

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

GABRIEL FILETTI MARTINS

**INVESTIGAÇÃO DA SINTONIA DE CONTROLADORES VIA IDENTIFICAÇÃO  
UTILIZANDO MODELOS DIFERENCIAIS FRACIONÁRIOS**

Maringá – PR – Brasil  
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**INVESTIGAÇÃO DA SINTONIA DE CONTROLADORES VIA IDENTIFICAÇÃO  
UTILIZANDO MODELOS DIFERENCIAIS FRACIONÁRIOS**

Gabriel Filetti Martins  
Orientador: Prof. Dr. Cid Marcos Gonçalves Andrade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Maringá – PR – Brasil  
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR, Brasil)

M386i Martins, Gabriel Filetti  
Investigação da sintonia de controladores via identificação utilizando modelos diferenciais fracionários / Gabriel Filetti Martins. -- Maringá, PR, 2019.  
84 f.: il. color.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Gonçalves Andrade.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Química, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, 2019.

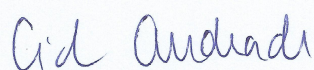
1. Cálculo fracionário. 2. Identificação de sistemas (Matemática). I. Andrade, Marcos Gonçalves, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Química. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química. III. Título.

CDD 23.ed. 660

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

Esta é a versão final da Dissertação de Mestrado apresentada por Gabriel Filetti Martinss perante a Comissão Julgadora do Curso de Mestrado em Engenharia Química em 28 de março de 2019.

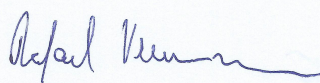
COMISSÃO JULGADORA



Prof. Dr. Cid Marcos Gonçalves Andrade  
Orientador / Presidente



Prof. Dr. Abel Fidalgo Alves  
Membro



Prof. Dr. Rafael Krummenauer  
Membro

Dedico este trabalho a minha mãe, Eliana, a meu pai, Luiz Carlos e a minha namorada, Juliete, pelo incentivo e por sempre acreditarem em mim.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas oportunidades dadas e pela força para superar os mais diversos obstáculos.

A minha família, pelo apoio incondicional e por terem fornecido todo o suporte necessário para a minha formação.

A minha namorada, Juliete, pelo carinho, apoio e por sempre acreditar na minha capacidade.

Ao meu orientador, professor Dr. Cid Marcos Gonçalves Andrade, pela oportunidade, incentivo e empenho em ajudar, que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos mestrandos Roberto Navarro e Victor Hugo Barlatti pelo auxílio na realização dos testes experimentais e aquisição dos dados.

Aos demais amigos e familiares que me acompanharam durante este processo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“Speech has allowed the communication of ideas, enabling human beings to work together to build the impossible.”*

Stephen Hawking

## RESUMO

A identificação dos parâmetros que compõem a função de transferência de um sistema é comumente a primeira etapa no projeto de controladores. Os conceitos de identificação de sistemas centram-se, basicamente, na adequada estimativa dos parâmetros que compõem os sistemas reais. Visando a atuação dos controladores de forma mais eficiente são propostas novas técnicas de identificação de sistemas a partir da utilização de modelos diferenciais fracionários. O cálculo fracionário representa uma alternativa mais eficaz no processo de descrição de sistemas reais. Neste trabalho foi utilizada a técnica de identificação a partir da resposta do sistema a entradas conhecidas. Através de dados experimentais foi realizado o processo de estimação de parâmetros, considerando-o um problema de otimização não linear determinístico, estratégia que se mostrou eficiente na obtenção de modelos matemáticos mais fiéis ao processo em análise. Foram então sintonizados controladores P, PI e PID com os modelos matemáticos obtidos no processo de estimação de parâmetros, analisando a influência que uma melhor descrição do processo pode proporcionar na sintonia de controladores. Os modelos fracionários obtidos na estimação de parâmetros obtiveram os menores erros absolutos em relação aos dados experimentais, representando assim o processo em análise de forma mais precisa. Os controladores da família PID que fizeram uso desses modelos fracionários obtiveram os melhores índices de desempenho (ISE, IAE e MV), alcançando, desta forma, os resultados pretendidos.

**Palavras chave:** Cálculo Fracionário. Estimação de Parâmetros. Identificação de Sistemas. Sintonia de Controladores.



## ABSTRACT

The parameters identification of the transfer function of a system is often the first step in designing controllers. The concepts of systems identification basically focus on the adequate estimation of the parameters of real systems. Aiming at the performance of controllers in a more efficient way, new techniques of system identification are proposed by using fractional differential models. The fractional calculus represents a more effective alternative in the process of describing real systems. In this work was used an identification technique from systems outputs to known inputs. By means of experimental data, the parameter estimation process was performed considering a deterministic nonlinear optimization problem, a strategy that proved efficient in obtaining mathematical models more faithful to the process under analysis. In a second moment P, PI and PID controllers were tuned with the mathematical models obtained in the process of parameter estimation, analyzing the influence that a better description of the process can provide in the tuning of controllers. The fractional models obtained in the parameter estimation obtained the smallest absolute errors in relation to the experimental data, thus representing the process under analysis more precisely. The PID family controllers that made use of these fractional models obtained the best performance indexes (ISE, IAE and MV), obtaining the desired results.

**Key words:** Fractional Calculus. Parameter Estimation. Systems Identification. Tuning of Controllers.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| FIGURA 2.1 – DIAGRAMA DA ESTRUTURA <i>FEEDBACK</i> E <i>FEEDFORWARD</i> .....                                 | 20 |
| FIGURA 2.2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO GAMA .....   | 22 |
| FIGURA 2.3 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DERIVADA FRACIONÁRIA.....   | 24 |
| FIGURA 4.1 – DIAGRAMA DO MÓDULO DE CONTROLE EXPERIMENTAL.....   | 42 |
| FIGURA 4.2 – DADOS EXPERIMENTAIS.....   | 42 |
| FIGURA 4.3 – GRÁFICO DE COMPARAÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS COM OS<br>MODELOS OBTIDOS NO EXPERIMENTO I .....   | 45 |
| FIGURA 4.4 – GRÁFICO DE COMPARAÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS COM OS<br>MODELOS OBTIDOS NO EXPERIMENTO II.....   | 47 |
| FIGURA 4.5 – GRÁFICO DE COMPARAÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS COM OS<br>MODELOS OBTIDOS NO EXPERIMENTO III ..... | 49 |
| FIGURA 4.6 – GRÁFICO DE COMPARAÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS COM OS<br>MODELOS OBTIDOS NO EXPERIMENTO IV .....  | 51 |
| FIGURA 4.7 – COMPARAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE FUNÇÕES DE<br>TRANSFERÊNCIA FRACIONÁRIAS .....                    | 52 |
| FIGURA 4.8 – CONTROLADOR P EXPERIMENTO I .....  | 54 |
| FIGURA 4.9 – CONTROLADOR PI EXPERIMENTO I.....  | 55 |
| FIGURA 4.10 – CONTROLADOR PID EXPERIMENTO I.....  | 56 |
| FIGURA 4.11 – CONTROLADOR P EXPERIMENTO II.....   | 58 |
| FIGURA 4.12 – CONTROLADOR PI EXPERIMENTO II.....  | 59 |
| FIGURA 4.13 – CONTROLADOR PID EXPERIMENTO II.....   | 60 |
| FIGURA 4.14 – CONTROLADOR P EXPERIMENTO III.....  | 61 |
| FIGURA 4.15 – CONTROLADOR PI EXPERIMENTO III .....  | 62 |
| FIGURA 4.16 – CONTROLADOR PID EXPERIMENTO III .....   | 63 |
| FIGURA 4.17 – CONTROLADOR P EXPERIMENTO IV .....  | 65 |
| FIGURA 4.18 – CONTROLADOR PI EXPERIMENTO IV .....   | 66 |
| FIGURA 4.19 – CONTROLADOR PID EXPERIMENTO IV .....  | 67 |

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| TABELA 3.1 – TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE PARA FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA FRACIONÁRIAS ..... | 35 |
| TABELA 3.2 – REGRAS DE SINTONIA MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS.....                                | 38 |
| TABELA 4.1 – RESULTADO ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EXPERIMENTO I (MODELO INTEIRO) .....           | 44 |
| TABELA 4.2 – RESULTADO ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EXPERIMENTO I (MODELO FRACIONÁRIO).....        | 44 |
| TABELA 4.3 – COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ABSOLUTO DOS MODELOS OBTIDOS PARA O EXPERIMENTO I.....   | 45 |
| TABELA 4.4 – RESULTADO ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EXPERIMENTO II (MODELO INTEIRO) .....          | 46 |
| TABELA 4.5 – RESULTADO ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EXPERIMENTO II (MODELO FRACIONÁRIO).....       | 46 |
| TABELA 4.6 – COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ABSOLUTO DOS MODELOS OBTIDOS PARA O EXPERIMENTO II ..... | 47 |
| TABELA 4.7 – RESULTADO ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EXPERIMENTO III (MODELO INTEIRO) .....         | 48 |
| TABELA 4.8 – RESULTADO ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EXPERIMENTO III (MODELO FRACIONÁRIO).....      | 48 |
| TABELA 4.9 – COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ABSOLUTO DOS MODELOS OBTIDOS PARA O EXPERIMENTO III..... | 49 |
| TABELA 4.10 – RESULTADO ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EXPERIMENTO IV (MODELO INTEIRO) .....         | 50 |
| TABELA 4.11 – RESULTADO ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EXPERIMENTO IV (MODELO FRACIONÁRIO).....      | 50 |
| TABELA 4.12 – COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ABSOLUTO DOS MODELOS OBTIDOS PARA O EXPERIMENTO IV..... | 51 |
| TABELA 4.13 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR P EXPERIMENTO I..                             | 54 |
| TABELA 4.14 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR PI EXPERIMENTO I.                             | 55 |
| TABELA 4.15 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR PID EXPERIMENTO I .....                       | 57 |
| TABELA 4.16 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR P EXPERIMENTO II                              | 58 |

|   |    |
|---|----|
| TABELA 4.17 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR PI EXPERIMENTO II   | 59 |
| TABELA 4.18 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR PID EXPERIMENTO II  | 60 |
| TABELA 4.19 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR P EXPERIMENTO III   | 62 |
| TABELA 4.20 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR PI EXPERIMENTO III  | 63 |
| TABELA 4.21 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR PID EXPERIMENTO III | 64 |
| TABELA 4.22 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR P EXPERIMENTO IV    | 64 |
| TABELA 4.23 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR PI EXPERIMENTO IV   | 65 |
| TABELA 4.24 – ÍNDICES DE DESEMPENHO CONTROLADOR PID EXPERIMENTO IV  | 66 |
| TABELA 4.25 – COMPARAÇÃO PID COM FT FRACIONÁRIA.....                | 68 |
| TABELA 4.26 – COMPARAÇÃO PID COM FT INTEIRA .....                   | 68 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| $D^\alpha$                  | - Derivada fracionária de ordem $\alpha$  |
| $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(y)$ | - Derivada inteira de ordem $k$ da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros ( $\alpha$ e $\beta$ ) avaliada em $y$ |
| $E_{\alpha,\beta}$          | - Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros ( $\alpha$ e $\beta$ )  |
| $G_{PID}(s)$                | - Função de transferência controlador PID   |
| $G_p$                       | - Função de transferência do processo   |
| $J^\alpha$                  | - Operador integral fracionário   |
| $K_1$                       | - Constante do processo   |
| $K_2$                       | - Constante do processo   |
| $K_3$                       | - Ordem do processo   |
| $K_c$                       | - Ganho crítico   |
| $K_d$                       | - Ganho derivativo  |
| $K_i$                       | - Ganho integral  |
| $K_p$                       | - Ganho proporcional  |
| $T_c$                       | - Período de oscilação  |
| $T_d$                       | - Tempo derivativo  |
| $T_i$                       | - Tempo integral  |
| $a_n$                       | - Constante arbitrária  |
| $b_n$                       | - Constante arbitrária  |
| $t_n$                       | - Tempo experimental amostrado  |
| $y_\infty$                  | - Valor em regime permanente da variável controlada   |
| $y_{SP}(t)$                 | - <i>Set-point</i> da variável controlada   |
| $y_{máx}(t)$                | - Valor de pico da variável controlada  |
| $y_n$                       | - Resposta do sistema amostrado   |
| $y_{pred}$                  | - Valor predito da variável controlada  |
| $y_{real}$                  | - Valor real da variável controlada   |
| $\alpha_n$                  | - Ordem arbitrária da derivada fracionária  |
| $\beta_m$                   | - Ordem arbitrária da derivada fracionária  |
| $\varepsilon_k$             | - Função Epsilon  |
| $\mu$                       | - Ordem do operador diferencial   |
| $\alpha$                    | - Ordem da derivada fracionária   |

|                         |  |
|-------------------------|--|
| $\Gamma(z)$             | - Função Gama  |
| $\lambda$               | - Ordem do operador integral                                     |
| $G(s)$                  | - Função de transferência  |
| $K$                     | - Ganho do controlador   |
| $N$                     | - Número de pares $(t_n, y_n)$                                   |
| $X(s)$                  | - Entrada de um sistema no domínio de Laplace                    |
| $Y(s)$                  | - Saída de um sistema no domínio de Laplace                      |
| $a$                     | - Constante do processo  |
| $b$                     | - Constante do processo  |
| $e$                     | - Número de Euler  |
| $e(t)$                  | - Erro entre a variável controlada e o valor de <i>set-point</i> |
| $f(t)$                  | - Função $f$ com variável independente $t$                       |
| $f(\tau)$               | - Função $f$ com variável independente $\tau$                    |
| $x(t)$                  | - Entrada do sistema no domínio do tempo                         |
| $y(t)$                  | - Variável controlada em função do tempo                         |
| $\overline{T^\circ}(t)$ | - Temperatura de desvio  |
| $T^\circ(t)$            | - Temperatura do processo no domínio do tempo                    |
| $T^\circ_{inicial}$     | - Temperatura inicial do processo                                |

## LISTA DE SIGLAS

|                    |   |
|--------------------|---|
| P                  | - Proporcional                                      |
| PI                 | - Proporcional Integral                             |
| PID                | - Proporcional Integral Derivativo                  |
| $PI^\lambda D^\mu$ | - PID fracionário                                   |
| TID                | - <i>Tilted Proportional and Integral</i>           |
| $PD^\mu$           | - PD fracionário                                    |
| FOBJ               | - Função objetivo                                   |
| FOTF               | - <i>Toolbox Fractional Order Transfer Function</i> |
| ISE                | - Integral do quadrado do erro                      |
| IAE                | - Integral do valor absoluto do erro                |
| MV                 | - Máximo sobressalto                                |
| FT                 | - Função de transferência                           |
| RL                 | - Reimann-Liouville                                 |
| GL                 | - Grunwald-Letnikov                                 |
| CRONE              | - Controle robusto de ordem fracionária             |
| ML                 | - Mittag-Leffler                                    |
| PSO                | - <i>Particle swarm optimization</i>                |

## SUMÁRIO

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                   | <b>16</b> |
| 1.1      | COLOCAÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVOS .....                   | 16        |
| 1.2      | ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....                              | 17        |
| <b>2</b> | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>                        | <b>18</b> |
| 2.1      | REVISÃO SOBRE CONTROLE FRACIONÁRIO DE PROCESSOS.....      | 18        |
| 2.1.1    | <b>Introdução .....</b>                                   | <b>18</b> |
| 2.1.2    | <b>Sistemas de controle .....</b>                         | <b>18</b> |
| 2.1.3    | <b>Cálculo fracionário .....</b>                          | <b>21</b> |
| 2.1.4    | <b>Controle fracionário de processos.....</b>             | <b>26</b> |
| 2.1.5    | <b>Conclusões .....</b>                                   | <b>29</b> |
| 2.2      | REVISÃO SOBRE IDENTIFICAÇÃO FRACIONÁRIA DE SISTEMAS ..... | 29        |
| 2.2.1    | <b>Introdução .....</b>                                   | <b>29</b> |
| 2.2.2    | <b>Modelagem matemática .....</b>                         | <b>30</b> |
| 2.2.3    | <b>Sistemas de ordem fracionária .....</b>                | <b>30</b> |
| 2.2.4    | <b>Identificação fracionária de sistemas.....</b>         | <b>31</b> |
| 2.2.5    | <b>Conclusões .....</b>                                   | <b>32</b> |
| <b>3</b> | <b>METODOLOGIA.....</b>                                   | <b>34</b> |
| 3.1      | INTRODUÇÃO .....  | 34        |
| 3.2      | FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA .....                             | 34        |
| 3.3      | ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS.....                              | 35        |
| 3.4      | <i>TOOLBOXES</i> E FUNÇÕES ESPECIAIS.....                 | 37        |
| 3.5      | SINTONIA DE CONTROLADORES DA FAMÍLIA PID .....            | 38        |
| 3.6      | ÍNDICES DE DESEMPENHO .....                               | 39        |
| <b>4</b> | <b>RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>                       | <b>41</b> |
| 4.1      | INTRODUÇÃO .....  | 41        |
| 4.2      | DADOS EXPERIMENTAIS .....                                 | 41        |



|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.3      | MODELO DO PROCESSO .....  | 43        |
| 4.3.1    | <b>Experimento I</b> .....  | <b>44</b> |
| 4.3.2    | <b>Experimento II</b> .....   | <b>46</b> |
| 4.3.3    | <b>Experimento III</b> .....  | <b>48</b> |
| 4.3.4    | <b>Experimento IV</b> .....   | <b>50</b> |
| 4.4      | CONCLUSÕES DOS RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS I A IV .....                           | 52        |
| 4.5      | CONTROLADORES P, PI E PID UTILIZANDO OS RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS I A IV .....  | 53        |
| 4.5.1    | <b>Sintonia de controladores P, PI e PID para funções do Experimento I</b> .....  | <b>53</b> |
| 4.5.2    | <b>Sintonia de controladores P, PI e PID para funções do Experimento II</b> ..... | <b>57</b> |
| 4.5.3    | <b>Sintonia de controladores P, PI e PID para funções do Experimento III</b> ...  | <b>61</b> |
| 4.5.4    | <b>Sintonia de controladores P, PI e PID para funções do Experimento IV</b> ...   | <b>64</b> |
| 4.6      | CONCLUSÕES DA SINTONIA DOS CONTROLADORES NOS EXPERIMENTOS I A IV .....            | 67        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÃO</b> .....  | <b>70</b> |
| 5.1      | SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....  | 71        |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b> .....  | <b>72</b> |
|          | <b>APÊNDICE A – Tabelas dados experimentais</b> .....                             | <b>80</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVOS

Desde a antiguidade o homem tem buscado maneiras diversas de descrever matematicamente fenômenos ao seu redor, com a finalidade de compreendê-los e controlá-los, de forma que diversas técnicas de modelagem matemática foram propostas e desenvolvidas ao longo do tempo. Dentre as técnicas desenvolvidas, a modelagem matemática com o uso de equações diferenciais fracionárias atrai cada vez mais a atenção de pesquisadores e engenheiros (HILFER, 2000).

Mesmo estando em pleno desenvolvimento, a modelagem matemática com o uso do cálculo fracionário apresenta lacunas que devem ser supridas a fim de precisar todo o potencial que a aplicação desta metodologia pode proporcionar na identificação e no controle de processos e na sintonia de controladores.

Estudos recentes apontam que a utilização do cálculo fracionário é indicada para processos em que seja necessária uma modelagem mais precisa e um controle mais robusto (vide e.g. HILFER, 2000 e MACHADO, 2010). O cálculo fracionário mostra-se uma ferramenta matemática eficaz na descrição de problemas matemáticos e físicos complexos, de modo geral, podendo ser uma ferramenta útil para descrição de memória e propriedades hereditárias de materiais e processos (CAPONETO, 2010). Tem-se, dessa forma, que através da modelagem matemática com equações diferenciais fracionárias, poderá ser obtida uma melhor descrição do processo, podendo conseqüentemente ser realizado um melhor controle sobre ele.

Nesta dissertação foram utilizados dois tipos de modelos matemáticos do mesmo processo. O primeiro representado por equações diferenciais de ordem inteira e o segundo representado por equações diferenciais fracionárias. Após, foram sintonizados controladores P, PI e PID, objetivando a análise da alteração que o processo de modelagem provoca no controle de processos.

O presente trabalho tem como objetivo geral a verificação da melhoria que o processo de modelagem matemática com uso de ferramentas fracionárias proporciona e, a partir de então, analisar qual a influência na sintonia e desempenho de controladores convencionais.

No que se refere aos objetivos específicos, têm-se a apresentação de uma metodologia de identificação de processos a partir de dados experimentais, além do estudo do

comportamento de controladores P, PI e PID ao serem utilizadas funções de transferência de ordem arbitrária.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em seis capítulos, contados a partir desta introdução. No Capítulo 2 são apresentados conceitos e definições relacionados a sistemas de controle, modelagem matemática e cálculo fracionário, além de uma revisão sobre trabalhos relacionados a controle fracionário de processos e outra relacionada a identificação de processos com o uso de modelos fracionários.

O Capítulo 3 é dedicado à apresentação da metodologia utilizada no trabalho, focando no estudo de técnicas numéricas e analíticas para soluções de equações diferenciais fracionárias, identificação de processos e estimação de parâmetro com uso de *toolboxes* e funções de otimização no *software* Matlab.

O Capítulo 4 consiste na apresentação, primeiramente dos resultados obtidos pelo processo de estimação de parâmetros e a comparação entre os modelos de ordem inteira e ordem fracionária e, sucessivamente, dos resultados obtidos pela sintonia dos controladores P, PI e PID utilizando as funções de transferência encontradas. Por fim, é feita uma análise geral dos resultados obtidos e dos controladores que alcançaram o melhor desempenho.

No Capítulo 5 são apresentados os comentários e conclusões finais, bem como as sugestões para trabalhos futuros envolvendo a identificação e controle de processos utilizando cálculo fracionário.

Por fim, no Capítulo 6 são listadas as referências bibliográficas que foram essenciais para o desenvolvimento do trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 REVISÃO SOBRE CONTROLE FRACIONÁRIO DE PROCESSOS

#### 2.1.1 Introdução

O cálculo fracionário representa hoje uma nova alternativa, ainda mais precisa, para descrever objetos e fenômenos. Apesar de ser um tema relativamente novo no campo industrial e da pesquisa, o cálculo fracionário é uma ferramenta matemática antiga, nascida concomitantemente ao cálculo convencional (CAFAGNA, 2007).

Suas aplicações vêm despertando a atenção de pesquisadores ao redor do mundo, causando um crescimento acelerado no seu desenvolvimento e, conseqüentemente, na sua utilização em processos industriais.

No campo do controle, o cálculo fracionário foi introduzido inicialmente por Manabe em 1961. Desde então novas técnicas de controle com o uso desta ferramenta matemática vêm sendo desenvolvidas.

#### 2.1.2 Sistemas de controle

Com o advento da computação moderna, os sistemas de controle passaram a estar cada vez mais presentes no cotidiano das pessoas. Suas aplicações variam de simples sistemas de automação residencial a complexos sistemas de controle de processos bioquímicos.

O objetivo principal de um sistema de controle é manter o processo nas condições de operação desejadas, com segurança e eficiência, atendendo aos requisitos ambientais e de qualidade do produto (SEBORG *et al.* 2010). No âmbito dos sistemas de controle, as variáveis controladas são aquelas que devem manter o valor de uma referência pré-determinada (*set-point*), enquanto que as variáveis manipuladas são aquelas ajustadas com a finalidade de atingir o valor da referência (COUGHANOWR, 1991).

Segundo SEBORG *et al.* (2010) um sistema de controle é formado por um conjunto de três partes, sendo elas:

1. técnica de controle: define as decisões a serem tomadas por um controlador (por exemplo, PID).
2. estrutura de controle: corresponde à forma e às variáveis controladas e manipuladas (por exemplo, *feedback* ou *feedforward*).

3. instrumentação: sensores, responsáveis pela medição das variáveis do processo (por exemplo, um termopar), e atuadores, responsáveis pela atuação sobre o sistema (por exemplo, uma válvula).

#### 2.1.2.1 Técnicas de controle

Existem diversas técnicas de controle utilizadas em processos, sendo que as principais podem ser agrupadas genericamente em duas categorias, conforme proposto por SEBORG (1999):

1. técnicas de controle convencionais: são as mais utilizadas em âmbito industrial. Envolvem as técnicas de controle liga-desliga (*on-off*) e controladores da família PID.
2. técnicas de controle avançado: as principais técnicas desse grupo são os controladores com ganho escalonado (*gain scheduling*), controle preditivo (*model predictive control*), controle adaptativo (*adaptive control*), controle ótimo (*optimal control*), controle não linear (*nonlinear control*), os controladores com redes neurais (*neural network controllers*) e o controle *fuzzy* (*fuzzy control*).

Dentre as técnicas de controle supracitadas, o controlador PID merece destaque. O controlador proporcional integral derivativo (PID) é a técnica de controle de maior sucesso em termos industriais. Pesquisas realizadas em 2001 apontaram que mais de 90% dos controladores utilizados em indústrias norte americanas eram do tipo PID (DESBOROUGH e MILLER, 2002). A razão por trás do domínio dos controladores PID no campo industrial se deve a sua simplicidade, facilidade de implementação e baixo tempo de estabilização para processos lentos (ASTROM, 1995).

O controlador PID é composto por três ações de controle distintas:

- proporcional (P): possui o objetivo de diminuir o erro, ou seja, reduzir a diferença entre o valor medido da variável controlada e o *set-point* desejado. A ação proporcional possui a desvantagem de não permitir que a variável controlada atinja totalmente o valor de *set-point* pretendido, proporcionando o erro em estado estacionário, chamado *off-set*.
- integral (I): a principal função da ação integral é garantir que a saída do processo alcance o *set-point* em estado estacionário. Todavia, poderá gerar respostas oscilatórias e reduzir a estabilidade da malha de controle.

- derivativa (D): o objetivo da ação derivativa é melhorar a estabilidade da malha de controle, antecipando o comportamento do erro em função da sua taxa de aumento ou diminuição.

A equação de um controlador PID no domínio do tempo é representada pela Equação 1:

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (1)$$

Em que  $e(t) = y_{SP}(t) - y(t)$  é o erro entre o valor de *set-point* e a variável controlada,  $K$  o ganho proporcional,  $T_i$  o tempo integral e  $T_d$  o tempo derivativo.

A função de transferência de um controlador PID, no domínio de Laplace é dada por:

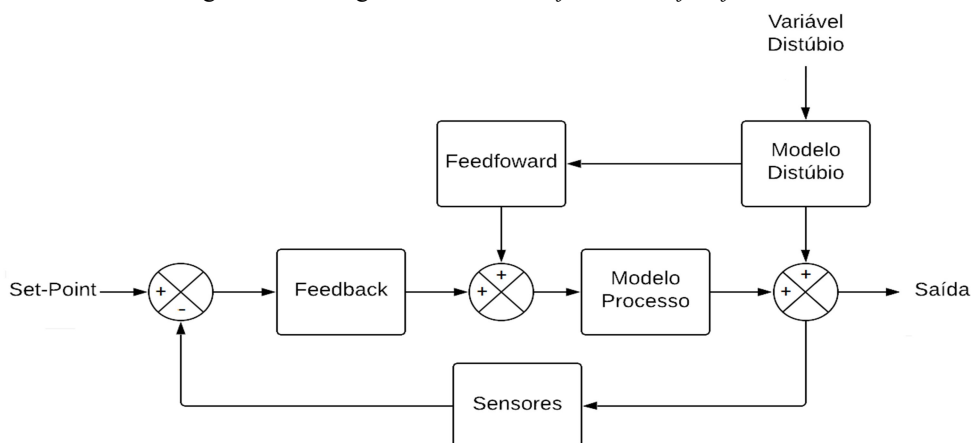
$$G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2)$$

Em que  $K_p$  é o ganho proporcional,  $K_i$  o ganho integral e  $K_d$  o ganho derivativo (ASTRON, 1995).

### 2.1.2.2 Estrutura de controle

Ao que se refere à estrutura, os sistemas de controle dividem-se basicamente em dois modelos: *feedback* e *feedforward* (Figura 2.1).

Figura 2.1 – Diagrama da estrutura *feedback* e *feedforward*



Fonte: Autor

Na estrutura *feedback* a variável manipulada é ajustada a partir de constantes medições realizadas na variável controlada. Nessa estrutura, a variável de distúrbio não é levada em consideração, ou seja, a ação de controle ocorre independentemente da origem do distúrbio. Não obstante, no *feedback*, a ação de controle só ocorre quando houver o desvio do valor da variável controlada em relação ao valor de *set-point*.

Já na estrutura *feedforward* pura, apenas a variável de distúrbio é medida. A principal característica desta estrutura reside no fato de que a ação corretiva é executada antes da variável controlada desviar do *set-point*. Em um cenário ideal a ação de controle anularia todos os efeitos do distúrbio sobre o processo. No entanto, nem sempre é possível medir ou estimar com precisão esses distúrbios, o que impossibilita a ideia de cancelar seus efeitos. Ainda que presentes tais desvantagens, o *feedforward* se mostra capaz de reduzir significativamente os efeitos relacionados a perturbações no processo.

Em processos mais complexos, ambas as estruturas podem ser combinadas: o *feedback* proporcionando ações corretivas em relação a distúrbios não medidos e o *feedforward* eliminando distúrbios medidos antes que a variável controlada seja alterada.

### 2.1.3 Cálculo fracionário

Apesar de ter aproximadamente mais de trezentos anos de existência, o cálculo fracionário apresenta-se um tema relativamente novo no campo industrial e da pesquisa (CAFAGNA, 2007). A primeira ideia a respeito do tema surgiu após a publicação de Leibniz na qual ele definia a  $n$ -ésima derivada de uma função linear  $f(x) = x$  como sendo  $\frac{D^n x}{Dx^n}$ . Tal definição instigou a curiosidade de L'Hopital, levando-o a questionar Leibniz sobre qual seria o resultado caso  $n = 1/2$ . Leibniz, em uma carta datada de 30 de setembro de 1695, escreveu as famosas palavras que deram vida ao cálculo fracionário: “*Será igual a  $x^2 \sqrt{dx} : x$ , um aparente paradoxo, do qual um dia serão tiradas consequências úteis*”. Por essas palavras, Leibniz é considerado por muitos o pai do cálculo fracionário (CAFAGNA, 2007).

Inicialmente o cálculo fracionário se restringia a estudos matemáticos puramente teóricos, desenvolvidos pelos mais brilhantes matemáticos a época, como Euler, Fourier, Laplace, Lagrange, entre tantos outros nomes. Todavia, nenhuma aplicação foi desenvolvida no primeiro século de existência do tema (NISHIMOTO, 1991). Somente em 1823, Niels Abel desenvolveu a primeira aplicação do cálculo fracionário ao descobrir que a solução do problema de tautocronia poderia ser obtida através de integrais de ordem 0,5. Ao final do

Século XIX o cálculo fracionário tomou forma em razão dos trabalhos desenvolvidos por Liouville, Riemann, Grunwald, Letnikov e Caputo, os quais apresentaram definições de operadores integrais e derivativos fracionários. (CAFAGNA, 2007).

Derivadas e integrais de ordem fracionária fornecem uma ferramenta poderosa para a descrição de memória e efeitos hereditários de vários materiais e processos. Esta é a principal vantagem dos modelos de ordem fracionária em comparação aos modelos de ordem inteira, já que nestes tais efeitos são negligenciados (CAPONETO, 2010).

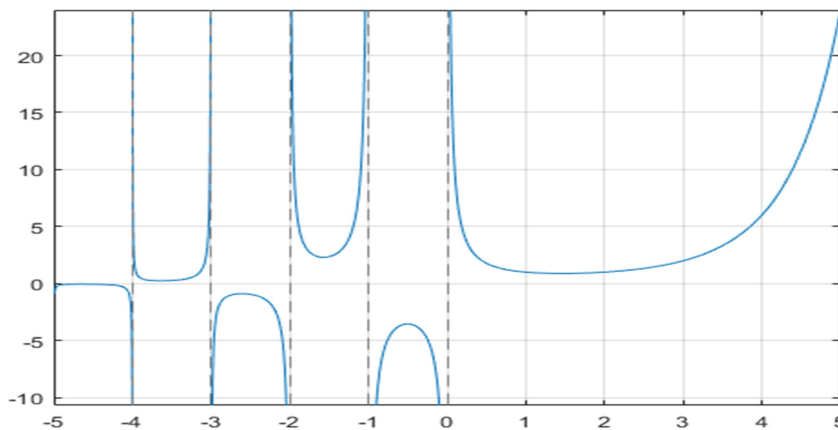
Referida vantagem restou comprovada por Weihua Deng, ao demonstrar que um operador diferencial de ordem inteira é apenas um operador local. Em contraposição, um operador de ordem fracionária é um operador não local. A característica da não localidade de um operador define que o próximo estado de um sistema não depende apenas de seu estado atual, mas também de todos os estados anteriores a contar do momento inicial (DENG, 2007).

### 2.1.3.1 Função Gama

Como será visto oportunamente, a Função Gama, também conhecida como Função de Euler, tem uma íntima ligação com as definições de cálculo fracionário. A interpretação mais simples da Função Gama é uma generalização do fatorial de todos os números reais. Referida definição pode ser vista na Equação (3) e o gráfico da função pode ser visto na Figura 2.2 (LOVERRO, 2004).

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \quad z \in R \quad (3)$$

Figura 2.2 – Gráfico da Função Gama



Fonte: Autor



### 2.1.3.2 A integral e a derivada fracionária

Um método simples para definir uma integral de ordem fracionária pode ser obtido através de uma generalização da expressão da integração repetida de uma função. Referida abordagem normalmente é mencionada como método de Riemann-Liouville. A Equação (4) mostra a expressão para o cálculo da  $n$ -ésima integral de uma função (GORENFLO, 1997).

$$\int \dots \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (4)$$

A Equação (4) só é válida para valores de  $n \in \mathbb{N}$ . Valendo-se da Função Gama, e substituindo a expressão fatorial da equação supracitada, obtém-se uma generalização válida para todo  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , conforme pode ser visto na Equação (5).

$$J^\alpha f(t) := f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (5)$$

Em que  $J^\alpha$  é o operador integral e  $\alpha, t \in \mathbb{R}_+$ .

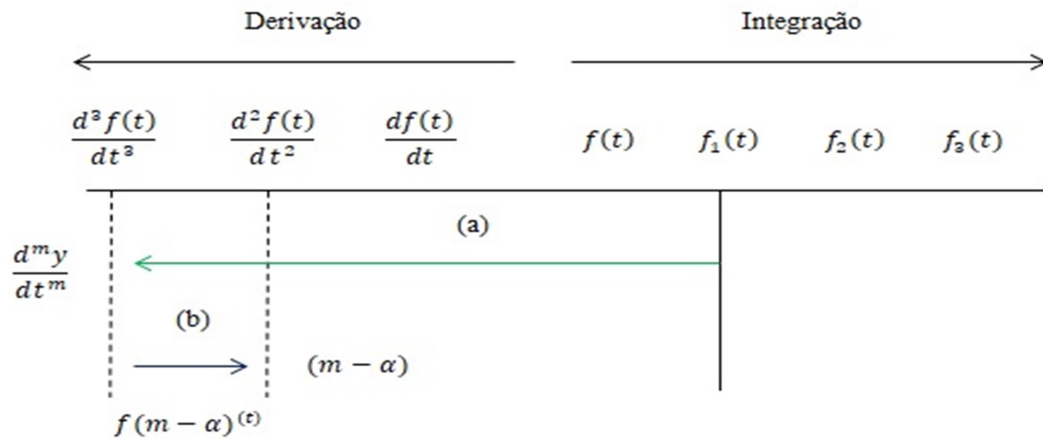
A derivada fracionária pode ser obtida através da definição anteriormente apresentada para a integral de ordem fracionária.

Através de uma interpretação gráfica é possível visualizar o conceito do método, optando por um valor  $\alpha$  fracionário e um  $m$  inteiro que respeite a condição  $m-1 < \alpha < m$ . O primeiro passo do método consiste em derivar a função  $f(t)$  na ordem  $m$ , conforme representado na Figura (2.3) pela operação (a), em verde. Após, basta integrar o resultado obtido,  $\frac{d^m f(t)}{dt^m}$ , na ordem de  $m-\alpha$ , representado pela operação (b), em azul. Por fim, o resultado obtido é a derivada de ordem  $\alpha$  de uma função  $f(t)$  (LOVERRO, 2004).

O resultado matemático das operações pode ser representado pela Equação (6).

$$D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases} \quad (6)$$

Figura 2.3 – Representação gráfica da derivada fracionária



Fonte: Autor

Referido método é conhecido como “método da mão direita”, originalmente desenvolvido por Caputo em 1967. Por esse fato, a Equação (6) é usualmente conhecida como a derivada fracionária de Caputo (LOVERRO, 2004).

As definições apresentadas a respeito da integral e derivada de ordem fracionária não são as únicas existentes. Diversas outras foram desenvolvidas, cada qual com suas vantagens e desvantagens. Nos subcapítulos posteriores serão apresentadas as principais representações utilizadas na área da engenharia (HILFER, 2000).

### 2.1.3.3 Definição de Reimann-Liouville

Conforme apresentado anteriormente neste capítulo, a integral de Riemann-Liouville (RL) é dada pela Equação (5), já a derivada de RL de ordem  $\alpha > 0$  é definida por:

$$D^\alpha f(t) = D^n J^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (7)$$

Sendo que  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha$  é a ordem da derivada,  $a$  e  $t$  são os limites de integração e  $J$  o operador integral de RL (GORENFLO, 1997).

### 2.1.3.4 Definição de Grunwald-Letnikov

A definição proposta por Grunwald-Letnikov (GL) baseia-se no método de generalização da n-ésima derivada de uma função, dada pela Equação (8).

$$d^n f(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(t - mh) \quad (8)$$

Através da Equação (8) foi realizada um ajuste para  $n \in \mathbb{R}$ , através da substituição do coeficiente binomial por uma aproximação utilizando a função gama e alterando o limite superior do somatório. O resultado obtido é a derivada fracionária de GL, definida pela Equação (9) (LOVERRO, 2004).

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{m! \Gamma(\alpha - m + 1)} f(t - mh) \quad (9)$$

A integral fracionária de GL pode ser obtida através de uma adaptação da derivada fracionária de GL, de maneira semelhante à empregada na definição de RL. Basicamente para obter a integral de GL basta considerar a derivada de ordem  $-\alpha$  e proceder alguns ajustes matemáticos, resultando na Equação (10).

$$D^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha + m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(t - mh) \quad (10)$$

#### 2.1.3.5 Definição de M. Caputo

A representação gráfica da derivada fracionária, apresentada anteriormente, ficou conhecida como o método proposto por Caputo em 1967, resultando na Equação (11).

$$D^\alpha f(t) := J^{m-\alpha} D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \quad (11)$$

Em que  $m - 1 < \alpha < m$ .

A maior vantagem da definição de Caputo está no fato de ser possível considerar condições iniciais de ordem inteira, tais como  $f(0), f'(0), \dots, f^{(m-1)}(0)$ , o que proporciona melhor aplicabilidade no campo da engenharia e em aplicações com significado físico.

## 2.1.4 Controle fracionário de processos

O controle fracionário de processos desenvolve-se através de uma abordagem do problema de controle clássico por meio da utilização de equações diferenciais fracionárias. O campo de aplicação do controle fracionário se desenvolve em ritmo acelerado. Na literatura é possível encontrar diversos trabalhos que demonstram, com resultados teóricos e experimentais, o sucesso da utilização desta nova abordagem no controle de processos.

Dessa forma, serão apresentados alguns trabalhos que foram fundamentais para o desenvolvimento e evolução do controle fracionário de processos. A apresentação destes trabalhos será dividida em capítulos, através do agrupamento de conjuntos de trabalhos que estejam relacionados entre si.

### 2.1.4.1 Trabalhos pioneiros

Historicamente, um dos primeiros trabalhos a registrar com sucesso a aplicação do controle fracionário, foi o conduzido por MANABE (1961) ao utilizar uma equação de ordem fracionária para a síntese de controladores em estrutura *feedback*. Posteriormente, OUSTALOUP (1975) em sua tese de PhD utilizou técnicas de controle fracionário para geração de um *laser* colorido. Já em 1990 sobrevieram os trabalhos de AXTELL e BISE (1990).

Um dos mais importantes e inovadores trabalhos encontrados na literatura é o de PODLUBNY (1999b). O autor mostrou, através de uma modificação da Transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler, ser possível obter expressões analíticas para as respostas ao impulso e ao degrau unitário. Para obter tal resultado, utilizou um sistema linear de ordem fracionária, em malha aberta e malha fechada, e um controlador fracionário. Ao final do estudo realizou uma comparação entre um controlador PD clássico e um  $PD^\mu$  de ordem fracionária, comprovando a superioridade do controlador fracionário no sistema proposto.

Cabe destacar ainda outro trabalho de PODLUBNY (1999a), no qual o autor propôs a generalização do PID convencional em um  $PI^\lambda D^\mu$  de ordem arbitrária, no qual  $\lambda$  representa a ordem do operador integral e  $\mu$  a ordem do operador diferencial.

#### 2.1.4.2 Criação e utilização de controladores fracionários

Um dos primeiros controladores fracionários desenvolvidos foi o CRONE (acrônimo francês para *Commande Robuste d'Ordre Non Entier*, que significa controle robusto de ordem fracionária). Seu funcionamento e características são apresentados no trabalho de OUSTALOUP e BANSARD (1993). Sucessivamente, MACHADO (1997) propôs um algoritmo para implementação de um controlador de ordem fracionária no domínio do tempo. Já no trabalho de XUE e CHEN (2002) através de estudos foram apresentadas comparações de quatro técnicas de controladores fracionários: controlador TID (*Tilted Proportional and Integral*), controlador CRONE, controlador  $PI^\lambda D^\mu$  e compensador *lead-lag* fracionário.

Outros trabalhos relacionados à utilização de controladores fracionários podem ser vistos em: OUSTALOUP *et al.* (1996), RAYNAUD e ZERGAINOH (2000), POMMIER *et al.* (2002), ZENG *et al.* (2002), AHMAD *et al.* (2004), MA e HORI (2004), LADACI e CHAERF (2006), LENZI *et al.* (2009) e SHAH e AGASHE (2016), sendo que a grande maioria utiliza controladores PID fracionários e todos apresentam grandes contribuições para a utilização do cálculo fracionário em sistemas de controle.

#### 2.1.4.3 Sintonia de controladores fracionários

A sintonia de controladores de ordem fracionária é um dos maiores desafios enfrentados ao se trabalhar com esse tipo de tecnologia. Existem inúmeras pesquisas sobre o tema, que utilizam uma infinidade de métodos distintos.

De acordo com VALÉRIO e COSTA (2010), os métodos de sintonia de controladores podem ser divididos em três grupos:

- métodos baseados em regras: dentre os trabalhos deste grupo, destaca-se principalmente o trabalho de VALÉRIO e COSTA (2006) que apresenta regras de sintonia baseadas no método de Ziegler-Nichols, propondo uma modificação no famoso método de sintonia para se ajustar a controladores PID fracionários. Outro trabalho que merece menção é o de YEROGLU e TAN (2011) que também propõe uma modificação no método de Ziegler-Nichols.
- métodos analíticos: vários trabalhos propõe a utilização de métodos analíticos, sendo que, dentre eles destaca-se o trabalho de MONJE *et al.* (2007) o qual apresenta métodos de sintonia para controladores PID fracionários para

aplicação na indústria. Por fim, cabe menção aos trabalhos de MONJE *et al.* (2004), VU e LEE (2013) e ZHAO *et al.* (2005).

- métodos numéricos: utilizando algoritmos genéticos, destacam-se os trabalhos de CAO *et al.* (2005) e CHANG e CHEN (2009). Utilizando o método de otimização *particle swarm optimization* (PSO), destacam-se os trabalhos de KARIMIM-GHARTEMANI *et al.* (2007), CAO (2006) e ZAMANI *et al.* (2009).

#### 2.1.4.4 *Toolboxes* para controle fracionário

Alguns autores desprenderam esforços na criação de *toolboxes* para facilitar a simulação de sistemas fracionários, a partir do *software* Matlab. Serão apresentados os principais *toolboxes* disponíveis para controle fracionário.

- Ninteger: desenvolvido por VALÉRIO e COSTA (2005), possui como funcionalidades principais uma variedade de métodos de aproximação para integrais e derivadas fracionárias, três métodos para identificação de modelos fracionários e funções para análise de sistemas fracionários.
- FOMCON: desenvolvido por TEPLJAKOV *et al.* (2013), sendo que as principais características do *toolbox* são as ferramentas para identificação de sistemas (no domínio do tempo e da frequência), módulo de controle para design, sintonia e otimização de controladores PID fracionários e ferramentas de análise de sistemas (diagrama de Bode, Nyquist e resposta ao degrau unitário).
- CRONE: desenvolvido por OUSTALOUP *et al.* (2000), possui inúmeras ferramentas matemáticas utilizadas em cálculo fracionário e a possibilidade de implementar controladores CRONE.
- FOTF: desenvolvido por CHEN *et al.* (2009), possibilita a análise de sistemas no domínio do tempo e da frequência, além de permitir a utilização do *Simulink* com ferramentas de otimização para sintonia de controladores PID fracionários. O grande diferencial do FOTF em relação a outros *toolboxes* é a possibilidade de interação entre modelos de ordem inteira e ordem fracionária e a inclusão de tempo de atraso. Cabe destacar que o *toolbox* FOTF foi o escolhido para realização das simulações deste trabalho.

### 2.1.5 Conclusões

Nos capítulos anteriores foi apresentada uma breve introdução sobre a história do cálculo fracionário e suas definições mais utilizadas no campo de sistemas de controle. Uma breve análise sobre controladores fracionários foi realizada, apresentando os controladores  $PI^\lambda D^\mu$ , CRONE e TID, assim como foram apresentados trabalhos que demonstram o desempenho superior e a maior robustez obtida através do uso de controladores fracionários.

Também foram apresentadas as principais formas de sintonia de controladores, baseados em regras, métodos analíticos e métodos numéricos, além dos principais trabalhos percursores na utilização de tais métodos.

Por fim foram apresentados os *toolboxes* mais utilizados na simulação de sistemas de controle fracionário, cada qual com uma breve análise de suas principais características.

Apesar de o controle fracionário ser um tema que se encontra em voga no campo da pesquisa, ainda existem lacunas a serem supridas a fim de alcançar todo o potencial que essa ferramenta pode proporcionar. Uma dessas lacunas é a falta de trabalhos envolvendo processos químicos, visto que a grande maioria das revisões realizadas restringem-se a sistemas elétricos, mecânicos e robóticos. Outra lacuna encontrada é a falta de utilização de dados experimentais para obtenção das funções de transferência dos processos em análise. Assim, o trabalho proposto objetiva agregar no preenchimento das duas lacunas supracitadas.

## 2.2 REVISÃO SOBRE IDENTIFICAÇÃO FRACIONÁRIA DE SISTEMAS

### 2.2.1 Introdução

A identificação de sistemas é utilizada na obtenção de modelos matemáticos de sistemas dinâmicos a partir de dados amostrados. A identificação de sistemas representa uma poderosa alternativa na obtenção de modelos de processos em que seja difícil a utilização de princípios e equações básicas ou quando só se conhecem dados de entrada e saída.

Modelos de ordem inteira ainda são dominantes no campo da identificação de sistemas. Porém uma nova alternativa, mais precisa e flexível, vêm sendo cada vez mais utilizada, qual seja, a identificação de sistemas por meio de modelos de ordem fracionária. Vários campos já fazem uso dessa nova alternativa de identificação, como por exemplo: eletroquímica, transferência de calor, processos difusivos, acústica, materiais visco elásticos, entre outros.

Os métodos de identificação podem ser classificados basicamente em dois tipos, análise no domínio do tempo e análise no domínio da frequência.

### 2.2.2 Modelagem matemática

A modelagem matemática é uma etapa fundamental no controle de processos, pois todo controlador é implementado com base no modelo matemático do sistema dinâmico a ser controlado. A partir de modelos matemáticos baseados em teoremas, leis e princípios que regem determinado sistema é possível encontrar um conjunto de equações que descrevem matematicamente o comportamento desse sistema (AGUIERRE, 2007).

Os modelos matemáticos podem ser classificados em três categorias distintas, quais sejam:

- a) modelos caixa-branca (também conhecidos por modelos caixa-translúcida): recebem esse nome uma vez que abordam detalhes do interior do sistema, sendo que sua construção é baseada em relações físicas, químicas e biológicas. Usualmente geram modelos matemáticos complexos, ocasionando certa dificuldade na manipulação e análise do modelo.
- b) modelos caixa-preta: são construídos sem levar em consideração a dinâmica interna do sistema. Para realizar essa modelagem é necessário apenas conhecer os sinais de entrada e de saída do sistema. Tais modelos, por possuírem uma menor complexidade, permitem a aplicação de algoritmos de identificação de sistemas de forma facilitada. Esse foi o tipo de modelo utilizado neste trabalho.
- c) modelos caixa-cinza: agrupam características dos dois modelos supracitados, representando uma forma intermediária, no qual apenas algumas características internas do sistema são consideradas. Possibilitam a obtenção de modelos de menor complexidade quando comparados com modelos caixa-branca a fim de aplicar algoritmos de identificação de sistemas (AGUIERRE, 2007).

### 2.2.3 Sistemas de ordem fracionária

Alguns processos podem ser descritos de forma mais precisa a partir de modelos matemáticos de ordem fracionária. No domínio do tempo, uma equação diferencial fracionária genérica pode ser descrita como (MONJE *et al.* 2010):



$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^{\alpha_n}}{dt^{\alpha_n}} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{\alpha_{n-1}}}{dt^{\alpha_{n-1}}} y(t) + \dots + a_0 y(t) \\
& = b_m \frac{d^{\beta_m}}{dt^{\beta_m}} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{\beta_{m-1}}}{dt^{\beta_{m-1}}} x(t) + \dots + b_0 x(t)
\end{aligned} \tag{12}$$

Sendo  $a_n, b_m \in \mathbb{R}$  constantes arbitrárias e  $\alpha_n, \beta_m \in \mathbb{R}^+$  representando as ordens das derivadas fracionárias.

## 2.2.4 Identificação fracionária de sistemas

Uma alternativa atraente para a modelagem matemática de sistemas é o uso de técnicas de identificação de processos. A identificação de processos corresponde a uma modelagem empírica, na qual são introduzidos no sistema em análise distúrbios de magnitude e intensidade conhecidos, sendo observado o comportamento do sistema a esses distúrbios, ou seja, a sua resposta a uma dada perturbação. Dentre as diversas técnicas de identificação destacam-se na literatura as técnicas que utilizam distúrbios do tipo degrau unitário ou rampa (SEBORG *et al.* 2010).

Uma nova alternativa de identificação é proposta através da utilização de ferramentas de cálculo fracionário. Estas técnicas normalmente utilizam os mesmos fundamentos teóricos das técnicas clássicas, porém são baseadas no uso de equações diferenciais fracionárias, proporcionando um maior poder de ajuste a dados experimentais.

Os métodos de identificação de sistemas podem ser separados em dois grupos distintos: métodos no domínio do tempo e métodos no domínio da frequência.

### 2.2.4.1 Métodos no domínio do tempo

Os métodos de identificação no domínio do tempo, propostos inicialmente por LE LAY (1998), LIN (2001) e COIS (2002), baseiam-se principalmente em duas abordagens: modelos baseados em equação de erro e modelos baseados no erro da saída.

Dentre os trabalhos mais significativos utilizando essa metodologia de trabalho, destaca-se o trabalho de PODLUBNY (1999b) em que é feita a identificação de um processo a partir de dados experimentais, considerando a estimação de parâmetros como um problema de minimização das distâncias quadradas entre pontos experimentais e pontos teóricos obtidos pelos modelos propostos.

A metodologia de trabalho proposta por Podlubny mostrou-se muito eficiente e, por isso, foi adotada por diversos autores como CÂMARA *et al.* (2008), ISFER (2009), TEIXEIRA (2010) e PFAFFENZELLER (2010).

No domínio do tempo destaca-se ainda os trabalhos de DORÇAK (1994) que propôs a criação de modelos numéricos para simulação de características dinâmicas de sistemas fracionários.

#### 2.2.4.2 Métodos no domínio da frequência

A identificação de modelos no domínio da frequência fundamenta-se basicamente na resposta em frequência, magnitude e fase de um sistema. Um dos mais famosos métodos foi desenvolvido por HARTLEY e LORENZO (2003), que se baseia na solução de equações matriciais compostas por pares de amostras de frequências.

Na abordagem da resposta na frequência, destacam-se os trabalhos de VALÉRIO e COSTA (2005) e SANATHAN e KOERNER (1963).

#### 2.2.4.3 Outras técnicas de identificação

Várias outras técnicas de identificação para sistemas de ordem fracionária são propostas a partir do aprimoramento das técnicas de domínio do tempo e frequência, tais como as apresentadas por DJAMAH *et al.* (2008), VALÉRIO e COSTA (2010, 2011). Outra possibilidade é a análise através de diagramas de Bode, GHANBARI e HAERI (2011), métodos de subespaços, WANG *et al.* (2011) ou ainda a partir de sucessivas multiplicações da saída do sistema por exponenciais arbitrárias, JACYNTHO (2015).

### 2.2.5 Conclusões

Nos capítulos anteriores foi feita uma breve revisão sobre a identificação de sistemas de ordem fracionária, através de uma análise sobre as metodologias mais relevantes sobre o tema, mostrando a metodologia de PODLUBNY (1999b) que serviu de base para inúmeros trabalhos, inclusive para esta dissertação.

O uso do cálculo fracionário no processo de identificação de sistemas mostrou-se uma alternativa válida, proporcionando um melhor ajuste e maior flexibilidade dos modelos obtidos, principalmente quando utilizados dados experimentais.

Por fim, com a revisão dos trabalhos, verifica-se que a identificação de sistemas de ordem fracionária ainda não é amplamente explorada, tendo em vista a pequena quantidade de trabalhos encontrados.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Atualmente, os sistemas de ordem fracionária estão presentes em diversos campos de atuação, visto a infinidade de áreas que vem se valendo da melhora que os referidos sistemas podem proporcionar.

A identificação de sistemas fracionários, normalmente, centra-se na resolução de um problema primordial: a estimação de parâmetros. Na literatura é possível encontrar diversas metodologias de trabalho para o processo de estimação de parâmetros. Nesta dissertação foi adotada inicialmente a metodologia proposta por PODLUBNY (1999b) ao se utilizar a resposta analítica de um sistema a uma perturbação do tipo degrau unitário e, ainda, a metodologia proposta por ISFER (2009) ao considerar a estimação de parâmetros um problema de otimização não linear determinístico.

Nesta seção serão apresentadas com detalhes as metodologia empregadas para obtenção dos modelos de ordem fracionária, ferramentas computacionais que foram utilizadas, breves notações sobre sintonia de controladores da família PID e os índices de desempenho adotados para posterior análise dos controladores.

#### 3.2 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Usualmente, a descrição matemática de sistemas de controle é feita a partir de funções de transferência. Estas funções relacionam o comportamento da variável de saída de um sistema,  $Y(s)$ , no domínio de Laplace, frente a uma perturbação na variável de entrada do sistema,  $X(s)$  (KOPPEL, 1968). De forma genérica podem ser expressas pelo quociente de polinômios advindos da aplicação da transformada de Laplace na Equação 13, resultando:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0} \quad (13)$$

A transformada de Laplace inversa para uma função de transferência fracionária pode ser obtida através de Podlubny (1999b). A Tabela 3.1 apresenta a transformada inversa analítica para casos particulares de funções de transferência, sujeitas a perturbações do tipo impulso (função Delta de Dirac) e degrau unitário (função Heaviside). Para o cálculo dos

valores da transformada inversa é necessário conhecer a função Epsilon  $\varepsilon_k$ , podendo ser vista na Equação 14.

$$\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} \cdot E_{\alpha, \beta}^{(k)}(y \cdot t^\alpha) \quad (14)$$

Essa função, por sua vez, é baseada na k-ésima derivada da Função de Mittag-Leffler (ML), dada pela Equação 15.

$$E_{\alpha, \beta}^{(k)}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha, \beta > 0 \quad (15)$$

Tabela 3.1 – Transformada inversa de Laplace para funções de transferência fracionárias

| <i>Equação Diferencial</i>   | <i>Função de Transferência</i>  |
|--|---|
| $a \cdot \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + b \cdot y = \frac{d^\omega x(t)}{dt^\omega};$   | $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^\omega}{a \cdot s^\alpha + b}$  |
| $X(s) \rightarrow \text{Impulso}$  | $y(t) = \frac{1}{a} \cdot \varepsilon_0\left(t, \frac{-b}{a}; \alpha, \alpha\right)$  |
| $X(s) \rightarrow \text{Degrau}$   | $y(t) = \frac{1}{a} \cdot \varepsilon_0\left(t, \frac{-b}{a}; \alpha, \alpha + 1\right)$  |
| <i>Equação Diferencial</i>   | <i>Função de Transferência</i>  |
| $a \cdot \frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} + b \cdot \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + c \cdot y = \frac{d^\omega x(t)}{dt^\omega};$ | $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^\omega}{a \cdot s^\beta + b \cdot s^\alpha + c}$  |
| $X(s) \rightarrow \text{Impulso}$  | $y(t) = \frac{1}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^k \varepsilon_k\left(t, \frac{-b}{a}; \beta - \alpha, \beta + \alpha k\right)$     |
| $X(s) \rightarrow \text{Degrau}$   | $y(t) = \frac{1}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^k \varepsilon_k\left(t, \frac{-b}{a}; \beta - \alpha, \beta + \alpha k + 1\right)$ |

Fonte: Adaptada de PODLUBNY (1999b)

### 3.3 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

A estimação de parâmetros é fundamental para a identificação de processos. A escolha dos parâmetros deve ser realizada de forma a minimizar a distância entre o valor real do processo ( $y_{real-n}$ ) e o valor predito pelo modelo ( $y_{pred-n}$ ) (JOHNSON e WICHERN, 2002).

Assim sendo, para um modelo genérico definido por  $y(t) = f(t, a_1, \dots, a_n)$ , os valores dos parâmetros  $a_1, \dots, a_n$  representam o conjunto de valores que minimizam uma dada função objetivo (FOBJ), que pode ser definida pela Equação 16, na qual  $N$  é o número de pares  $(t_n, y_n)$  de pontos experimentais disponíveis:

$$FOBJ = \sum_{n=1}^N (y_{real-n} - y_{pred-n})^2 \quad (16)$$

Neste trabalho serão considerados dois modelos dinâmicos, o primeiro descrito por equações diferenciais de ordem inteira, conforme a Equação 17, e um segundo modelo descrito por equações diferenciais de ordem fracionária, como a Equação 18.

$$a \cdot \frac{dy(t)}{dt} + b \cdot y(t) = x(t) \quad (17)$$

$$a \cdot \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} + b \cdot y(t) = x(t) \quad (18)$$

Em que  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , é a ordem da derivada fracionária.

Ambas as equações são lineares e não homogêneas, podendo ser resolvidas pela técnica da transformada de Laplace. Considerando  $x(t)$  como a função degrau unitário, a solução de ambas as Equações (17 e 18) pode ser obtida a partir da Tabela 3.1, sendo expressa por:

$$y(t) = \frac{1}{a} \cdot \varepsilon_0 \left( t, -\frac{b}{a}; \alpha, \alpha + 1 \right) \quad (19)$$

A solução da Equação 17 (ordem inteira) é um caso particular da Equação 18 (ordem fracionária), em que  $\alpha = 1$ . Substituindo a função  $\varepsilon_0$ , pela função Epsilon, vista na Equação 14, obtém-se:

$$y(t) = \frac{1}{a} \cdot t^\alpha \cdot E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{b}{a} \cdot t^\alpha \right) \quad (20)$$

A partir das soluções encontradas, pode-se concluir que o problema de estimação de parâmetros enfrentado é não linear e consiste em estimar os valores de  $\alpha$ ,  $a$  e  $b$ , de forma a minimizar a FOBJ dada pela Equação 21.

$$FOBJ = \sum_{n=0}^N \left( y_{real} - \frac{1}{a} \cdot t^\alpha \cdot E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{b}{a} \cdot t^\alpha \right) \right)^2 \quad (21)$$

A estimação de parâmetros pode ser conduzida a partir de três estratégias distintas (BARD, 1974) e (HIMMELBLAU (1970):

1. obter a derivada da função objetivo em relação a cada um dos parâmetros e resolver um sistema de equações algébricas não lineares (PINTO e LAGE, 2001);
2. considerar a estimação de parâmetros como um problema de otimização e utilizar técnicas determinísticas;
3. considerar a estimação de parâmetros como um problema de otimização e utilizar técnicas heurísticas, tais como algoritmos genéticos.

A partir de testes, ISFER *et al.* (2010) comprovou que ao considerar a estimação de parâmetros como um problema de otimização e utilizar técnicas determinísticas foram obtidos melhores resultados para a identificação de um sistema de ordem fracionária.

Neste trabalho foi utilizada uma função de minimização do *software* Matlab. A função *fminsearch* é a implementação do algoritmo do poliedro flexível, proposto em GILL *et al.* (1981). Seu funcionamento consiste na geração de um poliedro a partir de atribuições de dados iniciais, de forma que os vértices do poliedro serão os valores da função que se pretende minimizar.

### 3.4 TOOLBOXES E FUNÇÕES ESPECIAIS

Durante a realização do trabalho, fez-se necessária a utilização de ferramentas específicas para a simulação e análise dos sistemas de controle de ordem fracionária. Diversos *toolboxes* para o *software* Matlab estão disponíveis, cada qual com suas peculiaridades. Após análises preliminares, optou-se pelo *toolbox Fractional Order Transfer Function* (FOTF).

O *toolbox* FOTF, apresentado inicialmente em um trabalho de Chen *et al.* (2009), utiliza extensões das funções padrões do Matlab para permitir a utilização de modelos de

ordem fracionária. O *toolbox* em questão possui várias vantagens que foram fundamentais para a escolha de sua utilização, entre elas, a possibilidade de iteração entre funções de transferência de ordem inteira e funções de ordem fracionária; funções próprias para análise da resposta a um impulso ou um degrau unitário e; possibilidade de utilização de tempo de atraso (LI *et al.* 2015).

Conforme pôde ser visto na Tabela 3.1, apresentada no Capítulo 3.2, a resposta de um sistema de ordem fracionária dada uma perturbação do tipo degrau unitário depende do cálculo da função de Mittag-Leffler (Equação 15). Por se tratar de uma função com um somatório infinito e possuir diversas peculiaridades, optou-se pela utilização de uma rotina para o cálculo da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Igor Podlubny desenvolveu e disponibilizou, gratuitamente, uma rotina própria no *software* Matlab para o cálculo da função de ML com a possibilidade de escolher a precisão do cálculo.

### 3.5 SINTONIA DE CONTROLADORES DA FAMÍLIA PID

No projeto de controladores, é conveniente o ajuste de alguns parâmetros com a finalidade de incrementar o desempenho do sistema. A seleção de valores para os parâmetros de um controlador recebe o nome de sintonia (ASTROM, 1995).

Neste trabalho será utilizado um dos métodos de sintonia proposto por Ziegler e Nichols, em 1942, que se baseia nas características da resposta transitória de um sistema. Tal método consiste em anular os ganhos integral ( $K_i$ ) e derivativo ( $K_d$ ) e aumentar gradativamente o ganho proporcional ( $K_p$ ) até atingir um valor crítico ( $K_c$ ), de modo que a saída do sistema varie com um período de oscilação ( $T_c$ ) fixo. A partir dos valores de  $K_c$  e  $T_c$  e utilizando a Tabela 3.2 é possível obter os valores finais para os parâmetros de controladores P, PI ou PID.

Tabela 3.2 – Regras de sintonia método de Ziegler-Nichols

| Tipo de controlador | $K_p$     | $T_i$     | $T_d$      |
|---------------------|-----------|-----------|------------|
| P                   | $0,5K_c$  | -         | -          |
| PI                  | $0,45K_c$ | $T_c/1,2$ | -          |
| PID                 | $0,6K_c$  | $0,5T_c$  | $0,125T_c$ |

Fonte: Adaptada de ZIEGLER-NICHOLS, 1942



### 3.6 ÍNDICES DE DESEMPENHO

Um sistema de controle ideal deve conciliar características dinâmicas e estacionárias adequadas. Para avaliar o seu comportamento faz-se necessária a análise de valores quantitativos que representem o desempenho do sistema, escolhidos de modo a enfatizar características importantes. Tais valores são chamados de índices de desempenho.

Para que um sistema de controle seja considerado ótimo é necessário o ajuste de seus parâmetros a fim de alcançar um valor extremo para os índices de desempenho, sendo que comumente considera-se um valor mínimo. Ao serem analisados dois sistemas em conjunto, será considerado melhor aquele que obtiver os menores valores para os índices de desempenho (DORF e BISHOF, 2001).

Neste trabalho foram utilizados três índices de desempenho: a integral do valor absoluto do erro (IAE), a integral do quadrado do erro (ISE) e o máximo sobressalto ou *maximum overshoot* (MV).

O índice de desempenho IAE é amplamente utilizado em simulações, em razão de sua facilidade de implementação e entendimento. É matematicamente definido como a integral do valor absoluto do erro, conforme a Equação 22 (MARLIN, 1995):

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt \quad (22)$$

Em que  $T$  é um valor de tempo escolhido de modo que a integral tenda a um valor estacionário,  $|e(t)|$  é dado pela diferença entre o valor medido e o *set-point*  $|y(t) - y_{SP}(t)|$ .

O índice de desempenho ISE proporciona uma grande ponderação para grandes erros e pequenas ponderações para pequenos erros, assim, elevados valores de erro resultam em um alto valor para o índice ISE. É matematicamente definido como a integral do quadrado do erro, conforme a Equação 23 (MARLIN, 1995):

$$ISE = \int_0^T e(t)^2 dt \quad (23)$$

Por fim, o índice de desempenho MV representa a quantidade máxima que a resposta do sistema excede o valor da saída em regime permanente. É matematicamente expressa como uma porcentagem, conforme a Equação 24 (MARLIN, 1995).

$$MV = \frac{y_{m\acute{a}x}(t) - y_{\infty}}{y_{\infty}} \cdot 100\% \quad (24)$$

Em que  $y_{m\acute{a}x}(t)$  é o valor máximo de pico da resposta do sistema e  $y_{\infty}$  é a resposta em regime permanente.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 INTRODUÇÃO

A identificação de processos a partir da estimação de parâmetros mostra-se uma técnica eficiente ao descrever sistemas em que estejam disponíveis apenas dados experimentais de entrada e saída.

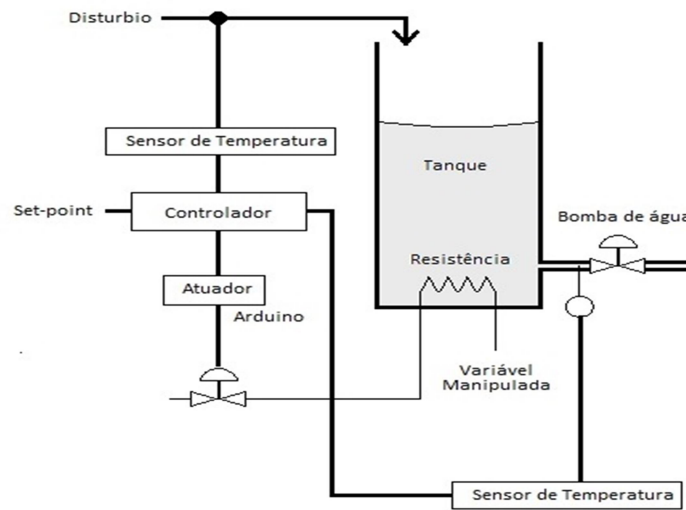
Nesta seção serão inicialmente apresentados os resultados obtidos a partir do procedimento de estimação de parâmetros, ao considerar o processo como um problema de otimização não linear determinístico. Posteriormente serão apresentados os resultados da sintonia dos controladores da família PID, sendo utilizado como índices de desempenho o IAE, ISE e MV. Por fim, será realizada uma análise detalhada sobre os resultados obtidos, tanto na estimação de parâmetros quanto na sintonia dos controladores.

### 4.2 DADOS EXPERIMENTAIS

Os dados utilizados neste trabalho foram obtidos através de experimentos realizados em um módulo de controle para aquecimento de água, desenvolvido por alunos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Estadual de Maringá. O módulo, proposto para fins didáticos, consiste em um tanque em acrílico *cast* com formato cilíndrico, altura de 1 m e diâmetro de 32 cm, contando com uma resistência interna para o aquecimento de água, dois sensores de temperatura, uma bomba, um micro controlador Arduino para leitura dos sensores e atuação na resistência, e um computador dedicado com *software* Scilab, o qual implementa um controlador PID (KOEPSEL, 2018). O diagrama do sistema pode ser visto na Figura 4.1.

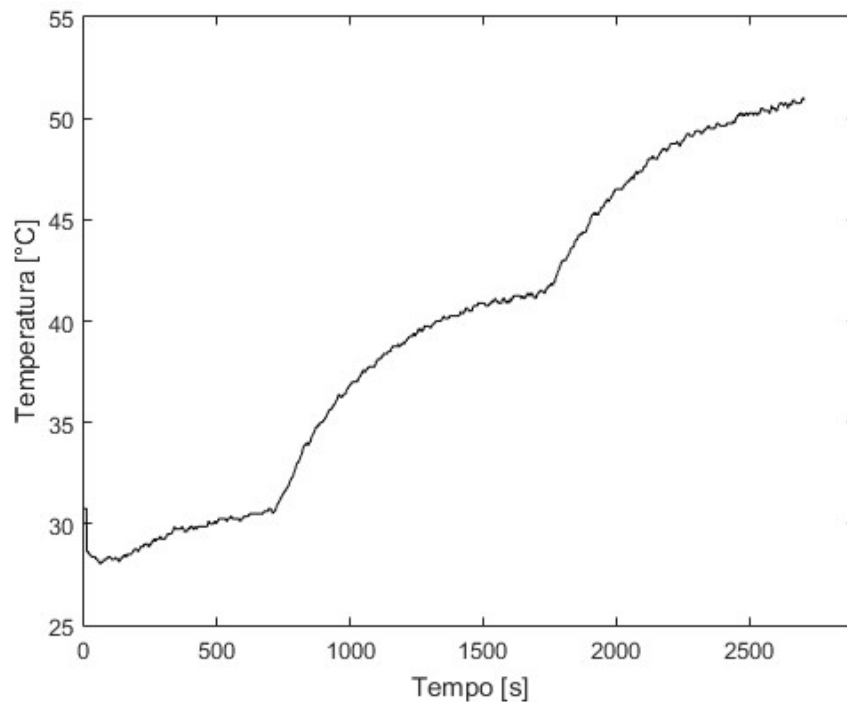
Para a aquisição dos dados foram realizadas duas perturbações do tipo degrau unitário na entrada do sistema, provocando a variação do valor da temperatura de saída da água, conforme pode ser visto na Figura 4.2. Cumpre ressaltar que cada perturbação foi realizada após o sistema atingir o regime permanente.

Figura 4.1 – Diagrama do módulo de controle experimental



Fonte: KOEPSEL, 2018

Figura 4.2 – Dados experimentais



Fonte: Autor

Após a aquisição dos dados, foram realizadas alterações a fim de reduzir a ordem de grandeza das variáveis e tornar o processo de estimação de parâmetros mais simples e eficiente. Inicialmente foram separadas as duas perturbações aplicadas ao sistema, analisando cada uma separadamente. Posteriormente os dados foram dispostos a partir de dois intervalos distintos de amostragem, quais sejam 20 e 25 segundos. Em seguida os valores de tempo foram normalizados, a fim de que permanecessem contidos no intervalo  $[0,1]$ , o que

possibilita a simplificação nos cálculos da estimação de parâmetros. Os valores da temperatura de saída foram alterados para variável desvio, ou seja,  $\overline{T^o}(t) = T^o(t) - T^o_{inicial}$ , em que  $T^o_{inicial}$  é o valor da temperatura de saída no momento inicial do processo (TEIXEIRA, 2010). Por fim, a identificação do tempo morto foi realizada através da inspeção direta dos dados, considerando o intervalo de amostragem utilizado. A partir das alterações realizadas, foram obtidas quatro tabelas de dados, duas para cada perturbação do tipo degrau, as quais podem ser vistas com detalhes no Apêndice A.

### 4.3 MODELO DO PROCESSO

A partir da técnica proposta por ISFER *et. al* (2010), foram identificados oito modelos do processo em análise, sendo quatro de ordem inteira e quatro de ordem fracionária. Através dos dados apresentados no Apêndice A, foram implementadas operações de minimização através do *software* Matlab.

Nos modelos de estimação de parâmetros foi utilizada a função de transferência genérica dada pela Equação 25.

$$G_p = \frac{1}{K_1 s^{K_3} + K_2} \quad (25)$$

Em que,  $K_1$  e  $K_2$  são as constantes do processo e  $K_3$  é a ordem do processo.

Optou-se por dispor as funções de transferência de uma forma mais usual, através da divisão de todos os termos por  $K_2$  obtendo-se a função de transferência na forma da Equação 26.

$$G_p = \frac{1/K_2}{\left(K_1/K_2\right) s^{K_3} + 1} \quad (26)$$

Nos experimentos envolvendo a estimação de parâmetros com um modelo de ordem inteira, fixou-se o valor de  $K_3$  em 1, tendo sido obtidos os outros dois parâmetros. Na estimação usando o modelo fracionário, a função objetivo continha os três parâmetros possíveis.

### 4.3.1 Experimento I

No Experimento I foram utilizados os dados experimentais da resposta do primeiro degrau aplicado ao sistema, considerando-se um intervalo de amostragem de 25 segundos. Através da inspeção direta dos dados, observou-se que o tempo de atraso para o sistema foi de 25 segundos, porém como o intervalo de tempo foi normalizado para conter valores dentro do intervalo de  $[0,1]$  foi utilizado nos cálculos o valor de 0,025 segundos para o tempo de atraso.

Inicialmente foi realizada a estimação de parâmetros considerando a função de transferência do processo como sendo de ordem inteira, obtendo-se assim os dados apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Resultado estimação de parâmetros Experimento I (modelo inteiro)

| Parâmetros | Valores estimação | Modelo do processo                  |
|------------|-------------------|-------------------------------------|
| $K_1$      | 0,0380            | $G_p = \frac{12,3609}{0,4697s + 1}$ |
| $K_2$      | 0,0809            |                                     |
| $K_3$      | 1                 |                                     |

Fonte: Autor

Ulteriormente, considerou-se um modelo fracionário para o processo, tendo sido obtido os resultados apresentados na Tabela 4.2. Cumpre destacar que o mesmo algoritmo de minimização foi utilizado para ambas as estimações de parâmetros, sendo que o diferencial nos cálculos foi a fixação do valor de  $K_3$  em 1 para a primeira estimação.

Tabela 4.2 – Resultado estimação de parâmetros Experimento I (modelo fracionário)

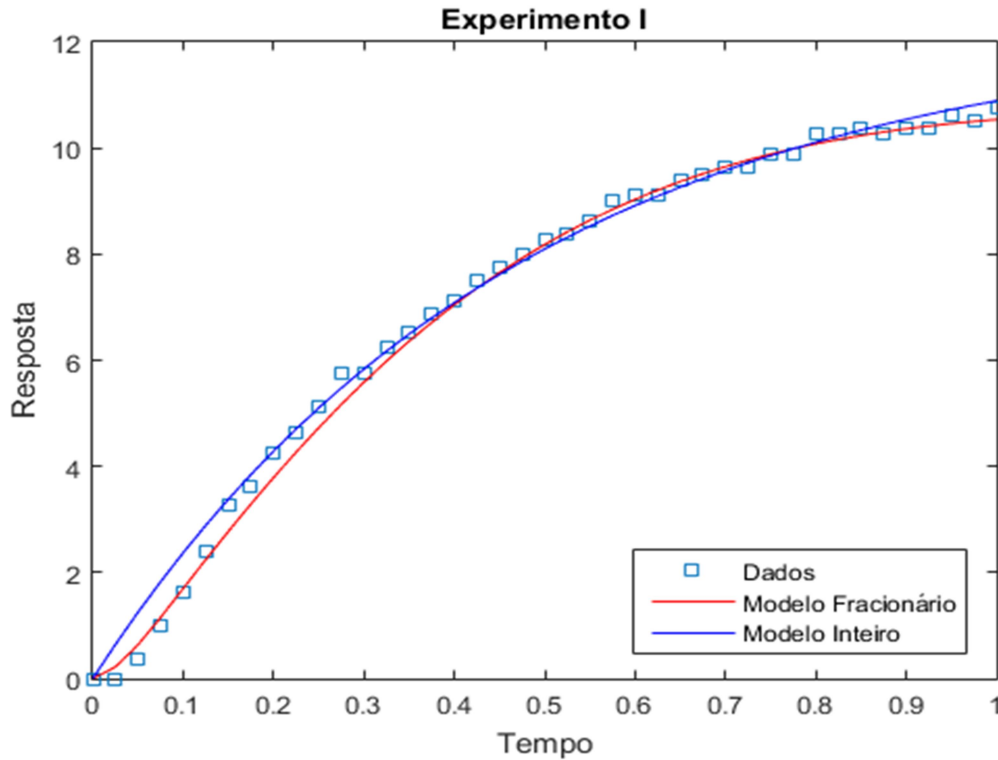
| Parâmetros | Valores estimação | Modelo do processo                         |
|------------|-------------------|--|
| $K_1$      | 0,0278            | $G_p = \frac{10,02}{0,2785s^{1,1824} + 1}$ |
| $K_2$      | 0,0998            |  |
| $K_3$      | 1,1824            |  |

Fonte: Autor

A fim de melhor visualizar o comportamento dos modelos obtidos, a Figura 4.3 apresenta um gráfico contendo os dados experimentais do Apêndice A e a resposta ao degrau das duas funções de transferência obtidas.

Na Figura 4.3, os quadrados representam os dados experimentais, a curva azul representa a resposta ao degrau da função de transferência inteira e a curva vermelha a resposta da função de transferência fracionária.

Figura 4.3 – Gráfico de comparação dos dados experimentais com os modelos obtidos no Experimento I



Fonte: Autor

Com a simples inspeção da figura não é possível afirmar categoricamente qual curva descreve de maneira mais exata o processo em análise. Desta forma, calculou-se o erro absoluto entre os valores estimados e os valores experimentais, conforme pode ser visto na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Comparação entre o erro absoluto dos modelos obtidos para o Experimento I

| Modelo      | Erro Absoluto ( $e =  y_{real} - y_{pred} $ ) |
|-------------|---|
| Inteiro     | 7,7572  |
| Fracionário | 6,3600  |

Fonte: Autor

Nota-se pelo valor do erro que o modelo fracionário conseguiu descrever melhor o processo em análise, porém o resultado ainda demonstrou-se pouco expressivo, já que a

redução no erro proporcionada pela utilização do modelo fracionário foi de aproximadamente 18%. Por esta razão, foi proposta a alteração do intervalo de amostragem a fim de verificar o comportamento da função de transferência fracionária ao serem considerados mais pares  $(t_n, y_n)$  de pontos experimentais disponíveis. Referida análise encontra-se no Experimento III.

### 4.3.2 Experimento II

No Experimento II, foram utilizados os dados referentes à resposta do processo ao segundo degrau aplicado, considerando um intervalo de amostragem de 25 segundos, o que resultou em um tempo de atraso de 0,0244 segundos. Os dados resultantes da estimação de parâmetros utilizando um modelo inteiro são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Resultado estimação de parâmetros Experimento II (modelo inteiro)

| Parâmetros | Valores estimação | Modelo do processo                  |
|------------|-------------------|-------------------------------------|
| $K_1$      | 0,0480            | $G_p = \frac{11,6550}{0,5594s + 1}$ |
| $K_2$      | 0,0858            |                                     |
| $K_3$      | 1                 |                                     |

Fonte: Autor

Já para o modelo fracionário foram obtidos os valores apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Resultado estimação de parâmetros Experimento II (modelo fracionário)

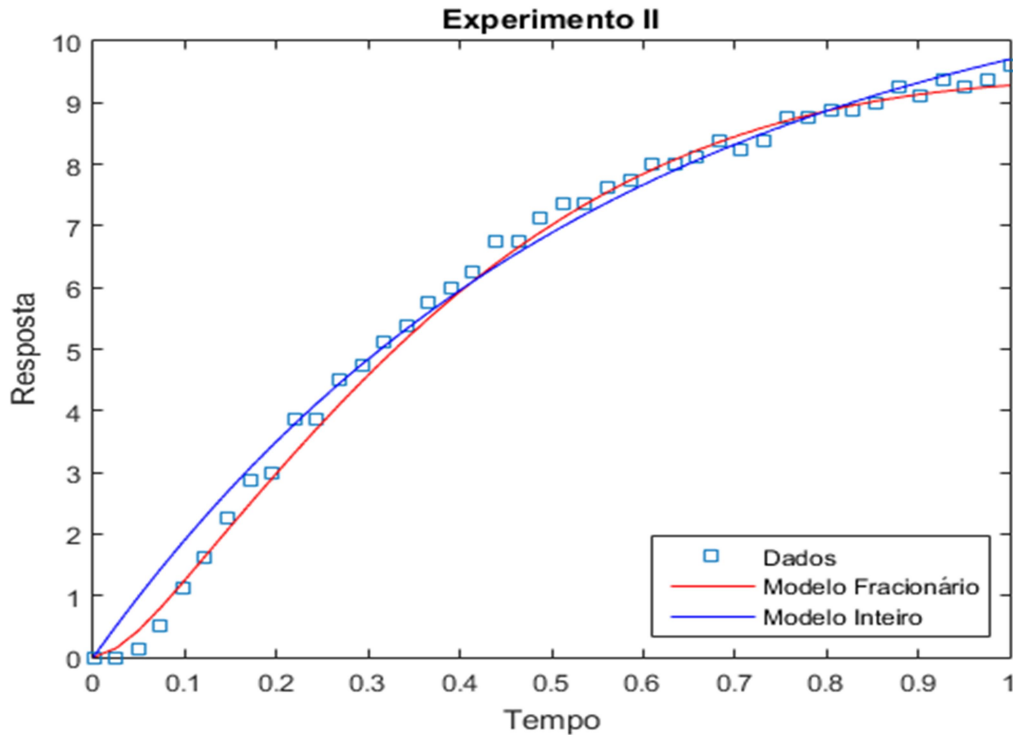
| Parâmetros | Valores estimação | Modelo do processo                          |
|------------|-------------------|---|
| $K_1$      | 0,0310            | $G_p = \frac{8,4602}{0,2622s^{1,2535} + 1}$ |
| $K_2$      | 0,1182            |   |
| $K_3$      | 1,2535            |   |

Fonte: Autor

A comparação entre as respostas obtidas pelos processos resultantes pode ser visualizada na Figura 4.4.



Figura 4.4 – Gráfico de comparação dos dados experimentais com os modelos obtidos no Experimento II



Fonte: Autor

É possível visualizar de antemão que a curva vermelha, referente ao modelo fracionário, possui um melhor ajuste aos dados quando comparado à curva azul, que representa o modelo inteiro. Para tornar a valoração dessa melhoria mais objetiva foi calculado o erro absoluto entre os valores experimentais e os valores obtidos com os dois modelos, que são apresentados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Comparação entre o erro absoluto dos modelos obtidos para o Experimento II

| Modelo      | Erro Absoluto ( $e =  y_{real} - y_{pred} $ ) |
|-------------|---|
| Inteiro     | 9,7639  |
| Fracionário | 6,8217  |

Fonte: Autor

Nota-se que a utilização de um modelo fracionário proporcionou uma redução de aproximadamente 30% no erro do modelo inteiro, demonstrando, mais uma vez, que o modelo fracionário conseguiu descrever o processo de maneira mais exata.

### 4.3.3 Experimento III

Após a realização do Experimento I, surgiu a indagação de qual seria o comportamento dos modelos ao considerar um intervalo de amostragem menor, com a finalidade de obter mais dados para a operação de estimação de parâmetros. Assim, foi realizado o Experimento III, utilizando a resposta ao primeiro impulso aplicado ao sistema, porém com um intervalo de amostragem de 20 segundos.

O primeiro fator observado foi que com mais amostras o valor do atraso do sistema foi de 0,02, valor menor quando comparado ao obtido no Experimento I. Foram então obtidos os valores para a estimação de parâmetros para o modelo inteiro, os quais podem ser vistos na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Resultado estimação de parâmetros Experimento III (modelo inteiro)

| Parâmetros | Valores estimação | Modelo do processo                  |
|------------|-------------------|-------------------------------------|
| $K_1$      | 0,0381            | $G_p = \frac{12,3609}{0,4709s + 1}$ |
| $K_2$      | 0,0809            |                                     |
| $K_3$      | 1                 |                                     |

Fonte: Autor

É possível notar que os valores dos parâmetros foram aproximadamente os mesmos obtidos no Experimento I, com uma pequena mudança no valor de  $K_1$ , o que demonstra que para o modelo inteiro a adição de mais dados não resultou em grandes alterações nos valores dos parâmetros.

Após, foi realizada a estimação para o modelo fracionário, obtendo-se os valores apresentados na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Resultado estimação de parâmetros Experimento III (modelo fracionário)

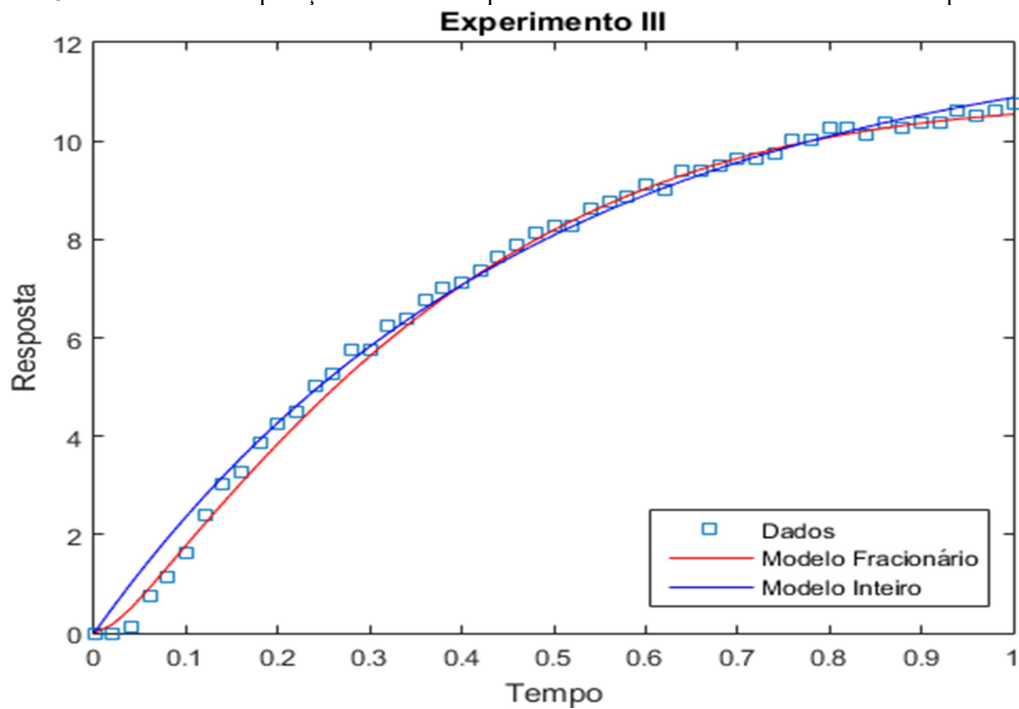
| Parâmetros | Valores estimação | Modelo do processo                           |
|------------|-------------------|--|
| $K_1$      | 0,0282            | $G_p = \frac{10,0908}{0,2845s^{1,1733} + 1}$ |
| $K_2$      | 0,0991            |  |
| $K_3$      | 1,1733            |  |

Fonte: Autor

Através da análise dos valores obtidos na estimação de parâmetros do modelo fracionário nota-se uma diferença mais visível em todos os parâmetros quando comparados aos obtidos no Experimento I, inclusive no valor de  $K_3$ , o qual representa a ordem da derivada fracionária do processo.

Na Figura 4.5 pode ser vista a comparação entre os novos modelos obtidos e os dados experimentais.

Figura 4.5 – Gráfico de comparação dos dados experimentais com os modelos obtidos no Experimento III



Fonte: Autor

A partir do gráfico da Figura 4.5 é difícil visualizar a influência da mudança de intervalo de amostragem na estimação de parâmetros. Com o intuito de transparecer a mudança, foi realizado o cálculo do erro absoluto entre os dados experimentais e os obtidos pelos novos modelos, os quais podem ser vistos na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Comparação entre o erro absoluto dos modelos obtidos para o Experimento III

| Modelo      | Erro Absoluto ( $e =  y_{real} - y_{pred} $ ) |
|-------------|---|
| Inteiro     | 9,3257  |
| Fracionário | 7,6800  |

Fonte: Autor

Comparando os resultados obtidos no Experimento III com os obtidos no Experimento I, nota-se um aumento percentual de aproximadamente 20% no erro para ambos os modelos considerados, mostrando assim que a influência da amostragem no processo possui impacto semelhante em ambos os modelos.

Outro fato notável é a redução percentual entre o erro absoluto do modelo inteiro em relação ao erro do modelo fracionário no Experimento III, que se manteve na faixa de 18%, o mesmo constado no Experimento I.

#### 4.3.4 Experimento IV

O último experimento realizado foi o Experimento IV. Nele foi utilizada a resposta do sistema ao segundo impulso e considerado um intervalo de amostragem de 20 segundos. Novamente houve a mudança no tempo de atraso, quando comparado ao Experimento II, já que o novo valor encontrado foi de 0,0196. Os valores obtidos pela estimação de parâmetros para o modelo inteiro e para o modelo fracionário podem ser vistos na Tabela 4.10 e Tabela 4.11, respectivamente.

Tabela 4.10 – Resultado estimação de parâmetros Experimento IV (modelo inteiro)

| Parâmetros | Valores estimação | Modelo do processo                  |
|------------|-------------------|-------------------------------------|
| $K_1$      | 0,0484            | $G_p = \frac{11,7370}{0,5680s + 1}$ |
| $K_2$      | 0,0852            |                                     |
| $K_3$      | 1                 |                                     |

Fonte: Autor

Tabela 4.11 – Resultado estimação de parâmetros Experimento IV (modelo fracionário)

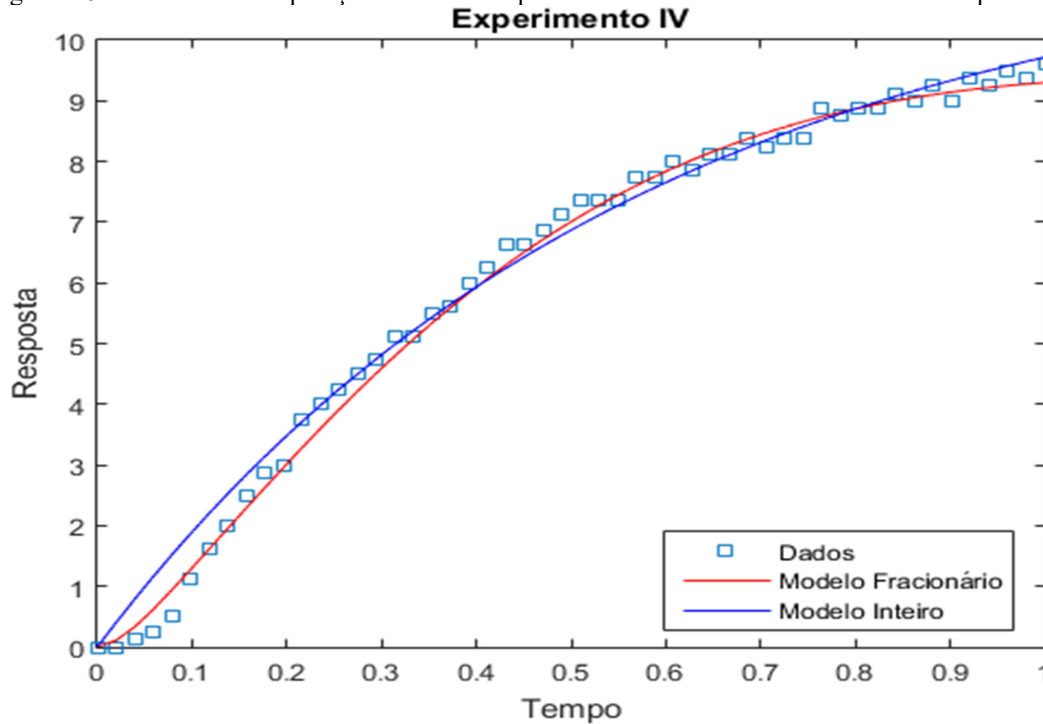
| Parâmetros | Valores estimação | Modelo do processo                          |
|------------|-------------------|---|
| $K_1$      | 0,0315            | $G_p = \frac{8,5178}{0,2683s^{1,2482} + 1}$ |
| $K_2$      | 0,1174            |   |
| $K_3$      | 1,2482            |   |

Fonte: Autor

Novamente, nota-se uma mudança mínima nos parâmetros quando comparados aos obtidos no Experimento II, mostrando que a mudança no intervalo de amostragem não foi tão significativa no processo de estimação de parâmetros.

Na Figura 4.6 pode ser vista a comparação gráfica dos modelos obtidos através da estimação de parâmetros.

Figura 4.6 – Gráfico de comparação dos dados experimentais com os modelos obtidos no Experimento IV



Fonte: Autor

Por fim, foi realizado o cálculo do erro absoluto entre os dados experimentais e os obtidos dos modelos estimados, que podem ser vistos na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 – Comparação entre o erro absoluto dos modelos obtidos para o Experimento IV

| Modelo      | Erro Absoluto ( $e =  y_{real} - y_{pred} $ ) |
|-------------|---|
| Inteiro     | 11,6700                                       |
| Fracionário | 8,2504  |

Fonte: Autor

Novamente os valores de erro aumentaram em aproximadamente 20% em comparação com os valores obtidos no Experimento II, o que demonstra que a mesma diminuição no

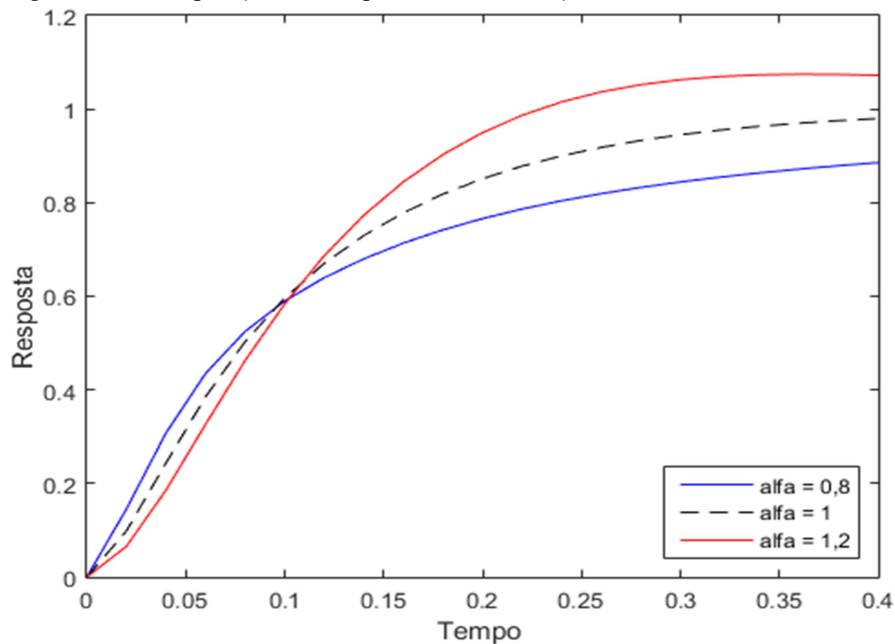
intervalo de amostragem resultou no mesmo aumento no erro percentual dos modelos analisados.

#### 4.4 CONCLUSÕES DOS RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS I A IV

A partir dos dados apresentados nos quatro experimentos observa-se que todos os modelos fracionários obtiveram o menor erro absoluto, descrevendo o processo em análise de maneira mais precisa, comprovando, assim, a superioridade do método fracionário para o sistema em análise. Cabe destacar que não se pode afirmar categoricamente que descrever um processo com funções fracionárias é melhor do que descrever com funções inteiras. Sempre deve ser levado em consideração o processo analisado, já que para alguns processos funções de transferência de ordem inteira podem obter um resultado mais adequado.

Os modelos fracionários se ajustaram melhor aos dados experimentais do processo, pois estes apresentam valores ora constantes, ora maiores e ora menores. Assim as funções de transferência fracionárias conseguem se adequar de maneira mais eficiente a essas mudanças, proporcionando uma maior representatividade dos dados. A fim de ilustrar o comportamento que funções de transferência fracionárias possuem, é apresentada a Figura 4.7.

Figura 4.7 – Comparação do comportamento de funções de transferência fracionárias



Fonte: Autor

Sabendo que, na figura acima, a curva tracejada representa uma FT inteira ( $\alpha = 1$ ) e as curvas azul e vermelha FTs fracionárias ( $\alpha = 0,8$  e  $1,2$ , respectivamente), é possível

inferir que a componente fracionária proporciona uma deflexão nas curvas, fazendo com que a FT fracionária se adeque melhor a dados que extrapolam a curva padrão de uma FT de ordem inteira.

Por fim, comparando os quatro experimentos foi possível verificar que a estimação de parâmetros utilizando o modelo fracionário no Experimento I foi o que resultou no menor erro absoluto. Logo, espera-se que no processo de implementação de um controlador PID utilizando o modelo supracitado sejam obtidos os menores valores para os parâmetros de desempenho ISE, IAE e MV.

#### 4.5 CONTROLADORES P, PI E PID UTILIZANDO OS RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS I A IV

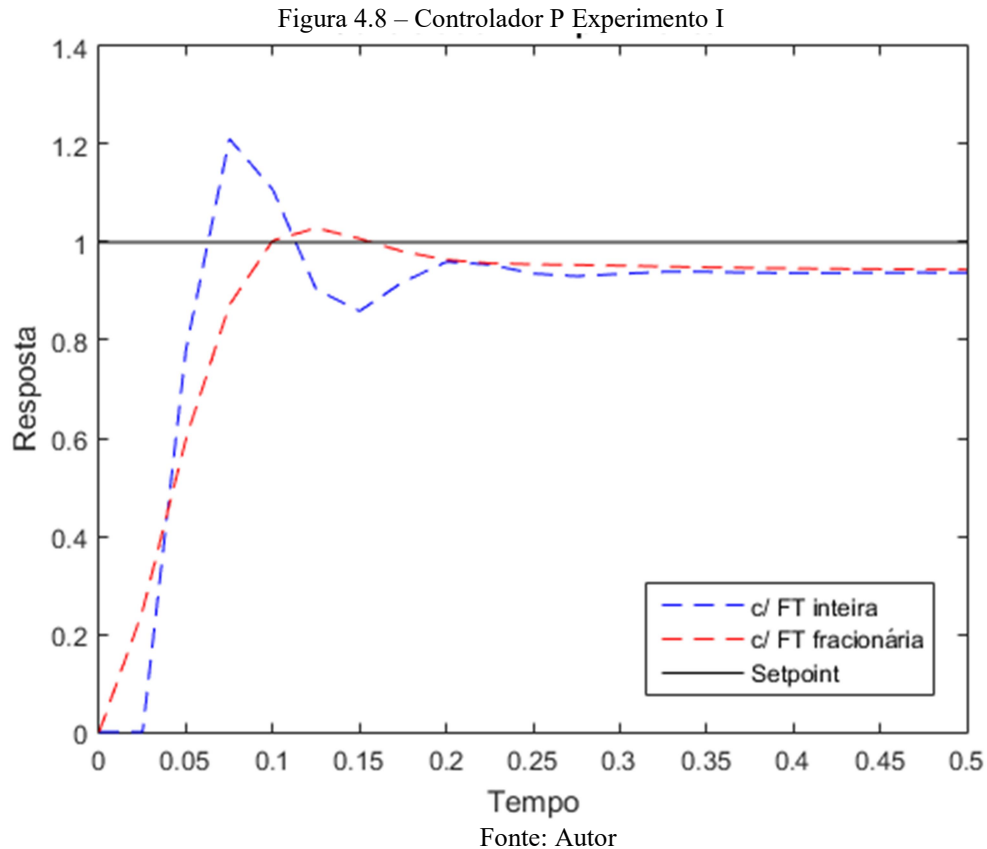
A partir dos experimentos realizados, foram obtidas oito funções de transferência e para cada uma foram sintonizados controladores P, PI e PID, a fim de precisar a melhoria que pode ser obtida através da utilização de funções fracionárias. Nos capítulos a seguir serão apresentados os resultados das sintonias e ao final a comparação dos resultados utilizando os índices de desempenho, ISE, IAE e MV.

Para a análise dos gráficos de resposta dos controladores será adotado o seguinte padrão de cores: azul para controlador com função de transferência do processo de ordem inteira e vermelho para controlador com função de transferência fracionária.

O procedimento de análise seguirá uma sequência lógica, sendo apresentados os resultados para cada um dos controladores e seus respectivos índices de desempenho.

##### 4.5.1 Sintonia de controladores P, PI e PID para funções do Experimento I

Utilizando as duas funções de transferência obtidas no Experimento I foram inicialmente sintonizados dois controladores proporcionais (P), sendo que a resposta desses controladores a um degrau unitário pode ser visualizada na Figura 4.8.



Com base na Figura 4.8, pode-se concluir que, embora o controlador em que foi utilizada a função de transferência fracionária tenha levado um tempo maior para atingir inicialmente o *set-point*, ele estabilizou mais rápido e obteve um menor sobressalto em comparação ao controlador no qual foi utilizada a função de transferência inteira.

Na Tabela 4.13 são apresentados os valores obtidos para os índices de desempenho de cada controlador.

Tabela 4.13 – Índices de desempenho Controlador P Experimento I

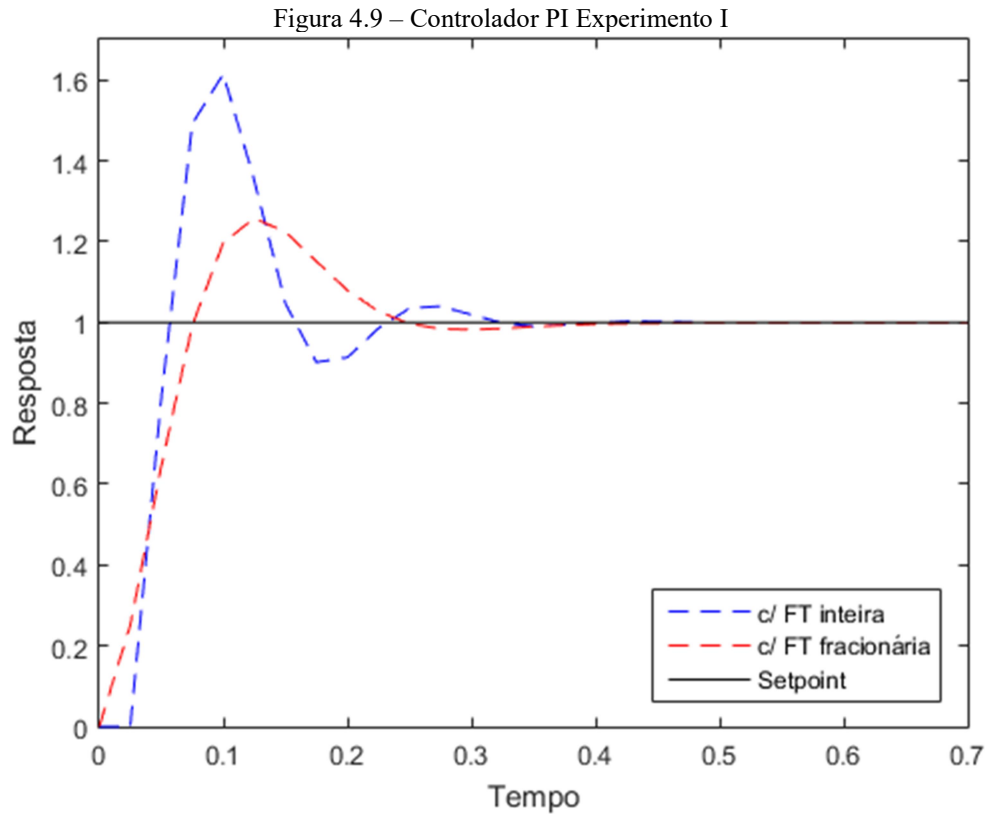
| Índice de desempenho             | IAE    | ISE    | MV     |
|----------------------------------|--------|--------|--------|
| Controlador P com FT inteira     | 4,8786 | 2,2645 | 29,14% |
| Controlador P com FT fracionária | 4,1576 | 1,8472 | 9,43%  |

Fonte: Autor

A partir da análise da Tabela 4.13, é possível constatar que a sintonia do controlador P utilizando uma função de transferência fracionária resultou em melhores resultados para todos os índices de desempenho analisados. Cabe destacar que houve uma melhoria considerável no MV, que compara o sobressalto do controlador.



Após a sintonia dos controladores P, foram sintonizados dois controladores PI, cujas respostas a um degrau unitário podem ser vistas na Figura 4.9.



Com base nas respostas obtidas, é possível constatar que o controlador PI com FT fracionária obteve um menor sobressalto, porém o tempo de acomodação foi superior ao apresentado pelo controlador com FT inteira. Para uma análise mais objetiva são apresentados os índices de desempenho na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 – Índices de desempenho Controlador PI Experimento I

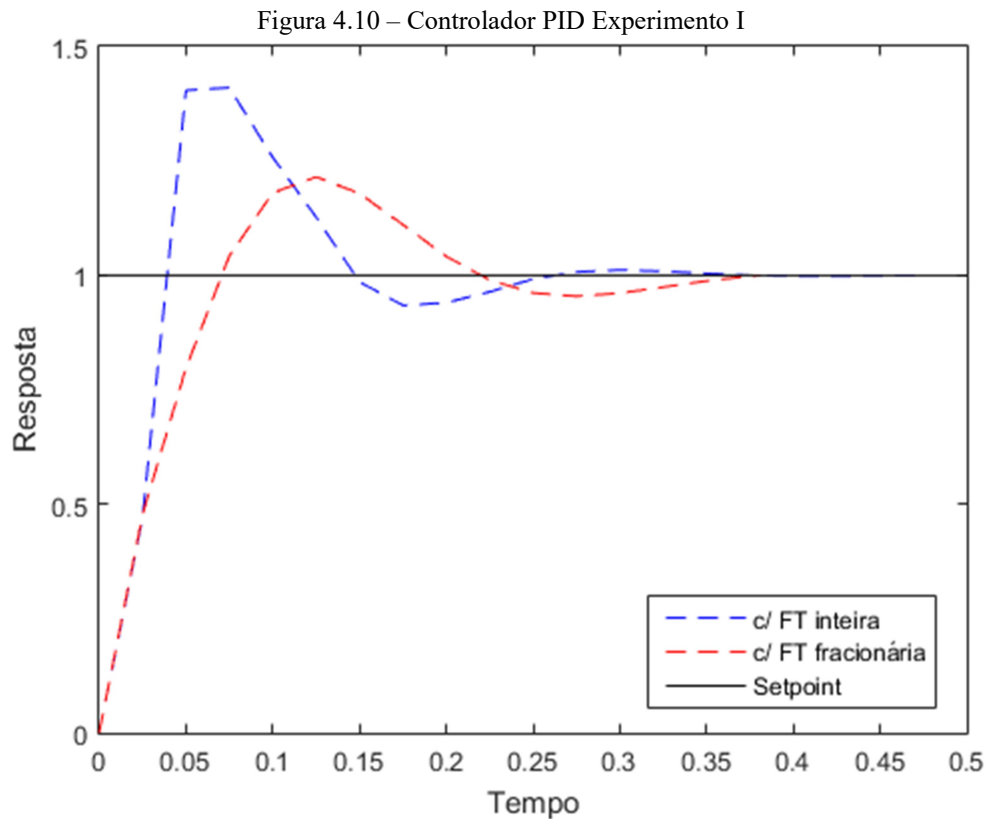
| Índice de desempenho              | IAE    | ISE    | MV     |
|-----------------------------------|--------|--------|--------|
| Controlador PI com FT inteira     | 4,0134 | 2,8015 | 61,47% |
| Controlador PI com FT fracionária | 3,1545 | 1,8741 | 25,84% |

Fonte: Autor

Novamente, o controlador com função de transferência fracionária obteve resultados melhores para todos os índices de desempenho, mostrando assim a superioridade alcançada

com a utilização deste método. No entanto, nota-se um aumento considerável para o MV do controlador.

Para finalizar as análises referentes ao Experimento I, foram sintonizados dois controladores PID. A resposta a um degrau unitário destes controladores pode ser vista na Figura 4.10.



Fonte: Autor

Com base na resposta dos controladores PID, é possível visualizar uma melhora no tempo de acomodação para o PID com FT fracionária, além da redução do sobressalto, tanto para o controlador com função de transferência fracionária quanto para o controlador com função de transferência inteira. Outro fator interessante a ser observado na figura acima é que ambos os controladores apresentaram tempo de atraso aproximadamente igual.

Os dados referentes aos índices de desempenho podem ser observados na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 – Índices de desempenho Controlador PID Experimento I

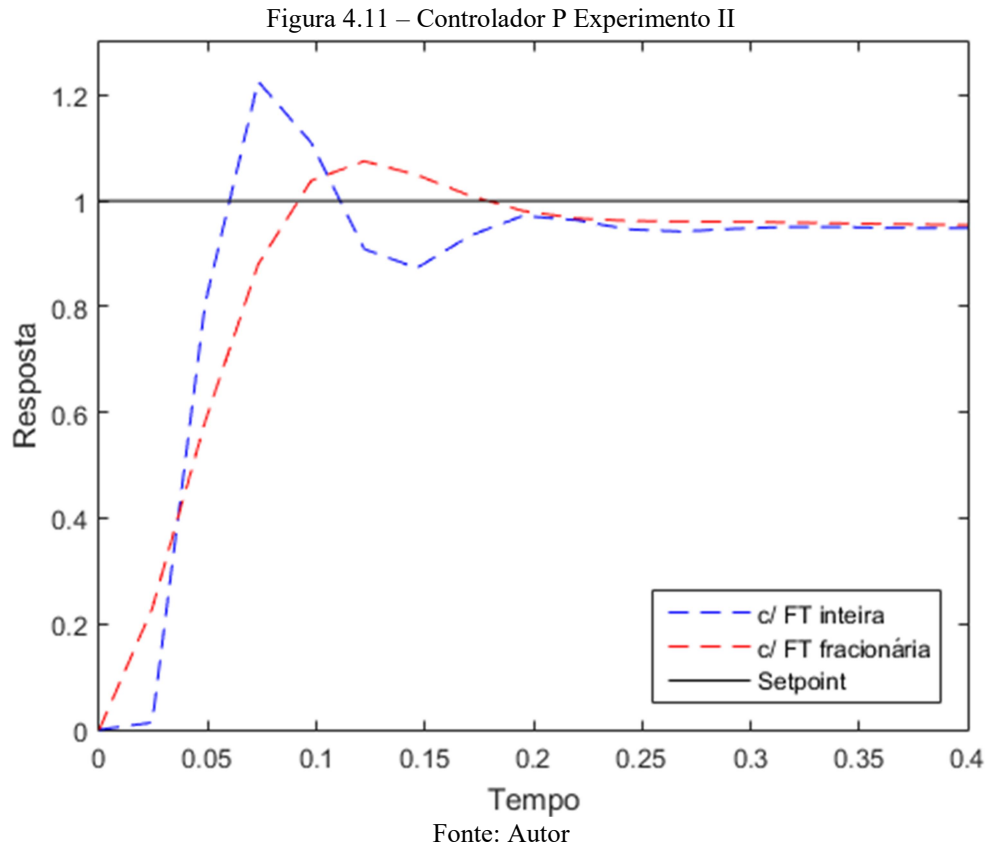
| <b>Índice de desempenho</b>        | <b>IAE</b> | <b>ISE</b> | <b>MV</b> |
|------------------------------------|------------|------------|-----------|
| Controlador PID com FT inteira     | 2,9491     | 1,7027     | 40,98%    |
| Controlador PID com FT fracionária | 2,6999     | 1,4466     | 21,48%    |

Fonte: Autor

Há uma diferença notável nos valores apresentados na Tabela 4.15 em relação aos apresentados na Tabela 4.14. O IAE para o controlador PID com FT inteira apresentou uma diminuição de 27% e o ISE apresentou redução de 40% em relação aos valores do mesmo parâmetro para o controlador PI. Nota-se também a redução do MV que no controlador PI era de aproximadamente 62% passando para 41%. Já para o controlador que utilizou a FT fracionária as alterações em relação aos outros controladores foram mais contidas, ficando na casa dos 20%. No entanto observa-se que o controlador PID com FT fracionária ainda apresenta os menores valores para os índices de desempenho, mostrando-se o controlador mais adequado para o processo em análise.

#### **4.5.2 Sintonia de controladores P, PI e PID para funções do Experimento II**

Utilizando as funções de transferência obtidas no Experimento II foram, inicialmente, sintonizados dois controladores P. O gráfico referente às respostas dos controladores a um degrau unitário pode ser visualizado na Figura 4.11. Antes da análise, é importante ressaltar que os comportamentos das respostas apresentadas neste capítulo tendem a ser semelhantes as do capítulo anterior, tendo em vista que o Experimento I e II tratam do mesmo processo, porém analisado sob o ponto de vista de perturbações iniciais distintas. Com isso, espera-se observar a influência desse método de abordagem na sintonia de controladores.



Conforme o esperado observa-se que o comportamento dos controladores P do Experimento II é muito parecido com o do Experimento I. No entanto o controlador com FT fracionária obteve um sobressalto maior em relação ao mesmo controlador no experimento anterior. Na Tabela 4.16 são apresentados os índices de desempenho para os controladores em análise.

Tabela 4.16 – Índices de desempenho controlador P Experimento II

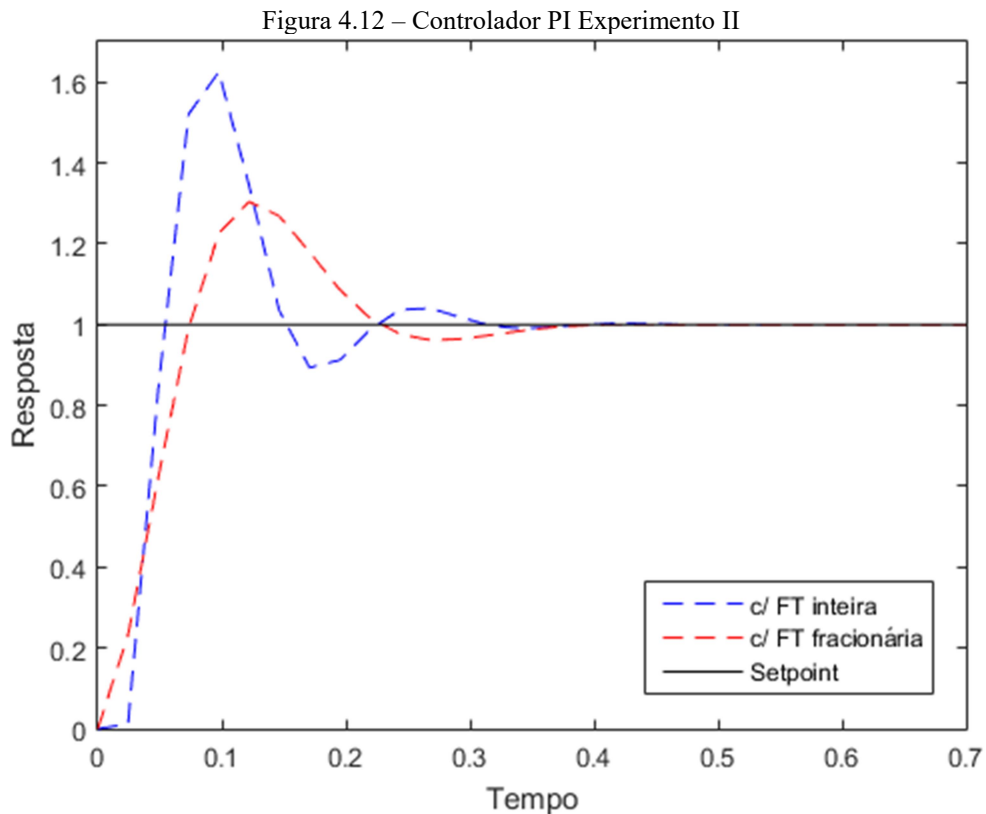
| <b>Índice de desempenho</b>      | <b>IAE</b> | <b>ISE</b> | <b>MV</b> |
|----------------------------------|------------|------------|-----------|
| Controlador P com FT inteira     | 4,5036     | 2,1889     | 29,19%    |
| Controlador P com FT fracionária | 4,0760     | 1,8684     | 13,45%    |

Fonte: Autor

Inicialmente, concentrando a análise dos índices de desempenho no controlador P com FT inteira em relação aos valores obtidos no Experimento I, nota-se uma redução do IAE e no ISE, sendo que o MV apresentou valores muito próximos ao anterior.

Prosseguindo a análise para o controlador P com FT fracionária, observa-se uma redução no IAE e um aumento no ISE, porém, de pequena expressão. O que mais chama atenção é o aumento no MV que passou de aproximadamente 9% para 14%.

Após a sintonia dos controladores P, foram sintonizados controladores PI, cujas respostas ao degrau unitário podem ser vistas na Figura 4.12.



Fonte: Autor

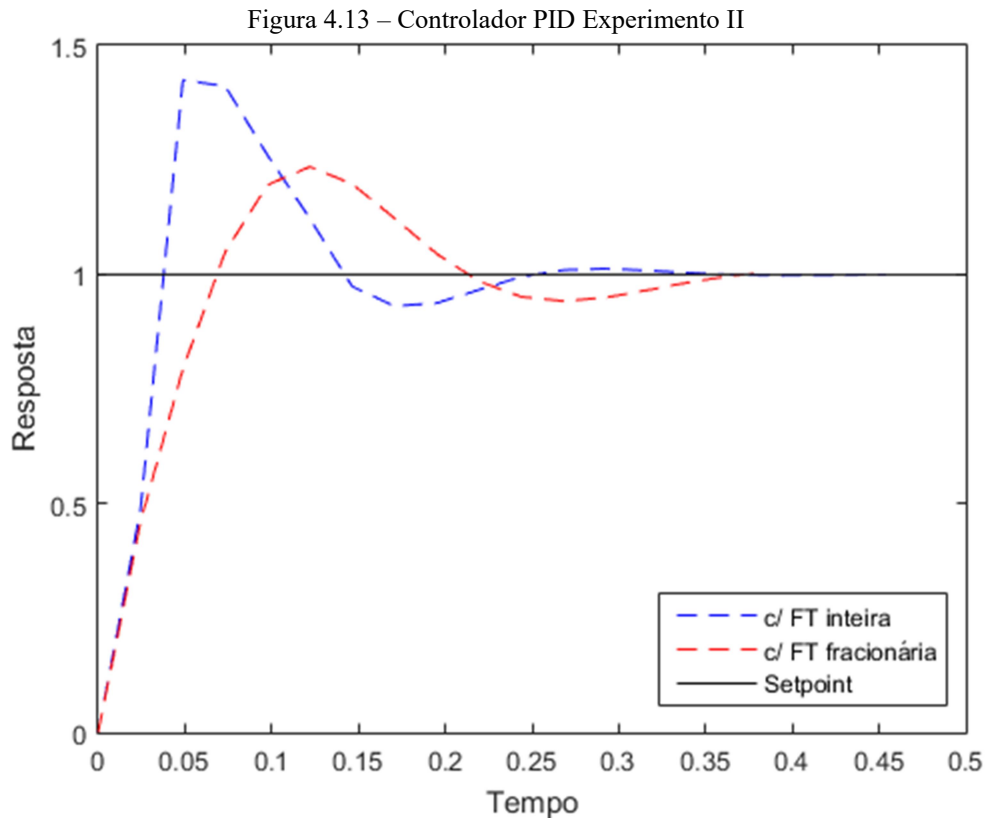
De maneira semelhante ao que se notou no controlador P do Experimento II, verifica-se que o controlador com FT fracionária obteve um sobressalto maior em relação ao obtido no Experimento I. Quanto aos índices de desempenho, observa-se a mesma relação de aumento e redução observados nos parâmetros dos controladores anteriores, podendo ser vistos na Tabela 4.17.

Tabela 4.17 – Índices de desempenho controlador PI Experimento II

| Índice de desempenho              | IAE    | ISE    | MV     |
|-----------------------------------|--------|--------|--------|
| Controlador PI com FT inteira     | 3,9999 | 2,8053 | 62,52% |
| Controlador PI com FT fracionária | 3,4177 | 1,9992 | 30,48% |

Fonte: Autor

Para finalizar a sintonia dos controladores do Experimento II, são apresentados os dados referentes ao controlador PID, sendo que a resposta ao degrau unitário pode ser visualizada na Figura 4.13.



Novamente, é possível notar a semelhança entre as respostas dos controladores PID para o Experimento I e II. Na Tabela 4.18 podem ser vistos os valores obtidos para os índices de desempenho.

Tabela 4.18 – Índices de desempenho Controlador PID Experimento II

| Índice de desempenho               | IAE    | ISE    | MV     |
|------------------------------------|--------|--------|--------|
| Controlador PID com FT inteira     | 2,9667 | 1,7049 | 42,42% |
| Controlador PID com FT fracionária | 2,8654 | 1,4968 | 23,51% |

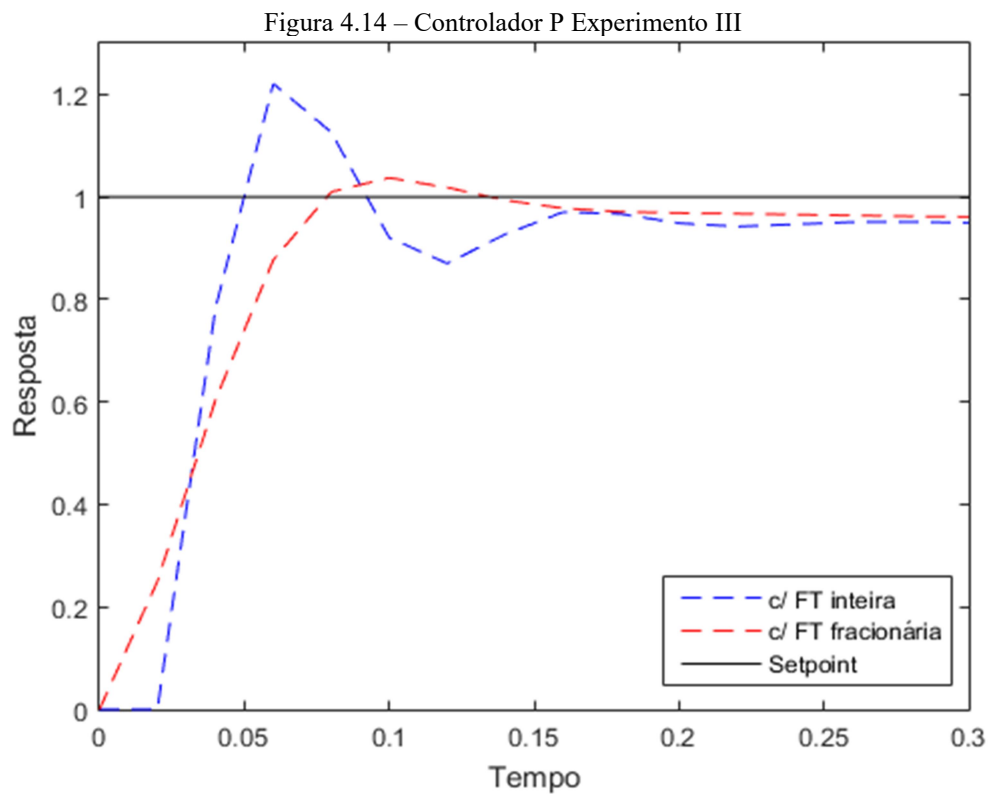
Fonte: Autor

Por fim, levando-se em consideração que o processo de obtenção das FT no Experimento I e II dista apenas pelo degrau considerado, pode-se concluir que, desde que respeitada a dinâmica e às peculiaridades do processo, a escolha de um primeiro ou segundo

degrau não proporciona uma variação considerável no controle do processo, visto que o mesmo apresenta um comportamento uniforme.

#### 4.5.3 Sintonia de controladores P, PI e PID para funções do Experimento III

Sabendo-se que os Experimentos I e III distam apenas pelo intervalo de amostragem considerado, a análise dos resultados obtidos das sintonias dos controladores terá como objetivo valorar a variação obtida pressupondo essa metodologia de trabalho. As respostas dos controladores a um degrau unitário, obtidas pela sintonia dos controladores P para o Experimento III, podem ser visualizadas na Figura 4.14.



Fonte: Autor

Comparando as Figuras 4.14 e 4.7 nota-se um comportamento muito semelhante. Os tempos de subida, de pico e de acomodação apresentam visivelmente os mesmo valores. A fim de valorar com maior precisão os resultados da sintonia, é apresentada a Tabela 4.19, como os índices de desempenho para os controladores em análise.

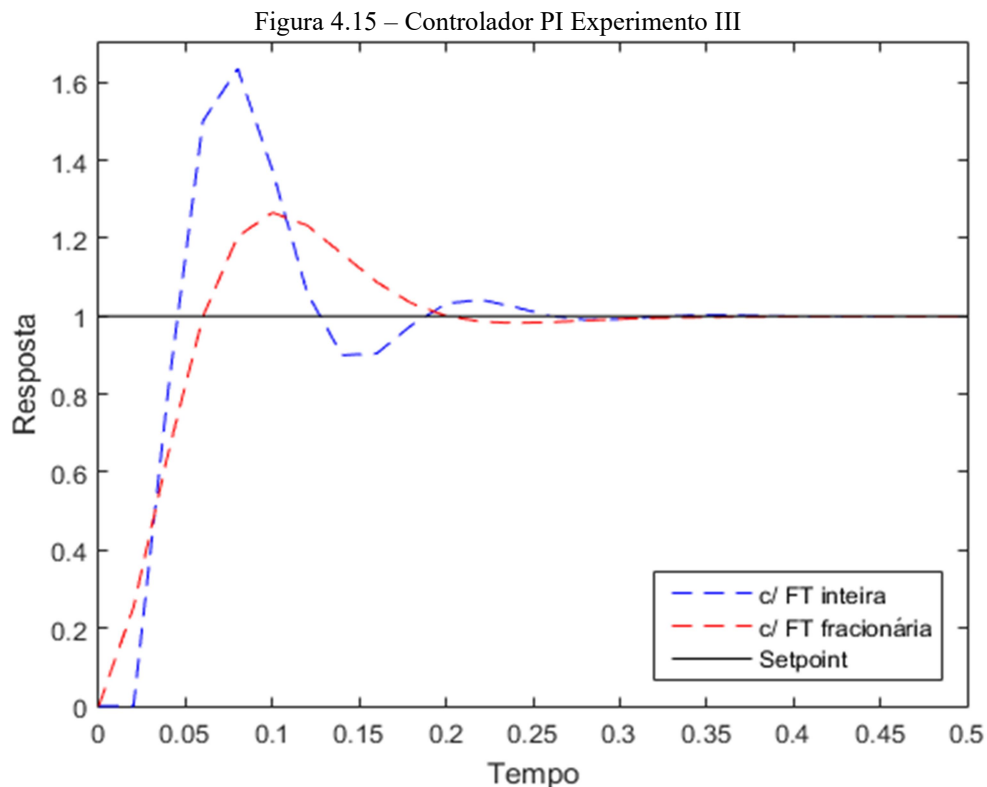
Tabela 4.19 – Índices de desempenho Controlador P Experimento III

| Índice de desempenho             | IAE    | ISE    | MV     |
|----------------------------------|--------|--------|--------|
| Controlador P com FT inteira     | 4,9871 | 2,2480 | 28,60% |
| Controlador P com FT fracionária | 4,1780 | 1,8167 | 8,77%  |

Fonte: Autor

Comparando as Tabelas 4.19 e 4.13 nota-se um leve aumento no IAE e ISE e o MV apresentou leve redução em ambos controladores. No controlador P com FT inteira o valor de MV passou de 29,14% para 28,60% e no controlador com FT fracionária de 9,48% para 8,77%. A diferença de valores obtidos no IAE e ISE deve-se ao fato de que o menor intervalo de amostragem resultou em um maior erro no processo de estimação de parâmetros, resultando assim em uma redução do desempenho dos controladores.

Posteriormente a sintonia dos controladores P, foram sintonizados controladores PI, cujas respostas ao degrau unitário podem ser visualizada na Figura 4.15.



Fonte: Autor

Novamente, nota-se o comportamento semelhante do resultado obtido na figura acima e o obtido no Experimento I. Os índices de desempenho podem ser vistos com detalhes na Tabela 4.20.



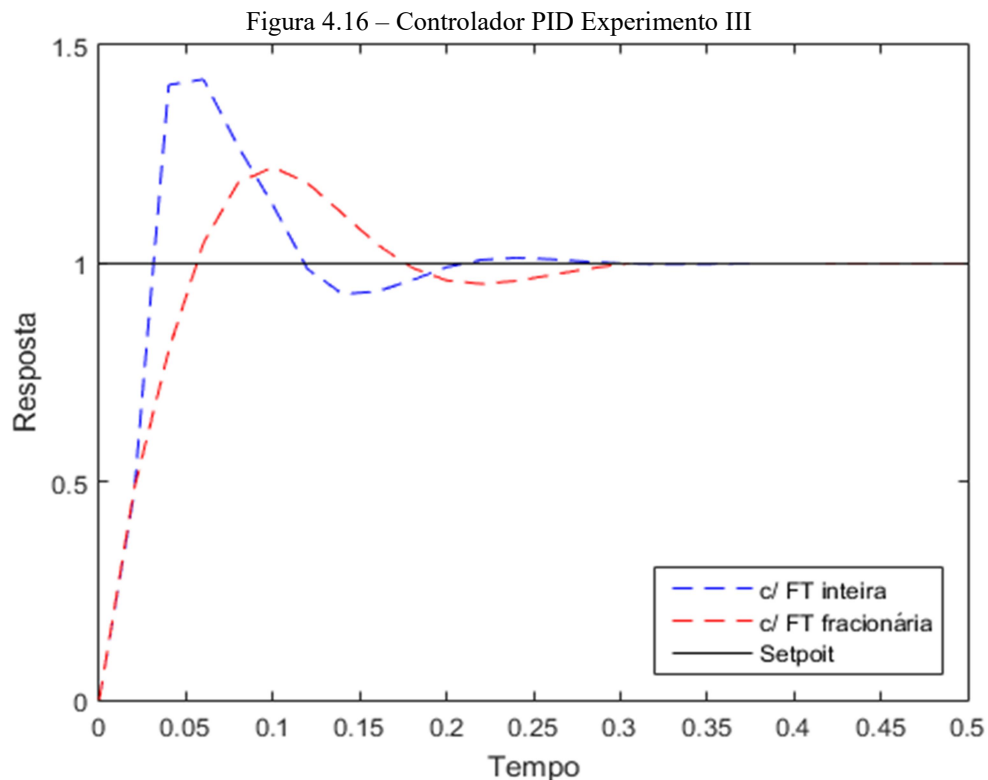
Tabela 4.20 – Índices de desempenho Controlador PI Experimento III

| Índice de desempenho              | IAE    | ISE    | MV     |
|-----------------------------------|--------|--------|--------|
| Controlador PI com FT inteira     | 4,1018 | 2,8553 | 63,49% |
| Controlador PI com FT fracionária | 3,1850 | 1,8806 | 26,63% |

Fonte: Autor

O aumento do erro no processo de estimação de parâmetros por conta da diminuição do intervalo de amostragem teve impacto mais significativamente no controlador PI com FT inteira, principalmente no índice MV. O valor anterior (Experimento I), que era de 61,47%, passou para 63,49%. Pode-se inferir que a estimação fracionária conseguiu absorver o erro obtido pela nova amostragem.

Finalizando o processo de sintonia dos controladores utilizando as funções obtidas no Experimento III foram sintonizados dois controladores PID. As respostas a um degrau unitário podem ser vistas na Figura 4.16.



Fonte: Autor

Pode-se notar a semelhança entre as Figuras 4.16 e a 4.10, parâmetros como tempo de atraso, de subida e de pico mantiveram-se constantes, porém houve uma redução no tempo de

acomodação em ambos os controladores. Os índices de desempenho podem ser vistos na Tabela 4.21.

Tabela 4.21 – Índices de desempenho Controlador PID Experimento III

| <b>Índice de desempenho</b>        | <b>IAE</b> | <b>ISE</b> | <b>MV</b> |
|------------------------------------|------------|------------|-----------|
| Controlador PID com FT inteira     | 2,9996     | 1,7246     | 42,16%    |
| Controlador PID com FT fracionária | 2,7253     | 1,4492     | 22,04%    |

Fonte: Autor

Os valores dos índices de desempenho apresentados na tabela acima foram os menores dentre os obtidos para os controladores do Experimento III, o que demonstra que, para o processo em análise, os controladores PID apresentam um resultado superior.

#### 4.5.4 Sintonia de controladores P, PI e PID para funções do Experimento IV

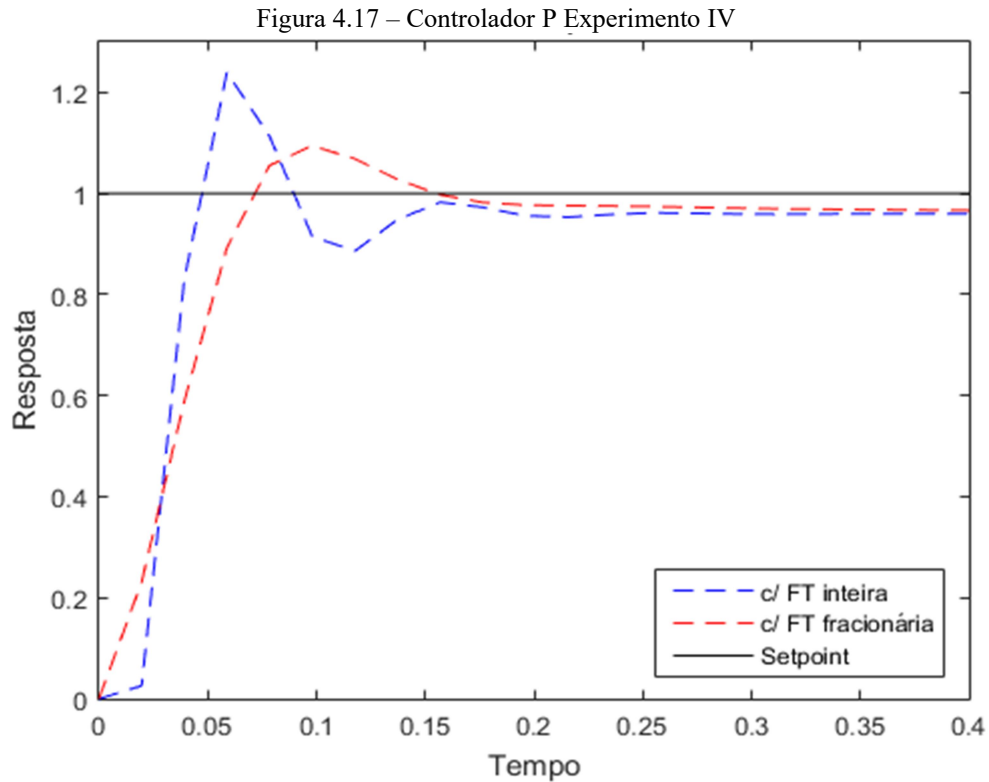
No Capítulo 4.3.4 foram apresentados os erros absolutos obtidos no Experimento IV pelo processo de estimação de parâmetros, podendo ser constatado que tais valores foram os maiores observados e, em decorrência disso, presume-se que os controladores do experimento em questão apresentem o pior desempenho de todos. Ressalta-se que os Experimentos II e IV utilizaram os dados referentes à resposta do sistema ao mesmo degrau, variando apenas o intervalo de amostragem, o que pressupõe um comportamento semelhante entre os controladores desses experimentos.

Inicialmente foram sintonizados os controladores proporcionais, sendo que a resposta obtida através da sintonia pode ser visualizada na Figura 4.17. É possível verificar que houve um aumento no sobressalto para a resposta do controlador P com FT fracionária em relação aos controladores anteriormente apresentados. Os índices de desempenho referentes aos controladores P do Experimento IV podem ser vistos na Tabela 4.22.

Tabela 4.22 – Índices de desempenho Controlador P Experimento IV

| <b>Índice de desempenho</b>      | <b>IAE</b> | <b>ISE</b> | <b>MV</b> |
|----------------------------------|------------|------------|-----------|
| Controlador P com FT inteira     | 4,4941     | 2,1414     | 29,17%    |
| Controlador P com FT fracionária | 4,0110     | 1,8409     | 13,76%    |

Fonte: Autor



Fonte: Autor

Embora apresente o maior erro no processo de estimação de parâmetros, os controladores P do Experimento IV obtiveram um resultado muito semelhante ao obtido no Experimento II.

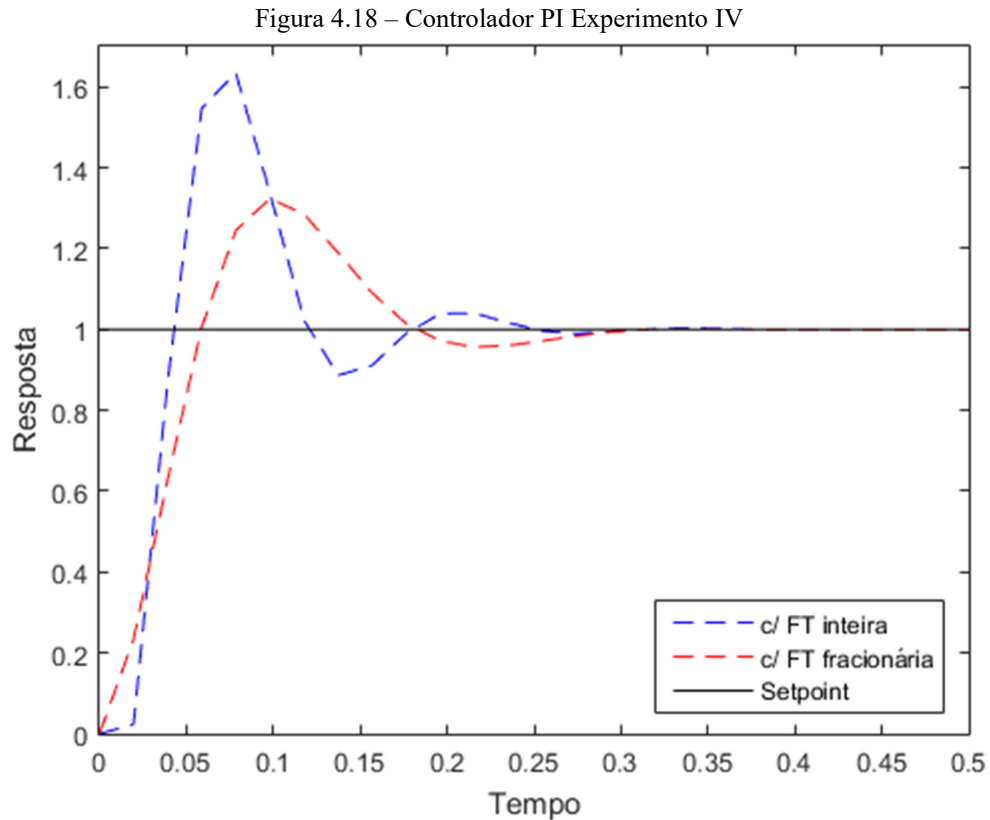
Posteriormente, foram sintonizados controladores PI, cujas respostas podem ser analisadas na Figura 4.18. De maneira similar aos controladores P anteriormente apresentados, os gráficos das respostas dos controladores PI apresentam forte similaridade com os da Figura 4.9.

Visando compreender de forma mais objetiva os resultados, a Tabela 4.23 apresenta os índices de desempenho para os controladores em análise.

Tabela 4.23 – Índices de desempenho Controlador PI Experimento IV

| <b>Índice de desempenho</b>       | <b>IAE</b> | <b>ISE</b> | <b>MV</b> |
|-----------------------------------|------------|------------|-----------|
| Controlador PI com FT inteira     | 3,9860     | 2,8118     | 63,44%    |
| Controlador PI com FT fracionária | 3,4921     | 2,0201     | 32,43%    |

Fonte: Autor



Fonte: Autor

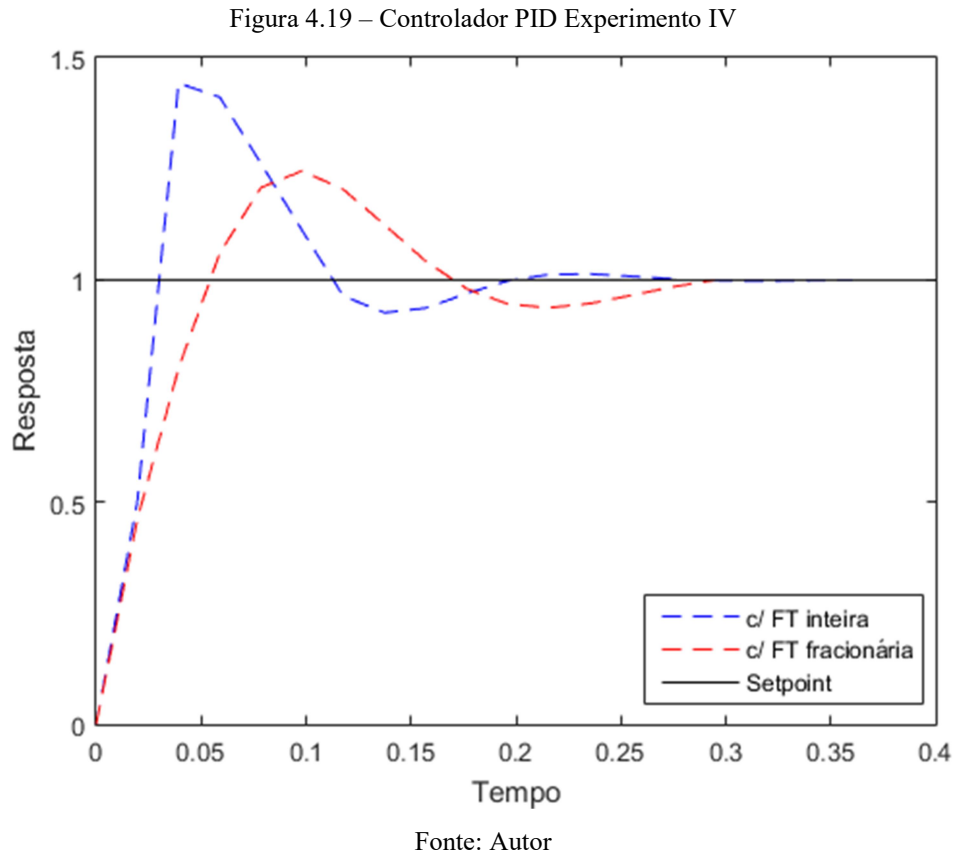
Com base na Tabela 4.23, observa-se que os índices IAE e ISE mantiveram valores muito próximos. Já o MV apresentou um aumento considerável.

Para finalizar a análise dos controladores do Experimento IV foram sintonizados controladores PID, cujas respostas a um degrau unitário podem ser vistas na Figura 4.19. Já na Tabela 4.24 podem ser vistos os índices de desempenho dos controladores em questão.

Tabela 4.24 – Índices de desempenho Controlador PID Experimento IV

| Índice de desempenho               | IAE    | ISE    | MV     |
|------------------------------------|--------|--------|--------|
| Controlador PID com FT inteira     | 2,9757 | 1,7066 | 44,27% |
| Controlador PID com FT fracionária | 2,9185 | 1,5007 | 24,52% |

Fonte: Autor



Dentre os controladores PID apresentados anteriormente, os valores obtidos para os índices de desempenho dos controladores PID do Experimento IV foram os maiores registrados, corroborando com a perspectiva apresentada no início deste capítulo. Ou seja, o erro relativo ao processo de estimação de parâmetros está intimamente relacionado com o desempenho dos controladores a ele atrelados.

#### 4.6 CONCLUSÕES DA SINTONIA DOS CONTROLADORES NOS EXPERIMENTOS I A IV

A partir das figuras e das tabelas apresentadas no capítulo anterior, é possível verificar, inicialmente, que a utilização de funções de transferência fracionárias para a descrição do processo possui impacto direto no controle do mesmo. Todos os controladores (P, PI e PID) que fizeram uso de FTs fracionárias apresentaram desempenho superior quando comparados aos controladores com FTs inteiras.

De maneira mais específica, analisando a técnica de controle, os controladores PID foram os que apresentaram melhores resultados no controle do processo. Dessa forma, a

análise final centrar-se-á nos controladores PID. Na Tabela 4.25 os índices de desempenho resultantes para tais controladores foram dispostos de forma agrupada.

Verifica-se que o controlador PID com FT fracionária que obteve os menores valores para os índices de desempenho foi o sintonizado a partir da função de transferência obtida no Experimento I. Pode-se atribuir tal resultado ao fato de que o experimento em questão foi o que obteve o menor erro no processo de estimação de parâmetros.

De maneira oposta e corroborando com este resultado, tem-se que no Experimento IV foram obtidos os maiores erros na estimação de parâmetros, logo, verifica-se que os controladores PID deste experimento apresentaram os maiores valores para os índices de desempenho, o que pode ser comprovado na tabela abaixo.

Tabela 4.25 – Comparação PID com FT fracionária

| Índice de desempenho | PID com FT fracionária |                |                 |                |
|----------------------|------------------------|----------------|-----------------|----------------|
|                      | Experimento I          | Experimento II | Experimento III | Experimento IV |
| IAE                  | 2,6999                 | 2,8654         | 2,7253          | 2,9118         |
| ISE                  | 1,4466                 | 1,4968         | 1,4492          | 1,5070         |
| MV                   | 21,48%                 | 23,51%         | 22,04%          | 24,52%         |

Fonte: Autor

De forma análoga à análise realizada aos controladores PID com FT fracionária, a Tabela 4.26 apresenta os índices de desempenho dos controladores PID com FT inteira.

Tabela 4.26 – Comparação PID com FT inteira

| Índice de desempenho | PID com FT inteira |                |                 |                |
|----------------------|--------------------|----------------|-----------------|----------------|
|                      | Experimento I      | Experimento II | Experimento III | Experimento IV |
| IAE                  | 2,9491             | 2,9667         | 2,9996          | 2,9757         |
| ISE                  | 1,7027             | 1,7049         | 1,7246          | 1,7066         |
| MV                   | 40,98%             | 42,42%         | 42,16%          | 44,27%         |

Fonte: Autor

De maneira similar, nota-se que o Experimento I, que apresentou o menor erro na estimação de parâmetros também obteve o melhor resultado entre os controladores PID com

FT inteira e ainda o Experimento IV, que apresentou o maior erro, obteve o pior resultado entre os controladores analisados, confirmando, portanto, as análises anteriormente realizadas.

Assim, resta comprovada a influência que o processo de modelagem matemática possui no controle de processos, sendo imprescindível a busca pela descrição mais precisa do processo, de modo a controlá-lo da maneira mais adequada e eficiente.

## 5 CONCLUSÃO

Após o termino dos experimentos e da análise final dos resultados, conclui-se que a utilização de cálculo fracionário na identificação de processos proporciona modelos matemáticos mais precisos e, ainda, contata-se a influência positiva da identificação com cálculo fracionário na sintonia de controladores P, PI e PID.

A partir de dados experimentais e considerando o processo de estimação de parâmetros como um problema de otimização determinística não linear e multivariável foi possível realizar o procedimento de identificação fracionária do processo em análise. Tal estratégia se mostrou eficiente na obtenção de funções de transferência de ordem inteira e fracionária.

No presente trabalho foi aplicada a técnica de identificação de processos a partir de equações diferenciais fracionárias. A utilização de métodos analíticos para a obtenção das transformadas inversas de Laplace para sistemas de primeira ordem se mostrou uma alternativa válida, proporcionando facilidade na obtenção de respostas ao impulso e ao degrau unitário.

A partir dos resultados obtidos, conclui-se que a utilização de funções de transferência de ordem fracionária proporciona uma melhora significativa na representatividade do modelo matemático descrito pela função de transferência. Em todos os experimentos realizados as funções de transferência fracionárias apresentaram menor erro absoluto em comparação aos dados experimentais.

Em uma segunda etapa do trabalho, as funções de transferência de ordem inteira e fracionária foram utilizadas para sintonia de controladores P, PI e PID. Dentre os controladores o que apresentou melhor desempenho foi o controlador PID, em razão da dinâmica do processo objeto de análise deste trabalho.

Os índices de desempenho, provenientes da análise dos controladores sintonizados evidenciaram a melhora que a utilização de funções de transferência fracionárias proporciona no desempenho de controladores. Os experimentos realizados demonstraram que os controladores que fizeram uso deste tipo de função de transferência obtiveram melhores resultados ao serem comparados aos controladores que utilizaram funções de transferência convencionais.



## 5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros na área de identificação e controle fracionário de processos, destacam-se:

- Análise do desempenho de controladores PID e PI fracionários com FT fracionárias.
- Estudo dos resultados que podem ser obtidos pela utilização de algoritmos genéticos no processo de estimação de parâmetros.

## REFERÊNCIAS

- AGUIERRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais**. Belo Horizonte: UFMG, 2007.
- AHMAD, W. M; EL-KHAZALI, R.; AL-ASSAF, Y. Stabilization of generalized fractional order chaotic systems using state feedback control. **Chaos, Solitons and Fractals**, v.22, n. 1, p.141–150, 2004.
- ASTRON, K. PID controllers: theory, design and tuning. **Instrument Society of America**. p. 343, 1995.
- AXTELL, M; BISE, M. Fractional calculus application in control systems. **IEEE 1990 national aerospace and electronics conference**, New York, p. 563–566, 1990.
- BARD, Y. **Nonlinear Parameter Estimation**. 1st. Nova York: Academic Press, 1974. 341 p.
- CAFAGNA, D. Past and present - Fractional calculus: a mathematical tool from the past for present engineers, **IEEE Industrial Electronics Magazine**. v.1, n.2, p. 35–40, 2007.
- CÂMARA, C; LENZI, M.K; LENZI, E.K. Uso de equações diferenciais fracionárias como técnica alternativa para a identificação de processos químicos. **16 Evento Anual de Iniciação Científica da UFPR**, 2008.
- CAO, J. Y; LIANG, J; CAO, B. G. Optimizatin of fractional order PID controllers based on genetic algorithms. **Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics**, 2005.
- CAO, J; CAO, B. Design of fractional order controller based on particle swarm optimization. **2006 1<sup>st</sup> IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications**, p. 775-781, 2006.
- CAPONETTO, R; DONGOLA, A; FORTUNA, L; PETRÁS, I. **Fractional Order Systems, Modeling and Control Applications**. Word Scientific, 2010. 200 p.

CHANG, L; CHEN, H. Tuning of fractional PID controllers using adaptive genetic algorithm for active magnetic bearing system. **WSEAS Transactions on Systems**, v. 8, n. 1, p. 158-167, 2009.

CHEN, Y; PETRÁS, I. Fractional Order Control - A Tutorial. **2009 American Control Conference**, St. Louis, p. 1397–1411, 2009.

CHENG, Y. C.; HWANG, C. Stabilization of unstable first-order time-delay systems using fractional-order PD controllers. **Journal of the Chinese Institute of Engineers**, v. 29, n. 2, p. 241–249, 2006.

COIS, O. **Systèmes lineaires non entier et identification par modèle on entier: application en thermique**. PhD thesis. Université Bordeaux. Talence, France, 2002.

COUGHANOWR, D. **Process systems analysis and control**. 2 ed. New York: McGraw-Hill, 1991. 566 p.

DENG, W. Short memory principle and predictor-corrector approach for fractional differential equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 206, n.1, p.174-188, 2007.

DESBOROUGH, L; MILLER, R. Increasing customer value of industrial control performance monitoring — honeywell's experience. **Proceeding of 6th International Conference of Chemical Process Control**, Tucson, v.00, n.11, p. 172-192, 2002.

DJAMAH, T; MANSOURI, R; DJENNOUNE, S; BETTAYEB, M . Optimal low order model identification of fractional dynamic systems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 206, n. 2, p. 543-554, 2008.

DORÇAK, L. **Numerical Models for the Simulation of the Fractional-Order Control Systems**. Slovak Academy of Sciences – Institute of Experimental Physics. Report UEF 04. 1994.

DORF, R; BISHOF, R. **Sistemas de Controle Moderno**. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 796 p.

GHANBARI, M; HAERI, M. Order and pole locator estimation in fractional order systems using bode diagram. **Signal Processing**, v. 91, n. 2, p. 191-202, 2011.

GILL, P.E; MURRAY, W; WRIGHT, M. H. **Practical Optimizarion**. New York: Academic Press, 1981. 401 p.

GORENFLO, R; MAINARDI, F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order, **Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics**, New York, 2008, p. 223-276.

HAMAMCI, S. E. An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 52, n. 10, p. 1964–1969, out. 2007.

HARTLEY, T. T; LORENZO, C. F. Fractional-order system identification based on continuous order-distributions. **Signal Process**, v.83, n.11, p.2287–2300, 2003.

HILFER, R. **Applications of Fractional Calculus in Physics**. 1<sup>st</sup>. Singapore: World Scientific, 2000. 472 p.

HIMMELBLAU, D. M. **Process Analysis by Statistical Methods**. 1<sup>st</sup>. New York: John Wiley & Sons, 1970. 463 p.

ISFER, L. A. D. **Aplicação de Técnicas de Identificação e Controle Fracionários à Indústria Petroquímica**. 149 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

ISFER, L. A. D; LENZI, M. K; LENZI, E. K. Identification of Biochemical Reactors Using Fractional Differential Equations. **Latin American Applied Research**, v.40, p.193-198, 2010.

JACYNTHO, L.A. **Identificação de funções de transferência de ordem fracionária utilizando como entrada um degrau**. 112p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2015.

JOHNSON, R. A; WICHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 5<sup>th</sup>. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002. 400 p.

KARIMI-GHARTEMANI, M; ZAMANI, M; SADATI, N; PARNIANI M. An optimal fractional order controller for an AVR system using particle swarm optimization algorithm. **LESCOPE'07 - 2007 Large Engineering Systems Conference on Power Engineering**, p. 244-249, 2007.

KOEPSEL, R. N. **Módulo Experimental para Sintonia de Sistema de Controle Antecipatório**. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

KOPPEL, L. B. **Introduction to Control Theory with Applications to Process Control**. 1 ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1968. 466 p.

LADACI, S; CHAREF. A. On Fractional Adaptive Control. *Nonlinear Dynamics*. v.43, n. 4, p. 365-378, mar. 2006.

LE LAY, L. **Identification fréquentielle et temporelle par modèle on entier**. PhD thesis. Université Bordeaux I. Talence, France, 1998.

LENZI, M. K; LENZI, E. K; RYBA, A; TEIXEIRA, G. M; PINTO, J. C. **Controle fracionário de reatores de polimerização**. 10<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Polímeros, Foz do Iguaçu, 2009.

LI, Z; LIU, L; DEGHAN, S; CHEN, Y; XUE, D. A review and evaluation of numerical tools for fractional calculus and fractional order control. **International Journal of Control**. v.00, n.00, p.1–25, nov. 2015.

LIN, J. **Modélisatoin et indentification de systèmes d'ordre non entier**. PhD thesis. Université de Poitiers. France, 2001.

LOVERRO, A. Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer. **Rapport Technique University of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering**. 2004.

MA, C; HORI, Y. Fractional Order Control and Its Application of  $PI^{\alpha}D$  Controller for Robust Two-inertia Speed Control. **International Power Electronics and Motion Control Conference**. p. 1477–1482, 2003.

MACHADO, J. A. T. Analysis and design of fractional-order digital control systems. **Journal of Systems Analysis-Modelin-Simulation**, v.27, n.05, p. 107–122, mai. 1997.

MACHADO, J; KIRYAKOVA, V; MAINARDI, F. Recent history of fractional calculus. **Communications in nonlinear science and numerical simulation**, v. 16, n. 3, p. 1140-1153, 2010.

MANABE, S. The non-integer integral and its application to control systems. **Electrotechnical Journal of Japan**, v.80, n.860, p.589-597, 1961.

MARLIN, T. **Process control: designing processes and control systems for dynamic performance**. 1 ed. New York: McGraw-Hill, 1995. 954 p.

MONJE, C; CALDERON, A; VINAGRE, B; CHEN, Y; FELIU-BATLLE, V. On fractional PI controllers: some tuning rules for robustness to plant uncertainties. **Nonlinear dynamics**, v. 38, n.11, p. 369-381, mar. 2004.

MONJE, C; CHEN, Y; VINAGRE, B.M; XUE, D; FELIU-BATLLE, V. **Fractional-order systems and controls: Fundamentals and applications**. Springer, 2010. 415 p.

MONJE, C; VINAGRE, B; FELIU-BATLLE, V; CHEN, Y. Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. **Control Engineering Practice**, v. 16, n. 7, p. 798-812, ago. 2007.

NISHIMOTO, K. **Fractional calculus and its applications**: Proceedings of the International Conference Held at the Center of Nihon University. Tokyo: College of Engineering, 1990. 284 p.

OUSTALOUP, A. **Etude et réalisation d'un système d'asservissement d'ordre 3/2 de la fréquence d'un laser à colorant continu**'. Ph.D. Thesis. Université Bordeaux I, França, 1975.

OUSTALOUP, A; BANSARD, M. First generation crone control. **Proceedings of IEEE systems man and cybernetics conference**, n.6, p. 130-135, 1993.

OUSTALOUP, A; MELCHIOR, P; LANUSSE, P. The crone toolbox for matlab. **Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design**, Anchorage, p. 190-195, set. 2000.

OUSTALOUP, A; MOREAU, X; NOUILLANT, M. The crone suspension. **Control engineering practice**, v. 4, n. 8, p. 1101-1108, 1996.

PFAFFENZELLER, R. A. **Modelagem de processos usando equações diferenciais parciais fracionárias**. 71 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

PINTO, J C; LAGE, P L C. **Métodos numéricos em problemas de engenharia química**. 1 ed. Rio de Janeiro: E-Papers, 2001. 316 p.

PODLUBNY, I. **Fractional differential equations**: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. 1 ed. New York: Academic Press, 1999b. 340 p.

PODLUBNY, I. Fractional-order systems and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.44, n.1, p. 208–214, 1999a.

POMMIER, V; SABATIER, J; LANUSSE, P; OUSTALOUP, A. Crone control of a nonlinear hydraulic actuator. **Control engineering practice**, v. 10, n. 4, p. 391-402, 2002.

RAYNAUD, H; ZERGAÏNOH, A. State-space representation for fractional order controllers. **Automatica**, v. 36, n. 7, p. 1017-1021, 2000.

SANATHANAN, C; KOERNER, J. Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials. **Automatic Control IEEE Transactions**, v. 8, n. 1, p. 56-58, 1963.

SEBORG, D. **A perspective on advanced strategies for process control (Revisited)**. European Control Conference. August, 1999, p. 01-32.

SEBORG, D. E; EDGAR, T. F; MELLICHAMP, D. A. **Process dynamics and control**. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 2010. 514 p.

SHAH, P; AGASHE, S. Review of fractional PID controller. **Mechatronics**, v.38, p. 29–41, 2016.

TEIXEIRA, G. M. **Aplicação de equações diferenciais fracionárias ao controle de colunas de absorção**. 124p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

TEPLJAKOV, A; E, Petlenkov; BELIKOV, J; FINAJEV, J. Fractional-order controller design and digital implementation using fomcon toolbox for matlab. **Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design**, Hyderabad, p. 340-345, Ago. 2013.

VALÉRIO, D. **Ninteger v. 2.3 fractional control toolbox for MATLAB**. Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa Instituto Superior Técnico, 2005.

VALÉRIO, D; COSTA, J. A review of tuning methods for fractional PIDs. **4th IFAC workshop on fractional differentiation and its applications**, p. 13, 2010.

VALÉRIO, D; COSTA, J. Identifying digital and fractional transfer functions from a frequency response. **International journal of control**, v. 84, n. 3, p. 445-457, 2011.



VALÉRIO, D; COSTA, J. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols-type rules. **Signal processing**, v. 86, n. 10, p. 2771-2784, 2006.

VU, T; LEE, M. Analytical design of fractional-order proportional-integral controllers for time-delay processes. **Isa Transactions**, v. 52, n. 5, p. 583-591, 2013.

WANG, L ; CHEN, P; WANG, Y. Frequency domain subspace identification of commensurate fractional order input time delay systems. **International Journal of Control, Automation and Systems**, v. 9, n. 2, p. 310-316, 2011.

XUE, D; CHEN, Y Q. A comparative introduction of four fractional order controllers. **Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation**, Shanghai, p. 3228-3225, jun. 2002.

YEROGLU, C; TAN, N. Note on fractional-order proportional–integral–differential controller design. **IET Control Theory & Applications**, v. 5, n. 17, p. 1978-1989, 2011.

ZAMANI, M; KARIMI-GHARTEMANI, M; SADATI, N; PARNIANI M. Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization. **Control Engineering Practice**, v. 17, n. 12, p. 1380-1387, 2009.

ZENG, Q; CAO, G; ZHU, X. The effect of the fractional-order controller's orders variation on the fractional-order control systems. **Proceedings. international conference on machine learning and cybernetics**, Beijing, v. 1, p. 367-372, nov. 2002.

ZHAO, C; XUE, D; CHEN, Y. A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plants. **Mechatronics and Automation, 2005 IEEE International Conference**, v. 1, p. 216-221, 2005.

ZIEGLER, J; NICHOLS, N. Optimum settings for automatic controllers. **Transactions ASME**, v. 64, p. 759-768, 1942.

## APÊNDICE A – TABELAS DADOS EXPERIMENTAIS

### DADOS EXPERIMENTAIS 1º DEGRAU (25 s) (Experimento I)

| <u>Tempo</u> | <u>T° in</u> | <u>T° out</u> | <u>Tempo norm.</u> | <u>Degrau</u> | <u>Saída desvio</u> |
|--------------|--------------|---------------|--------------------|---------------|---------------------|
| 0            | 23,75        | 30,62         | 0,0000             | 11,38         | 0                   |
| 25           | 27,75        | 30,62         | 0,0250             | 11,38         | 0                   |
| 50           | 32,75        | 31            | 0,0500             | 11,38         | 0,38                |
| 75           | 34,38        | 31,62         | 0,0750             | 11,38         | 1                   |
| 100          | 34,88        | 32,25         | 0,1000             | 11,38         | 1,63                |
| 125          | 35           | 33            | 0,1250             | 11,38         | 2,38                |
| 150          | 35           | 33,88         | 0,1500             | 11,38         | 3,26                |
| 175          | 35,13        | 34,25         | 0,1750             | 11,38         | 3,63                |
| 200          | 35,13        | 34,88         | 0,2000             | 11,38         | 4,26                |
| 225          | 35,13        | 35,25         | 0,2250             | 11,38         | 4,63                |
| 250          | 35,25        | 35,75         | 0,2500             | 11,38         | 5,13                |
| 275          | 35,13        | 36,38         | 0,2750             | 11,38         | 5,76                |
| 300          | 35,13        | 36,38         | 0,3000             | 11,38         | 5,76                |
| 325          | 35           | 36,88         | 0,3250             | 11,38         | 6,26                |
| 350          | 35,13        | 37,13         | 0,3500             | 11,38         | 6,51                |
| 375          | 35,25        | 37,5          | 0,3750             | 11,38         | 6,88                |
| 400          | 35,13        | 37,75         | 0,4000             | 11,38         | 7,13                |
| 425          | 35,13        | 38,13         | 0,4250             | 11,38         | 7,51                |
| 450          | 35,13        | 38,38         | 0,4500             | 11,38         | 7,76                |
| 475          | 35           | 38,63         | 0,4750             | 11,38         | 8,01                |
| 500          | 35,13        | 38,88         | 0,5000             | 11,38         | 8,26                |
| 525          | 35,25        | 39            | 0,5250             | 11,38         | 8,38                |
| 550          | 35,25        | 39,25         | 0,5500             | 11,38         | 8,63                |
| 575          | 35,25        | 39,63         | 0,5750             | 11,38         | 9,01                |
| 600          | 35,13        | 39,75         | 0,6000             | 11,38         | 9,13                |
| 625          | 35,13        | 39,75         | 0,6250             | 11,38         | 9,13                |
| 650          | 35,13        | 40            | 0,6500             | 11,38         | 9,38                |
| 675          | 35,13        | 40,13         | 0,6750             | 11,38         | 9,51                |
| 700          | 35,13        | 40,25         | 0,7000             | 11,38         | 9,63                |
| 725          | 35,25        | 40,25         | 0,7250             | 11,38         | 9,63                |
| 750          | 35,25        | 40,5          | 0,7500             | 11,38         | 9,88                |
| 775          | 35,13        | 40,5          | 0,7750             | 11,38         | 9,88                |
| 800          | 35,13        | 40,88         | 0,8000             | 11,38         | 10,26               |
| 825          | 35,13        | 40,88         | 0,8250             | 11,38         | 10,26               |
| 850          | 35           | 41            | 0,8500             | 11,38         | 10,38               |
| 875          | 35,13        | 40,88         | 0,8750             | 11,38         | 10,26               |
| 900          | 35,13        | 41            | 0,9000             | 11,38         | 10,38               |
| 925          | 35,13        | 41            | 0,9250             | 11,38         | 10,38               |
| 950          | 35,13        | 41,25         | 0,9500             | 11,38         | 10,63               |

|      |       |       |        |       |       |
|------|-------|-------|--------|-------|-------|
| 975  | 35,13 | 41,13 | 0,9750 | 11,38 | 10,51 |
| 1000 | 35,13 | 41,38 | 1,0000 | 11,38 | 10,76 |

**DADOS EXPERIMENTAIS 2º DEGRAU (25 s) (Experimento II)**

| Tempo | T° in | T° out | Tempo norm. | Degrau | Saída desvio |
|-------|-------|--------|-------------|--------|--------------|
| 0     | 35,13 | 41,38  | 0,0000      | 10     | 0            |
| 25    | 36,38 | 41,38  | 0,0244      | 10     | 0            |
| 50    | 41,88 | 41,5   | 0,0488      | 10     | 0,12         |
| 75    | 43,88 | 41,88  | 0,0732      | 10     | 0,5          |
| 100   | 44,38 | 42,5   | 0,0976      | 10     | 1,12         |
| 125   | 44,75 | 43     | 0,1220      | 10     | 1,62         |
| 150   | 44,75 | 43,63  | 0,1463      | 10     | 2,25         |
| 175   | 44,88 | 44,25  | 0,1707      | 10     | 2,87         |
| 200   | 44,75 | 44,38  | 0,1951      | 10     | 3            |
| 225   | 44,88 | 45,25  | 0,2195      | 10     | 3,87         |
| 250   | 44,75 | 45,25  | 0,2439      | 10     | 3,87         |
| 275   | 44,88 | 45,88  | 0,2683      | 10     | 4,5          |
| 300   | 44,63 | 46,13  | 0,2927      | 10     | 4,75         |
| 325   | 44,88 | 46,5   | 0,3171      | 10     | 5,12         |
| 350   | 44,88 | 46,75  | 0,3415      | 10     | 5,37         |
| 375   | 44,88 | 47,13  | 0,3659      | 10     | 5,75         |
| 400   | 45    | 47,38  | 0,3902      | 10     | 6            |
| 425   | 44,88 | 47,63  | 0,4146      | 10     | 6,25         |
| 450   | 45,13 | 48,13  | 0,4390      | 10     | 6,75         |
| 475   | 45    | 48,13  | 0,4634      | 10     | 6,75         |
| 500   | 45,13 | 48,5   | 0,4878      | 10     | 7,12         |
| 525   | 44,88 | 48,75  | 0,5122      | 10     | 7,37         |
| 550   | 45    | 48,75  | 0,5366      | 10     | 7,37         |
| 575   | 45,13 | 49     | 0,5610      | 10     | 7,62         |
| 600   | 45,13 | 49,13  | 0,5854      | 10     | 7,75         |
| 625   | 45    | 49,38  | 0,6098      | 10     | 8            |
| 650   | 44,88 | 49,38  | 0,6341      | 10     | 8            |
| 675   | 44,88 | 49,5   | 0,6585      | 10     | 8,12         |
| 700   | 44,88 | 49,75  | 0,6829      | 10     | 8,37         |
| 725   | 44,88 | 49,63  | 0,7073      | 10     | 8,25         |
| 750   | 45    | 49,75  | 0,7317      | 10     | 8,37         |
| 775   | 45    | 50,13  | 0,7561      | 10     | 8,75         |
| 800   | 45    | 50,13  | 0,7805      | 10     | 8,75         |
| 825   | 44,88 | 50,25  | 0,8049      | 10     | 8,87         |
| 850   | 45    | 50,25  | 0,8293      | 10     | 8,87         |
| 875   | 45    | 50,38  | 0,8537      | 10     | 9            |
| 900   | 45    | 50,63  | 0,8780      | 10     | 9,25         |
| 925   | 45    | 50,5   | 0,9024      | 10     | 9,12         |
| 950   | 45,13 | 50,75  | 0,9268      | 10     | 9,37         |
| 975   | 45    | 50,63  | 0,9512      | 10     | 9,25         |

|      |       |       |        |    |      |
|------|-------|-------|--------|----|------|
| 1000 | 44,88 | 50,75 | 0,9756 | 10 | 9,37 |
| 1025 | 45,13 | 51    | 1,0000 | 10 | 9,62 |

**DADOS EXPERIMENTAIS 1° DEGRAU (20 s) (Experimento III)**

| <b>Tempo</b> | <b>T° in</b> | <b>T° out</b> | <b>Tempo norm.</b> | <b>Degrau</b> | <b>Saída desvio</b> |
|--------------|--------------|---------------|--------------------|---------------|---------------------|
| 0            | 23,7500      | 30,62         | 0                  | 11,38         | 0                   |
| 20           | 25,8700      | 30,62         | 0,02               | 11,38         | 0                   |
| 40           | 31,5000      | 30,75         | 0,04               | 11,38         | 0,13                |
| 60           | 33,6300      | 31,37         | 0,06               | 11,38         | 0,75                |
| 80           | 34,5000      | 31,75         | 0,08               | 11,38         | 1,13                |
| 100          | 34,88        | 32,25         | 0,1                | 11,38         | 1,63                |
| 120          | 35           | 33            | 0,12               | 11,38         | 2,38                |
| 140          | 35           | 33,63         | 0,14               | 11,38         | 3,01                |
| 160          | 35,13        | 33,88         | 0,16               | 11,38         | 3,26                |
| 180          | 35,13        | 34,5          | 0,18               | 11,38         | 3,88                |
| 200          | 35,13        | 34,88         | 0,2                | 11,38         | 4,26                |
| 220          | 35,25        | 35,13         | 0,22               | 11,38         | 4,51                |
| 240          | 35,13        | 35,63         | 0,24               | 11,38         | 5,01                |
| 260          | 35,25        | 35,88         | 0,26               | 11,38         | 5,26                |
| 280          | 35,25        | 36,38         | 0,28               | 11,38         | 5,76                |
| 300          | 35,13        | 36,38         | 0,3                | 11,38         | 5,76                |
| 320          | 35           | 36,88         | 0,32               | 11,38         | 6,26                |
| 340          | 35,13        | 37            | 0,34               | 11,38         | 6,38                |
| 360          | 35,25        | 37,38         | 0,36               | 11,38         | 6,76                |
| 380          | 35,25        | 37,63         | 0,38               | 11,38         | 7,01                |
| 400          | 35,13        | 37,75         | 0,4                | 11,38         | 7,13                |
| 420          | 35,13        | 38            | 0,42               | 11,38         | 7,38                |
| 440          | 35,25        | 38,25         | 0,44               | 11,38         | 7,63                |
| 460          | 35,13        | 38,5          | 0,46               | 11,38         | 7,88                |
| 480          | 35,13        | 38,75         | 0,48               | 11,38         | 8,13                |
| 500          | 35,13        | 38,88         | 0,5                | 11,38         | 8,26                |
| 520          | 35,25        | 38,88         | 0,52               | 11,38         | 8,26                |
| 540          | 35,25        | 39,25         | 0,54               | 11,38         | 8,63                |
| 560          | 35,25        | 39,38         | 0,56               | 11,38         | 8,76                |
| 580          | 35,25        | 39,5          | 0,58               | 11,38         | 8,88                |
| 600          | 35,13        | 39,75         | 0,6                | 11,38         | 9,13                |
| 620          | 35,13        | 39,63         | 0,62               | 11,38         | 9,01                |
| 640          | 35,25        | 40            | 0,64               | 11,38         | 9,38                |
| 660          | 35,13        | 40            | 0,66               | 11,38         | 9,38                |
| 680          | 35,13        | 40,13         | 0,68               | 11,38         | 9,51                |
| 700          | 35,13        | 40,25         | 0,7                | 11,38         | 9,63                |
| 720          | 35,25        | 40,25         | 0,72               | 11,38         | 9,63                |
| 740          | 35,13        | 40,38         | 0,74               | 11,38         | 9,76                |
| 760          | 35,13        | 40,63         | 0,76               | 11,38         | 10,01               |
| 780          | 35,13        | 40,63         | 0,78               | 11,38         | 10,01               |

|      |       |       |      |       |       |
|------|-------|-------|------|-------|-------|
| 800  | 35,13 | 40,88 | 0,8  | 11,38 | 10,26 |
| 820  | 35,13 | 40,88 | 0,82 | 11,38 | 10,26 |
| 840  | 35    | 40,75 | 0,84 | 11,38 | 10,13 |
| 860  | 35,13 | 41    | 0,86 | 11,38 | 10,38 |
| 880  | 35,13 | 40,88 | 0,88 | 11,38 | 10,26 |
| 900  | 35,13 | 41    | 0,9  | 11,38 | 10,38 |
| 920  | 35,13 | 41    | 0,92 | 11,38 | 10,38 |
| 940  | 35,13 | 41,25 | 0,94 | 11,38 | 10,63 |
| 960  | 35,13 | 41,13 | 0,96 | 11,38 | 10,51 |
| 980  | 35,13 | 41,25 | 0,98 | 11,38 | 10,63 |
| 1000 | 35,13 | 41,38 | 1    | 11,38 | 10,76 |

**DADOS EXPERIMENTAIS 2° DEGRAU (20 s) (Experimento IV)**

| Tempo | T° in | T° out | Tempo norm. | Degrau | Saída desvio |
|-------|-------|--------|-------------|--------|--------------|
| 0     | 35,13 | 41,38  | 0,00000     | 10     | 0            |
| 20    | 35,25 | 41,38  | 0,01961     | 10     | 0            |
| 40    | 40    | 41,5   | 0,03922     | 10     | 0,12         |
| 60    | 43,13 | 41,63  | 0,05882     | 10     | 0,25         |
| 80    | 44    | 41,88  | 0,07843     | 10     | 0,5          |
| 100   | 44,38 | 42,5   | 0,09804     | 10     | 1,12         |
| 120   | 44,88 | 43     | 0,11765     | 10     | 1,62         |
| 140   | 44,75 | 43,38  | 0,13725     | 10     | 2            |
| 160   | 44,88 | 43,88  | 0,15686     | 10     | 2,5          |
| 180   | 44,88 | 44,25  | 0,17647     | 10     | 2,87         |
| 200   | 44,75 | 44,38  | 0,19608     | 10     | 3            |
| 220   | 44,75 | 45,13  | 0,21569     | 10     | 3,75         |
| 240   | 44,88 | 45,38  | 0,23529     | 10     | 4            |
| 260   | 44,75 | 45,63  | 0,25490     | 10     | 4,25         |
| 280   | 44,88 | 45,88  | 0,27451     | 10     | 4,5          |
| 300   | 44,63 | 46,13  | 0,29412     | 10     | 4,75         |
| 320   | 44,88 | 46,5   | 0,31373     | 10     | 5,12         |
| 340   | 44,88 | 46,5   | 0,33333     | 10     | 5,12         |
| 360   | 44,88 | 46,88  | 0,35294     | 10     | 5,5          |
| 380   | 45    | 47     | 0,37255     | 10     | 5,62         |
| 400   | 45    | 47,38  | 0,39216     | 10     | 6            |
| 420   | 44,88 | 47,63  | 0,41176     | 10     | 6,25         |
| 440   | 45    | 48     | 0,43137     | 10     | 6,62         |
| 460   | 45,25 | 48     | 0,45098     | 10     | 6,62         |
| 480   | 45    | 48,25  | 0,47059     | 10     | 6,87         |
| 500   | 45,13 | 48,5   | 0,49020     | 10     | 7,12         |
| 520   | 45    | 48,75  | 0,50980     | 10     | 7,37         |
| 540   | 45,13 | 48,75  | 0,52941     | 10     | 7,37         |
| 560   | 45    | 48,75  | 0,54902     | 10     | 7,37         |
| 580   | 45,13 | 49,13  | 0,56863     | 10     | 7,75         |
| 600   | 45,13 | 49,13  | 0,58824     | 10     | 7,75         |

|      |       |       |         |    |      |
|------|-------|-------|---------|----|------|
| 620  | 45    | 49,38 | 0,60784 | 10 | 8    |
| 640  | 44,88 | 49,25 | 0,62745 | 10 | 7,87 |
| 660  | 44,88 | 49,5  | 0,64706 | 10 | 8,12 |
| 680  | 44,88 | 49,5  | 0,66667 | 10 | 8,12 |
| 700  | 44,88 | 49,75 | 0,68627 | 10 | 8,37 |
| 720  | 44,88 | 49,63 | 0,70588 | 10 | 8,25 |
| 740  | 45    | 49,75 | 0,72549 | 10 | 8,37 |
| 760  | 44,88 | 49,75 | 0,74510 | 10 | 8,37 |
| 780  | 45    | 50,25 | 0,76471 | 10 | 8,87 |
| 800  | 45    | 50,13 | 0,78431 | 10 | 8,75 |
| 820  | 44,88 | 50,25 | 0,80392 | 10 | 8,87 |
| 840  | 44,88 | 50,25 | 0,82353 | 10 | 8,87 |
| 860  | 45    | 50,5  | 0,84314 | 10 | 9,12 |
| 880  | 45    | 50,38 | 0,86275 | 10 | 9    |
| 900  | 45    | 50,63 | 0,88235 | 10 | 9,25 |
| 920  | 45,13 | 50,38 | 0,90196 | 10 | 9    |
| 940  | 45    | 50,75 | 0,92157 | 10 | 9,37 |
| 960  | 45    | 50,63 | 0,94118 | 10 | 9,25 |
| 980  | 44,88 | 50,88 | 0,96078 | 10 | 9,5  |
| 1000 | 44,88 | 50,75 | 0,98039 | 10 | 9,37 |
| 1020 | 45,13 | 51    | 1,00000 | 10 | 9,62 |