UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

NATÁLIA ALCAZAR DE MATOS

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS TÉCNICAS UTILIZADAS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA AO RESOLVEREM TAREFAS VISUAIS

MARINGÁ
2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

NATÁLIA ALCAZAR DE MATOS

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS TÉCNICAS UTILIZADAS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA AO RESOLVEREM TAREFAS VISUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Coorientadora: Prof.ª Dr.ª Mariana Moran

MARINGÁ
2020

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

Matos, Natália Alcazar de

M433a Análise praxeológica das técnicas utilizadas por licenciando em matemática ao resolverem tarefas visuais / Natália Alcazar de Matos. -- Maringá, PR, 2020.
115 f.: il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco.
Coorientadora: Profa. Dra. Mariana Moran Barroso.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2020.

1. Visualização matemática. 2. Tarefa matemáticas. 3. Teoria antropológica do didático. 4. Formação inicial de professores. I. Franco, Valdeni Soliani, orient. II. Barroso, Mariana Moran, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. IV. Título.

CDD 23.ed. 510.07

Ademir Henrique dos Santos - CRB-9/1065

NATÁLIA ALCAZAR DE MATOS

Análise praxeológica das técnicas utilizadas por licenciandos em Matemática ao resolverem tarefas visuais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em *Ensino de Ciências e Matemática*.

BANCA EXAMINADORA

Franco

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Veridiana Rezende

Profa. Dra. Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Lilian Akemi Kato

Profa. Dra. Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Maringá, 27 de Fevereiro de 2020.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus que dia após dia tem me capacitado naquilo que me chamou.

Agradeço a minha família, por estar sempre presente em cada etapa vencida me dando o suporte necessário.

Gratidão também ao meu noivo, por ter escolhido ser o meu companheiro nos dias bons e ruins, trazendo alegria a todos eles.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Valdeni S. Franco, por acreditar em meu potencial desde a graduação e ajudar a expandir meus horizontes. Suas contribuições foram essenciais para que este trabalho fosse concluído.

À Prof.ª Drª. Mariana Moran Barroso, coorientadora deste trabalho, faltam palavras para agradecer, suas contribuições foram incomparáveis!

Por fim, agradeço a todos aqueles colegas de programa e de profissão que, de algum modo, contribuíram nessa jornada com seus conselhos, experiências compartilhadas ou apenas palavras de incentivo.

“Que mais ainda te poderá dizer Davi? Pois tu conheces bem a teu servo, ó Senhor Deus. Por causa da tua palavra e segundo o teu coração fizeste toda esta grandeza, dando-a a conhecer a teu servo. Portanto, grandíssimo és, ó Senhor Deus, porque não há semelhante a ti, e não há outro Deus além de ti, segundo tudo o que nós mesmos temos ouvido. ”

II Samuel 7.20-22

RESUMO

Esta é uma pesquisa de caráter qualitativo, com base no paradigma interpretativo. Seu objetivo é analisar, por meio da Teoria Antropológica do Didático (TAD), as técnicas mobilizadas por 18 estudantes do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade ao Norte do Estado do Paraná para a resolução de tarefas visuais. Também foram analisadas as habilidades de visualização de acordo com Alan J. Bishop - Processamento Visual (VP) e Interpretação da Informação Figurativa (IFI) - no que diz respeito aos registros das técnicas desses estudantes. Os dados analisados foram coletados por meio do registro escrito das resoluções dos estudantes para cinco tarefas matemáticas que lhes foram propostas. Para a análise dos dados foi utilizado o conceito de praxeologia da Teoria Antropológica do Didático. Com base nessa teoria, para cada uma das tarefas matemáticas aplicadas aos participantes foi construído um Modelo Praxeológico de Referência (MPR). Após a coleta de dados, esse modelo foi confrontado com o Modelo Praxeológico Dominante (MPD), elaborado com base nas técnicas que mais ocorreram nas resoluções dos participantes. Os dados analisados revelaram que das 90 possíveis resoluções para as tarefas propostas, foram apresentadas pelos participantes 31 resoluções a contento. Entre essas resoluções, 11 foram não-visuais, 10 foram visuais e 10 foram parcialmente visuais. Além disso, constatou-se que todas as técnicas utilizadas pelos participantes, nas 31 resoluções, apresentaram evidências de que para sua elaboração foi mobilizada a habilidade de visualização IFI, e em 20 delas houve indício do VP. Foi constatado, ainda, que nas tarefas que exigiam a utilização de técnicas visuais para sua resolução, apenas 14 participantes (menos de um sexto) conseguiram elaborar resoluções consistentes.

Palavras-chave: Visualização Matemática; Teoria Antropológica do Didático; Formação Inicial de Professores; Geometria.

ABSTRACT

This is a qualitative based research, grounding on the interpretative paradigm. Its aim is to analyze, through the Anthropological Theory in Didactic (ATD), the techniques deployed by 18 students in 2nd grade from Mathematics degree, from a University from the north of Paraná State, for visual task assignments. The abilities of displaying were also analyzed according to Alan J. Bishop - Visual Processing (VP) and Interpretation of Figurative Information (IFI) – regarding the students' technique record. The analyzed data were collected by the student´s resolution written record for five mathematical assignments that were propounded to them. For the data analysis, it was used the concept of Praxeology of the Anthropological Theory in Didactic. Based on this theory, for each one of the mathematical assignments applied to the participants, were built a Reference Praxeological Model (RPM). After the gathering of data, this model was confronted with the Dominant Praxeological Model (DPM) stablished according to the techniques that occurred the most in the participants' solvings. The analyzed data revealed that, from the 90 possible answers to the proposed tasks, the participants satisfactorily presented 31 resolutions. Among the mentioned resolutions, 11 were non-visual, 10 were visual and 10 were partly visual. Furthermore, it was ascertained that all the techniques used by the participants in the 31 resolutions, showed evidences that, for its elaboration, it was engaged the ability of visualizing IFI and, in 20 of them, there were indication of VP. It was also assured that on the assignments that demanded the usage of visual techniques for its resolution, only 14 participants could devise consistent resolutions.

Keywords: Mathematical Visualization, Anthropological Theory in Didactic, Teachers´ Initial Training, Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Classificação Das tarefas de acordo com seu grau de desafio e abertura 33
Figura 2 - Enunciado da tarefa 1 50
Figura 3 - Enunciado da tarefa 3 51
Figura 4 - Imagem da Tarefa 1 53
Figura 5 - Aplicação da técnica $\tau 1$na Tarefa 1 54
Figura 6 - Aplicação da técnica $\tau 2$ à Tarefa 2 55
Figura 7 - Técnica $\tau 3$ aplicada à Tarefa 3 56
Figura 8 - Técnica $\tau 4$ aplicada à Tarefa 4 57
Figura 9 - Técnica $\tau 5$ aplicada à Tarefa 5 57
Figura 10 - Resolução apresentada por $A5$ 59
Figura 11 - Técnica de resolução $\tau 11$ aplicada por $A4$ 60
Figura 12 - Partição feita por $A6$ 61
Figura 13 - partição feita por $A10$ 62
Figura 14 - Técnica de resolução $\tau 12$ aplicada por $A13$ 63
Figura 15 - Técnica de resolução $\tau 12$ aplicada por $A18$ 64
Figura 16 - Técnica de resolução $\tau 12$ aplicada por $A10$ 64
Figura 17 - Técnica de resolução $\tau 13$ aplicada por $A2$ 65
Figura 18 - Resolução do participante $A14$ 67
Figura 19 - Resoluções de $A3$ e $A13$, respectivamente 68
Figura 20 - Técnica de resolução $\tau 21$ aplicada por $A11$ 69
Figura 21 - Representação de $A10$ 69
Figura 22 - Técnica de resolução $\tau 21$ aplicada por $A9$ 70
Figura 23 - Técnica de resolução $\tau 21$ aplicada por $A15$ 71
Figura 24 - técnica de resolução $\tau 22$ aplicada por $A7$ 72
Figura 25 - Aplicação da técnica $\tau 23$ pelo participante $A12$ 73
Figura 26 - Conclusão apresentada pelo participante $A12$ ao aplicar a técnica $\tau 25$ 74
Figura 27 - Aplicação da técnica $\tau 25$ pelo participante $A4$ 75
Figura 28 - Conclusão Do participante $A4$ ao aplicar a técnica $\tau 25$ 75
Figura 29 - Comentário de $A4$ 76
Figura 30 - Aplicação da técnica $\tau 31$ pelo participante $A11$ 78
Figura 31 - Aplicação da técnica $\tau 32$ pelo participante $A4$ 79

Figura 32 - Aplicação da técnica $\tau 33$ pelo participante $A9$ 80
Figura 33 - Resolução do participante $A4$ para a Tarefa 4 82
Figura 34- Solução do participante $A5$ 82
Figura 35 - Solução apresentada por $A15$ 83
Figura 36- Técnica $\tau 41$ aplicada pelo participante $A7$ 84
Figura 37 – Técnica $\tau 42$ aplicada por $A9$ 85
Figura 38 – Técnica $\tau 43$ aplicada por $A11$ 86
Figura 39 - Resolução de $A8$ para a Tarefa 5 88
Figura 40 - Resolução de $A3$ para a Tarefa 5 89
Figura 41 - Resolução de $A18$ para a Tarefa 5 89
Figura 42 - Resolução de $A14$ para a Tarefa 5 90
Figura 43 - Imagem da Tarefa 5 91
Figura 44 - Registro feito por $A6$ 92
Figura 45 - Técnica $\tau 51$ aplicada por $A1$ 93
Figura 46 - Resolução de $A10$ para Tarefa 5 93
Figura 47 - Técnica $\tau 52$ aplicada por $A9$ 95
Figura 48 - Técnica $\tau 52$ aplicada por $A12$ 96
Figura 49 - Aplicação da técnica $\tau 53$ pelo participante $A10$ 97
Figura 50 - Enunciado da Tarefa 1 100
Figura 51 - Imagem da Tarefa 5 102

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Teses e dissertações brasileiras sobre visualização publicadas por ano 17
Quadro 2 - Contexto de aplicação das pesquisas em visualização matemática 18
Quadro 3 - Trabalhos em visualização e Teoria Antropológica do Didático 19
Quadro 4 - Concepções em visualizações 26
Quadro 5 - Noções Básicas de praxeologia... 43
Quadro 6 - Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 1 66
Quadro 7 - Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 2 76
Quadro 8 - Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 3 81
Quadro 9- Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 4 87
Quadro 10 - Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 5 98

LISTA DE SIGLAS

GPEG	Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria
IFI	Interpretação da Informação Figurativa
MP	Modelo Praxeológico
MPD	Modelo Praxeológico Dominante
MPR	Modelo Praxeológico de Referência
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
VM	Visualidade Matemática
VP	Processamento Visual

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 12

2. CONCEBENDO A VISUALIZAÇÃO MATEMÁTICA 16

2.1 Visualização Matemática: panorama das pesquisas brasileiras 16

2.2 A visualização sob diferentes perspectivas 22

2.3 Alan J. Bishop: os constructos da visualização 27

2.4 Visualizadores *versus* não-visualizadores 29

3. TAREFAS MATEMÁTICAS E SEU POTENCIAL NO ENSINO 32

3.1 Tarefas matemáticas como uma ferramenta para o ensino 32

3.2 O potencial das tarefas matemáticas visuais 36

4. A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO 38

5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 45

5.1 Abordagem qualitativa e o paradigma interpretativo 45

5.2 Contexto e participantes da pesquisa 46

5.3 Metodologia para análise dos dados 47

6. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS 49

6.1 Tarefas matemáticas selecionadas para a coleta de dados 49

6.1.1 Tarefa 1 50

6.1.2 Tarefa 2 50

6.1.3 Tarefa 3 51

6.1.4 Tarefa 4 51

6.1.5 Tarefa 5 52

6.2 Modelo Praxeológico de Referência 52

6.2.2 MPR2 54

6.2.3 MPR3 55

6.2.4 MPR4 56

6.2.5 MPR5 57

6.3 Análise das técnicas mobilizadas pelos participantes 58

6.3.1 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 1 58

6.3.2 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 2 67

6.3.3 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 3 77
6.3.4 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 4 81
6.3.5 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 5 87
6.4 Modelo Praxeológico Dominante 98
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS 103
REFERÊNCIAS 106
ANEXOS 110
ANEXO A: FOLHA DE TAREFAS 110
ANEXO B: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 113

1. INTRODUÇÃO

A elaboração do tema que norteou esta pesquisa se deu a partir dos estudos a respeito da visualização matemática realizados no Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG[1], da Universidade Estadual de Maringá. Desde a criação desse grupo, pelo orientador desta pesquisa, ele tem se dedicado a estudar a influência da visualização no ensino da Geometria. Esses estudos tiveram continuidade quando o grupo ficou sob a coordenação da coorientadora deste trabalho.

Ainda na graduação, ao começar a frequentar as reuniões do grupo e conhecer mais a respeito dos vários conceitos dados para o termo "visualização", pude refletir sobre o quanto de minhas próprias limitações em matemática eram decorrentes de minha dificuldade em visualizar (no sentido que será dado a esta palavra nesta pesquisa), que me impediam de recorrer às estratégias visuais para a resolução de problemas matemáticos que diariamente me eram apresentados enquanto acadêmica do curso de Matemática. Nessa perspectiva, conhecer mais a respeito dos estudos no campo da visualização me fez perceber que a visualização matemática pode ser uma ferramenta a mais na busca pela aprendizagem em matemática.

Diante de tantos desafios no aprender e ensinar matemática, é parte do trabalho do professor munir seus alunos com o maior leque possível de recursos que os ajudem na busca pelo conhecimento. Nessa perspectiva, os resultados revelados por pesquisas relacionadas ao tema da visualização, como em Presmeg (1986) e Vale (2016), que apontam que a visualização pode ser uma estratégia a mais no leque de possibilidades para se resolver um problema matemático, colaborando para a aprendizagem em matemática, tendem a fortalecer e incentivar cada vez mais o surgimento de pesquisas como a que apresentamos aqui.

Diante dos inúmeros desafios que são propostos a um aluno durante toda sua formação, é requerido que ele esteja pronto a enfrentar cada um deles. No que se refere ao âmbito da Matemática, e em particular ao da Geometria, diversas são as habilidades necessárias para atender a cada uma das diferentes demandas que são solicitadas a um aluno. Interpretação, transposição entre representações, cálculo mental, generalização e abstração são algumas delas.

As metodologias de ensino adotadas, tal como a forma como são abordados os conteúdos matemáticos ao longo da formação de um aluno, podem contribuir para que este indivíduo seja mais flexível e munido com diferentes recursos para enfrentar as situações desafiadoras para o ensino da Matemática. Neste contexto, a visualização matemática emerge

---

[1] Link de acesso à página de identificação do grupo[dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/198278] Acesso em: 09.09.2020

como uma possibilidade de ampliação no leque de estratégias que um aluno pode utilizar ao resolver problemas matemáticos.

Neste trabalho, fundamentados em Bishop (1983), concebemos o termo Visualização como o processo composto por duas habilidades: a interpretação da informação figurativa (IFI) e o processamento visual (VP), conforme descritas por Bishop (1983). Devido a sua importância neste trabalho, dedicamos uma seção no Capítulo 2 à descrição detalhada destes dois constructos. A partir dessa concepção do termo de visualização, e conforme descreve Presmeg (1986), chamaremos de visualizadores aqueles indivíduos que preferem utilizar métodos visuais ao resolverem problemas matemáticos que podem ser solucionados por métodos visuais ou não visuais. Já os não-visualizadores são aqueles indivíduos que, tendo a possibilidade de resolver um problema matemático por diversos métodos, preferem utilizar os que não são visuais (PRESMEG, 1986). Para Presmeg (1986), o que determina se um método de solução é visual ou não visual é a presença ou a ausência de imagens visuais como parte essencial do trabalho de resolução. Tais conceitos serão abordados com mais detalhes posteriormente neste trabalho, no capítulo de fundamentação teórica.

A fim de agregar os aportes teóricos para uma análise das técnicas e dos resultados escolhidos pelos participantes para justificarem suas resoluções, adotamos a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999). Segundo a Teoria Antropológica do Didático, toda atividade humana pode ser descrita em termos de tarefas t, de diferentes tipos T e que podem ser justificadas por alguma tecnologia θ, que decorre de uma teoria Θ. Esse modelo, chamado quarteto praxeológico, forneceu uma organização que permitiu analisar os dados de pesquisa de modo amplo, considerando a complexidade do sistema em que estavam inseridos quando foram coletados, vendo a sala de aula como um sistema antropológico.

Esta teoria nos permite realizar uma análise praxeológica das tarefas implementadas. No momento da escolha das tarefas, como de costume na TAD, elaboramos um Modelo Praxeológico de Referência contendo, para cada uma das tarefas, uma caracterização de seu tipo, uma técnica visual que poderia ser utilizada para sua solução, a tecnologia que justifica esta técnica e a teoria que fundamenta a tecnologia. Com a implementação das tarefas, foi possível identificar diferentes técnicas utilizadas pelos participantes para resolver cada uma delas. No capítulo de análise dos dados discorremos sobre cada uma delas.

Este trabalho propõe realizar uma análise praxeológica de como licenciandos em Matemática resolvem tarefas visuais de geometria, investigando quais são as técnicas mobilizadas pelos participantes. Diante disso, buscou-se responder em um determinado contexto a seguinte questão de pesquisa: “Quais as técnicas mobilizadas por licenciandos em Matemática ao resolverem tarefas visuais?”.

Para ajudar a responder esta pergunta, foi traçado como objetivo geral analisar as técnicas mobilizadas por estudantes do curso de Matemática, mediante tarefas visuais. Para isso, necessitamos dos seguintes objetivos específicos:

- identificar um Modelo Praxeológico de Referência das tarefas aplicadas;
- investigar evidências das habilidades de visualização (Processamento Visual e Interpretação da Informação Figurativa) nas resoluções apresentadas;
- elaborar um Modelo Praxeológico Dominante, entre os participantes da pesquisa, das tarefas aplicadas;
- confrontar os modelos praxeológicos de referência e dominante;

Nesta pesquisa investigamos uma turma do 2º ano de Licenciatura em Matemática durante uma aula da disciplina Teoria e Prática Pedagógica I. Aplicamos aos estudantes cinco tarefas matemáticas, que serão apresentadas no Capítulo 5, para investigar quais as técnicas adotadas pelos licenciandos para resolvê-las.

Para apresentar o percurso deste estudo, o organizamos em cinco capítulos, a saber:

Capítulo 1 – Introdução – neste capítulo apresentamos este trabalho, bem como sua organização, o problema de pesquisa e os objetivos.

Capítulo 2 – Concebendo a Visualização Matemática - apresentamos nesse capítulo os referenciais teóricos utilizados como fundamento para a análise descrita neste trabalho no que diz respeito à visualização matemática. É apresentado um estado da arte referente ao campo das pesquisas brasileiras em visualização matemática e das pesquisas brasileiras que associam visualização matemática e Teoria Antropológica do Didático. São abordadas as principais concepções de visualização e são apresentados os conceitos desenvolvidos por Alan J. Bishop e Norma Presmeg, nossos principais referenciais.

Capítulo 3 – Tarefas Matemáticas e seu potencial no ensino – neste capítulo apresentamos o significado do termo “tarefa matemática”, assim como do termo “tarefas visuais”, com ênfase em seu potencial como ferramenta para a aprendizagem de matemática.

Capítulo 4 – A Teoria Antropológica do Didático –nesse capítulo apresentamos conceitos e os principais termos referentes à Teoria Antropológica do Didático que fundamentaram a realização da análise praxeológica aqui descrita.

Capítulo 5 – Procedimentos Metodológicos – nesse capítulo apresentamos a metodologia adotada para o desenvolvimento deste trabalho, definindo as características da pesquisa qualitativa e do paradigma interpretativo. Descrevemos o ambiente em que foi feita a recolha de dados, os seus participantes, as técnicas e os procedimentos metodológicos adotados.

Capítulo 6 – Descrição e Análise dos Dados – são apresentadas neste capítulo as tarefas selecionadas para a coleta dos dados, tal como os motivos para escolhê-las e o Modelo Praxeológico de Referência adotado. Além disso, são abordados os dados coletados, tal como a descrição da análise realizada. Enfim, apresentamos o Modelo Praxeológico Dominante dentre os participantes.

Capítulo 7 – Considerações Finais – no capítulo final tecemos nossas considerações sobre o estudo realizado, apresentando algumas reflexões.

2. CONCEBENDO A VISUALIZAÇÃO MATEMÁTICA

Apresentamos neste capítulo um levantamento das pesquisas brasileiras relacionadas à visualização matemática, a fim de situar nosso trabalho no campo de pesquisa referente a este tema, com o interesse de investigar a literatura já existente em nosso país e apresentar o diferencial de nossa pesquisa.

Além disso, discorremos sobre algumas das concepções encontradas na academia a respeito da visualização, discutindo a relação entre esta habilidade e a aprendizagem matemática. Também apresentamos a concepção adotada neste trabalho para fundamentar a análise dos dados.

2.1 Visualização Matemática: panorama das pesquisas brasileiras

Nesta seção apresentamos um mapeamento das pesquisas brasileiras em visualização na Educação Matemática, contendo um panorama geral da forma como as questões referentes à visualização vêm sendo abordadas nos trabalhos desenvolvidos no Brasil. Nosso objetivo com esta seção é destacar o diferencial de nosso trabalho diante de uma análise das pesquisas brasileiras desenvolvidas no mesmo campo teórico a que ele pertence: o campo da visualização na Educação Matemática associada à Teoria Antropológica do Didático.

No panorama da pesquisa internacional em visualização apresentado por Presmeg (2006), a pesquisadora aponta que somente com a ascensão do construtivismo e a ênfase no meio social e cultural da educação nos anos 80 é que foi despertado o interesse relacionado à importância do visual e de suas manifestações nas transformações dos conhecimentos matemáticos. Diante dessa nova perspectiva para a pesquisa em visualização, nos anos 1990, com o reconhecimento da visualização na Educação Matemática, passam a surgir trabalhos que problematizam aspectos que antes não eram abordados, como por exemplo o currículo; a influência da visualização na aprendizagem matemática; as relações entre imagem e representação.

Compreendendo a importância de conhecer o campo teórico sobre o qual construímos este trabalho, realizamos um mapeamento das pesquisas brasileiras sobre visualização matemática. Para a elaboração deste panorama, consideramos como fonte o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, uma vez que este portal contém informações sobre teses e dissertações publicadas em todo o país e é conhecido pelos pesquisadores em geral como uma das fontes mais abrangentes para localizar teses e dissertações.

Embora o portal da CAPES contenha pesquisas de diversos anos, para este estudo consideramos o período compreendido entre 1990 a 2019, por se tratar do período em que surgem as primeiras pesquisas sobre a Visualização na educação matemática, conforme aponta Presmeg (2006). Nossa base de dados foi construída com as palavras chave: visualização matemática; visualização no ensino e aprendizagem de matemática; visualização no ensino; e aprendizagem de geometria; tarefas matemáticas e; Teoria Antropológica do Didático.

Em nossa busca inicial, de maneira ampla, buscamos todos os trabalhos compreendidos no período citado, 1990 a 2019, que estivessem relacionados ao tema visualização. Para isso, buscamos no portal pelo termo "visualização" e restringimos nossa busca ao campo da Educação Matemática. Foram localizados 198 trabalhos que atenderam a essa busca e que foram, portanto, nossa base de dados para essa análise. O Quadro 1 apresenta a quantidade de trabalhos publicados em cada ano:

Quadro 1 - Teses e dissertações brasileiras sobre visualização publicadas por ano

Ano de publicação	Total de trabalhos publicados
2007	7
2008	9
2009	9
2010	15
2011	19
2012	14
2013	18
2014	24
2015	13
2016	23
2017	23
2018	24
Total	**198**

Fonte: os autores

Observa-se que, embora nossa busca tenha sido realizada a partir do ano 1990, foram encontradas teses e dissertações abordando a visualização matemática publicadas somente a partir de 2007. Fato esse que nos permite perceber que, embora no exterior este tema já estivesse sendo debatido na Educação Matemática desde 1990, como aponta Presmeg (2006), as primeiras publicações a nível de pesquisas de pós-graduação surgem no Brasil vários anos depois. Pode-se notar ainda que a quantidade de trabalhos publicados abrangendo este tema, embora ainda seja pequena, vêm crescendo com o passar dos anos. Esse crescimento, não linear, revela o aumento do interesse na pesquisa pelas habilidades visuais e sua influência no ensino e aprendizagem de matemática.

Analisando os trabalhos obtidos em nossa busca, observamos que 26 tratam de pesquisas de cunho estritamente teórico, abordando aspectos epistemológicos ou até mesmo filosóficos da visualização. Já os outros 172 trabalhos são pesquisas aplicadas em sala de aula, com o objetivo de analisar características, potencialidades ou limitações das habilidades de visualização. A fim de conhecer mais sobre o contexto em que as pesquisas têm sido realizadas, apresentamos o Quadro 2, contendo a quantidade de trabalhos desenvolvidos em cada nível de escolaridade.

Quadro 2 - Contexto de aplicação das pesquisas em visualização matemática

Nível de Ensino	Ensino fundamental	Ensino médio	Ensino superior	Formação inicial de professores	Formação continuada de professores
2007	-	4	1	1	1
2008	2	5	-	1	-
2009	-	4	2	1	1
2010	3	4	3	3	1
2011	2	7	4	3	2
2012	3	5	3	-	1
2013	4	6	2	-	3
2014	5	4	8	1	-
2015	5	4	1	2	1
2016	6	6	4	1	2
2017	6	4	6	2	2
2018	3	6	7	3	1
Total	**39**	**59**	**41**	**18**	**15**

Fonte: os autores

Estes dados revelam que a maior parte das pesquisas brasileiras já realizadas no campo da visualização são aplicadas no contexto do Ensino Básico, principalmente no Ensino Médio. Conforme dito anteriormente, em sua maioria, esses trabalhos tratam da elaboração e aplicação de sequências didáticas abrangendo diversas tarefas, com o objetivo de investigar o desenvolvimento da visualização. Também podem ser encontrados trabalhos que abordam a inserção de objetos e figuras visuais no ensino de matemática.

Em segundo lugar, aparecem 41 trabalhos publicados no Ensino Superior. Nessa categoria consideramos os trabalhos aplicados nos cursos de graduação em geral, excluindo os que foram aplicados no curso de Licenciatura em Matemática, o qual foi abordado na categoria “Formação inicial de professores”, totalizando 18 trabalhos. Já o contexto da formação continuada de professores, por sua vez, aparece como o cenário menos escolhido para aplicação de pesquisas em visualização, com apenas 15 trabalhos.

Por fim, restringimos nossa pesquisa aos trabalhos que, assim como este, analisam o fenômeno da visualização com o aporte teórico da Teoria Antropológica do Didático. Adotando este critério, foram encontrados apenas 3 trabalhos, apresentados no Quadro 3 em ordem cronológica de publicação. Em seguida, fazemos uma breve síntese de cada um deles.

Quadro 3 - Trabalhos em visualização e Teoria Antropológica do Didático

Título	Autor	Ano de publicação e tipo
Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de integrais duplas e triplas	Sheila Aline Dos Santos Silva	2016/Dissertação
Análises dos conteúdos de sistemas de representação no curso de licenciatura em expressão gráfica da UFPE à luz da teoria antropológica do didático	Cesario Antonio Neves Junior	2018/Dissertação
Aplicação de Modelos de PCOC na Aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio	Marcio Silveira Ramos	2018/Dissertação

Fonte: os autores

Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de integrais duplas e triplas

Silva (2016) organiza seu trabalho em dois momentos: no primeiro deles, chamado de Pesquisa Interna, são pesquisados e analisados problemas propostos na praxeologia de Integrais Duplas e Triplas que requerem a visualização no registro gráfico como estratégia de realização, permitindo a produção de materiais didáticos úteis no ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Essa produção é baseada no conceito de Projetos de Construção de Objetos Concretos, chamado de PCOC.

Nessa primeira etapa a pesquisadora realiza uma análise institucional a fim de compreender os objetos de estudo propostos no ensino-aprendizagem de Integrais Duplas e

Triplas, dando ênfase nos problemas que possam motivar a construção de objetos concretos utilizando ambientes computacionais de aprendizagem. Essa análise envolve, além dos elementos institucionais, o estudo das ferramentas de uma impressora 3D e dos *softwares* que dialogam com ela. Como fundamentação, a autora aponta "a Abordagem Instrumental, a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria de Registros de Representações Semióticas" (SILVA, 2016, p; 8).

Na segunda etapa, Silva (2016) realiza a experimentação de uma sequência didática organizada com base na análise institucional desenvolvida na Pesquisa Interna, com o objetivo de colocar em prática a utilização dos PCOC pelos estudantes do curso de Cálculo Diferencial Integral na UESC como instituição de referência.

A visualização aparece nesse trabalho tendo em vista que o objetivo da autora é:

> Pesquisar e elaborar PCOC acessíveis por meio de prototipagem rápida na impressora 3D podendo servir de instrumentos auxiliares na resolução de problemas propostos na praxeologia de integrais duplas e triplas que requerem a visualização no registro gráfico como estratégia de realização (SILVA, 2016, p. 22).

Utilizando a Teoria de Registros de Representação Semiótica, a autora propõe uma investigação referente ao uso da prototipagem rápida como um instrumento na resolução de problemas de Integral dupla ou tripla que requerem visualização no registro gráfico. Os resultados obtidos nesse trabalho mostram que a utilização de modelos concretos, como os PCOC, na realização de tarefas de Integrais na praxeologia modelada proporcionou oportunidades para além da simples manipulação de um ostensivo concreto pelo estudante, pois o conduziram a acessar outros conhecimentos de base na contextualização e compreensão dos conceitos de Integrais Duplas e Triplas. Apesar disso, a pesquisadora relata também que existem vantagens e desvantagens na utilização desses modelos como instrumentos auxiliares na realização dos tipos de tarefas propostas no dispositivo desta pesquisa.

Análises dos conteúdos de sistemas de representação no curso de licenciatura em expressão gráfica da UFPE à luz da teoria antropológica do didático

Esse trabalho teve como objetivo caracterizar a Relação Institucional entre o professor e o objeto Sistemas de Representação, no nível do Ensino Superior do curso Licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE.

Utilizando como lentes teóricas a Teoria Antropológica do Didático, Neves Junior (2018) apresenta em seu trabalho uma carterização da Relação Institucional da Instituição

Licenciatura em Expressão Gráfica, baseando-se na análise documental do Projeto Pedagógico do Curso (2014).

Para que essa análise fosse desenvolvida, foram percorridas três etapas, iniciando com a análise do perfil curricular de 17 professores, buscando informações da formação profissional e das disciplinas que ministram na Licenciatura. Com essas informações, forma escolhidos 6 participantes para as próximas etapas. Na etapa a seguinte, os professores analisaram um conjunto de atividades envolvendo Sistemas de Representação. Por fim, na terceira etapa foram realizadas entrevistas.

Segundo Neves Junior (2018), os dados levantados na pesquisa apontam que todos os professores consideram importante o estudo de Sistemas de Representação na Licenciatura, mesmo aqueles que se consideram despreparados em alguma área desse conteúdo. O pesquisador também afirma que foi possível perceber que há diferença quanto à preferência dos professores entre os diferentes conteúdos e disciplinas relacionadas aos Sistemas de Representação. Além disso, percebeu-se que as particularidades nas trajetórias acadêmica e profissional de cada professor influenciam em sua prática pedagógica.

Em relação à visualização, embora não seja o foco principal do trabalho, Neves Junior (2018) aponta que dentre os campos da Geometria e dos Sistemas de Representação existe um destaque para a importância da habilidade de visualização espacial e a necessidade de se trabalhar no seu desenvolvimento.

Aplicação de Modelos de PCOC na Aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio

Em seu trabalho, Ramos (2018) tem como objetivo desenvolver uma pesquisa na área do ensino dos conceitos de Sólidos Geométricos. Para isso, investiga alunos do 2° ano do Ensino Médio utilizando, assim como Silva (2016), os modelos de Projetos de Construção de Objetos Concretos (PCOC), vistos como recursos didáticos para o estímulo e incentivo de interesse dos alunos no acesso aos conceitos geométricos.

O pesquisador investiga as praxeologias e ecologias de geoespaço propostas nos livros didáticos do Ensino Médio. Além disso, faz uma análise dos tipos de registros de representação predominantes no estudo da Geometria Espacial e analisa como são propostas as possíveis mobilizações de representações de Sólidos Geométricos nesses registros.

Para o início de sua investigação, Ramos (2018) realiza um estudo histórico dos Sólidos Geométricos por meio de uma revisão de Literatura, a fim de identificar o que já foi produzido sobre ensino e aprendizagem de Sólidos Geométricos. Como aportes teóricos, o pesquisador fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático e de Registros de Representação Semiótica, tendo como metodologia a Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD).

Os Resultados dessa investigação mostraram que os modelos de PCOC, evidenciados como recursos didáticos, se constituem como ferramentas importantes e auxiliares na realização das tarefas abordando a Geometria Espacial pelos alunos, contribuindo para a aprendizagem desses conceitos.

Com a análise realizada foi possível perceber que apesar do crescimento no número de pesquisas brasileiras em visualização matemática, ainda é pequeno o número de trabalhos aplicados no contexto da formação inicial e formação continuada de professores. Em relação à integração da Teoria Antropológica do Didático como ferramenta para uma investigação em visualização matemática, a pesquisa mostrou que mesmo nos trabalhos onde esses temas aparecem, a investigação das habilidades visuais não é o foco do estudo. Os três trabalhos analisados combinam a TAD com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, enfatizando os aspectos visuais referentes às representações e/ou uso de materiais figurativos, mas não visualização no sentido proposto nesta pesquisa. Na seção a seguir, discorremos sobre as diversas concepções a respeito da visualização matemática, apresentando os conceitos propostos por diferentes autores.

2.2 A visualização sob diferentes perspectivas

Os estudos no campo da visualização têm se tornado cada vez mais reconhecidos devido aos resultados apresentados em pesquisas nesta área e que, seguindo essa perspectiva, relacionam o desenvolvimento da habilidade de visualizar com a aprendizagem em matemática. Um exemplo disso encontra-se nos trabalhos da pesquisadora Isabel Vale, que tem apresentado resultados inspiradores tanto para os professores que atuam em sala de aula quanto para os pesquisadores da área, no que se refere ao uso de estratégias visuais e o ensino de matemática (VALE I.; BARBOSA A.; PIMENTEL T., 2014; VALE; PIMENTEL, 2016; VALE; BARBOSA, 2018), nos quais enfatiza a importância de a estratégia “procurar ver” para resolver problemas, impulsionar a criatividade e aprender conceitos e resultados matemáticos

> [...] defendemos a estratégia *procurar ver* como estratégia complementar poderosa para resolver problemas, e ainda para impulsionar a criatividade, dando a todos os alunos a oportunidade de a experienciar numa aula de matemática (VALE; PIMENTEL, 2016, p. 9).

Os mesmos autores apontam que os alunos que utilizam estratégias visuais podem progredir na compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos, dando sentido aos conteúdos envolvidos nos problemas à medida que os resolvem sozinhos ou em discussões coletivas. Afirmam ainda que os desenhos e outros suportes visuais são de particular importância para os alunos com dificuldades em matemática, ajudando-os a seguir um raciocínio ou a compartilhá-lo com seus colegas (VALE; BARBOSA, 2018).

Nesta mesma perspectiva, Buratto (2012) afirma que a aprendizagem é:

> Voltada para a melhoria das condições do pensamento espacial para que o aluno possa pensar em novas relações com o conceito matemático, <u>interligadas com o visual</u> no ensino da matemática, <u>aumentando as habilidades</u> para a interpretação das transformações projetivas <u>de modo a facilitar o entendimento</u> de futuros conceitos geométricos (BURATTO,2012, p. 62, grifo nosso).

Tais resultados têm impulsionado as pesquisas a respeito da visualização, difundindo esse conceito na literatura referente à educação matemática. Com o crescente interesse voltado ao campo da visualização matemática, diversos autores vêm apresentando suas próprias definições para este termo. Estas definições revelam concepções divergentes, que tanto associam a visualização a diferentes conceitos como também enfatizam diferentes aspectos que a compõem. Observa-se ainda que, apesar de serem grandes os avanços da pesquisa científica referindo-se à visualização, ainda ocorrem casos onde nota-se que esse termo é empregado num contexto em que se atribui um significado oriundo da forma como se compreende a visualização no senso comum, comumente restrita apenas ao ato de ver.

Bishop (1989) já observava que, apesar de a visualização ser um tópico há muito tempo presente nas pesquisas, mesmo em um passado recente ao ano da publicação de seu trabalho, este tema ainda não era sentido como uma área significativa de pesquisa na Educação Matemática. Somente por volta de 1973 é que se nota uma mudança no foco dos trabalhos e passa-se a considerar a visualização matemática na perspectiva educacional, tendo como base o campo teórico da psicologia voltada para aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos e geométricos.

Dentre os estudos iniciais destacam-se aqueles realizados pelo próprio Bishop (1973, 1983, 1988a, 1988b) e que deram um importante passo em direção ao avanço da visualização como um campo de pesquisa. Já nos anos 70, Bishop revelava seu interesse em relação a esse tema. Ainda nessa época, ao observar a literatura, o pesquisador percebeu que a construção do conceito de visualização conceito interage com as ideias de imaginação, habilidade espacial e intuição.

Também Norma Presmeg tem grande contribuição no desenvolvimento dessa área de pesquisa. Seu trabalho *Visualization in high school mathematics*, publicado em 1986, foi um dos primeiros trabalhos aplicados envolvendo este tema, o que o faz uma das principais referências para os pesquisadores até os dias de hoje. Nele, tendo como objetivo identificar alunos visualizadores e não-visualizadores e discutir a respeito de um ensino visual por parte dos professores, Presmeg acompanha os participantes (alunos e professores) por cerca de 8 meses, fazendo observações, entrevistas e aplicando tarefas. Neste trabalho, a partir da experiência da pesquisa, Presmeg apresenta sua concepção de visualização como sendo uma relação entre imagens, uma vez que, para ela, uma imagem visual é um "esquema mental" representando informações reais ou espaciais (PRESMEG, 1986).

Algum tempo depois, Zimmermann e Cunningham (1991) apontam que os estudos fundamentados na psicologia tendem a limitar a visualização apenas a uma atividade mental. Para esses autores, no ponto de vista da visualização matemática, a restrição de que as imagens devem ser manipuladas mentalmente, sem o auxílio de lápis e papel, parece artificial. Nesta perspectiva, eles afirmam que seu interesse é voltado à capacidade do aluno de desenhar um diagrama apropriado (com lápis e papel, ou em alguns casos, com um computador) para representar um conceito ou problema matemático e usá-lo para alcançar compreensão ou auxiliar na resolução de um problema.

Portanto, de acordo com essa concepção, tem-se que na matemática a visualização não é um fim em si, mas um meio para um fim: o entendimento (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991). Assim, pode-se perceber que não se fala em visualizar um diagrama, mas em visualizar um conceito ou um problema, o que abrange entender o problema em termos de um diagrama ou imagem visual. Dessa forma, para esses autores, a visualização matemática é definida como o processo de formar imagens e usá-las para descoberta e compreensão matemática.

Enriquecendo o campo teórico a respeito das representações matemáticas, Dreyfus (1991) afirma que as imagens que visualizamos em nossa mente são o produto de abstrações e variações do que vimos, o que faz com que os seus elementos estejam fortemente misturados e imersos em interpretações. Também corroborando com o que já parece há algum tempo ser consenso na literatura, este pesquisador afirma que a visualização se mostra eficaz para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática. Assim, tendo como foco contribuir para a aprendizagem em matemática, Dreyfus sintetiza em poucos tópicos as principais dificuldades em relação à visualização, conforme mencionado em Costa (2000).

As dificuldades mencionadas por Dreyfus têm relação tanto com a forma de olhar para uma figura -sob diferentes perspectivas- quanto com a forma de interpretar tais imagens de acordo com uma estrutura conceitual adequada. Fundamentado nessas constatações, o pesquisador define a visualização sob as lentes da Educação Matemática e afirma que a visualização, ao ser analisada do ponto de vista educacional, se desdobra em duas direções: a primeira diz respeito à *interpretação e compreensão* de modelos visuais, e a segunda aborda a capacidade de *traduzir* em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica (DREYFUS, 1991 *apud* COSTA, 2000).

Devido ao crescente número de pesquisas voltadas ao campo da visualização desde a década de 1970, a pesquisadora Norma Presmeg apresenta então, em 2006, um panorama dos trabalhos desenvolvidos neste campo de pesquisa. Para isso, restringiu sua análise aos trabalhos apresentados nos encontros internacionais anuais do Grupo de Psicologia da Educação Matemática (Psychology of Mathematics Education – PME) das duas décadas anteriores.

O trabalho de Presmeg aborda uma revisão de como essa terminologia emerge na literatura, fazendo uma descrição de como ocorreu o encaminhamento das discussões até que este tema ganhasse a força necessária para se tornar um campo de pesquisa. Apresenta também as principais linhas de pesquisa nesta área e, por fim, a autora expõe treze grandes questões de pesquisa, elaboradas com base em alguns temas de artigos recentes que apontam para a necessidade de outras pesquisas sobre tópicos relacionados à visualização na educação matemática.

Desde então, essas questões têm direcionado diversas outras pesquisas e vários autores têm se empenhado em produzir trabalhos que tragam alguma contribuição no sentido de respondê-las e assim cobrir as lacunas ainda existentes nessa tão recente área. Mas apesar de toda essa discussão no campo teórico da Educação Matemática, percebe-se, em vários trabalhos, o uso do termo “visualização” referindo-se à capacidade de ver ou de enxergar com o órgão da visão. Uma consulta às bibliotecas digitais e catálogos de teses e dissertações, onde se tem acesso à trabalhos acadêmicos, permite encontrar artigos, até mesmo no campo da educação matemática, em que ocorre tal uso. Chamamos este tipo de concepção de senso comum, a qual opõem-se ao sentido atribuído ao termo visualização neste trabalho.

O quadro a seguir apresenta uma síntese das concepções apresentadas até aqui, as quais associamos suas categorias:

Quadro 4 - Concepções em visualizações

Autor	Concepção	Categoria
Presmeg (1986, p. 297, grifo nosso)	Relação entre imagens, sendo que "uma imagem visual é definida como um *esquema mental* representando informações reais ou espaciais".	Esquema mental
Bishop (1988, p. 8, tradução nossa, grifo nosso)	"Este construto interage na literatura de pesquisa com as ideias de *imaginação*, capacidade espacial e *intuição*, mas é certo que a visualização não tem sido sentida como uma área de pesquisa significativa em educação matemática em um passado recente.	Imaginar e intuir
Zimmermann e Cunningham (1991, pg. 3, grifo nosso).	"Visualização matemática é o processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) usando essas imagens de forma eficaz para a descoberta e *compreensão da matemática*"	Compreender conceitos matemáticos
Dreyfus apud Costa (2000, pg. 169, grifo nosso)	"Visualização do ponto de vista da Educação Matemática inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de *traduzir* em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica".	Traduzir em linguagem simbólica
Senso comum	Ver/enxergar com o órgão da visão	Enxergar

Fonte: os autores

Conhecer e identificar cada uma dessas concepções implica em refletir a respeito da forma como se constrói cada uma delas, evidenciando como cada uma dessas concepções é elaborada a partir de uma determinada perspectiva sob a qual observa-se o fenômeno visualização. Buratto (2012) enfatiza que:

> Quando conseguimos distinguir e compreender as diferenças existentes entre definições e, ao mesmo tempo, observar as percepções das relações de proximidade dos elementos neste mesmo campo, ou seja, nesta mesma área de pesquisa, é porque temos como referência que o tema visualização está relacionado aos mais diversos ramos da matemática e que também expressa detalhes qualitativos ou quantitativos na história, na filosofia, na psicologia, na pedagogia e em outras áreas do conhecimento (BURATTO, 2012, pg. 61).

Acreditamos que, conforme aponta Buratto (2012), o tema da visualização está relacionado aos mais diversos campos, não só da matemática, mas muito além dela. Desta forma, cada uma das concepções que se podem encontrar na literatura é o produto de uma análise feita, seja essa análise fundamentada por argumentos de ordem teórica, ou empírica. Assim, o que se define por visualização expressa uma evidência do fundamento sobre o qual se construiu o que se entende por visualizar, por este fato pode-se perceber que cada concepção destaca um aspecto ou componente diferente da visualização.

As concepções de visualização elencadas nesta seção servirão como base para analisar os dados que emergiram durante a realização da pesquisa. As categorias aqui apresentadas fundamentarão a discussão que se realizará nos capítulos apresentados a seguir. A próxima seção apresenta alguns conceitos elaborados por Alan J. Bishop e que também fundamentam a análise que se realizará neste trabalho.

2.3 Alan J. Bishop: os constructos da visualização

A partir de uma revisão da literatura, conforme apresentado na seção anterior, percebe-se o leque de concepções e conceitos empregados na tentativa de definir o fenômeno da visualização. Diante dessa gama de definições, surge a necessidade de restringirmos nosso olhar, a fim de realizar a análise dos dados desta pesquisa.

Como mencionado, um dos maiores responsáveis pela expansão do campo de pesquisa em visualização foi o pesquisador Alan J. Bishop, um dos precursores do movimento que surgiria em prol das investigações em habilidades visuais. Segundo Presmeg (2008), a revisão da pesquisa em habilidades espaciais no campo da psicologia, feita por Bishop já em 1980, não somente apresentou o estado da arte deste campo naquele tempo, mas fez muito além disso. Em consonância com a preocupação que demonstrou em várias de suas pesquisas para melhorar o ensino e aprendizagem de matemática, neste trabalho Bishop identificou elementos salientes e tópicos dos estudos em visualização que poderiam, e viriam a ser desenvolvidos e investigados nas pesquisas em educação matemática para muitos anos por vir.

Sempre afirmando o seu interesse em promover pesquisas relevantes para além do campo teórico, mas que atingissem também a atividade do professor em sua profissão, Presmeg (2008) aponta que a escrita de Bishop “reflete sua constante preocupação de que a pesquisa em educação matemática deve ser relevante para os detalhes básicos do trabalho do professor na sala de aula de matemática”[2] (PRESMEG, 2008, p. 85, tradução nossa).

Fundamentado nesses objetivos, Bishop propõe então analisar a visualização por meio de dois tipos de constructos, com a intenção de criar distinções mais refinadas para a análise das tarefas utilizadas nas pesquisas em visualização e também para a análise dos resultados da pesquisa sobre aspectos espaciais da educação matemática. Esses dois constructos referem-se a

[2]“*Bishop’s writing reflects his constant concern that research in mathematics education should be relevant to the nitty-gritty details of the teacher’s work in the mathematics classroom*.” (PRESMEG, 2008, p. 85).

duas habilidades que, segundo ele, compõem a visualização. São eles: a interpretação de informação figurativa, no original *interpreting figural information*, também conhecida como IFI, e o processamento visual, no original: *visual processing*, também chamado de VP. Esses dois constructos, assim como o seu uso, foram elaborados em 1983, no artigo “Space and Geometry” (BISHOP, 1983).

Essas duas habilidades colaboram para que a visualização fosse analisada do ponto de vista do processo, ou seja, da atividade que desperta. Uma vez que, de acordo com Bishop (1989), a visualização desperta a atividade de manipulação de imagens visuais, mentais ou físicas. Essa manipulação ocorre por meio dessas duas habilidades, o IFI e o VP.

De acordo com Bishop (1983), a interpretação da informação figurativa (IFI) refere-se à ação de compreender as representações visuais e o vocabulário espacial usados no trabalho geométrico, como gráficos, quadros e diagramas de todos os tipos. A IFI é uma habilidade que depende da compreensão do conteúdo e do contexto e que se relaciona particularmente com a forma do material de estímulo. Desse modo, conforme analisa Fernandéz (2013), a interpretação da informação figurativa é o processo de compreender e interpretar as representações visuais para extrair a informação que estas contêm, o que inclui a manipulação e a transformação de representações e de imagens visuais.

Já o processamento visual (VP) é descrito por Bishop como uma característica mais dinâmica, pois envolve a visualização e a tradução de relações abstratas e de informações não-naturais em termos visuais, como por exemplo manipular e transformar representações e imagens visuais. Em contraste com o IFI, o VP não se relaciona com a forma do material de estímulo, porque é uma habilidade de processo, e não de conteúdo (BISHOP, 1983). Conforme expande Fernandéz (2013), o processamento visual abrange tanto o processo de conversão da informação abstrata ou não figurativa em imagens visuais quanto o processo de transformação de algumas imagens visuais já formadas em outras. Se trata de uma “capacidade de processo que não se refere à forma do estímulo do material apresentado. Sua natureza é privada e pessoal, sendo o processo inverso do anterior”[3] (FERNANDÉZ, 2013, p. 24, tradução nossa).

Para a análise realizada neste trabalho, fundamentados em Bishop (1983), conceberemos o termo visualização como o processo composto por essas duas habilidades, a interpretação da informação figurativa (IFI) e o processamento visual (VP), conforme descritas

[3]“*Se trata de una capacidad de proceso y no se refiere a la forma del estímulo del material presentado. Su naturaleza es privada y personal siendo el proceso inverso del anterior*” (FERNANDÉZ, 2013, p. 24).

por Bishop (1983). Sendo assim, na próxima seção discorreremos sobre as características dos visualizadores e dos não-visualizadores na perspectiva de Presmeg fundamentada em Bishop.

2.4 Visualizadores *versus* não-visualizadores

Trilhando o mesmo caminho de seu orientador, Bishop, a pesquisadora Norma Presmeg une-se a ele na missão de investigar a visualização sob a perspectiva da Educação Matemática. Conforme a própria autora aponta, apesar não ter adotado os constructos IFI e VP apresentados por Bishop, como pontos centrais de seu trabalho, estes foram fundamentais na fundamentação de sua própria investigação,

> Embora esses constructos não tenham se tornado centrais em minha própria pesquisa (Presmeg, 1985), as cuidadosas distinções analíticas defendidas por meu orientador de dissertação, Alan Bishop, constituíram um modelo exemplar que tentei seguir para levar suas ideias adiante e adaptá-las para minha investigação (PRESMEG, 2008, p. 85, tradução nossa).[4]

A partir do modelo proposto por Bishop e após realizar sua própria investigação, Presmeg (1986) propõe uma diferenciação entre alunos visualizadores e não-visualizadores, tendo como base o conceito que chamou de Visualidade Matemática. Para essa autora, a Visualidade Matemática é o grau de preferência que uma pessoa tem por usar métodos visuais ao tentar resolver problemas matemáticos que podem ser resolvidos tanto por métodos visuais quanto por métodos não visuais.

Para Presmeg (1986), um *método visual* de solução é aquele que envolve imagens visuais, com ou sem um diagrama, como uma parte essencial do método de solução, mesmo que métodos de raciocínios algébricos também sejam empregados. Em contrapartida, um método *não visual* de solução é aquele que não envolve imagens visuais como parte essencial do método de solução. Portanto, o que determina se um método de solução é visual ou não visual é a presença ou a ausência de imagens visuais como parte essencial do trabalho de resolução.

A partir deste conceito, a autora caracteriza que um indivíduo é um visualizador se ele prefere utilizar métodos visuais ao resolver problemas matemáticos que podem ser resolvidos por métodos visuais ou não visuais. Já os não-visualizadores são aqueles indivíduos que, tendo

---

[4]"*Although these constructs did not turn out to be central in my own research (Presmeg, 1985), the careful analytical distinctions advocated by my dissertation supervisor, Alan Bishop, comprised an exemplary model that I attempted to follow in taking his ideas further and adapting them to my investigation*" (PRESMEG, 2008, p. 85).

a possibilidade de resolver um problema matemático por diversos métodos, optam por utilizar aqueles que são não visuais (PRESMEG, 1986). Nesse trabalho, intitulado *Visualization in high school mathematics*, a autora aponta para a importância de se investigar as habilidades e as limitações, tanto dos visualizadores quanto dos não-visualizadores já que, segundo Presmeg, os alunos visualizadores tendem a ter dificuldades em comunicar conceitos, conforme relata:

> Outro aspecto que se mostrou característico da solução de problemas de muitos visualizadores nas entrevistas baseadas em tarefas foi a dificuldade de comunicar os conceitos de matemática. Os visualizadores tropeçaram na terminologia e não conseguiam se lembrar dos termos-chave. Com esta limitação, eles geralmente recorriam a gestos ou desenhavam diagramas (PRESMEG, 1986, pg. 45, tradução nossa)[5].

Assim, a habilidade de visualização passa a ser vista como intrinsecamente relacionada a uma preferência e não a uma capacidade ou uma característica inata. O que, conforme aponta Presmeg (1986), pode desenvolver-se ao longo dos anos escolares por meio de uma metodologia adequada. Segundo a pesquisadora, professores visuais tendem a desenvolver suas aulas por meio de um ensino mais visual, fazendo conexões entre o currículo de matemática e de outras áreas. Além disso, incluem em suas aulas outros assuntos, conteúdos matemáticos aprendidos em anos anteriores e, acima de tudo, aspectos do mundo real. Deste modo, em sua pesquisa, a autora enfatiza que professores visuais expressam em seu ensino muitas características comumente associadas à criatividade.

Por outro lado, verificou-se também em Presmeg (1986) que um ensino não-visual pode ter um efeito inibidor sobre a aprendizagem e a criatividade, levando os visualizadores a acreditar que o sucesso na matemática depende da memorização automática de regras e fórmulas. A autora destaca ainda que um ensino intermediário, que formaliza os conceitos sem excluir das aulas os aspectos visuais, pode ser a chave para despertar alunos mais visualizadores. Tendo em vista que, em sua pesquisa fica evidente que os professores que costumavam usar métodos visuais, mas que também enfatizavam a importância da abstração e da generalização, colaboraram para que os visualizadores superassem algumas das dificuldades associadas à concretude de uma imagem ou diagrama.

Para a análise realizada nesta pesquisa, fundamentados em Presmeg (1986), identificamos as técnicas de resolução das tarefas matemáticas apresentadas pelos participantes

---

[5]*It was also found that visual methods are often more time-consuming that nonvisual methods. Another aspect which was found to be characteristic of the problem solv-ing of many visualisers in the task-based interviews was a difficulty in communicating the concepts of mathematics Visualisers stumbled over terminology, could not remember key terms. In these straits they typically resorted to gestures or drew diagrams* (PRESMEG, 1986, p. 45).

classificando-as em *métodos visuais*, *métodos parcialmente visuais* e *métodos não-visuais*. Consideramos como *método visual* as técnicas de resolução que empregam imagens visuais, com ou sem diagramas, como uma parte essencial do método, sem que estejam associadas a métodos de raciocínio algébrico; chamamos de *método parcialmente visual* as técnicas de resolução que utilizaram imagens visuais, com ou sem diagramas, em parceria com algum método de raciocínio algébrico; já os métodos que não empregavam imagens visuais como uma parte essencial da solução, forma denominados *métodos não-visuais.*

3. TAREFAS MATEMÁTICAS E SEU POTENCIAL NO ENSINO

Neste capítulo apresentamos a concepção de tarefas matemáticas que adotamos neste trabalho. Discorremos sobre os diferentes tipos de tarefas e enfatizamos a relevância de um ensino que aborde tarefas matemáticas visuais.

3.1 Tarefas matemáticas como uma ferramenta para o ensino

Nesta seção será apresentada uma discussão a respeito das tarefas matemáticas e de seu potencial enquanto ferramentas para o ensino de matemática. O contexto de uma sala de aula de matemática abrange diversos aspectos que são considerados importantes no que se refere ao ensino e aprendizagem de matemática. Nesse ambiente, são muitos os fatores que poderiam ser citados. No âmbito desta pesquisa, destacamos as tarefas matemáticas. De acordo com Joana Brocardo, "as tarefas matemáticas que se propõem aos alunos são determinantes para o tipo de aprendizagem matemática que se lhes proporciona" (EIEM 2014, p. 3). Assim sendo, apresentamos a seguir uma reflexão a respeito do termo "tarefa matemática" e das implicações de suas inserções em uma sala de aula de matemática.

Para que iniciemos essa discussão, é preciso antes delimitarmos à que estamos nos referindo quando falamos de tarefas matemáticas. De acordo com Stein e Smith (1998), uma tarefa matemática é um segmento da atividade da sala de aula cujo objetivo é concentrar a atenção dos alunos para o desenvolvimento de uma ideia matemática particular. Na definição apresentada por estes autores, nota-se a presença do termo "atividade". Tal uso chama a atenção para o fato de que estes termos, tarefa e atividade, embora muitas vezes empregados como sinônimos, possuem significados distintos. Ao analisar a literatura referente a este campo, percebe-se evidências deste fato.

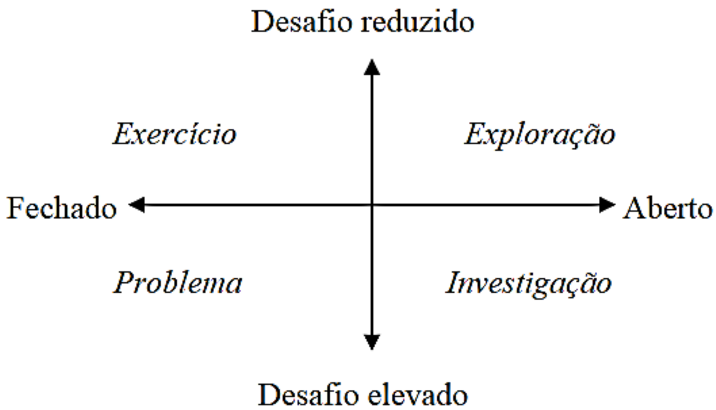
Ponte (2014) destaca a importância de que seja feita a diferenciação dos conceitos aos quais tais termos se referem. Com base em Christiansen e Walther (1986), Ponte afirma que uma atividade pode incluir a execução de várias tarefas. De forma que a tarefa representa o objetivo de cada uma das ações em que se desdobra uma atividade. Desta forma, as tarefas matemáticas são propostas pelo professor, interpretadas pelo aluno e podem (ou não) dar origem a diferentes atividades no momento de sua execução.

Devido a esta concepção de tarefas matemáticas como uma ferramenta para o despertar da atividade dos alunos, diversos autores têm discutido a importância de que haja uma reflexão, por parte dos professores, ao escolherem quais tarefas matemáticas propõem aos seus alunos. Isso se deve a todas as evidências da relevância que as tarefas exercem no processo de aprendizagem em matemática (CYRINO; JESUS, 2014; PONTE, 2014; STEIN; SMITH, 1998; CANAVARRO, 2012).

Segundo Ponte (2005), as tarefas matemáticas podem ser classificadas em quatro tipos: problema, exercício, exploratória e investigativa. Nesta perspectiva, o autor afirma que existem duas dimensões fundamentais a serem consideradas em uma tarefa matemática, são elas: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático está relacionado com a percepção da dificuldade de uma questão e varia entre dois polos de desafio, o “reduzido” e o “elevado”. Já o grau de estrutura é uma dimensão que apenas recentemente começou a receber atenção, e varia entre os polos “aberto” e “fechado”. Deste modo, temos que uma tarefa é fechada quando seu enunciado expressa claramente o que se pede, por outro lado, é aberta se comporta um certo grau de indeterminação entre o que é dado e o que é pedido.

Na Figura 1, Ponte (2005) expressa a forma como tarefas do tipo problema, exercício, exploração e investigação relacionam-se com cada um dos polos citados:

Figura 1 - Classificação Das tarefas de acordo com seu grau de desafio e abertura



Fonte: Ponte (2005)

Analisando a figura 1, podemos notar que, de acordo com Ponte (2005), um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido, na qual o aluno possui um caminho imediato para resolvê-la. Já um problema é uma tarefa também fechada, porém com nível elevado de desafio. Assim, apesar de saber exatamente o que se tem e o que se pede no enunciado, o aluno não possui um caminho imediato para obter a solução. Uma tarefa de investigação, por outro lado, é uma tarefa aberta com grau de desafio elevado. Em tarefas desse tipo, o aluno não possui de imediato o que se pede e qual caminho deve seguir pois, embora a tarefa forneça informações, ainda deixa muito trabalho para o aluno fazer, tanto em termos de elaboração de uma estratégia de resolução quanto em termos da formulação específica das próprias questões a resolver.

Existem ainda as tarefas abertas e fáceis, chamadas de tarefas de exploração, as quais diferem das tarefas de investigação, pois têm como característica o fato de que nelas é possível ao aluno começar a trabalhar logo, uma vez que não exigem planejamento.

Fica, então, a cargo do professor a responsabilidade de escolher tarefas matemáticas condizentes com os seus objetivos de ensino, para que estes sejam alcançados pelos alunos. Cabe ao professor fazer uma análise para além dos conteúdos, levando em consideração que as tarefas matemáticas "envolvem processos cognitivos relativos à compreensão, ao estabelecimento de estratégias e procedimentos, e à validação" (CYRYNO; JESUS, 2014, p. 753).

Prosseguindo neste caminho, pode-se ainda caracterizar as tarefas matemáticas de diferentes modos e de acordo com diferentes critérios. Segundo Ponte (2005), as tarefas matemáticas podem ser caracterizadas de acordo com seu grau de abertura, de desafio cognitivo, de relação com a realidade e de duração. É importante ressaltar que independente das formas de se organizar essa classificação, o ponto principal a que se deve deter é o fato de que tarefas matemáticas diferentes oferecem diferentes oportunidades para os alunos pensarem, colaborando assim para o desenvolvimento de ideias matemáticas. De acordo com Stein e Smith (1998):

> Tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, de maneira rotineira, representam um certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem; tarefas que exigem que os alunos pensem conceptualmente e que os estimulem a fazer conexões representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem. O efeito cumulativo, dia após dia, de exploração, na sala de aula, de diferentes tipos de tarefas, conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática(...). (STEIN SMITH, 1998, p. 22).

Daí segue a importância de que o professor crie um leque de oportunidades para seus alunos, donde o acúmulo, dia após dia, dessa exploração de diferentes situações, culmine em um ambiente favorável para a aprendizagem.

Jesus, Cyrino e Oliveira (2014) citam em seu trabalho que vários pesquisadores vêm apontando para o fato de que existe uma relação entre o tipo de tarefas matemáticas propostas pelo professor e o tipo de pensamento matemático que os seus alunos desenvolvem. Essa relação reside no fato de que as tarefas são tidas como instrumentos para influenciar o que os alunos aprendem e de que modo essa aprendizagem se realiza, já que diferentes tarefas podem apresentar diferentes níveis de demanda cognitiva. Desta forma,

> Conhecer os níveis de demanda cognitiva de tarefas pode permitir ao professor: diferenciar as demandas cognitivas de tarefas; identificar quais tipos de tarefas oferecem oportunidades suficientes para o aluno pensar; reconhecer que o nível de pensamento no qual o aluno trabalha pode determinar o que ele irá aprender [...] (JESUS; CYRINO; OLIVEIRA, 2014, p. 299).

Conhecendo essa relação, passa-se a considerar a importância de se explorar o potencial das tarefas matemáticas como um meio para o desenvolvimento do pensamento matemático criativo.

Vale, Barbosa e Pimentel (2014) apontam a importância de se identificar e desenvolver tarefas matemáticas que tenham potencial para desenvolver, nos futuros professores, as dimensões do pensamento criativo - a fluência, a flexibilidade e a originalidade. Isso é necessário para que assim eles passem a elaborar estratégias de ensino que oportunizem esse tipo de desenvolvimento também em seus alunos. Segundo esses autores, já não é mais necessário que o aluno apenas realize cálculos, memorize fatos e procedimentos ou resolva problemas rotineiros. É preciso, agora, que se formem alunos capazes de reconhecer e definir problemas, gerar vários caminhos para chegar a uma solução, identificar os mais eficientes ou elegantes e comunicar os resultados.

Vale, Barbosa e Pimentel (2014), também afirmam que ao falar em pensamento criativo "parece consensual que se considerem três componentes/dimensões da criatividade: fluência, flexibilidade e originalidade" (VALE; BARBOSA; PIMENTEL, 2014, p.125). Nesse contexto, tem-se que a *fluência* é caracterizada como a capacidade de gerar um grande número de ideias de estratégias para solucionar um problema, apresentando fluxo de associações e utilização de conhecimentos básicos; a *flexibilidade* é a capacidade de produzir estratégias ou ideias de diferentes categorias ou percepções sobre o mesmo problema ou coisa, pode ser percebida pela facilidade que um aluno tem de mudar de ideia; já a o*riginalidade* é a capacidade de criar ideias ou produtos incomuns, inovadores ou extremamente diferentes.

Estas capacidades não somente nascem com o indivíduo, mas também podem ser cultivadas e desenvolvidas desde que sejam proporcionadas as oportunidades de aprendizagem apropriadas para despertar o potencial criativo, inovador e crítico. Esse cultivo está fortemente arraigado às decisões que um professor toma ao selecionar as tarefas matemáticas que propõe (VALE, 2012). Escolher uma boa tarefa matemática é parte fundamental nesse processo. Para Vale, Barbosa e Pimentel (2014), uma tarefa matemática é considerada boa quando serve para introduzir ideias matemáticas fundamentais, quando apresenta um desafio intelectual para os alunos e quando lhes permite usar várias abordagens no caminho de sua solução.

Além disso, a autora ainda faz uma distinção entre o que chama de *tarefas desafiantes* e *tarefas ricas*. De acordo com Vale, Barbosa e Pimentel (2014), uma *tarefa desafiante* é interessante e talvez até agradável, mas nem sempre fácil de lidar ou atingir. Este tipo de tarefa matemática deve envolver ativamente os alunos na construção de uma diversidade de ideias e estilos de aprendizagem. Esses desafios devem permitir responder à situação com flexibilidade e imaginação. A existência desse desafio é de grande importância em uma aula de matemática, já que conforme apontam os autores, uma aula "rotineira" pode facilmente deixar os alunos desmotivamos e entediados. Já uma *tarefa rica* é usada quando se quer promover nos alunos uma criatividade matemática complexa. Elas dão aos alunos a oportunidade de aprenderem escolhendo a partir de um conjunto de capacidades matemáticas e não matemáticas, e usando estas de forma integrada, criativa e significativa.

3.2 O potencial das tarefas matemáticas visuais

Nesta seção apresentamos algumas das potencialidades do uso das tarefas matemáticas visuais como um objeto propulsor da atividade e da criatividade matemática.

Consideraremos como uma tarefa matemática visual qualquer tarefa matemática cuja solução possa ser obtida por uma estratégia visual, mesmo que essa não seja a única possibilidade de resolução. Uma tarefa matemática visual não apresenta, necessariamente, uma figura em seu enunciado, mas possibilita a sua construção como um dos caminhos para a solução.

Conforme salientado na seção 3.1, ao selecionar as tarefas matemáticas que irá propor em sua aula, o professor toma a decisão de quais oportunidades oferecerá a seus alunos. Destacamos aqui a possibilidade de selecionar tarefas matemáticas que possuam certo grau de abertura a fim de dar aos alunos a oportunidade de que selecionem quais caminhos desejam seguir para a resolução, uma vez que a exploração de diversos caminhos descobertos pelo próprio aluno, ou apresentados pelo professor, pode colaborar para o aumento da gama de estratégias de um aluno quando este se depara com um problema.

Diante disso, Vale *et al.* (2012) afirma que na matemática a visualização é uma componente importante para ser explorada e que pode ser desenvolvida através de experiências que requerem esse tipo de pensamento (e.g. Vale *et al*., 2012). Disto decorre a importância de selecionar tarefas matemáticas que possam ser resolvidas por diversas estratégias, incluindo as estratégias visuais. Já que, segundo esses autores:

> Uma estratégia visual pode ser um modo diferente de encarar um problema complexo e de obter uma solução mais simples, além de que tarefas com características visuais podem ajudar os alunos a ultrapassar algumas dificuldades com conceitos e procedimentos matemáticos, resolvendo com sucesso uma dada situação problemática (VALE *et al*., 2012, p.7).

A mesma autora, com base em uma pesquisa realizada em 2016, afirma que em sua investigação pôde-se perceber que os alunos que utilizam estratégias visuais, na maioria dos casos, o fazem depois de uma maior análise e reflexão sobre o problema, ou até mesmo, em alguns casos, como uma opção alternativa de solução que descobrem posteriormente, e que consideram mais bonita ou elegante (VALE, 2016). Nesta perspectiva, tem-se que:

> [...] as estratégias visuais, em certas ocasiões, são eficientes no sentido de que ajudam o solucionador na organização e compreensão mais profunda das questões que se colocam com a tarefa e da própria estrutura matemática subjacente ao problema (VALE, 2016, p. 21).

Neste trabalho selecionamos para a coleta de dados cinco tarefas matemáticas visuais, que serão descritas no Capítulo 4, tendo em vista o objetivo de analisar, do ponto de vista da visualização, quais técnicas de resolução seriam mobilizadas pelos participantes. Para realizarmos essa análise, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático como recurso metodológico.

4. A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

São apresentados a seguir alguns conceitos da Teoria Antropológica do Didático, denotada por TAD, que serão posteriormente utilizados como lentes teóricas por meio das quais olharemos os dados. Essa teoria foi adotada para este trabalho pelo fato de possuir os aportes teóricos necessários para que se realizasse uma análise praxeológica das técnicas utilizadas por licenciandos em Matemática ao resolverem tarefas matemáticas visuais. O que caminha ao encontro do que aponta seu próprio autor, Chevallard, segundo o qual a TAD deve:

> (...) ser encarada como um desenvolvimento e uma articulação das noções cuja elaboração visa permitir pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, que surgem no final de múltiplas análises (CHEVALLARD, 1999, p. 25).

A Teoria Antropológica do Didático propõe um modelo epistemológico para o estudo da atividade humana em sua dimensão institucional. O modelo proposto pela TAD é um prolongamento da Teoria da Transposição Didática, que surge para explicar a Transposição Didática (TD) no ecossistema da sala de aula, ampliando-o para relações entre objetos de ensino que irão para além da sala de aula (MENEZES; SANTOS, 2008), uma vez que "os sistemas que buscamos compreender e explicar em bases científicas são, por assim dizer, 'sistemas antropológicos', ou seja, sistemas que envolvem intrinsecamente seres humanos" (CHEVALLARD, 2013, p. 3).

Cabe aqui, portanto, que sejam apresentados os principais conceitos desta teoria, os quais utilizaremos para análise dos dados obtidos na pesquisa, que se apresentará posteriormente.

Segundo Chaachoua e Bittar (2019), o tema central da TAD é o dos saberes e das instituições. Para Chevallard (1989), todo saber é saber de uma instituição, ou seja, um determinado saber nunca existe por si só, mas é construído em uma certa sociedade e ancorado por uma ou mais instituições. Para que se compreenda como isso ocorre, é necessário então que se apresente ao que nos referimos quando falamos em instituição sob a perspectiva da TAD.

Segundo Chevallard (1992) uma instituição I é um dispositivo social que impõe às pessoas que ocupam uma posição em I, modos de fazer e de pensar próprios. Nesta perspectiva o termo instituição passa a ter um sentido bem mais amplo do que o que lhe é geralmente atribuído. Passa-se então a considerar, por exemplo, uma sala de aula como uma instituição, sendo caracterizada pelo fato de ser composta por pessoas que compartilham de um modo próprio de pensar e agir. Um outro exemplo que pode ser dado e que demonstra o quanto o sentido de instituição para TAD difere de seu sentindo usual é o da instituição livro didático. Um livro didático é uma instituição para a TAD, pois se adequa à definição, no sentido de impor às pessoas uma forma de pensar e de agir.

A partir do conceito de instituição, pode-se refletir a respeito da forma como as condições de existência de um saber variam de instituição para instituição. Desta reflexão emerge o termo "ecologia dos saberes", que se refere ao estudo das condições de existência de um saber em uma determinada instituição. De acordo com Chaachoua e Bittar (2019):

> A ecologia de saberes é um meio de questionar a realidade: O que existe e por quê? Mas também, o que não existe, e por quê? E o que poderia existir? Sob quais condições? Inversamente, dado um conjunto de condições, quais objetos podem viver ali ou, ainda, quais objetos são impedidos de viver nestas condições? (CHAACHOUA, BITTAR, 2019, p.30).

Tais questionamentos permitem analisar a própria realidade em busca de compreender o que existe, por que existe ou não existe, bem como qual a razão de não existir. Assim, é possível reconhecer e identificar as particularidades que caracterizam as diversas organizações, advindas de diferentes instituições. De acordo com Chevallard (2013), "a ecologia dos saberes ensinados é regida por leis específicas, pois ela é moldada pelas condições e limitações peculiares da relação didática" (CHEVALLARD, 2013, p, 12).

Fortemente associado à ecologia dos saberes, situa-se o conceito de transposição didática, que faz parte também de um modelo teórico proposto para análise do sistema didático. De acordo com Chacchoua e Bittar (2019):

> A transposição didática estuda o processo que permite que um saber passe de uma instituição para outra instituição de ensino. Assim, ela coloca em evidência o problema da legitimação de objetos do saber ensinados e a aparição sistemática de um salto entre um saber ensinado e as referências que o legitimam. Salto devido às restrições que pesam sobre o funcionamento do sistema de ensino. (CHACCHOUA, BITTAR, 2019, p. 30).

Segundo Chevallard (1991), o termo "transposição didática", foi empregado nesse sentido inicialmente, pelo sociólogo francês Michel Verret (1975), em sua tese de doutorado. Para Verret, didática "é a transmissão de um saber adquirido. Transmissão dos que sabem para os que ainda não sabem. Daqueles que aprenderam para aqueles que aprendem" (VERRET, 1975, p.139). Nesse sentido, a prática didática também se desdobraria em duas: a prática do saber e a prática do seu ensino. Na prática do ensino, as imposições de rotinização e de institucionalização estariam diretamente relacionadas com a configuração dos conteúdos trabalhados na escola.

De acordo com Leite (2004), apesar de haver uma identificação dos componentes centrais da teoria de Chevallard com os de Verret, estes diferenciam-se pelo lugar de onde fala Chevallard e no qual este pretende afirmar com o seu trabalho – o campo da didática das matemáticas – o qual impõe novas questões e novos referenciais teóricos. Assim, para Chevallard:

> Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O 'trabalho' que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 39, tradução nossa)[6].

O termo, portanto, refere-se à modificação que um objeto sofre ao passar de um objeto de saber a ensinar para um objeto de ensino. Mas o que é um objeto para a TAD? Para a TAD tudo é objeto, segundo Chevallard "é um objeto qualquer entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. Tudo é, portanto, objeto" (CHEVALLARD, 2009, p. 1, tradução nossa)[7]. Assim, pessoas, conceitos, representações ou até mesmo ideias, são objetos. A teoria caracteriza ainda três tipos particulares de objetos que são fundamentais para a TAD: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições.

Cabe ainda apresentar uma outra noção fundamental da teoria: a de pessoa. Segundo Chevallard (2009), uma pessoa é o par formado por um indivíduo X e o sistema de suas relações pessoais com um objeto O, o qual pode-se denotar por R(X,O). Desta forma, a palavra "pessoa" como aqui empregada abrange todo indivíduo. Este, com o tempo, evolui seu sistema de relações pessoais, de forma que objetos que não existiam para ele começam a existir, e objetos que existiam podem deixar de existir. Nesse caminho, o relacionamento pessoal de X muda. Nessa evolução, o invariante é o indivíduo; o que muda é a pessoa. Assim, conforme afirma Chaachoua e Bittar (2019), a relação pessoal de um indivíduo X com um objeto O pode ser descrita como o conjunto de interações que podem ocorrer de X com O: segurá-lo, usá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele. Nesse sentido, estes autores expõem que:

> A aprendizagem é uma modificação da relação de um indivíduo X com O. Ou essa relação começa "a existir" (se ela ainda não existia), ou essa relação é modificada (se ela já existia). Essa aprendizagem muda a pessoa (não o indivíduo) (CHACCHOUA; BITTAR, 2019, p. 31).

---

[6]"*Un contenu de savoir ayant été designé comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le 'travail' qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique" (Chevallard, 1991).*
[7]*"est objet toute entité, matérielle ou immatérielle, qui existe pour au moins un individu. Tout est donc objet*" (CHEVALLARD, 2009)

Se faz ainda necessário considerar que esta relação de aprendizagem está sujeita à instituição em que tal indivíduo está inserido, uma vez que a instituição, à medida que impõe seu próprio modo de pensar e agir, constitui um sistema de condições e restrições sob as quais se forma e evolui a relação pessoal de um indivíduo X com o objeto O. A relação institucional, por sua vez, depende da posição que a pessoa ocupa na instituição I. Deste modo, toda ação do homem está inserida no contexto de uma instituição e pode ser descrita por meio de uma tarefa. Salientamos que o termo "tarefa", como empregado pela TAD, é entendido como a descrição de qualquer ação humana, o que o difere do termo "tarefa matemática", que é utilizado neste texto conforme o que foi apresentado no Capítulo 3.

Segundo a Teoria Antropológica do Didático, toda atividade humana pode ser descrita em termos de tarefas t, de diferentes tipos T e que podem ser justificadas por alguma tecnologia θ que decorre de uma teoria Θ, ou seja,

> A TAD considera que, em última instância, toda atividade humana consiste em resolver uma tarefa t de algum tipo T, por meio de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ que permite simultaneamente pensá-la, produzi-la e que, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ (CHAACHOUA; BITTAR, 2019, p. 32).

Esta organização implementada à atividade humana é chamada por Chevallard (1999) de organização praxeológica ou praxeologia, e é denotada por $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Segundo o autor, "A noção de praxeologia está no coração do TAD" (CHEVALLARD, 2009, p. 4), pois permite generalizar várias noções culturais comuns e estender a TAD para outras áreas do conhecimento para além da Matemática.

O termo "praxeologia", deriva das palavras gregas "práxis" e "logos", que significam, respectivamente, prática e razão. Assim, o próprio nome enfatiza a distinção que se faz entre os dois blocos que compõem o quarteto praxeológico $[T, \tau, \theta, \Theta]$, o bloco prático-técnico $[T, \tau]$, composto pelo tipo de tarefa e suas técnicas e o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$, formado pela tecnologia e a teoria que a fundamenta.

Este modelo propõe uma forma de organização do saber, tendo em vista que:

> Na atividade matemática, como em qualquer outra atividade, existem duas partes, que não podem viver uma sem a outra. De um lado estão as tarefas e as técnicas e, de outro, as tecnologias e teorias. A primeira parte é o que podemos chamar de "prática", ou em grego, a práxis. A segunda é composta por elementos que permitem justificar e entender o que é feito, é o âmbito do discurso fundamentado – implícito ou explícito – sobre a prática, que os gregos chamam de logos (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 251).

Portanto, para a TAD, as ações são descritas por meio de tarefas que podem ser do mesmo ou de diferentes tipos. Por exemplo, a tarefa “caminhar na praia” pode fazer parte de um conjunto de tarefas do tipo “caminhar ao ar livre”. Assim, o tipo de tarefa, denotado por T, é descrito por meio de um verbo de ação (caminhar) e um complemento (ar livre). De modo que o tipo de tarefa “caminhar ao ar livre” diferencia as tarefas que o compõem de tarefas de outros tipos como correr ou nadar.

Mas além da diferenciação entre os tipos de tarefas, é importante observar que mesmo dentro do conjunto de um tipo de tarefas, cada tarefa (deste conjunto) demanda sua própria técnica. Como no exemplo dado, “caminhar na praia” ou “caminhar em um parque” fazem parte do conjunto de tarefas do tipo “caminhar ao ar livre”, porém a primeira pode ser realizada com os pés descalços, já para a segunda, pode ser mais adequado utilizar um par de tênis. Portanto, cada tarefa demanda sua própria técnica.

A tecnologia θ, por sua vez, desempenha o papel de justificar a técnica e de garantir sua validade. Já a teoria Θ, completa o quarteto praxeológico tendo como objetivo justificar a tecnologia. Expandindo o exemplo, “caminhar ao ar livre” o ato de executar esta tarefa utilizando a técnica “fazê-lo descalço”, pode ser justificado pelo fato de que caminhar descalço ajuda a descarregar a eletricidade estática, equilibra nosso corpo e estimula as áreas reflexas auxiliando na saúde dos órgãos, o que neste caso desempenharia o papel de tecnologia. Sendo justificada pela teoria da Medicina.

Aplicando esta organização a exemplos do cotidiano, percebe-se que muitas vezes as técnicas são reproduzidas e passadas de geração em geração sem que a tecnologia que as justifica seja apresentada explicitamente. Já na Matemática, o rigor exigido das demonstrações torna mais evidente a presença de cada um desses elementos. Por exemplo, dada uma tarefa do tipo “calcular a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo”, uma técnica de resolução é aplicar o teorema de Pitágoras, por meio da fórmula “$a^2 = b^2 + c^2$”, em que “a” é a medida da hipotenusa e “b” e “c” são as medidas dos catetos. Mas observemos que a fórmula em si, se apresentada a uma pessoa que não conhece o teorema, não passará de uma sentença desprovida de significado. Assim, neste caso, o teorema desempenha o papel de tecnologia que justifica a técnica de utilizar a fórmula “$a^2 = b^2 + c^2$” para obter a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, conhecidos os seus catetos. Por fim, a tecnologia do teorema de Pitágoras tem sua validade sustentada pela teoria da Geometria Plana.

O quadro 5 sintetiza as noções básicas da praxeologia, conforme proposto pela TAD e fundamenta a organização praxeológica que se realiza no Capítulo 4:

Quadro 5 - Noções Básicas de praxeologia

Bloco Prático-técnico	T: tipo de tarefa	Atividade humana descrita por meio de um verbo de ação e um complemento.
	τ: técnica	Método ou estratégia utilizada para a execução de uma tarefa.
Bloco Tecnológico-teórico	θ: tecnologia	Justificativa que valida a utilização de uma técnica.
	Θ: teoria	Fundamentação teórica que justifica determinada tecnologia.

Fonte: os autores

Todas essas noções fundamentais nos propõem um modelo para análise das situações que diariamente ocorrem ao nosso redor, num contexto educacional. Analisar a realidade por meio dos parâmetros fornecidos pela TAD nos permite perceber fatos recorrentes sob uma nova perspectiva, o que desperta diversas indagações.

Aplicando as questões emergentes à um contexto de sala de aula, levanta-se uma reflexão a respeito dessa instituição. As relações ali presentes, a metodologia adotada, tal como o ambiente composto pelo professor e por seus alunos podem fazer viver ou morrer um saber, podendo colaborar ou não para a transformação da relação pessoal de um indivíduo com um objeto. É importante refletir a respeito da influência das diferentes instituições em que um aluno é inserido ao longo de sua formação.

Segundo Chaachoua e Bittar (2019, p. 37), “A elaboração de um modelo de referência praxeológico tornou-se uma etapa incontornável da maior parte dos trabalhos desenvolvidos no âmbito da TAD”. Conforme esses autores, o MPR é uma importante ferramenta para conduzir análises didáticas, pois permite analisar as relações institucionais. De acordo com Barbosa (2017), para aplicação da TAD é preciso que, num primeiro momento, o docente ou pesquisador determine e caracterize quais as praxeologias matemáticas a serem estudadas. Para isso, deve delinear e analisar o objetivo da investigação situando os tipos de tarefas matemáticas e o grau de desenvolvimento dos elementos técnica, tecnologia e teoria.

Já o Modelo Praxeológico Dominante é construído a partir das praxeologias que mais ocorrem na instituição onde situa-se a investigação. Sua elaboração permite identificar os elementos do quarteto praxeológico e a relação desses com os sujeitos da instituição analisada.

Na análise descrita no Capítulo 6, apresentamos as tarefas selecionadas para a análise de dados realizada. Na sequência, elaboramos um Modelo Praxeológico de Referência, cujo objetivo é analisar as praxeologias contidas nas tarefas escolhidas para a coleta de dados, verificando se essas possibilitam o alcance do objetivo deste trabalho.

A partir daí, apresentamos uma análise praxeológica das técnicas que os participantes utilizaram para resolver as tarefas matemáticas aplicadas aos participantes. Nessa análise, para cada uma das tarefas são identificados os quatro elementos do quarteto praxeológico, com o objetivo de analisar aspectos referentes à visualização dos participantes, identificando as habilidades de Interpretação da Informação Figurativa e de Processamento Visual. Também são analisadas quais das técnicas utilizadas são métodos visuais, não-visuais, ou parcialmente visuais. Por fim, é elaborado um Modelo Praxeológico Dominante, contendo as técnicas que mais ocorreram nas resoluções dos participantes. Ao final de cada MPD apresentamos uma comparação da técnica contida no MPD com a técnica apresentada no MPR.

5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apresentamos neste capítulo a metodologia adotada para o desenvolvimento deste trabalho. Descrevemos o ambiente em que foi desenvolvido, os seus participantes, as técnicas e os procedimentos metodológicos adotados.

A proposta desta pesquisa é parte de um projeto maior, realizado pelo Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG. A presente proposta foi avaliada e aprovada pelo Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos – COPEP[8], segundo o parecer 3.268.310. Além disso, todos os alunos participantes entregaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, devidamente assinado.

Os dados foram coletados por meio dos registros escritos das resoluções das tarefas matemáticas propostas aos participantes. A análise destes dados seguiu as determinações propostas pela pesquisa qualitativa sob o paradigma interpretativo e foram analisados de acordo com a Teoria Antropológica do Didático.

5.1 Abordagem qualitativa e o paradigma interpretativo

Em consonância aos seus objetivos, esta pesquisa possui caráter qualitativo, em um paradigma interpretativo e os dados serão analisados por meio da TAD.

Segundo Denzin e Lincoln (2011, p.3), os pesquisadores qualitativos “estudam coisas dentro de seus contextos naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas lhes atribuem.”. A pesquisa qualitativa é aplicada aos casos onde se pretende realizar o estudo de um objeto ou situação cujos dados não se podem traduzir de maneira mensurável, ou seja, quantitativa. O método qualitativo abre um leque de possibilidades e tem seu foco voltado ao estudo de casos em que se deseja analisar aspectos implícitos, o que se faz, pelo pesquisador, de maneira interpretativa a partir das lentes teóricas pelas quais observa o caso estudado, a partir de seu referencial.

De acordo com Coutinho (2005), um paradigma de investigação pode ser definido como um conjunto articulado de postulados, valores conhecidos, teorias comuns e regras que são aceitos por uma comunidade científica em um dado momento histórico. Assim, ao assumir um paradigma, assume-se também um compromisso com o quadro teórico e metodológico concordante com a natureza da investigação.

[8] Av. Colombo, 5790, UEM-PPG-Comitês de Ética. CEP: 87020-900, Maringá-PR. (44) 3011-4444 / 3011-4597. copep@uem.br

Bogdan e Biklen (1994) afirmam que no paradigma interpretativo é o interesse do pesquisador que determina o objetivo do estudo, com base em seu próprio desejo de conhecer determinada situação e compreendê-la a partir das percepções e ações dos participantes da investigação. Neste caso, o caminho traçado pelo pesquisador é aberto, flexível e emergente, de forma que existe a liberdade de se tomar certas decisões no decorrer deste caminho baseando-se nos dados que surgem no campo da pesquisa. Neste tipo de investigação, os autores colocam que, diferentemente da pesquisa quantitativa, pode-se eleger um número de casos reduzidos para se investigar no campo qualitativo.

Neste mesmo caminho Erickson (1986) aponta que o caráter interpretativo de uma pesquisa visa a particularização dos resultados, e não sua generalização. Assim, a análise dos dados no paradigma interpretativo requer do pesquisador que este percorra o processo de organizar sistematicamente as transcrições das fontes da investigação e, diante disso, apresente suas considerações como o fruto de uma análise que associa os dados observados aos conceitos presentes no referencial teórico adotado (BOGDAN, BIKLEN, 1994).

Portanto, conforme afirma Coutinho (2015), o paradigma interpretativo adota uma posição relativista, onde assume-se a existência de múltiplas realidades sob a forma de construções mentais. Assim, "este paradigma pretende substituir as noções científicas de *explicação, previsão* e *controlo* do paradigma positivista pelas de *compreensão, significado* e *ação*" (COUTINHO, 2015, pg.17).

5.2 Contexto e participantes da pesquisa

Os dados analisados nesta pesquisa foram coletados, com autorização dos participantes, durante a disciplina de Teoria e Prática Pedagógica I, do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade ao Norte do Paraná. Esses dados foram coletados como parte de uma pesquisa maior do Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria - GEPG, onde foi constatada a possibilidade de analisar as técnicas mobilizadas pelos participantes no que se refere à visualização matemática. Assim, tendo em vista o crescente e recente interesse dos pesquisadores da área da Educação Matemática em relação ao campo da visualização, optou-se por realizar esta investigação.

A coleta dos dados foi realizada no primeiro semestre do ano de 2019, por meio da aplicação de cinco tarefas matemáticas durante uma aula da turma noturna da disciplina de Teoria e Prática Pedagógica I. Essa disciplina, ministrada no 2º ano do curso de licenciatura da universidade pesquisada, possui carga horária de 102 horas e tem como objetivos:

- conhecer as principais tendências da Educação Matemática escolar;
- considerar a natureza do conhecimento matemático e as dimensões sócios culturais, psicológicas e metodológicas do ensino e aprendizagem;
- possibilitar ao aluno conhecimento sobre as especificidades dos alunos com necessidades educacionais especiais;
- organizar e refletir sobre situações didáticas para o ensino da matemática nos terceiros e quartos ciclos do Ensino Fundamental.

A aplicação das atividades foi realizada próxima ao término do semestre, tal escolha se deu somente pelo tempo de organização e desenvolvimento desta pesquisa, não sendo relevante o conteúdo nem o cronograma da disciplina no momento da coleta de dados.

Os participantes dessa pesquisa foram 18 alunos da turma da disciplina Teoria e Prática Pedagógica I, do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática. Essa turma foi escolhida pois no terceiro semestre de graduação os alunos já possuem um rigor maior para justificar suas resoluções dos problemas matemáticos que resolvem. Além disso, como ainda se trata da primeira metade do curso, nessa fase os alunos estão num período de transição entre a realidade que enfrentavam na escola e o formalismo requerido pela matemática acadêmica. Outra facilidade advinda da opção por essa turma repousa no fato de que a coorientadora deste trabalho era a docente da turma. Sendo assim, prontamente concedeu espaço em sua aula para a realização desta pesquisa. Ressaltamos que a docente não tinha o hábito de desenvolver tarefas visuais em sala de aula, uma vez que a visualização e o estudo de aspectos/habilidades visuais não fazem parte do programa da disciplina. Neste contexto, os participantes dessa pesquisa são todos os 18 alunos de uma turma da disciplina mencionada. Com o intuito de preservar a identidade dos participantes, eles foram denominados nesta investigação por A1, A2, ..., A18.

5.3 Metodologia para análise dos dados

Os dados foram analisados com o auxílio da Teoria Antropológica do Didático. Para isso, num primeiro momento, foram selecionadas as tarefas matemáticas. O critério adotado para tal escolha foi de que as tarefas matemáticas a serem aplicadas fossem tarefas matemáticas visuais, como definido na seção 2.5, que permitissem a identificação de visualizadores e de não-visualizadores. Conforme o objetivo proposto por esse trabalho, analisar, por meio da TAD, as técnicas mobilizadas por estudantes do 2º ano de Licenciatura em Matemática, mediante tarefas visuais, identificando os possíveis visualizadores e os não-visualizadores, escolhemos tarefas matemáticas abertas e que permitissem que suas resoluções fossem elaboradas por meio de diferentes técnicas. Além disso, foi analisado o grau de dificuldade de cada uma delas, a fim de que fossem escolhidas tarefas matemáticas que pudessem ser resolvidas contando apenas com a matemática do ensino básico, uma vez que dado o objetivo, almejávamos que todos os participantes conseguissem resolver as questões propostas.

Com base na TAD, as tarefas matemáticas selecionadas foram analisadas antes da aplicação e foi elaborado um Modelo Praxeológico de Referência para cada uma delas. Com esse modelo foi possível identificar o quarteto praxeológico em cada questão, para descrever qual o seu tipo e uma técnica que poderia ser utilizada para resolvê-la. Para a elaboração deste modelo, foram priorizadas técnicas que poderiam ser classificadas como métodos visuais de resolução, segundo Presmeg (1986), já que na análise se pretende destacar os aspectos visuais de cada técnica mobilizada pelos participantes.

A partir das técnicas descritas no MPR, foi possível identificar a tecnologia e a teoria que as justificam. Assim, construímos o quarteto praxeológico de cada tarefa matemática, que foi utilizado posteriormente como referência para a análise dos dados coletados.

Inicialmente, durante o momento da coleta de dados, o objetivo da pesquisa não foi apresentado aos participantes, para evitar que eles fossem influenciados no momento de sua resolução. Foi pedido a eles que detalhassem suas respostas o máximo que pudessem, afim de que seu registro na folha de tarefas fosse mais rico o possível.

Com os dados já coletados, sua análise teve início na identificação de cada um dos componentes do quarteto praxeológico nos registros fornecidos pelos participantes, para que fossem identificadas as técnicas que foram mobilizadas por eles.

Identificadas as técnicas, foram analisados e discutidos os aspectos concernentes à visualização em cada uma delas. A partir da análise realizada, foi construído um Modelo Praxeológico Dominante contendo as técnicas que mais ocorreram em cada uma das tarefas matemáticas aplicadas, para que assim fosse possível confrontar o modelo obtido com o Modelo Praxeológico de Referência, elaborado no início desta pesquisa, o qual é apresentado no Capítulo 6.

6. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Nesta seção apresentamos as cinco tarefas matemáticas selecionadas para a coleta dos dados, tal como o Modelo Praxeológico de Referência utilizado para uma primeira análise das tarefas matemáticas escolhidas. Na sequência, são apresentadas as técnicas utilizadas pelos participantes da pesquisa para resolverem cada uma das tarefas matemáticas aplicadas. Por fim, apresentamos o Modelo Praxeológico Dominante para cada uma das tarefas matemáticas.

6.1 Tarefas matemáticas selecionadas para a coleta de dados

Apresentamos a seguir as cinco tarefas matemáticas selecionadas para a análise dos dados. Essas tarefas foram escolhidas por possuírem um grau de abertura que permita que sua resolução seja feita por diferentes caminhos, sejam eles algébricos ou visuais. Assim, todas as tarefas matemáticas aplicadas se enquadram no que entendemos como tarefas matemáticas visuais, que foi descrito no Capítulo 3.

No momento da aplicação dessas tarefas matemáticas, os participantes foram devidamente orientados a respeito da pesquisa e instruídos a apresentar suas resoluções de forma clara e sem se preocupar com possíveis erros ou acertos, uma vez que para a pesquisa o mais importante era a estratégia e o processo de resolução. O tema da pesquisa não foi divulgado aos participantes, a fim de não influenciar nos dados a serem coletados, já que um ponto importante da análise é investigar a preferência dos alunos por determinada estratégia.

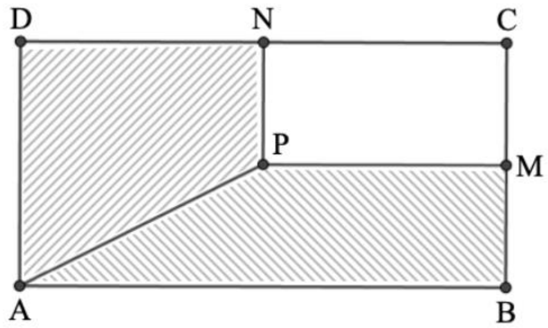
A folha de questões entregue aos alunos está disponível no Anexo A e contém uma instrução para que os participantes resolvam as tarefas matemáticas justificando todas as passagens e fornecendo a maior quantidade possível de detalhes em sua solução. Além disso, foi descrito que os participantes deveriam utilizar para a resolução as técnicas/resultados que eles preferissem e/ou achassem mais viáveis.

A organização praxeológica de cada uma dessas tarefas é apresentada posteriormente no Capítulo 6, onde é apresentado o tipo de cada uma das tarefas matemáticas, uma técnica visual de solução, sua tecnologia e teoria.

6.1.1 Tarefa 1

1) Na figura abaixo, sejam ABCD um retângulo, M o ponto médio do lado BC e N o ponto médio do lado CD. Sabendo que PMCN é um retângulo, que o lado AB mede 12 cm e o lado BC mede 6 cm, compare as áreas dos quadriláteros APMB com o quadrilátero ADNP.

Figura 2 - Enunciado da tarefa 1



Fonte: os autores

Nesta tarefa, elaborada pelos autores desta pesquisa, se tem como objetivo a comparação entre as áreas de dois trapézios. Não é solicitado que se calcule o valor numérico dessas áreas para que tal comparação seja realizada. Escolhemos essa tarefa pelo fato de ela possibilitar que seu objetivo seja alcançado por diferentes caminhos, incluindo aqueles que são estritamente visuais. Uma técnica visual de resolução desta tarefa é apresentada na seção 6.1.2.

6.1.2 Tarefa 2

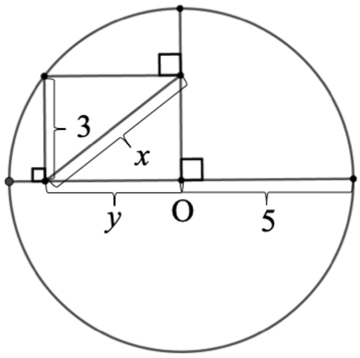
2) Os donos de um terreno quadrado querem que sua área seja duplicada, mas de tal maneira que sua forma continue sendo um quadrado. Como podem proceder?

Esta tarefa contém o clássico problema da Geometria Plana, de duplicar a área de um quadrado qualquer. Assim como a primeira, esta tarefa também oferece a possibilidade de ser resolvida por diferentes caminhos, tanto algébricos como visuais. Neste caso, a inexistência de uma imagem que represente a situação-problema possibilita que o aluno construa uma representação própria de acordo com suas necessidades, o que permite uma análise da forma como a estratégia de cada um dos participantes aborda, ou não, uma figura.

6.1.3 Tarefa 3

3) Utilizando o círculo de *centro* O a seguir, obtenha os valores de *x* e *y*.

Figura 3 - Enunciado da tarefa 3



Fonte: Marmo (1964)

A tarefa 3 foi retirada do livro *Curso de Desenho - Vol. 1*, do professor Carlos Marmo[9], e propõe calcular a medida de dois segmentos de reta *x* e *y*. A figura apresentada no problema, na forma como foi construída, permite que os segmentos *x* e *y* sejam observados sob diversas perspectivas, possibilitando assim diferentes estratégias de solução.

6.1.4 Tarefa 4

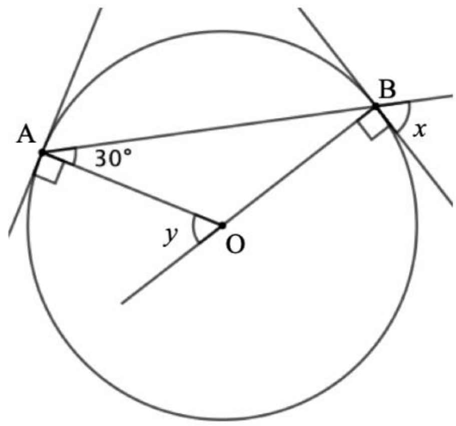
4) Dado um triângulo qualquer, temos que uma mediana separa o triângulo em duas regiões triangulares. Qual é a relação entre suas áreas?

A tarefa apresentada foi retirada de Gerônimo e Franco (2010). Assim como a Tarefa 1, essa tarefa também tem como objetivo a comparação entre a área de duas figuras. Porém neste caso, a imagem não é apresentada no enunciado da tarefa. Deste modo, faz-se necessário que o participante represente a imagem, caso entenda ser necessário. Ponto que também será analisado.

[9]MARMO, Carlos. **Curso de Desenho**. São Paulo: Editora Moderna, 1964

6.1.5 Tarefa 5

5) Obtenha os valores dos ângulos *x* e *y*, sabendo que os pontos A e B pertencem à circunferência de centro *O*.



Também retirada do livro *Curso de Desenho - Vol. 1*, do professor Carlos Marmo, esta tarefa tem como objetivo que se calcule os valores numéricos de *x* e de *y*, que neste caso representam a medida de dois ângulos. A figura permite que os ângulos sejam vistos sob diferentes perspectivas, possibilitando que sejam usadas diversas propriedades, tanto de ângulos quanto de circunferência, permitindo que diversas estratégias sejam adotadas para a obtenção do resultado.

6.2 Modelo Praxeológico de Referência

Apresentamos nesta seção os Modelos Praxeológicos de Referência – MPR que foram elaborados para cada uma das tarefas aplicadas durante a coleta dos dados. Este modelo, conforme proposto por Chevallard (2009), propõe uma organização para o que se espera de uma tarefa no momento de sua escolha. Assim, são elencados os elementos do bloco prático-técnico e do bloco tecnológico-teórico, formando os quatro componentes da praxeologia: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria [T, τ, θ, Θ, respectivamente].

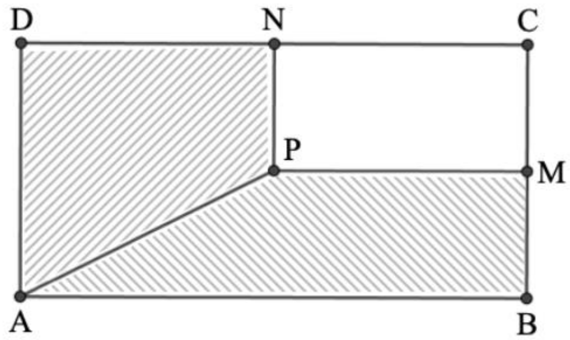
Neste trabalho, tendo em vista o objetivo de investigar o uso de técnicas visuais, optamos por colocar no MPR, como opção de solução para as tarefas, técnicas que utilizam de métodos visuais, conforme definido por Presmeg (1986). Assim, as técnicas apresentadas nesta seção, que serviram como referência para análise que se apresentará posteriormente, envolvem imagens visuais -com ou sem um diagrama- como uma parte essencial do método de solução.

O objetivo da elaboração deste modelo é fornecer um referencial para discutir a presença/ausência de visualizadores e de técnicas visuais de resolução para as tarefas propostas nesta pesquisa. Denotamos por MPR1 o Modelo Praxeológico de Referência da Tarefa 1, da mesma forma denotamos por MPR2, MPR3, MPR4 e MPR5, o Modelo Praxeológico de Referência das demais tarefas, respectivamente. Os tipos de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias referentes a cada tarefa foram denotadas por, $[\mathrm{T}_2, \tau_2, \theta_2, \Theta_2]$, ..., $[\mathrm{T}_5, \tau_5, \theta_5, \Theta_5]$, respectivamente, conforme apresentado a seguir.

6.2.1 MPR1

t_1: Na figura abaixo, sejam ABCD um retângulo, M o ponto médio do lado BC e N o ponto médio do lado CD. Sabendo que PMCN é um retângulo, que o lado AB mede 12 cm e o lado BC mede 6 cm, compare as áreas dos quadriláteros APMB com o quadrilátero ADNP.

Figura 4 - Imagem da Tarefa 1

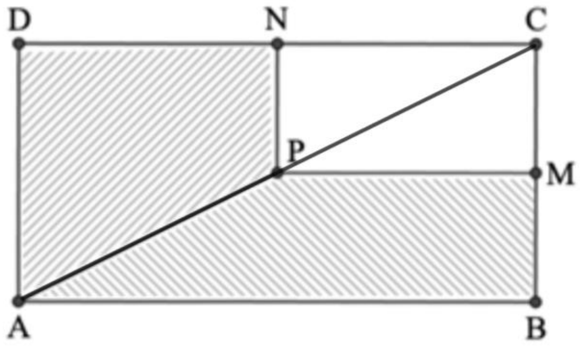


Fonte: os autores

T_1: Comparar a área de duas figuras geométricas.

τ_1: A técnica de resolução proposta consiste em observar que, como M e N são pontos médios dos lados BC e CD, respectivamente, e que PMCN é um retângulo (hipóteses), O ponto P é o ponto médio da diagonal AC. Assim, traçando a diagonal AC, ela passa por P e deste modo tanto o retângulo maior ABCD quanto o retângulo menor PMCN ficam divididos em duas partes.

Figura 5 - Aplicação da técnica $\tau_1$na Tarefa 1



Fonte: os autores

Assim, conclui-se que a área de ADNP é igual à área do triângulo ACD menos a área do triângulo PCN. Da mesma forma, a área de APMB é igual à área do triângulo ABC menos a área do triângulo PMC. Mas a diagonal de qualquer retângulo divide o retângulo em dois triângulos congruentes, logo, as áreas de PCN e PMC são iguais, assim, as áreas de APMB e ADNP são iguais.

θ_1: A técnica utilizada é justificada pelas propriedades que as perpendiculares pelos pontos médios de dois lados consecutivos de um retângulo passam pelo seu centro, que no caso é o ponto P; que a diagonal de um retângulo passa pelo seu centro e que duas figuras congruentes possuem mesma área, que desempenham aqui o papel de tecnologia.

Θ_1: A teoria que justifica a tecnologia neste caso é a Geometria Plana.

6.2.2 MPR2

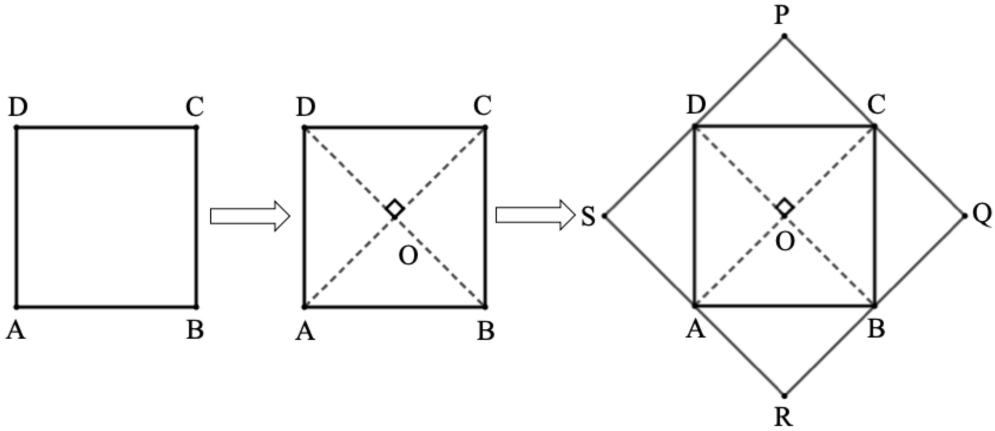
t_2: Os donos de um terreno quadrado querem que sua área seja duplicada, mas de tal maneira que sua forma continue sendo um quadrado. Como podem proceder?

T_2: Duplicar a área de um quadrado.

τ_2: Apresentamos a seguir uma técnica de resolução para a Tarefa 2, a qual classificamos como um método visual de solução. Num primeiro momento, constrói-se a representação de um quadrado qualquer, com o objetivo de traduzir o enunciado da tarefa em uma imagem visual, como no primeiro desenho da Figura 5. Em seguida, traça-se as diagonais do quadrado, segundo desenho da Figura 5.

Uma maneira de construir o terceiro desenho da Figura 5 é trançando paralelas à diagonal AC, pelos pontos B e D, bem como paralelas à diagonal BD, pelos pontos A e C.

Figura 6 - Aplicação da técnica τ_2 à Tarefa 2



Fonte: os autores

Desta forma, conserva-se o quadrado e duplica-se a sua área.

θ_2: A tecnologia que justifica esta técnica repousa em resultados da Geometria Euclidiana Plana: que as diagonais de um quadrado se encontram no ponto médio O e formam um ângulo de 90º e, portanto, pelo caso LAL, os quatro triângulos AOB, BOC, COD e DOA são congruentes. Como retas paralelas se equidistam, temos que AOBR, BOCQ, CODP e AODS são quadrados que possuem os lados do quadrado ABCD como diagonais e assim, AOB é congruente à ARB, BOC é congruente à BQC, COD é congruente à CPD e DOA é congruente à ASD.

Outro resultado da Geometria Plana, garante que figuras congruentes possuem mesma área. Assim, a área do quadrado ABCD é metade a área do quadrado PQRS.

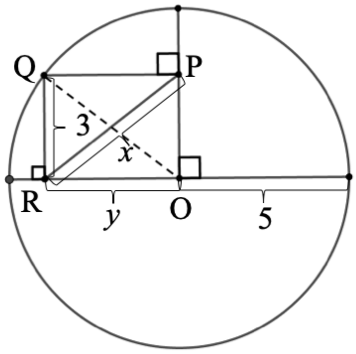
Θ_2: A teoria que fundamenta esta tecnologia é a Geometria Plana.

6.2.3 MPR3

t_3: Utilizando o círculo de centro O a seguir, obtenha os valores de x e y.
T_3: Obter a medida de dois segmentos.

τ_3: O primeiro passo da técnica utilizada na resolução desta tarefa consiste em traçar a outra diagonal no retângulo contido na circunferência, como feito na Figura 6. A fim de facilitar a descrição da técnica, daremos nomes a alguns pontos de destaque, conforme mostra a figura 5.

Figura 7 - Técnica τ_3 aplicada à Tarefa 3



Fonte: os autores

Em seguida, percebe-se que o triângulo OQR é retângulo e tem, como seus catetos, um lado de medida *y* e outro de medida 3. A hipotenusa é o lado OQ, que é raio da circunferência e, portanto, mede 5. Identificando essa relação, é possível aplicar a fórmula do Teorema de Pitágoras, ou observar que este é um dos triângulos pitagóricos e assim obter *y* = 4. A partir daí, observando o triângulo retângulo OPR, podemos identificar como catetos um lado de medida 3 e outro de medida *y*, que agora sabemos ser 4. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, obtemos o valor da medida da hipotenusa *x*, que é 5. Dessa forma, *x* = 5 e *y* = 4.

θ_3: A tecnologia que justifica essa técnica são as propriedades do paralelismo e perpendicularidade entre retas e o Teorema de Pitágoras.

Θ_3: A teoria que fundamenta essa tecnologia é a Geometria Plana.

6.2.4 MPR4

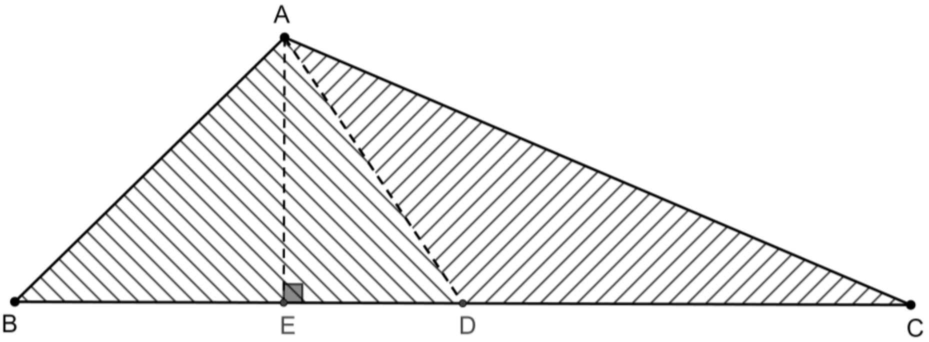
t_4: Dado um triângulo qualquer, temos que uma mediana separa o triângulo em duas regiões triangulares. Qual é a relação entre suas áreas?

T_4: Comparar a área de duas figuras geométricas.

τ_4: A técnica empregada na solução desta tarefa consiste, primeiramente, em interpretar e traduzir as informações dadas no enunciado escrito em língua portuguesa para a sua representação visual, conforme o desenho que está na Figura 7. Observa-se que para qualquer triângulo, por definição de mediana, D é ponto médio de BC, logo BD é congruente à CD.

Traçando a altura AE conforme a Figura 7, por definição a área de ABD é igual à $\frac{m(BD)\cdot m(AE)}{2}$ e a área de ADC é igual à $\frac{m(DC)\cdot m(AE)}{2}$. Como BD e DC possuem a mesma medida, temos que as áreas de ABD e ADC são iguais.

Figura 8 - Técnica τ_4 aplicada à Tarefa 4



Fonte: os autores

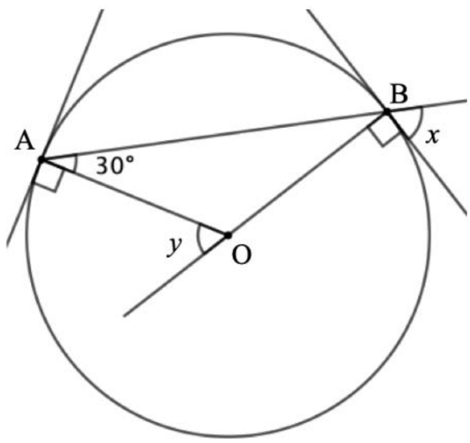
θ_4: A tecnologia empregada nesta técnica repousa sobre a fórmula para o cálculo da área de qualquer triângulo e na definição de mediana.

Θ_4: A teoria que justifica a tecnologia utilizada é a Geometria Plana.

6.2.5 MPR5

t_5: Obtenha os valores dos ângulos x e y, sabendo que os pontos A e B pertencem à circunferência de centro O.

Figura 9 - Técnica τ_5 aplicada à Tarefa 5



Fonte: os autores

T_5: Calcular o comprimento de ângulos.

τ_5: A técnica proposta para a resolução desta tarefa consiste em identificar que os segmentos OA e OB são raios da circunferência, e por isso são congruentes. Desse modo, temos que o triângulo AOB é isósceles, o que implica que o ângulo $O\widehat{B}A$ é congruente à $O\widehat{A}B$ e portanto, mede 30º. Observa-se que o ângulo x é o suplementar de $O\widehat{B}A$ menos 90º, e por isso mede 60º. Podemos observar ainda que, como a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria

Euclidiana mede 180º e $O\hat{B}A \equiv O\hat{A}B$ medem 30º, a medida de $A\hat{O}B$ é igual à 120º. Assim, como o ângulo y é suplementar à $A\hat{O}B$, temos que y mede 60º.

θ_5: A tecnologia que justifica a técnica apresentada repousa nas propriedades do triângulo isósceles e da congruência entre ângulos.

Θ_5: A teoria em que se fundamenta a técnica é a Geometria Plana.

6.3 Análise das técnicas mobilizadas pelos participantes

Nesta seção serão apresentadas as técnicas mobilizadas pelos participantes ao resolver cada uma das tarefas. Denotaremos por τ_{ij} as técnicas utilizadas pelos participantes na resolução das tarefas propostas, onde *i* representa a tarefa em que foi aplicada aquela técnica (de 1 a 5) e *j* denota as diferentes técnicas de resolução da tarefa. Salientamos que a escolha de *j* servirá apenas para distinguir as diversas formas de resoluções, isto é, a escolha não tem como objetivo classificar as técnicas em nenhuma ordem de importância.

A análise de cada tarefa é apresentada a fim de evidenciar quais foram as técnicas que emergiram nas resoluções dos participantes. Além disso, consideramos importante comentar os erros cometidos pelos participantes que não chegaram a uma solução correta para o que foi solicitado. Sendo assim, no início de cada seção mencionamos brevemente quais foram os principais equívocos identificados no registro dos participantes que não alcançaram o objetivo da tarefa e que, por isso, não tiveram suas resoluções consideradas para a análise das técnicas.

6.3.1 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 1

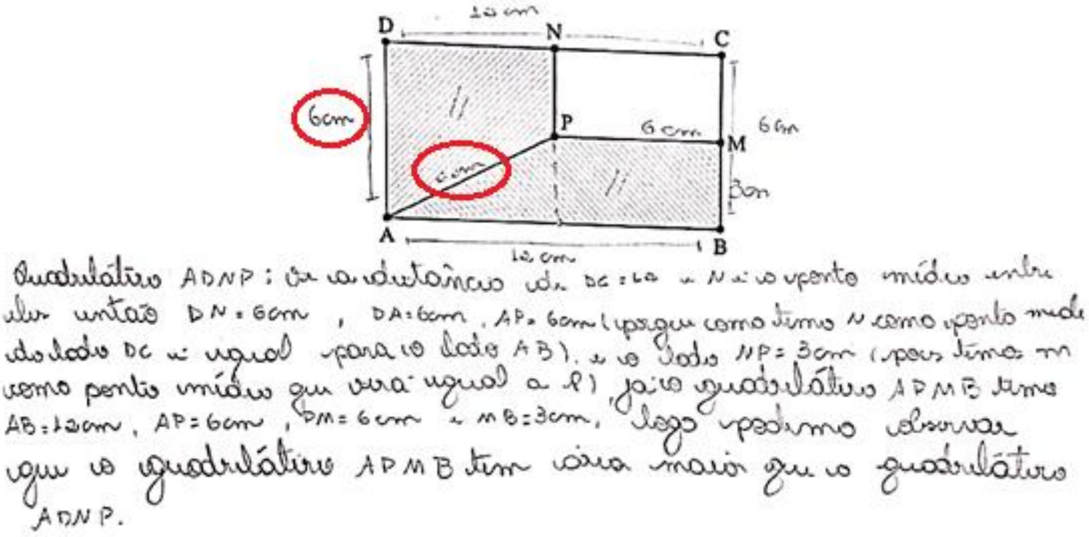
Conforme descrito na seção anterior, classificamos a Tarefa 1 como uma tarefa do tipo T_1: "Comparar a área de duas figuras geométricas". As referidas figuras são dois trapézios distintos, onde a distinção foi representada na figura do enunciado, mas não havia referência explícita a ela.

Dos 18 participantes da pesquisa, todos apresentaram alguma solução para a Tarefa 1. Desse total, 6 alunos utilizaram algum método por meio do qual não conseguiram chegar à solução ou apresentaram como resposta algo diferente do que era solicitado na tarefa. Não foi possível classificar o tipo de técnica utilizada por esses participantes pois apresentaram resoluções incompletas ou apresentaram soluções não condizentes com aquela que foi proposta no enunciado da tarefa.

Os registros desses alunos, em sua maioria, mostram conclusões sem justificativas, onde não é possível identificar o tipo de raciocínio que os levou a chegar às (quando houve) respostas apresentadas.

Já no registro dos alunos que apresentaram as justificativas, mas de modo incorreto, é possível inferir que os erros cometidos decorrem da ausência ou limitação das habilidades de visualização. Os participantes A_1 e A_5, por exemplo, assumem que os segmentos AD e AP possuem a mesma medida, como apresentado pelo participante A_5 na figura 8:

Figura 10 - Resolução apresentada por A_5



Fonte: coleta de dados

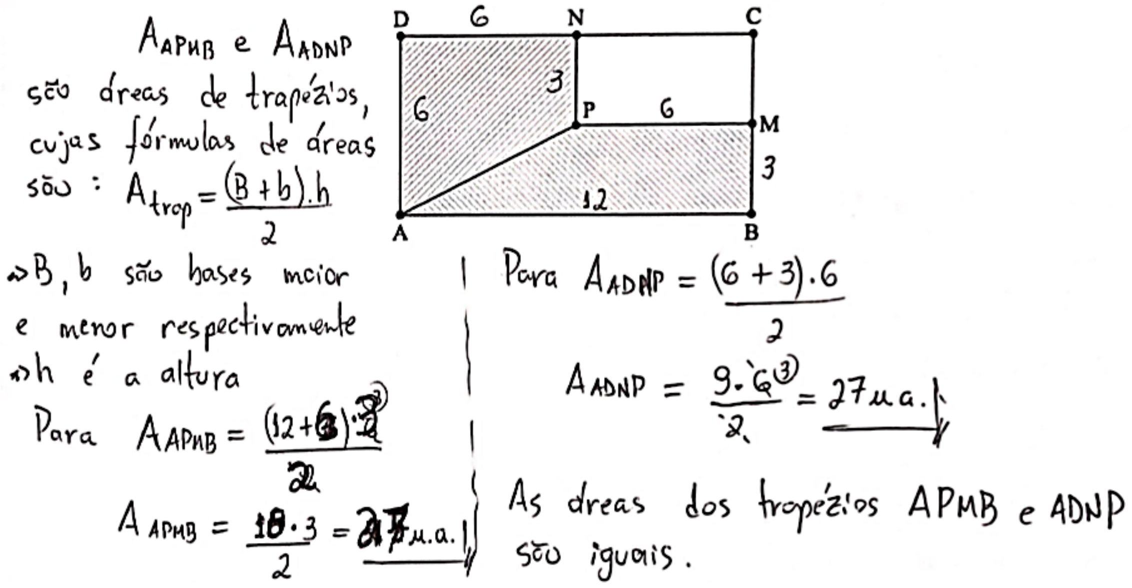
Essa afirmação evidencia a suspeita de que ao olharem para a imagem esses participantes não visualizaram os conceitos ali presentes, mas apenas inferiram com base naquilo que acreditam ver. Em termos de visualização, esse erro indica uma limitação na habilidade de Processamento Visual, uma vez que esses participantes fazem suas suposições sem levar em conta os argumentos de ordem geométrica que também são abrangidos pelos elementos da figura, mas que não são explícitos em termos visuais.

Outro erro recorrente e que também invalidou algumas soluções é a dificuldade em identificar e utilizar corretamente o vocabulário compreendido na situação apresentada na tarefa. Problemas ao usar as notações e erros na escrita matemática dos participantes podem ser uma evidência de dificuldades na Interpretação da Informação Figurativa – IFI, já que esta habilidade está relacionada à compreensão do conteúdo e do contexto.

Dentre os demais alunos, todos chegaram à conclusão correta, e entre as suas resoluções surgiram três tipos de técnicas, que serão apresentadas a seguir:

- τ_{11}: Aplicar a fórmula para o cálculo da área de um Trapézio

Figura 11 - Técnica de resolução τ_{11} aplicada por A_4



Fonte: coleta de dados

Essa foi uma das técnicas que mais apareceram dentre os participantes da pesquisa. Esta técnica consiste em aplicar a fórmula para o cálculo da área de um trapézio. Nela, o aluno identifica que os quadriláteros APMB e ADNP são trapézios. Assim sendo, identifica cada um dos seus elementos (base maior, base menor e altura) e, por fim, aplica a fórmula, já que as medidas necessárias são facilmente obtidas por meio do enunciado da tarefa.

Os participantes que aplicaram este método de resolução obtiveram o valor numérico da área de cada um dos quadriláteros, compararam esses valores, identificaram que eram iguais e assim chegaram à conclusão de que os dois quadriláteros possuíam a mesma área. A aplicação dessa técnica é ilustrada pela Figura 9, extraída da folha de tarefas do participante por A_4.

Observa-se que neste método de resolução a figura é utilizada somente para obter os dados necessários para que se realize um procedimento algébrico de resolução, ou seja, a aplicação de uma fórmula. A imagem fornecida pelo enunciado da tarefa não é explorada a fim de solucionar o problema por meios geométricos. Identifica-se que, para os participantes que optaram por essa técnica, a figura é observada, os quadriláteros são identificados como dois trapézios e em seguida a fórmula é aplicada.

Não consideramos esta técnica como um método visual de solução, pois essa não tem a figura como parte essencial do método de solução, como requer Presmeg (1986). Tal fato se faz evidente ao percebermos que esta técnica não necessita obrigatoriamente da figura para ser aplicada, podendo ser utilizada em uma tarefa que disponibilize somente dados numéricos. Portanto, classificamos a técnica τ_{11} como um método não-visual de solução.

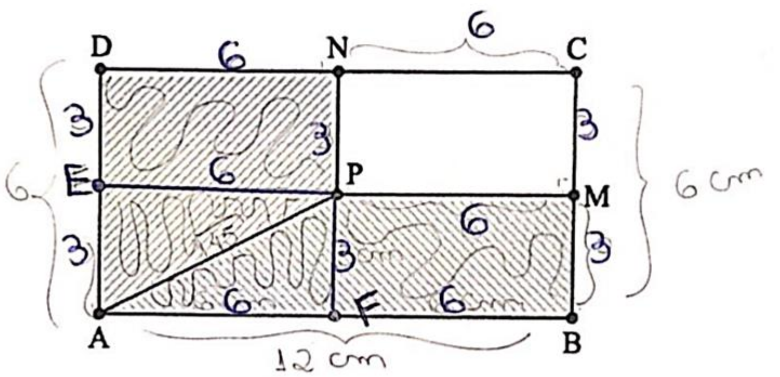
A técnica τ_{11} foi utilizada por 5 dos 18 participantes, são eles: A_4, A_7, A_9, A_{11} e A_{12}. Identificamos nos registros fornecidos pelos participantes que aplicaram essa técnica a presença da habilidade IFI – interpretação da informação figurativa, conforme descrita por Bishop (1983), uma vez que os alunos que a utilizaram demonstraram compreender a representação visual e o vocabulário utilizado no enunciado da tarefa, o que fica evidente pelo fato de que os alunos identificaram na imagem que as áreas que precisavam comparar eram de trapézios. Não foi possível identificar evidências do VP – Processamento Visual no registro feito pelos participantes que adotaram essa técnica.

- τ_{12}: Particionar a figura e calcular a área de cada uma das partes

A segunda técnica de resolução que foi utilizada pelos participantes consiste em particionar o retângulo ABCD em figuras menores para calcular a área de cada uma das partes. Assim, somando a área de cada uma das partes que formam APMB e ADNP, pode-se fazer a comparação que é solicitada. A partição é feita para que fórmulas mais simples, como a do cálculo da área do retângulo e do triângulo possam ser aplicadas.

Essa foi a técnica mais utilizada entre os participantes. 6 dos 18 alunos escolheram esse método de resolução. Foram eles: $A_3, A_6, A_{10}, A_{13}, A_{17}$ e A_{18}. Os participantes que adotaram esse método de resolução particionaram a figura de duas formas diferentes. A maioria deles, conforme ilustrado na Figura 10, traçou o segmento que liga o ponto P ao ponto médio do lado AD e ao ponto médio do lado AB, respectivamente:

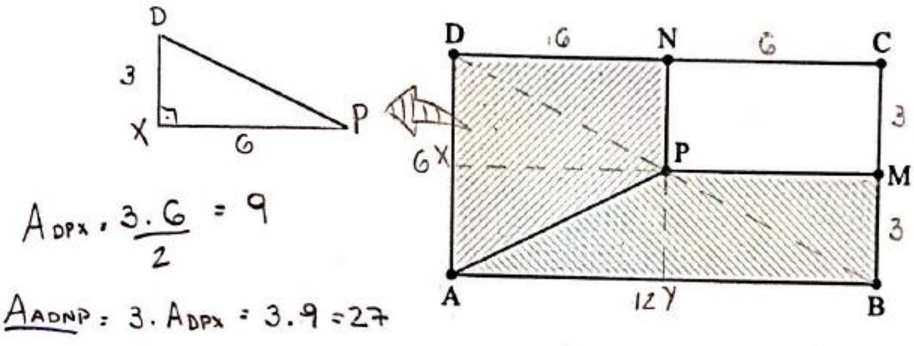
Figura 12 - Partição feita por A_6



Fonte: coleta de dados

Apenas o participante A_{10} realizou uma partição diferente dos demais. Esse aluno particionou a área referente aos trapézios APMB e ADNP em seis triângulos retângulos congruentes, como se mostra na Figura 11:

Figura 13 - partição feita por A_{10}

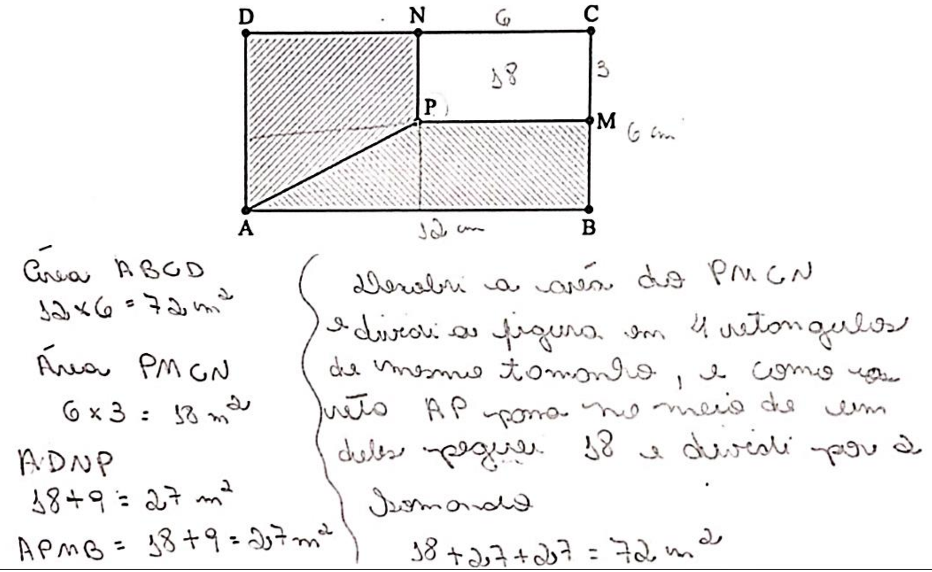


Fonte: coleta de dados

No caso dessa técnica de resolução, de modo geral, se percebe que a figura é analisada sob diferentes perspectivas, a fim de fornecer informações adicionais sobre o problema, uma vez que o ato de particionar a figura repousa sobre o resultado de que a soma da área das partes é igual à área do todo.

É possível observar que alguns dos alunos que utilizaram essa técnica percebem a congruência entre os retângulos e os triângulos obtidos nas partições, como é o caso de A_{13}, apresentado a seguir, que registra o fato de que a figura foi dividida em quatro retângulos de mesma área, sendo que um deles foi dividido em duas partes iguais. A partir daí, esse participante calcula apenas uma vez a área de cada tipo de parte e soma a medida das partes que compõe os quadriláteros que deseja analisar, conforme apresentado em seu registro.

Figura 14 - Técnica de resolução τ_{12} aplicada por A_{13}

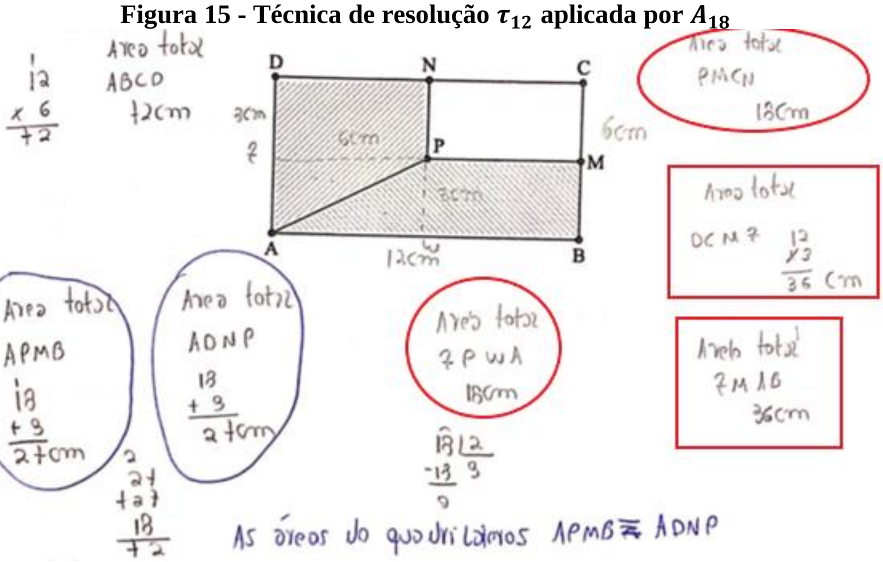


Fonte: coleta de dados

A_{13} explica a forma como particionou a figura e, por fim, calcula a soma da área do retângulo PMCN com a área obtida dos dois trapézios, como uma forma de verificar sua análise, observando se esse resultado seria igual a área total de ABCD inicialmente calculada por ele. Percebemos, nesse caso, que o aluno visualiza a congruência entre as figuras que formam as áreas de APMB e ADNP, porém prefere fundamentar sua análise nos números obtidos por meio do cálculo da área, deixando evidente que demonstra maior segurança em apresentar uma prova numérica. Neste caso, observamos que, apesar de visualizar algumas das propriedades que podem ser extraídas da figura fornecida na tarefa, o participante prefere fundamentar sua prova em argumentos numéricos, indicando uma Visualidade Matemática intermediária.

No entanto, em outros casos, fica evidente que a congruência entre as partes da figura não é percebida, já que os alunos preferem calcular a área de cada uma delas, como no caso de A_{18}, apresentado na Figura 13, onde destacamos as partes em que o aluno efetua operações para calcular a área de figuras congruentes:

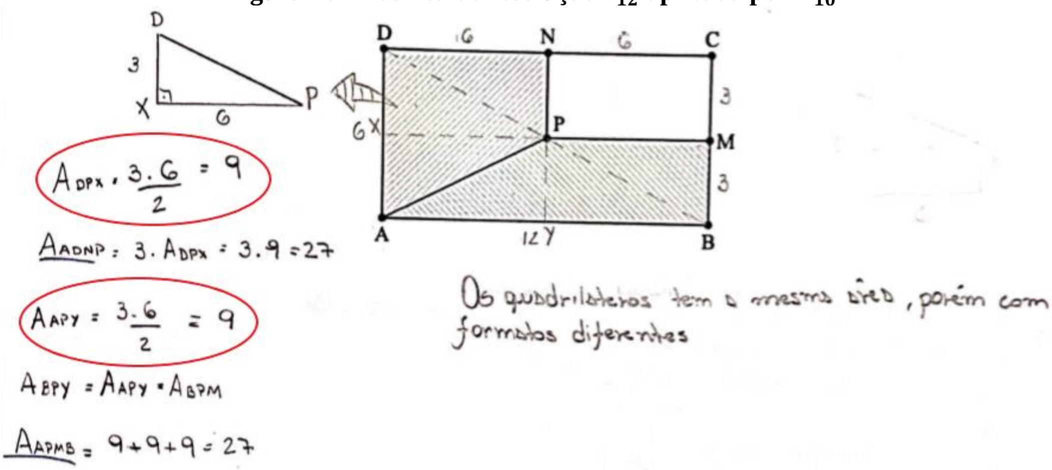
Figura 15 - Técnica de resolução τ_{12} aplicada por A_{18}



Fonte: coleta de dados

Também no caso de A_{10}, que realizou a partição apresentada anteriormente, ele percebe a congruência entre os triângulos que compõem ADNP e também a congruência entre os triângulos que compõem APMB, porém não percebe a congruência entre as partes de ADNP e APMB, o que se mostra pelo fato de calcular as áreas DPX e APY, como apresentado na Figura 14:

Figura 16 - Técnica de resolução τ_{12} aplicada por A_{10}



Fonte: coleta de dados

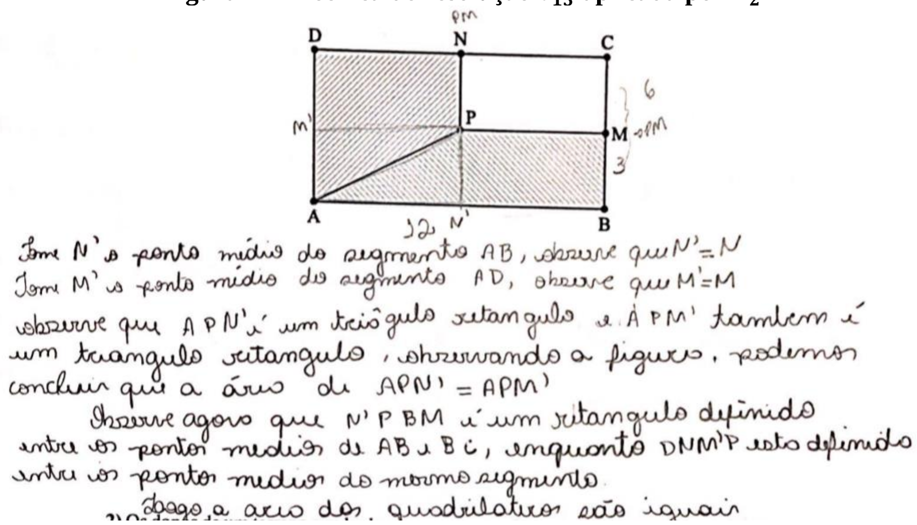
Conforme definido no Capítulo 2, a técnica de resolução τ_{12} é um método parcialmente visual, pois utiliza a imagem em parceria com algum método de raciocínio algébrico.

Identificamos nessa técnica a presença da habilidade IFI, conforme descrita por Bishop (1983), uma vez que os alunos que a utilizaram demonstraram compreender a representação visual e o vocabulário utilizado no enunciado da tarefa. Também identificamos a presença de Processamento Visual, pois identifica-se nos registros que houve a visualização de algumas informações não naturais em termos visuais, como por exemplo, visualizar e depois representar a imagem particionada. Também no desenho apresentado na Figura 14, feito por A_{10}, percebe-se que, além de particionar a figura, esse participante extrai uma parte da figura e a analisa separadamente, uma outra evidência do VP.

- τ_{13}: analisar geometricamente a imagem.

Utilizada apenas por um participante, denominado por A_2, essa foi a única técnica em que não se utilizam fórmulas ou cálculos. Neste caso, o participante consegue solucionar o problema mobilizando somente recursos visuais, demonstrando uma visualidade matemática aprimorada. Apesar de cometer alguns erros no que se refere ao uso incorreto de notações e não apresentar as justificativas necessárias para validar seus argumentos, a estratégia utilizada por A_2 é um caminho para a solução da tarefa, pois por meio dela o participante consegue alcançar o objetivo proposto na tarefa e soluciona o problema:

Figura 17 - Técnica de resolução τ_{13} aplicada por A_2



Fonte: coleta de dados

Analisando a resolução de A_2, constatou-se que esse participante, no seu segundo ano de graduação, ainda não apresenta o formalismo requerido pelas demonstrações matemáticas. Com base em seu registro, percebe-se que, ao afirmar “Tome N’ o ponto médio do segmento AB, observe que N’=N” o participante deseja expressar que ambos os pontos, N e N’, dividem os lados maiores do retângulo em duas partes iguais. De modo análogo, é feita a análise para os lados menores do retângulo com M e M’. O participante registra ainda que as áreas dos triângulos retângulos que denotou por APN' e APM' são iguais. Em seguida, volta o seu olhar para os retângulos N'PBM e DNM'P, os quais ele justifica terem a mesma área pelo fato de ambos estarem definidos entre os pontos médios de segmentos congruentes, pois $AD \equiv BC$ e $AB \equiv DC$. Com isso conclui que as áreas dos quadriláteros APMB e ADNP são iguais.

Apesar da falta de formalismo nas justificativas, identifica-se nesta estratégia que o participante fundamenta o seu raciocínio somente em argumentos visuais e em propriedades geométricas. Em nenhum momento faz-se o uso de argumentos algébricos ou numéricos. Consideramos essa técnica um método visual de solução, pois tem a figura como parte essencial para que seja aplicada. Identificamos que houve interpretação de informação figurativa, uma vez que o participante demonstra ter compreendido tanto o vocabulário quanto as representações visuais contidas na tarefa. Também identificamos a presença da habilidade VP na manipulação feita sobre a figura e nas relações abstratas e propriedades identificadas pelo participante e foram utilizadas no desenvolvimento de sua análise.

O Quadro 6 sintetiza a análise da Tarefa 1, apresentando a classificação de cada técnica, quais habilidades de visualização foram identificadas em sua aplicação e os participantes que a aplicaram:

Quadro 6 - Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 1

Técnica	Classificação	Constructos	Participantes
$\boldsymbol{\tau_{11}}$	não-visual	IFI	A4, A7, A9, A11, A12
$\boldsymbol{\tau_{12}}$	parcialmente visual	IFI e VP	A3, A6, A10, A13, A17, A18
$\boldsymbol{\tau_{13}}$	visual	IFI e VP	A2

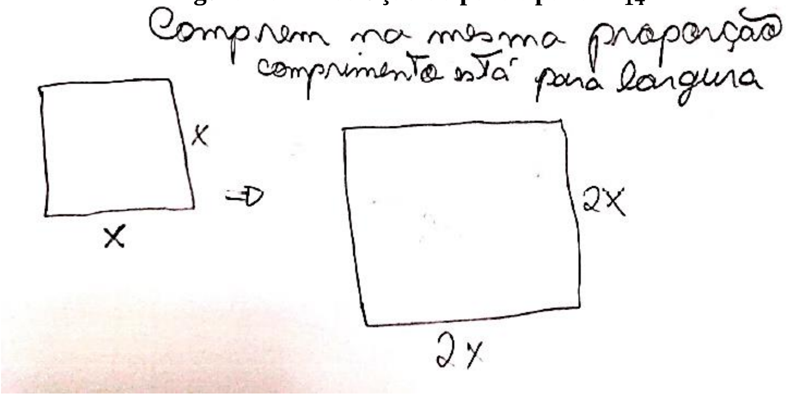
Fonte: os autores

Por meio dos dados levantados é possível perceber que das três técnicas que emergiram dentre as resoluções dos participantes, prevaleceu a quantidade de alunos que adotou técnicas não-visuais ou parcialmente visuais, sendo somente um participante a utilizar como técnica um método visual de solução. Todos os participantes que foram abordados na análise mostraram em suas resoluções a presença da Interpretação da Informação Figurativa, porém somente em 7 participantes foi identificada a mobilização do Processamento Visual para solucionar a tarefa proposta.

6.3.2 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 2

De acordo com o que foi descrito na seção 6.2, a Tarefa 2 pode ser classificada como uma tarefa do tipo T_2: “Duplicar a área de um quadrado qualquer”. Dos 18 alunos que participaram da pesquisa, 11 não apresentaram solução ou apresentaram alguma solução por meio da qual não conseguiram resolver a tarefa. Dentre os que esboçaram algumas tentativas em sua folha de registro, não foi possível classificar o tipo de técnica utilizada, pois estes apresentaram resoluções incompletas ou utilizaram argumentos equivocados e não chegaram à solução. Um erro comum entre aqueles que resolveram a tarefa, mas o fizeram de forma equivocada, é afirmar que para obter um quadrado de área duplicada basta dobrar a medida dos lados do quadrado inicial, como apresentado por A_{14}:

Figura 18 - Resolução do participante A_{14}

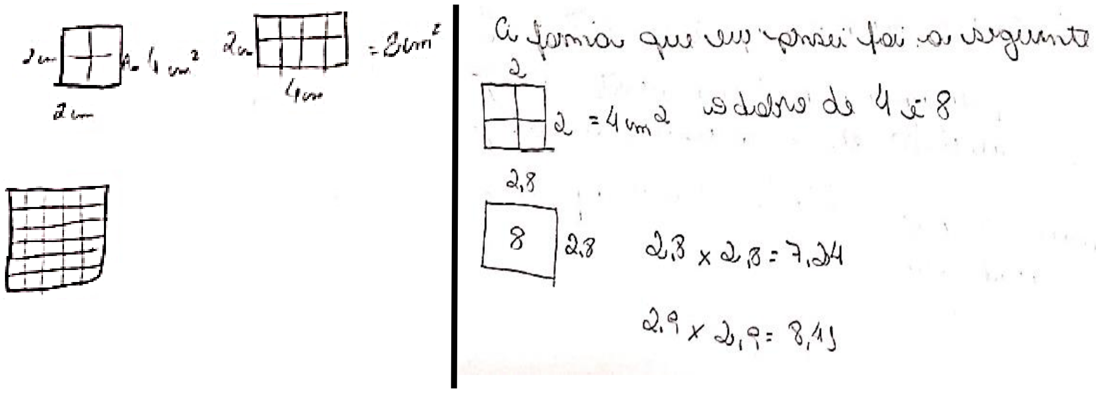


Fonte: coletas de dados

Também o participante A_5 afirma em seu registro que “se temos um terreno na forma de quadrado de 2 cm, para duplicarmos basta multiplicarmos por 2”. Esse participante apresenta ainda o desenho de um quadrado inicial com lado 2 cm e um segundo quadrado, já ampliado, com lado 4 cm indicando que seguiu o mesmo raciocínio de A_{14}.

Houve também participantes que adotaram um caso particular para analisar o problema contido na tarefa e que, por não encontrarem um valor exato para o lado do quadrado ampliado, recorreram a aproximações, ou chegaram à conclusão de que se o terreno tivesse o dobro da área, então ele não seria quadrado, como apresentado na Figura 17:

Figura 19 - Resoluções de A_3 e A_{13}, respectivamente



Fonte: coleta de dados

Já os 7 alunos, $A_4, A_7, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}$ e A_{15}, apresentaram soluções corretas para as tarefas. Em suas resoluções surgiram três tipos de técnicas, que serão apresentadas a seguir:

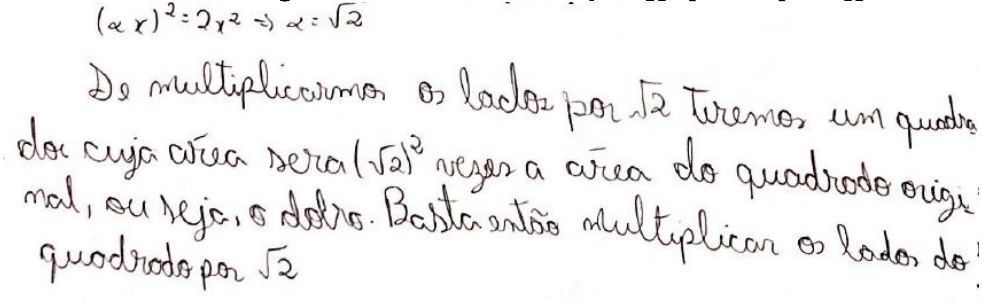
- τ_{21}: Analisar algebricamente

Técnica utilizada pelos participantes A_9, A_{10}, A_{11} e A_{15}. Sua característica principal é a não utilização de imagens como um objeto de fundamentação para a resolução. Neste tipo de resolução o aluno, ou não apresenta nenhum tipo de desenho, como é o caso de A_{11}, ou apenas ilustra a figura do quadrado sem utilizá-la, fundamentando seu método de resolução em uma demonstração algébrica, como fazem A_9 A_{10} e A_{15}.

Nesta técnica temos que, sabendo que a área de um quadrado é obtida por meio do quadrado da medida de seu lado, o participante toma um quadrado qualquer de lado x. A partir daí, supõe que o quadrado a ser obtido deve ter um lado de tamanho αx, em que α é o valor pelo qual se deve multiplicar a medida x dos lados, para que se obtenha o quadrado de área duplicada. Assim, como a área do quadrado inicial é x^2, o participante observa que a área duplicada será, portanto, $2x^2$, mas essa área também pode ser vista como $(\alpha x)^2$. Assim, igualando estes termos, pode-se isolar α, donde se obtêm $\alpha = \sqrt{2}$, valor pelo qual deve-se multiplicar a medida dos lados para que a duplicação desejada seja feita.

A Figura 18 apresenta o registro completo feito por A_{11}, este participante não desenha nenhuma imagem:

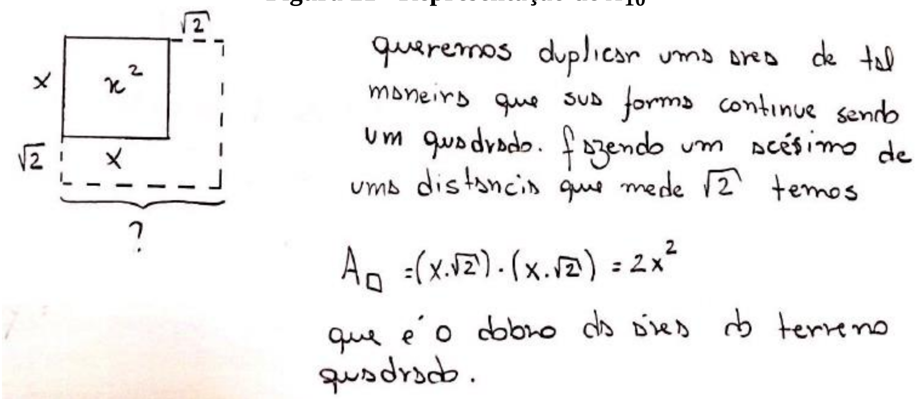
Figura 20 - Técnica de resolução τ_{21} aplicada por A_{11}



Fonte: coleta de dados

Já o participante A_{10}, diferente do anterior, representa a situação contida no enunciado da tarefa utilizando uma figura, como é apresentado na Figura 19. Observe que, ao representar o contexto enunciado na tarefa, o participante comete um equívoco comum aos demais participantes que utilizaram essa técnica, ele retrata o valor $\sqrt{2}$, que deve multiplicar a medida do comprimento do lado do quadrado a ser expandido, como se fosse a medida a ser somada a este lado:

Figura 21 - Representação de A_{10}

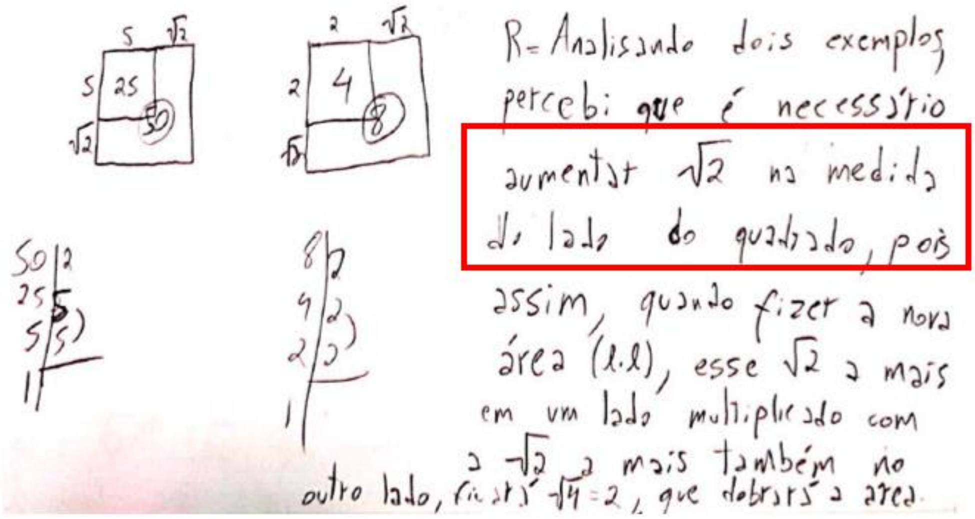


Fonte: coleta de dados

O registro indica que o participante não tem clareza sobre a forma como o resultado obtido ($\sqrt{2}$) deve ser inserido na figura representativa da tarefa para que a ampliação do terreno seja feita de forma correta, referindo-se ao resultado como acréscimo, o que não é correto.

O mesmo equívoco pode ser notado no registro do participante A_9. Este, por sua vez, dá início a seu raciocínio aplicando a situação expressa no enunciado da tarefa à casos particulares, conforme apresentado na Figura 20:

Figura 22 - Técnica de resolução τ_{21} aplicada por A_9

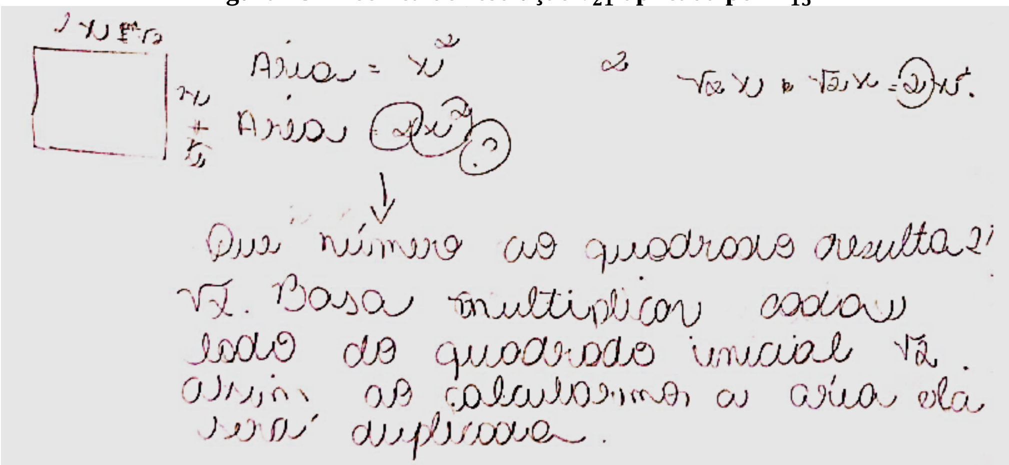


Fonte: coleta de dados

Por meio da análise de dois casos particulares, o participante constrói sua análise porém, assim como A_{10}, demonstra não ter clareza ao situar o valor obtido ($\sqrt{2}$) no contexto geométrico do problema. Essa dificuldade pode ser uma evidência de que estes participantes possuem uma limitação na habilidade de visualização VP, pois mesmo tendo obtido a devida solução para a tarefa, não identificam a que se refere esse valor.

Também o participante A_{15}, seguindo o mesmo raciocínio dos demais, ilustra o enunciado da questão por meio de um quadrado de lado x, no qual insere as informações que vão sendo obtidas ao longo de sua resolução. O raciocínio empregado é registrado de forma escrita, como apresenta A_{15}, na Figura 21. O participante organiza as informações dadas na tarefa e as confronta com o que se deseja obter: uma área de $2x^2$ como ele apresenta. Em seguida, efetua um raciocínio aritmético "que número ao quadrado resulta em 2?", obtendo o valor desejado ($\sqrt{2}$), o qual também insere na figura de maneira equivocada:

Figura 23 - Técnica de resolução τ_{21} aplicada por A_{15}



Fonte: coleta de dados

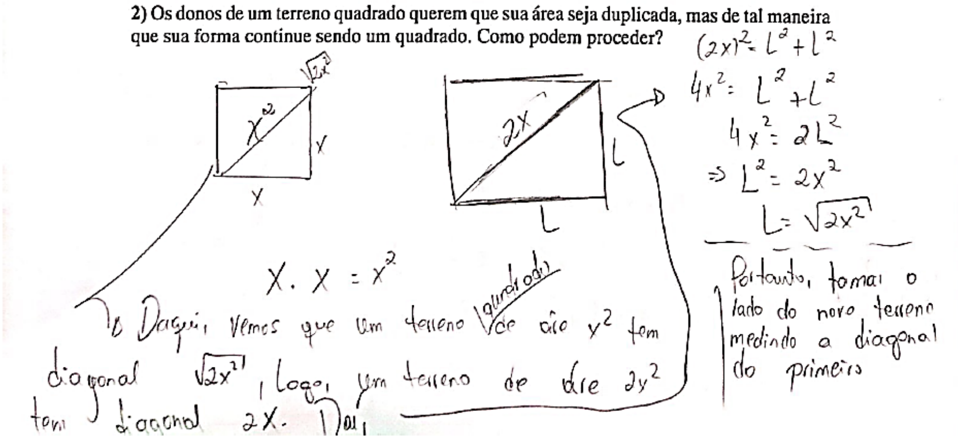
Esta técnica foi classificada como um método não visual de solução, pois nela o participante, quando faz uma imagem visual, não a utiliza em seu raciocínio. Para que esta técnica seja aplicada é necessário apenas que se conheça a relação: “a área de um quadrado é o quadrado da medida de seu lado”.

Em relação às habilidades de visualização, identificamos nessa técnica a presença, mesmo que de modo limitado, da habilidade IFI, conforme descrita por Bishop (1983), pois os alunos representaram tanto em desenho quanto algebricamente a área descrita em língua portuguesa no enunciado, demonstrando compreender o vocabulário utilizado no enunciado da tarefa. Apesar disso, revelaram dificuldade em identificar de que forma o resultado $\sqrt{2}$ obtido deve ser aplicado ao contexto da tarefa a fim de obter o desejado terreno ampliado. Já o Processamento Visual não pôde ser identificado, uma vez que nesta técnica não há evidências de que houve manipulação na figura.

- τ_{22}: Analisar a figura associada à um raciocínio algébrico

Apesar de também representar utilizando uma figura e associá-la a argumentos algébricos, consideramos esta técnica diferente da técnica anterior pelo fato de ser construída por um raciocínio completamente distinto do raciocínio que a fundamenta. O participante A_7, o único a empregar a técnica τ_{22}, que será descrita em seguida, revela que obteve o valor $\sqrt{2}$ empregando como linha de raciocínio “encontrar um valor maior que zero que quando elevado ao quadrado resulta em 2”, ele apresenta em seu registro um raciocínio diferente. Essa técnica está exposta na Figura 22:

Figura 24 - técnica de resolução τ_{22} aplicada por A_7



Fonte: coleta de dados

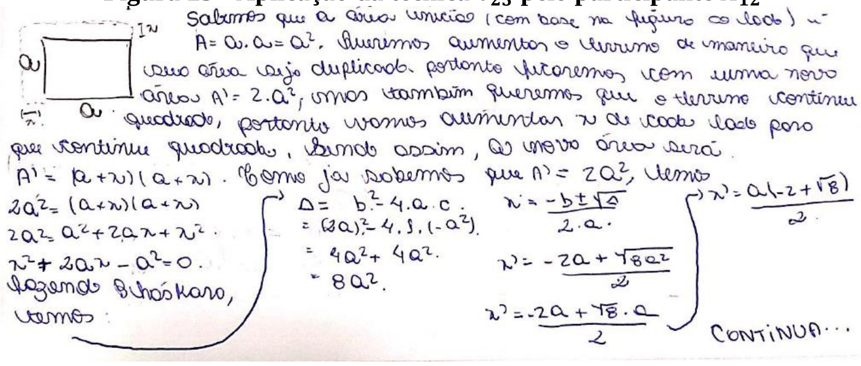
O participante esboça a figura de um quadrado de lados medindo x e observa que sua área mede x^2. Observando ainda este mesmo quadrado, o participante obtém, utilizando o Teorema de Pitágoras (sem citá-lo ou apresentar as contas no registro), a medida de sua diagonal, $\sqrt{2x^2}$. Este valor é analisado pelo participante, que percebe que a medida $\sqrt{2x^2}$ também pode ser vista como "raiz de duas vezes a área", assim, ele infere que para um quadrado de área $2x^2$, teremos uma diagonal de medida $2x$. A partir dessa informação, o participante utiliza novamente o Teorema de Pitágoras (agora registrando) para obter a medida do lado do novo quadrado. Dessa forma, o aluno não só obtém o valor da medida do lado do quadrado de área duplicada, que é $\sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$, mas também percebe que o lado do novo quadrado deve ter o mesmo tamanho da diagonal do quadrado inicial.

Consideramos essa técnica um método parcialmente visual de solução, pois o participante desenha imagens e as utiliza para seguir sua linha de raciocínio. A representação dos dois terrenos, tal como o registro da identificação dos elementos geométricos apontam que houve a presença da habilidade de Interpretação da Informação Figurativa, já a utilização da diagonal e a percepção do padrão na figura e nos valores algébricos relacionados à área investigada (diagonal $\sqrt{2x^2}$ e diagonal $2x$) evidenciam a utilização do Processamento Visual.

- τ_{23}: Obter o valor que deve ser acrescido aos lados

Essa técnica foi utilizada por dois participantes, são eles: A_4 e A_{12}. Ela se caracteriza por possuir uma argumentação puramente algébrica. A Figura 23 contém o registro feito pela participante A_{12}, a qual faz o desenho da figura e apresenta em língua portuguesa sua argumentação:

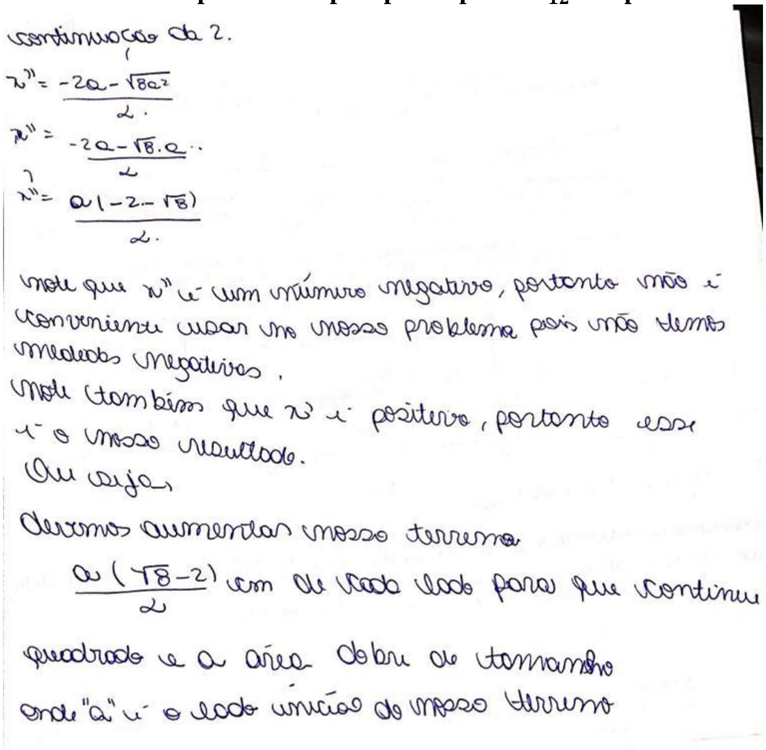
Figura 25 - Aplicação da técnica τ_{23} pelo participante A_{12}



Fonte: coleta de dados

Apesar de ilustrar o contexto retratado na tarefa por meio de uma figura, o participante não a utiliza a fim de extrair argumentos geométricos para sua técnica de resolução. Seu método de resolução consiste em considerar a área do quadrado inicial $\mathrm{A} = a.a = a^2$ e supor que a área do quadrado expandido será $\mathrm{A}' = (a + x).(a + x) = x^2 + 2ax + a^2$. Assim, como deseja-se que a área expandida seja o dobro da área inicial, queremos que $\mathrm{A}' = 2a^2 \rightarrow x^2 + 2ax + a^2 = 2a^2$. A partir dessa igualdade, o participante chega à seguinte equação: $x^2 = 2ax - a^2 = 0$. Aplicando, então, a fórmula conhecida no Brasil como de Bháskara, o participante obtém o valor que deve ser acrescido ao lado para que se obtenha um quadrado de área igual a duas vezes a área do quadrado inicial, como expressa na Figura 24:

Figura 26 - Conclusão apresentada pelo participante A_{12} ao aplicar a técnica τ_{25}


continuação da 2.

$x'' = \dfrac{-2a - \sqrt{8a^2}}{2}$.

$x'' = \dfrac{-2a - \sqrt{8}.a}{2}$.

$x'' = \dfrac{a(-2 - \sqrt{8})}{2}$.

note que x'' é um número negativo, portanto não é conveniente usar no nosso problema pois não temos medidas negativas.

Note também que x' é positivo, portanto esse é o nosso resultado.

Ou seja,

devemos aumentar nosso terreno

$\dfrac{a(\sqrt{8}-2)}{2}$ em de cada lado para que continue quadrado e a área dobre de tamanho

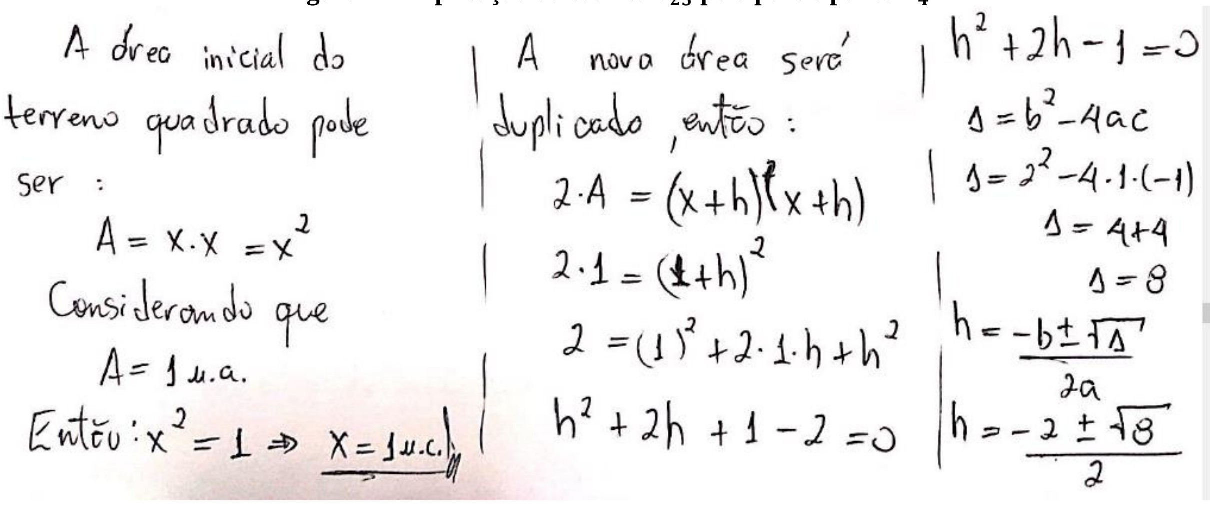
onde "a" é o lado inicial do nosso terreno

Fonte: coleta de dados

O participante observa corretamente que um dos valores obtidos é negativo e que, portanto, não se enquadra ao contexto apresentado na tarefa, descartando-o. Podemos notar que o valor obtido pode ser simplificado para "$- a + \sqrt{2}a$", e que se somarmos a medida desse acréscimo à medida "a" do lado do quadrado inicial, obtemos o valor $\sqrt{2}a$, o mesmo valor obtido pelos demais participantes aplicando outras técnicas.

O participante A_4 também aplica essa técnica com a mesma argumentação. Diferentemente do participante anterior, não apresenta nenhuma figura em seu registro, o que evidencia o fato de que essa técnica não tem como parte essencial a presença de uma figura, podendo ser aplicada mesmo em sua ausência. O registro desse participante revela que, ao desenvolver seu raciocínio, ele particulariza sua solução ao considerar um quadrado de medida igual a 1 unidade de área, como apresenta a figura 25:

Figura 27 - Aplicação da técnica τ_{25} pelo participante A_4



A área inicial do terreno quadrado pode ser:

$A = x \cdot x = x^2$

Considerando que

$A = 1$ u.a.

Então: $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ u.c.

A nova área será duplicada, então:

$2 \cdot A = (x+h)(x+h)$

$2 \cdot 1 = (1+h)^2$

$2 = (1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot h + h^2$

$h^2 + 2h + 1 - 2 = 0$

$h^2 + 2h - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$

$\Delta = 4 + 4$

$\Delta = 8$

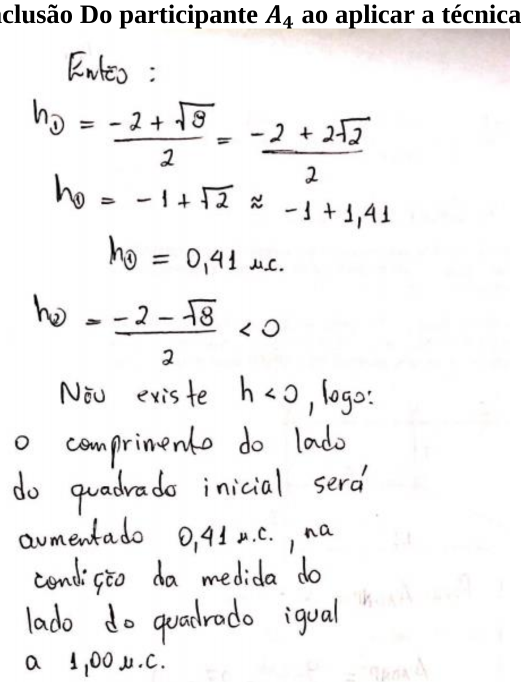
$h = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$h = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Fonte: coleta de dados

Seguindo os mesmos passos do participante anterior, A_4 obtém também uma equação de segundo grau, e aplicando Bháskara, obtém o valor do acréscimo necessário para a duplicação desejada: “$-1 + \sqrt{2}$” no quadrado considerado, de área 1, conforme expresso por ele em seu registro apresentado na Figura 26:

Figura 28 - Conclusão Do participante A_4 ao aplicar a técnica τ_{25}



Então:

$h_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{2}$

$h_1 = -1 + \sqrt{2} \approx -1 + 1,41$

$h_1 = 0,41$ u.c.

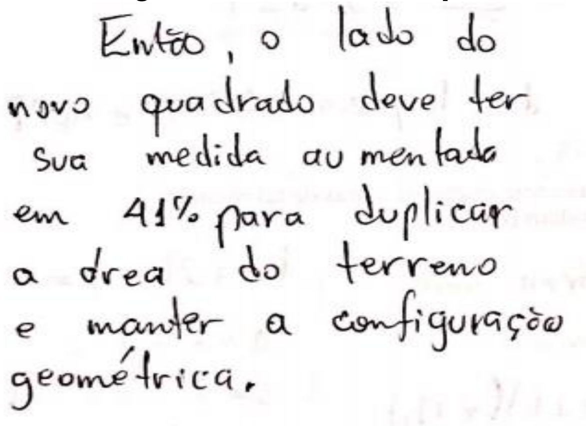
$h_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{8}}{2} < 0$

Não existe $h < 0$, logo: o comprimento do lado do quadrado inicial será aumentado 0,41 u.c., na condição da medida do lado do quadrado igual a 1,00 u.c.

Fonte: coleta de dados

O participante encerra seu registro concluindo que, para que se mantenha a configuração geométrica da figura, é preciso aumentar o seu lado numa proporção de 41%. Não fica explicitado nesse registro se a afirmativa do participante se refere ao quadrado analisado por ele (de área 1) ou se por meio desse argumento ele visualiza a generalização que este argumento permite. Apresentamos na figura 27 seu comentário:

Figura 29 - Comentário de A_4


Então, o lado do novo quadrado deve ter sua medida aumentado em 41% para duplicar a área do terreno e manter a configuração geométrica.

Fonte: coleta de dados

Classificamos essa técnica como um método não visual de solução, já que para esse tipo de estratégia a figura não é uma parte essencial, o que fica evidente pela ausência de imagens na resolução de A_4. É possível verificar a presença da habilidade de visualização IFI, uma vez que os participantes que utilizaram essa técnica demonstram ter domínio sobre o vocabulário contido no enunciado da tarefa e também ao registrar seu raciocínio em língua portuguesa. Por outro lado, não foi possível identificar a presença do processamento visual (VP) uma vez que, apesar de identificarem a figura e de que forma deveria ser feito o acréscimo para que se mantivessem as propriedades do quadrado, os participantes fundamentaram sua argumentação em procedimentos puramente algébricos, não utilizando argumentos geométricos para obter o valor necessário para sua resolução.

Apresentamos no Quadro 7 uma síntese dos dados analisados na Tarefa 2, indicando a classificação de cada técnica, as habilidades de visualização nela identificadas e os participantes que a utilizaram em sua resolução:

Quadro 7 - Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 2

Técnica	Classificação	Constructos	Participantes
$\boldsymbol{\tau_{21}}$	não-visual	IFI	A9, A10, A11, A15
$\boldsymbol{\tau_{22}}$	parcialmente visual	IFI e VP	A7
$\boldsymbol{\tau_{23}}$	não-visual	IFI	A4 e A12

Fonte: os autores

Podemos notar que, no caso da Tarefa 2, dentre as três técnicas identificadas nas resoluções dos participantes, foi predominante a quantidade de alunos que adotaram técnicas não-visuais como método de solução. Em relação às habilidades de visualização, todos os participantes mostraram em suas resoluções a presença da Interpretação da Informação Figurativa, porém somente 1 participante utilizou técnicas que abrangiam o Processamento Visual para solucionar a tarefa proposta.

6.3.3 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 3

De acordo com o que foi apresentado na seção 6.3.2, a Tarefa 3 foi classificada como uma tarefa do tipo "obter a medida de dois segmentos", esses segmentos foram dados por meio de uma figura, de modo que, a partir das informações contidas na figura, os alunos desenvolvessem suas técnicas para a obtenção dos valores desejados. Dos 18 participantes da pesquisa, apenas 3 apresentaram em seu registro o desenvolvimento de uma técnica que os conduziu ao resultado correto. Foram eles: $\mathrm{A}_4, \mathrm{A}_9$ e A_{11}.

Em relação aos outros 15 participantes, 10 deles, ou deixaram em branco ou apresentaram em seus registros apenas um esboço de algumas tentativas sem conclusão, onde fica evidenciado que não obtiveram uma técnica definida por meio da qual solucionariam a tarefa proposta. Os outros 5 alunos ($\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_8, \mathrm{A}_{12}, \mathrm{A}_{14}$ e A_{16}) apresentaram em suas tentativas suposições errôneas, que os conduziram a soluções incorretas.

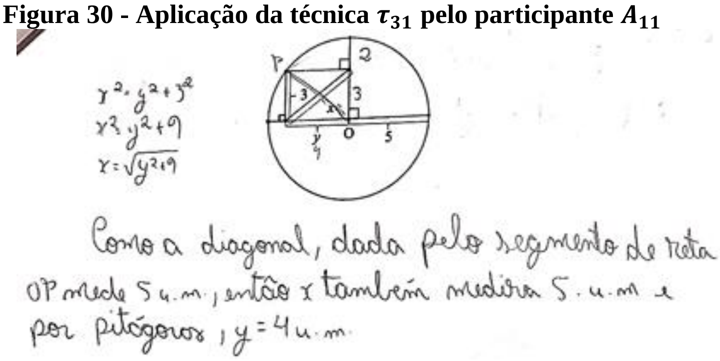
As tentativas desses 5 alunos não serão analisadas, uma vez que sua análise não faz parte do objetivo desta pesquisa, porém, consideramos importante mencionar brevemente o equívoco cometido por eles: houve três participantes ($\mathrm{A}_8, \mathrm{A}_{14}$ e A_{16}) que afirmaram que o segmento y é o lado de um quadrado e que, portanto, mediria 3. Já os outros 2 participantes (A_1 e A_{12}) supuseram que o segmento y fosse raio da circunferência afirmando, assim, que esse segmento possui medida 5. Ambas as afirmativas estão incorretas e conduziram a raciocínios equivocados. Ressaltamos que essas suposições evidenciam dificuldades nas habilidades de visualização, pois revelam que esses participantes olham para a figura mas não se detém à análise das informações nela apresentadas a fim de associarem-nas às propriedades e conceitos que podem ser extraídos e utilizados para fundamentar as suposições feitas ao longo da análise.

Dos 3 participantes que obtiveram a solução correta para a tarefa matemática proposta, houve a aplicação de três técnicas distintas, as quais apresentamos a seguir:

- τ_{31}: Analisar as diagonais do retângulo contido na figura

Essa técnica de solução foi utilizada pelo participante A_{11}, e consiste na técnica que foi apresentada na seção 6.2, no Modelo Praxeológico de Referência para esta tarefa. Apresentamos na Figura 28 o registro de A_{11}, no qual o participante expõe seu raciocínio:

Figura 30 - Aplicação da técnica τ_{31} pelo participante A_{11}



Fonte: coleta de dados

Observa-se nesse registro que o participante insere na figura um ponto P e a seguir traça o segmento OP. Ao perceber que a diagonal traçada é também raio da circunferência, apresenta um comentário onde registra que essa diagonal possui medida 5, assim, por congruência, temos que x = 5. Em seguida, aplica o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e y, e a hipotenusa x = 5, donde obtêm y = 4.

Classificamos esta técnica como um método visual de solução, fundamentado no que foi apresentado em Presmeg (1986), uma vez que a figura é parte essencial desta técnica de solução e sem ela não seria possível extrair uma das principais informações necessárias para a resolução desta tarefa, a de que a diagonal OP do retângulo é raio da circunferência.

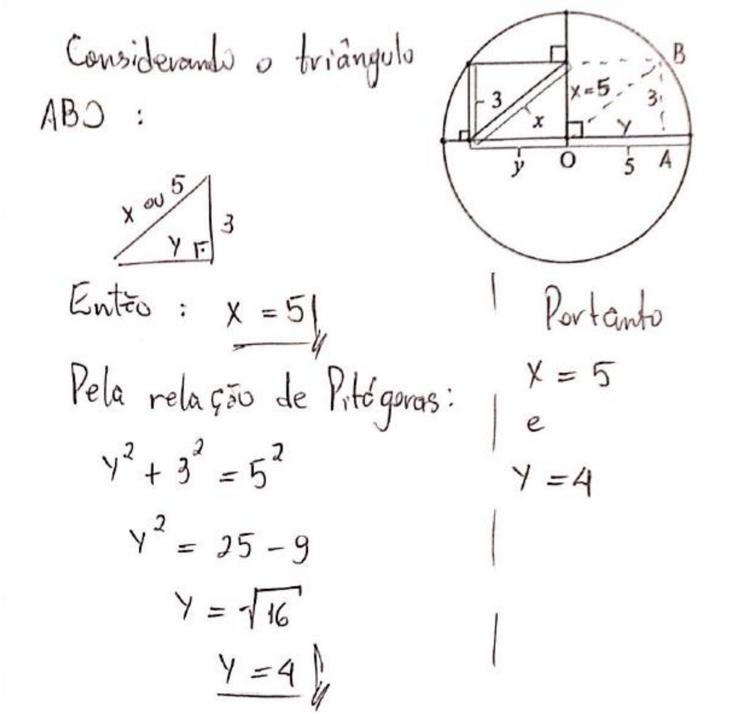
Além disso, foi possível identificar a presença da habilidade IFI, pois fica evidente no registro feito pelo aluno que ele compreende o vocabulário descrito no enunciado e também se referiu em língua portuguesa à elementos apresentados em linguagem figurativa utilizando corretamente termos como “diagonal” e “segmento de reta”.

Também podemos afirmar que houve a mobilização da habilidade de Processamento Visual (VP), pois o participante que adotou esta técnica visualizou e extraiu da imagem apresentada informações não naturais, as visualizando e traduzindo para a língua portuguesa, o que se evidencia pela percepção das propriedades e conceitos envolvidos na tarefa, como por exemplo a congruência e o teorema de Pitágoras.

- τ_{32}: Analisar a simetria da figura

Técnica utilizada apenas pelo participante A_4, e tem como ponto inicial a análise da simetria da figura. Num primeiro momento, o participante faz a reflexão do retângulo contido na circunferência em torno do raio vertical contido na figura, que é perpendicular ao diâmetro traçado na figura. A partir daí o participante analisa ambos os retângulos e traça, no novo retângulo, a diagonal OB, paralela à diagonal já apresentada na figura. Nesse momento, percebe que a diagonal traçada é raio da circunferência. Assim, pela congruência das duas figuras, conclui que o segmento x tem medida 5. Em seguida, o participante aplica o teorema de Pitágoras e obtém a medida do segmento y:

Figura 31 - Aplicação da técnica τ_{32} pelo participante A_4



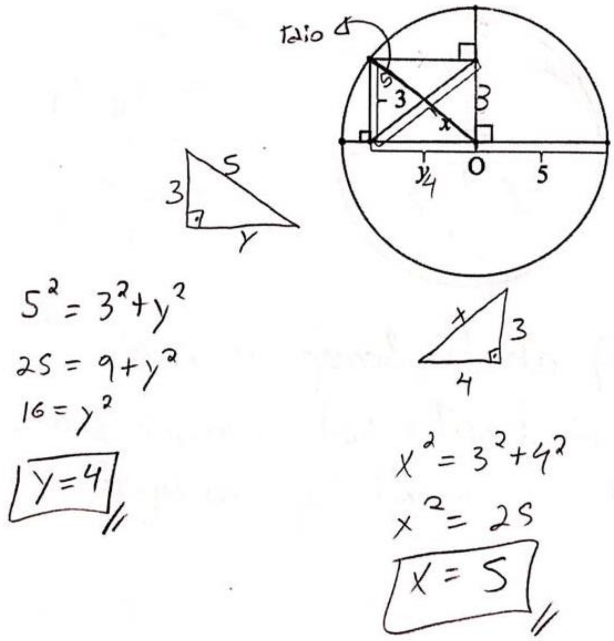
Fonte: coleta de dados

Esta técnica de resolução foi classificada como um método de solução parcialmente visual, pois é construída a partir da simetria inicial desenhada pelo participante, que é associada à utilização do teorema de Pitágoras. A partir da visualização desses argumentos geométricos, o participante obtém o valor da incógnita y, por meio de um cálculo aplicando o teorema. Em relação às habilidades de visualização, podemos afirmar que houve a presença da habilidade IFI, revelada em todo o registro do participante, o qual evidencia que este compreendeu o vocabulário do enunciado da tarefa e também soube interpretar corretamente os elementos apresentados na figura. Também podemos afirmar que houve a mobilização da habilidade de Processamento Visual (VP), pois o participante visualiza na imagem apresentada informações não naturais, como por exemplo a simetria, as visualizando e traduzindo em linguagem algébrica.

- τ_{33}: Aplicar o teorema de Pitágoras

Essa técnica de resolução foi utilizada pelo participante A_9, e tem como característica a utilização do teorema de Pitágoras como ferramenta para a obtenção da medida dos segmentos *x* e *y*. Apresentamos na Figura 30 a resolução construída pelo participante A_9:

Figura 32 - Aplicação da técnica τ_{33} pelo participante A_9



Fonte: coleta de dados

O participante dá início a sua técnica traçando a outra diagonal do retângulo contido na figura. Ao fazer isso, ele identifica que essa diagonal é também um raio da circunferência e que portando mede 5, o que registra puxando na figura uma seta onde escreve "raio". Sabendo disso, o participante aplica o teorema de Pitágoras no triângulo formado abaixo da diagonal traçada, cujos lados medem 3, 5 e *y*, e assim obtém o valor de *y* = 4. Em seguida, toma o triângulo inferior à diagonal *x*, que possui lados com medida *x*, 3 e 4 e aplica novamente o teorema de Pitágoras, donde obtém *x* = 5.

Podemos notar que nesta técnica o participante obtém os valores de *x* e *y* por meio de um cálculo a partir da aplicação do teorema de Pitágoras. Não são utilizadas propriedades ou conceitos geométricos que auxiliam na obtenção desses valores, como nas técnicas analisadas anteriormente. A figura é utilizada somente a fim de traçar o segmento que falta para ser aplicado o Teorema de Pitágoras, ao traçá-la, o participante percebe que por se tratar de um raio, já sabe sua medida e assim, facilmente resolve o problema por meio de dois cálculos.

Classificamos essa técnica como um método parcialmente visual de solução, pois nela é possível perceber que o participante tem a figura como uma parte necessária da resolução, pois extrai dela as informações necessárias para que dê continuidade a sua resolução. As informações retiradas da figura são então associadas ao teorema e, depois de realizados os cálculos, a solução é obtida.

A análise da figura permite ao participante identificar que a diagonal traçada é raio da circunferência, uma informação que não é natural em termos visuais. Para que se tenha essa conclusão é preciso ter compreensão das definições de uma circunferência, raio, centro etc. Além disso, ao visualizar a figura, o participante identifica em seus elementos um contexto propício para a aplicação do teorema por ele utilizado. Essas são evidências da mobilização da habilidade de visualização VP, uma vez que o processamento visual é identificado pela visualização e tradução de relações abstratas e de informações não-naturais em termos visuais. Também a Interpretação da Informação Figurativa é identificada pela clara compreensão do conteúdo e do contexto abordado tanto na figura quanto no enunciado da tarefa.

Apresentamos no Quadro 8 a classificação de cada técnica, as habilidades de visualização nela identificadas e quais os participantes que a utilizaram em sua resolução:

Quadro 8 - Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 3

Técnica	Classificação	Constructos	Participantes
$\boldsymbol{\tau_{31}}$	visual	IFI e VP	A11
$\boldsymbol{\tau_{32}}$	parcialmente visual	IFI e VP	A4
$\boldsymbol{\tau_{33}}$	parcialmente visual	IFI e VP	A9

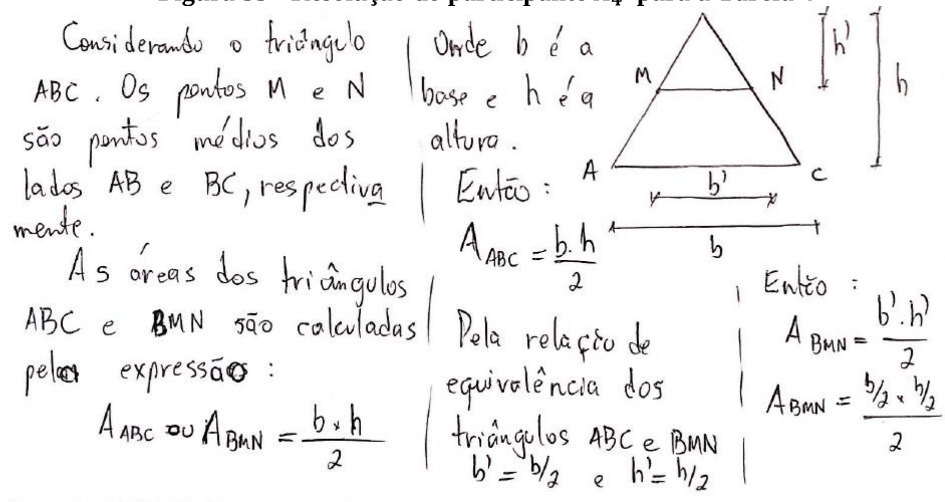
Fonte: os autores

Nesta tarefa identificamos que em todas as técnicas foram utilizadas as habilidades de visualização IFI e VP. Além disso, não foram encontrados participantes que chegaram à solução requerida na tarefa utilizando como estratégia técnicas não-visuais de solução.

6.3.4 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 4

A quarta tarefa apresentada aos participantes, pode ser classificada como uma tarefa do tipo T_4: “comparar a área de duas figuras geométricas”, conforme citado anteriormente. Nessa tarefa os participantes deveriam analisar a relação entre as duas áreas formadas ao se traçar a mediana de um triângulo qualquer. Dos 18 participantes analisados, todos apresentaram alguma tentativa de solução para o que foi proposto. Desses, 7 participantes não obtiveram uma solução para a tarefa, são eles: $A_4, A_2, A_{14}, A_{12}, A_{17}, A_{10}$ e A_3. Entre os 7 citados, todos exceto A_4, apresentaram registros incompletos, onde não concluíram sua análise. Já o participante A_4 apresentou uma resolução onde considerou incorretamente a mediana, analisando-a como um segmento paralelo à base do triângulo, com extremidade nos pontos médios de seus lados. Por isso, aplica uma análise equivocada:

Figura 33 - Resolução do participante A_4 para a Tarefa 4

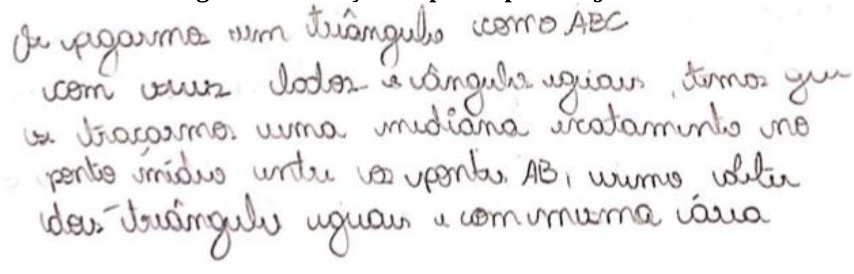


Fonte: coleta de dados

Dentre os outros 11 participantes, todos responderam corretamente a tarefa proposta. Porém, 8 deles ($A_{18}, A_{13}, A_{16}, A_1, A_8, A_5, A_{15}$ e A_6) não apresentaram as justificativas de sua análise.

O participante A_5, por exemplo, apresenta a seguinte solução:

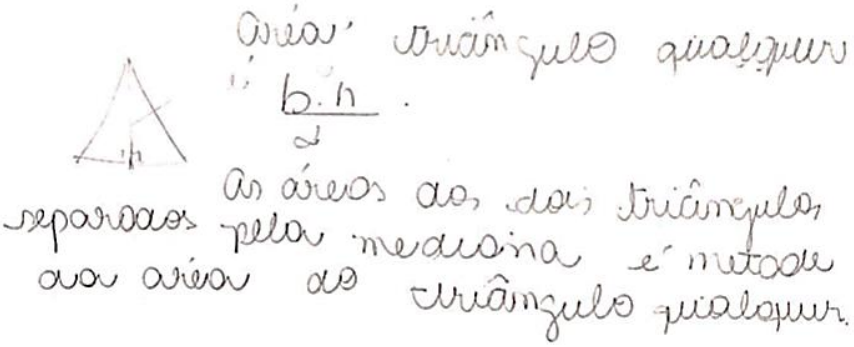
Figura 34- Solução do participante A_5



Fonte: coleta de dados

A resposta apresentada por este participante: “dois triângulos iguais e com mesma área” sugere que, mesmo tendo apresentado uma resposta, ele pode não ter compreendido corretamente o que foi proposto no enunciado da tarefa. Apesar de escrever a resposta “triângulos com mesma área”, o fato de o participante também escrever “dois triângulos iguais” pode indicar que a visualização de A_5 para o enunciado do problema não é o que se propõe. Acreditamos que A_5 pode ter visualizado a resposta por meio de uma figura parecida com o que foi apresentado na resolução de A_{15}.

Figura 35 - Solução apresentada por A_{15}



Fonte: coleta de dados

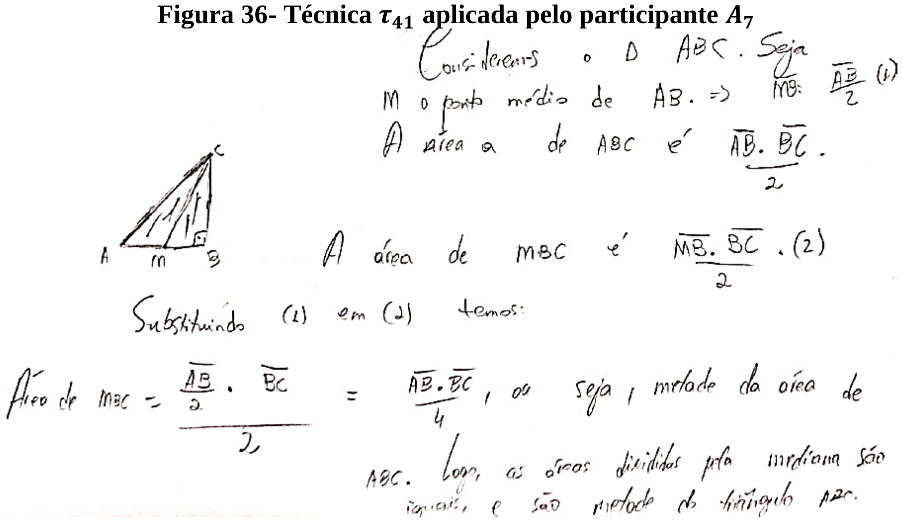
Constata-se que A_{15} desenha a mediana como se fosse uma altura. Sabemos que a mediana de um triângulo só coincide com sua altura no caso dos triângulos equilátero ou isósceles (se a mediana for referente ao único lado distinto). No caso de um triângulo escaleno, a mediana e a altura não coincidem e também os triângulos obtidos a partir da divisão da área do triângulo inicial pela mediana serão diferentes, apesar de terem a mesma área. De maneira idêntica, também os participantes $\mathrm{A}_6, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_{18}, \mathrm{A}_8, \mathrm{A}_{16}$ e A_{13}, assim como A_5, não esboçam nenhum desenho. Acreditamos, pelo que foi apresentado, que esses 8 participantes não compreendiam corretamente o conceito de mediana.

Os outros 3 participantes, $\mathrm{A}_7, \mathrm{A}_9$ e A_{11}, expuseram seus argumentos para demonstrar como obtiveram suas respostas. Analisando suas respostas, identificamos a presença de três técnicas distintas, as quais apresentamos a seguir:

- τ_{41}: Analisar algebricamente

Técnica de resolução utilizada pelo participante A_7. Esse participante apresenta corretamente sua argumentação, porém restringe sua análise ao caso particular de um triângulo retângulo. A_7 representa em uma figura o contexto apresentado no enunciado da tarefa, aplicando-o ao caso de um triângulo retângulo, no qual traça a mediana. Analisando a figura, extrai as medidas necessárias para sua resolução algébrica. Em seguida, registra a medida da base de dos triângulos formados e compara a área do triângulo inicial ABC com a área de um dos triângulos, o qual chama de MBC. Ao calcular, o participante nota que a área de MBC é metade da área de ABC e infere que, portanto, a área dos triângulos formados pela mediana de ABC são iguais, medindo a metade da área de ABC. Apresentamos na Figura 34 a resolução de A_7 para a tarefa 4:

Figura 36- Técnica τ_{41} aplicada pelo participante A_7



Fonte: coleta de dados

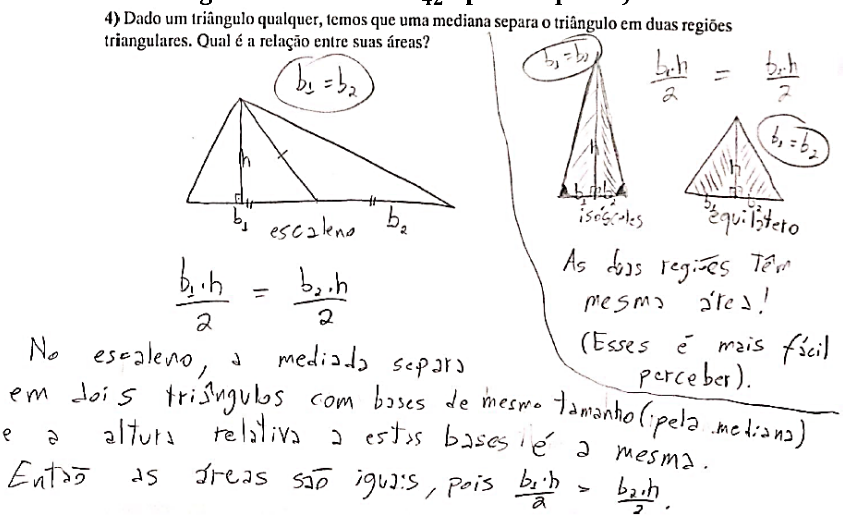
Em sua técnica, apesar de apresentar um raciocínio algébrico, o participante também utiliza da figura como parte de sua resolução, a fim de extrair informações que utiliza algebricamente. Assim, consideramos a técnica apresentada por A_7 como um método parcialmente visual de solução, já que associa a utilização da imagem com argumentos de natureza algébrica.

Além disso, consideramos que houve a mobilização da habilidade IFI, embora seja evidente que existem limitações quanto às habilidades visuais, pois o participante identifica e representa os elementos matemáticos citados no enunciado da tarefa e os transpõe para linguagem algébrica, porém faz isso restringindo o contexto abordado na tarefa apenas ao caso de um triângulo retângulo. O fato de restringir o problema a um caso particular pode indicar uma dificuldade na visualização do problema, ou pelo menos de uma técnica de resolução para a tarefa abordando um caso geral, como lhe é solicitado. Em relação à habilidade de Processamento Visual, também consideramos que houve sua mobilização, pois o participante extrai das figuras informações não naturais em termos visuais, como por exemplo identificar a altura no triângulo que registra e as medidas adequadas para o cálculo da área dos triângulos necessários.

- τ_{42}: Analisar a partir do padrão nos exemplos

Essa técnica foi utilizada pelo participante A_9 e tem como característica principal a separação em três casos para serem analisados, o caso de um triângulo escaleno, o de um triângulo isósceles e o de um triângulo equilátero. O participante separa em sua análise cada um destes casos e para cada um deles identifica a mediana do triângulo inicial, a base e a altura dos triângulos formados. A partir daí, calcula a área dos dois triângulos obtidos e conclui que para todos os casos a área é a mesma:

Figura 37 – Técnica τ_{42} aplicada por A_9



Fonte: coleta de dados

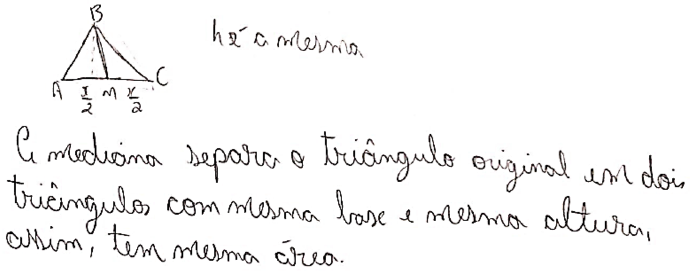
Assim como na técnica τ_{41} , o participante utiliza da figura associada à aplicação da fórmula para o calculo da área de um triângulo qualquer. As figuras são necessárias à aplicação dessa técnica pois é por meio da análise de cada tipo de triângulo que o participante visualiza e extrai os elementos necessários para utilizar a fórmula. Consideramos essa técnica como um método parcialmente visual de solução, já que tem a figura como parte importante na análise abordada neste tipo de resolução.

Em relação às habilidades de visualização, identificamos a presença tanto da IFI quanto do VP. A interpretação da informação figurativa se evidencia na elaboração dos desenhos que representam graficamente o que é expresso no enunciado em língua portuguesa. Já o VP é identificado na utilização de propriedades e associar corretamente as informações extraídas dos elementos gráficos aos valores aplicados na fórmula.

- τ_{43}: Analisar geometricamente

Utilizada pelo participante A_{11}, essa técnica de resolução tem como característica a ausência do registro de cálculos ou operações algébricas. O participante apenas utiliza um desenho e descreve em língua portuguesa a justificativa de sua análise. A Figura 36 apresenta sua resolução:

Figura 38 – Técnica τ_{43} aplicada por A_{11}



Fonte: coleta de dados

Por meio de um registro sucinto, o participante representa a figura de um triângulo de vértices ABC, no qual traça a mediana e identifica que esta divide sua base em dois segmentos de medida $\frac{x}{2}$. Uma linha pontilhada revela que o participante registra identificar a altura dos triângulos. Apesar de não mencionar explicitamente a quais triângulos a linha tracejada se refere, A_{11} escreve um comentário ao lado da figura “h é a mesma”, por meio do qual pode-se inferir que o participante percebe que o segmento pontilhado é a altura tanto de ABC quanto de ABM e MBC.

Percebendo que os dois triângulos originados pela mediana possuem mesma base e mesma altura, o participante conclui: “A mediana separa o triângulo original em dois triângulos com mesma base e mesma altura, assim, tem mesma área”. A conclusão apresentada evidência a argumentação puramente geométrica que fundamenta o raciocínio expresso por esse participante. Não são apresentados cálculos nem argumentos algébricos nessa resolução. Deste modo, classificamos esta técnica como um método visual de resolução, uma vez que tem na figura uma parte essencial da resolução, associada somente a argumentos de natureza geométrica.

Também podemos identificar nesse participante a presença das habilidades de visualização, pois demonstra compreender o enunciado expresso na tarefa, representando-o em uma figura, uma evidência de que houve a mobilização da habilidade IFI.

Também no que se refere ao VP, é possível evidenciar sua presença nesta técnica pois o participante representa um triângulo em seu desenho, e a partir dele visualiza propriedades e conceitos válidos para qualquer triângulo, generalizando sua resposta.

Apresentamos no Quadro 9 a classificação de cada técnica das três técnicas analisando, tal como as habilidades de visualização identificadas em sua aplicação e os participantes que a utilizaram:

Quadro 9- Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 4

Técnica	Classificação	Constructos	participantes
$\boldsymbol{\tau_{41}}$	parcialmente visual	IFI e VP	A7
$\boldsymbol{\tau_{42}}$	parcialmente visual	IFI e VP	A9
$\boldsymbol{\tau_{43}}$	visual	IFI e VP	A11

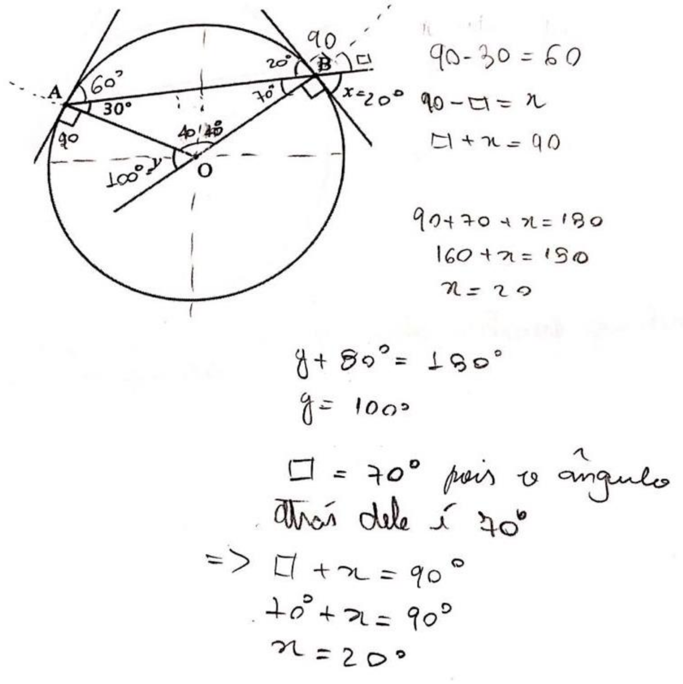
Fonte: os autores

Todas as técnicas utilizadas na resolução desta tarefa mobilizaram as habilidades de visualização IFI e VP. Assim como na Tarefa 3, não foram encontrados nos registros dos participantes, estratégias que obtiveram sucesso e que chegaram à solução da tarefa proposta apenas utilizando métodos algébricos ou aritméticos, sem utilizar alguma figura.

6.3.5 Técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 5

Conforme descrito na seção anterior, classificamos a Tarefa 5 como uma tarefa do tipo T_5, “Calcular o comprimento de ângulos”, em que esses ângulos foram representados em uma figura. Dos 18 participantes investigados, houve apenas 2 (A_{13} e A_{16}) que não apresentaram nenhuma tentativa de resolução para o problema proposto. Além desses, 4 participantes (A_5, A_7, A_8 e A_{15}) apresentaram em seus registros a escolha de algum método por meio do qual chegaram a uma solução incorreta. Esses participantes manipularam os ângulos contidos na figura algebricamente, porém, no decorrer de suas análises, surgiram dificuldades na interpretação da figura, o que os levou a cometer equívocos que os impediram de chegar ao resultado correto. O participante A_8, por exemplo, optou pela seguinte resolução:

Figura 39 - Resolução de A_8 para a Tarefa 5



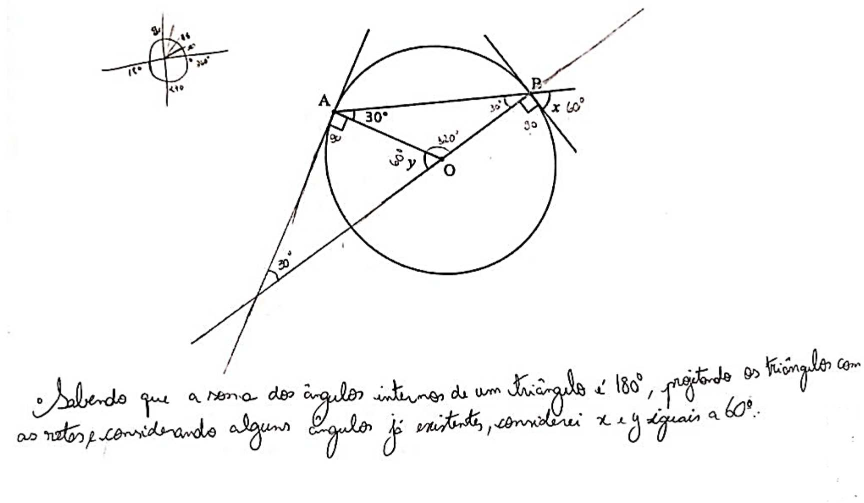
Fonte: coleta de dados

Por algum motivo não aparente na resolução, encontrou 70º como medida do ângulo $A\hat{B}O$, concluindo que o que ele representou por um pequeno retângulo mede 70º, e assim concluiu que x = 20º. Nesse caso, como y é o suplementar de um ângulo que mede 80º, o participante A_8 concluiu que y = 100º.

Houve ainda 4 participantes (A_3, A_{17}, A_{18} e A_{14}) que apresentaram a resposta correta para a tarefa, porém não registraram justificativas suficientes para que fosse possível em nossa análise identificar qual técnica fundamentou seu raciocínio. Sendo assim, comentamos brevemente a seguir as resoluções desses participantes.

O participante A_3, utiliza termos equivocados, mas aparenta ter resolvido o problema de uma maneira visual, já que não apresenta nenhuma justificativa algébrica. A Figura 38 contém o registro apresentado por esse participante:

Figura 40 - Resolução de A_3 para a Tarefa 5

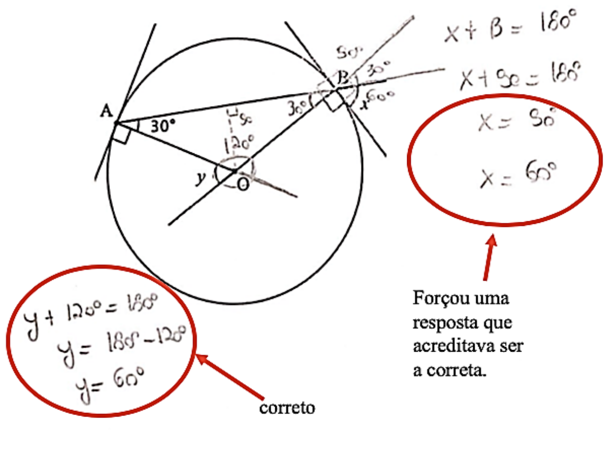


Fonte: coleta de dados

Neste caso, A_3 prolonga a reta tangente pelo ponto A e o lado BO, que provavelmente é o que se refere como "projetando os triângulos com retas". Seu comentário expressa que ele acredita estar justificando a solução, porém ela foi feita intuitivamente. Também A_{17} aparenta ter resolvido a tarefa de maneira visual e intuitiva, pois não apresenta nenhuma justificativa para sua resposta.

Já o participante A_{18} apresenta a tentativa de uma justificativa algébrica, mas se equivoca nas contas. Aparentemente, apesar de ter concluído o valor de *y* corretamente, ele força a resposta de *x*, pois provavelmente já a tinha intuído:

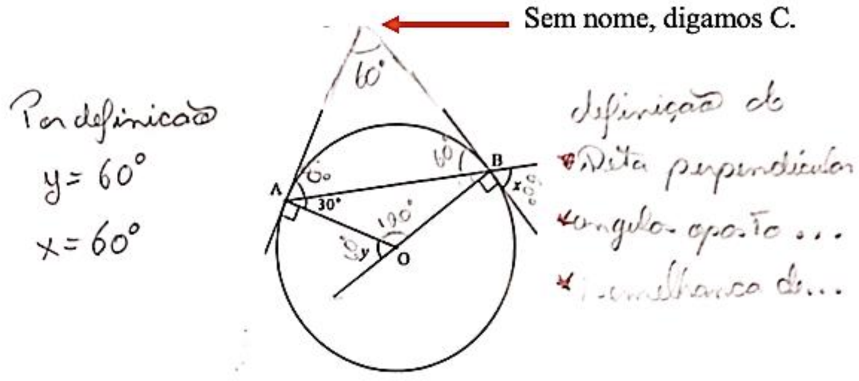
Figura 41 - Resolução de A_{18} para a Tarefa 5



Fonte: coleta de dados

O participante A_{14}, por sua vez, prolonga a reta tangente em A e B, construindo um triângulo. A fim de comentar sua resolução, chamaremos de 'C' o vértice formado pelas retas traçadas pelo participante, como mostra a Figura 40:

Figura 42 - Resolução de A_{14} para a Tarefa 5



Fonte: coleta de dados

Embora não descrito pelo participante, acreditamos que sua resolução fundamenta-se no teorema que garante que CA e CB são congruentes, a partir do qual, a princípio, é possível afirmar que o triângulo ABC é isósceles. Além disso, assim como concluiu A_{14}, pode-se inferir que o ângulo CÂB mede 60º. Dessa forma, como ABC é isósceles, o ângulo $A\hat{B}C$ também mede 60º e, portanto, o triângulo ABC é equilátero. A partir daí, pela existência dos ângulos retos em A e em B, o ângulo AÔB mede 120º e, por consequência, y = 60º. Tendo obtido os valores desses ângulos, conclui-se também que $x = 60$º.

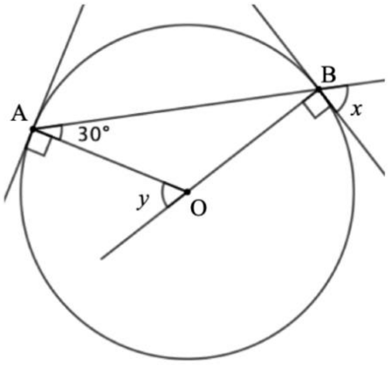
Apesar de o participante A_{14} chamar vários resultados de definição, pelo menos dois asteríscos feitos por ele sugerem a utilização correta dos resultados, como por exemplo a definição de reta perpendicular e ângulos opostos (pelo vértice) citados por ele. Embora não tenha formulado adequadamente suas justificativas, acreditamos que este foi o raciocínio que fundamentou a resolução de A_{14}, o qual poderia ser classificado como um método visual de solução.

Além dos participantes comentados até aqui, houve 8 participantes que apresentaram registro da técnica que os conduziu a obterem a resposta correta para a tarefa. Dentre esses, três técnicas emergiram, as quais analisamos a seguir:

- τ_{51}: Analisar a complementaridade e suplementaridade dos ângulos

Essa foi a técnica utilizada por 5 dos participantes investigados. São eles A_1, A_2, A_6, A_{10} e A_{11}. Essa técnica consiste em analisar a complementaridade e suplementaridade dos ângulos representados na figura. Conforme esperado pelos pesquisadores, essa técnica coincide com a técnica descrita no Modelo Praxeológico de Referência 5, apresentado no Capítulo 4, a qual retomamos brevemente.

Figura 43 - Imagem da Tarefa 5

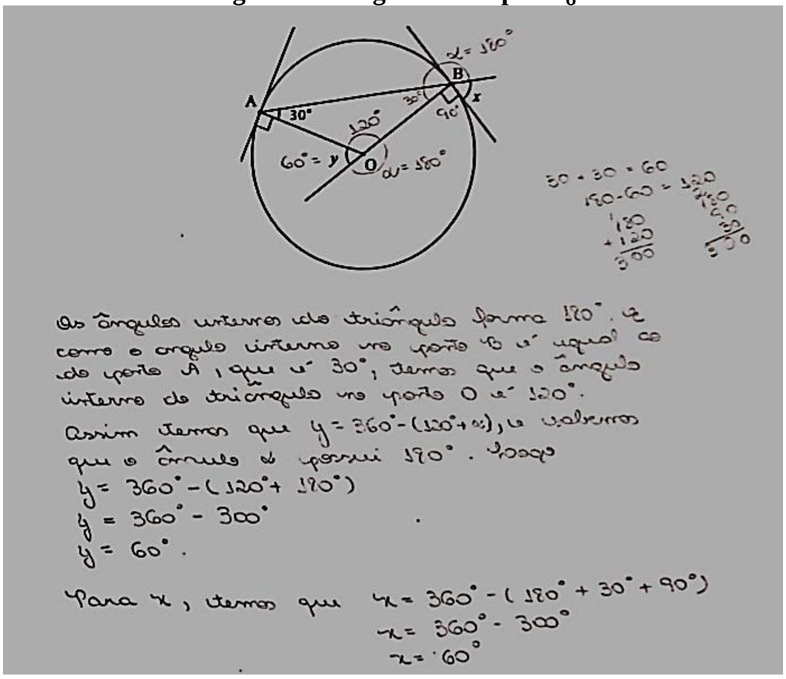


Fonte: Marmo (1964)

Inicialmente identifica-se que os segmentos OA e OB são raios da circunferência, e por isso são congruentes. Desse modo, temos que o triângulo AOB é isósceles, o que implica que o ângulo $O\widehat{B}A$ é congruente à $O\widehat{A}B$ e, portanto, mede 30º. Observa-se que o ângulo *x* é o suplementar de $O\widehat{B}A$ mais 90º, e por isso mede 60º. Podemos observar ainda que, como a soma dos ângulos internos de um triângulo, na Geometria Euclidiana, mede 180º e $O\widehat{B}A \equiv O\widehat{A}B$ medem 30º, a medida de $A\widehat{O}B$ é igual a 120º. Assim *y*, que é o suplementar de $A\widehat{O}B$, mede 60º.

Nos registros feitos pelos participantes, percebe-se que eles analisaram, num primeiro momento, o triângulo AOB. Todos os participantes registraram a congruência dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$. Porém nenhum desses 4 participantes registra que tal congruência ocorre pelo fato de que o triângulo AOB é isósceles, já que os seus lados AO e OB são raios da circunferência. Assim, a afirmação referente à congruência pode ter sido feita somente pelo que a representação aparenta, sem levar em consideração as propriedades envolvidas. Apresentamos a seguir, a técnica τ_{51} aplicada por A_6.

Figura 44 - Registro feito por A_6

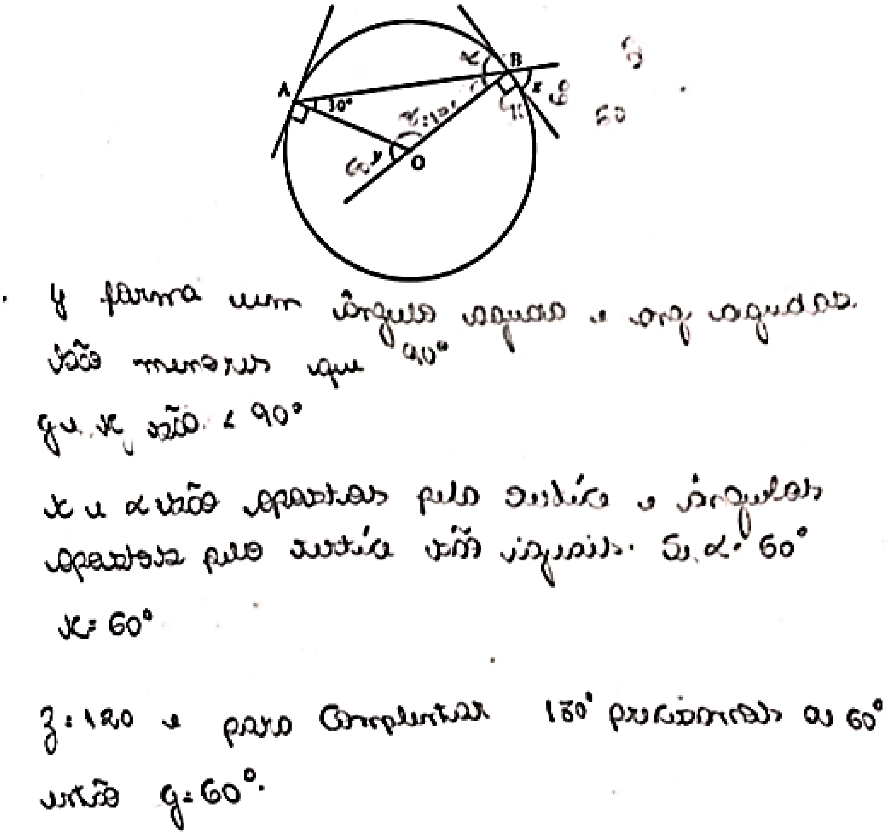


Fonte: coleta de dados

Nota-se no registro de A_6 uma evidência de visualização na utilização da imagem fornecida pelo enunciado da questão como apoio na elaboração do raciocínio. Isso pode ser observado pelas representações dos ângulos feitas pelo próprio participante ao deduzir novas informações a partir dos dados contidos na figura.

Dentre os participantes que aplicaram essa técnica, apenas A_1 apresentou uma pequena variação, o qual diferentemente dos demais, utiliza a propriedade que garante que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Conforme apresentou em seu registro:

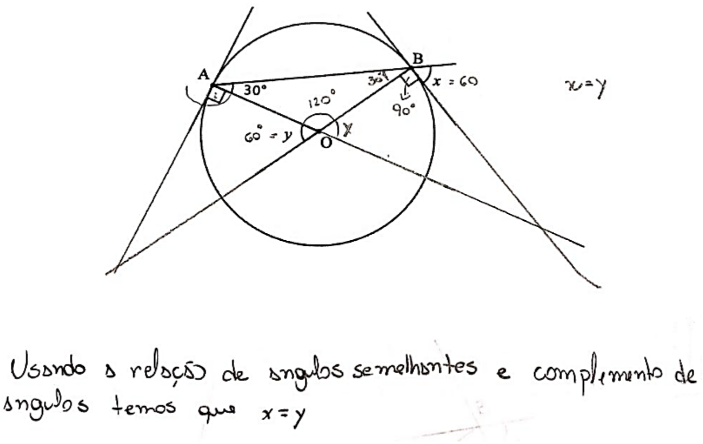
Figura 45 - Técnica τ_{51} aplicada por A_1



Fonte: coleta de dados

O participante A_{10}, por sua vez obtém a resposta correta, porém em sua fundamentação confunde alguns conceitos, conforme descrevemos após apresentarmos sua resolução:

Figura 46 - Resolução de A_{10} para Tarefa 5



Fonte: coleta de dados

A_{10} utiliza em sua justificativa uma nomenclatura equivocada, o que pode decorrer de conceitos errôneos, como por exemplo, “semelhantes” ao invés de “congruentes” e também “complemento” ao invés de “suplemento”. Além disso, esse participante não registra que o triângulo ABO é isósceles, o que justificaria sua afirmativa de que a medida do ângulo $A\widehat{B}O$ é 30º. Apesar disso, no entanto, seu desenho indica que resolveu a tarefa de uma maneira visual, não contendo registro da utilização de cálculos algébricos.

Conforme apresentado na seção 4.3.5, essa técnica é um método visual, de acordo com Presmeg (1986), pois aborda a imagem apresentada como uma parte essencial da resolução, sem a qual não é possível aplicar o método. Também as representações dos ângulos são amplamente exploradas para o registro do raciocínio empregado. Apesar disso, percebe-se que dos 5 participantes que empregaram essa técnica, 4 registraram sua associação dos argumentos visuais a provas algébricas para a medida dos ângulos obtidos, mesmo nos casos em que a dedução torna óbvio esse valor.

Identificamos a presença da habilidade IFI, conforme descrita por Bishop (1983), uma vez que os participantes demonstraram compreender a representação visual contida no enunciado da tarefa, tal como o vocabulário utilizado. O que fica evidente pelo fato que os alunos identificaram na imagem, a figura do triângulo, ângulos, pontos e os demais objetos matemáticos ali representados.

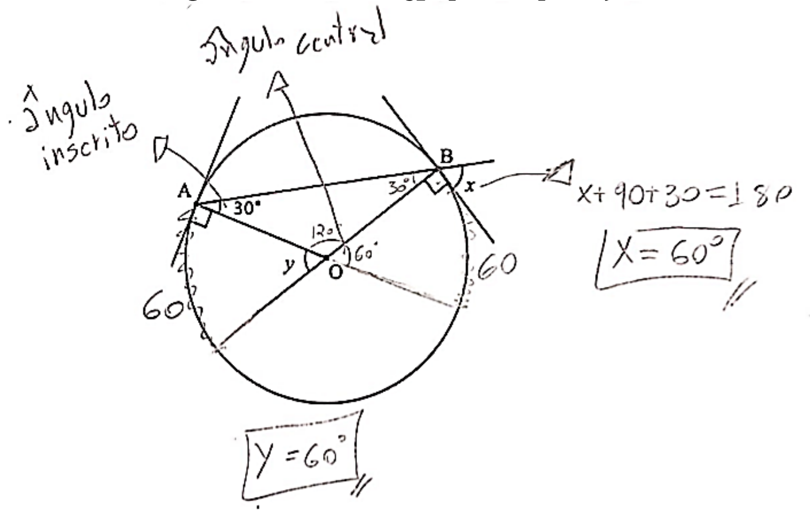
Foi possível também identificar evidências do VP no registro feito pelos participantes que adotaram essa técnica, pois estes demonstraram visualizar e traduzir relações abstratas e informações não naturais em termos visuais, como por exemplo expressar a congruência entre dois ângulos, ou aplicar uma propriedade como no caso de A_1.

- τ_{52}: aplicar o teorema do ângulo inscrito

Essa técnica consiste em analisar a figura buscando relacionar um ângulo inscrito na circunferência com o seu ângulo central correspondente, para que se possa aplicar o teorema da Geometria Euclidiana segundo o qual a medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central correspondente a ele.

Esse método de resolução foi utilizado apenas por dois participantes, são eles A_9 e A_{12}. Apresentamos a seguir a resolução de A_9:

Figura 47 - Técnica τ_{52} aplicada por A_9

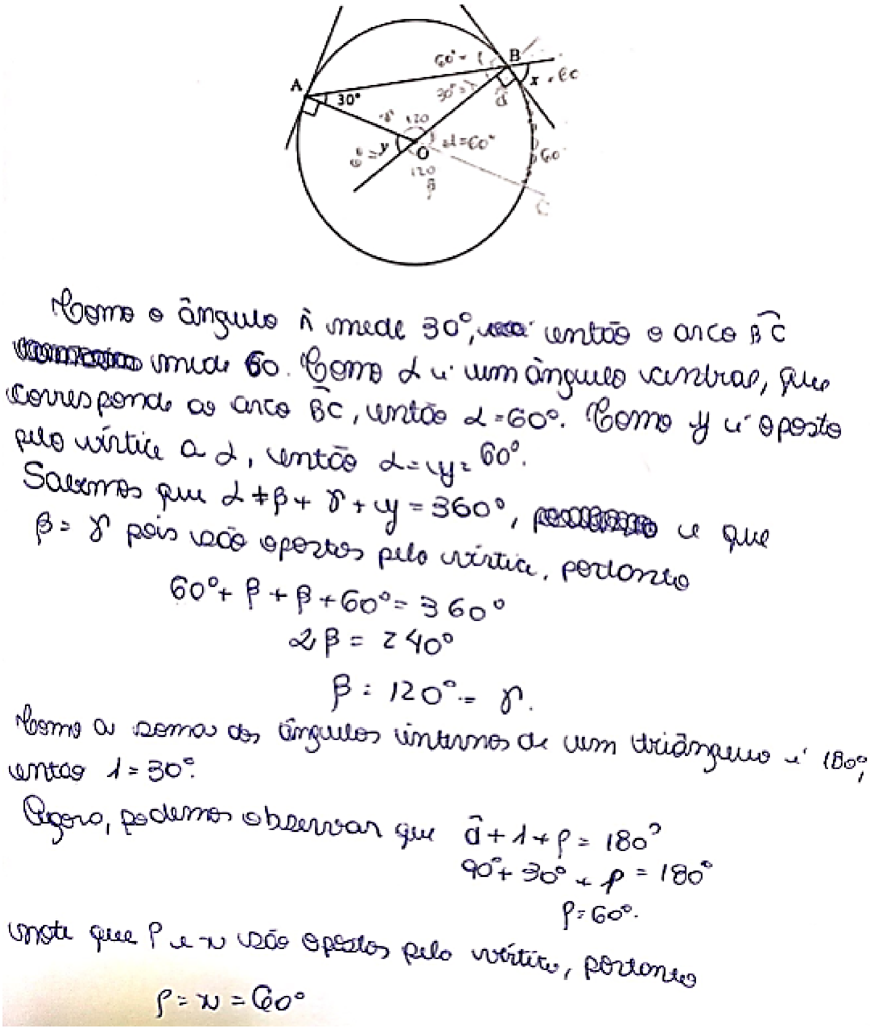


Fonte: coleta de dados

Prolongando o segmento AO, o participante identifica o ângulo $O\hat{A}B$ com o seu ângulo central correspondente, identificando sua medida 60º. A partir daí, como esse ângulo é oposto ao ângulo *y*, concluiu que *y* também mede 60º. Mas se *y* mede 60º, então pelo mesmo teorema, tem-se que o ângulo $A\hat{B}O$ mede 30º e, a partir daí, conclui-se que, como $x + 90^{o} + 30^{o} = 180^{o}$, então *x* = 60º.

A mesma técnica é empregada por A_{12}, porém nesse caso o teorema é aplicado somente para o ângulo $O\hat{A}B$, por meio do qual se obtêm a medida de *y*. Já a medida de *x* é obtida algebricamente, como apresentado na Figura 46:

Figura 48 - Técnica τ_{52} aplicada por A_{12}



Como o ângulo $\hat{A}$ mede 30°, então o arco $\widehat{BC}$ mede 60. Como α é um ângulo central, que corresponde ao arco $\widehat{BC}$, então $\alpha = 60°$. Como y é oposto pelo vértice a α, então $\alpha = y = 60°$.
Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma + y = 360°$, e que $\beta = \gamma$ pois são opostos pelo vértice, portanto

$$60° + \beta + \beta + 60° = 360°$$
$$2\beta = 240°$$
$$\beta = 120° = \gamma.$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então $\lambda = 30°$.
Agora, podemos observar que $\hat{a} + \lambda + \rho = 180°$

$$90° + 30° + \rho = 180°$$
$$\rho = 60°.$$

Note que ρ e x são opostos pelo vértice, portanto
$\rho = x = 60°$

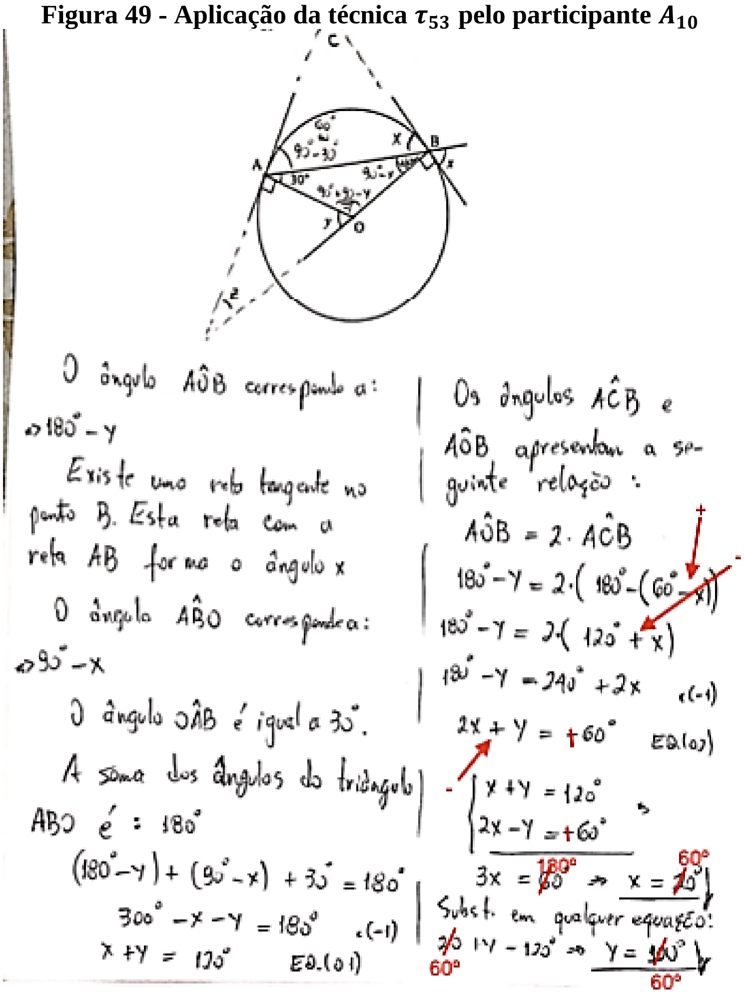
Fonte: coleta de dados

Consideramos essa técnica de resolução como um método visual, pois nela a figura é utilizada como parte fundamental, no qual a técnica depende do apoio visual oferecido pela figura. Identificamos que houve IFI, uma vez que os participantes que utilizaram essa técnica demonstraram ter compreendido o vocabulário e as representações visuais contidas na tarefa. Também identificamos a presença da habilidade VP na manipulação feita sobre a figura e nas relações abstratas e propriedades identificadas pelos participantes que foram utilizadas no desenvolvimento de sua análise, como por exemplo ao aplicarem o teorema do ângulo inscrito.

- τ_{53}: analisar os argumentos visuais em parceria com estratégias algébricas

Uma outra técnica de resolução utilizada na solução da Tarefa 5 foi aplicada pelo participante A_4:

Figura 49 - Aplicação da técnica τ_{53} pelo participante A_{10}



Fonte: coleta de dados

Na primeira coluna o participante registra alguns cálculos algébricos que ele utiliza com o objetivo de encontrar uma equação envolvendo *x* e *y*, o que é feito corretamente, de modo que ele chega à conclusão de que $x + y = 120$º.

Já na segunda coluna, A_4 busca encontrar uma segunda equação nas variáveis *x* e *y*, a fim de montar e resolver um sistema com duas equações e duas incógnitas.

Para isso, o participante utiliza de um resultado que não é válido para qualquer figura, mas que, coincidentemente, é verdadeiro para o caso desta tarefa, a saber, a medida de AÔB é o dobro da medida de AĈB. Como o participante não apresenta justificativa para este resultado, não é possível identificar se seu raciocínio foi desenvolvido corretamente. Além disso, A_4 comete um equívoco na utilização de um sinal negativo no termo expresso após a igualdade na (por ele chamada de) Equação 2, conforme mostra a Figura 47. Devido a esse erro, o participante obtém valores diferentes da resposta correta para *x* e *y*.

Classificamos essa técnica de resolução como um método parcialmente visual, pois utiliza incialmente a figura, porém desenvolve a solução por meio de cálculos algébricos. Nesse caso, tanto a análse visual feita no início da resolução quanto os cálculos são fundamentais para aplicação dessa técnica, o que justifica sua classificação como parcialmente visual.

No que se refere às habilidades de visualização, é possível perceber evidências da IFI, o que se revela pela correta interpretação do problema, identificação e utilização do vocabulário empregado na tarefa e das figuras abordadas. No registro do participante nota-se ainda a presença do VP, o que se evidencia pela manipulação que o participante faz na figura contida no enunciado da questão, ampliando o desenho e inserindo informações.

Encerram-se aqui as técnicas utilizadas pelos participantes na resolução da Tarefa 5. Por meio do Quadro 10, sintetizamos os dados analisados na Tarefa 5. No quadro são apresentadas as duas técnicas identificadas, qual sua classificação em relação ao tipo de método e quais os participantes que a utilizaram:

Quadro 10 - Classificação das técnicas aplicadas à Tarefa 5

Técnica	Classificação	Constructos	participantes
$\boldsymbol{\tau_{51}}$	visual	IFI e VP	A1, A2, A6, A10, A11
$\boldsymbol{\tau_{52}}$	visual	IFI e VP	A9, A12
$\boldsymbol{\tau_{53}}$	parcialmente visual	IFI e VP	A_4

Fonte: os autores

Analisando o quadro podemos notar que, em relação aos participantes que apresentaram seus registros das técnicas utilizadas chegando a resultados corretos, todos obtiveram solução para a tarefa proposta por meio de um método visual. Além disso, ambas as técnicas emergentes mobilizaram as habilidades de visualização IFI e VP.

6.4 Modelo Praxeológico Dominante

Após a análise das técnicas elaboradas pelos participantes em suas resoluções propostas para as tarefas de 1 a 5, apresentamos a seguir o Modelo Praxeológico Dominante (MPD) na instituição analisada, à turma de 18 alunos do segundo ano de licenciatura em Matemática da Universidade pesquisada. Esse modelo foi construído a partir das técnicas que mais ocorreram em cada uma das tarefas aplicadas aos participantes da pesquisa.

Conforme o que foi descrito no Capítulo 4, por meio da análise do MPD é possível perceber alguns aspectos relacionados às relações inseridas no contexto da instituição em que foi realizada esta pesquisa, como por exemplo a relação pessoal dos participantes com os objetos matemáticos abordados nas tarefas ou a relação entre a didática da universidade pesquisada e o saber nela ensinado.

Assim como apresentado na seção 6.2, no Modelo Praxeológico de Referência (MPR), apresentaremos a seguir no Modelo Praxeológico Dominante (MPD), para as cinco tarefas aplicadas nesta pesquisa, uma retomada de seu enunciado (t_i) seguida de seu tipo (T_i), técnica (τ_{ij}), tecnologia (θ_{ij}) e teoria Θ_{ij}, agora abordando a técnica que mais ocorreu na resolução dos participantes para cada uma das tarefas. Na notação utilizada, i refere-se ao número da tarefa, conforme elencado na seção 6.1, e j refere-se ao número da técnica, conforme foi apresentado em sua identificação, na seção 6.3 de análise das técnicas. A identificação de cada técnica foi mantida, conforme o que foi estabelecido na seção 6.3.

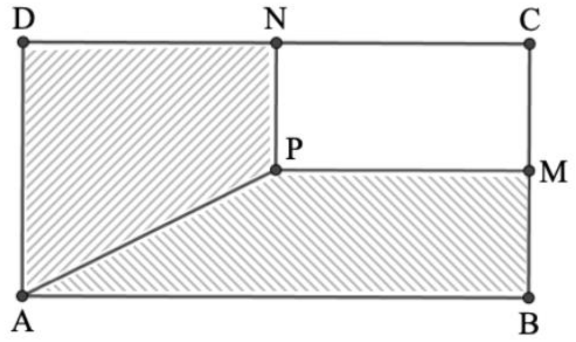
Em relação às tarefas 3 e 4, conforme visto nas análises, em ambas surgiram três técnicas diferentes de solução, sendo que cada uma delas foi aplicada por apenas um participante. Deste modo, para essas duas tarefas, não houve uma técnica predominante. Por este motivo, as tarefas 3 e 4 não foram incluídas na elaboração deste MPD. São apresentados, portanto, os modelos MPD1, MPD2, e MPD5, que são os modelos praxeológico dominante das tarefas 1, 2 e 5, respectivamente.

Ao término da apresentação do MPD de cada uma das tarefas, 1, 2 e 5, é feito um resgate da técnica que foi sugerida no MPR, a fim de identificar semelhanças e diferenças entre a técnica de solução elaborada pelos pesquisadores e a técnica dominante entre os participantes da pesquisa.

6.4.1 MPD1

t_1: Na figura a seguir, sejam ABCD um retângulo, M o ponto médio do lado BC e N o ponto médio do lado CD. Sabendo-se que PMCN é um retângulo, que o lado AB mede 12 cm e o lado BC mede 6 cm, compare as áreas dos quadriláteros APMB com o quadrilátero ADNP.

Figura 50 - Enunciado da Tarefa 1



Fonte: os autores

T_1: Comparar a área de duas figuras geométricas.

τ_{12}: Particionar a figura e calcular a área de cada uma das partes.

Essa técnica consiste em particionar o retângulo ABCD em figuras menores para que em seguida seja calculada a área de cada uma das partes. Assim, somando a área das partes que formam APMB e ADNP, pode-se fazer a comparação que é solicitada. A partição é feita para que fórmulas mais simples, como a do cálculo da área do retângulo e do triângulo, possam ser aplicadas.

θ_{12}: A tecnologia que justifica esta técnica repousa no resultado que a soma das áreas das partes é igual à soma da área total de uma figura geométrica. O resultado obtido é fundamentado pelos cálculos das áreas obtidas.

Θ_{12}: A teoria que justifica a tecnologia neste caso é a Geometria Plana.

A técnica sugerida no MPR consiste em completar o traço da diagonal AC. Assim, como a diagonal de qualquer retângulo o divide em dois triângulos congruentes, temos que as áreas de PCN e PMC são iguais e, portanto, as áreas de APMB e ADNP também são iguais. Sua tecnologia repousa estritamente em argumentos geométricos de ordem visual.

Já a técnica τ_{12}, dominante entre os participantes, foi classificada como um método parcialmente visual, pois utiliza a imagem em parceria com um método de raciocínio algébrico. Nas resoluções dos participantes que aplicaram esta técnica percebe-se que alguns, apesar de visualizarem as propriedades contidas na figura, preferem fundamentar sua prova em argumentos numéricos. Outros, no entanto, deixam evidente que a congruência entre as partes em que decompõem a figura não é percebida, pois preferem calcular a área de cada uma delas.

6.4.2 MPD2

t_2: Os donos de um terreno quadrado querem que sua área seja duplicada, mas de tal maneira que sua forma continue sendo um quadrado. Como podem proceder?

T_2: Duplicar a área de um quadrado.

τ_{21}: Analisar algebricamente.

Esta técnica consiste em, sabendo que a área de um quadrado é obtida por meio do quadrado da medida de seu lado, toma-se um quadrado qualquer de lado *x*. A partir daí, supõe-se que o quadrado a ser obtido deve ter um lado de tamanho αx, em que α é o valor pelo qual deve-se multiplicar a medida *x* dos lados, para que se obtenha o quadrado de área duplicada.

Assim, como área do quadrado inicial é x^2, observa-se que a área duplicada será, portanto, $2x^2$. Assim, tem-se que $2x^2 = (\alpha x)^2$. Isolando α, obtêm-se que $\alpha = \sqrt{2}$, valor pelo qual deve-se multiplicar a medida dos lados para que a duplicação desejada seja feita. A característica principal desta técnica é o fato de que não é necessário utilizar imagens para sua aplicação.

θ_{21}: a tecnologia que fundamenta esta técnica repousa em um raciocínio puramente aritmético "que número ao quadrado resulta em 2?", também é necessário que se tenha compreensão da definição de quadrado, do conceito de área e da fórmula para área do quadrado.

Θ_{21}: A teoria que fundamenta esta tecnologia é a Geometria Plana.

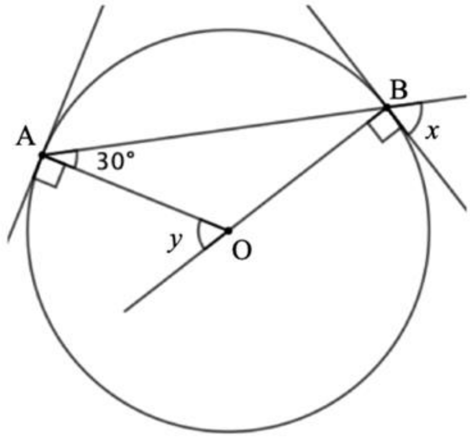
A técnica apresentada no MPR proposto para esta tarefa consiste em tomar um quadrado qualquer e traçar suas diagonais. Em seguida, traçam-se retas paralelas a essas diagonais passando pelos vértices do quadrado. Desta forma, obtêm-se um novo quadrado com área igual ao dobro da área do primeiro, o que pode ser demonstrado por alguns resultados da Geometria Euclidiana, como foi apresentado na seção 6.2.

A técnica τ_{21}, por sua vez, não exige que se tenha uma figura para que ela seja aplicada, sendo apenas necessário que se conheça a fórmula para o cálculo da área do quadrado. É possível, no entanto, que haja visualização mesmo não tendo sido apresentada uma figura na resolução de alguns participantes, já que o fato de não se tratar de um método visual de solução não exclui a possibilidade de que o participante para aplicar a técnica tenha visualizado uma figura, uma vez que a visualização é um processo mental.

6.4.3 MPD5

t_5: Obtenha os valores dos ângulos *x* e *y*, sabendo que os pontos A e B pertencem à circunferência de centro O.

Figura 51 - Imagem da Tarefa 5



Fonte: os autores

T_5: Calcular o comprimento de ângulos.
τ_{51}: analisar a complementaridade e suplementaridade dos ângulos.

A técnica dominante na resolução desta tarefa coincide com a técnica apresentada no MPR e consiste em identificar que os segmentos OA e OB são raios da circunferência, e por isso são congruentes. Desse modo, temos que o triângulo AOB é isósceles, o que implica que o ângulo $\mathrm{O\widehat{B}A}$ é congruente à $\mathrm{O\widehat{A}B}$, e portanto mede 30º. Observa-se que o ângulo x é o suplementar de $\mathrm{O\widehat{B}A}$ menos 90º, e por isso mede 60º. Podemos observar ainda que como a soma dos ângulos internos de um triângulo, na Geometria Euclidiana mede 180º e $\mathrm{O\widehat{B}A} \equiv \mathrm{O\widehat{A}B}$ medem 30º, a medida de $\mathrm{A\widehat{O}B}$ é igual a 120º. Assim, como o ângulo y é suplementar à $\mathrm{A\widehat{O}B}$, temos que y mede 60º.

θ_5: A tecnologia que justifica a técnica apresentada repousa nas propriedades do triângulo isósceles e da congruência entre ângulos.
Θ_5: A teoria em que se fundamenta a técnica é a Geometria Plana.

Apesar desta técnica de resolução, dominante entre os participantes da pesquisa, coincidir com a técnica apresentada no MPR, evidencia-se nas análises que os registros apresentados pelos participantes revelam que ao analisarem os triângulos contidos na figura e registrarem a congruência de alguns ângulos, nenhum deles justifica tais inferências. Por isso, existe possibilidade de que essas afirmações tenham sido feitas somente pelo que a representação aparenta, sem que os participantes tenham visualizado as abordadas pela figura.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo analisar as técnicas mobilizadas por estudantes do curso de Matemática, mediante tarefas visuais, a partir da aplicação de cinco tarefas matemáticas.

Para cada uma dessas tarefas foi elaborado um Modelo Praxeológico de Referência, o qual foi analisado cuidadosamente enfatizando a descrição de uma possível técnica de solução e de sua tecnologia, para refletir sobre as resoluções que poderiam ser apresentadas pelos participantes e os conceitos que poderiam ser utilizados por eles. O Modelo Praxeológico Dominante, por sua vez, nos permitiu refletir sobre as escolhas e preferências dos participantes, confrontando-as com as técnicas visuais apresentadas no MPR.

A metodologia qualitativa dessa pesquisa, num paradigma interpretativo, aliada ao referencial teórico, direcionou a aplicação e escolha das tarefas, conforme foi mencionado. A condução da aplicação e a elaboração da folha de registros foi feita a fim de que os dados para a análise fossem consistentes.

Na análise da Tarefa 1 foi possível identificar na resolução dos participantes a utilização de três técnicas distintas. A primeira delas foi classificada como uma técnica não-visual, a segunda como parcialmente visual e a terceira como visual. Apesar de os três níveis de visualidade matemática serem contemplados nessas técnicas, constatou-se que, dos 12 participantes que apresentaram uma resolução em que foi possível identificar uma técnica, a maioria (6) dos participantes preferiu optar pela técnica de resolução classificada como *parcialmente visual*, em detrimento de 5 que optaram por utilizar uma técnica não-visual e apenas 1 que utilizou uma técnica visual. Deste modo, essa foi a técnica incluída no MPD.

Como discutido, os registros dos participantes tornam evidente que até mesmo quando visualizam as relações e propriedades presentes nas imagens, esses participantes preferem fundamentar seus argumentos em provas numéricas. Nota-se ainda que o único participante que optou por utilizar uma técnica visual para resolver a Tarefa 1 apresenta dificuldade na utilização das notações matemáticas e outros aspectos da linguagem matemática formal, o que pode estar associado ao fato de os participantes ainda estarem cursando o segundo ano da licenciatura em Matemática, ou à própria dificuldade que indivíduos visualizadores expressam ao formalizarem suas percepções.

Contemplando ainda a Tarefa 1, em relação às habilidades de visualização, todos os participantes mostraram em suas resoluções a presença da Interpretação da Informação

Figurativa, porém somente em 7 participantes foi identificada a mobilização do Processamento visual.

Na Tarefa 2 também houve a identificação de três técnicas distintas, mas neste caso foi predominante a quantidade de alunos que adotaram como método de solução a técnica classificada como não-visual, a qual foi incluída no MPD. A maioria (4 de 7) dos participantes não utilizou imagens para resolver a tarefa, o que não anula a possibilidade de que tenham utilizado a visualização em sua resolução, já que a visualização abrange habilidades mentais e não requer a presença de imagens físicas. Esse fato fica evidente quando se analisam os aspectos referentes aos constructos IFI e VP, uma vez que foi constatado que todos os participantes mostraram em suas resoluções a presença da Interpretação da Informação Figurativa, porém somente 1 participante utilizou o Processamento Visual para solucionar a tarefa proposta.

No caso da Tarefa 3, em que apenas três alunos apresentaram resolução, constatou-se que cada um deles utilizou um tipo de técnica diferente. Não foi possível neste caso apresentar um MPD, já que não houve técnica predominante dentre os participantes. Esta é uma tarefa que requer a visualização para sua solução, o que justifica o fato de que, dos três participantes que resolveram a tarefa, nenhum utilizou técnica classificada como não-visual. Além disso, fica evidente a importância da visualização para o desenvolvimento das técnicas que surgiram, já que em todas elas foram utilizadas as habilidades de visualização IFI e VP.

Também na Tarefa 4 não houve predominância de um tipo de técnica, já que os três participantes cujo registro foi possível analisar apresentaram 3 técnicas distintas. Todos os participantes que obtiveram sucesso e que chegaram à solução da tarefa proposta utilizaram técnicas que foram classificadas como visuais ou parcialmente visuais. Não houve nenhum participante que solucionou a tarefa apenas utilizando métodos algébricos ou aritméticos, sem utilizar figuras, mesmo sendo possível, neste caso, resolver a tarefa sem a necessidade de uma representação figural. Percebe-se, no caso desta tarefa, a falta de conhecimento sobre o conceito de mediana.

Assim como na Tarefa 3, todas as técnicas utilizadas na resolução da Tarefa 4, mobilizaram as habilidades de visualização IFI e VP. Além disso, das três técnicas utilizadas para sua resolução, 2 foram classificadas como não-visuais, e 1 como visual.

A Tarefa 5, assim como a Tarefa 3, é uma tarefa em que a visualização é necessária para sua solução. Nesta tarefa, 8 alunos apresentaram suas resoluções. No entanto, a análise feita revela que apesar de todos os participantes que apresentaram suas soluções terem optado por utilizar argumento visuais, eles consideram necessário também fornecer provas algébricas para justificar seus argumentos.

O número reduzido de participantes que apresentaram resolução para as tarefas 3, 4 e 5 – três, três e oito participantes, respectivamente – pode ser um indicativo de uma dificuldade da maioria dos participantes em traçar estratégias e apresentar técnicas para resolver tarefas que abordem aspectos visuais. Apesar disso, não foram exploradas neste trabalho, por não fazer parte dos objetivos, as razões dessa dificuldade, apenas comentamos brevemente quais os erros mais comuns nos registros.

Todas as técnicas utilizadas na resolução de cada uma dessas três tarefas foram classificadas como métodos visuais, assim não houve o registro de nenhum participante que resolveu a tarefa sem a mobilização das habilidades de visualização, o que pode indicar certa dificuldade em visualizar por parte daqueles que não apresentaram resolução. Daí, decorre a importância de se proporcionar aos alunos um leque de estratégias variadas para que tenham diversos caminhos e habilidades a que recorrer no momento da resolução de uma tarefa matemática.

Desse modo, com base nos dados analisados, podemos destacar que mesmo que a maioria (20 de 31) das resoluções apresentadas pelos participantes tenham apresentado evidências de pelo menos uma das habilidades de visualização – VP e IFI – e optado por utilizar técnicas visuais ou parcialmente visuais em suas resoluções, eles ainda não consideram os argumentos visuais suficientes para demonstrá-las, associando-as a cálculos ou demonstrações algébricas, o que pode estar relacionado a muitos fatores, dentre os quais destacamos o rigor e formalismo exigidos nas demonstrações matemáticas. Um estudante pode não perceber que mesmo uma demonstração utilizando apenas aspectos visuais tem todo o rigor necessário de uma demonstração matemática, como pode ser observado, por exemplo, na resolução feita por A_2 na Tarefa 1, que poderia ter sido rigorosa se o participante conhecesse melhor os formalismos matemáticos.

Ressaltamos como um apontamento para pesquisas futuras a investigação dos fatores que influenciam a escolha dos alunos e os faz optar por determinados tipos de técnicas de resolução de tarefas em detrimento de outros. Em termos da TAD, pode-se ainda investigar a nível institucional as relações inseridas no contexto em que se situam os participantes da investigação e sua influência no que se refere à abordagem da visualização no currículo no curso de matemática e ao desenvolvimento nos estudantes.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. A tecnologia no currículo de Matemática: dez anos de investigação em Portugal. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 45, p.27-65, Novembro/Dezembro, 1997.

BISHOP, A. J. Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. **Research in Education**, 9, p. 43-49, 1973.

BISHOP, A. J. Space and geometry. *In:* R. Lesh & M. Landau (Org.), Acquistion of mathematical concepts and processes. New York: Academic Press, 1983. Pp. 175-203.

BISHOP, A. J. **Mathematical enculturation**: A cultural perspective on mathematics education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988a.

BISHOP, A. J., Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, 11(1), 7–16, 1989.

BISHOP, A. J. Mathematics education in its cultural context. *in*: T. P. Carpenter, J. A. Dossey; J. L. Koehler (Eds.), **Classics in mathematics education research**. Reston, Virginia: National Council of Teachers on Mathematics. 2004. pp. 201–207.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BURATTO, I. C. F. **Historicidade e visualidade:** proposta para uma nova narrativa na educação matemática. 2012. 240 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L. Explorar tarefas matemáticas. *In*: A. P. Canavarro *et al.* (Eds.), **Investigação em Educação Matemática** - Práticas de ensino da Matemática, 2012. Pp. 99-104.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Online, v. 9, n. 1, p.29-44, nov. 2019.

CHEVALLARD, Y. Le concept de rapport au savoir, Rapport personnel, rapport institutionnel, **Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique**, 108 Grenoble, 1989.

CHEVALLARD, Y. **La transposição didactique**. Du savoir savant au savoir enseigné. Paris: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. (Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 12(1), 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y., L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, 19 (2), p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Duque de Caxias, v. 3, n. 2, p.1-14, ago. 2013.

CHRISTIANSEN, B., WALTHER, G. Task and activity. *In*: B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), **Perspectives on mathematics education** (pp. 243-307, 1986.

COSTA, C. Visualização, veículo para a educação em geometria. *In:* **Atas do IX Encontro de Investigação em Educação Matemática**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Fundão, 2000.

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa**: Escolhendo entre cinco abordagens. Porto Alegre: Penso, 2014.

CYRINO, M. C. C. T.; JESUS, C. C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 20, n. 3, p. 751-764, 2014.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: The discipline and practice of qualitative research *In: **The Sage handbook of qualitative research** 4 ed.* Thousand Oaks, CA: Sage, 2011. pp. 1-19.

DREYFUS, T. On the status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics Education. **Plenary address to PME XV**, Proceedings Fifteen PME Conference, vol. I, p. 33-48, 1991.

ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2014, Sesimbra. **Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática.** Sesimbra: Escola Superior de Educação Instituto Politécnico de Setúbal, 2014. 385 p.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. *In*: WITTROCK, M. C. **Handbook of research on teaching** (Ed.). New York: Macmillan, 3.ed. p.119-161, 1986.

FERNÁNDEZ, T. **Investigación en Educación Matemática.** Bilbao: SEIEM, 2013. 23 p.

FRANCO, V. S.; LOVIS, K. A. Explorando a Construção de Macros no Geogebra. *In*: Encontro Nacional De Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais**. Salvador: Universidade Católica do Salvador, 2010. p. 1 - 5.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. **Geometria Plana e Espacial**: um estudo axiomático. Maringá: EDUEM, 2ª ed. 2010.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. O.; FRANCO, V. S. Geometria **Euclidiana Plana**: Um estudo com o software Geogebra. Maringá: EDUEM, 2010.

JESUS, C. C. de; CYRINO, M. C. de C. T.; OLIVEIRA, H. Formação de professores que ensinam matemática: escolha, proposição e implementação de tarefas. *In*: Encontro De Investigação Em Educação Matemática, 2., 2014, Sesimbra. **Atas.** Sesimbra: Escola Superior de Educação Instituto Politécnico de Setúbal, 2014. p. 295 - 322.

LEITE, M. S. **Contribuições de Basil Bernstain e Yves Chevallard para a discussão do conhecimento escolar.** 2004. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em educação da Puc-rio, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2004.

MENEZES, M. B.; SANTOS, M. C. dos. O saber escolar na perspectiva da teoria antropológica do didático. *In*: simpósio internacional de pesquisa em educação matemática, 2, 2008, Recife. **Anais.** Recife: Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências UFRE, 2008.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, 2005, pp. 11-34.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. *In*: PONTE, João Pedro da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-27.

PRESMEG, N. C. Visualization in high school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, 6(3), 42-46, 1986b.

PRESMEG, N. C. Research on visualization in learning and teaching mathematics. *In*: A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), **Handbook of research on the psychology of mathematics education**: Past, present and future. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2006, pp. 205-235.

SANTOS, E. A. A.; MORAIS, C. M. M.; PAIVA, J. C. M. Formação de Professores para a Integração das TIC no Ensino de Matemática: Um Estudo na Região Autónoma da Madeira. **Center for Computational Physics of University of Coimbra.** Simpósio Internacional de Informática Educativa. 6. Coimbra: Center for Computational Physics, 2004. p. 337-345.

STEIN, M.; SMITH, M. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. **Educação e Matemática**, 105, 22-28, 2009.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos Isabel Vale. **Interacções**, Santarém, v. 8, n. 20, p.181-207, abr. 2012.

VALE I.; BARBOSA A.; PIMENTEL T., Tarefas para promover a criatividades em matemática, **EIEM**, Sesimbra, Portugal, 2014.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Resolver Problemas - Criando Soluções, Vendo. **Rematec**, Natal, v. 21, n. 11, p.8-23, abr. 2016.

VALE, I. Resolução de Problema um Tema em Contínua Discussão: vantagens das Resoluções Visuais. *In*: ONUCHIC, Profa. Dra. Lourdes de La Rosa. **Perspectivas em Resolução de Problemas.** Rio Claro: Unesp, 2017. p. 131-162.

VALE I.; BARBOSA A. Mathematical problems: the advantages of visual strategies, **Journal of the European Teacher Education Network - Jeten**, Viana do Castelo, Portugal vol. 13, p. 23–33, 2018.

YERUSHALMY, M.; STHERNBERG, G.; GILEAD, S. (). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. *In:* O. Zaslavsky (Ed.), **Proceedings of the 23rd PME International Conference**, 1, 1999.

YIN, R. K. **Case study research, design and methods**. Thousand Oaks. California: Sage Publications, 2009.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. What is Mathematical Visualization*? In*: W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**, Washington: MAA, 1991, pp 1-7.

ANEXOS

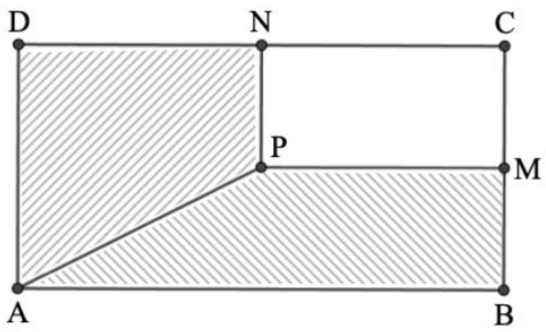
ANEXO A: FOLHA DE TAREFAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

Nome: ____

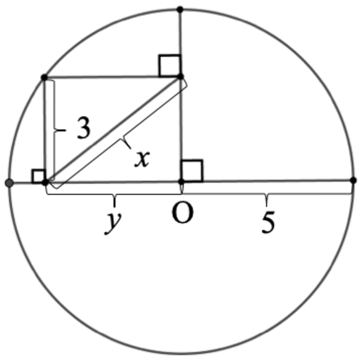
Resolva as tarefas a seguir justificando todas as passagens e fornecendo a maior quantidade possível de detalhes em sua solução. Você pode utilizar para a resolução as técnicas/resultados que você preferir e/ou achar mais viável.

1) Na figura abaixo, sejam ABCD um retângulo, M o ponto médio do lado BC e N o ponto médio do lado CD. Sabendo que PMCN é um retângulo, que o lado AB mede 12 cm e o lado BC mede 6 cm, compare as áreas dos quadriláteros APMB com o quadrilátero ADNP.



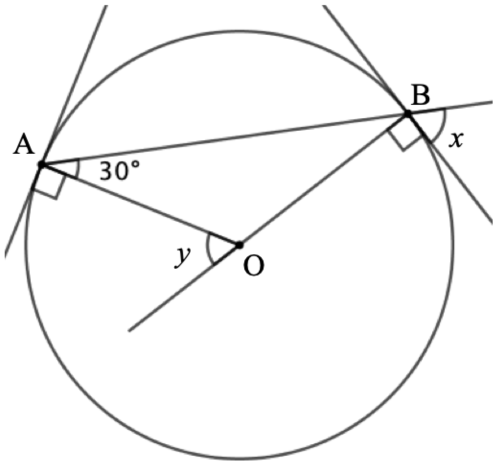
2) Os donos de um terreno quadrado querem que sua área seja duplicada, mas de tal maneira que sua forma continue sendo um quadrado. Como podem proceder?

3) Utilizando o círculo de centro ‘O’ a seguir, obtenha os valores de *x* e *y*.



4) Dado um triângulo qualquer, temos que uma mediana separa o triângulo em duas regiões triangulares. Qual é a relação entre suas áreas?

5) Obtenha os valores dos ângulos x e y, sabendo que os pontos A e B pertencem a circunferência de centro O.



ANEXO B: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Gostaríamos de convidá-lo a participar da pesquisa de mestrado que está sendo desenvolvida sob a orientação do Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco e coorientação da Prof. Dr.ª Mariana Moran Barroso, do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá.

O objetivo da pesquisa é elaborar e analisar o modelo praxeológico presente nas resoluções de tarefas feitas por licenciando em Matemática. Para o desenvolvimento desta pesquisa é muito importante sua colaboração, pois pretendemos analisar os dados coletados por meio de do questionário que será entregue a você.

Informamos que os dados serão lidos apenas pelos pesquisadores e o sigilo do pesquisado será garantido. Também não haverá nenhum tipo de pagamento acerca dos dados coletados. No geral, a investigação não acarretará danos inaceitáveis ou duradouros, visto que se desenvolverá por meio de protocolos seguros. Ressaltamos que as informações obtidas serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade dos participantes. Após as transcrições das entrevistas as gravações serão excluídas. Os benefícios esperados por esta pesquisa estão relacionados a uma reflexão acerca das habilidades desenvolvidas ao longo do curso de matemática. Caso você tenha mais dúvidas ou necessite maiores esclarecimentos, estaremos à disposição nos endereços a seguir. Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida e assinada por cada participante.

Além da assinatura nos campos específicos pelo pesquisador e pesquisado, solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito por ambos (pelo pesquisador e por você, como sujeito ou responsável pelo sujeito de pesquisa) de tal forma a garantir o acesso ao documento completo.

Eu, ____ (nome por extenso do sujeito de pesquisa) declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em participar **VOLUNTARIAMENTE** da pesquisa coordenada pelos professores Dr. Valdeni Soliani Franco e Dr.ª Mariana Moran Barroso.

______________________________________ Data:_______________________

Assinatura ou impressão datiloscópica

Eu, Natália Alcazar de Matos, declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra nominado.

______________________________________ Data:_______________________

Assinatura do pesquisador

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com os pesquisadores, conforme os endereços abaixo:

Nome: Valdeni Soliani Franco
Endereço: Av. Colombo, 3790, Bloco F67, sala 007, Jardim Universitário, Maringá - PR.CEP: 87020 - 900
Telefone/e-mail: (44) 3011-4933 – vsfranco@uem.br
Nome: Natália Alcazar de Matos
Endereço: Av. Tamandaré, 710, Apto 404, Zona 01, Maringá - PR. CEP: 87013-210
Telefone/e-mail: (44) 99866-5412 – nalcazarm@gmail.com
Nome: Mariana Moran Barroso
Endereço: Av. Colombo, 3790, Bloco F67, sala 224, Jardim Universitário, Maringá - PR.CEP: 87020 - 900
Telefone/e-mail: (44) 3011-4933 – marianamoranbar@gmail.com

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (COPEP) envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Maringá, no endereço a seguir:

COPEP/UEM Universidade Estadual de Maringá. Av. Colombo, 5790. Campus Sede da UEM. Bloco da Biblioteca Central (BCE) da UEM. CEP: 87020 - 900. Maringá - PR. Tel.: (44) 3261-4444 E-mail: copep@uem.br