

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

MARCELO OSNAR RODRIGUES DE ABREU
Orientador: Marcelo Escudeiro Hernandes

Sobre lacunas especiais e semirraízes de ramos planos

Maringá - PR
23 de agosto de 2019

MARCELO OSNAR RODRIGUES DE ABREU

Sobre lacunas especiais e semirraízes de ramos planos

Tese apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Escudeiro
Hernandes

Maringá - PR

23 de agosto de 2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR, Brasil)

A162s Abreu, Marcelo Osnar Rodrigues de
Sobre lacunas especiais e semiraízes de ramos
planos / Marcelo Osnar Rodrigues de Abreu. --
Maringá, PR, 2019.
94 p.: il. color.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Escudeiro
Hernandes.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
2019.

1. Geometria algébrica. 2. Curvas planas
(Geometria). 3. Semirraízes (Geometria). 4. Lacunas
especiais (Geometria). 5. Número de Tjurina. I.
Hernandes, Marcelo Escudeiro, orient. II.
Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências
Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-
Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 23.ed. 516.3

Márcia Regina Paiva de Brito – CRB-9/1267

MARCELO OSNAR RODRIGUES DE ABREU

SOBRE LACUNAS ESPECIAIS E SEMIRRAÍZES DE RAMOS PLANOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



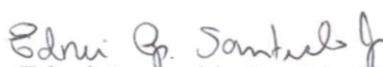
Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes
Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



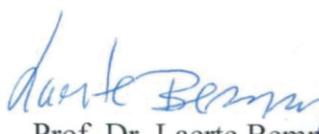
Prof. Dr. Renato Vidal Martins
Universidade Federal de Minas Gerais



Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
Universidade Federal de São Carlos



Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Laerte Bemm
Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 12 de julho de 2019.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

A minha família por toda estrutura que me possibilitou dedicar aos estudos.

A minha namorada, Aline, pelo apoio e ajuda.

Ao Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes, por toda a ajuda e ensinamentos desde o início da graduação.

Ao programa de pós-graduação em matemática, a Lúcia e aos professores pela boa formação que me proporcionaram.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos como dados analíticos de uma semirraiz C_i de uma curva C determinam dados analíticos da própria curva C .

Mais especificamente, considerando o conjunto de valores de diferenciais Λ_i de C_i , mostramos como podemos determinar parte do conjunto de valores de diferenciais Λ de C . Como consequência deste fato, podemos obter um limitante superior para o número τ de Tjurina de C em termos do semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ de C e relacionar τ com o número de Tjurina de C_i .

Particularmente, para o caso em que $\text{mdc}(v_0, \dots, v_{g-1}) = 2$, mostramos que τ se expressa única e exclusivamente em termos de Γ , generalizando um resultado de Luengo e Pfister (1990), bem como respondemos de modo mais geral a uma questão de Watari (2019).

Palavras-chaves: curvas irredutíveis planas, semirraízes, lacunas especiais, número de Tjurina.

Abstract

In this work we study how the analytical data of a semiroot C_i of an irreducible plane curve C determine the analytical data of C itself.

More specifically, considering the set of values of differentials Λ_i of C_i we show how we can determine part of the set of values of differentials Λ of C . As a consequence of this fact, we can obtain an upper bound for the Tjurina number τ of C by means of the semigroup $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ of C and we relate τ with the Tjurina number of C_i .

Specifically, for the case $\gcd(v_0, \dots, v_{g-1}) = 2$, we show that τ can be expressed solely in terms of Γ that generalizes a result by Luengo e Pfister (1990) and we answer in a more general way a question asked by Watari (2019).

Key-words: irreducible plane curves, semiroots, special gaps, Tjurina number.

Lista de símbolos

O índice f presente em alguns dos símbolos abaixo tem a função de indicar que tal símbolo está associado a uma curva C_f . Ao longo do texto, alguns destes símbolos poderão ser apresentados sem o índice a fim de aliviar a notação. Tenha em mente que ao omitirmos o índice fica entendido que tal símbolo está associado a uma curva C_f , a qual deve estar fixada em tal contexto e jamais estará relacionado a uma de suas semirraízes.

$\mathbb{C}\{x, y\}$	anel das séries de potências convergentes	p. 1
$mult(f)$	multiplicidade da série de potências f	p. 1
$\mathcal{M} = \langle x, y \rangle$	ideal maximal do anel $\mathbb{C}\{x, y\}$	p. 1
C_f	curva plana definida pela série $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$	p. 3
$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f \rangle}$	anel local de C_f	p. 4
g_f	gênero da curva C_f	p. 6
$\beta_j, j = 1, \dots, g_f$	expoentes característicos da curva C_f	p. 6
ε_j	$mdc(\beta_0, \dots, \beta_j)$	p. 6
$\overline{\mathcal{O}_f}$	fecho integral do anel local \mathcal{O}_f	p. 7
$\nu_f(h)$	valoração da série h com respeito à f	p. 7
Γ_f	semigrupo da curva C_f	p. 7
μ_f	número de Milnor da curva C_f	p. 7
$\#A$	denota a cardinalidade do conjunto A	p. 7
$\mathbb{C}((x))$	corpo de frações do anel $\mathbb{C}\{x\}$	p. 8

$gr_y(P) = gr(P)$	grau em relação a y do polinômio P	p. 9
(t.o.s.)	termos de ordem superior	p. 9
f_k	k -ésima semirraiz de f	p. 11
$\Gamma_{f_k} = \Gamma_k$	semigrupo da k -ésima semirraiz de f	p. 11
$\mu_{f_k} = \mu_k$	número de Milnor da k -ésima semirraiz de f	p. 14
τ_f	número de Tjurina da curva C_f	p. 15
λ	invariante de Zariski	p. 15
Ω^1	$\mathbb{C}\{x, y\}$ -módulo das 1-formas holomorfas	p. 15
$\mathcal{F}(f)$	$f \cdot \Omega^1 + \mathbb{C}\{x, y\} \cdot df$	p. 15
$\Omega_f = \Omega_{\mathcal{O}_f/\mathbb{C}} = \frac{\Omega^1}{\mathcal{F}(f)}$	módulo de diferenciais de Kähler de C_f	p. 15
\mathcal{T}_f	submódulo de torção de Ω_f	p. 16
Λ_f	conjunto de valores de Ω_f	p. 16
$f \cdot \Omega(\log C_f)$	$\left\{ w \in \Omega^1; \frac{w \wedge df}{dx \wedge dy} \in \langle f \rangle \right\}$	p. 18
$res(\omega)$	resíduo de ω	p. 19
\mathcal{R}_f	módulo de resíduos logarítmicos de C_f	p. 19
Δ_f	conjunto de valores de \mathcal{R}_f	p. 20
$P_f(\omega)$	polar da 1-forma ω	p. 22
$(J(f) : f)$	ideal cofator de f	p. 22
\mathcal{P}_s	elementos de $\mathbb{C}\{x\}[y]$ com grau em y menor que s	p. 25

$\mathcal{E}(f)$	denota o conjunto $\mathcal{P}_n dx + \mathcal{P}_{n-1} dy$	p. 25
$\mathcal{G}(f)$	denota o conjunto $\mathbb{C}\{x, y\}df + \mathbb{C}\{x, y\}f dx$	p. 25
$\mathcal{H}(f)$	denota o conjunto $\mathbb{C}\{x\} \cdot df + \Omega^1 \cdot f$	p. 25
$K = \mathbb{C}\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right)$	corpo de frações de $\mathbb{C}\left\{x^{\frac{1}{n}}\right\}$	p. 27
\mathcal{P}_s^K	elementos de $K[y]$ com grau em y menor que s	p. 27
Θ_f	função $\Theta_f : \Lambda_k \rightarrow \Gamma_f \cup \{\infty\}$	p. 54
ρ_k	função $\rho_k : \Lambda_k \setminus \Gamma_k \rightarrow \Lambda_f \setminus \Gamma_f$	p. 56
(t.o.p.i.)	termos de ordem par intermediários	p. 80
$\mathbf{E}_i(h)$	menor expoente divisível por ε_i , mas não divisível por ε_{i-1} , de $h(x(t), y(t))$	p. 82
$\mathbf{C}_i(h)$	coeficiente do termo de expoente $\mathbf{E}_i(h)$ em $h(x(t), y(t))$	p. 82

Sumário

Introdução	xvii
1 Preliminares	1
1.1 Séries de Potências	1
1.2 Curvas Planas	3
1.3 Classificação topológica de ramos planos	5
1.4 Semirraízes	11
1.5 Equivalência analítica	14
1.6 Resíduos logarítmicos	17
2 Lacunas especiais	21
2.1 Formas logarítmicas, diferenciais de torção e ideal cofator	21
2.2 Lacunas Especiais e Semirraízes	43
2.2.1 Valores de diferenciais em $f_k \cdot \Omega(\log C_k)$	44
2.2.2 Valores de diferenciais em $\Omega^1 \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$	49
2.2.3 A influência de Λ_k em Λ_f	58
3 Aplicações	65
3.1 Sobre as questões de Watari e Dimca-Greuel e outras conclusões	65
3.2 Semigrupos da forma $\langle 4u_0, 4u_1, 2u_2, u_3 \rangle$	78
Referências	95
Índice Remissivo	96

Introdução

A partir da década de 20 do século passado, matemáticos conseguiram grandes avanços ao utilizar técnicas e ferramentas algébricas para estudar propriedades geométricas de certos objetos, o que deu um novo rumo para a Geometria Algébrica e a Teoria de Singularidades.

Um assunto que ilustra esta associação de ideias de subáreas distintas da Matemática foi o da classificação topológica e analítica de curvas irredutíveis planas.

No caso da classificação topológica de curvas planas a questão pode ser traduzida em termos de invariantes discretos (todos equivalentes) e que caracterizam totalmente a classe topológica, como por exemplo, os expoentes característicos, o semigrupo Γ de valores, etc. As referências Brieskorn e Knörrer (1986) e Zariski (2006) abordam muito bem tal assunto.

Abhyankar e Moh (1973), introduzem o conceito de raízes aproximadas, que são casos particulares de semirraízes, de uma curva irredutível plana C_f . As semirraízes de C_f são também curvas planas irredutíveis cujo semigrupo permite recuperar parte do semigrupo de valores da curva C_f e cujo número de Milnor, um invariante topológico, pode ser relacionado com o número de Milnor de C_f . Em Popescu-Pampu (2003) encontramos uma boa abordagem do assunto.

A classificação analítica é um problema mais fino e não pode ser resolvido por meio de um conjunto discreto de invariantes. No entanto, podemos fixar uma classe topológica e estratificá-la por meio de invariantes analíticos de modo a considerar a classificação analítica em cada um dos estratos. Dentre os invariantes analíticos mais considerados na literatura destacamos o número de Tjurina τ e o conjunto de valores de diferenciais Λ . O conjunto Λ é um invariante mais fino que τ , no sentido de que Λ e Γ o determinam. Em Hefez e Hernandez (2011) é apresentada uma solução para a classificação analítica de curvas irredutíveis planas utilizando estratificação da classe topológica fixa pelo conjunto Λ .

No presente trabalho estamos interessados em abordar os invariantes analíticos mencionados anteriormente. Mais precisamente a linha mestra de nossos estudos é o enten-

dimento de como os invariantes analíticos de uma semirraiz influencia nos respectivos invariantes analíticos da curva original.

O trabalho está estruturado como descrito a seguir.

O Capítulo 1 é dedicado a apresentar os resultados conhecidos na literatura e que utilizaremos no trabalho. Abordamos sucintamente alguns resultados gerais com respeito à séries de potências, os conceitos de curvas planas, parametrizações e semirraízes que serão considerados no texto. Reservamos uma seção para reunir os principais resultados que utilizaremos relacionados à classificação topológica, analítica e os invariantes correspondentes. As noções de resíduos e formas logarítmicas, exploradas por Saito, são incluídas na última seção do capítulo. Os resultados que não julgamos clássicos são apresentados sempre mencionando uma referência em que o leitor os poderá encontrar.

No Capítulo 2 apresentamos os resultados principais deste trabalho. Explorando resultados de Briançon, Maisonobe e Torrelli mostramos como os conjuntos de valores do módulo de resíduos, do ideal cofator e o conjunto Λ se determinam mutuamente. Tais resultados, juntamente com o conhecimento de uma função que introduzimos na Seção 2.2, possibilitam descrever elementos de Λ que são obtidos por meio do respectivo conjunto associado a uma semirraiz. Estes resultados permitem obter uma estimativa para o número de elementos de $\Lambda \setminus \Gamma$ para qualquer curva que possui uma semirraiz previamente fixada.

Utilizando os resultado do Capítulo 2, apresentamos no Capítulo 3, resultados que fornecem um limitante superior para τ utilizando informações topológicas, tal resultado pode ser considerado como um análogo ao sugerido por Dimca e Greuel (2018) em que os autores sugerem um limitante inferior para τ . O resultado que apresentamos também permite estabelecer um limitante superior para τ utilizando o número de Tjurina de uma semirraiz. No caso particular de curvas C_f com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, \dots, v_{g-1}, v_g \rangle$ com $n_g = \text{mdc}(v_0, \dots, v_{g-1}) = 2$ e $g \geq 2$, mostramos que o número de Tjurina C_f é sempre o mesmo e descrito em termos topológicos, fato que mostramos não ocorrer se $n_g > 2$. Tal resultado é uma generalização do apresentado por Luengo e Pfister (1990) para curvas com semigrupo $\langle 2p, 2q, v_2 \rangle$ e responde de maneira mais geral a uma questão apresentada por Watari (2019). Finalizamos o capítulo, apresentando explicitamente uma construção

que permite obter diferenciais que atingem as ordens prescritas para uma classe de curvas com semigrupo $\langle 4u_0, 4u_1, 2u_2, u_3 \rangle$.

Preliminares

Curvas planas é um assunto muito rico em Geometria Algébrica e na Teoria de Singularidades com uma vasta literatura sobre o assunto.

Neste capítulo vamos nos limitar a apresentar os principais resultados que utilizaremos no decorrer deste trabalho, indicando referências em que uma justificativa dos mesmos possa ser encontrada. Dentre as principais referências para este capítulo destacamos os livros: Brieskorn e Knörrer (1986) e especialmente, a referência Hefez (2003) que será amplamente citada, não se limitando a este capítulo.

Antes de abordarmos curvas planas analíticas irredutíveis, tema central deste trabalho, recordemos alguns resultados referentes às séries de potências.

Embora grande parte dos conceitos e resultados deste capítulo sejam válidos em um contexto mais geral, vamos nos restringir apenas ao caso que nos será útil.

1.1 Séries de Potências

Denotamos por $\mathbb{C}\{x, y\}$ o anel de séries de potências convergentes nas variáveis x e y com coeficientes em \mathbb{C} . Dado $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, podemos escrever $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + \dots$, onde cada $P_i \in \mathbb{C}[x, y]$ é um polinômio homogêneo de grau i .

Temos que $\mathbb{C}\{x, y\}$ é um domínio Noetheriano local e de fatoração única cujo ideal maximal é $\mathcal{M} = \langle x, y \rangle$. Deste modo, um elemento $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ é invertível se, e somente se, $P_0 \neq 0$.

Seja $f \in \mathbb{C}\{x, y\} \setminus \{0\}$ tal que $f = P_n + P_{n+1} + \dots$, onde cada P_j é um polinômio homogêneo de grau j e $P_n \neq 0$. O polinômio homogêneo P_n é chamado a forma inicial de f . O natural n é chamado de **multiplicidade** de f e é denotado por $\text{mult}(f)$. Se $f = 0$, definimos $\text{mult}(f) = \infty$.

Sejam $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Temos que $\text{mult}(f \cdot g) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$, bem como $\text{mult}(f \pm g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$, com igualdade sempre que $\text{mult}(f) \neq \text{mult}(g)$.

Dizemos que $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ é *y-regular* se $\text{mult}(f(0, y)) = \text{mult}(f)$.

Dado $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ com $\text{mult}(f) = n$, sempre existe um automorfismo linear T de

$\mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $T(f)$ é y -regular. De fato, se $f = \sum_{j=n}^{\infty} P_j$, ($P_n \neq 0$) é a expansão de f em polinômios homogêneos, então

$$P_n(x, y) = \sum_{i+j=n} b_{ij} x^i y^j.$$

Se $b_{ij} = 0$ para todo $i \neq 0$, então f já é y -regular.

Suponha que exista $b_{ij} \neq 0$ para algum $i > 0$.

Considerando as coordenadas $y' = T(y) = y$ e $x' = T(x) = x - \varepsilon y$, com $\varepsilon \in \mathbb{C}$, temos que $\text{mult}(P_k(x', y')) = k$ e o coeficiente de $(y')^n$ em $P_n(x', y')$ é

$$c(\varepsilon) = \sum_{i+j=n} (-1)^i b_{ij} \varepsilon^i.$$

Como existe $b_{ij} \neq 0$ para algum $i > 0$, o polinômio $c(\varepsilon)$ é não constante. Escolhendo $\varepsilon \in \mathbb{C}$ de modo a não anular $c(\varepsilon)$, temos que $f(x', y')$ é y' -regular.

O teorema a seguir, demonstrado por Weierstrass em 1860 para séries de potências em $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\}$ e apresentado aqui para $r = 2$ é fundamental na teoria de curvas planas.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Preparação de Weierstrass) *Sejam $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ uma série de potências y -regular e $n = \text{mult}(f)$. Então, existem únicos elementos $u(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ e $b_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$, $i = 1, \dots, n$, tais que*

$$f(x, y) = \left(y^n + b_1(x)y^{n-1} + \dots + b_n(x) \right) \cdot u(x, y)$$

com $b_i(0) = 0$ e $u(0, 0) \neq 0$.

Demonstração: Veja o Teorema 1 da seção 8.2 de Brieskorn e Knörrer (1986). ▀

O polinômio $y^n + b_1(x)y^{n-1} + \dots + b_n(x) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ destacado no teorema anterior é chamado de **Polinômio de Weierstrass** associado à $f(x, y)$.

Observação 1.1.2 *Pelo exposto acima, dada $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ existe um automorfismo linear T e uma unidade u de $\mathbb{C}\{x, y\}$ tais que $u \cdot T(f) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ é um polinômio de Weierstrass.*

1.2 Curvas Planas

Sejam U um conjunto aberto em \mathbb{C}^2 e $X \subset U$. Dizemos que X é analítico em $x_0 \in U$ se existir uma vizinhança V de x_0 em U e $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tais que

$$X \cap V = \{z \in V; f(z) = 0\}.$$

Temos que X é um subconjunto analítico de U quando X é analítico em todo ponto $x_0 \in U$.

Sejam U e U' abertos em \mathbb{C}^2 , $X \subset U$ e $X' \subset U'$ subconjuntos analíticos. Os conjuntos X e X' definem o mesmo germe de conjunto analítico em $x_0 \in X \cap X'$ se existe uma vizinhança $V \subset X \cap X'$ de x_0 tal que

$$X \cap V = X' \cap V.$$

Escrevemos (X, x_0) para o germe de conjunto de X em x_0 . Neste caso, X é chamado de representante do germe (X, x_0) .

Dado um ideal não nulo $\langle f \rangle \subset M = \langle x, y \rangle \subset \mathbb{C}\{x, y\}$, um germe de conjunto dado por $C_f = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ em que U é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ é chamado de (germe de) **curva analítica plana**.

Dizemos que C_f é irredutível se $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ é irredutível. Neste caso, diremos simplesmente que C_f é um **ramo plano**.

No restante deste trabalho, vamos nos ater somente ao caso de ramos planos.

Dadas duas curvas planas C_f e C_h temos que $C_f = C_h$ se, e somente se, $\langle f \rangle = \langle h \rangle$ ou, equivalentemente, $f = u \cdot h$ em que $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$ é uma unidade. Note que deste modo, podemos definir a **multiplicidade de uma curva** C_f por $\text{mult}(C_f) = \text{mult}(f)$.

Neste trabalho estaremos interessados em objetos invariantes segundo duas relações de equivalência: a topológica e a analítica.

Definição 1.2.1 *Sejam C_f e C_g curvas planas. Dizemos que C_f é **analiticamente equivalente** a C_g quando existem vizinhanças da origem $U, V \subset \mathbb{C}^2$ e um difeomorfismo*

analítico $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\phi(C_f \cap U) = C_g \cap V$. Quando a aplicação ϕ é apenas um homeomorfismo dizemos que C_f é **topologicamente equivalente** à C_g .

A equivalência analítica pode ser expressa de vários modos, uma destas maneiras se baseia no objeto que definimos a seguir.

Definição 1.2.2 *Seja C_f uma curva plana, o **anel local** de C_f é o anel quociente*

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f \rangle}.$$

Veja que o anel local de uma curva está realmente bem definido, pois se $C_f = C_g$, então $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_g$.

Teorema 1.2.3 *Sejam C_f e C_g curvas planas. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. C_f é analiticamente equivalente à C_g .
2. \mathcal{O}_f é isomorfo a \mathcal{O}_g como \mathbb{C} -álgebra.
3. As séries f e g são \mathcal{K} -equivalentes, isto é, existem um automorfismo Φ de $\mathbb{C}\{x, y\}$ e uma unidade u de $\mathbb{C}\{x, y\}$, tais que $u \cdot \Phi(f) = g$.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em (HEFEZ, 2003, Seções 3.5 e 4.1). Para a equivalência $1. \Leftrightarrow 2.$ pode-se consultar ainda o Corolário V.1.2 de Sebastiani (2004). ▀

Em virtude da Observação 1.1.2 e do teorema anterior, dada uma curva plana C_f , a menos de equivalência analítica, podemos supor que $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ é um polinômio de Weierstrass.

Uma vez que, como vimos anteriormente, um ramo plano C_f pode ser dado pelo germe de conjunto $\{(\alpha_1, \alpha_2) \in U; f(\alpha_1, \alpha_2) = 0\}$ onde U é uma vizinhança da origem em \mathbb{C}^2 e $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ irredutível, é natural estudar as soluções de $f(x, y) = 0$.

Se $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ é um polinômio de Weierstrass com $\text{mult}(f) = n$, então existe um algoritmo, que utiliza o polígono de Newton de f , que permite encontrar uma solução para $f(x, y) = 0$ até a ordem desejada (BRIESKORN; KNÖRRER, 1986, Seção 8.3).

Mais ainda, as soluções de $f(x, y) = 0$ são da forma $\varphi(x^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq n}^{\infty} b_i x^{\frac{i}{n}}$. Se tomarmos $t = x^{\frac{1}{n}}$, então temos que $f(t^n, \varphi(t)) = 0$ (BRIESKORN; KNÖRRER, 1986, Teorema 1, Seção 8.3).

Definição 1.2.4 O par $(t^n, \varphi(t)) = \left(t^n, \sum_{i \geq n}^{\infty} b_i t^i \right) \in \mathbb{C}\{t\} \times \mathbb{C}\{t\}$ descrito acima é chamado de **Parametrização de Newton-Puiseux** de C_f , ou simplesmente **parametrização** de f .

Se $\varphi(x^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq n}^{\infty} b_i x^{\frac{i}{n}}$ é uma das raízes de $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, temos que (BRIESKORN; KNÖRRER, 1986, Teorema 2, Seção 8.3)

$$\left\{ \varphi \left(\zeta x^{\frac{1}{n}} \right); \zeta \in G_0 \right\}$$

é o conjunto de todas as raízes de $f(x, y) = 0$, onde $G_0 = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^n = 1\}$ e $\text{mult}(f) = n$.

Em particular,

$$f(x, y) = \prod_{\zeta \in G_0} \left(y - \varphi \left(\zeta x^{\frac{1}{n}} \right) \right).$$

1.3 Classificação topológica de ramos planos

A classificação topológica de ramos planos (como germes imersos em \mathbb{C}^2) foi dada por Brauner, Burau e Zariski em meados dos anos 30 do século passado, veja (ZARISKI, 1932). A topologia local de um ramo plano pode ser descrita por meio de vários conjuntos de invariantes discretos distintos, mas que se determinam mutuamente, por exemplo: os expoentes característicos, o semigrupo de valores, os pares de Puiseux, a sequência de multiplicidades em uma resolução canônica da curva, etc.

Nesta seção, vamos apresentar sucintamente as principais propriedades dos expoentes característicos e do semigrupo de valores.

Seja f uma série de potências irredutível de multiplicidade n com parametrização

de Newton-Puiseux dada por

$$\begin{cases} x = t^n \\ y = \varphi(t) = \sum_{i \geq n} a_i t^i, \quad a_m \neq 0, \quad m \geq n. \end{cases}$$

Definimos duas seqüências (ε_i) e (β_i) de números naturais associadas à C_f como segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \beta_0 = n; \\ \beta_j &= \min\{i; i \not\equiv 0 \pmod{\varepsilon_{j-1}} \text{ e } a_i \neq 0\}, \quad \text{se } \varepsilon_{j-1} \neq 1; \\ \varepsilon_j &= \text{mdc}(\varepsilon_{j-1}, \beta_j) = \text{mdc}(\beta_0, \dots, \beta_j). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Uma vez que $\varepsilon_j < \varepsilon_{j-1}$ e ε_j divide ε_{j-1} , para todo $j \geq 1$, temos que existe $g \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_g = 1$, isto é, a seqüência (ε_i) é finita e decrescente. Conseqüentemente a seqüência (β_j) é crescente e para em β_g .

Definição 1.3.1 *Os expoentes característicos de f (ou de C_f) são os $(g+1)$ números naturais $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g)$. O número $g_f = g$ é chamado de **gênero** da curva.*

Com as notações acima, podemos escrever a parametrização de f como segue:

$$\begin{cases} x = t^n \\ y = p(t^n) + \sum_{i=\beta_1}^{\beta_2-1} a_i t^i + \dots + \sum_{i=\beta_{g-1}}^{\beta_g-1} a_i t^i + \sum_{i \geq \beta_g} a_i t^i, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ e $a_{\beta_1} \cdots a_{\beta_g} \neq 0$. Pela definição dos β_j 's, podemos facilmente deduzir que os coeficientes da parametrização acima possuem a seguinte propriedade: se i e j são inteiros tais que $\beta_{j-1} < i < \beta_j$, e se ε_{j-1} não divide i , então $a_i = 0$.

Reciprocamente, dada qualquer seqüência crescente de números naturais primos entre si β_0, \dots, β_g , tal que os inteiros definidos por $\varepsilon_j = \text{mdc}(\beta_0, \dots, \beta_j)$ são estritamente decrescentes, então esta seqüência corresponde à expoentes característicos de algum ramo plano C_f (HEFEZ, 2003, Teoremas 6.13 e 6.14).

O fecho integral $\overline{\mathcal{O}_f}$ do anel local \mathcal{O}_f da curva C_f é um domínio de valorização discreta e $\overline{\mathcal{O}_f}$ é isomorfo à $\mathbb{C}\{t\}$, cuja valorização normalizada é dada por $\nu_f(\alpha(t)) = \text{mult}(\alpha(t))$ para todo $\alpha(t) \in \overline{\mathcal{O}_f}$ em que $\nu_f(0) = \infty$.

Uma vez que a sequência

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \langle f \rangle & \longrightarrow & \mathbb{C}\{x, y\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t^n, \varphi(t)\} \longrightarrow 0 \\ & & & & h & \longmapsto & h(t^n, \varphi(t)) \end{array}$$

é exata, temos que $\mathcal{O}_f \approx \mathbb{C}\{t^n, \varphi(t)\} \subset \mathbb{C}\{t\} \approx \overline{\mathcal{O}_f}$ em que $(t^n, \varphi(t))$ é uma parametrização de f .

No que segue, vamos identificar \mathcal{O}_f com $\mathbb{C}\{t^n, \varphi(t)\}$.

Dado $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ temos que $h(t^n, \varphi(t)) \in \mathcal{O}_f \subset \overline{\mathcal{O}_f}$ e temos, veja (HEFEZ, 2003, Teorema 4.17), que

$$\nu_f(h) := \nu_f(h(t^n, \varphi(t))) = I(f, h) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f, h \rangle}.$$

Definição 1.3.2 O *semigrupo* de valores associado ao ramo C_f é o conjunto $\Gamma_f = \{\nu_f(h); h \in \mathbb{C}\{x, y\} \setminus \langle f \rangle\} \subseteq \mathbb{N}$.

Listaremos agora algumas propriedades do semigrupo de uma curva irredutível.

Todo semigrupo Γ_f de uma curva irredutível C_f possui um **condutor**, isto é, existe um elemento $\mu_f \in \Gamma_f$ tal que todo natural $k \geq \mu_f$ pertence à Γ_f e $\mu_f - 1 \notin \Gamma_f$. Temos que μ_f coincide com o **número de Milnor** de f , ou seja, $\mu_f = I(f_x, f_y) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f_x, f_y \rangle}$ (HEFEZ, 2003, Teorema 7.18). Temos que $\sharp(\mathbb{N} \setminus \Gamma_f) = \frac{\mu_f}{2}$. Além disso, temos que $\gamma \in \Gamma_f$ se, e somente se, $\mu_f - 1 - \gamma \notin \Gamma_f$ (HEFEZ, 2003, Proposição 7.6).

O semigrupo Γ_f é finitamente gerado, isto é, existem $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $\Gamma_f = \langle m_1, \dots, m_r \rangle := m_1\mathbb{N} + \dots + m_r\mathbb{N}$ e $m_i \notin \langle m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_r \rangle$. Nestas condições, $\{m_1, \dots, m_r\}$ é um sistema mínimo de geradores de Γ_f .

O menor elemento de $\Gamma_f \setminus \{0\}$ é o inteiro $\text{mult}(f) = n = v_0$.

Sejam $(t^n, \varphi(t))$ com $\varphi(t) = \sum_{i \geq n} a_i t^i$ uma parametrização e $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g)$ os expo-

entes característicos de C_f . Para cada $j = 1, \dots, g$ definimos

$$P_j(t) = \sum_{n \leq i < \beta_j} b_i t^i \text{ e } G_j = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^{\varepsilon_j} = 1\}.$$

Note que G_j é o grupo das ε_j -ésimas raízes da unidade e

$$G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_g = \{1\}.$$

Observação 1.3.3 Definindo $n_0 := 1$, denotamos por n_j a ordem do grupo quociente

$\frac{G_{j-1}}{G_j}$, isto é, $n_j = \frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j}$ e definimos $n_0 := 1$. Temos:

i) $n_j > 1$ para $1 \leq j \leq g$;

ii) $n_0 n_1 n_2 \dots n_i \varepsilon_i = \varepsilon_0 = n$. Em particular, $n_0 n_1 \dots n_g = n$;

iii) $n_{i+1} \dots n_g = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_g} = \varepsilon_i$.

Se $\bar{\zeta} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}$, indicamos $P_j(\bar{\zeta}t) := P_j(\zeta t)$.

Definição 1.3.4 Para cada $j = 1, \dots, g$ denotamos

$$f_j(x, y) = \prod_{\bar{\zeta} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} (y - P_j(\bar{\zeta}x^{\frac{1}{n}})) \in \mathbb{C}\{x\}[y].$$

Note que o grau de $f_j \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ com respeito a variável y é $gr(f_j) = \frac{n}{\varepsilon_{j-1}}$ e f_j é irredutível por ser o polinômio minimal de $P_j(x^{\frac{1}{n}})$ sobre o corpo de frações $\mathbb{C}((x))$ de $\mathbb{C}\{x\}$.

Considere os inteiros $v_0 = \beta_0 = n$ e $v_j = \nu_f(f_j)$ se $j = 1, \dots, g$. O resultado a seguir permite obter geradores minimais de Γ_f .

Teorema 1.3.5 (1) Temos que $v_1 = \beta_1$ e para cada $j = 2, \dots, g$ temos

$$v_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}} \beta_k + \beta_j. \quad (1.3)$$

(2) Se $gr_y(h) < n_1 \cdot \dots \cdot n_j = \frac{n}{\varepsilon_j}$, então $\nu_f(h) \in \langle v_0, \dots, v_j \rangle$. Em particular,

$$\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle.$$

(3) Temos que $\varepsilon_j = \text{mdc}(\varepsilon_{j-1}, v_j)$.

Demonstração: A justificativa pode ser encontrada em Hefez (2003, Teorema 6.12). Em particular, para a afirmação (1) o resultado segue da avaliação $\nu_f(f_j)$, em que f_j é como descrito na Definição 1.3.4.

Destaquemos alguns pontos da justificativa que serão retomados mais adiante neste trabalho.

Se $(t^{v_0}, \varphi(t))$ com $\varphi(t) = \sum_{i \geq v_0}^{\infty} a_i t^i$ é uma parametrização para C_f , temos que

$$f_j(t^{v_0}, \varphi(t)) = \prod_{\zeta \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} \left(\sum_{v_0 \leq i}^{\infty} a_i t^i - \sum_{v_0 \leq i < \beta_j} a_i \zeta^i t^i \right) = \prod_{\zeta \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} \left(\sum_{v_0 \leq i < \beta_j} a_i (1 - \zeta^i) t^i + \sum_{\beta_j \leq i} a_i t^i \right). \quad (1.4)$$

Pelo Lema 6.10 de Hefez (2003), temos que

$$\sum_{v_0 \leq i < \beta_j} a_i (1 - \zeta^i) t^i + \sum_{\beta_j \leq i} a_i t^i = \begin{cases} a_{\beta_k} (1 - \zeta^{\beta_k}) t^{\beta_k} + (\text{t.o.s.}) & \text{se } \zeta \in G_{k-1} \setminus G_k \\ a_{\beta_j} t^{\beta_j} + (\text{t.o.s.}) & \text{se } \zeta \in G_{j-1}, \end{cases}$$

com $\zeta^{\beta_k} \neq 1$ se $\zeta \in G_{k-1} \setminus G_k$ e (t.o.s.) indica termos de ordem superior.

Como cada conjunto $G_k \setminus G_{k+1}$ admite $\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_{j-1}}$ classes distintas de G_{j-1} , expandindo a expressão (1.4), obtemos

$$f_j(t^{v_0}, \varphi(t)) = c_j a_{\beta_j} t^{v_j} + \sum_{v_j < k} (p_k^j + c_j a_{k-v_j+\beta_j}) t^k \quad (1.5)$$

em que $v_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}} \beta_k + \beta_j$, $c_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e p_k^j é um polinômio em a_i com $i < k - v_j + \beta_j$. \blacksquare

Do teorema anterior, segue que v_j é o menor elemento não nulo de Γ_f que não é

divisível por ε_{j-1} . Temos também que

$$v_{j+1} = n_j v_j - \beta_j + \beta_{j+1}, \quad j = 0, \dots, g, \quad (1.6)$$

que, por sua vez, nos permite concluir o seguinte:

Teorema 1.3.6 *Se C_f é um ramo plano, então Γ_f e seus expoentes característicos se determinam mutuamente.*

Demonstração: Veja Hefez (2003, Teorema 6.13). ▀

O resultado abaixo apresenta uma forma particular de representarmos um elemento em termos dos geradores de Γ_f .

Lema 1.3.7 *Dados $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ e $m \in \mathbb{N}$, temos que existem únicos $0 \leq s_i < n_i$ para $i = 1, \dots, g$ e $s_0 \in \mathbb{Z}$, tais que $m = \sum_{i=0}^g s_i v_i$.*

Além disso, $m \in \Gamma_f$ se, e somente se, $s_0 \geq 0$. Temos também que $m \in \Gamma_f$ se, e somente se $\mu_f - 1 - m \notin \Gamma_f$.

Demonstração: Veja (HEFEZ, 2003, Proposição 7.2). ▀

Quando $m = \sum_{i=0}^g s_i v_i \notin \Gamma_f$ expresso como no lema anterior, isto é, com $s_0 < 0$, dizemos que m é uma **lacuna** de Γ_f . Temos que o número de lacunas em semigrupo de curva irredutível plana é sempre $\frac{\mu_f}{2}$, em que μ_f é o condutor do semigrupo (HEFEZ, 2003, Proposição 7.6, (iii)).

Podemos expressar o condutor μ_f de $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ de diversas maneiras:

$$\mu_f = \sum_{i=1}^g (n_i - 1)v_i - v_0 + 1, \text{ veja (7.1) de Hefez (2003);} \quad (1.7)$$

$$\mu_f = n_g v_g - \beta_g - v_0 + 1, \text{ Corolário 7.14 de Hefez (2003);} \quad (1.8)$$

$$\mu_f = \sum_{i=1}^g (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i)\beta_i - \beta_0 + 1, \text{ Corolário 7.15 de Hefez (2003);} \quad (1.9)$$

$$v_f(f_y) = \mu_f + v_0 - 1 \text{ e } v_f(f_x) = \mu_f + v_1 - 1, \text{ Corolário 7.16 de Hefez (2003).} \quad (1.10)$$

Como mencionamos no início desta seção, o semigrupo de uma curva, assim como os expoentes característicos, são invariantes topológicos completos. Essencialmente temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3.8 (Brauner-Barau-Zariski) *Dois ramos planos são topologicamente equivalentes se, e somente se, eles possuem os mesmos expoentes característicos ou, equivalentemente, possuem o mesmo semigrupo de valores.*

Demonstração: Veja Brieskorn e Knörrer (1986, Teorema 12, p. 438). ▀

1.4 Semirraízes

Como antes, consideramos

$$f = y^n + b_1(x)y^{n-1} + \cdots + b_n(x) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$$

irredutível, $\text{mult}(f) = n$, $b_1(0) = \cdots = b_n(0) = 0$ e com semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$. Além disto, mantemos as notações de (1.1), ou seja, os expoentes característicos de f serão denotados por β_0, \dots, β_g e $\varepsilon_j = \text{mdc}(\beta_0, \dots, \beta_j)$.

Definição 1.4.1 *Um polinômio $q_k \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ será dito **k -semirraiz** de f quando q_k for mônico, $\text{gr}(q_k) = \frac{n}{\varepsilon_{k-1}}$ e $\nu_f(q_k) = v_k$.*

Dada uma série f com parametrização dada como em (1.2), segue da Definição 1.3.4 e do Teorema 1.3.5, que $f_k(x, y) = \prod_{\bar{\zeta} \in \frac{G_0}{G_{k-1}}} (y - P_k(\bar{\zeta}x^{\frac{1}{n}}))$ é uma k -semirraiz de f para $k = 1, \dots, g$. Denominaremos tais semirraízes de **semirraízes características** de f .

Teorema 1.4.2 *Seja $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ como no início desta seção. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) f_k é uma k -semirraiz de f .

(2) f_k é irredutível, com semigrupo $\Gamma_k := \Gamma_{f_k} = \left\langle \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}, \dots, \frac{v_{k-1}}{\varepsilon_{k-1}} \right\rangle$ e os expoentes característicos de f_k são $\frac{\beta_0}{\varepsilon_{k-1}}, \dots, \frac{\beta_{k-1}}{\varepsilon_{k-1}}$.

Demonstração: Veja Popescu-Pampu (2003, p. 9, Teorema 5.1). ▀

Note que se f_k é uma k -semirraiz de f e f_j é uma j -semirraiz de f_k , então f_j é uma j -semirraiz de f também.

O resultado a seguir será usado nos próximos capítulos.

Corolário 1.4.3 *Todo elemento $h \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ pode ser escrito de forma única como*

$$h = \sum_{i_1, \dots, i_{g+1}} b_{i_1, \dots, i_{g+1}} f_1^{i_1} \cdots f_g^{i_g} f_{g+1}^{i_{g+1}},$$

onde $0 \leq i_{g+1} \leq \left\lfloor \frac{gr(h)}{gr(f)} \right\rfloor$, $1 \leq i_k < n_k$ para todo $1 \leq k \leq g$ e os coeficientes $b_{i_1, \dots, i_{g+1}}$ são elementos de $\mathbb{C}\{x\}$. Além disso,

- (1) O grau em y de quaisquer duas parcelas distintas desta soma são distintos.
- (2) Temos que $\nu_f(b_{i_1, \dots, i_{g+1}} f_1^{i_1} \cdots f_g^{i_g}) \neq \nu_f(b_{j_1, \dots, j_{g+1}} f_1^{j_1} \cdots f_g^{j_g})$ se $(i_1, \dots, i_g) \neq (j_1, \dots, j_g)$.

Demonstração: Veja Popescu-Pampu (2003, p. 10, Corolário 5.4). ▀

Além disto, temos:

Proposição 1.4.4 *Sejam f_j uma j -semirraiz de f_k e f_k uma k -semirraiz de um elemento $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, tais que $\left(t^{\frac{v_0}{\varepsilon_{j-1}}}, \varphi_j(t)\right)$, $\left(t^{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}, \varphi_k(t)\right)$ e $(t^{v_0}, \varphi(t))$ são suas respectivas parametrizações. Se $f_j\left(t^{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}, \varphi_k(t)\right) = at^{\frac{v_j}{\varepsilon_{k-1}}} + (t.o.s.)$, então $f_j(t^{v_0}, \varphi(t)) = at^{v_j} + (t.o.s.)$.*

Em particular, para qualquer $h \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ com $gr(h) < gr(f_k)$, se temos que $h\left(t^{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}, \varphi_k(t)\right) = bt^{\nu_k(h)} + (t.o.s.)$, então $h(t^{v_0}, \varphi(t)) = bt^{\nu_f(h)} + (t.o.s.)$ com

$$\nu_f(h) = \varepsilon_{k-1} \nu_{f_k}(h).$$

Demonstração: Uma vez que f_j também é uma j -semirraiz de f , seguindo a demonstração do Corolário 5.3, Proposição 6.5 de Popescu-Pampu (2003) e da seção 8.1 de Hefez

(2003), temos que se $\varphi(t) = \sum_{i \geq v_0} a_i t^i$, então para todo $0 < i < j$:

$$\varphi(t) - \varphi_j(\zeta t^{\varepsilon_{j-1}}) = \begin{cases} a_{\beta_i} \left(1 - \zeta^{\frac{\beta_i}{\varepsilon_{j-1}}}\right) t^{\beta_i} + (\text{t.o.s.}) & \text{se } \zeta \in G_{i-1} \setminus G_i; \\ a_{\beta_j} t^{\beta_j} + (\text{t.o.s.}) & \text{se } \zeta \in G_{j-1}, \end{cases}$$

$$\varphi_k(t) - \varphi_j\left(\zeta t^{\frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_{k-1}}}\right) = \begin{cases} a_{\beta_i} \left(1 - \zeta^{\frac{\beta_i}{\varepsilon_{j-1}}}\right) t^{\frac{\beta_i}{\varepsilon_{k-1}}} + (\text{t.o.s.}) & \text{se } \zeta \in G_{i-1} \setminus G_i; \\ a_{\beta_j} t^{\frac{\beta_j}{\varepsilon_{k-1}}} + (\text{t.o.s.}) & \text{se } \zeta \in G_{j-1}, \end{cases}$$

com $\zeta^{\frac{\beta_i}{\varepsilon_{j-1}}} \neq 1$ se $\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i$.

Como $f_j(x, y) = \prod_{\bar{\zeta} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} \left(y - \varphi_j\left(\bar{\zeta} x^{\frac{\varepsilon_{j-1}}{v_0}}\right)\right)$ temos de modo análogo ao item 1 do

Teorema 1.3.5, que

$$f_j(t^{v_0}, \varphi(t)) = \prod_{\bar{\zeta} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} (\varphi(t) - \varphi_j(\bar{\zeta} t^{\varepsilon_{j-1}})) = at^{v_j} + (\text{t.o.s.}); \quad (1.11)$$

$$f_j\left(t^{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}, \varphi_k(t)\right) = \prod_{\bar{\zeta} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} \left(\varphi_k(t) - \varphi_j\left(\bar{\zeta} t^{\frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_{k-1}}}\right)\right) = at^{\frac{v_j}{\varepsilon_{k-1}}} + (\text{t.o.s.}),$$

com $a \neq 0$.

Em particular, para $h \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ com $gr(h) < gr(f_k)$, temos pelo Corolário 1.4.3 que

$$h = \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} b_{i_1, \dots, i_{k-1}} f_1^{i_1} \cdots f_{k-1}^{i_{k-1}}$$

com $0 \leq i_j < n_j$ para todo $j = 1, \dots, k-1$ e $b_{i_1, \dots, i_{k-1}} \in \mathbb{C}\{x\}$.

Uma vez que f_1, \dots, f_{k-1} são semirraízes de f_k e f simultaneamente, segue do resultado anterior que existe uma única parcela $b_{i_1, \dots, i_{k-1}} f_1^{i_1} \cdots f_{k-1}^{i_{k-1}}$ tal que

$$\nu_f(h) = \nu_f(b_{i_1, \dots, i_{k-1}} f_1^{i_1} \cdots f_{k-1}^{i_{k-1}}) = \sum_{j=1}^{k-1} i_j v_j + v_0 \cdot \text{ord}_x(b_{i_1, \dots, i_{k-1}}) \quad \text{e}$$

$$\nu_{f_k}(h) = \nu_{f_k}(b_{i_1, \dots, i_{k-1}} f_1^{i_1} \cdots f_{k-1}^{i_{k-1}}) = \sum_{j=1}^{k-1} i_j \frac{v_j}{\varepsilon_{k-1}} + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \cdot \text{ord}_x(b_{i_1, \dots, i_{k-1}}),$$

ou seja,

$$\nu_f(h) = \varepsilon_{k-1} \nu_{f_k}(h).$$

Além disso, usando (1.11) para cada semirraiz da parcela destacada acima, segue que se $h \left(t^{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}, \varphi_k(t) \right) = bt^{\nu_k(h)} + (\text{t.o.s.})$, então $h(t^{v_0}, \varphi(t)) = bt^{\nu_f(h)} + (\text{t.o.s.})$. ▀

O Teorema 1.4.2 permite obtermos algumas relações entre o semigrupo Γ_f e o semigrupo Γ_k .

Note que para $j = 1, \dots, k-1$ temos

$$n_j = \frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j} = \frac{\text{mdc}(\beta_0, \dots, \beta_{j-1})}{\text{mdc}(\beta_0, \dots, \beta_j)} = \frac{\text{mdc}\left(\frac{\beta_0}{\varepsilon_{k-1}}, \dots, \frac{\beta_{j-1}}{\varepsilon_{k-1}}\right)}{\text{mdc}\left(\frac{\beta_0}{\varepsilon_{k-1}}, \dots, \frac{\beta_j}{\varepsilon_{k-1}}\right)}.$$

Deste modo, o condutor de Γ_k , isto é, o número de Milnor de f_k , é

$$\mu_k := \mu_{f_k} = \sum_{j=1}^{k-1} (n_j - 1) \frac{v_j}{\varepsilon_{k-1}} - \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} + 1. \quad (1.12)$$

Assim, temos a seguinte relação entre os números de Milnor de f e f_k :

$$\begin{aligned} \mu_f - 1 = \sum_{j=1}^g (n_j - 1)v_j - v_0 &= \sum_{j=k}^g (n_j - 1)v_j + \varepsilon_{k-1} \left(\sum_{j=1}^{k-1} (n_j - 1) \frac{v_j}{\varepsilon_{k-1}} - \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \right) \\ &= \sum_{j=k}^g (n_j - 1)v_j + \varepsilon_{k-1}(\mu_k - 1). \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.5 Equivalência analítica

Nesta seção destacaremos alguns invariantes analíticos, que foram abordados na literatura, para ramos planos.

Conforme vimos na Seção 1.2, a equivalência analítica de ramos planos pode ser expressa por meio do isomorfismo entre seus anéis locais.

Mather e Yau (1982), mostraram que o ideal $\langle f, f_x, f_y \rangle \subseteq \mathbb{C}\{x, y\}$, mais especificamente a **álgebra de Tjurina** $\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f, f_x, f_y \rangle}$, determina a classe analítica da curva C_f . Como \mathcal{O}_f é um invariante analítico completo, temos que $\langle f_x, f_y \rangle \subseteq \mathcal{O}_f$ também é um tal invariante. Em particular, $\tau_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle f_x, f_y \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f, f_x, f_y \rangle}$ é um invariante analítico, chamado de **número de Tjurina** de f ou de C_f .

Por outro lado, Zariski (1966) considerando uma parametrização $\left(t^{\beta_0}, \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i \right)$ de C_f , mostrou que se existe

$$\lambda = \min\{i; a_i \neq 0 \text{ e } i + \beta_0 \notin \Gamma_f\},$$

então λ é um invariante analítico, que chamaremos **invariante de Zariski** de C_f .

Os invariantes τ e λ podem ser recuperados por meio do semigrupo de valores e de um outro invariante analítico que passaremos a descrever.

No que segue vamos denotar

$$\Omega^1 = \mathbb{C}\{x, y\}dx + \mathbb{C}\{x, y\}dy$$

o $\mathbb{C}\{x, y\}$ -módulo das 1-formas holomorfas em \mathbb{C}^2 .

Dado $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ denotamos:

$$df = f_x dx + f_y dy;$$

$$\mathcal{F}(f) = f \cdot \Omega^1 + \mathbb{C}\{x, y\} \cdot df.$$

O módulo de diferenciais de Kähler de C_f é o \mathcal{O}_f -módulo

$$\Omega_f := \Omega_{\mathcal{O}_f/\mathbb{C}} = \frac{\Omega^1}{\mathcal{F}(f)}.$$

Vamos indicar por \mathcal{T}_f o submódulo de torção de Ω_f , isto é,

$$\mathcal{T}_f = \{w \in \Omega_f; \bar{h}w = \bar{0} \text{ para algum } \bar{h} \in \mathcal{O}_f \setminus \{\bar{0}\}\}.$$

Como antes, vamos considerar $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ irredutível, ou seja, \mathcal{O}_f é um domínio.

Seja $(x(t), y(t))$ uma parametrização para C_f . A aplicação

$$\psi_f : \quad \Omega_f \quad \longrightarrow \quad \overline{\mathcal{O}_f} \tag{1.14}$$

$$\bar{a}dx + \bar{b}dy \longmapsto t \cdot [a(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + b(x(t), y(t)) \cdot y'(t)]$$

é um homomorfismo de \mathcal{O}_f -módulos em que identificamos \mathcal{O}_f com $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\} \subset \mathbb{C}\{t\} \approx \overline{\mathcal{O}_f}$.

O resultado abaixo nos dá uma caracterização para os elementos de torção de Ω_f .

Lema 1.5.1 *Com as notações anteriores, temos que $\text{Ker}(\psi_f) = \mathcal{T}_f$.*

Demonstração: Veja Hefez e Hernandez (2001, Seção 7.1, Proposição 1). ▀

Vamos considerar o conjunto

$$\Lambda_f = \{\nu_f(\omega) := \nu_f(\psi_f(\omega)); \omega \in \Omega_f \setminus \mathcal{T}_f\} \subset \mathbb{N}$$

que denominaremos **conjunto de valores de Ω_f** . Note que Λ_f é um Γ_f -*monomódulo* ou *ideal relativo de Γ_f* , ou seja, $\alpha + \xi \in \Lambda_f$ para todo $\alpha \in \Gamma_f$ e todo $\xi \in \Lambda_f$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \nu_f(h) &= \text{mult}(h(x(t), y(t))) = \text{mult}(h'(x(t), y(t))) + 1 \\ &= \text{mult}(t \cdot [h_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + h_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)]) = \nu_f(dh), \end{aligned}$$

para todo $h \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}$ não unidade. Deste modo, temos que $\Gamma_f \setminus \{0\} \subseteq \Lambda_f$.

O conjunto Λ_f é um importante invariante analítico para ramos planos, que se relaciona com o invariante λ de Zariski e com o número de Tjurina τ_f por meio das

relações:

$$\lambda + v_0 = \min(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) \quad \text{e} \quad \tau_f = \mu_f - \sharp(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) \quad (1.15)$$

em que $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ é o semigrupo de valores de C_f e μ_f é o condutor de Γ_f (HEFEZ; HERNANDES, 2001).

O conjunto Λ_f pode ser obtido por meio do algoritmo 4.10 descrito em Hefez e Hernandez (2007).

O seguinte resultado responde à questão da equivalência analítica de ramos planos.

Teorema 1.5.2 (Hefez-Hernandes) *Seja C_f um ramo plano com semigrupo dado por $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ e conjunto de valores de diferenciais Λ_f , então C_f é analiticamente equivalente a um ramo plano com parametrização*

$$(t^{v_0}, t^{v_1}) \quad \text{se} \quad \Lambda_f \setminus \Gamma_f = \emptyset \quad \text{ou}$$

$$\left(t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i \notin (\Lambda_f - v_0)} a_i t^i \right) \quad \text{se} \quad \lambda + v_0 = \min(\Lambda_f \setminus \Gamma_f).$$

Mais ainda, um ramo plano com parametrização $\left(t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i \notin (\Lambda_f - v_0)} b_i t^i \right)$ é analiticamente equivalente a C_f se, e somente se, existe $c \in \mathbb{C}$ com $c^{\lambda - v_1} = 1$ tal que $a_i = c^{i - \lambda} b_i$ para todo $i \notin (\Lambda_f - v_0)$.

Demonstração: Veja Hefez e Hernandez (2011). ▀

1.6 Resíduos logarítmicos

Nesta seção vamos apresentar sucintamente alguns resultados sobre resíduos logarítmicos, as principais referências são Saito (1980) e Pol (2018).

Embora os trabalhos de Saito (1980) e Pol (2018) considerem hipersuperfícies não necessariamente irredutíveis, vamos aqui focar em curvas planas irredutíveis.

No que segue, como antes, C_f denota uma curva analítica plana irredutível definida por um polinômio de Weierstrass $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$.

Definição 1.6.1 (Saito) Dizemos que $\omega \in \frac{1}{f} \cdot \Omega^1$ é uma **forma logarítmica**, se existem $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ com $Q \notin \langle f \rangle$ e $\omega' \in \Omega^1$ tais que

$$Q\omega = \frac{Pdf + f\omega'}{f}.$$

O $\mathbb{C}\{x, y\}$ -módulo de todas as formas logarítmicas é denotado por $\Omega(\log C_f)$.

Se $\mathcal{X} = A\frac{\partial}{\partial y} - B\frac{\partial}{\partial x}$ com $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$ é um campo de vetores em \mathbb{C}^2 , então temos $\mathcal{X}(f) = Af_y - Bf_x \in \langle f_x, f_y \rangle$. Caso $\mathcal{X}(f) \in \langle f \rangle$, dizemos que C_f é invariante por \mathcal{X} , ou que \mathcal{X} é um campo de vetores logarítmicos sobre C_f .

O $\mathbb{C}\{x, y\}$ -módulo dos campos de vetores logarítmicos sobre C_f é denotado por $Der(\log C_f)$.

Saito (1980) mostrou que os $\mathbb{C}\{x, y\}$ -módulos $\Omega(\log C_f)$ e $Der(\log C_f)$ se determinam mutuamente e são gerados por dois elementos. Mais ainda, temos o isomorfismo de $\mathbb{C}\{x, y\}$ -módulos

$$\begin{aligned} Der(\log C_f) &\longrightarrow \Omega(\log C_f) \\ A\frac{\partial}{\partial y} - B\frac{\partial}{\partial x} &\longmapsto \frac{Adx + Bdy}{f}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Observação 1.6.2 Note que, pela Definição 1.6.1, dado $\omega \in f \cdot \Omega(\log C_f)$ existem $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $Q \notin \langle f \rangle$ e $\omega' \in \Omega^1$ tais que

$$Q\omega = Pdf + f\omega' \in \mathcal{F}(f)$$

ou equivalentemente, $\bar{\omega} \in \mathcal{T}_f$ em que $\bar{\omega}$ denota a classe de $\omega \in \Omega^1$ em Ω_f .

Portanto,

$$\mathcal{T}_f = \frac{f \cdot \Omega(\log C_f)}{\mathcal{F}(f)}.$$

Além disso, segue do isomorfismo (1.16) que

$$f \cdot \Omega(\log C_f) = \left\{ \omega \in \Omega^1; \frac{\omega \wedge df}{dx \wedge dy} \in \langle f \rangle \right\},$$

onde \wedge denota o produto exterior de 1-formas.

Definição 1.6.3 Dado $\omega \in f \cdot \Omega(\log C_f)$ tal que

$$Q\omega = Pdf + f\omega',$$

chamamos de **resíduo** de ω o elemento

$$\text{res}(\omega) = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}} \in \text{Frac}(\mathcal{O}_f)$$

em que \overline{H} denota a classe de $H \in \mathbb{C}\{x, y\}$ em \mathcal{O}_f e $\text{Frac}(\mathcal{O}_f)$ é o corpo de frações de \mathcal{O}_f .

O conjunto

$$\mathcal{R}_f = \text{res}(f \cdot \Omega(\log C_f)) = \{\text{res}(\omega); \omega \in f \cdot \Omega(\log C_f)\} \subset \text{Frac}(\mathcal{O}_f)$$

é um \mathcal{O}_f -módulo denominado **módulo de resíduos logarítmicos** de C_f .

Note que se $\omega \in f \cdot \Omega(\log C_f)$, então os elementos $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $Q \notin \langle f \rangle$ e $\omega' \in \Omega^1$ satisfazendo

$$Q\omega = Pdf + f\omega'$$

não são únicos.

De fato, se $\omega = Adx + Bdy \in f \cdot \Omega(\log C_f)$ então, pela observação anterior, existe $M \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que

$$Af_y - Bf_x = \frac{\omega \wedge df}{dx \wedge dy} = Mf. \quad (1.17)$$

Como $df = f_x dx + f_y dy$, temos que

$$\begin{aligned} f_x \omega &= Af_x dx + Bf_x dy = Adf - (Af_y - Bf_x)dy = Adf - fMdy, \\ f_y \omega &= Af_y dx + Bf_y dy = Bdf + (Af_y - Bf_x)dx = Bdf + fMdx. \end{aligned} \quad (1.18)$$

No entanto, note que de (1.17) temos que

$$\overline{Af_y} = \overline{Bf_x}$$

em \mathcal{O}_f , ou seja,

$$\frac{\overline{A}}{\overline{f_x}} = \frac{\overline{B}}{\overline{f_y}}$$

no corpo de frações de \mathcal{O}_f .

De fato, Saito (1980, página 275) mostra que $res(\omega)$ está bem definido. Além disso, por um resultado de Saito (1980, página 276) temos que $\overline{\mathcal{O}_f} \subset \mathcal{R}_f$.

No que segue, denotaremos

$$\Delta_f := \nu_f(\mathcal{R}_f) = \left\{ \nu_f(\overline{P}) - \nu_f(\overline{Q}); \frac{\overline{P}}{\overline{Q}} \in \mathcal{R}_f \right\}.$$

Além disto, Pol (2018, Corolário 3.32) mostra que

$$\gamma \in \Lambda_f \iff -\gamma \notin \Delta_f. \quad (1.19)$$

Como vimos, se $\omega = Adx + Bdy \in f \cdot \Omega(\log C_f)$ é tal que $\frac{\omega \wedge df}{dx \wedge dy} = Af_y - Bf_x = Mf$, então de (1.18)

$$\nu_f(res(\omega)) = \nu_f(B) - \nu_f(f_y).$$

Uma vez que $\nu_f(f_y) = \mu_f - 1 + v_0$, veja (1.10), temos que

$$\nu_f(res(\omega)) = \nu_f(B) - (\mu_f - 1 + v_0),$$

em que $v_0 = \min(\Gamma_f \setminus \{0\}) = mult(f)$.

Lacunas especiais

Neste capítulo, vamos considerar um ramo plano C_f com $\Gamma_f = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, $g \geq 2$ e estudar a relação entre os invariantes analíticos de um ramo $C_k := C_{f_k}$ definido por uma semirraiz f_k com $k = 1, \dots, g$ e os invariantes analíticos de C_f .

Como vimos em (1.15), os invariantes analíticos λ_f e τ_f de um ramo C_f podem ser obtidos por meio de Γ_f e Λ_f . Mais especificamente λ_f e τ_f dependem de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$, que chamaremos de **conjunto das lacunas especiais** de C_f .

Enquanto a Proposição 1.4.4 garante que $\varepsilon_{k-1}\Gamma_k \subset \Gamma_f$, veremos que o mesmo não ocorre com o conjunto de valores de diferenciais, ou seja, não podemos garantir que $\varepsilon_{k-1}\Lambda_k \subset \Lambda_f$, em que Γ_k e Λ_k são respectivamente o semigrupo e o conjunto de valores de diferenciais associados à uma semirraiz f_k .

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos resultados que relacionam formas logarítmicas, diferenciais de torção e o chamado ideal cofator. Para tanto, vamos explorar resultados apresentados em Briançon, Maisonobe e Torrelli (2007). Na sequência vamos mostrar como o conjunto $\Lambda_k \setminus \Gamma_k$ determina elementos de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ e, em particular, podemos descrever um subconjunto de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ comum a toda curva plana com semigrupo Γ_f e que possui f_k como k -semirraiz.

2.1 Formas logarítmicas, diferenciais de torção e ideal cofator

Nesta seção vamos explorar algumas propriedades relacionadas a elementos de $f \cdot \Omega(\log C_f)$ em que $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ é um polinômio de Weierstrass irreduzível com grau n .

Como antes, denotamos $\mathcal{F}(f) = f \cdot \Omega^1 + \mathbb{C}\{x, y\} \cdot df$ e de acordo com o apresentado no capítulo anterior,

$$\mathcal{T}_f = \frac{f \cdot \Omega(\log C_f)}{\mathcal{F}(f)}.$$

Dado $w = Adx + Bdy \in f \cdot \Omega(\log C_f)$ temos que

$$P_f(\omega) := \frac{\omega \wedge df}{dx \wedge dy} = Af_y - Bf_x = Mf$$

para algum $M \in \mathbb{C}\{x, y\}$, ou seja, $M \in (J(f) : f)$ em que $J(f) = \langle f_x, f_y \rangle \subset \mathbb{C}\{x, y\}$.

Definição 2.1.1 *O ideal $(J(f) : f)$ é denominado de **ideal cofator** de f (ou C_f).*

Algumas vezes, chamaremos $P_f(\omega)$ de **polar de f com respeito a w** .

Proposição 2.1.2 *Temos que $\omega \in \mathcal{F}(f)$ se, e somente se, $\frac{P_f(\omega)}{f} \in J(f)$.*

Demonstração: Seja $\omega = Adx + Bdy$. Temos que $\omega \in \mathcal{F}(f) \subset f \cdot \Omega(\log C_f)$ se, e somente se,

$$Adx + Bdy = \omega = R \cdot df + (Pdx + Qdy) \cdot f,$$

ou seja, $A = Rf_x + Pf$ e $B = Rf_y + Qf$.

Consequentemente, temos que $\frac{P_f(\omega)}{f} = Pf_y - Qf_x \in J(f)$.

Reciprocamente, se $\frac{P_f(\omega)}{f} = Pf_y - Qf_x \in J(f)$, então

$$f \cdot (Pf_y - Qf_x) = Af_y - Bf_x,$$

ou seja,

$$(fP - A) \cdot f_y = (fQ - B) \cdot f_x.$$

Como f_x e f_y não têm fatores comuns, temos que existe $R \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $fQ - B = Rf_y$ e $fP - A = Rf_x$. Segue assim que $\omega \in \mathcal{F}(f)$. ▀

A proposição anterior permite obtermos uma outra demonstração de um resultado obtido por Michler (2001), que apresentamos abaixo.

Proposição 2.1.3 *O submódulo de torção \mathcal{T}_f e $\frac{(J(f) : f)}{J(f)}$ são \mathbb{C} -espaços vetoriais isomorfos. Em particular, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{(J(f) : f)}{J(f)} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_f = \tau_f$.*

Demonstração: Dado $\omega \in \Omega^1$, vamos denotar por $\bar{\omega}$ a classe residual de ω em $\Omega_f = \frac{\Omega^1}{\mathcal{F}(f)}$

e lembremos que $\mathcal{T}_f = \frac{f \cdot \Omega(\log C_f)}{\mathcal{F}(f)}$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} T : (J(f) : f) &\longrightarrow \mathcal{T}_f \\ M &\longmapsto \overline{Adx + Bdy} \end{aligned}$$

em que $Mf = Af_y - Bf_x$.

Vamos mostrar que T está bem definida. Supondo que existam elementos $A, A_0, B, B_0 \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tais que

$$Af_y - Bf_x = Mf = A_0f_y - B_0f_x,$$

então teríamos que

$$(A - A_0)f_y = (B - B_0)f_x$$

e conseqüentemente existe $P \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $A - A_0 = Pf_x$ e $B - B_0 = Pf_y$. Desta forma,

$$\overline{(A - A_0)dx + (B - B_0)dy} = \overline{P}df = \bar{0},$$

ou seja, $\overline{Adx + Bdy} = \overline{A_0dx + B_0dy}$.

Claramente T é \mathbb{C} -linear.

Dado $\overline{Adx + Bdy} \in \mathcal{T}_f$, temos que existe $H \in \mathbb{C}\{x, y\} \setminus \langle f \rangle$ de tal forma que $H \cdot (Adx + Bdy) = f \cdot (Pdx + Qdy) + Gdf$ com $P, Q, G \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

Assim,

$$H \cdot (Af_y - Bf_x) = f \cdot (Pf_y - Qf_y).$$

Como f é irredutível e $H \notin \langle f \rangle$ segue que $Af_y - Bf_x = fM$ para algum $M \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

Deste modo, T define um epimorfismo de \mathbb{C} -espaços vetoriais e, pela proposição anterior, $\ker(T) = J(f)$ donde segue o isomorfismo anunciado.

Do Teorema 1 de Zariski (1966) segue que $\tau_f = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_f)$ e concluímos o resultado. \blacksquare

No restante desta seção vamos mostrar que o conjunto de valores do módulo de resíduos

$$\Delta_f = \{\nu_f(B) - (\mu_f - 1 + v_0); \omega = Adx + Bdy \in f \cdot \Omega(\log C_f)\}$$

é totalmente determinado pelo conjunto de valores do ideal cofator de f ,

$$\nu_f((J(f) : f)) = \{\nu_f(M); M \in \mathbb{C}\{x, y\} \text{ com } Mf \in J(f)\}$$

e conseqüentemente, pelo que expusemos na Seção 1.6 do Capítulo 1, os conjuntos Λ_f , Δ_f e $\nu_f((J(f) : f))$ se determinam mutuamente.

Se $\omega \in \mathcal{F}(f) \subset f \cdot \Omega(\log C_f)$, então $\omega = Rdf + f \cdot (Pdx + Qdy)$ com $P, Q, R \in \mathbb{C}\{x, y\}$ e $P_f(\omega) = f \cdot (Pf_y - Qf_x)$ donde seque pela Definição 1.6.3, que

$$\{\nu_f(\text{res}(\omega)); \omega \in \mathcal{F}(f)\} = \{\nu_f(R); R \in \mathbb{C}\{x, y\}\} = \Gamma_f$$

e

$$\left\{ \nu_f \left(\frac{P_f(\omega)}{f} \right); \omega \in \mathcal{F}(f) \right\} = \{\nu_f(Pf_y - Qf_x); P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}\} = \nu_f(J(f)).$$

O conjunto $\nu_f(J(f))$ pode ser descrito utilizando o seguinte resultado de Yavorski.

Teorema 2.1.4 (Yavorski) *Seja $\mathcal{B} = \{h \in \mathbb{C}\{x\}[y]; gr_y(h) < gr_y(f)\}$ tal que*

i) $\nu_f(h) \in \Gamma_f \setminus \{\mu_f - 1 + \gamma; \gamma \in \Gamma_f\}$;

ii) $\nu_f(h_i) \neq \nu_f(h_j)$ para todo $h_i, h_j \in \mathcal{B}$, $h_i \neq h_j$.

Então, temos que $\overline{\mathcal{B}} = \left\{ \bar{h} \in \frac{\mathbb{C}\{x\}[y]}{J(f)}; h \in \mathcal{B} \right\}$ é uma base para $\frac{\mathbb{C}\{x\}[y]}{J(f)}$.

Demonstração: Veja¹ Yavorski (1990, Seção 3.1). ▀

Deste modo, temos como consequência o seguinte corolário.

Corolário 2.1.5 *Com as notações anteriores, temos*

$$\{\nu_f(\text{res}(\omega)) \neq 0; \omega \in \mathcal{F}(f)\} = \Gamma_f \setminus \{0\} = \nu_f(J(f)) - (\mu_f - 1).$$

¹No trabalho referido dá-se o nome de Anel Local de uma curva C_f ao quociente $\frac{\mathbb{C}\{x\}[y]}{J(f)}$.

Demonstração: Do teorema anterior, decorre que

$$\nu_f(J(f)) = \{\mu_f - 1 + \gamma; \gamma \in \Gamma_f \setminus \{0\}\} = \Gamma_f \setminus \{0\} + (\mu_f - 1)$$

e o resultado segue das observações feitas acima.

■

Para as análises que seguem vamos considerar

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s &= \{h \in \mathbb{C}\{x\}[y]; gr_y(h) < s\}; \\ \mathcal{E}(f) &= \mathcal{P}_n dx + \mathcal{P}_{n-1} dy, \quad n = gr_y(f); \\ \mathcal{G}(f) &= \mathbb{C}\{x, y\} df + \mathbb{C}\{x, y\} f dx \subset \mathcal{F}(f); \\ \mathcal{H}(f) &= \mathbb{C}\{x\} \cdot df + \Omega^1 \cdot f \subset \mathcal{F}(f). \end{aligned}$$

Proposição 2.1.6 *Com as notações anteriores temos que*

$$\Omega^1 = \mathcal{E}(f) \oplus \mathcal{G}(f) \quad e \quad \Omega^1 = \mathcal{E}(f) \oplus \mathcal{H}(f).$$

Demonstração: Dado $\omega = Adx + Bdy \in \Omega^1$ como $gr_y(f) = n - 1$, pela divisão euclidiana de B por f_y , escrevemos $B = Qf_y + B_1$ com $B_1 \in \mathcal{P}_{n-1}$.

Assim, usando que $df = f_x dx + f_y dy$ temos que

$$\omega = Adx + Qf_y dy + B_1 dy = Adx + Q(df - f_x dx) + B_1 dy = (A - Qf_x) dx + B_1 dy + Qdf.$$

Agora escrevendo $A - Qf_x = Pf + A_1$ com $A_1 \in \mathcal{P}_n$, obtemos

$$\omega = A_1 dx + B_1 dy + Qdf + Pf dx$$

com $A_1 dx + B_1 dy \in \mathcal{E}(f)$ e $Qdf + Pf dx \in \mathcal{G}(f)$, ou seja,

$$\Omega^1 = \mathcal{E}(f) + \mathcal{G}(f).$$

Se $\omega \in \mathcal{E}(f) \cap \mathcal{G}(f)$, então existem $A \in \mathcal{P}_n$, $B \in \mathcal{P}_{n-1}$, $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tais que

$$Adx + Bdy = \omega = Qdf + Pfdx,$$

ou seja, $A = Qf_x + Pf$ e $B = Qf_y$.

Como $B \in \mathcal{P}_{n-1}$, devemos ter $Q = 0$ e como $A \in \mathcal{P}_n$, segue que $P = 0$, isto é, $w = 0$.

Portanto,

$$\Omega^1 = \mathcal{E}(f) \oplus \mathcal{G}(f).$$

Para verificar a segunda igualdade do enunciado, dado $\omega = Adx + Bdy \in \Omega^1$, escrevemos $B = Q_1f + B_1$ com $B_1 \in \mathcal{P}_n$. Então, dividindo B_1 por f_y escrevemos $B_1 = Q_0f_y + B_0$ com $B_0 \in \mathcal{P}_{n-1}$ e $Q_0 \in \mathbb{C}\{x\}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \omega &= Adx + Q_1fdy + Q_0f_ydy + B_0dy = Adx + Q_1fdy + Q_0(df - f_xdx) + B_0dy \\ &= (A - Q_0f_x)dx + B_0dy + Q_0df + Q_1fdy. \end{aligned}$$

Escrevendo $A - Q_0f_x = P_1f + A_0$ com $A_0 \in \mathcal{P}_n$, obtemos

$$\omega = A_0dx + B_0dy + Q_0df + (P_1dx + Q_1dy)f$$

com $A_0dx + B_0dy \in \mathcal{E}(f)$ e $Q_0df + (P_1dx + Q_1dy)f \in \mathcal{H}(f)$, ou seja, $\Omega^1 = \mathcal{E}(f) + \mathcal{H}(f)$.

O fato de a soma ser direta segue de forma análoga ao caso anterior. ▀

Observação 2.1.7 Note que se $w \in \mathcal{G}(f)$, então $w = Qdf + Rfdx$, $Q, R \in \mathbb{C}\{x, y\}$ e

$$\{\nu_f(\text{res}(\omega)); \omega \in \mathcal{G}(f)\} = \{\nu_f(Q); Q \in \mathbb{C}\{x, y\}\} = \Gamma_f = \{\nu_f(\omega); \omega \in \mathcal{F}(f)\}.$$

Se $\omega = Adx - Bdy \in \mathcal{F}(f)$ com $P_f(\omega) = Mf$, então $\nu_f(\text{res}(\omega)) = \nu_f(B) - \nu_f(f_y)$ não tem relação com $\nu_f(M)$. No entanto, o mesmo não ocorre se $\omega \in \mathcal{E}(f)$. Em verdade, veremos que se $w \in \mathcal{E}(f) \cap f \cdot \Omega(\log C_f)$, então os valores $\nu_f(B)$ e $\nu_f(M)$ se determinam mutuamente.

Fixemos $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ um polinômio de Weierstrass de grau $n = v_0$ irreduzível com $\Gamma_f = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$.

Sabemos que se $\varphi(x^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}\{x^{\frac{1}{n}}\}$ é uma raiz de f , então tomando η uma raiz n -ésima primitiva da unidade, temos que $\{\varphi_i = \varphi(\eta^i x^{\frac{1}{n}}); i = 1, \dots, n\}$ é o conjunto de todas as raízes de f e

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^n (y - \varphi_i).$$

Vamos denotar por $K = \mathbb{C}\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right)$ o corpo de frações de $\mathbb{C}\{x^{\frac{1}{n}}\}$ e

$$\mathcal{P}_s^K = \{h \in K[y]; gr_y(h) < s\}.$$

Vamos nos basear nas ideias de Briançon, Maisonobe e Torrelli (2007) e aprofundar a análise de um de seus resultados.

Denotemos

$$\Phi_i = \frac{f}{y - \varphi_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (y - \varphi_j) \in K[y]$$

que tem grau $n - 1$ em y .

Note que

$$\Phi_i(\varphi_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\varphi_k - \varphi_j) & \text{se } k = i. \end{cases}$$

Além disto, temos que $f_y = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (y - \varphi_j)$,

$$f_y(\varphi_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\varphi_k - \varphi_j) = \Phi_k(\varphi_k)$$

e

$$f_x(\varphi_k) = -\varphi'_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\varphi_k - \varphi_j) = -\varphi'_k \Phi_k(\varphi_k) = -\varphi'_k \cdot f_y(\varphi_k).$$

Temos que $\mathcal{C} = \{\Phi_i, i = 1, \dots, n\}$ é base para o K -espaço vetorial \mathcal{P}_n^K . De fato, se

$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(y)$ com $\alpha_i \in K$, então

$$0 = 0(\varphi_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(\varphi_k) = \alpha_k \Phi_k(\varphi_k)$$

e conseqüentemente $\alpha_k = 0$.

Assim, \mathcal{C} é um conjunto linearmente independente. Além disto, dado $h(y) \in \mathcal{P}_n^K$, temos que $h(y)$ é totalmente determinado por sua avaliação em n pontos distintos.

Como

$$h(\varphi_k) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h(\varphi_i)}{\Phi_i(\varphi_i)} \right) \Phi_i(\varphi_k)$$

para todo φ_k com $k = 1, \dots, n$, temos que

$$h(y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h(\varphi_i)}{\Phi_i(\varphi_i)} \right) \Phi_i(y)$$

e assim \mathcal{C} é base para \mathcal{P}_n^K . Mais especificamente, \mathcal{C} corresponde à base dos polinômios de interpolação de Lagrange do conjunto $\{(\varphi_i, 0) \in K \times K; i = 1, \dots, n\}$.

No que segue, dado $h \in \mathcal{P}_n^K$ vamos denotar $h_i = \frac{h(\varphi_i)}{\Phi_i(\varphi_i)} \in K$, isto é, $h = \sum_{i=1}^n h_i \Phi_i$.

Agora, seja $\omega = Adx - Bdy \in \mathcal{E}(f) \cap f \cdot \Omega(\log C_f)$ com

$$P_f(\omega) = Bf_x + Af_y = Mf, \tag{2.1}$$

$A \in \mathcal{P}_n$ e $B \in \mathcal{P}_{n-1}$. Note que, em particular, temos que $M \in \mathcal{P}_{n-1} \subset \mathcal{P}_{n-1}^K$.

No que segue vamos mostrar que as valorações de M e de B com respeito à f , se determinam mutuamente.

O resultado a seguir pode ser encontrado em Briançon, Maisonobe e Torrelli (2007, Lema 2.2) que reproduziremos aqui para comodidade do leitor.

Proposição 2.1.8 (BRIANÇON; MAISONOBE; TORRELLI, 2007) *Sejam $M = \sum_{i=1}^n M_i \Phi_i$,*

$B = \sum_{j=1}^n B_j \Phi_j \in \mathcal{P}_{n-1}^K$ e $A = \sum_{j=1}^n A_j \Phi_j \in \mathcal{P}_n^K$ satisfazendo (2.1), então temos que $A_i = B_i \varphi'_i$

e

$$M_i = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) \right) \cdot B_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) \cdot B_j \right),$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} Bf_x &= \left(\sum_{j=1}^n B_j \Phi_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{f_x(\varphi_i)}{\Phi_i(\varphi_i)} \right) \Phi_i \right) = \left(\sum_{j=1}^n B_j \Phi_j \right) \left(\sum_{i=1}^n -\varphi'_i \Phi_i \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} -\varphi'_i B_j \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j \\ Af_y &= \left(\sum_{j=1}^n A_j \Phi_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{f_y(\varphi_i)}{\Phi_i(\varphi_i)} \right) \Phi_i \right) = \left(\sum_{j=1}^n A_j \Phi_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_j \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j. \end{aligned}$$

De (2.1) segue que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (A_j - B_j \varphi'_i) \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j = \sum_{k=1}^n M_k \Phi_k f = \sum_{k=1}^n M_k (y - \varphi_l) \cdot \Phi_k \cdot \Phi_l, \quad (2.2)$$

onde a última igualdade é válida para todo $1 \leq l \leq n$.

Dividindo (2.2) por Φ_l e avaliando em φ_l concluímos que $A_l = \varphi'_l B_l$ para $1 \leq l \leq n$.

Note que, para $i \neq j$, temos

$$\Phi_i \cdot \Phi_j = f^2 \cdot \left(\frac{1}{(y - \varphi_i)(y - \varphi_j)} \right) = f^2 \cdot \left(\frac{1}{\varphi_i - \varphi_j} \left(\frac{1}{y - \varphi_i} - \frac{1}{y - \varphi_j} \right) \right) = \frac{f}{\varphi_i - \varphi_j} (\Phi_i - \Phi_j) \quad (2.3)$$

Deste modo, para $i \neq j$, segue que $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \left[\frac{B_j(\varphi'_j - \varphi'_i)}{\varphi_i - \varphi_j} (\Phi_i - \Phi_j) \right] = \sum_{i=1}^n M_i \Phi_i$.

Consequentemente,

$$M_i = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) \right) \cdot B_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) \cdot B_j \right).$$

■

Utilizando o resultado acima, procederemos uma análise mais profunda, direcionada a nossos propósitos e que não foi realizada pelos autores da proposição anterior.

Denotemos por $\mathcal{R} = (r_{ij})$ a matriz $n \times n$ com entradas

$$r_{ij} = \begin{cases} -\left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j}\right) & \text{se } i \neq j \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_k}{\varphi_i - \varphi_k}\right) & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (2.4)$$

A matriz \mathcal{R} é uma matriz mágica, isto é, a soma dos elementos das linhas e das colunas é constante, neste caso igual a zero. Além disso, temos pela proposição anterior que

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}.$$

Em particular,

$$M_n = \sum_{i=1}^n r_{ni} B_i. \quad (2.5)$$

Lembremos que $M_n = \frac{M(x, \varphi_n)}{\Phi_n(\varphi_n)}$ e $B_i = \frac{B(x, \varphi_i)}{\Phi_i(\varphi_i)}$. Agora vamos analisar a ordem dos termos iniciais em (2.5).

Como $\nu_f(M) = \text{mult}(M(t^n, \varphi_n(t)))$, $\nu_f(B) = \text{mult}(B(t^n, \varphi_i(t)))$ e denotando $\zeta := \nu_f(f_y) = \mu_f - 1 + n$, temos

$$\begin{cases} M(x, \varphi_n) = d \cdot x^{\frac{\nu_f(M)}{n}} + (\text{t.o.s.}) \\ \Phi_i(\varphi_i) = f_y(x, \varphi_i) = c \cdot \eta^{i\zeta} x^{\frac{\zeta}{n}} + (\text{t.o.s.}) \\ B(x, \varphi_i) = b \cdot \eta^{i\nu_f(B)} x^{\frac{\nu_f(B)}{n}} + (\text{t.o.s.}), \end{cases} \quad (2.6)$$

para determinados $b, c, d \in \mathbb{C}^*$ em que η é uma raiz n -ésima primitiva da unidade.

Denotando, $\varphi_n - \varphi_j = u_j x^{\frac{m_j}{n}}$, com $u_j(0) \neq 0$, temos para $j \neq n = v_0$:

$$r_{nj} = - \left(\frac{\varphi'_n - \varphi'_j}{\varphi_n - \varphi_j} \right) = - \frac{m_j}{nx} - \frac{u'_j}{u_j} = - \frac{m_j}{nx} (1 + (\text{t.o.s.})).$$

Assim, de (2.5), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d \cdot x^{\frac{\nu_f(M)}{n}} (1 + (\text{t.o.s.}))}{c \cdot x^{\frac{\zeta}{n}} (1 + (\text{t.o.s.}))} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(- \frac{m_i}{nx} (1 + (\text{t.o.s.})) \frac{b \cdot \eta^{i\nu_f(B)} x^{\frac{\nu_f(B)}{n}} (1 + (\text{t.o.s.}))}{c \cdot \eta^{i\zeta} x^{\frac{\zeta}{n}} (1 + (\text{t.o.s.}))} \right) \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{nx} (1 + (\text{t.o.s.})) \right) \left(\frac{b \cdot x^{\frac{\nu_f(B)}{n}} (1 + (\text{t.o.s.}))}{c \cdot x^{\frac{\zeta}{n}} (1 + (\text{t.o.s.}))} \right), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$d \cdot x^{\frac{\nu_f(M)-\zeta}{n}} + (\text{t.o.s.}) = \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} (-m_i) \eta^{i(\nu_f(B)-\zeta)} + \sum_{i=1}^{n-1} m_i}_S \right] \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{x^{\frac{\nu_f(B)-\zeta}{n}}}{x} + (\text{t.o.s.}). \quad (2.7)$$

Nosso objetivo é mostrar que $S \neq 0$ e conseqüentemente teremos a relação $\nu_f(M) = \nu_f(B) - \nu_f(x)$ e $d = \frac{S \cdot b}{n}$.

Como denotado no Capítulo 1, temos

$$\{1\} = \{\gamma \in \mathbb{C}; \gamma^{\varepsilon_g} = \gamma^1 = 1\} = G_g \text{ e}$$

$$G_g \subset \cdots \subset G_j = \{\gamma \in \mathbb{C}; \gamma^{\varepsilon_j} = 1\} \subset \cdots \subset G_0 = \{\gamma \in \mathbb{C}; \gamma^{\varepsilon_0} = \gamma^n = 1\} = \{\eta, \eta^2, \dots, \eta^{n-1}, 1 = \eta_0^n\}.$$

Se $\beta_0 < \cdots < \beta_g$ denotam os expoentes característicos de C_f , então em $\varphi_n - \varphi_j = u_j x^{\frac{m_j}{n}}$, u_j uma unidade, temos que $m_j = \beta_k$ para $\eta^j \in G_{k-1} \setminus G_k$ (HEFEZ, 2003, Lemas 6.8 e 6.10) e $\sharp G_k = \varepsilon_k$.

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i = \sum_{j=0}^{g-1} \left(\sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \beta_{j+1} \right) = \sum_{j=0}^{g-1} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) \beta_{j+1} = \mu_f - 1 + n = \zeta$$

em que a penúltima igualdade segue de (1.9).

Assim, $S = \zeta - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \eta^{i(\nu_f(B)-\zeta)}$, ou ainda,

$$S = \zeta - \sum_{j=0}^{g-1} \left(\beta_{j+1} \cdot \left(\sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\delta \right) \right) \quad (2.8)$$

em que $\delta := \nu_f(B) - \zeta$.

Como $\nu_f(B) \in \Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$, segue do Lema 1.3.7 que existem únicos $0 \leq s_i < n_i = \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i}$ e $s_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\nu_f(B) = \sum_{i=0}^g s_i v_i$. No entanto, uma vez que $\zeta = \mu_f - 1 + n = \sum_{i=1}^g (n_i - 1)v_i$, veja (1.7), temos que $\delta = \sum_{i=1}^g (s_i - n_i + 1)v_i + s_0 v_0$ e como $\eta^{v_0} = 1$ para todo $\eta \in G_0$, temos

$$\eta^\delta = \eta^\alpha \text{ com } \alpha = \sum_{i=1}^g (s_i - n_i + 1)v_i.$$

Para obter a relação desejada entre $\nu_f(M)$ e $\nu_f(B)$, vamos utilizar a seguinte propriedade das raízes da unidade

$$\sum_{\eta \in G_k \setminus G_g} \eta^\gamma = \begin{cases} -1 & \text{se } \varepsilon_k \nmid \gamma \\ \varepsilon_k - 1 & \text{se } \varepsilon_k \mid \gamma. \end{cases} \quad (2.9)$$

Os próximos lemas nos conduzirão ao resultado desejado.

Lema 2.1.9 *Suponha que exista $\varepsilon_i \nmid \alpha$ e seja $k = \max_{0 \leq i \leq g-1} \{i; \varepsilon_i \nmid \alpha\}$, então*

$$\sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\alpha = \begin{cases} \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} & \text{se } k+1 \leq j < g \\ -\varepsilon_{j+1} & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } 0 \leq j < k. \end{cases}$$

Demonstração: Como $\varepsilon_j \mid \alpha$ para todo $j \geq k + 1$, temos por (2.9) que

$$\varepsilon_j - 1 = \sum_{\eta \in G_j \setminus G_g} \eta^\alpha = \sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\alpha + \sum_{\eta \in G_{j+1} \setminus G_g} \eta^\alpha = \sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\alpha + \varepsilon_{j+1} - 1,$$

ou seja,

$$\sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\alpha = \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}, \quad j = k + 1, \dots, g - 1$$

e para $j = k$

$$-1 = \sum_{\eta \in G_k \setminus G_g} \eta^\alpha = \sum_{\eta \in G_k \setminus G_{k+1}} \eta^\alpha + \sum_{\eta \in G_{k+1} \setminus G_g} \eta^\alpha = \sum_{\eta \in G_k \setminus G_{k+1}} \eta^\alpha + \varepsilon_{k+1} - 1,$$

isto é,

$$\sum_{\eta \in G_k \setminus G_{k+1}} \eta^\alpha = -\varepsilon_{k+1}.$$

Agora, para $j < k$, $\varepsilon_j \nmid \alpha$ e consequentemente

$$-1 = \sum_{\eta \in G_j \setminus G_g} \eta^\alpha = \sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\alpha + \sum_{\eta \in G_{j+1} \setminus G_g} \eta^\alpha = \sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\alpha - 1,$$

isto é,

$$\sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\alpha = 0, \quad j < k.$$

■

O próximo resultado garante que a hipótese do lema anterior é satisfeita para o valor $\alpha = \sum_{i=1}^g (s_i - n_i + 1)v_i$ com $\nu_f(B) = \sum_{i=0}^g s_i v_i$.

Lema 2.1.10 *Seja $B \in \mathcal{P}_{n-1}$ com $\nu_f(B) = \sum_{i=0}^g s_i v_i$, $0 \leq s_i < n_i$ e $s_0 \in \mathbb{N}$. Existe $k \in \{0, \dots, g-1\}$ tal que $\varepsilon_k \nmid \alpha$ em que $\alpha = \sum_{i=1}^g (s_i - n_i + 1)v_i$.*

Demonstração: Considerando $\{f_1, \dots, f_g\} \subset \mathbb{C}\{x\}[y]$ semirraízes de f temos que $gr_y(f_i) = \frac{v_0}{\varepsilon_{i-1}} = n_0 n_1 \cdots n_{i-1}$. Como $gr_y(B) < n - 1$, pelo Corolário 1.4.3, podemos

expressar de modo único

$$B = a_{\underline{s}} f_1^{s_1} \cdots f_g^{s_g} + \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} f_1^{i_1} \cdots f_g^{i_g};$$

$\nu_f(B) = \nu_f(a_{\underline{s}} f_1^{s_1} \cdots f_g^{s_g}) < \nu_f(a_{\underline{i}} f_1^{i_1} \cdots f_g^{i_g})$ para todo $\underline{i} = (i_1, \dots, i_g) \neq (s_1, \dots, s_g) = \underline{s}$.

Se $\varepsilon_k \mid \alpha$ para todo $k \in \{0, \dots, g-1\}$, então deveríamos ter $s_j = n_j - 1$ para todo $j = 1, \dots, g$. De fato, se $\varepsilon_{g-1} \mid \alpha$, então como $\varepsilon_{g-1} \mid v_l$ para todo $l = 0, \dots, g-1$, devemos ter que $\varepsilon_{g-1} \mid (n_g - 1 - s_g)v_g$. Se $s_g \neq n_g - 1$, então

$$(n_g - 1 - s_g)v_g \geq v_g = n_{g-1}v_{g-1} + \beta_g - \beta_{g-1} > n_{g-1}v_{g-1}.$$

Da expressão (1.8) temos que $\varepsilon_{g-1}(\mu_g - 1) = n_{g-1}v_{g-1} - \beta_{g-1} - v_0$ e, consequentemente,

$$(n_g - 1 - s_g)v_g > n_{g-1}v_{g-1} > \varepsilon_{g-1}(\mu_g - 1).$$

Uma vez que $\varepsilon_{g-1} \mid (n_g - 1 - s_g)v_g$ e $(n_g - 1 - s_g)v_g > \varepsilon_{g-1}(\mu_g - 1)$, segue que

$$(n_g - 1 - s_g)v_g \in \langle v_0, \dots, v_{g-1} \rangle.$$

Mas $n_g = \min\{a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; av_g \in \langle v_0, \dots, v_{g-1} \rangle\}$. Portanto, devemos ter $s_g = n_g - 1$.

Repetindo o argumento para $k = g-2, \dots, 0$ temos que $s_j = n_j - 1$ para todo $j = 1, \dots, g$.

Mas, deste modo, pelo Corolário 1.4.3 item (1),

$$gr_y(B) \geq gr_y(f_1^{n_1-1} \cdots f_g^{n_g-1}) = \sum_{i=1}^g (n_i - 1)n_{i-1} \cdots n_0 = n - 1,$$

contrariando o fato de que $B \in \mathcal{P}_{n-1}$. ▀

Agora estamos aptos a mostrar o resultado que havíamos proposto. Para tanto, vamos considerar $k = \max_{0 \leq i \leq g-1} \{i; \varepsilon_i \nmid \alpha\}$, cuja existência foi garantida no lema anterior. Deste modo, com as notações já introduzidas, temos:

Proposição 2.1.11 *Sejam $A \in \mathcal{P}_n$ e $B, M \in \mathcal{P}_{n-1}$ tais que $P_f(\omega) = Bf_x + Af_y = Mf$, onde $\omega = Adx - Bdy$. Então,*

$$\begin{aligned} M(t^n, \varphi_n(t)) &= \frac{\varepsilon_k v_{k+1} b}{n} t^{\nu_f(M)} + (t.o.s.), \\ B(t^n, \varphi_n(t)) &= bt^{\nu_f(B)} + (t.o.s.) \end{aligned}$$

e $\nu_f(B) = \nu_f(M) + v_0$.

Demonstração: Como de (2.8) $S = \zeta - \sum_{j=0}^{g-1} \left(\beta_{j+1} \cdot \left(\sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\delta \right) \right)$, em que $\delta = \nu_f(B) - (\mu_f - 1 + n)$, e usando o fato de que, sendo $k = \max_{0 \leq i \leq g-1} \{i; \varepsilon_i \nmid \delta\}$,

$$\sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\delta = \begin{cases} \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} & \text{se } k+1 \leq j < g \\ -\varepsilon_{j+1} & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j < k, \end{cases}$$

temos de (1.9) que

$$\begin{aligned} S &= \mu_f - 1 + n - \sum_{j=0}^{g-1} \left(\beta_{j+1} \cdot \left(\sum_{\eta \in G_j \setminus G_{j+1}} \eta^\delta \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^g (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i) \beta_i - \left(-\varepsilon_{k+1} \beta_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{g-1} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) \beta_{j+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i) \beta_i + (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \beta_{k+1} + \sum_{i=k+2}^g (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i) \beta_i - \left(-\varepsilon_{k+1} \beta_{k+1} + \sum_{j=k+2}^g (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j) \beta_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^k (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i) \beta_i + \varepsilon_k \beta_{k+1} = \varepsilon_k \left(\sum_{i=1}^k \frac{(\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i)}{\varepsilon_k} \beta_i + \beta_{k+1} \right) = \varepsilon_k v_{k+1} \neq 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (1.3).

Como $S \neq 0$, segue de (2.7) que $\nu_f(B) = \nu_f(M) + v_0$, $d = \frac{Sb}{n}$ e, portanto, de (2.6)

$$\begin{aligned} M(t^n, \varphi_n(t)) &= \frac{\varepsilon_k v_{k+1} b}{n} t^{\nu_f(M)} + (t.o.s.), \\ B(t^n, \varphi_n(t)) &= bt^{\nu_f(B)} + (t.o.s.). \end{aligned}$$

■

Utilizando o resultado anterior temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.12 *Seja $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ irredutível com $gr(f) = v_0$, semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ e condutor μ_f . Temos que $\Delta_f \setminus \{0\} = \nu_f((J(f) : f)) - (\mu_f - 1)$.*

Demonstração: Segue do Corolário 2.1.5, que $\Gamma_f \subset \Delta_f$ e

$$\Gamma_f \setminus \{0\} + (\mu_f - 1) \subset \nu_f(J(f)) \subset \nu_f((J(f) : f)).$$

Vamos inicialmente mostrar que $\mathbb{N} \subset \Delta_f$ e $\mathbb{N} \setminus \{0\} + (\mu_f - 1) \subset \nu((J(f) : f))$.

Para tanto, seja $l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_f$.

Temos que $l \in \Delta_f$. De fato, sendo $\overline{\mathcal{O}}_f \approx \mathbb{C}\{t\}$ o fecho integral de $\mathcal{O} = \frac{\mathbb{C}\{x\}[y]}{\langle f \rangle}$ se $\overline{f_x}$ e $\overline{f_y}$ denotam a classe de $f_x, f_y \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ em \mathcal{O}_f como $\nu_f(\overline{f_y}) = \mu_f - 1 + v_0$ e $\nu_f(\overline{f_x}) = \mu_f - 1 + v_1$, veja (1.10), temos que $\nu_f(t^l \overline{f_x}) = l + \mu_f - 1 + v_1$ e $\nu_f(t^l \overline{f_y}) = l + \mu_f - 1 + v_0$, então existem $\overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{O}_f$ tais que $t^l \overline{f_x} = \overline{A}$ e $t^l \overline{f_y} = \overline{B}$, isto é,

$$\frac{\overline{A}}{\overline{f_x}} = t^l = \frac{\overline{B}}{\overline{f_y}},$$

ou ainda, existe $M \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $Af_y - Bf_x = Mf$ ou, equivalentemente, $\omega = Adx + Bdy \in f \cdot \Omega(\log C_f)$ e $res(\omega) = \frac{B}{f_y}$, permitindo concluir que $l \in \Delta_f$.

Agora note que $\nu_f(B) = l + \mu_f - 1 + v_0 \in \Gamma_f$ e, pela Proposição 2.1.6, podemos escrever

$$w = Adx + Bdy = A_0dx + B_0dy + Rdf + (Pdx + Qdy)f \in \mathcal{E}(f) \oplus \mathcal{H}(f),$$

com $A_0dx + B_0dy \in \mathcal{E}(f)$ e $R \in \mathbb{C}\{x\}$. Assim, $B = B_0 + Rf_y + Qf$ e

$$l + \mu_f - 1 + v_0 = \nu_f(B) = \nu_f(B_0 + Rf_y + Qf) = \nu_f(B_0 + Rf_y).$$

Não podemos ter $\nu_f(Rf_y) = \nu_f(R) + \mu_f - 1 + v_0 = l + \mu_f - 1 + v_0$, pois neste caso teríamos que $l = \nu_f(R) \in \Gamma_f$. Vamos verificar que também não podemos ter $\nu_f(Rf_y) =$

$\nu_f(B_0)$ e conseqüentemente

$$\nu_f(B) = \nu_f(B_0 + Rf_y) = \min\{\nu_f(B_0), \nu_f(Rf_y)\} = \nu_f(B_0).$$

Se $\nu_f(B_0) = \nu_f(Rf_y)$, então denotando $\nu_f(R) := s_0v_0$ temos por (1.7) e (1.10) que

$$\nu_f(B_0) = s_0v_0 + \sum_{i=1}^g (n_i - 1)v_i$$

e, pelo Corolário 1.4.3, podemos escrever

$$B_0 = a(x)f_1^{a_1} \cdots f_g^{a_g} + B_1(x, y),$$

com $gr_y(B_0) \geq gr_y(f_1^{a_1} \cdots f_g^{a_g})$ e $\nu_f(B_0) = \nu_f(a(x)f_1^{a_1} \cdots f_g^{a_g}) = \sum_{i=1}^g a_i v_i + a_0 v_0$, onde $a_0 v_0 = \nu_f(a(x))$.

Devemos ter

$$\sum_{i=1}^g a_i v_i + a_0 v_0 = \sum_{i=1}^g (n_i - 1)v_i + s_0 v_0$$

e, pelo Lema 1.3.7, concluímos que $a_i = (n_i - 1)$, $i = 1, \dots, g$, e conseqüentemente temos uma contradição uma vez que $gr_y(B_0) < n - 1$ e por outro lado

$$gr_y(B_0) \geq gr_y(f_1^{n_1-1} \cdots f_g^{n_g-1}) = \sum_{i=1}^g \frac{n}{\varepsilon_{i-1}} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^g n \left(\frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1}{\varepsilon_{i-1}} \right) = n \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) = n - 1.$$

Portanto, $\nu_f(B_0) = \nu_f(B) = l + \mu_f - 1 + v_0$.

Em particular, usando a Proposição 2.1.11, temos que, para todo $l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_f$, existe uma diferencial $w_0 \in \Omega^1$ tal que

$$\begin{cases} \omega_0 = A_0 dx + B_0 dy \in \mathcal{E}(f) \cap f \cdot \Omega(\log C_f), & P_f(\omega_0) = M_0 f \text{ com } M_0 \in (J(f) : f) \\ \nu_f(M_0) = \nu_f(B_0) - v_0 = \nu_f(B) - v_0 = l + \mu_f - 1 + v_0 - v_0 = l + \mu_f - 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Portanto, $l + \mu_f - 1 \in \nu_f((J(f) : f))$. Mostrando que devemos ter $\mathbb{N} \subset \Delta_f$ e $\mathbb{N} \setminus \{0\} + \mu_f - 1 \subset \nu_f((J(f) : f))$.

Agora, seja $\alpha \in \Delta_f$ com $\alpha < 0$, então existe

$$\omega = Adx + Bdy = A_0dx + B_0dy + Qdf + Pf dx \in f \cdot \Omega(\log C_f)$$

com $\omega_0 = A_0dx + B_0dy \in \mathcal{E}(f)$, $Q, P \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tais que $0 > \alpha = \nu_f(\text{res}(\omega)) = \nu_f\left(\frac{B}{f_y}\right)$, ou seja,

$$\nu_f(B) = \nu_f(B_0 + Qf_y) < \nu_f(f_y).$$

Em particular, devemos ter $\nu_f(B) = \nu_f(B_0)$ e

$$\alpha = \nu_f(\text{res}(\omega)) = \nu_f(\text{res}(\omega_0)) = \nu_f(B_0) - (\mu_f - 1 + v_0).$$

Deste modo, usando a Proposição 2.1.11, temos que, para cada $\alpha \in \Delta_f$ com $\alpha < 0$, existe uma diferencial $w_0 \in \Omega^1$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = A_0dx + B_0dy \in \mathcal{E}(f) \cap f \cdot \Omega(\log C_f), \quad P_f(\omega_0) = M_0f \text{ com } M_0 \in (J(f) : f) \\ \nu_f(M_0) = \nu_f(B_0) - v_0 = \alpha + \mu_f - 1 + v_0 - v_0 = \alpha + \mu_f - 1. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Reciprocamente, se $\alpha + \mu_f - 1 \in \nu_f((J(f) : f))$ com $\alpha < 0$, então existe

$$\omega = Adx + Bdy = A_0dx + B_0dy + Qdf + Pf dx \in f \cdot \Omega(\log C_f)$$

com $\omega_0 = A_0dx + B_0dy \in \mathcal{E}(f)$ e $Q, P \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tais que $Mf = P_f(\omega) = P_f(\omega_0) + Pf_y f = (M_0 + Pf_y)f$ e $\nu_f(M) = \alpha + \mu_f - 1$.

Como $\alpha < 0$ temos que $\alpha + \mu_f - 1 + v_0 < \nu_f(f_y) \leq \nu_f(Pf_y)$. Conseqüentemente, pela Proposição 2.1.11, temos $\nu_f(M) = \nu_f(M_0) = \nu_f(B_0) - v_0$, ou seja, $\nu_f(B_0) = \alpha + \mu_f - 1 + v_0 < \nu_f(f_y)$.

Assim, $\nu_f(B) = \nu_f(B_0 + Qf_y) = \nu_f(B_0)$ e, por (1.18), $\nu_f(\text{res}(\omega)) = \nu_f\left(\frac{B}{f_y}\right) = \nu_f\left(\frac{B_0}{f_y}\right) = \alpha$.

Portanto, $\Delta_f \setminus \{0\} = \nu_f((J(f) : f)) - (\mu_f - 1)$. ▀

Como consequência, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.1.13 *Seja $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ irredutível. Temos que os conjuntos Λ_f , Δ_f e $\nu_f((J(f) : f))$ se determinam mutuamente.*

Demonstração: Por (1.19) temos que Λ_f e Δ_f são mutuamente determinados e, pelo resultado anterior, temos que Δ_f e $\nu_f((J(f) : f))$ se determinam mutuamente. ▀

Vamos finalizar esta seção apresentando um outro resultado de Briançon, Maisonobe e Torrelli (2007) que utilizaremos na continuação deste trabalho. É conveniente abordá-lo neste ponto por termos apresentado ideias semelhantes nos resultados anteriores.

Vamos manter as notações introduzidas antes da Proposição 2.1.8.

Inicialmente notemos que se $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ é um polinômio de Weierstrass de grau $n = v_0$ e irredutível, temos que $f_x, f_y \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_n^K \subset K[y]$.

Como f_x e f_y são primos entre si, temos que dado $H \in K[y]$ sempre existem $A, B \in K[y]$ tais que

$$Bf_x + Af_y = H. \quad (2.12)$$

A proposição abaixo corresponde à Proposição 2.16 de Briançon, Maisonobe e Torrelli (2007).

Proposição 2.1.14 *Se $B = \sum_{i=1}^n B_i \Phi_i$, $H = \sum_{i=1}^n H_i \Phi_i \in \mathcal{P}_{n-1}^K$ e $A = \sum_{i=1}^n A_i \Phi_i \in \mathcal{P}_n^K$ satisfazem (2.12), então*

$$A = \sum_{i=1}^n \left(B_i \varphi'_i + \frac{H_i}{\Phi_i(\varphi_i)} \right) \Phi_i \quad e$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) \cdot B_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) \cdot B_j \right) &= \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\Phi_j(\varphi_j) - \Phi_i(\varphi_i)}{(\varphi_i - \varphi_j) \Phi_i(\varphi_i) \Phi_j(\varphi_j)} \right) \cdot H_i \\ &- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\left(\frac{\Phi_j(\varphi_j) - \Phi_i(\varphi_i)}{(\varphi_i - \varphi_j) \Phi_i(\varphi_i) \Phi_j(\varphi_j)} \right) \cdot H_j \right). \end{aligned}$$

Demonstração: Como $f_y(\varphi_i) = \Phi_i(\varphi_i)$ e $f_x(\varphi_i) = -\varphi'_i \Phi_i(\varphi_i)$ de (2.12) temos

$H(\varphi_i) = A(\varphi_i)\Phi_i(\varphi_i) - B(\varphi_i)\varphi'_i\Phi_i(\varphi_i)$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n H_i\Phi_i = \sum_{i=1}^n [A_i\Phi_i(\varphi_i) - B_i\varphi'_i\Phi_i(\varphi_i)]\Phi_i$$

e, conseqüentemente, $H_i = A_i\Phi_i(\varphi_i) - B_i\varphi'_i\Phi_i(\varphi_i)$, donde segue que

$$A_i = B_i\varphi'_i + \frac{H_i}{\Phi_i(\varphi_i)}. \quad (2.13)$$

Usando as ideias da demonstração da Proposição 2.1.8, mais especificamente a análise que antecede (2.2), em relação à expressão (2.12), obtemos

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (A_i - B_i\varphi'_j) \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j = H = \sum_{i=1}^n H_i \cdot \Phi_i = \left(\sum_{i=1}^n H_i \cdot \Phi_i \cdot f \right) \cdot \frac{1}{f}. \quad (2.14)$$

Uma vez que

$$1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Phi_j(\varphi_j)} \Phi_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Phi_j(\varphi_j)} \frac{f}{(y - \varphi_j)},$$

isto é,

$$\frac{1}{f} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Phi_j(\varphi_j)} \frac{1}{(y - \varphi_j)},$$

por (2.13) e (2.14) temos

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} B_i(\varphi'_i - \varphi'_j) \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{H_i}{\Phi_i(\varphi_i)} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{H_i}{\Phi_j(\varphi_j)} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j,$$

isto é,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} B_i(\varphi'_i - \varphi'_j) \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{1}{\Phi_j(\varphi_j)} - \frac{1}{\Phi_i(\varphi_i)} \right) \cdot H_i \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j.$$

Note que se $i = j$, então as parcelas de ambos os lados são nulas. Assim,

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (\varphi'_i - \varphi'_j) \cdot B_i \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{\Phi_i(\varphi_i) - \Phi_j(\varphi_j)}{\Phi_i(\varphi_i)\Phi_j(\varphi_j)} \right) H_i \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j.$$

Como, para $i \neq j$ temos de (2.3) que $\Phi_i \cdot \Phi_j = \frac{f}{\varphi_i - \varphi_j}(\Phi_i - \Phi_j)$, então

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) \cdot B_i \cdot (\Phi_i - \Phi_j) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{\Phi_i(\varphi_i) - \Phi_j(\varphi_j)}{(\varphi_i - \varphi_j)\Phi_i(\varphi_i)\Phi_j(\varphi_j)} \right) \cdot H_i \cdot (\Phi_i - \Phi_j).$$

Sendo $\{\Phi_k, k = 1, \dots, n\}$ uma base de \mathcal{P}_n^K , devemos ter

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) \right) \cdot B_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \left(\left(\frac{\varphi'_i - \varphi'_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) \cdot B_j \right) &= \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \frac{\Phi_i(\varphi_i) - \Phi_j(\varphi_j)}{(\varphi_i - \varphi_j)\Phi_i(\varphi_i)\Phi_j(\varphi_j)} \right) \cdot H_i \\ &- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \left(\left(\frac{\Phi_i(\varphi_i) - \Phi_j(\varphi_j)}{(\varphi_i - \varphi_j)\Phi_i(\varphi_i)\Phi_j(\varphi_j)} \right) \cdot H_j \right). \end{aligned}$$

▀

Vamos comparar $\nu_f(H)$ e $\nu_f(B)$. Para tanto, se denotarmos por \mathcal{S} a matriz $n \times n$ com entradas

$$s_{ij} = \begin{cases} -\frac{\Phi_i(\varphi_i) - \Phi_j(\varphi_j)}{(\varphi_i - \varphi_j)\Phi_i(\varphi_i)\Phi_j(\varphi_j)} & i \neq j \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} \frac{\Phi_i(\varphi_i) - \Phi_k(\varphi_k)}{(\varphi_i - \varphi_k)\Phi_i(\varphi_i)\Phi_k(\varphi_k)} & i = j, \end{cases}$$

temos pela proposição anterior que

$$\mathcal{R} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \mathcal{S} \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix},$$

em que \mathcal{R} é a matriz descrita em (2.4).

Em particular,

$$\sum_{j=1}^n r_{nj} B_j = \sum_{j=1}^n s_{nj} H_j.$$

Proposição 2.1.15 *Com as notações do último resultado, temos que*

$$\nu_f(H) \leq \nu_f(B) + \mu_f - 1 + \beta_g$$

em que β_g denota o último expoente característico de C_f .

Demonstração: Se η é uma raiz n -ésima primitiva da unidade, então

$$\begin{aligned} B(x, \varphi_j) &= b\eta^{j\nu_f(B)}x^{\frac{\nu_f(B)}{n}} + (\text{t.o.s.}), \\ H(x, \varphi_j) &= d\eta^{j\nu_f(H)}x^{\frac{\nu_f(H)}{n}} + (\text{t.o.s.}) \text{ e} \\ \Phi_j(\varphi_j) &= c\eta^{j\zeta}x^{\frac{\zeta}{n}} + (\text{t.o.s.}), \end{aligned}$$

com $b, c, d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Vimos que

$$\sum_{j=1}^n r_{nj}B_j = \frac{bS}{cnx}x^{\frac{\nu_f(B)-\zeta}{n}} + (\text{t.o.s.}) \quad (2.15)$$

em que $S \neq 0$ é determinado como na Proposição 2.1.11 e $\zeta = \mu_f - 1 + v_0$.

Se $\varphi_n - \varphi_j = u_jx^{\frac{m_j}{n}} + (\text{t.o.s.})$, então para $j \neq n$ temos $m_j \in \{\beta_1, \dots, \beta_g\}$ e

$$\begin{aligned} s_{nj} &= \frac{\Phi_n(\varphi_n) - \Phi_j(\varphi_j)}{(\varphi_n - \varphi_j)\Phi_n(\varphi_n)\Phi_j(\varphi_j)} = \frac{c(1 - \eta^{j\zeta})x^{\frac{\zeta}{n}} + (\text{t.o.s.})}{(u_jx^{\frac{m_j}{n}} + (\text{t.o.s.}))}(c^2\eta^{j\zeta}x^{\frac{2\zeta}{n}} + (\text{t.o.s.}))} \\ &= \left(\frac{1 - \eta^{j\zeta}}{cu_j\eta^{j\zeta}}\right)x^{\frac{-(\zeta+m_j)}{n}} + (\text{t.o.s.}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n s_{nj}H_j &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{1 - \eta^{j\zeta}}{cu_j\eta^{j\zeta}}\right)x^{\frac{-(\zeta+m_j)}{n}} + (\text{t.o.s.}) \right] \left[\frac{d\eta^{j\nu_f(H)}x^{\frac{\nu_f(H)}{n}} + (\text{t.o.s.})}{c\eta^{j\zeta}x^{\frac{\zeta}{n}} + (\text{t.o.s.})} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1 - \eta^{j\zeta}}{u_j\eta^{2j\zeta}}\right) \left(\frac{d}{c^2}\eta^{j\nu_f(H)}\right)x^{\frac{\nu_f(H)-2\zeta-m_j}{n}} + (\text{t.o.s.}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

De (2.15) e (2.16), temos que existe ao menos um índice $j = 1, \dots, n$ tal que

$$\frac{\nu_f(H) - 2\zeta - m_j}{n} \leq \nu_f \left(\sum_{j=1}^n s_{nj}H_j \right) = \nu_f \left(\sum_{j=1}^n r_{nj}B_j \right) = \frac{\nu_f(B) - \zeta - n}{n},$$

ou seja,

$$\nu_f(H) - (\mu_f - 1 + n) - m_j \leq \nu_f(B) - n$$

$$\nu_f(H) \leq \nu_f(B) + \mu_f - 1 + n - n + m_j \leq \nu_f(B) + \mu_f - 1 + \beta_g.$$

■

2.2 Lacunas Especiais e Semirraízes

Seja f_k uma semirraiz de f com $k = 1, \dots, g$, em que $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$.

Lembremos que $\mathcal{F}(f_k) \subset f_k \cdot \Omega(\log C_k) \subset \Omega^1$ e

$$\mathcal{T}_{f_k} = \frac{f_k \cdot \Omega(\log C_k)}{\mathcal{F}(f_k)} \subset \frac{\Omega^1}{\mathcal{F}(f_k)} = \Omega_{f_k}.$$

Além disso, pela Proposição 2.1.6 aplicada a f_k , temos que $\Omega^1 = \mathcal{E}(f_k) \oplus \mathcal{G}(f_k)$ com $\mathcal{G}(f_k) \subset \mathcal{F}(f_k)$. Deste modo, dado $\varpi \in \frac{\Omega^1}{\mathcal{F}(f_k)}$ existe $w \in \mathcal{E}(f_k)$ tal que $\bar{w} = \varpi$.

Vamos analisar $\nu_f(w)$ com $w \in \mathcal{E}(f_k)$ tal que $\bar{w} \in \frac{\Omega^1}{\mathcal{F}(f_k)}$.

Inicialmente note que o caso em que $k = 1$, nos dá que $f_1 = y + a(x)$ e $\mathcal{E}(f_1) = \mathbb{C}\{x\}dx + \mathbb{C}\{x\}dy$ e conseqüentemente

$$\nu_f(\mathcal{E}(f_1)) = \{v_0 + kv_0, v_1 + kv_0, k \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma_f.$$

Deste modo, no que segue vamos supor que $k > 1$.

Dado $w = Adx - Bdy \in \mathcal{E}(f_k)$, isto é, $A, B \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ com $gr(A) < \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}$ e $gr(B) < \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - 1$ e considerando a divisão euclidiana de $P_{f_k}(w)$ por f_k , podemos escrever

$$A(f_k)_y + B(f_k)_x = P_{f_k}(w) = H + Mf_k \tag{2.17}$$

com $H \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}$ e $M \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - 1}$.

Além disto, como em (1.18), temos que

$$(f_k)_y w = P_{f_k}(w)dx - Bdf_k = Hdx + Mf_k dx - Bdf_k. \tag{2.18}$$

Em (2.17) temos duas possibilidades: $H = 0$ ou $H \neq 0$. Na primeira situação, ou seja, quando $H = 0$, temos que $w \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$, isto é, w é uma diferencial logarítmica com respeito a f_k e, conseqüentemente, $\nu_k(w) = \infty$, ou seja, não temos como associar $\nu_f(w)$ com $\nu_k(w)$. No entanto, como veremos, mesmo w sendo logarítmica em relação a f_k , poderemos determinar $\nu_f(w)$. Tal valor estará relacionado com certos elementos $\delta \in \mathbb{Z}^* \setminus \Lambda_k$ que descreveremos no momento oportuno.

Na situação em que $H \neq 0$, temos uma diferencial $w \in \Omega^1 \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ e veremos como podemos definir uma função que nos permitirá associar a cada elemento de $\Lambda_k \setminus \Gamma_k$, um único elemento $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$.

Analizamos estas duas situações nas subseções a seguir e, posteriormente, veremos como obter elementos de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ a partir de elementos de $\Lambda_k \setminus \Gamma_k$.

2.2.1 Valores de diferenciais em $f_k \cdot \Omega(\log C_k)$

Quando, em (2.17), temos $H = 0$ a diferencial w é logarítmica. Assim, no que segue, vamos analisar $\nu_f(w)$ com $w \in f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ para alguma semirraiz f_k de f com $k > 1$.

Pelo exposto acima, podemos considerar $w \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$.

Observação 2.2.1 *Seja $w = Adx - Bdy \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ com $P_{f_k}(w) = Mf_k$, $M \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - 1}$. Podemos escrever $M = M_1 + M_2$ onde M_1 é uma combinação linear dos elementos da base dada no Teorema 2.1.4 e $M_2 \in J(f_k)$. Assim, temos que $\nu_k(M_1) \neq \nu_k(M_2)$ e :*

- se $\nu_k(M) = \nu_k(M_1)$, então $\nu_k(M) \in \{\gamma \in \Gamma_k; \gamma < \mu_k\} \dot{\cup} \{\mu_k - 1 + l, 0 < l \notin \Gamma_k\}$.
- se $\nu_k(M) = \nu_k(M_2)$, devemos ter $\nu_k(M) \in \{\mu_k - 1 + \gamma; \gamma \in \Gamma_k \setminus \{0\}\}$.

Os resultados apresentados anteriormente permitem obter o que segue.

Teorema 2.2.2 *Seja $w = Adx - Bdy \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ tal que $P_{f_k}(w) = Mf_k$.*

Temos que

$$\begin{aligned} \nu_f(w) &= v_k - \varepsilon_{k-1}(\mu_k - 1 - \nu_{f_k}(M)) \\ &= v_k - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_{f_k}(B) \right). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\nu_f(\mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)) \subset \{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta; \delta \in \mathbb{Z}^* \setminus \Lambda_k\}.$$

Demonstração: Inicialmente, note que, sob as hipóteses do teorema, a expressão (2.18) se torna

$$(f_k)_y w = M f_k dx - B df_k. \quad (2.19)$$

Se $\left(t^{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}, \varphi_k(t)\right)$ é uma parametrização para C_k , então, aplicando a Proposição 2.1.11 a f_k , temos que existe $0 \leq j \leq k-2$ tal que

$$\begin{aligned} M\left(t^{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}, \varphi_k(t)\right) &= \frac{\varepsilon_j v_{j+1} \hat{b}}{n} t^{\nu_k(M)} + (\text{t.o.s.}) \\ B\left(t^{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}, \varphi_k(t)\right) &= b t^{\nu_k(B)} + (\text{t.o.s.}) \end{aligned}$$

$$\text{e } \nu_k(B) = \nu_k(M) + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}.$$

Por outro lado, se $(t^{v_0}, \varphi(t))$ é uma parametrização de C_f , então, pela Proposição 1.4.4, temos que

$$\begin{aligned} M(t^{v_0}, \varphi(t)) &= \frac{\varepsilon_j v_{j+1} \hat{b}}{n} t^{\nu_f(M)} + (\text{t.o.s.}) \\ B(t^{v_0}, \varphi(t)) &= b t^{\nu_f(B)} + (\text{t.o.s.}) \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $\nu_f(M f_k dx - B df_k) = \nu_f(B) + v_k = \nu_f(M) + v_k + v_0$, uma vez que a aplicação dada em (1.14) nos dá $\psi_f(M f_k dx - B df_k) = ab(\varepsilon_j v_{j+1} - v_k) t^{\nu_f(B)} + (\text{t.o.s.})$ em que $f_k(t^{v_0}, \varphi(t)) = a t^{v_k} + (\text{t.o.s.})$ e $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Portanto, como $\nu_f((f_k)_y) = \varepsilon_{k-1} \nu_k((f_k)_y) = \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}\right)$, temos de (2.19) que

$$\begin{aligned} \nu_f(w) &= v_k + \nu_f(B) - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}\right) \\ &= v_k - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_{f_k}(B)\right) \\ &= v_k - \varepsilon_{k-1} (\mu_k - 1 - \nu_{f_k}(M)). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Uma vez que $M \in (J(f_k) : f_k)$, temos do Teorema 2.1.12 que $-(\mu_k - 1 - \nu_{f_k}(M)) \in \Delta_{f_k}$ e por (1.19) temos que

$$\mu_k - 1 - \nu_{f_k}(M) \notin \Lambda_k. \quad (2.21)$$

Se

$$\nu_k(M) \in \{\gamma \in \Gamma_k, \gamma < \mu_k\} \dot{\cup} \{\mu_k - 1 + l, 0 < l \notin \Gamma_k\}$$

temos que

$$\mu_k - 1 - \nu_k(M) \in \{\mu_k - 1 - \gamma > 0; \gamma \in \Gamma_k\} \dot{\cup} \{-l; 0 < l \notin \Gamma_k\}.$$

Assim, como devemos ter (2.21), segue que

$$\mu_k - 1 - \nu_k(M) \in \{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}. \quad (2.22)$$

Se

$$\nu_k(M) \in \{\mu_k - 1 + \gamma; \gamma \in \Gamma_k \setminus \{0\}\},$$

então

$$\mu_k - 1 - \nu_k(M) \in \{-l; l \in \Gamma_k \setminus \{0\}\}. \quad (2.23)$$

Assim, de (2.22) e (2.23) temos que $\mu_k - 1 + \nu_k(M) := \delta \in \mathbb{Z}^* \setminus \Lambda_k$ e, portanto, de (2.20) segue que

$$\nu_f(\mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)) \subset \{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta; \delta \in \mathbb{Z}^* \setminus \Lambda_k\}.$$

■

Observação 2.2.3 Note que $\sharp(\{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}) = \tau_k$, em que τ_k é o número de Tjurina de C_k . De fato,

$$\sharp\{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\} + \sharp\{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\} = \left(\frac{\mu_k}{2} - \sharp(\Lambda_k \setminus \Gamma_k)\right) + \frac{\mu_k}{2} = \mu_k - \sharp(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) = \tau_k$$

em que a última igualdade segue de (1.15).

Corolário 2.2.4 *Temos que*

$$\{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k \text{ ou } -\delta \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\} \subset \nu_f(\mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)).$$

Demonstração: Seja $\delta < 0$ tal que $-\delta \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k$. Do Teorema 2.1.12 aplicado a f_k , mais precisamente de (2.10), temos que existe uma diferencial $w_0 = A_0 dx + B_0 dy \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ tal que $P_{f_k}(w_0) = M_0 f_k$ e $\nu_k(M_0) = \mu_f - 1 + (-\delta)$.

Pelo Teorema 2.2.2, temos que

$$\nu_f(w_0) = v_k - \varepsilon_{k-1}(\mu_k - 1 - \nu_k(M_0)) = v_k - \varepsilon_{k-1}(\mu_k - 1 - (\mu_k - 1 + (-\delta))) = v_k - \varepsilon_{k-1}\delta.$$

Se $\delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k$, então de (1.19) temos que $-\delta \in \Delta_f$. Aplicando o Teorema 2.1.12 a f_k , de (2.11) segue que existe uma diferencial $w_0 = A_0 dx + B_0 dy \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ tal que $P_{f_k}(w_0) = M_0 f_k$ e $\nu_k(M_0) = \mu_f - 1 + (-\delta)$, donde segue novamente do Teorema 2.2.2 que $\nu_f(w_0) = v_k - \varepsilon_{k-1}\delta$. ▀

Como consequência do resultado anterior temos:

Corolário 2.2.5 *Para todo $\delta \in \{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}$ temos*

$$\sum_{i=k}^g s_i v_i - \varepsilon_{k-1}\delta \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f$$

em que $0 \leq s_j < n_j, k+1 \leq j \leq g$ e $1 \leq s_k < n_k$.

Demonstração: Pelo exposto anteriormente e do Corolário 2.2.4, temos que, para cada $\delta \in \{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}$, existe $w \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ tal que $\nu_f(w) = v_k - \varepsilon_{k-1}\delta \in \Lambda_f$.

Como

$$\alpha := \sum_{i=k}^g s_i v_i - \varepsilon_{k-1}\delta = \nu_f \left(f_k^{s_k-1} \prod_{i=k+1}^g f_i^{s_i} w \right) \in \Lambda_f$$

é suficiente mostrar que $\alpha \notin \Gamma_f$.

Vamos mostrar inicialmente, para $\delta \in \{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}$, que $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta \notin \Gamma_f$.

Caso 1: $\delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k$.

A justificativa dada abaixo, necessita apenas que $\delta \notin \Gamma_k$, o que nos será útil em resultados posteriores.

Como $\Gamma_k \setminus \{0\} \subset \Lambda_k$ temos que, em particular, $\delta \notin \Gamma_k$ e, assim, podemos expressar de modo único (veja Lema 1.3.7)

$$\delta = \sum_{i=1}^{k-1} r_i \frac{v_i}{\varepsilon_{k-1}} - r_0 \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} > 0$$

com $0 \leq r_i < n_i$, $i = 1, \dots, k-1$ e $r_0 > 0$.

Se $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta = v_k - \left(\sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i - r_0 v_0\right) \in \Gamma_f$, então, como $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta < v_k$, deveríamos ter $v_k - \left(\sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i - r_0 v_0\right) = v_k - \varepsilon_{k-1}\delta = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i v_i$ com $0 \leq \alpha_i < n_i$, $i = 1, \dots, k-1$ e $\alpha_0 \geq 0$ e assim

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_i + r_i) v_i + (\alpha_0 - r_0) v_0.$$

Como ε_{k-1} divide $\sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_i + r_i) v_i + (\alpha_0 - r_0) v_0$, deveríamos ter que ε_{k-1} divide v_k , algo que não pode ocorrer. Portanto, $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta \notin \Gamma_f$.

Caso 2: $\delta = -l$, $l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k$.

Podemos escrever $-\delta = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \frac{v_i}{\varepsilon_{k-1}} - \alpha_0 \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}$, $0 \leq \alpha_i < n_i$, $i = 1, \dots, k-1$ e $\alpha_0 > 0$.

Assim, $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta = v_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i - \alpha_0 v_0 \notin \Gamma_f$.

Portanto, para todo $\delta \in \{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}$, temos que $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta \notin \Gamma_f$.

Mostraremos agora que $\alpha \notin \Gamma_f$.

Se $\delta \in \{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\}$, então como $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta \notin \Gamma_f$, temos que $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i - \alpha_0 v_0$ com $0 \leq \alpha_i < n_i$, $i = 1, \dots, k-1$ e $\alpha_0 > 0$. Deste modo,

$$\alpha = \sum_{i=k+1}^g s_i v_i + (s_k - 1)v_k + v_k - \varepsilon_{k-1}\delta = \sum_{i=k+1}^g s_i v_i + (s_k - 1)v_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i - \alpha_0 v_0 \notin \Gamma_f.$$

Se $\delta \in \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}$, então, como visto no Caso 2, temos que $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta =$

$$v_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i - \alpha_0 v_0 \notin \Gamma_f \text{ e}$$

$$\alpha = \sum_{i=k+1}^g s_i v_i + (s_k - 1)v_k + v_k - \varepsilon_{k-1}\delta = \sum_{i=k}^g s_i v_i + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i - \alpha_0 v_0 \notin \Gamma_f.$$

■

Em particular, destacamos:

Corolário 2.2.6 *Temos que*

$$\nu_f(\mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)) \cap (\Lambda_f \setminus \Gamma_f) = \{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k \text{ ou } -\delta \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.2, temos que

$$\nu_f(\mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)) \subset \{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta; \delta \in \mathbb{Z}^* \setminus \Lambda_k\}.$$

Se $-\delta = \gamma \in \Gamma_k$, então $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta = v_k + \varepsilon_{k-1}\gamma \in \Gamma_f$. Assim,

$$\nu_f(\mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)) \cap (\Lambda_f \setminus \Gamma_f) \subset \{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k \text{ ou } -\delta \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}.$$

A outra inclusão segue dos Corolários 2.2.4 e 2.2.5.

■

2.2.2 Valores de diferenciais em $\Omega^1 \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$

Como mencionado anteriormente (veja o Teorema 1.4.2) dada uma k -semirraiz f_k de f com $1 \leq k \leq g$, temos que C_k admite semigrupo $\Gamma_k = \left\langle \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}, \dots, \frac{v_{k-1}}{\varepsilon_{k-1}} \right\rangle$ e os expoentes característicos de C_k são $\frac{\beta_0}{\varepsilon_{k-1}}, \dots, \frac{\beta_{k-1}}{\varepsilon_{k-1}}$.

Deste modo, temos que

$$\varepsilon_{k-1}\Gamma_k + \langle v_k, \dots, v_g \rangle = \Gamma_f,$$

ou seja, $\varepsilon_{k-1}\Gamma_k \subset \Gamma_f$. Mais especificamente, temos que dado $\bar{h} \in \mathcal{O}_{f_k} = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f_k \rangle}$, então existe $h' \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ com $gr(h') < gr(f_k)$ e $\bar{h}' = \bar{h}$ tal que $\nu_f(h') = \varepsilon_{k-1}\nu_k(h')$.

O objetivo desta subseção é obter um resultado similar para o conjunto Λ_f de uma curva com semigrupo Γ_f fixo, ou seja, gostaríamos de descrever elementos de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ que são determinados a partir de $\Lambda_k \setminus \Gamma_k$.

Uma primeira constatação, como ilustra o exemplo a seguir, é que pode ocorrer de $\varepsilon_{k-1}(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) \not\subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f$.

Exemplo 2.2.7 *Seja C_f com $f = y^8 - 4x^5y^6 - 8x^7y^5 - (2x^9 + 18x^{10})y^4 - 8x^{13}y^3 + (20x^{14} - 8x^{15})y^2 + (8x^{16} + 8x^{17} - 16x^{18})y + x^{18} - 6x^{19} + 21x^{20} - x^{21}$ que admite parametrização $(t^8, t^{18} + t^{20} + t^{21})$. Temos que $\Gamma_f = \langle 8, 18, 75 \rangle$.*

Considere a 2-semirraiz $f_2 = y^4 - 2x^5y^2 - 4x^7y - x^9 + x^{10}$ em que $(t^4, t^9 + t^{10})$ é uma de suas parametrizações e $\Gamma_2 = \langle 4, 9 \rangle$.

Aplicando o Algoritmo 4.10 descrito em Hefez e Hernandez (2007) obtemos:

$$\Lambda_2 \setminus \Gamma_2 = \{14, 19, 23\}$$

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f = \{28, 37, 45, 46, 53, 55, 61, 63, 65, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 85, 87, 89, 95, 97, 103, 105, 113, 121\}.$$

Uma vez que $\varepsilon_1 = 2$, temos que $38 = 2 \cdot 19 \notin \Lambda_f \setminus \Gamma_f$.

Note que considerar um elemento γ de $\Lambda_k \setminus \Gamma_k$ é equivalente a considerar $w_1 \in \Omega^1 \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$.

Como antes, podemos assumir que

$$w_1 = Adx - Bdy + w_2$$

com $w = Adx - Bdy \in \mathcal{E}(f_k)$ e $w_2 \in \mathcal{G}(f_k) \subset \mathcal{F}(f_k)$ com $\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} = gr_y(f_k)$.

Como $w_1 \notin f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ temos que $\nu_k(w_1) = \nu_k(Adx - Bdy) = \delta_k \in \Lambda_k$. Uma vez que $A \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}$ e $B \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}-1}$ temos que $P_{f_k}(w) = A(f_k)_y + B(f_k)_x = H + Mf_k$ com $H \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}$, $M \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}-1}$ e

$$(f_k)_y w = P_{f_k}(w) - Bdf_k = Hdx + Mf_k dx - Bdf_k. \quad (2.24)$$

Observe que tal análise corresponde a considerar $H \neq 0$ em (2.18).

Além disso, temos $\nu_k(P_{f_k}(w)) = \nu_k(H)$ e $\delta_k = \nu_k(w) = \nu_k(H) - (\mu_k - 1)$.

De fato, como $\nu_k((f_k)_y) = \mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}$, temos que

$$w = \frac{Hdx + Mf_k dx - Bdf_k}{(f_k)_y}$$

e assim $\nu_k(w) = \nu_k(H) - (\mu_k - 1)$.

Por outro lado, como $(f_k)_x$ e $(f_k)_y$ são coprimos em $\mathbb{C}((x))[y]$, existem $A', B' \in \mathbb{C}((x))[y]$ tais que

$$A'(f_k)_y + B'(f_k)_x = Mf_k.$$

Uma vez que $M \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}-1}$ devemos ter que $gr(A') < \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}$ e $gr(B') < \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - 1$, ou seja, $A' \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}^K \cap \mathbb{C}((x))[y]$ e $B' \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}-1}^K \cap \mathbb{C}((x))[y]$.

Desta forma, existe $Q \in \mathbb{C}\{x\}$ tal que $A_0 = QA' \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}$, $B_0 = QB' \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}-1}$ e $QM \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}-1}$.

Aplicando a Proposição 2.1.11 para o ramo f_k , ao considerarmos a relação

$$A_0(f_k)_y + B_0(f_k)_x = QMf_k,$$

temos a existência de um índice $0 \leq j < k-1$ tal que $\nu_k\left(QMx - \frac{\varepsilon_j v_{j+1}}{n} B_0\right) > \nu_k(B_0) = \nu_k(QMx)$ e consequentemente $\nu_f(B') = \nu_f(M) + v_0$.

Note que temos

$$(A - A')(f_k)_y + (B - B')(f_k)_x = H,$$

com $A - A' \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}^K$, $B - B' \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}-1}^K$ e $H \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}} \subset \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}}^K$.

Pela Proposição 2.1.15 aplicada a f_k , temos que

$$\nu_k(H) \leq \nu_k(B - B') + \mu_k - 1 + \frac{\beta_{k-1}}{\varepsilon_{k-1}},$$

ou seja,

$$\nu_f(H) \leq \nu_f(B - B') + \varepsilon_{k-1}(\mu_k - 1) + \beta_{k-1}.$$

Como $k \leq g$, temos que $\beta_{k-1} < \beta_k$ e consequentemente

$$\nu_f(H) < \nu_f(B - B') + \varepsilon_{k-1}(\mu_k - 1) + \beta_k.$$

Por (1.8) temos que $\mu_k - 1 = n_{k-1}v_{k-1} - \beta_k - \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}$ e, por (1.6), temos que $v_k - \beta_k = \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \right)$, então

$$\nu_f(H) + v_0 < \nu_f(B - B') + v_k.$$

Agora procedemos algumas análises:

Caso I: $\nu_f(B - B') = \min\{\nu_f(B), \nu_f(B')\}$.

Neste caso,

$$\nu_f(H) + v_0 < \nu_f(B) + v_k \text{ e } \nu_f(H) + v_0 < \nu_f(B') + v_k = \nu_f(M) + v_0 + v_k.$$

Como $gr(H) < gr(f_k)$, segue da Proposição 1.4.4 e de (2.24) que

$$\nu_f(w) = \nu_f(Hdx) - \nu_f((f_k)_y) = \varepsilon_{k-1}\delta_k \in \Lambda_f.$$

Note que $\varepsilon_{k-1}\delta_k \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f$ se, e somente se, $\delta_k \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$.

Caso II: $\nu_f(B - B') > \min\{\nu_f(B), \nu_f(B')\}$.

Neste caso $\nu_f(B) = \nu_f(B') = \nu_f(M) + v_0$. Além disso, do mesmo modo como procedemos no Teorema 2.2.2, temos

$$\nu_f(Mf_kdx - Bdf_k) = \nu_f(B) + v_k = \nu_f(M) + v_0 + v_k.$$

A análise se subdivide em dois subcasos:

Subcaso II.1: $\nu_f(H) + v_0 < \nu_f(B) + v_k$.

Temos de (2.24), tal como no Caso I, que $\nu_f(w) = \varepsilon_{k-1}\delta_k \in \Lambda_f$.

Subcaso II.2: $\nu_f(H) + v_0 > \nu_f(B) + v_k$.

De (2.24) temos que

$$\begin{aligned}\nu_f(w) &= \nu_f(Mf_k dx - Bdf_k) - \nu_f((f_k)_y) \\ &= \nu_f(Bdf_k) - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \right) \\ &= v_k - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_k(B) \right) = \beta_k + \varepsilon_{k-1} \nu_k(B),\end{aligned}$$

em que a penúltima igualdade segue do fato que $\nu_f(B) = \varepsilon_{k-1} \nu_k(B)$ pois $B \in \mathcal{P}_{\frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - 1}$ (veja a Proposição 1.4.4).

Note que $\nu_k(B) - \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} = \nu_k(M) \in \Gamma_k$ e deste modo, pelo Lema 1.3.7, temos que $\alpha := \mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_k(B) \notin \Gamma_k$.

Temos ainda um último desdobramento:

II.2.i: $\alpha \notin \Lambda_k \setminus \Gamma_k$.

De (1.19) temos $-\alpha \in \Delta_{f_k}$ e do Teorema 2.1.12 aplicado a f_k , temos que $\nu_k(M) \in \nu_k((J(f_k) : f_k))$. Deste modo, existe $w' \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ tal que $\nu_f(w) = \nu_f(w')$ (veja (2.11) e o Corolário 2.2.5). Mais ainda, do Corolário 2.2.6, temos que

$$\nu_f(w) = \nu_f(w') \in \nu_f(\mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)) \cap \Lambda_f \setminus \Gamma_f.$$

II.2.ii: $\alpha \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$.

Temos, assim como no **Caso 1** do Corolário 2.2.5, que

$$\nu_f(w) = v_k - \varepsilon_{k-1} \alpha = v_k - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_k(B) \right) = \beta_k + \varepsilon_{k-1} \nu_k(B) \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f.$$

Claramente as condições **II.2.i** e **II.2.ii** são disjuntas e conseqüentemente não produzem mesmo elemento em Λ_f .

Os casos e subcasos acima serão utilizados no que segue para garantirmos que podemos associar $\Lambda_k \setminus \Gamma_k$ bijectivamente a um subconjunto de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$.

Observando o **Caso I** e o **Subcaso II.1** temos que a condição $\nu_f(H) + v_0 < \nu_f(B) + v_k$ nos dá que $\nu_f(w) = \varepsilon_{k-1} \delta_k = \varepsilon_{k-1} \nu_k(w)$ em que $\delta_k = \nu_k(w) = \nu_k(H) - (\mu_k - 1) \in \Lambda_k$.

Note que

$$\begin{aligned}
\nu_f(H) + v_0 < \nu_f(B) + v_k &\iff \varepsilon_{k-1} \left(\nu_k(H) + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \right) < \varepsilon_{k-1} \nu_k(B) + v_k \\
&\iff \varepsilon_{k-1} \left(\delta_k + \mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \right) < \varepsilon_{k-1} \nu_k(B) + v_k \\
&\iff \varepsilon_{k-1} (\delta_k - \nu_k(B)) < v_k - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \right) \\
&\iff \varepsilon_{k-1} (\delta_k - \nu_k(B)) < \beta_k, \tag{2.25}
\end{aligned}$$

em que a última equivalência decorre de (1.6) e (1.8) aplicada a f_k .

Veja que a condição $\varepsilon_{k-1} (\delta_k - \nu_k(B)) < \beta_k$ envolve o valor $\nu_k(B)$, que pode variar ao considerarmos 1-formas com o mesmo valor δ_k , como ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.2.8 *Considere a curva plana C_f do Exemplo 2.2.7 e a 2-semirraiz $f_2 = y^4 - 2x^5y^2 - 4x^7y - x^9 + x^{10}$ que admite a parametrização $\varphi_2 = (t^4, t^9 + t^{10})$.*

Temos que

$$w_1 = 9y^2dx - 4xydy \text{ e } w_2 = 9x^2ydx - \left(4x^3 - \frac{4}{9}xy \right) dy$$

são tais que

$$\nu_2(w_1) = \nu_2(w_2) = 23 \in \Lambda_2 \setminus \Gamma_2$$

e $\nu_2(B_1) = 13 > 12 = \nu_2(B_2)$ em que $w_i = A_i dx - B_i dy$ para $i = 1, 2$.

Como queremos estabelecer uma função injetora

$$\rho_k : \Lambda_k \setminus \Gamma_k \longrightarrow \Lambda_f \setminus \Gamma_f$$

devemos descrevê-la em termos de $\delta_k \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$. Para tanto, utilizaremos a seguinte função, que foi considerada por Delorme (1978) para um ramo C_f :

$$\begin{aligned}
\Theta_f : \Lambda_f &\longrightarrow \Gamma_f \cup \{\infty\} \\
\delta &\longmapsto \max\{\nu_f(B); \delta = \nu_f(Adx - Bdy)\}.
\end{aligned}$$

Delorme (1978, Seção 4) mostra que tal função está bem definida e que seus valores correspondem a invariantes analíticos para C_f .

Determinar o valor da função Θ_f não é uma tarefa fácil. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.2.9 *Seja $\delta \in \Gamma_f = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ e escrevamos $\delta = \sum_{i=0}^g s_i v_i$ com $0 \leq s_i < n_i$, $i = 1, \dots, g$ e $s_0 \in \mathbb{N}$. Fixemos f_1, \dots, f_g semirraízes de f .*

Se $s_0 \neq 0$, então $\delta = \nu_f \left(\prod_{i=1}^g f_i^{s_i} x^{s_0-1} dx \right)$ e deste modo, $\Theta_f(\delta) = \infty$.

Se $s_0 = 0$, então

$$\delta = \nu_f \left(d \left(\prod_{i=1}^g f_i^{s_i} \right) \right) = \nu_f \left(\sum_{j=1}^g s_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^g f_i^{s_i} f_j^{s_j-1} (f_j)_x dx + \sum_{j=1}^g s_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^g f_i^{s_i} f_j^{s_j-1} (f_j)_y dy \right).$$

Usando (1.6) e (1.8) para f_j , concluímos que $\nu_f \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^g f_i^{s_i} f_j^{s_j-1} (f_j)_y \right) = \delta - v_j + v_j - \beta_j = \delta - \beta_j$. Assim, se $r = \max\{j; s_j \neq 0\}$, então

$$\Theta_f(\delta) \geq \delta - \beta_r.$$

Exemplo 2.2.10 *Pelo Teorema 1.5.2, se temos $\Lambda_f \setminus \Gamma_f \neq \emptyset$ e $\lambda + v_0 = \min(\Lambda_f \setminus \Gamma_f)$, em que $\Gamma_f = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, então C_f é analiticamente equivalente a uma curva com parametrização $\varphi = (t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + (t.o.s.))$ e temos que*

$$\nu_f(v_1 y dx - v_0 x dy) = \lambda + v_0.$$

Se $\nu_f(Adx - Bdy) = \lambda + v_0$, então é necessário que $\nu_f(B) + v_1 = \nu_f(A) + v_0 < \nu_f(Adx - Bdy)$.

Caso $\nu_f(B) > v_0$, então uma análise sobre o valor $\nu_f(Adx - Bdy)$ indica que este supera $\lambda + v_0$. Portanto, temos que $\Theta_f(\lambda + v_0) = v_0$.

O Exemplo 2.2.9 indica que a função $\Theta_f : \Lambda_f \rightarrow \Gamma_f \cup \{\infty\}$ não é injetora. Observe que se $\delta \notin \Gamma_f$, então $\Theta_f(\delta) \neq \infty$.

Ainda denotando por Θ_f a restrição da função anterior à $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ temos:

Lema 2.2.11 A função $\Theta_f : \Lambda_f \setminus \Gamma_f \rightarrow \Gamma_f$ é injetora.

Demonstração: Sejam $\delta_1, \delta_2 \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f$ com $\delta_1 \neq \delta_2$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\delta_1 < \delta_2$.

Se $\Theta_f(\delta_1) = \Theta_f(\delta_2)$, então existem $w_i = A_i dx - B_i dy$, com $\nu_f(B_i) = \Theta_f(\delta_i)$, $\nu_f(w_i) = \delta_i$ para $i = 1, 2$.

Deste modo, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $\nu_f(B_1 - cB_2) > \nu_f(B_1) = \Theta_f(\delta_1)$.

Assim, $w = w_1 - cw_2 = (A_1 - cA_2)dx - (B_1 - cB_2)dy$ é tal que $\nu_f(w) = \nu_f(w_1) = \delta_1$, contrariando a maximalidade de $\Theta_f(\delta_1)$. ▀

Utilizando a função $\Theta_k : \Lambda_k \setminus \Gamma_k \rightarrow \Gamma_k$ para o ramo C_k definimos

$$\rho_k : \Lambda_k \setminus \Gamma_k \longrightarrow \Lambda_f \setminus \Gamma_f$$

$$\delta_k \longmapsto \begin{cases} \varepsilon_{k-1}\delta_k & \text{se } \varepsilon_{k-1}(\delta_k - \Theta_k(\delta_k)) < \beta_k \\ \beta_k + \varepsilon_{k-1}\Theta_k(\delta_k) & \text{se } \varepsilon_{k-1}(\delta_k - \Theta_k(\delta_k)) > \beta_k. \end{cases} \quad (2.26)$$

O fato de Θ_k estar bem definida implica o mesmo para a função ρ_k .

Considerando uma diferencial dada por $w = Adx + Bdy$ com $\nu_k(B) = \Theta_k(\delta_k)$ e $P_{f_k}(w) = H + Mf_k$ satisfazendo (2.25), pelas análises feitas no início desta subseção, devemos ter $\nu_k(M) = \nu_k(B) - \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} = \Theta_k(\delta_k) - \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \in \Gamma_k$ e conseqüentemente, pelo Lema 1.3.7, temos $\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \Theta_k(\delta_k) \notin \Gamma_k$. Além disso, a análise numérica feita no **Caso I** do Corolário 2.2.5, permite concluir que

$$\beta_k + \varepsilon_{k-1}\Theta_k(\delta_k) = \nu_k - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \Theta_k(\delta_k) \right) \notin \Gamma_f.$$

Note que $\varepsilon_{k-1}(\delta_k - \Theta_k(\delta_k)) < \beta_k$ é equivalente a $\varepsilon_{k-1}\delta_k < \beta_k + \varepsilon_{k-1}\Theta_k(\delta_k)$ e assim, a função ρ_k também pode ser definida por

$$\rho_k(\delta_k) = \min\{\varepsilon_{k-1}\delta_k, \beta_k + \varepsilon_{k-1}\Theta_k(\delta_k)\}.$$

Claramente o mínimo do conjunto anterior não pode ser atingido simultaneamente.

Deste modo,

$$\rho_k(\delta_1) = \rho_k(\delta_2) \iff \varepsilon_{k-1}\delta_1 = \varepsilon_{k-1}\delta_2 \text{ ou } \beta_k + \varepsilon_{k-1}\Theta_k(\delta_1) = \beta_k + \varepsilon_{k-1}\Theta_k(\delta_2).$$

Segue do Lema 2.2.11 que a função ρ é injetora, ou seja,

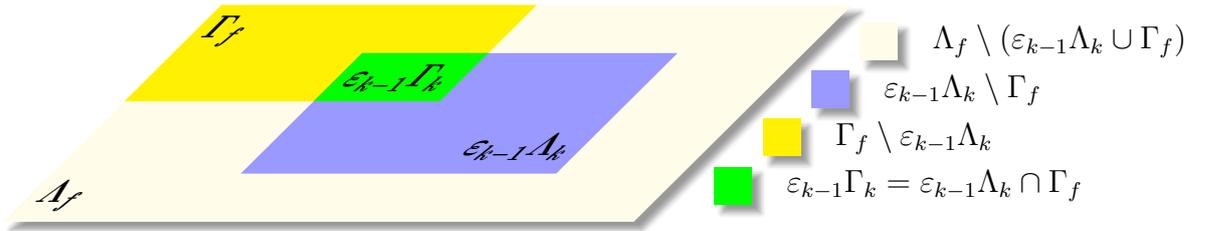
$$\rho_k(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) \subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f \text{ e } \#\rho_k(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) = \#(\Lambda_k \setminus \Gamma_k).$$

Note que, pelo Exemplo 2.2.9 aplicado a Γ_k , temos que, se $\delta_k \in \Gamma_k$, então $\Theta_k(\delta_k) = \infty$ ou $\Theta_k(\delta_k) \geq \delta_k - \frac{\beta_{k-1}}{\varepsilon_{k-1}}$. De qualquer modo, $\varepsilon_{k-1}\delta_k \leq \beta_{k-1} + \varepsilon_{k-1}\Theta_k(\delta_k)$ e, conseqüentemente, $\min\{\varepsilon_{k-1}\delta_k, \beta_k + \varepsilon_{k-1}\Theta_k(\delta_k)\} = \varepsilon_{k-1}\delta_k$. Assim, podemos estender a função ρ_k a Λ_k de modo que $\rho_k(\Gamma_k) = \varepsilon_{k-1}\Gamma_k \subset \Gamma_f$.

Observação 2.2.12 *Para um valor suficientemente grande de β_k , por exemplo, se $\beta_k > \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 - \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \right)$, temos que $\rho_k(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) = \varepsilon_{k-1}(\Lambda_k \setminus \Gamma_k)$.*

De fato, dado $\delta_k \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$ temos que $\delta_k \leq \mu_k - 1$ e $\Theta_k(\delta_k) \geq \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}}$. Assim, $\varepsilon_{k-1}(\delta_k - \Theta_k(\delta_k)) \leq \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 - \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \right) < \beta_k$, seguindo que $\rho_k(\delta_k) = \varepsilon_{k-1}\delta_k$ para todo $\delta_k \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$.

Neste caso, temos as seguintes inclusões de conjuntos



No que segue, vamos denotar

$$L_k^1 = \{\delta_k \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k; \varepsilon_{k-1}(\delta_k - \Theta_k(\delta_k)) < \beta_k\};$$

$$L_k^2 = \{\delta_k \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k; \varepsilon_{k-1}(\delta_k - \Theta_k(\delta_k)) > \beta_k\}.$$

Temos que

$$\rho_k(L_k^1) = \varepsilon_{k-1}L_k^1 \subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f \text{ e}$$

$$\rho_k(L_k^2) = \left\{ v_k - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \Theta_k(\delta_k) \right); \delta_k \in L_k^2 \right\} = \{ \beta_k + \varepsilon_{k-1} \Theta_k(\delta_k); \delta_k \in L_k^2 \} \subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f.$$

Procedendo uma análise numérica, como no Corolário 2.2.5, temos que

$$\sum_{i=k}^g s_i v_i + \rho_k(L_k^2) \subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f$$

para $0 \leq s_i < n_i$; $i = k+1, \dots, g$ e $0 \leq s_k \leq n_k - 2$.

2.2.3 A influência de Λ_k em Λ_f

Vamos reunir as principais conclusões das duas últimas subseções de modo a descrever elementos de Λ_f em termos de Λ_k .

O Corolário 2.2.5 e as análises da subseção precedente permitem obter o seguinte resultado:

Teorema 2.2.13 *Para qualquer ramo C_f que admite f_k com $k > 1$ como semirraiz temos, seguindo as notações anteriores, que*

$$\varepsilon_{k-1} L_k^1 \dot{\cup} \left\{ \sum_{i=k}^g s_i v_i + \rho_k(L_k^2) \right\} \dot{\cup} \left\{ \sum_{i=k}^g s_i v_i + v_k - \varepsilon_{k-1} \delta \right\} \subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f$$

em que

$$0 \leq s_i < n_i; \quad i = k+1, \dots, g, \quad 0 \leq s_k \leq n_k - 2 \quad e$$

$$\delta \in \{l, l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\} \dot{\cup} \{-l, l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_k\}.$$

Em particular, temos que

$$\#(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) \geq \#L_k^1 + \varepsilon_k(n_k - 1)(\#L_k^2 + \tau_k),$$

em que τ_k denota o número de Tjurina de C_k .

Demonstração: Do exposto no final da subseção anterior temos

$$\varepsilon_{k-1} L_k^1 \dot{\cup} \left\{ \sum_{i=k}^g s_i v_i + \rho_k(L_k^2) \right\} \subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f$$

e

$$\# \left\{ \sum_{i=k}^g s_i v_i + \rho_k(L_k^2) \right\} = (n_k - 1)n_{k+1} \cdots n_g \#L_k^2 = \varepsilon_k(n_k - 1)\#L_k^2.$$

Do Corolário 2.2.5, temos $\left\{ \sum_{i=k}^g s_i v_i + v_k - \varepsilon_{k-1}\delta \right\} \subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f$ e, pela Observação 2.2.3, segue que

$$\# \left\{ \sum_{i=k}^g s_i v_i + v_k - \varepsilon_{k-1}\delta \right\} = (n_k - 1)n_{k+1} \cdots n_g \tau_k = \varepsilon_k(n_k - 1)\tau_k.$$

Para concluir a demonstração resta mostrar que

$$\left\{ \sum_{i=k}^g s_i v_i + v_k - \varepsilon_{k-1}\delta \right\} \cap \left[\varepsilon_{k-1}L_k^1 \dot{\cup} \left\{ \sum_{i=k}^g s_i v_i + \rho_k(L_k^2) \right\} \right] = \emptyset.$$

Claramente $\left\{ \sum_{i=k}^g s_i v_i + v_k - \varepsilon_{k-1}\delta \right\} \cap \varepsilon_{k-1}L_k^1 = \emptyset$. Suponha, por absurdo, que

$$\sum_{i=k}^g s_i v_i + v_k - \varepsilon_{k-1}\delta = \sum_{i=1}^g r_i v_i + v_k - \varepsilon_{k-1}\alpha,$$

onde $v_k - \varepsilon_{k-1}\alpha \in \rho_k(L_k^2)$ e δ conforme o enunciado.

Pelo Lema 1.3.7, devemos ter $\delta = \alpha$ e, em particular, $v_k - \varepsilon_{k-1}\delta = v_k - \varepsilon_{k-1}\alpha$. Pelo Corolário 2.2.6, existe $A dx + B dy = w \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ tal que $P_{f_k}(w) = M f_k$ e $\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_k(B) = \delta$.

Como $v_k - \varepsilon_{k-1}\alpha \in \rho_k(L_k^2)$, então existe uma diferencial $A' dx + B' dy = w' \in \Omega^1 \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ tal que $\nu_f(w') = v_k - \varepsilon_{k-1}\alpha$ e $P_{f_k}(w') = H + M_1 f_k$, $H \neq 0$. Sendo $\delta_k = \nu_k(w')$, então $\alpha = \mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \Theta_k(\delta_k)$ e $\nu_k(B') = \Theta_k(\delta_k)$.

Uma vez que $\delta = \alpha$, devemos ter $\nu_k(B) = \Theta_k(\delta_k) = \nu_k(B')$. Então existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ de forma que $\nu_k(B' - cB) > \Theta_k(\delta_k)$. Assim, obtemos uma diferencial

$$w_1 = A_1 dx + B_1 dy = w' - w = (A' - cA) dx + (B' - cB) dy,$$

com $\nu_k(w_1) = \nu_k(w') = \delta_k$, mas $\nu_k(B_1) > \Theta_k(\delta_k)$, o que contradiz a definição de $\Theta_k(\delta_k)$. \blacksquare

Exemplo 2.2.14 Consideremos a família de curvas planas C_{f_a} dada parametricamente

por $(t^8, t^{18} + t^{20} + \sum_{i \geq 21} a_i t^i)$ com $a_{21} \neq 0$. Qualquer membro desta família possui semigrupo $\langle 8, 18, 75 \rangle$, admite a 2-semirraiz parametrizada por $(t^4, t^9 + t^{10})$ com semigrupo $\Gamma_2 = \langle 4, 9 \rangle$ e conjunto de lacunas especiais $\Lambda_2 \setminus \Gamma_2 = \{14, 19, 23\}$ (vide Exemplo 2.2.7).

Variando os possíveis valores para $\nu_2(B)$ de modo que $\nu_2(Adx - Bdy) \in \Lambda_2 \setminus \Gamma_2$ encontramos:

$$\Theta_2(14) = 4, \quad \Theta_2(19) = 8 \text{ e } \Theta_2(23) = 13.$$

A saber, 1-formas que atingem tais valores são, respectivamente

$$\begin{aligned} w_1 &= 9ydx - 4xdy, \\ w_2 &= 9xydx - \left(4x^2 - \frac{4}{9}y\right) dy, \\ w_3 &= 9y^2dx - 4xydy = yw_1. \end{aligned}$$

Note que $\nu_2\left(9x^2ydx - \left(4x^3 - \frac{4}{9}xy\right) dy\right) = 23$, mas $\nu_2\left(4x^3 - \frac{4}{9}xy\right) = 12 < 13 = \Theta_2(23)$, o que ilustra que podemos obter várias 1-formas com mesmo valor δ e que não nos dão o valor $\Theta_2(\delta)$.

Como $\beta_2 = 21$ e $\varepsilon_1 = \text{mdc}(8, 18) = 2$ temos:

$$\begin{aligned} L_2^1 &= \{\delta \in \Lambda_2 \setminus \Gamma_2; 2(\delta - \Theta_2(\delta)) < 21\} = \{14, 23\} \\ L_2^2 &= \{\delta \in \Lambda_2 \setminus \Gamma_2; 2(\delta - \Theta_2(\delta)) > 21\} = \{19\}. \end{aligned}$$

Além disto,

$$\begin{aligned} D &= \{l \in \mathbb{N} \setminus \Lambda_2\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_2\} \\ &= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15\} \dot{\cup} \{-1, -2, -3, -5, -6, -7, -10, -11, -14, -15, -19, -23\}. \end{aligned}$$

Uma vez que $g = 2$ e $n_2 = 2$, pelo resultado anterior, temos que são subconjuntos de $\Lambda_{f_a} \setminus \Gamma_{f_a}$:

$$2L_2^1 = \{28, 46\},$$

$$\rho(L_2^2) = \{37\},$$

$$\begin{aligned}
\{v_2 - \varepsilon_1 \delta; \delta \in D\} &= \{75 - 2\delta; \delta \in D\} \\
&= \{73, 71, 69, 65, 63, 61, 55, 53, 45\} \\
&\cup \{77, 79, 81, 85, 87, 89, 95, 97, 103, 105, 113, 121\}.
\end{aligned}$$

Assim, $\sharp(\Lambda_{f_a} \setminus \Gamma_{f_a}) \geq 24$.

Aplicando o Algoritmo 4.10 descrito em Hefez e Hernandez (2007) podemos explicitar 1-formas que atingem os valores descritos, a saber:

$$\nu_{f_a}(w_1) = 28, \quad \nu_{f_a}(yw_1) = 46,$$

$$\begin{aligned}
\{\nu_{f_a}(x^i y^j w_2); 0 \leq i \leq 6 \text{ e } 0 \leq j \leq 2\} &= \{37, 45, 53, 55, 61, 63, 69, 71, 73, 77, 79, \\
&81, 85, 87, 89, 95, 97, 103, 105, 113, 121\},
\end{aligned}$$

$$\nu_{f_a}\left(y^2 w_1 - \frac{1}{4} x^7 dx\right) = 65.$$

Utilizando a análise realizada após o Exemplo 2.2.7, podemos descrever precisamente os elementos de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ menores que v_k por meio de $\Lambda_k \setminus \Gamma_k$ e da função ρ_k descrita em (2.26).

Teorema 2.2.15 *Com as notações anteriores, temos que*

$$\{\gamma \in \Lambda_f; \gamma < v_k\} = \{\varepsilon_{k-1} \gamma_k < v_k; \gamma_k \in \Gamma_k \setminus \{0\}\} \dot{\cup} \rho_k(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) \dot{\cup} \{v_k - \varepsilon_{k-1} \delta_k; \delta_k \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\}.$$

Demonstração: Claramente

$$\{\varepsilon_{k-1} \gamma_k < v_k; \gamma_k \in \Gamma_k \setminus \{0\}\} \subset \{\gamma \in \Gamma_f \setminus \{0\}; \gamma < v_k\} \subset \{\gamma \in \Lambda_f; \gamma < v_k\}.$$

Segue da definição da função ρ_k que $\rho_k(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) \subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f$.

Seja $\delta_k \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k = L_k^1 \dot{\cup} L_k^2$, em particular $\delta_k \leq \mu_k - 1$.

Se $\delta_k \in L_k^1$, então $\rho_k(\delta_k) = \varepsilon_{k-1} \delta_k \leq \varepsilon_{k-1}(\mu_k - 1) = v_k - \beta_k - v_0 < v_k$, em que a última igualdade decorre de (1.6) e (1.8).

Se $\delta_k \in L_k^2$, então $\rho_k(\delta_k) = \beta_k + \varepsilon_{k-1}\Theta_k(\delta_k) = v_k - \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \Theta_k(\delta_k) \right) < v_k$, uma vez que $\frac{\beta_k}{\varepsilon_{k-1}} < \delta_k - \Theta_k(\delta_k) \leq \mu_k - 1 - \Theta_k(\delta_k)$.

Assim, $\rho_k(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) \subset \{\gamma \in \Lambda_f; \gamma < v_k\}$.

Do Corolário 2.2.6, segue que

$$\{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\} \subset \{\gamma \in \Lambda_f; \gamma < v_k\}.$$

Resta mostrarmos a inclusão

$$\{\gamma \in \Lambda_f; \gamma < v_k\} \subset \{\varepsilon_{k-1}\gamma_k < v_k; \gamma_k \in \Gamma_k \setminus \{0\}\} \dot{\cup} \rho_k(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) \dot{\cup} \{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\}.$$

Consideremos $\gamma \in \Lambda_f$ com $\gamma < v_k$. Se $\gamma \in \Gamma_f \setminus \{0\}$, então $\gamma = \sum_{i=0}^{k-1} s_i v_i = \varepsilon_{k-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} s_i \frac{v_i}{\varepsilon_{k-1}} \right) \in \varepsilon_{k-1}\Gamma_k$.

Suponha que $\gamma \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f$, $\gamma < v_k$, ou seja, $\gamma = \nu_f(w)$ para algum $w \in \Omega^1$.

Podemos considerar que $w = Adx - Bdy \in \mathcal{E}(f_k) \setminus \mathcal{F}(f_k)$.

Se $w \in f_k \cdot \Omega(\log C_k)$, então, pelo Corolário 2.2.6, temos que $\gamma = v_k - \varepsilon_{k-1}\delta_k$ com $\delta_k \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k$.

Agora se $w \in \mathcal{E}(f_k) \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$, então $\nu_k(w) \neq 0$, ou seja, existe $l_0 \in \Lambda_k$ tal que $\nu_k(w) = l_0$.

Retomando a análise feita após o Exemplo 2.2.7, temos as possibilidades:

- (a) $\gamma = \nu_f(w) = \varepsilon_{k-1}l_0$ se $\varepsilon_{k-1}(l_0 - \nu_k(B)) < \beta_k$.
- (b) $\gamma = \nu_f(w) = v_k - \varepsilon_{k-1}\alpha$, $\alpha = \mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_k(B) \notin \Gamma_k$ se $\varepsilon_{k-1}(l_0 - \nu_k(B)) > \beta_k$.

Na situação dada em (a): Se $l_0 \in \Gamma_k$, então

$$\gamma \in \{\varepsilon_{k-1}l_k < v_k; l_k \in \Gamma_k\}.$$

Se $l_0 \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$, então $\varepsilon_{k-1}(l_0 - \Theta_k(l_0)) \leq \varepsilon_{k-1}(l_0 - \nu_k(B)) < \beta_k$, isto é, $l_0 \in L_k^1$ e $\gamma = \rho_k(l_0) \in \rho_k(\Lambda_k \setminus \Gamma_k)$.

Por outro lado, se estamos na situação (b), isto é, $\gamma = \nu_f(w) = v_k - \varepsilon_{k-1}\alpha$ com $\alpha = \mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_k(B) \notin \Gamma_k$ e $\varepsilon_{k-1}(l_0 - \nu_k(B)) > \beta_k$, então, como $\gamma < v_k$, segue que

$\alpha > 0$. Assim, podemos ter $\alpha \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$ ou $\alpha \notin \Lambda_k$.

Se $\alpha \notin \Lambda_k$, então $\gamma \in \{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta_k; \delta_k \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\}$.

Resta analisar o caso em que $\gamma = v_k - \varepsilon_{k-1}\alpha$ com $\alpha = \mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_k(B) \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$ e $\varepsilon_{k-1}(l_0 - \nu_k(B)) > \beta_k$.

Vamos mostrar que $\gamma \in \rho_k(L_k^2)$ em que $L_k^2 = \{\delta_k \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k; \varepsilon_{k-1}(\delta_k - \Theta_k(\delta_k)) > \beta_k\}$.

Se $\nu_k(B) = \Theta_k(l_0)$, então devemos ter $l_0 \notin \Gamma_k$. De fato, se $l_0 \in \Gamma_k$, então, do Exemplo 2.2.9, teríamos $\nu_k(B) = \infty$, isto é, $\gamma = \nu_f(w) = \nu_f(Adx) \in \Gamma_f$ ou $\varepsilon_{k-1}(l_0 - \nu_k(B)) \leq \beta_{k-1} < \beta_k$. De qualquer forma teríamos contradições com nossas hipóteses.

Deste modo, se $\nu_k(B) = \Theta_k(l_0)$, então $l_0 \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$ e temos $\gamma = v_k - \varepsilon_{k-1}\alpha = \rho_k(l_0)$.

Suponha que $\nu_k(B) < \Theta_k(l_0)$. Deste modo, existe uma 1-forma diferencial $w_0 = A_0dx - B_0dy \in \mathcal{E}(f_k) \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ com $\nu_k(w_0) = l_0$ e $\nu_k(B_0) = \Theta(l_0)$ tal que $w - w_0 = (A - A_0)dx - (B - B_0)dy$ satisfaz $\nu_k(w - w_0) = l_1 > l_0$ e $\nu_k(B) = \nu_k(B - B_0) \leq \Theta_k(l_1)$.

Se $\nu_k(B) < \Theta_k(l_1)$, repetimos o argumento.

Afirmamos que, após um número finito de procedimentos como o descrito, obtemos $\tilde{w} = \tilde{A}dx - \tilde{B}dy \in \mathcal{E}(f_k) \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ com $\nu_k(\tilde{w}) = \tilde{l}$ e $\Theta_k(\tilde{l}) = \nu_k(\tilde{B}) = \nu_k(B)$.

De fato, após j -iterações obtemos

$$w - \sum_{i=0}^j w_i = \left(A - \sum_{i=0}^j A_i \right) dx - \left(B - \sum_{i=0}^j B_i \right) dy$$

com $\nu_k \left(w - \sum_{i=0}^j w_i \right) = l_j > \dots > l_1 > l_0$ e $\nu_k(B) = \nu_k \left(B - \sum_{i=0}^j B_i \right) \leq \Theta_k(l_j)$.

Se o procedimento não encerrar em um número finito de passos, obteremos

$$\nu_k \left(w - \sum_{i=0}^{\infty} w_i \right) = \infty \text{ e } \nu_k(B) = \nu_k \left(B - \sum_{i=0}^{\infty} B_i \right),$$

ou seja, $w' = w - \sum_{i=0}^{\infty} w_i \in \mathcal{E}(f_k) \cap f_k \cdot \Omega(\log C_k)$.

Pelo visto Teorema 2.2.2 e por (2.21), teríamos que

$$\mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_k \left(B - \sum_{i=0}^{\infty} B_i \right) = \mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \nu_k(B) = \alpha \notin \Lambda_k,$$

uma contradição.

Deste modo, existe $\tilde{w} = \tilde{A}dx - \tilde{B}dy \in \mathcal{E}(f_k) \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ com $l_0 \leq \tilde{l} = \nu_k(\tilde{w}) < \infty$ e $\nu_k(B) = \nu_k(\tilde{B}) = \Theta_k(\tilde{l})$.

Além disso, temos que

$$\varepsilon_{k-1}(\tilde{l} - \Theta_k(\tilde{l})) \geq \varepsilon_{k-1}(l_0 - \Theta_k(\tilde{l})) = \varepsilon_{k-1}(l_0 - \nu_k(B)) > \beta_k,$$

e, em virtude do Exemplo 2.2.9, podemos afirmar que $\tilde{l} \notin \Gamma_k$.

Chegamos à conclusão de que existe $\tilde{w} \in \mathcal{E}(f_k) \setminus f_k \cdot \Omega(\log C_k)$ tal que $\nu_k(\tilde{w}) = \tilde{l} \in \Lambda_k \setminus \Gamma_k$, $\nu_k(B) = \Theta_k(\tilde{l})$, $\varepsilon_{k-1}(\tilde{l} - \Theta_k(\tilde{l})) > \beta_k$ e $\alpha = \mu_k - 1 + \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} - \Theta_k(\tilde{l})$.

Assim, por meio da função ρ_k , obtemos que $\gamma = \nu_k - \varepsilon_{k-1}\alpha = \rho_k(\tilde{l}) \in \rho_k(L_k^2)$, provando o teorema. ▀

Aplicações

Neste capítulo vamos apresentar algumas consequências e aplicações dos resultados obtidos no capítulo anterior.

Entre as consequências obtidas, podemos apresentar um limitante superior para o número de Tjurina τ em termos de dados topológicos, que, para o caso de curvas com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ com $g \geq 2$, é melhor que o número de Milnor μ .

Uma outra questão abordada é uma indagação formulada por Watari com respeito a semigrupos com $n_g = 2$. Para tais semigrupos, mostramos que o número τ é sempre o mesmo para qualquer curva com tal semigrupo e é expresso em termos dos dados do semigrupo.

Além destas questões, apresentamos também um modo de obter elementos de Ω^1 cujas valorações descrevem os elementos de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ para uma classe de curvas que admitem semigrupos da forma $\Gamma_f = \langle 4u_0, 4u_1, 2u_2, u_3 \rangle$.

3.1 Sobre as questões de Watari e Dimca-Greuel e outras conclusões

Nesta seção vamos extrair dos resultados apresentados no capítulo anterior conclusões que permitem relacionar invariantes analíticos de uma semirraiz f_k com os correspondentes invariantes analíticos de C_f . Dentre estas consequências, obtemos um limitante superior em termos topológicos mais preciso para o número de Tjurina para curvas com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ com $g \geq 2$, bem como uma resposta a uma questão formulada por Watari (2019):

Questão (Watari): O número de Tjurina para curvas com semigrupos $\Gamma = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ e $n_i = \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i} = 2$ para todo $i = 2, \dots, g$ depende apenas de dados topológicos?

Antes de abordar as questões acima, façamos algumas observações que decorrem do Teorema 2.2.15.

Corolário 3.1.1 *Se $\beta_k > \varepsilon_{k-1} \left(\mu_k - 1 - \frac{v_0}{\varepsilon_{k-1}} \right)$, então*

$$\{\gamma \in \Lambda_f; \gamma < v_k\} = \{\varepsilon_{k-1}\gamma < v_k; \gamma \in \Lambda_k\} \dot{\cup} \{v_k - \varepsilon_{k-1}\delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_k\}.$$

Demonstração: Da Observação 2.2.12, temos que $\rho_k(\Lambda_k \setminus \Gamma_k) = \varepsilon_{k-1}(\Lambda_k \setminus \Gamma_k)$ e o resultado segue do Teorema 2.2.15. ▀

Seja $\left(t^{\beta_0}, \varphi_f(t) = \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i \right)$ uma parametrização de Newton-Puiseux de C_f e f_k uma semirraiz característica de f , ou seja, f_k tem parametrização de Newton-Puiseux $\left(t^{\frac{\beta_0}{\varepsilon_{k-1}}}, \varphi_k(t) = \sum_{\beta_1 \leq i < \beta_k} a_i t^{\frac{i}{\varepsilon_{k-1}}} \right)$. Deste modo, temos $\left(t^{\beta_0}, \varphi_f(t) = \varphi_k(t^{\varepsilon_{k-1}}) + \sum_{i \geq \beta_k} a_i t^i \right)$, ou seja, podemos interpretar a parametrização de C_f como uma “deformação” da parametrização de C_k .

Como consequência dos resultados apresentados, podemos obter um conjunto comum de lacunas especiais para toda curva, com semigrupo fixo, que admite f_k como k -semirraiz, a saber, o conjunto descrito no Teorema 2.2.13.

Exemplo 3.1.2 *Em Hefez e Hernandez (2003) são apresentados todos os possíveis conjuntos $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ para curvas planas com semigrupo $\Gamma_f = \langle 6, 9, 19 \rangle$. Tais curvas podem ser parametrizadas por*

$$\left(t^6, t^9 + t^{10} + \sum_{i \geq 11} a_i t^i \right). \quad (3.1)$$

Consideremos a semirraiz característica f_2 com parametrização (t^2, t^3) .

Para tal classe de curvas temos:

$$\varepsilon_0 = \beta_0 = v_0 = 6, \quad \beta_1 = v_1 = 9, \quad \beta_2 = 10, \quad \varepsilon_1 = 3, \quad \varepsilon_2 = 1, \quad n_1 = 2 \text{ e } n_2 = 3.$$

Como $\Lambda_2 = \Gamma_2 \setminus \{0\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, não temos contribuição para $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ dada pela função $\rho_2 : \Lambda_2 \setminus \Gamma_2 \longrightarrow \Lambda_f \setminus \Gamma_f$.

No entanto, pelo Corolário 2.2.5, temos que

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f \supset \{s_2 v_2 - \varepsilon_1 \delta; 1 \leq s_2 \leq 2 \text{ e } \delta = \pm 1\},$$

ou seja,

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f \supset \{16, 22, 35, 41\}$$

para qualquer curva com parametrização como (3.1), o que está de acordo com o descrito no referido trabalho. De fato, os possíveis conjuntos $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ para curvas com $\Gamma_f = \langle 6, 9, 19 \rangle$ são (conforme Teorema 1 de Hefez e Hernandez (2003)):

$$\begin{aligned} &\{16, 22, 29, 35, 41\} \\ &\{16, 22, 29, 32, 35, 41\} \\ &\{16, 22, 26, 32, 35, 41\} \\ &\{16, 22, 26, 29, 32, 35, 41\}. \end{aligned}$$

Em Hefez e Hernandez (2007) é apresentado o conceito de *diferencial não exata minimal para uma curva* C_f , que abreviaremos por DNEM. A saber $w \in \Omega^1$ é DNEM se $\nu_f(w) \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f$ e $\nu_f(w) \notin \gamma + \Gamma_f$ para todo $\gamma \in \Lambda_f \setminus \{\nu_f(w)\}$.

Corolário 3.1.3 *Para toda curva plana irredutível com semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ não há elementos em $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ da forma $v_i - sv_0$ com $s > 0$ e $i \leq g$. Em particular, há no máximo $v_0 - (g + 1)$ DNEM's.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.15, se $\gamma \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f$, $\varepsilon_{i-1} \nmid \gamma$ e $\gamma < v_i$, então devemos ter que $\gamma = v_i - \varepsilon_{i-1}\alpha$ com $\alpha \notin \Gamma_i$. Como $\varepsilon_{i-1}\alpha \notin \Gamma_f$, segue que não há elementos em Λ_f da forma $v_i - sv_0$ com $s > 0$ e $i \leq g$.

Se γ_1 e γ_2 são DNEM, então $\gamma_1 \not\equiv \gamma_2 \pmod{v_0}$. De fato, se $\gamma_1 > \gamma_2$ e tivéssemos $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \pmod{v_0}$, então $\gamma_1 = \gamma_2 + sv_0$ com $s > 0$ contrariando o fato de γ_1 ser DNEM. Como todo elemento em $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ se expressa de forma única como $\sum_{i=1}^g s_i v_i - s_0 v_0$ com $0 \leq s_i < n_i$, $i \neq 0$ e $s_0 > 0$ (veja o Lema 1.3.7) cada DNEM pode corresponder a apenas uma das $v_0 - 1 = n_1 \cdots n_g - 1$ possíveis g -uplas não nulas (s_1, \dots, s_g) .

Mas, como vimos, não há elementos em $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ e, conseqüentemente, DNEM's correspondentes a g -uplas da forma $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ em que a única entrada não nula é a i -ésima. Portanto, podemos ter, no máximo, $v_0 - 1 - g = v_0 - (g + 1)$ DNEM's.

■

Em Dimca e Greuel (2018), os autores apresentam uma questão a respeito de um limitante inferior para o número de Tjurina τ_f de uma curva plana (não necessariamente irredutível) em termos do número de Milnor μ_f da curva. Mais precisamente, eles questionam:

Questão: (Dimca-Greuel) Para qualquer curva plana tem-se

$$\frac{3}{4}\mu_f < \tau_f?$$

No caso em que a curva é irredutível temos por (1.15) que $\tau_f = \mu_f - \sharp(\Lambda_f \setminus \Gamma_f)$ e assim:

$$\begin{aligned} 3\mu_f < 4\tau_f &\iff 3(\mu_f - \tau_f) < \tau_f \\ &\iff 3\sharp(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) < \mu_f - \sharp(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) \\ &\iff 4\sharp(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) < \mu_f. \end{aligned}$$

Tal questão foi respondida afirmativamente, para o caso irredutível por Alberich-Carramiñana et al. (2019) e simultaneamente por Genzmer e Hernandez (2019).

Enquanto a questão de Dimca-Greuel se preocupa com um limitante topológico inferior para τ_f , os resultados apresentados no capítulo anterior permitem, para o caso irredutível, estabelecer um limitante superior para τ_f melhor que μ_f , para o caso em que $g \geq 2$.

Proposição 3.1.4 *Seja C_f uma curva plana irredutível com semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$. Se $g \geq 2$, então $\tau_f \leq \mu_f - \frac{n_g}{2}\mu_g - (n_g - 2) \left(\frac{v_1 + v_0}{n_g} - \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor - 3 \right)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.13 aplicada a f_g , temos $\varepsilon_g = 1$, $\varepsilon_{g-1} = n_g$ e

$$\begin{aligned} \sharp(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) &\geq \sharp L_g^1 + (n_g - 1)\sharp L_g^2 + (n_g - 1)\tau_g \\ &\geq \sharp L_g^1 + \sharp L_g^2 + (n_g - 1)\tau_g. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como

$$\sharp(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) = \sharp\rho_g(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) = \sharp\rho_g(L_g^1 \dot{\cup} L_g^2) = \sharp\rho_g(L_g^1) + \sharp\rho_g(L_g^2) = \sharp L_g^1 + \sharp L_g^2$$

temos que

$$\begin{aligned} \sharp(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) &\geq \sharp(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) + (n_g - 1)\tau_g \\ &= \sharp(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) + \tau_g + (n_g - 2)\tau_g \\ &= \mu_g + (n_g - 2)\tau_g, \end{aligned} \tag{3.3}$$

em que a última igualdade segue de (1.15).

Temos que os elementos de $\sharp(\Lambda_g \setminus \Gamma_g)$, se houverem, são lacunas maiores que $\frac{v_1}{n_g} + \frac{v_0}{n_g}$, veja (1.15). Assim, no conjunto $D = \left\{1, \dots, \frac{v_1}{n_g} + \frac{v_0}{n_g}\right\}$, nenhuma lacuna pode pertencer a $\Lambda_g \setminus \Gamma_g$. Como $\sharp D = \frac{v_1 + v_0}{n_g}$ e

$$D \cap \Gamma_g = \left\{k \frac{v_0}{n_g}, \frac{v_1}{n_g}, \frac{v_1 + v_0}{n_g}; k = 1, \dots, \left[\frac{v_1}{v_0}\right] + 1\right\},$$

então, das $\frac{\mu_g}{2}$ lacunas de Γ_g , existem $\frac{v_1 + v_0}{n_g} - \left[\frac{v_1}{v_0}\right] - 3$ que não podem pertencer a Λ_g .

Assim, obtemos que $\sharp(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) \leq \frac{\mu_g}{2} - \left(\frac{v_1 + v_0}{2} - \left[\frac{v_1}{v_0}\right] - 3\right)$ e como, por (1.15), temos $\tau_g = \mu_g - \sharp(\Lambda_g \setminus \Gamma_g)$, segue que $\tau_g \geq \frac{\mu_g}{2} + \left(\frac{v_1 + v_0}{2} - \left[\frac{v_1}{v_0}\right] - 3\right)$ e, deste modo, de (3.3) temos

$$\sharp(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) \geq \mu_g + (n_g - 2)\tau_g \geq \frac{n_g}{2}\mu_g + (n_g - 2)\left(\frac{v_1 + v_0}{2} - \left[\frac{v_1}{v_0}\right] - 3\right).$$

Como $\tau_f = \mu_f - \sharp(\Lambda_f \setminus \Gamma_f)$, temos

$$\tau_f \leq \mu_f - \frac{n_g}{2}\mu_g - (n_g - 2)\left(\frac{v_1 + v_0}{2} - \left[\frac{v_1}{v_0}\right] - 3\right).$$

■

A proposição anterior também permite relacionar o número de Tjurina de C_f e C_g .

Corolário 3.1.5 *Temos que*

$$\tau_f \leq \mu_f - (\mu_g + (n_g - 2)\tau_g).$$

Demonstração: Decorre diretamente da desigualdade (3.3) apresentada na demonstração da proposição anterior. ▀

No que segue, vamos mostrar que se $g \geq 2$ e $n_g = 2$, então a desigualdade anunciada na Proposição 3.1.4 é sempre uma igualdade, o que responde, em particular, à questão formulada por Watari (2019).

O caso em que $g = 2$ foi mostrado por Luengo e Pfister (1990) utilizando métodos distintos do que abordamos neste trabalho.

Se $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$, com $g \geq 2$ e $n_g = 2$, então, pelo Lema 1.3.7, temos que as lacunas de Γ_f são da forma

$$\sum_{i=1}^{g-1} s_i v_i - s_0 v_0 \text{ ou } v_g + \sum_{i=1}^{g-1} s_i v_i - s_0 v_0,$$

com $0 \leq s_i < n_i$ para $i = 1, \dots, g-1$ e $s_0 > 0$.

Teorema 3.1.6 *Para toda curva C_f com semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ com $g \geq 2$ e $n_g = 2$, temos que*

$$\tau_f = \mu_f - \mu_g = v_g + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{g-1} (n_i - 1)v_i - v_0 \right).$$

Demonstração: Lembremos que $n_g = \varepsilon_{g-1} = 2$. Do Teorema 2.2.15 para $k = g$ temos que

$$\{\gamma \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f; \gamma < v_g\} = \rho_g(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) \dot{\cup} \{v_g - n_g \delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g\}.$$

Além disto, pelo Corolário 2.2.5, usando $k = g$ e $n_g = 2$ obtemos que

$$\{v_g + 2l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g\} \subset \Lambda_f \setminus \Gamma_f.$$

Agora note que qualquer lacuna de Γ_f maior que v_g isto é, aquelas expressas da forma $v_g + \sum_{i=1}^{g-1} s_i v_i - s_0 v_0 > v_g$, satisfaz

$$0 < \sum_{i=1}^{g-1} s_i v_i - s_0 v_0 = 2 \left(\sum_{i=1}^{g-1} s_i \frac{v_i}{\varepsilon_{g-1}} - s_0 \frac{v_0}{\varepsilon_{g-1}} \right).$$

Como $0 \leq s_i < n_i$, para $i = 1, \dots, g-1$ e $s_0 > 0$, segue que $\sum_{i=1}^{g-1} s_i \frac{v_i}{\varepsilon_{g-1}} - s_0 \frac{v_0}{\varepsilon_{g-1}} \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g$.

Deste modo, qualquer lacuna maior que v_g , pertence a $\{v_g + 2l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g\}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \Lambda_f \setminus \Gamma_f &= \{\gamma \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f; \gamma < v_g\} \dot{\cup} \{\gamma \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f; \gamma > v_g\} \\ &= \rho_g(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) \dot{\cup} \{v_g - 2\delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g\} \dot{\cup} \{v_g + 2l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \#(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) &= \#\rho_g(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) + \#(\mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g) + \#(\mathbb{N} \setminus \Gamma_g) \\ &= \#(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) + \#(\mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g) + \#(\mathbb{N} \setminus \Gamma_g) \\ &= \#(\mathbb{N} \setminus \Gamma_g) + \#(\mathbb{N} \setminus \Gamma_g) = \frac{\mu_g}{2} + \frac{\mu_g}{2} = \mu_g. \end{aligned}$$

Segue assim que

$$\begin{aligned} \tau_f &= \mu_f - \#(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) = \mu_f - \mu_g \\ &= v_g + \sum_{i=1}^{g-1} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1 - \left(\sum_{i=1}^{g-1} (n_i - 1) \frac{v_i}{2} - \frac{v_0}{2} + 1 \right) \\ &= v_g + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{g-1} (n_i - 1)v_i - v_0 \right). \end{aligned}$$

■

Temos assim que, para qualquer curva plana irredutível com semigrupo dado por $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$, com $g \geq 2$ e $n_g = 2$, o número de Tjurina depende apenas de Γ_f , ou

seja, de informações que retratam a classe topológica de C_f . Isto responde à questão posta por Watari (2019). Observe que a questão formulada por Watari se refere ao que se pode dizer sobre o número de Tjurina para curvas com semigrupo em que $n_2 = \dots = n_g = 2$, ou seja, um caso particular do que consideramos.

No caso em que $g = 2$, isto é, $\Gamma_f = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ temos que se $n_g = 2$, então $\tau_f = \mu_f - \left(\frac{v_0}{2} - 1\right) \left(\frac{v_1}{2} - 1\right)$, resultado já obtido por Luengo e Pfister (1990).

Segue de (3.4) estabelecido na demonstração do teorema anterior o seguinte resultado.

Corolário 3.1.7 *Se C_f é uma curva plana irreduzível com semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$, $g \geq 2$ e $n_g = 2$, então*

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f = \rho_g(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) \dot{\cup} \{v_g - 2\delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g\} \dot{\cup} \{v_g + 2\delta; \delta \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g\}.$$

Embora para as curvas que admitem o semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ com $g \geq 2$ e $n_g = 2$ tenhamos sempre o mesmo valor para o número de Tjurina, não se pode dizer o mesmo para o conjunto $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$, embora sua cardinalidade dependa apenas de $\Gamma_g = \left\langle \frac{v_0}{2}, \dots, \frac{v_{g-1}}{2} \right\rangle$. Tal fato se constata pela descrição do conjunto $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ dada no Corolário 3.1.7, em que os elementos de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ dependem de $\Lambda_g \setminus \Gamma_g$.

Vamos ilustrar a variação de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ por meio dos seguintes exemplos:

Exemplo 3.1.8 *Vamos analisar curvas com mesmo semigrupo $\Gamma_f = \langle 8, 18, 75 \rangle$ e variar a 2-semirraiz. Pelo Corolário 3.1.7, temos que qualquer curva C_{f_a} dada no Exemplo 2.2.14 que possui semigrupo $\langle 8, 18, 75 \rangle$ e 2-semirraiz parametrizada por $(t^4, t^9 + t^{10})$ admite*

$$\Lambda_{f_a} \setminus \Gamma_{f_a} = \{28, 37, 45, 46, 53, 55, 61, 63, 65, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 85, 87, 89, 95, 97, 103, 105, 113, 121\}.$$

A curva C_f dada pela parametrização $(t^8, t^{18} + t^{21})$ também possui semigrupo $\Gamma = \langle 8, 18, 75 \rangle$. Temos que a curva C_{f_2} dada parametricamente por (t^4, t^9) é uma 2-semirraiz para C_f .

Neste caso, temos $\Lambda_2 \setminus \Gamma_2 = \emptyset$, isto é, $\Lambda_2 = \Gamma_2 \setminus \{0\}$ e assim, pelo Corolário 3.1.7, temos que

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f = \{75 - 2\delta; \delta \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_2\} \dot{\cup} \{75 + 2\delta; \delta \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_2\}.$$

Como $\mathbb{N} \setminus \Gamma_2 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 19, 23\}$, temos

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f = \{29, 37, 45, 47, 53, 55, 61, 63, 65, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 85, 87, 89, 95, 97, 103, 105, 113, 121\}.$$

Exemplo 3.1.9 Neste exemplo, vamos considerar curvas C_f com semigrupo dado por $\Gamma_f = \langle 8, 18, v_2 \rangle$ que admitem a 2-semirraiz f_2 dada parametricamente por $(t^4, t^9 + t^{10})$ e estudar a variação de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$.

Inicialmente, lembremos que os Exemplos 2.2.7 e 2.2.14 nos dão que $\Gamma_2 = \langle 4, 9 \rangle$, $\Lambda_2 \setminus \Gamma_2 = \{14, 19, 23\}$, bem como $\Theta_2(14) = 4$, $\Theta_2(19) = 8$ e $\Theta_2(23) = 13$.

Para que f_2 represente uma 2-semirraiz, as possíveis parametrizações de C_f são:

i) $\left(t^8, t^{18} + at^{19} + \sum_{i \geq 20} a_i t^i \right)$ com $a \neq 0$.

Neste caso, $\beta_2 = 19$, $v_2 = 73$ e como $\varepsilon_1 = 2$ temos:

$\delta \in \Lambda_2 \setminus \Gamma_2$	$\varepsilon_1(\delta - \Theta_2(\delta))$
14	$2(14 - 4) > 19 = \beta_2$
19	$2(19 - 8) > 19 = \beta_2$
23	$2(23 - 13) > 19 = \beta_2$

Assim, $L_2^1 = \emptyset$ e $L_2^2 = \Lambda_2 \setminus \Gamma_2 = \{14, 19, 23\}$. Pelo Corolário 3.1.7, temos

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f = \rho_2(L_2^2) \dot{\cup} \{73 - 2\delta; \delta \in D\} = \{27, 35, 45\} \dot{\cup} \{73 - 2\delta; \delta \in D\}$$

em que D é descrito no Exemplo 2.2.14.

ii) $\left(t^8, t^{18} + t^{20} + at^{21} + \sum_{i > 21} a_i t^i \right)$ com $a \neq 0$.

Neste caso, temos $\beta_2 = 21$, $v_2 = 75$ e $\varepsilon_1 = 2$. Assim:

$\delta \in \Lambda_2 \setminus \Gamma_2$	$\varepsilon_1(\delta - \Theta_2(\delta))$
14	$2(14 - 4) < 21 = \beta_2$
19	$2(19 - 8) > 21 = \beta_2$
23	$2(23 - 13) < 21 = \beta_2$

Segue, como já visto no Exemplo 2.2.14, que $L_2^1 = \{14, 23\}$ e $L_2^2 = \{19\}$ e deste modo

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f = \{28, 37, 46\} \dot{\cup} \{75 - 2\delta; \delta \in D\}.$$

iii) $\left(t^8, t^{18} + t^{20} + a_{\beta_2} t^{\beta_2} + \sum_{i > \beta_2} a_i t^i \right)$ com $a_{\beta_2} \neq 0$ e $23 \leq \beta_2$ ímpar.
Neste caso, segue que $v_2 = 54 + \beta_2$, $\varepsilon_1 = 2$ e temos

$\delta \in \Lambda_2 \setminus \Gamma_2$	$\varepsilon_1(\delta - \Theta_2(\delta))$
14	$2(14 - 4) < \beta_2$
19	$2(19 - 8) < \beta_2$
23	$2(23 - 13) < \beta_2$

Assim, temos $L_2^1 = \Lambda_2 \setminus \Gamma_2$ e $L_2^2 = \emptyset$.

Donde, do Corolário 3.1.7, segue que

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f = \{28, 38, 46\} \dot{\cup} \{54 + \beta_2 - 2\delta; \delta \in D\}.$$

Revedo o Teorema 2.2.13, temos para $k = g$ que

$$n_g L_g^1 \dot{\cup} \{s_g v_g + \rho_g(L_g^2)\} \dot{\cup} \{(s_g + 1)v_g - n_g \delta\} \subseteq \Lambda_f \setminus \Gamma_f$$

com $0 \leq s_g \leq n_g - 2$ e

$$\delta \in \{l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g\}$$

para toda curva C_f com semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$, $g \geq 2$ e uma g -semirraiz fixa. Em particular, uma vez que $\#\{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g\} = \mu_g - \#(\Lambda_g \setminus \Gamma_g) = \tau_g$, temos

$$\#(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) \geq \#L_g^1 + (n_g - 1)(\#L_g^2 + \tau_g).$$

Como vimos, se $n_g = 2$, então temos igualdade na expressão acima para toda curva com semigrupo Γ_f fixo.

Vamos mostrar que tal propriedade não é válida para outros semigrupos da forma $\langle v_0, \dots, v_g \rangle$ com $n_g \geq 3$.

Proposição 3.1.10 *Seja $\Gamma = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ com $g \geq 2$ e $n_g \geq 3$, então sempre existe uma curva C_f com $\Gamma_f = \Gamma$ tal que*

$$\#(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) > \#L_g^1 + (n_g - 1)(\#L_g^2 + \tau_g).$$

Demonstração: Para provar o resultado é suficiente garantir que existe $d \in \Lambda_f \setminus \Gamma_f$ com

$$d \notin n_g L_g^1 \dot{\cup} \{s_g v_g + \rho_g(L_g^2)\} \dot{\cup} \{(s_g + 1)v_g - n_g \delta\},$$

com $0 \leq s_g \leq n_g - 2$ e $\delta \in \{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g\}$ para alguma curva com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$.

Dada uma curva C_f com semigrupo $\Gamma_f = \Gamma$ podemos parametrizá-la por $(t^{v_0}, \varphi(t))$ com $\varphi(t) = \sum_{i \geq v_0}^{\infty} a_i t^i$. Consideremos sua g -semirraiz característica f_g que admite parametrização $\left(t^{\frac{v_0}{n_g}}, \varphi_g(t)\right)$ em que $\varphi_g(t) = \sum_{v_0 \leq i < \beta_g} a_i t^{\frac{i}{n_g}}$. A saber, temos que

$$f_g(x, y) = \prod_{\bar{\zeta} \in \frac{G_0}{G_{g-1}}} \left(y - \varphi_g \left(\bar{\zeta} x^{\frac{n_g}{v_0}} \right) \right),$$

conforme a Definição 1.3.4.

Agora consideremos $w = v_0 x df_g - v_g f_g dx \in \mathcal{F}(C_g)$. Vamos analisar $\psi_f(w)$, em que ψ_f é dada em (1.14).

Inicialmente note que, de (1.5),

$$f_g(t^{v_0}, \varphi(t)) = \prod_{\bar{\zeta} \in \frac{G_0}{G_{g-1}}} \left(\varphi(t) - \varphi_g(\bar{\zeta} t^{n_g}) \right) = c_g a_{\beta_g} t^{v_g} + \sum_{k > v_g} (p_k^g + c_g a_{k-v_g+\beta_g}) t^k$$

em que $c_g \neq 0$ e p_k^g é um polinômio em a_i com $i < k - v_g + \beta_g$.

Deste modo, temos que

$$t^{v_0} df_g(t^{v_0}, \varphi(t)) = c_g v_g a_{\beta_g} t^{v_0+v_g-1} + \sum_{k > v_g} (p_k^g + c_g a_{k-v_g+\beta_g}) k t^{v_0+k-1}$$

e

$$f_g(t^{v_0}, \varphi(t)) v_0 t^{v_0-1} = c_g v_0 a_{\beta_g} t^{v_0+v_g-1} + \sum_{k > v_g} (p_k^g + c_g a_{k-v_g+\beta_g}) v_0 t^{v_0+k-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} w(t^{v_0}, \varphi(t)) &= v_0 t^{v_0} df_g(t^{v_0}, \varphi(t)) - v_g f_g(t^{v_0}, \varphi(t)) v_0 t^{v_0-1} \\ &= v_0 \sum_{k > v_g} (p_k^g + c_g a_{k-v_g+\beta_g}) (k - v_g) t^{k+v_0-1}, \end{aligned}$$

ou seja, a imagem de w pela aplicação ψ_f dada em (1.14) é

$$\psi_f(w) = v_0 \sum_{k > v_g} (p_k^g + c_g a_{k-v_g+\beta_g}) (k - v_g) t^{k+v_0}.$$

Consideremos a divisão euclidiana de v_g por v_0 , isto é, $v_g = q \cdot v_0 + r$ com $0 < r < v_0$.

Vamos considerar a curva C_f dada pela parametrização

$$\left(t^{v_0}, \varphi_g(t^{n_g}) + a_{\beta_g} t^{\beta_g} + \sum_{j > \beta_g} a_j t^j \right) \quad (3.5)$$

com $a_{\beta_g} \neq 0$, $a_j = -p_{j+v_g-\beta_g}^g c_g^{-1}$ para $\beta_g < j < \beta_g + r$ e

$$a_{\beta_g+r} \neq -p_{v_g+r}^g c_g^{-1}.$$

Obviamente $\Gamma_f = \Gamma$ e C_f admite f_g como g -semirraiz.

Para esta curva temos

$$\psi_f(w) = v_0 r \left(p_{v_g+r}^g + c_g a_{\beta_g+r} \right) t^{v_g+v_0+r} + (\text{t.o.s.}),$$

ou seja,

$$\nu_f(w) = v_g + v_0 + r = v_g + v_0 + v_g - qv_0 = 2v_g - (q-1)v_0.$$

Como $v_g \geq v_2 = n_1 v_1 + \beta_2 - \beta_1 > n_1 v_1 \geq 2v_1 > 2v_0$, temos que $q = \left\lfloor \frac{v_g}{v_0} \right\rfloor \geq 2$ e assim, $\nu_f(w) = 2v_g - (q-1)v_0 \notin \Gamma_f$.

Como $n_g > 2$, então $2v_g - (q-1)v_0 \notin n_g L_g^1$.

Note que os elementos de $s_g v_g + \rho_g(L_g^2)$ são da forma $s_g v_g + v_g - n_g \left(\mu_g - 1 + \frac{v_0}{n_g} - \Theta_g(l) \right)$ com $l \in \Lambda_g \setminus \Gamma_g$ satisfazendo $n_g(l - \Theta_g(l)) > \beta_g$.

Se $2v_g - (q-1)v_0 = (s_g + 1)v_g - n_g \left(\mu_g - 1 + \frac{v_0}{n_g} - \Theta_g(l) \right)$, então deveríamos ter $s_g = 1$ e

$$(q-1)\frac{v_0}{n_g} = \mu_g - 1 + \frac{v_0}{n_g} - \Theta_g(l) \iff (q-2)\frac{v_0}{n_g} = \mu_g - 1 - \Theta_g(l).$$

Mas, enquanto $(q-2)\frac{v_0}{n_g} \in \Gamma_g$, temos que $\mu_g - 1 - \Theta_g(l) \notin \Gamma_g$. Deste modo, $2v_g - (q-1)v_0 \notin s_g v_g + \rho_g(L_g^2)$.

Agora, suponha que tivéssemos $2v_g - (q-1)v_0 \in \{(s_g + 1)v_g - n_g \delta\}$ de modo que $\delta \in \{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g\} \dot{\cup} \{-l; l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g\}$.

Se $2v_g - (q-1)v_0 = (s_g + 1)v_g + n_g l$ com $l \in \mathbb{N} \setminus \Gamma_g$, então devemos ter $s_g = 0$. Mas, deste modo, $v_g = n_g \left(l + (q-1)\frac{v_0}{n_g} \right)$, o que é um absurdo, pois $\varepsilon_{g-1} = n_g$ não divide v_g .

Se $2v_g - (q-1)v_0 = (s_g + 1)v_g - n_g \delta$ com $\delta \in \{l; l \in \mathbb{N}^* \setminus \Lambda_g\} \not\subset \Gamma_g$, teríamos $s_g = 1$ e $(q-1)\frac{v_0}{n_g} = \delta$ uma contradição.

Portanto, para a curva C_f descrita em (3.5), temos que $2v_g - (q-1)v_0$ é uma lacuna especial não prevista no subconjunto dado pelo Teorema 2.2.13 e assim,

$$\#(\Lambda_f \setminus \Gamma_f) > \#L_g^1 + (n_g - 1)(\#L_g^2 + \tau_g).$$

▀

Vamos ilustrar o resultado anterior.

Exemplo 3.1.11 Consideremos o semigrupo $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$ em que $g = 2$ e $n_2 = 3$ que foi considerado no Exemplo 3.1.2.

Qualquer curva com semigrupo Γ admite parametrização

$$\left(t^6, t^9 + t^{10} + \sum_{i \geq 11} a_i t^i \right)$$

e 2-semirraiz $f_2 = y^2 - x^3$ dada parametricamente por (t^2, t^3) .

Temos que

$$f_2 \left(t^6, t^9 + t^{10} + \sum_{i \geq 11} a_i t^i \right) = 2t^{19} + (1 + 2a_{11})t^{20} + (2a_{11} + 2a_{12})t^{21} + (t.o.s.).$$

Considerando $w = 6xdf_2 - 19f_2dx$, temos

$$\psi_f(w) = 6(1 + 2a_{11})(20 - 19)t^{26} + 6(2a_{11} + 2a_{12})(21 - 19)t^{27} + (t.o.s.).$$

Assim, considerando $a_{11} \neq -\frac{1}{2}$ temos que $\nu_f(w) = 26 \notin \{16, 22, 35, 41\}$ em que o último conjunto é o descrito no Teorema 2.2.13.

3.2 Semigrupos da forma $\langle 4u_0, 4u_1, 2u_2, u_3 \rangle$

Nesta seção tratamos de ramos planos que admitem semigrupos da forma

$$\langle 4u_0, 4u_1, 2u_2, v_3 \rangle.$$

Tais semigrupos podem ser considerados como uma generalização dos semigrupos da forma $\Gamma = \langle 2p, 2q, 2pq + d \rangle$, $\text{mdc}(p, q) = 1$ e $d \equiv 1 \pmod{2}$, que foram objeto de estudo de Luengo e Pfister (1990) os quais provaram que $\sharp(\Lambda \setminus \Gamma) = (p - 1)(q - 1) = \mu_2$. A generalização aqui é entendida da seguinte forma: se C_f tem como semigrupo $\langle 4u_0, 4u_1, 2u_2, v_3 \rangle$, então a 3-semirraiz f_3 tem como semigrupo $\langle 2u_0, 2u_1, u_2 \rangle$ e assim já sabemos quantas lacunas especiais admite C_3 . Saber quais lacunas especiais a 3-semirraiz

possui é útil pois, como vimos no capítulo anterior, tais lacunas determinam parcialmente as lacunas especiais de C_f .

Lembremos que, para semigrupos com $n_g = 2$, os elementos de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ são descritos em termos de Λ_g , Γ_g e dos valores da função ρ_g , que pode não ser de fácil descrição.

Além disso, a descrição de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ não evidencia diferenciais que atingem determinado valor.

Nesta seção vamos descrever como obter diferenciais que determinam os valores de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ para curvas com semigrupo $\Gamma_f = \langle 4u_0, 4u_1, 2u_2, u_3 \rangle$.

Para curvas com este semigrupo, temos

$$v_0 = \varepsilon_0 = 4u_0 = \beta_0, \quad \varepsilon_1 = 4, \quad \varepsilon_2 = 2, \quad \varepsilon_3 = 1; \quad (3.6)$$

$$n_1 = u_0, \quad n_2 = n_3 = 2; \quad (3.7)$$

$$v_1 = 4u_1 = \beta_1, \quad u_0v_1 = u_04u_1 = u_1v_0; \quad (3.8)$$

$$2u_2 = v_2 = (u_0 - 1)v_1 + \beta_2 \iff \beta_2 = v_2 + v_1 - u_1v_0; \quad (3.9)$$

$$u_3 = v_3 = 2v_2 + \beta_3 - \beta_2 \iff \beta_3 = v_3 - 2v_2 + \beta_2; \quad (3.10)$$

$$\mu_f = v_3 + v_2 + (u_0 - 1)v_1 - v_0 + 1. \quad (3.11)$$

Pelo Teorema 1.5.2, temos que toda curva com semigrupo $\Gamma_f = \langle 4u_0, 4u_1, 2u_2, u_3 \rangle$ admite parametrização da forma

$$\varphi_f(t) = \left(t^{4u_0}, t^{4u_1} + t^\lambda + \sum_{i>\lambda} a_i t^i \right)$$

com $a_{\beta_2} \neq 0 \neq a_{\beta_3}$ e $\lambda \leq \beta_2$.

A classe que consideraremos consiste das curvas tais que $\lambda = \beta_2$. Para curvas com $\lambda < \beta_2$ uma análise similar foi realizada e, em virtude do grande número de análises, casos e cálculos, decidimos não incluir neste trabalho.

Deste modo, temos que

$$\varphi_f(t) = \left(t^{4u_0}, t^{4u_1} + t^{\beta_2} + (\text{t.o.p.i.}) + a_{\beta_3} t^{\beta_3} + (\text{t.o.s.}) \right) \quad (3.12)$$

com $a_{\beta_3} \neq 0$, (t.o.p.i.) indica termos de ordem par intermediários e (t.o.s.) indica, como antes, termos de ordem superior.

Note que as semirraízes características f_i , $i = 2, 3$, de qualquer curva na classe considerada admitem as respectivas parametrizações

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= (t^{u_0}, t^{u_1}); \quad f_2 = y^{u_0} - x^{u_1}; \\ \varphi_3(t) &= \left(t^{2u_0}, t^{2u_1} + t^{\frac{\beta_2}{2}} + \sum_{\beta_2 < i < \beta_3} a_i t^{\frac{i}{2}} \right).\end{aligned}$$

Além disto, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \langle u_0, u_1 \rangle, \quad \sharp(\Lambda_2 \setminus \Gamma_2) = 0 \quad e \\ \Gamma_3 &= \langle 2u_0, 2u_1, u_2 \rangle, \quad \sharp(\Lambda_3 \setminus \Gamma_3) = (u_0 - 1)(u_1 - 1).\end{aligned}$$

Note que f_3 determina ainda uma curva com $n_2 = 2$. Mais especificamente, curvas consideradas por Luengo e Pfister (1990).

Antes de descrever diferenciais que determinam os valores de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$, vamos apresentar diferenciais que nos fornecem os valores de $\Lambda_3 \setminus \Gamma_3$.

No que segue, uma diferencial se destacará e merece uma notação própria:

$$w_1 := v_1 y dx - v_0 x dy.$$

Observe que

$$w_1(\varphi_3(t)) = \frac{v_0(\beta_1 - \beta_2)}{2} t^{\frac{\beta_2}{2} + 2u_0 - 1} + (\text{t.o.s.}).$$

Por (3.9), temos $\frac{\beta_2}{2} + 2u_0 = u_2 + 2u_1 - (u_1 - 1)2u_0 \notin \Gamma_3$ e conseqüentemente

$$u_2 + 2u_1 - (u_1 - 1)2u_0 \in \Lambda_3 \setminus \Gamma_3.$$

Mas ainda, temos que

$$\nu_3(x^a y^b w_1) = u_2 + (b + 1)2u_1 - (u_1 - 1 - a)2u_0 \in \Lambda_3 \setminus \Gamma_3,$$

para $0 \leq a < u_1 - 1$ e $0 \leq b < u_0 - 1$.

Deste modo, obtemos os $(u_0 - 1)(u_1 - 1)$ elementos de $\Lambda_3 \setminus \Gamma_3$ e correspondentes diferenciais que assumem tais valores.

Note ainda que tal fato está em consonância com o Corolário 2.2.6 e o Corolário 3.1.7. De fato, como $\Lambda_2 \setminus \Gamma_2 = \emptyset$, temos que $\Lambda_3 \setminus \Gamma_3 = \nu_3(\mathcal{E}(f_2) \cap f_2 \cdot \Omega(\log C_2)) \setminus \Gamma_3$ e $x^a y^b w_1$, com $0 \leq a < u_1 - 1$ e $0 \leq b < u_0 - 1$, descrevem os elementos de $\mathcal{E}(f_2) \cap f_2 \cdot \Omega(\log C_2)$, uma vez que $\frac{w_1 \wedge df_2}{dx \wedge dy} = u_0 v_1 f_2$, cujos valores são lacunas de Γ_3 .

Vamos agora focar nas curvas C_f com semigrupo $\Gamma_f = \langle 4u_0, 4u_1, 2u_2, u_2 \rangle$ e que podem ser parametrizadas como (3.12).

Novamente, pelo Corolário 2.2.6 e o Corolário 3.1.7, temos que

$$\Lambda_f \setminus \Gamma_f = \rho_3(\Lambda_3 \setminus \Gamma_3) \dot{\cup} \nu_f(\mathcal{E}(f_3) \cap f_3 \cdot \Omega(\log C_3)) \setminus \Gamma_f.$$

Como diferenciais que contribuem para $\Lambda_3 \setminus \Gamma_3$ são da forma

$$x^a y^b w_1, \quad 0 \leq a < u_1 - 1 \text{ e } 0 \leq b < u_0 - 1,$$

segue do Exemplo 2.2.10 que se $\delta_{ab} = \nu_3(x^a y^b w_1) = \nu_3(x^a y^b) + \frac{\beta_2}{2} + 2u_0$, então

$$\Theta_3(\delta_{ab}) = \nu_3(x^a y^b) + 2u_0.$$

Consequentemente

$$\varepsilon_2(\delta_{ab} - \Theta_3(\delta_{ab})) = 2\frac{\beta_2}{2} = \beta_2 < \beta_3,$$

ou seja,

$$\rho_3(\Lambda_3 \setminus \Gamma_3) = \varepsilon_2(\Lambda_3 \setminus \Gamma_3) = 2(\Lambda_3 \setminus \Gamma_3),$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 \nu_f(x^a y^b w_1) &= 2\nu_3(x^a y^b w_1) \\
 &= 2u_2 + (b+1)4u_1 - (u_1 - 1 - a)4u_0 \\
 &= v_2 + (b+1)v_1 - (u_1 - 1 - a)v_0
 \end{aligned}$$

com $0 \leq a < u_1 - 1$ e $0 \leq b < u_0 - 1$.

Assim, já descrevemos $(u_0 - 1)(u_1 - 1)$ diferenciais e suas respectivas contribuições para $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$.

Observação 3.2.1 *Lembremos que, pelo Lema 1.3.7, toda lacuna par de Γ_f é da forma $\alpha v_2 + \gamma v_1 - \delta v_0$ com $\alpha \in \{0, 1\}$, $0 \leq \gamma < u_0$ e $\delta > 0$. Em particular, toda lacuna maior que $v_2 + v_0$ é da forma $\nu_f(x^a y^b w_1)$ com $0 \leq a < u_1 - 1$ e $0 \leq b < u_0 - 1$.*

Se continuássemos com tal método, seria natural descrever os elementos do conjunto $\mathcal{E}(f_3) \cap f_3 \cdot \Omega(\log C_3)$ e, destes, coletar aqueles que contribuem com lacunas de Γ_f . No entanto, descrever elementos de $f_3 \cdot \Omega(\log C_3)$ não é uma tarefa fácil. Deste modo, vamos mudar a estratégia e descrever como podemos obter elementos de Ω^1 que, embora possam não pertencer a $f_3 \cdot \Omega(\log C_3)$, contribuem para os demais elementos de $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ que restam.

No que segue, para facilitar as considerações, vamos introduzir as seguintes notações:

Definição 3.2.2 *Dado $P(t) \in \mathbb{C}\{t\} \setminus \{0\}$ denotamos por $\mathbf{E}_i(P(t))$ o menor expoente de $P(t)$ divisível por ε_i , mas não divisível por ε_{i-1} . Caso não exista tal expoente, indicamos $\mathbf{E}_i(P(t)) = \infty$. O coeficiente do termo de expoente $\mathbf{E}_i(P(t))$ em $P(t)$ será denotado por $\mathbf{C}_i(P(t))$.*

Se $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$, então $\mathbf{E}_i(h)$ e $\mathbf{C}_i(h)$ indicam $\mathbf{E}_i(h(\varphi_f))$ e $\mathbf{C}_i(h(\varphi_f))$ respectivamente. Do mesmo modo, se $w \in \Omega^1$, então $\mathbf{E}_i(w)$ e $\mathbf{C}_i(w)$ denotam $\mathbf{E}_i(\psi_f(w))$ e $\mathbf{C}_i(\psi_f(w))$, em que ψ_f é a aplicação dada em (1.14).

Exemplo 3.2.3 *Considerando $f_2 = y^{u_0} - x^{u_1}$ e $w_1 = v_1 y dx - v_0 x dy$, temos que*

$$f_2(\varphi_f) = u_0 t^{v_2} + (t.o.p.i.) + u_0 a_{\beta_3} t^{v_2 + \beta_3 - \beta_2} + (t.o.s.)$$

e

$$\psi(w_1) = u_0(\beta_1 - \beta_2)t^{\beta_2+4u_0} + (\text{t.o.p.i.}) + u_0a_{\beta_3}(\beta_1 - \beta_3)t^{\beta_3+4u_0} + (\text{t.o.s.}).$$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(f_2) &= v_2, \quad \mathbf{C}_2(f_2) = u_0; \\ \mathbf{E}_3(f_2) &= v_2 + \beta_3 - \beta_2, \quad \mathbf{C}_3(f_2) = u_0a_{\beta_3}; \\ \mathbf{E}_2(w_1) &= \beta_2 + 4u_0, \quad \mathbf{C}_2(w_1) = u_0(\beta_1 - \beta_2); \\ \mathbf{E}_3(w_1) &= \beta_3 + 4u_0, \quad \mathbf{C}_3(w_1) = u_0a_{\beta_3}(\beta_1 - \beta_3). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, expandindo as expressões em t , temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(x^i y^j f_2) &= 4u_0i + 4u_1j + \mathbf{E}_2(f_2) = \nu_f(x^i y^j f_2); \\ \mathbf{E}_3(x^i y^j f_2) &= 4u_0i + 4u_1j + \mathbf{E}_3(f_2) = \nu_f(x^i y^j f_2) + \beta_3 - \beta_2; \\ \mathbf{E}_2(x^i y^j w_1) &= \nu_f(x^i y^j w_1); \\ \mathbf{E}_3(x^i y^j w_1) &= \nu_f(x^i y^j w_1) + \beta_3 - \beta_2. \end{aligned}$$

Com o objetivo de construir novas diferenciais que fornecerão lacunas especiais não obtidas por $x^a y^b w_1$, vamos usar a semirraiz característica f_2 .

Para cada $r \in \{0, \dots, u_0 - 2\}$ consideremos $\tilde{w}_{2,r} = y^r f_2 w_1$.

Vamos analisar $\tilde{w}_{2,r}$ e destacar o termo de ordem $\mathbf{E}_3(\tilde{w}_{2,r})$. Temos que

$$\begin{aligned} \psi_f(\tilde{w}_{2,r}) &= (t^{\beta_1} + t^{\beta_2} + (\text{t.o.p.i.}) + a_{\beta_3}t^{\beta_3} + (\text{t.o.s.}))^r (u_0t^{v_2} + (\text{t.o.p.i.}) + u_0a_{\beta_3}t^{v_2+\beta_3-\beta_2} + (\text{t.o.s.})) \\ &\quad \cdot [u_0(\beta_1 - \beta_2)t^{\beta_2+4u_0} + (\text{t.o.p.i.}) + u_0a_{\beta_3}(\beta_1 - \beta_3)t^{\beta_3+4u_0} + (\text{t.o.s.})] \\ &= u_0^2(\beta_1 - \beta_2)t^{r\beta_1+v_2+\beta_2+\beta_0} + (\text{t.o.p.i.}) + u_0^2a_{\beta_3}(2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3)t^{r\beta_1+v_2+\beta_3+\beta_0} + (\text{t.o.s.}). \end{aligned}$$

Como $u_0^2(\beta_1 - \beta_2) \neq 0$ e $v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0 > v_2 + v_0$, temos que os termos de $\psi_f(\tilde{w}_{2,r})$ menores que $v_2 + rv_1 + \beta_3 + \beta_0$ pertencem a Γ_f ou são lacunas pares que, pela Observação 3.2.1, já foram obtidas pelas diferenciais da forma $x^i y^j w_1$, $0 \leq i \leq u_1 - 2$ e $0 \leq j \leq u_0 - 2$.

Deste modo, existe $\alpha_1\eta_1 \in \Omega^1$ com $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ e η_1 da forma

$$x^i y^j w_1 \quad \text{com} \quad 0 \leq i \leq u_1 - 2 \text{ e } 0 \leq j \leq u_0 - 2 \text{ ou} \quad (3.13)$$

$$d(x^i y^j f_2^k) \quad \text{com} \quad 0 \leq i, 0 \leq j \leq u_0 - 1 \text{ e } 0 \leq k \leq 1, \quad (3.14)$$

satisfazendo

$$\nu_f(\tilde{w}_{2,r} - \alpha_1\eta_1) > \nu_f(\tilde{w}_{2,r}) = \nu_f(\eta_1).$$

Se $\nu_f(\tilde{w}_{2,r} - \alpha_1\eta_1) < v_2 + rv_1 + \beta_3 + \beta_0$, então novamente existe $\alpha_2\eta_2 \in \Omega^1$ com $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ e η_2 da forma (3.13) ou (3.14) tal que

$$\nu_f(\tilde{w}_{2,r} - \alpha_1\eta_1 - \alpha_2\eta_2) > \nu_f(\tilde{w}_{2,r} - \alpha_1\eta_1) = \nu_f(\eta_1).$$

Procedendo sistematicamente deste modo, após um número finito s_2 de passos, obtemos

$$w_{2,r} = \tilde{w}_{2,r} - \sum_{l=1}^{s_2} \alpha_l \eta_l$$

com

$$\nu_f(w_{2,r}) \geq v_2 + rv_1 + \beta_3 + \beta_0.$$

Vamos mostrar que temos igualdade na expressão acima.

Para tanto, como $\mathbf{C}_3(\tilde{w}_{2,r}) = u_0^2 a_{\beta_3} (2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3) \neq 0$, basta mostrar que as diferenciais η_l com $l = 1, \dots, s_2$ possuem $\mathbf{E}_3(\eta_l) > \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{2,r}) = v_2 + rv_1 + \beta_3 + \beta_0$.

No que segue, vamos comparar o valor $\mathbf{E}_3(\eta_l)$ com $\mathbf{E}_3(\tilde{w}_{2,r}) = v_2 + rv_1 + \beta_3 + \beta_0$.

Note que para todo valor $l = 1, \dots, s_2$ temos $\nu_f(\eta_l) \geq v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0$ e que $\nu_f(\eta_1) = v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0 \neq \nu_f(x^i y^j w_1)$ para quaisquer $0 \leq i \leq u_1 - 2$, $0 \leq j \leq u_0 - 2$. De fato, se $\nu_f(\eta_1) = \nu_f(x^i y^j w_1)$, então como $\beta_2 = v_2 + v_1 - u_1 v_0$, temos de (3.9) que

$$\begin{aligned} \nu_f(x^i y^j w_1) &= v_2 + (j+1)v_1 - (u_1 - 1)v_0 + iv_0 = v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0 = \nu_f(\eta_1) \\ &= 2v_2 + (r+1)v_1 - (u_1 - 1)v_0, \end{aligned}$$

é equivalente a

$$(j+1)v_1 + iv_0 = v_2 + (r+1)v_1 \Leftrightarrow (j-r)v_1 + iv_0 = v_2,$$

o que não pode ocorrer, pois $\text{mdc}(v_0, v_1) = 4 \nmid v_2$.

Além disso, como vimos $\mathbf{E}_3(x^i y^j w_1) = \nu_f(x^i y^j w_1) + \beta_3 - \beta_2$.

Assim, para toda diferencial η_l da forma $x^i y^j w_1$ com $\nu_f(\eta_l) > v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0$, temos, pelo Exemplo 3.2.3, que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3(\eta_l) &= \nu_f(\eta_l) + \beta_3 - \beta_2 \\ &> v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0 + \beta_3 - \beta_2 \\ &= v_2 + rv_1 + \beta_3 + \beta_0 = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{2,r}). \end{aligned}$$

Agora, vamos analisar $\mathbf{E}_3(\eta_l)$ para $\eta_l = d(x^i y^j f_2^k)$ com $i \geq 0$, $0 \leq j \leq u_0 - 1$ e $0 \leq k \leq 1$ tal que $\nu_f(\eta_l) \geq v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0$.

Se $k = 0$ e $j = 0$, então $\mathbf{E}_3(\eta_l) = \infty$.

Se $k = 0$ e $j > 0$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3(\eta_l) = \nu_f(\eta_l) + \beta_3 - v_1 &\geq v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0 + \beta_3 - v_1 \\ &> v_2 + rv_1 + \beta_3 + \beta_0 = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{2,r}). \end{aligned}$$

Agora vamos analisar o caso em que $k = 1$.

Note que $\nu_f(\eta_l) = \nu_f(d(x^i y^j f_2)) = v_2 + jv_1 + iv_0 = v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0 = \nu_f(\tilde{w}_{2,r})$ não pode ocorrer, pois $4 = \text{mdc}(v_0, v_1) \nmid \beta_2$. Logo, podemos assumir $\nu_f(\eta_l) = \nu_f(d(x^i y^j f_2)) > v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0 = \nu_f(\tilde{w}_{2,r})$. Assim, procedendo como no Exemplo 3.2.3, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3(\eta_l) &= iv_0 + jv_1 + v_2 + \beta_3 - \beta_2 > v_2 + rv_1 + \beta_2 + \beta_0 + \beta_3 - \beta_2 \\ &= v_2 + rv_1 + \beta_3 + \beta_0 = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{2,r}). \end{aligned}$$

Assim, é possível obter diferenciais $w_{2,r} = \tilde{w}_{2,r} - \sum_{l=1}^{s_2} \alpha_l \eta_l$ de forma que $\nu_f(w_{2,r}) = v_2 + rv_1 + \beta_3 + v_0$, para $0 \leq r \leq u_0 - 2$.

Temos de (3.8), (3.9), (3.10) e do Lema 1.3.7 que

$$\begin{aligned} v_2 + \beta_3 + rv_1 + v_0 &= 2v_2 + \beta_3 + v_0 - v_2 + rv_1 = v_3 + \beta_2 + v_0 - v_2 + rv_1 \\ &= v_3 + v_0 + rv_1 - (u_0 - 1)v_1 = v_3 + (r + 1)v_1 - (u_1 - 1)v_0 \end{aligned}$$

é uma lacuna de Γ_f para todo $0 \leq r \leq u_0 - 2$.

Deste modo, para cada $r \in \{0, \dots, u_0 - 2\}$, temos $u_1 - 1$ elementos em $\Lambda_f \setminus \Gamma_f$ não considerados anteriormente e dados por $\nu_f(x^i w_{2,r})$ com $0 \leq i \leq u_1 - 2$.

Assim, obtemos mais $(u_0 - 1)(u_1 - 1)$ novas lacunas especiais. Note ainda, que as diferenciais $x^i w_{2,r}$ não pertencem necessariamente a $f_2 \cdot \Omega(\log C_2)$.

Para continuar nossa análise, lembremos que $n_2 v_2 = 2v_2 \in \langle v_0, v_1 \rangle$. Não podemos ter $2v_2 = Rv_1$, uma vez que $v_2 > n_1 v_1$ e, pelo Lema 1.3.7, devemos ter $0 \leq R < n_1 - 1$. Consequentemente, usando que $n_1 = u_0$, podemos escrever

$$2v_2 = Rv_1 + Sv_0, \text{ com } 0 \leq R \leq u_0 - 1 \text{ e } S > 0. \quad (3.15)$$

Agora analisaremos a diferencial $v_0 y^{u_0-1} w_1$.

Temos que

$$\begin{aligned} \psi_f(v_0 y^{u_0-1} w_1) &= v_0(t^{v_1} + t^{\beta_2} + (\text{t.o.p.i.}) + a_{\beta_3} t^{\beta_3} + (\text{t.o.s.}))^{u_0-1} [u_0(\beta_1 - \beta_2)t^{\beta_2+4u_0} + (\text{t.o.p.i.}) \\ &\quad + u_0 a_{\beta_3}(\beta_1 - \beta_3)t^{\beta_3+4u_0} + (\text{t.o.s.})] \\ &= u_0 v_0(\beta_1 - \beta_2)t^{(u_0-1)v_1+\beta_2+4u_0} + (\text{t.o.p.i.}) \\ &\quad + u_0 a_{\beta_3} v_0(\beta_1 - \beta_3)t^{(u_0-1)v_1+\beta_3+4u_0} + (\text{t.o.s.}). \end{aligned}$$

Veja que, de (3.9), temos $(u_0 - 1)v_1 + \beta_2 + 4u_0 = v_2 + v_0$.

Denotando $\tilde{w}_3 = v_0 y^{u_0-1} w_1 - (\beta_1 - \beta_2)f_2 dx$, temos

$$\begin{aligned} \psi_f(\tilde{w}_3) &= v_0 u_0(\beta_1 - \beta_2)t^{(u_0-1)v_1+\beta_2+4u_0} + (\text{t.o.p.i.}) + v_0 u_0 a_{\beta_3}(\beta_1 - \beta_3)t^{(u_0-1)v_1+\beta_3+4u_0} \\ &\quad + (\text{t.o.s.}) - v_0 u_0(\beta_1 - \beta_2)t^{v_2+v_0} + (\text{t.o.p.i.}) \\ &\quad - v_0 u_0 a_{\beta_3}(\beta_1 - \beta_3)t^{v_2+\beta_3+v_0} + (\text{t.o.s.}). \end{aligned}$$

Temos que $\mathbf{E}_3(\tilde{w}_3) = (u_0 - 1)v_1 + \beta_3 + v_0$ e $\nu_f(\tilde{w}_3) > (u_0 - 1)v_1 + \beta_2 + v_0 = v_2 + v_0$.

Vamos apresentar um número finito s_3 de diferenciais η_l tais que $\nu_f\left(\tilde{w}_3 - \sum_{l=1}^{s_3} \alpha_l \eta_l\right) = (u_0 - 1)v_1 + \beta_3 + v_0$, em que $\alpha_l \in \mathbb{C}$.

Além disso, como no caso de $\tilde{w}_{2,r}$, temos que um termo de $\psi_f(\tilde{w}_3)$ com ordem inferior a $(u_0 - 1)v_1 + \beta_3 + v_0$ coincide com a ordem de $\eta_l = d(x^i y^j f_2^k); i \geq 0, 0 \leq j \leq u_0 - 1$ e $0 \leq k \leq 1$, ou com a ordem de $\eta_l = x^i y^j w_1$, com $0 \leq i \leq u_1 - 2$ e $0 \leq j \leq u_0 - 2$ (veja a Observação 3.2.1).

Como analisado anteriormente, considerando $\nu_f(\eta_l) \geq \nu_f(\tilde{w}_3) > (u_0 - 1)v_1 + \beta_2 + v_0$ e examinando as possibilidades para η_l , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3(d(x^i y^j)) = \nu_f(d(x^i y^j)) + \beta_3 - v_1 &> (u_0 - 1)v_1 + \beta_2 + v_0 + \beta_3 - v_1 \\ &> (u_0 - 1)v_1 + \beta_3 + v_0 = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_3); \\ \mathbf{E}_3(d(x^i y^j f_2)) = \nu_f(d(x^i y^j f_2)) + \beta_3 - \beta_2 &> (u_0 - 1)v_1 + \beta_2 + v_0 + \beta_3 - \beta_2 \\ &= (u_0 - 1)v_1 + v_0 + \beta_3 = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_3); \\ \mathbf{E}_3(x^i y^j w_1) = \nu_f(x^i y^j w_1) + \beta_3 - \beta_2 &> (u_0 - 1)v_1 + \beta_2 + v_0 + \beta_3 - \beta_2 \\ &= (u_0 - 1)v_1 + v_0 + \beta_3 = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_3). \end{aligned}$$

Deste modo, podemos obter um número finito s_3 de diferenciais η_l , $l = 1, \dots, s_3$ de modo que $w_3 = \tilde{w}_3 - \sum_{l=1}^{s_3} \alpha_l \eta_l$ com $\alpha_l \in \mathbb{C}$ e $\nu_f(w_3) = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_3)$. De (3.9), (3.10) e (3.15) segue que

$$\begin{aligned} \nu_f(w_3) &= (u_0 - 1)v_1 + v_0 + \beta_3 = v_2 - \beta_2 + v_3 - 2v_2 + \beta_2 + v_0 \\ &= v_3 + v_2 + v_0 - Rv_1 - Sv_0 = v_3 + v_2 + v_0 - Rv_1 - Sv_0 + u_0v_1 - u_1v_0 \\ &= \begin{cases} v_3 + v_2 - (S - 1)v_0 & \text{se } R = 0 \\ v_3 + v_2 + (u_0 - R)v_1 - (u_1 + S - 1)v_0 & \text{se } R \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Note que $\nu_f(w_3)$ é uma lacuna especial não obtida anteriormente, bem como as

lacunas

$$\nu_f(x^i w_3) = \begin{cases} v_3 + v_2 - (S - 1 - i)v_0 & \text{com } 0 \leq i \leq S - 2 \text{ se } R = 0 \\ v_3 + v_2 + (u_0 - R)v_1 - (u_1 + S - 1 - i)v_0 & \text{com } 0 \leq i \leq u_1 + S - 2 \text{ se } R \neq 0. \end{cases}$$

Observe ainda que a quantidade de lacunas obtidas a partir de w_3 depende dos valores de R e S .

Por fim, vamos obter lacunas especiais a partir das diferenciais dadas pelas expressões $\tilde{w}_{4,i} = y^i(v_1 x^{u_1-1} w_1 - (\beta_1 - \beta_2) f_2 dy)$ para $0 \leq i \leq u_0 - 2$. Temos que

$$\begin{aligned} \psi_f(\tilde{w}_{4,i}) &= (t^{v_1} + t^{\beta_2} + (\text{t.o.p.i.}) + a_{\beta_3} t^{\beta_3} + (\text{t.o.s.}))^i \cdot [u_0 v_1 (\beta_1 - \beta_2) t^{v_2+v_1} + (\text{t.o.p.i.}) \\ &\quad + u_0 v_1 a_{\beta_3} (\beta_1 - \beta_3) t^{\beta_3+u_1 v_0} + (\text{t.o.s.}) - u_0 v_1 (\beta_1 - \beta_2) t^{v_2+v_1} + (\text{t.o.p.i.}) \\ &\quad - u_0 v_1 (\beta_1 - \beta_2) a_{\beta_3} t^{v_2+\beta_3-\beta_2+v_1} + (\text{t.o.s.})]. \end{aligned}$$

Note que $\nu_f(\tilde{w}_{4,i}) > v_2 + (i + 1)v_1$, $\mathbf{E}_3(\tilde{w}_{4,i}) = v_2 + (i + 1)v_1 + \beta_3 - \beta_2$ e $\mathbf{C}_3(\tilde{w}_{4,i}) = u_0 v_1 a_{\beta_3} (\beta_2 - \beta_3)$.

Além disso, $v_2 + (i + 1)v_1 > v_2 + v_0$. Deste modo, como nas análises anteriores, para todo termo de $\tilde{w}_{4,i}$ com ordem inferior a $\mathbf{E}_3(\tilde{w}_{4,i})$, existe uma diferencial η_l da forma $d(x^r y^j f_2^k)$ com $r \geq 0$, $0 \leq j \leq u_0 - 1$, $0 \leq k \leq 1$ ou da forma $x^r y^j w_1$, com $0 \leq r \leq u_1 - 2$ e $0 \leq j \leq u_0 - 2$, que atinge a ordem do termo mencionado. Vamos mostrar que existe um número finito s_4 de diferenciais η_l , $1 \leq l \leq s_4$, como descrito anteriormente, com $\nu_f(\eta_l) > v_2 + (i + 1)v_1$ e $\mathbf{E}_3(\eta_l) > \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{4,i})$.

Como antes temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3(d(x^r y^j)) &= \nu_f(d(x^r y^j)) + \beta_3 - \beta_1 > v_2 + (i + 1)v_1 + \beta_3 - \beta_1 > \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{4,i}); \\ \mathbf{E}_3(d(x^r y^j f_2)) &= \nu_f(d(x^r y^j f_2)) + \beta_3 - \beta_2 > v_2 + (i + 1)v_1 + \beta_3 - \beta_2 = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{4,i}); \\ \mathbf{E}_3(x^r y^j w_1) &= \nu_f(x^r y^j w_1) + \beta_3 - \beta_2 > v_2 + (i + 1)v_1 + \beta_3 - \beta_2 = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{4,i}). \end{aligned}$$

Desta forma, podemos obter η_l com $1 \leq l \leq s_4$ tais que $w_{4,i} = \tilde{w}_{4,i} - \sum_{l=1}^{s_4} \alpha_l \eta_l$ com $\alpha_l \in \mathbb{C}$ e que satisfaz $\nu_f(w_{4,i}) = \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{4,i}) = v_2 + (i + 1)v_1 + \beta_3 - \beta_2$.

Como $v_3 = 2v_2 + \beta_3 - \beta_2$ e $2v_2 = Rv_1 + Sv_0$, temos

$$\begin{aligned} \nu_f(w_{4,i}) &= \mathbf{E}_3(\tilde{w}_{4,i}) = v_2 + (i+1)v_1 + \beta_3 - \beta_2 \\ &= v_3 + v_2 + (i+1)v_1 - 2v_2 \\ &= \begin{cases} v_3 + v_2 + (i+1-R)v_1 - Sv_0 & \text{se } i+1 \geq R \\ v_3 + v_2 + (u_0 - R + 1 + i)v_1 - (u_1 + S)v_0 & \text{se } i+1 < R. \end{cases} \end{aligned}$$

Note que $\nu_f(w_{4,i})$ nos dá uma lacuna especial que não foi considerada anteriormente, bem como as lacunas:

$$\nu_f(x^j w_{4,i}) = v_3 + v_2 + (i+1-R)v_1 - (S-j)v_0, \quad 0 \leq j \leq S-1 \quad \text{se } i+1 \geq R$$

$$\nu_f(x^j w_{4,i}) = v_3 + v_2 + (u_0 - R + 1 + i)v_1 - (u_1 + S - j)v_0, \quad 0 \leq j \leq u_1 + S - 1 \quad \text{se } i+1 < R.$$

Vamos proceder a contagem das lacunas especiais obtidas anteriormente, isto é:

$$\begin{aligned} \nu_f(x^a y^b w_1) &= v_2 + (b+1)v_1 - (u_1 - a - 1)v_0, \quad 0 \leq a \leq u_1 - 2 \text{ e } 0 \leq b \leq u_0 - 2; \\ \nu_f(x^a w_{2,b}) &= v_3 + (b+1)v_1 - (u_1 - a - 1)v_0, \quad 0 \leq a \leq u_1 - 2 \text{ e } 0 \leq b \leq u_0 - 2; \\ \nu_f(x^c w_3) &= \begin{cases} v_3 + v_2 - (S-1-c)v_0, \quad 0 \leq c \leq S-2 \text{ e } R=0 \\ v_3 + v_2 + (u_0 - R)v_1 - (u_1 + S - 1 - c)v_0, \quad 0 \leq c \leq u_1 + S - 2 \text{ e } R \neq 0; \end{cases} \\ \nu_f(x^d w_{4,b}) &= \begin{cases} v_3 + v_2 + (b+1-R)v_1 - (S-d)v_0, \quad 0 \leq d \leq S-1 \text{ e } \max\{0, R-1\} \leq b \leq u_0 - 2 \\ v_3 + v_2 + (u_0 + b + 1 - R)v_1 - (u_1 + S - d)v_0, \quad 0 \leq d \leq u_1 + S - 1 \text{ e } 0 \leq b < R - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Se $\boxed{R=0}$, então $4u_2 = 2v_2 = Sv_0 = 4Su_0$ e o número de lacunas especiais obtidas é:

$$2(u_0 - 1)(u_1 - 1) + S - 1 + (u_0 - 1)S = u_2 + 2(u_0 - 1)(u_1 - 1) - 1.$$

Se $\boxed{R=1}$, então $4u_2 = 2v_2 = v_1 + Sv_0 = 4(u_1 + Su_0)$ e as lacunas especiais obtidas

$$\nu_f(w_1) = v_2 + v_1 - (u_1 - 1)v_0 = 38$$

$$\nu_f(y \cdot w_1) = v_2 + (1 + 1)v_1 - (u_1 - 1)v_0 = 54$$

$$\nu_f(x^3 \cdot w_1 + (5/8)f_2dy) = v_3 + v_2 + (u_0 - R + 1)v_1 - (u_1 + S)v_0 = 75$$

$$\nu_f(y \cdot (x^3 \cdot w_1 + (5/8)f_2dy)) = v_3 + v_2 + (1 + u_0 - R + 1)v_1 - (u_1 + S)v_0 = 91$$

$$\nu_f(y^2 \cdot w_1 + (5/6)f_2dx) = v_3 + v_2 + (u_0 - R)v_1 - (u_1 + S - 1)v_0 = 71$$

$$\nu_f(f_2 \cdot w_1 + (15/2)x^7dx) = v_3 + v_1 - (u_1 - 1)v_0 = 97$$

$$\nu_f(y \cdot (f_2 \cdot w_1 + (45/8)x^8dy)) = v_3 + (1 + 1)v_1 - (u_1 - 1)v_0 = 113.$$

Referências

- 1 ABHYANKAR, Shreeram S; MOH, T. T. Newton-Puiseux Expansion and Generalized Tschirnhausen Transformation I-II. **J. Reins Angew. Math.**, v. 260, 47–83 and 261, 1973.
- 2 ALBERICH-CARRAMIÑANA, Maria et al. The minimal Tjurina number of irreducible germs of plane curve singularities. **Preprint arXiv:1904.02652**, 2019.
- 3 BRIANÇON, Joël; MAISONOBE, Philippe; TORRELLI, Tristan. Matrice magique associée à un germe de courbe plane et division par l'idéal Jacobien. In: 3. ANNALES de l'institut Fourier. [S.l.: s.n.], 2007. v. 57, p. 919–954.
- 4 BRIESKORN, Egbert; KNÖRRER, Horst. **Plane Algebraic Curves**. Tradução: John Stillwell. [S.l.]: Birkhäuser Verlag, 1986.
- 5 DELORME, Charles. Sur les modules des singularités des courbes planes. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, v. 106, p. 417–446, 1978.
- 6 DIMCA, Alexandru; GREUEL, Gert-Martin. On 1-forms on isolated complete intersection curve singularities. **Journal of Singularities**, v. 18, p. 114–118, 2018.
- 7 GENZMER, Yohann; HERNANDES, Marcelo E. On the Saito's basis and the Tjurina Number for Plane Branches. **Preprint arXiv:1904.03645**, 2019.
- 8 HEFEZ, Abramo. Irreducible plane curve singularities: in Real and Complex Singularities. Edição: D. Mond e M. J. Saia. **Lecture notes in pure and applied mathematics**, New York; Marcel Dekker, v. 233, p. 1–120, 2003.
- 9 HEFEZ, Abramo; HERNANDES, Marcelo E. Classification of Algebroid Plane Curves with Semigroup $\langle 6,9,19 \rangle$. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 31, n. 8, p. 3847–3861, 2003.
- 10 _____. Computational methods in the local theory of curves. **23° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA**, 2001.
- 11 _____. Standard bases for local rings of branches and their modules of differentials. **Journal of Symbolic Computation**, Elsevier, v. 42, n. 1-2, p. 178–191, 2007.
- 12 _____. The analytic classification of plane branches. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 43, n. 2, p. 289–298, 2011.
- 13 LUENGO, Ignacio; PFISTER, Gerhard. Normal forms and moduli spaces of curve singularities with semigroup $\langle 2p, 2q, 2pq + d \rangle$. **Compositio Mathematica**, Kluwer Academic, Netherlands, v. 76, p. 247–264, 1990.

- 14 MATHER, John N; YAU, Stephen S-T. Classification of isolated hypersurface singularities by their moduli algebras. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 69, n. 2, p. 243–251, 1982.
- 15 MICHLER, Ruth. On the number of generators of the torsion module of differentials. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 129, n. 3, p. 639–646, 2001.
- 16 POL, Delphine. On the values of logarithmic residues along curves. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, v. 68, n. 2, p. 725–766, 2018.
- 17 POPESCU-PAMPU, Patrick. Approximate Roots. **Valuation theory and its applications**, American Mathematical Society, v. 33, p. 285–321, 2003.
- 18 SAITO, Kyoji. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. **J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math**, v. 27, n. 2, p. 265–291, 1980.
- 19 SEBASTIANI, Marcos. **Introdução à geometria analítica complexa**. [S.l.]: IMPA, 2004.
- 20 WATARI, Masahiro. On the Tjurina Number of Plane Curve Singularities. Disponível em: <http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/fsakai/216.pdf>. Acesso em: 28 mai. 2019.
- 21 YAVORSKI, Piotr. Normal forms and bases of local rings of irreducible germs of functions of two variables. **Journal of Soviet Mathematics**, Springer, v. 50, n. 1, p. 1350–1364, 1990.
- 22 ZARISKI, Oscar. Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 56, n. 3, p. 781–786, 1966.
- 23 _____. On the topology of algebroid singularities. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 54, n. 3, p. 453–465, 1932.
- 24 _____. The moduli problem for plane branches, University Lecture Series. Tradução: Ben Lichtin. Appendix by Bernand Teissier. **American Mathematical Society**, 2006.

Índice Remissivo

A

anel

das séries convergentes, 1

local, 4

B

base, 27

C

condutor, 7

conjectura de Dimca-Greuel, 68

conjunto

analítico, 3

das lacunas especiais, 21

de valores de diferenciais, 16

de valores de resíduos, 20

corpo de frações, 27

curva

analítica, 3

irredutível, 3

plana, 3

D

diferencial não exata minimal, 67

E

equivalência

analítica, 3

topológica, 4

expoentes característicos, 6

F

fecho integral, 7

forma logarítmica, 18

função

Θ , 54

ρ , 56

G

gênero da curva, 6

germe

de conjunto, 3

de conjunto analítico, 3

I

ideal cofator, 22

invariante de Zariski, 15

L

lacunas

do semigrupo, 10

especiais, 21

limitante superior para τ , 68

M

módulo

das 1-formas, 15

das diferenciais de Kähler, 15

das formas logarítmicas, 18

de torção, 16

dos resíduos logarítmicos, 19

dos vetores logarítmicos, 18

matriz mágica, 30

multiplicidade, 1

N

número

de Milnor, 7

de Tjurina, 15

P

parametrização da curva, 5

polígono de Newton, 4

polar, 22

polinômio

de Weierstrass, 2

homogêneo, 1

produto exterior, 18

Q

questão

de Dimca-Greuel, 68

de Watari, 65

R

ramo plano, 3

resíduo, 19

resposta

questão de Dimca-Greuel, 68

questão de Watari, 70

S

série

invertível, 1

regular, 1

semigrupo de valores, 7

semirraiz, 11

semirraiz característica, 11

soma direta, 25

T

teorema

Brauner-Barau-Zariski, 11

de Preparação de Weierstrass, 2

Hefez-Hernandes, 17

Yavorski, 24

V

valorização

discreta, 7

normalizada, 7