

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(MESTRADO)

Decomposições de Levi do Grupo Galileano e do Grupo de Poincaré

Maringá, 2021.

1

¹O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
ORIENTADOR: PROF. DR. JOSINEY ALVES DE SOUZA
ACADÊMICO: OSEIAS COSTA

Decomposições de Levi do Grupo Galileano e do Grupo de Poincaré

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza

Maringá - PR

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

C837d Costa, Oseias
Decomposições de Levi do grupo Galileano e do grupo de Poincaré / Oseias Costa. -- Maringá, 2021. 34 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2021.

1. Grupo Galileano. 2. Grupo de Poincaré. 3. Grupos de Lie de matrizes. 4. Decomposição de Levi. 5. Galilean Group. 6. Poincaré Group. 7. Matrix Lie Groups. 8. Levi's decomposition. I. Souza, Josiney Alves de, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 516.9

Edilson Damasio CRB9-1.123

OSEIAS COSTA

DECOMPOSIÇÕES DE LEVI DO GRUPO GALILEANO E DO GRUPO DE POINCARÉ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza - UEM (Presidente)

Prof. Dr. Lino Anderson Grama - IMECC-UNICAMP

Prof. Dr. Pedro Rogério Sérgio Gomes - UEL

Aprovada em: 01 de julho de 2021.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet.

Agradecimentos

À Deus, pelo dom da vida.

À minha namorada Camila Harmuch, que me incentivou, acreditou e torceu por mim.

À minha família pelo apoio e suporte nesta jornada.

À meu orientador Prof. Dr. Josiney Alves de Souza, pelo conhecimento transmitido, a atenção e colaboração neste trabalho.

Aos professores do Departamento em Matemática da UEM, por todas as valiosas lições ensinadas.

Aos meus amigos, que tornaram muitos momentos inesquecíveis.

À Capes, pelo suporte financeiro.

Resumo

Em Mecânica Clássica e Física Moderna, as mudanças de referenciais são governadas pelas transformações de Galileo e pelas transformações de Lorentz-Poincaré, respectivamente. Do ponto de vista físico, estas transformações são entidades completamente distintas. No presente trabalho, exploramos as estruturas das álgebras de Lie dos grupos de Galileo e de Poincaré para encontrar as diferenças matemáticas essenciais entre estes dois grupos.

Palavras-chave: Grupo Galileano, Grupo de Poicaré, Grupos de Lie de matrizes, Decomposição de Levi.

Abstract

In Classical Mechanics and Modern Physics, the changes in references are governed by the Galileo transformations and the Lorentz-Poincaré transformations, respectively. From a physical point of view, these transformations are completely different entities. In the present work, we explore the structures of the Lie algebras of the Galileo and Poincaré groups to find the essential mathematical differences between these two groups.

Key words: Galilean Group, Poicaré Group, Matrix Lie Groups, Levi's decomposition.

SUMÁRIO

Introdução	vi
1 Preliminares	1
1.1 Grupos de Matrizes	1
1.2 Produto semi-direto e formas bilineares	4
1.3 Álgebras de Lie	5
2 Grupos de Isometrias	9
2.1 Grupo Galileano	9
2.2 Grupo de Poincaré	16
3 Comparação e Resultados	26
4 Conclusões e Feedback	32
Referências	34

INTRODUÇÃO

Galileo Galilei foi um grande físico e astrônomo que revolucionou a física. Foi ele quem definiu o princípio de que as leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial. O grupo de Galileo é o objeto matemático fundamental desse princípio, também conhecido por relatividade de Galileo. Na relatividade galileana, as mudanças de referenciais são dadas por isometrias em um espaço euclidiano tridimensional que mantêm o tempo em uma quarta dimensão - transformações de Galileo.

Por muito tempo, pensou-se que a Mecânica Clássica descrevia os conceitos de velocidade e força para todos os observadores. Porém, Hendrik Lorentz e outros comprovaram que as equações do eletromagnetismo de Maxwell não se comportam de acordo com a transformação de Galileo quando o sistema de referência muda. As observações do fenômeno do eletromagnetismo podiam diferir para dois observadores que estivessem se movendo um em relação ao outro. A partir dos trabalhos de Henri Poincaré, a questão do tempo teve que ser reformulada.

Diante dessas descobertas, Albert Einstein então propôs a chamada Teoria da Relatividade Restrita ou Teoria Especial da Relatividade - em substituição à relatividade galileana - onde nela se admite que a velocidade da luz é uma constante e que as mudanças de referenciais são governadas pelas transformações de Lorentz em um espaço de Minkowski. Com a estrutura pseudo-riemanniana de Minkowski, a Relatividade Restrita rompeu com o paradigma euclidiano, mudando completamente a forma de ver o universo.

Do ponto de vista físico, portanto, os grupos de Galileo e de Poincaré são entidades essencialmente distintas, as quais sustentam formas dissociadas de interpretar os eventos universais. No presente trabalho, procuramos entender as diferenças matemáticas fundamentais entre estes dois grupos de transformações.

Em princípio, verificamos que o Grupo Galileano e o Grupo de Poincaré são grupos de Lie de mesma dimensão e podem ser descritos em forma de matrizes. Surgiu então a questão da possibilidade desses grupos serem matematicamente da mesma forma, ou seja, de serem grupos de Lie isomorfos ou localmente isomorfos, visto que seus espaços tangentes são linearmente iguais. A estratégia adotada para responder a esta questão consistiu em explorar as álgebras de Lie dos grupos, em especial, estudar as decomposições

de Levi destas álgebras. O resultado da análise mostrou uma incompatibilidade entre as estruturas das álgebras de Lie, revelando uma diferença fundamental entre os grupos de transformações.

Com isso podemos comprovar que, além da diferença física, os grupos em questão também diferem entre si matematicamente. Para chegar a este importante resultado foram usados conceitos da teoria de Lie, como a noção de radical e decomposição de Levi. Estes conceitos abordados dentro de cada grupo despertam curiosidade quanto as suas interpretações físicas.

Preliminares

Para melhor compreensão do presente trabalho é preciso estabelecer algumas preliminares. Neste capítulo trataremos de expor algumas definições, proposições e teoremas fundamentais para os capítulos seguintes. Tais conceitos foram retirados de [1] e [2]. Na seção 1.1 introduzimos as ideias básicas de grupos, grupos de Lie de matrizes e álgebras de Lie de matrizes. Já na seção 1.2 abordamos sobre produto semi-direto e formas bilineares e por fim chegamos na seção 1.3 onde tratamos de alguns conceitos gerais de álgebras de Lie.

1.1 Grupos de Matrizes

Definição 1.1.1. *Seja $G \neq \emptyset$. Dizemos que G é um grupo se existe uma operação interna "·" satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para todos $x, y, z \in G$.
- Existe $e \in G$ tal que $e \cdot x = x \cdot e = x$ para todo $x \in G$.
- Para cada $x \in G$, existe $x^{-1} \in G$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Definição 1.1.2. *Um grupo G é dito abeliano se $xy = yx$, para todos $x, y \in G$.*

Definição 1.1.3. *Sejam G e H dois grupos. Uma aplicação $\phi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo se satisfaz $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para todos $x, y \in G$.*

Um homomorfismo injetor é chamado de monomorfismo, enquanto que um homomorfismo bijetor é chamado de isomorfismo. Um isomorfismo $\phi : G \rightarrow G$ é chamado de automorfismo.

Exemplo 1.1.4. Denote por $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Seja $GL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ o subconjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis, munido com a operação de multiplicação de matrizes. É um grupo chamado grupo linear geral.

Definição 1.1.5. Um **grupo de Lie de Matrizes** é qualquer subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{R})$ (considerando a topologia de $GL(n, \mathbb{R})$).

Exemplo 1.1.6. Além do próprio $GL(n, \mathbb{R})$ (já que $GL(n, \mathbb{R})$ é fechado em si mesmo), podem ser citados o grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$ das matrizes em $GL(n, \mathbb{R})$ que preservam o produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathbb{R}^n e o grupo ortogonal especial $SO(n, \mathbb{R})$ das matrizes em $O(n, \mathbb{R})$ com determinante 1.

De modo geral podemos definir $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ tais que } \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}^n\}$. Onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é produto interno canônico. $O(n, \mathbb{R})$ munido da operação produto de matrizes é um grupo. De fato $Id_n \in O(n, \mathbb{R})$, pois $\langle Id_n x, Id_n y \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Logo $O(n, \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Veja que se $A, B \in O(n, \mathbb{R})$ então $\langle ABx, AB y \rangle = \langle A(Bx), A(By) \rangle = \langle Bx, By \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Assim $AB \in O(n, \mathbb{R})$, donde temos que a operação está bem definida e ainda a transitividade é herdada de $GL(n, \mathbb{R})$. Além disso se $A \in O(n, \mathbb{R})$ então $\langle A^{-1}x, A^{-1}y \rangle = \langle A(A^{-1}x), A(A^{-1}y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Logo $A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$. Portanto $O(n, \mathbb{R})$ é um grupo. Pela continuidade do produto interno, segue que $O(n, \mathbb{R})$ é fechado. Usando o fato de que determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes é fácil ver que $SO(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie de matrizes.

Definição 1.1.7. Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas reais. Define-se a **exponencial** de A , denotada e^A , a matriz dada pela série de potências:

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Definição 1.1.8. Seja G um grupo de Lie de matrizes. A **álgebra de Lie**, denotada por \mathfrak{g} , é o conjunto das matrizes A tais que $e^{tA} \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

A álgebra de Lie \mathfrak{g} de um grupo de Lie de matrizes G pode ser identificada com o espaço vetorial dos vetores tangentes à identidade I , ou seja, $A \in \mathfrak{g}$ se e somente se $A = \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t) |_{t=0}$ onde $\gamma(t)$ é uma curva diferenciável em G com $\gamma(0) = I$.

Exemplo 1.1.9. A álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ é o espaço das transformações lineares de \mathbb{R}^n (matrizes $n \times n$), denotado por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$; a de $O(n, \mathbb{R})$ é o espaço $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ das matrizes antisimétricas ($A^t + A = 0$); a de $SO(n, \mathbb{R})$ também é $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$.

A dimensão de um grupo de Lie de matrizes é definida como a dimensão de sua álgebra. Assim a dimensão de $GL(n, \mathbb{R})$ é n^2 e a de $O(n, \mathbb{R})$ e $SO(n, \mathbb{R})$ é $\frac{n^2 - n}{2}$.

Definição 1.1.10. Seja G um grupo de Lie de matrizes e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. O **colchete de Lie de matrizes** em \mathfrak{g} é definido pelo comutador:

$$[A, B] = AB - BA, \quad A, B \in \mathfrak{g}$$

O colchete de Lie da álgebra de Lie \mathfrak{g} de um grupo de Lie de matrizes G se relaciona com o produto de G pela expressão:

$$[A, B] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} (e^{tA} e^{sB} e^{-tA})$$

para $t = s = 0$. Esse colchete é uma forma bilinear, antissimétrica e respeita a identidade de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.1.11. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, \mathfrak{g} é chamada abeliana se $[A, B] = 0$ para todos $A, B \in \mathfrak{g}$.*

Definição 1.1.12. *Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} duas álgebras de Lie de matrizes. Uma transformação linear $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um **homomorfismo de álgebras de Lie** se :*

$$\tau[A, B] = [\tau(A), \tau(B)]$$

para todos $A, B \in \mathfrak{g}$.

Um isomorfismo $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é dito um automorfismo de \mathfrak{g} . O conjunto dos automorfismos de \mathfrak{g} com a operação de composição forma um grupo, chamado grupo de automorfismos de \mathfrak{g} e denotado por $Aut(\mathfrak{g})$.

Proposição 1.1.13. *Sejam G e H grupos de Lie de matrizes com álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , respectivamente. Se $\phi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo diferenciável, então a diferencial $d_I \phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ de ϕ na identidade I é um homomorfismo de álgebras de Lie de matrizes.*

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathfrak{g}$ temos:

$$\begin{aligned} d\phi_I[A, B] &= d\phi_I\left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} e^{tA} e^{sB} e^{-tA} \Big|_{t=s=0}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} d\phi_I\left(\frac{\partial}{\partial s} e^{tA} e^{sB} e^{-tA} \Big|_{s=0}\right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \phi(e^{tA} e^{sB} e^{-tA}) \Big|_{t=s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} (\phi(e^{tA}) \phi(e^{sB}) \phi(e^{-tA})) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \phi(e^{tA}) d\phi_I(B) \phi(e^{-tA}) \Big|_{t=0} \\ &= d\phi_I(A) d\phi_I(B) - d\phi_I(B) d\phi_I(A) \\ &= [d\phi_I(A), d\phi_I(B)] \end{aligned}$$

Logo, a diferencial $d\phi_I : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie de matrizes. \square

1.2 Produto semi-direto e formas bilineares

Definição 1.2.1. *Sejam G e H dois grupos, com H um grupo métrico. Dado um homomorfismo $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(H)$, define-se o **produto semidireto** $G \ltimes_{\rho} H$ por*

$$(g_1; h_1) *_{\rho} (g_2; h_2) = (g_1 g_2; h_1 \rho(g_1)(h_2))$$

e o produto semidireto $G \ltimes^{\rho} H$ por

$$(g_1; h_1) *^{\rho} (g_2; h_2) = (g_1 g_2; \rho(g_2)(h_1) h_2)$$

Não é difícil ver que $G \ltimes_{\rho} H$ e $G \ltimes^{\rho} H$ são grupos, onde, em ambos os casos, o elemento identidade é $(1_G; 1_H)$ e o elemento inverso de $(g; h)$ é

$$(g; h)^{-1} = (g^{-1}, \rho(g^{-1})(h^{-1}))$$

Esses dois tipos de produto semidireto contém cópias de suas componentes, pois $G \times 1_H$ é um subgrupo isomorfo a G enquanto que $1_G \times H$ é um subgrupo normal isomorfo a H . Note que se $\rho(g) = \text{Id}_H$ para todo $g \in G$, então ambos $G \ltimes_{\rho} H$ e $G \ltimes^{\rho} H$ coincidem com o produto direto $G \times H$.

Definição 1.2.2. *Seja V um espaço vetorial real. Uma **forma bilinear** sobre V é uma função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que é linear em cada uma das variáveis.*

Denotamos por $B(V, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as formas bilineares sobre V . Munido com as operações de soma de funções e de multiplicação por escalar, $B(V, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.

Toda forma bilinear sobre um espaço de dimensão n está associada a uma matriz real $n \times n$, conforme a seguinte definição.

Definição 1.2.3. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Para cada $f \in B(V, \mathbb{R})$, a matriz de f na base \mathcal{B} é definida por*

$$[f]_{\mathcal{B}} = (f(v_i, v_j))_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

A correspondência $f \in B(V, \mathbb{R}) \rightarrow [f]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é um isomorfismo linear entre os espaços vetoriais $B(V, \mathbb{R})$ e $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. A principal importância desta correspondência é que podemos representar a forma bilinear f pela sua matriz $[f]_{\mathcal{B}}$ usando a fórmula

$$f(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^t [f]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}$$

onde $[v]_{\mathcal{B}}$ denota a matriz coluna formada pelas coordenadas do vetor v na base \mathcal{B} e $[u]_{\mathcal{B}}^t$ denota a transposta de $[u]_{\mathcal{B}}$, ou seja, a matriz linha das coordenadas de u na base \mathcal{B} . Se \mathcal{B}' é outra base de V e M é a matriz de mudança de bases de \mathcal{B} para \mathcal{B}' , então

$$[f]_{\mathcal{B}'} = M^t [f]_{\mathcal{B}} M.$$

Definição 1.2.4. *Uma forma bilinear $f \in B(V, \mathbb{R})$ é dita simétrica se $f(u, v) = f(v, u)$ para todos $u, v \in V$.*

Em termos da representação matricial, uma forma bilinear $f \in B(V, \mathbb{R})$ é simétrica se e somente se sua matriz $[f]_{\mathcal{B}}$ é simétrica em qualquer base \mathcal{B} de V .

Definição 1.2.5. *Uma forma bilinear $f \in B(V, \mathbb{R})$ é dita degenerada se existe um elemento não nulo $v \in V$ que satisfaz $f(v, u) = 0$ para todo $u \in V$.*

Uma forma bilinear $f \in B(V, \mathbb{R})$ é degenerada se e somente se $\det[f]_{\mathcal{B}} = 0$ para qualquer base \mathcal{B} de V .

Definição 1.2.6. *Um **produto interno** sobre um espaço vetorial real V é uma forma bilinear simétrica que é positiva definida, ou seja, $f(u, u) > 0$ sempre que $u \neq 0$. Logo, um produto interno é uma forma bilinear simétrica e não degenerada.*

1.3 Álgebras de Lie

Muito mais geral que as álgebras de Lie de matrizes são as álgebras de Lie. Naturalmente as álgebras de Lie de matrizes são álgebras de Lie. Veremos alguns conceitos desta teoria mais abrangente, que se aplicam no caso particular das álgebras de Lie de matrizes.

Definição 1.3.1. *Uma **álgebra de Lie** é um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de um produto (as vezes chamado de colchete ou comutador):*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Satisfazendo:

- *É bilinear.*
- *Anti-simétrico, ou seja, $[X, Y] = -[Y, X]$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.*
- *Obedece a identidade de Jacobi:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.3.2. *Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é uma **subálgebra** de \mathfrak{g} se para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

Definição 1.3.3. Um subespaço $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ é um **ideal** de \mathfrak{g} se para todo $Y \in \mathfrak{b}, X \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] \in \mathfrak{b}$. Dito de outra forma:

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] = \text{ger} \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{b}\} \subset \mathfrak{b}.$$

Onde *ger* indica o espaço gerado por $[X, Y]$. \mathfrak{g} e 0 são ditos ideais triviais. É fácil ver que todo ideal de \mathfrak{g} é uma subálgebra de \mathfrak{g} , mas a recíproca não é válida, como veremos a seguir no exemplo.

Exemplo 1.3.4. Seja $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo de álgebras, então:

- $\ker(\tau)$ é um ideal \mathfrak{g} .
- $\text{Im}(\tau)$ é uma subálgebra de \mathfrak{h} .

A partir daqui para dois subconjuntos A e B de \mathfrak{g} (\mathfrak{g} sempre tomada como uma álgebra de Lie) denotaremos por $[A, B]$ o subespaço gerado por:

$$\{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

Definimos por indução, os seguintes subespaços de \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

⋮

$$\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$$

Esses subespaços são ideais de \mathfrak{g} . De fato, pois se l e m são ideais de \mathfrak{g} então pela identidade de Jacobi segue que $[l, m]$ também é ideal de \mathfrak{g} . Logo $\mathfrak{g}', \dots, \mathfrak{g}^{(k)}$ são ideais de \mathfrak{g} . Essa série de ideais é conhecida como série derivada de \mathfrak{g} . Cada componente dessa série é dita uma álgebra derivada de \mathfrak{g} .

Exemplo 1.3.5. • Se \mathfrak{g} é abeliana então $\mathfrak{g}' = 0$.

$$\bullet \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathfrak{g}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathfrak{g}'' = 0.$$

Definição 1.3.6. Uma álgebra de Lie é **solúvel** se alguma de suas álgebras derivadas se anula, ou seja,

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$$

para algum $k_0 \geq 1$ e logo $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para todo $k \geq k_0$.

Exemplo 1.3.7. • Toda álgebra abeliana é solúvel.

• Toda álgebra de matrizes triangulares superiores é solúvel.

Proposição 1.3.8. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. Se \mathfrak{h} e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ são solúveis então \mathfrak{g} é solúvel.*

Demonstração. Se $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel, existe k_1 tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{k_1} = \{0\}$. Do fato que $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}$, temos $\pi(\mathfrak{g}^{(k_1)}) = 0$. Isto quer dizer que $\mathfrak{g}^{(k_1)}$ está contido em \mathfrak{h} , pois sua projeção é 0. Como \mathfrak{h} é solúvel deve existir k_2 de modo que $\mathfrak{h}^{(k_2)} = \{0\}$. Donde segue

$$\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)} = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)} \subset \mathfrak{h}^{(k_2)} = \{0\}.$$

Portanto \mathfrak{g} é solúvel. □

Proposição 1.3.9. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in \mathfrak{g}$ ideais solúveis (como álgebras de Lie). Então $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ também é ideal solúvel de \mathfrak{g} .*

Demonstração. Não é difícil notar que a soma de ideais é ideal. Agora, para mostrarmos que tal soma de dois ideais solúveis \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 usamos um dos teoremas do isomorfismo de álgebras de Lie:

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2 \approx \mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$$

Dado que \mathfrak{h}_1 é solúvel então $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ é solúvel e daí segue que $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2$ é solúvel. de modo que \mathfrak{h}_2 é solúvel então pela proposição 1.3.8 $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ é solúvel. □

Proposição 1.3.10. *Seja \mathfrak{g} álgebra de Lie de dimensão finita, existe em \mathfrak{g} um único ideal solúvel $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ que contém todos ideais solúveis de \mathfrak{g} .*

Demonstração. Seja n a dimensão máxima dos ideais solúveis de \mathfrak{g} e seja \mathfrak{r} um ideal solúvel com $\dim \mathfrak{r} = n$. Afiramos que todo ideal solúvel de \mathfrak{g} está contido em \mathfrak{r} . De fato, se \mathfrak{h} é ideal solúvel, pela proposição 1.3.10 $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$ é solúvel. Daí temos $\dim(\mathfrak{r} + \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{r}$ pela maximilidade da dimensão. Logo $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$ e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$. Portanto segue que \mathfrak{r} contém todos os ideais solúveis de \mathfrak{g} , e é claro que é único. □

Definição 1.3.11. *O ideal \mathfrak{r} da proposição 1.3.10 é chamado de **radical solúvel** (ou radical) de \mathfrak{g} e é denotado por $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.*

Definição 1.3.12. *Uma álgebra de \mathfrak{g} é dita **semisimples** se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$. Ou seja, \mathfrak{g} não contém ideais solúveis além de 0.*

Teorema 1.3.13. *(Teorema da decomposição de Levi) Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita e $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ o seu radical solúvel. Então, existe uma subálgebra \mathfrak{s} de \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Como $\mathfrak{s} \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, \mathfrak{s} é semisimples.*

Omitimos a demonstração deste resultado, devido a mesma necessitar de conceitos que sobrecarregariam estas preliminares, para detalhes por completo consulte o Teorema da decomposição de Levi em [2].

Grupos de Isometrias

Agora estando em condições adequadas, vamos introduzir dois grupos de isometrias. O primeiro grupo, chamado Grupo Galileano, decorre da teoria da relatividade da física clássica desenvolvida por Galileo Galilei. Nesta teoria, o grupo Galileano é formado por todas as transformações Galileanas de um espaço euclidiano quadridimensional dito espaço Galileano. O segundo grupo, chamado Grupo de Poicaré, decorre da teoria da relatividade de Albert Einstein e é formado pelas isometrias de um espaço de Minkowski de dimensão 4. Em ambos os grupos o espaço quadridimensional representa o tempo e o espaço. Veremos adiante alguns detalhes e suas construções.

2.1 Grupo Galileano

Inicialmente precisamos conhecer a estrutura Galileana. Segundo [3] a estrutura galileana consiste dos seguintes elementos:

- O universo é representado por um espaço afim de dimensão 4, denotado por \mathbb{A}^4 . Cada ponto de \mathbb{A}^4 é chamado de *evento*. Tomando o grupo dos deslocamentos paralelos no universo \mathbb{A}^4 temos o espaço vetorial euclidiano \mathbb{R}^4 .
- O Tempo, visto como um funcional linear (não-nulo) $\gamma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ do espaço vetorial dos deslocamentos paralelos do universo para o "eixo de tempo" real. O intervalo de tempo do evento $A \in \mathbb{A}^4$ ao evento $B \in \mathbb{A}^4$ é dado por $\gamma(B - A)$. Se $\gamma(B - A) = 0$, então dizemos que os eventos A e B são *simultâneos*.
- A distância entre dois eventos simultâneos é definida como $d(A, B) = \|B - A\|$, onde A e B são eventos simultâneos.

Para que um vetor u pertença ao núcleo de γ é necessário e suficiente que para todo $A \in \mathbb{A}^4$ o evento $B = A + u$ é simultâneo com A . Com efeito $u \in \ker \gamma \leftrightarrow \gamma(B - A) = \gamma(A + u - A) = \gamma(u) = 0$. Portanto o conjunto dos eventos simultâneos a um dado evento está em correspondência biunívoca com o núcleo do funcional linear γ . De maneira que

o núcleo de γ é um subespaço de dimensão três em \mathbb{R}^4 , segue que um conjunto máximo de eventos simultâneos forma um subespaço afim de dimensão 3 em \mathbb{A}^4 . Tal subespaço é chamado de espaço de eventos simultâneos e é representado como \mathbb{A}^3 . Dessa forma, cada espaço de eventos simultâneos munido com a distância entre eventos simultâneos é um espaço euclidiano tridimensional \mathbb{E}^3 .

Um espaço afim \mathbb{A}^4 munido com uma estrutura galileana é chamado de *espaço galileano*. Uma transformação suave (C^∞) de um espaço galileano para outro espaço que preserva sua estrutura galileana é chamada de *transformação galileana generalizada*. Este conceito é desenvolvido em [3] e engloba transformações afins e não afins, ao contrário do que é feito tradicionalmente na física, por exemplo em [4]. Logo, uma transformação galileana generalizada é uma transformação de \mathbb{A}^4 que preserva intervalos de tempo e distâncias entre eventos simultâneos. O conjunto de todas as transformações galileanas de um espaço galileano munido com a operação de composição é um grupo, chamado de **grupo galileano global** e é denotado por $GAL(4)$.

Vamos descrever o grupo galileano de um espaço galileano com tempo $\gamma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, para isso consideramos uma base ortonormal $\{u_1; u_2; u_3\}$ de $Ker(\gamma)$. Escolhemos $u_0 \in \mathbb{R}^4$ de modo que $\gamma(u_0) = 1$. Como $u_0 \notin Ker(\gamma)$, temos que $\{u_0; u_1; u_2; u_3\}$ forma uma base ordenada de \mathbb{R}^4 . Fixamos essa base em \mathbb{R}^4 e consideramos um sistema de coordenadas $(O; u_0; u_1; u_2; u_3)$ de \mathbb{A}_4 . Então \mathbb{R}^4 se identifica com o produto direto $\mathbb{R} \times Ker(\gamma)$ e γ é a projeção da primeira coordenada.

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} \times Ker(\gamma) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto t \end{aligned}$$

Além disso, cada evento A de \mathbb{A}^4 também pode ser escrito em coordenadas na forma $A = (t; x_1; x_2; x_3) = (t; x)$. Note que dois eventos $A = (t; x)$ e $B = (s; y)$ são simultâneos se e somente se $t = s$. Logo, o conjunto dos eventos da forma $(0; x)$ correspondem ao espaço de eventos simultâneos da origem O do sistema de coordenadas, o qual pode ser identificado com o espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Portanto, o espaço dos eventos simultâneos com um evento $(t; 0)$ corresponde ao conjunto dos eventos da forma $(t; x)$ com $x \in \mathbb{R}^3$. Dessa forma, uma transformação $g : \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}$ pode ser escrita como $g(t; x) = (g_1(t; x); g_2(t; x))$, com $g_1 : \mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_2 : \mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Teorema 2.1.1. *Uma transformação galileana g tem a forma:*

$$g(t, x) = (t + k, R(t)(x) + \alpha(t)) \tag{2.1}$$

onde k é uma constante fixada, $R \in C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R}))$ e $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$.

Demonstração. Sejam $A = (t; x)$ e $B = (s; y)$ dois eventos em \mathbb{A}^4 e $g = (g_1; g_2)$ uma transformação galileana. Como g preserva intervalos, temos que:

$$\gamma(g(B) - g(A)) = \gamma(B - A).$$

Daí segue que

$g_1(t, x) - g_1(s, y) = t - s$. Dessa forma, para $B = (0; 0)$, obtemos a expressão de g_1

$$g_1(t, x) = t + g_1(0, 0)$$

onde $g_1(0, 0) \in \mathbb{R}$ é uma constante. Para determinar g_2 , fixamos $t \in \mathbb{R}$ e consideramos a transformação $g_2(t; \cdot) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como g preserva a distância entre eventos simultâneos, segue que $g_2(t; \cdot)$ é uma transformação afim em \mathbb{R}^3 , ou seja, $g_2(t; \cdot)$ é a composição de uma transformação ortogonal e uma translação, ou seja,

$$g_2(t; x) = R(t)(x) + \alpha(t, 0), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

com $R \in C^\infty(\mathbb{R}; O(3; \mathbb{R}))$ e $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$. \square

O produto e a inversão de elementos de $GAL(4)$ podem ser caracterizados a partir da expressão 2.1. Com efeito, dadas duas transformações galileanas g e h ,

$$g(t, x) = (t + s, R(t)(x) + \alpha(t))$$

$$h(t, x) = (t + r, S(t)(x) + \beta(t))$$

temos que

$$\begin{aligned} g \circ h(t, x) &= g(t + r, S(t)(x) + \beta(t)) \\ &= (t + r + s, R(t + r)(S(t)(x) + \beta(t + r)) + \alpha(t + r)) \\ &= (t + r + s, R \cdot rS(t)(x) + R \cdot r(t)(\beta(t)) + \alpha \cdot r(t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Não é difícil ver que o elemento identidade de $GAL(4)$ é a transformação identidade $e(t; x) = (t; x)$, enquanto que o elemento inverso de g é a transformação

$$g^{-1}(t, x) = (t - s, R(t - s)^{-1}(x) + R(t - s)^{-1}\alpha(t - s))$$

A expressão 2.2 incita que $GAL(4)$ tem uma estrutura de produto semidireto dos grupos \mathbb{R} , $(\mathbb{R}; O(3; \mathbb{R}))$ e $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$. A seguir determinaremos esse produto semidireto.

Proposição 2.1.2. *Para cada $R \in C^\infty(\mathbb{R}; O(3; \mathbb{R}))$, defina $\rho(R) : C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ por*

$$\rho(R)(\alpha(t)) = R(t)(\alpha(t)); \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3), t \in \mathbb{R}.$$

Então $\rho(R)$ é um automorfismo de $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$. A aplicação $\rho : C^\infty(\mathbb{R}; O(3; \mathbb{R})) \rightarrow \text{Aut}C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ definida por $\rho(R)$ é um homomorfismo de grupos.

Demonstração. Dadas as curvas $\alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ temos que:

$$\begin{aligned}\rho(R)(\alpha + \beta) &= R(t)(\alpha(t) + \beta(t)) \\ &= R(t)(\alpha(t)) + R(t)(\beta(t)) \\ &= \rho(R)(\alpha(t)) + \rho(R)(\beta(t)) \\ &= [\rho(R)(\alpha) + \rho(R)(\beta)](t)\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\rho(R)(\alpha + \beta) = \rho(R)(\alpha) + \rho(R)(\beta)$ e, portanto $\rho(R)$ é um homomorfismo de grupos. Agora, tome $S \in C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R}))$ definida por $S(t) = R(t)^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. É fácil ver que $\rho(S) = \rho(R)^{-1}$ e, portanto, $\rho(R)$ é um automorfismo. Agora sejam $R, S \in C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R}))$ e $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. Temos que

$$\begin{aligned}\rho(RS)(\alpha)(t) &= RS(t)(\alpha(t)) \\ &= R(t)S(t)(\alpha(t)) \\ &= \rho(R) \circ \rho(S)(\alpha)(t)\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\rho(RS) = \rho(R) \circ \rho(S)$ e, portanto, $\rho : C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Aut}C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ é um homomorfismo de grupos. \square

Considere o produto semidireto $C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_\rho C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ com o produto:

$$(R, \alpha) *_\rho (S, \beta) = (RS, \alpha + \rho(R)(\beta))$$

onde $\rho : C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Aut}C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ é o homomorfismo obtido anteriormente. \square

Proposição 2.1.3. Para cada $t \in \mathbb{R}$, defina $\theta(t) : C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_\rho C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_\rho C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ por

$$\theta(t)(R, \alpha) = (R \cdot t, \alpha \cdot t)$$

Então $\theta(t)$ é um automorfismo de $C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_\rho C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. A aplicação $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_\rho C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3))$ definida por $\theta(t)$ é um homomorfismo de grupos.

Demonstração. Dados $(R, \alpha), (S, \beta) \in C^\infty(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_\rho C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, temos que:

$$\begin{aligned}\theta(t)((R, \alpha) *_\rho (S, \beta)) &= \theta(t)(RS, \alpha + \rho(R)(\beta)) \\ &= (RS \cdot t, (\alpha + \rho(R)(\beta)) \cdot t) \\ &= (R \cdot tS \cdot t, \alpha \cdot t + \rho(R)(\beta) \cdot t) \\ &= (R \cdot tS \cdot t, \alpha \cdot t + \rho(R \cdot t)(\beta \cdot t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((R \cdot t, \alpha \cdot t) *_{\rho} (S \cdot t, \beta \cdot t)) \\
&= \theta(t)(R, \alpha) *_{\rho} \theta(t)(S, \beta)
\end{aligned}$$

Logo $\theta(t)$ é um homomorfismo. É fácil ver que $\theta(-t)$ é a aplicação inversa de $\theta(t)$. Portanto, $\theta(t)$ é um automorfismo. Agora, dados $t, s \in \mathbb{R}$ e $(R, \alpha) \in C^{\infty}(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_{\rho} C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, temos que:

$$\begin{aligned}
\theta(t+s)(R, \alpha) &= (R \cdot (t+s), \alpha \cdot (t+s)) \\
&= ((R \cdot s) \cdot t, (\alpha \cdot s) \cdot t) \\
&= \theta(t) \circ \theta(s)(R, \alpha)
\end{aligned}$$

Logo, $\theta(t+s) = \theta(t) \circ \theta(s)$ e, portanto, θ é um homomorfismo de grupos. \square

Enfim, considere o produto semidireto $\mathbb{R} \rtimes^{\theta} C^{\infty}(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_{\rho} C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ com o produto:

$$\begin{aligned}
(s, R, \alpha) *^{\theta} (r, S, \beta) &= (s+r, \theta(r)(R, \alpha) *_{\rho} (S, \beta)) \\
&= (s+r, (R \cdot r, \alpha \cdot r) *_{\rho} (S, \beta)) \\
&= (s+r, R \cdot rS, \alpha \cdot r + \rho(R \cdot r)(\beta))
\end{aligned}$$

Teorema 2.1.4. *O grupo galileano $GAL(4)$ é isomorfo ao produto semidireto $\mathbb{R} \rtimes^{\theta} C^{\infty}(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_{\rho} C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ definido acima.*

Demonstração. Defina $\phi : \mathbb{R} \rtimes^{\theta} C^{\infty}(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_{\rho} C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow GAL(4)$ por

$$\phi(s, R, \alpha)(t, x) = (t+s, R(t)(x) + \alpha(t))$$

para todo $(s, R, \alpha) \in \mathbb{R} \rtimes^{\theta} C^{\infty}(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_{\rho} C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ e $(t, x) \in \mathbb{A}^4$. Pela expressão geral de uma transformação galileana em 2.1, segue que ϕ está bem definida e é sobrejetiva. Além disso, se $\phi(s, R, \alpha) = \phi(r, S, \beta)$, então

$$(t+s, R(t)(x) + \alpha(t)) = (t+r, S(t)(x) + \beta(t))$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{A}^4$. Em particular, para $(t, 0)$, temos $(t+s, \alpha(t)) = (t+r, \beta(t))$, logo, $s = r$ e $\alpha = \beta$. Assim, para todo $(t, x) \in \mathbb{A}^4$, segue que $R(t)(x) = S(t)(x)$ e, portanto, $R = S$. Isso mostra que ϕ é também injetiva. Resta mostrar que ϕ é um homomorfismo. De fato, dados $(s, R, \alpha), (r, S, \beta) \in \mathbb{R} \rtimes^{\theta} C^{\infty}(\mathbb{R}; O(3, \mathbb{R})) \rtimes_{\rho} C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ e $(t, x) \in \mathbb{A}^4$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi((s, R, \alpha) *^{\theta} (r, S, \beta))(t, x) &= \phi((s+r, R \cdot rS, \alpha \cdot r + \rho(R \cdot r)(\beta)))(t, x) \\
&= (t+s+r, R \cdot rS(t)(x) + (\alpha \cdot r + \rho(R \cdot r)(\beta))(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (t + s + r, R \cdot rS(t)(x) + \alpha \cdot r(t) + R \cdot r(t)(\beta(t))) \\
&= (t + s + r, R(S \cdot r)(t)(x) + \alpha(t) + \rho(R)(\beta \cdot r)(t)) \\
&= \phi(s, R, \alpha) \circ \phi(r, S, \beta)(t, x)
\end{aligned}$$

Logo $\phi((s, R, \alpha) *^\theta (r, S, \beta)(t, x) = \phi(s, R, \alpha) \circ \phi(r, S, \beta)(t, x)$. \square

Na teoria da relatividade restrita de Galileo, uma transformação galileana tem a forma especial

$$\phi(s, R, \alpha)(t, x) = (t + s, R(x) + tv + y),$$

onde R é uma matriz ortogonal constante e $\alpha(t) = tv + y$ é uma reta em \mathbb{R}^3 . O grupo formado por essas transformações galileanas é chamado de **grupo galileano** e será denotado por $Gal(4)$. Então, o grupo galileano $Gal(4)$ da teoria da relatividade galileana é um subgrupo do grupo galileano global $GAL(4)$.

De acordo com o teorema 2.1.4, o grupo galileano $Gal(4)$ é isomorfo ao subgrupo $\mathbb{R} \rtimes^\theta O(3, \mathbb{R}) \rtimes_\rho \ell_3$ do produto semidireto $\mathbb{R} \rtimes^\theta C^\infty(\mathbb{R}, O(3, \mathbb{R})) \rtimes_\rho C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, onde ℓ_3 denota o espaço vetorial das retas em \mathbb{R}^3 . Então

$$Gal(4) \approx \mathbb{R} \rtimes^\theta O(3, \mathbb{R}) \rtimes_\rho \ell_3$$

por meio do isomorfismo $\phi : \mathbb{R} \rtimes^\theta O(3, \mathbb{R}) \rtimes_\rho \ell_3 \rightarrow Gal(4)$ construído no Teorema 2.1.4, considerando as restrições adequadas de todas as funções envolvidas.

Note que ℓ_3 é isomorfo á $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ com o isomorfismo linear $r : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \ell_3$ dado por $r(y, v)(t) = tv + y, t \in \mathbb{R}$. Veja também que a álgebra de Lie de ℓ_3 é o próprio ℓ_3 . Como a dimensão de \mathbb{R} é 1, a de $O(3; \mathbb{R})$ é 3 e a de ℓ_3 é 6, temos que a dimensão de $Gal(4)$ é 10.

Além da representação por um produto semidireto, mais interessante para nosso trabalho é o fato de que o grupo galileano $Gal(4)$ também é representado por um grupo de Lie de matrizes. Como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.1.5. *O grupo galileano $Gal(4)$ é isomorfo ao grupo de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s & 1 & 0 & 0 & 0 \\
y_1 & v_1 & & & \\
y_2 & v_2 & & R & \\
y_3 & v_3 & & &
\end{pmatrix}$$

com $R \in O(3; \mathbb{R})$, o qual é um grupo de Lie de matrizes.

Demonstração. Defina a aplicação $\psi : Gal(4) \rightarrow GL(5, \mathbb{R})$ por

$$\begin{aligned} \psi(\phi(s, R, r(y, v))) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & R & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ y & v & R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Evidentemente ψ é uma função injetiva. Além disso, sua imagem é um subgrupo fechado de $GL(5, \mathbb{R})$, pois se $\psi(\theta(s_n, R_n, r(y_n, v_n)))$ converge para $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ y & v & S \end{pmatrix}$, então $S \in O(3, \mathbb{R})$, logo $\psi(\theta(s_n; R_n; r(y_n; v_n))) \rightarrow \psi(\theta(s; S; r(y; v)))$.

Agora, dados $\phi(s; R; r(y; v)); \phi(r; S; r(z; u)) \in Gal(4)$, temos que

$$\phi(s, R, r(y, v)) \circ \phi(r, S, r(z, u))(t, x) = \phi(s + r, RS, r(x, w))(t, x)$$

com $x = R(z) + rv + y$ e $w = R(u) + v$. Assim,

$$\begin{aligned} \psi(\phi(s, R, r(y, v)) \circ \phi(r, S, r(z, u))) &= \psi(\phi(s + r, RS, r(x, w))) = \psi(\phi(s + r, RS, r(x, w))) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s + r & 1 & 0 \\ R(z) + rv + y & R(u) + v & RS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ y & v & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ z & u & S \end{pmatrix} \\ &= \psi(\theta(s; R; r(y; v)))\psi(\theta(r; S; r(z; u))) \end{aligned}$$

Logo, ψ é um homomorfismo de grupos. Como ψ é injetiva, segue que $Gal(4)$ é isomorfo à imagem de ψ , que é um grupo de Lie de matrizes. \square

Em resumo, temos os seguintes isomorfismos de grupos:

$$\mathbb{R} \rtimes^\theta O(3, \mathbb{R}) \rtimes_\rho \ell_3 \leftrightarrow Gal(4) \leftrightarrow G$$

onde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ y & x & R \end{pmatrix} \in GL(5, \mathbb{R}) : R \in O(3, \mathbb{R}) \right\}$$

Observamos que a composição $\psi \circ \phi$ é também um difeomorfismo de $\mathbb{R} \rtimes^\theta O(3, \mathbb{R}) \rtimes_\rho \ell_3$ em G , o que fornece à $\mathbb{R} \rtimes^\theta O(3, \mathbb{R}) \rtimes_\rho \ell_3$ uma estrutura de grupo de Lie de matrizes. Essa mesma estrutura é recebida pelo grupo galileano $Gal(4)$, o que o torna um grupo de Lie.

Sobre a topologia do grupo galileano, é fácil ver $Gal(4)$ não é conexo, pois $O(3; \mathbb{R})$ não o é. Porém, como \mathbb{R} e ℓ_3 são conexos e que $O(3; \mathbb{R})$ possui duas componentes conexas, segue que $Gal(4)$ possui duas componentes conexas representadas pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de } O(3; \mathbb{R}).$$

A seguir vamos encontrar a álgebra de Lie $\mathfrak{gal}(4)$ de $Gal(4)$. A representação matricial de $\mathfrak{gal}(4)$ segue imediatamente do teorema 2.1.5.

Corolário 2.1.6. *A álgebra de Lie $\mathfrak{gal}(4)$ do grupo galileano $Gal(4)$ é isomorfa à álgebra de Lie de matrizes*

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ y & v & X \end{pmatrix} \in GL(5, \mathbb{R}) : X \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \right\}$$

Demonstração. Note que \mathfrak{g} é a álgebra de Lie do grupo de matrizes G . Daí o resultado segue pela Proposição 1.1.13. \square

2.2 Grupo de Poincaré

Antes de chegar ao grupo de Poincaré é preciso entender o espaço de Minkowski e o grupo ortogonal generalizado. Segundo [5] o espaço-tempo de Minkowski é um espaço vetorial de dimensão 4 equipado com a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,3}$ definida por

$$\langle x, y \rangle_{1,3} = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

onde $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ são escritos em uma base ortonormal. De modo semelhante ao Grupo Galileano a componente x_0 do vetor x é chamada de componente temporal enquanto que as outras três componentes x_1, x_2, x_3 são chamadas de componentes espaciais. A forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,3}$ é simétrica e não degenerada, com assinatura $(-, +, +, +)$. Devido a esse fato, o espaço-tempo de Minkowski é usualmente denotado por \mathbb{R}^{-1+3} para enfatizar a assinatura. É comum num abuso de linguagem chamar essa forma de produto interno de Minkowski, mas é fácil observar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,3}$ não se trata de um produto interno, pois é indefinida. No entanto, essa forma possui propriedades capazes de classificar os vetores de \mathbb{R}^{1+3} , chamados de eventos, em três tipos distintos:

- O evento x é do tipo tempo se $\langle x, x \rangle_{1,3} < 0$;

- O evento x é do tipo espaço se $\langle x, x \rangle_{1,3} > 0$;
- O evento x é do tipo luz se $\langle x, x \rangle_{1,3} = 0$.

A forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,3}$ define uma métrica, que é chamada métrica de Lorentz ou de Minkowski. Essa métrica estabelece o conceito de ortogonalidade hiperbólica em \mathbb{R}^{1+3} . De maneira muito análogo a ortogonalidade euclidiana dizemos que dois vetores x e y são ortogonais se $\langle x, y \rangle_{1,3} = 0$.

A partir da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,3}$, define-se também a norma de Minkowski $\| \cdot \|_{1,3}$ e a distância de Minkowski $d_{1,3}$ dadas por

$$\| x \|_{1,3} = \sqrt{|\langle x, x \rangle_{1,3}|} \quad \text{e} \quad d_{1,3}(x, y) = \| x - y \|_{1,3}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^{1+3}$. Novamente se trata de um abuso de linguagem, pois $\|x\|_{1,3}$ não é uma norma e $d_{1,3}$ não é uma distância, uma vez que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,3}$ é uma forma indefinida (implicando que $\| \cdot \|_{1,3}$ não é subaditiva). No entanto, a norma e a distância de Minkowski dão boas noções e constroem o conceito de isometria em \mathbb{R}^{1+3} .

O *grupo ortogonal generalizado* é um grupo de Lie de matrizes que depende de uma forma bilinear simétrica sobre \mathbb{R}^n a qual não se trata de um produto interno. O *grupo de Lorentz* é um subgrupo de um grupo ortogonal generalizado que age no espaço quadridimensional.

Definição 2.2.1. *Sejam k e n números inteiros positivos, com $n > k$ e consideremos o espaço euclidiano \mathbb{R}^{k+n} munido com o produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definimos a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n} : \mathbb{R}^{k+n} \times \mathbb{R}^{k+n} \rightarrow \mathbb{R}$ pela fórmula*

$$\langle x, y \rangle_{k,n} = -x_1y_1 - \dots - x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1} + \dots + x_{k+n}y_{k+n}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_{k+n})$ e $y = (y_1, \dots, y_{k+n})$ são coordenadas da base canônica \mathcal{C} de \mathbb{R}^{k+n} . Definimos também a função $\| \cdot \|_{k,n} : \mathbb{R}^{k+n} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\| x \|_{k,n} = \sqrt{|\langle x, x \rangle_{k,n}|}$$

Proposição 2.2.2. *A função $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ definida acima é uma forma bilinear simétrica não degenerada sobre \mathbb{R}^{k+n} . Sua matriz $[\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}]_{\mathcal{C}}$ com respeito à base canônica \mathcal{C} de \mathbb{R}^{k+n} é*

$$[\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

onde 0 é o bloco nulo e I_m é o bloco matriz identidade de ordem m .

Demonstração. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^{k+n}$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \langle ax + z, y \rangle_{k,n} &= -a \sum_{j=1}^k x_j y_j + a \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j - \sum_{j=1}^k z_j y_j + \sum_{j=1}^{k+n} z_j y_j \\ &= a \left(- \sum_{j=1}^k x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j \right) - \sum_{j=1}^k z_j y_j + \sum_{j=1}^{k+n} z_j y_j \\ &= a \langle x, y \rangle_{k,n} + \langle z, y \rangle_{k,n}. \end{aligned}$$

Analogamente segue para a segunda entrada. Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ é uma forma bilinear sobre \mathbb{R}^{k+n} . Da comutatividade dos números reais segue que

$$\langle x, y \rangle_{k,n} = - \sum_{j=1}^k x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j = - \sum_{j=1}^k y_j x_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} y_j x_j = \langle y, x \rangle_{k,n}.$$

Portanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ é simétrica. A expressão da matriz $[\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}]_{\mathcal{C}}$ segue diretamente da definição de matriz associada a uma forma bilinear. Por fim, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ é não degenerada pois $\det [\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}]_{\mathcal{C}} = \pm 1$. □

Proposição 2.2.3. *Considere a forma quadrática $q(x) = \langle x, x \rangle_{k,n}$ associada à forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$. Existem vetores não nulos $x, y, z \in \mathbb{R}^{k+n}$ tais que*

$$q(x) > 0, \quad q(y) = 0, \quad q(z) < 0.$$

Demonstração. Podemos escrever explicitamente $q(x)$ na forma

$$q(x) = \langle x, x \rangle_{k,n} = - \sum_{j=1}^k x_j^2 + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j^2.$$

Como se trata de números reais, $x_j^2 \geq 0$ para todo j . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \text{se } \sum_{j=1}^k x_j^2 < \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j^2 &\text{ então } q(x) > 0; \\ \text{se } \sum_{j=1}^k x_j^2 = \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j^2 &\text{ então } q(x) = 0; \\ \text{se } \sum_{j=1}^k x_j^2 > \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j^2 &\text{ então } q(x) < 0. \end{aligned}$$

Não é difícil encontrar vetores que satisfazem essas condições. □

Apresentamos agora o operador linear auto-adjunto que representa a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$.

Proposição 2.2.4. *Seja $T : \mathbb{R}^{k+n} \rightarrow \mathbb{R}^{k+n}$ o operador linear auto-adjunto tal que $\langle x, y \rangle_{k,n} = \langle T(x), y \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Então*

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

e $[T]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}^{-1}$. Se \mathcal{B} é uma base ortonormal de \mathbb{R}^{k+n} com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então $[T]_{\mathcal{B}} = [\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}]_{\mathcal{B}}$.

Demonstração. Temos que

$$\langle x, y \rangle_{k,n} = -\sum_{j=1}^k x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j$$

e

$$\langle T(x), y \rangle_{k,n} = -\sum_{j=1}^k T(x)_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} T(x)_j y_j$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Logo, $T(x)_j = -x_j$, se $1 \leq j \leq k$, e $T(x)_j = x_j$, se $k+1 \leq j \leq k+n$. Portanto, na base canônica \mathcal{C} , a matriz de T é a matriz diagonal

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

que corresponde à matriz $[\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}]_{\mathcal{C}}$. Agora

$$[T]_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{k+n}$$

de onde temos $[T]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}^{-1}$. Agora, seja $\mathcal{B} = x_1, \dots, x_{k+n}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^{k+n} com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Escrevemos $T(x_i) = \sum_{j=1}^{k+n} \alpha_{ij} x_j$ para cada $i = 1, \dots, k+n$, ou seja, $[T]_{\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})_{i,j}$. Temos que

$$\langle x_i, x_j \rangle_{k,n} = \langle T(x_i), x_j \rangle = \alpha_{ij}$$

para todos $1 \leq i, j \leq k+n$. Logo, $[\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}$. □

Seja A uma matriz real $(k+n) \times (k+n)$. De modo análogo ao grupo ortogonal, dizemos que A preserva a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ se

$$\langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. O que motiva o seguinte teorema:

Teorema 2.2.5. Denote por $O(k; n)$ o conjunto das matrizes reais $(k+n) \times (k+n)$ que preservam a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$. Então $O(k; n)$ é um grupo de Lie de matrizes em $GL(k+n; \mathbb{R})$.

Demonstração. Dados $A, B \in O(k; n)$ e $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$, temos que

$$\langle AB(x), AB(y) \rangle_{k,n} = \langle A(B(x)), A(B(y)) \rangle_{k,n} = \langle B(x), B(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n}$$

. Logo, $AB \in O(k; n)$. Se $x \in \ker(A)$, então

$$\langle x, y \rangle_{k,n} = \langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = \langle 0, y \rangle_{k,n} = 0$$

para todo $y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Visto que T é inversível e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada, segue que $x = 0$. Logo, A é inversível. Além disso,

$$\langle A^{-1}(x), A^{-1}(y) \rangle_{k,n} = \langle AA^{-1}(x), AA^{-1}(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n}$$

. Portanto, $A^{-1} \in O(k; n)$, mostrando que $O(k; n)$ é um subgrupo de $GL(k+n; \mathbb{R})$. Agora, suponha que uma matriz $A \in GL(k+n; \mathbb{R})$ é o limite de uma sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $O(k; n)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$, segue por continuidade que

$$\begin{aligned} \langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} &= \langle \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x), \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(y) \rangle_{k,n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n(x), A_n(y) \rangle_{k,n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, y \rangle_{k,n} \\ &= \langle x, y \rangle_{k,n}. \end{aligned}$$

Logo, $A \in O(k; n)$ e, portanto, $O(k; n)$ é fechado em $GL(k+n; \mathbb{R})$, sendo assim um grupo de Lie. \square

O grupo de Lie de matrizes $O(k; n)$ é chamado de *grupo ortogonal generalizado*. Esse nome se deve ao fato das matrizes serem ortogonais com respeito a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$, conforme a seguinte definição.

Definição 2.2.6. Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$ são ortogonais com respeito à forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ se $\langle x, y \rangle_{k,n} = 0$. Um vetor $x \in \mathbb{R}^{k+n}$ é unitário com respeito à forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ se $\|x\|_{k,n} = 1$, ou seja, se $\langle x, x \rangle_{k,n} = \pm 1$. Um conjunto de vetores x_1, \dots, x_k em \mathbb{R}^{k+n} é chamado ortonormal com respeito a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ se os vetores são ortogonais e unitários com respeito à forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$.

Se $A \in \mathbb{M}_{k+n}(\mathbb{R})$, $A = (A_{i,j})$, denote por $A^{(j)}$ o j -ésimo vetor coluna de A dado por

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{k+n,j} \end{pmatrix}$$

O resultado seguinte mostra que os vetores coluna de uma matriz do grupo ortogonal generalizado formam um conjunto ortonormal com respeito a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$.

Teorema 2.2.7. *Seja $A \in GL(k+n; \mathbb{R})$. Então $A \in O(k; n)$ se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

- $\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle_{k,n} = 0$, se $i \neq j$,
- $\langle A^{(i)}, A^{(i)} \rangle_{k,n} = -1$, se $1 \leq i \leq k$,
- $\langle A^{(j)}, A^{(j)} \rangle_{k,n} = 1$, se $k+1 \leq j \leq k+n$

Demonstração. Seja $A \in O(k; n)$. Notemos que

$$\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle_{k,n} = \langle A(e_i), A(e_j) \rangle_{k,n} = \langle e_i, e_j \rangle_{k,n}$$

onde e_i denota o vetor de \mathbb{R}^{k+n} com 1 na i -ésima entrada e 0 nas outras. Pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$, temos que

$$\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle_{k,n} = \langle e_i, e_j \rangle_{k,n} = 0, \text{ se } i \neq j,$$

$$\langle A^{(i)}, A^{(i)} \rangle_{k,n} = \langle e_i, e_i \rangle_{k,n} = -1, \text{ se } 1 \leq i \leq k,$$

$$\langle A^{(j)}, A^{(j)} \rangle_{k,n} = \langle e_j, e_j \rangle_{k,n} = 1, \text{ se } k+1 \leq j \leq k+n.$$

Por outro lado, se $A \in GL(k+n; \mathbb{R})$ satisfaz as condições acima, $x = \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^{k+n} \beta_i e_i$ são vetores arbitrários de \mathbb{R}^{k+n} , temos que

$$\begin{aligned} \langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} &= \left\langle \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i A(e_i), \sum_{i=1}^{k+n} \beta_i A(e_i) \right\rangle_{k,n} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i A^{(i)}, \sum_{i=1}^{k+n} \beta_i A^{(i)} \right\rangle_{k,n} \\ &= \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i \sum_{j=1}^{k+n} \beta_j \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle_{k,n} \\ &= \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i \beta_i \langle A^{(i)}, A^{(i)} \rangle_{k,n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i + \sum_{i=k+1}^{k+n} \alpha_i \beta_i \\
&= \langle x, y \rangle_{k,n}.
\end{aligned}$$

Portanto, $A \in O(k; n)$. □

Teorema 2.2.8. *Seja $A \in GL(k+n; \mathbb{R})$. Então $A \in O(k; n)$ se e somente se $A^t g A = g$, onde $g = [T]_C$ é a matriz do operador linear auto-adjunto da proposição 2.2.4.*

Demonstração. Sejam $A \in O(k; n)$ e $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Pela Proposição 2.2.4, temos que

$$\langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = [A(x)]_C^t [T]_C [A(y)]_C = [x]_C^t A^t [T]_C A [y]_C$$

Por outro lado

$$\langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n} = [x]_C^t [T]_C [y]_C$$

Como $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$ são arbitrários, segue que $A^t [T]_C A = [T]_C$. Reciprocamente, se $A^t [T]_C A = [T]_C$, então usamos as mesmas igualdades acima para concluir que $\langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Portanto $A \in O(k; n)$. □

Corolário 2.2.9. *Se $A \in O(k; n)$, então $\det A = \pm 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.8.7, temos que $\det(A^t [T]_C A) = \det [T]_C$, de onde segue que $(\det A)^2 = 1$. Logo, $\det(A) = \pm 1$. □

Proposição 2.2.10. *O conjunto $SO(k; n) = \{A \in O(k; n) : \det A = 1\}$ é um subgrupo de Lie de matrizes de $O(k; n)$.*

Demonstração. Se $A, B \in SO(k; n)$, então $\det(AB^{-1}) = \det A \det B^{-1} = 1$.

Logo, $SO(k; n)$ é um subgrupo de $O(k; n)$. Resta mostrar que $SO(k; n)$ é fechado. Com efeito, considerando a restrição a $O(k; n)$ da função determinante, $\det : O(k; n) \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $SO(k; n) = \det^{-1}(1)$. Segue pela continuidade da função determinante que $SO(k; n)$ é fechado, pois é a imagem inversa de um conjunto fechado (um ponto). □

O grupo de Lie de matrizes $SO(k; n)$ será chamado **grupo ortogonal generalizado especial**.

Teorema 2.2.11. *A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(k, n)$ de $O(k, n)$ (e de $SO(k; n)$) é*

$$\mathfrak{so}(k, n) = \{X \in \mathbb{M}_{k+n}(\mathbb{R}) : gX^t g = -X\}$$

onde $g = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

Demonstração. Dados $Y \in \mathfrak{so}(n, k)$ e $s \in \mathbb{R}$, temos que

$$e^{-sX} = e^{s(gX^t g)} = e^{g(sX)^t g}$$

de onde segue que

$$(e^{sX})^{-1} = g e^{sX^t} g.$$

Logo, $e^{sX} \in O(n, k)$. Visto que $\det e^{sX} = e^{\text{tr}(sX)} > 0$, segue que $\det e^{sX} = 1$ e, portanto, $e^{sX} \in SO(n, k)$. Por outro lado, considere uma curva diferenciável $\gamma(s)$ em $O(n, k)$ com $\gamma(0) = I$. Então, $\gamma(s)^{-1} = g\gamma(s)^t g$, de onde segue que

$$-\gamma(s)^{-2} \gamma'(s) = g(\gamma'(s))^t g.$$

Dessa forma, $-\gamma'(0) = g(\gamma'(0))^t g$. Se $\gamma(s) = e^{sX} \in O(n, k)$, então $-X = gX^t g$, ou seja, $X \in \mathfrak{so}(k, n)$. Portanto, $\mathfrak{so}(k, n)$ é a álgebra de Lie de $O(k, n)$ e de $SO(n, k)$. \square

O grupo de simetria do espaço-tempo de Minkowski é representado pelo grupo de Poincaré. Veremos com detalhes sobre esse grupo adiante. Por definição, uma matriz $A \in O(1; n)$ preserva a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,n}$. Logo, A preserva também a chamada distância de Lorentz $d_{1,n}$ dada por

$$d_{1,n}(x, y) = \|x - y\|_{1,n} = \sqrt{|\langle x - y, x - y \rangle_{1,n}|}$$

No entanto, $O(1; n)$ não contém todas as transformações de \mathbb{R}^{1+n} que preservam $d_{1,n}$. Esse papel cabe ao grupo de Poincaré, o grupo das transformações de \mathbb{R}^{1+n} que preservam a distância de Minkowski (isometrias). Adiante apresentamos o grupo de Poincaré como um grupo de Lie de matrizes, mostrando sua descrição a partir $O(1; n)$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^{1+n}$, definimos a translação $T_x : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$ por

$$T_x(y) = x + y, \quad y \in \mathbb{R}^{1+n}.$$

Seja $P(1; n)$ o conjunto das transformações afins de \mathbb{R}^{1+n} da forma

$$T = T_x \circ A$$

com $x \in \mathbb{R}^{1+n}$ e $A \in O(1; n)$, onde A é identificada com uma transformação linear de \mathbb{R}^{1+n} .

Proposição 2.2.12. *O conjunto $P(1; n)$ é um grupo com a operação de composição de transformações.*

Demonstração. Inicialmente perceba que $A \circ T_x = T_{Ax} \circ A$ para todo $x \in \mathbb{R}^{1+n}$ e $A \in O(1, n)$. Desse modo, $T_1 = T_x \circ A$ e $T_2 = T_y \circ B$, então:

$$\begin{aligned}
T_1 \circ T_2 &= T_x \circ A \circ T_y \circ B \\
&= T_x \circ T_{Ay} \circ AB \\
&= T_{x+Ay} \circ AB
\end{aligned}$$

com $x + Ay \in \mathbb{R}^{1+n}$ e $AB \in O(1, n)$. Logo $T_1 \circ T_2 \in P(1, n)$. O elemento neutro de $P(1, n)$ é naturalmente $e = T_0 \circ I_{1+n}$. Pois

$$\begin{aligned}
T_1 \circ e &= T_x \circ A \circ T_0 \circ I_{1+n} \\
&= T_{x+A0} \circ AI_{1+n} \\
&= T_x \circ A
\end{aligned}$$

Para todo $T_x \circ A \in P(1, n)$. Se $T_x \circ A \in P(1, n)$ temos

$$(T_x \circ A) \circ (T_{-A^{-1}} \circ A^{-1}) = T_x \circ T_{-x} \circ AA^{-1} = e$$

e

$$(T_{-A^{-1}x} \circ A^{-1}) \circ (T_x \circ A) = T_{-A^{-1}x} \circ T_{A^{-1}x} \circ A^{-1}A = e$$

Logo $T_{-A^{-1}x} \circ A^{-1}$ é o elemento inverso de $T_x \circ A$. Como a composição é associativa segue que $P(1, n)$ é um grupo. □

Proposição 2.2.13. *O grupo de Poincaré $P(1, n)$ é isomorfo ao grupo de matrizes $(2 + n) \times (2 + n)$, denotado por $P_{1,n}$, da forma:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_{1+n} & & & \end{pmatrix}$$

Com $A \in O(1, n)$. Esse grupo de matrizes é um grupo de Lie de matrizes.

Demonstração. Defina a aplicação $\psi : P(1, n) \rightarrow M_{n+2}(\mathbb{R})$ por

$$\psi(T_x \circ A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_{1+n} & & & \end{pmatrix}$$

Sejam $T_1 = T_x \circ A$ e $T_2 = T_y \circ B$, temos que:

$$\begin{aligned}
\psi(T_1 \circ T_2) &= \psi(T_x \circ A \circ T_y \circ B) \\
&= \psi(T_{x+Ay} \circ AB) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 + \sum_{i=1}^{1+n} A_{1i}y_i & & & \\ \vdots & & AB & \\ x_{1+n} + \sum_{i=1}^{1+n} A_{1+n,i}y_i & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & & & \\ \vdots & A & & \\ x_{1+n} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & & & \\ \vdots & B & & \\ y_{1+n} & & & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Logo, ψ é um homomorfismo. Note que a aplicação ψ é injetiva e, assim, ψ é um isomorfismo entre $P(1, n)$ e $\psi(P(1, n))$. A imagem de ψ é um subgrupo fechado de $GL(2+n, \mathbb{R})$, porque tem a mesma topologia de $\mathbb{R}^{1+n} \times O(1, n)$, isto é, é o cartesiano de dois espaços topológicos fechados. Portanto, $P(1; n)$ é isomorfo a um grupo de Lie de matrizes $P_{1,n}$. \square

Em [6] é mostrado que qualquer transformação T satisfaz $\langle T(x), T(y) \rangle_{1,n} = \langle x, y \rangle_{1,n}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{1+n}$ se e somente se $T \in P(1, n)$. Omitimos tal demonstração por não ser o foco desse trabalho. Ao invés disso, apresentamos a álgebra de Lie de $P(1, n)$.

Proposição 2.2.14. *A álgebra de Lie de $P(1, n)$, denotada por $\mathfrak{p}(1, n)$ é isomorfa ao conjunto de matrizes da forma :*

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & & & \\ \vdots & & Y & \\ x_{1+n} & & & \end{pmatrix}$$

onde $Y \in \mathfrak{so}(1, n)$.

Demonstração. Basta observar que \mathfrak{p} é a álgebra de lie do grupo $P_{1,n}$. Daí o resultado segue pela proposição 1.1.13. \square

Comparação e Resultados

Denotaremos a álgebra $\mathfrak{p}(1, 3)$ por \mathfrak{p} e como já inserido anteriormente a álgebra de $Gal(4)$ continuará sendo denotada por \mathfrak{g} .

Proposição 3.0.1. *O radical solúvel $r(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} é o espaço das matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & 0 & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix}$$

Demonstração. Primeiramente note que $r(\mathfrak{g})$ é um ideal de \mathfrak{g} . Com efeito,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & 0 & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & u_1 & & & \\ w_2 & u_2 & & X & \\ w_3 & u_3 & & & \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 t & 0 & & & \\ v_2 t & 0 & & 0 & \\ v_3 t & 0 & & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & & & \\ * & * & & 0 & \\ * & * & & & \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & & & \\ * & * & & 0 & \\ * & * & & & \end{pmatrix} \in r(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

Agora, devemos observar que $r(\mathfrak{g})$ é solúvel; de fato, pois:

$$r(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & & & \\ * & * & & 0 & \\ * & * & & & \end{pmatrix} \right\}$$

$$r(\mathfrak{g})' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & & & \\ * & 0 & & 0 & \\ * & 0 & & & \end{pmatrix} \right\}$$

$$r(\mathfrak{g})'' = \{0\}$$

Por fim, resta saber se $r(\mathfrak{g})$ é o maior ideal solúvel. Para verificar isso tentaremos aumentar a dimensão de $r(\mathfrak{g})$ com cada um dos elementos da base do conjunto complementar de $r(\mathfrak{g})$, nesse caso $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$.

Tomando como base de $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ as matrizes:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora testaremos se o conjunto :

$$A_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & a_1 & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathfrak{g}$$

é um ideal. Pois bem, vejamos:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & a_1 & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & u_1 & & & \\ w_2 & u_2 & & X & \\ w_3 & u_3 & & & \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & X_{21} - X_{12} & -X_{22} + X_{11} & -X_{23} \\ * & * & X_{11} - X_{22} & X_{12} + X_{21} & X_{13} \\ * & * & -X_{32} & +X_{31} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\notin A_1$$

Da mesma forma,

$$A_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & a_2 & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathfrak{g}$$

não é um ideal de \mathfrak{g} pois:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & a_2 & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & u_1 & & & \\ w_2 & u_2 & & X & \\ w_3 & u_3 & & & \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -X_{31} - X_{12} & -X_{32} & -X_{33} - X_{11} \\ * & * & -X_{23} & 0 & X_{21} \\ * & * & X_{11} - X_{33} & +X_{12} & X_{31} \end{pmatrix} \notin A_2$$

Do mesmo modo,

$$A_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & a_3 & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathfrak{g}$$

não é um ideal de \mathfrak{g} pois:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & a_3 & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & u_1 & & & \\ w_2 & u_2 & & X & \\ w_3 & u_3 & & & \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & -X_{31} & X_{12} \\ * & * & -X_{31} & -X_{32} - X_{23} & -X_{33} + X_{22} \\ * & * & X_{21} & X_{22} - X_{33} & -X_{23} + X_{32} \end{pmatrix} \notin A_3$$

Devido a arbitrariedade de X e pela unicidade do radical solúvel concluímos que $r(\mathfrak{g})$ de fato é o maior ideal solúvel de \mathfrak{g} \square

Proposição 3.0.2. *O radical solúvel de \mathfrak{p} , denotado por $r(\mathfrak{p})$ é o espaço das matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & 0 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix} \subset \mathfrak{p}$$

Demonstração. Inicialmente, note que $r(\mathfrak{p})$ é um ideal pois:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & 0 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & & & & \\ k_2 & & Y & & \\ k_3 & & & & \\ k_4 & & & & \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & & & & \\ * & & 0 & & \\ * & & & & \\ * & & & & \end{pmatrix} \subset B(\mathfrak{p})$$

Além disso $r(\mathfrak{p})$ é solúvel, já que:

$$r(\mathfrak{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & 0 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix}, r(\mathfrak{p})' = \{0\}$$

A demonstração será semelhante a anterior. Primeiro tomaremos a base do subespaço complementar de $r(\mathfrak{p})$ e testaremos cada elemento dessa base. O conjunto complementar de $r(\mathfrak{p})$ é $\mathfrak{so}(1, 3)$ cuja base é:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para b_1 o conjunto:

$$B_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_1 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathfrak{p}$$

não é um ideal de \mathfrak{p} . Pois

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_1 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & & & & \\ k_2 & & Y & & \\ k_3 & & & & \\ k_4 & & & & \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & Y_{21} - Y_{12} & Y_{22} - Y_{11} & Y_{23} & Y_{24} \\ * & Y_{11} - Y_{22} & Y_{12} - Y_{21} & Y_{13} & Y_{14} \\ * & -Y_{32} & -Y_{31} & 0 & 0 \\ * & -Y_{42} & -Y_{41} & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin B_1$$

Para b_2 o conjunto:

$$B_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_2 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathfrak{p}$$

não é um ideal de \mathfrak{p} . Pois

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_2 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & & & & \\ k_2 & & Y & & \\ k_3 & & & & \\ k_4 & & & & \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & Y_{31} - Y_{13} & Y_{32} & Y_{33} - Y_{11} & Y_{34} \\ * & -Y_{23} & 0 & -Y_{21} & 0 \\ * & Y_{11} - Y_{33} & Y_{12} & Y_{13} - Y_{31} & Y_{14} \\ * & -Y_{43} & 0 & -Y_{41} & 0 \end{pmatrix} \notin B_2$$

Para b_3 o conjunto:

$$B_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_3 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathfrak{p}$$

não é um ideal de \mathfrak{p} . Pois

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_3 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & & & & \\ k_2 & & Y & & \\ k_3 & & & & \\ k_4 & & & & \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & Y_{41} - Y_{14} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} - Y_{11} \\ * & -Y_{24} & 0 & 0 & -Y_{21} \\ * & -Y_{31} & 0 & 0 & -Y_{31} \\ * & Y_{11} - Y_{44} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} - Y_{41} \end{pmatrix} \notin B_3$$

Para b_4 o conjunto:

$$B_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_4 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathfrak{p}$$

não é um ideal de \mathfrak{p} . Pois

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_4 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & & & & \\ k_2 & & Y & & \\ k_3 & & & & \\ k_4 & & & & \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & -Y_{13} & -Y_{12} & 0 \\ * & Y_{31} & Y_{32} - Y_{23} & Y_{33} - Y_{22} & Y_{34} \\ * & Y_{21} & Y_{22} - Y_{33} & Y_{23} - Y_{32} & Y_{24} \\ * & 0 & -Y_{43} & -Y_{42} & 0 \end{pmatrix} \notin B_4$$

Para b_5 o conjunto:

$$B_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_5 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathfrak{p}$$

não é um ideal de \mathfrak{p} . Pois

$$\left[\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_5 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & & & & \\ k_2 & & Y & & \\ k_3 & & & & \\ k_4 & & & & \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & -Y_{14} & 0 & -Y_{12} \\ * & Y_{41} & Y_{42} - Y_{24} & Y_{43} & Y_{44} - Y_{22} \\ * & 0 & -Y_{34} & 0 & -Y_{32} \\ * & Y_{21} & Y_{22} - Y_{44} & Y_{23} & Y_{24} - Y_{42} \end{array} \right) \notin B_5$$

Finalmente, para b_6 o conjunto:

$$B_6 = \left\langle \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_6 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{array} \right) \right\rangle \subset \mathfrak{p}$$

também não é um ideal de \mathfrak{p} . Pois

$$\left[\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & & & & \\ z_2 & & b_6 & & \\ z_3 & & & & \\ z_4 & & & & \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & & & & \\ k_2 & & Y & & \\ k_3 & & & & \\ k_4 & & & & \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -Y_{14} & Y_{13} \\ * & 0 & 0 & -Y_{24} & Y_{23} \\ * & -Y_{41} & -Y_{42} & -Y_{43} - Y_{34} & -Y_{44} + Y_{33} \\ * & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} - Y_{44} & Y_{34} + Y_{43} \end{array} \right)$$

$$\notin B_6$$

Portanto, pela arbitrariedade de Y e pela unicidade do radical solúvel concluímos, que $r(\mathfrak{p})$ é o ideal solúvel de \mathfrak{p} . \square

Corolário 3.0.3. *As decomposições de Levi de \mathfrak{g} e \mathfrak{p} são respectivamente $r(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ e $r(\mathfrak{p}) \oplus \mathfrak{so}(1, 3)$.*

Demonstração. Segue diretamente das proposições 3.0.1 e 3.0.2. \square

Corolário 3.0.4. *As álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{p} não são isomorfas.*

Demonstração. De fato. Pelo teorema 1.3.13 num isomorfismo de álgebras de Lie, os radicais solúveis devem ser isomorfos, visto que ambas as álgebras de Lie terão a mesma decomposição. Segue imediatamente das proposições 3.0.1 e 3.0.2 que os radicais de \mathfrak{g} e \mathfrak{p} são de dimensões diferentes (7 e 4). Portanto segue o resultado. \square

Corolário 3.0.5. *Os grupos de Galileo $Gal(4)$ e de Poincaré $P(1, 3)$ não são isomorfos.*

Demonstração. Se existisse um isomorfismo de grupos, pela proposição 1.1.13 a diferencial seria um isomorfismo de álgebras. Pelo corolário anterior não se verifica. Portanto segue a tese. \square

Conclusões e Feedback

No início do trabalho, devido as semelhanças dos grupos, tentamos deduzir algum isomorfismo entre eles. Tal tarefa foi se mostrando trabalhosa e novas estratégias tiveram de ser adotadas. A melhor escolha foi analisar as álgebras de Lie, levando o foco para outro campo.

Em razão de suas semelhanças, começamos acreditar haver um isomorfismo entre as álgebras de Lie desses grupos. Uma tentativa realizada por nossa parte, foi a aplicação:

$$\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{p}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & X & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ y_1 & v_1 & & & \\ y_2 & v_2 & & X & \\ y_3 & v_3 & & & \end{pmatrix}$$

Essa aplicação está bem definida, isto é, $\Phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{p}$, além disso é linear. Porém não se configura um homomorfismo de álgebras. A coordenada que falhou foi justamente a coordenada tempo. Conseguir um isomorfismo entre as álgebras se mostrou uma tarefa árdua.

Na contramão de tal ideia, trabalhamos com a não existência de um isomorfismo. Novamente com um novo objetivo, uma estratégia tomada foi analisar os centros de cada álgebra, porém verificamos que ambas tem centros triviais. Com a ajuda da teoria mais geral de álgebras de Lie, finalmente obtemos a comprovação da impossibilidade do isomorfismo entre a álgebra de Lie do grupo Galileano e a álgebra de Lie do grupo de Poincaré.

Esse resultado foi recebido com muito entusiasmo, pois além de resolver a questão das álgebras, deu luz quanto ao comportamento dos grupos. Caso houvesse um isomorfismo entre os grupos, as álgebras de Lie seriam isomorfas, o que claramente não ocorre.

Ficamos em dívida quanto as interpretações físicas dessas entidades, mas uma questão interessante a se pensar é : Qual significado físico da impossibilidade de isomorfismo entre

as álgebras? Outro questionamento é: Qual o significado físico dos radicais solúveis das álgebras de Lie?

Para essas e demais questões não podemos responder. Quanto aos nossos objetivos, sim. Coseguimos estudar cada grupo, via suas álgebras de Lie. Podemos comprovar que as álgebras de Lie do Grupo de Galileo e do Grupo de Poincaré não são isomorfas, o que implicou que os grupos não se comportam da mesma forma matemática. Esperamos que este trabalho seja de bom proveito para futuros estudos, tanto físicos como matemáticos.

REFERÊNCIAS

- [1] Curtis ML. Matrix Groups, 2° ed. Houston, Texas: Editora Springer, 1984.
- [2] San Martin LAB. Álgebras de Lie, 2°ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2010.
- [3] Bortotti, M. F. A., Grupo Galileano Generalizado. TCC. Universidade Estadual de Maringá, preprint.
- [4] Arnold VI. Mathematical methods of classical mechanics. Graduate texts in mathematics 60, Springer, New York,1989.22. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [5] Naber GL. The Geometry of Minkowski Spacetime. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [6] Marques CH, Mendes LO, Bortotti MFA, Montanhano SB, Souza JA. Isometrias no espaço de Minkowski: grupo ortogonal generalizado e grupo de Poincaré. Bol. Soc. Paran. Mat. 2016; 34(1):99-128.