garante que $M_s(K_{1, n_1}, \dots, K_{1, n_k}) > q + 1$, completando a demonstração. \square

Finalmente, quando todos os grafos G_i forem grafos estrela, o número $M_s(G_1, \dots, G_k)$ pode ser determinado usando o Corolário 4.4 ou uma das Proposições 4.6, 4.7 e 4.8. Note que a combinação desses quatro resultados produz o teorema abaixo, um dos principais resultados desta monografia e do artigo [67].

Teorema 4.9. Dados inteiros $s \geq 1$, $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Vale a igualdade

$$M_s(K_{1, n_1}, \dots, K_{1, n_k}) = \begin{cases} \frac{S-k}{s} + 1 & \text{se } (S - k)/s \text{ é par, } s \text{ é ímpar e} \\ & \text{algum } n_i \text{ é par;} \\ \lfloor \frac{S-k}{s} \rfloor + 2 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O teorema acima generaliza alguns resultados na literatura. Por exemplo, o caso particular $s = 1$ e $k = 2$ recai no valor $r(K_{1, n}, K_{1, m})$ calculado por Chvátal e Harary [21, 38]. O caso $s = 1$ com $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 2$ ou $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 3$ recai nos números $r(K_{1, 2}, \dots, K_{1, 2})$ e $r(K_{1, 3}, \dots, K_{1, 3})$ computados por Irving [46]. Por sua vez, o caso $s = 1$ produz o Teorema 4.1 exibido por Burr e Roberts [15].

4.2 Uma conexão com a distância de Lee

Vimos na seção anterior que o número $M_s(K_{1, n_1}, \dots, K_{1, n_k})$ pode ser determinado utilizando o Corolário 4.4 e as Proposições 4.6, 4.7 e 4.8. No entanto, estes resultados não são inteiramente independentes no sentido que tanto o Corolário 4.4 quanto a Proposição 4.6 foram obtidos

através de dois resultados que não provamos aqui, a saber, os Teoremas 1.5 e 4.5. Neste sentido, surge a pergunta:

Será que é possível determinar o valor de $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$ de maneira construtiva sem utilizar os teoremas existenciais da literatura?

Para $s = 1$, uma demonstração alternativa é a exibida por Burr e Roberts [15] (ver Teorema 4.1). Um fato curioso é que o caso $s = 2$ pode ser imediatamente determinado usando a Proposição 1.40 e o Teorema 4.1. De fato, uma simples aplicação destes dois resultados (analisando a paridade das variáveis) revela a igualdade

$$M_2(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) = \left\lceil \frac{r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, K_{1,2})}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{S - k + 3}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{S - k}{2} \right\rfloor + 2.$$

Observe que mesmo não utilizando os Teoremas 1.5 e 4.5 nesta demonstração alternativa, ainda assim usamos um resultado da literatura (Teorema 4.1). Dedicaremos o resto desta seção para exibir uma demonstração autossuficiente para a estimativa

$$M_2(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) = \lfloor (S - k)/2 \rfloor + 2. \quad (4.6)$$

No entanto, demonstração autossuficiente não é a maior motivação para a criação desta seção. Na verdade, veremos que algumas instâncias dos números de Ramsey podem ser determinadas de maneira construtiva utilizando a célebre distância de Lee. Esta conexão entre números de Ramsey e distância de Lee parece ser interessante por si só.

Uma ferramenta que utilizaremos é descrita abaixo.

Lema 4.10. Dados inteiros $s \geq 1$, $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $\chi'(K_{c \times s}) = \Delta(K_{c \times s})$ para $c = \lfloor (S - k)/s \rfloor + 1$, então $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) = \lfloor (S - k)/s \rfloor + 2$.

Demonstração: O limite superior segue da Proposição 4.2 enquanto que o limite inferior é uma simples aplicação do Lema 1.36 uma vez que $\chi'(K_{c \times s}) = \Delta(K_{c \times s}) = (c - 1)s \leq S - k$. \square

Pelo lema acima, segue que para a igualdade (4.6) ser válida, é suficiente que tenhamos $\chi'(K_{c \times 2}) = \Delta(K_{c \times 2})$ para todo inteiro $c \geq 2$. Já sabemos que isto é verdadeiro conforme vimos no Teorema 4.5. No entanto, lembre-se que nosso objetivo aqui é calcular

$M_2(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$ de maneira construtiva e autossuficiente via distância de Lee. Mostraremos que $\chi'(K_{c \times 2}) = \Delta(K_{c \times 2})$ para todo inteiro $c \geq 2$ dividindo nos casos c par e c ímpar. Começaremos com o caso c par por ser mais simples e não precisar de lemas auxiliares.

Proposição 4.11. Se c é par, então $\chi'(K_{c \times 2}) = \Delta(K_{c \times 2})$.

Demonstração: Para mostrar o resultado, devemos mostrar que as arestas do $K_{c \times 2}$ podem ser particionadas em $\Delta(K_{c \times 2}) = 2(c-1)$ conjuntos de arestas independentes.

Denote as c classes de vértices do grafo multipartido $K_{c \times 2}$ por $L_1, \dots, L_{c-1}, L_\infty$ onde para cada $i \in \{1, \dots, c-1, \infty\}$, L_i é da forma $L_i = \{(i, 1), (i, 2)\}$. Escreva $n = 2(c-1)$ e considere a n -coloração $\psi : E(K_{c \times 2}) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ definida por

$$\psi(\{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\}) = \begin{cases} \overline{2(i_1 + i_2) + j_1 + j_2} & \text{se } i_1, i_2 \leq c-1; \\ \overline{4i_1 + j_1 + j_2} & \text{se } i_2 = \infty; \\ \overline{4i_2 + j_1 + j_2} & \text{se } i_1 = \infty; \end{cases}$$

onde \bar{z} denota a classe de z módulo n . A demonstração estará completa se mostrarmos que $\psi^{-1}(\bar{0}), \psi^{-1}(\bar{1}), \dots, \psi^{-1}(\overline{n-1})$ são conjuntos de arestas independentes.

Suponha por absurdo que algum destes conjuntos de arestas não é independente, então existem vértices distintos (a, b) , (i_1, j_1) e (i_2, j_2) com $i_1 \neq a \neq i_2$ tais que

$$\psi(\{(a, b), (i_1, j_1)\}) = \psi(\{(a, b), (i_2, j_2)\}). \quad (4.7)$$

Para encontrarmos a contradição, dividiremos a demonstração em quatro casos:

- 1) $a \leq c-1$, $i_1 = \infty$ e $i_2 = \infty$;
- 2) $a \leq c-1$, $i_1 \leq c-1$ e $i_2 \leq c-1$;
- 3) $a \leq c-1$, $i_1 = \infty$ e $i_2 \leq c-1$;
- 4) $a = \infty$.

Caso 1: Neste caso, a igualdade (4.7) implica $\bar{j}_1 = \bar{j}_2$, assim $j_1 = j_2$. Mas $i_1 = i_2$, o que contradiz o fato dos vértices (i_1, j_1) e (i_2, j_2) serem distintos.

Caso 2: Como $a, i_1, i_2 \leq c-1$, (4.7) implica $\overline{2(i_1 - i_2)} = \overline{j_2 - j_1}$. Mas $|j_2 - j_1| < 2$, assim $j_2 - j_1 = 0$ e conseqüentemente $\overline{2(i_1 - i_2)} = \bar{0}$. Como $|2(i_1 - i_2)| \leq 2(c-2) < n$, segue que $i_1 - i_2 = 0$. Um absurdo pois $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$.

Caso 3: Neste caso, (4.7) implica $\overline{2(a - i_2)} = \overline{j_2 - j_1}$. Procedendo como no Caso 2, verifica-se o absurdo $a = i_2$.

Caso 4: Como $a = \infty$, (4.7) implica $\overline{4(i_1 - i_2)} = \overline{j_2 - j_1}$. Novamente, como $|j_2 - j_1| < 2$, então $j_2 - j_1 = 0$ e conseqüentemente $\overline{4(i_1 - i_2)} = \overline{0}$. Deste modo, existe um inteiro positivo z tal que $4(i_1 - i_2) = nz = 2(c - 1)z$. Em particular, $(c - 1)$ divide $2(i_1 - i_2)$. Mas $(c - 1)$ é ímpar (por hipótese), assim $(c - 1)$ divide $(i_1 - i_2)$. Como $|i_1 - i_2| \leq c - 2$, temos $i_1 - i_2 = 0$ e conseqüentemente o absurdo $(i_1, j_1) = (i_2, j_2)$. \square

De posse da proposição acima e do Lema 4.10, falta provarmos apenas que $\chi'(K_{c \times 2}) = \Delta(K_{c \times 2})$ quando c é ímpar. Neste caso, precisaremos de uma construção mais elaborada, a qual faremos via distância de Lee.

Definição 4.12. Dado um inteiro positivo m , tome \bar{x} e \bar{y} elementos de \mathbb{Z}_m com $0 \leq x, y < m$. A *distância de Lee* entre \bar{x} e \bar{y} é definida por

$$d_L(\bar{x}, \bar{y}) = \min\{|x - y|, m - |x - y|\}.$$

A distância de Lee possui uma ampla gama de aplicações na construção de códigos, como por exemplo, os códigos de Berlekamp, de Preparata e de Kerdock. Recomendamos a referência [74] para o leitor interessado no assunto visto que nosso objetivo aqui é aplicar a distância de Lee, não na teoria de códigos, mas sim na fatoração de grafos. Isso parece ser inédito na literatura.

Dado $m \in \mathbb{N}$, considere a relação de ordem $\bar{0} \leq \bar{1} \leq \dots \leq \overline{m-1}$ em \mathbb{Z}_m . Embora esta relação não seja compatível com as propriedades aritméticas, ela é suficiente para nosso objetivo. Se $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$, denotaremos $\min\{\bar{x}, \bar{y}\} = \bar{x}$ se $\bar{x} \leq \bar{y}$ e $\min\{\bar{x}, \bar{y}\} = \bar{y}$ se $\bar{y} \leq \bar{x}$.

Trabalharemos com duas operações auxiliares em \mathbb{Z}_m . A operação

$$\begin{aligned} d : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m &\longrightarrow \mathbb{Z}_m \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\longmapsto \overline{d_L(\bar{x}, \bar{y})} \end{aligned}$$

induzida pela distância de Lee (satisfazendo $d(\bar{x}, \bar{y}) = \min\{\overline{x - y}, \overline{y - x}\}$) e a operação

$f : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ definida por

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} \bar{x} & \text{se } d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - \bar{x} \neq \bar{x} - \bar{y}; \\ \bar{y} & \text{se } d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} - \bar{y} \neq \bar{y} - \bar{x}; \\ \min\{\bar{x}, \bar{y}\} & \text{se } d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} - \bar{y} = \bar{y} - \bar{x}. \end{cases}$$

Observe que $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \{\bar{x}, \bar{y}\}$. Além disso, vale também

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} \bar{x} - f(\bar{x}, \bar{y}) & \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}; \\ \bar{y} - f(\bar{x}, \bar{y}) & \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Para $m = 2c$ par, podemos particionar \mathbb{Z}_{2c} nos conjuntos

$$\mathbb{Z}_{2c}^e = \{\bar{0}, \bar{2}, \dots, \overline{2c-2}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_{2c}^o = \{\bar{1}, \bar{3}, \dots, \overline{2c-1}\}.$$

Grosseiramente falando, \mathbb{Z}_{2c}^e e \mathbb{Z}_{2c}^o correspondem aos elementos “pares” e “ímpares” de \mathbb{Z}_{2c} , respectivamente. Vejamos dois lemas importantes.

Lema 4.13. Dados $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{2c}$ com c ímpar e $\bar{x} \neq \bar{y}$. Se $d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$, então

$$\frac{c+1}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \neq \bar{0} \quad \text{e} \quad \frac{c-1}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \neq \bar{0}.$$

Demonstração: Suponha por absurdo que $\frac{c+1}{2}(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{0}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por 4, temos $2(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{0}$. Como $\bar{x} \neq \bar{y}$, então $\bar{x} - \bar{y} = \bar{y} - \bar{x} = \bar{c}$, assim $d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{c} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$, um absurdo. Desta forma, $\frac{c+1}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \neq \bar{0}$. A outra desigualdade segue de modo análogo. \square

Lema 4.14. Dados $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_{2c}$ com c ímpar e $\bar{y} \neq \bar{z}$. Se $d(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$, então

$$\frac{c+1}{2}(\bar{x} - \bar{y}) + \bar{y} \neq \frac{c+1}{2}(\bar{z} - \bar{x}) + \bar{x}$$

Demonstração: Suponha por absurdo que $\frac{c+1}{2}(\bar{x} - \bar{y}) + \bar{y} = \frac{c+1}{2}(\bar{z} - \bar{x}) + \bar{x}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por 4, temos $2\bar{y} = 2\bar{z}$. Como $\bar{y} \neq \bar{z}$, então $\bar{z} - \bar{y} = \bar{y} - \bar{z} = \bar{c}$. Desta forma, $d(\bar{y}, \bar{z}) = \bar{c} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$, um absurdo. \square

De posse dos lemas técnicos acima, vamos apresentar agora o principal resultado desta seção: particionaremos as arestas do $K_{c \times 2}$ em conjuntos de arestas independentes via distância de Lee. Acreditamos que a maior beleza deste resultado não está no seu enunciado, mas sim, na sua demonstração cirúrgica na qual utiliza a célebre distância de Lee. Conforme já mencionado, embora a distância de Lee naturalmente apareça no âmbito da teoria dos códigos na construção de códigos especiais, a fatoração de grafos via distância de Lee parece ser inédita na literatura.

Proposição 4.15. Se c é ímpar, então $\chi'(K_{c \times 2}) = \Delta(K_{c \times 2})$.

Demonstração: Devemos mostrar que as arestas do $K_{c \times 2}$ podem ser particionadas em $\Delta(K_{c \times 2}) = 2c - 2$ conjuntos de arestas independentes.

Denote $V(K_{c \times 2}) = \mathbb{Z}_{2c}$ onde dois vértices \bar{x}, \bar{y} estão na mesma classe de vértices se, e somente se, $d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{1}$ e $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$, ou seja, as classes são: $\{\bar{1}, \bar{2}\}, \{\bar{3}, \bar{4}\}, \dots, \{\bar{2c-3}, \bar{2c-2}\}$ e $\{\bar{2c-1}, \bar{0}\}$.

Considere a $(2c - 2)$ -coloração $\psi : E(K_{c \times 2}) \rightarrow \mathbb{Z}_{2c} \setminus \{\bar{1}, \bar{2c-1}\}$ definida pela lei

$$\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \begin{cases} \frac{c+1}{2}d(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x}, \bar{y}) & \text{se } d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e \text{ e } f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e; \\ \frac{c+1}{2}d(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{1} & \text{se } d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e \text{ e } f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o; \\ d(\bar{x}, \bar{y}) & \text{se } d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o \setminus \{\bar{1}\} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o; \\ -d(\bar{x}, \bar{y}) & \text{se } d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o \setminus \{\bar{1}\} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e; \\ f(\bar{x}, \bar{y}) & \text{se } d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{1} \text{ (aqui, } f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e). \end{cases} \quad (4.9)$$

Primeiramente, vamos mostrar que ψ está bem definida.

Afirmção 1: $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \psi(\{\bar{y}, \bar{x}\})$. De fato, para vértices \bar{x}, \bar{y} em \mathbb{Z}_{2c} em classes distintas, temos $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$ e $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x})$, logo a afirmação é válida.

Afirmção 2: $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) \neq \pm \bar{1}$ para toda aresta $\{\bar{x}, \bar{y}\}$. De fato, suponha por absurdo que existam vértices distintos $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{2c}$ tais que $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \pm \bar{1}$. Em particular, $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$, logo \bar{x} e \bar{y} não satisfazem nem as duas primeiras nem a última condição descrita em (4.9), pois nestes casos, teríamos $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$. Deste modo, $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \pm d(\bar{x}, \bar{y})$. Mas a condição $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \pm \bar{1}$ obrigaria $d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{1}$. Um absurdo, pois \bar{x} e \bar{y} satisfazem a terceira ou a quarta condição em (4.9). Portanto, $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) \neq \pm \bar{1}$.

Segue das Afirmações 1 e 2 que ψ é uma função bem definida. Para concluir a demonstração, mostraremos que $\{\psi^{-1}(\bar{i}) : \bar{i} \in \mathbb{Z}_{2c} \setminus \{\bar{1}, \overline{2c-1}\}\}$ é uma partição de $E(K_{c \times 2})$ em conjuntos de arestas independentes (emparelhamentos). Para mostrar isto, suponha por absurdo que algum destes conjunto de arestas, digamos $\psi^{-1}(\bar{i}_0)$, não é independente. Então existem vértices distintos $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ tais que $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \bar{i}_0$ e $\psi(\{\bar{x}, \bar{z}\}) = \bar{i}_0$. Em particular,

$$\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \psi(\{\bar{x}, \bar{z}\}). \quad (4.10)$$

Para encontrarmos a contradição, vamos dividir o problema em três casos e analisar seus respectivos subcasos.

Caso 1: $d(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$ e $d(\bar{x}, \bar{y}), d(\bar{x}, \bar{z}) \geq \bar{2}$;

Caso 2: $d(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$ e $d(\bar{x}, \bar{y}), d(\bar{x}, \bar{z}) \geq \bar{2}$;

Caso 3: $d(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{1}$ e/ou $d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{1}$.

Caso 1: Como $d(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$, podemos assumir sem perda de generalidade que $\bar{y} \in \mathbb{Z}_{2c}^e$ e $\bar{z} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$. Se $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{2c}^e$, então $d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$ e $d(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$. Assim, segue da definição de ψ que $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$ e $\psi(\{\bar{x}, \bar{z}\}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$ (pois $d(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o \setminus \{\bar{1}\}$). Isto contradiz $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \psi(\{\bar{x}, \bar{z}\})$. Do mesmo modo, se tivermos $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$, encontramos o absurdo $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$ e $\psi(\{\bar{x}, \bar{z}\}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$.

Caso 2: Neste caso, temos $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_{2c}^e$ ou $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$. Deste modo, é conveniente dividir este caso em quatro subcasos.

Subcaso 2.1: $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{2c}^e$ e $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$;

Subcaso 2.2: $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$ e $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_{2c}^e$;

Subcaso 2.3: $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{2c}^e$ e $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_{2c}^e$;

Subcaso 2.4: $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$ e $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$.

Nos subcasos 2.1 e 2.2, temos $d(\bar{x}, \bar{y}), d(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o \setminus \{\bar{1}\}$ e assim (4.10) implica

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \bar{z}) \quad \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{x};$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \bar{z}) \quad \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{z};$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = -d(\bar{x}, \bar{z}) \quad \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{z};$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = -d(\bar{x}, \bar{z}) \quad \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{x}.$$

De qualquer modo, usando (4.8) verifica-se que qualquer igualdade acima implica $\bar{y} = \bar{z}$, um absurdo.

Nos subcasos 2.3 e 2.4, temos que $d(\bar{x}, \bar{y}), d(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$, assim, (4.10) implica que

$$\begin{aligned} \frac{c+1}{2}(\bar{y} - \bar{z}) &= \bar{0} && \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{x}; \\ \frac{c-1}{2}(\bar{y} - \bar{z}) &= \bar{0} && \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{z}; \\ \frac{c+1}{2}(\bar{x} - \bar{z}) + \bar{z} &= \frac{c+1}{2}(\bar{y} - \bar{x}) + \bar{x} && \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{z}; \\ \frac{c+1}{2}(\bar{x} - \bar{y}) + \bar{y} &= \frac{c+1}{2}(\bar{z} - \bar{x}) + \bar{x} && \text{se } f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} \text{ e } f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{x}. \end{aligned}$$

Como $d(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$, todas as igualdades acima contradizem ou o Lema 4.13 ou o Lema 4.14.

Caso 3- Suponha que $d(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{1}$. Vamos dividir este caso em três subcasos.

Subcaso 3.1: $d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{1}$;

Subcaso 3.2: $d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o \setminus \{\bar{1}\}$;

Subcaso 3.3: $d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$.

No subcaso 3.1, a igualdade (4.10) implica $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{z})$. Como $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \{\bar{x}, \bar{y}\}$ e $f(\bar{x}, \bar{z}) \in \{\bar{x}, \bar{z}\}$, temos $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{x}$. Segue pela igualdade (4.8) que $d(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - \bar{x}$ e $d(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{z} - \bar{x}$. Mas $d(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{1} = d(\bar{x}, \bar{y})$, assim, $\bar{y} - \bar{x} = \bar{z} - \bar{x}$, isto é, $\bar{y} = \bar{z}$, um absurdo.

No subcaso 3.2, temos $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$ e $\psi(\{\bar{x}, \bar{z}\}) = f(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$, contradizendo $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \psi(\{\bar{x}, \bar{z}\})$.

Por conveniência, vamos dividir o subcaso 3.3 em outros quatro subcasos.

Subcaso 3.3.1: $f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{x}$ e $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$;

Subcaso 3.3.2: $f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{z}$ e $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$;

Subcaso 3.3.3: $f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{x}$ e $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$;

Subcaso 3.3.4: $f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{z}$ e $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$.

No subcaso 3.3.1, como $d(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{1}$, temos $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$. Mas $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^o$, então $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$. Deste modo, $\{\bar{x} - \bar{y}, \bar{y} - \bar{x}\} \subset \mathbb{Z}_{2c}^o$. Isto contradiz $d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$.

No subcaso 3.3.2, temos $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$, assim, $\bar{x} = \bar{z} + \bar{1} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$. Como $f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$ e $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{2c}^o$, segue que $\bar{y} \in \mathbb{Z}_{2c}^e$. Desta forma, $\{\bar{x} - \bar{y}, \bar{y} - \bar{x}\} \subset \mathbb{Z}_{2c}^o$. Isto também contradiz $d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$.

No subcaso 3.3.3, a igualdade (4.10) implica $\frac{c+1}{2}(\bar{y} - \bar{x}) = \bar{0}$ se $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}$ e $\frac{c-1}{2}(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{0}$ se $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$. Como $d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$, ambas igualdades contradizem o Lema 4.13.

No subcaso 3.3.4, como $f(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{z}$ e $d(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{1}$, temos por (4.8) que $\bar{z} = \bar{x} - \bar{1}$. Deste modo, assim como no subcaso 3.3.3, aqui também temos que (4.10) implica $\frac{c+1}{2}(\bar{y} - \bar{x}) = \bar{0}$ se $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}$ e $\frac{c-1}{2}(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{0}$ se $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$. Isto também contradiz o Lema 4.13 pois $d(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_{2c}^e$. Portanto, encontramos uma contradição para todos os possíveis casos e isto completa a demonstração. \square

Dado um grafo arbitrário G , para cada k -coloração de arestas ψ deste grafo podemos considerar uma tabela $M = M(\psi, G)$ de ordem $|V(G)|$ por $|V(G)|$ definida do seguinte modo:

- (i) As linhas e colunas de M são indexadas pelos vértices de G .
- (ii) Se $\{v_1, v_2\}$ é uma aresta de G , então na linha v_1 e na coluna v_2 de M é colocado $\psi(\{v_1, v_2\})$.
- (iii) Se $\{v_1, v_2\}$ não é uma aresta de G , então não é plotado nada na linha v_1 e coluna v_2 de M .

Exemplo 4.16. A Tabela 4.1 ilustra M para a coloração ψ definida em (4.9) no caso $c = 7$. Observe que M é simétrica pois $\psi(\{\bar{x}, \bar{y}\}) = \psi(\{\bar{y}, \bar{x}\})$. Além disso, cada elemento de $\mathbb{Z}_{14} \setminus \{\bar{1}, \bar{13}\}$ aparece exatamente uma única vez em cada linha e em cada coluna da tabela.

Para cada i no contradomínio de ψ , é fácil ver que $\psi^{-1}(i)$ é um conjunto de arestas independentes de G se, e somente se, i aparece no máximo uma vez em cada linha e em cada coluna de $M(\psi, G)$. Neste sentido, olhando para a Tabela 4.1, fica mais fácil enxergar o porque de fato $\{\psi^{-1}(\bar{i}) : \bar{i} \in \mathbb{Z}_{14} \setminus \{\bar{1}, \bar{13}\}\}$ é uma partição de $E(K_{7 \times 2})$ em conjuntos de arestas independentes, fato este que verificamos na demonstração da Proposição 4.15 para $c \geq 3$ ímpar arbitrário.

Observe na Tabela 4.1 que cada cor em $\mathbb{Z}_{14} \setminus \{\bar{1}, \bar{13}\}$ induz um 1-fator de $K_{7 \times 2}$. Tal propriedade vale de modo mais geral, isto é, para toda cor i tomada no contradomínio de ψ (definida em 4.9), $\psi^{-1}(i)$ produz um 1-fator de $K_{c \times 2}$. Em particular, ψ induz uma 1-fatoração do $K_{c \times 2}$. Mas existem muitas fatorações presentes na literatura, neste sentido, um questionamento natural é querer saber se a 1-fatoração produzida pela coloração ψ tem alguma propriedade especial em relação as demais.

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$			$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$			$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$			$\bar{10}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$
$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{10}$			$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$			$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$			$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$
$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$			$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$
$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{12}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$			$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$
$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$			$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{10}$	$\bar{5}$
$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$			$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$
$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$			$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$			$\bar{12}$	$\bar{6}$
$\bar{13}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$		
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$		

Tabela 4.1: $M(\psi, K_{7 \times 2})$ para ψ definido em (4.9)

Uma 1-fatoração de um grafo G é dita *perfeita* quando a soma direta de quaisquer dois 1-fatores é um ciclo hamiltoniano de G . Neste âmbito, Kotzig [51] propôs a seguinte conjectura.

Conjectura 4.17. (Kotzig, 1964) Para todo inteiro positivo n , existe uma 1-fatoração perfeita do grafo completo K_{2n} .

Embora tal conjectura seja relativamente famosa e perdure há várias décadas, existem poucas classes para o qual tal existência é conhecida. Uma dessas classes é quando n é primo ímpar, mostrado por Anderson [1] e Nakamura [57] de maneira independente (mais tarde Kobayashi [49] constatou que as respectivas construções eram, na verdade, isomorfas).

Cálculos preliminares, ainda não publicados, indicam que a 1-fatoração produzida em (4.9) é perfeita quando c é primo ímpar. Isto reforça a beleza da conexão que estabelecemos entre fatorações de grafos e distância de Lee através da função ψ . A demonstração para tal fato é extensa e foge um pouco do escopo desta monografia. Neste sentido, acreditamos que

poderemos relatá-la em um trabalho futuro (ver [70]). Na verdade, nosso principal objetivo com esta observação é mostrar ao leitor uma das possíveis aplicações que podemos fazer a partir de demonstrações inovadoras, mesmo que estas demonstrações sejam para resultados já conhecidos. No nosso caso, a Proposição 4.15.

Número de Ramsey multipartido para estrelas versus outros grafos

Um tópico de forte destaque dentro da teoria é a computação dos números de Ramsey envolvendo grafos estrela. De fato, existem dezenas de artigos que buscam estimar o valor do número de Ramsey $r(K_{1,n}, G)$ para as mais diferentes classes de grafos G , como, por exemplo, caminhos P_m , ciclos C_m , emparelhamentos mK_2 , leques \widehat{K}_m , árvores T_m , rodas W_m , ventiladores F_m , entre outros. O leitor interessado em consultar quais artigos trabalham com algum desses grafos, em específico, pode consultar as referências presentes na Seção 5.5 de [72].

Nosso objetivo neste capítulo é estender algumas destas estimativas sob duas perspectivas:

- 1) trabalhar com o grafo hospedeiro multipartido (em vez do completo);
- 2) trabalhar com um número arbitrário de estrelas (em vez de apenas uma).

Mais especificamente, analisaremos o número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, G)$ para certos grafos G . Note que o caso particular $s = k = 1$ corresponde ao célebre $r(K_{1,n}, G)$. Neste sentido, é esperado que muitos resultados clássicos referentes ao $r(K_{1,n}, G)$ possam ser ampliados para o âmbito multipartido e multicolorido. Veremos no decorrer do capítulo que esta expectativa poderá ser parcialmente comprovada. Vale a pena destacarmos que existem outros trabalhos que também investigam estrelas monocromáticas em colorações de grafos multipartidos, como por exemplo, [4, 36, 67].

Para melhor compreensão do leitor, optamos por dividir este capítulo em três seções. Na primeira, trabalharemos com o caso em que G é um caminho P_m . Na segunda, estudaremos o ciclo C_m impondo como hipótese m ímpar na maioria dos resultados. Por fim, na terceira

seção examinaremos o caso em que G é uma cópia do emparelhamento mK_2 .

5.1 Estrelas versus caminho

Conforme mencionado, nosso objeto de estudo nesta seção é o número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, G)$ quando G é uma cópia do caminho P_m . Em particular, o caso $s = k = 1$ corresponde ao clássico $r(K_{1,n}, P_m)$, número este já calculado por Parsons [61]. Um fato interessante é que, embora seja possível determinar o valor exato de $r(K_{1,n}, P_m)$, não é conhecida uma forma explícita para tal valor. Mais especificamente, a estratégia adotada por Parsons para resolver o problema foi determinar algumas classes exatas e trabalhar com uma relação de recorrência que recaísse nestas classes. A saber, a relação

$$r(K_{1,n}, P_m) = \max\{r(K_{1,n}, P_{m-1}), r(K_{1,n-m+1}, P_m) + m - 1\}.$$

Em outras palavras, para determinar o valor explícito de $r(K_{1,n}, P_m)$, é necessário antes conhecer o valor de instâncias menores. Este fato de determinar precisamente números de Ramsey via relações de recorrência é um fenômeno raro, potencializando assim a beleza do resultado.

O valor de $r(K_{1,n}, P_m)$ é conhecido explicitamente para $m \geq n$, conforme resultado abaixo.

Teorema 5.1. (Parsons [61]) Dados inteiros $m \geq n \geq 2$.

(i) Se $2n \leq m$, então $r(K_{1,n}, P_m) = m$.

(ii) Se $n \leq m \leq 2n - 1$, então $r(K_{1,n}, P_m) = 2n - 1$.

Ao tratarmos com a versão multipartida e com múltiplas estrelas, não foi possível determinar o valor exato do número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m)$ para instâncias arbitrárias. De qualquer modo, conseguimos generalizar várias classes exatas exibidas em [61] e estabelecer estimativas próximas às ótimas nos casos remanescentes. Começaremos esta seção exibindo uma classe exata para $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m)$ em que o caso particular $s = k = 1$ corresponde à parte (i) do Teorema 5.1.

Teorema 5.2. Dados inteiros $s, k \geq 1$ e $m, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $m \geq 2(S - k + s)$, então $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) = \lceil m/s \rceil$.

Demonstração: Tome $c = \lfloor (m-1)/s \rfloor$, note que $K_{c \times s}$ contém menos que m vértices. Em particular, $K_{c \times s}$ não contém cópia de P_m e, portanto,

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \geq \lfloor (m-1)/s \rfloor + 1 = \lceil m/s \rceil.$$

Para mostrar que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \leq \lceil m/s \rceil$, considere uma $(k+1)$ -coloração do grafo $K_{\lceil m/s \rceil \times s}$. Suponha que não há K_{1,n_i} monocromático na cor i para todo $i = 1, \dots, k$. Vamos utilizar o Teorema de Dirac (Teorema 1.14) para mostrar que, neste caso, deve haver um P_m monocromático na cor $k+1$.

Para cada vértice v e cada índice $i = 1, \dots, k+1$, denote por $d_i(v)$ o número de arestas da cor i que incidem no vértice v . Como $d_i(v) \leq n_i - 1$ para todo $i = 1, \dots, k$, temos

$$d_{k+1}(v) = d(v) - \sum_{i=1}^k d_i(v) \geq (\lceil m/s \rceil - 1)s - (S - k). \quad (5.1)$$

Por hipótese, $\lceil m/s \rceil s - \lceil m/s \rceil s/2 \geq m/2 \geq S - k + s$, assim, segue de (5.1) que

$$d_{k+1}(v) \geq \lceil m/s \rceil s - (S - k + s) \geq \lceil m/s \rceil s/2 = |V(K_{\lceil m/s \rceil \times s})|/2.$$

Como o vértice v é arbitrário, segue pelo Teorema de Dirac (Teorema 1.14) que o subgrafo (de $K_{\lceil m/s \rceil \times s}$) induzido pela cor $k+1$ é hamiltoniano, isto é, possui um ciclo que passa por todos os seus vértices. Em particular, como $m \leq \lceil m/s \rceil s = |V(K_{\lceil m/s \rceil \times s})|$, segue que há um P_m na cor $k+1$. Portanto, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \leq \lceil m/s \rceil$, completando a demonstração. \square

Um primeiro questionamento motivado pelo último resultado é indagar a importância da hipótese $m \geq 2(S - k + s)$, isto é, será que essa hipótese realmente é necessária? Ou ainda, será que ela pode ser enfraquecida?

Em busca de respostas para estas perguntas, vamos analisar o caso particular $s = k = 1$. Neste caso, Parsons [61] mostrou que $M_1(K_{1,n}, P_m) = 2n - 1$ quando $n \leq m \leq 2n - 1$. Em particular, $M_1(K_{1,n}, P_m) \neq m$ para $n \leq m \leq 2n - 2$. Isto quer dizer que, pelo menos no caso $s = k = 1$, a hipótese $m \geq 2(S - k + s)$ ($m \geq 2n$ para $s = k = 1$) parece ser realmente necessária. Na verdade, essa necessidade não se resume apenas ao caso $s = k = 1$, mas sim, para s e k arbitrários. Isto fica claro no próximo resultado. De fato, cálculos elementares

asseguram que $\lceil (S - k + \lfloor m/2 \rfloor) / s \rceil > \lceil m/s \rceil$ quando $m \leq 2(S - k - s)$. Assim, seguirá do próximo resultado que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \neq \lceil m/s \rceil$ quando $m \leq 2(S - k - s)$. Isto quer dizer que a hipótese $m \geq 2(S - k + s)$ no Teorema 5.2 não tem muita margem para ser melhorada.

Proposição 5.3. Dados inteiros $s, k \geq 1$ e $m, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Temos

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \geq \left\lceil \frac{S - k + \lfloor m/2 \rfloor}{s} \right\rceil.$$

Demonstração: Tome $c = \lfloor (S - k + \lfloor m/2 \rfloor - 1) / s \rfloor$. Como $\lceil (S - k + \lfloor m/2 \rfloor) / s \rceil = c + 1$, a demonstração estará completa se mostrarmos que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \geq c + 1$. Faremos isto utilizando o Lema 1.37, isto é, exibiremos grafos G e H tais que $K_{c \times s} = G \oplus H$ com $\chi'(G) \leq S - k$ e $P_m \not\subseteq H$.

Note que, se $cs < m$, então $K_{c \times s}$ tem menos que m vértices e neste caso temos trivialmente $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) > c$ (pois $P_m \not\subseteq K_{c \times s}$). Vamos assumir então que $cs \geq m$. Neste caso, podemos particionar os cs vértices do $K_{c \times s}$ em dois conjuntos, digamos A e B com $|A| = \lfloor m/2 \rfloor - 1$ e $|B| \geq |A|$.

Considere $H = (V(H), E(H))$ o subgrafo de $K_{c \times s}$ definido por $V(H) = V(K_{c \times s}) = A \cup B$ e $E(H) = \{\{u, v\} \in E(K_{c \times s}) : u \in A, v \in B\}$. Note que um caminho qualquer em H oscila os vértices entre A e B . Assim, como $|A| \leq |B|$, um caminho em H possui no máximo $|A| + (|A| + 1)$ vértices. Como $2|A| + 1 = 2(\lfloor m/2 \rfloor - 1) + 1 \leq m - 1$, segue que $P_m \not\subseteq H$.

Seja G o complementar de H em relação ao $K_{c \times s}$. Para aplicar o Lema 1.37, resta mostrarmos que $\chi'(G) \leq S - k$. Mas pelo Teorema de Vizing (Teorema 1.5),

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq (|B| - 1) + 1 = cs - |A| = \lfloor (S - k + \lfloor m/2 \rfloor - 1) / s \rfloor s - (\lfloor m/2 \rfloor - 1) \leq S - k.$$

Portanto, o resultado segue pelo Lema 1.37. \square

A parte (i) do Teorema 5.1 foi generalizada no Teorema 5.2. A parte (ii) também pode ser ampliada para o contexto multipartido dos números de Ramsey. Mas para mostrarmos isso, precisamos de um lema técnico exibido em [61].

Lema 5.4. (Parsons [61]) Dado um inteiro $j \geq 3$, seja G um grafo contendo um caminho P_j

que passa por todos os vértices de G . Denote este P_j pela sequência de vértices v_1, v_2, \dots, v_j e suponha que $d_G(v_1) > (j-1)/2$ e $d_G(v_j) > (j-1)/2$, então $C_j \subseteq G$.

Demonstração: Suponha por absurdo que G não contém C_j . Em particular, v_1 não é adjacente a v_j . Sejam $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ vértices adjacentes a v_j em G com

$$2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq j-1.$$

Então, para $l = 1, 2, \dots, r$, v_1 não é adjacente a v_{i_l+1} . De fato, caso contrário G iria conter um ciclo C_m através da sequência de vértices

$$v_{i_l}, v_{i_l-1}, \dots, v_1, v_{i_l+1}, v_{i_l+2}, \dots, v_k, v_{i_l}.$$

Sejam $v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_s}$ vértices adjacentes a v_1 em G . Então

$$v_1, v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_s}, v_{i_1+1}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_r+1} \quad (5.2)$$

são todos distintos. E ainda, como r e s são estritamente maiores que $(j-1)/2$ (por hipótese), segue de (5.2) que

$$j \geq r + s + 1 > \frac{j-1}{2} + \frac{j-1}{2} + 1 = j.$$

Um absurdo, portanto G contém um ciclo C_j . □

A parte (ii) do Teorema 5.1 apresenta uma classe exata quando $n \leq m \leq 2n-1$. Como estamos trabalhando com parâmetros s e k arbitrários, nosso desejo inicial era estender este resultado de modo a obter uma classe exata para m variando em um intervalo que dependesse não de n , mas sim dos parâmetros s, k e $S (= \sum_{i=1}^k n_i)$. Após uma análise minuciosa, percebemos que as hipóteses que precisávamos para estimar $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m)$ divergem para o limitante inferior e para o limitante superior. Além disso, os limitantes inferior e superior não coincidem para $s \geq 2$. Deste modo, optamos por dividir o resultado em dois casos. Assim as diferentes hipóteses para o limitante inferior e para o limitante superior são frisadas, conforme podemos ver no resultado abaixo.

Teorema 5.5. Dados inteiros $s, k \geq 1$ e $m, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$.

(i) Se $(S - k + 1) \leq m$, então $\lfloor 2(S - k)/s \rfloor + 1 \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m)$.

(ii) Se $m \leq 2(S - k) + 4s - 3$, então $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \leq \lfloor 2(S - k - 1)/s \rfloor + 3$.

Demonstração: *Parte (i)* Seja $c = \lfloor 2(S - k)/s \rfloor$. Para mostrar o item (i), basta aplicar o Lema 1.37 exibindo grafos G e H tais que $K_{c \times s} = G \oplus H$, $\chi'(G) \leq S - k$ e $P_m \not\subseteq H$. A ideia aqui é parecida com a que fizemos na demonstração da Proposição 5.3.

Como $|V(K_{c \times s})| = cs \leq 2(S - k)$, podemos particionar os vértices de $K_{c \times s}$ em dois conjuntos, digamos A e B , onde ambos possuem no máximo $(S - k)$ vértices. Considere $G = (V(G), E(G))$ o subgrafo bipartido de $K_{c \times s}$ definido por $V(G) = V(K_{c \times s}) = A \cup B$ e $E(G) = \{\{u, v\} \in E(K_{c \times s}) : u \in A, v \in B\}$. Tome H o complementar de G em relação ao grafo $K_{c \times s}$. Note que $K_{c \times s} = G \oplus H$, deste modo, poderemos aplicar o Lema 1.37 se mostrarmos que $\chi'(G) \leq S - k$ e $P_m \not\subseteq H$.

Como cada componente conexa de H está totalmente contida ou em A ou em B , segue que um caminho em H tem no máximo $\max\{|A|, |B|\}$ vértices. Mas da maneira que tomamos os conjuntos A e B e da hipótese $(S - k + 1) \leq m$, temos $\max\{|A|, |B|\} \leq S - k \leq m - 1$. Deste modo, H não possui um caminho com m vértices, isto é, $P_m \not\subseteq H$. Por fim, note que G é um grafo bipartido, assim, segue pelo Teorema 1.7 que $\chi'(G) = \Delta(G) \leq \max\{|A|, |B|\} \leq S - k$. Portanto, o Lema 1.37 estabelece que $M_s(K_{1, n_1}, \dots, K_{1, n_k}, P_m) \geq c + 1 = \lfloor 2(S - k)/s \rfloor + 1$, mostrando o primeiro item do teorema.

A partir de agora vamos “esquecer” a definição do parâmetro c e dos grafos G e H adotados no item anterior para que possamos utilizar essas mesmas notações no próximo item. Usaremos notações usuais, pois acreditamos que o leitor tenha mais facilidade na compreensão quando as notações são fixadas.

Parte (ii) Seja $c = \lceil 2(S - k - 1)/s \rceil + 3$. Suponha por absurdo que $M_s(K_{1, n_1}, \dots, K_{1, n_k}, P_m) > c$. Então existem grafos G e H tais que $K_{c \times s} = G \oplus H$, $\Delta(G) \leq S - k$ e $P_m \not\subseteq H$. Em particular,

$$\delta(H) = (c - 1)s - \Delta(G) \geq (\lceil 2(S - k - 1)/s \rceil + 2)s - (S - k) \geq S - k + 2s - 2. \quad (5.3)$$

Sejam v_1, \dots, v_j os vértices de um caminho máximo P_j em H . Naturalmente, podemos supor que v_1 e v_j correspondem aos vértices extremais deste caminho. Além disso, como

$P_m \not\subseteq H$, segue por (5.3) que

$$m - 1 \geq j \geq \delta(H) + 1 \geq S - k + 2s - 1. \quad (5.4)$$

Denote por v_{j+1}, \dots, v_{cs} os $cs - j$ vértices de $K_{c \times s}$ (e de H) que não estão no caminho P_j que tomamos inicialmente. De (5.4), temos

$$cs - j \leq cs - (S - k + 2s - 1) = (\lceil 2(S - k - 1)/s \rceil + 3)s - (S - k + 2s - 1). \quad (5.5)$$

Mas $\lceil 2(S - k - 1)/s \rceil = \lfloor (2(S - k) - 3)/s \rfloor + 1$, assim, segue de (5.3) e (5.5) que

$$cs - j \leq (\lfloor (2(S - k) - 3)/s \rfloor + 4)s - (S - k + 2s - 1) \leq S - k + 2s - 2 \leq \delta(H). \quad (5.6)$$

Como $cs - j \leq \delta(H)$, cada vértice v_{j+1}, \dots, v_{cs} é adjacente (com relação ao grafo H) a pelo menos um vértice que está fora do conjunto $\{v_{j+1}, \dots, v_{cs}\}$. Em particular, existe $i_0 \in \{1, \dots, j\}$ tal que $\{v_{j+1}, v_{i_0}\}$ é uma aresta de H .

Denote por W o subgrafo de H induzido pelos vértices v_1, \dots, v_j . Pela maximalidade do caminho P_j em H , segue que os vértices extremais v_1 e v_j não são adjacentes a nenhum dos vértices v_{j+1}, \dots, v_{cs} (com relação ao grafo H). Deste modo, temos $d_W(v_1) = d_H(v_1)$ e $d_W(v_j) = d_H(v_j)$. Assim, usando a desigualdade (5.4) e a hipótese $m \leq 2(S - k) + 4s - 3$, segue que para $l = 1$ e $l = j$,

$$d_W(v_l) \geq \delta(H) \geq S - k + 2s - 2 \geq (m - 1)/2 > (m - 2)/2 \geq (j - 1)/2.$$

Segue da desigualdade acima e do Lema 5.4 que os vértices v_1, \dots, v_j formam um ciclo C_j em W . Como $W \subseteq H$ e $\{v_{j+1}, v_{i_0}\}$ é uma aresta de H com $i_0 \in \{1, \dots, j\}$, segue que os vértices v_1, \dots, v_j, v_{j+1} formam um caminho em H com $j + 1$ vértices e isto contraria a maximalidade de j . Absurdo, portanto $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \leq c = \lceil 2(S - k - 1)/s \rceil + 3$. \square

Observe que os limitantes inferior e superior apresentados no teorema anterior não coincidem quando $s \geq 2$. No entanto, eles são iguais quando $s = 1$. Outro fato curioso é que este valor exato obtido para $s = 1$ vale quando m está no intervalo $(S - k + 1) \leq m \leq 2(S - k + 1) - 1$. Lembre-se que se m é estritamente maior que $2(S - k + 1) - 1$, então o valor de $M_1(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m)$ já foi determinado no Teorema 5.2. Em outras palavras, o caso

$s = 1$ nos Teoremas 5.2 e 5.5 produz uma generalização do Teorema 5.1 para um número arbitrário de estrelas, conforme o corolário abaixo.

Corolário 5.6. Dados inteiros $k \geq 1$ e $m, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$.

(i) Se $m \geq 2(S - k + 1)$, então $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) = m$.

(ii) Se $(S - k + 1) \leq m \leq 2(S - k + 1) - 1$, então $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) = 2(S - k) + 1$.

Em adição ao Teorema 5.1, Parsons [61] mostrou também que $r(K_{1,n}, P_m) \leq n + m - 1$. Além disso, verificou que este limitante é ótimo em alguns casos. Veremos agora que este resultado também pode ser generalizado para o âmbito dos números de Ramsey multipartidos e para um número arbitrário de estrelas.

Proposição 5.7. Dados inteiros $s, k \geq 1$ e $m, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Vale o limite superior

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \leq \left\lceil \frac{S - k + m - 1}{s} \right\rceil + 1.$$

Demonstração: Seja $c = \lceil (S - k + m - 1)/s \rceil + 1$. Tome uma $(k + 1)$ -coloração arbitrária de $K_{c \times s}$. Assim como antes, para cada vértice v e cada índice $i = 1, \dots, k + 1$, denotaremos por $d_i(v)$ o número de arestas da cor i que incidem no vértice v .

Suponha que não há cópia monocromática do grafo K_{1,n_i} na cor i para todo $i = 1, \dots, k$. Em particular, temos $d_i(v) \leq n_i - 1$ para todo vértice v e todo índice $i = 1, \dots, k$. Assim,

$$d_{k+1}(v) = d(v) - \sum_{i=1}^k d_i(v) \geq (c - 1)s - (S - k) = \lceil (S - k + m - 1)/s \rceil s - (S - k) \geq m - 1.$$

Portanto, $K_{c \times s}$ contém um P_m monocromático na cor $k + 1$ e

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \leq c = \left\lceil \frac{S - k + m - 1}{s} \right\rceil + 1.$$

□

Conforme já mencionado, o caso particular $s = k = 1$ na proposição anterior corresponde a estimativa $r(K_{1,n}, P_m) \leq n + m - 1$ exibida por Parsons [61]. Neste mesmo trabalho, Parsons verifica ainda sua otimalidade sob certas hipóteses. Tal fato nos leva a crer que o limite exibido na Proposição 5.7 também possa ser ótimo para algumas instâncias além

daquelas já apresentadas no caso $s = 1$. As próximas construções nos revelarão que estas expectativas são correspondidas.

Nossa estratégia de demonstração na Proposição 5.3 e no Teorema 5.5 (item (i)) foi construir dois grafos G e H de modo que $K_{c \times s} = G \oplus H$, $\chi'(G) \leq S - k$ e $P_m \not\subseteq H$. Para construir um grafo H que não contém P_m , nosso método na Proposição 5.3 foi considerar H como sendo um subgrafo de $K_{c \times s}$ que fosse bipartido e uma das suas duas classes tivesse no máximo $\lfloor m/2 \rfloor - 1$ vértices. Já no item (i) do Teorema 5.5, contamos com a ajuda da hipótese $(S - k + 1) \leq m$ para construirmos um grafo H onde suas componentes conexas tivessem menos que m vértices. É claro que tudo isso foi feito de modo que pudéssemos ter controle sobre o índice cromático de G (complementar de H em relação ao $K_{c \times s}$). Nossa ideia agora é tirar a hipótese $(S - k + 1) \leq m$ e construir um grafo H contendo o maior número possível de componentes conexas de tamanho menor que m e que ao mesmo tempo tenhamos $\delta(H)$ o maior possível. Isso faz com que $\Delta(G)$ (e conseqüentemente $\chi'(G)$) seja menor e potencializa nosso resultado. Como consequência da ideia acima, obtivemos o limitante inferior descrito abaixo que é ótimo para certas instâncias, conforme veremos mais adiante.

Proposição 5.8. Dados inteiros $s, k \geq 1$ e $m, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Vale a estimativa

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \geq \left\lfloor \frac{S - k + m - 3 + s}{s(m-1)} \right\rfloor (m-1) + 1.$$

Demonstração: Para facilitar a demonstração, denote $w = \lfloor \frac{S-k+m-3+s}{s(m-1)} \rfloor$ e $c = w(m-1)$. Devemos mostrar que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \geq c + 1$. Se $c < 2$ então o resultado é trivial. Assumiremos então que $c \geq 2$ e exibiremos grafos G e H tais que $K_{c \times s} = G \oplus H$, $\chi'(G) \leq S - k$ e $P_m \not\subseteq H$. Deste modo, a demonstração seguirá pelo Lema 1.37.

Afirmção: $K_{c \times s}$ contém ws cópias disjuntas do grafo completo K_{m-1} (isto é, $wsK_{m-1} \subseteq K_{c \times s}$). Para mostrar esta afirmação, denote as c classes de vértices do $K_{c \times s}$ por L_1, \dots, L_c onde para cada $i = 1, \dots, c$, L_i é da forma $L_i = \{v_1^i, v_2^i, \dots, v_s^i\}$. Para inteiros α e β com $1 \leq \alpha \leq s$ e $1 \leq \beta \leq w$, considere $A_\alpha^\beta = \{v_\alpha^j : (\beta-1)(m-1) < j \leq \beta(m-1)\}$. Note que $\{A_\alpha^\beta : 1 \leq \alpha \leq s, 1 \leq \beta \leq w\}$ é uma partição dos vértices de $K_{c \times s}$. Além disso, para cada α e β , o subgrafo de $K_{c \times s}$ induzido pelos vértices de A_α^β é isomorfo ao grafo completo K_{m-1} . Como α varia de 1 a s e β varia de 1 a w , segue que $wsK_{m-1} \subseteq K_{c \times s}$.

Defina $H = wsK_{m-1}$ e G o complementar de H em relação ao grafo $K_{c \times s}$. Então $K_{c \times s} = G \oplus H$ e $P_m \not\subseteq H$ (pois cada componente conexa de H possui menos que m vértices), deste modo, para aplicarmos o Lema 1.37, resta mostrarmos que $\chi'(G) \leq S - k$.

Pelo Teorema de Vizing (Teorema 1.5), temos $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 = ((c-1)s - \delta(H)) + 1$. Mas $\delta(H) = m - 2$, assim

$$\chi'(G) \leq cs - s - m + 3 = \left\lfloor \frac{S - k + m - 3 + s}{s(m-1)} \right\rfloor (m-1)s - s - m + 3 \leq S - k.$$

Deste modo, uma aplicação do Lema 1.37 garante o resultado. \square

Cálculos elementares mostram que, quando $s \geq 2$ e $s(m-1)$ divide $S - k + m - 3 + s$, então o limite inferior apresentado na Proposição 5.8 coincide com o limite superior apresentado na Proposição 5.7. Deste modo, podemos afirmar que ambas as estimativas são ótimas sob certas hipóteses. O nosso próximo resultado produz um limite inferior que também é ótimo para muitas instâncias. Para percepção de tal fato, sugerimos que o leitor o compare com a Proposição 5.7.

Proposição 5.9. Dados inteiros $s, k \geq 1$ e $m, n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Sejam (pelo algoritmo da divisão) inteiros q, r tais que $\lceil (S - k + m - 3)/s \rceil = q(m-2) + r$ com $0 \leq r < m - 2$. Se $q \geq r$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \geq \left\lceil \frac{S - k + m - 3}{s} \right\rceil + 1.$$

Demonstração: Tome $c = \lfloor (S - k + m - 4)/s \rfloor + 1 = \lceil (S - k + m - 3)/s \rceil$. Novamente vamos mostrar que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \geq c + 1$ utilizando o Lema 1.37, isto é, exibiremos grafos G e H tais que $K_{c \times s} = G \oplus H$, $\chi'(G) \leq S - k$ e $P_m \not\subseteq H$.

Note que $c = \lceil (S - k + m - 3)/s \rceil = q(m-2) + r = (q-r)(m-2) + r(m-1)$. Deste modo, como $q - r \geq 0$ (por hipótese), os vértices de uma cópia do K_c podem ser particionados em q conjuntos, sendo $q - r$ conjuntos com $m - 2$ vértices cada e os outros r conjuntos com $m - 1$ vértices cada. Consequentemente, podemos particionar os vértices do $K_{c \times s}$ em $s(q-r)$ conjuntos de ordem $m - 2$ e sr conjuntos de ordem $m - 1$. Note ainda que esta partição pode ser tomada de modo que vértices pertencentes a mesma classe (de vértices) de $K_{c \times s}$ estejam em conjuntos distintos na partição. Assim, o grafo $K_{c \times s}$ contém uma cópia do grafo

H , onde $H = s(q - r)K_{m-2} + srK_{m-1}$. Além disso, $P_m \not\subseteq H$ pois cada componente conexa de H possui menos que m vértices.

Defina G como sendo o complementar de H em relação ao $K_{c \times s}$. Para aplicarmos o Lema 1.37, resta mostrarmos que $\chi'(G) \leq S - k$. O Teorema de Vizing (Teorema 1.5) garante que

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 = ((c - 1)s - \delta(H)) + 1.$$

Mas $\delta(H) \geq m - 3$, logo

$$\chi'(G) \leq (c - 1)s - m + 4 = \lfloor (S - k + m - 4)/s \rfloor s - m + 4 \leq S - k.$$

Portanto, segue pelo Lema 1.37 que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, P_m) \geq c + 1 = \lceil \frac{S-k+m-3}{s} \rceil + 1$. \square

Os limitantes produzidos pelas Proposições 5.7 e 5.9 coincidem ou possuem uma diferença de até duas unidades. Podemos refinar ainda mais estas estimativas quando estamos trabalhando com apenas uma estrela, o que produz o valor exato de $M_s(K_{1,n}, P_m)$ quando n é suficientemente grande.

Teorema 5.10. Dados inteiros $s \geq 1$, $n \geq 2$ e $m \geq 3$, tome (pelo algoritmo da divisão) inteiros q, r tais que $\lceil (n + m - 3)/s \rceil = q(m - 2) + r$ com $0 \leq r < m - 2$. Se $q \geq r$, então

$$M_s(K_{1,n}, P_m) = \begin{cases} (n + m - 3)/s + 1 & \text{se } s \text{ divide } (n + m - 3) \text{ e} \\ & (m - 1) \text{ não divide } (n - 2 + s); \\ \lceil (n + m - 2)/s \rceil + 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: De maneira análoga ao que fizemos na Proposição 5.9, a condição $q \geq r$ assegura que $M_s(K_{1,n}, P_m) \geq \lceil (n + m - 3)/s \rceil + 1$. De fato, assim como foi feito naquela proposição, se definirmos $j = \lceil (n + m - 3)/s \rceil$, o grafo $K_{j \times s}$ contém uma cópia de $H := s(q - r)K_{m-2} + srK_{m-1}$. Além disso, definindo por G o complementar de H em relação ao $K_{j \times s}$, temos que $\Delta(G) \leq n - 1$. Em particular, G não contém $K_{1,n}$ e H não contém P_m , assim, $M_s(K_{1,n}, P_m) \geq j + 1$. Portanto, combinando com a Proposição 5.7,

$$\lceil (n + m - 3)/s \rceil + 1 \leq M_s(K_{1,n}, P_m) \leq \lceil (n + m - 2)/s \rceil + 1. \quad (5.7)$$

Note que os limitantes superior e inferior exibidos acima coincidem quando s não divide $(n + m - 3)$. Deste modo, o valor exato segue para este caso. Resta analisarmos quando

s divide $(n + m - 3)$. Para isto, defina $c = (n + m - 3)/s + 1$. Dividiremos o resto da demonstração em dois casos: (i) se $(m - 1)$ divide cs ; (ii) se $(m - 1)$ não divide cs .

Note que $(m - 1)$ divide cs se, e somente se, $(m - 1)$ divide $(n - 2 + s)$. Assim, devemos mostrar que $M_s(K_{1,n}, P_m) = c + 1$ no caso (i) e $M_s(K_{1,n}, P_m) = c$ no caso (ii). Mas por (5.7), temos $c \leq M_s(K_{1,n}, P_m) \leq c + 1$, assim, basta mostrarmos que $M_s(K_{1,n}, P_m) \geq c + 1$ no caso (i) e $M_s(K_{1,n}, P_m) \leq c$ no caso (ii).

Caso (i) Como $(m - 1)$ divide cs , então $K_{c \times s}$ possui $cs/(m - 1)$ cópias disjuntas do grafo completo K_{m-1} (isto vale pois $c \geq m - 1$, uma vez que, por hipótese, $c - 1 = q(m - 2) + r$ e $q \geq 1$). Definindo $H = (cs/(m - 1))K_{m-1}$ e G o complementar de H em relação ao $K_{c \times s}$, temos

$$\Delta(G) = (c - 1)s - \delta(H) = (c - 1)s - (m - 2) = n - 1.$$

Assim, G não contém um $K_{1,n}$. Como H não contém um P_m , temos $M_s(K_{1,n}, P_m) \geq c + 1$.

Caso (ii) Suponha por absurdo que $M_s(K_{1,n}, P_m) > c$. Então existem grafos G e H tais que $K_{c \times s} = G \oplus H$, $K_{1,n} \not\subseteq G$ e $P_m \not\subseteq H$ onde podemos supor sem perda de generalidade que $|V(G)| = |V(H)| = |V(K_{c \times s})|$.

Como $K_{1,n} \not\subseteq G$, temos que $\Delta(G) \leq n - 1$. Assim,

$$\delta(H) = (c - 1)s - \Delta(G) \geq (c - 1)s - (n - 1) = m - 2.$$

De $\delta(H) \geq m - 2$, segue que cada componente conexa de H possui no mínimo $m - 1$ vértices. Temos assim dois possíveis casos:

- (1) todas as componentes conexas de H possuem exatamente $m - 1$ vértices;
- (2) existe uma componente conexa de H com pelo menos m vértices.

No caso (1), como $\delta(H) \geq m - 2$, segue que cada componente conexa de H é isomorfa ao grafo completo K_{m-1} . Assim, $(m - 1)$ divide $|V(H)|$, mas $|V(H)| = |V(K_{c \times s})| = cs$ e $(m - 1)$ não divide cs . Absurdo.

No caso (2), seja W uma componente conexa de H com pelo menos m vértices. Pelo Lema 1.13, W contém um caminho P_t onde $t = \min\{2\delta(W) + 1, |V(W)|\}$. Como W é uma componente conexa de H , temos $\delta(W) \geq \delta(H) \geq m - 2$, assim $t = \min\{2\delta(W) + 1, |V(W)|\} \geq m$ pois $m \geq 3$. Em particular, W contém um P_m . Absurdo, pois $W \subseteq H$ e $P_m \not\subseteq H$. Isto

completa a demonstração. \square

No teorema acima, a única hipótese necessária para calcular o valor de $M_s(K_{1,n}, P_m)$ é $q \geq r$ onde q e r correspondem ao quociente e o resto da divisão de $\lceil (n + m - 3)/s \rceil$ por $m - 2$, respectivamente. Para m fixado, note que r é limitado superiormente por $m - 3$. Deste modo, para n suficientemente grande sempre teremos $q \geq r$. O quão grande n precisa ser está retratado no corolário abaixo.

Corolário 5.11. Sejam inteiros $s \geq 1$, $n \geq 2$ e $m \geq 3$ tais que $n \geq (s(m - 2) - 1)(m - 3)$, temos

$$M_s(K_{1,n}, P_m) = \begin{cases} (n + m - 3)/s + 1 & \text{se } s \text{ divide } n + m - 3 \text{ e} \\ & (m - 1) \text{ não divide } (n - 2 + s); \\ \lceil (n + m - 2)/s \rceil + 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Considere, pelo algoritmo da divisão, inteiros q, r tais que

$$\lceil (n + m - 3)/s \rceil = q(m - 2) + r \text{ com } 0 \leq r < m - 2.$$

O resultado seguirá do Teorema 5.10 se mostrarmos que $q \geq r$, ou ainda, como $r \leq m - 3$, basta mostrarmos que $q \geq m - 3$.

Denote $z = \lceil (n + m - 3)/s \rceil$. Note que $q = \lfloor z/(m - 2) \rfloor$. Assim,

$$q \geq m - 3 \iff \lfloor z/(m - 2) \rfloor \geq m - 3 \iff z/(m - 2) \geq m - 3.$$

Deste modo, basta mostrarmos que $z \geq (m - 2)(m - 3)$, ou ainda, pela definição de z , é suficiente que tenhamos $(n + m - 3)/s \geq (m - 2)(m - 3)$. Mas isto equivale a nossa hipótese $n \geq (s(m - 2) - 1)(m - 3)$. Portanto, $q \geq r$ vale e o resultado segue do Teorema 5.10. \square

O caso $s = 1$ do corolário acima recai em uma outra classe exata computada por Parsons [61], conforme mencionado no teorema abaixo.

Teorema 5.12. (Parsons [61]) Dados inteiros $m, n \geq 2$ com $n \geq (m - 3)^2$, temos

$$r(K_{1,n}, P_m) = \begin{cases} n + m - 2 & \text{se } m - 1 \text{ não divide } n - 1; \\ n + m - 1 & \text{se } m - 1 \text{ divide } n - 1. \end{cases}$$

5.2 Estrelas versus ciclo ímpar

Nosso objetivo nesta seção é estudar o número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, G)$ quando G é uma cópia do ciclo C_m . Em particular, o caso $s = k = 1$ corresponde ao clássico $r(K_{1,n}, C_m)$. Número este estimado em diversos artigos, embora ainda em aberto na literatura.

Para $m \geq 2n$, Lawrence [52] calculou $r(K_{1,n}, C_m) = m$. Neste mesmo trabalho, Lawrence mostrou que $r(K_{1,n}, C_m) = 2n+1$ para $m < 2n$, desde que m seja ímpar. O caso remanescente $r(K_{1,n}, C_m)$ com $m < 2n$ e m par é o caso que se revela ser mais desafiador e por isso costuma ser tratado com m fixado. O caso $m = 4$ já é bastante intrigante, desafiando a comunidade acadêmica desde os anos 70. Chen, Cheng e Zhang [19] e Parsons [62, 63] utilizaram como ferramenta planos projetivos para determinar classes exatas para $r(K_{1,n}, C_4)$. Os trabalhos [35, 36] também utilizam esta classe especial de designs e determinam algumas classes exatas para $b(K_{1,n}, C_4)$ e $M_s(K_{1,n}, C_4)$. Para $m = 6$, a literatura é ainda mais escassa. Recentemente foram computados os valores de $r(K_{1,n}, C_6)$ para $n \leq 11$ (ver [10]).

Quando m é um número par pequeno (em relação aos n_i 's), até mesmo o caso particular $s = k = 1$ do número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m)$ permanece um problema aberto. Assim, é intuitivo pensar que o caso geral seja um problema ainda mais complexo e desafiador (de fato, cálculos preliminares confirmam nossa intuição). Neste sentido, faremos aqui algo semelhante ao feito em Lawrence [52], isto é, trabalharemos com m grande e/ou m ímpar. Com esta hipótese, Lawrence [52] obteve sucesso ao determinar o valor exato do número $r(K_{1,n}, C_m)$, mas como estamos trabalhando em um ambiente mais geral, nossos resultados são um pouco mais modestos. Mais especificamente, conseguimos generalizar parcialmente os resultados, encontrando algumas classes exatas e, nos demais casos, limitantes inferiores e superiores que diferem em apenas uma unidade.

Começaremos nossos resultados calculando o valor exato de $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m)$ para m suficientemente grande.

Proposição 5.13. Dados inteiros $s, k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ e $m \geq 3$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $m \geq 2(S - k + s) + 1$, então $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) = \lceil m/s \rceil$.

Demonstração: A demonstração é análoga à feita no Teorema 5.2 possuindo apenas algu-

mas diferenças técnicas.

Tome $c = \lfloor (m-1)/s \rfloor$. Como $K_{c \times s}$ contém menos que m vértices, então $K_{c \times s}$ não contém C_m , logo

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \geq \lfloor (m-1)/s \rfloor + 1 = \lceil m/s \rceil.$$

Para mostrar que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq \lceil m/s \rceil$, considere uma $(k+1)$ -coloração do $K_{\lceil m/s \rceil \times s}$ e suponha que não há K_{1,n_i} monocromático na cor i para todo $i = 1, \dots, k$. Neste caso, devemos mostrar que há um C_m monocromático na cor $k+1$.

Para cada vértice v e cada índice $i = 1, \dots, k+1$, denote por $d_i(v)$ o número de arestas da cor i que incidem no vértice v . Como $d_i(v) \leq n_i - 1$ para todo $i = 1, \dots, k$, temos

$$d_{k+1}(v) = d(v) - \sum_{i=1}^k d_i(v) \geq (\lceil m/s \rceil - 1)s - (S - k) = \lceil m/s \rceil s - (S - k + s). \quad (5.8)$$

Da hipótese $m \geq 2(S - k + s) + 1$, temos $\lceil m/s \rceil s - \lceil m/s \rceil s/2 \geq m/2 > S - k + s$, isto é,

$$\lceil m/s \rceil s - (S - k + s) > \lceil m/s \rceil s/2. \quad (5.9)$$

Deste modo, as equações (5.8) e (5.9) produzem

$$d_{k+1}(v) > \lceil m/s \rceil s/2 = |V(K_{\lceil m/s \rceil \times s})|/2.$$

Como o vértice v é arbitrário, o Teorema 1.16 garante que o subgrafo de $K_{\lceil m/s \rceil \times s}$ induzido pela cor $k+1$ é pancíclico. Em particular, como $m \leq \lceil m/s \rceil s = |V(K_{\lceil m/s \rceil \times s})|$, segue que há um ciclo C_m na cor $k+1$. Portanto, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq \lceil m/s \rceil$, completando a demonstração. \square

A Proposição 5.13 determina $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m)$ quando $m \geq 2(S - k + s) + 1$. Para a situação remanescente, um limitante superior é descrito abaixo.

Proposição 5.14. Dados inteiros $s, k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ e $m \geq 3$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $m < 2(S - k + s) + 1$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq \left\lceil \frac{2(S - k) + 1}{s} \right\rceil + 2. \quad (5.10)$$

Demonstração: Tome $c = \lceil (2(S - k) + 1)/s \rceil + 1$. Suponha por absurdo que

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) > c + 1.$$

Então existem grafos G e H tais que $K_{(c+1) \times s} = G \oplus H$ com $\Delta(G) \leq S - k$ e $C_m \not\subseteq H$. Deste modo, para cada vértice v de $K_{(c+1) \times s}$,

$$d_H(v) = cs - d_G(v) \geq cs - (S - k). \quad (5.11)$$

Note ainda que

$$\frac{(c-1)s}{2} = \left\lceil \frac{2(S-k)+1}{s} \right\rceil \frac{s}{2} > S - k. \quad (5.12)$$

Assim, combinando (5.11) e (5.12),

$$d_H(v) \geq cs - (S - k) > cs - (c-1)s/2 = (c+1)s/2 = |V(K_{(c+1) \times s})|/2 = |V(H)|/2.$$

Logo, o Teorema 1.16 garante que H é pancíclico. Mas

$$|V(H)| = (c+1)s = (\lceil (2(S-k)+1)/s \rceil + 2)s \geq 2(S-k) + 1 + 2s > m,$$

assim $C_m \subseteq H$, um absurdo. Portanto, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq c + 1$. \square

O caso particular $s = k = 1$ da Proposição 5.14 revela que $r(K_{1,n}, C_m) \leq 2n + 1$ quando $m < 2n + 1$. Conforme [52], vale a igualdade nesta expressão ao adicionarmos a hipótese m ímpar. Seguindo esta analogia, será que a hipótese m ímpar na Proposição 5.14 também garante a igualdade em (5.10)? O próximo resultado estabelece que com m ímpar e mais algumas hipóteses adicionais, a igualdade em (5.10) de fato é válida.

Proposição 5.15. Dados inteiros $s, k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ e $m \geq 3$ ímpar, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e $c = \lceil (2(S - k) + 1)/s \rceil + 1$. Se c e $cs/2$ são ambos pares e $m < 2(S - k + s) + 1$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) = \left\lceil \frac{2(S-k)+1}{s} \right\rceil + 2.$$

Demonstração: O limite superior $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq \lceil (2(S-k)+1)/s \rceil + 2$ decorre da Proposição 5.14. Para mostrar o limitante inferior, aplicaremos o Lema 1.37 exibindo grafos G e H tais que $K_{c \times s} = G \oplus H$ com $\chi'(G) \leq S - k$ e $C_m \not\subseteq H$.

Divida as c classes de vértices de $K_{c \times s}$ em dois conjuntos, digamos A e B , contendo $c/2$ classes de vértices cada (podemos fazer isto pois c é par). Considere os grafos $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$ definidos por $V(G) = V(H) = V(K_{c \times s})$, $E(H) = \{\{u, v\} : u \in A, v \in B\}$ e $E(G) = E(K_{c \times s}) - E(H)$. Note que $K_{c \times s} = G \oplus H$. Além disso, como H é um grafo bipartido e m é ímpar, então $C_m \not\subseteq H$. Para aplicarmos o Lema 1.37, resta mostrarmos que $\chi'(G) \leq S - k$.

Note que o grafo G é formado por duas componentes conexas isomorfas ao $K_{c/2 \times s}$, assim $\chi'(G) = \chi'(K_{c/2 \times s})$. Usando o Teorema 4.5 e a hipótese $cs/2$ par, segue que

$$\chi'(G) = \Delta(K_{c/2 \times s}) = (c/2 - 1)s = (\lceil (2(S - k) + 1)/s \rceil - 1)s/2 = \lfloor (2(S - k))/s \rfloor s/2 \leq S - k.$$

Portanto, uma simples aplicação do Lema 1.37 assegura o resultado. \square

Retomemos ao caso $s = k = 1$. Neste contexto, as hipóteses da Proposição 5.15 revelam que $r(K_{1,n}, C_m) = 2n + 1$ quando m é ímpar, $m < 2n + 1$ e n é par. Mas conforme [52], não é necessário que n seja par para que tenhamos $r(K_{1,n}, C_m) = 2n + 1$ quando m é ímpar e $m < 2n + 1$. Neste sentido, o caso remanescente n ímpar é englobado no resultado abaixo.

Proposição 5.16. Sejam inteiros $s, k \geq 1$, $m \geq 3$ ímpar e $n_1, \dots, n_k \geq 3$ também todos ímpares, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e $c = \lceil (2(S - k) + 1)/s \rceil + 1$. Se c é par, $cs/2$ é ímpar e $m < 2(S - k + s) + 1$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) = \left\lceil \frac{2(S - k) + 1}{s} \right\rceil + 2. \quad (5.13)$$

Demonstração: O limite superior decorre da Proposição 5.14. Vamos mostrar então que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) > c$.

A ideia da demonstração é parecida com a apresentada na Proposição 5.15. De fato, como c é par, então aqui também podemos considerar G e H os grafos construídos lá. Em particular, também valem $K_{c \times s} = G \oplus H$ e $C_m \not\subseteq H$ pois m é ímpar. No entanto, não podemos garantir que $\chi'(G) \leq S - k$ pois, para isto, precisaríamos da hipótese $cs/2$ par, o que não ocorre. Deste modo, não podemos aplicar o Lema 1.37. Nossa estratégia então será mostrar que G pode ser escrito da forma $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$, com $K_{1,n_i} \not\subseteq G_i$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Note que G é um grafo regular de grau $(c/2 - 1)s$. Além disso, por hipótese, c é par e $cs/2$ é ímpar. Consequentemente s é ímpar e $cs/2 - s$ é par, isto é, G é um grafo regular de grau par. Pelo Teorema 1.9, G é 2-fatorável, assim, G pode ser particionado em exatamente $(c/2 - 1)s/2$ 2-fatores. Observe que

$$\frac{(c/2 - 1)s}{2} = \frac{(c - 2)s}{4} = \left(\left\lfloor \frac{2(S - k) + 1}{s} \right\rfloor - 1 \right) \frac{s}{4} = \left\lfloor \frac{2(S - k)}{s} \right\rfloor \frac{s}{4} \leq \frac{S - k}{2} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{n_i - 1}{2} \right).$$

Assim, como cada $(n_i - 1)/2$ é inteiro (por hipótese cada n_i é ímpar), podemos particionar os $(c/2 - 1)s/2$ 2-fatores de G em k conjuntos, digamos A_1, \dots, A_k , de modo que $|A_i| \leq (n_i - 1)/2$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Para cada $i = 1, \dots, k$, defina G_i como a união de todos os 2-fatores de A_i . Assim $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ com $\Delta(G_i) = 2|A_i| \leq n_i - 1$. Em particular, $K_{1,n_i} \not\subseteq G_i$ para todo $i = 1, \dots, k$ e, portanto, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) > c$. \square

Observe que na demonstração da classe exata exibida na Proposição 5.16 usamos fortemente a hipótese de que n_1, \dots, n_k são ímpares. O próximo resultado ressalta a importância dessa hipótese mostrando que, se algum n_j é par, então a expressão (5.13) pode não ser verdadeira. Vale a pena ressaltar que, assim como na Proposição 5.14, no próximo resultado também não precisamos que m seja necessariamente ímpar.

Proposição 5.17. Dados inteiros $s, k \geq 1$, $m \geq 3$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ com algum n_j par, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e $c = \lceil (2(S - k) + 1)/s \rceil + 1$. Se c é par, $cs/2$ é ímpar e $m < 2(S - k + s) + 1$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq \left\lceil \frac{2(S - k)}{s} \right\rceil + 2.$$

Demonstração: Embora o limite superior apresentado aqui seja só um pouco melhor do que o apresentado na Proposição 5.14, a demonstração aqui é muito mais técnica e requer uma análise mais cuidadosa.

Seja $w = \lceil 2(S - k)/s \rceil + 2$. Suponha por absurdo que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) > w$. Então existem grafos G e H tais que $K_{w \times s} = G \oplus H$ com $\Delta(G) \leq S - k$ e $C_m \not\subseteq H$. E ainda, podemos supor que G é escrito na forma $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ com $K_{1,n_i} \not\subseteq G_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Para cada vértice $v \in V(K_{w \times s})$,

$$d_H(v) = (w-1)s - d_G(v) \geq (w-1)s - (S-k) = ws - (S-k+s). \quad (5.14)$$

Como $ws/2 = \lceil 2(S-k)/s + 2 \rceil s/2 \geq S-k+s$, segue por (5.14) que

$$d_H(v) \geq ws - (S-k+s) \geq ws - ws/2 = ws/2 = |V(K_{w \times s})|/2 = |V(H)|/2.$$

Logo, o Teorema 1.16 assegura que H é pancíclico ou H é isomorfo ao grafo bipartido completo $K_{\frac{|V(H)|}{2}, \frac{|V(H)|}{2}}$. Mas H não pode ser pancíclico pois $C_m \not\subseteq H$ e H contém m ou mais vértices (de fato, $|V(H)| = ws \geq m$ já que $m < 2(S-k+s) + 1$). Deste modo, H é isomorfo ao grafo bipartido completo $K_{\frac{|V(H)|}{2}, \frac{|V(H)|}{2}}$. Em particular, $\delta(H) = |V(H)|/2 = ws/2$ e assim

$$S-k \geq \Delta(G) = (w-1)s - \delta(H) = \frac{ws}{2} - s = \left(\left\lceil \frac{2(S-k)}{s} \right\rceil + 2 \right) \frac{s}{2} - s \geq S-k. \quad (5.15)$$

Como a primeira e a última expressão na desigualdade (5.15) coincidem, então vale a igualdade em todas as suas desigualdades. Em particular, $\Delta(G) = S-k$ e também

$$\left(\left\lceil \frac{2(S-k)}{s} \right\rceil + 2 \right) \frac{s}{2} - s = S-k,$$

donde

$$\lceil 2(S-k)/s \rceil s/2 = S-k = (2(S-k)/s)s/2,$$

isto é, $\lceil 2(S-k)/s \rceil = 2(S-k)/s$. Em outras palavras, s divide $2(S-k)$ e assim, $c = w$.

Em particular, H é isomorfo ao grafo bipartido completo $K_{\frac{cs}{2}, \frac{cs}{2}}$. Deste modo, como $K_{c \times s} = G \oplus H$, segue que G é composto por duas componentes conexas isomorfas ao $K_{c/2 \times s}$.

Sabemos que $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ com $d_{G_i}(v) \leq n_i - 1$ para todo vértice v e todo $i = 1, \dots, k$. Assim, como G é regular e $\Delta(G) = S-k$, então para cada vértice $v \in K_{c \times s}$ temos

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = S-k = \Delta(G) = d_G(v) = \sum_{i=1}^k d_{G_i}(v) \leq \sum_{i=1}^k (n_i - 1),$$

logo $d_{G_i}(v) = n_i - 1$ para todo vértice $v \in K_{c \times s}$ e todo $i = 1, \dots, k$.

Para um $j \in \{1, \dots, k\}$ fixado com n_j é par, denote por $|E_j|$ o número de arestas de G_j que estão em uma componente conexa de G previamente fixada (lembre-se que G é composto por duas componentes conexas isomorfas ao $K_{c/2 \times s}$). Segue pelo Teorema de Euler que

$$2|E_j| = \sum_v d_{G_j}(v) = \sum_v (n_j - 1) = cs/2(n_j - 1).$$

Mas $cs/2$ e $(n_j - 1)$ são ambos ímpar por hipótese, um absurdo. Portanto,

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq w = \left\lceil \frac{2(S-k)}{s} \right\rceil + 2,$$

concluindo a demonstração. \square

As Proposições 5.15 e 5.16 determinam classes onde o limitante superior em (5.10) é atingido. Por sua vez, quando c é par, a Proposição 5.17 melhora o limite superior (5.10) no caso remanescente. Para c ímpar (e $m < 2(S - k + s) + 1$), a única estimativa que temos até agora é o limitante superior “geral” que decorre da Proposição 5.14. Veremos agora que podemos refinar tal limitante.

Proposição 5.18. Dados inteiros $s, k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ e $m \geq 3$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e $c = \lceil (2(S - k) + 1)/s \rceil + 1$. Se c é ímpar e $m < 2(S - k + s) + 1$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq \left\lceil \frac{2(S-k)}{s} \right\rceil + 2.$$

Demonstração: A ideia da demonstração é essencialmente a mesma que na Proposição 5.17. De fato, usando a mesma notação $w = \lceil 2(S - k)/s \rceil + 2$ e supondo por absurdo que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) > w$, aqui também temos que existem grafos G e H tais que $K_{w \times s} = G \oplus H$ com $\Delta(G) \leq S - k$ e $C_m \not\subseteq H$. Assim como foi feito lá, podemos utilizar os mesmos argumentos para concluir que $w = c$ e H é isomorfo ao grafo bipartido completo $K_{\frac{cs}{2}, \frac{cs}{2}}$. O fato de $K_{\frac{cs}{2}, \frac{cs}{2}}$ ser um subgrafo de $K_{c \times s}$ implica que dois vértices de uma mesma classe de $K_{c \times s}$ não podem estar em classes de vértices distintas de $K_{\frac{cs}{2}, \frac{cs}{2}}$. Assim, cada classe de vértices de $K_{c \times s}$ está inteiramente contida em uma das classes de $K_{\frac{cs}{2}, \frac{cs}{2}}$. Em particular, s divide $(cs)/2$, donde devemos ter c par, contrariando a hipótese. Portanto, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq w = \lceil 2(S - k)/s \rceil + 2$. \square

Apresentamos nas Proposições 5.17 e 5.18 um pequeno refinamento do limitante superior (5.10). Pudemos observar nas respectivas demonstrações que, apesar da melhora ser muito pequena, o esforço para obter tais refinamentos foram elevados. Neste sentido, o leitor poderia estar se indagando se valeu a pena tanto esforço técnico em um refinamento tão pequeno. O próximo resultado nos mostra que o valor exato do número de Ramsey

$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m)$ está muito próximo das estimativas apresentadas aqui. Deste modo, qualquer refinamento, por menor que possa parecer, é sim muito significativo.

Proposição 5.19. Dados inteiros $s, k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ e $m \geq 3$ ímpar, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Vale a estimativa

$$2 \left\lceil \frac{(S-k)}{s} \right\rceil + 1 \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m).$$

Demonstração: Tome $w = 2 \lceil (S-k)/s \rceil$. Vamos mostrar que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) > w$ usando o Lema 1.37. Para isto, basta exibirmos grafos G e H tais que $K_{w \times s} = G \oplus H$ com $\chi'(G) \leq S-k$ e $C_m \not\subseteq H$.

Divida as w classes de vértices de $K_{w \times s}$ em dois conjuntos, digamos A e B , contendo $w/2$ classes de vértices cada (podemos fazer isto pois w é par). Considere os grafos G e H definidos por $V(G) = V(H) = V(K_{w \times s})$, $E(H) = \{\{u, v\} : u \in A, v \in B\}$ e $E(G) = E(K_{w \times s}) - E(H)$. Note que $K_{w \times s} = G \oplus H$. Além disso, como H é um grafo bipartido e m é ímpar, então $C_m \not\subseteq H$. Por fim, pelo Teorema de Vizing (Teorema 1.5),

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 = \left(\frac{w}{2} - 1 \right) s + 1 = \left(\left\lceil \frac{S-k}{s} \right\rceil - 1 \right) s + 1 = \left\lfloor \frac{S-k-1}{s} \right\rfloor s + 1 \leq S-k.$$

Deste modo, uma aplicação do Lema 1.37 garante que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) > w$ e completa a demonstração. \square

Observe que nem todas as estimativas exibidas nos resultados acima impõem como hipótese uma determinada paridade para m . No entanto, devido a complexidade do caso m par, no início desta seção nos propomos estimar o número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m)$ apenas no caso m é ímpar. Neste sentido, um resumo dos nossos resultados é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 5.20. Dados inteiros $s, k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ e $m \geq 3$ ímpar, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e $c = \lceil (2(S-k) + 1)/s \rceil + 1$.

(i) Se $m \geq 2(S-k+s) + 1$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) = \lceil m/s \rceil;$$

(ii) Se $m < 2(S-k+s) + 1$ e c e $cs/2$ são ambos pares, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) = \lceil (2(S-k) + 1)/s \rceil + 2;$$

(iii) Se $m < 2(S - k + s) + 1$, c é par, $cs/2$ é ímpar e n_1, \dots, n_k são todos ímpares, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) = \lceil (2(S - k) + 1)/s \rceil + 2;$$

(iv) Caso contrário,

$$2\lceil (S - k)/s \rceil + 1 \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq \lceil 2(S - k)/s \rceil + 2.$$

Demonstração: Os itens (i), (ii) e (iii) foram mostrados nas Proposições 5.13, 5.15 e 5.16, respectivamente. Resta verificarmos o item (iv).

O limite inferior do item (iv) decorre da Proposição 5.19. Além disso, se nenhuma das hipóteses dos itens (i), (ii) e (iii) forem satisfeitas, então obrigatoriamente uma das condições abaixo vale:

- (a) $m < 2(S - k + s) + 1$, c é par, $cs/2$ é ímpar e algum n_i é par;
- (b) $m < 2(S - k + s) + 1$ e c é ímpar.

Deste modo, as Proposições 5.17 e 5.18 garantem o limite superior do item (iv). \square

Particularmente interessante, os limites inferior e superior apresentados no item (iv) do Teorema 5.20 podem coincidir dependendo do resto r da divisão de $S - k$ por s . Mais especificamente, coincidem quando $1 \leq r \leq s/2$ e diferem por uma unidade caso contrário.

Observe que $s = 1$ é o único caso onde não existe r com $1 \leq r \leq s/2$. Neste caso, o Teorema 5.20 pode ser sintetizado da seguinte maneira.

Corolário 5.21. Dados inteiros $k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ e $m \geq 3$ ímpar, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$.

(i) Se $m \geq 2(S - k) + 3$, então

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) = m;$$

(ii) Se $m < 2(S - k) + 3$ com $S - k$ ímpar ou n_1, \dots, n_k todos ímpares, então

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) = 2(S - k) + 3;$$

(iii) Se $m < 2(S - k) + 3$ e $S - k$ e algum n_i são pares, então

$$2(S - k) + 1 \leq r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m) \leq 2(S - k) + 2.$$

Duas observações importantes podem ser destacadas no Corolário 5.21. A primeira é que se $k = 1$, então a hipótese do item (iii) nunca é satisfeita. Deste modo, o Corolário 5.21 determina o valor exato do $r(K_{1,n}, C_m)$, valor este já calculado em [52]. A segunda observação se refere as hipóteses presentes nos itens (ii) e (iii). Observe que elas se assemelham aos dois

casos retratados por Burr e Roberts no Teorema 4.1, indicando assim uma possível estreita relação entre os números de Ramsey $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, C_m)$ e $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$ quando m é ímpar.

5.3 Estrelas versus emparelhamentos

Nosso objetivo nesta seção é estudar o número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, G)$ quando G é um emparelhamento, isto é, um grafo da forma mK_2 para algum inteiro positivo m . Em particular, quando $s = 1$ este número já foi calculado por Cockayne e Lorimer [22]. Resultado este generalizado recentemente (em 2018) por Omidi, Raeisi e Rahimi [59] para um número arbitrário de estrelas e emparelhamentos.

Motivados pelos dois trabalhos citados acima, dividiremos esta seção em duas subseções. Na primeira, estudaremos o número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2)$ com uma certa riqueza de detalhes. Mais especificamente, apresentaremos várias classes exatas e, nos casos remanescentes, exibiremos limitantes inferiores e superiores que diferem em apenas uma unidade. Já na segunda subseção, trabalharemos em um âmbito mais geral, isto é, estimaremos o número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1K_2, \dots, m_jK_2)$ onde o número de emparelhamentos é arbitrário, assim como o número de estrelas. Neste caso também será possível obter bons resultados, incluindo a determinação do valor exato quando $s = 2$.

5.3.1 Classes exatas para um único emparelhamento

Conforme já mencionado, o valor do número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2)$ quando $s = 1$ já foi determinado por Cockayne e Lorimer [22]. Em particular, quando m é suficientemente grande, tal valor é dado pelo teorema abaixo.

Teorema 5.22. (Cockayne e Lorimer [22]) Dados $k, m \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ inteiros, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $m \geq S - k + 1$, então $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = 2m$.

O resultado acima pode ser ampliado para o âmbito dos números de Ramsey multipartidos conforme segue.

Teorema 5.23. Dados $s, k, m \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ inteiros, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $m \geq S - k + s$, então $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = \lceil 2m/s \rceil$.

Demonstração: O limitante inferior $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq \lceil 2m/s \rceil$ decorre imediatamente do fato que o grafo $K_{(\lceil 2m/s \rceil - 1) \times s}$ não contém $2m$ vértices. De fato,

$$(\lceil 2m/s \rceil - 1)s = \lfloor (2m - 1)/s \rfloor s \leq 2m - 1.$$

Deste modo, $mK_2 \not\subseteq K_{(\lceil 2m/s \rceil - 1) \times s}$ e trivialmente $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) > \lceil 2m/s \rceil - 1$.

A demonstração do limite superior requer uma análise mais apurada. Suponha por absurdo que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) > \lceil 2m/s \rceil$, então existe uma $(k+1)$ -coloração do grafo $K_{\lceil 2m/s \rceil \times s}$ sem cópia monocromática do K_{1,n_i} na cor i para $i = 1, 2, \dots, k$ e sem cópia do mK_2 na cor $k+1$. Para todo $v \in V(K_{\lceil 2m/s \rceil \times s})$ e $i = 1, \dots, k+1$, denote por $d_i(v)$ o número de vértices de $K_{\lceil 2m/s \rceil \times s}$ ligados a v pela cor i . Assim, temos $d_i(v) \leq n_i - 1$ para todo $i = 1, \dots, k$. Logo,

$$d_{k+1}(v) = (\lceil 2m/s \rceil - 1)s - \sum_{i=1}^k d_i(v) \geq (\lceil 2m/s \rceil - 1)s - (S - k). \quad (5.16)$$

A hipótese $m \geq S - k + s$ equivale a $2m/s \geq (m + S - k + s)/s$. Deste modo, vale $\lceil 2m/s \rceil - 1 \geq (m + S - k)/s$. Portanto, segue da desigualdade (5.16) que

$$d_{k+1}(v) \geq (m + S - k) - (S - k) = m. \quad (5.17)$$

Seja λ o número máximo de arestas em um emparelhamento λK_2 na cor $k+1$. Obrigatoriamente $\lambda < m$, pois assumimos que não há um mK_2 na cor $k+1$. Considere um emparelhamento λK_2 de $K_{\lceil 2m/s \rceil \times s}$ colorido na cor $k+1$. Denote $Z = V(\lambda K_2)$ e $W = V(K_{\lceil 2m/s \rceil \times s}) - Z$. Note que

$$|W| = |V(K_{\lceil 2m/s \rceil \times s})| - |Z| \geq 2m - 2\lambda \geq 2, \quad (5.18)$$

assim, podemos tomar dois vértices distintos w_1 e w_2 em W .

Para cada $w \in W - \{w_1, w_2\}$, nenhuma das arestas $\{w, w_1\}$ e $\{w, w_2\}$ recebe a cor $k+1$, pois isto contrariaria a maximalidade de λ . Pelo mesmo motivo, $\{w_1, w_2\}$ não é colorida pela cor $k+1$. Portanto, como consequência de (5.17), w_1 está conectado pela cor $k+1$ a no mínimo m elementos de Z . O mesmo vale para w_2 .

Sejam x_1, \dots, x_m vértices distintos em Z ligados a w_1 pela cor $k+1$. Como $Z = V(\lambda K_2)$, existem únicos $y_1, \dots, y_m \in Z$ tais que $\{x_i, y_i\} \in E(\lambda K_2)$ para $i = 1, \dots, k$. Note que para cada $i = 1, \dots, k$, não podemos ter a aresta $\{w_2, y_i\}$ na cor $k+1$, pois neste caso, teríamos um $(\lambda+1)K_2$ na cor $k+1$ removendo a aresta $\{x_i, y_i\}$ e adicionando as arestas $\{w_1, x_i\}$ e $\{w_2, y_i\}$ do λK_2 original, o que contraria a maximalidade de λ . Logo, w_2 está conectado pela cor $k+1$ a no mínimo m elementos de $Z - \{y_1, \dots, y_m\}$ ao qual possui $2\lambda - m$ elementos. Assim $2\lambda - m \geq m$, contrariando o fato $m > \lambda$, um absurdo. Portanto, $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = \lceil 2m/s \rceil$. \square

O resultado acima determina o valor exato do número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2)$ sempre que $m \geq S - k + s$. Deste modo, a partir de agora podemos trabalhar com $m < S - k + s$ sem que de fato essa condição seja uma hipótese, uma vez que trata-se apenas do caso remanescente ao que já estudamos. Neste sentido, obtemos um limitante superior “geral”.

Proposição 5.24. Dados $s, k, m \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$ inteiros, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $m < S - k + s$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \leq \left\lfloor \frac{S - k + m - 1}{s} \right\rfloor + 2.$$

Demonstração: A ideia da demonstração será essencialmente a mesma utilizada no Teorema 5.23.

Suponha por absurdo que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) > \lfloor (S - k + m - 1)/s \rfloor + 2$. Então existe uma $(k+1)$ -coloração do $K_{(\lfloor (S - k + m - 1)/s \rfloor + 2) \times s}$ sem cópia monocromática do K_{1,n_i} na cor i para $i = 1, 2, \dots, k$ e sem cópia do mK_2 na cor $k+1$. Para todo $i = 1, \dots, k+1$ e todo vértice v , denote por $d_i(v)$ o número de vértices do $K_{(\lfloor (S - k + m - 1)/s \rfloor + 2) \times s}$ ligados a v pela cor i . Assim como em (5.17), aqui também temos $d_{k+1}(v) \geq m$. De fato,

$$d_{k+1}(v) = (\lfloor (S - k + m - 1)/s \rfloor + 1)s - \sum_{i=1}^k d_i(v) \geq \lceil (S - k + m)/s \rceil s - (S - k) \geq m. \quad (5.19)$$

Definindo λ , Z e W como foi feito na demonstração no Teorema 5.23 e prosseguindo de maneira análoga, aqui também encontramos o absurdo $2\lambda - m \geq m$. A única diferença que vale a pena ser frisada é o modo como obtemos a desigualdade $|W| \geq 2$ (ver desigualdade

(5.18)). No Teorema 5.23 isto seguiu naturalmente, já na nossa atual demonstração isto é decorrência da hipótese $S - k + s > m$. De fato,

$$|W| = (\lfloor (S - k + m - 1)/s \rfloor + 2)s - 2\lambda = (\lceil (S - k + m)/s \rceil + 1)s - 2\lambda \geq S - k + m + s - 2\lambda. \quad (5.20)$$

Como $S - k + s > m$, temos $|W| \geq S - k + s + m - 2\lambda \geq 2m - 2\lambda \geq 2$. \square

O resultado anterior nos afirma que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \leq \lfloor (S - k + m - 1)/s \rfloor + 2$ sempre que $S - k + s > m$. O próximo resultado nos garante que tal estimativa é ótima ou quase ótima quando $S - k$ é suficientemente grande.

Proposição 5.25. Dados $s, k \geq 1$, $m, n_1, \dots, n_k \geq 2$ inteiros, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $S - k > (s - 1)(m - 2)$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq \left\lfloor \frac{S - k + m - 3}{s} \right\rfloor + 2.$$

Demonstração: Seja $c = \lfloor (S - k + m - 3)/s \rfloor + 1$. Mostraremos que

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq c + 1.$$

Para isto, faremos uso do Lema 1.37 exibindo grafos G e H tais que $K_{c \times s} = G \oplus H$, $\chi'(G) \leq S - k$ e $mK_2 \not\subseteq H$.

A hipótese $S - k - 1 \geq (s - 1)(m - 2)$ obriga que $c \geq m - 1$. De fato,

$$c = \left\lfloor \frac{(S - k - 1) + (m - 2)}{s} \right\rfloor + 1 \geq \left\lfloor \frac{(s - 1)(m - 2) + (m - 2)}{s} \right\rfloor + 1 = m - 1.$$

Deste modo, podemos selecionar um conjunto V_0 com $m - 1$ vértices pertencentes a $m - 1$ classes de vértices distintas do $K_{c \times s}$. Denote $V_1 = V(K_{c \times s}) - V_0$ e considere $G = K_{c \times s}[V_1]$ o subgrafo do $K_{c \times s}$ induzido por V_1 . A distribuição dos vértices de V_0 em classes distintas do $K_{c \times s}$ assegura que

$$\Delta(G) = |V_1| - (s - 1) = cs - (m - 1) - (s - 1) = (c - 1)s - m + 2.$$

Como $c = \lfloor (S - k + m - 3)/s \rfloor + 1$, segue que

$$\Delta(G) = \lfloor (S - k + m - 3)/s \rfloor s - m + 2 \leq S - k - 1.$$

Aplicando o Teorema de Vizing (Teorema 1.5), obtemos $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq S - k$.

Seja H o grafo complementar de G em $K_{c \times s}$. Note que $K_{c \times s} = G \oplus H$. Além disso, como $G = K_{c \times s}[V_1]$ e $V_1 = V(K_{c \times s}) - V_0$, segue que toda aresta do grafo H incide em algum vértice de V_0 . Como $|V_0| = m - 1$, então H possui no máximo $m - 1$ arestas independentes, isto é, $mK_2 \not\subseteq H$. Portanto, o resultado segue pelo Lema 1.37. \square

Note que para $s \geq 2$, a desigualdade $S - k > (s - 1)(m - 2)$ implica que $S - k + s > m$. Deste modo, uma simples combinação das Proposições 5.24 e 5.25 assegura a classe exata destacada no corolário abaixo.

Corolário 5.26. Dados $k \geq 1$, $s, m, n_1, \dots, n_k \geq 2$ inteiros, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Se $S - k > (s - 1)(m - 2)$ e $(S - k + m - 1) \not\equiv 0, 1 \pmod{s}$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = \left\lfloor \frac{S - k + m - 1}{s} \right\rfloor + 2.$$

Conforme observado por Cockayne e Lorimer [22] e Omidi, Raeisi e Rahimi [59], o número de Ramsey $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2)$ está diretamente relacionado ao número de Ramsey para estrelas. Mais especificamente, vale a igualdade

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = \max\{R + m - 1, 2m\}, \quad (5.21)$$

onde $R = r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$ (se $k = 1$, naturalmente $R = n_1 + 1$).

Observe que uma combinação do Teorema 4.1 com a igualdade (5.21) produz o valor de $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2)$. Observe ainda que o Teorema 4.1 foi generalizado no Teorema 4.9 para o âmbito dos números de Ramsey multipartidos. Neste sentido, é natural nos questionarmos: será que o Teorema 4.9 pode nos auxiliar na determinação do número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2)$? Nossa expectativa é parcialmente correspondida através da seguinte relação.

Proposição 5.27. Dados inteiros $s, k, m \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 2$, temos

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) + \lfloor (m - 1)/s \rfloor. \quad (5.22)$$

Demonstração: Para $p = M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) - 1$ e $p' = \lfloor (m - 1)/s \rfloor$, defina $G = K_{p \times s}$ e H o grafo complementar de G em relação a $K_{(p+p') \times s}$. Em particular, $K_{(p+p') \times s} = G \oplus H$. Assim,

para mostrarmos a estimativa $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq p + p' + 1$, basta aplicarmos a Proposição 1.35 verificando que valem as duas afirmações abaixo:

- (i) G pode ser escrito da forma $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ com $K_{1,n_i} \not\subseteq G_i$ para todo $i = 1, \dots, k$;
- (ii) $mK_2 \not\subseteq H$.

A parte (i) segue imediatamente dos fatos $G = K_{p \times s}$ e $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) > p$. Para verificar a parte (ii), observe que $K_{(p+p') \times s}$ possui exatamente $p's$ vértices que não são incidentes a nenhuma aresta de $G = K_{p \times s}$. Denotando por W o conjunto destes $p's$ vértices, temos pela construção de G e H que toda aresta de H incide em W . Portanto, H possui no máximo $|W|$ arestas independentes. Como $|W| = p's = \lfloor (m-1)/s \rfloor s \leq m-1$, segue que $mK_2 \not\subseteq H$. Logo (ii) é válido, completando a demonstração. \square

Sabemos pelo Teorema 4.1 que $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) \geq S - k + 1$. Deste modo, quando $S - k \geq m$, temos por (5.21) que

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) + m - 1.$$

Neste sentido, é natural indagarmos se também vale a igualdade em (5.22) quando $S - k$ é suficientemente grande em relação a m . Uma resposta econômica para esta pergunta é nem sempre. De fato, tome por exemplo $s = m = 4$ e $S - k > 6$ com $S - k \equiv 3 \pmod{4}$. Então o Corolário 5.26 assegura que

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = \lfloor (S - k)/4 \rfloor + 3.$$

Por outro lado, o Teorema 4.9 nos garante que

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) + \lfloor (m-1)/s \rfloor = \lfloor (S - k)/4 \rfloor + 2.$$

Em particular, neste caso temos

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \neq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) + \lfloor (m-1)/s \rfloor$$

e portando a desigualdade em (5.22) pode ser estrita.

A partir de agora e durante o resto desta subseção, fixaremos a notação habitual para introduzirmos quatro novas variáveis com o objetivo de auxiliar nossos cálculos na aritmética

modular módulo s . Mais especificamente, fixados inteiros $s, m, k \geq 1$, $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2$, continuaremos denotando $S = \sum_{i=1}^k n_i$ mas agora consideraremos também os únicos inteiros q, q', r e r' (pelo algoritmo da divisão) tais que

$$S - k = sq + r \text{ com } 0 \leq r < s, \quad (5.23)$$

$$m - 1 = sq' + r' \text{ com } 0 \leq r' < s. \quad (5.24)$$

Já determinamos o valor exato do $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2)$ quando $m \geq S - k + s$ no Teorema 5.23. Por outro lado, se $S - k + s > m$, ficará evidente no próximo resultado que o valor das nossas melhores estimativas inferiores e superiores possuem uma diferença máxima de apenas uma unidade.

Teorema 5.28. Dados inteiros $s, k, m \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e q, q', r e r' parâmetros definidos em (5.23) e (5.24). Suponha que $S - k + s > m$.

- (i) Se $r + r' = 0$, então $q + q' + 1 \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \leq q + q' + 2$.
- (ii) Se $1 \leq r + r' \leq s - 1$, então $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = q + q' + 2$.
- (iii) Se $s \leq r + r'$, então $q + q' + 2 \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \leq q + q' + 3$.

Demonstração: Pelas Proposições 4.2 e 5.27,

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) + \left\lfloor \frac{m-1}{s} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{S-k}{s} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{m-1}{s} \right\rfloor = q + q' + 1.$$

Por sua vez, a Proposição 5.24 assegura que

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \leq \left\lfloor \frac{S-k+m-1}{s} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{(qs+r) + (q's+r')}{s} \right\rfloor + 2 = q + q' + 2 + \left\lfloor \frac{r+r'}{s} \right\rfloor.$$

Note que $\lfloor (r+r')/s \rfloor = 0$ se $0 \leq r+r' \leq s-1$ e $\lfloor (r+r')/s \rfloor = 1$ se $s \leq r+r'$. Assim, para completar a demonstração basta mostrarmos o seguinte:

Afirmção: Se $1 \leq r+r'$, então $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq q + q' + 2$.

Dividiremos a demonstração desta afirmação em três casos.

Caso 1: quando $(q+1)s$ é par;

Caso 2: quando $r \geq 1$;

Caso 3: quando $r' \geq 1$ com $(q+1)s$ ímpar.

Em todos os casos, mostraremos que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq q + q' + 2$ aplicando o

Lema 1.37, isto é, exibiremos grafos G e H tais que $K_{(q+q'+1)\times s} = G \oplus H$ com $mK_2 \not\subseteq H$ e $\chi'(G) \leq S - k$.

Caso 1: Considere $G = K_{(q+1)\times s}$ e H o grafo complementar de G em relação a $K_{(q+q'+1)\times s}$. Deste modo, $K_{(q+q'+1)\times s} = G \oplus H$. Observe que $\chi'(G) \leq S - k$ é uma consequência imediata do Teorema 4.5. De fato, como $(q+1)s$ é par, este teorema nos garante que $G = K_{(q+1)\times s}$ é de classe 1. Assim,

$$\chi'(G) = \Delta(G) = qs \leq qs + r = S - k.$$

Resta mostrarmos que $mK_2 \not\subseteq H$. Note que $K_{(q+q'+1)\times s}$ possui exatamente $q's$ vértices que não são incidentes a nenhuma aresta de $G = K_{(q+1)\times s}$. Seja W o conjunto destes $q's$ vértices. Pela construção de G e H , toda aresta de H incide em W . Portanto, H possui no máximo $|W|$ arestas independentes. Como $|W| = q's \leq q's + r' = m - 1$, segue que $mK_2 \not\subseteq H$.

Caso 2: Considere G e H como no Caso 1. Assim como antes, a maneira com que os grafos G e H são construídos garante que $K_{(q+q'+1)\times s} = G \oplus H$ e $mK_2 \not\subseteq H$. A única diferença é que no Caso 1 usamos a hipótese $(q+1)s$ par e o Teorema 4.5 para mostrarmos que $\chi'(G) \leq S - k$. Já na nossa atual demonstração, este fato é uma consequência imediata da hipótese $r \geq 1$ e do Teorema 1.5. De fato,

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 = qs + 1 \leq qs + r = S - k.$$

Caso 3: Diferentemente dos Casos 1 e 2, fixe agora um vértice v e defina G o subgrafo de $K_{(q+1)\times s}$ induzido pelos vértices $V(K_{(q+1)\times s}) - \{v\}$. Note que G é um grafo multipartido completo com um número par de vértices (pois $(q+1)s$ é ímpar, por hipótese), assim, o Teorema 1.6 garante que G é um grafo de classe 1 e, portanto,

$$\chi'(G) = \Delta(G) = qs \leq qs + r = S - k.$$

Definindo H como o grafo complementar de G em relação a $K_{(q+q'+1)\times s}$, naturalmente $K_{(q+q'+1)\times s} = G \oplus H$. Além disso, de modo análogo aos casos anteriores, podemos verificar que $mK_2 \not\subseteq H$. De fato, a hipótese $r' \geq 1$ garante a estimativa $|W| = q's + 1 \leq q's + r' \leq m - 1$. \square

Conforme já mencionado, os limitantes inferiores e superiores apresentados no Teorema 5.28 possuem uma diferença máxima de apenas uma unidade. Neste sentido, podemos afirmar que vale a igualdade no limite inferior ou no limite superior. O nosso próximo resultado complementa o item (i) do Teorema 5.28, afirmando que na maioria dos casos vale a igualdade no limite superior.

Proposição 5.29. Dados inteiros $s, k, m \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e q, q', r e r' parâmetros definidos em (5.23) e (5.24). Suponha que $S - k + s > m$ e $r + r' = 0$.

1. $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = q + q' + 2$, exceto possivelmente quando s é ímpar com $(S - k)/s$ par e algum n_i par.
2. Se s é ímpar com $(S - k)/s$ par e algum n_i par, então $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = q + q' + 1$, pelo menos quando $m = 1$.

Demonstração: A demonstração é uma simples aplicação do Teorema 4.9 e da Proposição 5.27 notando que quando $m = 1$, temos $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$. \square

Uma simples aplicação do Corolário 5.26 assegura que

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = q + q' + 3. \quad (5.25)$$

quando $S - k > (s - 1)(m - 2)$ e $r + r' > s + 1$. Em outras palavras, para que a igualdade (5.25) seja válida, é suficiente que tenhamos:

- (i) $r + r' > s + 1$;
- (ii) $S - k$ suficientemente grande em relação a s e m (no caso, $S - k > f(s, m)$, onde $f(s, m) = (s - 1)(m - 2)$).

O nosso próximo resultado mostra que se a hipótese (i) é satisfeita, então para que tenhamos a igualdade (5.25), não precisamos ter $S - k$ suficientemente grande em relação a s e m , mas sim em relação a apenas s (independentemente de m). Tal afirmação decorre imediatamente do teorema abaixo notando que $\lceil (s - r + 1)/(q + 1) \rceil = 1$ quando $S - k$ é suficientemente grande em relação a s .

Teorema 5.30. Dados inteiros $s, k, m \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 2$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e q, q', r e r' parâmetros definidos em (5.23) e (5.24). Se $r + r' \geq s + 1 + \lceil (s - r + 1)/(q + 1) \rceil$ e $S - k + s > m$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) = q + q' + 3.$$

Demonstração: O limite superior segue do Teorema 5.28, resta mostrarmos então que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq q + q' + 3$.

Denote $n = \lceil (s - r + 1)/(q + 1) \rceil$. Em particular, temos $n(q + 1) \geq s - r + 1$. Deste modo, cálculos elementares asseguram que

$$(s - n)(q + 2) \leq S - k + s - n - 1 \leq s(q + 2). \quad (5.26)$$

De fato, a segunda desigualdade vale pois $S - k = sq + r$ com $r < s$, enquanto que a primeira segue de $n(q + 1) \geq s - r + 1$. Mais detalhadamente,

$$(s - n)(q + 2) = (S - k - r) - nq + 2(s - n) = (S - k + s - n) + (s - r - n(q + 1)) \leq S - k + s - n - 1.$$

Pela desigualdade (5.26), podemos tomar um grafo multipartido completo G com $S - k + s - n - 1$ vértices particionados em $q + 2$ classes, onde cada classe possui entre $s - n$ e s vértices. Em particular, segue pelo Teorema de Vizing (Teorema 1.5) que

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq (|V(G)| - (s - n)) + 1 = S - k.$$

Seja H o grafo complementar de G em relação ao $K_{(q+q'+2) \times s}$. Note que $K_{(q+q'+2) \times s} = G \oplus H$ e $\chi'(G) \leq S - k$. Deste modo, para mostrarmos que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2) \geq q + q' + 3$, basta verificarmos que $mK_2 \not\subseteq H$ e aplicar o Lema 1.37.

Denote por W o conjunto dos vértices de $K_{(q+q'+2) \times s}$ que não são vértices de G . Pela construção de G e H , toda aresta de H incide em algum vértice de W , deste modo H possui no máximo $|W|$ arestas independentes. Como $S - k = qs + r$,

$$|W| = |V(K_{(q+q'+2) \times s})| - |V(G)| = (qs + q's + 2s) - (S - k + s - n - 1) = -r + q's + (s + n + 1).$$

Da hipótese $r + r' \geq s + 1 + n$, segue que

$$|W| = q's - r + (s + 1 + n) \leq q's - r + (r' + r) = q's + r' = m - 1.$$

Como H possui no máximo $|W|$ arestas independentes e $|W| \leq m - 1$, segue que $mK_2 \not\subseteq H$. Portanto, o limite inferior segue do Lema 1.37. \square

5.3.2 Classes exatas para vários emparelhamentos

Em 2018, Omidi, Raeisi e Rahimi [59] calcularam o número de Ramsey clássico para um número arbitrário de estrelas e emparelhamentos, estendendo assim o trabalho de Cockayne e Lorimer [22]. Um detalhe interessante sobre tal fato é que este valor foi determinado de maneira peculiar, através de uma relação precisa com o número de Ramsey para estrelas, conforme segue.

Teorema 5.31. (Omidi, Raeisi e Rahimi [59]) Dados $k, j, n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_j$ inteiros positivos com $m_1 \geq \dots \geq m_j$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$, $M = \sum_{i=1}^j m_i$ e $r = r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$. Temos

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1K_2, \dots, m_jK_2) = \begin{cases} r + M - j + 1 & \text{se } j \geq 2, m_1 < r \leq 2m_2, \\ & S - k \text{ e algum } n_i \text{ são pares;} \\ \max\{r - 1, m_1\} + M - j + 1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.27)$$

Nosso objetivo agora é estender na medida do possível o resultado acima para o âmbito dos números de Ramsey multipartidos. No Teorema 5.23, calculamos o valor do número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, mK_2)$ quando $m \geq S - k + s$. Veremos a seguir que tal resultado pode ser ampliado para um número arbitrário de emparelhamentos. Mas para isto, precisaremos do resultado auxiliar abaixo.

Lema 5.32. Sejam inteiros positivos $s, k, j, n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_j$ com $m_1 \geq \dots \geq m_j$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$, $M = \sum_{i=1}^j m_i$ e $r = r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$. Se $m_1 < r$ então

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1K_2, \dots, m_jK_2) \leq S - k + M - j + 2. \quad (5.28)$$

Demonstração: Como $m_1 < r$, o Teorema 5.31 estabelece que

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = \begin{cases} r + M - j + 1 & \text{se } j \geq 2, r \leq 2m_2, S - k \\ & \text{e algum } n_i \text{ são pares;} \\ r + M - j & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.29)$$

Pelo Teorema 4.1, $r = S - k + 1$ quando $S - k$ e algum n_i são pares e $r = S - k + 2$ caso contrário. Assim, (5.28) segue de (5.29). \square

Munidos do lema acima, agora sim estamos aptos a estender o Teorema 5.23. Repare que este corresponde ao caso particular $j = 1$ do resultado abaixo.

Teorema 5.33. Dados $s, k, j, n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_j$ inteiros positivos com $m_1 \geq \dots \geq m_j$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e $M = \sum_{i=1}^j m_i$. Se $m_1 \geq S - k + s$, então

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = \left\lceil \frac{m_1 + M - j + 1}{s} \right\rceil.$$

Demonstração: Denote $r = r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$ e $r' = r(K_{1,s}, K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$. Analisaremos de maneira separada os casos $s = 1$ e $s \geq 2$.

Para $s = 1$, consideraremos dois subcasos: $m_1 > S - k + 1$ e $m_1 = S - k + 1$.

Se $m_1 > S - k + 1$, o Teorema 4.1 assegura que $m_1 \geq r$. Assim, segue do Teorema 5.31 que $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = m_1 + M - j + 1$.

Já no caso $m_1 = S - k + 1$, observe que $m_1 \geq r - 1$. Assim, temos por (5.27) que

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = \begin{cases} r + M - j + 1 & \text{se } j \geq 2, m_1 < r \leq 2m_2, \\ & S - k \text{ e algum } n_i \text{ são pares;} \\ m_1 + M - j + 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas $r = S - k + 1 = m_1$ quando $S - k$ e algum n_i são pares (pelo Teorema 4.1), logo $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = m_1 + M - j + 1$.

A partir daqui podemos supor $s \geq 2$. Neste caso, $m_1 \geq S - k + s \geq S - k + 2 \geq r$. Deste modo, temos pelo Teorema 5.31 que $r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = m_1 + M - j + 1$ e assim, uma simples aplicação do Lema 1.38 assegura o limitante inferior

$$\left\lceil \frac{m_1 + M - j + 1}{s} \right\rceil \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2).$$

Mostraremos agora o limitante superior. Para isto, faremos uso da seguinte afirmação.

Afirmação: $r(K_{1,s}, K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) \leq m_1 + M - j + 1$.

De fato, se $m_1 \geq r'$, então o Teorema 5.31 garante que

$$r(K_{1,s}, K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = m_1 + M - j + 1.$$

Por outro lado, se $m_1 < r'$, então o Lema 5.32 assegura que

$$r(K_{1,s}, K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) \leq S - k + M - j + s + 1. \quad (5.30)$$

Novamente pelo Teorema 4.1, temos $r' \leq S - k + s + 1$. Deste modo, as hipóteses $S - k + s \leq m_1$ e $m_1 < r'$ implicam que devemos ter $m_1 = S - k + s$. Logo, segue da desigualdade (5.30) que $r(K_{1,s}, K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) \leq m_1 + M - j + 1$ e, portanto, a afirmação é verdadeira.

Por fim, uma aplicação da afirmação acima e do Lema 1.39 com $H = K_{1,s}$ assegura o limitante superior

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) \leq \left\lceil \frac{m_1 + M - j + 1}{s} \right\rceil,$$

completando a demonstração. \square

O teorema anterior determina o valor do número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2)$ quando $m_1 \geq S - k + s$. Para o caso $m_1 < S - k + s$, não temos ainda ferramentas suficientes para calcular o valor exato. No entanto, podemos estimá-lo de maneira satisfatória. Mais especificamente, para este caso remanescente temos um limitante inferior e um limitante superior que difere em apenas uma unidade, conforme segue.

Teorema 5.34. Dados $s, k, j, n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_j$ inteiros positivos com $m_1 \geq \dots \geq m_j$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$ e $M = \sum_{i=1}^j m_i$. Se $m_1 < S - k + s$, então

$$\left\lfloor \frac{S - k + M - j + 1}{s} \right\rfloor \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) \leq \left\lceil \frac{S - k + M - j + 1}{s} \right\rceil + 1.$$

Demonstração: Denote $r = r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$ e $r' = r(K_{1,s}, K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$. Combinando os Teoremas 4.1 e 5.31,

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) \geq (r - 1) + M - j + 1 \geq S - k + M - j + 1.$$

Logo, o Lema 1.38 assegura o limite inferior

$$\left\lceil \frac{S - k + M - j + 1}{s} \right\rceil \leq M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2).$$

Para provarmos o limite superior, observe que a hipótese $S - k + s > m_1$ implica (pelo Teorema 4.1) que $r' > m_1$. Logo, pelo Lema 5.32, temos

$$r(K_{1,s}, K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) \leq S - k + M - j + s + 1.$$

Assim, uma aplicação do Lema 1.39 com $H = K_{1,s}$ assegura o limitante superior

$$M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) \leq \left\lceil \frac{S - k + M - j + 1}{s} \right\rceil + 1,$$

completando a demonstração. \square

Conforme mencionado, o valor exato do número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2)$ para $s = 1$ já foi calculado por Omid, Raeisi e Rahimi [59] (ver Teorema 5.31). Particularmente interessante, o caso $s = 2$ segue abaixo.

Proposição 5.35. Dados $k, j, n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_j$ inteiros positivos com $m_1 \geq \dots \geq m_j$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$, $M = \sum_{i=1}^j m_i$ e $r = r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, K_{1,2})$. Temos

$$M_2(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = \begin{cases} \left\lceil \frac{r+M-j+1}{2} \right\rceil & \text{se } j \geq 2, m_1 < r \leq 2m_2 \\ & \text{e } (S - k + 1) \text{ é par;} \\ \left\lceil \frac{\max\{r-1, m_1\} + M - j + 1}{2} \right\rceil & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.31)$$

Demonstração: Pela Proposição 1.40,

$$M_2(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = \left\lceil \frac{r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, K_{1,2}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2)}{2} \right\rceil.$$

Assim, uma aplicação imediata do Teorema 5.31 assegura o resultado. \square

Uma simples análise do Teorema 4.1 assegura que

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, K_{1,2}) = \begin{cases} S - k + 3 & \text{se } S - k \text{ é par;} \\ S - k + 2 & \text{se } S - k \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (5.32)$$

Além disso, pelo Teorema 4.9,

$$M_2(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) = \lfloor (S - k)/2 \rfloor + 2. \quad (5.33)$$

Desta forma, uma combinação das igualdades (5.32) e (5.33) produz a relação

$$r(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, K_{1,2}) = 2 \cdot M_2(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}) - 1.$$

Em particular, a Proposição 5.35 pode ser reescrita da forma abaixo.

Teorema 5.36. Dados $k, j, n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_j$ inteiros positivos com $m_1 \geq \dots \geq m_j$, denote $S = \sum_{i=1}^k n_i$, $M = \sum_{i=1}^j m_i$ e $M_2 = M_2(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$. Temos

$$M_2(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2) = \begin{cases} M_2 + \lceil (M - j)/2 \rceil & \text{se } j \geq 2, m_1 < 2M_2 - 1 \leq 2m_2 \\ & \text{e } (S - k + 1) \text{ é par;} \\ \left\lceil \frac{\max\{2M_2 - 2, m_1\} + M - j + 1}{2} \right\rceil & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os Teoremas 5.31 e 5.36 determinam o valor de $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2)$ para $s = 1$ e $s = 2$, utilizando como parâmetro o número $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$. Neste sentido, um questionamento natural é dado abaixo.

Questão 5.37. Para $s \geq 1$ arbitrário, será que $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k}, m_1 K_2, \dots, m_j K_2)$ pode ser determinado em função do parâmetro $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$?

Não temos resposta para esta pergunta. Se for afirmativa, então o Teorema 4.9 torna-se uma forte ferramenta visto que o mesmo determina precisamente o valor de $M_s(K_{1,n_1}, \dots, K_{1,n_k})$ para s arbitrário. Pesquisas futuras neste tema não estão descartadas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. A. Anderson, Symmetry groups of some perfect 1-factorizations of complete graphs, *Discrete Math.*, Vol. 18 (1977), 227–234.
- [2] J. Balogh, F. C. Clemen, E. Heath, M. Lavrov, Ordered size Ramsey number of paths, *Discrete Appl. Math.*, artigo disponível online (2019).
- [3] N. A. Balonin, D. Z. Dokovic, D. A. Karbovskiy, Construction of symmetric Hadamard matrices of order $4v$ for $v = 47, 73, 113$, *Spec. Matrices*, Vol. 6 (1) (2018), 11–22.
- [4] E. T. Baskoro, A. Lusiani, S. W. Saputro, On size multipartite Ramsey numbers for stars versus paths and cycles, *Electron. J. Graph Theory Appl.*, Vol. 5 (1) (2017), 43–50.
- [5] E. T. Baskoro, C. Jayawardene, L. Samarasekara, S. Sy, Size multipartite Ramsey numbers for stripes versus small cycles, *Electron. J. Graph Theory Appl.*, Vol. 4 (2) (2016), 157–170.
- [6] L. W. Beineke, J. A. Schwenk, On bipartite form of the Ramsey problem, *Proceedings of the 5th British Combinatorial Conference* (1975), 17–22.
- [7] T. Beth, D. Jungnickel, H. Lenz, *Design theory*, Vol. I e II, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [8] B. Bollobás, *Extremal graph theory*, (Dover, Mineola, 2004).
- [9] J. A. Bondy, Pancyclic graphs I, *J. Combin. Theory*, Vol. 11 (1971), 80–84.
- [10] H. J. Broersma, Y. J. Chen, Y. Zhang, Narrowing down the gap on cycle-star Ramsey numbers, *J. Comb.*, Vol. 7 (2016), 481–493.

-
- [11] H. J. Broersma, B. Li, Y. Zhang, An exact formula for all star-kipas Ramsey numbers, *Graphs Combin.*, Vol. 33 (2017), 141–148.
- [12] A. P. Burger, P. J. P. Grobler, E. H. Stipp, J. H. van Vuuren, Diagonal Ramsey numbers in multipartite graphs, *Util. Math.*, Vol. 66 (2004), 137–163.
- [13] A. P. Burger, J. H. van Vuuren, Ramsey numbers in a complete balanced multipartite graphs Part I: set numbers, *Discrete Math.*, Vol. 283 (2004), 37–43.
- [14] A. P. Burger, J. H. Van Vuuren, Ramsey numbers in a complete balanced multipartite graphs. Part II: size numbers, *Discrete Math.*, Vol. 283 (2004), 45–49.
- [15] S. A. Burr, J. A. Roberts, On Ramsey numbers for stars, *Util. Math.*, Vol. 4 (1973), 217–220.
- [16] P. J. Cameron, Random strongly regular graphs?, *Discrete Math.*, Vol. 273 (2003), 103–114.
- [17] W. A. Carnielli, E. L. Monte Carmelo, On the Ramsey problem for multicolor bipartite graphs, *Adv. Appl. Math.*, Vol. 22 (1999), 48–59.
- [18] G. Chartrand, P. Zhang, *A first course in graph theory*, (Dover, Mineola, 2012).
- [19] Y. J. Chen, T. C. E. Cheng, X. M. Zhang, Some values of Ramsey numbers for C_4 versus stars, *Finite Fields Appl.*, Vol. 45 (2017), 73–85.
- [20] F. R. K. Chung, R. L. Graham, On multicolor Ramsey numbers for complete bipartite graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, Vol. 18 (1975), 164–169.
- [21] V. Chvátal, F. Harary, Generalized Ramsey theory for graphs. II. Small diagonal numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 32 (1972), 389–394.
- [22] E. J. Cockayne, P. J. Lorimer, On Ramsey graph numbers for stars and stripes, *Canad. Math. Bull.*, Vol. 18 (1975), 31–34.
- [23] A. F. Collins, S. P. Radziszowski, A. W. N. Riasanovsky, e J. C. Wallace, Zarankiewicz numbers and bipartite Ramsey numbers, *J. Algorithms Comput.*, Vol. 47 (2016), 63–78.

-
- [24] D. Day, W. Goddard, M. Henning, H. Swart, Multipartite Ramsey numbers, *Ars Combin.*, Vol. 58 (2001), 23–31.
- [25] G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. S3 (1) (1952), 69–81.
- [26] D. Z. Dokovic, Two Hadamard matrices of order 956 of Goethals–Seidel type, *Combinatorica*, Vol. 14 (3) (1994), 375–377.
- [27] D. Z. Dokovic, Hadamard matrices of order 764 exist, *Combinatorica*, Vol. 28 (4) (2008), 487–489.
- [28] L. C. Edussauriya, T. U. Hewage, C. J. Jayawardene, M. J. L. Mendis, B. L. Samarasekara, $m_j(P_4, G)$ for all graphs G on 4 vertices, *An. Pure Appl. Math.*, Vol. 14 (1) (2017), 153–160.
- [29] P. Erdős, R. L. Graham, On partition theorems for finite graphs, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, Vol. 10, Amsterdam (1975).
- [30] G. Exoo, H. Harborth, I. Mengersen, On Ramsey numbers of $K_{2,n}$, *Graph theory, combinatorics, algorithms, and applications*, (SIAM, Philadelphia, 1991), 207–211.
- [31] J. Fox, A. Grinshpun, A. Liebenau, Y. Person, T. Szabó, On the minimum degree of minimal Ramsey graphs for multiple colours, *J. Combin. Theory Ser. B*, Vol. 120 (2016), 64–82.
- [32] A. M. Gleason, R. E. Greenwood, Combinatorial relations and chromatic graphs, *Canad. J. Math.*, Vol. 7 (1955), 1–7.
- [33] W. Goddard, M. A. Henning, O. R. Oellermann, Bipartite Ramsey numbers and Zaran-kiewicz numbers, *Discrete Math.*, Vol. 219 (2000), 85–95.
- [34] J. M. Goethals, J. J. Seidel, Strongly regular graphs derived from combinatorial designs, *Canad. J. Math.*, Vol. 22 (1970), 597–614.
- [35] A. Gonçalves, E. L. Monte Carmelo, Some geometric structures and bounds for Ramsey numbers, *Discrete Math.*, Vol. 280 (2004), 29–38.

-
- [36] C. J. F. Gonçalves, Números de Ramsey em grafos multipartidos, Tese (doutorado em matemática), Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Maringá, p.97, 2019.
- [37] R. L. Graham, B. Rothschild, J. Spencer, Ramsey theory, Wiley series in discrete mathematics and optimization, (John Wiley and Sons, New Jersey, 2013).
- [38] F. Harary, Recent results on generalized Ramsey theory for graphs, in: graph theory and applications, Lecture Notes in Math., Vol. 303 (1972), 125–138.
- [39] N. Hartsfield, G. Ringel, Pearls in graph theory, (Dover, Mineola, 2003).
- [40] J. H. Hattingh, M. A. Henning, Bipartite Ramsey theory, Util. Math., Vol. 53 (1998), 217–230.
- [41] D. G. Hoffman, C. A. Rodger, The chromatic index of complete multipartite graphs, J. Graph Theory, Vol. 16 (2) (1992), 159–163.
- [42] W. Honghui, Upper bounds for Ramsey numbers $R(3, 3, \dots, 3)$ and Schur numbers, J. Graph Theory, Vol. 26 (1997), 119–122.
- [43] X. L. Hubaut, Strongly regular graphs, Discrete Math., Vol. 13 (1975), 357–381.
- [44] D. R. Hughes, F. C. Piper, Design theory, (Cambridge University Press, New York, 2008).
- [45] R. W. Irving, A bipartite Ramsey problem and the Zarankiewicz numbers, Glasg. Math. J., Vol. 19 (1978), 13–26.
- [46] R. W. Irving, Generalized Ramsey numbers for small graphs, Discrete Math., Vol. 9 (1974), 251–264.
- [47] S. Jukna, Extremal combinatorics with applications in computer science, (Springer, Berlin, 2011).
- [48] H. Kharaghani, B. Tayfeh-Rezaie, A Hadamard matrix of order 428, J. Combin. Des., Vol. 13 (2005), 435–440.

- [49] M. Kobayashi, On perfect one-factorization of the complete graph $K_{2,p}$, *Graphs Combin.*, Vol. 5 (1989), 351–353.
- [50] D. König, Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére, *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, Vol. 34 (1916), 104–119.
- [51] A. Kotzig, Hamilton graphs and Hamilton circuits, *Theory of graphs and its applications, Proceedings of the Symposium of Smolenice*, (1964), 62–82.
- [52] S. L. Lawrence, Cycle-star Ramsey numbers, *Notices Amer. Math. Soc.*, Vol. 20 (1973), Abstract A-420.
- [53] Y. Li, Q. Lin, M. Liu, Class Ramsey numbers of odd cycles in many colors, *Appl. Math. Comput.*, Vol. 363 (2019), 124613.
- [54] C. Magnant, A. Yusko, Ramsey set numbers in balanced complete multipartite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, Vol. 77 (2011), 187–196.
- [55] E. L. Monte Carmelo, Configurations in projective planes and quadrilateral-star Ramsey numbers, *Discrete Math.*, Vol. 308 (2008), 3986–3991.
- [56] E. L. Monte Carmelo, J. Sanches, Multicolored set multipartite Ramsey numbers, *Discrete Math.*, Vol. 339 (2016), 2775–2784.
- [57] G. Nakamura, Dudley’s round table problem and the edge-coloring of the complete graph, *Sugaku Seminar*, Vol. 159 (1975), 24–29.
- [58] S. M. Nyayate, R. M. Pawale, M. S. Shrikhande, Characterization of quasi-symmetric designs with eigenvalues of their block graphs, *Australas. J. Combin.*, Vol. 68 (1) (2017), 62–70.
- [59] G. R. Omidi, G. Raeisi, Z. Rahimi, Stars versus stripes Ramsey numbers, *European J. Combin.*, Vol. 67 (2018), 268–274.
- [60] R. E. A. C. Paley, On orthogonal matrices, *J. Math. Phys.*, Vol. 12 (1933), 311–320.

-
- [61] T. D. Parsons, Path-star Ramsey numbers, *J. Combin. Theory Ser. B*, Vol. 17 (1974), 51–58.
- [62] T. D. Parsons, Graphs from projective planes, *Aequationes Math.*, Vol. 14 (1976) 167–189.
- [63] T. D. Parsons, Ramsey graphs and block designs I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 209 (1975), 33–44.
- [64] T. D. Parsons, Ramsey graphs and block designs, *J. Combin. Theory Ser. A*, Vol. 20 (1976), 12–19.
- [65] T. D. Parsons, Ramsey graph theory, *Selected topics in graph theory*, (Academic Press, London, 1978), 361–384.
- [66] P. H. Perondi, Estimativas dos números de Ramsey em grafos multipartidos, *Dissertação (mestrado em matemática)*, Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Maringá, p.115, 2016.
- [67] P. H. Perondi, E. L. Monte Carmelo, Set and size multipartite Ramsey numbers for stars, *Discrete Appl. Math.*, Vol. 250 (2018), 368–372.
- [68] P. H. Perondi, E. L. Monte Carmelo, Exact Ramsey numbers in multipartite graphs arising from Hadamard matrices and strongly regular graphs, *Discrete Math.*, Vol. 342 (2019), 2204–2212.
- [69] P. H. Perondi, E. L. Monte Carmelo, Size multipartite Ramsey numbers for bipartite graphs, *Matemática Contemporânea*, artigo aceito para publicação.
- [70] P. H. Perondi, E. L. Monte Carmelo, Perfect 1-factorization of complete graphs from Lee metric, artigo em construção.
- [71] J. Petersen, Die theorie der regulären graphs, *Acta Math.*, Vol. 15 (1891), 193–220.
- [72] S. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers, *Electron. J. Combin.*, Dynamical survey (revisão 15, 2017).

-
- [73] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, *London Math. Soc.*, Vol. 30 (2) (1930), 264–286.
- [74] R. M. Roth, *Introduction to coding theory*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [75] J. Seberry, M. Yamada, Hadamard matrices, sequences and block designs, *Contemporary design theory, A collection of surveys*, (J. Wiley, New York, 1992), 431–560.
- [76] D. R. Stinson, *Combinatorial designs: constructions and analysis* (Springer, New York, 2003).
- [77] A. P. Street, W.D. Wallis, J.S. Wallis, *Combinatorics: room squares, sum-free sets, Hadamard matrices*, *Lecture Notes in Mathematics*, (Springer-Verlang, Berlin-Heidelberg-New York, 1972).
- [78] S. Sy, On size multipartite Ramsey numbers for paths versus cycles of three or four vertices, *Far East J. Appl. Math.*, Vol. 44 (2010), 109–116.
- [79] V. G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p -graph, *Disket. Analiz.*, Vol. 3 (1964), 25–30.
- [80] Z. Wan, *Design theory*, (World Scientific, Pequin, 2009).