

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

VANDERLÉA DE LIMA INABA

**CONTROLABILIDADE PARA UMA EQUAÇÃO DO TIPO
DE ONDA SEMILINEAR DE SEXTA ORDEM E PARA UM
SISTEMA LINEAR TERMOELÁSTICO COM DUAS
TEMPERATURAS**

Maringá

2019

VANDERLÉA DE LIMA INABA

**CONTROLABILIDADE PARA UMA EQUAÇÃO DO TIPO
DE ONDA SEMILINEAR DE SEXTA ORDEM E PARA UM
SISTEMA LINEAR TERMOELÁSTICO COM DUAS
TEMPERATURAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá

2019

**Controlabilidade para uma Equação do Tipo de Onda Semilinear de Sexta Ordem e para
um Sistema Linear Termoelástico com Duas Temperaturas**

Vanderléa de Lima Inaba

Tese de doutorado defendida publicamente perante banca examinadora designada pelo
colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PMA) da Universidade Estadual de
Maringá (UEM), como exigência parcial para a obtenção do título de doutor em matemática.

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino (orientador)

Universidade Estadual de Maringá - UEM

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Universidade Estadual de Maringá - UEM

Prof. Dra. Claudete Matilde Webler Martins

Universidade Estadual de Maringá - UEM

Prof. Ph.D. Waldemar Donizete Bastos

Universidade Estadual Paulista - UNESP

Prof. Dr. Rodrigo André Schulz

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Maringá - PR

Outubro - 2019

*À minha pequena Isabela
dedico.*

AGRADECIMENTOS

À minha família, principalmente meus pais por todo incentivo e constante apoio desde o meu ingresso na graduação até chegar aqui.

À minha pequena Isabela, que me alegra diariamente com seus sorrisos. Minha maior motivação.

Ao meu esposo Eduardo pelo companherismo e compreensão durante os anos de doutoramento.

Ao Prof. Dr. Juan Soriano pela sua excelente orientação, pela disponibilidade sempre que precisei, por todos os conhecimentos matemáticos transmitidos de maneira tão paciente, pelas experiências compartilhadas, sempre me motivando e aconselhando como um amigo. Poderia estender muito mais meus agradecimentos ao Prof. Juan, mas finalizo aqui dizendo que serei sempre grata por ter acreditado em mim e ter me ajudado imensamente nessa caminhada do doutorado.

À todos os professores da graduação e da pós-graduação do departamento de Matemática da UEM pela contribuição que tiveram na minha formação e pela dedicação ao departamento e a pós-graduação.

Aos professores Waldemar, Rodrigo, Marcelo e Claudete por aceitarem compor a banca examinadora.

Aos amigos da turma de doutorado pelos bons momentos vividos que ficarão guardados na memória.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“ What lies behind us and what lies ahead of
us are tiny matters to what lies within us.”*

(Ralph Waldo Emerson)

RESUMO

A presente tese tem como objetos de estudo dois problemas: 1^o) uma equação semi-linear do tipo de onda de sexta ordem; 2^o) um sistema termoelástico acoplado. Para o estudo da existência e unicidade de solução utilizamos a teoria de semigrupos de operadores lineares em ambos os problemas. Nosso foco principal é obter a controlabilidade desses sistemas. Para o primeiro problema obtemos primeiramente a controlabilidade aproximada do sistema linear associado por meio de um resultado de C_0 -semigrupo devido a H. Leiva (ver [18]), o qual permite reduzir o problema de controlabilidade ao estudo da controlabilidade de uma família de sistemas de dimensão finita. Obtida a controlabilidade do problema linear, adaptamos um resultado de [19], onde foi estudado a controlabilidade aproximada de sistemas semilineares com impulso, para obter a controlabilidade aproximada do sistema semilinear.

Para o segundo problema, estudamos a controlabilidade exata utilizando a técnica de multiplicadores para obter uma desigualdade de observabilidade motivados por [1], onde foi estudado o sistema com apenas uma temperatura. Para colocar o problema com duas temperaturas nos inspiramos em [31].

Palavras chave: Semigrupos de operadores lineares, controlabilidade aproximada, controlabilidade exata, equação do tipo de onda, sistema termoelástico.

ABSTRACT

The present thesis has as object of study two problems: 1^o) a sixth order wave type semilinear equation, 2^o) a coupled thermoelastic system. For the study of the existence and uniqueness of solution we use the theory of semigroups of linear operators in both problems. Our main focus is obtain the controllability of these systems. For the first problem firstly we get the approximate controllability of the associated linear system through of a C_0 -semigroup result due to H. Leiva (see [18]) which reduces the controllability problem to the study of the controllability of a family of finite dimension systems. Obtained the controllability of the linear problem we adapted a result of [19] where the approximate controllability of semilinear impulse systems was studied to get the approximate controllability of the semilinear system.

For the second problem we study the exact controllability using the technique of multipliers to obtain an inequality of observability motivated by [1] where the system with only one temperature was studied. To pose the problem with two temperatures in the we inspired by [31].

Palavras chave: Linear operators semigroups, approximate controllability, exact controllability, wave type equation, thermoelastic system.

SUMÁRIO

Introdução	10
1 Introdução	10
1.1 Preliminares	11
1.2 Controlabilidade Aproximada para Sistemas Lineares e Semilineares: Uma Aplicação para uma Equação do Tipo de Onda de Sexta Ordem	11
1.3 Controlabilidade Exata para um Sistema Termoelástico com Controle Somente nas Componentes Térmicas	13
2 Preliminares	16
2.1 Espaços Funcionais	16
2.1.1 Distribuições	16
2.1.2 Espaços $L^p(\Omega)$	17
2.1.3 Espaços de Sobolev	19
2.2 Espaços de Funcionais à Valores Vetoriais	22
2.3 Operadores em Espaços de Hilbert	23
2.4 Mais Alguns Resultados	27
2.5 Semigrupos Fortemente Contínuos de Operadores Lineares Limitados	30
2.5.1 O Problema de Cauchy Abstrato	44

3	Controlabilidade Aproximada para Sistemas Lineares e Semilineares: Uma Aplicação para uma Equação do tipo de Onda de Sexta Ordem	51
3.1	Controlabilidade Aproximada para Sistemas Lineares	52
3.2	Controlabilidade Aproximada para Sistemas Semilineares	60
3.3	Controlabilidade Aproximada para uma Equação do Tipo de Onda Semilinear de Sexta Ordem	68
3.3.1	Formulação Abstrata do Problema Linear	70
3.3.2	Existência e Unicidade de Solução do Problema Linear	80
3.3.3	Controlabilidade Aproximada do Sistema Linear	84
3.3.4	Formulação Abstrata e Existência e Unicidade de Solução do Problema Semilinear	86
3.3.5	Controlabilidade Aproximada do Problema Semilinear	88
4	Controlabilidade Exata para um Sistema Termoelástico com Controle Somente nas Componentes Térmicas	89
4.1	Formulação Abstrata do Problema	91
4.2	Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções	101
4.3	A Aplicação de Controlabilidade $\mathcal{L}_T$ e sua Adjunta $\mathcal{L}_T^*$	108
4.4	Desigualdade de Observabilidade e Controlabilidade Exata	111

INTRODUÇÃO

No estudo de problemas envolvendo equações diferenciais parciais dependentes do tempo existem algumas técnicas matemáticas que podem ser utilizadas para estudar a controlabilidade destes sistemas. Existem também alguns tipos diversos de controlabilidade, aqui estamos interessados em controlabilidade aproximada e controlabilidade exata. O problema de controlabilidade de sistemas de equações de evolução consiste em: dados $T > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, podermos obter, para todo dado inicial, controles conduzindo o sistema a um estado desejado no instante T , no caso de controlabilidade exata, ou conduzindo o sistema a uma vizinhança de um estado desejado no instante T , no caso de controlabilidade aproximada. Os controles são funções que podem agir sobre a fronteira Γ de Ω (ou numa parte de Γ) no caso de problemas na fronteira, ou podem agir sobre Ω (ou sobre um subconjunto de Ω) no caso de problemas internos. Em geral, a obtenção da controlabilidade depende da escolha do espaço dos dados iniciais, do espaço dos controles e do tempo de controle.

Neste trabalho estudamos dois problemas: um sistema semilinear do tipo de onda de sexta ordem e um sistema linear termoelástico acoplado. Para o primeiro problema estudamos controlabilidade aproximada e para o segundo, controlabilidade exata. Em ambos os problemas, fizemos o estudo utilizando operadores abstratos, considerando operadores lineares não limitados em espaços de Hilbert convenientes. A principal ferramenta aqui empregada é a teoria de semigrupos de operadores lineares. Para a obtenção da controlabilidade aproximada do primeiro problema aplicamos uma técnica muito utilizada por H. Leiva ([18], [19], [20]), onde o problema de controlabilidade é reduzido ao estudo da controlabilidade de uma família de sistemas de dimensão finita.

Já a controlabilidade exata do segundo problema foi obtida por meio da técnica presente em [1], a qual utiliza multiplicadores para obter uma desigualdade de observabilidade.

A organização deste trabalho é feita como se segue.

1.1 Preliminares

No Capítulo 2 apresentamos definições e resultados referentes aos espaços de Sobolev, teoria de distribuições, análise funcional e semigrupos lineares.

1.2 Controlabilidade Aproximada para Sistemas Lineares e Semilineares: Uma Aplicação para uma Equação do Tipo de Onda de Sexta Ordem

No Capítulo 3, nas seções 3.1 e 3.2, estudamos a controlabilidade aproximada de equações lineares da forma

$$z' = Az(t) + Bu(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

e de equações semilineares

$$z' = Az(t) + Bu(t) + F(z(t), u(t)), \quad t > 0, \quad (1.2)$$

onde Z, U são espaços de Hilbert, $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ é o gerador de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em Z , $B \in \mathcal{L}(U, Z)$, $u \in L^2(0, \tau; U)$ e o termo não linear $F : Z \times U \rightarrow Z$ é uma função Lipschitziana.

Os resultados apresentados nestas duas primeiras seções podem ser encontrados em [5] e [36].

Na seção 3.3, aplicamos os resultados estudados nas duas seções anteriores para obter a controlabilidade da seguinte equação semilinear do tipo de onda de sexta ordem com condições de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{cases} y_{tt} = a\Delta y - \Delta^2 y - \Delta^2 y_{tt} + u(t, x) + f(t, y, y_t, u(t, x)) & \text{em } (0, \tau) \times \Omega, \\ y = \Delta y = 0 & \text{em } (0, \tau) \times \Gamma, \\ y(0, x) = y_0(x), y_t(0, x) = y_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^4 , o controle $u \in L^2([0, \tau]; L^2(\Omega))$, $y_0, y_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e o termo não linear $f : [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que existem constantes $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$|f(t, z, v, u)| \leq c_0 + c_1|z| + c_2|v| + c_3|u|, \quad \forall (t, z, v, u) \in [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

A equação do tipo $(1.3)_1$ foi introduzida por Philip Rosenau em [33] com f tendo caracterizações específicas. Essa equação possui muitas características similares a equação de Boussinesq, a qual pode ser expressa das seguintes maneiras:

$$y_{tt} + \gamma y_{xxxx} - y_{xx} = \beta(y^2)_{xx}$$

e,

$$y_{tt} - \gamma y_{xxtt} - y_{xx} = \beta(y^2)_{xx}.$$

Equações de Boussinesq foram estudadas, por exemplo, em [25] e [38].

Em [34] e [39] foi estudado o problema de existência e unicidade de solução para a equação

$$y_{tt} - ay_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = \alpha |y_x|^p,$$

com dados iniciais tomados em espaços de Sobolev de ordem fracionária.

Em nosso trabalho, o problema (1.3) será considerado como uma equação abstrata num espaço de Hilbert adequado, a saber, $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. A fim de obter a existência e unicidade de solução aplicaremos um lema devido a H. Leiva, publicado em [18], obtendo que o sistema (1.3) gera um C_0 -semigrupo. Aplicando, então, a teoria de semigrupos lineares obtemos a existência e unicidade de solução. O lema citado é frequentemente utilizado nos trabalhos de H. Leiva, trata-se de um resultado muito importante por trazer uma caracterização específica para o C_0 -semigrupo, a qual é primordial para desenvolver os resultados de controlabilidade.

Estudamos primeiramente o sistema linear correspondente ($f \equiv 0$ em (1.3)), obtendo a controlabilidade por meio de uma caracterização algébrica. A controlabilidade aproximada do sistema linear juntamente com as hipóteses sobre f nos permitirá obter a controlabilidade aproximada de (1.3) utilizando a proposta de [19].

1.3 Controlabilidade Exata para um Sistema Termoelástico com Controle Somente nas Componentes Térmicas

No Capítulo 4, estudamos a controlabilidade exata para o sistema termoelástico

$$\begin{cases} \rho_1 z_{tt} - \gamma_1 \Delta z_{tt} + a_{11} \Delta^2 z + a_{12} \Delta^2 \xi + c_{11} \Delta \psi + c_{12} \Delta \varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \rho_2 \xi_{tt} - \gamma_2 \Delta \xi_{tt} + a_{21} \Delta^2 z + a_{22} \Delta^2 \xi + c_{21} \Delta \psi + c_{22} \Delta \varphi = 0 & \text{em } Q, \\ b_{11} \psi_t + b_{12} \varphi_t - c_{11} \Delta \psi - c_{12} \Delta \varphi + a(\psi - \varphi) - c_{11} \Delta z_t - c_{12} \Delta \xi_t = \text{div}(\bar{u}) & \text{em } Q, \\ b_{21} \psi_t + b_{22} \varphi_t - c_{21} \Delta \psi - c_{22} \Delta \varphi - a(\psi - \varphi) - c_{21} \Delta z_t - c_{22} \Delta \xi_t = \text{div}(\bar{v}) & \text{em } Q, \end{cases} \quad (1.4)$$

com condições de fronteira

$$\begin{cases} y \equiv 0 \equiv \frac{\partial y}{\partial \nu} & \text{em } \Sigma, \\ \xi \equiv 0 \equiv \frac{\partial \xi}{\partial \nu} & \text{em } \Sigma, \\ \psi \equiv 0 \equiv \varphi & \text{em } \Sigma, \end{cases} \quad (1.5)$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} z(t=0) = z_0, z_t(t=0) = z_1, \xi(t=0) = \xi_0, \xi_t(t=0) = \xi_1 & \text{em } \Omega, \\ \psi(t=0) = \psi_0, \varphi(t=0) = \varphi_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e limitado com fronteira Γ suficientemente regular, (x, y) denota um ponto de Ω , t a variável de tempo, $Q = (0, T) \times \Omega$ e $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$. Os deslocamentos são denotados por z e ξ e as temperaturas por ψ e φ . O operador div denota o divergente dos vetores (que são os termos de controle) $\bar{u}(x, y) = [u_1(x, y), u_2(x, y)]$ e $\bar{v}(x, y) = [v_1(x, y), v_2(x, y)]$, isto é, $\text{div}(\bar{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$ e $\text{div}(\bar{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$.

Definindo o espaço $H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega)$ por

$$H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega) = \begin{cases} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \text{se } \gamma_1, \gamma_2 > 0, \\ H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) & \text{se } \gamma_1 > 0, \gamma_2 = 0, \\ L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \text{se } \gamma_1 = 0, \gamma_2 > 0, \\ L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) & \text{se } \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

mostramos a boa colocação do sistema termoelástico não controlado ($\bar{u} \equiv 0 \equiv \bar{v}$ em (1.4)) para dados iniciais $(z_0, \xi_0, z_1, \xi_1, \psi_0, \varphi_0) \in \mathcal{H} \equiv [H_0^2(\Omega)]^2 \times H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$.

A existência, unicidade e regularidade de solução é dada por meio da teoria de semi-grupos de operadores lineares.

Para obter a controlabilidade exata do problema (1.4) – (1.6) no intervalo de tempo $[0, T]$, provaremos que para $(z_0, \xi_0, z_1, \xi_1, \psi_0, \varphi_0)$ e $(z_0^T, \xi_0^T, z_1^T, \xi_1^T, \psi_0^T, \varphi_0^T)$ dados iniciais e finais, respectivamente, no espaço $\mathcal{H} \equiv [H_0^2(\Omega)]^2 \times H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$, existem controles adequados $\bar{u}, \bar{v} \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2$ tal que a solução correspondente $(z, \xi, z_t, \xi_t, \psi, \varphi)$ de (1.4) – (1.6) satisfaz no tempo final T ,

$$(z(T), \xi(T), z_t(T), \xi_t(T), \psi(T), \varphi(T)) = (z_0^T, \xi_0^T, z_1^T, \xi_1^T, \psi_0^T, \varphi_0^T).$$

Desta forma, o deslocamento será controlado exatamente pelo meio indireto de colocar o termo de controle na componente térmica.

Trabalhamos com o problema (1.4) – (1.6) escrito na forma matricial:

$$\begin{cases} RZ_{tt} - G\Delta Z_{tt} + A\Delta^2 Z + C\Delta\Psi = 0 & \text{em } Q, \\ B\Psi_t - C\Delta\Psi + aN\Psi - C\Delta Z_t = \text{div } \bar{U} & \text{em } Q, \\ Z \equiv 0 \equiv \frac{\partial Z}{\partial \nu} & \text{em } \Sigma, \\ \Psi \equiv 0 & \text{em } \Sigma, \\ Z(t=0) = Z_0, Z_t(t=0) = Z_1, \Psi(t=0) = \Psi_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde

$$Z = \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix},$$

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 2}, B = [b_{ij}]_{2 \times 2}, C = [c_{ij}]_{2 \times 2}, N = [(-1)^{i+j}]_{2 \times 2}.$$

Impomos algumas condições sobre o sistema,

H_1 : As matrizes A , B e C são definidas positivas;

H_2 : Os parâmetros a , ρ_1 , ρ_2 , γ_1 , γ_2 , a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_{11} , b_{12} , b_{22} , c_{11} , c_{12} e c_{22} são positivos;

H_3 : $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$;

$$H_4 : \begin{cases} c_{21} < -\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{b_{12}}, & \text{se } b_{12} > 0; \\ c_{21} > -\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{b_{12}}, & \text{se } b_{12} < 0. \end{cases}$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 1.1 *O problema (4.4) é exatamente controlável no tempo arbitrário $T > 0$. Isto é, para qualquer $T > 0$ e dados $[Z_0, Z_1, \Psi_0], [Z_0^T, Z_1^T, \Psi_0^T] \in \mathcal{H}$, podemos encontrar uma função controle $\bar{U} \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4$ tal que a solução correspondente $[Z, Z_t, \Psi]$ de (4.4) satisfaz $[Z(T), Z_t(T), \Psi(T)] = [Z_0^T, Z_1^T, \Psi_0^T]$.*

A metodologia aplicada na demonstração do teorema acima consiste no argumento clássico de mostrar a sobrejetividade da aplicação de controlabilidade $\mathcal{L}_T$ (veja, por exemplo, o Lema 4.9 para a definição desta aplicação). Estabelecer a sobrejetividade para $\mathcal{L}_T$ é equivalente a obter a seguinte desigualdade de observabilidade para alguma constante $C_T > 0$:

$$\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt \geq C_T \left\| \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (1.8)$$

onde Θ é a componente térmica do seguinte sistema termoelástico retrógado, adjunto com respeito a (1.7):

$$\begin{cases} RW_{tt} - G\Delta W_{tt} + A\Delta^2 W + C\Delta\Theta = 0 & \text{em } Q, \\ B\Theta_t + C\Delta\Theta - aN\Theta - C\Delta W_t = 0 & \text{em } Q, \\ W \equiv 0 \equiv \frac{\partial W}{\partial \nu} & \text{em } \Sigma, \\ \Theta \equiv 0 & \text{em } \Sigma, \\ W(T) = W_0, W_t(T) = W_1, \Theta(T) = \Theta_0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} w \\ \chi \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \zeta \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \\ A = [a_{ij}]_{2 \times 2}, B = [b_{ij}]_{2 \times 2}, C = [c_{ij}]_{2 \times 2}, N = [(-1)^{i+j}]_{2 \times 2}.$$

Para obter (1.8) fazemos uso de uma técnica de multiplicadores com o multiplicador escolhido sendo $A_D^{-1}\Theta$, onde o operador A_D denota o Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet.

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e definições da teoria de distribuições, espaços de Sobolev, Análise funcional e semigrupos de operadores lineares. Muitas demonstrações foram omitidas, mas indicamos referências para a verificação. Os resultados presentes neste capítulo serão utilizados nos capítulos seguintes.

2.1 Espaços Funcionais

2.1.1 Distribuições

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, n -uplas de números inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ denotaremos o operador derivação em $\mathbb{R}^n$ por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos o *suporte* da função φ em Ω e denotamos por $\text{supp}(\varphi)$ o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $\text{supp}(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω . Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de Ω , $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sucessão $\{\varphi_\nu\}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$\varphi_\nu \rightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

- (i) $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu$ e $\text{supp}(\varphi) \subset K$;
- (ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em (2.1). Denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω . Diremos que $\{T_\nu\}$, uma sucessão de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e escreveremos

$$T_\nu \rightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T , denotada por $D^\alpha T$, é dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens e $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e além disso a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua.

2.1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u , definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω . O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se define por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$, com o produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

e a norma $\|u\|^2 = (u, u)$, é um espaço de Hilbert.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Proposição 2.1 (Desigualdade de Young) *Se a e b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

sempre que $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demonstração: Ver [3]. □

Observação 2.2 ([3], p. 92) *A desigualdade de Young também pode ser utilizada na forma*

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^{p'}, \text{ com } C_\epsilon = \epsilon^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Proposição 2.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 < p < \infty$.*

Então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [3]. □

Proposição 2.4 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$ então*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [27]. □

2.1.3 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções de $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \text{ se } p = \infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escreve-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Teorema 2.5 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $1 \leq p < \infty$ então existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, a qual é equivalente a norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [3].

□

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^p dx$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e p' é o índice conjugado de p . Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira Γ bem regular. A seguir, caracterizamos o espaço $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$, e o espaço $H^s(\Gamma)$, para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$. Com $\mathcal{D}(\Gamma)$ representamos o espaço vetorial das funções reais v definidas em Γ , possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Denotando por $d\Gamma$ a medida sobre Γ induzida pela medida de Lebesgue, definimos o espaço $L^p(\Gamma)$ como sendo o espaço das funções somáveis sobre Γ para a medida $d\Gamma$ com a norma

$$\|v\|_{L^p(\Gamma)}^p = \int_{\Gamma} |v(x)|^p d\Gamma, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{L^\infty(\Gamma)} = \sup_{x \in \Gamma} |v(x)|, \quad p = \infty.$$

Consideramos $\{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_k, \varphi_k)\}$ um sistema de cartas locais para Γ , e funções testes $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ no $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\text{supp}(\theta_i) \subset U_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k \theta_i(x) = 1, \quad x \in \Gamma.$$

Dada uma função ϕ definida em Γ , para todo $i = 1, 2, \dots, k$, seja

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (\theta_i \phi)(\varphi_i^{-1}(x', 0)) & \text{se } x' \in \Omega_0 = (0, 1)^{n-1}, \\ 0 & \text{se } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Definimos o espaço $H^s(\Gamma)$, para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, como sendo o espaço vetorial das funções ϕ definidas em Γ tais que $\phi_i \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$, munido da norma

$$\|\phi\|_{H^s(\Gamma)}^2 = \sum_{i=1}^k \|\phi_i\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2.$$

Temos que $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert sendo $\mathcal{D}(\Gamma)$ denso em $H^s(\Gamma)$.

Para mais detalhes dos espaços definidos acima, veja [28].

Teorema 2.6 (Green) Se $u \in H^2(\Omega)$ e $w \in H^1(\Omega)$ então

$$\int_{\Omega} (\Delta u)w \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} w \, d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [7]. □

Definição 2.7 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado e bem regular. Definimos a **aplicação traço** (de ordem m), por

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\Omega) &\longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\longmapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u), \end{aligned}$$

onde $\gamma_j : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$; $\gamma_j \xi = \frac{\partial^j \xi}{\partial \nu^j} \Big|_{\Gamma}$, $\forall \xi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Em [6], verifica-se que a aplicação traço (de ordem m) é linear, contínua, sobrejetiva e $\ker(\gamma) = \gamma^{-1}(\{0\}) = H_0^m(\Omega)$.

Exemplo 2.8 1) A aplicação traço (de ordem 1), é dada por

$$\begin{aligned} \gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ u &\longmapsto \gamma u = \gamma_0 u, \end{aligned}$$

com $\ker(\gamma u) = H_0^1(\Omega)$;

2) A aplicação traço (de ordem 2) de u sobre Γ , é dada por

$$\begin{aligned} \gamma : H^2(\Omega) &\longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \\ u &\longmapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u), \end{aligned}$$

com $\ker(\gamma u) = H_0^2(\Omega)$.

Agora, definimos

$$\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

munido do produto interno

$$(u, v)_0 = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^0(\Omega),$$

que o faz um espaço de Hilbert.

Proposição 2.9 (*1ª Fórmula de Green Generalizada*): Para todo $u \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ e todo $v \in H^2(\Omega)$ tem-se:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma), H^{3/2}(\Gamma)} - \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Demonstração: Ver [6]. □

2.2 Espaços de Funcionais à Valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$. Dizemos que uma sucessão $(\varphi_\nu) \subset \mathcal{D}(0, T; X)$ converge para $\varphi \in \mathcal{D}(0, T; X)$ e denotamos:

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi, \text{ em } \mathcal{D}(0, T; X)$$

se

- (i) Existe um compacto K de $(0, T)$ tal que $\text{supp}(\varphi_\nu)$ e $\text{supp}(\varphi)$ estão contidos em K , para todo ν ;
- (ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{dt^k} \varphi_\nu \rightarrow \frac{d^k}{dt^k} \varphi$ em X , uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0, T) = \mathcal{D}(0, T; \mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ se $S : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ é linear e se $\theta_\nu \rightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(0, T)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X . Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S, \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; X),$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

O espaço $\mathcal{D}'(0, T; X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das *distribuições vetoriais* de $(0, T)$ com valores em X .

Denota-se por $L^2(0, T; X)$ o espaço das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ mensuráveis em $(0, T)$, $(0, T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt < \infty.$$

Em particular, se X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0, T, X)$ munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(0, T, X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

também é um espaço de Hilbert.

2.3 Operadores em Espaços de Hilbert

Nesta seção, quando não mencionado, Z representa um espaço de Hilbert real com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e norma $\|\cdot\|$.

Teorema 2.10 (de Representação de Riesz-Fréchet) *Seja Z um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in Z'$ (espaço dual de Z), existe uma única $f \in Z$ tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \quad \forall u \in Z.$$

Além disso,

$$\|f\|_Z = \|\varphi\|_{Z'}.$$

Demonstração: Ver [3]. □

Definição 2.11 *Seja Z um espaço de Hilbert. Se diz que uma forma bilinear $a : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ é*

(i) *contínua se existe uma constante C tal que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_Z \|v\|_Z, \quad \forall u, v \in Z;$$

(ii) *coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_Z^2, \quad \forall v \in Z.$$

Teorema 2.12 (Lax-Milgram) *Seja a uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in Z'$ existe um único $u \in Z$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \forall v \in Z.$$

Além disso, se a é simétrica então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in Z \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in Z} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração: Ver [3]. □

Teorema 2.13 *Sejam V e Z espaços de Hilbert com $V \hookrightarrow Z$ (imersão contínua), sendo V denso em Z . Considere A um operador definido pela terna $\{V, Z, a\}$. Se a é uma forma bilinear, contínua e coerciva em V , então, para cada $f \in Z$, existe um único $u \in D(A)$ tal que $Au = f$.*

Demonstração: Ver [7]. □

Teorema 2.14 *Seja A um operador definido pela terna $\{V, Z, a\}$ com $V \hookrightarrow Z$, V denso em Z e a uma forma bilinear e contínua. Suponhamos que V está contido estritamente em Z e que a seja coerciva. Então, A é um operador não limitado de Z .*

Demonstração: Ver [7]. □

Definição 2.15 *Seja A um operador linear em um espaço de Hilbert Z . Assuma que o domínio de A , $D(A)$, é denso em Z . Então, o operador adjunto $A^* : D(A^*) \subset Z \rightarrow Z$ de A é definido da seguinte maneira: o domínio $D(A^*)$ de A^* consiste de todos $y \in Z$ tal que existe $y^* \in Z$ satisfazendo*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle, \forall x \in D(A).$$

Para cada $y \in D(A^)$ o operador adjunto A^* é definido, em termos de y^* , por*

$$A^*y = y^*.$$

Proposição 2.16 *Seja Z um espaço de Hilbert e $A : Z \rightarrow Z$ um operador linear limitado bijetivo com A^{-1} limitado. A inversa $(A^*)^{-1}$ existe e*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Demonstração: Ver [16]. □

Definição 2.17 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de E em F , munido da norma*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{x \in E; \|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

Quando $E = F$ escrevemos simplesmente $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Definição 2.18 *Um operador $P \in \mathcal{L}(Z)$ é uma projeção se $P^2 := PP = P$ e um operador projeção é chamado ortogonal se $P^* = P$.*

Definição 2.19 *Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subespaços fechados de Z . Dizemos que Z é uma soma Hilbertiana dos E_n quando:*

- (i) *os E_n são dois a dois ortogonais, ou seja, $(u, v) = 0$, para todo $u \in E_n$ e para todo $v \in E_m$, com $n \neq m$;*
- (ii) *O espaço vetorial gerado pelos subespaços E_n é denso em Z , ou seja, o conjunto das combinações lineares finitas de elementos de E_n é denso em Z .*

Se Z é uma soma Hilbertiana dos E_n denotamos

$$Z = \bigoplus_n E_n.$$

Demonstrações para os próximos resultados desta seção podem ser encontradas em [7].

Teorema 2.20 *Sejam $Z = \bigoplus_n E_n$ e $P_{E_n} : Z \rightarrow E_n$, a projeção de Z sobre E_n , definida por $P_{E_n} u = u_n$. Então,*

$$a) \ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ ou seja, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = u, \text{ para todo } u \in Z;$$

$$b) \ \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 \text{ (Identidade de Bessel-Parseval).}$$

Prova-se também que a projeção $P_{E_n} : Z \rightarrow E_n \subset Z$ é um operador linear e contínuo.

Definição 2.21 *Seja $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de Z tal que*

$$(i) \ \|e_n\| = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \ (e_n, e_m) = 0 \text{ para todo } n \neq m;$$

(iii) *O espaço gerado pelos e_n , $n \in \mathbb{N}$, é denso em Z .*

Nestas condições, dizemos que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base Hilbertiana de Z .

Proposição 2.22 *Seja $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana de Z . Então,*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n \text{ e } \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2.$$

Quando Z admite uma base Hilbertiana, podemos obter uma sequência, $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de subespaços fechados de Z de modo que $Z = \bigoplus_n E_n$.

Teorema 2.23 *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Definição 2.24 *Um conjunto de vetores $A \subset Z$ é dito ortogonal quando $(u, v) = 0$ para todo $u, v \in A$ com $u \neq v$. Um conjunto é dito ortonormal quando for ortogonal e, além disso, $\|u\| = 1$ para todo $u \in A$.*

Definição 2.25 *Seja A um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert Z . A é dito completo se não existir outro conjunto ortonormal contendo A , ou seja, A deve ser o conjunto ortonormal maximal.*

Proposição 2.26 *Seja Z um espaço de Hilbert não trivial. Então, qualquer conjunto ortonormal pode ser estendido a um conjunto ortonormal completo.*

2.4 Mais Alguns Resultados

Nesta seção enunciamos mais alguns resultados utilizados no texto.

Teorema 2.27 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Sejam X um espaço métrico completo não vazio e $S : X \rightarrow X$ uma contração, isto é,*

$$d(Sx_1, Sx_2) \leq kd(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X, \text{ com } k < 1.$$

Então S tem um único ponto fixo, $x = S(x)$.

Demonstração: Ver [16], p. 300. □

O resultado a seguir é uma consequência do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 2.28 *Sejam E um espaço vetorial normado e $F \subset E$ um subespaço vetorial tal que $\overline{F} \neq E$. Então, existe $f \in E'$, $f \neq 0$, tal que*

$$\langle f, x \rangle = 0, \quad \forall x \in F.$$

Demonstração: Ver [3]. □

O próximo resultado é uma consequência do Teorema da Aplicação Aberta.

Teorema 2.29 *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear, contínuo e bijetivo. Então,*

(i) T^{-1} é um operador linear e contínuo de F sobre E ;

(ii) Existem $m, M > 0$ tais que $m\|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$, para todo $x \in E$.

Demonstração: ver [7]. □

Teorema 2.30 (Operador Linear Fechado) *Seja $T : D(T) \longrightarrow F$ um operador linear, onde $D(T) \subset E$ e E, F são espaços normados. Então T é fechado se, e somente se, tem a seguinte propriedade: Se $x_n \rightarrow x$, onde $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$, e $Tx_n \rightarrow y$, então $x \in D(T)$ e $Tx = y$.*

Demonstração: Ver [16]. □

Lema 2.31 *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$. Se $D(T) = E$ então T é fechado se, e somente se, T é contínuo.*

Demonstração: Ver [7]. □

Teorema 2.32 *Sejam E e F espaços de Banach e $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ um operador linear não limitado que é densamente definido e fechado. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) *A é sobrejetivo, isto é, $Im(A) = F$;*

(ii) *Existe uma constante c tal que*

$$\|v\| \leq c\|A^*v\|, \quad \forall v \in D(A^*);$$

(iii) *$\ker(A^*) = \{0\}$ e $Im(A^*)$ é fechado.*

Demonstração: Ver [3], p. 47. □

Teorema 2.33 (da Regularidade Elíptica) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante dependendo somente de Ω .

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Em particular, se $f \in H^m(\Omega)$ com $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Ver [3], p. 298. □

Exemplo 2.34 1) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Segue da regularidade elíptica que dado $g \in L^2(\Omega)$, a solução v do problema*

$$\begin{cases} \Delta v = g & \text{em } \Omega; \\ v = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

pertence a $H^2(\Omega)$ e

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|g\|_{L^2(\Omega)},$$

com a constante c independente de g .

2) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^4 com fronteira Γ limitada. Segue da regularidade elíptica que dado $g \in L^2(\Omega)$, a solução v do problema*

$$\begin{cases} \Delta^2 v = g & \text{em } \Omega; \\ v = \Delta v = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

pertence a $H^4(\Omega)$ e

$$\|v\|_{H^4(\Omega)} \leq c\|g\|_{L^2(\Omega)},$$

com a constante c independente de g .

Proposição 2.35 *Sejam X , B e Y espaços de Banach tais que $X \subset B \subset Y$ com injeção compacta e F um conjunto de funções. Se F é limitado em $L^p(0, T; X)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}; f \in F \right\}$ é limitado em $L^1(0, T; Y)$ então F é relativamente compacta em $L^p(0, T; B)$. Se F é limitada em $L^\infty(0, T; X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ é limitada em $L^r(0, T; Y)$, com $r \geq 1$, então F é relativamente compacta em $C(0, T; B)$.*

Demonstração: Ver [35], p. 85. □

O próximo resultado pode ser encontrado em [22], p. 492.

Teorema 2.36 (Teorema da Divergência) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira Γ suficientemente regular. Considere $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $X = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ com $a_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,*

$i = 1, 2, \dots, n$, um campo de vetores de classe C^1 e $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ o campo de vetores unitários normais apontando para fora de Ω . Nestas condições,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\Omega = \int_{\Gamma} X \cdot \nu \, d\Gamma,$$

onde $\operatorname{div} X = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}$.

2.5 Semigrupos Fortemente Contínuos de Operadores Lineares Limitados

Nesta seção, quando não mencionado, consideramos X um espaço de Banach e Z um espaço de Hilbert.

Definição 2.37 *Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares e limitados de X em X é um semigrupo fortemente contínuo (ou, C_0 -semigrupo) se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$;

(iii) Para todo $x_0 \in X$, $T(t)x_0$ é fortemente contínuo em $t = 0$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x_0 - x_0\|_X = 0.$$

Definição 2.38 *O gerador infinitesimal A de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, em um espaço de Banach X , é o operador definido por:*

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

sempre que o limite existe. O domínio de A , $D(A)$, é o conjunto formado pelos elementos de X para o qual o limite existe.

O próximo teorema apresenta algumas propriedades importantes dos C_0 -semigrupos.

Teorema 2.39 *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X . As seguintes propriedades são satisfeitas:*

(a) $\|T(t)\|$ é limitada em todo intervalo limitado de $[0, +\infty)$;

(b) $T(t)$ é fortemente contínuo em todo $t \in [0, +\infty)$, ou seja, se $t \in [0, +\infty)$ então

$$\lim_{s \rightarrow t} T(s)x = T(t)x, \quad \forall x \in X;$$

(c) Para todo $x \in X$, vale que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds = x.$$

Demonstração: Ver [10].

□

Teorema 2.40 *Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo então existem $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Ver [37], p. 41.

□

Definição 2.41 *Um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é dito do tipo (M, ω) com $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ se para cada $t \geq 0$*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}.$$

Um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é chamado um C_0 -semigrupo de contrações se é do tipo $(1, 0)$, isto é, se para cada $t \geq 0$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

Algumas propriedades a respeito do gerador infinitesimal A de um C_0 -semigrupo são dadas pelo próximo teorema. Antes, enunciamos a seguinte definição:

Definição 2.42 *Seja T um C_0 -semigrupo e A o seu gerador infinitesimal. Considerando $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, definimos A^n por:*

$$D(A^n) = \{x \in X; x \in D(A^{n-1}) \text{ e } A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x), \quad \forall x \in D(A^n).$$

Teorema 2.43 (a) *Se $x \in D(A)$ então $T(t)x \in D(A)$, para todo $t \geq 0$;*

(b) *$\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax$, para todo $x \in D(A)$, $t > 0$;*

(c) *$\frac{d^n}{dt^n}(T(t)x) = A^n T(t)x = T(t)A^n x$, para todo $x \in D(A^n)$, $t > 0$;*

(d) *$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax \, ds$, para todo $x \in D(A)$;*

(e) *$\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$, $A \int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x$, para todo $x \in X$ e $D(A)$ é denso em X ;*

(f) *A é um operador linear fechado;*

(g) *$\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X .*

Demonstração: Ver [10]. □

Proposição 2.44 *Se A é o gerador de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então para todo $x \in D(A^n)$, $S(t)x \in C^{n-k}([0, \infty), D(A^k))$, $k = 0, 1, \dots, n$.*

Demonstração: Ver [13], p. 19. □

Definição 2.45 *Seja A um operador linear sobre um espaço de Banach X . O conjunto resolvente de A é definido por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : D(A) \rightarrow X \text{ é bijetor e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

onde $\mathcal{L}(X)$ é o espaço de todos os operadores lineares e limitados de X em X . Para $\lambda \in \rho(A)$, o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é chamado operador resolvente. O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é denominado o espectro de A .

Observação 2.46 (1) Se $\rho(A) \neq \emptyset$ então A é fechado, ou seja, seu gráfico

$$G(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\}$$

é um subespaço fechado de $X \times X$. De fato, se $\rho(A) \neq \emptyset$ então existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda I - A : D(A) \rightarrow X$ é bijetor e $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Consideremos $\{x_n\} \subset D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$. Devemos mostrar que $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Note que

$$\lambda x_n - Ax_n \rightarrow \lambda x - y$$

e,

$$x_n = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x_n = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda x_n - Ax_n).$$

Ou seja, $x = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda x - y)$. Isto é, $x \in D(A)$ e $\lambda x - Ax = \lambda x - y$. Ou ainda, $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

(2) Se A é fechado então, pelo Teorema do Gráfico Fechado, temos que o conjunto resolvente de A é

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : D(A) \rightarrow X \text{ é bijetor}\}$$

De fato, como A é fechado, pelo Teorema do Gráfico Fechado, A é contínuo. Assim, $\lambda I - A$ é um operador linear e contínuo e, sendo $\lambda I - A$ bijetor segue que $(\lambda I - A)^{-1}$ é linear e contínuo. Ou seja, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Definição 2.47 A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, de operadores lineares limitados é chamada resolvente de A .

Definimos, para todo $\lambda > 0$, a aproximação de Yosida de A por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Teorema 2.48 Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X . Se A_λ é a aproximação de Yosida de A então

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{A_\lambda t} x, \text{ para } x \in X.$$

Demonstração: Ver [32], p. 21. □

Observação 2.49 Um C_0 -semigrupo com gerador infinitesimal A é igual a e^{At} quando A é um operador limitado. Veja [32], p. 32. Quando A é um operador não limitado, o teorema acima nos mostra em que sentido $T(t)$ é "igual" a e^{At} .

Para o espaço de Banach X consideremos o seu dual X' . Denotamos $x^* \in X'$ aplicado em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para cada $x \in X$ definimos o conjunto dualidade

$$F(x) = \{x^* \in X; \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Definição 2.50 Um operador linear A é dissipativo se para cada $x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Observação 2.51 No caso em que $X = H$ é um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, um operador linear $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é dissipativo se, para cada $x \in D(A)$, $\langle x, Ax \rangle \leq 0$. Ver [37], p. 59.

Teorema 2.52 Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H . Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em H .

Demonstração: Ver [26], p. 3. □

Lema 2.53 Se A é um operador limitado em X então A^* é um operador limitado em X' e $\|A\| = \|A^*\|$.

Demonstração: Ver [32], p. 38. □

Corolário 2.54 Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo com gerador infinitesimal A . Definindo $T^* : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X')$ por $T^*(t) = [T(t)]^*$, $\forall t \geq 0$, temos que $\{T^*(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo com gerador infinitesimal A^* .

Demonstração: Ver [32], p. 41. □

O próximo lema é de extrema importância para este trabalho. É o resultado que utilizaremos para provar que o operador, no problema que estudaremos no Capítulo 3, gera um C_0 -semigrupo.

Lema 2.55 ([18]) *Sejam Z um espaço de Hilbert separável e $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $\{P_n\}_{n \geq 1}$ duas famílias de operadores lineares e limitados em Z com $\{P_n\}_{n \geq 1}$ uma família completa de projeções ortogonais tais que:*

$$A_n P_n = P_n A_n, \quad n \geq 1.$$

Defina a seguinte família de operadores lineares

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0.$$

Então:

- (a) *$T(t)$ é um operador linear e limitado se $\|e^{A_n t}\| \leq g(t)$, $n = 1, 2, \dots$, para alguma função contínua a valores reais $g(t) \geq 0$, $t \geq 0$.*
- (b) *Sob a condição anterior $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo no espaço de Hilbert Z , cujo gerador infinitesimal A é dado por*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in D(A),$$

com

$$D(A) = \left\{ z \in Z; \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty \right\}.$$

- (c) *O espectro, $\sigma(A)$, de A é dado por*

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})},$$

onde $\overline{A_n} = A_n P_n : \mathcal{R}(P_n) \rightarrow \mathcal{R}(P_n)$, $\mathcal{R}(P_n) = \text{Im}(P_n)$.

Demonstração: (a) Suponhamos que existe $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\|e^{A_n t}\| \leq g(t)$, $n = 1, 2, \dots$, logo

$$\begin{aligned} \|T(t)z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z \right\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{A_n t} P_n z\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{A_n t}\|^2 \|P_n z\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} g(t)^2 \|P_n z\|^2 \\ &= g(t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n z\|^2 \\ &= g(t)^2 \|z\|^2. \end{aligned}$$

Assim, $\|T(t)z\| \leq g(t)\|z\|$ e, portanto, $\|T(t)\| = \sup_{\|z\|=1} \|T(t)z\| \leq g(t)$. Isso mostra que $T(t)$ é limitado. A linearidade de $T(t)$ segue da linearidade de P_n . Portanto, $T(t) \in \mathcal{L}(Z)$. Ou seja, $T(t)$ é linear e limitado.

(b) Vamos provar, primeiramente, que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Temos

$$(i) \quad T(0)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n 0} P_n z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z = z. \text{ Logo, } T(0) = I;$$

(ii)

$$\begin{aligned} T(t)T(s)z &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n T(s)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{A_m s} P_m z \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} e^{A_n s} P_n z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n(t+s)} P_n z \\ &= T(t+s)z; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \|T(t)z - z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z - \sum_{n=1}^{\infty} P_n z \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (e^{A_n t} - I) P_n z \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{A_n t} - I\|^2 \|P_n z\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^N \|e^{A_n t} - I\|^2 \|P_n z\|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|e^{A_n t} - I\|^2 \|P_n z\|^2 \\
&\leq \sup_{1 \leq n \leq N} \|e^{A_n t} - I\|^2 \sum_{n=1}^N \|P_n z\|^2 + k \sum_{n=N+1}^{\infty} \|P_n z\|^2,
\end{aligned}$$

onde $k \geq \sup_{n \geq 1; 0 \leq t \leq 1} \|e^{A_n t} - I\|^2$. Agora, note que $\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n z\|^2 = \|z\|^2$ (ou seja, a série é convergente). Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|P_n z\|^2 < \frac{\epsilon}{2k}.$$

Também, podemos escolher $t \leq 1$ tal que $\sup_{1 \leq n \leq N} \|e^{A_n t} - I\|^2 \leq \frac{\epsilon}{2\|z\|^2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|T(t)z - z\|^2 &\leq \frac{\epsilon}{2\|z\|^2} \sum_{n=1}^N \|P_n z\|^2 + \frac{k\epsilon}{2k} \\
&= \frac{\epsilon}{2\|z\|^2} \|z\|^2 + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)z - z\| = 0, \quad \forall z \in Z.$$

De (i), (ii) e (iii) segue que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo.

Agora, seja A o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $D(A)$ seu domínio. Logo, para $z \in D(A)$, temos, por definição, que

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z - \sum_{n=1}^{\infty} P_n z}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (e^{A_n t} - I) P_n z}{t}.$$

Como $e^{A_m t}$ é um C_0 -semigrupo cujo gerador infinitesimal é A_m , segue que

$$\begin{aligned}
P_m Az &= P_m \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (e^{A_n t} - I) P_n z}{t} \right) = P_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(e^{A_n t} - I)}{t} P_n z \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_m \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(e^{A_n t} - I)}{t} P_n z \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(e^{A_m t} - I)}{t} P_m z \\
&= A_m P_m z.
\end{aligned}$$

Assim,

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} P_n Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z.$$

Na sequência, considere

$$D = \left\{ z \in Z; \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty \right\}.$$

Vamos mostrar que $D(A) = D$. Seja $z \in D(A)$. Pelo que foi feito, temos $P_n Az = A_n P_n z$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n Az\|^2 = \|Az\|^2 < \infty \quad (\text{pois, } z \in D(A)).$$

Logo, $z \in D$. O que mostra que $D(A) \subset D$.

Seja, agora, $z \in D$ então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z = y \in Z$. Seja $z_k = \sum_{n=1}^k P_n z$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z_k - z_k}{t} = \sum_{n=1}^k A_n P_n z.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z_k - z_k}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z_k - \sum_{n=1}^{\infty} P_n z_k}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (e^{A_n t} - I) P_n z_k}{t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(e^{A_n t} - I)}{t} P_n z_k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z_k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n \left(\sum_{m=1}^k P_m z \right) \\
&= \sum_{n=1}^k A_n P_n z.
\end{aligned}$$

Portanto, $z_k \in D(A)$ e $Az_k = \sum_{n=1}^k A_n P_n z$. Por fim, como $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k P_n z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z = z$, temos

$$Az = A \left(\lim_{k \rightarrow \infty} z_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} Az_k = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z = y.$$

Logo, $z \in D(A)$ e $Az = y$. Com isto, provamos que $D \subset D(A)$. Concluimos, então, que $D(A) = D$.

(c) Provar o item (c) é equivalente a provar que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n}) \subset \sigma(A) \text{ e } \sigma(A) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})}.$$

Para provar a primeira parte, mostraremos que $\rho(A) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(\overline{A_n})$. De fato, seja $\lambda \in \rho(A)$. Então, $(\lambda I - A)^{-1} : Z \rightarrow D(A)$ é um operador linear limitado. Precisamos mostrar que

$$(\lambda I - \overline{A_m})^{-1} : \mathcal{R}(P_m) \rightarrow \mathcal{R}(P_m)$$

existe e, é limitado para $m \geq 1$.

Suponhamos que $(\lambda I - \overline{A_m})P_m z = 0$, então

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)P_m z &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda I - A_n)P_n P_m z = (\lambda I - A_m)P_m P_m z \\
&= (\lambda I - \overline{A_m})P_m z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O que implica que $P_m z = 0$. Logo, $\lambda I - \overline{A_m}$ é injetor.

Agora, dado $y \in \mathcal{R}(P_m)$ queremos mostrar que existe $w \in \mathcal{R}(P_m)$ tal que $(\lambda I - \overline{A_m})w = y$. Note que, como $\lambda \in \rho(A)$, existe $z \in Z$ satisfazendo

$$(\lambda I - A)z = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda I - A_n)P_n z = y.$$

Aplicando P_m em ambos os lados dessa equação obtemos

$$P_m(\lambda I - A)z = (\lambda I - A_m)P_m z = (\lambda I - \overline{A_m})P_m z = P_m y = y.$$

Portanto, $(\lambda I - \overline{A_m}) : \mathcal{R}(P_m) \rightarrow \mathcal{R}(P_m)$ é uma bijeção. Como $\overline{A_m}$ é fechado, então, pelo Teorema do Gráfico Fechado

$$\lambda \in \rho(\overline{A_m}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - \overline{A_m} \text{ é bijeção}\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \overline{A_m})^{-1} \text{ é limitada}\},$$

para todo $m \geq 1$. Assim, provamos que

$$\rho(A) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(\overline{A_n}) \Leftrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n}) \subset \sigma(A).$$

Agora, vamos provar que

$$\sigma(A) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})}.$$

Recordemos que se $\lambda \in \sigma(A)$, então ocorre algum dos seguintes casos:

- (1) $\lambda \in \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ não é injetor}\};$
- (2) $\lambda \in \sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ é injetor, mas } \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} \neq Z\};$
- (3) $\lambda \in \sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ é injetor, } \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} = Z, \text{ mas } \mathcal{R}(A - \lambda I) \neq Z\}.$

Assim,

- (1) Se $A - \lambda I$ não é injetor, então existe $z \in Z$ não nulo tal que $(A - \lambda I)z = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 = P_{n_0} 0 &= P_{n_0}(A - \lambda I)z = P_{n_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n - \lambda I)P_n z \right] = P_{n_0} A_{n_0} P_{n_0} z - \lambda P_{n_0} P_{n_0} z \\ &= \overline{A_{n_0}} P_{n_0} z - \lambda P_{n_0} z \\ &= (\overline{A_{n_0}} - \lambda I) P_{n_0} z. \end{aligned}$$

Note que existe n_0 tal que $P_{n_0}z \neq 0$, pois se $P_nz = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $z = \sum_{n=1}^{\infty} P_nz = 0$, o que é absurdo já que $z \neq 0$. Assim, $\lambda \in \sigma(\overline{A_{n_0}})$ e, portanto, $\lambda \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})}$.

(2) Se $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} \neq Z$ então existe $z_0 \in Z$ não nulo tal que

$$\langle z_0, (A - \lambda I)z \rangle = 0, \quad \forall z \in D(A).$$

Mas, como $(A - \lambda I)z = \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n} - \lambda I)P_nz$ segue que

$$\left\langle z_0, \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n} - \lambda I)P_nz \right\rangle = 0, \quad \forall z \in D(A).$$

Agora, como $z_0 \neq 0$ então existe n_0 tal que $P_{n_0}z_0 \neq 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle z_0, \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n} - \lambda I)P_nz \right\rangle = \langle z_0, (\overline{A_{n_0}} - \lambda I)P_{n_0}z \rangle = \langle z_0, (\overline{A_{n_0}} - \lambda I)P_{n_0}P_{n_0}z \rangle \\ &= \langle z_0, P_{n_0}(\overline{A_{n_0}} - \lambda I)P_{n_0}z \rangle \\ &= \langle P_{n_0}z_0, (\overline{A_{n_0}} - \lambda I)P_{n_0}z \rangle. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{R}(\overline{A_{n_0}} - \lambda I) \neq P_{n_0}Z$. Portanto, $\lambda \in \sigma(\overline{A_{n_0}}) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})}$.

(3) Suponhamos que $A - \lambda I$ é injetor, $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} = Z$ e $\mathcal{R}(A - \lambda I) \subsetneq Z$ e, suponhamos, por absurdo, que $\lambda \in \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})} \right)^c$. Note que

$$\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})} \right)^c \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n}) \right)^c = \bigcap_{n \geq 1} (\sigma(\overline{A_n}))^c = \bigcap_{n \geq 1} \rho(\overline{A_n}).$$

Logo, $\lambda \in \rho(\overline{A_n})$, para todo $n \geq 1$. Então,

$$\overline{A_n} - \lambda I : \mathcal{R}(P_n) \rightarrow \mathcal{R}(P_n)$$

é inversível, com $(\overline{A_n} - \lambda I)^{-1}$ limitada.

Em consequência, para todo $z \in D(A)$ obtemos que

$$P_j(A - \lambda I)z = (\overline{A_j} - \lambda I)P_jz, \quad j = 1, 2, \dots,$$

ou ainda,

$$(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1} P_j z (A - \lambda I) z = P_j z, \quad j = 1, 2, \dots$$

Agora, posto que $D(A)$ é denso em Z , podemos estender o operador

$$(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1} P_j z (A - \lambda I)$$

a um operador limitado T_j definido sobre Z , tal que

$$T_j z = (\overline{A_j} - \lambda I)^{-1} P_j z (A - \lambda I) z = P_j z, \quad \forall z \in Z, \quad j = 1, 2, \dots$$

e,

$$\|T_j\| = \|P_j\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Como $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} = Z$, temos que

$$\|(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1}\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{R}(A - \lambda I) = Z$. De fato, dado $z \in Z$, definamos y como

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} (\overline{A_j} - \lambda I)^{-1} P_j z.$$

De (2.2) temos que y está bem definido. Vejamos, agora, que $y \in D(A)$ e $(A - \lambda I)y = z$. Sabemos que

$$y \in D(A) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j P_j y\|^2 < \infty.$$

Por outro lado, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\overline{A_j} P_j y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j (\overline{A_j} - \lambda I)^{-1} P_j z\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|[I - \lambda(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1}] P_j z\|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|\overline{A_j} P_j y\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} [(\|I\| + |\lambda| \|(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1}\|) \|P_j z\|]^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} (1 + |\lambda|)^2 \|P_j z\|^2 \\ &= (1 + |\lambda|)^2 \|z\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $y \in D(A)$ e $(A - \lambda I)y = z$. Portanto, $\mathcal{R}(A - \lambda I) = Z$. O que é uma contradição. Logo,

$$\lambda \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n}).$$

□

O próximo lema é uma recíproca do lema anterior e foi obtido de [36].

Lema 2.56 *Seja Z um espaço de Hilbert separável e $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $\{P_n\}_{n \geq 1}$ duas famílias de operadores lineares e limitados em Z , com $\{P_n\}_{n \geq 1}$ uma família completa de projeções ortogonais, tais que*

$$A_m P_n = P_n A_m, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Se o operador

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in D(A),$$

com

$$D(A) = \left\{ z \in Z; \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty \right\},$$

gera um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad z \in Z.$$

Demonstração: Se $z_0 \in Z$, então $P_n z_0 \in D(A)$ e a solução do problema

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t), \\ z(0) = P_n z_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

é dada por $z_n(t) = T(t)P_n z_0$.

Do Teorema de Hille-Yosida podemos deduzir que se um operador comuta com o gerador de um C_0 -semigrupo então este operador comuta com o semigrupo. Portanto, de (2.3) obtemos

$$T(t)z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n T(t)z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} T(t)P_n z_0. \quad (2.5)$$

Por outro lado, como $z_n(t)$ é uma solução de (2.4), obtemos

$$z'_n(t) = Az_n(t) = AT(t)P_n z_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m P_m T(t)P_n z_0 = A_m T(t)P_n z_0 = A_n Z_n(t).$$

Assim,

$$z_n(t) = e^{A_n t} P_n z_0 = T(t)P_n z_0$$

e, de (2.5) concluimos que

$$T(t)z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z_0.$$

□

2.5.1 O Problema de Cauchy Abstrato

Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Iniciamos com o problema de Cauchy abstrato homogêneo

$$\begin{cases} x' = Ax(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Por solução de (2.6) entende-se toda função $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, tal que $x(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e que satisfaz (2.6).

Observação 2.57 (i) Se A é o gerador de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, o problema (2.6) tem uma única solução para todo $x_0 \in D(A)$ e esta solução é dada por $x(t) = T(t)x_0$ (ver [32], p. 100). Tanto para $x_0 \in D(A)$ quanto para $x_0 \in D(A^n) \subset D(A)$, a regularidade da solução é dada pela Proposição 2.44.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $x_0 \in X$ então existe uma única função $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ dada por $x(t) = T(t)x_0$ para cada $t \geq 0$, solução moderada (veremos mais sobre esta solução no decorrer desta seção) de (2.6) e sendo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo é imediato que $x \in C([0, \infty), X)$. Ver [32], p. 105.

Além das considerações da observação anterior, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.58 Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ então para cada $x_0 \in D(A)$ existe uma única função $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ dada por $x(t) = T(t)x_0$ para cada $t \geq 0$ solução clássica de (2.6) e

$$x \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty), X).$$

Demonstração: Ver [37], p. 46. □

Observação 2.59 Note que se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações então $\|x(t)\| \leq \|x_0\|$, $\forall t \geq 0$ e, do item (ii) do Teorema 2.43, $\left\| \frac{dx(t)}{dt} \right\| \leq \|Ax_0\|$, $\forall t \geq 0$.

Agora, consideremos o problema de Cauchy não homogêneo, para uma equação linear, no espaço de Banach X :

$$\begin{cases} x' = Ax(t) + f(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0, & x_0 \in X. \end{cases} \quad (2.7)$$

onde, $f : [0, T) \rightarrow X$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X .

Definição 2.60 Uma função $x : [0, T) \rightarrow X$ é uma solução clássica do problema (2.7) se é contínua em $[0, T)$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, $x(t) \in D(A)$ para todo $0 < t < T$ e, além disso, satisfaz (2.7) em $[0, T)$.

Definição 2.61 Sejam A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, $x_0 \in X$ e $f \in L^1(0, T; X)$. A função $x \in C([0, T], X)$ dada por

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s) ds; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.8)$$

é denominada solução moderada (solução mild) do problema (2.7) em $[0, T]$.

Teorema 2.62 Se $f \in L^1(0, T; X)$ então para todo $x_0 \in X$, o problema de Cauchy (2.7) tem, no máximo, uma solução (clássica). Se tem solução, esta solução é dada por (2.8).

Demonstração: Ver [32], p. 106. □

Considerando $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, fechado e densamente definido em X e $f \in L^1(0, T; X)$, de [2] temos que se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -Semigrupo e $u_0 \in X$, então o problema (2.7), tem uma única solução moderada

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad (2.9)$$

com $x \in C([0, T], X)$. Na sequência, o objetivo é estabelecer uma equivalência entre a função x dada em (2.9) e a solução fraca de (2.7), e dar uma caracterização relacionada a semigrupos de classe C_0 .

Denotaremos por A^* o adjunto de A (note que o domínio de A é denso em X , então faz sentido falar de seu adjunto) e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade em X .

Definição 2.63 A função $x \in C([0, T]; X)$ é uma solução fraca de (2.7) se, e somente se, para todo $v \in D(A^*)$ a função $\langle v, x(t) \rangle$ é absolutamente contínua em $[0, T]$ e

$$\frac{d}{dt} \langle v, x(t) \rangle = \langle A^* v, x(t) \rangle + \langle v, f(t) \rangle, \quad (2.10)$$

para quase todo $t \in [0, T]$.

Teorema 2.64 Seja $f \in L^1(0, T; X)$. Existe, para cada $x_0 \in X$, uma única solução fraca $x(t)$ de (2.7) se, e somente se, A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Neste caso, $x(t)$ é dado por (2.9).

Demonstração: Ver [2]. □

Agora, consideremos o problema de Cauchy abstrato, para uma equação não linear, no espaço de Banach X :

$$\begin{cases} x' = Ax(t) + f(t, x(t)), & t > t_0, \\ x(0) = x_0, & x_0 \in X, \end{cases} \quad (2.11)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X , $f : U \subset \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ satisfaz uma condição de Lipschitz em X , U aberto, f contínua em t e $(t_0, t_1) \in U$.

Definição 2.65 (a) Um solução clássica do problema (2.11) em $[t_0, t_1)$ é uma função derivável $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ tal que $x(t_0) = x_0$, $(t, x(t)) \in U$, $x'(t) \in X$, $x(t) \in D(A)$ e satisfaz a equação diferencial para todo $t \in (t_0, t_1)$.

(b) Uma solução moderada em $[t_0, t_1)$ é uma função contínua $x(t)$ tal que $(t, x(t)) \in U$, $t \mapsto f(\cdot, x(\cdot)) \in L^1((t_0, t_1), X)$ e

$$x(t) = T(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t T(t - s)f(s, x(s)) ds.$$

Os teoremas que finalizam esta subseção foram obtidos de [36].

Teorema 2.66 (*Existência Local*) *Seja $\Omega \subset X$ um aberto, $z_0 \in \Omega$ e $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow X$ contínua satisfazendo a seguinte condição de Lipschitz: para cada $\tau \in \mathbb{R}^+$, existe $k = k(\tau)$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq k\|x - y\|_X, \quad \forall t \in [0, \tau], \quad x, y \in \Omega.$$

Então, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, existe uma única solução moderada de (2.11) em $[0, \tau)$.

Demonstração:

Seja $\tau > 0$, $\mathcal{C} = C([0, \tau], X)$ e considere B uma vizinhança fechada de x_0 em Ω .

Definimos S como

$$(Sx)(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s)) \, ds,$$

para $0 \leq t \leq \tau$ e $x \in \mathcal{M} = \{v \in \mathcal{C}; v(0) = x_0, v([0, \tau]) \subset B\}$. Note que $\mathcal{M}$ é um espaço métrico completo e $Sx \in \mathcal{C}$.

Considere a métrica em $\mathcal{C}$ dada por $d(u, v) = \sup_{t \in [0, \tau]} \|u(t) - v(t)\|$. Sejam M e ω tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Então,

$$\begin{aligned} \|Sx - Sv\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|Sx(t) - Sv(t)\| = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left\| \int_0^t T(t-s)[f(s, x(s)) - f(s, v(s))] \, ds \right\| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s, x(s)) - f(s, v(s))\| \, ds \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left[Me^{\omega t} \int_0^t \|f(s, x(s)) - f(s, v(s))\| \, ds \right] \\ &= Me^{\omega \tau} \int_0^t \|f(s, x(s)) - f(s, v(s))\| \, ds \\ &\leq Me^{\omega \tau} k(\tau) \int_0^t \|x(s) - v(s)\| \, ds \\ &\leq Me^{\omega \tau} k(\tau) \int_0^t \sup_{0 \leq s \leq \tau} \|x(s) - v(s)\| \, ds \\ &= Me^{\omega \tau} k(\tau) \tau \|x - v\|_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Além disso, $Me^{\omega \tau} k(\tau) \tau \rightarrow 0$, quando $\tau \rightarrow 0^+$ (pois, podemos assumir $k(\tau)$ limitada por $k(1)$ para $\tau < 1$).

Vejamos, agora, que $S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que B é limitado. Temos

$$\|Sx - x_0\|_C \leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|T(t)x_0 - x_0\| + \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left\| \int_0^t T(t-s)f(s, x(s)) ds \right\| = J_1(\tau) + J_2(\tau).$$

Note que $J_1(\tau) \rightarrow 0$, quando $\tau \rightarrow 0$, pois

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|T(t)x_0 - x_0\| = \lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)x_0 - x_0\| = 0.$$

Também, $J_2(\tau) \rightarrow 0$, quando $\tau \rightarrow 0$, de fato

$$\begin{aligned} J_2(\tau) &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left[M e^{wt} \int_0^t \|f(s, x(s))\| ds \right] \\ &= M e^{w\tau} \int_0^\tau \|f(s, x(s))\| ds \\ &\leq M e^{w\tau} \int_0^\tau \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|f(t, x(t))\| ds \\ &= \tau M e^{w\tau} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|f(t, x(t))\| \\ &= \tau M e^{w\tau} \sup_{0 \leq t \leq \tau} [\|f(t, x(t)) - f(t, x_0) + f(t, x_0)\|] \\ &\leq \tau M e^{w\tau} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|f(t, x_0)\| + k(\tau) \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|x(t) - x_0\| \right\} \longrightarrow 0, \text{ quando } \tau \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto, $S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ para τ suficientemente pequeno. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, S tem um único ponto fixo. Ou seja, existe um único $x \in \mathcal{M}$ tal que $Sx = x$. Ou ainda, tal que

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s)) ds,$$

com $x(0) = x_0$ (pois, $z \in \mathcal{M}$). Portanto, existe um única solução moderada de (2.11) em $[0, \tau)$. $\square$

Teorema 2.67 (*Existência Global*) Seja $x_0 \in X$ e $f : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ contínua e satisfazendo a seguinte condição de Lipschitz: para cada $\tau > 0$, existe $k = k(\tau)$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq k\|x - y\|_X, \quad \forall t \in [0, \tau], \quad x, y \in X.$$

Então, (2.11) tem uma única solução moderada definida para todo $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração: Sejam S , M e ω como na demonstração do teorema anterior. Ou seja, S é definido como

$$(Sx)(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s)) ds$$

e, M e ω são tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Afirmamos que

$$\|S^n x(t) - S^n v(t)\| \leq [Mk(t)e^{\omega t}t]^n \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{x(s) - v(s)}{n!}, \quad (2.12)$$

para todo $t > 0$, $x, v \in C([0, t]X)$.

Podemos assumir que $t \rightarrow k(t)$ é monótona não decrescente.

Para $n = 1$ temos que (2.12) vale. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|Sx(t) - Sv(t)\|_X &\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \|Sx(s) - Sv(s)\|_X = \|Sx - Sv\|_C \\ &\leq Mk(t)e^{\omega t} \sup_{0 \leq s \leq t} \|x(s) - v(s)\|. \end{aligned}$$

Suponhamos que (2.12) vale para $n = m$, então para $m + 1$ temos

$$\begin{aligned} \|S^{m+1}x(t) - S^{m+1}v(t)\| &= \|S(S^m x(t) - S^m v(t))\| \\ &= \left\| \int_0^t T(t-s)[f(s, S^m x(s)) - f(s, S^m v(s))] ds \right\| \\ &\leq Me^{\omega t} \int_0^t k(s) \|S^m x(s) - S^m v(s)\| ds \\ &\leq Me^{\omega t} \int_0^t k(s) [Mk(s)e^{\omega s} s]^m \sup_{0 \leq r \leq s} \frac{\|x(r) - v(r)\|}{m!} ds \\ &\leq [Me^{\omega t} k(t)]^{m+1} \sup_{0 \leq r \leq t} \|x(r) - v(r)\| \int_0^t \frac{s^m}{m!} ds \\ &= [Mk(t)e^{\omega t}t]^{m+1} \sup_{0 \leq r \leq t} \frac{\|x(r) - v(r)\|}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

Portanto, (2.12) vale para $n = m + 1$. Assim, temos por indução que (2.12) vale para todo inteiro positivo n .

Agora, seja $\tau > 0$ arbitrário, porém fixo. Escolhemos n suficientemente grande tal que

$$\alpha = \frac{[Me^{\omega \tau} k(\tau)\tau]^n}{n!} < 1.$$

Então, por (2.12)

$$\|S^n x - S^n v\|_C \leq \alpha \|x - v\|_C,$$

para todo $x, v \in \mathcal{C} = C([0, \tau], X)$. Portanto, S tem um único ponto fixo em $\mathcal{C}$ e, assim, o problema (2.11) tem uma única solução moderada contínua sobre $[0, \tau]$. O resultado segue visto que $\tau > 0$ foi tomado arbitrário. $\square$

CONTROLABILIDADE APROXIMADA PARA SISTEMAS LINEARES E SEMILINEARES: UMA APLICAÇÃO PARA UMA EQUAÇÃO DO TIPO DE ONDA DE SEXTA ORDEM

Neste capítulo, nas Seções 3.1 e 3.2, apresentamos resultados sobre a controlabilidade aproximada de equações lineares da forma

$$z' = Az(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

e de equações semilineares

$$z' = Az(t) + Bu(t) + F(z(t), u(t)), \quad (3.2)$$

onde Z , U são espaços de Hilbert, $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ é o gerador de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em Z , $B \in \mathcal{L}(U, Z)$, $u \in L^2(0, \tau; U)$ e o termo não linear $F : Z \times U \longrightarrow Z$ é uma função Lipschitziana.

Esses resultados foram obtidos ou adaptados de [36] e são referentes a um técnica utilizada para obter a controlabilidade de sistemas que tem a forma citada acima. Tal técnica reduz o problema de controlabilidade de equações do tipo (3.1) e (3.2) ao estudo da controlabilidade de uma família de sistemas de dimensão finita. Optamos por colocar as demonstrações desses resultados para um melhor entendimento da aplicação feita na Seção 3.3. Em [5] e [36] pode-se encontrar esses resultados de uma forma mais completa. Eles também podem ser vistos, por exemplo, em [14], [19] e [20].

Na Seção 3.3, aplicamos os resultados estudados para obter a controlabilidade de uma equação semilinear do tipo de onda de sexta ordem.

3.1 Controlabilidade Aproximada para Sistemas Lineares

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre a controlabilidade aproximada do sistema de controle linear

$$z' = Az(t) + Bu(t), \quad t > 0,$$

onde Z, U são espaços de Hilbert, $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ é o gerador de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em Z , $B \in \mathcal{L}(U, Z)$ e $u \in L^2(0, \tau; U)$.

De acordo com o Teorema 2.64, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' = Az(t) + Bu(t), & t > 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

admite uma única solução moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (3.4)$$

Iniciamos com as definições de controlabilidade exata e controlabilidade aproximada.

Definição 3.1 *O sistema (3.3) é dito **exatamente controlável** sobre $[0, \tau]$ se para cada $z_0, z_1 \in Z$ existe $u \in L^2(0, \tau; U)$ tal que a solução moderada $z(t)$ de (3.3) correspondente a u verifica: $z(\tau) = z_1$.*

Definição 3.2 *O sistema (3.3) é dito **aproximadamente controlável** sobre $[0, \tau]$ se para cada $z_0, z_1 \in Z$ e $\epsilon > 0$ existe $u \in L^2(0, \tau; U)$ tal que a solução moderada $z(t)$ de (3.3) correspondente a u verifica: $\|z(\tau) - z_1\| < \epsilon$.*

Observação 3.3 *Note que todo sistema exatamente controlável é, em particular, aproximadamente controlável.*

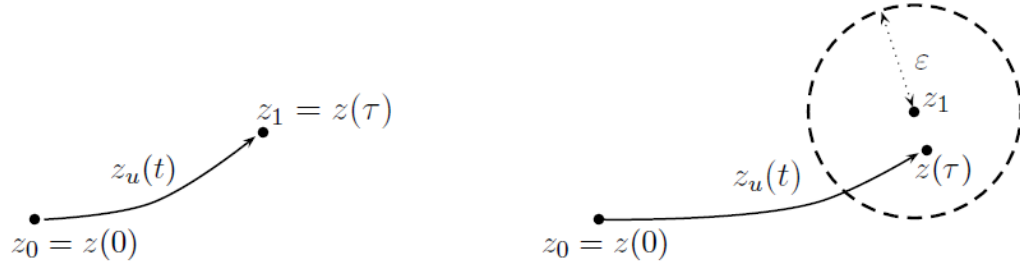


Figura 3.1: Controlabilidade Exata e Controlabilidade Aproximada

Definição 3.4 Para o sistema (3.3) definimos os seguintes conceitos:

(a) A **aplicação de controlabilidade** (para $\tau > 0$) é definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\tau : L^2(0, \tau; U) &\longrightarrow Z \\ u &\longmapsto \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s) ds. \end{aligned}$$

(b) A **aplicação Grammian** $L_{\mathcal{B}^\tau} : Z \longrightarrow Z$ é definida por $L_{\mathcal{B}^\tau} = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*}$, onde $\mathcal{B}^{\tau*}$ denota o operador adjunto do operador $\mathcal{B}^\tau$.

Embora o interesse nesta seção seja o estudo de controlabilidade aproximada, utilizamos esse espaço para enunciar um resultado sobre controlabilidade exata que faremos uso no Capítulo 4, tal resultado é uma adaptação do resultado apresentado em [36], o qual foi provado para sistemas semilineares.

Teorema 3.5 O sistema (3.3) é exatamente controlável sobre $[0, \tau]$ se, e somente se, $\text{Im}(\mathcal{B}^\tau) = Z$.

Demonstração: Suponhamos que (3.3) é exatamente controlável sobre $[0, \tau]$. Dado $z \in Z$ podemos encontrar $z_0, z_1 \in Z$ tais que

$$z_1 = T(\tau)z_0 + z. \quad (3.5)$$

Logo, existe um controle $u \in L^2(0, \tau; U)$ tal que $z_u(0) = z_0$ e $z_u(\tau) = z_1$. Assim,

$$z_1 = z_u(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.5) em (3.6) obtemos

$$T(\tau)z_0 + z = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds.$$

Então,

$$z = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds = \mathcal{B}^\tau u.$$

Assim, $\text{Im}(\mathcal{B}^\tau) = Z$.

Suponhamos, agora, $\text{Im}(\mathcal{B}^\tau) = Z$. Consideremos $z \in Z$ tal que

$$z = z_1 - T(\tau)z_0, \quad (3.7)$$

com $z_0, z_1 \in Z$. Então, existe um controle $u \in L^2(0, \tau; U)$ tal que

$$\mathcal{B}^\tau u = z. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) em (3.8) obtemos

$$z = z_1 - T(\tau)z_0 = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds.$$

Logo,

$$z_u(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds.$$

Assim, obtemos uma solução $z_u(\cdot)$ de (3.3) tal que $z_u(\tau) = z_1$ e $z_u(0) = z_0$. Ou seja, (3.3) é exatamente controlável sobre $[0, \tau]$. $\square$

Na sequência voltamos ao estudo de controlabilidade aproximada.

O próximo teorema pode ser demonstrado de maneira semelhante ao teorema anterior.

Teorema 3.6 *O sistema (3.3) é aproximadamente controlável sobre $[0, \tau]$ se, e somente se, $\overline{\text{Im}(\mathcal{B}^\tau)} = Z$.*

Uma demonstração para os dois próximos resultados pode ser encontrada em [10], p. 144 e p. 148, respectivamente.

Lema 3.7 *A aplicação de controlabilidade e aplicação Grammian satisfazem o seguinte:*

- (i) $\mathcal{B}^\tau \in \mathcal{L}(L^2(0, \tau; U), Z)$ e $\mathcal{B}^t \in \mathcal{L}(L^2(0, \tau; U), L^2(0, \tau; Z))$ para $0 \leq t \leq \tau$;
- (ii) $(\mathcal{B}^{\tau*}z)(s) = B^*T^*(\tau - s)z$ em $[0, \tau]$;
- (iii) $L_{\mathcal{B}^\tau} \in \mathcal{L}(Z)$ e $L_{\mathcal{B}^\tau}z = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*}z = \int_0^\tau T(\tau - s)BB^*T^*(\tau - s)z \, ds$.

Teorema 3.8 *O sistema (3.3) é aproximadamente controlável sobre $[0, \tau]$ se, e somente se, alguma das seguintes afirmações vale:*

- (i) $\ker(\mathcal{B}^{\tau*}) = \{0\}$;
- (ii) $\langle L_{\mathcal{B}^\tau}z, z \rangle > 0$, $z \neq 0$ em Z ;
- (iii) $B^*T^*z = 0 \Rightarrow z = 0$.

Para os próximos resultados desta seção, consideramos que o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ gerado pelo operador A é dado por

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

de acordo com o Lema 2.55. Também, assumiremos a seguinte hipótese:

$$P_j BB^* = BB^* P_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

As duas próximas proposições são resultados de [36].

Proposição 3.9 *Sob a Hipótese (3.10), o operador*

$$L_{\mathcal{B}^\tau}z = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*}z = \int_0^\tau T(s)BB^*T^*(s)z \, ds,$$

pode ser escrito como

$$L_{\mathcal{B}^\tau} = \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j,$$

onde

$$L_{\mathcal{B}_j^\tau}y = \mathcal{B}_j^\tau \mathcal{B}_j^{\tau*}y = \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} y \, ds, \quad y \in \text{Im}(P_j).$$

O operador $B_j : U \rightarrow \text{Im}(P_j)$ é tal que $B_j \equiv P_j B$.

Demonstração: Da definição do operador $L_{\mathcal{B}^\tau}$ e da representação (3.9) obtemos

$$\begin{aligned}
 L_{\mathcal{B}^\tau} z &= \int_0^\tau \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j s} P_j \right) B B^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{A_k^* s} P_k z \right) ds \\
 &= \int_0^\tau \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} P_j z ds \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} P_j z ds \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z.
 \end{aligned}$$

□

Proposição 3.10 (i) O sistema (3.3) é aproximadamente controlável sobre $[0, \tau]$ se, e somente se, cada um dos seguintes sistemas

$$z' = A_j z + B_j u(t), \quad z(t) \in \text{Im}(P_j), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.11)$$

é aproximadamente controlável.

(ii) O sistema (3.3) é aproximadamente controlável sobre $[0, \tau]$ se, e somente se,

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} y, y \rangle > 0, \quad \forall y \neq 0 \text{ com } y \in \text{Im}(P_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Demonstração:

(i) Suponhamos, por absurdo, que o sistema (3.3) é aproximadamente controlável sobre $[0, \tau]$ e que existe j tal que o sistema

$$z' = A_j z + B_j u(t), \quad z \in \text{Im}(P_j), \quad t \geq 0,$$

não é aproximadamente controlável sobre $[0, \tau]$. Então, pelo item (iii) do Teorema 3.8, existe $z_j \in \text{Im}(P_j)$ tal que

$$B_j^* e^{A_j^* t} z_j = 0, \quad t \in [0, \tau] \text{ e } z_j \neq 0.$$

Por outro lado, também pelo item (iii) do Teorema 3.8, temos que

$$B^*T^*(t)z = 0, \forall t \in [0, \tau] \Rightarrow z = 0.$$

Agora, tomando $z = P_j z_j = z_j$, obtemos

$$B^*T^*(t)z = B^* \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n^* t} P_n z = B^* e^{A_j^* t} P_j z_j = B_j^* e^{A_j^* t} z_j = 0.$$

Isto implica que $z_j = 0$, o que é uma contradição. Portanto, (3.11) é aproximadamente controlável para todo j . Reciprocamente, suponhamos que para todo j , o sistema (3.11) é aproximadamente controlável. Note que $L_{B_j^\tau}$ é a aplicação Grammian associada a (3.11). Então, pelo item (ii) do Teorema 3.8, temos que

$$\langle L_{B_j^\tau} y, y \rangle > 0, \forall y \neq 0, y \in \text{Im}(P_j), j = 1, 2, 3, \dots$$

Note que, para todo $z \in Z$ ($z \neq 0$) existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $P_J z \neq 0$. Então, pela Proposição 3.9 temos, $\forall z \in Z$, que

$$\langle L_{B^\tau} z, z \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{B_j^\tau} P_j z, \sum_{i=1}^{\infty} P_i z \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{B_j^\tau} P_j z, P_j z \rangle > 0.$$

Portanto, (3.3) é aproximadamente controlável.

- (ii) Suponhamos que o sistema (3.3) é aproximadamente controlável, então pelo item (i) desta proposição, cada um dos seguintes sistemas

$$z' = A_j z + B_j u(t), z \in \text{Im}(P_j), t \geq 0, j = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

é aproximadamente controlável. Logo, pelo item (ii) do Teorema 3.8,

$$\langle L_{B_j^\tau} y, y \rangle > 0, \forall y \neq 0, y \in \text{Im}(P_j), j = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Reciprocamente, se (3.13) vale então, pelo item (ii) do Teorema 3.8, segue que (3.12) vale e, pelo item (i) desta proposição, temos que (3.3) é aproximadamente controlável.

□

O próximo teorema é uma adaptação de um resultado de [36], o qual foi provado para sistemas lineares discretos.

Teorema 3.11 *O sistema (3.3) é aproximadamente controlável sobre $[0, \tau]$ se, e somente se,*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z = 0, \forall z \in Z. \quad (3.14)$$

Neste caso, uma sequência de controles que transfere o estado inicial z_0 a uma ϵ -vizinhança de um estado final z_1 é dada por

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{\tau*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0).$$

Demonstração: Suponhamos que o sistema (3.3) é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$. Então, pelo item (ii) do Teorema 3.8, para $z \in Z$, $z \neq 0$, temos que

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle > 0. \quad (3.15)$$

Suponhamos, por absurdo, que existe $z_0 \in Z$ tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0 = y_0 \neq 0. \quad (3.16)$$

Então,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha L_{\mathcal{B}^\tau}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0 = L_{\mathcal{B}^\tau} y_0, \quad (3.17)$$

e,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha z_0 - \alpha[\alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0] = L_{\mathcal{B}^\tau} y_0. \quad (3.18)$$

Note que (3.17) é imediato. Vamos verificar (3.18). De (3.16) temos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} y_0.$$

Assim,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau}) \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau}) y_0. \quad (3.19)$$

Ou ainda,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha[\alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0] + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha L_{\mathcal{B}^\tau}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha y_0 + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} L_{\mathcal{B}^\tau} y_0.$$

Dessa última igualdade e de (3.17), segue que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha[\alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0] = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha y_0. \quad (3.20)$$

Ainda, de (3.19)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha z_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha y_0 + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} L_{\mathcal{B}^\tau} y_0. \quad (3.21)$$

De (3.20) e (3.21), temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha z_0 - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha [\alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0] = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha z_0 - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha y_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} L_{\mathcal{B}^\tau} y_0 = L_{\mathcal{B}^\tau} y_0.$$

Com isso, mostramos que vale (3.18). Agora, de (3.20), temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha z_0 - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha [\alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z_0] = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha z_0 - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha y_0 = 0. \quad (3.22)$$

De (3.18) e (3.22) temos que

$$L_{\mathcal{B}^\tau} y_0 = 0,$$

uma contradição com (3.15). Portanto, provamos (3.14). Reciprocamente, suponhamos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z = 0, \quad \forall z \in Z.$$

Queremos provar que $\overline{\text{Im}(\mathcal{B}^\tau)} = Z$. Equivalentemente, devemos provar que, para cada $z \in Z$, existe uma sequência de controles $\{u_\alpha\} \subset L^2(0, \tau; U)$ tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}^\tau u_\alpha = z.$$

Para cada $z \in Z$, definimos a família de controles

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{\tau*} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z.$$

Então,

$$\mathcal{B}^\tau u_\alpha = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z = (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau} - \alpha I) (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z \quad (3.23)$$

$$= z - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z. \quad (3.24)$$

Disto e de (3.14), obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}^\tau u_\alpha = z.$$

Portanto, o sistema (3.3) é aproximadamente controlável. Além disso, por definição, o sistema (3.3) é aproximadamente controlável sobre $[0, \tau]$ se para cada $z_0, z_1 \in Z$ existe $u \in L^2(0, \tau; U)$ tal que a solução moderada $z(t)$ de (3.3) correspondente a u satisfaz

$$\|z(\tau) - z_1\| < \epsilon.$$

Considerando $u_\alpha = \mathcal{B}^{\tau*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0)$, temos

$$\begin{aligned}
 \|z(\tau) - z_1\| &= \left\| T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)B[\mathcal{B}^{\tau*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0)(s)] ds - z_1 \right\| \\
 &= \left\| T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)BB^*T^*(\tau-s)(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0) ds - z_1 \right\| \\
 &= \left\| T(\tau)z_0 + \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0) - z_1 \right\| \\
 &= \left\| T(\tau)z_0 + z_1 - T(\tau)z_0 - \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0) - z_1 \right\| \\
 &= \left\| \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0) \right\| < \epsilon,
 \end{aligned}$$

por (3.14), para α pequeno. $\square$

Na sequência, apresentamos uma caracterização algébrica para a controlabilidade de sistemas lineares. Tal caracterização é dada por meio de um teorema, devido a Kalman, fundamental na teoria de controle de sistemas lineares de dimensão finita.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$ e $T > 0$. Consideremos o sistema linear de dimensão finita

$$z'(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.25)$$

Para nos referirmos ao sistema (3.25), usamos a notação (A, B) , onde A é uma matriz real de ordem $n \times n$ e B é uma matriz real de ordem $n \times m$. As funções z e u são tais que $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Na prática, $m \leq n$.

O teorema a seguir pode ser encontrado em [17], p. 81 ou em [29], p. 11. Aplicações deste teorema podem ser vistas, por exemplo, em [5], p. 111, [14], [20] e [21].

Teorema 3.12 *O sistema (A, B) é exatamente controlável sobre $[0, T]$ se, e somente se*

$$\text{Rank}[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = n.$$

3.2 Controlabilidade Aproximada para Sistemas Semilineares

Nesta seção estudamos a controlabilidade para equações não lineares do tipo

$$z' = Az(t) + Bu(t) + F(z(t), u(t)), \quad t > 0,$$

onde Z, U são espaços de Hilbert, $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ é o gerador de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em Z , $B \in \mathcal{L}(U, Z)$, $u \in L^2(0, \tau; U)$ e o termo não linear $F : Z \times U \rightarrow Z$ é uma função contínua Lipschitziana. Ou seja, para $z_1, z_2 \in Z$ e $u_1, u_2 \in U$ temos que

$$\|F(z_2, u_2) - F(z_1, u_1)\| \leq L\{\|z_2 - z_1\| + \|u_2 - u_1\|\}.$$

Do Teorema 2.66, sabemos que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' = Az(t) + Bu(t) + F(z(t), u(t)), & t > 0, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (3.26)$$

admite uma única solução moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds + \int_0^t T(t-s)F(z(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (3.27)$$

Definição 3.13 *O sistema (3.26) é aproximadamente controlável sobre $[0, \tau]$ se para cada $z_0, z_1 \in Z$, $\epsilon > 0$, existe $u \in L^2(0, \tau; U)$ tal que a solução moderada correspondente, $z(t)$, de (3.26), satisfaz $z(0) = z_0$ e $\|z(\tau) - z_1\| < \epsilon$.*

Definimos o operador $\mathcal{B}_F^\tau : L^2(0, \tau; U) \rightarrow Z$ por

$$\mathcal{B}_F^\tau u = \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s) ds + \int_0^\tau T(\tau-s)F(z(s), u(s)) ds,$$

onde $z(t)$ é a solução de (3.26) correspondente ao controle u .

As três próximas proposições são adaptações de resultados de [36], os quais foram provados para sistemas semilineares discretos.

Proposição 3.14 *O sistema (3.26) é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$ se, e somente se, $\overline{\text{Im}(\mathcal{B}_F^\tau)} = Z$.*

Demonstração: Suponhamos que (3.26) é aproximadamente controlável, então para $\epsilon > 0$, $z, z_0, z_1 \in Z$ tais que $z_1 = T(\tau)z_0 + z$, existe $u \in L^2(0, \tau; U)$ satisfazendo $z_u(0) = z_0$ e $\|z_u(\tau) - z_1\| < \epsilon$. Temos

$$z_u(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s) ds + \int_0^\tau T(\tau-s)F(z_u(s), u(s)) ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_F^\tau u - z\| &= \left\| \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s) ds + \int_0^\tau T(\tau - s)F(z(s), u(s)) ds + T(\tau)z_0 - z_1 \right\| \\ &= \|z_u(\tau) - z_1\| < \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{\text{Im}(\mathcal{B}_F^\tau)} = Z$. Agora, suponhamos que $\overline{\text{Im}(\mathcal{B}_F^\tau)} = Z$. Seja $z \in Z$ tal que $z = z_1 - T(\tau)z_0$ com $z_0, z_1 \in Z$. Então, existe um controle u tal que $\|\mathcal{B}_F^\tau u - z\| < \epsilon$. Assim,

$$\|\mathcal{B}_F^\tau u + T(\tau)z_0 - z_1\| = \|z_u(\tau) - z_1\| < \epsilon.$$

Desta forma, obtemos uma solução $z_u(\cdot)$ de (3.26) tal que $z_u(0) = z_0$ e $\|z_u(\tau) - z_1\| < \epsilon$. Logo, (3.26) é aproximadamente controlável. $\square$

Agora, se definimos o operador $G : L^2(0, \tau; U) \rightarrow Z$ por

$$G(u) = \int_0^\tau T(\tau - s)F(z(s), u(s)) ds$$

então

$$\mathcal{B}_F^\tau = \mathcal{B}^\tau u + Gu. \quad (3.28)$$

Suponhamos que F é uma função que satisfaz o seguinte

$$\langle G \circ \mathcal{B}^{\tau*} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0, \quad (3.29)$$

temos o seguinte resultado:

Proposição 3.15 *Se o sistema (3.3) é aproximadamente controlável e (3.29) é satisfeito, então o sistema não linear (3.26) é aproximadamente controlável.*

Demonstração: Como (3.3) é aproximadamente controlável, pelo item (ii) do Teorema 3.8

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0.$$

Suponhamos que $\overline{\text{Im}(\mathcal{B}_F^\tau)} \subsetneq Z$. Pelo Teorema 2.28, existe $z_0 \in Z$, $z_0 \neq 0$, tal que $\langle \mathcal{B}_F^\tau u, z_0 \rangle = 0$, $\forall u \in L^2(0, \tau; U)$. Em particular, $\langle \mathcal{B}_F^\tau \circ \mathcal{B}^{\tau*} z_0, z_0 \rangle = 0$. Logo,

$$0 = \langle \mathcal{B}_F^\tau \circ \mathcal{B}^{\tau*} z_0, z_0 \rangle = \langle L_{\mathcal{B}^\tau} z_0, z_0 \rangle + \langle G \circ \mathcal{B}^{\tau*} z_0, z_0 \rangle > 0.$$

Essa contradição prova que $\overline{\text{Im}(\mathcal{B}_F^\tau)} = Z$. Logo, pela Proposição 3.14, (3.26) é aproximadamente controlável. $\square$

Outro resultado que mostra que a controlabilidade aproximada de (3.3) se preserva sob certa perturbação não linear é o seguinte:

Proposição 3.16 *Se o sistema (3.3) é aproximadamente controlável, $\text{Im}(G)$ é relativamente compacta e, para todo $z \in Z$ e $\alpha > 0$, existe $u_\alpha \in L^2(0, \tau; U)$ tal que*

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{\tau*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}(z - G(u_\alpha)), \quad (3.30)$$

então o sistema não linear (3.26) é aproximadamente controlável.

Demonstração: Como (3.3) é aproximadamente controlável, do item (ii) do Teorema 3.8 temos que

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0,$$

de onde segue que

$$\|z\| \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})z\| \geq \langle z, (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})z \rangle > \alpha \|z\|^2, \quad z \neq 0.$$

Logo, $\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})z\| \geq \alpha \|z\|$, $z \neq 0$. Portanto, $\alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}z\| \leq \|z\|$, $z \neq 0$, e então

$$\sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}z\| \leq 1. \quad (3.31)$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.11,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z = 0. \quad (3.32)$$

Queremos provar que $\overline{\text{Im}(\mathcal{B}_F^\tau)} = Z$. Ou seja, que dado $z \in Z$, existe $\{u_\alpha\} \subset L^2(0, \tau; U)$ tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}_F^\tau u_\alpha = z. \quad (3.33)$$

De (3.28) segue que, provar (3.33) é equivalente a provar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [\mathcal{B}^\tau u_\alpha + G(u_\alpha)] = z. \quad (3.34)$$

Ou ainda, que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}^\tau u_\alpha = z - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} G(u_\alpha). \quad (3.35)$$

Agora, da hipótese (3.30) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\tau u_\alpha &= \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - G(u_\alpha)) \\ &= L_{\mathcal{B}^\tau} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - G(u_\alpha)) \\ &= [(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} - \alpha I (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}] (z - G(u_\alpha)) \\ &= [I - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}] (z - G(u_\alpha)) \\ &= z - G(u_\alpha) - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - G(u_\alpha)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{B}^\tau u_\alpha + G(u_\alpha) = z - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - G(u_\alpha)).$$

Logo, (3.34) se cumpre se, e somente se

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - G(u_\alpha)) = 0. \quad (3.36)$$

Como $\text{Im}(G)$ é relativamente compacta (ou seja, $\overline{\text{Im}(G)} = Z$), podemos supor, sem perda de generalidade, que $\exists y \in Z$ tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} G(u_\alpha) = y. \quad (3.37)$$

Note que

$$\alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (G(u_\alpha)) = \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} y + \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (G(u_\alpha) - y). \quad (3.38)$$

De (3.31), (3.32), (3.37) e (3.38), obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} G(u_\alpha) = 0. \quad (3.39)$$

De (3.32) e (3.39) temos (3.36) e, consequentemente, obtemos (3.33). Portanto, (3.26) é aproximadamente controlável. $\square$

Na sequência, adaptamos um resultado de [19], onde foi estudado a controlabilidade aproximada de sistemas semilineares com impulso, para obter um resultado de controlabilidade aproximada para (3.26). Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre o sistema (3.26):

(I) F é limitada.

(II) O sistema linear associado

$$\begin{cases} z_t(t) = Az(t) + Bu(t), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (3.40)$$

é aproximadamente controlável em $[\tau - \delta, \tau]$ para todo $\delta \in (0, \tau)$.

Veremos que essas hipóteses são suficientes para obter a controlabilidade aproximada do sistema (3.26). Ou seja, se o sistema linear associado ao sistema (3.26) é aproximadamente controlável e F (o termo não linear) é limitada então o sistema (3.26) é aproximadamente controlável.

Definição 3.17 Para o sistema (3.40) definimos os seguintes conceitos: as aplicações de controlabilidade $G_{\tau\delta} : L^2(\tau - \delta, \tau; U) \rightarrow Z$ e $G_\delta : L^2(0, \delta; U) \rightarrow Z$ definidas por

$$G_{\tau\delta}u = \int_{\tau-\delta}^{\tau} T(\tau-s)Bu(s) ds,$$

$$G_\delta v = \int_0^{\delta} T(s)Bv(s) ds,$$

satisfazem a seguinte relação

$$G_{\tau\delta}u = \int_{\tau-\delta}^{\tau} T(\tau-s)Bu(s) ds = \int_0^{\delta} T(s)Bu(\tau-s) ds = G_\delta u(\tau - \cdot).$$

O adjunto desses operadores, $G_{\tau\delta}^* : Z \rightarrow L^2(\tau - \delta, \tau; U)$ e $G_\delta^* : Z \rightarrow L^2(0, \delta; U)$ são dados por

$$(G_{\tau\delta}^*z)(t) = B^*T^*(\tau-t)z, \quad t \in [\tau - \delta, \tau],$$

$$(G_\delta^*z)(t) = B^*T^*(t)z, \quad t \in [0, \delta].$$

Os operadores Grammian são dados por

$$Q_{\tau\delta} = G_{\tau\delta}G_{\tau\delta}^* = \int_{\tau-\delta}^{\tau} T(\tau-t)BB^*T^*(\tau-t) dt,$$

$$Q_\delta = G_\delta G_\delta^* = \int_0^{\delta} T(t)BB^*T^*(t) dt.$$

Os dois próximos teoremas são análogos dos Teoremas 3.6, 3.8 e 3.11, enunciados agora com novas notações referentes ao sistema (3.40).

Teorema 3.18 *As seguintes afirmações são equivalentes para a controlabilidade aproximada do sistema linear (3.40) em $[\tau - \delta, \tau]$:*

- (a) $\overline{\text{Im}(G_{\tau\delta})} = Z$;
- (a) $\ker(G_{\tau\delta}^*) = \{0\}$;
- (b) $\langle Q_{\tau\delta}z, z \rangle > 0, z \neq 0, z \in Z$;
- (c) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + Q_{\tau\delta})^{-1}z = 0$.

Teorema 3.19 *Temos $Q_\delta > 0$ se, e somente se, o sistema linear (3.40) é aproximadamente controlável em $[\tau - \delta, \tau]$. Além disso, dado um estado inicial y_0 e um estado final z_1 , podemos encontrar uma sequência de controles $\{u_\alpha^\delta\}_{0 < \alpha \leq 1} \subset L^2(\tau - \delta, \tau; U)$:*

$$u_\alpha = G_{\tau\delta}^*(\alpha I + G_{\tau\delta}G_{\tau\delta}^*)^{-1}(z_1 - T(\tau)y_0), \alpha \in (0, 1],$$

tal que as soluções $y(t) = y(t, \tau - \delta, y_0, u_\alpha^\delta)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y_t = Ay + Bu_\alpha(t), & y \in Z, t > 0, \\ y(\tau - \delta) = y_0, \end{cases} \quad (3.41)$$

satisfaz

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} y(\tau, \tau - \delta, y_0, u_\alpha) = z_1,$$

isto é,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} y(\tau) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left\{ T(\delta)y_0 + \int_{\tau-\delta}^{\tau} T(\tau-s)Bu_\alpha(s) ds \right\} = z_1.$$

O próximo teorema foi adaptado de [19], para sistemas semilineares sem impulso.

Teorema 3.20 *Sob as condições (I) e (II), o sistema semilinear (3.26) é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$.*

Demonstração: Dado um estado inicial z_0 , um estado final z_1 e $\epsilon > 0$, queremos encontrar um controle $u_\alpha^\delta \in L^2(0, \tau; U)$ conduzindo o sistema de z_0 à uma ϵ -vizinhança de z_1 no tempo τ . Especificamente, queremos encontrar um controle $u_\alpha^\delta \in L^2(0, \tau; U)$ tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left\{ T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu_\alpha^\delta(s) ds + \int_0^\tau T(\tau-s)F(z_\alpha(s), u_\alpha^\delta(s)) ds \right\} = z_1.$$

Considere qualquer $u \in L^2(0, \tau; U)$ e a solução correspondente $z(t) = z(t, 0, z_0, u)$ do problema semilinear (3.26). Para $\alpha \in (0, 1]$ definimos o controle $u_\alpha^\delta \in L^2(0, \tau; U)$ como

$$u_\alpha^\delta(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } 0 \leq t \leq \tau - \delta, \\ u_\alpha(t) & \text{se } \tau - \delta < t \leq \tau, \end{cases}$$

onde

$$u_\alpha(t) = B^*T^*(\tau-t)(\alpha I + G_{\tau\delta}G_{\tau\delta}^*)^{-1}(z_1 - T(\delta)z(\tau-\delta)), \quad \tau - \delta \leq t \leq \tau.$$

Note que a solução correspondente $z_\alpha^\delta(t) = z(t, 0, z_0, u_\alpha^\delta)$ do problema semilinear (3.26) no tempo τ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} z_\alpha^\delta(\tau) &= T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu_\alpha^\delta(s) ds + \int_0^\tau T(\tau-s)F(z_\alpha^\delta(s), u_\alpha^\delta(s)) ds \\ &= T(\delta) \left\{ T(\tau-\delta)z_0 + \int_0^{\tau-\delta} T(\tau-\delta-s)Bu_\alpha^\delta(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\tau-\delta} T(\tau-\delta-s)F(z_\alpha^\delta(s), u_\alpha^\delta(s)) ds \right\} + \int_{\tau-\delta}^\tau T(\tau-s)Bu_\alpha^\delta(s) ds \\ &\quad + \int_{\tau-\delta}^\tau T(\tau-s)F(z_\alpha^\delta(s), u_\alpha^\delta(s)) ds \\ &= T(\delta)z(\tau-\delta) + \int_{\tau-\delta}^\tau T(\tau-s)Bu_\alpha^\delta(s) ds + \int_{\tau-\delta}^\tau T(\tau-s)F(z_\alpha^\delta(s), u_\alpha^\delta(s)) ds. \end{aligned}$$

A solução correspondente $y_\alpha^\delta(t) = y(t, \tau - \delta, z(\tau - \delta), u_\alpha)$ do problema linear (3.41) no tempo τ é dada por

$$y_\alpha^\delta(\tau) = T(\delta)z(\tau - \delta) + \int_{\tau-\delta}^\tau T(\tau-s)Bu_\alpha(s) ds.$$

Portanto,

$$\|z_\alpha^\delta(\tau) - y_\alpha^\delta(\tau)\| \leq \int_{\tau-\delta}^\tau \|T(\tau-s)\| \|F(z_\alpha^\delta(s), u_\alpha^\delta(s))\| ds.$$

Considerando $M = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|T(t)\|$ e $k = \sup_{Z \times U} \|F(z, u)\|$ obtemos a seguinte estimativa

$$\|z_\alpha^\delta(\tau) - y_\alpha^\delta(\tau)\| \leq Mk\delta.$$

Assim,

$$\|z_\alpha^\delta(\tau) - z_1\| \leq Mk\delta + \|y_\alpha^\delta(\tau) - z_1\|.$$

Do Teorema 3.19, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|y_\alpha^\delta(\tau) - z_1\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, tomando $\delta < \min \left\{ \tau, \frac{\epsilon}{2Mk} \right\}$, obtemos, para o controle correspondente u_α^δ , que

$$\|z_\alpha^\delta(\tau) - z_1\| \leq \epsilon.$$

□

3.3 Controlabilidade Aproximada para uma Equação do Tipo de Onda Semilinear de Sexta Ordem

Nesta seção provamos a controlabilidade aproximada interior do seguinte sistema semilinear com condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} y_{tt} = a\Delta y - \Delta^2 y - \Delta^2 y_{tt} + u(t, x) + f(t, y, y_t, u(t, x)) & \text{em } (0, \tau) \times \Omega, \\ y = \Delta y = 0 & \text{em } (0, \tau) \times \Gamma, \\ y(0, x) = y_0(x), y_t(0, x) = y_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.42)$$

onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^4 , $a > 0$, o controle $u \in L^2([0, \tau]; L^2(\Omega))$, $y_0, y_1 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e o termo não linear $f : [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que existem constantes $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$|f(t, z, v, u)| \leq c_0 + c_1|z| + c_2|v| + c_3|u|, \quad \forall (t, z, v, u) \in [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

A equação do tipo (3.42)₁ foi introduzida por Philip Rosenau em [33] com f tendo caracterizações específicas. Essa equação possui muitas características similares a equação de Bousinesq, a qual pode ser expressa das seguintes maneiras:

$$y_{tt} + \gamma y_{xxxx} - y_{xx} = \beta(y^2)_{xx}$$

e,

$$y_{tt} - \gamma y_{xtt} - y_{xx} = \beta(y^2)_{xx}.$$

Equações de Boussinesq foram estudadas, por exemplo, em [25] e [38].

Em [34] e [39] foi estudado o problema de existência e unicidade de solução para a equação

$$y_{tt} - ay_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = \alpha |y_x|_x^p,$$

com dados iniciais tomados em espaços de Sobolev de ordem fracionária.

Em nosso trabalho, o problema (3.42) será considerado como uma equação abstrata num espaço de Hilbert adequado, a saber, $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Os dados iniciais são tomados em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, conforme já descrito na apresentação do problema.

Provaremos, primeiramente, que o sistema linear correspondente ao sistema (3.42) é aproximadamente controlável. Tal controlabilidade juntamente com as hipóteses sobre f nos permitirá obter a controlabilidade aproximada de (3.42).

Iniciamos com a formulação abstrata do problema para a qual é necessário recordar algumas propriedades do operador Laplaciano. Tais propriedades podem ser encontradas, por exemplo, em [9], p. 46.

Seja $X = L^2(\Omega)$ e considere o operador linear não limitado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por $A\phi = -\Delta\phi$ onde $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Então, os autovalores λ_j de A tem multiplicidade γ_j igual a dimensão dos autoespaços correspondentes e $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$. Além disso, temos as seguintes propriedades:

- (a) Existe um conjunto ortonormal completo $\{\phi_{j,k}\}$ de autovetores de A ;
- (b) Para todo $x \in D(A)$, temos

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle x, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j x,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em $L^2(\Omega)$ e

$$E_j x = \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle x, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k},$$

o que significa que o conjunto $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma família completa de projeções ortogonais em

$$X \text{ e } x = \sum_{j=1}^{\infty} E_j x, \quad x \in X;$$

(c) $-A$ gera um semigrupo analítico $\{e^{-At}\}$ dado por

$$e^{-At}x = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} E_j x;$$

(d) Os espaços de potências fracionárias X^r são dados por

$$X^r = D(A^r) = \left\{ x \in X; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2r} \|E_n x\|^2 < \infty \right\}, \quad r \geq 0,$$

com a norma

$$\|x\|_r = \|A^r x\| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2r} \|E_n x\|^2 \right\}^{1/2}, \quad x \in X^r,$$

$$A^r x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^r E_n x.$$

Também, para $r \geq 0$, definimos $Z_1 = X^1 \times X^1 = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]$, o qual é um espaço de Hilbert munido com a norma dada por

$$\left\| \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \right\|_{Z^1}^2 = \|w\|_1^2 + \|v\|_1^2.$$

3.3.1 Formulação Abstrata do Problema Linear

Nesta subseção escolhemos o espaço onde o problema linear

$$\begin{cases} y_{tt} = a\Delta y - \Delta^2 y - \Delta^2 y_{tt} + u(t, x) & \text{em } (0, \tau) \times \Omega, \\ y = \Delta y = 0 & \text{em } (0, \tau) \times \Gamma, \\ y(0, x) = y_0(x), y_t(0, x) = y_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.43)$$

será colocado como um sistema de controle abstrato em um espaço de Hilbert. Seja $X = L^2(\Omega)$ e considere o operador linear não limitado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por $A\phi = -\Delta\phi$ com $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. O produto interno e a norma em X serão denotados por $(\cdot, \cdot)$ e $\|\cdot\|$, respectivamente, e definidos por

$$(z, w) = \int_{\Omega} zw \, dx, \quad \|z\| = \sqrt{(z, z)}.$$

Escreveremos, algumas vezes, simplesmente L^2 , H^2 , H_0^1 e $H^2 \cap H_0^1$ ao invés de $L^2(\Omega)$, $H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Consideremos a equação em (3.43) escrita na forma

$$y_{tt} - a\Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_{tt} - u = 0. \quad (3.44)$$

Suponhamos que y é uma solução de (3.43) e que $y \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\}$. Como, em particular, $y \in H^2(\Omega)$ e $y = 0$ em Γ , considerando $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, então $v \in H^1(\Omega)$ e, pela fórmula de Green, vale que

$$(\nabla y, \nabla v) = -(\Delta y, v). \quad (3.45)$$

Também, pela fórmula de Green, como $\Delta y \in H^2(\Omega)$ e $\Delta y = 0$ em Γ , temos

$$(\Delta^2 y, v) = -(\nabla \Delta y, \nabla v) = -(\nabla v, \nabla \Delta y). \quad (3.46)$$

E, novamente pela fórmula de Green, temos

$$(\Delta y, \Delta v) = (\Delta v, \Delta y) = -(\nabla v, \nabla \Delta y), \quad (3.47)$$

pois, $\Delta y \in H^1(\Omega)$, $v \in H^2(\Omega)$ e $v = 0$ em Γ . Portanto, de (3.46) e (3.47), segue que

$$(\Delta^2 y, v) = (\Delta y, \Delta v). \quad (3.48)$$

Agora, voltando a equação (3.44) e tomando o produto em $L^2(\Omega)$ por y_t , temos

$$(y_{tt}, y_t) - (a\Delta y, y_t) + (\Delta^2 y, y_t) + (\Delta^2 y_{tt}, y_t) - (u, y_t) = 0. \quad (3.49)$$

Considerando a hipótese de que $y \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\}$, estamos nas condições para aplicar (3.45) e (3.48) em (3.49), obtendo

$$(y_{tt}, y_t) + (a\nabla y, \nabla y_t) + (\Delta y, \Delta y_t) + (\Delta y_{tt}, \Delta y_t) - (u, y_t) = 0. \quad (3.50)$$

Definamos as aplicações a_0 , b_0 e c_0 por:

$$\begin{aligned} a_0 : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w, v) &\longmapsto a(\nabla w, \nabla v) = a \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0 : [H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w, v) &\longmapsto (\Delta w, \Delta v) = \int_{\Omega} \Delta w \Delta v \, dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0 : [H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w, v) &\longmapsto (w, v) + (\Delta w, \Delta v) = \int_{\Omega} (wv + \Delta w \Delta v) \, dx. \end{aligned}$$

Claramente, a_0 , b_0 e c_0 são bilineares. Também, são contínuas. De fato, para a_0 , temos:

$$|a_0(w, v)| = |a(\nabla w, \nabla v)| \leq a \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} = a \|w\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}, \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega).$$

Para b_0 , temos:

$$|b_0(w, v)| = |(\Delta w, \Delta v)| \leq \|\Delta w\|_{L^2} \|\Delta v\|_{L^2} = \|w\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1} \|v\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1}, \quad \forall w, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Para c_0 , temos:

$$\begin{aligned} |c_0(w, v)| &= |(w, v) + (\Delta w, \Delta v)| \leq \|w\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\Delta w\|_{L^2} \|\Delta v\|_{L^2} \\ &\leq 2(\|w\|_{L^2}^2 + \|\Delta w\|_{L^2}^2)^{1/2} (\|v\|_{L^2}^2 + \|\Delta v\|_{L^2}^2)^{1/2} \\ &\leq c \|w\|_{H^2} \|v\|_{H^2} \\ &\leq c \|w\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1} \|v\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1}, \quad \forall w, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Além disso, a_0 , b_0 e c_0 são coercivas. Com efeito:

$$\begin{aligned} a_0(w, w) &= a(\nabla w, \nabla w) = a \|\nabla w\|_{L^2}^2 = a \|w\|_{H_0^1}^2, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega); \\ b_0(w, w) &= (\Delta w, \Delta w) = \|\Delta w\|_{L^2}^2 = \|w\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1}^2, \quad \forall w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \\ c_0(w, w) &= (w, w) + (\Delta w, \Delta w) = \|w\|_{L^2}^2 + \|\Delta w\|_{L^2}^2 \\ &\geq \|\Delta w\|_{L^2}^2 \\ &= \|w\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1}^2, \quad \forall w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Sendo a_0 , b_0 e c_0 formas bilineares contínuas e coercivas, podemos aplicar Lax-Milgran a cada uma delas. Para a_0 , temos que, dado $g \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, existe uma única $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a_0(w, v) = \langle g, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ou seja,

$$a \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx = \int_{\Omega} g v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ou ainda,

$$a(\nabla w, \nabla v)_{L^2} = (g, v)_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular,

$$a(\nabla w, \nabla \varphi)_{L^2} = (g, \varphi)_{L^2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ou também,

$$a\langle \nabla w, \nabla \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle g, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Logo,

$$-a\langle \Delta w, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle g, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Portanto,

$$a\Delta w = g, \quad w \in H_0^1(\Omega).$$

Como $w = 0$ em Γ e $g \in L^2(\Omega)$, segue da regularidade elíptica, que $w \in H^2(\Omega)$ e $\|w\|_{H^2} \leq c\|g\|_{L^2}$. Logo, temos a seguinte bijeção:

$$a\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega).$$

Agora, para b_0 temos que, dado $g \in L^2(\Omega) \hookrightarrow [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'$, existe uma única $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que

$$b_0(w, v) = \langle g, v \rangle, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega} \Delta w \Delta v \, dx = \int_{\Omega} g v \, dx, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Ou ainda,

$$(\Delta w, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (g, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{3.51}$$

Em particular,

$$(\Delta w, \Delta \varphi)_{L^2(\Omega)} = (g, \varphi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ou também,

$$\langle \Delta w, \Delta \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle g, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Logo,

$$\langle \Delta^2 w, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle g, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De onde podemos concluir que

$$\Delta^2 w = g, \quad w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (3.52)$$

Considere, agora, $\mathcal{H}_0(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega); \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\}$. Pela 1ª Fórmula de Green Generalizada, para $\varphi \in \mathcal{H}_0(\Omega)$ e $\psi \in H^2(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} (\Delta\varphi, \psi)_{L^2(\Omega)} - (\varphi, \Delta\psi)_{L^2(\Omega)} &= \langle \gamma_1 \varphi, \gamma_0 \psi \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma), H^{3/2}(\Gamma)} \\ &\quad - \langle \gamma_0 \varphi, \gamma_1 \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Note que de (3.52), $\Delta(\Delta w) \in L^2$, pois $g \in L^2$. Então, fazendo $\varphi = \Delta w \in \mathcal{H}_0(\Omega)$ e $\psi = v \in H^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} (\Delta^2 w, v)_{L^2(\Omega)} - (\Delta w, \Delta v)_{L^2(\Omega)} &= \langle \gamma_1 \Delta w, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma), H^{3/2}(\Gamma)} \\ &\quad - \langle \gamma_0 \Delta w, \gamma_1 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

De (3.52), $\Delta^2 w = g$. Substituindo em (3.51), temos

$$(\Delta w, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (\Delta^2 w, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Desta forma, de (3.53),

$$(\Delta^2 w, v)_{L^2(\Omega)} - (\Delta^2 w, v)_{L^2(\Omega)} = - \langle \gamma_0 \Delta w, \gamma_1 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Logo,

$$\langle \gamma_0 \Delta w, \gamma_1 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} = 0.$$

A igualdade acima vale para todo $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Como $\gamma_1 : H^2(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ é sobrejetor temos

$$\gamma_0 \Delta w = 0 \text{ em } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Ou seja,

$$\Delta w = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Como $g \in L^2(\Omega)$ e

$$\begin{cases} \Delta^2 w = g, & \text{em } \Omega \\ w = \Delta w = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

segue, da regularidade elíptica, que $w \in H^4(\Omega)$ e $\|w\|_{H^4} \leq c\|g\|_{L^2}$. Portanto, temos a bijeção

$$\Delta^2 : \{\eta \in H^4; \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \longrightarrow L^2(\Omega)$$

Finalmente, para c_0 temos que, dado $g \in L^2(\Omega)$, analogamente ao caso anterior, existe uma única $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(I + \Delta^2)w = g.$$

Também, como no caso anterior, pela 1ª Fórmula de Green Generalizada, obtemos que $\Delta w = 0$ em Γ . E, pela regularidade elíptica, concluimos que $w \in H^4(\Omega)$ e

$$\|w\|_{H^4} \leq \|g - w\|_{L^2}. \quad (3.54)$$

Assim, temos a seguinte bijeção

$$I + \Delta^2 : \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \longrightarrow L^2(\Omega).$$

Na sequência, note que, sendo a_0 , b_0 e c_0 formas bilineares e contínuas, existem operadores $A_0 \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$ e B_0 , $C_0 \in \mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ tais que

$$\begin{aligned} a_0(w, v) &= (A_0 w, v), \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega); \\ b_0(w, v) &= (B_0 w, v), \quad \forall w, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \\ c_0(w, v) &= (C_0 w, v), \quad \forall w, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Voltando à equação (3.50), podemos escrevê-la em termos das formas bilineares a_0 , b_0 e c_0 , como

$$c_0(y_{tt}, y_t) + a_0(y, y_t) + b_0(y, y_t) - (u, y_t) = 0.$$

Reescrevendo, em termos dos operadores, temos

$$(C_0 y_{tt}, y_t) + (A_0 y, y_t) + (B_0 y, y_t) - (u, y_t) = 0.$$

Logo,

$$(C_0 y_{tt} + A_0 y + B_0 y - u, y_t) = 0.$$

Portanto,

$$C_0 y_{tt} + (A_0 + B_0)y - u = 0.$$

Ou ainda,

$$C_0 y_{tt} = -(A_0 + B_0)y + u, \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.55)$$

Sendo, as formas bilineares a_0 , b_0 e c_0 contínuas e coercivas, os operadores A_0 , B_0 e C_0 são isomorfismos nos seguintes espaços:

$$A_0 : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega);$$

$$B_0, C_0 : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'$$

Conforme o que foi feito anteriormente para obtermos (3.50) a partir da equação original, tomamos $y \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\}$. Então, em particular, $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e, assim, podemos aplicar os operadores A_0 e B_0 em y . Além disso, $A_0 y \in H^{-1}(\Omega)$ e $B_0 y \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'$. Considerando a cadeia de imersões contínuas e densas

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]',$$

temos que $A_0 y \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'$. Logo, $(A_0 + B_0)y \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'$ e podemos aplicar C_0^{-1} a $(A_0 + B_0)y$. Também, observando que $u \in L^2(\Omega)$ temos, pela cadeia de imersões, que $u \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'$. Assim, de (3.55), temos

$$y_{tt} = C_0^{-1}[-(A_0 + B_0)y] + C_0^{-1}u.$$

Seja $z = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$ com $v = y_t$. Então,

$$\begin{aligned} z' &= \begin{bmatrix} v \\ y_{tt} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v \\ C_0^{-1}[-(A_0 + B_0)y] + C_0^{-1}u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_0^{-1}[-(A_0 + B_0)] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Desta forma, o sistema (3.43) pode ser escrito como um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem no espaço de Hilbert $Z_1 = X^1 \times X^1$ como

$$z'(t) = \mathcal{A}z(t) + Bu(t), \quad z(t) \in Z_1, \quad t \in (0, \tau], \quad (3.56)$$

onde $u \in L^2([0, \tau], U)$, $U = X = L^2(\Omega)$, $X^1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset Z_1 \longrightarrow Z_1$; $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_0^{-1}[-(A_0 + B_0)] & 0 \end{bmatrix}$ é um operador não limitado e $B : U \longrightarrow Z_1$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ C_0^{-1} \end{bmatrix}$ é um operador limitado.

As afirmações de que $\mathcal{A}$ é um operador não limitado e que B é um operador limitado serão verificados antes do término desta subseção. Antes, note que

$$D(\mathcal{A}) = \{(y, v) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2; (v, C_0^{-1}[-(A_0 + B_0)y]) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2\}.$$

Mas, tínhamos que $y \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\}$, logo

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= \{(y, v) \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \\ &\quad (v, C_0^{-1}[-(A_0 + B_0)y]) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2\} \\ &= \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Já vimos que

$$(A_0 w, v) = a_0(w, v) = a(\nabla w, \nabla v) = (-a\Delta w, v), \quad (3.57)$$

desde que $w, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Também,

$$(B_0 w, v) = b_0(w, v) = (\Delta w, \Delta v) = (\Delta^2 w, v) \quad (3.58)$$

e,

$$(C_0 w, v) = c_0(w, v) = (w, v) + (\Delta w, \Delta v) = (w, v) + (\Delta^2 w, v) = ((I + \Delta^2)w, v), \quad (3.59)$$

desde que $w \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0\}$ e $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Então, tomando $w \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0\}$ temos, de (3.57), (3.58) e (3.59), que

$$A_0 w = -a\Delta w, \quad B_0 w = \Delta^2 w \quad \text{e} \quad C_0 w = (I + \Delta^2)w.$$

Portanto, podemos escrever o operador $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (I + \Delta^2)^{-1}(a\Delta - \Delta^2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Ou ainda, fazendo $A = -\Delta$,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (I + A^2)^{-1}(-aA - A^2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos verificar que o operador $\mathcal{A} : \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset Z_1 \longrightarrow Z_1$; $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (I + A^2)^{-1}(-aA - A^2) & 0 \end{bmatrix}$ é um operador não limitado. De fato, dado $z = (y, v) \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}z &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ (I + A^2)^{-1}(-aA - A^2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ (I + A^2)^{-1}(-aA - A^2)y \end{bmatrix} \\ &= (v, (I + A^2)^{-1}(-aA - A^2)y)^T. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\mathcal{A}z\|_{[H^2 \cap H_0^1]^2} = \|v\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|(I + A^2)^{-1}(-aA - A^2)y\|_{H^2 \cap H_0^1}. \quad (3.60)$$

Vimos anteriormente que a aplicação

$$I + A^2 : \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \longrightarrow L^2(\Omega),$$

é uma bijeção. Como $y \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\}$ então $(-aA - A^2)y \in L^2(\Omega)$. Logo, pela bijeção acima, existe um único $w \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\}$ tal que

$$(I + A^2)w = (-aA - A^2)y.$$

Ou seja, existe um único $w \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\}$ tal que

$$w = (I + A^2)^{-1}(-aA - A^2)y.$$

Voltando em (3.60), temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}z\|_{(H^2 \cap H_0^1)^2} &= \|v\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|w\|_{H^2 \cap H_0^1} \\ &= \|v\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|\Delta w\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Considerando

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w, v) &\longmapsto (\nabla w, \nabla v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx, \end{aligned}$$

temos, de maneira análoga ao que foi feito para a_0 , que a é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Logo, pelo Teorema 2.14, o operador $A = -\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é não limitado de $L^2(\Omega)$. Assim, para toda constante $c > 0$, existe $\xi_c \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|\Delta \xi\|_{L^2} > c \|\xi\|_{L^2}. \quad (3.62)$$

Portanto, de (3.61) concluimos que $\mathcal{A}$ é um operador não limitado.

Já o operador $B : U \rightarrow Z_1$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ C_0^{-1} \end{bmatrix}$, é um operador limitado. Com efeito,

$$Bu = \begin{bmatrix} 0 \\ C_0^{-1} \end{bmatrix} [u] = \begin{bmatrix} 0 \\ C_0^{-1}u \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Assim,

$$\|Bu\|_{Z_1} = \|Bu\|_{[H^2 \cap H_0^1]^2} = \|0\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|C_0^{-1}u\|_{H^2 \cap H_0^1}. \quad (3.64)$$

Sabemos que

$$C_0 = I + \Delta^2 : \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é bijeção. Logo, dado $u \in L^2(\Omega)$, existe um único $w \in \{\eta \in H^4(\Omega); \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\}$ tal que

$$(I + \Delta^2)w = u.$$

Ou seja,

$$w = (I + \Delta^2)^{-1}u.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|C_0^{-1}u\|_{H^2 \cap H_0^1} &= \|(I + \Delta^2)^{-1}u\|_{H^2 \cap H_0^1} = \|w\|_{H^2 \cap H_0^1} \leq \|w\|_{H^4} \\ &\leq \|u - w\|_{L^2} \\ &\leq \|u\|_{L^2} + \|w\|_{L^2} \\ &\leq c\|u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Portanto, de (3.64),

$$\|Bu\|_{Z_1} \leq c\|u\|_{L^2}.$$

Ou seja, o operador $B : U \rightarrow Z_1$ é limitado.

3.3.2 Existência e Unicidade de Solução do Problema Linear

Na Seção 3.3.1 foi visto que o problema

$$\begin{cases} y_{tt} = a\Delta y - \Delta^2 y - \Delta^2 y_{tt} + u(t, x) & \text{em } (0, \tau) \times \Omega, \\ y = \Delta y = 0 & \text{em } (0, \tau) \times \Gamma, \\ y(0, x) = y_0(x), y_t(0, x) = y_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

pode ser escrito como um sistema de controle abstrato no espaço de Hilbert $Z_1 = X^1 \times X^1$ como

$$\begin{cases} z'(t) = \mathcal{A}z(t) + Bu(t), & z(t) \in Z_1, t \in (0, \tau]; \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (3.65)$$

onde $u \in L^2([0, \tau], U)$, $U = X = L^2(\Omega)$, $X^1 = D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $z = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (I + A^2)^{-1}(-aA - A^2) & 0 \end{bmatrix}$ é um operador não limitado com $D(\mathcal{A}) = \{\eta \in H^4; \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \times D(A)$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ (I + A^2)^{-1} \end{bmatrix}$, $B : L^2(\Omega) \rightarrow Z_1$ é um operador linear limitado.

Consideramos a seguinte família de projeções ortogonais completa em Z_1 :

$$P_j = \text{diag}(E_j, E_j) = \begin{bmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix}.$$

Portanto, para $z \in Z_1$ temos

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} P_j z \quad \text{e} \quad \|z\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j z\|^2, \quad z \in Z.$$

O próximo resultado nos dá a boa colocação do problema no espaço de energia Z_1 .

Teorema 3.21 *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo dado por*

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0,$$

onde $\{P_j\}_{j \geq 1}$ é uma família completa de projeções ortogonais no espaço de Hilbert Z_1 dado por

$$P_j = \begin{bmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, \infty, \quad \text{e} \quad A_j = R_j P_j, \quad R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 + \lambda_j^2)^{-1}(-a\lambda_j - \lambda_j^2) & 0 \end{bmatrix}, \quad j \geq 1.$$

Demonstração: Considere o operador $I + A^2 : \{\eta \in H^4; \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \rightarrow L^2(\Omega)$, com $A = -\Delta$. Podemos escrever

$$(I + A^2)\theta = \psi \Leftrightarrow \theta = (I + A^2)^{-1}\psi; \theta \in \{\eta \in H^4; \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\}, \psi \in L^2(\Omega).$$

Logo, considerando λ_j^2 um autovalor de A^2 , temos

$$\begin{aligned} (I + A^2)w_j &= (1 + \lambda_j^2)w_j \iff w_j = (I + A^2)^{-1}(1 + \lambda_j^2)w_j \\ &\iff w_j = (1 + \lambda_j^2)(I + A^2)^{-1}w_j \\ &\iff (I + A^2)^{-1}w_j = (1 + \lambda_j^2)^{-1}w_j. \end{aligned}$$

Portanto, $(1 + \lambda_j^2)^{-1}$ é um autovalor de $(I + A^2)^{-1}$. Desta forma,

$$(I + A^2)^{-1}z = (I + A^2)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} E_j z = \sum_{j=1}^{\infty} (I + A^2)^{-1} E_j z = \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^2)^{-1} E_j z.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}z &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ (I + A^2)^{-1}(-aA - A^2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v \\ (I + A^2)^{-1}(-aAy - A^2y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} E_j v \\ \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^2)^{-1} E_j \left(-a \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n y - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 E_i y \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} E_j v \\ \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^2)^{-1} E_j (-a\lambda_j E_j y - \lambda_j^2 E_j y) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} E_j v \\ (1 + \lambda_j^2)^{-1} E_j (-a\lambda_j E_j y - \lambda_j^2 E_j y) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 + \lambda_j^2)^{-1}(-a\lambda_j - \lambda_j^2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} R_j P_j z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{\infty} R_j P_j P_j z \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j P_j z, \end{aligned}$$

onde $A_j = R_j P_j$. É fácil ver que $A_j P_j = P_j A_j$.

Note que a equação característica de R_j é dada por

$$\det(R_j - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ (1 + \lambda_j^2)^{-1}(-a\lambda_j - \lambda_j^2) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1 + \lambda_j^2)^{-1}(-a\lambda_j - \lambda_j^2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det(R_j - \lambda I) = 0 &\iff \lambda^2 = \frac{-a\lambda_j - \lambda_j^2}{1 + \lambda_j^2} &\iff \lambda = \pm \sqrt{\frac{a\lambda_j + \lambda_j^2}{1 + \lambda_j^2}} i \\ &&\iff \lambda = \pm ki, \end{aligned}$$

onde $k = \sqrt{\frac{a\lambda_j + \lambda_j^2}{1 + \lambda_j^2}}$.

Para determinar $e^{R_j t}$ devemos encontrar $p(x) = ax + b$ tal que $p(ki) = e^{(ki)t}$, ou seja, tal que

$$aki + b = e^{0 \cdot t}(\cos(kt) + \text{sen}(kt)i)$$

Logo, devemos tomar $a = \frac{\text{sen}(kt)}{k}$ e $b = \cos(kt)$. Assim,

$$\begin{aligned} e^{R_j t} = p(R_j) &= \frac{\text{sen}(kt)}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix} + \cos(kt) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(kt) & \frac{\text{sen}(kt)}{k} \\ -k\text{sen}(kt) & \cos(kt) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, considere $z = (z_1, z_2)^T \in Z_1 = X^1 \times X^1$ tal que $\|z\|_{Z_1} = 1$. Temos

$$\begin{aligned} \|z\|_{Z_1}^2 &= \|(z_1, z_2)^T\|_{Z_1}^2 = \|z_1\|_{X^1}^2 + \|z_2\|_{X^1}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|E_j z_1\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|E_j z_2\|^2. \end{aligned}$$

Como $\|z\|_{Z_1} = 1$ então

$$\lambda_j^2 \|E_j z_1\|^2 \leq 1 \text{ e } \lambda_j^2 \|E_j z_2\|^2 \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \|e^{A_j t} z\|_{Z_1}^2 &= \|e^{R_j t} P_j z\|_{Z_1}^2 = \left\| \begin{bmatrix} \cos(kt) & \frac{\text{sen}(kt)}{k} \\ -k\text{sen}(kt) & \cos(kt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\|_{Z_1}^2 \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} \cos(kt) E_j z_1 & \frac{\text{sen}(kt)}{k} E_j z_2 \\ -k\text{sen}(kt) E_j z_1 & \cos(kt) E_j z_2 \end{bmatrix} \right\|_{Z_1}^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left\| E_n \left(\cos(kt) E_j z_1 + \frac{\text{sen}(kt)}{k} E_j z_2 \right) \right\|_X^2 \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \| E_n (-k\text{sen}(kt) E_j z_1 + \cos(kt) E_j z_2) \|_X^2 \\
 &= \lambda_n^2 \left\| \cos(kt) E_n z_1 + \frac{\text{sen}(kt)}{k} E_n z_2 \right\|_X^2 \\
 &\quad + \lambda_n^2 \| -k\text{sen}(kt) E_n z_1 + \cos(kt) E_n z_2 \|_X^2 \\
 &\leq \left(|\cos(kt)| \lambda_n \|E_n z_1\| + \left| \frac{\text{sen}(kt)}{k} \right| \lambda_n \|E_n z_2\| \right)^2 \\
 &\quad + (|k\text{sen}(kt)| \lambda_n \|E_n z_1\| + |\cos(kt)| \lambda_n \|E_n z_2\|)^2 \\
 &\leq \left(|\cos(kt)| + \left| \frac{\text{sen}(kt)}{k} \right| \right)^2 + (|k\text{sen}(kt)| + |\cos(kt)|)^2 \\
 &\leq (1+t)^2 + (kt+1)^2 \\
 &\leq 2(1+t)^2,
 \end{aligned}$$

visto que $t \geq 0$ e $0 \leq k \leq 1$. Logo, pelo Lema 2.55, $\mathcal{A}$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. □

Agora, note que $Bu \in L^1(0, T; Z_1)$. De fato, de acordo com os resultados do final da seção 3.3.1, temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|Bu(t)\|_{Z_1} dt &= \int_0^T \|0\|_{H^2 \cap H_0^1} dt + \int_0^T \|C_0^{-1} u(t)\|_{H^2 \cap H_0^1} dt \\
 &= \int_0^T \|C_0^{-1} u(t)\|_{H^2 \cap H_0^1} dt \\
 &\leq c \int_0^T \|u(t)\|_{L^2} dt,
 \end{aligned}$$

a última integral é finita visto que $u(t) \in L^2(\Omega)$, $\forall t \in (0, T)$. Disso e do fato de que $\mathcal{A}$ é o gerador de um C_0 -semigrupo temos, pelo Teorema 2.64, que para todo $z_0 \in Z_1$, o problema (3.65) possui uma única solução fraca $z(t)$ e essa solução é dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds, \quad t \in [0, \tau].$$

3.3.3 Controlabilidade Aproximada do Sistema Linear

Nesta subseção obtemos a controlabilidade aproximada do sistema linear (3.65).

Proposição 3.22 *O adjunto do operador B é dado por*

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & (I + A^2)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Demonstração: Note que $I + A^2 : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é um operador linear bijetivo com inversa limitada. Logo, pela Proposição 2.16, $[(I + A^2)^*]^{-1}$ existe e $[(I + A^2)^*]^{-1} = [(I + A^2)^{-1}]^*$. Assim, podemos calcular B^* como segue:

$$\begin{aligned} \langle Bu, z \rangle_{Z_1} &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ (I + A^2)^{-1}u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{Z_1} = \langle (I + A^2)^{-1}u, v \rangle_{H^2 \cap H_0^1} \\ &= \langle u, [(I + A^2)^{-1}]^*v \rangle_U \\ &= \left\langle u, \begin{bmatrix} 0 & [(I + A^2)^*]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_U \\ &= \left\langle u, \begin{bmatrix} 0 & (I + A^2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_U. \end{aligned}$$

Portanto, B^* é como dado em (3.66).

□

Teorema 3.23 *O sistema (3.65) é aproximadamente controlável.*

Demonstração: É fácil ver que $P_j B B^* = B B^* P_j$, $j = 1, 2, \dots$. Assim, podemos aplicar a Proposição 3.10, obtendo que a controlabilidade aproximada de (3.65) é equivalente a controlabilidade de cada um dos seguintes sistemas de dimensão finita

$$z'(t) = A_j z(t) + B_j u(t), \quad z(t) \in \text{Im}(P_j), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.67)$$

Note que

$$\begin{aligned}
 B_j u = P_j B u &= \begin{bmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (I + A^2)^{-1} u \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ E_j (I + A^2)^{-1} u \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ E_j \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^2)^{-1} E_n u \right) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (1 + \lambda_j^2)^{-1} E_j u \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (1 + \lambda_j^2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j u \end{bmatrix} \\
 &= D_j \begin{bmatrix} E_j u \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Mas a controlabilidade do sistema (3.67) é equivalente a controlabilidade de cada um dos seguintes sistemas de dimensão finita

$$z' = R_j z + D_j u, \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3.68)$$

onde $R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 + \lambda_j^2)^{-1}(-a\lambda_j - \lambda_j^2) & 0 \end{bmatrix}$ é tal que $A_j = R_j P_j$ e $D_j = \begin{bmatrix} 0 \\ (1 + \lambda_j^2)^{-1} \end{bmatrix}$.

Agora, note que

$$R_j D_j = \begin{bmatrix} (1 + \lambda_j^2)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[D_j : R_j D_j] = \begin{bmatrix} 0 & (1 + \lambda_j^2)^{-1} \\ (1 + \lambda_j^2)^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\text{Rank}[D_j : R_j D_j] = 2.$$

Portanto, pelo Teorema 3.12, (3.68) é exatamente controlável (em particular, aproximadamente controlável), consequentemente, (3.65) é aproximadamente controlável.

De fato, de acordo com o item (iii) do Teorema 3.8, a controlabilidade de (3.67) e (3.68) são equivalentes, respectivamente, ao seguinte:

$$\begin{aligned}
 B_j^* e^{A_j^* t} z &= 0, \quad \forall t \in [0, \tau] \Rightarrow z = 0, \quad z \in \text{Im}(P_j); \\
 D_j^* e^{R_j^* t} z &= 0, \quad \forall t \in [0, \tau] \Rightarrow z = 0, \quad z \in \mathbb{R}^2.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$B_j^* e^{A_j^* t} z = D_j^* e^{R_j^* t} P_j z = 0, \forall t \in [0, \tau] \Rightarrow P_j z = z = 0.$$

□

3.3.4 Formulação Abstrata e Existência e Unicidade de Solução do Problema Semilinear

O sistema (3.42) pode ser escrito como uma equação diferencial ordinária abstrata de segunda ordem em $Z_1 = X^1 \times X^1$ como

$$\begin{cases} y_{tt} = a\Delta y - \Delta^2 y - \Delta^2 y_{tt} + u + f^e(t, y, y_t, u), & t \in (0, \tau] \\ y(0) = y_0, y_t(0) = y_1 \end{cases} \quad (3.69)$$

onde $f^e : [0, \tau] \times Z_1 \times U \rightarrow L^2(\Omega)$ é definida por

$$f^e(t, z, u)(x) = f(t, y(x), y'(x), u(x)).$$

Note que, de fato, $f^e(t, z, u) \in L^2(\Omega)$, visto que

$$\begin{aligned} \|f^e(t, z, u)\|_{L^2(\Omega)} &= \left\{ \int_{\Omega} |f^e(t, z, u)(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_{\Omega} |f(t, y(x), y_t(x), u(x))|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ k' \int_{\Omega} (c_0^2 + c_1^2 |y(x)|^2 + c_2^2 |y'(x)|^2 + c_3^2 |u(x)|^2) dx \right\}^{1/2} \\ &= k \left\{ c_0^2 \text{med}(\Omega) + c_1^2 \|y\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_2^2 \|y'\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_3^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

pois $y, y', u \in L^2(\Omega)$.

Com a mudança de variáveis $v = y'$, analogamente ao que fizemos para a equação linear, podemos escrever a equação de segunda ordem (3.69) como uma equação diferencial ordinária de primeira ordem no espaço de Hilbert $Z_1 = X^1 \times X^1$ como segue:

$$\begin{cases} z_t(t) = \mathcal{A}z(t) + Bu(t) + F(t, z(t), u(t)), & z \in Z_1, t \in (0, \tau] \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (3.70)$$

onde $u \in L^2([0, \tau], U)$, $U = X = L^2(\Omega)$, $X^1 = D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $z = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (I + A^2)^{-1}(-aA - A^2) & 0 \end{bmatrix}$ é um operador não limitado com $D(\mathcal{A}) = \{\eta \in H^4; \eta = \Delta\eta = 0 \text{ em } \Gamma\} \times D(A)$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ (I + A^2)^{-1} \end{bmatrix}$, $B : L^2(\Omega) \rightarrow Z_1$ é um operador linear limitado e $F(t, z, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ (I + A^2)^{-1}f^e(t, z, u) \end{bmatrix}$, $F : [0, \tau] \times Z_1 \times U \rightarrow Z_1$, é o termo não linear.

Para estudar a existência e unicidade de solução da equação (3.70) primeiramente note que F satisfaz a seguinte condição de Lipschitz:

$$\begin{aligned}
 & \|F(t, z_2, u_2) - F(t, z_1, u_1)\|_{Z_1} \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ (I + A^2)^{-1}f^e(t, z_2, u_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ (I + A^2)^{-1}f^e(t, z_1, u_1) \end{bmatrix} \right\|_{Z_1} \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ (I + A^2)^{-1}[f^e(t, z_2, u_2) - f^e(t, z_1, u_1)] \end{bmatrix} \right\|_{Z_1} \\
 &= \|0\|_{X^1} + \|(I + A^2)^{-1}[f^e(t, z_2, u_2) - f^e(t, z_1, u_1)]\|_{X^1} \\
 &\leq c\|f^e(t, z_2, u_2) - f^e(t, z_1, u_1)\|_{L^2} \\
 &= c \left[\int_{\Omega} |f^e(t, z_2, u_2)(x) - f^e(t, z_1, u_1)(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\
 &= c \left[\int_{\Omega} |f(t, y_2(x), y_2'(x), u_2(x)) - f(t, y_1(x), y_1'(x), u_1(x))|^2 dx \right]^{1/2} \\
 &\leq c \left[\int_{\Omega} (c_0 + c_1 |y_2(x)| + c_2 |y_2'(x)| + c_3 |u_2(x)| - c_0 - c_1 |y_1(x)| - c_2 |y_1'(x)| - c_3 |u_1(x)|)^2 dx \right]^{1/2} \\
 &\leq c \left[\int_{\Omega} (c_1 |y_2(x) - y_1(x)| + c_2 |y_2'(x) - y_1'(x)| + c_3 |u_2(x) - u_1(x)|)^2 dx \right]^{1/2} \\
 &\leq c \left[\int_{\Omega} c_1^2 |y_2(x) - y_1(x)|^2 + c_2^2 |y_2'(x) - y_1'(x)|^2 + c_3^2 |u_2(x) - u_1(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\
 &= c \left[c_1^2 \int_{\Omega} |y_2(x) - y_1(x)|^2 dx + c_2^2 \int_{\Omega} |y_2'(x) - y_1'(x)|^2 dx \right. \\
 &\quad \left. + c_3^2 \int_{\Omega} |u_2(x) - u_1(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\
 &\leq c \left\{ \left[\int_{\Omega} |y_2(x) - y_1(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int_{\Omega} |y_2'(x) - y_1'(x)|^2 dx \right]^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\int_{\Omega} |u_2(x) - u_1(x)|^2 dx \right]^{1/2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= c[\|y_2 - y_1\|_{L^2} + \|y'_2 - y'_1\|_{L^2} + \|u_2 - u_1\|_{L^2}] \\
 &\leq c[\|y_2 - y_1\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|y'_2 - y'_1\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|u_2 - u_1\|_{L^2}] \\
 &= c[\|z_2 - z_1\|_{Z^1} + \|u_2 - u_1\|_{L^2}], \quad \forall t \in [0, \tau], \quad z_1, z_2 \in Z_1, \quad u_1, u_2 \in U.
 \end{aligned}$$

Então, aplicando o Teorema 2.67, temos que, dado $z_0 \in Z_1$ e $u \in L^2([0, \tau]; U)$, a equação (3.70) possui uma única solução moderada em $[0, \tau)$, dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds + \int_0^t T(t-s)F(s, z(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, \tau].$$

3.3.5 Controlabilidade Aproximada do Problema Semilinear

Finalmente, apresentamos nesta subseção, o principal resultado em relação ao problema (3.42).

Teorema 3.24 *O sistema (3.42) é aproximadamente controlável em $[0, \tau]$.*

Demonstração: Vimos no Teorema 3.23 que o sistema linear correspondente ao sistema (3.42) é aproximadamente controlável em $[0, \delta]$, para todo $0 < \delta < \tau$. Além disso, para F dada em (3.70), temos

$$\begin{aligned}
 \|F(t, z, u)\|_{Z_1} &= \|0\|_{X^1} + \|(I + A^2)^{-1}f^e(t, z, u)\|_{X^1} \\
 &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|E_n[(I + A^2)^{-1}f^e(t, z, u)]\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2},
 \end{aligned}$$

para todo $(t, z, u) \in [0, \tau] \times Z_1 \times U$.

A última expressão é finita, pois $(I + A^2)^{-1}f^e(t, z, u) \in X^1$. Assim, as hipóteses (I) e (II) do Teorema 3.20 são satisfeitas e, conseqüentemente, temos a controlabilidade aproximada de (3.42).

□

CONTROLABILIDADE EXATA PARA UM SISTEMA TERMOELÁSTICO COM CONTROLE SOMENTE NAS COMPONENTES TÉRMICAS

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado com fronteira Γ suficientemente regular e $T > 0$. Denotamos por (x, y) um ponto de Ω , t a variável de tempo, $Q = (0, T) \times \Omega$ e $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$. Os deslocamentos são dados por z e ξ e as temperaturas por ψ e φ . Neste capítulo, inspirados em [1] e [31], estudamos o problema de controlabilidade exata para o seguinte sistema termoeelástico com duas temperaturas e com as funções de controle $\bar{u}, \bar{v} \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2$:

$$\begin{cases} \rho_1 z_{tt} - \gamma_1 \Delta z_{tt} + a_{11} \Delta^2 z + a_{12} \Delta^2 \xi + c_{11} \Delta \psi + c_{12} \Delta \varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \rho_2 \xi_{tt} - \gamma_2 \Delta \xi_{tt} + a_{21} \Delta^2 z + a_{22} \Delta^2 \xi + c_{21} \Delta \psi + c_{22} \Delta \varphi = 0 & \text{em } Q, \\ b_{11} \psi_t + b_{12} \varphi_t - c_{11} \Delta \psi - c_{12} \Delta \varphi + a(\psi - \varphi) - c_{11} \Delta z_t - c_{12} \Delta \xi_t = \operatorname{div}(\bar{u}) & \text{em } Q, \\ b_{21} \psi_t + b_{22} \varphi_t - c_{21} \Delta \psi - c_{22} \Delta \varphi - a(\psi - \varphi) - c_{21} \Delta z_t - c_{22} \Delta \xi_t = \operatorname{div}(\bar{v}) & \text{em } Q, \end{cases} \quad (4.1)$$

com condições de fronteira

$$\begin{cases} z \equiv 0 \equiv \frac{\partial z}{\partial \nu} & \text{em } \Sigma, \\ \xi \equiv 0 \equiv \frac{\partial \xi}{\partial \nu} & \text{em } \Sigma, \\ \psi \equiv 0 \equiv \varphi & \text{em } \Sigma, \end{cases} \quad (4.2)$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} z(t=0) = z_0, z_t(t=0) = z_1, \xi(t=0) = \xi_0, \xi_t(t=0) = \xi_1 & \text{em } \Omega, \\ \psi(t=0) = \psi_0, \varphi(t=0) = \varphi_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

O operador div denota o divergente dos vetores $\bar{u}(x, y) = [u_1(x, y), u_2(x, y)]$ e $\bar{v}(x, y) = [v_1(x, y), v_2(x, y)]$, isto é, $\text{div}(\bar{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$ e $\text{div}(\bar{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$. Como usual, $[\nu_1, \nu_2]$ é a normal unitária apontando para fora da fronteira. Definindo o espaço $H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega)$ por

$$H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega) = \begin{cases} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \text{se } \gamma_1, \gamma_2 > 0, \\ H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) & \text{se } \gamma_1 > 0, \gamma_2 = 0, \\ L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \text{se } \gamma_1 = 0, \gamma_2 > 0, \\ L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) & \text{se } \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

pode-se mostrar a boa colocação do sistema termoelástico não controlado ($\bar{u} \equiv 0 \equiv \bar{v}$ em (4.1)) para dados iniciais $(z_0, \xi_0, z_1, \xi_1, \psi_0, \varphi_0) \in \mathcal{H} \equiv [H_0^2(\Omega)]^2 \times H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$.

Para obter a controlabilidade exata do problema (4.1) – (4.3) no intervalo de tempo $[0, T]$, provaremos que para $(z_0, \xi_0, z_1, \xi_1, \psi_0, \varphi_0)$ e $(z_0^T, \xi_0^T, z_1^T, \xi_1^T, \psi_0^T, \varphi_0^T)$ dados iniciais e finais, respectivamente, no espaço $\mathcal{H} \equiv [H_0^2(\Omega)]^2 \times H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$, existem controles adequados $\bar{u}, \bar{v} \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2$ tais que a solução correspondente $(z, \xi, z_t, \xi_t, \psi, \varphi)$ de (4.1) – (4.3) satisfaz no tempo final T ,

$$(z(T), \xi(T), z_t(T), \xi_t(T), \psi(T), \varphi(T)) = (z_0^T, \xi_0^T, z_1^T, \xi_1^T, \psi_0^T, \varphi_0^T).$$

Desta forma, o deslocamento será controlado exatamente pelo meio indireto de colocar o termo de controle na componente térmica.

Note que o problema (4.1) – (4.3) pode ser escrito como

$$\begin{cases} RZ_{tt} - G\Delta Z_{tt} + A\Delta^2 Z + C\Delta\Psi = 0 & \text{em } Q, \\ B\Psi_t - C\Delta\Psi + aN\Psi - C\Delta Z_t = \text{div } \bar{U} & \text{em } Q, \\ Z \equiv 0 \equiv \frac{\partial Z}{\partial \nu} & \text{em } \Sigma, \\ \Psi \equiv 0 & \text{em } \Sigma, \\ Z(t=0) = Z_0, Z_t(t=0) = Z_1, \Psi(t=0) = \Psi_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde

$$Z = \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix},$$

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 2}, B = [b_{ij}]_{2 \times 2}, C = [c_{ij}]_{2 \times 2}, N = [(-1)^{i+j}]_{2 \times 2}.$$

Impomos algumas condições sobre o sistema,

H_1 : As matrizes A , B e C são definidas positivas;

H_2 : Os parâmetros a , ρ_1 , ρ_2 , γ_1 , γ_2 , a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_{11} , b_{12} , b_{22} , c_{11} , c_{12} e c_{22} são positivos;

H_3 : $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$;

$$H_4 : \begin{cases} c_{21} < -\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{b_{12}}, & \text{se } b_{12} > 0; \\ c_{21} > -\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{b_{12}}, & \text{se } b_{12} < 0. \end{cases}$$

4.1 Formulação Abstrata do Problema

Em nossa prova de controlabilidade, o problema (4.1) – (4.3) e seu adjunto (que vamos calcular neste capítulo) serão considerados como equações de evolução abstrata num certo espaço de Hilbert. Para desenvolver esses modelos de operadores seguimos trabalhos sobre problemas similares como em [1]:

- Definimos o operador $\mathring{A} : D(\mathring{A}) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ sendo $\mathring{A} = \Delta^2$, com domínio

$$D(\mathring{A}) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega). \quad (4.5)$$

$\mathring{A}$ é então positivo definido, auto-adjunto e temos as caracterizações

$$\begin{aligned} D(\mathring{A}^{\frac{1}{4}}) &= H_0^1(\Omega); \\ D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}}) &= H_0^2(\Omega); \\ D(\mathring{A}^{\frac{3}{2}}) &= H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Em particular, da segunda caracterização em (4.6) e da fórmula de Green resulta que para todo $z, \xi \in D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}})$,

$$\langle \mathring{A}z, \xi \rangle_{[D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}})]' \times D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}})} = (\mathring{A}^{\frac{1}{2}}z, \xi)_{L^2(\Omega)} = (\Delta z, \Delta \xi)_{L^2(\Omega)} \quad (4.7)$$

e,

$$\|z\|_{D(\dot{A}^{\frac{1}{2}})}^2 = \left\| \dot{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.8)$$

- Definimos $A_D : D(A_D) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ sendo $A_D = -\Delta$, com condições de fronteira de Dirichlet, ou seja,

$$D(A_D) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (4.9)$$

A_D é, também, positivo definido, auto-adjunto e

$$D\left(A_D^{\frac{1}{2}}\right) = H_0^1(\Omega). \quad (4.10)$$

Além disso, dessa caracterização e do teorema de Green resulta que para todo $z, \xi \in D\left(A_D^{\frac{1}{2}}\right)$,

$$\langle A_D z, \xi \rangle_{\left[D\left(A_D^{\frac{1}{2}}\right)\right]' \times D\left(A_D^{\frac{1}{2}}\right)} = \left(A_D^{\frac{1}{2}} z, A_D^{\frac{1}{2}} \xi\right)_{L^2(\Omega)} = (\nabla z, \nabla \xi)_{[L^2(\Omega)]^2} \quad (4.11)$$

e,

$$\|z\|_{D\left(A_D^{\frac{1}{2}}\right)}^2 = \left\| A_D^{\frac{1}{2}} z \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla z\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2. \quad (4.12)$$

- Para $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ definimos os operadores $P_{\rho_i, \gamma_i} : D(P_{\rho_i, \gamma_i}) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, sendo

$$P_{\rho_1, \gamma_1} \equiv \rho_1 + \gamma_1 A_D \text{ e } P_{\rho_2, \gamma_2} \equiv \rho_2 + \gamma_2 A_D. \quad (4.13)$$

Além disso, definimos o operador $P_{RG} : D(P_{RG}) \subset [L^2(\Omega)]^2 \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ por

$$P_{RG} \equiv R + G A_D = \begin{bmatrix} P_{\rho_1, \gamma_1} & 0 \\ 0 & P_{\rho_2, \gamma_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 + \gamma_1 A_D & 0 \\ 0 & \rho_2 + \gamma_2 A_D \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\text{com } R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Consideramos quatro casos:

- (i) No caso que $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, consideramos o espaço $H_{0, \rho_1, \gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0, \rho_2, \gamma_2}^1(\Omega)$, que em alguns lugares deste capítulo escreveremos apenas $H_{0, \rho_1, \gamma_1}^1 \times H_{0, \rho_2, \gamma_2}^1$, equivalente a $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ com os produtos internos

$$\begin{aligned} (z, \xi)_{H_{0, \rho_1, \gamma_1}^1(\Omega)} &\equiv \rho_1 (z, \xi)_{L^2(\Omega)} + \gamma_1 (\nabla z, \nabla \xi)_{L^2(\Omega)} \\ (z, \xi)_{H_{0, \rho_2, \gamma_2}^1(\Omega)} &\equiv \rho_2 (z, \xi)_{L^2(\Omega)} + \gamma_2 (\nabla z, \nabla \xi)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

e com seu dual denotado por $H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)$. De (4.10) e (4.11) e duas extensões por continuidade, temos

$$P_{\rho_i,\gamma_i} \in \mathcal{L}(H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1(\Omega), H_{0,\rho_i,\gamma_i}^{-1}(\Omega)), \quad i = 1, 2, \quad (4.16)$$

satisfazendo

$$\langle P_{\rho_i,\gamma_i} z, \xi \rangle_{H_{0,\rho_i,\gamma_i}^{-1} \times H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1} = (z, \xi)_{H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1}. \quad (4.17)$$

Além disso, os operadores P_{ρ_i,γ_i} são H_{0,ρ_i,γ_i} -elípticos. Isto é, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\left| \langle P_{\rho_i,\gamma_i} z, \xi \rangle_{H_{0,\rho_i,\gamma_i}^{-1} \times H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1} \right| \leq c_i \|z\|_{H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1} \|\xi\|_{H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1}, \quad (4.18)$$

para todo $z, \xi \in H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1$, $i = 1, 2$, e constantes $k_1, k_2 > 0$ tais que

$$\langle P_{\rho_i,\gamma_i} z, z \rangle_{H_{0,\rho_i,\gamma_i}^{-1} \times H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1} \geq k_i \|z\|_{H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1}^2, \quad \forall z \in H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1, \quad i = 1, 2. \quad (4.19)$$

A verificação de (4.18) e (4.19) é simples. Basta aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwartz no lado direito de (4.17). Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgran, os operadores P_{ρ_i,γ_i} são invertíveis e

$$P_{\rho_i,\gamma_i}^{-1} \in \mathcal{L}(H_{0,\rho_i,\gamma_i}^{-1}(\Omega), H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1(\Omega)), \quad i = 1, 2. \quad (4.20)$$

Também, os operadores $P_{\rho_i,\gamma_i} : D(P_{\rho_i,\gamma_i}) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, são positivos definidos, auto-adjuntos e

$$D\left(P_{\rho_i,\gamma_i}^{\frac{1}{2}}\right) = H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1.$$

De (4.17) segue que

$$\left(P_{\rho_i,\gamma_i}^{\frac{1}{2}} z, P_{\rho_i,\gamma_i}^{\frac{1}{2}} \xi \right)_{L^2(\Omega)} = (z, \xi)_{H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1}, \quad \forall z, \xi \in H_{0,\rho_i,\gamma_i}^1, \quad i = 1, 2. \quad (4.21)$$

Agora, para $V = \begin{bmatrix} v \\ \xi \end{bmatrix}$, $\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \in H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1$, temos

$$\begin{aligned}
& (V, \bar{V})_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \\
&= \left(\begin{bmatrix} v \\ \xi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \right)_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \\
&= (v, \bar{v})_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} + (\xi, \bar{\xi})_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \\
&= (v, \bar{v})_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} + (\xi, \bar{\xi})_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \tag{4.22} \\
&= \rho_1(v, \bar{v})_{L^2(\Omega)} + \gamma_1(\nabla v, \nabla \bar{v})_{L^2(\Omega)} + \rho_2(\xi, \bar{\xi})_{L^2(\Omega)} + \gamma_2(\nabla \xi, \nabla \bar{\xi})_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \xi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla v \\ \nabla \xi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nabla \bar{v} \\ \nabla \bar{\xi} \end{bmatrix} \right) \\
&= (RV, \bar{V})_{[L^2(\Omega)]^2} + (G\nabla V, \nabla \bar{V})_{[L^2(\Omega)]^2}.
\end{aligned}$$

Note que $P_G \in \mathcal{L}(H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1, H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1})$ satisfazendo

$$\langle P_{RG}V, \bar{V} \rangle_{[H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}] \times [H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1]} = (V, \bar{V})_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}. \tag{4.23}$$

De fato, de (4.16), temos

$$\begin{aligned}
& \|P_{RG}V\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}} \\
&= \left\| \begin{bmatrix} P_{\rho_1,\gamma_1} & 0 \\ 0 & P_{\rho_2,\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix} \right\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}} \\
&= \left\| \begin{bmatrix} P_{\rho_1,\gamma_1} z \\ P_{\rho_2,\gamma_2} \xi \end{bmatrix} \right\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}} \\
&= \|P_{\rho_1,\gamma_1} z\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}} + \|P_{\rho_2,\gamma_2} \xi\|_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}} \\
&\leq c_1 \|z\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} + c_2 \|\xi\|_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \\
&\leq c(\|z\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} + \|\xi\|_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}) \\
&= c \left\| \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix} \right\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \\
&= c \|V\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}.
\end{aligned}$$

Note, também, que de (4.18),

$$\begin{aligned}
& \left\| \langle P_{RG} V, \bar{V} \rangle_{[H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}] \times [H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1]} \right\| \\
&= \left\| \left\langle \begin{bmatrix} P_{\rho_1,\gamma_1} & 0 \\ 0 & P_{\rho_2,\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \right\rangle_{[H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}] \times [H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1]} \right\| \\
&= \langle P_{\rho_1,\gamma_1} z, \bar{z} \rangle_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} + \langle P_{\rho_2,\gamma_2} \xi, \bar{\xi} \rangle_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \\
&\leq c(\|z\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} \|\bar{z}\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} + \|\xi\|_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \|\bar{\xi}\|_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}) \\
&\leq c(\|z\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} + \|\xi\|_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1})(\|\bar{z}\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} + \|\bar{\xi}\|_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}) \\
&= c\|V\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \|\bar{V}\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}.
\end{aligned}$$

E, de (4.19),

$$\begin{aligned}
& \langle P_{RG} V, V \rangle_{[H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}] \times [H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1]} \\
&= \langle P_{\rho_1,\gamma_1} z, z \rangle_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1} + \langle P_{\rho_2,\gamma_2} \xi, \xi \rangle_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1} \\
&\geq k(\|z\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1}^2 + \|\xi\|_{H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}^2) \\
&= k\|V\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}^2.
\end{aligned}$$

Logo, o operador P_{RG} é $[H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1]$ -elíptico. Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgran, o operador P_{RG} é invertível e

$$P_{RG}^{-1} \in \mathcal{L}(H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}, H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1). \quad (4.24)$$

Sendo os operadores $P_{\rho_i,\gamma_i} : D(P_{\rho_i,\gamma_i}) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, positivos definidos e auto-adjuntos, temos

$$P_{RG} : D(P_{RG}) \subset [L^2(\Omega)]^2 \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$$

positivo definido, auto-adjunto e

$$D(P_{RG}^{\frac{1}{2}}) = H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1. \quad (4.25)$$

De (4.22) e (4.23) segue que

$$(P_{RG}^{\frac{1}{2}} V, P_{RG}^{\frac{1}{2}} \bar{V})_{[L^2(\Omega)]^2} = (V, \bar{V})_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}, \quad \forall V, \bar{V} \in H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1, \quad (4.26)$$

e,

$$\|P_{RG}^{\frac{1}{2}} V\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 = \|R^{\frac{1}{2}} V\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|G^{\frac{1}{2}} \nabla V\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 = \|V\|_{H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1 \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1}^2. \quad (4.27)$$

(ii) Para $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 = 0$, temos $P_{\rho_1, \gamma_1} \equiv \rho_1 + \gamma_1 A_D$, $P_{\rho_2, \gamma_2} \equiv \rho_2$ e $P_{RG} \equiv \begin{bmatrix} P_{\rho_1, \gamma_1} & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}$.

Neste caso, consideramos

$$H_{0, \rho_1, \gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0, \rho_2, 0}^1(\Omega) = H_{0, \rho_1, \gamma_1}^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

equivalente a $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com o produto interno

$$(V, \bar{V})_{H_{0, \rho_1, \gamma_1}^1 \times H_{0, \rho_2, 0}^1} = (RV, \bar{V})_{[L^2(\Omega)]^2} + (G\nabla V, \nabla \bar{V})_{[L^2(\Omega)]^2},$$

$$\text{onde } V = \begin{bmatrix} v \\ \xi \end{bmatrix}, \bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \in H_{0, \rho_1, \gamma_1}^1 \times H_{0, \rho_2, 0}^1, R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denotamos o dual do espaço $H_{0, \rho_1, \gamma_1}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ por $H_{0, \rho_1, \gamma_1}^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

As propriedades (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) e (4.27) continuam válidas.

(iii) No caso que $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 > 0$, temos $P_{\rho_1, \gamma_1} \equiv \rho_1$, $P_{\rho_2, \gamma_2} \equiv \rho_2 + \gamma_2 A_D$ e $P_{RG} \equiv \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & P_{\rho_2, \gamma_2} \end{bmatrix}$. Consideramos

$$H_{0, \rho_1, 0}^1(\Omega) \times H_{0, \rho_2, \gamma_2}^1(\Omega) = L^2(\Omega) \times H_{0, \rho_2, \gamma_2}^1(\Omega),$$

equivalente a $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ com o produto interno

$$(V, \bar{V})_{H_{0, \rho_1, 0}^1 \times H_{0, \rho_2, \gamma_2}^1} = (RV, \bar{V})_{[L^2(\Omega)]^2} + (G\nabla V, \nabla \bar{V})_{[L^2(\Omega)]^2},$$

$$\text{onde } V = \begin{bmatrix} v \\ \xi \end{bmatrix}, \bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \in H_{0, \rho_1, 0}^1 \times H_{0, \rho_2, \gamma_2}^1, R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Denotamos o dual do espaço $L^2(\Omega) \times H_{0, \rho_2, \gamma_2}^1(\Omega)$ por $L^2(\Omega) \times H_{0, \rho_2, \gamma_2}^{-1}(\Omega)$.

As propriedades (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) e (4.27) também continuam válidas neste caso.

(iv) Para $\gamma_1, \gamma_2 = 0$, $P_{\rho_i, \gamma_i} \equiv \rho_i$, $i = 1, 2$, e $P_{RG} \equiv \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}$. Neste caso, consideramos

$$H_{0, \rho_1, 0}^1 \times H_{0, \rho_2, 0}^1 = H_{0, \rho_1, 0}^{-1} \times H_{0, \rho_2, 0}^{-1} = [L^2(\Omega)]^2.$$

com o produto interno

$$(V, \bar{V})_{H_{0, \rho_1, 0}^1 \times H_{0, \rho_2, 0}^1} = (RV, \bar{V})_{[L^2(\Omega)]^2},$$

$$\text{onde } V = \begin{bmatrix} v \\ \xi \end{bmatrix}, \bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \in H_{0, \rho_1, 0}^1 \times H_{0, \rho_2, 0}^1, R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}.$$

As propriedades (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) e (4.27) também continuam válidas neste caso.

Na sequência, construiremos um espaço de Hilbert e um produto interno neste espaço em conformidade com a energia do sistema. Para determinar a energia da equação (4.1) não controlada tomamos o produto em $L^2(\Omega)$, das equações em (4.1) (com $\bar{u} \equiv 0 \equiv \bar{v}$), por z_t , ξ_t , ψ e φ , respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\rho_1 z_{tt} z_t - \gamma_1 \Delta z_{tt} z_t + a_{11} \Delta^2 z z_t + a_{12} \Delta^2 \xi z_t + c_{11} \Delta \psi z_t + c_{12} \Delta \varphi z_t) dx dy = 0, \\ \int_{\Omega} (\rho_2 \xi_{tt} \xi_t - \gamma_2 \Delta \xi_{tt} \xi_t + a_{21} \Delta^2 z \xi_t + a_{22} \Delta^2 \xi \xi_t + c_{21} \Delta \psi \xi_t + c_{22} \Delta \varphi \xi_t) dx dy = 0, \\ \int_{\Omega} (b_{11} \psi_t \psi + b_{12} \varphi_t \psi - c_{11} \Delta \psi \psi - c_{12} \Delta \varphi \psi + a(\psi - \varphi) \psi - c_{11} \Delta z_t \psi - c_{12} \Delta \xi_t \psi) dx dy = 0, \\ \int_{\Omega} (b_{21} \psi_t \varphi + b_{22} \varphi_t \varphi - c_{21} \Delta \psi \varphi - c_{22} \Delta \varphi \varphi - a(\psi - \varphi) \varphi - c_{21} \Delta z_t \varphi - c_{22} \Delta \xi_t \varphi) dx dy = 0. \end{array} \right.$$

Aplicando a fórmula de Green, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\rho_1 z_{tt} z_t + \gamma_1 \nabla z_{tt} \nabla z_t + a_{11} \Delta z \Delta z_t + a_{12} \Delta \xi \Delta z_t - c_{11} \nabla \psi \nabla z_t - c_{12} \nabla \varphi \nabla z_t) dx dy = 0, \\ \int_{\Omega} (\rho_2 \xi_{tt} \xi_t + \gamma_2 \nabla \xi_{tt} \nabla \xi_t + a_{21} \Delta z \Delta \xi_t + a_{22} \Delta \xi \Delta \xi_t - c_{21} \nabla \psi \nabla \xi_t - c_{22} \nabla \varphi \nabla \xi_t) dx dy = 0, \\ \int_{\Omega} (b_{11} \psi_t \psi + b_{12} \varphi_t \psi + c_{11} \nabla \psi \nabla \psi + c_{12} \nabla \varphi \nabla \psi + a(\psi - \varphi) \psi + c_{11} \nabla z_t \nabla \psi \\ + c_{12} \nabla \xi_t \nabla \psi) dx dy = 0, \\ \int_{\Omega} (b_{21} \psi_t \varphi + b_{22} \varphi_t \varphi + c_{21} \nabla \psi \nabla \varphi + c_{22} \nabla \varphi \nabla \varphi - a(\psi - \varphi) \varphi + c_{21} \nabla z_t \nabla \varphi \\ + c_{22} \nabla \xi_t \nabla \varphi) dx dy = 0. \end{array} \right.$$

Ou ainda,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho_1 |z_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + \gamma_1 |\nabla z_t|_{\mathbb{R}^4}^2 + a_{11} |\Delta z|_{\mathbb{R}^2}^2) dx + \int_{\Omega} (a_{12} \Delta \xi \Delta z_t - c_{11} \nabla \psi \nabla z_t \\ - c_{12} \nabla \varphi \nabla z_t) dx dy = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho_2 |\xi_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + \gamma_2 |\nabla \xi_t|_{\mathbb{R}^4}^2 + a_{22} |\Delta \xi|_{\mathbb{R}^2}^2) dx + \int_{\Omega} (a_{21} \Delta z \Delta \xi_t - c_{21} \nabla \psi \nabla \xi_t \\ - c_{22} \nabla \varphi \nabla \xi_t) dx dy = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} b_{11} |\psi|_{\mathbb{R}^2}^2 dx + \int_{\Omega} (b_{12} \varphi_t \psi + c_{11} |\nabla \psi|_{\mathbb{R}^4}^2 + c_{12} \nabla \varphi \nabla \psi + a |\psi|_{\mathbb{R}^2}^2 - a \varphi \psi + c_{11} \nabla z_t \nabla \psi \\ + c_{12} \nabla \xi_t \nabla \psi) dx dy = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} b_{22} |\varphi|_{\mathbb{R}^2}^2 dx + \int_{\Omega} (b_{21} \psi_t \varphi + c_{21} \nabla \psi \nabla \varphi + c_{22} |\nabla \varphi|_{\mathbb{R}^4}^2 - a \psi \varphi + a |\varphi|_{\mathbb{R}^2}^2 + c_{21} \nabla z_t \nabla \varphi \\ + c_{22} \nabla \xi_t \nabla \varphi) dx dy = 0. \end{array} \right.$$

Somando as quatro últimas equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho_1 |z_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + \rho_2 |\xi_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + \gamma_1 |\nabla z_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + \gamma_2 |\nabla \xi_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + a_{11} |\Delta z|_{\mathbb{R}^2}^2 + 2a_{12} \Delta z \Delta \xi + a_{22} |\Delta \xi|_{\mathbb{R}^2}^2 \\ & + b_{11} |\psi|_{\mathbb{R}^2}^2 + 2b_{12} \psi \varphi + b_{22} |\varphi|_{\mathbb{R}^2}^2) dx dy + \int_{\Omega} (c_{11} |\nabla \psi|_{\mathbb{R}^2}^2 + 2c_{12} \nabla \psi \nabla \varphi + c_{22} |\nabla \varphi|_{\mathbb{R}^2}^2 \\ & + a |\psi - \varphi|^2) dx dy = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a energia associada ao problema (4.1) – (4.3) é

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_1 |z_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + \rho_2 |\xi_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + \gamma_1 |\nabla z_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + \gamma_2 |\nabla \xi_t|_{\mathbb{R}^2}^2 + a_{11} |\Delta z|_{\mathbb{R}^2}^2 + 2a_{12} \Delta z \Delta \xi + a_{22} |\Delta \xi|_{\mathbb{R}^2}^2 \\ & + b_{11} |\psi|_{\mathbb{R}^2}^2 + 2b_{12} \psi \varphi + b_{22} |\varphi|_{\mathbb{R}^2}^2) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Consideramos, então, o seguinte produto interno em $\mathcal{H} = [H_0^2(\Omega)]^2 \times H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$:

$$\begin{aligned} ((z, \xi, z_t, \xi_t, \psi, \varphi), (\bar{z}, \bar{\xi}, \bar{z}_t, \bar{\xi}_t, \bar{\psi}, \bar{\varphi}))_{\mathcal{H}} = & \rho_1 (z_t, \bar{z}_t)_{L^2(\Omega)} + \rho_2 (\xi_t, \bar{\xi}_t)_{L^2(\Omega)} + \gamma_1 (\nabla z_t, \nabla \bar{z}_t)_{L^2(\Omega)} \\ & + \gamma_2 (\nabla \xi_t, \nabla \bar{\xi}_t)_{L^2(\Omega)} + a_{11} (\Delta z, \Delta \bar{z})_{L^2(\Omega)} \\ & + 2a_{12} (\Delta z, \Delta \bar{\xi})_{L^2(\Omega)} + a_{22} (\Delta \xi, \Delta \bar{\xi})_{L^2(\Omega)} \\ & + b_{11} (\psi, \bar{\psi})_{L^2(\Omega)} + 2b_{12} (\psi, \bar{\varphi})_{L^2(\Omega)} + b_{22} (\varphi, \bar{\varphi})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Conforme veremos adiante, o problema (4.1) – (4.3) está bem colocado no espaço $\mathcal{H}$.

Considerando $V = \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}$, $\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix}$, $\Psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}$, $\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix}$, e os operadores $\mathring{A}$ e P_{RG} , podemos escrever (4.29), matricialmente, da seguinte maneira:

$$\left(\begin{bmatrix} V \\ V_t \\ \Psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{V}_t \\ \bar{\Psi} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}V, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}\bar{V} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(P_{RG}^{\frac{1}{2}}V_t, P_{RG}^{\frac{1}{2}}\bar{V}_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + (B\Psi, \bar{\Psi})_{[L^2(\Omega)]^2}. \quad (4.30)$$

Esse produto interno induz a seguinte norma no espaço $\mathcal{H}$:

$$\|[V, V_t, \Psi]\|_{\mathcal{H}} = \left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}V, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}\bar{V} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left\| P_{RG}^{\frac{1}{2}}V_t \right\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + (B\Psi, \Psi)_{[L^2(\Omega)]^2}. \quad (4.31)$$

Observação 4.1 *Note que a norma definida em (4.31) é equivalente a norma usual de $\mathcal{H}$, que é dada por*

$$\|[V, V_t, \Psi]\|_{\mathcal{H}} = \|\Delta V\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\nabla V_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\Psi\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2. \quad (4.32)$$

Com efeito,

(I) $\left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}V, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}\bar{V} \right)_{[L^2(\Omega)]^2}$ é equivalente a $\|\Delta V\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2$. De fato,

$$\begin{aligned} \left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}V, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}\bar{V} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} &= a_{11}\|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2a_{12}(\Delta z, \Delta \xi)_{L^2(\Omega)} + a_{22}\|\Delta \xi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c(\|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta \xi\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &= c\|\Delta V\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando uma desigualdade do tipo $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$ temos

$$\begin{aligned} &\left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}V, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}\bar{V} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &= a_{11}\|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2a_{12}(\Delta z, \Delta \xi)_{L^2(\Omega)} + a_{22}\|\Delta \xi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq a_{11}\|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2|a_{12}| |(\Delta z, \Delta \xi)_{L^2(\Omega)}| + a_{22}\|\Delta \xi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq a_{11}\|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2|a_{12}| \left(\frac{\epsilon}{2}\|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|\Delta \xi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + a_{22}\|\Delta \xi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= (a_{11} - |a_{12}|\epsilon)\|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(a_{22} - \frac{|a_{12}|}{\epsilon} \right) \|\Delta \xi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon > 0$ de forma que $a_{11} - |a_{12}|\epsilon > 0$ e $a_{22} - \frac{|a_{12}|}{\epsilon} > 0$ (basta tomar $\epsilon = \frac{\frac{|a_{12}|}{a_{22}} + \frac{a_{11}}{|a_{12}|}}{2}$),

e $c = \min\{a_{11} - |a_{12}|\epsilon, a_{22} - \frac{|a_{12}|}{\epsilon}\}$, obtemos

$$\left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}V, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}\overline{V} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \geq c \|\Delta V\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2.$$

(II) $\left\| P_{RG}^{\frac{1}{2}} V_t \right\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2$ é equivalente a $\|\nabla V_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2$. De fato,

$$\begin{aligned} \left\| P_{RG}^{\frac{1}{2}} V_t \right\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &= \left\| R^{\frac{1}{2}} V_t \right\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \left\| G^{\frac{1}{2}} \nabla V_t \right\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\ &= \rho_1 \|z_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_1 \|\nabla z_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \rho_2 \|\xi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_2 \|\nabla \xi_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\ &\leq c \|\nabla V_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\nabla V_t\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 &= \|\nabla z_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\nabla \xi_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\ &\leq c \left(\|z_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\xi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \xi_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \right) \\ &\leq c \left(\rho_1 \|z_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_1 \|\nabla z_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \rho_2 \|\xi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_2 \|\nabla \xi_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \right) \\ &= c \left\| P_{RG}^{\frac{1}{2}} V_t \right\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2. \end{aligned}$$

(III) Usando a mesma idéia da equivalência em (I) pode-se mostrar que $(B\Psi, \Psi)_{[L^2(\Omega)]^2}$ é equivalente a $\|\Psi\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2$.

De (I), (II) e (III) temos a equivalência das normas (4.31) e (4.32).

Por fim, o problema (4.4) pode ser escrito na forma abstrata

$$\begin{cases} V_t = \mathcal{A}V + \mathcal{B}\overline{U}, \\ V(0) = V_0, \end{cases} \quad (4.33)$$

onde

$$V = \begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}\overline{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{div } \overline{U} \end{bmatrix}, \quad V_0 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \Psi_0 \end{bmatrix}$$

e,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -P_{RG}^{-1}A\mathring{A} & 0 & P_{RG}^{-1}CA_D \\ 0 & -B^{-1}CA_D & -B^{-1}CA_D - aB^{-1}N \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$; $D(\mathcal{A}) = \{[Z_0, Z_1, \Psi_0] \in [D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}})]^2 \times [D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}})]^2 \times [D(A_D)]^2; \mathring{A}Z_0 \in H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}\}$ e $\mathcal{B} \in \mathcal{L}\left([L^2(0,T;L^2(\Omega))]^4, [D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}})]^2 \times [L^2(\Omega)]^2 \times \{[D(A_D^{\frac{1}{2}})]^2\}'\right)$.

4.2 Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Nesta seção mostramos a existência e unicidade de solução para o problema (4.33), ou equivalentemente, para o problema (4.4). Também, mostramos a existência e unicidade de solução para o problema adjunto com respeito ao problema (4.4) e, obtemos a regularidade destas soluções.

Proposição 4.2 *$\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações no espaço de energia $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Vamos mostrar, primeiramente, que o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dissipativo. Para $V \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}V, V)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -P_{RG}^{-1}A\mathring{A} & 0 & P_{RG}^{-1}CA_D \\ 0 & -B^{-1}CA_D & -B^{-1}CA_D - aB^{-1}N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} Z_t \\ -P_{RG}^{-1}A\mathring{A}Z + P_{RG}^{-1}CA_D\Psi \\ -B^{-1}CA_DZ_t - B^{-1}CA_D\Psi - aB^{-1}N\Psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
 &= \left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z_t, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(-P_{RG}^{\frac{1}{2}}P_{RG}^{-1}A\mathring{A}Z, P_{RG}^{\frac{1}{2}}Z_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
 &\quad + \left(P_{RG}^{\frac{1}{2}}P_{RG}^{-1}CA_D\Psi, P_{RG}^{\frac{1}{2}}Z_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(-BB^{-1}CA_DZ_t, \Psi \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
 &\quad + \left(-BB^{-1}CA_D\Psi, \Psi \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(-aBB^{-1}N\Psi, \Psi \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
 &= \left(\mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z_t, A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z \right)_{[L^2(\Omega)]^2} - \left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + (\Psi, CA_DZ_t)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
 &\quad - (CA_DZ_t, \Psi)_{[L^2(\Omega)]^2} - (CA_D\Psi, \Psi)_{[L^2(\Omega)]^2} - (aN\Psi, \Psi)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
 &= - \left[\left(CA_D^{\frac{1}{2}}\Psi, A_D^{\frac{1}{2}}\Psi \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + (aN\Psi, \Psi)_{[L^2(\Omega)]^2} \right].
 \end{aligned}$$

Note que os dois últimos termos acima são não negativos. De fato,

$$(aN\Psi, \Psi)_{[L^2(\Omega)]^2} = a\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2a(\psi, \varphi)_{L^2(\Omega)} + a\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = a\|\psi - \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0.$$

Também,

$$\begin{aligned}
& (CA_D^{\frac{1}{2}}\Psi, A_D^{\frac{1}{2}}\Psi)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla\psi \\ \nabla\varphi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nabla\psi \\ \nabla\varphi \end{bmatrix} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= c_{11}(\nabla\psi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} + c_{12}(\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} + c_{21}(\nabla\psi, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} + c_{22}(\nabla\varphi, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} \\
&= c_{11} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 \right] + 2c_{12} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + c_{22} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \\
&= \nabla\Psi^T C \nabla\Psi.
\end{aligned}$$

Sendo C uma matriz positiva definida,

$$\nabla\Psi^T B \nabla\Psi > 0.$$

Logo,

$$- \left[\left(CA_D^{\frac{1}{2}}\Psi, A_D^{\frac{1}{2}}\Psi \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + (aN\Psi, \Psi)_{[L^2(\Omega)]^2} \right] < 0.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Agora, note que, dado $[F_1, F_2, F_3] \in \mathcal{H}$ existe um único $[Z, Y, \Psi] \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$-\mathcal{A}[Z, Y, \Psi] = [F_1, F_2, F_3],$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ P_{RG}^{-1}A\mathring{A} & 0 & -P_{RG}^{-1}CA_D \\ 0 & B^{-1}CA_D & B^{-1}CA_D + aB^{-1}N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ Y \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

De fato, de (4.34) temos

$$\begin{cases} -Y = F_1, \\ P_{RG}^{-1}A\mathring{A}Z - P_{RG}^{-1}CA_D\Psi = F_2, \\ B^{-1}CA_DY + B^{-1}CA_D\Psi + aB^{-1}N\Psi = F_3. \end{cases} \quad (4.35)$$

De (4.35)₁, $Y = -F_1$ ($\in [H_0^2(\Omega)]^2$). Substituindo em (4.35)₃ obtemos

$$\begin{cases} B^{-1}CA_D\Psi + aB^{-1}N\Psi = F_3 + B^{-1}CA_DF_1, \\ \Psi = 0 \text{ em } \Gamma. \end{cases}$$

Por Lax-Milgran e regularidade elíptica, existe uma única $\Psi \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2$ solução do problema acima. Em virtude da classe de Ψ , substituindo em (4.35)₂, obtemos

$$\begin{cases} A\mathring{A}Z = P_{RG}F_2 + CA_D\Psi, \\ Z = 0 = \frac{\partial Z}{\partial \nu} \text{ em } \Gamma. \end{cases}$$

Por Lax-Milgran, existe um único $Z \in [H_0^2(\Omega)]^2$ solução do problema acima. De fato, considere a aplicação

$$\begin{aligned} a : [H_0^2(\Omega)]^2 \times [H_0^2(\Omega)]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (Z, \tilde{Z}) &\longmapsto \int_{\Omega} A \mathring{A}^{\frac{1}{2}} Z \mathring{A}^{\frac{1}{2}} \tilde{Z} \, dx. \end{aligned}$$

Temos que a é bilinear, contínua e coerciva. Pelo Teorema de Lax-Milgran, existe uma única $Z \in [H_0^2(\Omega)]^2$ tal que $a(Z, \tilde{Z}) = \langle F, \tilde{Z} \rangle$, para todo $\tilde{Z} \in [H_0^2(\Omega)]^2$, com $F = P_{RG}F_2 + CA_D\Psi$, ou seja,

$$\int_{\Omega} A \mathring{A}^{\frac{1}{2}} Z \mathring{A}^{\frac{1}{2}} \tilde{Z} \, dx = \int_{\Omega} F \tilde{Z} \, dx.$$

Logo, existe uma única $Z \in [H_0^2(\Omega)]^2$ tal que $A \mathring{A} Z = F$ (podemos escrever isto, pois por regularidade elíptica, $Z \in [H^4(\Omega)]^2$). Como $F \in H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)$ temos que $\mathring{A}Z \in H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)$. Mostramos, então, que $\mathcal{A}$ é dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Portanto, pelo Teorema 2.52, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. $\square$

Com a proposição acima temos a boa colocação do problema (4.33) no espaço $\mathcal{H}$. Podemos, agora, escrever a solução V de (4.33), explicitamente, como:

$$V(t) = e^{At}V_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{B} \overline{U}(s) ds.$$

Veremos (na Observação 4.7) que $\mathcal{B} \in \mathcal{L}([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, [D(\mathcal{A}^*)]')$, logo, temos que a solução V do problema (4.33) é tal que

$$V \in C([0, T]; [D(\mathcal{A}^*)]').$$

Na sequência vamos calcular o operador adjunto do operador $\mathcal{A}$, denotado por $\mathcal{A}^*$.

Proposição 4.3 *O adjunto $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$ é dado por*

$$\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ P_{RG}^{-1} A \mathring{A}^{\frac{1}{2}} & 0 & -P_{RG}^{-1} C A_D \\ 0 & B^{-1} C A_D & -B^{-1} C A_D - a B^{-1} N \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

com $D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A})$.

Demonstração: Definimos o operador $\tau : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ por

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ P_{RG}^{-1} A \mathring{A}^{\frac{1}{2}} & 0 & -P_{RG}^{-1} C A_D \\ 0 & B^{-1} C A_D & -B^{-1} C A_D - a B^{-1} N \end{bmatrix},$$

com $D(\tau) = D(\mathcal{A})$.

Então, para $[Z, Z_t, \Psi], [\tilde{Z}, \tilde{Z}_t, \tilde{\Psi}] \in D(\mathcal{A})$ temos

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{A} \begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{Z} \\ \tilde{Z}_t \\ \tilde{\Psi} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -P_{RG}^{-1}A\mathring{A} & 0 & P_{RG}^{-1}CA_D \\ 0 & B^{-1}CA_D & -B^{-1}CA_D - aB^{-1}N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{Z} \\ \tilde{Z}_t \\ \tilde{\Psi} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\begin{bmatrix} Z_t \\ -P_{RG}^{-1}A\mathring{A}Z + P_{RG}^{-1}CA_D\Psi \\ -B^{-1}CA_DZ_t - B^{-1}CA_D\Psi - aB^{-1}N\Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{Z} \\ \tilde{Z}_t \\ \tilde{\Psi} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z_t, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}\tilde{Z} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(-P_{RG}^{\frac{1}{2}}P_{RG}^{-1}A\mathring{A}Z, P_{RG}^{\frac{1}{2}}\tilde{Z}_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&+ \left(P_{RG}^{\frac{1}{2}}P_{RG}^{-1}CA_D\Psi, P_{RG}^{\frac{1}{2}}\tilde{Z}_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(-BB^{-1}CA_DZ_t, \tilde{\Psi} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&+ \left(-BB^{-1}CA_D\Psi, \tilde{\Psi} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(-aBB^{-1}N\Psi, \tilde{\Psi} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \left(\mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z_t, A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}\tilde{Z} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(\mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z, -A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}\tilde{Z}_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(\Psi, CA_D\tilde{Z}_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&- \left(Z_t, CA_D\tilde{\Psi} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} - \left(\Psi, CA_D\tilde{\Psi} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(\Psi, -aN\tilde{\Psi} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \left(A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}Z, -\mathring{A}^{\frac{1}{2}}\tilde{Z}_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(P_{RG}^{\frac{1}{2}}Z_t, P_{RG}^{\frac{1}{2}}P_{RG}^{-1}A\mathring{A}\tilde{Z} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&- \left(P_{RG}^{\frac{1}{2}}Z_t, P_{RG}^{\frac{1}{2}}P_{RG}^{-1}CA_D\tilde{Z} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(B\Psi, B^{-1}CA_D\tilde{Z}_t \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&- \left(B\Psi, B^{-1}CA_D\tilde{\Psi} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} + \left(B\Psi, -B^{-1}aN\tilde{\Psi} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \left(\begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ P_{RG}^{-1}A\mathring{A} & 0 & -P_{RG}^{-1}CA_D \\ 0 & B^{-1}CA_D & -B^{-1}CA_D - aB^{-1}N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Z} \\ \tilde{Z}_t \\ \tilde{\Psi} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix}, \tau \begin{bmatrix} \tilde{Z} \\ \tilde{Z}_t \\ \tilde{\Psi} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $D(\tau) \subset D(\mathcal{A}^*)$ e $\mathcal{A}^*|_{D(\tau)} = \tau$.

Agora, vamos calcular a inversa $\mathcal{A}^{-1}$ de $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, D(\mathcal{A}))$ e seu adjunto $(\mathcal{A}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, D(\mathcal{A}^*))$.

Consideraremos os operadores

$$\begin{aligned}
\Xi &= (P_{RG}^{-1}A\mathring{A})^{-1}P_{RG}^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}B^{-1}CA_D, \\
\Upsilon &= -(P_{RG}^{-1}A\mathring{A})^{-1}P_{RG}^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \Xi & -(P_{RG}^{-1}A\mathring{A})^{-1} & \Upsilon \\ I & 0 & 0 \\ -(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}B^{-1}CA_D & 0 & (-B^{-1}CA_D - aB^{-1}N)^{-1} \end{bmatrix}.$$

E,

$$(\mathcal{A}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \Xi & (P_{RG}^{-1}A\mathring{A})^{-1} & \Upsilon \\ -I & 0 & 0 \\ -(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}B^{-1}CA_D & 0 & (-B^{-1}CA_D - aB^{-1}N)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Logo, para $[Z_0, Z_1, \Psi_0] \in \mathcal{H}$, temos

$$(\mathcal{A}^*)^{-1} \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \Psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Xi Z_0 + (P_{RG}^{-1}A\mathring{A})^{-1}Z_1 + \Upsilon\Psi_0 \\ -Z_0 \\ -(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}B^{-1}CA_D Z_0 + (-B^{-1}CA_D - aB^{-1}N)^{-1}\Psi_0 \end{bmatrix},$$

Portanto,

$$D(\mathcal{A}^*) \subset [H_0^2(\Omega)]^2 \times [H_0^2(\Omega)]^2 \times [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2. \quad (4.37)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \mathring{A}[(P_{RG}^{-1}A\mathring{A})^{-1}P_{RG}^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}B^{-1}CA_D Z_0 + (P_{RG}^{-1}A\mathring{A})^{-1}Z_1 \\ & - (P_{RG}^{-1}A\mathring{A})^{-1}P_{RG}^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}\Psi_0] \\ & = \mathring{A}(A\mathring{A})^{-1}P_{RG}P_{RG}^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}B^{-1}CA_D Z_0 + \mathring{A}(A\mathring{A})^{-1}P_{RG}Z_1 \\ & - \mathring{A}(A\mathring{A})^{-1}P_{RG}P_{RG}^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}\Psi_0 \\ & = A^{-1}\mathring{A}(\mathring{A})^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}B^{-1}CA_D Z_0 + A^{-1}\mathring{A}(\mathring{A})^{-1}P_{RG}Z_1 \\ & - A^{-1}\mathring{A}(\mathring{A})^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}\Psi_0 \\ & = A^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}B^{-1}CA_D Z_0 + A^{-1}P_{RG}Z_1 \\ & - A^{-1}CA_D(B^{-1}CA_D + aB^{-1}N)^{-1}\Psi_0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

De (4.37) e (4.38) segue que

$$D(\mathcal{A}^*) \subset D(\mathcal{A}).$$

Concluimos, então, que $D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A})$. Portanto, o adjunto $\mathcal{A}^*$ é como dado em (4.36). $\square$

De acordo com o Corolário 2.54 podemos considerar $\mathcal{A}^*$ (dado na Proposição 4.3) e seu semigrupo associado $\{e^{\mathcal{A}^*t}\}_{t \geq 0}$. Temos o seguinte resultado:

Corolário 4.4 Para dados finais $[W_0, W_1, \Theta_0] \in \mathcal{H}$, a função $[W, W_t, \Theta] \in C([0, T], \mathcal{H})$ definida por

$$\begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \equiv e^{A^*(T-t)} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

é solução fraca do seguinte sistema retrógado (adjunto com respeito à (4.4))

$$\begin{cases} RW_{tt} - G\Delta W_{tt} + A\Delta^2 W + C\Delta\Theta = 0 & \text{em } Q, \\ B\Theta_t + C\Delta\Theta - aN\Theta - C\Delta W_t = 0 & \text{em } Q, \\ W \equiv 0 \equiv \frac{\partial W}{\partial \nu} & \text{em } \Sigma, \\ \Theta \equiv 0 & \text{em } \Sigma, \\ W(T) = W_0, W_t(T) = W_1, \Theta(T) = \Theta_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.40)$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} w \\ \chi \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \\ A = [a_{ij}]_{2 \times 2}, \quad B = [b_{ij}]_{2 \times 2}, \quad C = [c_{ij}]_{2 \times 2}, \quad N = [(-1)^{i+j}]_{2 \times 2}.$$

Observação 4.5 Note que para dados $[W_0, W_1, \Theta_0] \in D(\mathcal{A})$, o sistema (4.40) pode ser escrito abstratamente como

$$\begin{cases} P_{RG}W_{tt} = -A\Delta^2 W - C\Delta\Theta & \text{em } H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1} \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}, \\ \Theta_t = B^{-1}C\Delta W_t - (B^{-1}C\Delta - aB^{-1}N)\Theta & \text{em } [L^2(\Omega)]^2, \\ W(T) = W_0, W_t(T) = W_1, \Theta(T) = \Theta_0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Relativo ao problema adjunto, temos a seguinte regularidade adicional:

Proposição 4.6 A componente Θ da solução $[W, W_t, \Theta]$ do sistema retrógado (4.40) satisfaz $\Theta \in \left[L^2 \left(0, T; D \left(A_D^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right]^2$. De fato, temos a seguinte relação válida para todo $[W_0, W_1, \Theta_0] \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\| [W(0), W_t(0), \Theta(0)]_{\mathcal{H}}^2 - \| [W_0, W_1, \Theta_0]_{\mathcal{H}}^2 \right] \\ &= - \int_0^T (aN\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt - \int_0^T (BA_D^{\frac{1}{2}}\Theta, A_D^{\frac{1}{2}}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Demonstração: Para $[W_0, W_1, \Theta_0] \in D(\mathcal{A}^*)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\| \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} + \left(\begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix}, \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\ &= 2 \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \left(-\mathcal{A}^* \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -P_{RG}^{-1}A\mathring{A} & 0 & P_{RG}^{-1}CA_D \\ 0 & -B^{-1}CA_D & B^{-1}CA_D + aB^{-1}N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \left(\begin{bmatrix} W_t(t) \\ -P_{RG}^{-1}A\mathring{A}W(t) + P_{RG}^{-1}CA_D\Theta(t) \\ -B^{-1}CA_DW_t(t) + B^{-1}AA_D\Theta(t) + aB^{-1}N\Theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\ &= (A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}W_t, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}W)_{[L^2(\Omega)]^2} - (P_{RG}^{\frac{1}{2}}P_{RG}^{-1}A\mathring{A}W, P_{RG}^{\frac{1}{2}}W_t)_{[L^2(\Omega)]^2} + (P_{RG}^{\frac{1}{2}}P_{RG}^{-1}CA_D\Theta, P_{RG}^{\frac{1}{2}}W_t)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad - (BB^{-1}CA_DW_t, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} + (BB^{-1}CA_D\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} + (aBB^{-1}N\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &= (A\mathring{A}W, W_t)_{[L^2(\Omega)]^2} - (A\mathring{A}W, W_t)_{[L^2(\Omega)]^2} + (CA_D\Theta, W_t)_{[L^2(\Omega)]^2} - (CA_DW_t, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad + (CA_D\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} + (aN\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &= (aN\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} + (CA_D^{\frac{1}{2}}\Theta, A_D^{\frac{1}{2}}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Conforme a demonstração da Proposição 4.2, os dois últimos termos acima são não negativos.

Integrando (4.43) de 0 a T em ambos os lados e usando os dados finais de (4.40) temos, ao menos para $[W_0, W_1, \Theta_0]$ regular:

$$\frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \Big|_0^T = \int_0^T (aN\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T (CA_D^{\frac{1}{2}}\Theta, A_D^{\frac{1}{2}}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\| [W(0), W_t(0), \Theta(0)] \|_{\mathcal{H}}^2 - \| [W(T), W_t(T), \Theta(T)] \|_{\mathcal{H}}^2] \\ &= - \int_0^T (aN\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt - \int_0^T (CA_D^{\frac{1}{2}}\Theta, A_D^{\frac{1}{2}}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt. \end{aligned}$$

Por um argumento de densidade, temos que o resultado é válido para $[W_0, W_1, \Theta_0] \in \mathcal{H}$. $\square$

4.3 A Aplicação de Controlabilidade $\mathcal{L}_T$ e sua Adjunta $\mathcal{L}_T^*$

Nesta seção estudamos algumas propriedades da aplicação de controlabilidade $\mathcal{L}_T$ e de sua adjunta $\mathcal{L}_T^*$.

Observação 4.7 Da Proposição 4.3, $D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A})$. Sabemos que $[(D(A_D^{\frac{1}{2}}))']^2 \hookrightarrow [(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2]'$ e que $\mathcal{B}$ em (4.33) é tal que $\mathcal{B} \in \mathcal{L}([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, [D(\dot{A}^{\frac{1}{2}})]^2 \times [L^2(\Omega)]^2 \times [(D(A_D^{\frac{1}{2}}))']^2)$ segue, então, que $\mathcal{B} \in \mathcal{L}([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, [D(\mathcal{A}^*)]')$.

Proposição 4.8 O operador $\mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4)$ e, para todo $[W_0, W_1, \Theta_0] \in \mathcal{H}$, temos

$$\mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} = -\nabla \Theta(t), \quad (4.44)$$

onde Θ é a componente térmica da solução $[W, W_t, \Theta]$ do problema adjunto (4.40).

Demonstração: Da Observação 4.7 temos $\mathcal{B} \in \mathcal{L}([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, [D(\mathcal{A}^*)]')$. Vamos calcular seu adjunto $\mathcal{B}^* \in \mathcal{L}(D(\mathcal{A}^*), [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4)$: Para $\bar{U} \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4$ e $[W_0, W_1, \Theta_0] \in D(\mathcal{A}^*)$,

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{B} \bar{U}, \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right\rangle_{[D(\mathcal{A}^*)]' \times D(\mathcal{A})} \\ &= \left(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} \bar{U}, \mathcal{A}^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{bmatrix} -(P_{RG}^{-1} A \mathring{A})^{-1} P_{RG}^{-1} C A_D (B^{-1} C A_D + a B^{-1} N)^{-1} \operatorname{div} \bar{U} \\ 0 \\ (-B^{-1} C A_D - a B^{-1} N)^{-1} \operatorname{div} \bar{U} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \begin{bmatrix} -W_1 \\ P_{RG}^{-1} A \mathring{A} W_0 - P_{RG}^{-1} C A_D \Theta_0 \\ B^{-1} C A_D W_1 - B^{-1} C A_D \Theta_0 - a B^{-1} N \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= -(\mathring{A}^{\frac{1}{2}} (P_{RG}^{-1} A \mathring{A})^{-1} P_{RG}^{-1} C A_D (B^{-1} C A_D + a B^{-1} N)^{-1} \operatorname{div} \bar{U}, \mathring{A}^{\frac{1}{2}} W_1)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&\quad + (B(-B^{-1} C A_D - a B^{-1} N)^{-1} \operatorname{div} \bar{U}, B^{-1} C A_D W_1 - B^{-1} C A_D \Theta_0 - a B^{-1} N \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= -(C A_D (B^{-1} C A_D + a B^{-1} N)^{-1} \operatorname{div} \bar{U}, \Delta W_1)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&\quad + ((-B^{-1} C A_D - a B^{-1} N)^{-1} \operatorname{div} \bar{U}, C A_D W_1 - C A_D \Theta_0 - a N \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= ((-B^{-1} C A_D - a B^{-1} N)^{-1} \operatorname{div} \bar{U} +, (-C A_D - a N) \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= ((-C A_D - a N)^{-1} B \operatorname{div} \bar{U} +, (-C A_D - a N) \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= (B \operatorname{div} \bar{U}, \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= (\bar{U}, -B \nabla \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^4} \\
&= \left(\bar{U}, \mathcal{B}^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Disto e de (4.39) podemos escrever

$$\mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} = \mathcal{B}^* \begin{bmatrix} W(t) \\ W_t(t) \\ \Theta(t) \end{bmatrix} = -\nabla \Theta(t).$$

Tomando a norma em $[L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4$, obtemos

$$\left\| \mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right\|_{[L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4} = \| -\nabla \Theta(t) \|_{[L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4} = \int_0^T \| -\nabla \Theta(t) \|_{[L^2(\Omega)]^4}.$$

Da Proposição 4.6, $\Theta \in \left[L^2 \left(0, T; D \left(A_D^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right]^2$. Logo,

$$\mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-\cdot)} \in \mathcal{L}(D(\mathcal{A}^*), [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4).$$

Por um argumento de densidade,

$$\mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-\cdot)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4).$$

□

Lema 4.9 *O operador $\mathcal{L}_T \equiv \int_0^T e^{\mathcal{A}(T-t)} \mathcal{B} \bar{U}(t) dt$ é tal que $\mathcal{L}_T \in \mathcal{L}([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, \mathcal{H})$. Além disso, $\mathcal{L}_T^*$ tem a forma clássica*

$$\mathcal{L}_T^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} (\cdot) = \mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-\cdot)} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Demonstração: Novamente da Observação 4.7, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, [D(\mathcal{A}^*)]')$. Logo, $\mathcal{L}_T \in ([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, [D(\mathcal{A}^*)]')$. Portanto, $\mathcal{L}_T^* \in (D(\mathcal{A}^*), [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{L}_T \bar{U}, \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right\rangle_{[D(\mathcal{A}^*)]' \times D(\mathcal{A}^*)} &= \left(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{L}_T \bar{U}, \mathcal{A}^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \left(\mathcal{A}^{-1} \int_0^T e^{\mathcal{A}(T-t)} \mathcal{B} \bar{U}(t) dt, \mathcal{A}^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \int_0^T \left(\mathcal{A}^{-1} e^{\mathcal{A}(T-t)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{div} \bar{U} \end{bmatrix}, \mathcal{A}^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} dt \quad (4.46) \\ &= \int_0^T \left(e^{\mathcal{A}(T-t)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{div} \bar{U} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} dt \\ &= \int_0^T (B e^{\mathcal{A}(T-t)} \operatorname{div} \bar{U}, \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ &= \int_0^T (\bar{U}, -B e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \nabla \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^4} dt. \end{aligned}$$

Vimos na demonstração da Proposição 4.8 que $(\bar{U}, -B \nabla \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^4} = \left(\bar{U}, \mathcal{B}^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}}$, assim, de (4.46),

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{L}_T \bar{U}, \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right\rangle_{[D(\mathcal{A}^*)]' \times D(\mathcal{A}^*)} &= \int_0^T (\bar{U}, -B e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \nabla \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^4} dt \\ &= \int_0^T \left(\bar{U}, \mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{[L^2(\Omega)]^4} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\overline{U}, \mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{[L^2(0,T;L^2(\Omega))]^4} \\
&= \left(\overline{U}, \mathcal{L}_T^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right)_{[L^2(0,T;L^2(\Omega))]^4}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_T^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} (\cdot) = \mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-\cdot)} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix}.$$

Da Proposição 4.8, temos, $\mathcal{B}e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4)$. Logo,

$$\mathcal{L}_T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_T \in \mathcal{L}([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, \mathcal{H}).$$

□

4.4 Desigualdade de Observabilidade e Controlabilidade Exata

Para mostrar a controlabilidade exata do problema (4.4) aplicaremos a metodologia que se baseia no argumento clássico de mostrar a sobrejetividade da aplicação de controlabilidade $\mathcal{L}_T \in \mathcal{L}([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, \mathcal{H})$ (veja Teorema 3.5), ou equivalentemente (de acordo com o Teorema 2.32), mostrar a injetividade do operador $\mathcal{L}_T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4)$. Note que, da Proposição 4.8 e do Lema 4.9,

$$\mathcal{L}_T^* \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} (t) = \mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^*(T-t)} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} = -\nabla \Theta(t).$$

Portanto, mostrar a injetividade do operador $\mathcal{L}_T^*$ é equivalente a mostrar a seguinte desigualdade (de observabilidade) para alguma constante $C_T > 0$:

$$\int_0^T \|\nabla \Theta(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt \geq C_T \left\| \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.47)$$

Para mostrar (4.47), recorreremos a uma técnica de multiplicadores, com o multiplicador escolhido sendo $A_D^{-1}\Theta$. Antes, note que

$$D(\mathcal{A}^*) = \{[Z_0, Z_1, \Psi_0] \in [D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}})]^2 \times [D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}})]^2 \times [D(A_D)]^2; \mathring{A}Z_0 \in H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)\}.$$

E,

$$D((\mathcal{A}^*)^2) = \{[Z_0, Z_1, \Psi_0] \in D(\mathcal{A}^*); \mathcal{A}^*[Z_0, Z_1, \Psi_0] \in D(\mathcal{A}^*)\}.$$

Assim, para $[Z_0, Z_1, \Psi_0] \in D((\mathcal{A}^*)^2)$,

$$\mathcal{A}^* \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \Psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_1 \\ P_{RG}^{-1}A\mathring{A}Z_0 - P_{RG}^{-1}CA_D\Psi_0 \\ B^{-1}CA_DZ_1 - B^{-1}CA_D\Psi_0 - aB^{-1}N\Psi_0 \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}^*). \quad (4.48)$$

Logo,

- $\mathring{A}Z_1 = F \in H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)$. Como $\mathring{A}^{-1} : [(D(\mathring{A}^{\frac{1}{4}}))]'^2 \rightarrow [D(\mathring{A}^{\frac{3}{4}})]^2 \subset [H^3(\Omega)]^2$, então $Z_1 = \mathring{A}^{-1}F \in [H^3(\Omega)]^2$.
- $P_{RG}^{-1}A\mathring{A}Z_0 - P_{RG}^{-1}CA_D\Psi_0 = F$ com $F \in [D(\mathring{A}^{\frac{1}{2}})]^2$. Assim, $A\mathring{A}Z_0 = P_{RG}F + CA_D\Psi_0$. Como $P_{RG}F + CA_D\Psi_0 \in L^2(\Omega)$ temos que $Z_0 \in [D(\mathring{A})]^2$.
- $B^{-1}CA_DZ_1 - B^{-1}CA_D\Psi_0 - aB^{-1}N\Psi_0 = F$ com $F \in [D(A_D)]^2$. Logo, $B^{-1}CA_D\Psi_0 = F + aB^{-1}N\Psi_0 + B^{-1}CA_DZ_1$. Como $F + aB^{-1}N\Psi_0 + B^{-1}CA_DZ_1 \in [H_0^1(\Omega)]^2$ temos que $\Psi_0 \in [H^3(\Omega)]^2$.

Portanto,

$$D((\mathcal{A}^*)^2) \subset [D(\mathring{A})]^2 \times [H^3(\Omega)]^2 \times [H^3(\Omega)]^2,$$

com a inclusão sendo contínua. Assim, se $[W_0, W_1, \Theta_0] \in D((\mathcal{A}^*)^2)$ então a solução $[W, W_t, \Theta]$ de (4.40) é um elemento de $C([0, T], [D(\mathring{A})]^2 \times [H^3(\Omega)]^2 \times [H^3(\Omega)]^2)$. Ou seja,

$$W \in C([0, T]; D(\mathring{A})),$$

$$W_t \in C([0, T]; [H^3(\Omega)]^2),$$

$$\Theta \in C([0, T]; [H^3(\Omega)]^2).$$

Portanto, tomamos dados $[W_0, W_1, \Theta_0] \in D((\mathcal{A}^*)^2)$, obtendo a regularidade necessária para justificar as contas que faremos no decorrer deste capítulo.

Também, precisaremos do seguinte Teorema de Green, encontrado em [23], p. 68, válido para funções ω e $\tilde{\omega}$ suficientemente regulares:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta^2 \omega) \tilde{\omega} \, d\Omega = & a(\omega, \tilde{\omega}) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta \omega}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 \omega}{\partial \tau} \right] \tilde{\omega} \, d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} [\Delta \omega + (1 - \mu) B_1 \omega] \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \nu} \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é definida por

$$a(\omega, \tilde{\omega}) \equiv \int_{\Omega} [\omega_{xx} \tilde{\omega}_{xx} + \omega_{yy} \tilde{\omega}_{yy} + \mu(\omega_{xx} \tilde{\omega}_{yy} + \omega_{yy} \tilde{\omega}_{xx}) + 2(1 - \mu) \omega_{xy} \tilde{\omega}_{xy}] \, d\Omega, \quad (4.50)$$

com $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ é uma constante chamada raio de Poisson (conhecida no estudo da placa de Kirchhoff) e os operadores limitados B_i são dados por

$$\begin{aligned} B_1 &\equiv 2\nu_1 \nu_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \\ B_2 &\equiv (\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \nu_1 \nu_2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Passo 1: Primeiramente, obtemos um resultado de regularidade de traço para o sistema adjunto (4.40), que não segue da teoria clássica de traços de Sobolev e que é crítico na obtenção da estimativa (4.47).

Lema 4.10 *A componente W da solução $[W, W_t, \Theta]$ de (4.40) satisfaz $\mathring{A}^{\frac{1}{2}} W|_{\Gamma} \in [L^2(0, T; L^2(\Gamma))]^2$ com a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} & \int_0^T (A \mathring{A}^{\frac{1}{2}} W, \mathring{A}^{\frac{1}{2}} W)_{[L^2(\Gamma)]^2} \, dt \\ & \leq C \left(\int_0^T [(A \mathring{A}^{\frac{1}{2}} W, \mathring{A}^{\frac{1}{2}} W)_{[L^2(\Omega)]^2} + \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|A_D^{\frac{1}{2}} \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2] \, dt + \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Demonstração: Iniciamos multiplicando a primeira equação de (4.40) por

$$\nabla W \cdot h^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x h_1 + w_y h_2 \\ \chi_x h_1 + \chi_y h_2 \end{bmatrix},$$

onde $h(x, y) \equiv [h_1(x, y), h_2(x, y)] \in [C^2(\overline{\Omega})]^2$ é um campo de vetores tal que $h|_{\Gamma} = [\nu_1, \nu_2]$ (vetor normal exterior à Γ) e, posteriormente, integrando de 0 a T , obtemos a seguinte equação

$$\int_0^T (RW_{tt} - G\Delta W_{tt} + A\Delta^2 W + C\Delta\Theta, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt = 0.$$

Podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} & \int_0^T (RW_{tt}, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T (-G\Delta W_{tt}, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ & + \int_0^T (A\Delta^2 W, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T (C\Delta\Theta, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt = 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Vamos estimar cada uma das quatros integrais de (4.53):

(i) Para começar,

$$\begin{aligned} & \int_0^T (RW_{tt}, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ & = (RW_t, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T - \int_0^T (RW_t, \nabla W_t \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ & = (RW_t, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\rho_1 w_t^2 h) + \operatorname{div}(\rho_2 \chi_t^2 h)] dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} [\rho_1 w_t^2 + \operatorname{div}(\rho_2 \chi_t^2)] [h_{1x} + h_{2y}] d\Omega dt. \end{aligned} \quad (4.54)$$

De fato,

$$\begin{aligned} & \int_0^T (RW_t, \nabla W_t \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} (RW_t)^T \nabla W_t \cdot h^T d\Omega dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t \\ \chi_t \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \rho_1 w_t & \rho_2 \chi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x h_1 + w_y h_2 \\ \chi_x h_1 + \chi_y h_2 \end{bmatrix} d\Omega dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \rho_1 w_t (w_x h_1 + w_y h_2) + \rho_2 \chi_t (\chi_x h_1 + \chi_y h_2) d\Omega dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_1 w_t^2 h) + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_2 \chi_t^2 h) - \frac{1}{2} \rho_1 w_t^2 (h_{1x} + h_{2y}) - \frac{1}{2} \rho_2 \chi_t^2 (h_{1x} + h_{2y}) d\Omega dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\operatorname{div}(\rho_1 w_t^2 h) + \operatorname{div}(\rho_2 \chi_t^2 h)] - \frac{1}{2} [\rho_1 w_t^2 + \rho_2 \chi_t^2] [h_{1x} + h_{2y}] d\Omega dt. \end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema da Divergência, temos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_1 w_t^2 h) d\Omega dt = \int_{\Gamma} [(\rho_1 w_t^2 h) \cdot n] d\Gamma = 0,$$

pois $w_t = 0$ em Γ . Analogamente,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_2 \chi_t^2 h) d\Omega = 0.$$

Assim, de (4.54), segue que

$$\begin{aligned} & \int_0^T (RW_{tt}, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ &= (RW_t, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\rho_1 w_t^2 + \operatorname{div} \rho_2 \chi_t^2) (h_{1x} + h_{2y}) d\Omega dt. \end{aligned} \quad (4.55)$$

(ii) Para a segunda integral em (4.53), temos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (-G\Delta W_{tt}, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ &= (-G\Delta W_t, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + \int_0^T (G\Delta W_t, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ &= (G\nabla W_t, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T - \left(\frac{\partial G W_t}{\partial \nu}, \nabla W \cdot h^T \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T \\ &\quad - \int_0^T (G\nabla W_t, \nabla(\nabla W_t \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial G W_t}{\partial \nu}, \nabla W_t \cdot h^T \right)_{[L^2(\Gamma)]^2} \\ &= (G\nabla W_t, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T - \int_0^T (G\nabla W_t, \nabla(\nabla W_t \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} dt, \end{aligned} \quad (4.56)$$

pois

$$\nabla W \cdot h^T = \begin{bmatrix} w_x h_1 + w_y h_2 \\ \chi_x h_1 + \chi_y h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1^2 \frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_2^2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \\ \nu_1^2 \frac{\partial \chi}{\partial \nu} + \nu_2^2 \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \end{bmatrix} = 0 \text{ em } \Gamma$$

e,

$$\nabla W_t \cdot h^T = \begin{bmatrix} w_x h_1 + w_y h_2 \\ \chi_x h_1 + \chi_y h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1^2 \frac{\partial w_t}{\partial \nu} + \nu_2^2 \frac{\partial w_t}{\partial \nu} \\ \nu_1^2 \frac{\partial \chi_t}{\partial \nu} + \nu_2^2 \frac{\partial \chi_t}{\partial \nu} \end{bmatrix} = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
& (G \nabla W_t, \nabla (\nabla W_t \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \gamma_1 \nabla w_t \\ \gamma_2 \nabla \chi_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nabla (h_1 w_{tx} + h_2 w_{ty}) \\ \nabla (h_1 \chi_{tx} + h_2 \chi_{ty}) \end{bmatrix} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \left(\gamma_1 \frac{\partial w_t}{\partial x}, \gamma_1 \frac{\partial w_t}{\partial y} \right) \\ \left(\gamma_2 \frac{\partial \chi_t}{\partial x}, \gamma_2 \frac{\partial \chi_t}{\partial y} \right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h_1 w_{tx} + h_2 w_{ty}), \frac{\partial}{\partial y} (h_1 w_{tx} + h_2 w_{ty}) \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} (h_1 \chi_{tx} + h_2 \chi_{ty}), \frac{\partial}{\partial y} (h_1 \chi_{tx} + h_2 \chi_{ty}) \right) \end{bmatrix} \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&= \int_{\Omega} [\gamma_1 w_{tx} (h_{1x} w_{tx} + h_{1y} w_{txx} + h_{2x} w_{ty} + h_{2y} w_{tyx}) + \gamma_1 w_{ty} (h_{1y} w_{tx} + h_{1x} w_{txy} + h_{2y} w_{ty} \\
&\quad + h_{2x} w_{tyy}) + \gamma_2 \chi_{tx} (h_{1x} \chi_{tx} + h_{1y} \chi_{txx} + h_{2x} \chi_{ty} + h_{2y} \chi_{tyx}) + \gamma_2 \chi_{ty} (h_{1y} \chi_{tx} + h_{1x} \chi_{txy} \\
&\quad + h_{2y} \chi_{ty} + h_{2x} \chi_{tyy})] d\Omega \\
&= \int_{\Omega} [\gamma_1 h_{1x} w_{tx}^2 + \gamma_1 h_{1y} w_{tx} w_{txx} + \gamma_1 h_{2x} w_{tx} w_{ty} + \gamma_1 h_{2y} w_{tx} w_{tyx} + \gamma_1 h_{1y} w_{tx} w_{ty} \\
&\quad + \gamma_1 h_{1x} w_{ty} w_{txy} + \gamma_1 h_{2y} w_{ty}^2 + \gamma_1 h_{2x} w_{ty} w_{tyy} + \gamma_2 h_{1x} \chi_{tx}^2 + \gamma_2 h_{1y} \chi_{tx} \chi_{txx} + \gamma_2 h_{2x} \chi_{tx} \chi_{ty} \\
&\quad + \gamma_2 h_{2y} \chi_{tx} \chi_{tyx} + \gamma_2 h_{1y} \chi_{tx} \chi_{ty} + \gamma_2 h_{1x} \chi_{ty} \chi_{txy} + \gamma_2 h_{2y} \chi_{ty}^2 + \gamma_2 h_{2x} \chi_{ty} \chi_{tyy}] d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\gamma_1 |\nabla w_t|^2 h) &= \gamma_1 \operatorname{div} \left\{ \left[\left(\frac{\partial w_t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_t}{\partial y} \right)^2 \right] h_1, \left[\left(\frac{\partial w_t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_t}{\partial y} \right)^2 \right] h_2 \right\} \\
&= \gamma_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} (w_{tx}^2 + w_{ty}^2) h_1 \right] + \gamma_1 \left[\frac{\partial}{\partial y} (w_{tx}^2 + w_{ty}^2) h_2 \right] \\
&= 2\gamma_1 w_{tx} w_{txx} h_1 + 2\gamma_1 w_{ty} w_{tyx} h_1 + \gamma_1 w_{tx}^2 h_{1x} + \gamma_1 w_{ty}^2 h_{1y} \\
&\quad + 2\gamma_1 w_{tx} w_{txy} h_2 + 2\gamma_1 w_{ty} w_{tyy} h_2 + \gamma_1 w_{tx}^2 h_{2x} + \gamma_1 w_{ty}^2 h_{2y}.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\gamma_2 |\nabla \chi_t|^2 h) &= \gamma_2 \operatorname{div} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \chi_t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_t}{\partial y} \right)^2 \right] h_1, \left[\left(\frac{\partial \chi_t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_t}{\partial y} \right)^2 \right] h_2 \right\} \\
&= \gamma_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (\chi_{tx}^2 + \chi_{ty}^2) h_1 \right] + \gamma_2 \left[\frac{\partial}{\partial y} (\chi_{tx}^2 + \chi_{ty}^2) h_2 \right] \\
&= 2\gamma_2 \chi_{tx} \chi_{txx} h_1 + 2\gamma_2 \chi_{ty} \chi_{tyx} h_1 + \gamma_2 \chi_{tx}^2 h_{1x} + \gamma_2 \chi_{ty}^2 h_{1y} \\
&\quad + 2\gamma_2 \chi_{tx} \chi_{txy} h_2 + 2\gamma_2 \chi_{ty} \chi_{tyy} h_2 + \gamma_2 \chi_{tx}^2 h_{2x} + \gamma_2 \chi_{ty}^2 h_{2y}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Comparando (4.57), (4.58) e (4.59), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (G \nabla W_t, \nabla(\nabla W_t \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\gamma_1 |\nabla w_t|^2 h) + \operatorname{div}(\gamma_2 |\nabla \chi_t|^2 h)] d\Omega dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\gamma_1 w_{ty}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_1 w_{tx}^2 h_{2y}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{ty}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{tx}^2 h_{2y}}{2} \right] d\Omega dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\gamma_1 w_{tx}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_1 w_{ty}^2 h_{2y}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{tx}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{ty}^2 h_{2y}}{2} \right] d\Omega dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} [\gamma_1 w_{tx} w_{ty} h_{2x} + \gamma_1 w_{tx} w_{ty} h_{1y} + \gamma_2 \chi_{tx} \chi_{ty} h_{2x} + \gamma_2 \chi_{tx} \chi_{ty} h_{1y}] d\Omega dt.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Para $w, \chi \in H^4(\Omega)$ com $w = \chi = 0$ em Γ e $\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial \chi}{\partial \nu} = 0$ em Γ , de [24], p. 23, temos

$$\begin{aligned}
w_x &= \nu_1 \frac{\partial w}{\partial \nu}, \quad w_y = \nu_2 \frac{\partial w}{\partial \nu}, \quad w_{xx} = \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2}, \quad w_{xy} = \nu_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2}, \quad w_{yy} = \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2}, \\
\chi_x &= \nu_1 \frac{\partial \chi}{\partial \nu}, \quad \chi_y = \nu_2 \frac{\partial \chi}{\partial \nu}, \quad \chi_{xx} = \nu_1^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \nu^2}, \quad \chi_{xy} = \nu_1 \nu_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \nu^2}, \quad \chi_{yy} = \nu_2^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \nu^2}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Disto e do fato que $w_t \in H_0^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \operatorname{div}(\gamma_1 |\nabla w_t|^2 h) d\Omega &= \int_{\Gamma} (\gamma_1 |\nabla w_t|^2 h) \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Gamma} [\gamma_1 (w_{tx}^2 + w_{ty}^2) (\nu_1, \nu_2)] (\nu_1, \nu_2) \, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} \gamma_1 (w_{tx}^2 + w_{ty}^2) (\nu_1^2 + \nu_2^2) \, d\Gamma \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Da mesma forma,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\gamma_2 |\nabla \chi_t|^2 h) d\Omega = 0. \tag{4.63}$$

De (4.56), (4.60), (4.62) e (4.63), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (-G \Delta W_{tt}, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt = (G \nabla W_t, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\gamma_1 w_{ty}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_1 w_{tx}^2 h_{2y}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{ty}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{tx}^2 h_{2y}}{2} \right] d\Omega dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\gamma_1 w_{tx}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_1 w_{ty}^2 h_{2y}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{tx}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{ty}^2 h_{2y}}{2} \right] d\Omega dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} [\gamma_1 w_{tx} w_{ty} h_{2x} + \gamma_1 w_{tx} w_{ty} h_{1y} + \gamma_2 \chi_{tx} \chi_{ty} h_{2x} + \gamma_2 \chi_{tx} \chi_{ty} h_{1y}] d\Omega dt.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

(iii) Para lidar com o termo de quarta ordem em (4.53) usamos o Teorema de Green (4.49) e o fato que $\nabla W \cdot h^T = 0$ em Γ , obtendo

$$\begin{aligned} & \int_0^T (A\Delta^2 W, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ &= \int_0^T a(AW, \nabla W \cdot h^T) dt - \int_0^T \int_{\Gamma} (A\Delta W + (1-\mu)B_1 AW) \frac{\partial(\nabla W \cdot h^T)}{\partial \tau} d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (4.65)$$

De (4.51) e (4.61)

$$\begin{aligned} B_1(AW) &= 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 AW}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 AW}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 AW}{\partial x^2} \\ &= \begin{bmatrix} 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2(a_{11}w + a_{12}\chi)}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2(a_{11}w + a_{12}\chi)}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2(a_{11}w + a_{12}\chi)}{\partial x^2} \\ 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2(a_{21}w + a_{22}\chi)}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2(a_{21}w + a_{22}\chi)}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2(a_{21}w + a_{22}\chi)}{\partial x^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\nu_1\nu_2 a_{11} w_{xy} + 2\nu_1\nu_2 a_{12} \chi_{xy} - \nu_1^2 a_{11} w_{yy} - \nu_1^2 a_{12} \chi_{yy} - \nu_2^2 a_{11} w_{xx} - \nu_2^2 a_{12} \chi_{xx} \\ 2\nu_1\nu_2 a_{21} w_{xy} + 2\nu_1\nu_2 a_{22} \chi_{xy} - \nu_1^2 a_{21} w_{yy} - \nu_1^2 a_{22} \chi_{yy} - \nu_2^2 a_{21} w_{xx} - \nu_2^2 a_{22} \chi_{xx} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2\nu_1^2\nu_2^2 a_{11} - \nu_1^2\nu_2^2 a_{11} - \nu_1^2\nu_2^2 a_{11}) \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2} + (2\nu_1^2\nu_2^2 a_{12} - \nu_1^2\nu_2^2 a_{12} - \nu_1^2\nu_2^2 a_{12}) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \nu^2} \\ (2\nu_1^2\nu_2^2 a_{21} - \nu_1^2\nu_2^2 a_{11} - \nu_1^2\nu_2^2 a_{21}) \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2} + (2\nu_1^2\nu_2^2 a_{22} - \nu_1^2\nu_2^2 a_{22} - \nu_1^2\nu_2^2 a_{22}) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \nu^2} \end{bmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Também, na fronteira Γ , temos

$$\nabla W \cdot h^T = \begin{bmatrix} \nu_1 w_x + \nu_2 w_y \\ \nu_1 \chi_x + \nu_2 \chi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1^2 \frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_2^2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \\ \nu_1^2 \frac{\partial \chi}{\partial \nu} + \nu_2^2 \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \end{bmatrix} = \frac{\partial W}{\partial \nu},$$

e,

$$\Delta W = \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{xx} + w_{yy} \\ \chi_{xx} + \chi_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2} + \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2} \\ \nu_1^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \nu^2} + \nu_2^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \nu^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w^2}{\partial \nu^2} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \nu^2} \end{bmatrix} = \frac{\partial W^2}{\partial \nu^2}.$$

Assim, de (4.65)

$$\begin{aligned} & \int_0^T (A\Delta^2 W, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ &= \int_0^T a(AW, \nabla W \cdot h^T) dt - \int_0^T (A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt. \end{aligned} \quad (4.67)$$

A primeira integral do lado direito pode ser reescrita, utilizando (4.51), da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & \int_0^T a(AW, \nabla W \cdot h^T) dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \{ (AW_{xx})^T (\nabla W \cdot h^T)_{xx} + (AW_{yy})^T (\nabla W \cdot h^T)_{yy} + \mu [(Aw_{xx})^T (\nabla W \cdot h^T)_{yy} \\ &+ (AW_{yy})^T (\nabla W \cdot h^T)_{xx}] + 2(1 - \mu) (AW_{xy})^T (\nabla W \cdot h^T)_{xy} \} d\Omega dt. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Note que

$$\begin{aligned} (\nabla W \cdot h^T)_{xx} &= \begin{bmatrix} (h_1 w_x + h_2 w_y)_{xx} \\ (h_1 \chi_x + h_2 \chi_y)_{xx} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (h_{1x} w_x + h_{1x} w_{xx} + h_{2x} w_y + h_{2x} w_{yx})_x \\ (h_{1x} \chi_x + h_{1x} \chi_{xx} + h_{2x} \chi_y + h_{2x} \chi_{yx})_x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{1xx} w_x + 2h_{1x} w_{xx} + h_{1x} w_{xxx} + h_{2xx} w_y + 2h_{2x} w_{yx} + h_{2x} w_{yxx} \\ h_{1xx} \chi_x + 2h_{1x} \chi_{xx} + h_{1x} \chi_{xxx} + h_{2xx} \chi_y + 2h_{2x} \chi_{yx} + h_{2x} \chi_{yxx} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} (\nabla W \cdot h^T)_{yy} &= \begin{bmatrix} (h_1 w_x + h_2 w_y)_{yy} \\ (h_1 \chi_x + h_2 \chi_y)_{yy} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (h_{1y} w_x + h_{1y} w_{xy} + h_{2y} w_y + h_{2y} w_{yy})_y \\ (h_{1y} \chi_x + h_{1y} \chi_{xy} + h_{2y} \chi_y + h_{2y} \chi_{yy})_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{1yy} w_x + 2h_{1y} w_{xy} + h_{1y} w_{xyy} + h_{2yy} w_y + 2h_{2y} w_{yy} + h_{2y} w_{yyy} \\ h_{1yy} \chi_x + 2h_{1y} \chi_{xy} + h_{1y} \chi_{xyy} + h_{2yy} \chi_y + 2h_{2y} \chi_{yy} + h_{2y} \chi_{yyy} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} (\nabla W \cdot h^T)_{xy} &= \begin{bmatrix} (h_1 w_x + h_2 w_y)_{xy} \\ (h_1 \chi_x + h_2 \chi_y)_{xy} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (h_{1x} w_x + h_{1x} w_{xx} + h_{2x} w_y + h_{2x} w_{yx})_y \\ (h_{1x} \chi_x + h_{1x} \chi_{xx} + h_{2x} \chi_y + h_{2x} \chi_{yx})_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{1xy} w_x + h_{1x} w_{xy} + h_{1y} w_{xx} + h_{1x} w_{xxy} + h_{2xy} w_y + h_{2x} w_{yy} + h_{2y} w_{yx} + h_{2x} w_{yxy} \\ h_{1xy} \chi_x + h_{1x} \chi_{xy} + h_{1y} \chi_{xx} + h_{1x} \chi_{xxy} + h_{2xy} \chi_y + h_{2x} \chi_{yy} + h_{2y} \chi_{yx} + h_{2x} \chi_{yxy} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Substituindo (4.69), (4.70) e (4.71) em (4.68), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T a(AW, \nabla W \cdot h^T) dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} a_{11}w_{xx} + a_{12}\chi_{xx} & a_{21}w_{xx} + a_{22}\chi_{xx} \\ h_{1xx}w_x + 2h_{1x}w_{xx} + h_1w_{xxx} + h_{2xx}w_y + 2h_{2x}w_{yx} + h_2w_{yxx} \\ h_{1xx}\chi_x + 2h_{1x}\chi_{xx} + h_1\chi_{xxx} + h_{2xx}\chi_y + 2h_{2x}\chi_{yx} + h_2\chi_{yxx} \\ a_{11}w_{yy} + a_{12}\chi_{yy} & a_{21}w_{yy} + a_{22}\chi_{yy} \\ h_{1yy}w_x + 2h_{1y}w_{xy} + h_1w_{xyy} + h_{2yy}w_y + 2h_{2y}w_{yy} + h_2w_{yyy} \\ h_{1yy}\chi_x + 2h_{1y}\chi_{xy} + h_1\chi_{xyy} + h_{2yy}\chi_y + 2h_{2y}\chi_{yy} + h_2\chi_{yyy} \\ a_{11}w_{xx} + a_{12}\chi_{xx} & a_{21}w_{xx} + a_{22}\chi_{xx} \\ h_{1yy}w_x + 2h_{1y}w_{xy} + h_1w_{xyy} + h_{2yy}w_y + 2h_{2y}w_{yy} + h_2w_{yyy} \\ h_{1yy}\chi_x + 2h_{1y}\chi_{xy} + h_1\chi_{xyy} + h_{2yy}\chi_y + 2h_{2y}\chi_{yy} + h_2\chi_{yyy} \\ a_{11}w_{yy} + a_{12}\chi_{yy} & a_{21}w_{yy} + a_{22}\chi_{yy} \\ h_{1xx}w_x + 2h_{1x}w_{xx} + h_1w_{xxx} + h_{2xx}w_y + 2h_{2x}w_{yx} + h_2w_{yxx} \\ h_{1xx}\chi_x + 2h_{1x}\chi_{xx} + h_1\chi_{xxx} + h_{2xx}\chi_y + 2h_{2x}\chi_{yx} + h_2\chi_{yxx} \\ 2(1-\mu) \begin{bmatrix} a_{11}w_{xy} + a_{12}\chi_{xy} & a_{21}w_{xy} + a_{22}\chi_{xy} \\ h_{1xy}w_x + h_{1x}w_{xy} + h_{1y}w_{xx} + h_1w_{xxy} + h_{2xy}w_y + h_{2x}w_{yy} + h_{2y}w_{yx} + h_2w_{yxy} \\ h_{1xy}\chi_x + h_{1x}\chi_{xy} + h_{1y}\chi_{xx} + h_1\chi_{xxy} + h_{2xy}\chi_y + h_{2x}\chi_{yy} + h_{2y}\chi_{yx} + h_2\chi_{yxy} \end{bmatrix} \end{bmatrix} d\Omega dt.
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T a(AW, \nabla W \cdot h^T) dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} [a_{11}(h_{1xx}w_x w_{xx} + 2h_{1x}w_{xx}^2 + h_1w_{xxx}w_{xx} + h_{2xx}w_y w_{xx} + 2h_{2x}w_{yx}w_{xx} + h_2w_{yxx} \\
&\quad w_{xx}) + a_{12}(h_{1xx}w_x \chi_{xx} + 2h_{1x}w_{xx} \chi_{xx} + h_1w_{xxx} \chi_{xx} + h_{2xx}w_y \chi_{xx} + 2h_{2x}w_{yx} \chi_{xx} + h_2w_{yxx} \\
&\quad \chi_{xx}) + a_{21}(h_{1xx}\chi_x w_{xx} + 2h_{1x}\chi_{xx} w_{xx} + h_1\chi_{xxx} w_{xx} + h_{2xx}\chi_y w_{xx} + 2h_{2x}\chi_{yx} w_{xx} + h_2\chi_{yxx} \\
&\quad w_{xx}) + a_{22}(h_{1xx}\chi_x \chi_{xx} + 2h_{1x}\chi_{xx}^2 + h_1\chi_{xxx} \chi_{xx} + h_{2xx}\chi_y \chi_{xx} + 2h_{2x}\chi_{yx} \chi_{xx} + h_2\chi_{yxx} \chi_{xx}) \\
&\quad + a_{11}(h_{1yy}w_x w_{yy} + 2h_{1y}w_{xy} w_{yy} + h_1w_{xyy} w_{yy} + h_{2yy}w_y w_{yy} + 2h_{2y}w_{yy}^2 + h_2w_{yyy} w_{yy}) \\
&\quad + a_{12}(h_{1yy}w_x \chi_{yy} + 2h_{1y}w_{xy} \chi_{yy} + h_1w_{xyy} \chi_{yy} + h_{2yy}w_y \chi_{yy} + 2h_{2y}w_{yy} \chi_{yy} + h_2w_{yyy} \chi_{yy}) \\
&\quad + a_{21}(h_{1yy}\chi_x w_{yy} + 2h_{1y}\chi_{xy} w_{yy} + h_1\chi_{xyy} w_{yy} + h_{2yy}\chi_y w_{yy} + 2h_{2y}\chi_{yy} w_{yy} + h_2\chi_{yyy} w_{yy}) \\
&\quad + a_{22}(h_{1yy}\chi_x \chi_{yy} + 2h_{1y}\chi_{xy} \chi_{yy} + h_1\chi_{xyy} \chi_{yy} + h_{2yy}\chi_y \chi_{yy} + 2h_{2y}\chi_{yy}^2 + h_2\chi_{yyy} \chi_{yy}) \\
&\quad + \mu a_{11}(h_{1yy}w_x w_{xx} + 2h_{1y}w_{xy} w_{xx} + h_1w_{xyy} w_{xx} + h_{2yy}w_y w_{xx} + 2h_{2y}w_{yy} w_{xx} + h_2w_{yyy} \\
&\quad w_{xx}) + \mu a_{12}(h_{1yy}w_x \chi_{xx} + 2h_{1y}w_{xy} \chi_{xx} + h_1w_{xyy} \chi_{xx} + h_{2yy}w_y \chi_{xx} + 2h_{2y}w_{yy} \chi_{xx} \\
&\quad + h_2w_{yyy} \chi_{xx}) + \mu a_{21}(h_{1yy}\chi_x w_{xx} + 2h_{1y}\chi_{xy} w_{xx} + h_1\chi_{xyy} w_{xx} + h_{2yy}\chi_y w_{xx} + 2h_{2y}\chi_{yy} w_{xx} \\
&\quad + h_2\chi_{yyy} w_{xx}) + \mu a_{22}(h_{1yy}\chi_x \chi_{xx} + 2h_{1y}\chi_{xy} \chi_{xx} + h_1\chi_{xyy} \chi_{xx} + h_{2yy}\chi_y \chi_{xx} + 2h_{2y}\chi_{yy} \chi_{xx} \\
&\quad + h_2\chi_{yyy} \chi_{xx})] d\Omega dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h_2 \chi_{yyy} w_{xx}) + \mu a_{22} (h_{1yy} \chi_x \chi_{xx} + 2h_{1y} \chi_{xy} \chi_{xx} + h_1 \chi_{xyy} \chi_{xx} + h_{2yy} \chi_y \chi_{xx} + 2h_{2y} \chi_{yy} \chi_{xx} \\
& + h_2 \chi_{yyy} \chi_{yy}) + \mu a_{11} (h_{1xx} w_x w_{yy} + 2h_{1x} w_{xx} w_{yy} + h_1 w_{xxx} w_{yy} + h_{2xx} w_y w_{yy} \\
& + 2h_{2x} w_{yx} w_{yy} + h_2 w_{yxx} w_{yy}) + \mu a_{12} (h_{1xx} w_x \chi_{yy} + 2h_{1x} w_{xx} \chi_{yy} + h_1 w_{xxx} \chi_{yy} \\
& + h_{2xx} w_y \chi_{yy} + 2h_{2x} w_{yx} \chi_{yy} + h_2 w_{yxx} \chi_{yy}) + \mu a_{21} (h_{1xx} \chi_x w_{yy} + 2h_{1x} \chi_{xx} w_{yy} \\
& + h_1 \chi_{xxx} w_{yy} + h_{2xx} \chi_y w_{yy} + 2h_{2x} \chi_{yx} w_{yy} + h_2 \chi_{yxx} w_{yy}) + \mu a_{22} (h_{1xx} \chi_x \chi_{yy} + 2h_{1x} \chi_{xx} \chi_{yy} \\
& + h_1 \chi_{xxx} \chi_{yy} + h_{2xx} \chi_y \chi_{yy} + 2h_{2x} \chi_{yx} \chi_{yy} + h_2 \chi_{yxx} \chi_{yy}) + 2(1 - \mu) a_{11} (h_{1xy} w_x w_{xy} \\
& + h_{1x} w_{xy}^2 + h_{1y} w_{xx} w_{xy} + h_1 w_{xxy} w_{xy} + h_{2xy} w_y w_{xy} + h_{2x} w_{yy} w_{xy} + h_{2y} w_{yx}^2 \\
& + h_2 w_{yxy} w_{xy}) + 2(1 - \mu) a_{12} (h_{1xy} w_x \chi_{xy} + h_{1x} w_{xy} \chi_{xy} + h_{1y} w_{xx} \chi_{xy} + h_1 w_{xxy} \chi_{xy} \\
& + h_{2xy} w_y \chi_{xy} + h_{2x} w_{yy} \chi_{xy} + h_{2y} w_{yx} \chi_{xy} + h_2 w_{yxy} \chi_{xy}) + 2(1 - \mu) a_{21} (h_{1xy} \chi_x w_{xy} \\
& + h_{1x} \chi_{xy} w_{xy} + h_{1y} \chi_{xx} w_{xy} + h_1 \chi_{xxy} w_{xy} + h_{2xy} \chi_y w_{xy} + h_{1x} \chi_{xy}^2 + h_{2x} \chi_{yy} w_{xy} \\
& + h_{2y} \chi_{yx} w_{xy} + 2(1 - \mu) a_{22} (h_{1xy} \chi_x \chi_{xy} + h_{1x} \chi_{xy}^2 + h_{1y} \chi_{xx} \chi_{xy} \\
& + h_1 \chi_{xxy} \chi_{xy} + h_{2xy} \chi_y \chi_{xy} + h_{2x} \chi_{yy} \chi_{xy} + h_{2y} \chi_{yx}^2 + h_2 \chi_{yxy} \chi_{xy})) d\Omega dt.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Agora, observamos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} [h \cdot \nabla (a_{11} w_{xx}^2 + 2a_{21} w_{xx} \chi_{xx} + a_{22} \chi_{xx}^2 + a_{11} w_{yy}^2 + 2a_{12} \chi_{yy} w_{yy} + a_{22} \chi_{yy}^2 \\
& + 2\mu a_{11} w_{xx} w_{yy} + 2\mu a_{12} w_{yy} \chi_{xx} + 2\mu a_{21} \chi_{yy} w_{xx} + 2\mu a_{22} \chi_{yy} \chi_{xx} + 2(1 - \mu) a_{11} w_{xy}^2 \\
& + 4(1 - \mu) a_{12} w_{xy} \chi_{xy} + 2(1 - \mu) a_{22} \chi_{xy}^2)] d\Omega dt \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} [2a_{11} h_1 w_{xxx} w_{xx} + 2a_{12} h_1 w_{xxx} \chi_{xx} + 2a_{21} h_1 \chi_{xxx} w_{xx} + 2a_{22} h_1 \chi_{xxx} \chi_{xx} \\
& + 2a_{11} h_1 w_{xyy} w_{yy} + 2a_{12} h_1 w_{xyy} \chi_{yy} + 2a_{21} h_1 \chi_{xyy} w_{yy} + 2a_{22} h_1 \chi_{xyy} \chi_{yy} \\
& + 2\mu a_{11} h_1 w_{xxx} w_{yy} + 2\mu a_{11} h_1 w_{xyy} w_{xx} + 2\mu a_{12} h_1 w_{yyx} \chi_{xx} + 2\mu a_{12} h_1 \chi_{xxx} w_{yy} \\
& + 2\mu a_{21} h_1 \chi_{yyx} w_{xx} + 2\mu a_{21} h_1 \chi_{yy} w_{xxx} + 2\mu a_{22} h_1 \chi_{yyx} \chi_{xx} + 2\mu a_{22} h_1 \chi_{yy} \chi_{xxx} \\
& + 4(1 - \mu) a_{11} h_1 w_{xy} w_{xyx} + 4(1 - \mu) a_{12} h_1 w_{xyx} \chi_{xy} + 4(1 - \mu) a_{12} h_1 w_{xy} \chi_{xyx} \\
& + 4(1 - \mu) a_{22} h_1 \chi_{xy} \chi_{xyx} + 2a_{11} h_2 w_{xx} w_{xxy} + 2a_{12} h_2 w_{xxy} \chi_{xx} + 2a_{21} h_2 \chi_{xxy} w_{xx} \\
& + 2a_{22} h_2 \chi_{xx} \chi_{xxy} + 2a_{11} h_2 w_{yy} w_{yyy} + 2a_{12} h_2 w_{yy} \chi_{yyy} + 2a_{21} h_2 \chi_{yy} w_{yyy} \\
& + 2a_{22} h_2 \chi_{yy} \chi_{yyy} + 2\mu a_{11} h_2 w_{xxy} w_{yy} + 2\mu a_{11} h_2 w_{yyy} w_{xx} + 2\mu a_{12} h_2 w_{yyy} \chi_{xx} \\
& + 2\mu a_{12} h_2 \chi_{xxy} w_{yy} + 2\mu a_{21} h_2 \chi_{yyy} w_{xx} + 2\mu a_{21} h_2 \chi_{yy} w_{xxy} + 2\mu a_{22} h_2 \chi_{yyy} \chi_{xx}
\end{aligned}$$

$$+2\mu a_{22}h_2\chi_{yy}\chi_{xxy}+4(1-\mu)a_{11}h_2w_{xy}w_{xyy}+4(1-\mu)a_{12}h_2w_{xyy}\chi_{xy}+4(1-\mu)a_{12}h_2w_{xy}\chi_{xyy} \\ +4(1-\mu)a_{22}h_2\chi_{xy}\chi_{xyy}]d\Omega dt.$$

Logo, a junção de todos os termos em (4.72) que possuem derivada de terceira ordem é igual a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [h \cdot \nabla (a_{11}w_{xx}^2 + 2a_{21}w_{xx}\chi_{xx} + a_{22}\chi_{xx}^2 + a_{11}w_{yy}^2 + 2a_{12}\chi_{yy}w_{yy} + a_{22}\chi_{yy}^2 \\ & + 2\mu a_{11}w_{xx}w_{yy} + 2\mu a_{12}w_{yy}\chi_{xx} + 2\mu a_{21}\chi_{yy}w_{xx} + 2\mu a_{22}\chi_{yy}\chi_{xx} + 2(1-\mu)a_{11}w_{xy}^2 \\ & + 4(1-\mu)a_{12}w_{xy}\chi_{xy} + 2(1-\mu)a_{22}\chi_{xy}^2)]d\Omega dt. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Observamos, também, que os termos em (4.72) que possuem no máximo derivada de segunda ordem podem ser majorados por $\|\mathring{A}^{\frac{1}{2}}W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2$, pois $h(x, y) \equiv [h_1(x, y), h_2(x, y)] \in [C^2(\overline{\Omega})]^2$. Vejamos dois exemplos:

1)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} [a_{11}h_{1xx}w_{xx}w_x]d\Omega dt \right| & \leq \int_0^T \int_{\Omega} |w_{xx}||w_x|d\Omega dt \\ & \leq c \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w_{xx}|^2 d\Omega dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w_x|^2 d\Omega dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = c \left(\int_0^T \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|w_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c \left(\int_0^T \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|w\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c \left(\int_0^T \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = c \int_0^T \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq c \int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}}W\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T \int_{\Omega} [a_{21} h_{1xx} w_x \chi_{xx}] d\Omega dt \right| &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |w_x| |\chi_{xx}| d\Omega dt \\
&\leq c \int_0^T \int_{\Omega} [|w_x|^2 + |\chi_{xx}|^2] d\Omega dt \\
&= c \int_0^T [\|w_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\chi_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2] d\Omega dt \\
&\leq c \int_0^T [\|w\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\chi_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2] d\Omega dt \\
&\leq c \int_0^T [\|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\chi_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2] d\Omega dt \\
&= c \int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}} W\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.
\end{aligned}$$

Das deduções acima, de (4.72) e (4.73), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T a(AW, \nabla W \cdot h^T) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} [h \cdot \nabla (a_{11} w_{xx}^2 + 2a_{21} w_{xx} \chi_{xx} + a_{22} \chi_{xx}^2 + a_{11} w_{yy}^2 + 2a_{12} \chi_{yy} w_{yy} + a_{22} \chi_{yy}^2 \\
&\quad + 2\mu a_{11} w_{xx} w_{yy} + 2\mu a_{12} w_{yy} \chi_{xx} + 2\mu a_{21} \chi_{yy} w_{xx} + 2\mu a_{22} \chi_{yy} \chi_{xx} + 2(1-\mu) a_{11} w_{xy}^2 \\
&\quad + 4(1-\mu) a_{12} w_{xy} \chi_{xy} + 2(1-\mu) a_{22} \chi_{xy}^2)] d\Omega dt + \mathcal{O} \left(\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}} W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right), \tag{4.74}
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{O} \left(\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}} W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right)$ representa uma série de termos que pode ser majorada por $\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}} W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt$.

Também, note que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \{ \operatorname{div} [h \cdot (a_{11} w_{xx}^2 + 2a_{21} w_{xx} \chi_{xx} + a_{22} \chi_{xx}^2 + a_{11} w_{yy}^2 + 2a_{12} \chi_{yy} w_{yy} + a_{22} \chi_{yy}^2 \\
&\quad + 2\mu a_{11} w_{xx} w_{yy} + 2\mu a_{12} w_{yy} \chi_{xx} + 2\mu a_{21} \chi_{yy} w_{xx} + 2\mu a_{22} \chi_{yy} \chi_{xx} + 2(1-\mu) a_{11} w_{xy}^2 \\
&\quad + 4(1-\mu) a_{12} w_{xy} \chi_{xy} + 2(1-\mu) a_{22} \chi_{xy}^2)] \} d\Omega dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} [a_{11} h_1 w_{xx}^2 + 2a_{21} h_1 w_{xx} \chi_{xx} + a_{22} h_1 \chi_{xx}^2 + a_{11} h_1 w_{yy}^2 + 2a_{12} h_1 \chi_{yy} w_{yy} \\
&\quad + 2\mu a_{11} h_1 w_{xx} w_{yy} + 2\mu a_{12} h_1 w_{yy} \chi_{xx} + 2\mu a_{21} h_1 \chi_{yy} w_{xx} + 2\mu a_{22} h_1 \chi_{yy} \chi_{xx} + 2(1-\mu) a_{11} h_1 w_{xy}^2 \\
&\quad + 4(1-\mu) a_{12} h_1 w_{xy} \chi_{xy} + 2(1-\mu) a_{22} h_1 \chi_{xy}^2] d\Omega dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{22}h_1\chi_{yy}^2 + 2\mu a_{11}h_1w_{xx}w_{yy} + 2\mu a_{12}h_1w_{yy}\chi_{xx} + 2\mu a_{21}h_1\chi_{yy}w_{xx} + 2\mu a_{22}h_1\chi_{yy}\chi_{xx} \\
& + 2(1-\mu)a_{11}h_1w_{xy}^2 + 4(1-\mu)a_{12}h_1w_{xy}\chi_{xy} + 2(1-\mu)a_{22}h_1\chi_{xy}^2]d\Omega dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} [a_{11}h_2w_{xx}^2 + 2a_{21}h_2w_{xx}\chi_{xx} + a_{22}h_2\chi_{xx}^2 + a_{11}h_2w_{yy}^2 + 2a_{12}h_2\chi_{yy}w_{yy} \\
& + a_{22}h_2\chi_{yy}^2 + 2\mu a_{11}h_2w_{xx}w_{yy} + 2\mu a_{12}h_2w_{yy}\chi_{xx} + 2\mu a_{21}h_2\chi_{yy}w_{xx} + 2\mu a_{22}h_2\chi_{yy}\chi_{xx} \\
& + 2(1-\mu)a_{11}h_2w_{xy}^2 + 4(1-\mu)a_{12}h_2w_{xy}\chi_{xy} + 2(1-\mu)a_{22}h_2\chi_{xy}^2]d\Omega dt \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} [a_{11}h_{1x}w_{xx}^2 + 2a_{11}h_{1x}w_{xx}w_{xxx} + 2a_{21}h_{1x}w_{xx}\chi_{xx} + 2a_{21}h_{1x}w_{xxx}\chi_{xx} \\
& + 2a_{21}h_{1x}w_{xx}\chi_{xxx} + a_{22}h_{1x}\chi_{xx}^2 + 2a_{22}h_{1x}\chi_{xx}\chi_{xxx} + a_{11}h_{1x}w_{yy} + 2a_{11}h_{1x}w_{yy}w_{yyy} \\
& + 2a_{12}h_{1x}\chi_{yy}w_{yy} + 2a_{12}h_{1x}\chi_{yy}w_{yyy} + 2a_{12}h_{1x}\chi_{yy}w_{yyx} + a_{22}h_{1x}\chi_{yy}^2 + 2a_{22}h_{1x}\chi_{yy}\chi_{yyy} \\
& + 2a_{22}h_{1x}\chi_{yy}\chi_{yyy} + 2\mu a_{11}h_{1x}w_{xx}w_{yy} + 2\mu a_{11}h_{1x}w_{xxx}w_{yy} + 2\mu a_{11}h_{1x}w_{xx}w_{yyy} \\
& + 2\mu a_{12}h_{1x}w_{yy}\chi_{xx} + 2\mu a_{12}h_{1x}w_{yyy}\chi_{xx} + 2\mu a_{12}h_{1x}w_{yy}\chi_{xxx} + 2\mu a_{21}h_{1x}\chi_{yy}w_{xx} \\
& + 2\mu a_{21}h_{1x}\chi_{yy}w_{xxx} + 2\mu a_{22}h_{1x}\chi_{yy}\chi_{xx} + 2\mu a_{22}h_{1x}\chi_{yy}\chi_{xxx} \\
& + 2\mu a_{22}h_{1x}\chi_{yy}\chi_{xxx} + 2(1-\mu)a_{11}h_{1x}w_{xy}^2 + 4(1-\mu)a_{11}h_{1x}w_{xy}w_{xyx} \\
& + 4(1-\mu)a_{12}h_{1x}w_{xy}\chi_{xy} + 4(1-\mu)a_{12}h_{1x}w_{xyx}\chi_{xy} + 4(1-\mu)a_{12}h_{1x}w_{xy}\chi_{xyx} \\
& + 2(1-\mu)a_{22}h_{1x}\chi_{xy}^2 + 4(1-\mu)a_{22}h_{1x}\chi_{xy}\chi_{xyx} + a_{11}h_{2y}w_{xx}^2 + 2a_{11}h_{2y}w_{xx}w_{xxy} \\
& + 2a_{21}h_{2y}w_{xx}\chi_{xx} + 2a_{21}h_{2y}w_{xxy}\chi_{xx} + 2a_{21}h_{2y}w_{xx}\chi_{xxy} + a_{22}h_{2y}\chi_{xx}^2 + 2a_{22}h_{2y}\chi_{xx}\chi_{xxy} \\
& + a_{11}h_{2y}w_{yy}^2 + 2a_{11}h_{2y}w_{yy}w_{yyy} + 2a_{12}h_{2y}\chi_{yy}w_{yy} + 2a_{12}h_{2y}\chi_{yyy}w_{yy} + 2a_{12}h_{2y}\chi_{yy}w_{yyy} \\
& + a_{22}h_{2y}\chi_{yy}^2 + 2a_{22}h_{2y}\chi_{yy}\chi_{yyy} + 2\mu a_{11}h_{2y}w_{xx}w_{yy} + 2\mu a_{11}h_{2y}w_{xxy}w_{yy} \\
& + 2\mu a_{11}h_{2y}w_{xx}w_{yyy} + 2\mu a_{12}h_{2y}w_{yy}\chi_{xx} + 2\mu a_{12}h_{2y}w_{yyy}\chi_{xx} + 2\mu a_{12}h_{2y}w_{yy}\chi_{xxy} \\
& + 2\mu a_{21}h_{2y}\chi_{yy}w_{xx} + 2\mu a_{21}h_{2y}\chi_{yyy}w_{xx} + 2\mu a_{21}h_{2y}\chi_{yy}w_{xxy} + 2\mu a_{22}h_{2y}\chi_{yy}\chi_{xx} \\
& + 2\mu a_{22}h_{2y}\chi_{yyy}\chi_{xx} + 2\mu a_{22}h_{2y}\chi_{yy}\chi_{xxy} + 2(1-\mu)a_{11}h_{2y}w_{xy}^2 + 4(1-\mu)a_{11}h_{2y}w_{xy}w_{xyy} \\
& + 4(1-\mu)a_{12}h_{2y}w_{xy}\chi_{xy} + 4(1-\mu)a_{12}h_{2y}w_{xyy}\chi_{xy} + 4(1-\mu)a_{12}h_{2y}w_{xy}\chi_{xyy} \\
& + 2(1-\mu)a_{22}h_{2y}\chi_{xy}^2 + 4(1-\mu)a_{22}h_{2y}\chi_{xy}\chi_{xyy}]d\Omega dt.
\end{aligned}$$

(4.75)

A equação obtida em (4.75) é tal que a junção dos termos que possuem derivadas de terceira ordem coincide com (4.73). Além disso, os demais termos (que envolvem no máximo derivada de segunda ordem) podem ser majorados por $\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}}W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt$. Então, de (4.74),

segue que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T a(AW, \nabla W \cdot h^T) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \{ h [a_{11}w_{xx}^2 + 2a_{21}w_{xx}\chi_{xx} + a_{22}\chi_{xx}^2 + a_{11}w_{yy}^2 + 2a_{12}\chi_{yy}w_{yy} + a_{22}\chi_{yy}^2 \\
&+ 2\mu a_{11}w_{xx}w_{yy} + 2\mu a_{12}w_{yy}\chi_{xx} + 2\mu a_{21}\chi_{yy}w_{xx} + 2\mu a_{22}\chi_{yy}\chi_{xx} + 2(1-\mu)a_{11}w_{xy}^2 \\
&+ 4(1-\mu)a_{12}w_{xy}\chi_{xy} + 2(1-\mu)a_{22}\chi_{xy}^2] \} d\Omega dt + \mathcal{O} \left(\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}}W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right).
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T a(AW, \nabla W \cdot h^T) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} [a_{11}w_{xx}^2 + 2a_{21}w_{xx}\chi_{xx} + a_{22}\chi_{xx}^2 + a_{11}w_{yy}^2 + 2a_{12}\chi_{yy}w_{yy} + a_{22}\chi_{yy}^2 \\
&+ 2\mu a_{11}w_{xx}w_{yy} + 2\mu a_{12}w_{yy}\chi_{xx} + 2\mu a_{21}\chi_{yy}w_{xx} + 2\mu a_{22}\chi_{yy}\chi_{xx} + 2(1-\mu)a_{11}w_{xy}^2 \\
&+ 4(1-\mu)a_{12}w_{xy}\chi_{xy} + 2(1-\mu)a_{22}\chi_{xy}^2] d\Gamma dt + \mathcal{O} \left(\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}}W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right).
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Agora, lembrando que $a_{12} = a_{21}$, temos que

$$\begin{aligned}
(A\Delta W)^T AW &= \begin{bmatrix} a_{11}\Delta W + a_{12}\Delta\chi & a_{21}\Delta w + a_{22}\Delta\chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta\chi \end{bmatrix} \\
&= a_{11}\Delta^2 w + 2a_{12}\Delta\chi\Delta w + a_{22}\Delta^2\chi \\
&= a_{11}(w_{xx}^2 + 2w_{xx}w_{yy} + w_{yy}^2) + 2a_{12}(\chi_{xx}w_{xx} + \chi_{xx}w_{yy} + \chi_{yy}w_{xx} \\
&+ \chi_{yy}w_{yy}) + a_{22}(\chi_{xx}^2 + 2\chi_{xx}\chi_{yy} + \chi_{yy}^2) \\
&= a_{11}w_{xx}^2 + 2a_{11}w_{xx}w_{yy} + a_{11}w_{yy}^2 + 2a_{12}\chi_{xx}w_{xx} + 2a_{12}\chi_{xx}w_{yy} \\
&+ 2a_{12}\chi_{yy}w_{xx} + 2a_{12}\chi_{yy}w_{yy} + a_{22}\chi_{xx}^2 + 2a_{22}\chi_{xx}\chi_{yy} + a_{22}\chi_{yy}^2.
\end{aligned}$$

Utilizando (4.61) podemos, facilmente, mostrar que $(A\Delta W)^T \Delta W$ coincide com a expressão entre colchetes em (4.77), em Γ . Ou seja,

$$\begin{aligned}
& a_{11}w_{xx}^2 + 2a_{11}w_{xx}w_{yy} + a_{11}w_{yy}^2 + 2a_{12}\chi_{xx}w_{xx} + 2a_{12}\chi_{xx}w_{yy} + 2a_{12}\chi_{yy}w_{xx} + 2a_{12}\chi_{yy}w_{yy} \\
&+ a_{22}\chi_{xx}^2 + 2a_{22}\chi_{xx}\chi_{yy} + a_{22}\chi_{yy}^2 \\
&= a_{11}w_{xx}^2 + 2a_{21}w_{xx}\chi_{xx} + a_{22}\chi_{xx}^2 + a_{11}w_{yy}^2 + 2a_{12}\chi_{yy}w_{yy} + a_{22}\chi_{yy}^2 + 2\mu a_{11}w_{xx}w_{yy} \\
&+ 2\mu a_{12}w_{yy}\chi_{xx} + 2\mu a_{21}\chi_{yy}w_{xx} + 2\mu a_{22}\chi_{yy}\chi_{xx} + 2(1-\mu)a_{11}w_{xy}^2 + 4(1-\mu)a_{12}w_{xy}\chi_{xy} \\
&+ 2(1-\mu)a_{22}\chi_{xy}^2, \text{ em } \Gamma.
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
 & 2a_{11}w_{xx}w_{yy} + 2a_{12}\chi_{xx}w_{yy} + 2a_{12}\chi_{yy}w_{xx} + 2a_{22}\chi_{xx}\chi_{yy} - 2\mu a_{11}w_{xx}w_{yy} + 2\mu a_{12}w_{yy}\chi_{xx} + \\
 & 2\mu a_{21}\chi_{yy}w_{xx} + 2\mu a_{22}\chi_{yy}\chi_{xx} + 2(1-\mu)a_{11}w_{xy}^2 + 4(1-\mu)a_{12}w_{xy}\chi_{xy} + 2(1-\mu)a_{22}\chi_{xy}^2 \\
 & = 0, \text{ em } \Gamma.
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Portanto, de (4.77), temos

$$\int_0^T a(AW, \nabla W \cdot h^T) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Gamma)]^2} dt + \mathcal{O} \left(\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}} W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right).$$

Substituindo a igualdade acima em (4.67), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^T (A\Delta^2 W, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^T (A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Gamma)]^2} dt \\
 &+ \mathcal{O} \left(\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}} W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right).
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

(iv) Para a quarta integral em (4.53), temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^T (C\Delta\Theta, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt &= - \int_0^T (C\nabla\Theta, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^4} dt \\
 &+ \int_0^T \left(\frac{\partial C\Delta\Theta}{\partial \nu}, \nabla W \cdot h^T \right)_{[L^2(\Gamma)]^2} dt.
 \end{aligned}$$

Sendo $\nabla W \cdot h^T = 0$ em Γ segue que

$$\int_0^T (C\Delta\Theta, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} dt = - \int_0^T (C\nabla\Theta, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^4} dt. \tag{4.80}$$

Para terminar a demonstração, reescrevemos (4.53) em termos de (4.55), (4.64), (4.79) e (4.80):

$$\begin{aligned}
 & (RW_t, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\rho_1 w_t^2 + \operatorname{div} \rho_2 \chi_t^2) (h_{1x} + h_{2y}) d\Omega dt + \\
 & (G\nabla W_t, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\gamma_1 w_{ty}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_1 w_{tx}^2 h_{2y}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{ty}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{tx}^2 h_{2y}}{2} \right] d\Omega dt \\
 & - \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\gamma_1 w_{tx}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_1 w_{ty}^2 h_{2y}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{tx}^2 h_{1x}}{2} + \frac{\gamma_2 \chi_{ty}^2 h_{2y}}{2} \right] d\Omega dt \\
 & - \int_0^T \int_{\Omega} [\gamma_1 w_{tx} w_{ty} h_{2x} + \gamma_1 w_{tx} w_{ty} h_{1y} + \gamma_2 \chi_{tx} \chi_{ty} h_{2x} + \gamma_2 \chi_{tx} \chi_{ty} h_{1y}] d\Omega dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^T (A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Gamma)]^2} dt + \mathcal{O} \left(\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}} W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right) \\
 & - \int_0^T (C\nabla\Theta, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^4} dt = 0.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^T (A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Gamma)]^2} dt \\
& = -\int_0^T (C\nabla\Theta, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^4} dt + \mathcal{O} \left(\int_0^T \|\mathring{A}^{\frac{1}{2}} W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right) \\
& + \mathcal{O} \left(\int_0^T \|P_{RG} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right) + (RW_t, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + (G\nabla W_t, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Agora, note que

$$\left| -\int_0^T (C\nabla\Theta, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^4} dt \right| \leq c \left[\int_0^T \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \int_0^T \|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right]. \tag{4.82}$$

Além disso, como $W(T) = W_0$ e $W_t(T) = W_1$, temos

$$\begin{aligned}
& (RW_t, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + (G\nabla W_t, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T \\
& = (RW_1, \nabla W_0 \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} - (RW_t(0), \nabla W(0) \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} + (G\nabla W_1, \nabla(\nabla W_0 \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \\
& - (G\nabla W_t(0), \nabla(\nabla W(0) \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \leq c(\|R^{\frac{1}{2}} W_1\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + (A\Delta W_0, \Delta W_0)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
& + \|G^{\frac{1}{2}} \nabla W_1\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|R^{\frac{1}{2}} W_t(0)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + (A\Delta W(0), \Delta W(0))_{[L^2(\Omega)]^2} + \|G^{\frac{1}{2}} \nabla W_t(0)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2),
\end{aligned} \tag{4.83}$$

visto que

$$\begin{aligned}
\|\nabla W_0 \cdot h^T\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 & = \int_{\Omega} \left| \begin{bmatrix} w_{0x}h_1 + w_{0y}h_2 \\ \chi_{0x}h_1 + \chi_{0t}h_2 \end{bmatrix} \right|^2 d\Omega \\
& = \int_{\Omega} [|w_{0x}h_1|^2 + |w_{0y}h_2|^2 + |\chi_{0x}h_1|^2 + |\chi_{0t}h_2|^2] d\Omega \\
& \leq c \int_{\Omega} [|w_{0x}|^2 + |w_{0y}|^2 + |\chi_{0x}|^2 + |\chi_{0t}|^2] d\Omega \\
& \leq c\|W_0\|_{[H^2(\Omega)]^2}^2 \\
& \leq c\|\Delta W_0\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\
& \leq c(A\Delta W_0, \Delta W_0)_{[L^2(\Omega)]^2}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\|\nabla(\nabla W_0 \cdot h^T)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \leq c(A\Delta W_0, \Delta W_0)_{[L^2(\Omega)]^2}.$$

De (4.39) e do fato do semigrupo $\{e^{\mathcal{A}^*t}\}_{t \geq 0}$ ser de contração,

$$\|[W(t), W_t(t), \Theta(t)]\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} & (A\Delta W(0), \Delta W(0))_{[L^2(\Omega)]^2} + \|R^{\frac{1}{2}}W_t(0)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|G^{\frac{1}{2}}\nabla W_t(0)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + (B\Theta(0), \Theta(0))_{[L^2(\Omega)]^2} \\ & \leq (A\Delta W_0, \Delta W_0)_{[L^2(\Omega)]^2} + \|R^{\frac{1}{2}}W_1\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|G^{\frac{1}{2}}\nabla W_1\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + (B\Theta_0, \Theta_0)_{[L^2(\Omega)]^2}. \end{aligned}$$

Disto e de (4.83) segue que

$$(RW_t, \nabla W \cdot h^T)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + (G\nabla W_t, \nabla(\nabla W \cdot h^T))_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T \leq c\|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.84)$$

De (4.81), (4.82) e (4.84) segue que

$$\begin{aligned} & \int_0^T (A\mathring{A}^{\frac{1}{2}}W, \mathring{A}^{\frac{1}{2}}W)_{[L^2(\Gamma)]^2} dt \\ & \leq C \left\{ \int_0^T [(A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Gamma)]^2} dt + \|P_{RG}^{\frac{1}{2}}W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|A_D^{\frac{1}{2}}\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2] dt + \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \right\}, \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. $\square$

Passo 2: (Demonstração da desigualdade (4.47)) Multiplicamos a primeira equação de (4.40) por $A_D^{-1}\Theta$ e integramos no tempo e espaço obtendo

$$\int_0^T (RW_{tt} - G\Delta W_{tt} + A\Delta^2 W + C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt = 0 \quad (4.85)$$

e estimamos essa equação.

(A.1) Para $\int_0^T (RW_{tt} - G\Delta W_{tt}, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta W_{tt}, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt &= (RW_t, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T - \int_0^T (RW_t, A_D^{-1}\Theta_t)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ &\quad + (-G\Delta W_t, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + \int_0^T (G\Delta W_t, A_D^{-1}\Theta_t)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ &= (RW_t, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + (G\nabla W_t, \nabla A_D^{-1}\Theta) \Big|_0^T \\ &\quad - \int_0^T [(RW_t, A_D^{-1}\Theta_t)_{[L^2(\Omega)]^2} - (G\Delta W_t, A_D^{-1}\Theta_t)_{[L^2(\Omega)]^2}] dt. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Pela segunda equação de (4.41), temos

$$\begin{aligned} A_D^{-1}\Theta_t &= A_D^{-1}B^{-1}C\Delta W_t - A_D^{-1}(B^{-1}C\Delta - aB^{-1}N)\Theta \\ &= -B^{-1}CW_t + (aB^{-1}NA_D^{-1} + B^{-1}C)\Theta. \end{aligned}$$

Substituindo em (4.86), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta W_{tt}, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\
&= (RW_t, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + (G\nabla W_t, \nabla A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^4} \Big|_0^T - \int_0^T [(RW_t, -B^{-1}CW_t)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&+ (RW_t, (aB^{-1}NA_D^{-1} + B^{-1}C)\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} - (G\nabla W_t, -\nabla B^{-1}CW_t)_{[L^2(\Omega)]^4} \\
&- (G\nabla W_t, \nabla(aB^{-1}NA_D^{-1} + B^{-1}C)\Theta)_{[L^2(\Omega)]^4}] dt \\
&= \int_0^T (P_{RG}W_t, B^{-1}CW_t)_{[L^2(\Omega)]^2} dt - \int_0^T [(RW_t, (aB^{-1}NA_D^{-1} + B^{-1}C)\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \\
&+ (G\nabla W_t, \nabla(aB^{-1}NA_D^{-1} + B^{-1}C)\Theta)_{[L^2(\Omega)]^4}] dt + (RW_t, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T \\
&+ (G\nabla W_t, \nabla A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^4} \Big|_0^T \\
&= \int_0^T \left[\frac{-b_{12}c_{21}}{d}(\rho_1\|w_t\|^2 + \gamma_1\|\nabla w_t\|^2 + \rho_2\|\chi_t\|^2 + \gamma_2\|\nabla\chi_t\|^2) + \frac{b_{22}c_{11}}{d}(\rho_1\|w_t\|^2 + \gamma_1\|\nabla w_t\|^2) \right. \\
&+ \frac{b_{11}c_{22}}{d}(\rho_2\|\chi_t\|^2 + \gamma_2\|\nabla\chi_t\|^2) + \left(\rho_1 w_t, \frac{b_{22}c_{12}\chi_t - b_{12}c_{22}\chi_t}{d} \right) - \left(\gamma_1 \Delta w_t, \frac{b_{22}c_{12}\chi_t - b_{12}c_{22}\chi_t}{d} \right) \\
&+ \left(\rho_2 \chi_t, \frac{-b_{12}c_{11}w_t + b_{11}c_{21}w_t}{d} \right) - \left(\gamma_2 \Delta \chi_t, \frac{-b_{12}c_{11}w_t + b_{11}c_{21}w_t}{d} \right) \Big] dt \\
&- \int_0^T [(RW_t, (aB^{-1}NA_D^{-1} + B^{-1}C)\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} + (G\nabla W_t, \nabla(aB^{-1}NA_D^{-1} + B^{-1}C)\Theta)_{[L^2(\Omega)]^4}] dt \\
&+ (RW_t, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + (G\nabla W_t, \nabla A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^4} \Big|_0^T,
\end{aligned}$$

com $d = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$.

Logo,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta W_{tt}, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \frac{b_{12}c_{21}}{d} \int_0^T (\rho_1\|w_t\|^2 + \gamma_1\|\nabla w_t\|^2 + \rho_2\|\chi_t\|^2 \right. \\
&+ \gamma_2\|\nabla\chi_t\|^2) dt \Big| \\
&= \left| \int_0^T \left[\frac{b_{22}c_{11}}{d}(\rho_1\|w_t\|^2 + \gamma_1\|\nabla w_t\|^2) + \frac{b_{11}c_{22}}{d}(\rho_2\|\chi_t\|^2 + \gamma_2\|\nabla\chi_t\|^2) \right. \right. \\
&+ \left(\rho_1 w_t, \frac{b_{22}c_{12}\chi_t - b_{12}c_{22}\chi_t}{d} \right) - \left(\gamma_1 \Delta w_t, \frac{b_{22}c_{12}\chi_t - b_{12}c_{22}\chi_t}{d} \right) \\
&+ \left(\rho_2 \chi_t, \frac{-b_{12}c_{11}w_t + b_{11}c_{21}w_t}{d} \right) - \left(\gamma_2 \Delta \chi_t, \frac{-b_{12}c_{11}w_t + b_{11}c_{21}w_t}{d} \right) \Big] dt \\
&- \int_0^T [(RW_t, (aB^{-1}NA_D^{-1} + B^{-1}C)\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} + (G\nabla W_t, \nabla(aB^{-1}NA_D^{-1} + B^{-1}C)\Theta)_{[L^2(\Omega)]^4}] dt \\
&+ (RW_t, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T + (G\nabla W_t, \nabla A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^4} \Big|_0^T \Big|.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Note que pelo Teorema de Green e o fato que $w_t \in [H_0^1(\Omega)]^2$, para qualquer $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} (G\nabla W_t(t), \nabla A_D^{-1}\Theta(t))_{[L^2(\Omega)]^4} &= (GW_t(t), \Theta(t))_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\leq C_\epsilon \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\Theta(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Além disso, para $T \geq t \geq 0$,

$$\begin{aligned} (RW_t, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} &\leq \frac{\epsilon}{2} \|R^{\frac{1}{2}}W_t(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + C_\epsilon \|A_D^{-1}\Theta(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|R^{\frac{1}{2}}W_t(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + C_\epsilon \|A_D^{-1}\Theta(t)\|_{[H_0^{-1}(\Omega)]^2}^2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|R^{\frac{1}{2}}W_t(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + C_\epsilon \|\Theta(t)\|_{[H_0^{-1}(\Omega)]^2}^2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|R^{\frac{1}{2}}W_t(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + C_\epsilon \|\Theta\|_{[C([0,T], H_0^{-1}(\Omega))]^2}^2. \end{aligned} \quad (4.89)$$

De (4.87), (4.88), (4.89) e usando a contração do semigrupo $\{e^{A^*t}\}_{t \geq 0}$, temos

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta W_{tt}, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \frac{b_{12}c_{21}}{d} \int_0^T (\rho_1 \|w_t\|^2 + \gamma_1 \|\nabla w_t\|^2 + \rho_2 \|\chi_t\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2 \|\nabla \chi_t\|^2) dt \right| \\ &\leq c \left\{ \int_0^T [\|R^{\frac{1}{2}}W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 + \|G^{\frac{1}{2}}\nabla W_t\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2] dt \right. \\ &\quad \left. + C_\epsilon \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\Theta(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|R^{\frac{1}{2}}W_t(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + C_\epsilon \|\Theta\|_{[C([0,T], H_0^{-1}(\Omega))]^2}^2 \right\} \\ &\leq \int_0^T [\epsilon \|R^{\frac{1}{2}}W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + c_\epsilon \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 + \epsilon \|G^{\frac{1}{2}}\nabla W_t\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 + c_\epsilon \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2] dt \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon (\|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + C_\epsilon \|\Theta\|_{[C([0,T], H_0^{-1}(\Omega))]^2}^2). \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta W_{tt}, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \frac{b_{12}c_{21}}{d} \int_0^T (\rho_1 \|w_t\|^2 + \gamma_1 \|\nabla w_t\|^2 + \rho_2 \|\chi_t\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2 \|\nabla \chi_t\|^2) dt \right| \\ &\leq \epsilon \left(\int_0^T [\|R^{\frac{1}{2}}W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|G^{\frac{1}{2}}\nabla W_t\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2] dt + \frac{1}{2} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \\ &\quad + c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H_0^{-1}(\Omega))]^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.90)$$

(A.2) Para o termo $\int_0^T (A\Delta^2 W, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt$, aplicamos (4.49) e usamos que $A_D^{-1}\Theta = 0$ em Γ , obtendo

$$\int_0^T (A\Delta^2 W, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt = \int_0^T a(AW, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt - \int_0^T \int_\Gamma \left(A\Delta W \frac{\partial A_D^{-1}\Theta}{\partial \nu} \right) d\Gamma dt. \quad (4.91)$$

Lembrando que $[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2 \hookrightarrow [L^2(\Gamma)]^2$ e também que a aplicação traço $\widehat{\gamma}_1 : [H^2(\Omega)]^2 \rightarrow [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2$ é contínua, temos

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial A_D^{-1} \Theta}{\partial \nu} \right\|_{[L^2(\Gamma)]^2}^2 &= \|\gamma_1(A_D^{-1} \Theta)\|_{[L^2(\Gamma)]^2}^2 \leq \|\gamma_1(A_D^{-1} \Theta)\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2}^2 \leq c \|A_D^{-1} \Theta\|_{[H^2(\Gamma)]^2}^2 \\
 &\leq \|\Delta A_D^{-1} \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\
 &= c \|\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\
 &\leq c \|\Theta\|_{[H_0^1(\Omega)]^2}^2 \\
 &\leq c \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Gamma} \left(A \Delta W \frac{\partial A_D^{-1} \Theta}{\partial \nu} \right) d\Gamma dt &\leq \int_0^T [\|A \Delta W\|_{[L^2(\Gamma)]^2} \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2] dt \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2C} \int_0^T [\|A \Delta W\|_{[L^2(\Gamma)]^2}^2 + c_{\epsilon} \int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2] dt,
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

onde escolhemos a constante C sendo a mesma presente em (4.52).

Também, como $\mu \in (0, \frac{1}{2})$, temos que

$$\begin{aligned}
 a(AW, A_D^{-1} \Theta) &= \int_{\Omega} [AW_{xx} A_D^{-1} \Theta_{xx} + AW_{yy} A_D^{-1} \Theta_{yy} + \mu(AW_{xx} A_D^{-1} \Theta_{yy} + AW_{yy} A_D^{-1} \Theta_{xx}) \\
 &\quad + 2(1 - \mu)AW_{xy} A_D^{-1} \Theta_{xy}] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} [(AW_{xx} + \mu AW_{yy}) A_D^{-1} \Theta_{xx} + (\mu AW_{xx} + AW_{yy}) A_D^{-1} \Theta_{yy} \\
 &\quad + 2(1 - \mu)AW_{xy} A_D^{-1} \Theta_{xy}] d\Omega \\
 &\leq \int_{\Omega} [A(W_{xx} + W_{yy}) A_D^{-1} \Theta_{xx} + A(W_{xx} + W_{yy}) A_D^{-1} \Theta_{yy} + AW_{xy} A_D^{-1} \Theta_{xy}] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} [A \Delta W A_D^{-1} \Theta_{xx} + A \Delta W A_D^{-1} \Theta_{yy} + AW_{xy} A_D^{-1} \Theta_{xy}] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} [-AW \Theta_{xx} - AW \Theta_{yy} + AW_{xy} A_D^{-1} \Theta_{xy}] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} [-AW \Delta \Theta + AW_{xy} A_D^{-1} \Theta_{xy}] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} [-A \Delta W \Theta + AW_{xy} A_D^{-1} \Theta_{xy}] d\Omega.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|a(AW, A_D^{-1}\Theta)| &\leq c\{\|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 + \|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|A_D^{-1}\Theta_{xy}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2\} \\
&\leq c\{\|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 + \|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|A_D^{-1}\Theta\|_{[H^2(\Omega)]^2}^2\} \\
&\leq c\{\|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 + \|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2\} \\
&\leq c\{\|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 + \|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2\} \\
&\leq c\|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\
&\leq c(A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2.
\end{aligned} \tag{4.93}$$

De (4.91), (4.92), (4.93) e do Lema 4.10, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T (A\Delta^2 W, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \right| &\leq c \int_0^T [(A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2] dt \\
&\quad + \frac{\epsilon}{2C} \int_0^T \|A\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + c_\epsilon \int_0^T \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^T (A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + c_\epsilon \int_0^T \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt \\
&\quad + \frac{\epsilon}{2} \left(\int_0^T [(A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} + \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2] dt + \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \right) + c_\epsilon \int_0^T \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt \\
&\leq \epsilon \left(\int_0^T [(A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} + \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2] dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \right) + c_\epsilon \int_0^T \|\nabla\Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

(A.3) Por fim, para o termo $\int_0^T (C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt$, temos

$$\int_0^T (C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt = - \int_0^T (C\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt. \tag{4.95}$$

(A.4) De (4.85), temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta W_{tt} + A\Delta^2 W + C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\
&= \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T (A\Delta^2 W + C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\
&\quad + \int_0^T (C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^T (A\Delta^2 W + C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T (C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \right|. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Consideremos

$$k = -\frac{b_{12}c_{21}}{d} = -\frac{b_{12}c_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}.$$

De (4.90), temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt - k \int_0^T \left(\rho_1 \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_1 \|\nabla w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \rho_2 \|\chi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_2 \|\nabla \chi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \right| \\ & \leq \left(\int_0^T [\|R^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|G^{\frac{1}{2}} \nabla W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2] dt + \frac{1}{2} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \\ & \quad c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \|w_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & k \int_0^T (\rho_1 \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_1 \|\nabla w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_2 \|\chi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_2 \|\nabla \chi_t\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \\ & \leq \left| \int_0^T (RW_{tt} - G\Delta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \right| + \epsilon \left(\int_0^T [\|R^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|G^{\frac{1}{2}} \nabla W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2] dt \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \right) + c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Substituindo k e (4.96) nesta última expressão, obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{b_{12}c_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \int_0^T (\rho_1 \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_1 \|\nabla w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_2 \|\chi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_2 \|\nabla \chi_t\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \\ & \leq \left| \int_0^T (A\Delta^2 W + C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T (C\Delta\Theta, A_D^{-1}\Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \right| \\ & \quad + \epsilon \left(\int_0^T [\|R^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|G^{\frac{1}{2}} \nabla W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2] dt + \frac{1}{2} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \\ & \quad + c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.97)$$

De (4.94), (4.95) e (4.97), obtemos

$$\begin{aligned}
& - \frac{b_{12}c_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} \int_0^T (\rho_1 \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_1 \|\nabla w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_2 \|\chi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_2 \|\nabla \chi_t\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \\
& \leq \epsilon \left(\int_0^T [(A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} + \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2] dt + \frac{1}{2} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \\
& + c_\epsilon \int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \int_0^T (C\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \epsilon \left(\int_0^T [\|R^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \right. \\
& + \|G^{\frac{1}{2}} \nabla W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2] dt + \frac{1}{2} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 \Big) + c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]}^2 \right. \\
& \left. + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]}^2 \right).
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
& \left(- \frac{b_{12}c_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} - 2\epsilon \right) \int_0^T \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \\
& \leq c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]}^2 \right) \quad (4.98) \\
& + \epsilon \left(\int_0^T [(A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} + \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2] dt \right).
\end{aligned}$$

(A.5) Para majorar a norma da componente W , multiplicamos a primeira equação de (4.41) por W e integramos de 0 a T obtendo

$$\int_0^T (P_{RG} W_{tt}, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt = - \int_0^T (A\Delta^2 W, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T (C\Delta \Theta, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& (P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_{tt}, P_{RG}^{\frac{1}{2}} W)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T - \int_0^T \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \\
& = - \int_0^T (A\Delta^2 W, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T (C\nabla \Theta, \nabla W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (A\Delta^2 W, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\
& = (P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_{tt}, P_{RG}^{\frac{1}{2}} W)_{[L^2(\Omega)]^2} \Big|_0^T - \int_0^T \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + \int_0^T (C\nabla \Theta, \nabla W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\
& \leq \epsilon \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + c_\epsilon \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \int_0^T \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_\epsilon \int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + \epsilon \int_0^T \|\Delta W\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \\
& \leq \epsilon \| [W_0, W_1, \Theta_0]_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \| P_{RG}^{\frac{1}{2}} W(t) \|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \int_0^T \| P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t \|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \\
& + c_\epsilon \int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + \epsilon \int_0^T (A \Delta^2 W, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(1 - \epsilon) \int_0^T (A \Delta^2 W, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt & \leq \int_0^T \| P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t \|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + c_\epsilon \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right. \\
& \left. + \| P_{RG}^{\frac{1}{2}} W \|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 \right) + \epsilon \| [W_0, W_1, \Theta_0]_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Somando (4.98) e (4.99), obtemos

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{b_{12}c_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} - 2\epsilon \right) \int_0^T \| P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t \|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + (1 - \epsilon) \int_0^T (A \Delta^2 W, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\
& \leq c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \| W_t \|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 \right) \\
& + \epsilon \left(\int_0^T [(A \Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} + \| [W_0, W_1, \Theta_0]_{\mathcal{H}}^2] + \int_0^T \| P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t \|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \right. \\
& \left. + c_\epsilon \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \| P_{RG}^{\frac{1}{2}} W \|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 \right) + \epsilon \| [W_0, W_1, \Theta_0]_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{b_{12}c_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} - 2\epsilon - 1 \right) \int_0^T \| P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t \|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + (1 - 2\epsilon) \int_0^T (A \Delta^2 W, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\
& \leq c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \| W_t \|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 \right. \\
& \left. + \| P_{RG}^{\frac{1}{2}} W \|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 \right) + 2\epsilon \| [W_0, W_1, \Theta_0]_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Note que devemos ter

$$\frac{b_{12}c_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} - 2\epsilon - 1 > 0 \Rightarrow \epsilon < -\frac{b_{12}c_{21}}{2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)} - \frac{1}{2}$$

e,

$$-\frac{b_{12}c_{21}}{2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow -\frac{b_{12}c_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} > 1.$$

Também,

$$1 - 2\epsilon > 0 \Rightarrow \epsilon < \frac{1}{2}.$$

Logo, devemos tomar $0 < \epsilon < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{b_{12}c_{21}}{2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)} - \frac{1}{2} \right\}$. Ainda, a condição H_4 sobre o problema (4.4) implica que $-\frac{b_{12}c_{21}}{2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)} > 1$. Assim, tomando

$$D = \min \left\{ \frac{b_{12}c_{21}}{2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)} - 2\epsilon - 1, 1 - 2\epsilon \right\}$$

em (4.100), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (A\Delta^2 W, W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \\ & \leq c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 \right) + \frac{2\epsilon}{D} \| [W_0, W_1, \Theta_0]_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Disto e da definição de norma em $\mathcal{H}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|[W(t), W_t(t), \Theta(t)]\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & = \int_0^T (A\Delta W, \Delta W)_{[L^2(\Omega)]^2} dt + \int_0^T \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + \int_0^T (B\nabla \Theta, \nabla \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \\ & \leq c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 + \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 \right) \\ & \quad + \frac{2\epsilon}{D} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Da demonstração da Proposição 4.6,

$$\|[W(0), W_t(0), \Theta(0)]\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|[W(t), W_t(t), \Theta(t)]\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.102}$$

Da relação (4.42), de (4.101) e (4.102), obtemos

$$\begin{aligned} & T \left[\|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2 - 2 \int_0^T (aN\Theta, \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt - 2 \int_0^T (B\nabla \Theta, \nabla \Theta)_{[L^2(\Omega)]^2} dt \right] \\ & = T \|[W(0), W_t(0), \Theta(0)]\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \leq \int_0^T \|[W(t), W_t(t), \Theta(t)]\|_{\mathcal{H}}^2 dt \\ & \leq c \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 \right) + \frac{2\epsilon}{D} \|[W_0, W_1, \Theta_0]\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno em (4.103), segue que

$$\begin{aligned} \| [W_0, W_1, \Theta_0] \|_{\mathcal{H}}^2 &\leq c_T \left(\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt + \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.104)$$

A desigualdade (4.47) é finalmente obtida de (4.104) e da seguinte proposição:

Proposição 4.11 *A desigualdade (4.104) implica a existência de uma constante C_T tal que a solução correspondente $[W, W_t, \Theta]$ de (4.40) satisfaz*

$$\|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|W_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 \leq C_T \int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt.$$

Demonstração: Suponhamos que o resultado é falso. Então, existe uma sequência $\{[W_0^n, W_1^n, \Theta_0^n]\}_{n=1}^\infty \subset D(\mathcal{A})$ e uma sequência de soluções correspondentes $\{[W^n, W_t^n, \Theta^n]\}_{n=1}^\infty \subset C([0, T], D(\mathcal{A}))$ satisfazendo

$$\|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W^n\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|W_t^n\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\Theta^n\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 = 1, \quad \forall n, \quad (4.105)$$

$$\int_0^T \|\nabla \Theta\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty. \quad (4.106)$$

De (4.104) e (4.106) temos que a sequência $\{[W_0^n, W_1^n, \Theta_0^n]\}_{n=1}^\infty$ é limitada uniformemente em n . Logo, existe uma subsequência, a qual ainda denotaremos por $\{[W_0^n, W_1^n, \Theta_0^n]\}_{n=1}^\infty$ e $[\widetilde{W}_0, \widetilde{W}_1, \widetilde{\Theta}_0] \in \mathcal{H}$ tal que $\{[W_0^n, W_1^n, \Theta_0^n]\}_{n=1}^\infty$ converge fraco para $[\widetilde{W}_0, \widetilde{W}_1, \widetilde{\Theta}_0]$ em $\mathcal{H}$.

De (4.39) e do fato do semigrupo $\{e^{\mathcal{A}^* t}\}_{t \geq 0}$ ser de contração, temos

$$\|[W^n, W_t^n, \Theta^n]\|_{\mathcal{H}} \leq \|[W_0^n, W_1^n, \Theta_0^n]\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, a sequência $\{[W^n, W_t^n, \Theta^n]\}_{n=1}^\infty$ também é limitada uniformemente em n . Portanto, existe uma subsequência, a qual ainda denotaremos por $\{[W^n, W_t^n, \Theta^n]\}_{n=1}^\infty$ que converge fraco estrela (notação: $\overset{*}{\rightharpoonup}$) em $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$. Assim, existe $[\widetilde{W}, \widetilde{W}_t, \widetilde{\Theta}] \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ tal que

$$[W^n, W_t^n, \Theta^n] \overset{*}{\rightharpoonup} [\widetilde{W}, \widetilde{W}_t, \widetilde{\Theta}] \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}). \quad (4.107)$$

Além disso, $[\widetilde{W}, \widetilde{W}_t, \widetilde{\Theta}]$ é solução de (4.40) com dados finais $[\widetilde{W}_0, \widetilde{W}_1, \widetilde{\Theta}_0]$. De (4.107),

$$\begin{aligned} W^n &\xrightarrow{*} \widetilde{W} \text{ em } [L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))]^2, \\ W^n &\xrightarrow{*} \widetilde{W}_t \text{ em } L^\infty(0, T; H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega)), \\ \Theta^n &\xrightarrow{*} \widetilde{\Theta} \text{ em } [L^\infty(0, T; L^2(\Omega))]^2. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Das convergências acima temos $\{W^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em $[L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))]^2$ e $\{W_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em $L^\infty(0, T; H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega))$. Pela Proposição 2.35, temos

$$W^n \longrightarrow \widetilde{W} \text{ em } C([0, T], H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega)). \quad (4.109)$$

Note que

$$\begin{aligned} \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} W^n - P_{RG}^{\frac{1}{2}} \widetilde{W}\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2} &= \|P_{RG}^{\frac{1}{2}} (W^n - \widetilde{W})\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2} \\ &= \|W^n - \widetilde{W}\|_{C([0,T], H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega))}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Logo, de (4.109), segue que

$$P_{RG}^{\frac{1}{2}} W^n \longrightarrow P_{RG}^{\frac{1}{2}} \widetilde{W} \text{ em } [C([0, T], L^2(\Omega))]^2. \quad (4.111)$$

Agora, para $[W_0^n, W_1^n, \Theta_0^n] \in D(\mathcal{A}) = \{[V_0, V_1, \Theta_0] \in [H_0^2(\Omega)]^2 \times [H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega)] \times [L^2(\Omega)]^2; \mathring{A}V_0 \in H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)\}$ temos que a solução $[W^n, W_t^n, \Theta^n] \in C([0, T], D(\mathcal{A}))$ e $[W_t^n, W_{tt}^n, \Theta_t^n] \in C([0, T], \mathcal{H})$. Logo,

$$\begin{aligned} W^n &\in [C([0, T], H_0^2(\Omega))]^2, \\ W_t^n &\in [C([0, T], H_0^2(\Omega))]^2, \\ \Theta^n &\in [C([0, T], H_0^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))]^2, \\ \mathring{A}W^n &\in C([0, T], H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} W_t^n &\in [C([0, T], H_0^2(\Omega))]^2, \\ W_{tt}^n &\in C([0, T], H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)), \\ \Theta^n &\in [C([0, T], L^2(\Omega))]^2. \end{aligned}$$

Também, temos que a solução $[W^n, W_t^n, \Theta^n]$ de (4.40) satisfaz

$$\begin{cases} RW_{tt} - G\Delta W_{tt} + A\Delta^2 W + C\Delta\Theta = 0, \\ B\Theta_t + C\Delta\Theta - aN\Theta - C\Delta W_t = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$P_{RG}W_{tt}^n = -C\Delta(\Delta W^n) - A\Delta\Theta^n. \quad (4.112)$$

Na sequência, consideremos a extensão

$$\begin{aligned} P_{RG}^* : [L^2(\Omega)]^2 &\longrightarrow \{[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'\}^2 \\ Z &\longmapsto P_{RG}^*Z : H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} ; \end{aligned}$$

$\langle P_{RG}^*Z, V \rangle_{\{[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'\}^2 \times [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2} = (Z, P_{RG}V)_{L^2(\Omega)}$, a qual é invertível e é uma isometria.

De (4.108), $\{W^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))]^2$. Logo, $\{\Delta W^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; L^2(\Omega))]^2$. O que implica $\{\Delta W^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em $[L^\infty(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]')]^2$. Consequentemente, $\{C\Delta^2 W^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]')]^2$.

Novamente, de (4.108), $\{\Theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; L^2(\Omega))]^2$. Logo, $\{\Delta\Theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]')]^2$. Assim, $\{A\Delta\Theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]')]^2$. Como $P_{RG}W_{tt}^n = -C\Delta(\Delta W^n) - A\Delta\Theta^n$, segue que W_{tt}^n é limitada em $[L^\infty(0, T; L^2(\Omega))]^2$. Mais uma vez, de (4.108), $\{W_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega))$. Como $H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega) \hookrightarrow [L^2(\Omega)]^2$, pela Proposição 2.35, temos

$$W_t^n \longrightarrow \widetilde{W}_t \text{ em } [C([0, T], L^2(\Omega))]^2. \quad (4.113)$$

Ainda, de (4.108), $\{\Theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; L^2(\Omega))]^2$ e $\{W_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; H_{0,\rho_1,\gamma_1}^1(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^1(\Omega))$. Logo, $\{\Delta\Theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]')]^2$ e $\{\Delta W_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega))$. Como

$$\Theta_t = B^{-1}A\Delta W_t - (B^{-1}A\Delta - aB^1N)\Theta,$$

segue que $\{\Theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]')]^2$. Pela cadeia de imersões

$$[L^2(\Omega)]^2 \hookrightarrow H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \{[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'\}^2$$

temos, pela Proposição 2.35, que

$$\Theta^n \longrightarrow \widetilde{\Theta} \text{ em } C([0, T], H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)). \quad (4.114)$$

De (4.111), (4.113), (4.114) e tomando o limite em (4.105),

$$\|P_{RG}^{\frac{1}{2}} \widetilde{W}\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\widetilde{W}_t\|_{[C([0,T], L^2(\Omega))]^2}^2 + \|\widetilde{\Theta}\|_{[C([0,T], H^{-1}(\Omega))]^2}^2 = 1, \quad \forall n. \quad (4.115)$$

Na sequência vamos mostrar que $\widetilde{W} = 0$, $\widetilde{W}_t = 0$ e $\widetilde{\Theta} = 0$, obtendo uma contradição com (4.115).

Para $\widetilde{\Theta}$, pela desigualdade de Poincaré, temos

$$0 \leq \int_0^T \|\Theta^n\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \leq \int_0^T \|\nabla \Theta^n\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt. \quad (4.116)$$

De (4.106) e (4.116), $\{\Theta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(0, T; L^2(\Omega))]^2$. Logo, existe $z \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2$ tal que

$$\Theta^n \rightharpoonup z \text{ em } [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2 \hookrightarrow L^2(0, T; H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)). \quad (4.117)$$

De (4.114),

$$\Theta^n \rightharpoonup \widetilde{\Theta} \text{ em } C(0, T; H_{\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)). \quad (4.118)$$

De (4.113), (4.114) e unicidade do limite fraco, $z = \widetilde{\Theta}$ em $L^2(0, T; H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega))$.

Mas $z \in L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)$, logo

$$\Theta^n \rightharpoonup \widetilde{\Theta} \text{ em } [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2. \quad (4.119)$$

De (4.116)

$$\Theta^n \longrightarrow 0 \text{ em } [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2. \quad (4.120)$$

De (4.119), (4.120) e da unicidade do limite fraco segue que $\widetilde{\Theta} = 0$ em $[L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2$. Como $[L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2 \hookrightarrow L^2(0, T; H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega))$, de (4.114), temos

$$\widetilde{\Theta} = 0 \text{ em } C([0, T], H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega)). \quad (4.121)$$

Temos, então, que $[\widetilde{W}, \widetilde{W}_t, 0]$ é uma solução fraca de (4.40), logo

$$\begin{cases} R\widetilde{W}_{tt} + A\Delta^2 \widetilde{W} = 0, \\ -C\Delta \widetilde{W}_t = 0. \end{cases} \quad (4.122)$$

De (4.122)₂ e do fato que $\widetilde{W}_t \in C([0, T], H_{0,\rho_1,\gamma_1}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\rho_2,\gamma_2}^{-1}(\Omega))$ segue que

$$\begin{cases} \Delta \widetilde{W}_t = 0 \text{ em } \Omega, \\ \widetilde{W}_t = 0 \text{ em } \Gamma. \end{cases} \quad (4.123)$$

Portanto, $\widetilde{W}_t = 0$ em Ω . O que implica $\widetilde{W}_{tt} = 0$ em Ω . Assim, de (4.123) e (4.40)

$$\begin{cases} \Delta^2 \widetilde{W} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \widetilde{W} = 0 & \text{em } \Gamma, \\ \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \Gamma. \end{cases}$$

O que implica $\widetilde{W} = 0$ em Ω .

Mostramos que $\widetilde{W} = 0$, $\widetilde{W}_t = 0$ e $\widetilde{\Theta} = 0$. Uma contradição com (4.115). $\square$

Com a proposição anterior concluímos a validade da desigualdade (4.47) para dados $[W_0, W_1, \Theta_0]$ em $D((\mathcal{A}^*)^2)$. A controlabilidade exata do problema (4.4) é obtida da desigualdade (4.47) e por um argumento de densidade, tal controlabilidade é apresentada no principal teorema deste capítulo:

Teorema 4.12 *O problema (4.4) é exatamente controlável no tempo arbitrário $T > 0$. Isto é, para qualquer $T > 0$ e dados $[Z_0, Z_1, \Psi_0]$, $[Z_0^T, Z_1^T, \Psi_0^T] \in \mathcal{H}$, podemos encontrar uma função controle $\bar{U} \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4$ tal que a solução correspondente $[Z, Z_t, \Psi]$ de (4.4) satisfaz $[Z(T), Z_t(T), \Psi(T)] = [Z_0^T, Z_1^T, \Psi_0^T]$.*

Demonstração: Já vimos que a desigualdade (4.47) é válida para dados $[W_0, W_1, \Theta_0] \in D((\mathcal{A}^*)^2)$. Para $[W_0, W_1, \Theta_0] \in \mathcal{H}$ obtemos que a desigualdade (4.47) é válida usando um argumento de densidade. De fato, como $D((\mathcal{A}^*)^2)$ é denso em $\mathcal{H}$ temos que dado $[W_0, W_1, \Theta_0] \in \mathcal{H}$ existe uma sequência $[W_0^n, W_1^n, \Theta_0^n] \subset D((\mathcal{A}^*)^2)$ tal que

$$[W_0^n, W_1^n, \Theta_0^n] \longrightarrow [W_0, W_1, \Theta_0] \text{ em } \mathcal{H}. \quad (4.124)$$

De (4.47),

$$\int_0^T \|\nabla \Theta^n(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt \geq C_T \left\| \begin{bmatrix} W_0^n \\ W_1^n \\ \Theta_0^n \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.125)$$

onde Θ^n é a componente térmica da solução $[W^n, W_t^n, \Theta^n]$ correspondente aos dados $[W_0^n, W_1^n, \Theta_0^n]$.

Tomando o limite em (4.125) e considerando (4.124), obtemos

$$\int_0^T \|\nabla \Theta(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt \geq C_T \left\| \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.126)$$

ou seja, a desigualdade (4.47) é válida para dados $[W_0, W_1, \Theta_0] \in \mathcal{H}$. Portanto, conforme vimos anteriormente, a validade de (4.126) é equivalente a sobrejetividade de $\mathcal{L}_T \in \mathcal{L}([L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4, \mathcal{H})$. Isto prova que o problema (4.4) é exatamente controlável. De fato, considerando a forma abstrata (4.33) do problema (4.4) e sendo $\mathcal{L}_T$ sobrejetora, dado $V \in \mathcal{H}$ tal que

$$V = V_1 - e^{At}V_0, \quad (4.127)$$

com $V_0, V_1 \in \mathcal{H}$, existe um controle $\bar{U} \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^4$ tal que

$$\mathcal{L}_T \bar{U} = V. \quad (4.128)$$

Substituindo (4.127) em (4.128) obtemos

$$V = V_1 - e^{At}V_0 = \int_0^T e^{At} \mathcal{B} \bar{U}(t) dt.$$

Logo,

$$V_{\bar{U}}(T) = e^{At}V_0 + \int_0^T e^{At} \mathcal{B} \bar{U}(t) dt.$$

Assim, obtemos uma solução $V_{\bar{U}}(\cdot)$ de (4.33) tal que $V_{\bar{U}}(T) = V_1$ e $V_{\bar{U}}(0) = V_0$. Ou seja, (4.33) é exatamente controlável. Sendo (4.33) a formulação abstrata do problema (4.4) com $V = \begin{bmatrix} Z \\ Z_t \\ \Psi \end{bmatrix}$

e $V_0 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \Psi_0 \end{bmatrix}$, o resultado segue.

□

BIBLIOGRAFIA

- [1] AVALOS, G. **Exact Controllability of a Thermoelastic System with Control in the Thermal Component Only.** Differential and Integral Equations, vol. 13, number 4-6: 2000, pp. 613-630.
- [2] BALL, J. M . **Strongly Continous Semigroups, Weak Solutions, and the Variation of Constants Formula.** Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 63, number 2: 1997.
- [3] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** Springer, Londres, Heidelberg, Dordrecht e Nova Iorque, 2011.
- [4] CARRASCO, A.; LEIVA, H.; SANCHEZ, J. **Controllability of the Semilinear Beam Equation.** Journal of Dynamical and Control Systems, vol.19, Issue 4, 2013, pp 553–568.
- [5] CARRASCO, A.; LEIVA, H.; UZCÁTEGUI, J. **Controlabilidad de Ecuaciones de Evolución Semilineal.** Ediciones IVIC. XXVIII Escuela Venezolana de Matemáticas, EMALCA-VENEZUELA, 2015. ISBN: 978-980-261-162-1.
- [6] CAVALCANTI, M. M. e CAVALCANTI, V. N. D. **Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.** Eduem, Maringá, Brasil, 2009.
- [7] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D. e KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional.** Eduem, Maringá, Brasil, 2011.
- [8] CAZENAVE, T.; HARAUX, A. **An Introduction to Semilinear Evolution Equations.** Translated by Yvan Martel. Clarendon Press: Oxford, 1998.

-
- [9] CURTAIN R.F.; PRITCHARD A.J. **Infinite Dimensional Linear Systems Theory**. Vol. 8 of Lectures Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, Germany, 1978.
- [10] CURTAIN R.F.; ZWART H.J. **An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory**. Vol. 21 of Text in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [11] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.
- [12] FRID, H. **Introdução a Integral de Lebesgue**. IMCA - Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Peru.
- [13] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2ed., 2012.
- [14] ITURRIAGA, E.; LEIVA, H. **A Necessary and Sufficient Condition for the Controllability of Linear Systems in Hilbert Spaces and Applications**. IMA Journal of Mathematical Control and Information, Volume: 25, Issue 3, pp. 269–280, September 2008.
- [15] KESAVAN, S. **Topics in Functional Analysis and Applications**. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [16] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis With Applications**. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [17] LEE, E.B.; MARKUS L. **Foundations of Optimal Control Theory**. John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [18] LEIVA H. **A Lemma on C_0 -Semigroups and Applications PDEs Systems**. Quaestiones Mathematicae, vol. 26, pp. 247-265, 2003.
- [19] LEIVA H. **Approximate Controllability of Semilinear Impulsive Evolution Equations**. Abstract and Applied Analysis, Article ID 797439, 7 pages, 2014.
- [20] LEIVA H. **Exact Controllability of the Suspension Bridge Model Proposed by Lazer and McKenna**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 309, pp. 404-409, 2005.

- [21] LEIVA H.; ZAMBRANO, H. **Rank condition for the controllability of a linear time-varying system.** International Journal of Control, vol. 72, Issue 10, pp. 929-931, 2010.
- [22] LIMA, E. L. **Curso de Análise.** Vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [23] LAGNESE, J. E. **Boundary Stabilization of Thin Plates.** SIAM- Studies in Applied Mathematics, 10, 1989.
- [24] LIONS, J. L. **Contrôlabilité Exacte, Stabilisation de Systèmes Distribuées.** Tome1, Masson RMA8, Paris, 1988.
- [25] LIU, Y. **Instability an Blow-up of Solutions to a Generalized Boussinesq Equation.** SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol.26, number 6, 1995, pp. 1527-1546.
- [26] LIU, Z.; ZHENG, S. **Semigroups associated with dissipative systems.** Chapman & Hall/CRC, London, 1999.
- [27] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A. de. **A Integral de Lebesgue.** Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 18, Ed. 4, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.
- [28] MEDEIROS, L. A.; MILLA MIRANDA, M. **Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos.** Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2000.
- [29] MICU, S.; ZUAZUA E. **An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations.** Quelques questions de théorie du contrôle. Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann, pp. 69-157, 2004.
- [30] RIVERA, J. E. M. **Teoria de Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.** Textos Avançados, LNCC, Petrópolis - RJ, 1999.
- [31] RIVERA, J. E. M.; NASO, M. G.; QUINTANILLA, R. **Decay of solutions for a mixture of thermoelastic solids with different temperatures.** Computers and Mathematics with Applications, vol. 71, 2016, pp. 991-1009.
- [32] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.** Springer-Verlag, New York, 1983.

- [33] ROSENAU, P. **Dynamics of dense lattices**. Physical Review B, vol. 36, number 11, 1987.
- [34] SHEN, J.; WANG, Y.; XU, R. **Global existence of Solutions for 1-D Nonlinear Wave Equation of Sixth Order at High Initial Energy Level**. Boundary Value Problems, 2014, 2014:31.
- [35] SIMON, J. **Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$** . Annali di Matematica Pura ed Applicata (IV), Vol. CXLVI, pp. 65-96, 1987.
- [36] UZCÁTEGUI, J. **Controlabilidad de Sistemas de Dimensión Infinita: Continuos y Discretos**. Tese de Doutorado. Mérida-Venezuela, 2009.
- [37] VRABIE, I. I. **C_0 -Semigroups and Applications**. North-Holland Mathematics Studies 191, New York, 2003.
- [38] WANG, S.; XUE, H. **Global Solution for a Generalized Boussinesq Equation**. Applied Mathematics and Computation, vol. 204, 2008, pp. 130-136.
- [39] WANG, Y.Z.; WANG, Y.X. **Existence and Nonexistence of Global Solutions for a Class of Nonlinear Wave Equations of Higher Order**. Nonlinear Analysis, vol. 72, 2010, pp. 4500-4507.