

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Mestrado)

## **Simetrias em equações diferenciais binárias**

**Rafael Luiz Tarozo**

Orientadora: Prof<sup>fa</sup>. Dr<sup>a</sup>. Patrícia Hernandes Baptistelli

Maringá - PR

2019

# Simetrias em equações diferenciais binárias

Rafael Luiz Taroço

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Patrícia Hernandes Baptistelli

Maringá - PR

2019

# Agradecimentos

À Deus, por me fornecer força durante essa nova etapa.

À minha família, que acreditou e torceu por mim.

À minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Patrícia Hernandes Baptistelli, pela paciência, sabedoria, atenção e empenho na realização deste trabalho.

Aos professores do Departamento em Matemática da UEM, por contribuírem com minha formação.

Aos meus amigos, que me proporcionaram momentos de alegrias e diversões.

À Capes, pelo apoio financeiro.

## Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo de simetrias em equações diferenciais binárias (EDBs). Nesta dissertação introduziremos o conceito de simetrias em EDBs, a saber quando a equação é invariante sob a ação linear de um grupo de Lie compacto, usando a teoria de representação de grupos. Um dos resultados principais deste texto estabelecerá uma fórmula que revela o efeito de uma simetria na configuração geométrica de uma EDB em termos puramente algébricos. Usando ferramentas da teoria invariante e da teoria de representação de grupos de Lie compactos, determinaremos as formas gerais das EDBs equivariantes segundo a ação de subgrupos de  $O(2)$ .

**Palavras-chave:** Equação diferencial binária, simetria, forma quadrática equivariante, grupo de Lie compacto, teoria de representação.

## Abstract

The central goal of this work is the study of symmetries in binary differential equations (EDBs). In this dissertation we will introduce the concept of symmetries in EDBs, namely when the equation is invariant under the linear action of a compact Lie group, using group representation theory. One of the main results of this text will establish a formula that reveals the effect of a symmetry on the geometric configuration of an EDB in purely algebraic terms. Using tools of invariant theory and representation theory of compact Lie groups we will determine the general forms of equivariant EDBs under subgroups of  $O(2)$ .

**Key words:** Binary differential equation, symmetry, equivariant quadratic form, compact Lie group, representation theory.

---

# SUMÁRIO

---

<b>Introdução</b>	<b>viii</b>
<b>1 Equações diferenciais binárias</b>	<b>1</b>
1.1 Conceitos Iniciais . . . . .	1
1.2 Exemplos em geometria diferencial . . . . .	8
<b>2 Teoria de grupos de Lie</b>	<b>12</b>
2.1 Grupos de Lie . . . . .	13
2.2 Ação e Representação . . . . .	16
2.3 Integral de Haar . . . . .	17
2.4 Teoria invariante . . . . .	21
2.4.1 Funções invariantes . . . . .	21
2.4.2 Aplicações equivariantes . . . . .	24
2.5 Teoria $\Gamma_\sigma$ -equivariante . . . . .	26
<b>3 Simetrias em equações diferenciais binárias</b>	<b>34</b>
3.1 O grupo de simetrias de uma equação diferencial binária . . . . .	35
3.2 Superfície associada à EDB . . . . .	44
<b>4 Formas gerais de EDBs com simetrias</b>	<b>50</b>
4.1 O módulo das aplicações a valores matriciais . . . . .	50
4.2 Formas quadráticas $SO(2)[SO(2)]$ -equivariantes . . . . .	53
4.3 Formas quadráticas $O(2)$ -equivariantes . . . . .	56
4.3.1 Formas quadráticas $O(2)[O(2)]$ -equivariantes . . . . .	56
4.3.2 Formas quadráticas $O(2)[SO(2)]$ -equivariantes . . . . .	58
4.4 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_n$ -equivariantes . . . . .	61
4.4.1 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_n[\mathbb{Z}_n]$ -equivariantes, $n \geq 3$ . . . . .	61
4.4.2 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_n[\mathbb{Z}_{n/2}]$ -equivariantes, para $n \geq 4$ . . . . .	66
4.5 Formas quadráticas $D_n$ -equivariantes . . . . .	71
4.5.1 Formas quadráticas $D_n[D_n]$ -equivariantes, $n \geq 3$ . . . . .	72

---

4.5.2	Formas quadráticas $D_n[\mathbb{Z}_n]$ -equivariantes, $n \geq 3$ . . . . .	74
4.5.3	Formas quadráticas $D_n[D_{n/2}]$ -equivariantes, $n \geq 4$ . . . . .	77
4.6	Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2$ -equivariantes . . . . .	81
4.6.1	Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2]$ -equivariantes . . . . .	81
4.6.2	Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2[I_2]$ -equivariantes . . . . .	83
4.7	Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -equivariantes . . . . .	85
4.7.1	Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]$ -equivariantes . . . . .	85
4.7.2	Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(-I_2)]$ -equivariantes . . . . .	87
4.7.3	Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(\kappa)]$ -equivariantes . . . . .	89
4.8	Tabela de classificação das formas gerais . . . . .	91
	<b>Referências</b>	<b>93</b>

---

# INTRODUÇÃO

---

Uma equação da forma

$$F(x, y, p) = 0,$$

onde  $p = \frac{dy}{dx}$  e  $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave definida em um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$ , é chamada de equação diferencial implícita (EDI) se existe  $q \in U$  tal que  $F_p(q) = 0$ , onde  $F_p$  denota a derivada parcial de  $F$  com relação à variável  $p$ . Esse tipo de equação é estudada em vários ramos da matemática, como geometria diferencial das superfícies, equações diferenciais parciais e teoria de controle. Em teoria de singularidades, um dos primeiros estudos foi feito por Dara em [9], onde ele classificou analiticamente as singularidades de uma EDI em seis tipos, usando a  $C^3$ -topologia de Whitney.

Uma equação diferencial binária (EDB) no plano é uma equação diferencial implícita escrita localmente na forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0,$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são funções reais suaves definidas em um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ . A função  $\delta : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$  é chamada de função discriminante e o conjunto

$$\Delta = \{(x, y) \in V; \delta(x, y) = 0\}$$

é chamado de conjunto discriminante da EDB.

O estudo qualitativo deste tipo de equação tem recebido muita atenção nas últimas décadas. O comportamento local de uma EDB no caso em que 0 é um valor regular da função discriminante  $\delta$  foi estudado por Dara em [9] e por Davydov em [10]. Davydov, seguindo o trabalho de Dara, classificou pares de campos genéricos quando o conjunto dos pontos  $(x, y) \in V$  tais que  $\delta(x, y) > 0$  é uma curva suave. Em particular, toda EDB define um par de direções transversais em cada ponto desse conjunto, tal par sendo coincidente em  $\Delta$ . Ainda do ponto de vista local, Bruce e Tari apresentam em [6, 7] uma classificação formal e topológica de EDBs quando a função discriminante  $\delta$  possui uma singularidade do tipo Morse.



Outros trabalhos com aplicação na geometria diferencial das superfícies podem ser destacados, como por exemplo [5, 13, 18, 19], onde os autores estudam famílias naturais de EDBs associadas às superfícies regulares. Entre essas famílias podemos citar as curvas características, as equações das linhas de curvatura e das linhas assintóticas, cujas soluções determinam pares de folheações nas superfícies regulares. Nessa direção, Tari mostrou em [18] que a conjectura de Carathéodory é verdadeira no 3-espaço de Minkowski, ou seja, toda superfície fechada e convexa de classe  $C^3$  nesse espaço tem pelo menos dois pontos umbílicos. Para isso, fez-se necessário a aplicação de resultados sobre EDBs no estudo das linhas de curvaturas de superfícies no 3-espaço de Minkowski.

Na maioria dos trabalhos citados até aqui, incluindo as referências reportadas em [19], a configuração geométrica de uma EDB é uma característica de grande importância e que interfere diretamente na obtenção dos resultados. Mais especificamente, um dos interesses compreendidos em [5, 6, 7, 9] foi a determinação de modelos de configurações associados às EDBs sob algum tipo de equivalência, seja ela topológica, formal ou analítica. Nessa direção, o reconhecimento de simetrias em EDBs é um assunto de grande interesse, sendo este o principal objetivo desta dissertação. Manoel e Tempesta introduziram em [16] o estudo sistemático das simetrias em EDBs sob a ação de um grupo de Lie compacto, relacionando conceitos geométricos e algébricos por meio da teoria invariante de grupos. As simetrias são transformações que levam as soluções de uma EDB em outras soluções e, portanto, estão diretamente associadas a uma propriedade invariante da configuração geométrica associada à EDB.

O presente trabalho é uma contribuição nesta linha de pesquisa, com o objetivo de explorar e entender o efeito das simetrias nas EDBs, além de determinar as formas gerais das equações que são equivariantes sob a ação linear de um grupo de Lie compacto. O texto a seguir está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentaremos os preliminares referentes à teoria das equações diferenciais binárias.

No Capítulo 2, introduziremos alguns conceitos da teoria invariante de grupos de Lie tais como ação e representação de um grupo de Lie compacto  $\Gamma$ , integral de Haar e aplicações  $\Gamma$ -equivariantes. Finalizaremos esse capítulo com um algoritmo simbólico, que tem como objetivo calcular um conjunto de geradores para o módulo das aplicações polinomiais  $\Gamma_\sigma$ -equivariantes sob o anel dos  $\Gamma$ -invariantes, sendo  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  um epimorfismo de grupos.

No Capítulo 3, formalizaremos o conceito de EDB equivariante sob a ação linear de um subgrupo fechado do grupo ortogonal  $O(2)$ . Apresentaremos um resultado, a saber o Teorema 3.1.7, que revelará através de uma fórmula algébrica o efeito de uma simetria na configuração geométrica de uma EDB. Definiremos a chamada superfície da EDB e

---

mostraremos como as simetrias de uma EDB agem nas componentes que cobrem essa superfície.

No Capítulo 4, calcularemos as formas gerais das EDBs equivariantes sob a ação dos grupos  $SO(2)$ ,  $O(2)$ ,  $\mathbb{Z}_n$ ,  $D_n$ , para  $n \geq 3$ ,  $\mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Para isso, usaremos a relação entre as formas quadráticas  $\Gamma$ -equivariantes segundo um homomorfismo  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  e o módulo finitamente gerado das aplicações a valores matriciais  $\Gamma_\sigma$ -equivariantes. Quando  $\sigma$  é sobrejetor, faremos uso do Algoritmo 2.5.9 apresentado no Capítulo 2. Finalizaremos esse capítulo listando em uma tabela todas as formas gerais obtidas.

# Equações diferenciais binárias

Como mencionamos na Introdução, as equações diferenciais binárias estão presentes em importantes ramos da matemática, tais como em geometria diferencial das superfícies e teoria de singularidades. Elas são um tipo especial de equações diferenciais implícitas, para as quais existem no máximo duas direções em cada ponto do plano.

Na Seção 1.1, mostraremos que sob certas condições uma equação diferencial implícita pode ser escrita localmente na forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0$$

e, neste caso, ela é chamada de equação diferencial binária. Mostraremos também que nos pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  em que  $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) \geq 0$  a equação acima define no máximo duas direções. Como consequência do Teorema 1.1.6, genericamente, as soluções de uma equação diferencial binária definem uma superfície regular e as soluções da equação

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$$

definem uma curva regular. Na Seção 1.2, apresentaremos dois exemplos de equações diferenciais binárias em geometria diferencial.

## 1.1 Conceitos Iniciais

**Definição 1.1.1.** *Considere uma equação diferencial da forma*

$$F(x, y, p) = 0, \tag{1.1}$$

em que  $p = \frac{dy}{dx}$  e  $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave definida em um subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ . Dizemos que um ponto  $q \in U$  é um ponto singular de (1.1) se  $F_p(q) = 0^1$ .

<sup>1</sup>As notações  $F_p$  e  $F_{pp}$  denotarão respectivamente a primeira e a segunda derivada parcial de  $F$  com respeito a  $p$ .

Se  $q = (x_0, y_0, p_0)$  não é um ponto singular de (1.1), então pelo Teorema da função implícita a equação (1.1) pode ser escrita localmente na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y), \quad (1.2)$$

em que  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave definida em uma vizinhança  $\Omega$  de  $(x_0, y_0)$ . Esse tipo de equação é chamada de equação diferencial ordinária (EDO) e pode ser resolvida numericamente. Além disso, em cada ponto  $(x, y) \in \Omega$  a equação (1.2) determina uma única direção no plano.

Geometricamente, o vetor  $v(x, y) = (1, g(x, y))$  é o vetor tangente a uma solução de (1.2) em  $(x, y) \in \Omega$ . Logo, as soluções de (1.2) são curvas cujo vetor tangente em cada ponto  $(x, y)$  é  $v(x, y)$ . Essas curvas recebem o nome de curvas integrais.

Paralelamente, existem equações diferenciais da forma (1.1) que contêm pontos singulares:

**Definição 1.1.2.** *Uma equação diferencial da forma (1.1) que contém pontos singulares é chamada de equação diferencial implícita (EDI), também conhecida como equação diferencial multiforme.*

Mais especificamente, uma EDI é uma equação da forma (1.1) com pontos  $q \in U$  tais que  $F_p(q) = 0$ . A denominação “implícita” vem para diferenciar as EDIs daquelas equações que podem ser escritas na forma (1.2), onde  $p$  é dado explicitamente como uma função de  $x$  e  $y$ . Assim, no estudo de uma EDI os pontos de interesse são aqueles para os quais (1.1) não se reduz localmente a uma EDO. Tais pontos correspondem aos zeros das equações  $F \equiv F_p \equiv 0$ .

O próximo passo é mostrar que, sob uma certa condição, uma EDI pode ser escrita localmente na forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (1.3)$$

onde  $a, b, c : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves definidas em um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ . Para isso, precisaremos introduzir um resultado conhecido como Teorema de preparação de Malgrange, que é uma versão para funções reais suaves do Teorema de preparação de Weierstrass. Sua demonstração pode ser encontrada em [17] e segue diretamente do clássico Teorema de divisão de Mather. Para facilitar a notação, denotaremos também por  $\frac{\partial^k F}{\partial p^k}$  a  $k$ -ésima derivada parcial de  $F$  com respeito a  $p$ .

**Teorema 1.1.3. (Teorema de preparação de Malgrange)** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(w, p) \mapsto F(w, p)$ , uma função suave definida em uma vizinhança de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e seja  $k \geq 1$  o primeiro inteiro tal que*

$$\frac{\partial^k F}{\partial p^k}(0, 0) \neq 0.$$

Então existe uma função suave  $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida em uma vizinhança  $W$  de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tal que  $q(0, 0) \neq 0$  e existem funções suaves  $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  em alguma vizinhança  $V$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$  tais que

$$F(w, p) = q(w, p) \left( p^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(w) p^i \right),$$

para todo  $(w, p) \in W$ .

Diferentemente do caso analítico complexo, a fatoração de  $F$  apresentada no teorema anterior para o caso real suave não é necessariamente única.

Estamos aptos agora a mostrar que se  $F_{pp}(0, 0, 0) \neq 0$ , uma EDI da forma (1.1) pode ser escrita localmente na forma (1.3). Para isso, assumiremos  $F$  definida em uma vizinhança  $U$  de  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ , sendo  $(0, 0, 0)$  um ponto singular de (1.1). Nessas condições, pelo Teorema de preparação de Malgrange, existem funções suaves  $q : W \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lambda_0, \dots, \lambda_1 : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas em torno da origem em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente, tais que

$$F(x, y, p) = q(x, y, p) (p^2 + \lambda_1(x, y)p + \lambda_0(x, y)),$$

onde  $q(0, 0, 0) \neq 0$ . Como  $q$  é suave em  $W$ , localmente temos que  $F(x, y, p) = 0$  se, e somente se,  $p^2 + \lambda_1(x, y)p + \lambda_0(x, y) = 0$  para  $(x, y) \in V$ . Definindo  $a, b, c : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como  $a(x, y) = 1$ ,  $2b(x, y) = \lambda_1(x, y)$  e  $c(x, y) = \lambda_0(x, y)$ , podemos escrever localmente a EDI  $F(x, y, p) = 0$  como

$$a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0,$$

onde  $p = \frac{dy}{dx}$ . Neste caso, se  $dx^2 \neq 0$  podemos reescrever a última equação como

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0.$$

Uma EDI escrita nessa forma quadrática é conhecida como equação diferencial binária. Formalizaremos esse conceito na próxima definição.

**Definição 1.1.4.** *Uma equação diferencial binária (EDB) é uma equação diferencial implícita da forma*

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \tag{1.4}$$

onde  $a, b, c : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves definidas em um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ . As funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  são chamadas de coeficientes da EDB.

Existem dois tipos de EDBs: as do tipo 1, em que seus coeficientes não se anulam simultaneamente em  $V$  e as do tipo 2, em que seus coeficientes se anulam simultaneamente em algum ponto de  $V$ . Em um ponto  $(x, y)$  tal que  $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$ , todas as direções  $(dx, dy)$  satisfazem a EDB (1.4) (veja Exemplo 1.2.1, onde mostraremos que estes pontos são exatamente os pontos umbílicos de uma superfície). Neste trabalho, vamos considerar apenas EDBs do tipo 1. Neste caso, podemos supor sem perda de generalidade que  $a(x, y) \neq 0$ , para todo  $(x, y) \in V$ , e mostrar que em cada ponto  $(x, y)$  a EDB define no máximo duas direções. Para entender isso, escreveremos  $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\omega(x, y, dx, dy) = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2$$

em sua forma matricial

$$\omega(x, y, dx, dy) = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

com relação à base canônica  $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ . Ou seja,

$$\omega(x, y, dx, dy) = [(dx, dy)]_{\alpha}^t \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} [(dx, dy)]_{\alpha},$$

onde  $[(dx, dy)]_{\alpha}$  denota as coordenadas de  $(dx, dy)$  com relação à base  $\alpha$  e  $t$  denota a transposta.

Como as funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  não se anulam simultaneamente em  $V$ , se  $a \equiv 0$  temos dois casos a considerar:  $c(x, y) \neq 0$  para algum  $(x, y) \in V$  ou  $c \equiv 0$ . No primeiro caso,

$$\omega(x, y, dx, dy) = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Fazendo uma mudança de base de  $\alpha$  para a base  $\beta = \{(0, 1), (-1, 0)\}$  (o que equivale a uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos no sistema de coordenadas original), obtemos a matriz de mudança de base

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$[(x, y)]_{\beta} = A[(x, y)]_{\alpha} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

e

$$[(dx, dy)]_{\beta} = A[(dx, dy)]_{\alpha} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}.$$

Na nova base  $\beta$  temos então a EDB

$$\begin{aligned} & [(dx, dy)]_\beta^t \begin{pmatrix} c(y, -x) & b(y, -x) \\ b(y, -x) & 0 \end{pmatrix} [(dx, dy)]_\beta \\ &= \begin{pmatrix} dy & -dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}(x, y) & \tilde{b}(x, y) \\ \tilde{b}(x, y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} \\ &= \tilde{c}(x, y)dy^2 - 2\tilde{b}(x, y)dxdy, \end{aligned}$$

onde o coeficiente  $\tilde{c}$  não é identicamente nulo em  $V$ , ou seja, o coeficiente que acompanha  $dy^2$  não é identicamente nulo.

No segundo caso, em que  $a \equiv c \equiv 0$ , temos a EDB

$$\omega(x, y, dx, dy) = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b(x, y) \\ b(x, y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

com  $b(x, y) \neq 0$  para algum  $(x, y) \in V$ . Fazendo uma mudança de base de  $\alpha$  para a base  $\gamma = \{(1, 1), (-1, 1)\}$  (o que equivale a uma rotação de  $\frac{\pi}{4}$  radianos no sistema de coordenadas original), obtemos a matriz de mudança de base

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$[(x, y)]_\gamma = B[(x, y)]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x + y) \\ \frac{1}{2}(y - x) \end{pmatrix}$$

e

$$[(dx, dy)]_\gamma = B[(dx, dy)]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(dx + dy) \\ \frac{1}{2}(dy - dx) \end{pmatrix}.$$

Assim, tomando  $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x + y)$  e  $\tilde{y} = \frac{1}{2}(y - x)$ , temos na nova base  $\gamma$  a EDB

$$\begin{aligned} & [(dx, dy)]_\gamma^t \begin{pmatrix} 0 & b(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ b(\tilde{x}, \tilde{y}) & 0 \end{pmatrix} [(dx, dy)]_\gamma = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(dx + dy) & \frac{1}{2}(dy - dx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}(x, y) \\ \tilde{b}(x, y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(dx + dy) \\ \frac{1}{2}(dy - dx) \end{pmatrix} \\ &= 2\tilde{b}(x, y) \left(\frac{1}{2}(dx + dy)\right) \left(\frac{1}{2}(dy - dx)\right) \\ &= \frac{1}{2}\tilde{b}(x, y)dy^2 - \frac{1}{2}\tilde{b}(x, y)dx^2, \end{aligned}$$

com  $\tilde{b}(x, y) \neq 0$  para algum  $(x, y) \in V$ . Logo, o coeficiente que acompanha  $dy^2$  não é identicamente nulo em  $V$ .

Portanto, realizando mudanças de coordenadas se necessário, podemos assumir  $a(x, y) \neq 0$  para algum  $(x, y) \in V$ . Como  $a$  é uma função suave, existe uma vizinhança de  $(x, y)$  contida em  $V$  em que  $a$  não se anula. Deste modo, assumiremos sem perda de generalidade que  $a(x, y) \neq 0$  para todo  $(x, y) \in V$ .

Nosso próximo passo é mostrar que toda EDB define no máximo duas direções em cada ponto de  $V$ . Para isso, introduziremos a seguinte definição.

**Definição 1.1.5.** *Considere a EDB (1.4). A função  $\delta : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) \quad (1.5)$$

*é chamada de função discriminante da EDB e seu conjunto nulo*

$$\Delta = \{(x, y) \in V; \delta(x, y) = 0\} \quad (1.6)$$

*é chamado de conjunto discriminante da EDB.*

Considere a EDI

$$a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0, \quad (1.7)$$

com  $p = \frac{dy}{dx}$ , associada à EDB (1.4). Cálculos simples nos mostram que

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-b(x, y) - \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)}}{a(x, y)}$$

e

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{-b(x, y) + \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)}}{a(x, y)}$$

são raízes da equação (1.7). Se  $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$ , então (1.7) possui duas raízes reais distintas  $\frac{dy_1}{dx_1}$  e  $\frac{dy_2}{dx_2}$ . Consequentemente, a EDB (1.4) determina duas direções transversais em  $(x, y) \in V$ . Se  $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$ , então (1.7) possui uma única raiz real e, assim, a EDB (1.4) determina uma única direção em  $(x, y) \in V$ . Agora, se  $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) < 0$ , então a EDB (1.4) não tem uma direção bem definida em  $(x, y) \in V$ .

Isso nos mostra que a quantidade de direções no plano que uma EDB define em cada ponto do seu domínio está relacionada ao sinal da função discriminante  $\delta$ . Assim, se  $\delta(x, y) > 0$ , as direções  $dx = 1$  e  $dy = \frac{-b(x, y) \pm \sqrt{\delta(x, y)}}{a(x, y)}$  são soluções de (1.4) e, neste caso, é definido um par de folheações transversais em  $(x, y)$ . Discutiremos mais sobre isso no Capítulo 3.

O próximo resultado, conhecido como Teorema de Sard, nos garante que o conjunto dos valores críticos de uma aplicação suave tem medida nula. Ele nos possibilitará mostrar que genericamente a EDI (1.1) determina uma superfície regular e o conjunto discriminante  $\Delta$  é uma curva regular.



**Teorema 1.1.6. (Teorema de Sard)** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação suave. Então, o conjunto dos valores críticos de  $f$  tem medida nula (no sentido da medida de Lebesgue) em  $\mathbb{R}^m$ .*

*Demonstração.* Veja [15, Theorem 6.10]. □

Como consequência do teorema anterior, o conjunto dos valores regulares de  $f$  é denso em  $\mathbb{R}^m$ . Como nosso estudo é local, podemos supor sem perda de generalidade que  $0 \in \mathbb{R}$  é um valor regular da função  $F$  dada em (1.1). Logo, genericamente

$$M = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, p) = 0\}$$

é uma superfície regular<sup>2</sup>. Do mesmo modo, genericamente  $\Delta$  descreve uma curva plana regular, já que podemos supor  $0 \in \mathbb{R}$  um valor regular da função discriminante  $\delta$  definida em (1.5).

O próximo resultado nos dá uma caracterização dos valores regulares de uma EDI via função discriminante  $\delta$  da EDB associada.

**Proposição 1.1.7.** *Seja  $F(x, y, p) = 0$  a EDI (1.7) tal que  $a(x, y) \neq 0$  para todo  $(x, y) \in V$ . Então  $0$  é um valor regular de  $F$  se, e somente se,  $0$  é um valor regular da função discriminante  $\delta$  definido em (1.5).*

*Demonstração.* Como  $a$  não se anula em  $V$ , podemos supor que  $F$  se escreve na forma

$$F(x, y, p) = p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y),$$

com  $p = \frac{dy}{dx}$ , sendo a função discriminante da EDB associada a  $F(x, y, p) = 0$  dada por

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - c(x, y).$$

Logo,  $0$  é um valor regular de  $F$  se, e somente se,  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_p$  não se anulam simultaneamente em nenhum ponto  $(x, y, p) \in F^{-1}(0)$ , onde

$$\begin{cases} F_x(x, y, p) = 2b_x(x, y)p + c_x(x, y) \\ F_y(x, y, p) = 2b_y(x, y)p + c_y(x, y) \\ F_p(x, y, p) = 2p + 2b(x, y). \end{cases}$$

Faremos a prova por contraposição. Primeiro suponhamos que  $F_x(x, y, p) = F_y(x, y, p) = F_p(x, y, p) = 0$  em algum  $(x, y, p) \in F^{-1}(0)$ . Então  $p = -b(x, y)$ , de onde segue que

$$F_x(x, y, p) = -2b_x(x, y)b(x, y) + c_x(x, y) = -\delta_x(x, y) \tag{1.8}$$

---

<sup>2</sup>Lembremos que se  $0$  é um valor regular de  $F$ , então  $F^{-1}(0)$  é uma superfície regular. Analogamente, se  $0$  é um valor regular de  $\delta$ , então  $\delta^{-1}(0)$  é uma curva regular.

e

$$F_y(x, y, p) = -2b_y(x, y)b(x, y) + c_y(x, y) = -\delta_x(x, y) \quad (1.9)$$

mostrando que  $\delta_x(x, y) = \delta_y(x, y) = 0$  em algum  $(x, y) \in V$ . Como  $(x, y, p) \in F^{-1}(0)$  e  $p = -b(x, y)$ , segue que  $\delta(x, y) = 0$ . Portanto, 0 não é um valor regular de  $\delta$ .

Reciprocamente, se 0 não é um valor regular de  $\delta$ , então existe  $(x, y) \in \delta^{-1}(0)$  tal que  $\delta_x(x, y) = \delta_y(x, y) = 0$ . Para tal  $(x, y)$  temos  $c(x, y) = b^2(x, y)$  e  $F(x, y, p) = 0$  para algum  $p$ . Então

$$\begin{aligned} 0 &= p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) \\ &= p^2 + 2b(x, y)p + b^2(x, y) \\ &= (p + b(x, y))^2. \end{aligned}$$

Logo,  $p = -b(x, y)$ , de onde segue que  $F_p(x, y, p) = 0$ , além das igualdades (1.8) e (1.9). Portanto,  $F_x(x, y, p) = F_y(x, y, p) = F_p(x, y, p) = 0$ , em algum  $(x, y, p) \in F^{-1}(0)$ , ou seja, 0 não é um valor regular de  $F$ .  $\square$

## 1.2 Exemplos em geometria diferencial

Nesta seção apresentaremos dois exemplos de EDBs dadas pelas equações diferenciais das linhas de curvatura e das linhas assintóticas de superfícies. Os conceitos, notações e resultados usados nesses exemplos podem ser encontrados em [8].

**Exemplo 1.2.1. (Linhas de curvatura)** Seja  $S$  uma superfície regular. Se  $q \in S$  é um ponto não umbílico, então existem duas direções ortogonais em  $q$ , chamadas direções principais, que correspondem aos valores extremos das curvaturas normais. Se  $q \in S$  é um ponto umbílico, então todas as direções em  $q$  são principais. Uma linha de curvatura de  $S$  é uma curva conexa e regular  $C \subset S$  tal que a direção tangente em cada ponto  $p \in C$  é uma direção principal. Dada uma parametrização local  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $q = \phi(u, v)$ , a equação diferencial das linhas de curvatura é dada pela EDB

$$(gF - fG)dv^2 + (gE - eG)dudv + (fE - eF)du^2 = 0, \quad (1.10)$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental em  $(u, v)$  e  $e, f$  e  $g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental em  $(u, v)$ . Vamos mostrar que a EDB (1.10) é do tipo 2 se, e somente se, a superfície possui pontos umbílicos. Para isso temos as seguintes afirmativas:

**Afirmção 1:** Se  $gF - fG = gE - eG = 0$ , então  $fE - eF = 0$ . Com efeito, das duas primeiras igualdades temos  $egF - efG = fgE - feG = 0$ , donde segue que  $(fE - eF)g = 0$ .

Se  $g \neq 0$ ,  $fE - eF = 0$ . Se  $g = 0$ , como  $G \neq 0$  temos da hipótese que  $e = f = 0$ , o que implica que  $fE - eF = 0$ .

**Afirmção 2:** Se  $q \in S$  é um ponto umbílico, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $e = \lambda E$ ,  $f = \lambda F$  e  $g = \lambda G$  em  $(u, v)$ . De fato, considere a parametrização local  $\phi$  de  $S$  em  $q$ . Sabemos que

$$K_n = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}, \quad (1.11)$$

onde  $K_n$  denota a curvatura normal e  $I_q(w)$  e  $II_q(w)$  denotam a primeira e a segunda formas fundamentais de  $S$ , respectivamente. Como  $q$  é umbílico, segue que  $K_n = \lambda$  é constante. Logo, dado  $w = a\phi_u + b\phi_v \in T_qS$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos de (1.11) que

$$a^2e + 2abf + b^2g = \lambda(a^2E + 2abF + b^2G).$$

Tomando  $a = 1$  e  $b = 0$ , obtemos  $e = \lambda E$ . Analogamente, tomando  $a = 0$  e  $b = 1$ , obtemos  $g = \lambda G$ . Ainda, tomando  $a = b = 1$  e usando que  $e = \lambda E$  e  $g = \lambda G$ , obtemos  $f = \lambda F$ .

Agora, suponhamos que os coeficientes da EDB (1.10) se anulem simultaneamente em  $(u, v)$ , ou seja,

$$gF = fG, \quad gE = eG \quad \text{e} \quad eF = fE. \quad (1.12)$$

Sabemos que um ponto  $q = \phi(u, v)$  é umbílico se, e somente se,  $H^2 - K = 0$ , onde  $H$  e  $K$  denotam a curvatura média e a curvatura Gaussiana em  $(u, v)$ , respectivamente. Por (1.12) temos

$$\begin{aligned} H^2 - K &= \left( \frac{gE - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} \right)^2 - \left( \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{(2gE - 2fF)^2}{4(EG - F^2)^2} - \left( \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{g^2E^2 - 2fgEF + f^2F^2 - (eg - f^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{g^2E^2 - 2fEgF + f^2F^2 - egEG + f^2EG - f^2F^2 + egF^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{g^2E^2 - 2eFgF - eGgE + fEfgG + egF^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{g^2E^2 - 2egF^2 - g^2E^2 + egF^2 + egF^2}{(EG - F^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, os pontos para os quais os coeficientes de (1.10) se anulam simultaneamente são umbílicos

Reciprocamente, se  $q$  é umbílico, então  $e = \lambda E$ ,  $f = \lambda F$  e  $g = \lambda G$  em  $(u, v)$  (Afirmção 2). Logo,  $gF - fG = \lambda GF - \lambda FG = 0$  e  $gE - eG = \lambda GE - \lambda EG = 0$  e, pela Afirmção 1,  $fE - eF = 0$ , mostrando que a EDB (1.10) é do tipo 2.

Por fim, mostraremos que o conjunto discriminante  $\Delta$  da equação (1.10) corresponde aos pontos umbílicos de  $S$ . De fato, considere uma parametrização local  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  tal que  $F \equiv 0$  em  $U$ . Assim, a EDB (1.10) pode ser reescrita como

$$-fGdv^2 + (gE - eG)dudv + fEdu^2 = 0, \quad (1.13)$$

e sua função discriminante definida em (1.5) é dada por

$$\delta(u, v) = (gE - eG)^2 + f^2EG.$$

Como  $E, G > 0$ , temos  $\delta(u, v) = 0$  se, e somente se,  $gE - eG = f = 0$ . Neste caso,

$$K = \frac{eg}{EG} = \frac{egE}{E^2G} = \frac{e^2G}{E^2G} = \frac{e^2}{E^2}$$

e

$$H = \frac{eG + gE}{2EG} = \frac{2eG}{2EG} = \frac{e}{E}.$$

Consequentemente,  $H^2 - K = 0$ , o que ocorre se, e somente se,  $(u, v)$  corresponde a um ponto umbílico de  $S$ . Reciprocamente, se  $q = \phi(u, v)$  é um ponto umbílico então  $H^2 - K = 0$  em  $(u, v)$ . Cálculos diretos mostram que isso implica em

$$(gE - eG)^2 + 4f^2EG = 0,$$

donde temos  $gE - eG = f = 0$ , já que  $E, G > 0$ . Logo,  $\delta(u, v) = 0$ . Portanto o conjunto discriminante  $\Delta$  da EDB (1.13) corresponde aos pontos umbílicos de  $S$ .

**Exemplo 1.2.2. (Curvas assintóticas)** Seja  $S$  uma superfície regular. Se  $q \in S$  é um ponto hiperbólico, então existem duas direções em  $q$ , chamadas direções assintóticas, ao longo das quais a curvatura normal é zero. Se  $q$  é um ponto parabólico, então tais direções coincidem, e se  $q$  é um ponto elíptico, então não existem direções assintóticas em  $q$ . Uma curva assintótica de  $S$  é uma curva conexa e regular  $C \subset S$  tal que em cada ponto  $p \in C$  a direção tangente a  $C$  é uma direção assintótica. Dada uma parametrização local  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $q = \phi(u, v)$ , a equação diferencial das linhas assintóticas é dada pela EDB

$$gdv^2 + 2fdudv + edu^2 = 0, \quad (1.14)$$

onde  $e, f$  e  $g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental em  $(u, v)$ .

A EDB (1.14) restrita a uma região hiperbólica é do tipo 1. De fato, sabemos que em pontos hiperbólicos

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} < 0,$$

implicando que a função discriminante de (1.14) dada por  $\delta(u, v) = f^2 - eg$  não é nula. Logo, os coeficientes  $e, f$  e  $g$  de (1.14) não se anulam simultaneamente em uma região hiperbólica.

Por outro lado, a EDB (1.14) é do tipo 2 se, e somente se,  $S$  tem pontos planares. De fato, sabemos que um ponto planar é um ponto umbílico tal que  $K = 0$ , ou seja, as curvaturas principais nesse ponto são nulas. Logo,  $K_n = \lambda = 0$ . Pela Afirmação 2 do exemplo anterior,  $e = f = g = 0$ , ou seja, a EDB (1.14) é do tipo 2. Reciprocamente, se (1.14) é do tipo 2, então  $e = f = g = 0$  em algum ponto  $(u, v) \in U$  e, assim,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$$

em  $(u, v)$ . Logo,  $q = \phi(u, v)$  é planar ou parabólico. Mostraremos que esse ponto é planar. Como  $e = f = g = 0$ , a curvatura média em  $(u, v)$  é dada por

$$H = \frac{Eg - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Logo, as curvaturas principais  $K_1 = H - \sqrt{H^2 - K}$  e  $K_2 = H + \sqrt{H^2 - K}$  são nulas. Portanto,  $q$  é planar.

Concluimos este exemplo mostrando que o conjunto discriminante  $\Delta$  da EDB (1.14) corresponde ao conjunto dos pontos parabólicos e planares de  $S$ . Com efeito, temos  $\delta(u, v) = f^2 - eg = 0$  se, e somente se,  $K = 0$ . Isso nos mostra que  $(u, v) \in \Delta$  se, e somente se,  $q = \phi(u, v)$  é um ponto parabólico ou planar.

# Teoria de grupos de Lie

Quando falamos em simetria não podemos ignorar a noção desse conceito ligada à observação e, na maioria das vezes, ligada às formas e proporções presentes na arte e na natureza. Muitas discussões sobre o assunto concluem que o conceito de simetria está ligado à beleza, à perfeição e aos padrões geométricos encontrados na fauna, na flora e nas produções humanas em áreas como a pintura, a escultura e a arquitetura.

Na matemática, uma simetria de um sistema é uma transformação do sistema que preserva alguma estrutura particular. No caso do plano, as simetrias são caracterizadas pelas isometrias, que são transformações que preservam distância. Em particular, toda isometria linear é descrita por uma rotação em torno da origem ou por uma reflexão em torno de uma reta passando pela origem.



Figura 2.1: Simetrias de reflexão.



Figura 2.2: Simetrias de rotação de ângulo  $\frac{2\pi}{5}$ .

A teoria clássica usada para descrever simetrias é a teoria de representação de grupos, cujas técnicas simplificam a análise do sistema em questão. Uma dessas técnicas é a teoria invariante de grupos de Lie e seus algoritmos para a obtenção de geradores, como veremos ainda neste capítulo.

Na Seção 2.1, introduziremos o conceito de grupo de Lie linear, que é um grupo de matrizes com propriedades algébricas e topológicas, cuja compacidade será essencial para a obtenção dos resultados. Na Seção 2.2, introduziremos os conceitos de ação e representação linear de um grupo de Lie em um espaço vetorial de dimensão finita. Na Seção 2.3, garantiremos a existência e a unicidade da chamada integral de Haar, invariante pela ação de um grupo de Lie  $\Gamma$  e usada para mostrar que, sem perda de generalidade,  $\Gamma$  está contido no grupo ortogonal  $O(n)$ . Na Seção 2.4, revelaremos a existência de uma base finita para o anel das funções polinomiais  $\Gamma$ -invariantes (Teorema 2.4.4) e a existência de um conjunto finito de geradores para o módulo das aplicações polinomiais  $\Gamma$ -equivariantes sobre esse anel (Teorema 2.4.12). Na Seção 2.5, descreveremos um algoritmo que constrói um conjunto de geradores para o módulo das aplicações polinomiais  $\Gamma_\sigma$ -equivariantes sobre o anel dos invariantes, sendo  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  um epimorfismo de grupos.

Da Seção 2.1 à Seção 2.4, nossa abordagem será baseada em [11], e na Seção 2.5 nossas referências serão [2, 3].

## 2.1 Grupos de Lie

Denotaremos por  $GL_n(\mathbb{R})$  o grupo de todas as matrizes quadradas invertíveis de ordem  $n$  com entradas reais. Como o conjunto  $M_n(\mathbb{R})$  das matrizes quadradas de ordem  $n$  com entradas reais pode ser identificado com  $\mathbb{R}^{n^2}$ , temos em  $M_n(\mathbb{R})$  uma estrutura topológica bem estabelecida e, assim, podemos falar em subconjuntos abertos e fechados de  $M_n(\mathbb{R})$ . Diremos que um subgrupo  $\Gamma$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  é fechado se  $\Gamma$  é um subconjunto fechado de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Note que  $GL_n(\mathbb{R})$  é um subconjunto aberto de  $M_n(\mathbb{R})$ . De fato, observe que a função

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

é contínua e  $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , ou seja,  $GL_n(\mathbb{R})$  é a imagem inversa de um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.1.** *Um subgrupo  $\Gamma$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  é um grupo de Lie se  $\Gamma$  for um subconjunto fechado de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Além disso,  $\Gamma$  é um grupo de Lie compacto se  $\Gamma$  é um subconjunto compacto de  $M_n(\mathbb{R})$ .*

Note que todo grupo de Lie  $\Gamma$  é fechado por definição. Logo,  $\Gamma$  é compacto se, e somente se, as entradas das matrizes que definem  $\Gamma$  são limitadas.

A definição de grupo de Lie é bem mais geral do que a apresentada aqui em nosso trabalho. A definição anterior se refere a um grupo de Lie linear, que é um caso particular da definição de grupo de Lie. Entretanto, todo grupo de Lie compacto, no sentido mais geral, é topologicamente isomorfo a um grupo de Lie linear (veja [4]). Para nossos propósitos, estudaremos grupos de Lie lineares, mencionados aqui apenas como grupos de Lie.

Agora, apresentaremos alguns exemplos de grupos de Lie. Denotaremos por  $I_n$  a matriz identidade de  $M_n(\mathbb{R})$ .

**Exemplo 2.1.2.** O grupo ortogonal  $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); AA^t = I_n\}$ , onde  $A^t$  denota a matriz transposta da matriz  $A$ , é um grupo de Lie. De fato, primeiro mostremos que  $O(n)$  é um subgrupo de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Claramente  $I_n \in O(n)$ . Note que se  $A \in O(n)$ , então  $\det(A) = \pm 1$ , donde segue que  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . Em outras palavras,  $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ . Ainda, se  $A, B \in O(n)$ , então  $A^{-1} = A^t$  e  $B^{-1} = B^t$ . Logo,

$$AB^{-1}(AB^{-1})^t = AB^{-1}(B^{-1})^t A^t = AB^{-1}BA^t = AI_nA^{-1} = I_n.$$

Portanto  $O(n)$  é um subgrupo de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Agora, defina a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto AA^t. \end{aligned}$$

Temos que  $\varphi$  é contínua e  $O(n) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ , sendo  $\{I_n\}$  um subconjunto fechado de  $M_n(\mathbb{R})$ , pois  $M_n(\mathbb{R})$  é Hausdorff. Portanto,  $O(n)$  é fechado em  $M_n(\mathbb{R})$ . Como  $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ , segue que  $O(n)$  é um subconjunto fechado de  $GL_n(\mathbb{R})$  e, portanto,  $O(n)$  é um grupo de Lie.

**Exemplo 2.1.3.** O grupo ortogonal especial  $SO(n) = \{A \in O(n); \det(A) = 1\}$  é um grupo de Lie. Note que  $SO(n)$  é um grupo, pois  $I_n \in SO(n)$  e se  $A, B \in SO(n)$ , então

$$\det(AB^{-1}) = \det(A) \det(B^{-1}) = \det(A) \frac{1}{\det(B)} = 1.$$

Logo,  $AB^{-1} \in SO(n)$  e, portanto,  $SO(n)$  é um subgrupo de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Agora, observe que  $SO(n) = O(n) \cap \det^{-1}(\{1\})$ , que é um subconjunto fechado de  $M_n(\mathbb{R})$ , pois é a interseção de subconjuntos fechados. Como  $SO(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ , segue que  $SO(n)$  é um subconjunto fechado de  $GL_n(\mathbb{R})$  e, portanto, é um grupo de Lie.

No caso particular em que  $n = 2$  temos

$$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$



De fato, claramente o conjunto de todas as rotações planares está contido de  $SO(2)$ . Agora, se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2),$$

então  $\det(A) = 1$ . Além disso,  $A^{-1} = A^t$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

donde concluimos que  $a = d$  e  $b = -c$ . Logo,

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Como  $\det(A) = a^2 + c^2 = 1$ , segue que existe  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $a = \cos(\theta)$  e  $c = \sin(\theta)$ , provando o desejado.

**Exemplo 2.1.4.** Todo grupo finito é isomorfo a um grupo de Lie. De fato, seja  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  um grupo finito. Denote por  $S(G)$  o grupo das permutações de  $G$  e por  $T(G)$  o grupo de todas as translações de  $G$ , isto é,  $\varphi \in T(G)$  se, e somente se,  $\varphi = \delta_a$ , para algum  $a \in G$ , onde  $\delta_a : G \rightarrow G$  é definida por  $\delta_a(x) = ax$ , para todo  $x \in G$ . Pelo teorema de Cayley

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow T(G) \subseteq S(G) \\ g &\longmapsto \delta_g \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos. Agora, identifique cada permutação de  $T(G)$  com uma matriz de ordem  $n$  obtida pela permutação das colunas (ou linhas) da matriz identidade. Assim,  $T(G)$  é identificado com um subgrupo de  $GL_n(\mathbb{R})$ , que é fechado, pois  $T(G)$  é finito e  $GL_n(\mathbb{R})$  é Hausdorff. Portanto,  $G$  é isomorfo a um grupo de Lie.

**Exemplo 2.1.5.** Seja  $\mathbb{Z}_n$  o grupo cíclico aditivo de ordem  $n$ . Podemos identificar  $\mathbb{Z}_n$  com o grupo das matrizes de ordem 2 gerado pela rotação de ângulo  $\frac{2\pi}{n}$ , denotada por  $R_{\frac{2\pi}{n}}$ . Como  $\mathbb{Z}_n$  é finito, segue do exemplo anterior que  $\mathbb{Z}_n$  é um grupo de Lie.

**Exemplo 2.1.6.** O grupo diedral  $D_n$  de ordem  $2n$  é gerado por  $\mathbb{Z}_n$  juntamente com um elemento de ordem 2 que não comuta com  $\mathbb{Z}_n$ . Neste caso,  $D_n$  é isomorfo ao grupo de matrizes  $\Gamma = \langle R_{\frac{2\pi}{n}}, \kappa \rangle$ , gerado por  $R_{\frac{2\pi}{n}}$  e  $\kappa$ , onde

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Como  $D_n$  é finito, segue que  $D_n$  é um grupo de Lie.

Todos os exemplos apresentados anteriormente são exemplos de grupos de Lie compactos.

## 2.2 Ação e Representação

A representação de um grupo de Lie é uma forma de representar os elementos do grupo como operadores lineares. Veremos nesta seção que toda ação de um grupo de Lie em um espaço vetorial de dimensão finita está associada a uma representação e vice-versa.

**Definição 2.2.1.** *Sejam  $\Gamma$  um grupo de Lie e  $V$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Diremos que  $\Gamma$  age linearmente em  $V$  se existe uma aplicação contínua, chamada ação ,*

$$\begin{aligned}\phi: \Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (\gamma, v) &\longmapsto \gamma.v\end{aligned}$$

tal que

- i)  $e.v = v$ , para todo  $v \in V$ , onde  $e \in \Gamma$  é o elemento neutro do grupo  $\Gamma$ ;*
- ii) Para todo  $\gamma \in \Gamma$  a aplicação  $\rho(\gamma) : V \rightarrow V$  dada por  $\rho(\gamma)v = \gamma.v$  é linear;*
- iii) Se  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ , então*

$$\rho(\gamma_1) \circ \rho(\gamma_2) = \rho(\gamma_1 * \gamma_2),$$

onde  $*$  denota a operação do grupo  $\Gamma$ .

Dos itens *i)* e *ii)* da definição anterior segue que  $\rho(e) = Id_V$ , onde  $Id_V$  denota o operador identidade em  $V$ . Note também que  $\rho(\gamma)$  é invertível para todo  $\gamma \in \Gamma$ . De fato, se  $\gamma \in \Gamma$ , então de *iii)* segue que

$$\rho(\gamma) \circ \rho(\gamma^{-1}) = \rho(\gamma * \gamma^{-1}) = \rho(e) = Id_V$$

e

$$\rho(\gamma^{-1}) \circ \rho(\gamma) = \rho(\gamma^{-1} * \gamma) = \rho(e) = Id_V.$$

Logo,  $\rho(\gamma) \in GL(V)$ , onde  $GL(V)$  denota o grupo de todos os operadores lineares invertíveis definidos em  $V$ . A aplicação

$$\begin{aligned}\rho: \Gamma &\longrightarrow GL(V) \\ \gamma &\longmapsto \rho(\gamma)\end{aligned}$$

é chamada de representação de  $\Gamma$  em  $V$ .

**Exemplo 2.2.2.** Todo grupo de Lie  $\Gamma$  é um subgrupo de  $GL_n(\mathbb{R})$ , para algum  $n$ . Uma ação natural de  $\Gamma$  em  $V \cong \mathbb{R}^n$  é dada pela multiplicação de matriz por vetor

$$\begin{aligned}\phi: \Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (A, v) &\longmapsto Av.\end{aligned}$$

**Exemplo 2.2.3.** Para todo  $n \in \mathbb{Z}$  podemos definir a ação do círculo  $S^1$  em  $V = \mathbb{C}$  por

$$\begin{aligned} \phi : S^1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\longmapsto e^{in\theta} z. \end{aligned}$$

De fato,  $\phi$  é contínua, pois é o produto de funções contínuas. Além disso, dados  $\theta_1, \theta_2 \in S^1$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos

- i)  $0 \cdot z_1 = e^0 z_1 = z_1$ ;
- ii)  $\rho(\theta_1)(\lambda z_1 + z_2) = e^{in\theta_1}(\lambda z_1 + z_2) = \lambda e^{in\theta_1} z_1 + e^{in\theta_1} z_2 = \lambda \rho(\theta_1) z_1 + \rho(\theta_1) z_2$ ;
- iii)  $\rho(\theta_1)(\rho(\theta_2) z_1) = \rho(\theta_1) e^{in\theta_2} z_1 = e^{in\theta_1} (e^{in\theta_2} z_1) = e^{in(\theta_2 + \theta_1)} z_1 = \rho(\theta_1 + \theta_2) z_1$ .

Logo,  $\phi$  é uma ação de  $S^1$  em  $\mathbb{C}$ .

**Exemplo 2.2.4.** Toda ação de  $S^1 \cong SO(2)$  em  $\mathbb{C}$  dada no exemplo anterior se estende naturalmente para uma ação de  $O(2)$  em  $\mathbb{C}$  se considerarmos  $\kappa \cdot z = \bar{z}$ , onde  $\kappa$  é a matriz definida em (2.1) e  $\bar{z}$  denota o conjugado de  $z$ .

**Exemplo 2.2.5.** Todo grupo de Lie  $\Gamma \subseteq GL_n(\mathbb{R})$  age no espaço das matrizes  $M_n(\mathbb{R})$  por semelhança, isto é,

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma \times M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ (\gamma, A) &\mapsto \gamma A \gamma^{-1} \end{aligned}$$

define uma ação de  $\Gamma$  em  $M_n(\mathbb{R})$ . De fato, dados  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos

- i)  $e \cdot A = I_n A I_n^{-1} = A$ ;
- ii)  $\rho(\gamma_1)(\lambda A + B) = \gamma_1(\lambda A + B)\gamma_1^{-1} = \lambda \gamma_1 A \gamma_1^{-1} + \gamma_1 B \gamma_1^{-1} = \lambda \rho(\gamma_1) A + \rho(\gamma_1) B$ ;
- iii)  $\rho(\gamma_1)(\rho(\gamma_2) A) = \rho(\gamma_1)(\gamma_2 A \gamma_2^{-1}) = \gamma_1(\gamma_2 A \gamma_2^{-1})\gamma_1^{-1} = \gamma_1 \gamma_2 A (\gamma_1 \gamma_2)^{-1} = \rho(\gamma_1 \gamma_2) A$ ,

para todo  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .

## 2.3 Integral de Haar

O resultado principal desta seção nos diz que dado um grupo de Lie compacto  $\Gamma$  agindo em  $V$ , existe um produto interno em  $V$  que torna  $\Gamma$  um subgrupo do grupo ortogonal  $O(n)$ . Esse fato será provado usando a integral de Haar, uma importante ferramenta da teoria de representação de grupos que é definida de forma abstrata.

**Definição 2.3.1.** *Sejam  $\Gamma$  um grupo de Lie e  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. A operação  $\int_{\Gamma} f d\gamma$ , também denotada por  $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$ , é uma integral em  $\Gamma$  se satisfaz as seguintes condições:*

i) *Linearidade*, isto é,  $\int_{\Gamma} (\lambda f + \mu g) d\gamma = \lambda \int_{\Gamma} f d\gamma + \mu \int_{\Gamma} g d\gamma$ , onde  $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

ii) *Positividade*, isto é, se  $f(\gamma) \geq 0$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ , então  $\int_{\Gamma} f d\gamma \geq 0$ .

Diremos que esta operação é uma integral de Haar se além de satisfazer i) e ii), ela satisfaz:

iii) *Invariância por translação*, isto é,  $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$ , para todo  $\delta \in \Gamma$  fixo.

Quando  $\Gamma$  é compacto,  $\int_{\Gamma} 1 d\gamma$  é finita e neste caso a integral de Haar também é invariante por translação à direita, isto é,

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma),$$

para todo  $\delta \in \Gamma$  fixo. A demonstração desses fatos e da existência e unicidade da integral de Haar pode ser encontrado em [14, Chapter I, Section 3].

**Exemplo 2.3.2.** Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie finito de ordem  $|\Gamma|$ . Para qualquer função contínua  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  a operação

$$\int_{\Gamma} f d\gamma \equiv \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \quad (2.2)$$

é uma integral de Haar. De fato, sejam  $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas e sejam  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\lambda f + \mu g) d\gamma &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} (\lambda f + \mu g)(\gamma) \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} (\lambda f(\gamma) + \mu g(\gamma)) \\ &= \lambda \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) + \mu \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma) \\ &= \lambda \int_{\Gamma} f d\gamma + \mu \int_{\Gamma} g d\gamma. \end{aligned}$$

Se  $f(\gamma) \geq 0$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ , então  $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \geq 0$ , implicando na positividade da operação.

Agora, seja  $\delta \in \Gamma$  fixo. Então

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\alpha \in \Gamma} f(\alpha) = \int_{\alpha \in \Gamma} f(\alpha) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma),$$

onde a segunda igualdade se verifica pelo fato de  $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$  dada por  $\phi(\gamma) = \delta\gamma$  ser um isomorfismo. Portanto, a operação definida em (2.2) é uma integral de Haar.

**Exemplo 2.3.3.** Considere  $\Gamma = SO(2)$ . Toda função contínua  $f : SO(2) \rightarrow \mathbb{R}$  determina uma única função contínua  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de período  $2\pi$  dada por  $\tilde{f}(\theta) = f(R_\theta)$ . Então a integral de Haar em  $SO(2)$  é dada por

$$\int_{\Gamma} f d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta. \quad (2.3)$$

De fato, sejam  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e  $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . Como existem únicas funções contínuas  $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de período  $2\pi$  tais que  $\tilde{f}(\theta) = f(R_\theta)$  e  $\tilde{g}(\theta) = g(R_\theta)$ , existe uma única função contínua  $\lambda\tilde{f} + \mu\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de período  $2\pi$  tal que  $(\lambda\tilde{f} + \mu\tilde{g})(\theta) = (\lambda f + \mu g)(R_\theta)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\lambda f + \mu g) d\gamma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda\tilde{f} + \mu\tilde{g})(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda\tilde{f}(\theta) + \mu\tilde{g}(\theta)) d\theta \\ &= \lambda \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta + \mu \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\theta) d\theta \\ &= \lambda \int_{\Gamma} f d\gamma + \mu \int_{\Gamma} g d\gamma. \end{aligned}$$

Se  $f(R_\theta) \geq 0$  para todo  $R_\theta \in SO(2)$ , então  $\tilde{f}(\theta) \geq 0$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  e, pela positividade da integral de Riemann, segue que  $\int_{\Gamma} f d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta \geq 0$ . Agora, seja  $R_\gamma \in SO(2)$  fixado. Então

$$\begin{aligned} \int_{\theta \in \Gamma} f(R_\gamma R_\theta) &= \int_{\theta \in \Gamma} f(R_{\gamma+\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\gamma + \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta \\ &= \int_{\theta \in \Gamma} f(R_\theta), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue do fato de  $\tilde{f}$  ser  $2\pi$ -periódica. Portanto, a operação definida em (2.3) é uma integral de Haar.

O próximo resultado nos permite reconhecer um grupo de Lie compacto como um subgrupo fechado de  $O(n)$ .

**Teorema 2.3.4.** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita  $n \geq 1$  e seja  $[\rho(\gamma)]$  a matriz associada ao operador  $\rho(\gamma) \in GL(V)$  com relação a alguma base ortonormal  $\beta$  de  $V$ . Então existe um produto interno em  $V$  tal que para todo  $\gamma \in \Gamma$ ,  $[\rho(\gamma)] \in O(n)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  um produto interno em  $V$ . Para cada  $u, v \in V$ , considere a função contínua

$$\begin{aligned} f_{u,v} : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto \langle \rho(\gamma)u, \rho(\gamma)v \rangle \end{aligned}$$

e defina a função  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\langle u, v \rangle_\Gamma = \int_{\gamma \in \Gamma} f_{u,v}(\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho(\gamma)u, \rho(\gamma)v \rangle,$$

onde a integral representa uma integral de Haar. Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto interno em  $V$  e a integral de Haar é linear e positiva, segue que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  é um produto interno em  $V$ . Mostremos então que para todo  $\gamma \in \Gamma$ ,  $[\rho(\gamma)] \in O(n)$  com relação a esse produto interno. Para isso, considere  $u, v \in V$  quaisquer e fixe  $\gamma \in \Gamma$ . Como  $\Gamma$  é compacto, a integral de Haar é invariante por traslação à direita. Logo

$$\begin{aligned} \langle \rho(\gamma)u, \rho(\gamma)v \rangle_\Gamma &= \int_{\delta \in \Gamma} f_{\rho(\gamma)u, \rho(\gamma)v}(\delta) \\ &= \int_{\delta \in \Gamma} \langle \rho(\delta)(\rho(\gamma)u), \rho(\delta)(\rho(\gamma)v) \rangle \\ &= \int_{\delta \in \Gamma} \langle \rho(\delta\gamma)u, \rho(\delta\gamma)v \rangle \\ &= \int_{\delta \in \Gamma} \langle \rho(\delta)u, \rho(\delta)v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle_\Gamma, \end{aligned}$$

onde a invariância da integral foi usada na quarta igualdade. Assim,

$$\langle u, \rho(\gamma)^* \rho(\gamma)v \rangle_\Gamma = \langle \rho(\gamma)u, \rho(\gamma)v \rangle_\Gamma = \langle u, v \rangle_\Gamma,$$

onde  $\rho(\gamma)^*$  denota o operador adjunto de  $\rho(\gamma)$ . Como  $\gamma \in \Gamma$  e  $u, v \in V$  são arbitrários, com relação à base ortonormal  $\beta$  de  $V$  temos  $[\rho(\gamma)]^t[\rho(\gamma)] = Id_n$ , para todo  $\gamma \in \Gamma$ , ou seja,  $[\rho(\gamma)] \in O(n)$ .  $\square$

## 2.4 Teoria invariante

Nesta seção introduziremos os conceitos de funções invariantes e de aplicações equivariantes segundo a ação de um grupo de Lie. Enunciaremos na Subseção 2.4.1 o Teorema de Hilbert-Weyl, que garante a existência de uma base finita para o anel das funções polinomiais invariantes, e o Teorema de Schwarz, que afirma que o anel dos germes de funções invariantes também pode ser gerado por essa base. Além disso, apresentaremos a versão equivariante desses dois teoremas na Subseção 2.4.2.

### 2.4.1 Funções invariantes

Começaremos com a definição de germes de aplicações.

**Definição 2.4.1.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finita e  $v_0 \in V$ . Consideramos o conjunto de todas as aplicações  $f : U \subseteq V \rightarrow W$  suaves definidas em alguma vizinhança  $U$  do ponto  $v_0$ . Diremos que as aplicações  $f_1 : U_1 \subseteq V \rightarrow W$  e  $f_2 : U_2 \subseteq V \rightarrow W$  desse conjunto estão relacionadas se existe uma vizinhança  $U_0 \subseteq U_1 \cap U_2$  de  $v_0$  tal que  $f_1|_{U_0}$  e  $f_2|_{U_0}$  coincidem. As classes de equivalência por essa relação são chamadas germes em  $v_0$ . Se  $f$  é um representante de um germe em  $v_0$ ,  $f$  é denotado por  $f : (V, v_0) \rightarrow W$ .*

**Definição 2.4.2.** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie agindo em um espaço vetorial  $V$  pela ação “.”. Uma função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\Gamma$ -invariante se*

$$f(\gamma \cdot x) = f(x),$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $x \in V$ .

Denotaremos o conjunto de todas as funções polinomiais  $\Gamma$ -invariantes por  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  e dos germes de funções suaves  $f : (V, 0) \rightarrow \mathbb{R}$   $\Gamma$ -invariantes por  $\varepsilon_V(\Gamma)$ .

**Definição 2.4.3.** *Um subconjunto finito  $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$  de funções polinomiais  $\Gamma$ -invariantes gera  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  se todo  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$  pode ser escrito em função de  $u_1, u_2, \dots, u_s$ , ou seja, se existe uma função polinomial  $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$f(x) = h(u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x)),$$

para todo  $x \in V$ .

Este conjunto finito, que não é necessariamente único, é chamado base de Hilbert para  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  e escrevemos  $\mathcal{P}_V(\Gamma) = \langle u_1, u_2, \dots, u_s \rangle$ .

**Teorema 2.4.4.** *(Teorema de Hilbert-Weyl) Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto agindo em  $V$ . Então existe uma base de Hilbert para  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Veja [11, Chapter XII, Theorem 4.2].  $\square$

**Teorema 2.4.5.** (*Teorema de Schwarz*) Sejam  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto agindo em  $V$  e  $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$  uma base de Hilbert para  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Se  $f \in \varepsilon_V(\Gamma)$ , então existe um germe de função suave  $h : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = h(u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x)),$$

para todo  $x \in V$ .

*Demonstração.* Veja [11, Chapter XII, Theorem 4.3].  $\square$

Devido ao Teorema de Schwarz nos restringiremos apenas ao caso polinomial. Os próximos exemplos ilustram as bases de Hilbert para  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$  quando  $\Gamma$  são os grupos  $S^1$ ,  $\mathbb{Z}_n$  e  $D_n$ .

**Exemplo 2.4.6.** Considere  $\Gamma = S^1$  agindo em  $\mathbb{C}$  segundo a ação  $\theta.z = e^{i\theta}z$ . Mostremos que se  $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(S^1)$ , então existe uma função polinomial  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(z) = h(z\bar{z})$ .

Escrevendo  $f$  nas coordenadas  $z$  e  $\bar{z}$ , temos

$$f(z) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Como  $f(e^{i\theta}z) = f(z)$ , para todo  $\theta \in S^1$  e todo  $z \in \mathbb{C}$ , temos

$$\sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum a_{\alpha\beta} (e^{i\theta}z)^\alpha (\overline{e^{i\theta}z})^\beta = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta.$$

Então,  $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)}$ , para todo  $\theta \in S^1$ , o que implica que  $a_{\alpha\beta} = 0$  ou  $\alpha = \beta$ . Portanto,

$$f(z) = \sum a_\alpha (z\bar{z})^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Como  $f$  é uma função a valores reais, temos  $f(z) = \overline{f(z)}$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ , ou seja,  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ . Definindo  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $h(x) = \sum a_\alpha x^\alpha$ , temos  $f(z) = h(z\bar{z})$ . Neste caso,  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(S^1) = \langle z\bar{z} \rangle$ .

**Exemplo 2.4.7.** Considere  $\Gamma = \mathbb{Z}_n$ , gerado pela rotação  $R_\theta$  de ângulo  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ , agindo em  $\mathbb{C}$  segundo a ação  $\theta.z = e^{i\theta}z$ . Mostremos que se  $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ , então existe uma função polinomial  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(z) = h(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n, i(z^n - \bar{z}^n))$ .

Escreva novamente  $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$  nas coordenadas  $z$  e  $\bar{z}$  como em (2.4). Pela  $\mathbb{Z}_n$ -invariância de  $f$  temos que

$$\sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum a_{\alpha\beta} (e^{i\theta}z)^\alpha (\overline{e^{i\theta}z})^\beta = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta,$$



para todo  $z \in \mathbb{C}$  e para  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ . Então  $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)}$ , o que implica que  $a_{\alpha\beta} = 0$  ou  $\alpha \equiv \beta \pmod{n}$ . Como  $f$  é uma função a valores reais, temos  $f(z) = \overline{f(z)}$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ , ou seja,

$$\sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum \overline{a_{\alpha\beta}} z^\beta \bar{z}^\alpha.$$

Assim,  $a_{\beta\alpha} = \overline{a_{\alpha\beta}}$ . Evidenciando  $z\bar{z}$  na expressão (2.4) obtemos

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta z^{\alpha-\beta} + \sum_{\alpha < \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\alpha \bar{z}^{\beta-\alpha} = \sum_{\alpha \geq \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta z^{\alpha-\beta} + \sum_{\alpha > \beta} a_{\beta\alpha} (z\bar{z})^\beta \bar{z}^{\alpha-\beta}.$$

Como  $a_{\beta\alpha} = \overline{a_{\alpha\beta}}$ , segue que

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta z^{\alpha-\beta} + \sum_{\alpha > \beta} \overline{a_{\alpha\beta}} (z\bar{z})^\beta \bar{z}^{\alpha-\beta}.$$

Escrevendo  $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + ic_{\alpha\beta}$ , com  $b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ , obtemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\alpha \geq \beta} (b_{\alpha\beta} + ic_{\alpha\beta}) (z\bar{z})^\beta z^{\alpha-\beta} + \sum_{\alpha > \beta} (b_{\alpha\beta} - ic_{\alpha\beta}) (z\bar{z})^\beta \bar{z}^{\alpha-\beta} \\ &= a_{\alpha\alpha} (z\bar{z})^\alpha + \sum_{\alpha > \beta} b_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta (z^{\alpha-\beta} + \bar{z}^{\alpha-\beta}) + i \sum_{\alpha > \beta} c_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta (z^{\alpha-\beta} - \bar{z}^{\alpha-\beta}). \end{aligned}$$

Como  $\alpha \equiv \beta \pmod{n}$ , temos que  $\alpha - \beta = ln$ , para algum  $l \in \mathbb{N}$ . Então

$$f(z) = a_{\alpha\alpha} (z\bar{z})^\alpha + \sum_{\beta, l \in \mathbb{N}} b_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta (z^{ln} + \bar{z}^{ln}) + \sum_{\beta, l \in \mathbb{N}} c_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta i (z^{ln} - \bar{z}^{ln}),$$

onde  $\alpha = \beta + ln$  e  $b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ . Das identidades

$$z^{ln} + \bar{z}^{ln} = (z^n + \bar{z}^n)(z^{(l-1)n} + \bar{z}^{(l-1)n}) - (z\bar{z})^n (z^{(l-2)n} + \bar{z}^{(l-2)n})$$

e

$$i(z^{ln} - \bar{z}^{ln}) = i(z^n - \bar{z}^n)(z^{(l-1)n} + \bar{z}^{(l-1)n}) + i(z\bar{z})^n (z^{(l-2)n} - \bar{z}^{(l-2)n}),$$

temos que os termos  $(z^{ln} + \bar{z}^{ln})$  e  $i(z^{ln} - \bar{z}^{ln})$  são irredutíveis para  $l \geq 2$ . Portanto, podemos escrever  $f$  na forma

$$f(z) = \sum_{j,k,t} A_{jkt} (z\bar{z})^j (z^n + \bar{z}^n)^k [i(z^n - \bar{z}^n)]^t,$$

para  $i, j, k \in \mathbb{N}$  e  $A_{ijk} \in \mathbb{R}$ . Definindo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $h(x, y, z) = \sum_{j,k,t} A_{jkt} x^j y^k z^t$ , com  $A_{jkt} \in \mathbb{R}$ , obtemos o desejado, concluindo que  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n) = \langle z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n, i(z^n - \bar{z}^n) \rangle$ .

**Exemplo 2.4.8.** Considere  $\Gamma = D_n$ , gerado por  $\mathbb{Z}_n$  e pela reflexão  $\kappa$  dada em (2.1), agindo em  $\mathbb{C}$  como  $\theta.z = e^{i\theta}z$  e  $\kappa.z = \bar{z}$ . Mostremos que se  $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$ , então existe uma função polinomial  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(z) = p(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n)$ .

Primeiramente note que se  $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$ , então  $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$  e  $f(\kappa.z) = f(z)$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Do exemplo anterior temos que

$$f(z) = h(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n, i(z^n - \bar{z}^n)),$$

para a função polinomial  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida no exemplo anterior. Impondo a invariância de  $f$  com respeito a  $\kappa$  temos

$$\sum_{j,k,t} A_{jkt} (z\bar{z})^j (z^n + \bar{z}^n)^k [i(-z^n + \bar{z}^n)]^t = \sum_{j,k,t} A_{jkt} (z\bar{z})^j (z^n + \bar{z}^n)^k [i(z^n - \bar{z}^n)]^t,$$

o que implica em

$$(z^n - \bar{z}^n)^t = (-1)^t (z^n - \bar{z}^n)^t,$$

ou seja,  $t = 2l$ , para algum  $l \in \mathbb{N}$ . Como  $(z^n - \bar{z}^n)^2 = (z^n + \bar{z}^n)^2 - (z\bar{z})^{2n}$ , segue que

$$f(z) = \sum_{j,k,l} A_{jkl} (z\bar{z})^j (z^n + \bar{z}^n)^k [i(z^n - \bar{z}^n)]^{2l} = \sum_{j,k} B_{jk} (z\bar{z})^j (z^n + \bar{z}^n)^k,$$

com  $B_{jk} \in \mathbb{R}$ . Logo,  $f(z) = p(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n)$ , para alguma função polinomial  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Portanto,  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n) = \langle z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n \rangle$ .

## 2.4.2 Aplicações equivariantes

O objetivo desta subseção é introduzir o conceito de aplicações equivariantes e apresentar as versões equivariantes dos Teoremas de Hilbert-Weyl e de Schwarz, dados nos Teoremas 2.4.12 e 2.4.13, respectivamente. Para o que segue,  $V$  e  $W$  são  $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais de dimensão finita.

**Definição 2.4.9.** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie agindo em  $V$  e  $W$  segundo as ações “.” e “\*”, respectivamente. Dizemos que uma aplicação  $f : V \rightarrow W$  é  $\Gamma$ -equivariante se*

$$f(\gamma.x) = \gamma * f(x),$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $x \in V$ . Neste caso,  $\gamma \in \Gamma$  é chamado de simetria de  $f$ .

Denotaremos o conjunto de todas as aplicações polinomiais  $\Gamma$ -equivariantes por  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  e o conjunto dos germes de aplicações suaves  $f : (V, 0) \rightarrow W$   $\Gamma$ -equivariantes por  $\vec{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$ . No caso particular em que  $V = W$  e as ações “.” e “\*” são iguais denotaremos  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  simplesmente por  $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ .

**Lema 2.4.10.** *Sejam  $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  e  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Então  $fg \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $x \in V$ , temos

$$(fg)(\gamma.x) = f(\gamma.x)g(\gamma.x) = f(x)\gamma * g(x) = \gamma * f(x)g(x) = \gamma * (fg)(x),$$

onde a terceira igualdade segue da linearidade da ação de  $\Gamma$  em  $W$  e porque  $f(x) \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $fg$  é  $\Gamma$ -equivariante.  $\square$

Do lema anterior segue que  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  é um módulo sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Analogamente,  $\vec{\varepsilon}_{V,W}(\Gamma)$  é um módulo sobre o anel  $\varepsilon_V(\Gamma)$ .

**Definição 2.4.11.** *Diremos que as aplicações polinomiais  $\Gamma$ -equivariantes  $g_1, g_2, \dots, g_r$  geram o módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  se toda  $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  pode ser escrita como*

$$g = f_1g_1 + f_2g_2 + \dots + f_rg_r,$$

onde  $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Uma definição análoga pode ser feita para  $\vec{\varepsilon}_{V,W}(\Gamma)$ .

O próximo teorema nos garante que quando  $\Gamma$  é compacto, o módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  é finitamente gerado sobre  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .

**Teorema 2.4.12.** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto agindo em  $V$  e  $W$ . Então existe um conjunto finito de aplicações polinomiais  $\Gamma$ -equivariantes que geram o módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Veja [11, Chapter XII, Theorem 5.2].  $\square$

O próximo resultado é a extensão do teorema anterior para germes de aplicações suaves. Ele nos garante que um conjunto de geradores para  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  sobre  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  também gera  $\vec{\varepsilon}_{V,W}(\Gamma)$  sobre  $\varepsilon_V(\Gamma)$ .

**Teorema 2.4.13.** *(Teorema de Poénaru) Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto e sejam  $g_1, g_2, \dots, g_r$  geradores do módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Então,  $g_1, g_2, \dots, g_r$  geram o módulo  $\vec{\varepsilon}_{V,W}(\Gamma)$  sobre o anel  $\varepsilon_V(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Veja [11, Chapter XII, Theorem 5.3].  $\square$

O exemplo a seguir exhibe os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$  para  $\Gamma = S^1$  agindo em  $\mathbb{C}$ . Nesse exemplo consideraremos  $V = W$  sob ações idênticas de  $\Gamma$ .

**Exemplo 2.4.14.** *Seja  $S^1$  agindo em  $\mathbb{C}$  como no Exemplo 2.4.6. Se  $g \in \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(S^1)$ , então*

$$g(z) = p(z)z + q(z)iz,$$

onde  $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(S^1)$ . De fato, escrevendo  $g$  nas coordenadas  $z$  e  $\bar{z}$  temos

$$g(z) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}.$$

Como  $g$  é  $S^1$ -equivariante, então  $g(z) = \theta^{-1}.g(\theta.z)$ , para todo  $\theta \in S^1$  e todo  $z \in \mathbb{C}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta &= e^{-i\theta} \sum a_{\alpha\beta} (e^{i\theta} z)^\alpha \overline{(e^{i\theta} z)}^\beta \\ &= e^{-i\theta} \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta\alpha} z^\alpha e^{-i\theta\beta} \bar{z}^\beta \\ &= \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta-1)} z^\alpha \bar{z}^\beta, \end{aligned}$$

para todo  $\theta \in S^1$  e todo  $z \in \mathbb{C}$ , o que implica em  $a_{\alpha\beta} = 0$  ou  $\alpha = \beta + 1$ . Assim,

$$g(z) = \sum A_\beta z^{\beta+1} \bar{z}^\beta = \sum A_\beta (z\bar{z})^\beta z,$$

onde  $A_\beta \in \mathbb{C}$ . Escrevendo  $A_\beta = b_\beta + ic_\beta$ , com  $b_\beta, c_\beta \in \mathbb{R}$  e tomando  $p(z) = \sum b_\beta (z\bar{z})^\beta$  e  $q(z) = \sum c_\beta (z\bar{z})^\beta$ , temos o desejado. Portanto,  $g_1(z) = z$  e  $g_2(z) = iz$  geram  $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(S^1)$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(S^1)$ .

Mais exemplos de geradores equivariantes serão exibidos no Capítulo 4 na classificação das equações diferenciais binárias  $\Gamma$ -equivariantes, para o caso em que  $\Gamma$  é um subgrupo fechado de  $O(2)$ . Tais geradores serão fundamentais para a determinação da forma geral das equações diferenciais binárias na presença de simetrias. Devido ao Teorema de Poénaru nos restringiremos apenas ao caso polinomial.

## 2.5 Teoria $\Gamma_\sigma$ -equivariante

Nesta seção daremos continuidade aos conceitos básicos da teoria invariante de grupos, enfatizando uma classe de aplicações  $\Gamma$ -equivariantes em que a representação de  $\Gamma$  em  $W$  é trocada por sua representação  $\sigma$ -dual. O algoritmo apresentado no fim desta seção será aplicado no Capítulo 4 para o caso em que  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é um epimorfismo de grupos.

Em toda a seção,  $\Gamma$  é um grupo de Lie compacto agindo linearmente em  $V$  e em  $W$ , ambos  $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais de dimensão finita, com as respectivas representações  $\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$  e  $\eta : \Gamma \rightarrow GL(W)$ . Começamos considerando  $\mathbb{Z}_2$  o grupo multiplicativo  $\{\pm 1\}$  e

$$\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

um homomorfismo de grupos com  $\Gamma_+ = \ker(\sigma)$ . Se  $\sigma$  é o homomorfismo trivial, então  $\Gamma_+ = \Gamma$ . Caso contrário,  $\Gamma_+$  é um subgrupo normal de  $\Gamma$  de índice 2 e  $\Gamma/\Gamma_+ \cong \mathbb{Z}_2$ . Definimos a representação  $\sigma$ -dual de  $\Gamma$  em  $W$ , denotada por  $\eta_\sigma$ , pelo produto

$$\begin{aligned} \eta_\sigma : \Gamma &\rightarrow GL(W) \\ \gamma &\mapsto \eta_\sigma(\gamma) = \sigma(\gamma)\eta(\gamma). \end{aligned}$$

Como  $\sigma$  pode ser visto como uma representação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}$ , então claramente  $\eta_\sigma$  também é uma representação de  $\Gamma$  em  $W$  associada à ação  $\phi : \Gamma \times W \rightarrow W$  dada por

$$\phi(\gamma, w) = \gamma \cdot w = \eta_\sigma(\gamma)w. \quad (2.5)$$

Note que se  $\sigma$  é trivial, então  $\eta_\sigma = \eta$ . Temos então a seguinte definição:

**Definição 2.5.1.** *Diremos que uma função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\Gamma_\sigma$ -invariante se*

$$f(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)f(x)$$

e uma aplicação  $g : V \rightarrow W$  é  $\Gamma_\sigma$ -equivariante se

$$g(\rho(\gamma)x) = \eta_\sigma(\gamma)g(x),$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $x \in V$ .

Denotaremos por  $\mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$  o conjunto das funções polinômiais  $\Gamma_\sigma$ -invariantes e por  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$  o conjunto das aplicações polinômiais  $\Gamma_\sigma$ -equivariantes. Observe que se considerarmos a ação de  $\Gamma$  em  $V$  associada a  $\rho$  dada por  $\gamma.x = \rho(\gamma)x$  e a ação  $\sigma$ -dual de  $\Gamma$  em  $W$  dada por (2.5), então  $f \in \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$  se, e somente se,

$$f(\gamma.x) = \sigma(\gamma)f(x)$$

e  $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$  se, e somente se,

$$g(\gamma.x) = \gamma \cdot g(x),$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $x \in V$ . Portanto  $f$  e  $g$  podem ser vistas como aplicações  $\Gamma$ -equivariantes segundo a Definição 2.4.9, onde no caso  $\Gamma_\sigma$ -invariante temos  $W = \mathbb{R}$  e  $\gamma * f(x) = \sigma(\gamma)f(x)$ . Portanto,  $\mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$  e  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$  têm estrutura de módulo sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  dos invariantes e, pelo Teorema 2.4.12, ambos são finitamente gerados.

O próximo lema nos dá uma caracterização do anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  e dos módulos  $\mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$ ,  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$  e  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$ .

**Lema 2.5.2.** *Sejam  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  um epimorfismo de grupos,  $\Gamma_+ = \ker(\sigma)$  e  $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$  fixado. Então*

1.  $\mathcal{P}_V(\Gamma) = \{f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+); f(\rho(\delta)x) = f(x), \text{ para todo } x \in V\}$ ;
2.  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma) = \{g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+); g(\rho(\delta)x) = \eta(\delta)g(x), \text{ para todo } x \in V\}$ ;
3.  $\mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma) = \{f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+); f(\rho(\delta)x) = -f(x), \text{ para todo } x \in V\}$ ;
4.  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma) = \{g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+); g(\rho(\delta)x) = -\eta(\delta)g(x), \text{ para todo } x \in V\}$ .

*Demonstração.* Segue diretamente das definições. Mais detalhes em [3, Lema 3.1.1] para os itens 1 e 3 e em [3, Lema 3.3.1] para os itens 2 e 4.  $\square$

No que segue adotaremos a mesma notação usada em [16].

**Definição 2.5.3.** Fixado  $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$ , definimos os operadores de Reynolds  $R : \mathcal{P}_V(\Gamma_+) \rightarrow \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  e  $\vec{R} : \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+) \rightarrow \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$  como

$$R(f)(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(\rho(\delta)x)] \quad e \quad \vec{R}(g)(x) = \frac{1}{2}[g(x) + \eta(\delta^{-1})g(\rho(\delta)x)] ,$$

e os  $\sigma$ -operadores de Reynolds  $S : \mathcal{P}_V(\Gamma_+) \rightarrow \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  e  $\vec{S} : \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+) \rightarrow \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$  como

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(\rho(\delta)x)] \quad e \quad \vec{S}(g)(x) = \frac{1}{2}[g(x) - \eta(\delta^{-1})g(\rho(\delta)x)] .$$

Para todo  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  e todo  $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$ , temos  $R(f) \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ ,  $\vec{R}(g) \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ ,  $S(f) \in \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$  e  $\vec{S}(g) \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$ . Mostraremos apenas que  $S(f) \in \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$  e  $\vec{S}(g) \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$ , pois os  $\sigma$ -operadores são os mais importantes em nosso contexto. Os outros casos seguem de modo análogo.

Para todo  $x \in V$ , temos

$$\begin{aligned} S(f)(\rho(\delta)x) &= \frac{1}{2}[f(\rho(\delta)x) - f(\rho(\delta)\rho(\delta)x)] \\ &= \frac{1}{2}[f(\rho(\delta)x) - f(\rho(\delta^2)x)] \\ &= \frac{1}{2}[f(\rho(\delta)x) - f(x)] \\ &= -S(f)(x), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue pois  $\delta^2 \in \Gamma_+$ . Como  $S(f) \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ , pelo item 3 do Lema 2.5.2 temos  $S(f) \in \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$ .

De modo análogo, para todo  $x \in V$  temos

$$\begin{aligned} \vec{S}(g)(\rho(\delta)x) &= \frac{1}{2}[g(\rho(\delta)x) - \eta(\delta^{-1})g(\rho(\delta)\rho(\delta)x)] \\ &= \frac{1}{2}[g(\rho(\delta)x) - \eta(\delta^{-1})g(\rho(\delta^2)x)] \\ &= \frac{1}{2}[\eta(\delta)\eta(\delta^{-1})g(\rho(\delta)x) - \eta(\delta^{-1})\eta(\delta^2)g(x)] \\ &= \frac{1}{2}[\eta(\delta)\eta(\delta^{-1})g(\rho(\delta)x) - \eta(\delta)g(x)] \\ &= -\eta(\delta)\frac{1}{2}[g(x) - \eta(\delta^{-1})g(\rho(\delta)x)] \\ &= -\eta(\delta)\vec{S}(g)(x), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade vale pois  $\delta^2 \in \Gamma_+$  e  $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$ . Como  $\vec{S}(g) \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ , pelo item 4 do Lema 2.5.2 segue que  $\vec{S}(g) \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$ .

Denotaremos por  $I_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)}$  e  $I_{\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)}$  os operadores identidades em  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  e  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$ , respectivamente.

**Proposição 2.5.4.** *Os operadores  $R$ ,  $\vec{R}$ ,  $S$  e  $\vec{S}$  satisfazem:*

1. *Eles são homomorfismos de  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulos, com  $R + S = I_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)}$  e  $\vec{R} + \vec{S} = I_{\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)}$ .*
2. *Eles são projeções idempotentes com*

$$\begin{aligned} \text{Im}(R) &= \mathcal{P}_V(\Gamma) = \ker(S) & \text{Im}(S) &= \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma) = \ker(R) \\ \text{Im}(\vec{S}) &= \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma) = \ker(\vec{R}) & \text{Im}(\vec{R}) &= \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma) = \ker(\vec{S}). \end{aligned}$$

3. *Valem as seguintes decomposições como soma direta de  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulos:*

$$\mathcal{P}_V(\Gamma_+) = \mathcal{P}_V(\Gamma) \oplus \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma) \quad e \quad \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+) = \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma) \oplus \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma). \quad (2.6)$$

*Demonstração.* 1. Claramente  $\mathcal{P}_V(\Gamma) \subset \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ . Como ambos os conjuntos têm estrutura de anel,  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  é um subanel de  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  pode ser visto como um módulo sobre  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Como  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$  é um módulo sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ , o qual tem  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  como um subanel, segue que  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$  é um módulo sobre  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ . O fato de  $R$ ,  $\vec{R}$ ,  $S$  e  $\vec{S}$  serem homomorfismos de  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulos segue diretamente das definições. Ainda,

$$\begin{aligned} (R + S)(f)(x) &= R(f)(x) + S(f)(x) \\ &= \frac{1}{2}[f(x) + f(\rho(\delta)x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(\rho(\delta)x)] \\ &= f(x) \\ &= I_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)}(f)(x), \end{aligned}$$

para todo  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  e todo  $x \in V$ . Logo,  $R + S = I_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)}$ . Analogamente, mostra-se que  $\vec{R} + \vec{S} = I_{\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)}$ .

2. Vamos demonstrar apenas as igualdades  $\text{Im}(R) = \mathcal{P}_V(\Gamma) = \ker(S)$ . As outras igualdades seguem de forma análoga. Sabemos que  $\text{Im}(R) \subset \mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Por outro lado, dado  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ , então

$$R(f)(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(\delta x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] = f(x), \quad (2.7)$$

para todo  $x \in V$ . Logo,  $\mathcal{P}_V(\Gamma) \subset \text{Im}(R)$  e, assim,  $\text{Im}(R) = \mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Agora, se  $f \in \ker(S)$ , então  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  e  $S(f)(x) = 0$ , para todo  $x \in V$ , ou seja,  $f(\delta x) = f(x)$ . Pelo item 1 do Lema 2.5.2,  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Por outro lado, também pelo Lema 2.5.2, se  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ , então  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  e  $f(\delta x) = f(x)$ , para todo  $x \in V$ , implicando que  $f(x) - f(\delta x) = 0$ , para todo  $x \in V$ . Logo,  $S(f)(x) = 0$ , para todo  $x \in V$ , ou seja,  $f \in \ker(S)$ . Portanto,  $\ker(S) = \mathcal{P}_V(\Gamma)$ .

Por fim, mostraremos que  $R$  é uma projeção idempotente, isto é,  $R^2 = R$ . Para os outros operadores a demonstração é análoga. Da igualdade (2.7) segue que  $R|_{\mathcal{P}_V(\Gamma)} = I_{\mathcal{P}_V(\Gamma)}$ , onde  $I_{\mathcal{P}_V(\Gamma)}$  denota o operador identidade em  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Como  $Im(R) \subset \mathcal{P}_V(\Gamma)$ , dado  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ , temos

$$R^2(f) = R(R(f)) = R(f).$$

Portanto,  $R^2 = R$ .

3. Como  $S : \mathcal{P}_V(\Gamma_+) \rightarrow \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  é uma projeção idempotente temos que  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+) = \ker(S) \oplus Im(S)$ . Pelo item anterior, segue que  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+) = \mathcal{P}_V(\Gamma) \oplus \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$ . A veracidade da decomposição  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+) = \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma) \oplus \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$  segue de maneira análoga, uma vez que  $\vec{S}$  é uma projeção idempotente.  $\square$

Os quatro próximos resultados estabelecem um algoritmo simbólico para a determinação dos geradores do módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  baseado nas decomposições dadas em (2.6) e nos operadores  $S$  e  $\vec{S}$ . Nossa principal referência até o fim do capítulo será [2].

**Teorema 2.5.5.** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto agindo em  $V$ . Fixe  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  um epimorfismo de grupos com  $\Gamma_+ = \ker(\sigma)$  e considere o  $\sigma$ -operador de Reynolds  $S$ . Se  $\{u_1, \dots, u_s\}$  é uma base de Hilbert para  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ , então o conjunto*

$$\{S(u_1), \dots, S(u_s)\}$$

gera  $\mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$  sobre  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .

*Demonstração.* Seja  $f \in \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$ . Como  $Id_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)} = R + S$ , segue que  $u_i = R(u_i) + S(u_i)$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Deste modo  $\{R(u_i), S(u_i); i = 1, \dots, s\}$  também é uma base de Hilbert para  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ . Como  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ , podemos escrever

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \dots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \dots [S(u_s)(x)]^{\beta_s}, \quad (2.8)$$

onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s) \in \mathbb{N}^{2s}$  e  $a_{\alpha} \in \mathbb{R}$ . Sabemos que  $R(u_i) \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$  e  $S(u_i) \in \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$ , para  $i = 1, \dots, s$ . Então, para  $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$  fixado, temos

$$\begin{aligned} f(\delta x) &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} [R(u_1)(\delta x)]^{\alpha_1} \dots [R(u_s)(\delta x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(\delta x)]^{\beta_1} \dots [S(u_s)(\delta x)]^{\beta_s} \\ &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \dots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [-S(u_1)(x)]^{\beta_1} \dots [-S(u_s)(x)]^{\beta_s} \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{\beta_1 + \dots + \beta_s} a_{\alpha} [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \dots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \dots [S(u_s)(x)]^{\beta_s}. \end{aligned}$$



Como  $f \in \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$ , temos  $f(\delta x) = -f(x)$ , para todo  $x \in V$ , ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= f(\delta x) + f(x) \\ &= \sum_{\alpha} [(-1)^{\beta_1 + \dots + \beta_s} + 1] a_{\alpha} [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \dots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \dots [S(u_s)(x)]^{\beta_s}, \end{aligned}$$

donde segue que  $a_{\alpha} = 0$  ou  $\beta_1 + \dots + \beta_s$  é ímpar. Para  $a_{\alpha} \neq 0$ ,  $\beta_1 + \dots + \beta_{j-1} + (\beta_j - 1) + \beta_{j+1} + \dots + \beta_s$  é par e temos na expressão (2.8) a parcela  $k_{\alpha}(x)S(u_j)(x)$ , onde

$$k_{\alpha}(x) = a_{\alpha} [R(u_1)(x)]^{\alpha_1} \dots [R(u_s)(x)]^{\alpha_s} [S(u_1)(x)]^{\beta_1} \dots [S(u_j)(x)]^{\beta_j - 1} \dots [S(u_s)(x)]^{\beta_s},$$

para algum  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Observe que  $k_{\alpha} \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ , uma vez que apresenta um produto par de funções  $\Gamma_\sigma$ -invariantes. Denote por  $L_j$  a soma de todas as funções  $k_{\alpha}$  que acompanham  $S(u_j)$ . Assim, a expressão (2.8) torna-se

$$f(x) = \sum_{j=1}^s L_j(x)S(u_j)(x),$$

com  $L_j \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Como  $f$  é arbitrário,  $\{S(u_i); i = 1, \dots, s\}$  é um conjunto de geradores de  $\mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$  sobre  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .  $\square$

**Corolário 2.5.6.** *Nas condições do teorema anterior, o conjunto  $\{1, S(u_1), \dots, S(u_s)\}$  gera  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  como um módulo sobre  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Pela decomposição de  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  dada em (2.6) temos que se  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ , então  $f = f_0 + h$ , para algum  $f_0 \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$  e algum  $h \in \mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$ . Como  $\{S(u_1), \dots, S(u_s)\}$  gera o módulo  $\mathcal{P}_V^\sigma(\Gamma)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ , existem  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$  tais que

$$h = \sum_{i=1}^s f_i S(u_i).$$

Logo,

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^s f_i S(u_i) = \sum_{i=0}^s f_i S(u_i),$$

com  $S(u_0) = 1$  e  $f_i \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$  para todo  $0 \leq i \leq s$ . Portanto,  $\{1, S(u_1), \dots, S(u_s)\}$  gera o módulo  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .  $\square$

**Lema 2.5.7.** *Seja  $\{S(u_0) = 1, S(u_1), \dots, S(u_s)\}$  um conjunto de geradores para  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  sobre  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  como no corolário anterior. Seja  $\{H_0, \dots, H_r\}$  um conjunto de geradores para o módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ . Então,*

$$\{H_{ij} = S(u_i)H_j; i = 0, \dots, s \text{ e } j = 0, \dots, r\}$$

*é um conjunto de geradores para o módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Seja  $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$ . Então existem  $p_0, \dots, p_r \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  tais que

$$g = \sum_{j=0}^r p_j H_j.$$

Como o conjunto  $\{S(u_0) = 1, S(u_1), \dots, S(u_s)\}$  gera  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  sobre  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ , então para cada  $p_j \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ , com  $j = 0, \dots, r$ , existem  $f_{ij} \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$  tais que

$$p_j = \sum_{i=0}^s f_{ij} S(u_i).$$

Logo,

$$\begin{aligned} g &= \sum_{j=0}^r p_j H_j = \sum_{j=0}^r \left( \sum_{i=0}^s f_{ij} S(u_i) \right) H_j \\ &= \sum_{i,j=0}^{s,r} f_{ij} S(u_i) H_j \\ &= \sum_{i,j=0}^{s,r} f_{ij} H_{ij}, \end{aligned}$$

com  $f_{ij} \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Como  $g$  é arbitrária, segue o resultado.  $\square$

**Teorema 2.5.8.** *Seja  $\{H_{ij}; i = 0, \dots, s \text{ e } j = 0, \dots, r\}$  o conjunto de geradores para o módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  obtido no lema anterior. Considere o  $\sigma$ -operador de Reynolds  $\vec{S}$ . Então*

$$\{\vec{S}(H_{ij}); i = 0, \dots, s \text{ e } j = 0, \dots, r\}$$

gera o módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .

*Demonstração.* Seja  $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma_+)$ . Como  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma_+) = \text{Im}(\vec{S})$ , existe  $h \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$  tal que  $g = \vec{S}(h)$ . Além disso, por hipótese existem  $f_{ij} \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ , com  $i = 0, \dots, s$  e  $j = 0, \dots, r$ , tais que

$$h = \sum_{i,j=0}^{s,r} f_{ij} H_{ij}.$$

Como  $\vec{S}$  é um homomorfismo de  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulos, temos

$$g = \vec{S}(h) = \vec{S} \left( \sum_{i,j=0}^{s,r} f_{ij} H_{ij} \right) = \sum_{i,j=0}^{s,r} f_{ij} \vec{S}(H_{ij}),$$

o que conclui a prova.  $\square$

A seguir, estruturaremos os últimos resultados desta seção na forma de um algoritmo puramente algébrico, que será usado no Capítulo 4 para a determinação das formas gerais das equações diferenciais binárias  $\Gamma$ -equivariantes.

**Algoritmo 2.5.9. (Geradores dos  $\Gamma_\sigma$ -equivariantes)**

- 1– Considere  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto,  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  um epimorfismo de grupos com  $\Gamma_+ = \ker(\sigma)$  e  $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$  fixado;
- 2– Considere uma base de Hilbert  $\{u_1, \dots, u_s\}$  para  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$  e  $\{H_0, \dots, H_r\}$  um conjunto de geradores para o módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma_+)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ ;
- 3– Defina  $S(u_0) = 1$  e calcule  $S(u_i)$  para  $i = 1, \dots, s$ ;
- 4– Construa  $H_{ij} = S(u_i)H_j$ , para  $i = 0, \dots, s$  e  $j = 0, \dots, r$ ;
- 5– Para  $i = 0, \dots, s$  e  $j = 0, \dots, r$ , calcule  $\vec{S}(H_{ij})$ .

**Resultado:** Conjunto de geradores  $\{\vec{S}(H_{ij}); i = 0, \dots, s \text{ e } j = 0, \dots, r\}$  para o módulo  $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^\sigma(\Gamma)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ .

# Simetrias em equações diferenciais binárias

Como vimos no capítulo anterior, a simetria é uma característica que pode ser observada em algumas formas geométricas, equações matemáticas, entre outros objetos. No plano, o seu conceito está relacionado com o de isometria e às operações geométricas associadas: reflexão, rotação e translação.

Este capítulo tem como objetivo introduzir o estudo de simetrias em equações diferenciais binárias. Geometricamente, as simetrias de uma EDB devem deixar invariante a configuração geométrica de suas linhas integrais. Por essa razão, as transformações geométricas mais interessantes são as que correspondem aos movimentos rígidos supracitados. Por questões algébricas, vamos nos restringir às simetrias ortogonais, o que significa considerar o grupo de simetrias de uma EDB contido no grupo ortogonal  $O(2)$ .

Seguindo as referências [16] e [20], dividiremos este capítulo em duas seções. Na Seção 3.1, formalizaremos a noção de EDBs equivariantes sob a ação linear de um subgrupo fechado de  $O(2)$ . Para isso, usaremos a teoria de representação de grupos no fibrado tangente associado a uma forma quadrática diferenciável. O resultado principal desta seção, o Teorema 3.1.7, estabelecerá uma fórmula que revela o efeito de uma simetria na configuração geométrica de uma EDB em termos puramente algébricos. Na Seção 3.2, definiremos a chamada superfície da EDB e mostraremos que essa superfície pode ser coberta por três componentes disjuntas. Essa decomposição nos permitirá entender o efeito das simetrias da EDB em tal superfície.

Ao longo deste capítulo denotaremos por  $\kappa$  e  $-\kappa$  as reflexões em torno dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente, cuja representação matricial é

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad -\kappa = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar a notação, denotaremos a matriz da representação  $\rho(\gamma)$  simplesmente por  $\gamma$ . Além disso, não distinguiremos ação e representação, de modo que denotaremos  $\gamma.x$  e  $\rho(\gamma)x$  simplesmente por  $\gamma x$ .

Todas as figuras das configurações geométricas das EDBs apresentadas no decorrer deste capítulo estão em [20] e foram geradas usando o programa ODEinR2 disponível no site citado em [1].

### 3.1 O grupo de simetrias de uma equação diferencial binária

Considere a EDB da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (3.1)$$

onde  $a, b, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves que não se anulam simultaneamente em nenhum ponto de  $\mathbb{R}^2$ . É importante mencionar que todos os resultados obtidos neste capítulo valem igualmente para EDBs definidas em subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^2$ .

Nosso objetivo é definir o grupo de simetrias de (3.1). Para isso, considere  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto agindo ortogonalmente em  $\mathbb{R}^2$ . Essa ação induz uma ação de  $\Gamma$  no fibrado tangente

$$T\mathbb{R}^2 = \{(x, y, dx, dy); (x, y), (dx, dy) \in \mathbb{R}^2\}$$

dada por

$$\begin{aligned} \Gamma \times T\mathbb{R}^2 &\rightarrow T\mathbb{R}^2 \\ (\gamma, (x, y, dx, dy)) &\mapsto (\gamma(x, y), \gamma(dx, dy)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observe que  $T\mathbb{R}^2$  está identificado com o fibrado cotangente por meio da métrica Euclidiana. Denotaremos por  $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$  o conjunto de todas as formas quadráticas diferenciáveis  $\omega : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  da forma

$$\omega(x, y, dx, dy) = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2, \quad (3.3)$$

onde  $a, b, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves que não se anulam simultaneamente em  $\mathbb{R}^2$ . Observe que a EDB (3.1) é dada pela equação  $\omega(x, y, dx, dy) = 0$ .

Em termos gerais, simetrias de uma EDB consistem de transformações que levam soluções da equação (3.1) em outras soluções. Geometricamente, o grupo de simetrias de uma EDB é um subgrupo de  $O(2)$  que deixa invariante a configuração geométrica de suas linhas integrais. A saber, uma linha integral de (3.1) é uma curva suave  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ , tal que  $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_1'(t), \alpha_2'(t))$  é uma solução de  $\omega(x, y, dx, dy) = 0$ .

Antes de formalizarmos o conceito de simetria de uma EDB, vamos explorá-lo através de um exemplo. Considere a EDB

$$ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2 = 0, \quad (3.4)$$

cuja configuração geométrica é dada na Figura 3.1. Ao observarmos a configuração geométrica das linhas integrais de (3.4), notamos que as reflexões  $\kappa$ ,  $-\kappa$  e a rotação  $R_\pi$  pertencem ao grupo de simetrias dessa EDB, uma vez que deixam tal configuração invariante. Como  $R_\pi = \kappa(-\kappa)$ , o grupo de simetrias da EDB (3.4) é dado pelo grupo  $\Gamma$  gerado por  $\kappa$  e  $-\kappa$ , ou equivalentemente  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Considerando

$$\omega(x, y, dx, dy) = ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2$$

temos que

$$\begin{aligned} \omega(\kappa(x, y, dx, dy)) &= \omega(\kappa(x, y), \kappa(dx, dy)) \\ &= \omega(x, -y, dx, -dy) \\ &= -\omega(x, y, dx, dy) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \omega(-\kappa(x, y, dx, dy)) &= \omega(-\kappa(x, y), -\kappa(dx, dy)) \\ &= \omega(-x, y, -dx, dy) \\ &= \omega(x, y, dx, dy). \end{aligned}$$

Como a ação de  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  em  $T\mathbb{R}^2$  é linear, temos que

$$\omega(\gamma X) = \pm\omega(X),$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $X \in T\mathbb{R}^2$ .

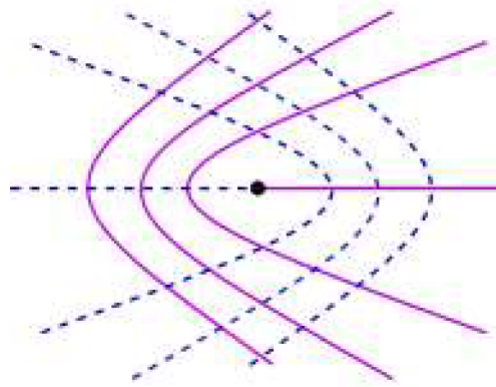


Figura 3.1: Configuração da EDB (3.4)

O exemplo anterior nos motiva a definir, no caso geral, uma ação de  $\Gamma$  em  $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2) \\ (\gamma, \omega) &\mapsto \gamma\omega \end{aligned}$$

por

$$\gamma\omega(X) = \omega(\gamma^{-1}X),$$

para todo  $X \in T\mathbb{R}^2$ . Para cada  $\gamma \in \Gamma$ , temos  $\gamma\omega = \pm\omega$ , uma vez que a única representação não trivial de um grupo de Lie compacto  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}$  é a representação sinal. De fato, considerando  $\sigma : \Gamma \rightarrow GL(\mathbb{R})$ , uma representação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}$  temos que a matriz do operador  $\sigma(\gamma)$  tem ordem 1. Como a ação de  $\Gamma$  é ortogonal,  $[\sigma(\gamma)][\sigma(\gamma)]^t = [1]$ , ou seja,  $\sigma(\gamma)^2 = 1$ . Logo,  $\sigma(\gamma) = \pm 1$ .

Temos, então, a seguinte definição:

**Definição 3.1.1.** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto agindo ortogonalmente em  $\mathbb{R}^2$  e seja  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$  um homomorfismo de grupos. Um elemento  $\omega \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$  é chamado  $\Gamma$ -equivariante se*

$$\omega(\gamma(x, y, dx, dy)) = \sigma(\gamma)\omega(x, y, dx, dy),$$

para todo  $(x, y, dx, dy) \in T\mathbb{R}^2$  e todo  $\gamma \in \Gamma$ .

Observe que se  $\omega$  é  $\Gamma$ -equivariante, então o conjunto dos zeros de  $\omega$  é  $\Gamma$ -invariante, isto é, se  $(x, y, dx, dy)$  é solução da equação  $\omega = 0$ , então  $\gamma(x, y, dx, dy)$  também é, para todo  $\gamma \in \Gamma$ . De fato, se  $\omega(x, y, dx, dy) = 0$ , então pela equivariância de  $\omega$  temos

$$\omega(\gamma(x, y, dx, dy)) = \sigma(\gamma)\omega(x, y, dx, dy) = 0.$$

Geometricamente isso significa que se  $\omega$  é  $\Gamma$ -equivariante, a configuração da EDB (3.1) é  $\Gamma$ -invariante, ou seja, o conjunto das linhas integrais permanece o mesmo sob a ação de  $\Gamma$ . Assim sendo, a próxima definição formaliza o conceito de simetrias em EDBs em termos algébricos.

**Definição 3.1.2.** *Dado um grupo de Lie compacto agindo ortogonalmente em  $\mathbb{R}^2$ , a EDB (3.1) é  $\Gamma$ -equivariante, ou equivalentemente  $\Gamma$  é o grupo de simetrias de (3.1), se  $\omega$  definida em (3.3) é  $\Gamma$ -equivariante segundo um homomorfismo  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .*

Denotaremos o conjunto de todas as formas quadráticas diferenciáveis  $\Gamma$ -equivariantes por  $\mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$ , isto é,

$$\mathcal{Q}[\Gamma, \sigma] = \{\omega \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2); \omega \text{ é } \Gamma\text{-equivariante}\}.$$

Como vimos no Capítulo 1, podemos escrever  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$  como

$$\omega(x, y, dx, dy) = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Então, dado  $\gamma \in \Gamma$ , temos

$$\begin{aligned} \omega(\gamma(x, y), \gamma(dx, dy)) &= \left[ \gamma \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} c(\gamma(x, y)) & b(\gamma(x, y)) \\ b(\gamma(x, y)) & a(\gamma(x, y)) \end{pmatrix} \left[ \gamma \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}^t \gamma^t B(\gamma(x, y)) \gamma \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $B(x, y) = \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix}$  e na última igualdade  $\gamma$  está denotando a matriz de  $\rho(\gamma)$  associada à representação  $\rho : \Gamma \rightarrow GL(\mathbb{R}^2)$ . Pela equivariância de  $\omega$  temos

$$\omega(\gamma(x, y), \gamma(dx, dy)) = \sigma(\gamma)\omega(x, y, dx, dy)$$

para todo  $(x, y, dx, dy) \in T\mathbb{R}^2$ , o que implica em

$$\gamma^t B(\gamma(x, y)) \gamma = \sigma(\gamma) B(x, y).$$

Como a ação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  é ortogonal,  $\gamma^t = \gamma^{-1}$  e portanto

$$B(\gamma(x, y)) = \sigma(\gamma) \gamma B(x, y) \gamma^t, \quad (3.6)$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Logo, se  $\omega$  em (3.3) é  $\Gamma$ -equivariante, a matriz  $B(x, y)$  associada a  $\omega$  satisfaz (3.6), ou seja,  $B(x, y)$  também apresenta uma condição de equivariância com respeito a uma determinada ação de  $\Gamma$ . Exploraremos mais essa equivariância no Capítulo 4.

A próxima proposição nos garante que se uma forma quadrática  $\omega$  da forma (3.3) é  $\Gamma$ -equivariante, então a função discriminante associada

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$$

é  $\Gamma$ -invariante, isto é,  $\delta(\gamma(x, y)) = \delta(x, y)$ , para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Proposição 3.1.3.** *Se  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$ , então a função discriminante associada  $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\Gamma$ -invariante.*

*Demonstração.* Como  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$ , a matriz  $B(x, y)$  associada a  $\omega$  satisfaz (3.6) para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Calculando o determinante em ambos os lados dessa igualdade temos

$$a(\gamma(x, y))c(\gamma(x, y)) - b^2(\gamma(x, y)) = \sigma(\gamma)^2 \det(\gamma)(a(x, y)c(x, y) - b^2(x, y)) \det(\gamma^t),$$

implicando na igualdade

$$-\delta(\gamma(x, y)) = \sigma(\gamma)^2 (\det(\gamma))^2 (-\delta(x, y)).$$

Como  $\Gamma \subseteq O(2)$ ,  $(\det(\gamma))^2 = \sigma(\gamma)^2 = 1$ . Logo

$$\delta(\gamma(x, y)) = \delta(x, y),$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . □



A seguir introduziremos o conceito de simetrias de um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 3.1.4.** *O grupo de simetrias de um conjunto  $W \subset \mathbb{R}^2$  é um subgrupo  $\Sigma(W)$  de  $O(2)$  tal que  $\gamma w \in W$ , para todo  $w \in W$  e todo  $\gamma \in \Sigma(W)$ . Neste caso, diremos que  $W$  é invariante sob a ação de  $\Sigma(W)$ .*

**Observação 3.1.5.** Dado  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$ , temos que

$$\Gamma \leq \Sigma(\Delta),$$

onde  $\Delta$  é o conjunto discriminante de  $\omega = 0$  definido em (1.6). De fato, pela Proposição 3.1.3, se  $(x, y) \in \Delta$ , então  $\gamma(x, y) \in \Delta$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ . Logo,  $\Gamma \leq \Sigma(\Delta)$ , ou seja, as simetrias de uma EDB são no máximo as do seu conjunto discriminante. Mas não é sempre verdade que  $\Gamma = \Sigma(\Delta)$ , como veremos no próximo exemplo.

**Exemplo 3.1.6.** Considere a EDB (3.4) cuja configuração geométrica é dada na Figura 3.1. Como vimos anteriormente, o grupo de simetrias dessa EDB é dado por  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Observe que  $\delta(x, y) = x^2 + y^2 = 0$  se, e somente se,  $x = y = 0$ . Logo,  $\Delta = \{(0, 0)\}$  e  $\Sigma(\Delta) = O(2)$ . Portanto,  $\Gamma \not\cong \Sigma(\Delta)$ .

Como vimos no Capítulo 1, na região do plano onde a função discriminante  $\delta$  é positiva, existe um par de folheações  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  gerado por direções distintas

$$\frac{dy_1}{dx_1}(x, y) = \frac{-b(x, y) - \sqrt{\delta(x, y)}}{a(x, y)}$$

e

$$\frac{dy_2}{dx_2}(x, y) = \frac{-b(x, y) + \sqrt{\delta(x, y)}}{a(x, y)}$$

em cada ponto  $(x, y)$  dessa região. Mais especificamente, tal par de folheações decompõe o plano em uma união de subvariedades conexas unidimensionais, chamadas folhas. No nosso contexto, as folhas são determinadas pelas linhas integrais da EDB, que são curvas não orientadas associadas a campos de direções. Quando  $\delta(x, y) > 0$ , as direções  $\frac{dy_1}{dx_1}(x, y)$  e  $\frac{dy_2}{dx_2}(x, y)$  definem um par de folhas transversais em cada ponto  $(x, y)$ , cuja coleção formam um par de folheações transversais  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ .

Quando  $\omega$  em (3.3) é  $\Gamma$ -equivariante, o conjunto de simetrias de cada folheação é um subconjunto de  $\Gamma$  formado pelos elementos que as deixam invariantes. A seguir, vamos discutir com mais detalhes a estrutura desse subgrupo. Veremos que ela depende não somente se  $\gamma \in \Gamma$  preserva ou permuta as folheações  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ , mas também se preserva ou inverte a orientação do plano.

Começaremos associando ao par de folheações  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  os campos de vetores tangentes

$$F_j(x, y) = (a(x, y), -b(x, y) + (-1)^j \sqrt{\delta(x, y)}), \quad j = 1, 2. \quad (3.7)$$

Considere então o aberto do plano

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \delta(x, y) > 0\} \quad (3.8)$$

e a restrição da ação de  $\Gamma$  a  $\Omega$ . Essa ação está bem definida pois o conjunto discriminante  $\Delta$  é  $\Gamma$ -invariante e separa o plano em duas regiões invariantes, uma com a função  $\delta$  positiva e outra com  $\delta$  negativa. Para EDBs onde  $\Omega \neq \emptyset$ , introduziremos o homomorfismo de grupos  $\lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$  dado por

$$\lambda(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_i \\ -1, & \gamma(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_j, \quad j \neq i, \end{cases} \quad (3.9)$$

com  $i, j \in \{1, 2\}$ . Segue diretamente dessa definição que o grupo de simetrias de cada folheação  $\mathcal{F}_i$  é  $\Sigma(\mathcal{F}_i) = \ker(\lambda)$ , para  $i = 1, 2$ . Obviamente, os elementos  $\gamma \in \Gamma \setminus \Sigma(\mathcal{F}_i)$  permutam as folheações  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ .

O próximo resultado estalecerá uma relação entre os homomorfismos  $\sigma$  e  $\lambda$ .

**Teorema 3.1.7.** *Sejam  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$ , onde  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo da Definição 3.1.1, e  $\lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o homomorfismo definido em (3.9). Então, para todo  $\gamma \in \Gamma$ ,*

$$\lambda(\gamma) = \det(\gamma)\sigma(\gamma),$$

onde  $\det(\gamma)$  denota o determinante da matriz de representação  $\rho(\gamma)$ .

*Demonstração.* Denotemos por  $(dx_1, dy_1)$  e  $(dx_2, dy_2)$  dois vetores nas direções tangentes das folheações  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  em  $(x, y)$ , respectivamente (podendo ser inclusive os vetores  $F_1(x, y)$  e  $F_2(x, y)$  definidos em (3.7)). Fixado  $\gamma \in \Gamma$ , denotemos por  $(d\tilde{x}_1, d\tilde{y}_1)$  e  $(d\tilde{x}_2, d\tilde{y}_2)$  suas imagens sob  $\gamma$  nas direções tangentes de  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  em  $\gamma(x, y)$ , respectivamente.

De acordo com a ação de  $\Gamma$  em  $T\mathbb{R}^2$  definida em (3.2), os vetores tangentes às curvas soluções de  $\omega = 0$  em  $\gamma(x, y)$  são dados por  $\gamma(dx_j, dy_j)$ , para  $j = 1, 2$ . Assim, por (3.9) temos que se  $\lambda(\gamma) = 1$ , então  $\gamma(dx_j, dy_j) = (d\tilde{x}_j, d\tilde{y}_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Neste caso,

$$\begin{vmatrix} d\tilde{x}_1 & d\tilde{x}_2 \\ d\tilde{y}_1 & d\tilde{y}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix} & \gamma \begin{pmatrix} dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \det(\gamma) \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{vmatrix},$$

onde as duas barras denotam o determinante da matriz. Se  $\lambda(\gamma) = -1$ , então  $\gamma(dx_j, dy_j) = (d\tilde{x}_i, d\tilde{y}_i)$ , para  $i \neq j$ ,  $j = 1, 2$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} d\tilde{x}_1 & d\tilde{x}_2 \\ d\tilde{y}_1 & d\tilde{y}_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \gamma \begin{pmatrix} dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} & \gamma \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \det(\gamma) \begin{vmatrix} dx_2 & dx_1 \\ dy_2 & dy_1 \end{vmatrix} \\ &= -\det(\gamma) \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} d\tilde{x}_1 & d\tilde{x}_2 \\ d\tilde{y}_1 & d\tilde{y}_2 \end{vmatrix} = \lambda(\gamma) \det(\gamma) \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, podemos decompor  $\omega$  em (3.3) como

$$\omega(x, y, dx, dy) = a \left( dy + \left( \frac{b + \sqrt{\delta}}{a} \right) dx \right) \left( dy + \left( \frac{b - \sqrt{\delta}}{a} \right) dx \right),$$

com  $a, b, c$  e  $\delta$  aplicados em  $(x, y)$ . Deste modo

$$a\omega(x, y, dx, dy) = (ady + (b + \sqrt{\delta})dx)(ady + (b - \sqrt{\delta})dx).$$

Como  $(dx_1, dy_1)$  e  $(dx_2, dy_2)$  são vetores tangentes às curvas soluções de  $\omega = 0$  no ponto  $(x, y)$ , temos que

$$ady_1 + (b + \sqrt{\delta})dx_1 = ady_2 + (b - \sqrt{\delta})dx_2 = 0.$$

Agora,  $(d\tilde{x}_1, d\tilde{y}_1)$  e  $(d\tilde{x}_2, d\tilde{y}_2)$  são duas direções soluções de  $\omega = 0$  em  $\gamma(x, y)$  e pela equivariância de  $\omega$  com respeito a  $\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} a\omega(\gamma(x, y), (d\tilde{x}, d\tilde{y})) &= a\sigma(\gamma)\omega(x, y, dx, dy) \\ &= \sigma(\gamma)(ady + (b + \sqrt{\delta})dx)(ady + (b - \sqrt{\delta})dx), \end{aligned}$$

com  $(d\tilde{x}, d\tilde{y}) = \gamma(dx, dy)$  e  $a, b, c$  e  $\delta$  calculados em  $(x, y)$ . Ainda, como  $\sigma(\gamma)^2 = 1$  temos

$$a\sigma(\gamma)\omega(\gamma(x, y), (d\tilde{x}, d\tilde{y})) = (ady + (b + \sqrt{\delta})dx)(ady + (b - \sqrt{\delta})dx),$$

com  $a, b, c$  e  $\delta$  calculados em  $(x, y)$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} &a\sigma(\gamma)\omega(\gamma(x, y), (d\tilde{x}, d\tilde{y})) \\ &= a(\sigma(\gamma)ad\tilde{y}^2 + 2\sigma(\gamma)bd\tilde{x}d\tilde{y} + \sigma(\gamma)cd\tilde{x}^2) \\ &= (\sigma(\gamma)ad\tilde{y} + (\sigma(\gamma)b + \sqrt{\delta})d\tilde{x})(\sigma(\gamma)ad\tilde{y} + (\sigma(\gamma)b - \sqrt{\delta})d\tilde{x}), \end{aligned}$$

com  $a, b, c$  e  $\delta$  calculados em  $\gamma(x, y)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} &(ady + (b + \sqrt{\delta})dx)(ady + (b - \sqrt{\delta})dx) \\ &= (\sigma(\gamma)ad\tilde{y} + (\sigma(\gamma)b + \sqrt{\delta})d\tilde{x})(\sigma(\gamma)ad\tilde{y} + (\sigma(\gamma)b - \sqrt{\delta})d\tilde{x}). \end{aligned}$$

Assim o par (ordenado)  $(dx_1, dy_1), (dx_2, dy_2)$  é levado no par  $(d\tilde{x}_1, d\tilde{y}_1), (d\tilde{x}_2, d\tilde{y}_2)$  se  $\sigma(\gamma) = 1$  e levado no par  $(d\tilde{x}_2, d\tilde{y}_2), (d\tilde{x}_1, d\tilde{y}_1)$  se  $\sigma(\gamma) = -1$ . Como a ação de  $\Gamma$  em  $T\mathbb{R}^2$  é ortogonal,

$$\begin{vmatrix} d\tilde{x}_1 & d\tilde{x}_2 \\ d\tilde{y}_1 & d\tilde{y}_2 \end{vmatrix} = \sigma(\gamma) \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{vmatrix}.$$

De (3.10), temos

$$\sigma(\gamma) \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{vmatrix} = \lambda(\gamma) \det(\gamma) \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{vmatrix},$$

implicando que

$$\lambda(\gamma) = \det(\gamma)\sigma(\gamma).$$

□

Na prática, mesmo reconhecendo  $\Gamma$  geometricamente, é uma tarefa difícil definir o homomorfismo  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  da Definição 3.1.1. O teorema anterior fornece tal definição bastando investigar geometricamente se cada  $\gamma \in \Gamma$  preserva as folheações (caso em que  $\lambda(\gamma) = 1$ ) ou permuta as folheações (caso em que  $\lambda(\gamma) = -1$ ). Para ilustrar, usaremos a seguir o Teorema 3.1.7 para construir o homomorfismo  $\sigma$ .

**Exemplo 3.1.8.** Considere a EDB

$$ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2 = 0$$

dada em (3.4), que tem  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  como grupo de simetrias e configuração geométrica dada na Figura 3.1. Pela configuração geométrica desta EDB, observamos que a reflexão  $\kappa$  preserva as folheações da EDB e que a reflexão  $-\kappa$  troca as folheações. Assim,  $\lambda(\kappa) = 1$  e  $\lambda(-\kappa) = -1$ . Além disso,  $\det(\kappa) = \det(-\kappa) = -1$ . Logo, pelo Teorema 3.1.7,  $\sigma(\kappa) = \det(\kappa)\lambda(\kappa) = -1$  e  $\sigma(-\kappa) = \det(-\kappa)\lambda(-\kappa) = 1$ . Para tal homomorfismo  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  temos que

$$\omega(x, y, dx, dy) = ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2$$

é  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -equivariante.

É importante notar que se olharmos cada folheação (a contínua e a pontilhada) da Figura 3.1 separadamente, temos que apenas a reflexão  $\kappa$  é de fato uma simetria da EDB. No entanto a combinação das duas folheações adiciona simetria à Figura 3.1, pois tal configuração é também simétrica com respeito à reflexão  $-\kappa$ , a qual por natureza deve inverter as folheações. Essa geometria pode se refletir no par de campos de vetores  $F_1$  e  $F_2$  associado a esse par de folheações. De fato, de acordo com (3.7) temos

$$F_j(x, y) = (y, -x + (-1)^j \sqrt{x^2 + y^2}), \quad j = 1, 2,$$

que são campos vetoriais  $\sigma$ -equivariantes sob a ação de  $\kappa$ , ou seja,

$$F_j(x, y) = \sigma(\kappa)\kappa F_j(x, y), \quad j = 1, 2.$$

No entanto,  $F_1$  e  $F_2$  não são  $\sigma$ -equivariantes sob a ação de  $-\kappa$ .

**Exemplo 3.1.9.** Considere a EDB

$$ydy^2 + \frac{1}{2}xdxdy - ydx^2 = 0 \quad (3.11)$$

cuja configuração geométrica é dada na Figura 3.2. Quando observamos tal configuração, notamos que as reflexões  $\kappa$  e  $-\kappa$  em torno dos eixos  $Ox$  e  $Oy$  pertencem ao grupo de simetrias dessa EDB, juntamente com a rotação  $R_\pi = \kappa(-\kappa)$ . Portanto, o grupo de simetrias da EDB (3.11) é gerado por  $\kappa$  e  $-\kappa$ , ou seja,  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Assim como no exemplo anterior,  $\kappa$  preserva as folheações da EDB e  $-\kappa$  as permuta, ou seja,  $\lambda(\kappa) = 1$  e  $\lambda(-\kappa) = -1$ . Pelo Teorema 3.1.7,  $\sigma(\kappa) = \det(\kappa)\lambda(\kappa) = -1$  e  $\sigma(-\kappa) = \det(-\kappa)\lambda(-\kappa) = 1$ . Para tal homomorfismo,

$$\omega(x, y, dx, dy) = ydy^2 + \frac{1}{2}xdxdy - ydx^2$$

é  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -equivariante.

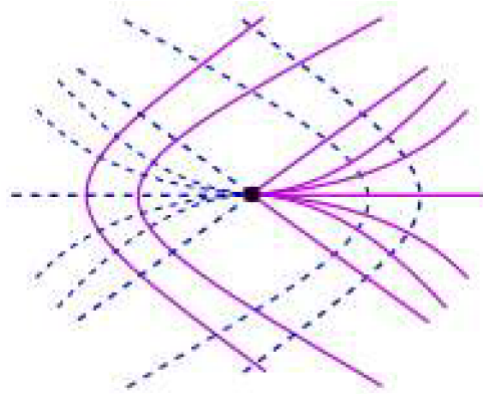


Figura 3.2: Configuração da EDB (3.11)

**Exemplo 3.1.10.** Considere a EDB

$$ydy^2 - 2xdxdy - ydx^2 = 0 \quad (3.12)$$

cuja configuração geométrica é dada na Figura 3.3. Tal configuração nos mostra que a reflexão  $\kappa$  em torno do eixo  $Ox$  e a rotação  $R_{\frac{\pi}{3}}$  pertencem ao grupo de simetrias da EDB (3.12). As outras simetrias, como  $-\kappa$  e  $R_{\frac{2\pi}{3}}$  por exemplo, são geradas por esses elementos. Portanto, o grupo de simetrias da EDB (3.12) é gerado por  $\kappa$  e  $R_{\frac{\pi}{3}}$ , ou equivalentemente  $\Gamma = D_6$ .

Note que  $\kappa$  preserva as folheações da EDB e que  $R_{\frac{\pi}{3}}$  as permuta. Assim,  $\lambda(\kappa) = 1$  e  $\lambda(R_{\frac{\pi}{3}}) = -1$ . Como  $\det(\kappa) = -1$  e  $\det(R_{\frac{\pi}{3}}) = 1$ , segue pelo Teorema 3.1.7 que  $\sigma(\kappa) = \sigma(R_{\frac{\pi}{3}}) = -1$ . Para o homomorfismo  $\sigma : D_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  assim definido temos que

$$\omega(x, y, dx, dy) = ydy^2 - 2xdxdy - ydx^2$$

é  $D_6$ -equivariante.

Neste exemplo também ocorre que cada folheação sozinha tem um grupo de simetrias menor do que  $D_6$ , a saber o grupo diedral  $D_3$ . Agora, combinando as duas folheações, simetrias extras são adicionadas à configuração, como pudemos verificar.

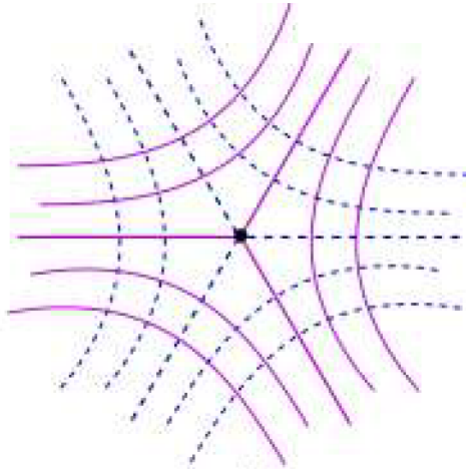


Figura 3.3: Configuração da EDB (3.12)

## 3.2 Superfície associada à EDB

Nesta seção definiremos a superfície  $M$  associada a uma EDB e mostraremos que ela pode ser coberta por três componentes disjuntas. Veremos que a ação de  $\Gamma$  em  $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$  induz a uma ação de  $\Gamma$  em  $M$ , de modo que as simetrias da EDB reflitam nas simetrias dessa superfície.

Seja  $\omega \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$  uma forma quadrática da forma (3.3). Considere o conjunto  $U = \Omega \cup \Delta$ , em que  $\Omega$  é o conjunto definido em (3.8) e  $\Delta$  é o conjunto discriminante definido em (1.6). Defina as funções  $P_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$P_j(x, y) = \frac{-b(x, y) + j\sqrt{\delta(x, y)}}{a(x, y)}, \quad j = -1, 1. \quad (3.13)$$

Obviamente, as funções  $P_j$  são dadas pela inclinação das retas tangentes ao par de folheações da EDB  $\omega = 0$  em cada ponto  $(x, y)$ . Como a função  $a$  não se anula em  $U$ , podemos reescrever (e renomear) os campos de vetores tangentes às folheações como

$$F_j(x, y) = (1, P_j(x, y)), \quad j = -1, 1. \quad (3.14)$$

Agora defina as aplicações  $\phi_j : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$\phi_j(x, y) = (x, y, P_j(x, y)), \quad j = -1, 1. \quad (3.15)$$

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$  uma forma quadrática como em (3.3). Considere as aplicações  $\phi_j$ ,  $j = -1, 1$ , dadas em (3.15). A superfície*

$$M = \phi_{-1}(U) \cup \phi_1(U)$$

*é chamada de superfície da EDB  $\omega = 0$ .*

A superfície  $M$  pode não ser regular e nem mesmo parametrizável. Ela é definida apenas como um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado pela união das imagens de  $\phi_{-1}$  e  $\phi_1$ . Mais especificamente, como  $\phi_{-1}(U) \cap \phi_1(U) = \phi_1(\Delta)$ ,  $M$  pode ser decomposta em três componentes disjuntas, como nos mostra a próxima proposição.

**Proposição 3.2.2.** *A superfície  $M$  da EDB  $\omega = 0$  pode ser decomposta na forma*

$$M = \phi_{-1}(\Omega) \dot{\cup} \phi_1(\Omega) \dot{\cup} \phi_1(\Delta).$$

*Demonstração.* Primeiro note que

$$\begin{aligned} M = \phi_{-1}(U) \cup \phi_1(U) &= \phi_{-1}(\Omega \cup \Delta) \cup \phi_1(\Omega \cup \Delta) \\ &= \phi_{-1}(\Omega) \cup \phi_{-1}(\Delta) \cup \phi_1(\Omega) \cup \phi_1(\Delta) \\ &= \phi_{-1}(\Omega) \cup \phi_1(\Omega) \cup \phi_1(\Delta), \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde a última igualdade segue do fato de  $\phi_{-1}(\Delta) = \phi_1(\Delta)$ .

Agora, mostremos que essa união é disjunta. De fato, se  $(x, y, z) \in \phi_{-1}(\Omega) \cap \phi_1(\Omega)$ , então  $(x, y) \in \Omega$  e  $z = P_{-1}(x, y) = P_1(x, y)$ . Dessa última igualdade segue que  $\delta(x, y) = 0$ , o que é um absurdo pois se  $(x, y) \in \Omega$ , então  $\delta(x, y) > 0$ . Portanto,  $\phi_{-1}(\Omega) \cap \phi_1(\Omega) = \emptyset$ .

Agora, se  $(x, y, z) \in \phi_1(\Omega) \cap \phi_1(\Delta)$ , então  $(x, y) \in \Omega \cap \Delta = \emptyset$ . Logo,  $\phi_1(\Omega) \cap \phi_1(\Delta) = \emptyset$ . Analogamente,  $\phi_{-1}(\Omega) \cap \phi_1(\Delta) = \emptyset$ , pois se  $(x, y, z) \in \phi_{-1}(\Omega) \cap \phi_1(\Delta)$ , então  $(x, y) \in \Omega \cap \Delta = \emptyset$ . Portanto, a união em (3.16) é disjunta.  $\square$

Ao considerarmos a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

podemos observar que  $\pi$  restrita a  $M$  é uma aplicação que cobre  $\Omega$  duas vezes. De fato,

$$\begin{aligned} \pi(M) &= \pi(\phi_1(\Omega) \cup \phi_{-1}(\Omega) \cup \phi_1(\Delta)) \\ &= \pi(\phi_1(\Omega)) \cup \pi(\phi_{-1}(\Omega)) \cup \pi(\phi_1(\Delta)) \\ &= \Omega \cup \Omega \cup \Delta. \end{aligned}$$

Pela continuidade das funções  $\phi_j$ , o conjunto  $\phi_1(\Delta)$  é uma curva em  $M$  e sua projeção é o conjunto discriminante  $\Delta$ .

Dada uma forma quadrática  $\omega \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ , podemos nos perguntar se as simetrias da EDB  $\omega = 0$  têm algum efeito na superfície  $M$ . No decorrer desta seção iremos definir uma ação do grupo de simetrias de  $\omega$  em  $M$  e mostrar que a resposta para essa pergunta é verdadeira para essa ação.

Sabemos que as folheações  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  de uma EDB estão relacionadas respectivamente com os campos de vetores tangentes  $F_{-1}$  e  $F_1$ , os quais estão em correspondência com as funções  $P_{-1}$  e  $P_1$ . Pelo Teorema 3.1.7, o homomorfismo  $\lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  governa a permutação das folheações  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ . Além disso, como a função  $\delta$  definida em (1.5) é  $\Gamma$ -invariante, o conjunto  $U = \Omega \cup \Delta$  é invariante sob a ação de  $\Gamma$ , ou seja, para todo  $(x, y) \in U$  e todo  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma(x, y) \in U$ . Neste caso, podemos definir

$$\gamma.P_j(x, y) = P_{j\lambda(\gamma)}(\gamma(x, y)) = \frac{-b(\gamma(x, y)) + j\lambda(\gamma)\sqrt{\delta(\gamma(x, y))}}{a(\gamma(x, y))}, j = -1, 1. \quad (3.17)$$

Com base nessa definição, estabeleceremos uma ação (não necessariamente linear) de  $\Gamma$  em  $M$ :

**Proposição 3.2.3.** *Sejam  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$ ,  $M$  a superfície da EDB  $\omega = 0$  e  $\phi_j$ ,  $j = -1, 1$ , como em (3.15). Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \Gamma \times M &\rightarrow M \\ (\gamma, (x, y, P_j(x, y))) &\mapsto (\gamma(x, y), \gamma.P_j(x, y)) \end{aligned}$$

define uma ação de  $\Gamma$  em  $M$ .

*Demonstração.* Primeiro denotaremos  $\gamma \star (x, y, P_j(x, y)) = (\gamma(x, y), \gamma.P_j(x, y))$ . Mostraremos que se  $\gamma \in \Gamma$ , então  $\gamma \star (x, y, P_j(x, y)) \in M$  para todo  $(x, y, P_j(x, y)) \in M$ . De fato, como  $U$  é invariante, se  $(x, y) \in U$  e  $\gamma \in \Gamma$ , então  $\gamma(x, y) \in U$ . Além disso, por (3.17) temos que

$$(\gamma(x, y), \gamma.P_j(x, y)) = \phi_{j\lambda(\gamma)}(\gamma(x, y)), j = -1, 1, \quad (3.18)$$

onde  $j\lambda(\gamma) = -1, 1$ . Pela definição de  $M$  segue que  $\gamma \star (x, y, P_j(x, y)) \in M$ .

Agora, seja  $e \in \Gamma$  o elemento neutro de  $\Gamma$ . Então

$$e \star (x, y, P_j(x, y)) = (e(x, y), P_{j\lambda(e)}(x, y)) = (x, y, P_j(x, y))$$

e para todo  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \star \gamma_2) \star (x, y, P_j(x, y)) &= ((\gamma_1 \star \gamma_2)(x, y), P_{j\lambda(\gamma_1 \star \gamma_2)}((\gamma_1 \star \gamma_2)(x, y))) \\ &= (\gamma_1(\gamma_2(x, y)), P_{j\lambda(\gamma_2)\lambda(\gamma_1)}(\gamma_1(\gamma_2(x, y)))) \\ &= \gamma_1 \star (\gamma_2(x, y), P_{j\lambda(\gamma_2)}(\gamma_2(x, y))) \\ &= \gamma_1 \star (\gamma_2 \star (x, y, P_j(x, y))), \end{aligned}$$

onde  $\star$  denota a operação do grupo  $\Gamma$  e a segunda igualdade segue pela ação de  $\Gamma$  restrita a  $U$  e porque  $\lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é um homomorfismo de grupos. Logo, a operação “ $\star$ ” define uma ação de  $\Gamma$  em  $M$ .  $\square$



A prova da proposição anterior nos mostra como  $\Gamma$  age nas componentes da superfície  $M$ .

**Corolário 3.2.4.** *Sejam  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$  e  $M$  a superfície de  $\omega = 0$ . Considere  $\lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o homomorfismo de grupos definido em (3.9). Se  $\lambda(\gamma) = 1$ , então  $\gamma$  deixa as componentes  $\phi_{-1}(\Omega)$  e  $\phi_1(\Omega)$  de  $M$  invariantes. Se  $\lambda(\gamma) = -1$ , então  $\gamma$  permuta tais componentes. Além disso,  $\phi_1(\Delta)$  é invariante sob a ação de  $\Gamma$ .*

*Demonstração.* Seja  $(x, y, P_j(x, y)) \in \phi_j(\Omega)$ . Por (3.18) temos

$$\gamma \star (x, y, P_j(x, y)) = \phi_{j\lambda(\gamma)}(\gamma(x, y)),$$

para todo  $(x, y) \in \Omega$  e todo  $\gamma \in \Gamma$ . Como  $\Omega$  é invariante sob a ação de  $\Gamma$ ,  $\gamma(x, y) \in \Omega$ . Portanto, se  $\lambda(\gamma) = 1$  então  $\gamma \star (x, y, P_j(x, y)) \in \phi_j(\Omega)$  e se  $\lambda(\gamma) = -1$  então  $\gamma \star (x, y, P_j(x, y)) \in \phi_{-j}(\Omega)$ .

Agora, se  $(x, y, P_1(x, y)) \in \phi_1(\Delta)$  então, como a função  $\delta$  é  $\Gamma$ -invariante,  $\delta(\gamma(x, y)) = \delta(x, y) = 0$ . Logo, por (3.13),  $P_{\lambda(\gamma)}(\gamma(x, y)) = P_1(\gamma(x, y))$ , para todo  $\gamma \in \Gamma$ . Novamente por (3.18) temos

$$\begin{aligned} \gamma \star (x, y, P_1(x, y)) &= \phi_{\lambda(\gamma)}(\gamma(x, y)) \\ &= (\gamma(x, y), P_{\lambda(\gamma)}(\gamma(x, y))) \\ &= (\gamma(x, y), P_1(\gamma(x, y))) \in \phi_1(\Delta), \end{aligned}$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$ . □

**Exemplo 3.2.5.** Considere a EDB

$$\omega(x, y, dx, dy) = dy^2 - xdx^2 = 0, \quad (3.19)$$

cujas configuração geométrica é dada na Figura 3.4 e cujo grupo de simetrias é  $\Gamma = \mathbb{Z}_2$  gerado pela reflexão  $\kappa$  em torno do eixo  $O_x$ . Notamos que  $\kappa$  permuta as folheações, então  $\lambda(\kappa) = -1$ . Segue do Teorema 3.1.7 que  $\sigma(\kappa) = 1$ . Logo, o homomorfismo  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o trivial. Como  $\delta(x, y) = x$ , temos  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ ,  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$  e  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ . As funções  $P_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi_j : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidas em (3.13) e (3.15) são dadas por

$$P_j(x, y) = j\sqrt{x} \quad \text{e} \quad \phi_j(x, y) = (x, y, j\sqrt{x}), \quad j = -1, 1$$

e os campos de vetores  $F_j$  definidos em (3.14) são dados por  $F_j(x, y) = (1, j\sqrt{x})$  para  $j = -1, 1$ . Portanto, as componentes disjuntas de  $M$  são  $\phi_{-1}(\Omega) = \{(x, y, -\sqrt{x}) \in \mathbb{R}^3; x > 0\}$ ,  $\phi_1(\Omega) = \{(x, y, \sqrt{x}) \in \mathbb{R}^3; x > 0\}$  e  $\phi_1(\Delta) = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ .

Na configuração da Figura 3.4, as linhas integrais sólidas correspondem à folheação  $\mathcal{F}_2$  associada ao campo  $F_1$ , enquanto que as linhas integrais pontilhadas correspondem

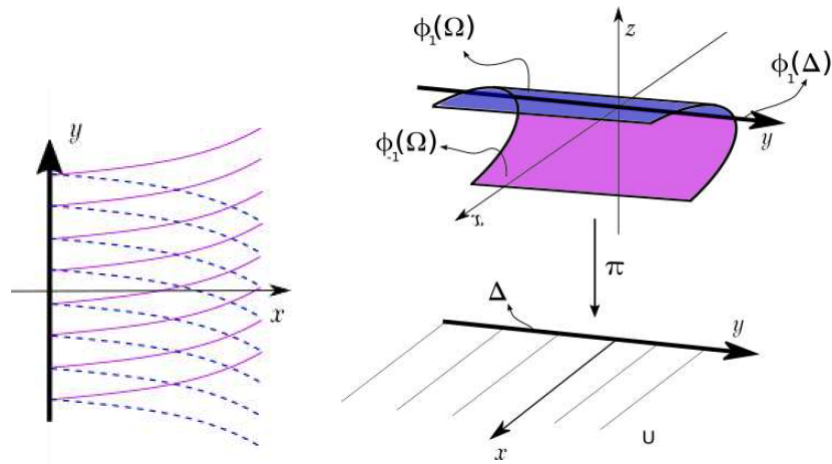


Figura 3.4: Configuração e superfície da EDB (3.19)

à folheação  $\mathcal{F}_1$  associada ao campo  $F_{-1}$ . O eixo  $O_y$  é o conjunto discriminante  $\Delta$ . Na superfície da Figura 3.4 associada à EDB (3.19), a parte superior representa sua componente  $\phi_1(\Omega)$ , a parte inferior representa sua componente  $\phi_{-1}(\Omega)$  e o eixo  $O_y$  em  $\mathbb{R}^3$  representa sua componente  $\phi_1(\Delta)$ .

**Exemplo 3.2.6.** Considere a EDB

$$\omega(x, y, dx, dy) = dy^2 - y^2 dx^2 = 0, \tag{3.20}$$

cuja configuração é dada na Figura 3.5 e cujo grupo de simetrias é  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  gerado pelas reflexões  $\kappa$  e  $-\kappa$  em torno dos eixos  $O_x$  e  $O_y$ .

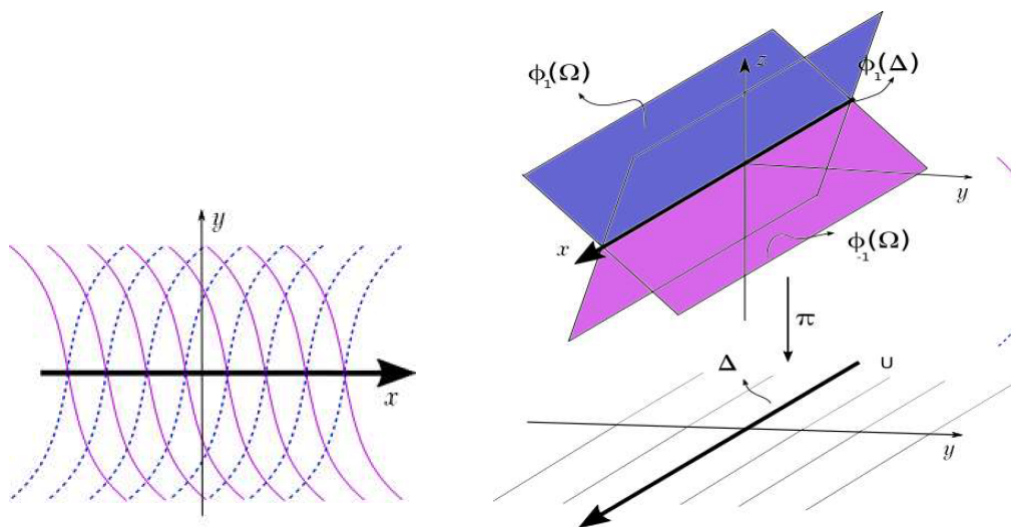


Figura 3.5: Configuração e superfície da EDB (3.20)

Notamos que  $\kappa$  e  $-\kappa$  permutam as folheações, então  $\lambda(\kappa) = \lambda(-\kappa) = -1$ . Segue do Teorema 3.1.7 que  $\sigma(\kappa) = \sigma(-\kappa) = 1$ . Logo, o homomorfismo  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o trivial. Como  $\delta(x, y) = y^2$ , temos  $U = \mathbb{R}^2$ ,  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$  e  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ . As funções  $P_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi_j : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidas em (3.13) e (3.15) são dadas por

$$P_j(x, y) = j|y| \quad \text{e} \quad \phi_j(x, y) = (x, y, j|y|), \quad j = -1, 1$$

e os campos de vetores  $F_j$  são dados por  $F_j(x, y) = (1, j|y|)$  para  $j = -1, 1$ . As componentes disjuntas de  $M$  são  $\phi_{-1}(\Omega) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = -|y|\}$ ,  $\phi_1(\Omega) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = |y|\}$  e  $\phi_1(\Delta) = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ .

Na configuração da Figura 3.5, as linhas integrais pontilhadas correspondem à folheação  $\mathcal{F}_2$  associada ao campo  $F_1$  e as linhas integrais sólidas correspondem à folheação  $\mathcal{F}_1$ , associada ao campo  $F_{-1}$ . O conjunto discriminante  $\Delta$  é o eixo  $O_x$ . Na superfície da Figura 3.5 associada à EDB (3.20), suas componentes  $\phi_1(\Omega)$  e  $\phi_{-1}(\Omega)$  estão representadas respectivamente nas partes superior e inferior da figura, unidas pela componente  $\phi_1(\Delta)$  dada pelo eixo  $O_x$  em  $\mathbb{R}^3$ .

---

# Formas gerais de EDBs com simetrias

---

Nosso objetivo neste capítulo é determinar todas as formas gerais de EDBs  $\Gamma$ -equivariantes sob a ação de um grupo de Lie compacto  $\Gamma \subseteq O(2)$ . Determinar as formas gerais dessas equações é um primeiro passo no estudo de EDBs com simetrias, tanto do ponto de vista algébrico quanto geométrico, e que abre caminhos para estudos futuros com aplicações em diversas áreas da matemática.

Como vimos no Capítulo 3, a investigação das simetrias em EDBs pode ser feita em termos puramente algébricos. Veremos neste capítulo que o conjunto das EDBs  $\Gamma$ -equivariantes (Definição 3.1.2) segundo um homomorfismo de grupos  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  pode ser identificado com o espaço das aplicações a valores matriciais  $\Gamma_\sigma$ -equivariantes (Definição 2.5.1), que por sua vez é um módulo sob o anel das funções  $\Gamma$ -invariantes. Usaremos essa identificação para a conclusão deste capítulo.

Para o que segue temos a seguinte subdivisão: na Seção 4.1, introduziremos as notações e o procedimento que será adotado para determinarmos as formas gerais; Da Seção 4.2 à Seção 4.7, deduziremos as formas gerais de EDBs  $\Gamma$ -equivariantes sob a ação dos grupos  $SO(2)$ ,  $O(2)$ ,  $\mathbb{Z}_n$ ,  $D_n$ , com  $n \geq 3$ ,  $\mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , respectivamente. Em tais seções, analisaremos todas as possibilidades para o homomorfismo  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  da Definição 3.1.2; na Seção 4.8, apresentaremos uma tabela contendo todas as formas gerais determinadas a partir da Seção 4.2.

Nossa abordagem neste capítulo terá como base as referências [16, 20], onde poderão ser encontradas todas as figuras das configurações geométricas das EDBs esboçadas aqui. Tais figuras foram geradas pelo programa ODEinR2 disponível no site citado em [1].

## 4.1 O módulo das aplicações a valores matriciais

Nesta seção, introduziremos o módulo que nos auxiliará na determinação das formas gerais de EDBs  $\Gamma$ -equivariantes. Para o que segue,  $\Gamma$  é um grupo de Lie compacto

agindo ortogonalmente em  $\mathbb{R}^2$ . Iremos denotar a representação  $\rho(\gamma)$  de  $\gamma \in \Gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  simplesmente por  $\gamma$ . Como a ação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  é ortogonal, temos que  $\gamma^t\gamma = \gamma\gamma^t = I_2$ , onde  $I_2$  denota a matriz identidade de ordem 2.

Começaremos lembrando que toda forma quadrática diferenciável

$$\omega(x, y, dx, dy) = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 \quad (4.1)$$

está associada a uma aplicação a valores matriciais  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  dada por

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

onde  $\text{Sym}_2$  denota o espaço das matrizes simétricas de ordem 2. No Capítulo 3, vimos que se  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$ , então a matriz  $B(x, y)$  associada a  $\omega$  satisfaz

$$B(\gamma(x, y)) = \sigma(\gamma)\gamma B(x, y)\gamma^t, \quad (4.3)$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e todo  $\gamma \in \Gamma$ , isto é, a aplicação  $B$  é  $\Gamma_\sigma$ -equivariante (Definição 2.5.1) segundo a ação de  $\Gamma$  em  $\text{Sym}_2$  dada por

$$\gamma \cdot A = \gamma A \gamma^t, \quad (4.4)$$

para todo  $A \in \text{Sym}_2$  (veja Exemplo 2.2.5). Reciprocamente, dada uma aplicação  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  que satisfaça (4.3) para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e todo  $\gamma \in \Gamma$ , então

$$\begin{aligned} \omega(\gamma(x, y), \gamma(dx, dy)) &= \left[ \gamma \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right]^t B(\gamma(x, y)) \left[ \gamma \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}^t \gamma^t \sigma(\gamma) \gamma B(x, y) \gamma^t \gamma \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= \sigma(\gamma) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}^t B(x, y) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= \sigma(\gamma) \omega(x, y, dx, dy), \end{aligned}$$

ou seja,  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$ . Portanto,  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$  se, e somente se, a aplicação  $B$  associada é  $\Gamma_\sigma$ -equivariante.

Isso nos mostra que o problema de encontrar formas gerais para EDBs  $\Gamma$ -equivariantes dadas pelos zeros de (4.1) pode ser convertido em um problema de encontrar formas gerais para as aplicações a valores matriciais  $\Gamma_\sigma$ -equivariantes  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$ , cujo espaço tem estrutura de módulo sobre o anel das funções  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que são  $\Gamma$ -invariantes segundo a ação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^2$ . Pelo Teorema de Poénaru (Teorema 2.4.13), podemos nos restringir ao caso polinomial. Assim sendo, denotaremos por  $\vec{\mathcal{P}}[\Gamma, \ker(\sigma)]$  o módulo sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\Gamma)$

das aplicações polinomiais a valores matriciais  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$   $\Gamma_\sigma$ -equivariantes. Essa notação é motivada pelo fato da definição do homomorfismo  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  ser determinada pelo subgrupo  $\ker(\sigma)$  de  $\Gamma$ .

Nas Seções 4.2 a 4.5, procederemos de duas maneiras, dependendo se o homomorfismo  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é trivial ou sobrejetor. No primeiro caso, calcularemos os geradores do módulo  $\mathcal{M}(\Gamma)$  das aplicações  $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  que são  $\Gamma$ -equivariantes (pois  $\sigma$  é trivial) segundo a ação (4.4), onde  $M_2(\mathbb{R})$  é o conjunto das matrizes de ordem 2 com entradas reais, e os projetaremos em  $\vec{\mathcal{P}}[\Gamma, \ker(\sigma)]$  usando a projeção

$$M \mapsto B = \frac{1}{2}(M + M^t). \quad (4.5)$$

No segundo caso, aplicaremos o Algoritmo 2.5.9 descrito no Capítulo 2. Nas Seções 4.6 e 4.7, usaremos a  $\Gamma_\sigma$ -equivariância de  $B \in \vec{\mathcal{P}}[\Gamma, \ker(\sigma)]$  segundo a igualdade (4.3) com  $B(x, y)$  dada em (4.2), para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Para o cálculo dos geradores do módulo  $\mathcal{M}(\Gamma)$ , usaremos coordenadas complexas. Como qualquer aplicação  $\mathbb{R}$ -linear  $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  pode ser escrita na forma

$$M(w) = \alpha w + \beta \bar{w}, \quad (4.6)$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , podemos associá-la à matriz real

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \beta_2 - \alpha_2 \\ \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix},$$

onde  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  e  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ , com  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ . De fato, se  $w = x_1 + ix_2$ , então (4.6) pode ser escrita em coordenadas reais como

$$M(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \beta_2 - \alpha_2 \\ \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Inversamente, se  $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ , então é possível construir uma aplicação complexa  $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  via (4.7) escolhendo  $\alpha_1 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12})$ ,  $\beta_1 = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})$  e  $\beta_2 = \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12})$ .

Agora, se os coeficientes de  $M$  em (4.6) dependem de  $z \in \mathbb{C}$ , então podemos escrever  $M(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  na forma

$$M(z)(w) = \alpha(z)w + \beta(z)\bar{w}, \quad (4.8)$$

onde  $\alpha, \beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  são funções de  $z$ , e associá-la à matriz (adotaremos a mesma notação da aplicação)

$$M(z) = \begin{pmatrix} \alpha_1(z) + \beta_1(z) & \beta_2(z) - \alpha_2(z) \\ \alpha_2(z) + \beta_2(z) & \alpha_1(z) - \beta_1(z) \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

onde  $\alpha_j, \beta_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  derivam de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Pelo Teorema de Poénaru (Teorema 2.4.13), podemos assumir  $M(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  polinomial, de modo que  $\alpha, \beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  são da forma  $\alpha(z) = \sum \alpha_{jk} z^j \bar{z}^k$  e  $\beta(z) = \sum \beta_{jk} z^j \bar{z}^k$ , com  $\alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbb{C}$ . Portanto,

$$M(z)(w) = \sum \alpha_{jk} z^j \bar{z}^k w + \sum \beta_{jk} z^j \bar{z}^k \bar{w}, \quad (4.10)$$

com  $\alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbb{C}$ . De agora em diante, para o caso em que  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é trivial, assumiremos  $M \in \mathcal{M}(\Gamma)$  escrita em coordenadas complexas como em (4.10) e associada à matriz  $M(z) \in M_2(\mathbb{R})$  definida em (4.9). Como  $M$  é  $\Gamma$ -equivariante segundo a ação (4.4) e  $\gamma^t = \gamma^{-1}$ , temos

$$M(\gamma z) = \gamma.M(z) = \gamma M(z) \gamma^{-1},$$

de modo que  $M(\gamma z)(w) = \gamma M(z)(\gamma^{-1} w)$ , para todo  $\gamma \in \Gamma$  e todo  $z, w \in \mathbb{C}$ . Note que  $\sigma$  não aparece na última igualdade, pois ele é trivial.

Daqui em diante, apenas para especificar a definição de  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  chamaremos as formas quadráticas  $\Gamma$ -equivariantes também de formas quadráticas  $\Gamma[\ker(\sigma)]$ -equivariantes.

## 4.2 Formas quadráticas $SO(2)[SO(2)]$ -equivariantes

Nesta seção, consideraremos a ação do grupo  $SO(2)$  em  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  dada por  $\theta z = e^{i\theta} z$ , com  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Como  $SO(2)$  não possui subgrupos normais de índice 2, temos que a única possibilidade para  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é ser trivial. Começaremos calculando os geradores do módulo  $\mathcal{M}(SO(2))$  sobre o anel de invariantes  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(SO(2))$ . Impondo a equivariância de  $SO(2)$  em  $M \in \mathcal{M}(SO(2))$ , temos

$$M(\theta z)(w) = \theta M(z)(\theta^{-1} w),$$

para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ . De (4.10),

$$\sum \alpha_{jk} (e^{i\theta} z)^j \overline{(e^{i\theta} z)^k} w + \sum \beta_{jk} (e^{i\theta} z)^j \overline{(e^{i\theta} z)^k} \bar{w} = e^{i\theta} \sum \alpha_{jk} z^j \bar{z}^k e^{-i\theta} w + e^{i\theta} \sum \beta_{jk} z^j \bar{z}^k e^{i\theta} \bar{w},$$

o que implica em

$$\sum \alpha_{jk} e^{i\theta(j-k)} z^j \bar{z}^k w + \sum \beta_{jk} e^{i\theta(j-k)} z^j \bar{z}^k \bar{w} = \sum \alpha_{jk} z^j \bar{z}^k w + \sum \beta_{jk} e^{2i\theta} z^j \bar{z}^k \bar{w}.$$

Assim,

$$\alpha_{jk} = \alpha_{jk} e^{i\theta(j-k)} \quad \text{e} \quad \beta_{jk} = \beta_{jk} e^{i\theta(j-k-2)},$$

para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , isto é,

$$\alpha_{jk} = 0 \quad \text{ou} \quad j = k \quad \text{e} \quad \beta_{jk} = 0 \quad \text{ou} \quad j = k + 2.$$

Logo,

$$M(z)(w) = \sum \alpha_k (z\bar{z})^k w + \sum \beta_k (z\bar{z})^k z^2 \bar{w}, \quad (4.11)$$

com  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$ . Tomando  $\alpha_k = a_k + ib_k$  e  $\beta_k = c_k + id_k$ , com  $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$ , temos

$$M(z)(w) = \sum a_k (z\bar{z})^k w + \sum b_k (z\bar{z})^k iw + \sum c_k (z\bar{z})^k z^2 \bar{w} + \sum d_k (z\bar{z})^k iz^2 \bar{w}.$$

Como  $\{z\bar{z}\}$  é uma base de Hilbert para  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(SO(2))$  (veja Exemplo 2.4.6) temos que

$$\left\{ M_1(z)(w) = w, M_2(z)(w) = iw, M_3(z)(w) = z^2 \bar{w}, M_4(z)(w) = iz^2 \bar{w} \right\}$$

é um conjunto de geradores para  $\mathcal{M}(SO(2))$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(SO(2))$ .

Agora, aplicaremos a projeção definida em (4.5) nos geradores de  $\mathcal{M}(SO(2))$  para determinar os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[SO(2), SO(2)]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(SO(2))$  (note que como  $\sigma : SO(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é trivial,  $\ker(\sigma) = SO(2)$ ).

Para  $M_1(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 1$  e  $\beta(z) = 0$ . Por (4.9),

$$M_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, conseqüentemente,  $B_1(z) = M_1(z)$ , pois  $M_1(z) \in Sym_2$ .

Para  $M_2(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = i$  e  $\beta(z) = 0$ . Por (4.9),

$$M_2(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, então,

$$B_2(z) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para  $M_3(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 0$  e  $\beta(z) = z^2$ . Tomando  $z = x + iy$ , segue de (4.9) que

$$M_3(z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

e, então,  $B_3(z) = M_3(z)$ , pois  $M_3(z) \in Sym_2$ .

Para  $M_4(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 0$  e  $\beta(z) = iz^2$ . Tomando novamente  $z = x + iy$ , temos

$$M_4(z) = \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

e, então,  $B_4(z) = M_4(z)$ . Portanto,

$$\left\{ B_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3(z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}, B_4(z) = \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix} \right\}$$



é um conjunto de geradores para o módulo  $\vec{\mathcal{P}}[SO(2), SO(2)]$  das aplicações polinomiais  $B : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \rightarrow Sym_2$  que são  $SO(2)_\sigma$ -equivariantes sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(SO(2))$ , onde  $\sigma : SO(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo trivial.

O próximo teorema revela a forma geral das EDBs  $SO(2)$ -equivariantes.

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[SO(2), \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : SO(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo trivial. Então*

$$\begin{aligned} a(x, y) &= p_1(x, y) + (y^2 - x^2)p_2(x, y) + 2xyp_3(x, y) \\ b(x, y) &= 2xyp_2(x, y) + (x^2 - y^2)p_3(x, y) \\ c(x, y) &= p_1(x, y) + (x^2 - y^2)p_2(x, y) - 2xyp_3(x, y), \end{aligned}$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(SO(2))$ .

*Demonstração.* Considere a aplicação  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow Sym_2$  dada em (4.2) associada à EDB  $\omega = 0$ . Como  $\omega$  é  $SO(2)$ -equivariante, então  $B \in \vec{\mathcal{P}}[SO(2), SO(2)]$  (como  $\sigma$  é trivial,  $\ker(\sigma) = SO(2)$ ) e, portanto, existem  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(SO(2))$  tais que

$$B(x, y) = p_1(x, y)B_1(z) + p_2(x, y)B_3(z) + p_3(x, y)B_4(z),$$

para  $z = x + iy$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + p_3(x, y) \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 + (x^2 - y^2)p_2 - 2xyp_3 & 2xyp_2 + (x^2 - y^2)p_3 \\ 2xyp_2 + (x^2 - y^2)p_3 & p_1 + (y^2 - x^2)p_2 + 2xyp_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $p_j = p_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Usando igualdade de matrizes obtemos o desejado.  $\square$

Finalizaremos esta seção com um exemplo de uma EDB  $SO(2)$ -equivariante e sua configuração geométrica.

**Exemplo 4.2.2.** Considere  $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1$  nos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do teorema anterior. Então

$$\omega(x, y, dx, dy) = (1 + y^2 - x^2 + 2xy)dy^2 + 2(2xy + x^2 - y^2)dxdy + (1 + x^2 - y^2 - 2xy)dx^2$$

é um exemplo de uma forma quadrática  $SO(2)$ -equivariante. Sua função discriminante  $SO(2)$ -invariante é dada por

$$\delta(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2 - 1$$

e sua configuração geométrica é dada na Figura 4.1. Como  $\det(R_\theta) = 1$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$  temos, pelo Teorema 3.1.7, que o homomorfismo  $\lambda : SO(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) também é trivial (coincide com  $\sigma$ ). Portanto, os elementos de  $SO(2)$  preservam as folheações da EDB  $\omega = 0$ .

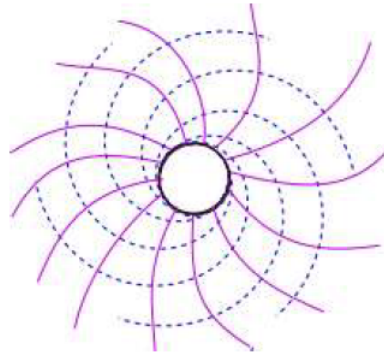


Figura 4.1: Configuração com grupo de simetrias  $SO(2)$ .

## 4.3 Formas quadráticas $O(2)$ -equivariantes

Nesta seção, consideraremos primeiramente  $\sigma : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  trivial e depois  $\sigma : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  em que  $\ker(\sigma) = SO(2)$ . Para isso, considere a ação de  $O(2)$  em  $\mathbb{C}$  dada por  $\theta z = e^{i\theta}z$  e  $\kappa z = \bar{z}$ , para todo  $\theta \in [0, 2\pi)$  e todo  $z \in \mathbb{C}$ .

### 4.3.1 Formas quadráticas $O(2)[O(2)]$ -equivariantes

Considere  $\sigma : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o homomorfismo trivial. Começaremos calculando os geradores do módulo  $\mathcal{M}(O(2))$  sobre o anel de invariantes  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2))$ . Impondo a equivariância com respeito a  $\kappa$  em  $M \in \mathcal{M}(O(2))$ , temos

$$M(z)(w) = \overline{M(\bar{z})(\bar{w})},$$

o que de acordo com (4.10) nos dá

$$\begin{aligned} \sum \alpha_{jk} z^j \bar{z}^k w + \sum \beta_{jk} z^j \bar{z}^k \bar{w} &= \overline{\sum \alpha_{jk} \bar{z}^j z^k \bar{w} + \sum \beta_{jk} \bar{z}^j z^k w} \\ &= \sum \overline{\alpha_{jk}} z^j \bar{z}^k w + \sum \overline{\beta_{jk}} z^j \bar{z}^k \bar{w}. \end{aligned}$$

Assim,  $\alpha_{jk} = \overline{\alpha_{jk}}$  e  $\beta_{jk} = \overline{\beta_{jk}}$ , ou seja,  $\alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbb{R}$ .

Como  $M$  é  $SO(2)$ -equivariante, então  $M$  tem a forma (4.11), ou seja,

$$M(z)(w) = \sum \alpha_k (z\bar{z})^k w + \sum \beta_k (z\bar{z})^k z^2 \bar{w},$$

com  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ , já que  $M$  é  $\kappa$ -equivariante.

Como  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2)) \subset \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(SO(2)) = \langle z\bar{z} \rangle$  e a função  $u_1(z) = z\bar{z}$  também é  $\kappa$ -invariante, então  $\{z\bar{z}\}$  é uma base de Hilbert para  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2))$ . Assim

$$\left\{ M_1(z)(w) = w, M_2(z)(w) = z^2\bar{w} \right\}$$

é um conjunto gerador para  $\mathcal{M}(O(2))$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2))$ .

Agora, aplicaremos a projeção definida em (4.5) em tais geradores para determinar os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[O(2), O(2)]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2))$ , usando sempre a associação de (4.8) com (4.9).

Para  $M_1(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 1$  e  $\beta(z) = 0$ , ou seja,

$$M_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $M_1(z) \in \text{Sym}_2$ ,  $B_1(z) = M_1(z)$ .

Para  $M_2(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 0$  e  $\beta(z) = z^2$ , ou seja,

$$M_2(z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

para  $z = x + iy$ . Logo,  $B_2(z) = M_2(z)$ . Portanto,

$$\left\{ B_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2(z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix} \right\}$$

é um conjunto de geradores para  $\vec{\mathcal{P}}[O(2), O(2)]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(O(2))$ .

O próximo teorema nos dá a forma geral das EDBs  $O(2)$ -equivariantes.

**Teorema 4.3.1.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[O(2), \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo trivial. Então*

$$\begin{aligned} a(x, y) &= p_1(x, y) + (y^2 - x^2)p_2(x, y), \\ b(x, y) &= 2xyp_2(x, y), \\ c(x, y) &= p_1(x, y) + (x^2 - y^2)p_2(x, y), \end{aligned}$$

onde  $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(O(2))$ .

*Demonstração.* Como  $\omega$  é  $O(2)$ -equivariante e  $\ker(\sigma) = O(2)$ , então  $B \in \vec{\mathcal{P}}[O(2), O(2)]$ , onde  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  é da forma (4.2). Portanto, existem  $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(O(2))$  tais que

$$B(x, y) = p_1(x, y)B_1(z) + p_2(x, y)B_2(z),$$

com  $z = x + iy$ , de modo que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1(x, y) + (x^2 - y^2)p_2(x, y) & 2xyp_2(x, y) \\ 2xyp_2(x, y) & p_1(x, y) + (y^2 - x^2)p_2(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado.  $\square$

Finalizaremos esta subseção com um exemplo de uma EDB  $O(2)$ -equivariante para  $\sigma : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  trivial.

**Exemplo 4.3.2.** Considere  $p_1 \equiv 0$  e  $p_2 \equiv 1$  nos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do teorema anterior. Então,

$$\omega(x, y, dx, dy) = (y^2 - x^2)dy^2 + 4xydx dy + (x^2 - y^2)dx^2$$

é uma forma quadrática  $O(2)$ -equivariante, com a função discriminante dada por

$$\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

e cuja configuração geométrica é dada na Figura 4.2. Pelo Teorema 3.1.7, como  $\det(R_\theta) = -\det(\kappa) = 1$ , temos o homomorfismo  $\lambda : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  não trivial com  $\ker(\lambda) = SO(2)$ . Isso significa que os elementos de  $SO(2)$  preservam as folheações e a reflexão  $\kappa$  as permuta.

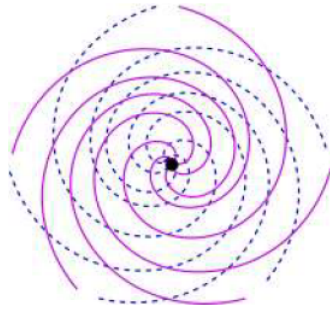


Figura 4.2: Configuração com simetria  $O(2)$ .

### 4.3.2 Formas quadráticas $O(2)[SO(2)]$ -equivariantes

Nesta subseção iremos determinar a forma geral de uma EDB  $O(2)$ -equivariante segundo um homomorfismo  $\sigma : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  em que  $\ker(\sigma) = SO(2)$ . Para isso, como  $\sigma$  é sobrejetor, vamos seguir os passos do Algoritmo 2.5.9, com as notações adaptadas para o contexto de EDBs.

1. Considere  $\Gamma = O(2)$ ,  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o epimorfismo tal que  $\ker(\sigma) = SO(2)$  e  $\delta = \kappa \in O(2) \setminus SO(2)$ .
2. Considere a base de Hilbert  $\{u_1(z) = z\bar{z}\}$  para o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(SO(2))$  obtida no Exemplo 2.4.6 e o conjunto

$$\left\{ B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix} \right\}$$

de geradores para  $\vec{\mathcal{P}}[SO(2), SO(2)]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(SO(2))$  obtidos na Seção 4.2, onde  $B_j = B_j(z)$ , com  $z = x + iy$  e  $j = 0, 1, 2$ . Para facilitar os cálculos, vamos substituir  $B_0, B_1$  e  $B_2$  por suas aplicações associadas  $H_0(z)(w) = w$ ,  $H_1(z)(w) = z^2\bar{w}$  e  $H_2(z)(w) = iz^2\bar{w}$  via a associação de (4.8) com a matriz (4.9).

3. Defina  $S(u_0)(z) = 1$  e calcule

$$S(u_1)(z) = \frac{1}{2}(z\bar{z} - \bar{z}z) = 0,$$

via projeção  $S : \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(SO(2)) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(SO(2))$  da Definição 2.5.3 com  $\delta = \kappa$ .

4. Calcule os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[SO(2), SO(2)]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2))$  construindo as aplicações

$$H_{ij}(z)(w) = S(u_i)(z)H_j(z)(w)$$

para  $i = 0, 1$  e  $j = 0, 1, 2$ . Neste caso, temos

$$H_{0j}(z)(w) = S(u_0)(z)H_j(z)(w) = H_j(z)(w)$$

e

$$H_{1j}(z)(w) = S(u_1)(z)H_j(z)(w) = 0,$$

para  $j = 0, 1, 2$ .

5. Calcule os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[O(2), SO(2)]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2))$  dados por  $\vec{S}(H_{ij})$  para  $i = 0, 1$  e  $j = 0, 1, 2$ , via a projeção  $\vec{S}$  da Definição 2.5.3. Neste caso, tomando  $\delta = \kappa$  temos  $\vec{S} : \vec{\mathcal{P}}[SO(2), SO(2)] \rightarrow \vec{\mathcal{P}}[SO(2), SO(2)]$  dada por

$$\vec{S}(H_{ij})(z)(w) = \frac{1}{2} \left( H_{ij}(z)(w) - \overline{H_{ij}(\bar{z})(\bar{w})} \right).$$

Logo,

$$\vec{S}(H_{00})(z)(w) = \frac{1}{2} \left( H_{00}(z)(w) - \overline{H_{00}(\bar{z})(\bar{w})} \right) = \frac{1}{2} (w - \bar{w}) = 0,$$

$$\vec{S}(H_{01})(z)(w) = \frac{1}{2} \left( H_{01}(z)(w) - \overline{H_{01}(\bar{z})(\bar{w})} \right) = \frac{1}{2} (z^2 \bar{w} - \bar{z}^2 w) = 0,$$

$$\vec{S}(H_{02})(z)(w) = \frac{1}{2} \left( H_{02}(z)(w) - \overline{H_{02}(\bar{z})(\bar{w})} \right) = \frac{1}{2} (iz^2 \bar{w} + iz^2 \bar{w}) = iz^2 \bar{w}$$

e para  $j = 0, 1, 2$  temos

$$\vec{S}(H_{1j})(z)(w) = 0.$$

Portanto, o único gerador de  $\vec{\mathcal{P}}[O(2), SO(2)]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2))$  é  $\tilde{H}(z)(w) = iz^2 \bar{w}$ , associado à matriz

$$\tilde{B}(z) = \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

com  $z = x + iy$ . Temos então o próximo resultado.

**Teorema 4.3.3.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[O(2), \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o epimorfismo com  $\ker(\sigma) = SO(2)$ . Então*

$$a(x, y) = 2xyp(x, y), \quad b(x, y) = (x^2 - y^2)p(x, y), \quad c(x, y) = -2xyp(x, y),$$

onde  $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(O(2))$ .

*Demonstração.* Como  $\omega \in \mathcal{Q}[O(2), \sigma]$ , temos que a aplicação  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  associada pertence a  $\vec{\mathcal{P}}[O(2), SO(2)]$ . Então existe  $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(O(2))$  tal que

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} = p(x, y) \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2xyp(x, y) & (x^2 - y^2)p(x, y) \\ (x^2 - y^2)p(x, y) & 2xyp(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

obtendo o desejado. □

**Exemplo 4.3.4.** Considere  $p \equiv 1$  nos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do Teorema 4.3.3. Então

$$\omega(x, y, dx, dy) = 2xydy^2 + 2(x^2 - y^2)dxdy - 2xydx^2$$

é uma forma quadrática  $O(2)$ -equivariante segundo um homomorfismo  $\sigma$  tal que  $\ker(\sigma) = SO(2)$ . Sua função discriminante é  $O(2)$ -invariante e dada por

$$\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

e sua configuração geométrica é dada na Figura 4.3. Segundo o Teorema 3.1.7, o homomorfismo  $\lambda : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) é trivial, de modo que todos os elementos de  $O(2)$  preservam as folheações de  $\omega = 0$ .

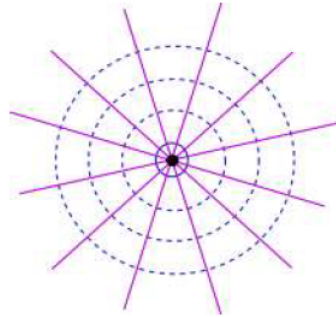


Figura 4.3: Configuração com simetria  $O(2)[SO(2)]$ .

## 4.4 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_n$ -equivariantes

Nesta seção, consideraremos o grupo  $\mathbb{Z}_n$ , com  $n \geq 3$ , agindo em  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  segundo a ação

$$\theta z = e^{i2\pi/n} z,$$

onde o  $\theta$  simboliza a ação da rotação  $R_{\frac{2\pi}{n}}$ . Novamente, iremos dividir esta seção em duas subseções, na primeira considerando o homomorfismo  $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  trivial e na segunda considerando  $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  tal que  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_{n/2}$ . Note que para esse último caso devemos assumir  $n$  par.

### 4.4.1 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_n[\mathbb{Z}_n]$ -equivariantes, $n \geq 3$

Começaremos calculando os geradores do módulo  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_n)$  sobre o anel de invariantes  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ . Impondo a equivariância de  $\mathbb{Z}_n$  em  $M \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}_n)$  temos

$$M(\theta z)(w) = \theta M(z)(\theta^{-1}w),$$

para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ . Usando (4.10) e efetuando os mesmos cálculos iniciais da Seção 4.2, temos

$$\alpha_{jk} = \alpha_{jk} e^{(i2\pi/n)(j-k)} \quad \text{e} \quad \beta_{jk} = \beta_{jk} e^{(i2\pi/n)(j-k-2)},$$

isto é,

$$\alpha_{jk} = 0 \quad \text{ou} \quad j \equiv k \pmod{n} \quad \text{e} \quad \beta_{jk} = 0 \quad \text{ou} \quad j \equiv (k+2) \pmod{n}. \quad (4.12)$$

Pelo Exemplo 2.4.7, uma base de Hilbert para  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$  é dada por

$$\{u_1(z) = z\bar{z}, u_2(z) = z^n + \bar{z}^n, u_3(z) = i(z^n - \bar{z}^n)\}.$$

Vamos usar tal base juntamente com (4.12) para obter os geradores de  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_n)$ . Começaremos fatorando  $z\bar{z}$  em (4.10):

$$M(z)(w) = \sum_{j \geq k} \alpha_{jk}(z\bar{z})^k z^{j-k} w + \sum_{j < k} \alpha_{jk}(z\bar{z})^j \bar{z}^{k-j} w + \sum_{j \geq k} \beta_{jk}(z\bar{z})^k z^{j-k} \bar{w} + \sum_{j < k} \beta_{jk}(z\bar{z})^j \bar{z}^{k-j} \bar{w}$$

com  $\alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbb{C}$ . De (4.12), se  $j \geq k$ , então existem  $l_1, l_3 \geq 0$  tais que  $l_1 n = j - k$  e  $l_3 n + 2 = j - k$  respectivamente para  $\alpha_{jk}$  e  $\beta_{jk}$ . Analogamente, se  $j < k$ , então existem  $l_2, l_4 \geq 1$  tais que  $l_2 n = k - j$  e  $l_4 n - 2 = k - j$  respectivamente para  $\alpha_{jk}$  e  $\beta_{jk}$ . Logo,

$$\begin{aligned} M(z)(w) &= \sum_{k, l_1} c_{kl_1}^1 (z\bar{z})^k z^{l_1 n} w + \sum_{j, l_2} c_{jl_2}^2 (z\bar{z})^j \bar{z}^{l_2 n} w \\ &+ \sum_{k, l_3} c_{kl_3}^3 (z\bar{z})^k z^{l_3 n + 2} \bar{w} + \sum_{j, l_4} c_{jl_4}^4 (z\bar{z})^j \bar{z}^{l_4 n - 2} \bar{w}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

com  $c_{kl_i}^i, c_{jl_i}^i \in \mathbb{C}$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $l_1, l_3 \geq 0$  e  $l_2, l_4 \geq 1$ . Para os cálculos a seguir usaremos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} z^{ln} &= (z^n + \bar{z}^n) z^{(l-1)n} - (z\bar{z})^n z^{(l-2)n}, \quad l \geq 2; \\ \bar{z}^{ln} &= (z^n + \bar{z}^n) \bar{z}^{(l-1)n} - (z\bar{z})^n \bar{z}^{(l-2)n}, \quad l \geq 2; \\ z^{ln+2} &= (z^n + \bar{z}^n) z^{(l-1)n+2} - (z\bar{z})^n z^{(l-2)n+2}, \quad l \geq 2; \\ \bar{z}^{ln-2} &= (z^n + \bar{z}^n) \bar{z}^{(l-1)n-2} - (z\bar{z})^n \bar{z}^{(l-2)n-2}, \quad l \geq 3; \\ \bar{z}^n &= (z^n + \bar{z}^n) - z^n; \\ z^{n+2} &= (z^n + \bar{z}^n) z^2 - (z\bar{z})^2 \bar{z}^{n-2}; \\ \bar{z}^{(l+1)n-2} &= (z^{ln} + \bar{z}^{ln}) \bar{z}^{n-2} - (z\bar{z})^{n-2} z^{(l-1)n+2}, \quad l \geq 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Suponha que em (4.13) temos somente os somatórios referentes a  $l_1 = l_3 = 0$  e  $l_2 = l_4 = 1$ . Neste caso,

$$M(z)(w) = \sum_k c_{k0}^1 (z\bar{z})^k w + \sum_k c_{k1}^2 (z\bar{z})^k \bar{z}^n w + \sum_k c_{k0}^3 (z\bar{z})^k z^2 \bar{w} + \sum_k c_{k1}^4 (z\bar{z})^k \bar{z}^{n-2} \bar{w}.$$

Escrevendo  $c_{kj}^l = a_{kj}^l + i b_{kj}^l$ , para  $j = 0, 1$  e  $l = 1, 2, 3, 4$  temos

$$\begin{aligned} M(z)(w) &= \sum_k a_{k0}^1 (z\bar{z})^k w + \sum_k b_{k0}^1 (z\bar{z})^k i w + \sum_k a_{k1}^2 (z\bar{z})^k \bar{z}^n w + \sum_k b_{k1}^2 (z\bar{z})^k i \bar{z}^n w \\ &+ \sum_k a_{k0}^3 (z\bar{z})^k z^2 \bar{w} + \sum_k b_{k0}^3 (z\bar{z})^k i z^2 \bar{w} + \sum_k a_{k1}^4 (z\bar{z})^k \bar{z}^{n-2} \bar{w} \\ &+ \sum_k b_{k1}^4 (z\bar{z})^k i \bar{z}^{n-2} \bar{w} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_k a_{k0}^1 (z\bar{z})^k w + \sum_k b_{k0}^1 (z\bar{z})^k iw + \sum_k a_{k1}^2 (z\bar{z})^k [(z^n + \bar{z}^n) - z^n] w \\
&\quad + \sum_k b_{k1}^2 (z\bar{z})^k i [(z^n + \bar{z}^n) - z^n] w + \sum_k a_{k0}^3 (z\bar{z})^k z^2 \bar{w} + \sum_k b_{k0}^3 (z\bar{z})^k iz^2 \bar{w} \\
&\quad + \sum_k a_{k1}^4 (z\bar{z})^k \bar{z}^{n-2} \bar{w} + \sum_k b_{k1}^4 (z\bar{z})^k i \bar{z}^{n-2} \bar{w} \\
&= \sum_k [a_{k0}^1 (z\bar{z})^k + a_{k1}^2 (z\bar{z})^k (z^n + \bar{z}^n)] w + \sum_k [b_{k0}^1 (z\bar{z})^k + b_{k1}^2 (z\bar{z})^k (z^n + \bar{z}^n)] iw \\
&\quad - \sum_k a_{k1}^2 (z\bar{z})^k z^n w - \sum_k b_{k1}^2 (z\bar{z})^k iz^n w + \sum_k a_{k0}^3 (z\bar{z})^k z^2 \bar{w} + \sum_k b_{k0}^3 (z\bar{z})^k iz^2 \bar{w} \\
&\quad + \sum_k a_{k1}^4 (z\bar{z})^k \bar{z}^{n-2} \bar{w} + \sum_k b_{k1}^4 (z\bar{z})^k i \bar{z}^{n-2} \bar{w},
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da quinta identidade de (4.14). Neste caso, se todo  $M \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}_n)$  tivesse essa forma, os geradores de  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_n)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$  seriam

$$\begin{aligned}
M_1(z)(w) &= w, M_2(z)(w) = iw, M_3(z)(w) = z^2 \bar{w}, M_4(z)(w) = iz^2 \bar{w}, \\
M_5(z)(w) &= \bar{z}^{n-2} \bar{w}, M_6(z)(w) = i \bar{z}^{n-2} \bar{w}, M_7(z)(w) = z^n w, M_8(z)(w) = iz^n w.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Agora, suponha que em (4.13) temos somente os somatórios referentes a  $l_1 = l_3 = 1$  e  $l_2 = l_4 = 2$ . Neste caso,

$$\begin{aligned}
M(z)(w) &= \sum_k c_{k1}^1 (z\bar{z})^k z^n w + \sum_k c_{k2}^2 (z\bar{z})^k \bar{z}^{2n} w + \sum_k c_{k1}^3 (z\bar{z})^k z^{n+2} \bar{w} \\
&\quad + \sum_k c_{k2}^4 (z\bar{z})^k \bar{z}^{2n-2} \bar{w} \\
&= \sum_k c_{k1}^1 (z\bar{z})^k z^n w + \sum_k c_{k2}^2 (z\bar{z})^k [(z^n + \bar{z}^n)^2 - (z^n + \bar{z}^n)z^n - (z\bar{z})^n] w \\
&\quad + \sum_k c_{k1}^3 (z\bar{z})^k [(z^n + \bar{z}^n)z^2 - (z\bar{z})^2 \bar{z}^{n-2}] \bar{w} \\
&\quad + \sum_k c_{k2}^4 (z\bar{z})^k [(z^n + \bar{z}^n) \bar{z}^{n-2} - (z\bar{z})^{n-2} z^2] \bar{w} \\
&= \sum_k [c_{k2}^2 (z\bar{z})^k (z^n + \bar{z}^n)^2 - c_{k2}^2 (z\bar{z})^{n+k}] w \\
&\quad + \sum_k [c_{k1}^3 (z\bar{z})^k (z^n + \bar{z}^n) - c_{k2}^4 (z\bar{z})^{n+k-2}] z^2 \bar{w} \\
&\quad + \sum_k [c_{k2}^4 (z\bar{z})^k (z^n + \bar{z}^n) - c_{k1}^3 (z\bar{z})^{k+2}] \bar{z}^{n-2} \bar{w} \\
&\quad + \sum_k [c_{k1}^1 (z\bar{z})^k - c_{k2}^2 (z\bar{z})^k (z^n + \bar{z}^n)] z^n w,
\end{aligned}$$

com  $c_{kj}^l \in \mathbb{C}$ , onde a segunda igualdade segue das segunda, quinta, sexta e sétima identidades de (4.14), respectivamente. Escrevendo  $c_{kj}^l = a_{kj}^l + ib_{kj}^l$ , para  $j = 1, 2$  e  $l = 1, 2, 3, 4$ , e supondo que toda  $M \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}_n)$  possui somente os somatórios referentes a  $l_1 = l_3 = 1$  e  $l_2 = l_4 = 2$ , obtemos as mesmas aplicações polinomiais de (4.15) como geradores de  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_n)$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ .

Usando indutivamente as identidades de (4.14) para os casos  $l_1, l_3 \geq 2$  e  $l_2, l_4 \geq 3$ , é possível escrever  $M(z)(w)$  em (4.13) na forma

$$M(z)(w) = \sum_{j=1}^8 \left( \sum_{l,m} c_{lm} (z\bar{z})^l (z^n + \bar{z}^n)^m \right) M_j(z)(w),$$

para certos coeficientes  $c_{lm} \in \mathbb{R}$ . Como  $z\bar{z}$  e  $z^n + \bar{z}^n$  são geradores de  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ , concluímos que as aplicações  $M_j(z)(w)$ ,  $j = 1, \dots, 8$ , dadas em (4.15) são geradores do módulo  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_n)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ .

O próximo passo será aplicar a projeção (4.5) em tais geradores a fim de obter os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ . O processo segue como nas seções anteriores usando a associação de  $M_j(z)(w)$  com a matriz  $M_j(z)$  de acordo com (4.9).

Para  $M_1(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 1$  e  $\beta(z) = 0$ , de modo que

$$B_1(z) = M_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pois  $M_1(z) \in \text{Sym}_2$ .

Para  $M_2(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = i$  e  $\beta(z) = 0$ , de modo que

$$M_2(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $M_2(z)$  é antissimétrica,

$$B_2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para  $M_3(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 0$  e  $\beta(z) = z^2$ . Tomando  $z = x + iy$  obtemos

$$B_3(z) = M_3(z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix},$$

pois  $M_3(z) \in \text{Sym}_2$ .

Analogamente, para  $M_4(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 0$  e  $\beta(z) = iz^2$ , de modo que

$$B_4(z) = M_4(z) = \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

pois  $M_4(z) \in \text{Sym}_2$ .

Para  $M_5(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 0$  e  $\beta(z) = \bar{z}^{n-2}$ . Fazendo  $A_1 = \text{Re}(z^{n-2})$  e  $A_2 = \text{Im}(z^{n-2})$  obtemos

$$B_5(z) = M_5(z) = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ -A_2 & -A_1 \end{pmatrix}.$$

Para  $M_6(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = 0$  e  $\beta(z) = i\bar{z}^{n-2}$ . Novamente, fazendo  $A_1 = \text{Re}(z^{n-2})$  e  $A_2 = \text{Im}(z^{n-2})$  obtemos

$$B_6(z) = M_6(z) = \begin{pmatrix} A_2 & A_1 \\ A_1 & -A_2 \end{pmatrix}.$$

Para  $M_7(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = z^n$  e  $\beta(z) = 0$ . Fazendo  $A_3 = \text{Re}(z^n)$  e  $A_4 = \text{Im}(z^n)$  obtemos

$$M_7(z) = \begin{pmatrix} A_3 & -A_4 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix}$$

e, então,

$$B_7(z) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} A_3 & -A_4 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_3 & A_4 \\ -A_4 & A_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} = A_3 B_1(z).$$

Para  $M_8(z)(w)$  temos  $\alpha(z) = iz^n$  e  $\beta(z) = 0$ . Para  $A_3 = \text{Re}(z^n)$  e  $A_4 = \text{Im}(z^n)$  obtemos

$$M_8(z) = \begin{pmatrix} -A_4 & -A_3 \\ A_3 & -A_4 \end{pmatrix}$$

e, então,

$$B_8(z) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} -A_4 & -A_3 \\ A_3 & -A_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_4 & A_3 \\ -A_3 & -A_4 \end{pmatrix} \right] = - \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} = -A_4 B_1(z).$$

Como  $A_3, -A_4 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ , segue que

$$\left\{ B_1(z), B_3(z), B_4(z), B_5(z), B_6(z) \right\} \quad (4.16)$$

é um conjunto de geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ .

O próximo resultado revela a forma geral das EDBs  $\mathbb{Z}_n$ -equivariantes.

**Teorema 4.4.1.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_n, \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo trivial. Então*

$$\begin{aligned} a(x, y) &= p_1(x, y) + (y^2 - x^2)p_2(x, y) + 2xyp_3(x, y) - A_1p_4(x, y) - A_2p_5(x, y) \\ b(x, y) &= 2xyp_2(x, y) + (x^2 - y^2)p_3(x, y) - A_2p_4(x, y) + A_1p_5(x, y) \\ c(x, y) &= p_1(x, y) + (x^2 - y^2)p_2(x, y) - 2xyp_3(x, y) + A_1p_4(x, y) + A_2p_5(x, y), \end{aligned}$$

onde  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_n)$ ,  $A_1 = \text{Re}(z^{n-2})$  e  $A_2 = \text{Im}(z^{n-2})$ .

*Demonstração.* Como  $\omega$  é  $\mathbb{Z}_n$ -equivariante e  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_n$ , então  $B \in \vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n]$ , onde  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  é da forma (4.2). Logo, existem  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_n)$  tais que

$$B(x, y) = p_1(x, y)B_1(z) + p_2(x, y)B_3(z) + p_3(x, y)B_4(z) + p_4(x, y)B_5(z) + p_5(x, y)B_6(z),$$

com  $z = x + iy$ , ou seja,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} = \\ & = p_1(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix} + p_3(x, y) \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix} \\ & \quad + p_4(x, y) \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ -A_2 & -A_1 \end{pmatrix} + p_5(x, y) \begin{pmatrix} A_2 & A_1 \\ A_1 & -A_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} p_1 + (x^2 - y^2)p_2 - 2xyp_3 + A_1p_4 + A_2p_5 & 2xyp_2 + (x^2 - y^2)p_3 - A_2p_4 + A_1p_5 \\ 2xyp_2 + (x^2 - y^2)p_3 - A_2p_4 + A_1p_5 & p_1 + (y^2 - x^2)p_2 + 2xyp_3 - A_1p_4 - A_2p_5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $p_j$  denota  $p_j(x, y)$ ,  $j = 1, \dots, 5$ ,  $A_1 = \text{Re}(z^{n-2})$  e  $A_2 = \text{Im}(z^{n-2})$ . O resultado segue por igualdade de matrizes.  $\square$

A seguir, apresentaremos um exemplo de uma EDB  $\mathbb{Z}_5$ -equivariante e sua configuração geométrica.

**Exemplo 4.4.2.** Considere  $p_1 \equiv p_2 \equiv p_5 \equiv 1$  e  $p_3 \equiv p_4 \equiv 0$  nos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do teorema anterior, com  $A_1 = \text{Re}(z^3)$  e  $A_2 = \text{Im}(z^3)$ . Usando coordenadas reais, temos

$$\begin{aligned} \omega(x, y, dx, dy) &= (1 + y^2 - x^2 - 3x^2y + y^3)dy^2 + 2(2xy + x^3 - 3xy^2)dxdy \\ &\quad + (1 + x^2 - y^2 + 3x^2y - y^3)dx^2. \end{aligned}$$

Como  $\omega$  é  $\mathbb{Z}_5$ -equivariante, a função discriminante de  $\omega = 0$  dada por

$$\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^3 + 10x^4y - 20x^2y^3 + 2y^5 + (x^2 + y^2)^2 - 1$$

é  $\mathbb{Z}_5$ -invariante. Além disso, como  $\det(R_{\frac{2\pi}{5}}) = 1$ , segue do Teorema 3.1.7 que o homomorfismo  $\lambda : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) coincide com  $\sigma$ , ou seja, é trivial. Portanto, todos os elementos de  $\mathbb{Z}_5$  preservam as folheações de  $\omega = 0$  (o que também vale para  $n \neq 5$ ). A configuração geométrica para este exemplo é mostrada na Figura 4.4.

#### 4.4.2 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_n[\mathbb{Z}_{n/2}]$ -equivariantes, para $n \geq 4$

Nesta seção, apresentaremos a forma geral das EDBs  $\mathbb{Z}_n$ -equivariantes, com  $n \geq 4$ , segundo um epimorfismo  $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  em que  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_{n/2}$ . Para isso, aplicaremos novamente o Algoritmo 2.5.9, adaptando as notações.

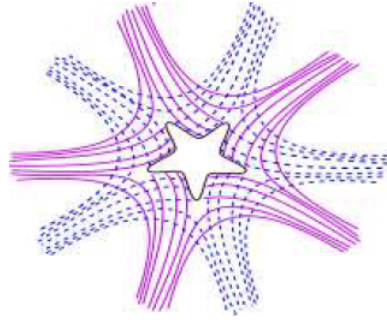


Figura 4.4: Configuração com simetria  $\mathbb{Z}_5$ .

1. Considere  $\Gamma = \mathbb{Z}_n$ ,  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o epimorfismo tal que  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_{n/2}$  e  $\delta = R_{\frac{2\pi}{n}} \in \mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n/2}$ .

2. Considere a base de Hilbert

$$\{u_1(z) = z\bar{z}, u_2(z) = z^{n/2} + \bar{z}^{n/2}, u_3(z) = i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})\}$$

para o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_{n/2})$  obtida no Exemplo 2.4.7 e o conjunto

$$\{H_0(z)(w) = w, H_1(z)(w) = z^2\bar{w}, H_2(z)(w) = iz^2\bar{w},$$

$$H_3(z)(w) = \bar{z}^{n/2-2}\bar{w}, H_4(z)(w) = i\bar{z}^{n/2-2}\bar{w}\}$$

das aplicações a valores complexos associadas aos geradores do módulo  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_{n/2}, \mathbb{Z}_{n/2}]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_{n/2})$  obtidos na Subsecção 4.4.1 (tais aplicações estão associadas respectivamente aos geradores  $B_1(z)$ ,  $B_3(z)$ ,  $B_4(z)$ ,  $B_5(z)$  e  $B_6(z)$  obtidos em (4.16), agora com  $n/2$  no lugar de  $n$ ).

3. Defina  $S(u_0)(z) = 1$  e calcule  $S(u_i)(z)$  para  $i = 1, 2, 3$ , via a projeção  $S : \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_{n/2}) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_{n/2})$  da Definição 2.5.3 com  $\delta = R_{\frac{2\pi}{n}}$ :

$$S(u_1)(z) = \frac{1}{2}(z\bar{z} - e^{i2\pi/n}ze^{-i2\pi/n}\bar{z}) = \frac{1}{2}(z\bar{z} - z\bar{z}) = 0,$$

$$\begin{aligned} S(u_2)(z) &= \frac{1}{2}[(z^{n/2} + \bar{z}^{n/2}) - ((e^{i2\pi/n}z)^{n/2} + (\overline{(e^{i2\pi/n}z)^{n/2}}))] \\ &= \frac{1}{2}[(z^{n/2} + \bar{z}^{n/2}) - (e^{i\pi}z^{n/2} + e^{-i\pi}\bar{z}^{n/2})] \\ &= (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(u_3)(z) &= \frac{1}{2}[i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2}) - i((e^{i2\pi/n}z)^{n/2} - (\overline{(e^{i2\pi/n}z)^{n/2}}))] \\ &= \frac{1}{2}[i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2}) - i(e^{i\pi}z^{n/2} - e^{-i\pi}\bar{z}^{n/2})] \\ &= i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2}). \end{aligned}$$

4. Calcule os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_{n/2}, \mathbb{Z}_{n/2}]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$  construindo as aplicações

$$H_{ij}(z)(w) = S(u_i)(z)H_j(z)(w)$$

para  $i = 0, \dots, 3$  e  $j = 0, \dots, 4$ . Neste caso, temos

$$H_{0j}(z)(w) = S(u_0)(z)H_j(z)(w) = H_j(z)(w), \quad j = 0, \dots, 4,$$

$$H_{1j}(z)(w) = S(u_1)(z)H_j(z)(w) = 0, \quad j = 0, \dots, 4,$$

$$H_{20}(z)(w) = S(u_2)(z)H_0(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w,$$

$$H_{21}(z)(w) = S(u_2)(z)H_1(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})z^2\bar{w} = (z^{n/2+2} + (z\bar{z})^2\bar{z}^{n/2-2})\bar{w},$$

$$H_{22}(z)(w) = S(u_2)(z)H_2(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})iz^2\bar{w} = i(z^{n/2+2} + (z\bar{z})^2\bar{z}^{n/2-2})\bar{w},$$

$$H_{23}(z)(w) = S(u_2)(z)H_3(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})\bar{z}^{n/2-2}\bar{w} = ((z\bar{z})^{n/2-2}z^2 + \bar{z}^{n-2})\bar{w},$$

$$H_{24}(z)(w) = S(u_2)(z)H_4(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})i\bar{z}^{n/2-2}\bar{w} = i((z\bar{z})^{n/2-2}z^2 + \bar{z}^{n-2})\bar{w},$$

$$H_{30}(z)(w) = S(u_3)(z)H_0(z)(w) = i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})w,$$

$$H_{31}(z)(w) = S(u_3)(z)H_1(z)(w) = i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})z^2\bar{w} = i(z^{n/2+2} - (z\bar{z})^2\bar{z}^{n/2-2})\bar{w},$$

$$H_{32}(z)(w) = S(u_3)(z)H_2(z)(w) = i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})iz^2\bar{w} = ((z\bar{z})^2\bar{z}^{n/2-2} - z^{n/2+2})\bar{w},$$

$$H_{33}(z)(w) = S(u_3)(z)H_3(z)(w) = i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})\bar{z}^{n/2-2}\bar{w} = i((z\bar{z})^{n/2-2}z^2 - \bar{z}^{n-2})\bar{w},$$

$$H_{34}(z)(w) = S(u_3)(z)H_4(z)(w) = i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})i\bar{z}^{n/2-2}\bar{w} = (\bar{z}^{n-2} - (z\bar{z})^{n/2-2}z^2)\bar{w}.$$

Como um passo intermediário, iremos reduzir essa lista de geradores usando o fato de  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_{n/2}, \mathbb{Z}_{n/2}]$  ser um módulo sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ , o que por sua vez tem  $u_1(z) = z\bar{z}$  como um de seus geradores. Portanto, a lista reduzida de geradores é a seguinte:

$$\tilde{H}_{00}(z)(w) = w, \tilde{H}_{01}(z)(w) = z^2\bar{w}, \tilde{H}_{02}(z)(w) = iz^2\bar{w}, \tilde{H}_{03}(z)(w) = \bar{z}^{n/2-2}\bar{w},$$

$$\tilde{H}_{04}(z)(w) = i\bar{z}^{n/2-2}\bar{w}, \tilde{H}_{20}(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w, \tilde{H}_{21}(z)(w) = z^{n/2+2}\bar{w},$$

$$\tilde{H}_{22}(z)(w) = iz^{n/2+2}\bar{w}, \tilde{H}_{23}(z)(w) = \bar{z}^{n-2}\bar{w}, \tilde{H}_{24}(z)(w) = i\bar{z}^{n-2}\bar{w},$$

$$\tilde{H}_{30}(z)(w) = i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})w.$$

Tal simplificação segue das igualdades

$$\tilde{H}_{0j}(z)(w) = H_{0j}(z)(w), \quad \text{para } j = 0, \dots, 4,$$

$$\tilde{H}_{j0}(z)(w) = H_{j0}(z)(w), \quad \text{para } j = 2, 3,$$

$$\tilde{H}_{21}(z)(w) = H_{21}(z)(w) - (z\bar{z})^2H_{03}(z)(w),$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{22}(z)(w) &= H_{22}(z)(w) - (z\bar{z})^2 H_{04}(z)(w), \\ \tilde{H}_{23}(z)(w) &= H_{23}(z)(w) - (z\bar{z})^{n/2-2} H_{01}(z)(w), \\ \tilde{H}_{24}(z)(w) &= H_{24}(z)(w) - (z\bar{z})^{n/2-2} H_{02}(z)(w).\end{aligned}$$

Claramente, todos os  $\tilde{H}_{ij}(z)(w)$  assim obtidos pertencem a  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_{n/2}, \mathbb{Z}_{n/2}]$ , via a associação de (4.8) com (4.9).

5. Calcule os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{n/2}]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$  dados por  $\vec{S}(\tilde{H}_{ij})$ , onde  $\vec{S} : \vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_{n/2}, \mathbb{Z}_{n/2}] \rightarrow \vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_{n/2}, \mathbb{Z}_{n/2}]$  é a projeção da Definição 2.5.3 com  $\delta = R_{\frac{2\pi}{n}}$ . Neste caso,

$$\vec{S}(\tilde{H}_{ij})(z)(w) = \frac{1}{2} \left( \tilde{H}_{ij}(z)(w) - e^{-i2\pi/n} \tilde{H}_{ij}(e^{i2\pi/n} z)(e^{i2\pi/n} w) \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\vec{S}(\tilde{H}_{00})(z)(w) &= \frac{1}{2}(w - e^{-i2\pi/n} e^{2i\pi/n} w) = 0, \\ \vec{S}(\tilde{H}_{01})(z)(w) &= \frac{1}{2}(z^2 \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{4i\pi/n} z^2 e^{-i2\pi/n} \bar{w}) = 0, \\ \vec{S}(\tilde{H}_{02})(z)(w) &= \frac{1}{2}(iz^2 \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{4i\pi/n} iz^2 e^{-i2\pi/n} \bar{w}) = 0, \\ \vec{S}(\tilde{H}_{03})(z)(w) &= \frac{1}{2}(\bar{z}^{n/2-2} \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{(-i2\pi/n)(n/2-2)} \bar{z}^{n/2-2} e^{-i2\pi/n} \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{z}^{n/2-2} \bar{w} + \bar{z}^{n/2-2} \bar{w}) = \bar{z}^{n/2-2} \bar{w}, \\ \vec{S}(\tilde{H}_{04})(z)(w) &= \frac{1}{2}(i\bar{z}^{n/2-2} \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{(-i2\pi/n)(n/2-2)} i\bar{z}^{n/2-2} e^{-i2\pi/n} \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2}(i\bar{z}^{n/2-2} \bar{w} + i\bar{z}^{n/2-2} \bar{w}) = i\bar{z}^{n/2-2} \bar{w}, \\ \vec{S}(\tilde{H}_{20})(z)(w) &= \frac{1}{2}((z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w - e^{-i2\pi/n}(e^{i\pi} z^{n/2} + e^{-i\pi} \bar{z}^{n/2})e^{i2\pi/n} w) \\ &= \frac{1}{2}((z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w + (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w, \\ \vec{S}(\tilde{H}_{21})(z)(w) &= \frac{1}{2}(z^{n/2+2} \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{(i2\pi/n)(n/2+2)} z^{n/2+2} e^{-i2\pi/n} \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2}(z^{n/2+2} \bar{w} + z^{n/2+2} \bar{w}) = z^{n/2+2} \bar{w}, \\ \vec{S}(\tilde{H}_{22})(z)(w) &= \frac{1}{2}(iz^{n/2+2} \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{(i2\pi/n)(n/2+2)} iz^{n/2+2} e^{-i2\pi/n} \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2}(iz^{n/2+2} \bar{w} + iz^{n/2+2} \bar{w}) = iz^{n/2+2} \bar{w}, \\ \vec{S}(\tilde{H}_{23})(z)(w) &= \frac{1}{2}(\bar{z}^{n-2} \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{(-i2\pi/n)(n-2)} \bar{z}^{n-2} e^{-i2\pi/n} \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{z}^{n-2} \bar{w} - \bar{z}^{n-2} \bar{w}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{S}(\tilde{H}_{24})(z)(w) &= \frac{1}{2}(i\bar{z}^{n-2}\bar{w} - e^{-i2\pi/n}e^{(-i2\pi/n)(n-2)}i\bar{z}^{n-2}e^{-i2\pi/n}\bar{w}) \\
&= \frac{1}{2}(i\bar{z}^{n-2}\bar{w} - i\bar{z}^{n-2}\bar{w}) = 0, \\
\vec{S}(\tilde{H}_{30})(z)(w) &= \frac{1}{2}(i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})w - e^{-i2\pi/n}i(e^{i\pi}z^{n/2} - e^{-i\pi}\bar{z}^{n/2})e^{i2\pi/n}w) \\
&= \frac{1}{2}(i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})w + i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})w) = i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})w.
\end{aligned}$$

Portanto, os geradores do módulo  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{n/2}]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$  são

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_1(z)(w) &= \bar{z}^{n/2-2}\bar{w}, \quad \tilde{H}_2(z)(w) = i\bar{z}^{n/2-2}\bar{w}, \quad \tilde{H}_3(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w, \\
\tilde{H}_4(z)(w) &= z^{n/2+2}\bar{w}, \quad \tilde{H}_5(z)(w) = iz^{n/2+2}\bar{w}, \quad \tilde{H}_6(z)(w) = i(z^{n/2} - \bar{z}^{n/2})w.
\end{aligned}$$

As respectivas aplicações  $B_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  associadas a  $\tilde{H}_j$  via (4.9) serão apresentadas na demonstração do próximo teorema, o qual nos fornece a forma geral de uma EDB  $\mathbb{Z}_n[\mathbb{Z}_{n/2}]$ -equivariante.

**Teorema 4.4.3.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_n, \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o epimorfismo com  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_{n/2}$ . Então*

$$\begin{aligned}
a(x, y) &= -A_3p_1(x, y) - A_4p_2(x, y) + A_5p_3(x, y) - A_7p_4(x, y) + A_8p_5(x, y) + A_6p_6(x, y) \\
b(x, y) &= -A_4p_1(x, y) + A_3p_2(x, y) + A_8p_4(x, y) + A_7p_5(x, y) \\
c(x, y) &= A_3p_1(x, y) + A_4p_2(x, y) + A_5p_3(x, y) + A_7p_4(x, y) - A_8p_5(x, y) + A_6p_6(x, y),
\end{aligned}$$

onde  $p_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_n)$ , para  $j = 1, \dots, 6$ ,  $A_3 = \text{Re}(z^{n/2-2})$ ,  $A_4 = \text{Im}(z^{n/2-2})$ ,  $A_5 = \text{Re}(z^{n/2})$ ,  $A_6 = \text{Im}(z^{n/2})$ ,  $A_7 = \text{Re}(z^{n/2+2})$  e  $A_8 = \text{Im}(z^{n/2+2})$ .

*Demonstração.* Como  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_n, \sigma]$  e  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_{n/2}$ , então  $B \in \vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{n/2}]$ , onde  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  é da forma (4.2). Logo, existem  $p_1, \dots, p_6 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_n)$  tais que

$$B(x, y) = p_1B_1(z) + p_2B_2(z) + p_3B_3(z) + p_4B_4(z) + p_5B_5(z) + p_6B_6(z),$$

onde  $z = x + iy$ ,  $p_j$  denota  $p_j(x, y)$  e  $B_j(z)$  é a matriz associada a  $\tilde{H}_j(z)(w)$ , para  $j = 1, \dots, 6$ . Então

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} = \\
&= p_1(x, y) \begin{pmatrix} A_3 & -A_4 \\ -A_4 & -A_3 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} A_4 & A_3 \\ A_3 & -A_4 \end{pmatrix} + p_3(x, y) \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & A_5 \end{pmatrix} \\
&+ p_4(x, y) \begin{pmatrix} A_7 & A_8 \\ A_8 & -A_7 \end{pmatrix} + p_5(x, y) \begin{pmatrix} -A_8 & A_7 \\ A_7 & A_8 \end{pmatrix} + p_6(x, y) \begin{pmatrix} A_6 & 0 \\ 0 & A_6 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$



onde  $A_3 = \operatorname{Re}(z^{n/2-2})$ ,  $A_4 = \operatorname{Im}(z^{n/2-2})$ ,  $A_5 = \operatorname{Re}(z^{n/2})$ ,  $A_6 = \operatorname{Im}(z^{n/2})$ ,  $A_7 = \operatorname{Re}(z^{n/2+2})$  e  $A_8 = \operatorname{Im}(z^{n/2+2})$ . Realizando os produtos e usando igualdade de matrizes, obtemos o desejado.  $\square$

Agora, apresentaremos um exemplo de uma EDB  $\mathbb{Z}_4[\mathbb{Z}_2]$ -equivariante, onde  $\mathbb{Z}_2$  é gerado por  $-I_2$ .

**Exemplo 4.4.4.** Tomando  $p_1 \equiv p_2 \equiv p_4 \equiv p_5 \equiv 1$  e  $p_3 \equiv p_6 \equiv 0$  nos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned} \omega(x, y, dx, dy) = & (-x^4 + 6x^2y^2 - y^4 + 4x^3y - 4xy^3)dy^2 \\ & + 2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4x^3y - 4xy^3)dxdy + (x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 4x^3y + 4xy^3)dx^2 \end{aligned}$$

é uma forma quadrática  $\mathbb{Z}_4[\mathbb{Z}_2]$ -equivariante. Sua função discriminante  $\mathbb{Z}_4$ -invariante é dada por

$$\delta(x, y) = 2(x^2 + y^2)^4$$

e sua configuração geométrica é dada na Figura 4.5. Pelo Teorema 3.1.7, o homomorfismo  $\lambda : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) é tal que  $\ker(\lambda) = \mathbb{Z}_2$ , ou seja,  $\sigma$  e  $\lambda$  coincidem. Isso implica que  $-I_2$  preserva as folheações de  $\omega = 0$ , enquanto as rotações  $R_{\frac{\pi}{2}}$  e  $R_{\frac{3\pi}{2}}$  as permuta.

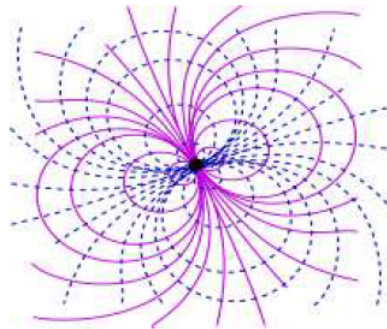


Figura 4.5: Configuração com simetria  $\mathbb{Z}_4[\mathbb{Z}_2]$ .

## 4.5 Formas quadráticas $D_n$ -equivariantes

Nesta seção, consideraremos o grupo  $D_n$ , com  $n \geq 3$ , agindo em  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  pela ação padrão

$$R_{\frac{2\pi}{n}} z = e^{i2\pi/n} z \quad \text{e} \quad \kappa z = \bar{z}.$$

Nosso objetivo aqui é obter a forma geral de EDBs  $D_n$ -equivariantes segundo os três casos possíveis de homomorfismos de grupos  $\sigma : D_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Na Subseção 4.5.1, consideraremos o caso em que  $\sigma$  é trivial; na Subseção 4.5.2, consideraremos o caso em que  $\sigma$  é sobrejetor com  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_n$ , para  $n \geq 3$ , e na Subseção 4.5.3 consideraremos  $\sigma$  sobrejetor com  $\ker(\sigma) = D_{n/2}$ , para  $n \geq 4$  par.

### 4.5.1 Formas quadráticas $D_n[D_n]$ -equivariantes, $n \geq 3$

Começaremos calculando os geradores do módulo  $\mathcal{M}(D_n)$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$ . Para isso, tomaremos  $M \in \mathcal{M}(D_n)$  na forma (4.10). Como  $M$  é  $\mathbb{Z}_n$ -equivariante, então  $M(z)(w)$  é da forma (4.13), com  $c_{kl_i}^i \in \mathbb{C}$  para  $i = 1, 3$  e  $c_{jl_i}^i \in \mathbb{C}$  para  $i = 2, 4$ . Impondo a equivariância de  $M$  segundo  $\kappa$  temos

$$M(z)(w) = \overline{M(\bar{z})(\bar{w})},$$

o que nos garante que  $c_{kl_i}^i, c_{jl_i}^i \in \mathbb{R}$ . Usando agora as identidades em (4.14) e procedendo da mesma forma que fizemos na Subseção 4.4.1 obtemos os geradores  $M_j(z)(w)$  de (4.15) para  $j = 1, 3, 5, 7$ , já que  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  é gerado por  $u_1(z) = z\bar{z}$  e  $u_2(z) = z^n + \bar{z}^n$  (veja Exemplo 2.4.8). Observe que os elementos  $M_j(z)(w)$  para  $j = 2, 4, 6, 8$  não são geradores de  $\mathcal{M}(D_n)$  pois agora os coeficientes de  $M$  em (4.13) são reais. Renomeando tais geradores segue que

$$M_1(z)(w) = w, M_2(z)(w) = z^2\bar{w}, M_3(z)(w) = \bar{z}^{n-2}\bar{w}, M_4(z)(w) = z^n w$$

geram o módulo  $\mathcal{M}(D_n)$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$ .

Aplicaremos então a projeção definida em (4.5) em cada gerador  $M_j(z)(w)$  para determinarmos os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[D_n, D_n]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$ . Para isso, usaremos novamente a associação de  $M_j(z)(w)$  com a matriz  $M_j(z)$  de acordo com (4.9) e repetiremos os cálculos apresentados na Subseção 4.4.1. Assim, temos:

$$B_1(z) = M_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_2(z) = M_2(z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix},$$

para  $z = x + iy$ ,

$$B_3(z) = M_3(z) = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ -A_2 & -A_1 \end{pmatrix},$$

onde  $A_1 = \operatorname{Re}(z^{n-2})$  e  $A_2 = \operatorname{Im}(z^{n-2})$ , e

$$B_4(z) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} A_3 & -A_4 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_3 & A_4 \\ -A_4 & A_3 \end{pmatrix} \right] = A_3 B_1(z),$$

onde  $A_3 = \operatorname{Re}(z^n)$  e  $A_4 = \operatorname{Im}(z^n)$ . Como  $A_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  segue que

$$\left\{ B_1(z), B_2(z), B_3(z) \right\} \tag{4.17}$$

é um conjunto de geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[D_n, D_n]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$ . Temos assim o seguinte resultado:

**Teorema 4.5.1.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[D_n, \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : D_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo trivial. Então*

$$\begin{aligned} a(x, y) &= p_1(x, y) + (y^2 - x^2)p_2(x, y) - A_1p_3(x, y) \\ b(x, y) &= 2xyp_2(x, y) - A_2p_3(x, y) \\ c(x, y) &= p_1(x, y) + (x^2 - y^2)p_2(x, y) + A_1p_3(x, y), \end{aligned}$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(D_n)$ ,  $A_1 = \operatorname{Re}(z^{n-2})$  e  $A_2 = \operatorname{Im}(z^{n-2})$ .

*Demonstração.* Considere  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \operatorname{Sym}_2$  em (4.2) associada à EDB  $\omega = 0$ . Como  $\omega \in \mathcal{Q}[D_n, \sigma]$ , então  $B \in \vec{\mathcal{P}}[D_n, D_n]$ , de modo que existem  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(D_n)$  tais que

$$B(x, y) = p_1(x, y)B_1(z) + p_2(x, y)B_2(z) + p_3(x, y)B_3(z),$$

onde  $z = x + iy$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + p_3(x, y) \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ -A_2 & -A_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 + (x^2 - y^2)p_2 + A_1p_3 & 2xyp_2 - A_2p_3 \\ 2xyp_2 - A_2p_3 & p_1 + (y^2 - x^2)p_2 - A_1p_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $p_j = p_j(x, y)$ , para  $j = 1, 2, 3$ . O resultado segue usando igualdade de matrizes.  $\square$

Finalizaremos esta subseção com um exemplo de uma EDB  $D_5$ -equivariante segundo o homomorfismo trivial  $\sigma : D_5 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .

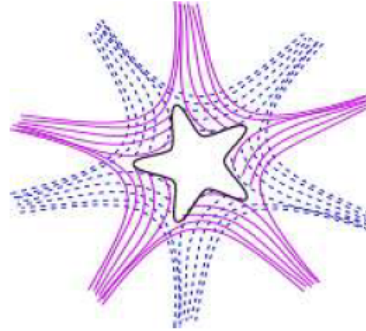
**Exemplo 4.5.2.** Considerando  $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1$  no teorema anterior, obtemos que

$$\begin{aligned} \omega(x, y, dx, dy) &= (1 + y^2 - x^2 - x^3 + 3xy^2)dy^2 + 2(2xy - 3x^2y + y^3)dxdy \\ &\quad + (1 - y^2 + x^2 + x^3 - 3xy^2)dx^2 \end{aligned}$$

é uma forma quadrática  $D_5$ -equivariante, sendo a função discriminante de  $\omega = 0$  dada por

$$\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^3 + 2x^5 - 20x^3y^2 + 10xy^4 + (x^2 + y^2)^2 - 1.$$

Como  $\omega$  é  $D_5$ -equivariante,  $\delta$  é  $D_5$ -invariante. Além disso, como  $\det(R_{\frac{2\pi}{5}}) = 1$  e  $\det(\kappa) = -1$ , segue do Teorema 3.1.7 que  $\lambda : D_5 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) é o epimorfismo tal que  $\ker(\lambda) = \mathbb{Z}_5$ . Isso significa que todas as rotações de  $D_5$  preservam as folheações, enquanto que a reflexão  $\kappa$  as permuta. Esse comportamento se repete para todo  $n \geq 3$ . A configuração geométrica de  $\omega = 0$  é mostrada na Figura 4.6. O interior da estrela representam os pontos onde  $\delta$  é negativo.

Figura 4.6: Configuração com simetria  $D_5$ .

### 4.5.2 Formas quadráticas $D_n[\mathbb{Z}_n]$ -equivariantes, $n \geq 3$

Nesta subsecção, apresentaremos as formas gerais das EDBs  $D_n$ -equivariantes, para  $n \geq 3$ , segundo o epimorfismo  $\sigma : D_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  em que  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_n$ . Para isso, aplicaremos o Algoritmo 2.5.9.

1. Considere  $\Gamma = D_n$ ,  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o epimorfismo tal que  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_n$  e fixe  $\delta = \kappa \in D_n \setminus \mathbb{Z}_n$ .
2. Considere a base de Hilbert

$$\{u_1(z) = z\bar{z}, u_2(z) = z^n + \bar{z}^n, u_3(z) = i(z^n - \bar{z}^n)\}$$

do anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$  obtida no Exemplo 2.4.7 e o conjunto

$$\{H_0(z)(w) = w, H_1(z)(w) = z^2\bar{w}, H_2(z)(w) = iz^2\bar{w}, H_3(z)(w) = \bar{z}^{n-2}\bar{w}, \\ H_4(z)(w) = i\bar{z}^{n-2}\bar{w}\}$$

de geradores do módulo  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$ , obtidos na Seção 4.4.1 via associação com  $B_1(z)$ ,  $B_3(z)$ ,  $B_4(z)$ ,  $B_5(z)$  e  $B_6(z)$  em (4.16), respectivamente.

3. Defina  $S(u_0)(z) = 1$  e calcule

$$S(u_1)(z) = \frac{1}{2}(z\bar{z} - \bar{z}z) = 0.$$

$$S(u_2)(z) = \frac{1}{2}[(z^n + \bar{z}^n) - (\bar{z}^n + z^n)] = 0,$$

$$S(u_3)(z) = \frac{1}{2}[i(z^n - \bar{z}^n) - i(\bar{z}^n - z^n)] = i(z^n - \bar{z}^n),$$

onde  $S : \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_n)$  é a projecção da Definição 2.5.3 com  $\delta = \kappa$ .

4. Calcule os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  dados pelas aplicações

$$H_{ij}(z)(w) = S(u_i)(z)H_j(z)(w)$$

para  $i = 0, \dots, 3$  e  $j = 0, \dots, 4$ . Neste caso,

$$H_{0j}(z)(w) = S(u_0)(z)H_j(z)(w) = H_j(z)(w), \quad j = 0, \dots, 4,$$

$$H_{1j}(z)(w) = S(u_1)(z)H_j(z)(w) = 0, \quad j = 0, \dots, 4,$$

$$H_{2j}(z)(w) = S(u_2)(z)H_j(z)(w) = 0, \quad j = 0, \dots, 4,$$

$$H_{30}(z)(w) = S(u_3)(z)H_0(z)(w) = i(z^n - \bar{z}^n)w,$$

$$H_{31}(z)(w) = S(u_3)(z)H_1(z)(w) = i(z^n - \bar{z}^n)z^2\bar{w} = i(z^{n+2} - (z\bar{z})^2\bar{z}^{n-2})\bar{w},$$

$$H_{32}(z)(w) = S(u_3)(z)H_2(z)(w) = i(z^n - \bar{z}^n)iz^2\bar{w} = ((z\bar{z})^2\bar{z}^{n-2} - z^{n+2})\bar{w},$$

$$H_{33}(z)(w) = S(u_3)(z)H_3(z)(w) = i(z^n - \bar{z}^n)\bar{z}^{n-2}\bar{w} = i((z\bar{z})^{n-2}z^2 - \bar{z}^{2n-2})\bar{w},$$

$$H_{34}(z)(w) = S(u_3)(z)H_4(z)(w) = i(z^n - \bar{z}^n)i\bar{z}^{n-2}\bar{w} = (\bar{z}^{2n-2} - (z\bar{z})^{n-2}z^2)\bar{w}.$$

Observe que

$$H_{31}(z)(w) = (z^n + \bar{z}^n)H_{02}(z)(w) - 2(z\bar{z})^2H_{04}(z)(w),$$

$$H_{32}(z)(w) = 2(z\bar{z})^2H_{01}(z)(w) - (z^n + \bar{z}^n)H_{03}(z)(w),$$

$$H_{33}(z)(w) = 2(z\bar{z})^{n-2}H_{02}(z)(w) - (z^n + \bar{z}^n)H_{04}(z)(w),$$

$$H_{34}(z)(w) = (z^n + \bar{z}^n)H_{01}(z)(w) - 2(z\bar{z})^{n-2}H_{03}(z)(w).$$

Logo, concluímos que os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  são

$$\begin{aligned} H_{00}(z)(w) &= w, \quad H_{01}(z)(w) = z^2\bar{w}, \quad H_{02}(z)(w) = iz^2\bar{w}, \quad H_{03}(z)(w) = \bar{z}^{n-2}\bar{w}, \\ H_{04}(z)(w) &= i\bar{z}^{n-2}\bar{w}, \quad H_{30}(z)(w) = i(z^n - \bar{z}^n)w. \end{aligned}$$

5. Calcule os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[D_n, \mathbb{Z}_n]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  dados por

$$\vec{S}(H_{ij})(z)(w) = \frac{1}{2} \left( H_{ij}(z)(w) - \overline{H_{ij}(\bar{z})(\bar{w})} \right),$$

onde  $\vec{S} : \vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n] \rightarrow \vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n]$  é a projeção da Definição 2.5.3 com  $\delta = \kappa$ . Logo,

$$\vec{S}(H_{00})(z)(w) = \frac{1}{2}(w - \bar{w}) = 0,$$

$$\vec{S}(H_{01})(z)(w) = \frac{1}{2}(z^2\bar{w} - \bar{z}^2w) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\vec{S}(H_{02})(z)(w) &= \frac{1}{2}(iz^2\bar{w} - \overline{iz^2w}) = \frac{1}{2}(iz^2\bar{w} + iz^2\bar{w}) = iz^2\bar{w}, \\
\vec{S}(H_{03})(z)(w) &= \frac{1}{2}(\bar{z}^{n-2}\bar{w} - \overline{\bar{z}^{n-2}w}) = \frac{1}{2}(\bar{z}^{n-2}\bar{w} - \bar{z}^{n-2}\bar{w}) = 0, \\
\vec{S}(H_{04})(z)(w) &= \frac{1}{2}(i\bar{z}^{n-2}\bar{w} - \overline{i\bar{z}^{n-2}w}) = \frac{1}{2}(i\bar{z}^{n-2}\bar{w} + i\bar{z}^{n-2}\bar{w}) = i\bar{z}^{n-2}\bar{w}, \\
\vec{S}(H_{30})(z)(w) &= \frac{1}{2}(i(z^n - \bar{z}^n)w - \overline{i(\bar{z}^n - z^n)\bar{w}}) \\
&= \frac{1}{2}(i(z^n - \bar{z}^n)w + i(z^n - \bar{z}^n)w) \\
&= i(z^n - \bar{z}^n)w.
\end{aligned}$$

Portanto, os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[D_n, \mathbb{Z}_n]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  são

$$B_1(z)(w) = iz^2\bar{w}, B_2(z)(w) = i\bar{z}^{n-2}\bar{w} \text{ e } B_3(z)(w) = i(z^n - \bar{z}^n)w,$$

associados respectivamente às matrizes

$$B_1(z) = \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix}, B_2(z) = \begin{pmatrix} A_2 & A_1 \\ A_1 & -A_2 \end{pmatrix}, B_3(z) = \begin{pmatrix} A_9 & 0 \\ 0 & A_9 \end{pmatrix},$$

onde  $A_1 = \operatorname{Re}(z^{n-2})$ ,  $A_2 = \operatorname{Im}(z^{n-2})$  e  $A_9 = \operatorname{Im}(z^n)$ , via a associação de (4.8) com (4.9).

O próximo resultado nos revela a forma geral das EDBs  $D_n[\mathbb{Z}_n]$ -equivariantes.

**Teorema 4.5.3.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[D_n, \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : D_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o epimorfismo com  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_n$ . Então*

$$\begin{aligned}
a(x, y) &= 2xyp_1(x, y) - A_2p_2(x, y) + A_9p_3(x, y) \\
b(x, y) &= (x^2 - y^2)p_1(x, y) + A_1p_2(x, y) \\
c(x, y) &= -2xyp_1(x, y) + A_2p_2(x, y) + A_9p_3(x, y),
\end{aligned}$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(D_n)$ ,  $A_1 = \operatorname{Re}(z^{n-2})$ ,  $A_2 = \operatorname{Im}(z^{n-2})$  e  $A_9 = \operatorname{Im}(z^n)$ .

*Demonstração.* Como  $\omega$  é  $D_n$ -equivariante segundo  $\sigma$ , cujo kernel é  $\mathbb{Z}_n$ , então  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \operatorname{Sym}_2$  associada a  $\omega = 0$  pertence a  $\vec{\mathcal{P}}[D_n, \mathbb{Z}_n]$ , ou seja, existem  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(D_n)$  tais que

$$B(x, y) = p_1(x, y)B_1(z) + p_2(x, y)B_2(z) + p_3(x, y)B_3(z),$$

onde  $z = x + iy$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} A_2 & A_1 \\ A_1 & -A_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + p_3(x, y) \begin{pmatrix} A_9 & 0 \\ 0 & A_9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2xyp_1 + A_2p_2 + A_9p_3 & (x^2 - y^2)p_1 + A_1p_2 \\ (x^2 - y^2)p_1 + A_1p_2 & 2xyp_1 - A_2p_2 + A_9p_3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

onde  $p_j = p_j(x, y)$ , o que prova o resultado.  $\square$

Para o próximo exemplo, considere  $n = 6$ .

**Exemplo 4.5.4.** Considere  $p_1 \equiv p_2 \equiv 1$  e  $p_3 \equiv 0$  nos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do teorema anterior. Então

$$\begin{aligned} \omega(x, y, dx, dy) &= (2xy - 4x^3y + 4xy^3)dy^2 + 2(x^2 - y^2 + x^4 - 6x^2y^2 + y^4)dxdy \\ &\quad + (-2xy + 4x^3y - 4xy^3)dx^2 \end{aligned}$$

é uma forma quadrática  $D_6[\mathbb{Z}_6]$ -equivariante e, portanto, a função discriminante de  $\omega = 0$  dada por

$$\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^4 + 2x^6 - 30x^4y^2 + 30x^2y^4 + 2y^6 + (x^2 + y^2)^2$$

é  $D_6$ -invariante. Além disso, pelo Teorema 3.1.7, o homomorfismo  $\lambda : D_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) é trivial, ou seja, todos os elementos de  $D_6$  preservam as folheações, como pode ser visto na Figura 4.7.

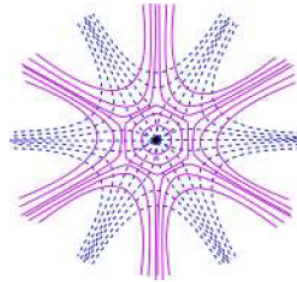


Figura 4.7: Configuração com simetria  $D_6[\mathbb{Z}_6]$ .

### 4.5.3 Formas quadráticas $D_n[D_{n/2}]$ -equivariantes, $n \geq 4$

Nesta subseção faremos um procedimento análogo ao da subseção anterior, considerando agora  $\sigma : D_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o epimorfismo tal que  $\ker(\sigma) = D_{n/2}(\kappa)$ , onde  $D_{n/2}(\kappa)$  denotará o grupo diedral gerado por  $R_{\frac{4\pi}{n}}$  e por  $\kappa$ . Para isso assumiremos  $n \geq 4$  par e aplicaremos novamente o Algoritmo 2.5.9, adaptando as notações para este contexto.

1. Considere  $\Gamma = D_n$ ,  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o epimorfismo tal que  $\ker(\sigma) = D_{n/2}(\kappa)$  e fixe  $\delta = R_{\frac{2\pi}{n}} \in D_n \setminus D_{n/2}(\kappa)$ .
2. Considere a base de Hilbert

$$\left\{ u_1(z) = z\bar{z}, u_2(z) = z^{n/2} + \bar{z}^{n/2} \right\}$$

para o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_{n/2})$  obtida no Exemplo 2.4.8 e o conjunto

$$\left\{ H_0(z)(w) = w, H_1(z)(w) = z^2\bar{w}, H_2(z)(w) = \bar{z}^{n/2-2}\bar{w} \right\}$$

de geradores do módulo  $\vec{\mathcal{P}}[D_{n/2}, D_{n/2}]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_{n/2})$  obtidos em (4.17) (observe que estamos usando a associação de (4.8) com (4.9)).

3. Defina  $S(u_0)(z) = 1$  e calcule  $S(u_i)(z)$ ,  $i = 1, 2$ , onde  $S : \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_{n/2}) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_{n/2})$  é a projeção da Definição 2.5.3 com  $\delta = R_{\frac{2\pi}{n}}$ :

$$\begin{aligned} S(u_1)(z) &= \frac{1}{2}(z\bar{z} - (e^{i2\pi/n}z)\overline{(e^{i2\pi/n}z)}) = \frac{1}{2}(z\bar{z} - z\bar{z}) = 0, \\ S(u_2)(z) &= \frac{1}{2}[(z^{n/2} + \bar{z}^{n/2}) - ((e^{i2\pi/n}z)^{n/2} + \overline{(e^{i2\pi/n}z)^{n/2}})] \\ &= \frac{1}{2}[(z^{n/2} + \bar{z}^{n/2}) - (e^{i\pi}z^{n/2} + e^{-i\pi}\bar{z}^{n/2})] \\ &= (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2}). \end{aligned}$$

4. Calcule os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[D_{n/2}, D_{n/2}]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  dados por

$$H_{ij}(z)(w) = S(u_i)(z)H_j(z)(w)$$

para  $i, j = 0, 1, 2$ . Temos:

$$\begin{aligned} H_{0j}(z)(w) &= S(u_0)(z)H_j(z)(w) = H_j(z)(w), \quad j = 0, 1, 2, \\ H_{1j}(z)(w) &= S(u_1)(z)H_j(z)(w) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \\ H_{20}(z)(w) &= S(u_2)(z)H_0(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w, \\ H_{21}(z)(w) &= S(u_2)(z)H_1(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})z^2\bar{w} = (z^{n/2+2} + (z\bar{z})^2\bar{z}^{n/2-2})\bar{w}, \\ H_{22}(z)(w) &= S(u_2)(z)H_2(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})\bar{z}^{n/2-2}\bar{w} = ((z\bar{z})^{n/2-2}z^2 + \bar{z}^{n-2})\bar{w}. \end{aligned}$$

Como um passo intermediário, simplificaremos essa lista de geradores, uma vez que

$$H_{21}(z)(w) - (z\bar{z})^2H_{02}(z)(w) = z^{n/2+2}\bar{w},$$

$$H_{22}(z)(w) - (z\bar{z})^{n/2-2}H_{01}(z)(w) = \bar{z}^{n-2}\bar{w}.$$

Logo, os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}[D_{n/2}, D_{n/2}]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  são

$$\begin{aligned} H_{00}(z)(w) &= w, \quad H_{01}(z)(w) = z^2\bar{w}, \quad H_{02}(z)(w) = \bar{z}^{n/2-2}\bar{w}, \\ H_{20}(z)(w) &= (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w, \quad H_{21}(z)(w) = z^{n/2+2}\bar{w}, \quad H_{22}(z)(w) = \bar{z}^{n-2}\bar{w}. \end{aligned}$$



5. Calcule os geradores de  $\vec{\mathcal{P}}[D_n, D_{n/2}]$  sobre  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  dados por

$$\vec{S}(H_{ij})(z)(w) = \frac{1}{2} (H_{ij}(z)(w) - e^{-i2\pi/n} H_{ij}(e^{i2\pi/n} z)(e^{i2\pi/n} w))$$

via a projeção  $\vec{S} : \vec{\mathcal{P}}[D_{n/2}, D_{n/2}] \rightarrow \vec{\mathcal{P}}[D_{n/2}, D_{n/2}]$  da Definição 2.5.3:

$$\vec{S}(H_{00})(z)(w) = \frac{1}{2} (w - e^{-i2\pi/n} e^{i2\pi/n} w) = \frac{1}{2} (w - w) = 0,$$

$$\vec{S}(H_{01})(z)(w) = \frac{1}{2} (z^2 \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{i4\pi/n} z^2 e^{-i2\pi/n} \bar{w}) = \frac{1}{2} (z^2 \bar{w} - z^2 \bar{w}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \vec{S}(H_{02})(z)(w) &= \frac{1}{2} (\bar{z}^{n/2-2} \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{(-i2\pi/n)(n/2-2)} \bar{z}^{n/2-2} e^{-i2\pi/n} \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{z}^{n/2-2} \bar{w} + \bar{z}^{n/2-2} \bar{w}) \\ &= \bar{z}^{n/2-2} \bar{w}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{S}(H_{20})(z)(w) &= \frac{1}{2} ((z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w - e^{-i2\pi/n} (e^{i\pi} z^{n/2} + e^{-i\pi} \bar{z}^{n/2}) e^{i2\pi/n} w) \\ &= \frac{1}{2} ((z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w + (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w) \\ &= (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{S}(H_{21})(z)(w) &= \frac{1}{2} (z^{n/2+2} \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{(i2\pi/n)(n/2+2)} z^{n/2+2} e^{-i2\pi/n} \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2} (z^{n/2+2} \bar{w} + z^{n/2+2} \bar{w}) \\ &= z^{n/2+2} \bar{w}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{S}(\tilde{H})_{22}(z)(w) &= \frac{1}{2} (\bar{z}^{n-2} \bar{w} - e^{-i2\pi/n} e^{(-i2\pi/n)(n-2)} \bar{z}^{n-2} e^{-i2\pi/n} \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{z}^{n-2} \bar{w} - \bar{z}^{n-2} \bar{w}) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, os geradores do módulo  $\vec{\mathcal{P}}[D_n, D_{n/2}]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$  são

$$B_1(z)(w) = \bar{z}^{n/2-2} \bar{w}, B_2(z)(w) = (z^{n/2} + \bar{z}^{n/2})w, B_3(z)(w) = z^{n/2+2} \bar{w},$$

associados respectivamente às matrizes reais

$$B_1(z) = \begin{pmatrix} A_3 & -A_4 \\ -A_4 & -A_3 \end{pmatrix}, B_2(z) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & A_5 \end{pmatrix}, B_3(z) = \begin{pmatrix} A_7 & A_8 \\ A_8 & -A_7 \end{pmatrix},$$

onde  $A_3 = \operatorname{Re}(z^{n/2-2})$ ,  $A_4 = \operatorname{Im}(z^{n/2-2})$ ,  $A_5 = \operatorname{Re}(z^{n/2})$ ,  $A_7 = \operatorname{Re}(z^{n/2+2})$  e  $A_8 = \operatorname{Im}(z^{n/2+2})$ .

Portanto, a forma geral das EDBs  $D_n[D_{n/2}]$ -equivariantes é a seguinte:

**Teorema 4.5.5.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[D_n, \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : D_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o epimorfismo tal que  $\ker(\sigma) = D_{n/2}(\kappa)$ , com  $n \geq 4$  par. Então*

$$\begin{aligned} a(x, y) &= -A_3p_1(x, y) + A_5p_2(x, y) - A_7p_3(x, y) \\ b(x, y) &= -A_4p_1(x, y) + A_8p_3(x, y) \\ c(x, y) &= A_3p_1(x, y) + A_5p_2(x, y) + A_7p_3(x, y), \end{aligned}$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(D_n)$ ,  $A_3 = \operatorname{Re}(z^{n/2-2})$ ,  $A_4 = \operatorname{Im}(z^{n/2-2})$ ,  $A_5 = \operatorname{Re}(z^{n/2})$ ,  $A_7 = \operatorname{Re}(z^{n/2+2})$  e  $A_8 = \operatorname{Im}(z^{n/2+2})$ .

*Demonstração.* Como  $\omega \in \mathcal{Q}[D_n, \sigma]$ , temos que a aplicação  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \operatorname{Sym}_2$  dada em (4.2) pertence a  $\vec{\mathcal{P}}[D_n, D_{n/2}]$ . Então existem  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(D_n)$  tais que

$$B(x, y) = p_1(x, y)B_1(z) + p_2(x, y)B_2(z) + p_3(x, y)B_3(z),$$

onde  $z = x + iy$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} A_3 & -A_4 \\ -A_4 & -A_3 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & A_5 \end{pmatrix} \\ &\quad + p_3(x, y) \begin{pmatrix} A_7 & A_8 \\ A_8 & -A_7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_3p_1 + A_5p_2 + A_7p_3 & -A_4p_1 + A_8p_3 \\ -A_4p_1 + A_8p_3 & -A_3p_1 + A_5p_2 - A_7p_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $p_j = p_j(x, y)$ , provando o resultado.  $\square$

Finalizaremos esta subseção com um exemplo de uma EDB  $D_6[D_3]$ -equivariante.

**Exemplo 4.5.6.** Considere  $p_1 \equiv 1$  e  $p_2 \equiv p_3 \equiv 0$  nos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do teorema anterior e tome  $n = 6$ . Então

$$\omega(x, y, dx, dy) = -xdy^2 - 2ydx dy + xdx^2$$

é uma forma quadrática  $D_6[D_3]$ -equivariante. Logo, a função discriminante de  $\omega = 0$  dada por

$$\delta(x, y) = x^2 + y^2$$

é  $D_6$ -invariante. Pelo Teorema 3.1.7, o homomorfismo  $\lambda : D_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) é tal que  $\ker(\lambda) = D_3(-\kappa)$ , onde neste caso  $D_3(-\kappa)$  é o grupo diedral gerado por  $R_{\frac{2\pi}{3}}$  e por  $-\kappa$ . A configuração geométrica de  $\omega = 0$  é dada na Figura 4.8, onde vemos que a rotação  $R_{\frac{2\pi}{3}}$  e a reflexão  $-\kappa$  (com relação ao eixo  $O_y$ ) preservam as folheações de  $\omega = 0$ .

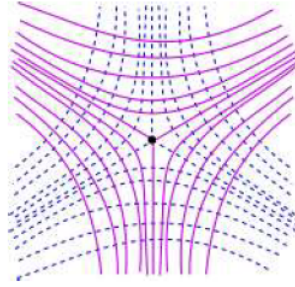


Figura 4.8: Configuração com simetria  $D_6[D_3]$ .

## 4.6 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2$ -equivariantes

Nesta seção, consideraremos o grupo  $\mathbb{Z}_2$  gerado pela reflexão  $\kappa$  agindo em  $\mathbb{R}^2$  pela ação

$$\kappa(x, y) = (x, -y).$$

Na Subseção 4.6.1, apresentaremos a forma geral das EDBs  $\mathbb{Z}_2$ -equivariantes considerando  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o homomorfismo trivial, e na Subseção 4.6.2 considerando  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o epimorfismo em que  $\ker(\sigma) = \{I_2\}$ . Diferente do que fizemos nas seções anteriores, em ambas as seções vamos impor a  $(\mathbb{Z}_2)_\sigma$ -equivariância da aplicação  $B \in \vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2, \ker(\sigma)]$  segundo (4.3), diretamente na matriz  $B(x, y)$  dada em (4.2). Isso será possível pois, como mostramos na Seção 4.1,  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_2, \sigma]$  se, e somente se, a matriz  $B(x, y)$  satisfaz (4.3) para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e todo  $\gamma \in \mathbb{Z}_2$ .

### 4.6.1 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2]$ -equivariantes

Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_2, \sigma]$ , onde  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo trivial. Impondo a  $(\mathbb{Z}_2)_\sigma$ -equivariância em  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  temos

$$B(\kappa(x, y)) = \kappa B(x, y) \kappa,$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} c(x, -y) & b(x, -y) \\ b(x, -y) & a(x, -y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(x, y) & -b(x, y) \\ -b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix}.$$

Isso implica que  $a(x, y) = a(x, -y)$ ,  $b(x, y) = -b(x, -y)$  e  $c(x, y) = c(x, -y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Logo,  $a, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções  $\mathbb{Z}_2$ -invariantes e  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $(\mathbb{Z}_2)_\eta$ -invariante, onde  $\eta : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é tal que  $\eta(\kappa) = -1$  (veja Definição 2.5.1) Em outras palavras  $b$  é ímpar em  $y$  e, portanto, existe uma função  $\mathbb{Z}_2$ -invariante  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$b(x, y) = yp(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Logo,

$$B(x, y) = a(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p(x, y) \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} + c(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com  $a, p, c \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$ , o que mostra que

$$\left\{ B_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}, B_3(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é um conjunto gerador do módulo  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$ .

Temos então o seguinte resultado:

**Teorema 4.6.1.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_2, \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo trivial. Então*

$$a(x, y) = p_1(x, y), \quad b(x, y) = yp_2(x, y), \quad c(x, y) = p_3(x, y),$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$ .

*Demonstração.* Como a aplicação  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  associada a  $\omega$  pertence a  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2]$ , existem  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$  tais que

$$B(x, y) = p_1(x, y)B_1(x, y) + p_2(x, y)B_2(x, y) + p_3(x, y)B_3(x, y),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} + p_3(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_3(x, y) & yp_2(x, y) \\ yp_2(x, y) & p_1(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como desejado. □

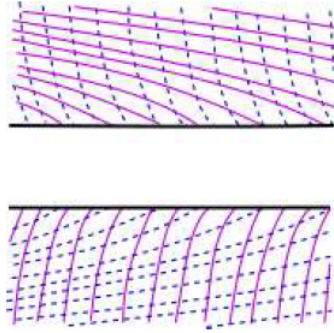
**Exemplo 4.6.2.** Considere  $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1$  nos coeficientes  $a, b$  e  $c$  do teorema anterior. Então

$$\omega(x, y, dx, dy) = dy^2 + 2ydx dy + dx^2$$

é uma forma quadrática  $\mathbb{Z}_2$ -equivariante, sendo a função discriminante de  $\omega = 0$  dada por

$$\delta(x, y) = y^2 - 1.$$

Claramente,  $\delta$  é  $\mathbb{Z}_2$ -invariante e os pontos entre as retas  $y = \pm 1$  correspondem a  $\delta < 0$ . Pelo Teorema 3.1.7,  $\lambda : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) é tal que  $\ker(\lambda) = \{I_2\}$ , ou seja,  $\kappa$  permuta as folheações de  $\omega = 0$ , como nos mostra a Figura 4.9.

Figura 4.9: Configuração com simetria  $\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2]$ .

### 4.6.2 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2[I_2]$ -equivariantes

Nesta subsecção, consideraremos  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  não trivial, ou seja,  $\sigma(\kappa) = -1$ . Impondo a  $(\mathbb{Z}_2)_\sigma$ -equivariância em  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  temos

$$B(\kappa(x, y)) = -\kappa B(x, y)\kappa,$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e, portanto,

$$\begin{pmatrix} c(x, -y) & b(x, -y) \\ b(x, -y) & a(x, -y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & -a(x, y) \end{pmatrix}.$$

Isso implica que  $a(x, y) = -a(x, -y)$ ,  $b(x, y) = b(x, -y)$  e  $c(x, y) = -c(x, -y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Logo,  $a, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são  $(\mathbb{Z}_2)_\sigma$ -invariantes e  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\mathbb{Z}_2$ -invariante. Assim, existem funções  $\mathbb{Z}_2$ -invariantes  $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $a(x, y) = yp_1(x, y)$  e  $c(x, y) = yp_2(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , de modo que

$$B(x, y) = p_1(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + b(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com  $p_1, p_2, b \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$ . Portanto

$$\left\{ B_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, B_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3(x, y) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é um conjunto gerador do módulo  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2, I_2]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$ , o que garante o seguinte resultado:

**Teorema 4.6.3.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_2, \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o epimorfismo tal que  $\ker(\sigma) = \{I_2\}$ . Então*

$$a(x, y) = yp_1(x, y), \quad b(x, y) = p_2(x, y), \quad c(x, y) = yp_3(x, y),$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$ .

*Demonstração.* Como  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  associada a  $\omega$  pertence a  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2, I_2]$ , existem  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$  tais que

$$B(x, y) = p_1(x, y)B_1(x, y) + p_2(x, y)B_2(x, y) + p_3(x, y)B_3(x, y),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_3(x, y) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} yp_3(x, y) & p_2(x, y) \\ p_2(x, y) & yp_1(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Finalizaremos esta subsecção com um exemplo de uma EDB  $\mathbb{Z}_2[I_2]$ -equivariante.

**Exemplo 4.6.4.** Considere  $p_1 \equiv p_2 \equiv 1$  e  $p_3 \equiv -1$  no teorema anterior. Então

$$\omega(x, y, dx, dy) = ydy^2 + 2dxdy - ydx^2$$

é uma forma quadrática  $\mathbb{Z}_2[I_2]$ -equivariante, com a função discriminante de  $\omega = 0$  dada por

$$\delta(x, y) = y^2 + 1.$$

Claramente,  $\delta$  é  $\mathbb{Z}_2$ -invariante. Pelo Teorema 3.1.7,  $\lambda : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) é o homomorfismo trivial, ou seja, a reflexão  $\kappa$  preserva as folheações de  $\omega = 0$ , cuja configuração geométrica é mostrada na Figura 4.10.

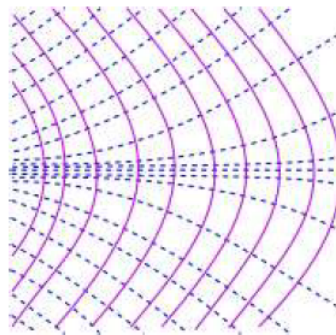


Figura 4.10: Configuração com simetria  $\mathbb{Z}_2[I_2]$ .

## 4.7 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -equivariantes

Nesta seção, consideraremos o grupo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  gerado pelas reflexões  $\kappa$  e  $-\kappa$  agindo em  $\mathbb{R}^2$  como

$$\kappa(x, y) = (x, -y) \quad \text{e} \quad -\kappa(x, y) = (-x, y).$$

Iremos seguir o mesmo procedimento realizado na seção anterior, ou seja, iremos procurar a forma geral das EDBs  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -equivariantes impondo a  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\sigma$ -equivariância diretamente na matriz  $B(x, y)$  dada em (4.2) segundo a ação (4.3). Dividiremos essa seção em três subseções considerando, respectivamente,  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  trivial, não trivial com  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_2(-I_2)$  gerado por  $-I_2$  e não trivial com  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_2(\kappa)$  gerado por  $\kappa$ . Nesses dois últimos casos denotaremos  $\ker(\sigma)$  simplesmente por  $\mathbb{Z}_2(-I_2)$  e  $\mathbb{Z}_2(\kappa)$ , respectivamente.

### 4.7.1 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]$ -equivariantes

Começaremos impondo a  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\sigma$ -equivariância em (4.2) para  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  trivial, de acordo com (4.3). Assim,

$$B(\pm\kappa(x, y)) = (\pm\kappa)B(x, y)(\pm\kappa),$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, -y) & b(x, -y) \\ b(x, -y) & a(x, -y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(x, y) & -b(x, y) \\ -b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(-x, y) & b(-x, y) \\ b(-x, y) & a(-x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(x, y) & -b(x, y) \\ -b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,  $a(x, -y) = a(-x, y) = a(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , mostrando que  $a$  é  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante. Analogamente,  $c$  é  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante. Agora,  $b(x, -y) = b(-x, y) = -b(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , ou seja,  $b$  é  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\eta$ -invariante, onde  $\eta : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é um epimorfismo tal que  $\ker(\eta) = \mathbb{Z}_2(-I_2)$ . De acordo com [11, chapter XIV, §3 Table 3.1], temos que existe uma função  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $b(x, y) = xyp(x, y)$ ,

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  (o mesmo pode ser obtido aplicando-se o Teorema 2.5.5 uma vez que  $b \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}^n(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ ). Logo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c(x, y) & xyp(x, y) \\ xyp(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \\ &= c(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p(x, y) \begin{pmatrix} 0 & xy \\ xy & 0 \end{pmatrix} + a(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $a, p, c \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ , ou seja, o conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & xy \\ xy & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

gera  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ . Isso nos revela a forma geral das EDBs  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -equivariantes, como segue.

**Teorema 4.7.1.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo trivial. Então*

$$a(x, y) = p_1(x, y), \quad b(x, y) = xyp_2(x, y), \quad c(x, y) = p_3(x, y),$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ .

*Demonstração.* Como  $B \in \vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]$ , onde  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  é a aplicação associada a  $\omega$ , existem  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  tais que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} 0 & xy \\ xy & 0 \end{pmatrix} + p_3(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_3(x, y) & xyp_2(x, y) \\ xyp_2(x, y) & p_1(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

**Exemplo 4.7.2.** Considere  $p_1 \equiv p_2 \equiv 1$  e  $p_3 \equiv -1$ , nos coeficientes  $a, b$  e  $c$  do teorema anterior. Então

$$\omega(x, y, dx, dy) = dy^2 + 2xydx dy - dx^2$$

é uma forma quadrática  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -equivariante, sendo a função discriminante  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante dada por

$$\delta(x, y) = x^2y^2 + 1.$$

Como  $\det(\pm\kappa) = -1$ , pelo Teorema 3.1.7 temos que o homomorfismo  $\lambda : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) é sobrejetor com  $\ker(\lambda) = \mathbb{Z}_2(-I_2)$ . Isso implica que  $-I_2$  preserva as folheações de  $\omega = 0$ , enquanto  $\pm\kappa$  as permuta, como pode ser visto na Figura 4.11.



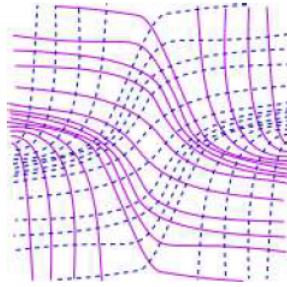


Figura 4.11: Configuração com simetria  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]$ .

### 4.7.2 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(-I_2)]$ -equivariantes

Nesta subseção, consideraremos  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o epimorfismo de grupos tal que  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_2(-I_2)$ . Impondo a  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\sigma$ -equivariância em (4.2) de acordo com (4.3), temos

$$B(\pm\kappa(x, y)) = \sigma(\pm\kappa)(\pm\kappa)B(x, y)(\pm\kappa),$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $\sigma(\pm\kappa) = -1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, -y) & b(x, -y) \\ b(x, -y) & a(x, -y) \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & -a(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(-x, y) & b(-x, y) \\ b(-x, y) & a(-x, y) \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma - c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & -a(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,  $a(x, -y) = a(-x, y) = -a(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , mostrando que  $a$  é  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\sigma$ -invariante. Analogamente  $c$  é  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\sigma$ -invariante. De acordo com [11, Chapter XIV, §3, Table 3.1] (ou aplicando o Teorema 2.5.5, já que  $a, c \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}^\sigma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ ) temos que existem  $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -invariantes tais que  $a(x, y) = xyp_1(x, y)$  e  $c(x, y) = xyp_2(x, y)$ . Agora,  $b(x, -y) = b(-x, y) = b(x, y)$ , mostrando que  $b$

é  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -invariante. Logo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xyp_2(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & xyp_1(x, y) \end{pmatrix} \\ &= p_2(x, y) \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_1(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $b, p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ , mostrando que o conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \right\}$$

gera o módulo  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2(-I_2)]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ . Isso nos fornece a seguinte forma geral das EDBs  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(-I_2)]$ -equivariantes:

**Teorema 4.7.3.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o epimorfismo tal que  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_2(-I_2)$ . Então*

$$a(x, y) = xyp_1(x, y), \quad b(x, y) = p_2(x, y), \quad c(x, y) = xyp_3(x, y),$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ .

*Demonstração.* Como  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  associada a  $\omega$  pertence a  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2(-I_2)]$ , existem  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  tais que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_3(x, y) \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_1(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xyp_3(x, y) & p_2(x, y) \\ p_2(x, y) & xyp_1(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

o que prova o desejado. □

**Exemplo 4.7.4.** Considere  $p_1 \equiv p_2 \equiv 1$  e  $p_3 \equiv -1$  nos coeficientes  $a, b$  e  $c$  do teorema anterior. Então

$$\omega(x, y, dx, dy) = xydy^2 + 2dxdy - xydx^2$$

é uma forma quadrática  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(-I_2)]$ -equivariante, sendo a função discriminante associada a  $\omega = 0$  dada por

$$\delta(x, y) = x^2y^2 + 1.$$

Como  $\omega$  é  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -equivariante,  $\delta$  é  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante. Além disso, pelo Teorema 3.1.7,  $\lambda : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo trivial, o que implica que todos os elementos de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  preservam as folheações de  $\omega = 0$ , cuja configuração geométrica é dada na Figura 4.12.

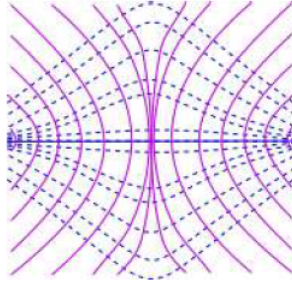


Figura 4.12: Configuração com simetria  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(-I_2)]$ .

### 4.7.3 Formas quadráticas $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(\kappa)]$ -equivariantes

Nesta subseção, consideraremos  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  o epimorfismo de grupos tal que  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_2(\kappa)$ . Impondo a  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\sigma$ -equivariância em (4.2) de acordo com (4.3), temos

$$B(\kappa(x, y)) = \kappa B(x, y) \kappa \quad \text{e} \quad B(-\kappa(x, y)) = -(-\kappa) B(x, y) (-\kappa),$$

uma vez que  $\sigma(\kappa) = 1$  e  $\sigma(-\kappa) = -1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, -y) & b(x, -y) \\ b(x, -y) & a(x, -y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(x, y) & -b(x, y) \\ -b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(-x, y) & b(-x, y) \\ b(-x, y) & a(-x, y) \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & -a(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,  $a(x, -y) = a(x, y)$  e  $a(-x, y) = -a(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , mostrando que  $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\sigma$ -invariante, de acordo com a Definição 2.5.1. Analogamente,  $c$  é  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\sigma$ -invariante. Agora,  $b(x, -y) = -b(x, y)$ ,  $b(-x, y) = b(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , mostrando que  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_\eta$ -invariante, onde  $\eta : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o epimorfismo tal que  $\ker(\eta) = \mathbb{Z}_2(-\kappa)$  (grupo cíclico gerado por  $-\kappa$ ). Por [2, Example 3.10], existem funções  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariantes  $p_1, p_2, p_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $a(x, y) = xp_1(x, y)$ ,

$b(x, y) = yp_2(x, y)$  e  $c(x, y) = xp_3(x, y)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xp_3(x, y) & yp_2(x, y) \\ yp_2(x, y) & xp_1(x, y) \end{pmatrix} \\ &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} + p_3(x, y) \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ . Portanto,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é um conjunto de geradores do módulo  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2(\kappa)]$  sobre o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ , o que nos fornece o seguinte resultado:

**Teorema 4.7.5.** *Seja  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \sigma]$  na forma (4.1), onde  $\sigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o epimorfismo com  $\ker(\sigma) = \mathbb{Z}_2(\kappa)$ . Então*

$$a(x, y) = xp_1(x, y), \quad b(x, y) = yp_2(x, y), \quad c(x, y) = xp_3(x, y),$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ .

*Demonstração.* Como  $\omega \in \mathcal{Q}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \sigma]$ , a aplicação  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Sym}_2$  associada a  $\omega$  pertence a  $\vec{\mathcal{P}}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2(\kappa)]$ . Então existem  $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  tais que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} &= p_1(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + p_2(x, y) \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} + p_3(x, y) \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xp_3(x, y) & yp_2(x, y) \\ yp_2(x, y) & xp_1(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como desejado. □

Finalizaremos esta subseção com um exemplo de uma EDB  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(\kappa)]$ -equivariante.

**Exemplo 4.7.6.** Considere  $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1$  nos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do teorema anterior. Então

$$\omega(x, y, dx, dy) = xdy^2 + 2ydx dy + xdx^2$$

é uma forma quadrática  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -equivariante, sendo a função discriminante de  $\omega = 0$  dada por

$$\delta(x, y) = y^2 - x^2.$$

A função  $\delta$  é  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -invariante e o conjunto dos pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $y^2 < x^2$  não admite folheações. Além disso, pelo Teorema 3.1.7, o homomorfismo  $\lambda : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  definido em (3.9) é sobrejetor com  $\ker(\lambda) = \mathbb{Z}_2(-\kappa)$ . Isso implica que a reflexão  $\kappa$  permuta o par de folheações, enquanto  $-\kappa$  o preserva. Esse comportamento geométrico é mostrado na configuração geométrica de  $\omega = 0$  da Figura 4.13.

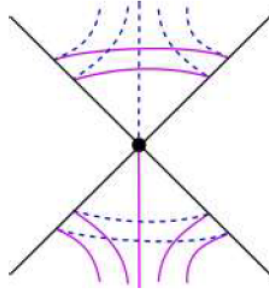


Figura 4.13: Configuração com simetria  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(\kappa)]$ .

## 4.8 Tabela de classificação das formas gerais

Nesta seção, listaremos em uma tabela as formas gerais das formas quadráticas  $\Gamma$ -equivariantes deduzidas nas seções anteriores. Na primeira coluna da tabela apresentaremos o grupo  $\Gamma$  juntamente com  $\ker(\sigma)$ . Quando  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  for trivial, apresentaremos apenas o grupo  $\Gamma$ . Na segunda coluna listaremos  $\ker(\lambda)$ , onde  $\lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$  é o homomorfismo definido em (3.9). Na terceira coluna listaremos os coeficientes das formas gerais de  $\omega \in \mathcal{Q}[\Gamma, \sigma]$  na forma (4.1). As notações  $D_{n/2}(\kappa)$  e  $D_{n/2}(-\kappa)$  denotam os grupos diedrais gerados pela rotação  $R_{\frac{4\pi}{n}}$  e pelas reflexões  $\kappa$  e  $-\kappa$ , respectivamente, lembrando que  $\kappa$  é a reflexão com respeito ao eixo  $O_x$  e  $-\kappa$  é a reflexão com respeito ao eixo  $O_y$ . Também,  $\mathbb{Z}_2(-I_2)$ ,  $\mathbb{Z}_2(\kappa)$  e  $\mathbb{Z}_2(-\kappa)$  denotam os grupos de ordem 2 gerados por  $-I_2$ ,  $\kappa$  e  $-\kappa$ , respectivamente.

$\Gamma[\ker(\sigma)]$	$\ker(\lambda)$	Formas gerais
$SO(2)$	$SO(2)$	$a = p_1 + (y^2 - x^2)p_2 + 2xyp_3,$ $b = 2xyp_2 + (x^2 - y^2)p_3,$ $c = p_1 + (x^2 - y^2)p_2 - 2xyp_3,$ com $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(SO(2)).$
$O(2)$	$SO(2)$	$a = p_1 + (y^2 - x^2)p_2, \quad b = 2xyp_2$ $c = p_1 + (x^2 - y^2)p_2,$ com $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(O(2)).$
$O(2)[SO(2)]$	$O(2)$	$a = 2xyp, \quad b = (x^2 - y^2)p, \quad c = -2xyp,$ com $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(O(2)).$
$\mathbb{Z}_n, \quad n \geq 3$	$\mathbb{Z}_n$	$a = p_1 + (y^2 - x^2)p_2 + 2xyp_3 - A_1p_4 - A_2p_5,$ $b = 2xyp_2 + (x^2 - y^2)p_3 - A_2p_4 + A_1p_5,$ $c = p_1 + (x^2 - y^2)p_2 - 2xyp_3 + A_1p_4 + A_2p_5,$ com $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_n).$
$\mathbb{Z}_n[\mathbb{Z}_{n/2}], \quad n \geq 4$	$\mathbb{Z}_{n/2}$	$a = -A_3p_1 - A_4p_2 + A_5p_3 - A_7p_4 + A_8p_5 + A_6p_6,$ $b = -A_4p_1 + A_3p_2 + A_8p_4 + A_7p_5,$ $c = A_3p_1 + A_4p_2 + A_5p_3 + A_7p_4 - A_8p_5 + A_6p_6,$ com $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_n).$
$D_n, \quad n \geq 3$	$\mathbb{Z}_n$	$a = p_1 + (y^2 - x^2)p_2 - A_1p_3, \quad b = 2xyp_2 - A_2p_3,$ $c = p_1 + (x^2 - y^2)p_2 + A_1p_3,$ com $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(D_n).$
$D_n[\mathbb{Z}_n], \quad n \geq 3$	$D_n$	$a = 2xyp_1 - A_2p_2 + A_9p_3, \quad b = (x^2 - y^2)p_1 + A_1p_2,$ $c = -2xyp_1 + A_2p_2 + A_9p_3,$ com $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(D_n).$
$D_n[D_{n/2}(\kappa)], \quad n \geq 4$	$D_{n/2}(-\kappa)$	$a = -A_3p_1 + A_5p_2 - A_7p_3, \quad b = -A_4p_1 + A_8p_3,$ $c = A_3p_1 + A_5p_2 + A_7p_3,$ com $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(D_n).$
$\mathbb{Z}_2$	$I_2$	$a = p_1, \quad b = yp_2, \quad c = p_3,$ com $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2).$
$\mathbb{Z}_2[I_2]$	$\mathbb{Z}_2$	$a = yp_1, \quad b = p_2, \quad c = yp_3,$ com $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2).$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2(-I_2)$	$a = p_1, \quad b = xyp_2, \quad c = p_3,$ com $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(-I_2)]$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$a = xyp_1, \quad b = p_2, \quad c = xyp_3,$ com $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2(\kappa)]$	$\mathbb{Z}_2(-\kappa)$	$a = xp_1, \quad b = yp_2, \quad c = xp_3,$ com $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$
$A_1 = \operatorname{Re}(z^{n-2}), \quad A_2 = \operatorname{Im}(z^{n-2}), \quad A_3 = \operatorname{Re}(z^{n/2-2}), \quad A_4 = \operatorname{Im}(z^{n/2-2}), \quad A_5 = \operatorname{Re}(z^{n/2}),$		
$A_6 = \operatorname{Im}(z^{n/2}), \quad A_7 = \operatorname{Re}(z^{n/2+2}), \quad A_8 = \operatorname{Im}(z^{n/2+2}), \quad A_9 = \operatorname{Im}(z^n).$		

---

## REFERÊNCIAS

---

- [1] A. M. Amilibia, ODEinR2 v.1.2.5. Disponível em <https://www.uv.es/montesin/>. Acesso em: 20 mar. 2019.
- [2] F. Antoneli, P. H. Baptistelli, A. P. S. Dias, M. Manoel. *Invariant theory and reversible-equivariant vector fields*. J. Pure Appl. Algebra 213, 649-663, 2009.
- [3] P. H. Baptistelli. *Singularidades e teoria de invariantes em bifurcação reversível-equivariante*. Tese de Doutorado - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, 2007.
- [4] N. Bourbaki. *Lie Groups and Lie Algebras*. Ch. I-III. Springer-Verlag, 1975.
- [5] J. Bruce, D. Fidal. *On binary differential equations and umbilics*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 111(1-2):147-168, 1989.
- [6] J. Bruce, F. Tari. *Implicit Differential Equations From The Singularity Theory Viewpoint, Singularities and Differential equations*. Banach Centre Publications, Volume 33, 23-38, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw 1996.
- [7] J. Bruce, F. Tari. *On binary differential equations*. Nonlinearity 2, Volume 8, 255-271, 1995.
- [8] M. P. Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 5<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [9] L. Dara. *Singularités génériques des équations différentielles multiformes*. Bol. Soc. Brasil Math, 695-128, 1975.
- [10] A. A. Davydov. *Normal forms of differential equations unresolved with respect to derivatives in a neighbourhood of its singular point*. Funct. Anal. Appl. 19, 1-10, 1985.
- [11] M. Golubitsky, I. Stewart, D. G. Schaeffer. *Singularities and groups in bifurcation theory*, Volume II, Appl. Math. Sci. 69, Spring-Verlag, NY, 1984.

- 
- [12] V. Guíñez. *Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces*. Transactions of the American Mathematical Society, 309 (2) 477-502, 1988.
- [13] C. Gutierrez, J. Sotomayor. *Structurally stable configurations of lines of principal curvature*. Astérisque, 98-99, 1982.
- [14] G. Hochschild. *The Structure of Lie Groups*. Holden-Day, San Francisco, 1965.
- [15] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in mathematics 218, 2nd ed. Springer New York, 2013.
- [16] M. Manoel, P. Tempesta. *Binary differential equations with symmetries*. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A 39(4), 1957-1974, 2019.
- [17] L. Nirenberg. *A Proof of the Malgrange Preparation Theorem*. Liverpool Singularities I, Lecture Notes in Math. 192, Springer-Verlag, Berlin, 97-105, 1971.
- [18] F. Tari, *Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space*. J. Math. Soc. Japan, 65 (2013), 723-731.
- [19] F. Tari. *Pairs of foliations on surfaces*. Real and Complex Singularities. London Mathematical Society Lecture Notes Series 380, 305-337, 2010.
- [20] P. Tempesta. *Symmetries in binary differential equations*. Tese de Doutorado - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, 2017.



---

# ÍNDICE REMISSIVO

---

$\sigma$ -operadores de Reynolds, 28

Ação, 16

Algoritmo, 33

Aplicação

$\Gamma$ -equivariante, 24

$\Gamma_\sigma$ -equivariante, 27

    a valores matriciais, 51

Base de Hilbert, 21

Campos de Vetores Tangentes, 44

Conjunto discriminante, 6

Equação diferencial binária (EDB), 4

Equação diferencial implícita (EDI), 2

Fibrado tangente, 35

Forma quadrática

$\Gamma$ -equivariante, 37

    diferenciável, 35

Função

$\Gamma$ -invariante, 21

$\Gamma_\sigma$ -invariante, 27

    discriminante, 6

Germe, 21

Grupo de Lie, 13

Grupo de Lie compacto, 13

Integral de Haar, 18

Operadores de Reynolds, 28

Ponto singular, 1

Representação, 16

Representação  $\sigma$ -dual, 26

Simetrias de um conjunto, 39

Simetrias de uma EDB, 37

Superfície da EDB, 44

Teorema

    de preparação de Malgrange, 3

    de divisão de Mather, 2

    de Hilbert-Weyl, 21

    de Sard, 7

    Poénaru, 25

    Schwarz, 22