

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

AGNALDO SEXTO JÚNIOR

Caminhos Minimizantes em Planos Quase-hiperbólicos¹

Maringá-PR

2021

¹O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CAMINHOS MINIMIZANTES EM PLANOS QUASE-HIPERBÓLICOS

AGNALDO SEXTO JÚNIOR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka

Maringá-PR

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

S518c Sexto Júnior, Agnaldo
Caminhos minimizantes em planos quase-
hiperbólicos / Agnaldo Sexto Júnior. -- Maringá,
2021.
104 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Ryuichi Fukuoka.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-
Graduação em Matemática - Área de Concentração:
Geometria e Topologia, 2021.

1. Caminhos minimizantes. 2. Plano quase-
hiperbólico. 3. Norma assimétrica. 4. Minimizing
paths. 5. Quasihyperbolic plane. 6. Asymmetric norm.
I. Fukuoka, Ryuichi, orient. II. Universidade
Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas.
Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de
Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 516.9

Edilson Damasio CRB9-1.123

AGNALDO SEXTO JÚNIOR

Caminhos Minimizantes em Planos Quase-hiperbólicos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka
Universidade Estadual de Maringá
(Presidente)

Profa. Dra. Martha Patrícia Dussan Angulo
Universidade de São Paulo

Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes
Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 25 de junho de 2021 .

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet.

*A minha mãe Greice Tatiane Orlando e em
memória das minhas avós Maria José Orlando e
Benedicta Maria dos Santos Sexto mulheres essas
que sempre me apoiaram e me incentivaram.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Greice Tatiane Orlando e Agnaldo Sexto, em especial a minha mãe, por sempre terem me apoiado e incentivado a me tornar a pessoa que sou hoje.

Ao meu orientador Ryuichi Fukuoka, por toda sua dedicação e paciência comigo durante a elaboração desse trabalho.

A todos os meus amigos e colegas, os quais não mencionarei nomes para não correr o risco de esquecer de alguém, que compartilharam comigo conhecimentos, bons e maus momentos.

A todos os professores os quais contribuíram para a minha formação durante esse período de mestrado.

A todas as pessoas que de forma direta ou indireta contribuíram para que mais um trabalho se realizasse e por confiarem e acreditarem que eu seria capaz.

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

Desenho não demonstra, apenas mostra.

Resumo

Planos quase-hiperbólicos são semiplanos superiores abertos, com estrutura do grupo de Lie bidimensional não abeliano, munidos com uma norma invariante à esquerda F em cada espaço tangente.

Neste trabalho vamos classificar os caminhos minimizantes em planos quase - hiperbólicos seguindo as ideias de I. A. Griбанова [9].

Iniciaremos esse trabalho apresentando algumas definições e resultados sobre a teoria da medida, equações diferenciais e análise convexa que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Seguiremos estudando sistemas de controle e o Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP). Para classificar os caminhos minimizantes em planos quase-hiperbólicos, utilizaremos um sistema de controle onde a função de custo é o comprimento de arco e o conjunto de controle é a esfera unitária. Com isso, o problema de encontrar os caminhos minimizantes desse espaço se torna um problema de tempo ótimo, e por meio do PMP, encontraremos os possíveis caminhos minimizantes. Análises mais aprofundadas determinarão os caminhos minimizantes. Terminaremos esse trabalho estudando um pouco a respeito dos caminhos minimizantes dos planos quase-hiperbólicos quando cada plano tangente está munido com uma norma assimétrica invariante à esquerda.

Palavras-chave: Caminhos minimizantes, plano quase-hiperbólico, norma assimétrica.

Abstract

Quasihyperbolic planes are open upper semiplanes, with a two-dimensional non-abelian Lie group structure, endowed with a left-invariant norm F on each tangent space.

In this work we will classify the minimizing paths on quasihyperbolic planes following the ideas of I. A. Gribanova [9].

We will start this work by presenting some definitions and results on measure theory, differential equations and convex analysis that will be used throughout this work. We will continue with a study of control systems and the Pontryagin's Maximum Principle (PMP). In order to classify the minimizing paths on quasihyperbolic planes, we will use a control system where the cost function is the arc length and the control region is the unit sphere. Thereby, the problem of finding the minimizing paths of this space becomes a time-optimal problem and through the use of PMP we will find the possible minimizing paths. Further analysis will determine the minimizing paths. We will end this work by studying a little about the minimizing paths of the quasihyperbolic planes when each tangent plane is equipped with a left-invariant asymmetric norm.

Keywords: Minimizing paths, quasihyperbolic plane, asymmetric norm.

CONTEÚDO

1	Introdução	10
2	Preliminares	13
2.1	Teoria da Medida	13
2.2	Equações Diferenciais Ordinárias	20
2.3	Análise Convexa	23
3	Princípio do Máximo de Pontryagin	38
3.1	O Espaço de Fase e as Funções de Controles Admissíveis	38
3.2	Apresentação do Problema Fundamental	42
3.3	O Princípio do Máximo de Pontryagin	50
4	Caminhos Minimizantes no Plano Quase-hiperbólico	59
4.1	Estruturas de Finsler de Classe C^0 invariantes à esquerda	60
4.2	Extremais de Pontryagin	62
4.3	Caminhos Minimizantes em Planos Quase - hiperbólicos	72
4.4	O caso Assimétrico	92
5	Conclusão	102
	Bibliografia	102

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os planos quase-hiperbólicos são semiplanos superiores abertos, isto é,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\},$$

com a estrutura do grupo de Lie, cujo produto é dado por

$$(a, b) \cdot (x, y) = (bx + a, by)$$

munido com uma norma invariante à esquerda F em cada espaço tangente. Temos que (S, \cdot) é o grupo de Lie bidimensional não abeliano. Assim, os planos quase-hiperbólicos são uma generalização dos planos hiperbólicos, onde a norma F é a norma euclidiana.

O foco principal desse trabalho é o estudo dos caminhos minimizantes no plano quase-hiperbólico. Para isso consideremos um sistema de controle cuja função de custo é a função de comprimento de arco, o que resulta em um problema de tempo ótimo. Usaremos o Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP) para encontrar as curvas que são candidatas a caminhos minimizantes. Vamos demonstrar alguns lemas e proposições que nos permitirão caracterizar os caminhos minimizantes.

Antes de detalharmos o trabalho, iremos apresentar um breve histórico da teoria.

O estudo de geodésicas em variedades diferenciáveis munidas com estruturas que generalizam métricas Riemannianas e sub-Riemannianas com uso do PMP têm se di-

fundido bastante, principalmente no contexto de geometria invariante. Um livro texto sobre teoria geral de geometria sub-Riemanniana com uso do PMP é [1].

Uma estrutura de Finsler de classe C^0 em uma variedade diferenciável M é uma função contínua $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ do fibrado tangente de M a valores reais tal que sua restrição a cada espaço tangente é uma norma assimétrica. Se a restrição for uma norma, dizemos que F é uma estrutura de Finsler de classe C^0 simétrica.

O trabalho central nesta dissertação devido à I. A. Gribanova [9] é um dos primeiros que classificam caminhos minimizantes em grupos de Lie munidos com estruturas de Finsler de classe C^0 simétricas invariantes à esquerda. Depois disso, surgiram diversos trabalhos nessa direção, onde os autores estudam o problema de caracterização de geodésicas em grupos de Lie munidos com estruturas sub-Finsler de classe C^0 invariantes à esquerda (veja, [2], [3], [4], [5], [6], [7], [10], [12], [17], [18]). Uma estrutura sub-Finsler de classe C^0 em uma variedade diferenciável M é uma generalização de métrica sub-Riemanniana, com o produto interno definido na distribuição \mathcal{D} sendo substituído por uma norma assimétrica que varia continuamente em \mathcal{D} (veja [13]).

Em [8], os autores introduzem o campo geodésico estendido em estruturas de Finsler de classe C^0 que satisfazem condições mínimas para a aplicação do PMP. O campo geodésico estendido generaliza o campo geodésico de geometria Riemanniana e de Finsler, e é definido no fibrado cotangente de M . Com isso, define-se um objeto sistemático para o estudo de geodésicas nessa classe de variedades, que incluem espaços homogêneos munidos com estruturas de Finsler de classe C^0 G -invariante.

Agora descrevemos como o trabalho está organizado. No primeiro capítulo vamos estudar alguns temas, cujos resultados e definições serão utilizados ao longo desse trabalho. Na primeira seção estudaremos teoria da medida, afim de definir a integral de Lebesgue que será utilizada para explicitar certos caminhos que são candidatos a serem minimizantes. Na seguinte seção sobre equações diferenciais, apresentaremos os teoremas de existência e unicidade de Carathéodory que serão necessários para o formalismo Hamiltoniano do problema de otimização e é indispensável para a formulação do PMP. Por fim a terceira seção trata de análise convexa, onde apresentaremos as definições e proposições que serão peças chaves para a demonstração de que as candidatas a caminhos minimizantes são de fato minimizantes no capítulo 4. Cabe salientar que não demonstraremos muitos dos resultados expostos neste capítulo, mas

citaremos as referências onde as demonstrações podem ser encontradas.

No capítulo seguinte, iremos estudar a teoria de sistemas de controle. Iniciaremos apresentando a teoria geral e alguns resultados. Seguiremos com o estudo da função de custo e faremos uma interpretação geométrica do problema. Assim poderemos então enunciar o Princípio do Máximo de Pontryagin, o qual será utilizado no capítulo 4 para encontrar as curvas que poderão ser minimizantes. Terminaremos esse capítulo com uma aplicação do PMP em um exemplo que não tem solução natural através da teoria clássica de equações diferenciais, o qual também é um problema de tempo ótimo.

No último capítulo, finalmente estudaremos os caminhos minimizantes no plano quase-hiperbólico. Formularemos o nosso problema apresentando o sistema de controle que com a função de controle transformará o problema de encontrar os caminhos minimizantes em problemas de tempo ótimo. Nesta parte usaremos o PMP para apresentar os extremais de Pontryagin, que são as curvas que serão candidatas a caminhos minimizantes. Vamos definir a norma F^* , que é a norma dual de F composta com a rotação em $\frac{\pi}{2}$ radianos. Veremos que as candidatas a caminhos minimizantes serão de dois tipos, as dadas explicitamente por uma integral e as obtidas pelas esferas da norma F^* . Seguiremos demonstrando alguns lemas e proposições a respeito dessas curvas, principalmente acerca das interseções entre tais curvas, a fim de demonstrar o teorema que irá explicitar tais curvas como os caminhos minimizantes. Por fim terminaremos esse trabalho estudando o caso das estruturas de Finsler de classe C^0 invariante à esquerda cuja restrição aos planos tangentes é um norma assimétrica.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

2.1 Teoria da Medida

Nesta seção faremos uma apresentação dos conceitos e resultados relacionados com a teoria da medida que serão necessários para a compreensão deste trabalho. Não serão feitas demonstrações, todavia essas podem ser encontradas em [16].

Vamos iniciar a seção apresentando a definição de σ -álgebra em um conjunto.

Definição 2.1 (σ -álgebra). Seja X um conjunto. Uma σ -álgebra em X é uma coleção Σ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\emptyset \in \Sigma$;
- ii) Se $E \in \Sigma$, então $E^c \in \Sigma$, onde E^c é o complementar de E em X ;
- iii) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de elementos de Σ , então a união desses elementos pertence a Σ , ou seja, se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, então,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma.$$

Da primeira e segunda propriedades temos que $X \in \Sigma$.

Segue da identidade de De Morgan que

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c,$$

e da segunda e terceira propriedades temos que a interseção enumerável de elementos de Σ também pertence a Σ .

Sempre existem duas σ -álgebras em X : a trivial $\Sigma = \{\emptyset, X\}$, que é a menor σ -álgebra de X , e a σ -álgebra do conjunto das partes de X , $\Sigma = \mathcal{P}(X)$, que é a maior σ -álgebra de X .

Segue que se Σ é uma σ -álgebra em X , então dizemos que (X, Σ) é um espaço mensurável. Se $E \in \Sigma$, chamamos E de mensurável ou conjunto mensurável.

Definição 2.2 (σ -Álgebra de Borel). Se (X, τ) é um espaço topológico, então a σ -álgebra $\sigma(\tau)$ gerada por todos os abertos de τ é chamada de σ -álgebra de Borel de (X, τ) , ou simplesmente σ -álgebra de Borel de X se a topologia de X estiver implícita.

Uma classe de funções muito úteis são as funções mensuráveis. Podemos definir tais funções por meio dos conjuntos mensuráveis de uma σ -álgebra.

Definição 2.3 (Função Mensurável). Sejam (X, Σ_1) e (Y, Σ_2) espaços mensuráveis. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita mensurável se para todo conjunto mensurável $E \in \Sigma_2$,

$$f^{-1}(E) = \{x \in X \mid f(x) \in E\},$$

for um conjunto mensurável de Σ_1 .

Quando tomamos (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos e consideramos $\sigma(\tau_1)$ e $\sigma(\tau_2)$ suas respectivas σ -álgebras de Borel, temos que toda função contínua é mensurável. De fato, segue da definição de σ -álgebra de Borel que todo aberto da topologia é um elemento dessa σ -álgebra.

Algumas propriedades bem conhecidas para funções contínuas são válidas para funções mensuráveis.

Sejam (X, Σ_1) , (Y, Σ_2) e (Z, Σ_3) espaços mensuráveis, $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ e $h : Y \rightarrow Z$ funções mensuráveis e E um conjunto mensurável de X . Então a composição $h \circ f$ e a restrição $f|_E$ são funções mensuráveis, e se considerarmos $Y = \mathbb{R}$,

então a soma $f + g$, o produto $f \cdot g$ e o quociente f/g (desde que g não se anule) são também funções mensuráveis.

Em um espaço mensurável, podemos definir uma aplicação chamada de medida.

Definição 2.4 (Medida). Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma aplicação $\mu : X \rightarrow [0, +\infty]$ é dita ser uma medida em X se satisfaz as seguintes propriedades:

$$i) \mu(\emptyset) = 0;$$

ii) (σ -Aditividade) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Chamamos a tripla (X, Σ, μ) de espaço de medida ou espaço com medida. São consequências diretas dessa definição os seguintes resultados.

A monotonicidade: se A e B são conjunto mensuráveis tais que $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. De fato, como $A \subseteq B$ logo $B = A \cup (B \cap A^c)$. Então pela segunda propriedade temos

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) \geq \mu(A),$$

onde a última desigualdade segue do fato de μ ser não negativa.

A subaditividade: se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis não necessariamente disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

De fato, defina os conjuntos mensuráveis $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ da seguinte forma: $G_1 = E_1$ e

$$G_i = E_i - \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} E_j\right), \quad \forall i \geq 2.$$

Então temos que $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos, $G_n \subseteq E_n$ e

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n\right).$$

Portanto, da segunda propriedade e da monotonicidade de μ temos,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(G_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Quando consideramos $X = \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, uma importante medida é a chamada medida de Lebesgue que generaliza as ideias de comprimento, área e volume em X para $n = 1, 2$ e 3 respectivamente. Vamos apresentar agora uma série de resultados para chegarmos à definição de medida de Lebesgue.

Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. O comprimento de I , $\mathcal{L}(I)$, é dado por $\mathcal{L}(I) = b - a$. Se I não for limitado (do tipo $[a, \infty)$ ou $(-\infty, b]$) então $\mathcal{L}(I) = \infty$.

Definição 2.5 (Medida exterior). Uma medida exterior em X é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

- i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- ii) (Monótona) Se $A \subset B$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- iii) (Subaditividade) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis não necessariamente disjuntos, então

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n).$$

Por meio de uma medida exterior podemos definir uma σ -álgebra.

Teorema 2.6. *Seja $A \subset X$ um subconjunto qualquer e μ^* uma medida exterior. Definimos*

$$\sum_{\mu^*} = \{E \subset X \mid \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \forall A \subset X\}.$$

Então \sum_{μ^*} é uma σ -álgebra em X gerada pela medida exterior μ^* . Além disso, a função $\mu : \sum_{\mu^*} \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\mu(E) = \mu^*(E)$ é uma medida em (X, \sum_{μ^*}) . Portanto (X, \sum_{μ^*}, μ) é um espaço de medida.

Quando consideramos $X = \mathbb{R}$ podemos definir a medida exterior de Lebesgue.

Definição 2.7 (Medida exterior de Lebesgue). Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de intervalos que cobrem A , isto é, $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Definimos a medida exterior de Lebesgue m^* como sendo o ínfimo do somatório dos comprimentos dos intervalos que cobrem A , ou seja,

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(I_n); A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\}.$$

Proposição 2.8. A medida exterior de Lebesgue de um intervalo I é o seu comprimento, isto é, $m^*(I) = \mathcal{L}(I)$.

Considerando a medida exterior de Lebesgue m^* do Teorema 2.6, temos a medida de Lebesgue m .

Definição 2.9 (Medida de Lebesgue). A medida exterior m^* da Definição 2.7 quando restrita à σ -álgebra \sum_{m^*} , segundo o Teorema 2.6, é chamada de medida de Lebesgue em \mathbb{R} . Os conjuntos $E \subset \mathbb{R}$ tais que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$ são chamados de conjuntos Lebesgue mensuráveis e a σ -álgebra \sum_{m^*} , definida por esses conjuntos, é chamada de σ -álgebra de Lebesgue.

As medidas de Lebesgue em \mathbb{R}^n podem ser definidas de modo análogo.

Dizemos que uma certa propriedade é válida quase sempre (q.s.) em um conjunto $E \subset \mathbb{R}$, se existe um certo subconjunto E_0 de E tal que a medida de E_0 é zero, isto é, $m(E_0) = 0$ e a propriedade é válida para todo $x \in E \cap E_0^c$.

Dizemos que uma função $f : (\mathbb{R}^n, \sum_1) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \sum_2)$ é Lebesgue mensurável se f for mensurável e \sum_1 e \sum_2 forem σ -álgebras de Lebesgue.

Vamos definir a integral de Lebesgue. Começaremos com a definição de uma função simples.

Definição 2.10 (Função Simples). Seja ϕ uma função real definida sobre o espaço mensurável (X, \sum) . Dizemos que ϕ é uma função simples se ela for mensurável e assumir apenas um número finito de valores na imagem. Assim, se ϕ for simples e assumir os valores c_1, \dots, c_n , então a representação canônica de ϕ é

$$\phi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k},$$

onde $E_k = \{x \in X \mid \phi(x) = c_k\}$ é mensurável e χ_{E_k} é a função característica de E_k , isto é,

$$\chi_{E_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E_k \\ 0 & \text{se } x \notin E_k. \end{cases}$$

Para uma função simples ϕ definida sobre um conjunto E Lebesgue mensurável com $m(E) < \infty$, temos que a "área" sob ϕ pode ser encontrada por meio dos "retângulos" definidos pelo gráfico dessa. Assim temos que a integral de tal função ϕ definida sobre E é

$$\int_E \phi = \sum_{k=1}^n c_k m(E_k).$$

Assim podemos definir a integral de Lebesgue.

Seja f uma função real e limitada definida sobre um conjunto mensurável de medida de Lebesgue finita E . Definimos a integral inferior de Lebesgue por

$$\underline{\int}_E f = \sup \left\{ \int_E \phi \mid \phi \text{ é uma função simples e } \phi \leq f \text{ em } E, \right\},$$

e a integral superior de Lebesgue por

$$\overline{\int}_E f = \inf \left\{ \int_E \phi \mid \phi \text{ é uma função simples e } f \leq \phi \text{ em } E, \right\}.$$

Como f é limitada e E tem medida finita então a integral superior e inferior de Lebesgue são finitas.

Definição 2.11 (Integral de Lebesgue). Dizemos que f é Lebesgue integrável em E se

$$\overline{\int}_E f = \underline{\int}_E f,$$

e a integral de Lebesgue de f em E é esse valor comum.

Temos que a integral de Lebesgue de uma função f parte da ideia de aproximar a área sob a função por meio de uma partição da sua imagem.

O seguinte teorema nos dá uma relação entre funções Riemann e Lebesgue integráveis.

Teorema 2.12. *Seja f uma função real limitada definida sobre o intervalo compacto $[a, b]$. Se f é Riemann integrável sobre $[a, b]$, então f é Lebesgue integrável sobre $[a, b]$ e as duas integrais coincidem.*

Também temos uma caracterização para as funções Lebesgue integráveis.

Teorema 2.13. *Seja f uma função mensurável limitada definida sobre um conjunto E de medida finita. Então f é Lebesgue integrável sobre E .*

A integral de Lebesgue possui diversas vantagens sobre a integral de Riemann, sendo a mais importante delas, para esse trabalho, que por meio da integral de Lebesgue podemos integrar funções que não podemos integrar pela a integral de Riemann. Assim toda vez que falarmos em "integrar uma função" neste trabalho nos referimos à integral de Lebesgue.

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados da teoria de equações diferenciais, como teoremas de existência e unicidade que são generalizações de teoremas clássicos deste assunto. Não serão feitas demonstrações, todavia essas podem ser encontradas em [11].

Seja t um escalar, D um aberto de \mathbb{R}^{n+1} cujos elementos de D são escritos como (x, t) e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Uma equação diferencial é uma relação da forma

$$x'(t) = f(x(t), t), \quad (2.2-1)$$

onde $x'(t) = \frac{dx}{dt}$.

Uma solução de (2.2-1) é uma função $x(t)$ de classe C^1 definida sobre um intervalo I , tal que $(x(t), t) \in D$.

Seja $(x_0, t_0) \in D$. Um problema de valor inicial (P.V.I.) consiste em encontrar um intervalo I e uma função $x(t)$ tal que $t_0 \in I$ e $x(t)$ é uma solução de (2.2-1) que satisfaça $x(t_0) = x_0$. Com isso um P.V.I. é escrito como

$$x'(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I. \quad (2.2-2)$$

Neste caso dizemos que $x(t)$ é uma solução do P.V.I. (2.2-2).

Vamos apresentar alguns resultados que garantem a existência e a unicidade de tais soluções.

Lema 2.14. O P.V.I. (2.2-2) é equivalente a

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) \, d\tau, \quad (2.2-3)$$

desde que $f(x, t)$ seja contínua.

O seguinte teorema nos garante a existência (mas não a unicidade) de solução se f for contínua.

Teorema 2.15 (Existência - Peano). Se f é contínua em D , então para qualquer $(x_0, t_0) \in D$,

existe ao menos uma solução de (2.2-2).

Antes de apresentar o resultado referente a unicidade, precisamos definir o que é uma função localmente lipschitziana.

Definição 2.16. Uma função $f(x, t)$ definida sobre D é dita ser localmente lipschitziana em relação a x , se para qualquer subconjunto compacto $U \subset D$, existe uma constante $k = k_U$ tal que

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq k_U |x - y|,$$

para todo $(x, t), (y, t) \in U$.

Proposição 2.17. Se f for de classe C^1 em relação a x em D , então f é localmente lipschitziana.

Assim se tivermos um P.V.I. e a função f for localmente lipschitziana, o teorema a seguir garante a unicidade da solução.

Teorema 2.18 (Unicidade - Picard-Lindelöf). *Seja f uma função contínua em D e localmente lipschitziana com respeito a x em D . Considere $(x_0, t_0) \in D$. Se $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ são soluções de (2.2-2), então $x_1(t) = x_2(t)$ para $t \in I_1 \cap I_2$.*

Como vimos na seção anterior podemos considerar uma classe mais ampla de funções, as funções mensuráveis. Vamos encerrar esta seção apresentando alguns resultados que falam a respeito da solução de (2.2-2) quando f não for necessariamente contínua. O nosso problema será encontrar uma função absolutamente contínua $x(t)$ definida em um intervalo real I tal que $(x(t), t) \in D$ para todo $t \in I$ e satisfaça a equação (2.2-1) quase sempre.

Definição 2.19. Seja I um intervalo da reta \mathbb{R} . Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua em I se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para uma coleção finita de subintervalos $[r_i, s_i]$ de I , $i = 1, 2, \dots, k$, tal que

$$\sum_{i=1}^k |s_i - r_i| < \delta,$$

então

$$\sum_{i=1}^k |f(s_i) - f(r_i)| < \epsilon.$$

Observamos que as funções absolutamente contínuas são diferenciáveis quase sempre.

Vamos apresentar as condições de Carathéodory.

Definição 2.20 (Condições de Carathéodory). Seja D um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{n+1} . Dizemos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory em D se f é mensurável em relação a t para x fixo, contínua em relação a x para t fixo e para cada subconjunto compacto U de D , existe uma função integrável $m_U(t)$ tal que

$$|f(x, t)| \leq m_U(t), \quad (x, t) \in U.$$

Temos que para funções f que satisfaçam as condições de Carathéodory, os teoremas de existência e unicidade para o P.V.I. (2.2-2) são análogos, com a igualdade sendo substituída pela igualdade quase sempre.

Teorema 2.21 (Existência - Carathéodory). Se D é um aberto de \mathbb{R}^{n+1} e f satisfaz as condições de Carathéodory em D , então para qualquer $(x_0, t_0) \in D$ existe ao menos uma solução absolutamente contínua de (2.2-2).

Teorema 2.22 (Unicidade - Carathéodory). Seja D um aberto de \mathbb{R}^{n+1} e suponha que f satisfaça as condições de Carathéodory em D . Além disso, suponha que para qualquer subconjunto compacto $U \subset D$, exista uma função integrável $k_U(t)$ tal que

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq k_U(t)|x - y|, \quad \forall (x, t), (y, t) \in U.$$

Seja $(x_0, t_0) \in D$. Se $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ são soluções de (2.2-2), então $x_1(t) = x_2(t)$ para $t \in I_1 \cap I_2$.

2.3 Análise Convexa

Nesta seção vamos apresentar algumas definições e resultados relacionados a análise convexa que serão necessários para a compreensão deste trabalho. Não serão feitas demonstrações, todavia essas podem ser encontradas em [15].

Vamos iniciar essa seção apresentando a definição de um conjunto afim.

Definição 2.23 (Conjunto Afim). Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que M é um conjunto afim se,

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y - x) \in M,$$

para todo $x, y \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto um conjunto afim contém a reta que passa por quaisquer dois de seus pontos.

Alguns exemplos de conjuntos afins são \emptyset , \mathbb{R}^n , conjuntos unitários $\{x\}$, retas e planos em \mathbb{R}^n . Um outro exemplo são os subespaços de \mathbb{R}^n , que são conjuntos afins que contém a origem. Subconjuntos de \mathbb{R}^n que contém a origem e são paralelos a um conjunto afim são subespaços de \mathbb{R}^n .

Por meio dos subespaços conseguimos definir a dimensão de um conjunto afim.

Definição 2.24. A dimensão de um conjunto afim é definida como a dimensão do subespaço paralelo a esse. A dimensão de \emptyset é -1 e a dimensão de um conjunto unitário é 0 .

Chamamos os conjuntos afins de dimensão 0 , 1 e 2 de pontos, retas e planos respectivamente. Um conjunto afim de dimensão $(n - 1)$ em \mathbb{R}^n é chamado de hiperplano.

Podemos representar um hiperplano por meio de uma equação, de certa forma única.

Teorema 2.25. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ não-nulo, o conjunto

$$H(b, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b \rangle = \alpha\},$$

é um hiperplano em \mathbb{R}^n . Além disso, todo hiperplano pode ser representado desta forma, com b e α únicos a menos de multiplicação destes por um escalar não-nulo.

Por meio de interseções de hiperplanos podemos representar os conjuntos afins.

Teorema 2.26. *Todo subconjunto afim de \mathbb{R}^n é uma interseção finita de hiperplanos.*

Temos que a interseção arbitrária de conjuntos afins também é um conjunto afim. Dessa ideia podemos escrever o menor conjunto afim que contém um subconjunto qualquer de \mathbb{R}^n .

Definição 2.27 (Envoltória Afim). Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ qualquer. Existe um único e menor conjunto afim que contém S , a saber, a interseção de todos os conjuntos afins que o contém. Esse conjunto afim é chamado de envoltória afim de S e será denotado por $aff(S)$.

Vamos agora definir o que é um conjunto convexo e a sua relação com conjuntos afins.

Definição 2.28. Um subconjunto C de \mathbb{R}^n é dito convexo se

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$$

para todo $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$. Portanto, um conjunto convexo contém o segmento de reta fechado entre quaisquer dois de seus pontos.

Temos que a definição de conjuntos convexos é mais geral que a de conjuntos afins. Observe que todo conjunto afim é convexo, mas nem todo conjunto convexo é afim. Por exemplo, uma bola é um conjunto convexo que não é um conjunto afim.

Um tipo de conjunto convexo muito importante é o semi-espço.

Definição 2.29. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ não-nulo. Os conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b \rangle \leq \alpha\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b \rangle \geq \alpha\},$$

são chamados de semi-espços fechados e os conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b \rangle < \alpha\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b \rangle > \alpha\},$$

são chamados de semi-espços abertos.

Temos que todo semi-espaço é um conjunto convexo. Dessa definição temos que todo hiperplano H é fronteira de dois semi-espaços distintos, os quais chamaremos de semi-espaços associados a H .

Existem outras maneiras de caracterizar conjuntos convexos.

Definição 2.30. Dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, a soma vetorial

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

é chamada de combinação convexa de x_1, \dots, x_n , se os coeficientes reais λ_i são não negativos e

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Teorema 2.31. Um subconjunto C de \mathbb{R}^n é convexo se, e somente se, C contém todas as combinações convexas finitas de seus elementos.

Temos que a interseção arbitrária de conjuntos convexos também é um conjunto convexo. Além disso, os conjuntos convexos satisfazem algumas outras propriedades.

Proposição 2.32. Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, $b \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos que a translação de C por b e a homotetia por α , ou seja, os conjuntos

$$C + b = \{x + b \in \mathbb{R}^n | x \in C\}$$

e

$$\alpha C = \{\alpha x \in \mathbb{R}^n | x \in C\}$$

são conjuntos convexos.

Uma importante definição surge quando consideramos $\alpha = -1$.

Definição 2.33. Um conjunto convexo C é dito simétrico em relação à origem se $-C = C$.

O seguinte teorema relaciona transformações lineares e conjuntos convexos.

Teorema 2.34. Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos convexos e A uma transformação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . Temos que

$$A(C) = \{Ax \in \mathbb{R}^m | x \in C\}$$

é um conjunto convexo em \mathbb{R}^m e

$$A^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \in D\}$$

é um conjunto convexo em \mathbb{R}^n .

Notemos que a notação A^{-1} denota a imagem inversa e não implica que a inversa da transformação linear existe.

Corolário 2.35. *A projeção ortogonal de um conjunto convexo C em um subespaço L é um conjunto convexo.*

Corolário 2.36. *A rotação R_α de um conjunto convexo C por um ângulo α em relação a um eixo orientado é um conjunto convexo.*

Os resultados anteriores nos garantem como obter um conjunto convexo a partir de um existente, mas como podemos conseguir conjuntos convexos originais? Uma boa maneira é por meio de funções convexas.

Definição 2.37 (Funções Convexas). Seja f uma função real cujo domínio é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto

$$\{(x, \alpha) | x \in S, \alpha \geq f(x)\},$$

é chamada de epigrafo de f e denotado por $\text{epi}(f)$. Dizemos que f é uma função convexa se $\text{epi}(f)$ é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^{n+1} .

Segue da definição que f é convexa em S se e só se

$$(1 - \lambda)(x, \alpha) + \lambda(y, \beta) = ((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta) \in \text{epi}(f)$$

sempre que $(x, \alpha), (y, \beta) \in \text{epi}(f)$ e $\lambda \in [0, 1]$. Em outras palavras, temos que

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in S$$

e

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$$

sempre que $x, y \in S$, $f(x) \leq \alpha$, $f(y) \leq \beta$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Esse resultado é expresso no seguinte teorema:

Teorema 2.38. *Seja $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, onde C é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n . Então f é convexa em C se, e somente se,*

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

para todo $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Temos o seguinte tipo de funções convexas que serão importantes no nosso trabalho.

Definição 2.39 (Funções Estritamente Convexas). *Seja $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, onde C é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n . Então f é estritamente convexa em C se*

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

para todo $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Exemplos de funções convexas são as normas $\|\cdot\|$ em \mathbb{R}^n , pois toda norma satisfaz as seguintes condições:

Simetria: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

Desigualdade triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Logo, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0, 1]$ temos

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| \leq (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\|.$$

Quando estamos considerando conjuntos convexas, o conceito de *interior* de um conjunto pode ser compreendido de maneira mais conveniente, como o interior relativo.

Definição 2.40 (Interior Relativo). *O interior relativo de um subconjunto convexo C de \mathbb{R}^n , denotado por $ri(C)$, é definido como o interior de C quando considerado como um subconjunto da sua envoltória afim ($aff(C)$). Em símbolos,*

$$ri(C) = \{x \in aff(C) \mid \exists \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap aff(C) \subset C\}.$$

Segue dessa definição que C é dito ser relativamente aberto se $ri(C) = C$. Note que $ri(C) \subset C \subset \bar{C}$, onde \bar{C} é o fecho de C em \mathbb{R}^n . Assim a diferença $rb(C) = \bar{C} - ri(C)$ é chamada de fronteira relativa de C . Para um conjunto convexo C de dimensão n temos que $aff(C) = \mathbb{R}^n$, então por definição $ri(C) = int(C)$ onde $int(C)$ é o interior de C .

Dessa forma podemos definir alguns tipos de conjuntos convexos.

Definição 2.41 (Conjunto estritamente convexo). Um subconjunto convexo C de \mathbb{R}^n é dito estritamente convexo se,

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in ri(C),$$

para todo $x, y \in \bar{C}$ e $\lambda \in (0, 1)$. Portanto um conjunto estritamente convexo contém em seu interior relativo o segmento de reta aberto entre quaisquer dois pontos pertencentes ao seu fecho.

Definição 2.42 (Conjunto Estritamente Convexo em $x_0 \in rb(C)$). Um subconjunto convexo C de \mathbb{R}^n é dito estritamente convexo em x_0 se,

$$(1 - \lambda)x_0 + \lambda y \in ri(C),$$

para todo $y \in \bar{C}$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Veremos agora quando podemos separar dois conjuntos.

Definição 2.43. Sejam C_1 e C_2 subconjuntos de \mathbb{R}^n . Um hiperplano H separa C_1 e C_2 se C_1 está contido em um dos dois semi-espacos (fechados) associados a H e C_2 está contido no semi-plano (fechado) oposto.

O seguinte teorema nos permite separar conjuntos afins e convexos.

Teorema 2.44. *Seja C um subconjunto convexo relativamente aberto e não vazio de \mathbb{R}^n e M um conjunto afim não-vazio em \mathbb{R}^n que não intersecta C . Então temos que existe um hiperplano H tal que $M \subseteq H$ e C está contido em um dos dois semi-espacos associados a H .*

O próximo resultado nos permite separar conjuntos convexos.

Teorema 2.45. *Seja C_1 e C_2 subconjuntos convexos não vazios de \mathbb{R}^n . Para que exista um hiperplano separando C_1 e C_2 é necessário e suficiente que*

$$ri(C_1) \cap ri(C_2) = \emptyset.$$

Com esse teorema conseguimos uma outra caracterização para conjuntos convexos fechados, e conjuntos convexos relativamente abertos, isto é, $C = ri(C)$.

Teorema 2.46. *Um conjunto convexo fechado (respectivamente aberto) é igual a interseção de todos os semi-espacos fechados (respectivamente abertos) que o contém.*

Vamos definir o que é um hiperplano suporte.

Definição 2.47. *Seja C um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n . Um semi-espaco suporte H de C é um semi-espaco que contém C e existe ao menos um ponto na interseção da fronteira do semi-espaco com $rb(C)$. Um hiperplano suporte de C é um hiperplano que é a fronteira de um semi-espaco suporte de C .*

Em outras palavras um hiperplano suporte de C é o hiperplano $H(b, \alpha)$ tal que $\langle y, b \rangle \leq \alpha$, para todo $y \in C$ e $\langle x, b \rangle = \alpha$, para ao menos um $x \in rb(C)$. Assim dizemos que $H(b, \alpha)$ é um hiperplano suporte de C em x .

Veremos agora quando existe tal hiperplano suporte.

Teorema 2.48. *Seja C um conjunto convexo e D um subconjunto convexo não-vazio de C (por exemplo D pode ser um conjunto unitário). Para que exista um hiperplano suporte de C contendo D é necessário e suficiente que*

$$D \cap ri(C) = \emptyset.$$

A partir do teorema anterior podemos garantir que se C é um conjunto convexo de \mathbb{R}^n e x_0 é um ponto da $rb(C)$, então existe um hiperplano suporte $H(b, \alpha)$ de C tal que

$$\langle x_0, b \rangle = \alpha.$$

Notemos que esse resultado só nos garante a existência mas não a unicidade. Por exemplo, se C possuir um "bico" em x_0 pertencente a $rb(C)$, então existem infinitos hiperplanos suportes a C que contém x_0 .

Daqui em diante vamos estudar conjuntos convexos diretamente relacionados com este trabalho.

Vamos considerar conjuntos convexos limitados em \mathbb{R}^2 com a origem em seu interior tais que $\text{aff}(C) = \mathbb{R}^2$. Em alguns casos, consideramos C simétricos em relação à origem.

Seja $rb(C)$ a curva simples e fechada dada pela fronteira relativa de C , que neste caso estamos considerando $\text{aff}(C) = \mathbb{R}^2$. Temos que a fronteira relativa coincide com a fronteira usual, isto é, $rb(C) = \partial(C)$.

Vamos denotar por C' a curva obtida pela interseção de $\partial(C)$ com o semiplano superior, isto é,

$$C' = \{(x, y) \in \partial(C) \mid y \geq 0\}.$$

Para o que segue consideremos a função

$$\beta : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \partial(C) \quad (2.3-4)$$

que associa a cada $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, o ponto $p \in \partial(C)$ tal que o ângulo entre o vetores $(1, 0)$ e \vec{p} é θ radianos. Notemos que por essa associação fica definida uma relação de ordem para os pontos de $p \in \partial(C) - \{\beta(-\frac{\pi}{2})\}$. Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \partial(C)$. Dizemos que $\beta(\theta_1) = (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) = \beta(\theta_2)$ se, e somente se, $\theta_1 \leq \theta_2$.

Notemos que por essa função o ponto $p \in \partial(C)$, com \vec{p} vertical apontando para baixo fica associado a dois valores angulares, porém isso não prejudicará as análises.

Agora que já definimos a aplicação β e a relação de ordem vamos definir a seguinte aplicação

$$\phi : \left\{ (\theta_1, \theta_2) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \mid \theta_1 < \theta_2 \right\} \longrightarrow (\widehat{\theta}, \widehat{\theta} + 2\pi),$$

tal que $\phi(\theta_1, \theta_2)$ mede o ângulo entre o vetor $(1, 0)$ e o vetor $\overrightarrow{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$, onde $\widehat{\theta} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é a inclinação de uma reta suporte de $\partial(C)$ em p_s (ponto tal que \vec{p}_s é vertical e apontado para baixo).

A aplicação ϕ é contínua e satisfaz as seguintes propriedades, quando consideramos a relação de ordem " \preceq " definida acima.

Proposição 2.49. *Sejam $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ com $(\theta_1, \theta_2), (\theta_1, \theta_3) \in \text{Dom}(\phi)$. Se $\theta_2 < \theta_3$, então*

$$\phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta_1, \theta_3).$$

Demonstração: Tomemos $\overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$ como sendo a reta orientada entre $\beta(\theta_1)$ e $\beta(\theta_3)$. Pela convexidade de C o arco $\widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$ está contido no semi-plano fechado a direita da reta orientada $\overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$ e como $\beta(\theta_2) \in \widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$ pois $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, então segue que $\phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta_1, \theta_3)$.

■

De modo análogo mostramos o seguinte resultado quando consideramos a desigualdade contrária.

Proposição 2.50. *Sejam $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ com $(\theta_2, \theta_1), (\theta_3, \theta_1) \in \text{Dom}(\phi)$. Se $\theta_2 > \theta_3$, então*

$$\phi(\theta_2, \theta_1) \geq \phi(\theta_3, \theta_1).$$

Os dois últimos resultados apresentam uma relação entre os ângulos de vetores que compartilham um mesmo extremo (inicial ou final). O próximo resultado nos garante uma relação entre os ângulos de vetores os quais o extremo final de um vetor coincide com o inicial do próximo.

Proposição 2.51. *Sejam $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ com $(\theta_1, \theta_2), (\theta_2, \theta_3) \in \text{Dom}(\phi)$. Se $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, então*

$$\phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta_2, \theta_3).$$

Demonstração: Pela Proposição [2.49](#) e pelas desigualdades $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ obtemos

$$\phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta_1, \theta_3),$$

e pela Proposição [2.50](#) e das desigualdades segue que

$$\phi(\theta_1, \theta_3) \leq \phi(\theta_2, \theta_3).$$

Portanto obtemos $\phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta_2, \theta_3)$.

■

Por meio da função ϕ conseguimos definir outras duas importantes funções.

Definição 2.52. Seja $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Considere θ_i uma sequência tendendo à θ pela direita, com $\theta_i > \theta$. Pela Proposição 2.49, temos que $\phi(\theta, \theta_i)$ é uma sequência monótona (não crescente) e limitada, logo convergente. Chamaremos de $\phi_{max}(\theta)$ o limite dessa sequência, ou seja,

$$\phi_{max}(\theta) = \inf_{\theta_i > \theta} \phi(\theta, \theta_i).$$

Definição 2.53. Seja $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Considere θ_i uma sequência tendendo à θ pela esquerda, com $\theta_i < \theta$. Pela Proposição 2.50, temos que $\phi(\theta_i, \theta)$ é uma sequência monótona (não decrescente) e limitada, logo convergente. Chamaremos de $\phi_{min}(\theta)$ o limite dessa sequência, ou seja,

$$\phi_{min}(\theta) = \sup_{\theta_i < \theta} \phi(\theta_i, \theta).$$

O seguinte resultado nos fornece uma desigualdade entre as funções ϕ_{max} e ϕ_{min} para um ponto qualquer $\beta(\theta) \in \partial(C)$, desde que tais funções estejam definidas para θ .

Proposição 2.54. Se $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, então a seguinte desigualdade é válida,

$$\phi_{min}(\theta) \leq \phi_{max}(\theta).$$

Demonstração: A desigualdade $\phi_{min} \leq \phi_{max}$ segue da Proposição 2.51 e da definição das funções. De fato, se $\theta_j, \theta_k \rightarrow \theta$ são sequências tais que $\theta_j < \theta$ e $\theta_k > \theta$, então pela Proposição 2.51 temos

$$\phi_{min}(\theta) = \sup_{\theta_j < \theta} \phi(\theta_j, \theta) \leq \inf_{\theta_k > \theta} \phi(\theta, \theta_k) = \phi_{max}(\theta).$$

Notemos que a igualdade $\phi_{min}(\theta) = \phi_{max}(\theta)$ só acontece se existir uma única reta suporte de C em (x, y) .

■

O seguinte resultado nos permite comparar as funções ϕ_{max} , ϕ_{min} e ϕ .

Proposição 2.55. Sejam $\theta_1, \theta_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Se $\theta_1 > \theta_2$, então

$$\phi_{max}(\theta_2) \leq \phi(\theta_2, \theta_1) \leq \phi_{min}(\theta_1).$$

Demonstração: Pela definição de ϕ_{max} , da Proposição 2.49 e da hipótese $\theta_1 > \theta_2$, segue que

$$\phi_{max}(\theta_2) = \inf_{\theta_i > \theta_2} \phi(\theta_2, \theta_i) \leq \phi(\theta_2, \theta_1).$$

Da definição de ϕ_{min} , da Proposição 2.50 e da hipótese $\theta_1 > \theta_2$, segue que

$$\phi(\theta_2, \theta_1) \leq \sup_{\theta_i < \theta_1} \phi(\theta_i, \theta_1) = \phi_{min}(\theta_1).$$

Portanto temos que

$$\phi_{max}(\theta_2) \leq \phi(\theta_2, \theta_1) \leq \phi_{min}(\theta_1).$$

■

O próximo resultado nos dá uma informação sobre a $\partial(C)$ quando esta tiver três pontos colineares.

Proposição 2.56. Se $\beta(\theta_i) \in \partial(C)$, $i = 1, 2, 3$, são pontos colineares tais que $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, isto é,

$$\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(\theta_2, \theta_3),$$

então $\overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)} \subseteq \partial(C)$.

Demonstração: Vamos mostrar que

$$\widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)} = \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)},$$

isto é, o arco $\widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)} \subseteq \partial(C)$, é igual ao segmento afim entre $\beta(\theta_1)$ e $\beta(\theta_3)$.

Tomando as funções ϕ_{min} e ϕ_{max} , temos pela Proposição 2.55 que são válidas as seguintes desigualdades

$$\phi_{max}(\theta_1) \leq \phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi_{min}(\theta_2) \leq \phi_{max}(\theta_2) \leq \phi(\theta_2, \theta_3) \leq \phi_{min}(\theta_3).$$

Vamos mostrar que se $\beta(\theta') \in \widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$, então $\beta(\theta') \in \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$.

De fato, como $\beta(\theta')$ pertence ao arco $\widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$ tomemos $\theta' \notin \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, pois caso contrário não há o que mostrar. Assim temos dois casos análogos para considerar

$\theta_1 < \theta' < \theta_2 < \theta_3$ ou $\theta_1 < \theta_2 < \theta' < \theta_3$.

Faremos os cálculos para o primeiro caso e o segundo segue de maneira análoga. Pelas Proposições 2.49 e 2.50 seguem as desigualdades

$$\phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta', \theta_2) \leq \phi(\theta', \theta_3) \leq \phi(\theta_2, \theta_3).$$

Como $\beta(\theta_i)$, $i = 1, 2, 3$ são colineares temos que

$$\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(\theta_2, \theta_3),$$

e pelas desigualdades acima segue que $\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(\theta', \theta_2) = \phi(\theta_2, \theta_3)$. Logo $\beta(\theta') \in \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$.

Portanto obtemos que $\widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)} \subseteq \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$.

Como mostramos que o segmento contém o arco, temos que existe um aplicação contínua definida por

$$\begin{aligned} f : \widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)} &\rightarrow \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)} \\ x &\mapsto f(x) = x. \end{aligned}$$

Afirmamos que a aplicação f é sobrejetora.

De fato, suponha que f não seja sobrejetora. Então existe $(x, y) \in \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$, tal que $(x, y) \notin \widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$. Note que $(x, y) \neq \beta(\theta_1)$ e $(x, y) \neq \beta(\theta_3)$. Se considerarmos a aplicação,

$$\tilde{f} : \widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)} \rightarrow f\left(\widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}\right),$$

obtida pela restrição do contradomínio da aplicação f à sua imagem, então \tilde{f} é contínua. Porém $\widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$ é conexo e $Im(\tilde{f})$ não seria conexo. Assim obtemos uma contradição. Portanto $f\left(\widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}\right) = \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_3)}$.

■

Podemos interpretar geometricamente as funções $\phi_{max}(\theta)$ e $\phi_{min}(\theta)$ como sendo as angulações máxima e mínima respectivamente das retas suportes de C em $\beta(\theta)$, em relação ao eixo x pelo seguinte resultado.

Proposição 2.57. Se $\phi \in [\phi_{min}(\theta), \phi_{max}(\theta)]$, então ϕ é a angulação de uma reta suporte de C em $\beta(\theta)$.

Demonstração: Faremos a demonstração pela contrapositiva. Se r é uma reta que não é suporte de C que passa por $\beta(\theta) \in \partial(C)$ com angulação ϕ , mostraremos que $\phi \notin [\phi_{\min}(\theta), \phi_{\max}(\theta)]$. De fato, como r não é reta suporte de C , então r intersecta C em dois pontos distintos $\beta(\theta)$ e $\beta(\theta')$ de tal forma que os pontos do arco aberto $\widehat{\beta(\theta)\beta(\theta')}$ pertencem a um semi-plano aberto enquanto que os demais pontos de $\partial(C)$ pertencem ao outro semi-plano.

Assim temos dois casos análogos para considerar: $\theta' > \theta$ ou $\theta' < \theta$.

Caso 1: Se $\theta' > \theta$, então $\phi = \phi(\theta, \theta')$. Tomemos uma sequência de pontos θ_i tendendo à θ pela esquerda tais que $\theta' > \theta_i > \theta$. Pela Proposição [2.49](#) temos que

$$\phi = \phi(\theta, \theta') > \phi(\theta, \theta_i),$$

mas pela definição de $\phi_{\max}(\theta)$ temos

$$\phi = \phi(\theta, \theta') > \phi_{\max}(\theta),$$

ou seja, $\phi \notin [\phi_{\min}(\theta), \phi_{\max}(\theta)]$.

O caso 2 é análogo. ■

Podemos descrever as retas suporte de C em $\beta(\theta)$ pela notação de hiperplano bastando saber as suas angulações ϕ . Tomemos $b = (b_1, b_2) = \pm(-\sin(\phi), \cos(\phi)) \in \mathbb{R}^2$ um vetor unitário, ortogonal à reta suporte e α o valor satisfazendo a igualdade

$$\langle b, \beta(\theta) \rangle = \alpha.$$

Assim podemos escrever $r = H(b, \alpha)$.

Para pontos simétricos em $\partial(C)$, isto é, $\beta(\theta_1) = (x_1, y_1)$ e $\beta(\theta_2) = \beta(\theta_1 + \pi) = (-x_1, -y_1)$, são válidos os seguinte resultados:

Proposição 2.58. *Suponha que C seja simétrico em relação à origem. Se $r_1 = H(b, \alpha)$ é uma reta suporte de C em $\beta(\theta_1)$, então a reta $r_2 = H(-b, \alpha)$ é suporte de C em $\beta(\theta_2)$.*

Demonstração: Se $r_1 = H(b, \alpha)$ é suporte de C , então pela definição de hiperplano suporte temos que

$$\langle (x, y), (b_1, b_2) \rangle \leq \alpha,$$

para todo $(x, y) \in C$. Como C é simétrico, se $(x, y) \in C$, então $(-x, -y) \in C$. Logo

$$\alpha \geq \langle (-x, -y), (b_1, b_2) \rangle = \langle -(x, y), (b_1, b_2) \rangle = \langle (x, y), -(b_1, b_2) \rangle = \langle (x, y), (-b_1, -b_2) \rangle.$$

Assim pela definição de hiperplano suporte segue que $H(-b, \alpha)$ é suporte de C .

Resta mostrar que $r_2 = H(-b, \alpha)$ é suporte em $\beta(\theta_2)$. De fato, temos que $r_1 = H(b, \alpha)$ é suporte em $\beta(\theta_1)$, ou seja,

$$\langle \beta(\theta_1), b \rangle = \langle (x_1, y_1), (b_1, b_2) \rangle = \alpha.$$

Então

$$\langle \beta(\theta_2), -b \rangle = \langle (-x_1, -y_1), (-b_1, -b_2) \rangle = \langle (x_1, y_1), (b_1, b_2) \rangle = \alpha,$$

e pela definição temos que $r_2 = H(-b, \alpha)$ é suporte em $\beta(\theta_2)$.

■

Temos que se $\langle b, (1, 0) \rangle = \cos(\phi - \frac{\pi}{2})$, então $\langle -b, (1, 0) \rangle = \cos(\phi + \frac{\pi}{2})$. Logo se $[\phi_{\min}(\theta_1), \phi_{\max}(\theta_1)]$ é o intervalo dos ângulos para as retas suportes de C em $\beta(\theta_1)$, então $[\phi_{\min}(\theta_2) + \pi, \phi_{\max}(\theta_2) + \pi]$ é o intervalo dos ângulos para as retas suportes de C em $\beta(\theta_2) = \beta(\theta_1 + \pi)$.

Desse resultado e da desigualdade $\phi_{\min}(\theta) \leq \phi_{\max}(\theta)$ segue a seguinte diferença.

Proposição 2.59. *Suponha que C seja simétrico em relação à origem e $\beta(\theta_1)$ e $\beta(\theta_2)$ simétricos em $\partial(C)$, com $\theta_2 > \theta_1$. Então*

$$\phi_{\min}(\theta_2) - \phi_{\max}(\theta_1) \leq \pi.$$

Demonstração: De fato, segue do último resultado que

$$\phi_{\max}(\theta_2) = \phi_{\max}(\theta_1) + \pi.$$

Logo da desigualdade $\phi_{min}(\theta) \leq \phi_{max}(\theta)$ temos

$$\phi_{min}(\theta_2) \leq \phi_{max}(\theta_2) \Rightarrow \phi_{min}(\theta_2) \leq \phi_{max}(\theta_1) + \pi \Rightarrow \phi_{min}(\theta_2) - \phi_{max}(\theta_1) \leq \pi.$$

■

CAPÍTULO 3

PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE PONTRYAGIN

Neste capítulo vamos apresentar a teoria de sistemas de controle bem como alguns resultados a respeito desses. Faremos uma interpretação geométrica do nosso problema, e com isso introduzir as ideias do Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP) [3.8] a ser exposto neste capítulo. Terminaremos esse capítulo com um exemplo, o qual não é possível resolvê-lo de modo usual através da teoria clássica de equações diferenciais.

3.1 O Espaço de Fase e as Funções de Controles Admissíveis

Seja X o espaço vetorial n -dimensional real \mathbb{R}^n . Iremos chamar tal espaço de espaço de fase. Tomemos

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

e vamos considerar que este objeto se move e esse movimento será interpretado como a mudança das variáveis $x_i, i = 1, \dots, n$, em relação ao tempo t .

Como queremos estudar o comportamento do nosso objeto, vamos assumir que essas mudanças de variáveis podem ser controladas, isto é, o deslocamento do nosso objeto depende de certos controles. Tais controles serão o nosso foco neste capítulo.

Um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^r$ será chamado de conjunto de controle e seus elementos, chamados de controle, serão denotados por

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_r) \in U \subseteq \mathbb{R}^r.$$

Para problemas reais é importante considerarmos o conjunto U como um subconjunto fechado ou mesmo compacto de \mathbb{R}^r . Essas hipóteses sobre a região U vêm da interpretação física desses tipos de problemas, pois nesses casos as coordenadas u_j , $j = 1, 2, \dots, r$ representam valores que não podem ser arbitrários e devem respeitar os limites físicos desses problemas.

Para esses tipos de problemas podemos considerar, por exemplo, o conjunto U como sendo o cubo r -dimensional de aresta $2c$, centrado na origem, isto é, o conjunto de controle U é o conjunto de pontos $u \in \mathbb{R}^r$ tais que,

$$|u_j| \leq c, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Notemos que neste caso as coordenadas u_j , $j = 1, 2, \dots, r$ não apresentam relações entre si.

Um outro exemplo de conjunto U para esses casos é a esfera de raio c centrada na origem, isto é, o conjunto de controle U é o conjunto de pontos $u \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = c^2.$$

Notemos que neste caso as coordenadas u_1 , u_2 e u_3 apresentam uma relação entre si.

Assim temos que para problemas reais, em razão da modelagem do problema, podem existir ou não relações entre as coordenadas de u no conjunto de controle.

Entretanto, daqui em diante, vamos simplesmente nos referir a U como o conjunto de controle e $u \in U$ por controle.

Sejam I um intervalo fechado de \mathbb{R} , isto é, $I = [t_0, t_1]$ e $u(t)$ uma aplicação tal que a

imagem de I esteja contida em U , ou seja,

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)) \in U, \quad \forall t \in I.$$

Chamaremos a aplicação $u(t)$ de função de controle.

Dependendo do problema que nos propomos a resolver, vamos precisar impor certas condições sobre as funções de controle $u(t)$. Algumas dessas propriedades são, por exemplo, continuidade por partes, mensurabilidade, $u(t)$ ser limitada, entre outras. Com isso, as funções de controle que satisfizerem essas propriedades serão chamadas de funções de controles admissíveis. Neste trabalho, as funções de controle admissíveis $u(t)$ serão mensuráveis e limitadas. Em razão da escolha dessas propriedades, as funções de controles admissíveis satisfazem as propriedades a seguir.

Propriedade 3.1. *Se $u(t)$ é uma função de controle admissível, $v \in U$ um controle arbitrário e $t', t'' \in I$ são tais que $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$, então a função de controle $u_v(t)$ definida por*

$$u_v(t) = \begin{cases} v, & \text{se } t' \leq t \leq t'', \\ u(t), & \text{se } t_0 \leq t < t' \text{ ou } t'' < t \leq t_1, \end{cases}$$

também é uma função de controle admissível.

Propriedade 3.2. *Se o intervalo I for particionado em um número finito de subintervalos disjuntos I_i , $i = 1, \dots, n$ e em cada um desses subintervalos estiver definida uma função de controle admissível $u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, então a função de controle $u(t)$ dada pela concatenação de $u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, isto é,*

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{se } t \in I_1, \\ \vdots & \vdots \\ u_n(t), & \text{se } t \in I_n, \end{cases}$$

também é uma função de controle admissível.

Propriedade 3.3. *Se $u(t)$ for uma função de controle admissível definida no intervalo I e $I' \subset I$ for um subintervalo, então a restrição $(u|_{I'})(t)$ de $u(t)$ à I' também é uma função de controle admissível.*

Propriedade 3.4. *Se $u(t)$ for uma função de controle admissível definida no intervalo $[t_0, t_1]$ e $a \in \mathbb{R}$, então a função de controle $u_{+a}(t)$ obtida de $u(t)$ por uma translação sobre o tempo, isto*

é,

$$u_{+a}(t) = u(t - a), \quad t \in [t_0 + a, t_1 + a],$$

também é uma função de controle admissível.

Para o que segue vamos apresentar alguns fatos sobre equações diferenciais cujo lado direito é mensurável. Denote $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $u = (u_1, \dots, u_r) \in U$. Primeiro consideremos o sistemas de equações diferenciais da forma,

$$\frac{dz_i}{dt} = h_i(z_1, \dots, z_n, u, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1-1)$$

cujas funções h_i são de classe C^0 nas variáveis $z_i, i = 1, \dots, n, u$ e t e são de classe C^1 com respeito a $z_i, i = 1, \dots, n,$, isto é, as funções

$$h_i(z_1, \dots, z_n, u, t) \text{ e } \frac{\partial h_i}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_n, u, t); \quad i, j = 1, \dots, n,$$

são contínuas. Seja $u(t)$ uma dada função de controle mensurável limitada arbitrária definida sobre o intervalo I . Vamos considerar as funções absolutamente contínuas $z_i(t), i = 1, \dots, n,$ as quais satisfazem as equações

$$\frac{dz_i}{dt} = h_i(z_i(t), \dots, z_n(t), u(t), t), \quad i = 1, \dots, n, \quad q.s.$$

Dessa forma, pelas condições impostas para a função $h(z, u(t), t)$, temos que a mesma satisfaz as condições de Carathéodory, pois é composição de funções contínuas e mensuráveis definidas sobre o intervalo fechado I . Assim temos, pela teoria de E.D.O. nas condições de Carathéodory, que as soluções $z_i(t), i = 1, \dots, n,$ do sistema (3.1-1) correspondentes à função de controle $u(t)$ e às condições iniciais $z_i(t_0) = z_i^0, i = 1, \dots, n,$ existem e são únicos.

De modo geral, temos pelos teoremas de existência e unicidade de Carathéodory (Teoremas 2.21 e 2.22) que as soluções do sistema (3.1-1) podem não estar definidas para o intervalo I inteiro, mas sim para um subintervalo. No caso do sistema (3.1-1) ser linear em relação a $z_i(t), i = 1, \dots, n,$ com $z(t)$ podendo variar ao longo de \mathbb{R}^n , então a solução do sistema está definida para o intervalo I todo.

3.2 Apresentação do Problema Fundamental

Na seção anterior consideramos que o nosso objeto visto como um ponto x do espaço de fase $X \subset \mathbb{R}^n$ se movimenta, e esse movimento pode ser controlado pela função de controle $u(t)$ definida no conjunto de controle U .

Agora vamos assumir que essa movimentação será dada por uma função $x(t)$ com $t \in I$ e $x(I) \subset X$, a qual pode ser descrita por meio de um sistema de equações diferenciais,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r) = f_i(x, u), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2-2)$$

ou na forma vetorial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

onde $f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u), \dots, f_n(x, u))$. As funções $f_i, i = 1, 2, \dots, n$, estão definidas para $x \in X$ e $u \in U$.

Vamos assumir que as funções $f_i, i = 1, 2, \dots, n$, que ditam o movimento do nosso objeto são de classe C^0 nas variáveis x e u e de classe C^1 com respeito a x , isto é, as funções

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \text{ e } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n, u); \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

são definidas e contínuas em $X \times \bar{U}$, onde \bar{U} é o fecho do conjunto U em \mathbb{R}^r .

Notemos que o sistema (3.2-2) é autônomo, pois o lado direito das equações não dependem do tempo t .

Se uma certa função de controle admissível $u = u(t)$ é escolhida, o sistema (3.2-2) assume a forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t)), \quad (3.2-3)$$

e para uma posição inicial do nosso objeto, isto é, uma condição inicial $x(t_0) = x_0$

qualquer, temos (3.2-3) satisfaz as condições dos teoremas de existência e unicidade de Carathéodory. Com isso temos que o movimento do nosso objeto ou a aplicação $x(t)$ que é solução de (3.2-3), fica unicamente determinado para um certo intervalo de tempo.

A solução $x(t)$ obtida, será chamada de trajetória ou solução do sistema (3.2-3), correspondente a função de controle admissível $u(t)$ e com condição inicial $x_0 = x(t_0)$.

Daqui em diante vamos dizer que uma certa função de controle admissível $u(t)$, transfere o nosso objeto de uma posição para outra, isto é, da posição $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ para a posição $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ no espaço de fase, se a solução $x(t)$ do sistema (3.2-3) correspondente a função de controle $u(t)$ satisfaz as seguintes condições:

$$i) x(t_0) = \tilde{x}_0;$$

$$ii) x(t_1) = \tilde{x}_1;$$

iii) $x(t)$ satisfaz o sistema (3.2-3) quase sempre.

Agora que já temos nossos objetos bem definidos, podemos partir para as condições do nosso problema.

Suponhamos que queremos deslocar nosso objeto da posição \tilde{x}_0 para a posição \tilde{x}_1 , e queremos fazer esse deslocamento da *melhor forma possível*. Para avaliar como esse deslocamento está sendo feito iremos considerar uma função adicional, que pode ser interpretada como o *custo* para se fazer tal deslocamento.

A partir desse *custo*, podemos avaliar as funções de controle $u(t)$, a fim de obtermos a *melhor função de controle*, a qual fará o *melhor deslocamento* do nosso objeto.

Assim vamos supor que nos é dada uma certa função adicional $f_0(x, u)$, a qual satisfaz as mesmas condições das funções $f_i(x, u)$, $i = 1, \dots, n$ que definem o sistema (3.2-2), isto é, $f_0(x, u)$ e suas derivadas parciais $\frac{\partial f_0}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ são contínuas em todo o produto cartesiano $X \times \bar{U}$.

Se tomarmos $f_0(x, u)$ como nossa função de *custo*, temos que o problema de deslocar o nosso objeto da *melhor forma possível* se resume em encontrar a função de controle $u(t)$ que minimiza o custo total, ou em outras palavras, o nosso problema pode ser descrito como:

No espaço de fase X , dois pontos \tilde{x}_0 e \tilde{x}_1 são dados. Dentre todas as funções de controles admissíveis $u(t)$, que transferem o ponto da posição \tilde{x}_0 para a posição \tilde{x}_1 , se

tal controle existir, encontre um para o qual o funcional:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt, \quad (3.2-4)$$

assume o menor valor possível.

É importante ressaltarmos que os limites t_0 e t_1 não são valores fixos, mas dependem da função de controle $u(t)$ escolhida, pois são definidos pelas relações $x(t_0) = \tilde{x}_0$ e $x(t_1) = \tilde{x}_1$.

Com isso diremos que uma função de controle $u(t)$ é uma função de controle ótima e correspondentemente, a solução $x(t)$ é uma solução ótima ou trajetória ótima, se a função de controle $u(t)$ atinge a solução do problema descrito acima, isto é, se $u(t)$ minimiza o funcional (3.2-4) dentre as funções de controle cujas soluções $x(t)$ correspondentes que ligam \tilde{x}_0 à \tilde{x}_1 .

Daqui em diante iremos trabalhar condições necessárias para este problema de otimização e apresentar o teorema central deste capítulo, a saber, o Princípio do Máximo de Pontryagin.

Faremos isso adicionando uma nova coordenada x_0 ao espaço de fase X . Temos que as coordenadas $x_i, i = 1, \dots, n$ do nosso objeto variam de acordo com o sistema definido em (3.2-3), enquanto que a nova coordenada x_0 do nosso objeto irá variar de acordo com a equação:

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n, u),$$

onde a função f_0 é a nossa função de custo.

Assim podemos reescrever o sistema (3.2-3) adicionando a função f_0 e a nova coordenada x_0 da seguinte forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r) = f_i(x, u), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.2-5)$$

Notemos que o lado direito do novo sistema não depende da coordenada x_0 .

Podemos escrever a nova coordenada do nosso objeto como,

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_0, x) \in \mathbb{R} \times X,$$

onde \mathbf{x} pertence ao espaço vetorial $(n + 1)$ -dimensional \mathbf{X} , o qual chamaremos de

espaço de fase estendido, e dessa forma o sistema (3.2-5) pode ser escrito na forma vetorial como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(x, u),$$

onde $\mathbf{f}(x, u)$ é um vetor em \mathbf{X} com coordenadas $f_0(x, u), f_1(x, u), \dots, f_n(x, u)$.

Voltemos a tomar a função de controle admissível $u(t)$ a qual a sua solução $x(t)$, correspondente ao sistema (3.2-3) com condição inicial $x(t_0) = \tilde{x}_0$ transfere nosso objeto da posição \tilde{x}_0 para a posição \tilde{x}_1 no espaço de fase X .

Vamos considerar a nova condição inicial $\mathbf{x}_0 = (0, \tilde{x}_0)$ para o nosso objeto no espaço \mathbf{X} e com isso temos, novamente, pelos teoremas de existência e unicidade de Carathéodory, que o sistema (3.2-5) apresenta uma única solução $\mathbf{x}(t)$, a qual estará definida para um intervalo de tempo que tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} x_0(t) = \int_{t_0}^t f_0(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \\ x = x(t). \end{cases} \quad (3.2-6)$$

Notemos que quando tomarmos $t = t_1$, a solução $\mathbf{x}(t)$ assume os valores,

$$x_0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau)) d\tau = J,$$

$$x = x(t_1) = \tilde{x}_1,$$

isto é, a solução $\mathbf{x}(t)$ do sistema (3.2-5) correspondente à função de controle $u(t)$ e com condição inicial $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$, passa pelo ponto $\mathbf{x}_1 = (J, x_1)$ no tempo $t = t_1$.

A partir dessas informações, podemos interpretar a solução $\mathbf{x}(t)$ de maneira geométrica da seguinte forma: No espaço de fase estendido \mathbf{X} considere o ponto $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ e Π a reta paralela ao eixo x_0 e que passa pelo ponto $(0, x_1)$. Dentre todas as funções de controle $u(t)$, cujas as suas soluções correspondentes $\mathbf{x}(t)$ ao sistema (3.2-5) com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, intersectam a reta Π , queremos encontrar uma cujo ponto $\mathbf{x}_1 = (J, x_1)$ de interseção com Π tem a menor coordenada x_0 possível.

Vamos estudar o problema de deslocar o nosso objeto da melhor forma possível, por meio dessa formulação geométrica.

Vamos agora apresentar algumas proposições a respeito das funções de controle e

trajetórias ótimas.

A primeira proposição segue do fato de que o sistema (3.2-3) é autônomo e da propriedade (3.4) das funções de controle admissível.

Proposição 3.5. *Se $u(t)$ definido sobre o intervalo $[t_0, t_1]$ é uma função de controle admissível, que transfere o nosso objeto da posição x_0 para a posição x_1 no espaço de fase X , e assume o valor J para o funcional (3.2-4), então para qualquer valor real a a nova função de controle,*

$$u_{+a}(\lambda) = u(\lambda + a),$$

definida no intervalo $[\lambda_0, \lambda_1] = [t_0 - a, t_1 - a]$, é também uma função de controle admissível, e que assume o mesmo valor J para o funcional (3.2-4).

Demonstração: De fato, temos pela condição (3.4) que a função de controle $u_{+a}(\lambda)$ é admissível no intervalo $[\lambda_0, \lambda_1]$ e satisfaz

$$u_{+a}(\lambda_0) = u_{+a}(t_0 - a) = u(t_0 - a + a) = u(t_0),$$

$$u_{+a}(\lambda_1) = u_{+a}(t_1 - a) = u(t_1 - a + a) = u(t_1).$$

Assim a sua respectiva solução $x_{+a}(\lambda)$ de (3.2-3) com condição inicial $x_{+a}(\lambda_0) = x_0$, satisfaz $x_{+a}(\lambda) = x(\lambda + a)$.

Por fim tomando a mudança de variável $t = \lambda + a$ obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} f_0(x_{+a}(\lambda), u_{+a}(\lambda)) d\lambda &= \int_{t_0-a}^{t_1-a} f_0(x(\lambda + a), u(\lambda + a)) d\lambda \\ &= \int_{t_0-a+a}^{t_1-a+a} f_0(x(\tau), u(\tau)) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau)) d\tau = J \end{aligned}$$

Em outras palavras, uma translação por a em relação ao tempo não irá alterar o valor do funcional (3.2-4), ou seja, o custo para o deslocamento será o mesmo. ■

Portanto podemos transladar o nosso tempo inicial t_0 para qualquer lugar sobre o eixo t . Em razão dessa propriedade, é comum trabalharmos considerando $t_0 = 0$.

A segunda proposição nos permite "colar" controles admissíveis a fim de obter outro controle admissível e somar os valores dos funcionais (3.2-4).

Proposição 3.6. *Se $\tilde{x}_j, j = 0, 1, \dots, k$ é uma coleção finita de pontos do espaço de fase X , e existem funções de controles admissíveis $u_i(t), i = 1, \dots, k$, que transferem o nosso objeto da posição \tilde{x}_{i-1} para a posição \tilde{x}_i , e assumem os valores J_i para o funcional (3.2-4), $i = 1, \dots, k$, então existe uma função de controle admissível $u(t)$ que transfere o nosso objeto da posição \tilde{x}_0 para a posição \tilde{x}_k e assume o valor*

$$J_1 + J_2 + \dots + J_k,$$

para o funcional (3.2-4).

Demonstração: De fato, temos que cada função de controle admissível $u_i(t), i = 1, \dots, k$, está definido sobre um intervalo de tempo I_i . Porém, pela proposição anterior, podemos transladar esses intervalos, a fim de os deixarmos lado a lado, isto é, podemos fazer uma translação em relação ao tempo e definirmos cada função de controle admissível $u_i(t)$ no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, onde $t_0 < t_1 < \dots < t_k$.

Agora definimos uma nova função de controle $u(t)$ da seguinte forma,

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{se } t \in [t_0, t_1]; \\ u_2(t), & \text{se } t \in [t_1, t_2]; \\ \vdots & \vdots \\ u_k(t), & \text{se } t \in [t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

ou seja, $u(t)$ é a colagem das funções de controles admissíveis $u_i(t), i = 1, \dots, k$. Pela propriedade 3.2 de funções de controle admissíveis, temos que $u(t)$ é admissível. Com isso temos que a sua solução correspondente $x(t)$ do sistema (3.2-3) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ fica definida como:

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}_1(t), & \text{se } t \in [t_0, t_1]; \\ \tilde{x}_2(t), & \text{se } t \in [t_1, t_2]; \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_k(t), & \text{se } t \in [t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

onde $\tilde{x}_i(t)$ é a solução correspondente a $u_i(t)$ do sistema (3.2-3) com as respectivas

condições iniciais $\tilde{x}_{i-1}(t_{i-1}) = \tilde{x}_{i-1}, i = 1, \dots, k$.

Por fim o funcional (3.2-4) assume o valor:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_k} f_0(x(t), u(t)) dt &= \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt + \dots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_0(x(t), u(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1(t), u_1(t)) dt + \dots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_0(x_k(t), u_k(t)) dt \\ &= J_1 + \dots + J_k. \end{aligned}$$

■

A terceira e última proposição nos garante que qualquer subintervalo de uma trajetória ótima, será também uma trajetória ótima.

Proposição 3.7. *Seja $u : [t_0, t_1] \rightarrow U$ uma função de controle admissível ótima do problema (3.2-3) com a respectiva trajetória ótima que transfere o objeto da posição $\tilde{x}_0 = x(t_0)$ para a posição $\tilde{x}_1 = x(t_1)$. Se $I' = [\tau_0, \tau_1] \subseteq I$, então a função de controle admissível $(u|_{I'})(t)$ que é a restrição de $u(t)$ ao intervalo I' , tem como solução de (3.2-3) a trajetória ótima $(x|_{I'})(t)$ que transfere o nosso objeto da posição $x(\tau_0)$ para a posição $x(\tau_1)$.*

Demonstração: Segue da propriedade 3.3 de funções de controles admissíveis que $(u|_{I'})(t)$ é uma função de controle admissível e da teoria de sistemas de equações diferenciais, a restrição de uma solução ainda é uma solução, ou seja, como $(x|_{I'})(t)$ é uma restrição da solução $x(t)$, segue que $(x|_{I'})(t)$ é uma solução correspondente a função de controle $(u|_{I'})(t)$.

Resta mostrar que $(u|_{I'})(t)$ é uma função de controle ótima.

Vamos separar o intervalo $I = [t_0, t_1]$ em três subintervalos, isto é

$$[t_0, t_1] = [t_0, \tau_0] \cup [\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_1, t_1],$$

e tomando as restrições de $u(t)$ a cada um desses intervalos, obtemos três funções de controle $u_1(t), u_2(t) = (u|_{I'})(t), u_3(t)$, cada qual com a sua respectiva trajetória $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t) = (x|_{I'})(t), \tilde{x}_3(t)$. Temos pela proposição anterior que dados $u_i(t), i = 1, 2, 3$, a variação de \tilde{x}_0 assume o valor $J_i, i = 1, 2, 3$, respectivamente para o funcional (3.2-4). Então temos que para o controle $u(t), J = x_0(t_1) - x_0(t_0)$ assume o valor

$$J = J_1 + J_2 + J_3,$$

para o funcional (3.2-4). Por hipótese, temos que $u(t)$ é uma função de controle admissível ótima, ou seja, $u(t)$ é uma função de controle admissível que transfere nosso objeto da posição \tilde{x}_0 para \tilde{x}_1 e assume o menor valor possível para o funcional (3.2-4).

Suponha por absurdo que $u_2(t) = (u|_{I'})(t)$ não seja uma função de controle admissível ótima. Temos então que existe uma outra função de controle admissível, digamos, $u'_2(t)$, com trajetória correspondente $x'_2(t)$ ao sistema (3.2-3) e que assume para o funcional (3.2-4) um valor J'_2 , com $J'_2 < J_2$. Mas pela proposição anterior podemos construir uma função de controle admissível $v(t)$, que transfere o nosso objeto da posição \tilde{x}_0 para a posição \tilde{x}_1 da seguinte maneira:

$$v(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{se } t \in [t_0, \tau_0]; \\ u'_2(t), & \text{se } t \in [\tau_0, \tau_1]; \\ u_3(t), & \text{se } t \in [\tau_1, t_1], \end{cases}$$

a qual vai assumir para o funcional (3.2-4) o valor

$$J' = J_1 + J'_2 + J_3.$$

Porém obtemos uma contradição, pois como $J'_2 < J_2$, então $J' < J$, o que contradiz a minimalidade do valor J obtido pelo controle ótimo $u(t)$ no funcional (3.2-4). Portanto temos que $u_2(t) = (u|_{I'})(t)$ é uma função de controle admissível ótima.

■

3.3 O Princípio do Máximo de Pontryagin

Nesta seção vamos apresentar o Princípio do Máximo de Pontryagin, o qual nos apresenta condições necessárias para encontrar as soluções ótimas para o nosso problema, isto é, encontrar as funções de controle admissíveis ótimas $u(t)$ e consequentemente as trajetórias ótimas $x(t)$ correspondente a essas, os quais transferem nosso objeto de uma posição inicial $x(t_0) = \tilde{x}_0$ para uma posição final $x(t_1) = \tilde{x}_1$ e minimizam o funcional (3.2-4).

Para formular o teorema, além do sistema que descreve o movimento do nosso objeto no espaço de fase estendido, isto é, o sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (3.3-7)$$

vamos precisar de um sistema auxiliar de variáveis $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ que será definido por

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f_\alpha(x, u)}{\partial x_i} \psi_\alpha, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Assim, se escolhermos uma função de controle admissível $u(t)$ definida no intervalo $[t_0, t_1]$ que tem $\mathbf{x}(t)$ como solução correspondente ao sistema (3.3-7) com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, então o sistema auxiliar assume a seguinte forma

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f_\alpha(x(t), u(t))}{\partial x_i} \psi_\alpha, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.3-8)$$

Lembremos que as funções $f_\alpha(x, u)$ não dependem do valor da coordenada adicional x_0 . Além disso temos que o sistema (3.3-8) é linear e homogêneo.

Portanto, quando fornecida uma condição inicial $\Psi(t_0) = \Psi_0$, temos pelos teoremas de existência e unicidade de Carathéodory 2.21 e 2.22 que o sistema (3.3-8) admite uma única solução $\Psi(t)$ absolutamente contínua dada por

$$\Psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)),$$

onde a aplicação vetorial $\Psi(t)$ vai estar definida no mesmo intervalo $I = [t_0, t_1]$.

A fim de formularmos o teorema, vamos combinar os sistemas (3.3-7) e (3.3-8) em apenas um sistema por meio de uma nova função \mathcal{H} de variáveis x_i , ψ_i e u_k , com $i = 0, 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, r$. Defina

$$\mathcal{H}(\Psi, x, u) = \overline{\mathcal{H}}(\Psi, \mathbf{f}(x, u)) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f_{\alpha}(x, u). \quad (3.3-9)$$

Por meio da nova função $\mathcal{H}(\Psi, x, u)$, podemos escrever os sistemas (3.3-7) e (3.3-8), na forma do seguinte sistema Hamiltoniano:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (3.3-10)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.3-11)$$

Assim, fixando uma função de controle admissível $u(t)$ definida sobre o intervalo $[t_0, t_1]$ e uma condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, podemos encontrar a solução ou trajetória correspondente $\mathbf{x}(t)$ por meio do sistema (3.3-10). A partir da função de controle $u(t)$ e de sua trajetória $\mathbf{x}(t)$ correspondente, podemos encontrar a solução $\Psi(t)$ correspondente ao sistema (3.3-11). Lembremos que pelo teorema de existência e unicidade de Carathéodory 2.21 e 2.22, as soluções obtidas $\mathbf{x}(t)$ e $\Psi(t)$ dos sistemas (3.3-10) e (3.3-11) são funções absolutamente contínuas.

Notemos que para valores fixos de Ψ e de \mathbf{x} , a função \mathcal{H} que define o nosso sistema Hamiltoniano se torna uma função do parâmetro $u \in U$. Vamos utilizar o supremo desta função, e vamos denotá-lo por $\mathcal{M}(\Psi, x)$, ou seja,

$$\mathcal{M}(\Psi, x) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\Psi, x, u).$$

Se a função \mathcal{H} atinge o seu supremo dentro da região de controle U , então $\mathcal{M}(\Psi, x)$ será na verdade o máximo da função \mathcal{H} para valores fixos de Ψ e x . Este é o caso quando U é compacto.

Teorema 3.8 (Princípio do Máximo de Pontryagin - PMP). *Seja $u(t)$ uma função de controle admissível definida no intervalo $[t_0, t_1]$, cuja trajetória correspondente $\mathbf{x}(t)$ ao sistema*

(3.3-10) com condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, intersecta a reta Π no tempo final t_1 . Para $u(t)$ ser uma função de controle ótima (e $\mathbf{x}(t)$ uma trajetória ótima), é **necessário** que exista uma função vetorial absolutamente contínua e não nula,

$$\Psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)),$$

a qual é a solução do sistema (3.3-11) correspondente a $u(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ satisfazendo as seguintes condições:

i) A função $\mathcal{H}(\Psi(t), \mathbf{x}(t), u)$ de variável $u \in U$, atinge seu máximo no ponto $u = u(t)$ quase sempre no intervalo $[t_0, t_1]$, isto é,

$$\mathcal{H}(\Psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = \mathcal{M}(\Psi(t), \mathbf{x}(t)) \quad q.s.; \quad (3.3-12)$$

ii) No tempo final t_1 as relações:

$$\psi_0(t_1) \leq 0, \quad \mathcal{M}(\Psi(t_1), \mathbf{x}(t_1)) = 0, \quad q.s.; \quad (3.3-13)$$

são satisfeitas.

Além disso, se as funções $\Psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$ e $u(t)$ satisfazem os sistemas (3.3-10) e (3.3-11) e a condição i), as funções $\psi_0(t)$ e $\mathcal{M}(\Psi(t), \mathbf{x}(t))$ são constantes. Então as relações (3.3-13) podem ser verificadas em qualquer tempo $t \in [t_0, t_1]$ e não apenas em t_1 .

A demonstração desse teorema pode ser encontrada [14].

Definição 3.9. Um caminho $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ que satisfaz as condições de PMP é um extremal de Pontryagin.

Vamos encerrar esse capítulo apresentando um exemplo do uso do teorema apresentado acima.

Exemplo 3.10. Vamos considerar que nosso objeto se move de acordo com a seguinte equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u,$$

onde u é o nosso controle e pertence ao conjunto de controle

$$U = \{u \in \mathbb{R}; |u| \leq 1\}.$$

Assim, no espaço de fase X , o qual é o espaço vetorial de dimensão dois de coordenadas $x_1 = x$ e $x_2 = \frac{dx}{dt}$, a equação de movimento do nosso objeto pode ser reescrita como o sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u. \quad (3.3-14)$$

Vamos considerar que nosso objeto se encontra na posição inicial \tilde{x}_0 do espaço de fase X e queremos levá-lo até a origem $(0, 0)$ no menor tempo possível.

Nesses tipos de problemas, a função de custo $f_0(x, u)$ é definida como

$$f_0(x, u) = 1 \quad \forall (x, u) \in X \times U,$$

e o funcional (3.2-4) se torna,

$$J = t_1 - t_0.$$

Com isso o problema de deslocamento se torna um problema de minimizar o intervalo de tempo do deslocamento. A esses problemas damos o nome de *problemas de tempo ótimo*.

Para podermos utilizar o PMP, as hipóteses do mesmo devem ser satisfeitas. Neste caso, devemos apresentar a função \mathcal{H} relativa ao sistema Hamiltoniano, bem como as variáveis auxiliares $\psi_i, i = 0, 1, 2$, e seu sistema de equações.

Assim temos que a função $\mathcal{H}(\psi, x, u)$ é dada por

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad (3.3-15)$$

onde as variáveis $\psi_i, i = 0, 1, 2$ satisfazem (3.3-11)

$$\frac{\psi_0}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\psi_1}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\psi_2}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -\psi_1.$$

Como o sistema (3.3-14) não depende da variável x_0 , a variável ψ_0 será constante, e como não será utilizada no restante do problema, ela se torna supérflua.

Agora integrando com relação a t as equações de ψ_1 e ψ_2 , obtemos

$$\psi_1 = c_1 \quad e \quad \psi_2 = -c_1 t + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais.

Devemos, pela condição i) do Teorema 3.8, atingir o máximo da função \mathcal{H} quase sempre. Como por hipótese $-1 \leq u \leq 1$, então \mathcal{H} atinge seu máximo em $u = 1$ se $\psi_2 \geq 0$ e $u = -1$ se $\psi_2 < 0$. Assim

$$u(t) = \text{sign}(\psi_2(t)) = \text{sign}(-c_1 t + c_2). \quad (3.3-16)$$

Portanto para que a função de controle $u(t)$ definida no intervalo $[t_0, t_1]$ seja uma função de controle ótima, é necessário que esta seja uma função constante por partes que assume os valores ± 1 , e que tenha no máximo dois intervalos de tempo no qual é constante. Isso segue do fato de que a reta $-c_1 t + c_2$ troca de sinal no máximo uma vez no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$.

Agora que já temos as funções de controles ótimas, vamos em busca das trajetória ótimas.

Temos pelo sistema (3.3-14) que para o intervalo de tempo no qual $u(t) \equiv 1$, a trajetória obtida por integração em relação a t será:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int 1 \, dt = t + s_2, \\ x_1(t) &= \int x_2 \, dt = \int (t + s_2) \, dt = \frac{t^2}{2} + s_2 t + s_1 = \frac{1}{2}(t^2 + 2s_2 t + s_2^2) + (s_1 - \frac{s_2^2}{2}) = \\ &= \frac{1}{2}(t + s_2)^2 + (s_1 - \frac{s_2^2}{2}), \end{aligned}$$

onde s_1 e s_2 são constantes de integração. A partir dessas duas equações podemos escrever

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2 + s, \quad (3.3-17)$$

onde $s = s_1 - \frac{s_2^2}{2}$ é uma constante. Assim para o intervalo de tempo no qual $u(t) \equiv 1$, temos que a trajetória correspondente $x(t)$ será um arco da parábola (3.3-17).

A Figura 3.1 apresenta alguns elementos da família de parábolas (3.3-17).

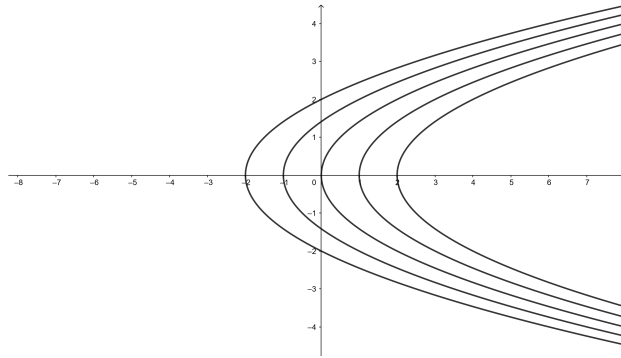


Figura 3.1: Família de Parábolas (3.3-17)

De modo análogo, para o intervalo de tempo no qual $u(t) \equiv -1$, a trajetória obtida por integração em relação a t do sistema (3.3-14) será:

$$x_2(t) = \int -1 dt = -t + s'_2,$$

$$x_1(t) = \int x_2 dt = \int (-t + s'_2) dt = -\frac{t^2}{2} + s'_2 t + s'_1 = -\frac{1}{2}(t^2 - 2s'_2 t + (s'_2)^2) + (s'_1 + \frac{(s'_2)^2}{2})$$

$$= -\frac{1}{2}(-t + s'_2)^2 + (s'_1 + \frac{(s'_2)^2}{2}),$$

onde s'_1 e s'_2 são constantes de integração. E a partir dessas duas equações podemos escrever

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_2)^2 + s', \quad (3.3-18)$$

onde $s' = s'_1 + \frac{s'^2_2}{2}$ é uma constante.

A Figura 3.2 apresenta alguns elementos da família de parábolas (3.3-18).

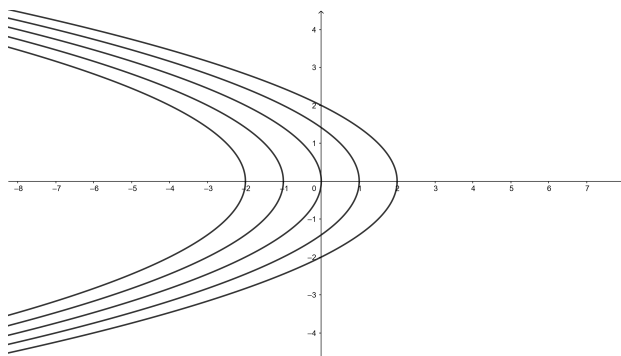


Figura 3.2: Família de Parábolas (3.3-18)

Portanto temos que essas são as trajetórias ótimas correspondentes aos intervalos constantes do controle ótimo $u(t)$.

Notemos que nas parábolas do sistema (3.3-17), o nosso objeto se move para cima, em razão de

$$\frac{dx_2}{dt} = 1,$$

enquanto que nas parábolas do sistema (3.3-18), o nosso objeto se move para baixo, em razão de

$$\frac{dx_2}{dt} = -1.$$

Como vimos, a função de controle ótima $u(t)$ é composta por no máximo dois intervalos constantes de valores ± 1 . Assim se a função de controle $u(t)$ tem valor inicial $u(t_0) = 1$ e no tempo final assume o valor $u(t_1) = -1$, então a sua trajetória correspondente $x(t)$ consiste de dois arcos de parábola, sendo o primeiro respeitando (3.3-17) e o segundo (3.3-18), e esse último passando pela origem em razão deste ser a posição final do nosso objeto no espaço fase X .

De maneira análoga, se o controle $u(t)$ tem valor inicial $u(t_0) = -1$ e no tempo final assume o valor $u(t_1) = 1$, então a sua trajetória correspondente, $x(t)$, consiste de dois arcos de parábola, sendo o primeiro respeitando (3.3-18) e o segundo (3.3-17), e esse último passando pela origem.

E se $u(t)$ for constante e igual à 1 para todo $t \in [t_0, t_1]$, então a trajetória correspondente $x(t)$ consiste apenas de um arco de parábola no espaço de fase X , respeitando (3.3-17) com $s = 0$. Do mesmo modo, se $u(t) = -1$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, então a trajetória correspondente $x(t)$ consiste apenas de um arco de parábola no espaço de fase X , respeitando (3.3-18) com $s' = 0$.

Analisando as trajetórias ótimas, temos três comportamentos distintos para as mesmas dependendo da posição do ponto inicial $x(t_0) = x_0$ com relação a curva AOB , sendo a curva AOB a união dos dois arcos de parábola AO e BO que se encontram na origem, onde,

$$AO = \{(x_1, x_2) \in X | x_1 = \frac{x_2^2}{2} \text{ e } x_2 \leq 0\},$$

$$BO = \{(x_1, x_2) \in X | x_1 = -\frac{x_2^2}{2} \text{ e } x_2 \geq 0\}.$$

Assim temos três possíveis casos para a posição inicial $x(t_0) = x_0$: se encontra acima

da curva AOB , ou abaixo, ou pertence a essa.

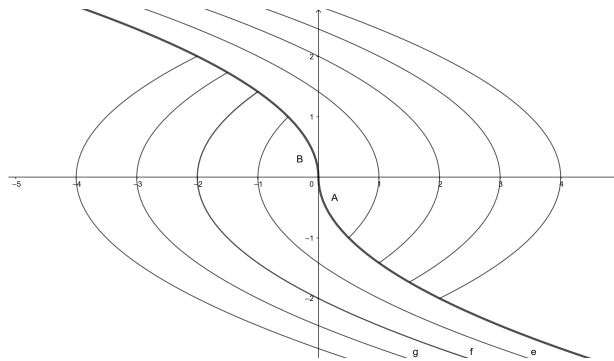


Figura 3.3: A curva AOB algumas trajetórias $x(t)$

No caso de $x(t_0) = x_0$ se encontrar acima da curva AOB , a trajetória $x(t)$ começa com o arco de parábola respeitando (3.3-18) até encontrar o arco AO , e então se move sobre esse até a origem. Em outras palavras, se $x(t_0) = x_0$ se encontrar acima da curva AOB , o nosso objeto se move sob o controle de $u(t) = -1$ até encontrar o arco AO , e então o controle se torna $u(t) = 1$ até o objeto alcançar a origem.

No caso de $x(t_0) = x_0$ se encontrar abaixo da curva AOB , a trajetória $x(t)$ começa com arco de parábola respeitando (3.3-17) até encontrar o arco BO , e então se move sobre esse até a origem. Em outras palavras, se $x(t_0) = x_0$ se encontrar abaixo da curva AOB , o nosso objeto se move sob controle de $u(t) = 1$ até encontrar o arco BO , e então o controle se torna $u(t) = -1$ até o objeto alcançar a origem.

No caso de $x(t_0) = x_0$ pertencer a curva AOB , a trajetória $x(t)$ consiste de um dos arcos AO ou BO . Em outras palavras, se $x(t_0) = x_0$ se encontrar sobre o arco AO , o nosso objeto se move sobre o controle de $u(t) = 1$ até o objeto alcançar a origem; Se $x(t_0) = x_0$ se encontrar sobre o arco BO , o nosso objeto se move sobre o controle de $u(t) = -1$ até o objeto alcançar a origem.

Temos pelo Teorema 3.8 que as únicas trajetórias ótimas são as que foram descritas acima. Temos também que para cada ponto inicial $x(t_0) = x_0$ do espaço de fase X , existe apenas uma trajetória passando por esse e indo até a origem, isto é, uma vez que a condição inicial é dada a trajetória corresponde é única. Assim como para cada ponto do espaço X existe uma única trajetória, esta é ótima.

Podemos interpretar a solução do problema de tempo ótimo do exemplo descrito acima da seguinte forma por meio de uma função auxiliar v ; Seja $v(x_1, x_2) = v(x)$ a função definida no espaço de fase X dada por:

$$v(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } x \text{ está abaixo de } AOB, \text{ ou sobre o arco } AO, \\ -1, & \text{se } x \text{ está acima de } AOB, \text{ ou sobre o arco } BO. \end{cases}$$

Então para cada trajetória ótima $x(t)$, o valor da sua função de controle correspondente $u(t)$ é igual ao valor de $v(x(t))$.

Com isso podemos substituir $u(t)$ por $v(x)$ no sistema (3.3-14) e obter

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = v(x_1, x_2), \quad (3.3-19)$$

cuja solução com condição inicial $x(t_0) = x_0$ arbitrária determinam as trajetórias ótimas $x(t)$ que levam nosso objeto para a origem.

CAPÍTULO 4

CAMINHOS MINIMIZANTES NO PLANO QUASE-HIPERBÓLICO

Neste capítulo classificaremos os caminhos minimizantes em planos quase-hiperbólicos. Na primeira seção, caracterizaremos as estruturas de Finsler de classe C^0 invariantes à esquerda. Na seção seguinte, encontraremos os extremais de Pontryagin, que são os candidatos a caminhos minimizantes dadas pelo PMP. Na terceira seção demonstraremos que os extremais são de fato minimizantes. Por fim na última seção estudaremos um pouco o caso assimétrico.

No semi-plano superior,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\},$$

vamos considerar a estrutura de grupo, cujo produto é dado por

$$(a, b) \cdot (x, y) = (bx + a, by).$$

Temos que (S, \cdot) é o grupo de Lie bidimensional, não-abeliano, simplesmente conexo, com elemento neutro $e = (0, 1)$ e o elemento inverso dado por

$$(a, b)^{-1} = \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right).$$

Vamos, neste capítulo, encontrar caminhos minimizantes desse espaço, usando para isso o Princípio do Máximo de Pontryagin.

4.1 Estruturas de Finsler de Classe C^0 invariantes à esquerda

Nesta seção, caracterizaremos as estruturas de Finsler de classe C^0 no plano quase-hiperbólico invariantes à esquerda.

Definição 4.1. O espaço tangente $T_{(x,y)}S$ de S em (x, y) é o espaço vetorial cujos elementos são vetores $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ com origem em (x, y) e extremidade em $(x + v, y + w)$. Sua soma e produtos por escalar são definidos de maneira usual.

Definição 4.2. O fibrado tangente de S é definido por

$$TS \cong S \times \mathbb{R}^2 = \{((x, y), (v, w)); (x, y) \in S, (v, w) \in T_{(x,y)}S\}$$

Definição 4.3. Uma estrutura de Finsler de classe C^0 é uma função contínua $\Phi : S \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ do fibrado tangente a valores reais tal que $\Phi((x, y), \cdot)$ é uma norma em $T_{(x,y)}S$.

Definição 4.4. Seja (S, \cdot) um grupo. Definimos a translação à esquerda $L_{(a,b)}$ por $(a, b) \in S$ por

$$\begin{aligned} L_{(a,b)} : S &\longrightarrow S \\ (x, y) &\longmapsto (a, b) \cdot (x, y). \end{aligned}$$

Definição 4.5. Dizemos que uma estrutura de Finsler Φ de classe C^0 é invariante à esquerda se

$$\Phi((x, y), (v, w)) = \Phi((a, b) \cdot (x, y), (dL_{(a,b)})_{(x,y)}(v, w)). \quad (4.1-1)$$

Notemos aqui que no artigo original [9], o plano quase-hiperbólico foi definido como um G -espaço de Busemann (S, \cdot) munido com uma estrutura de Finsler de classe C^0 invariante à esquerda.

Lema 4.6. Uma estrutura de Finsler Φ de classe C^0 é invariante à esquerda se, e somente se,

$$\Phi((x, y), (v, w)) = y^{-1}F(v, w), \quad (4.1-2)$$

onde F é uma norma em \mathbb{R}^2 . Neste caso $F(v, w) = \Phi((0, 1), (v, w))$.

Demonstração: Temos que a diferencial da translação à esquerda $L_{(a,b)}$ em (x, y) na direção de (v, w) pode ser calculada considerando a reta $r(t)$ em $T_{(x,y)}S$, passando por (x, y) na direção do vetor (v, w) , isto é,

$$r(t) = (x + tv, y + tw), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$(dL_{(a,b)})_{(x,y)}(v, w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (b(x + tv) + a, b(y + tw)) = b(v, w). \quad (4.1-3)$$

Supondo que Φ é invariante à esquerda, então por (4.1-1) segue que

$$\Phi((x, y), (v, w)) = \Phi((a, b) \cdot (x, y), b(v, w)).$$

Seja $F(v, w) = \Phi((0, 1), (v, w))$. Considerando $(x, y) = (0, 1)$ na equação acima obtemos

$$\Phi((a, b) \cdot (0, 1), b(v, w)) = \Phi((0, 1), (v, w)) = F(v, w).$$

Como $\Phi((a, b), \cdot)$ é uma norma, segue que

$$\Phi((a, b), (v, w)) = \frac{F(v, w)}{b}.$$

Substituindo (a, b) por (x, y) , temos o desejado.

Reciprocamente, supondo que Φ é uma estrutura de Finsler de classe C^0 definida por

$$\Phi((x, y), (v, w)) = \frac{F(v, w)}{y},$$

onde F é uma norma, então Φ é invariante à esquerda com $F(v, w) = \Phi((0, 1), (v, w))$.

De fato,

$$\begin{aligned} \Phi((a, b) \cdot (x, y), (dL_{(a,b)})_{(x,y)}(v, w)) &= \Phi((bx + a, by), b(v, w)) = \frac{F(b(v, w))}{by} \\ &= \frac{bF(v, w)}{by} = \frac{F(v, w)}{y} = \Phi((x, y), y(v, w)). \end{aligned}$$

■

4.2 Extremais de Pontryagin

Prosseguiremos agora o estudo para encontrar os caminhos minimizantes de (S, \cdot) munido com uma estrutura de Finsler de classe C^0 invariante à esquerda

$$\Phi((x, y), (v, w)) = \frac{F(v, w)}{y}.$$

Mais precisamente, dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ nosso objetivo é encontrar caminhos absolutamente contínuos $\gamma : [0, l] \rightarrow S$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que ligam (x_1, y_1) a (x_2, y_2) e que minimizam o funcional comprimento de arco

$$\int_0^l \Phi(x(t), y(t), x'(t), y'(t)) dt = \int_0^l \frac{F(x'(t), y'(t))}{y(t)} dt.$$

Nesta seção, usaremos o Princípio do Máximo de Pontryagin para determinar seus extremais que são os candidatos a caminhos minimizantes.

Tomemos o sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t)u_1(t), \\ y'(t) = y(t)u_2(t), \end{cases} \quad (4.2-4)$$

onde $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são funções mensuráveis, definidas no conjunto de controle U dado pela esfera de raio um, centrada na origem da norma F , isto é,

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; F(u_1, u_2) = 1\}.$$

Temos que esse sistema torna o nosso problema de encontrar os caminhos minimizantes um problema de tempo ótimo. De fato, se $(x(t), y(t))$ é uma solução absolutamente contínua satisfazendo o sistema (4.2-4), então

$$\frac{F(x'(t), y'(t))}{y(t)} = \frac{F(y(t)u_1(t), y(t)u_2(t))}{y(t)} = 1.$$

Note que a estrutura de grupo é transitiva, ou seja, dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , existe $(a, b) \in S$ tal que $(a, b) \cdot (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Além disso, o comprimento de uma curva

absolutamente contínua $(x(t), y(t))$ com

$$\frac{F(x'(t), y'(t))}{y(t)} = 1 \text{ q.s.}$$

é igual ao comprimento da sua translação à esquerda

$$(a, b) \cdot (x(t), y(t)) = (bx(t) + a, by(t)).$$

De fato, se l é o comprimento de $(x(t), y(t))$, o comprimento de $(a, b) \cdot (x(t), y(t))$ é dado por

$$\int_0^l \frac{F((bx(t) + a)', (by(t))')}{by(t)} dt = \int_0^l \frac{F(bx'(t), by'(t))}{by(t)} dt = \int_0^l \frac{F(x'(t), y'(t))}{y(t)} dt = \int_0^l 1 dt = l.$$

Logo podemos considerar as trajetórias $(x(t), y(t))$ com condição inicial o elemento neutro $e = (0, 1)$, isto é, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$.

Agora iremos considerar a teoria desenvolvida na seção 3.3 para o nosso problema de minimização de comprimento de arco. Já temos o sistema de controle (4.2-4) e a função de custo $y^{-1}F(v, w)$, então podemos definir a função do Hamiltoniano como

$$\begin{aligned} H(x, y, \psi_1, \psi_2, u_1, u_2) &= \psi_1 y u_1 + \psi_2 y u_2 \\ &= y(\psi_1 u_1 + \psi_2 u_2). \end{aligned}$$

Seja $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ uma função de controle mensurável. Pelos Teoremas 2.21 e 2.22, seja $(x(t), y(t))$ a trajetória correspondente a (4.2-4). Assim obtemos que $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ é uma função absolutamente contínua que satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \psi_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\psi_1 u_1 - \psi_2 u_2, \end{cases} \quad (4.2-5)$$

quase sempre.

Fixando (x, y) e (ψ_1, ψ_2) a função de máximo é definida

$$M(x, y, \psi_1, \psi_2) = \max_{(u_1, u_2) \in U} H(x, y, \psi_1, \psi_2, u_1, u_2).$$

Temos pelo PMP que para $u(t)$ ser uma função de controle ótima, isto é, para a

trajetória $(x(t), y(t))$ ser minimizante e satisfazer o sistema (4.2-4) é necessário que exista uma função $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ não nula satisfazendo o sistema (4.2-5) para quase todo $t \in I$, tal que a função H atinga seu máximo em $(u_1, u_2) = (u_1(t), u_2(t))$ quase sempre, isto é,

$$H(t) := H(x(t), y(t), \psi_1(t), \psi_2(t), u_1(t), u_2(t)) = M(t) = M(x(t), y(t), \psi_1(t), \psi_2(t)), \quad q.s. \quad (4.2-6)$$

Tomemos um valor inicial arbitrário, porém fixado, da função $\psi(t)$, ou seja,

$$\psi(0) = (\psi_1(0), \psi_2(0)) = (\phi_1, \phi_2).$$

Temos pelo sistema (4.2-5) que $\psi_1'(t) = 0$ quase sempre. Assim

$$\psi_1(t) = \phi_1 \quad q.s.$$

Portanto temos dois casos a considerar: *i*) $\phi_1 = 0$ e *ii*) $\phi_1 \neq 0$.

Caso *i*): $\phi_1 = 0$. Neste caso a equação para $\psi_2(t)$ pelo sistema (4.2-5) se torna:

$$\psi_2'(t) = -0u_1(t) - \psi_2(t)u_2(t) = -\psi_2(t)u_2(t).$$

A soma dessa equação multiplicada por $y(t)$ e a segunda equação do sistema (4.2-4) multiplicada por $\psi(t)$ nos fornece

$$\psi_2'(t)y(t) + y'(t)\psi_2(t) = -\psi_2(t)u_2(t)y(t) + u_2(t)y(t)\psi_2(t) = 0,$$

ou seja, temos que $(\psi_2(t)y(t))' = 0$. Assim a função produto $\psi_2(t)y(t)$ é constante e igual ao seu valor inicial quase sempre. Logo,

$$\psi_2(t)y(t) = \psi_2(0)y(0) = \phi_2 \cdot 1 = \phi_2 \quad q.s. \quad (4.2-7)$$

Neste caso, substituindo (4.2-7) em (4.2-6) obtemos

$$M = M(t) = \max_{(u_1, u_2) \in U} y(t)(0 \cdot u_1 + \psi_2(t)u_2) = \max_{(u_1, u_2) \in U} y(t)\psi_2(t)u_2 = \max_{(u_1, u_2) \in U} \phi_2 u_2. \quad (4.2-8)$$

Temos que $\phi_2 \neq 0$. De fato, se $\phi_2 = 0$, então $\psi(0) = (0, 0)$, o que contradiz o fato de $\psi(t)$ ser uma função não nula. Assim, como $M(t)$ é constante, temos que $M > 0$.

Notemos que $M(t)$ depende apenas do valor máximo que u_2 pode assumir em U . Para encontrar esse valor vamos definir a função $F^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F^*(x, y) = \max_{(u_1, u_2) \in U} (xu_2 - yu_1). \quad (4.2-9)$$

Temos que F^* é uma norma. De fato, se $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$, então F^* satisfaz as seguintes propriedades:

i) $F^*(x, y) \geq 0$, pois como F é uma norma e u_1 e u_2 podem assumir valores positivos e negativos, segue que

$$\max_{(u_1, u_2) \in U} (xu_2 - yu_1) \geq 0.$$

Além disso temos que $F^*(x, y) = 0$ se, e somente se, $(x, y) = (0, 0)$.

ii) $F^*(kx, ky) = |k|F^*(x, y)$. Primeiramente note que $(u_1, u_2) \in U$ se, e somente se, $(-u_1, -u_2) \in U$. Com isso se $k \geq 0$, então

$$\max_{(u_1, u_2) \in U} (kxu_2 - ky u_1) = \max_{(u_1, u_2) \in U} k(xu_2 - yu_1),$$

e se $k < 0$ então

$$\max_{(u_1, u_2) \in U} (kxu_2 - ky u_1) = \max_{(u_1, u_2) \in U} (kx(-u_2) - ky(-u_1)) = \max_{(u_1, u_2) \in U} (-k)(xu_2 - yu_1),$$

onde a primeira igualdade decorre da simetria da norma F . Portanto

$$\max_{(u_1, u_2) \in U} k(xu_2 - yu_1) = \max_{(u_1, u_2) \in U} (-k)(xu_2 - yu_1) = \max_{(u_1, u_2) \in U} |k|(xu_2 - yu_1),$$

e pela propriedade da função max temos,

$$F^*(kx, ky) = \max_{(u_1, u_2) \in U} |k|(xu_2 - yu_1) = |k| \max_{(u_1, u_2) \in U} (xu_2 - yu_1) = |k|F^*(x, y).$$

iii) F^* satisfaz a desigualdade triangular, pois

$$\begin{aligned} F^*((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \max_{(u_1, u_2) \in U} ((x_1 + x_2)u_2 - (y_1 + y_2)u_1) \\ &\leq \max_{(u_1, u_2) \in U} (x_1 u_2 - y_1 u_1) + \max_{(u_1, u_2) \in U} (x_2 u_2 - y_2 u_1) \\ &= F^*(x_1, y_1) + F^*(x_2, y_2), \end{aligned}$$

novamente pela propriedade da função max.

Portanto temos que a função F^* é uma norma.

Assim temos que o máximo para u_2 em U é u_2^* obtido por

$$u_2^* = F^*(1, 0). \quad (4.2-10)$$

Segue então de (4.2-8) que a equação

$$\phi_2 u_2^* = M, \quad u_1 \in \mathbb{R}, \quad (4.2-11)$$

determina uma reta L , suporte ao conjunto de controle U , paralela a reta $u_2 = 0$. De fato, a reta L e o conjunto U possuem ao menos o ponto (u_1^*, u_2^*) em comum, onde u_1^* é obtido de $F(u_1^*, u_2^*) = 1$. Além disso, o conjunto U está inteiramente contido no semiplano fechado L^- , definido por,

$$L^- = \{(v, w) \in \mathbb{R}^2; w \leq u_2^*\},$$

pois para qualquer ponto $(u_1, u_2) \in U$, temos $u_2 \leq u_2^*$.

Se a interseção entre a reta suporte (4.2-11) e o conjunto U for o conjunto unitário que contém apenas (u_1^*, u_2^*) , então o sistema (4.2-4) admite uma única solução. De fato, se $L \cap U = \{(u_1^*, u_2^*)\}$, então a função de controle ótima, $u(t)$, é constante e dada por

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) = (u_1^*, u_2^*), \quad \forall t \in I.$$

Usando essa informação no sistema (4.2-4) e considerando a condição inicial $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, temos para $y(t)$ que

$$y'(t) = y(t)u_2^* \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y(t)u_2^* \Rightarrow \frac{1}{y(t)} dy = u_2^* dt,$$

pois $y(t) > 0$, e resolvendo por variáveis separáveis temos

$$\int \frac{1}{y(t)} dy = \int u_2^* dt \Rightarrow \ln(y(t)) + c = u_2^* t \Rightarrow y(t) = \frac{e^{u_2^* t}}{e^c}.$$

Usando a condição inicial, temos que

$$y(0) = \frac{e^{u_2^* 0}}{e^c} \Rightarrow e^c = 1 \Rightarrow c = 0,$$

o que implica $y(t) = e^{u_2^* t}$.

Para $x(t)$ temos,

$$x'(t) = y(t)u_1^* \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^{u_2^* t} u_1^* \Rightarrow x(t) = \left(\frac{e^{u_2^* t}}{u_2^*} + d \right) u_1^*,$$

e usando a condição inicial, segue que

$$x(0) = \left(\frac{e^{u_2^* 0}}{u_2^*} + d \right) u_1^* \Rightarrow 0 = \frac{1}{u_2^*} + d \Rightarrow d = -\frac{1}{u_2^*}.$$

Logo $x(t) = \frac{u_1^*}{u_2^*} (e^{u_2^* t} - 1)$. Portanto a trajetória ótima neste caso é dada por

$$x(t) = \frac{u_1^*}{u_2^*} (e^{u_2^* t} - 1), \quad y(t) = e^{u_2^* t}, \quad (4.2-12)$$

ou ainda, podemos interpretar essa trajetória como a semirreta,

$$x(t) = \frac{u_1^*}{u_2^*} (y - 1), \quad y > 0.$$

No caso geral, temos que a interseção entre a reta L e o conjunto U pode não ser unitária, e sim um segmento, que chamaremos de Δ , (isso acontece, por exemplo, se a métrica F não for estritamente convexa em (u_1^*, u_2^*)).

Assim temos que toda função mensurável $u_1^*(t)$ tal que $(u_1^*(t), u_2^*) \in \Delta$, determina uma trajetória ótima.

Temos por (4.2-4) que $y(t) = e^{u_2^* t}$, pois $y'(t)$ não depende de $u_1^*(t)$ e que

$$x(t) = \int_0^t u_1^*(t) e^{u_2^* t} dt.$$

Portanto, no caso geral temos que a trajetória ótima é dada por

$$x(t) = \int_0^t u_1^*(\tau) e^{u_2^* \tau} d\tau, \quad y(t) = e^{u_2^* t}, \quad (4.2-13)$$

com ponto inicial $(0, 1)$, função de controle $(u_1(t), u_2(t)) = (u_1^*(t), u_2^*)$ e a função do sistema auxiliar $(\psi_1(t), \psi_2(t)) = (0, \psi_2(t))$ satisfazendo as condições (4.2-7).

Observação 4.7. Se $(x(t), y(t))$ é uma solução do tipo (4.2-13), então sua reversa também satisfaz (4.2-13).

De fato, sem perda de generalidade podemos parametrizar $(x(t), y(t))$ no intervalo $[0, a]$. Considere a reversa parametrizada por

$$(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) = (x(a - s), y(a - s)).$$

Então

$$\left(\frac{d\tilde{x}}{ds}, \frac{d\tilde{y}}{ds} \right) = - \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \in U$$

em $(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$.

Com isso, $(\tilde{u}_1^*(s), \tilde{u}_2^*)$ da reversa é igual a $-(\tilde{u}_1^*(s), \tilde{u}_2^*) = (u_1^*(a - t), u_2^*)$ ao longo de $[0, a]$. Portanto $\tilde{u}_2^* \in \Delta^* = -\Delta$ e $\tilde{u}_2^* = -u_2^*$, ou seja, $(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ satisfaz (4.2-13). Por isso podemos considerar $u_2^* > 0$ em muitas passagens sem perda de generalidade, pois uma curva é minimizante se, e somente se, sua reversa for minimizante também. Isso não poderá ser feito no caso assimétrico.

Caso *ii*): $\phi_1 \neq 0$.

Como temos que $\psi_1(t) = \phi_1 \neq 0$, vamos multiplicar e dividir o lado direito da equação referente a $x'(t)$ do sistema (4.2-4) por essa constante, bem como somar e subtrair a parcela $\frac{y(t)u_2(t)\psi_2(t)}{\phi_1}$, obtendo

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{\phi_1} [y(t)u_2(t)\psi_2(t) - (y(t)u_2(t)\psi_2(t) + y(t)u_1(t)\phi_1)] \\ &= -\frac{1}{\phi_1} [y(t)u_2(t)\psi_2(t) + y(t)(-u_2(t)\psi_2(t) - u_1(t)\phi_1)] \\ &= -\frac{1}{\phi_1} (y'(t)\psi_2(t) + y(t)\psi_2'(t)) \\ &= -\frac{1}{\phi_1} (y(t)\psi_2(t))' \end{aligned}$$

Agora integrando de ambos os lados em relação a t , temos que

$$-x(t)\phi_1 + c = y(t)\psi_2(t).$$

Lembrando das condições iniciais $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ e $(\psi_1(0), \psi_2(0)) = (\phi_1, \phi_2)$, podemos determinar c :

$$-x(0)\phi_1 + c = y(0)\psi_2(0) \Rightarrow -0\phi_1 + c = 1\phi_2 \Rightarrow c = \phi_2.$$

Logo

$$y(t)\psi_2(t) = \phi_2 - \phi_1 x(t). \quad (4.2-14)$$

Agora usando (4.2-14) na função de máximo (4.2-6), temos

$$M = M(t) = \max_{(u_1, u_2) \in U} \phi_1 u_1 y(t) + (\phi_2 - \phi_1 x(t)) u_2 = \max_{u \in U} \langle r(t), u(t) \rangle, \quad (4.2-15)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em \mathbb{R}^2 e

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \text{ e } r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (\phi_1 y(t), \phi_2 - \phi_1 x(t)). \quad (4.2-16)$$

Temos que $y(t)$ nunca se anula e $\phi_1 \neq 0$. Logo temos que $r(t) \neq 0$ para todo t o que implica $M(t) = M > 0$.

Temos por (4.2-4), (4.2-5) e (4.2-15) que se multiplicarmos (ϕ_1, ϕ_2) por uma constante positiva k , a trajetória continua a mesma, mas M será multiplicada por k . Assim se tomarmos $k = \frac{1}{M}$, temos a condição inicial

$$\psi(0) = (\psi_1(0), \psi_2(0)) = \left(\frac{\phi_1}{M}, \frac{\phi_2}{M} \right),$$

o que implica $M(t) = 1$.

Temos agora por (4.2-15) que $r(t)$ pertence a fronteira C da região

$$U^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F_U(x, y) \leq 1\},$$

onde $F_U(x, y)$ é a função suporte de Minkowski sobre U ,

$$F_U(x, y) = \max_{(u_1, u_2) \in U} (xu_1 + yu_2).$$

De (4.2-15) e (4.2-16) podemos escrever

$$F_U(\phi_1 y(t), \phi_2 - \phi_1 x(t)) = 1. \quad (4.2-17)$$

Agora usando (4.2-9) podemos reescrever (4.2-17) como

$$F^*(\phi_2 - \phi_1 x(t), -\phi_1 y(t)) = 1$$

e como F^* é uma norma,

$$F^*(x(t) - \frac{\phi_2}{\phi_1}, y(t)) = \frac{1}{|\phi_1|}. \quad (4.2-18)$$

Temos a seguinte interpretação para a norma F^* . Seja $A = (x, y) \in S$. Queremos entender o que é $F^*(A)$. Para isso vamos rotacionar o ponto A por $\frac{\pi}{2}$, obtendo assim o ponto $A' = (-y, x)$. Dessa forma podemos escrever

$$F^*(A) = \max_{u \in U} \langle A', u \rangle.$$

Agora para encontrar o máximo, vamos analisar as curvas de nível da função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \langle (-y, x), (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \rangle,$$

que são retas ortogonais ao vetor \vec{A}' .

Dentre as retas que são curvas de nível da função g , o nível máximo é uma reta L que é uma reta suporte da região U . Assim os pontos $u^* \in U$ que fará F^* atingir seu máximo, será tal que $u^* \in L \cap U$. Logo

$$F^*(A) = F^*(x, y) = \langle (-y, x), (u_1, u_2) \rangle = \langle A', u^* \rangle.$$

A partir desta análise e de (4.2-18), temos que a candidata a trajetória ótima $(x(t), y(t))$, estará contida na fronteira da região dada pela interseção de S com a figura obtida pela rotação de $\frac{U^*}{|\phi_1|}$ por $\frac{-\pi}{2}$ seguida de uma translação pelo vetor $(\frac{\phi_2}{\phi_1}, 0)$.

Portanto, lembrando que estamos trabalhando sobre o grupo de Lie (S, \cdot) , podemos tomar as trajetórias ótimas começando em qualquer ponto $(x, y) \in S$. Dessa forma os extremais de Pontryagin no plano quase-hiperbólico serão curvas de dois tipos:

As obtidas pela fronteira de F^* ,

$$F^*(x - a, y) = k, \quad \text{com } y > 0, \quad k > 0, \quad -\infty < a < +\infty, \quad (4.2-19)$$

e as obtidas pelas equações

$$x(t) = x_0 + y_0 \int_0^t u_1^*(\tau) e^{u_2^* \tau} d\tau, \quad y(t) = y_0 e^{u_2^* t}, \quad (4.2-20)$$

onde $(x_0, y_0) \in S$ e $(u_1^*(t), u_2^*) \in \Delta$.

4.3 Caminhos Minimizantes em Planos Quase - hiperbólicos

Nesta seção, mostraremos que os extremais de Pontryagin são caminhos minimizantes.

Veremos diversos resultados sobre a interseção desses extremais.

Lema 4.8. *Se $F^*(x, y) = 1$ é localmente estritamente convexa nos pontos de interseção com o eixo das abcissas, então as curvas dos tipos (4.2-19) e (4.2-20) ou são disjuntas ou possuem apenas um ponto em comum.*

Demonstração: Sejam t_1 e t_2 valores reais arbitrários tais que $t_2 > t_1$ e $(x(t_i), y(t_i))$, $i = 1, 2$, os pontos correspondentes sobre a curva do tipo (4.2-20). Temos que o coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos é

$$\frac{1}{\theta} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{y(t_2) - y(t_1)}.$$

Notemos que o denominador $y(t_2) - y(t_1) \neq 0$, pois $(x(t), y(t))$ satisfaz (4.2-20) e $y(t)$ é estritamente crescente.

Desenvolvendo a equação do coeficiente angular e usando propriedades de integrais definidas temos,

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{y_0(e^{u_2^* t_2} - e^{u_2^* t_1})} \left[x_0 + y_0 \int_0^{t_2} u_1^*(t) e^{u_2^* t} dt - \left(x_0 + y_0 \int_0^{t_1} u_1^*(t) e^{u_2^* t} dt \right) \right]$$

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{e^{u_2^* t_2} - e^{u_2^* t_1}} \int_{t_1}^{t_2} u_1^*(t) e^{u_2^* t} dt. \quad (4.3-21)$$

Podemos escrever $\Delta = \overline{L_1 L_2}$, onde

$$L_1 = (u_{1m}^*, u_2^*) \quad \text{e} \quad L_2 = (u_{1M}^*, u_2^*),$$

(note que $L_1 = L_2$ no caso de Δ ser apenas um ponto). Assim temos que $u_1^*(t) \in [u_{1m}^*, u_{1M}^*]$. Por (4.3-21) temos

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{e^{u_2^* t_2} - e^{u_2^* t_1}} \int_{t_1}^{t_2} u_1^*(t) e^{u_2^* t} dt \geq \frac{1}{e^{u_2^* t_2} - e^{u_2^* t_1}} \int_{t_1}^{t_2} u_{1m}^* e^{u_2^* t} dt = \frac{u_{1m}^*}{u_2^*},$$

$$\frac{u_2^*}{\theta} \geq u_{1m}^*.$$

De modo análogo obtemos

$$\frac{u_2^*}{\theta} \leq u_{1M}^*,$$

e dessa forma escrevemos

$$u_{1m}^* \leq \frac{u_2^*}{\theta} \leq u_{1M}^*. \quad (4.3-22)$$

Assumindo que $k > 0$ é arbitrário, vamos tomar $|x_0| = \frac{k}{u_2^*} = \frac{k}{F^*(1,0)}$. Vamos mostrar que se θ satisfaz (4.3-22). Então a reta

$$x = \frac{1}{\theta}y + x_0,$$

é uma reta suporte do conjunto $F_k^* = \{(x, y) \in R^2 | F^*(x, y) = k\}$ no ponto $(x_0, 0)$, ou seja, o conjunto está contido em um dos semiplanos fechados definido pela reta. Para isso basta mostrar que a diferença

$$x - x_0 - \frac{1}{\theta}y, \quad (4.3-23)$$

tem sinal definido para todo $(x, y) \in F_k^*$.

De fato, se $F^*(x, y) \leq k$, temos pela definição (4.2-9) da norma F^* e pela simetria de F em relação à origem que a desigualdade

$$|yu_1 - xu_2| \leq k \quad (4.3-24)$$

é válida para todo $(u_1, u_2) \in U$. Tomemos $u_2' = u_2^*$ e $u_1' = \frac{u_2^*}{\theta}$. Temos por (4.3-22) que $(u_1', u_2') \in \Delta$ e $F(u_1', u_2') = 1$. Substituindo em (4.3-24) obtemos

$$|yu_1' - xu_2'| = u_2^* \left| \frac{y}{\theta} - x \right| \leq k = u_2^* |x_0|.$$

Como $u_2^* > 0$ temos $|\frac{y}{\theta} - x| \leq |x_0|$ e $-|x_0| \leq \frac{y}{\theta} - x \leq |x_0|$.

Se $x_0 \geq 0$, então a primeira desigualdade implica que $x - x_0 - \frac{1}{\theta}y \leq 0$. Se $x_0 < 0$, então a segunda desigualdade nos dá $x - x_0 - \frac{1}{\theta}y \geq 0$.

Notemos que a mesma análise poderia ser feita após uma translação horizontal de F_k^* e da reta suporte em relação ao vetor $(a, 0)$, ou seja, $(x - a) = \frac{1}{\theta}y + x_0$ é a reta suporte de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F^*(x_a, y) = k\}$. Com isso, para muitas análises poderemos considerar $a = 0$.

Agora suponha que um caminho minimizante do tipo (4.2-19) e outro do tipo (4.2-20) tenham dois pontos em comum, $\beta(\theta_i) = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Aqui estamos assumindo que $a = 0$ e que $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$, ou seja, $\theta_1 < \theta_2$. Tais pontos definem uma reta orientada l . Tomemos a reta l' paralela a l passando pelo ponto A de interseção da curva $F^*(x, y) = k$ com o eixo x . Afirmamos que l' não é uma reta suporte de $F_k^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F^*(x, y) \leq k\}$ no ponto A .

Considere $A = \beta(0)$, que pertence ao semi-eixo x positivo. O caso $A = \beta(\pi)$, segue de modo análogo. Para o que segue utilizaremos as Proposições 2.54, 2.55 e 2.57.

Seja $\phi_{max}(0)$ a angulação máxima das retas suportes ao conjunto F_k^* em A . Temos que a reta r_1 ligando A e (x_1, y_1) não é reta suporte de F_k^* em A , pois por hipótese F^* é localmente estritamente convexa em A . Logo a angulação $\phi(0, \theta_1)$ da reta r_1 satisfaz a desigualdade estrita $\phi_{max}(0) < \phi(0, \theta_1)$.

Sejam $\phi_{min}(\theta_1)$ e $\phi_{max}(\theta_1)$ as angulações mínima e máxima respectivamente das retas suportes de F_k^* em $\beta(\theta_1) = (x_1, y_1)$ e $\phi_{min}(\theta_2)$ a angulação mínima das retas suportes de F_k^* em $\beta(\theta_2) = (x_2, y_2)$ e $\phi(\theta_1, \theta_2)$ a angulação da reta l .

Assim as seguintes desigualdades são válidas

$$\phi(0, \theta_1) < \phi_{min}(\theta_1) \leq \phi_{max}(\theta_1) \leq \phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi_{min}(\theta_2).$$

Logo $\phi_{min}(\theta_1) \leq \phi_{max}(0) < \phi(0, \theta_1) < \phi(\theta_1, \theta_2)$, de onde segue que a reta l' , com angulação $\phi(\theta_1, \theta_2)$, não é reta suporte de F_k^* em A .

Dessa forma temos uma contradição, pois pela primeira parte da demonstração teríamos que a reta l' é suporte de F_k^* em A , ou seja, $\phi(\theta_1, \theta_2) \in [\phi_{min}(0), \phi_{max}(0)]$.

Portanto não existem dois pontos de interseção entre curvas do tipo (4.2-19) e (4.2-20), ou seja, tais curvas ou são totalmente disjuntas ou possuem apenas um ponto em comum.

■

Corolário 4.9. Se a hipótese do Lema 4.8 não for satisfeita, isto é, se F^* não for localmente

estritamente convexa nos pontos de interseção com o eixo x , então uma curva do tipo (4.2-19) e do tipo (4.2-20) podem ter dois pontos em comum. Neste caso elas também compartilham o segmento entre esses dois pontos.

Demonstração: Novamente consideremos $a = 0$ para a curva F_k^* . Sejam A um ponto de interseção de F_k^* com o eixo x e $\beta(\theta_1)$ e $\beta(\theta_2)$ dois pontos que pertencem a curvas do tipo (4.2-19) e (4.2-20). Sem perda de generalidade podemos assumir $\beta(\theta_1) \prec \beta(\theta_2)$, ou seja, $\theta_1 < \theta_2$. Seja l' a reta paralela a $\overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$ que passa por A . Então l' é uma reta suporte ao conjunto F_a^* em A , pois (4.3-23) tem sinal definido em F_a^* .

Consideraremos $A = \beta(0)$. O caso de $A = \beta(\pi)$ é análogo.

Notemos que $\phi(\theta_1, \theta_2) \in [\phi_{min}(0), \phi_{max}(0)]$, pois l' é uma reta suporte de F_k^* em A . Assim

$$\phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi_{max}(0) \leq \phi(0, \theta_1) \leq \phi(\theta_1, \theta_2)$$

devido às Proposições 2.51 e 2.55, ou seja, $\phi(0, \theta_1) = \phi_{max}(0) = \phi(\theta_1, \theta_2)$, de onde temos que os pontos A , $\beta(\theta_1)$ e $\beta(\theta_2)$ são colineares.

Segue da Proposição 2.56 que os pontos A , $\beta(\theta_1)$ e $\beta(\theta_2)$ pertencem a um segmento de reta contido em F_k^* e, portanto, o segmento $\overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$ está contido na curva do tipo (4.2-19).

Resta mostrar que o segmento $\overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$ está contido na curva do tipo (4.2-20).

Suponha por absurdo que o arco $\widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$ sobre a curva do tipo (4.2-20) seja diferente do segmento $\overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$. Assim, existe ao menos um ponto $P = (x, y) \in \widehat{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$ tal que $P = (x, y) \notin \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$.

Assim temos dois casos a considerar: P pertence ao semi-plano aberto da direita ou ao da esquerda em relação a reta orientada l que contém o segmento $\overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$.

Se P pertence ao semi-plano da esquerda, então a angulação $\phi(\beta(\theta_1), P)$ da reta ligando $\beta(\theta_1)$ e P é maior que $\phi(\theta_1, \theta_2)$, isto é,

$$\phi_{max}(0) = \phi(\theta_1, \theta_2) < \phi(\beta(\theta_1), P),$$

o que é um absurdo, pois como $\beta(\theta_1)$ e P pertencem a curva do tipo (4.2-20), então a angulação $\phi(\beta(\theta_1), P)$ deveria ser uma angulação de uma reta suporte a F_a^* em A , ou seja, $\phi(\beta(\theta_1), P) \in [\phi_{min}(0), \phi_{max}(0)]$.

Se P pertence ao semi-plano da direita, então a angulação $\phi(P, \beta(\theta_2))$ da reta ligando P e $\beta(\theta_2)$ é maior que $\phi(\theta_1, \theta_2)$, isto é,

$$\phi_{max}(0) = \phi(\theta_1, \theta_2) < \phi(P, \beta(\theta_2)),$$

o que também é um absurdo.

$$\text{Assim } \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)} = \overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}.$$

Portanto, temos que o segmento $\overline{\beta(\theta_1)\beta(\theta_2)}$ pertence a ambas as curvas. ■

Lema 4.10. Toda curva do tipo (4.2-20) é um caminho minimizante.

Demonstração: Suponha que duas curvas do tipo (4.2-20)

$$x_i(t) = x_i + y_i \int_0^t u_{1,i}^*(\tau) e^{u_2^* \tau} d\tau, \quad y_i(t) = y_i e^{u_2^* t}, \quad i = 1, 2, \quad (4.3-25)$$

se intersectam nos pontos $A' = (x', y')$ e $A'' = (x'', y'')$ com

$$(x', y') = (x_i(t_{i,1}), y_i(t_{i,1})), \quad (x'', y'') = (x_i(t_{i,2}), y_i(t_{i,2})), \quad t_{i,1} < t_{i,2}, \quad i = 1, 2$$

Vamos denotar por $\rho_i(A', A'')$, $i = 1, 2$ os comprimentos de arcos das curvas $(x_i(t), y_i(t))$, $i = 1, 2$ de A' à A'' . Pelo Lema 4.6 temos,

$$\rho(A', A'') = \int_{t_{i,1}}^{t_{i,2}} \frac{F(x'_i(t), y'_i(t))}{y} d\tau = \int_{t_{i,1}}^{t_{i,2}} \frac{F(y_i(u_{1,i}^*(\tau) e^{u_2^* \tau}), y_i u_2^* e^{u_2^* \tau})}{y_i e^{u_2^* \tau}} d\tau.$$

Porém $F(ku_1, ku_2) = |k|F(u_1, u_2)$ e $y_i e^{u_2^* \tau} > 0$. Logo

$$\rho(A', A'') = \int_{t_{i,1}}^{t_{i,2}} \frac{y_i e^{u_2^* \tau} F(u_{1,i}^*(\tau), u_2^*)}{y_i e^{u_2^* \tau}} d\tau = \int_{t_{i,1}}^{t_{i,2}} F(u_{1,i}^*(\tau), u_2^*) d\tau.$$

Mas lembremos que $(u_{1,i}^*(\tau), u_2^*) \in \Delta$ e que Δ está contido na fronteira do conjunto de controle

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 | F(u_1, u_2) = 1\}.$$

Então

$$\rho(A', A'') = \int_{t_{i,1}}^{t_{i,2}} 1 \, d\tau = t_{i,2} - t_{i,1} = \frac{1}{u_2^*} \log\left(\frac{y''}{y_i}\right) - \frac{1}{u_2^*} \log\left(\frac{y'}{y_i}\right).$$

onde

$$t_{i,1} = \frac{1}{u_2^*} \log\left(\frac{y'}{y_i}\right) \quad e \quad t_{i,2} = \frac{1}{u_2^*} \log\left(\frac{y''}{y_i}\right),$$

seguem da definição de $y_i(t)$ em (4.3-25). Lembrando que $y_i > 0$, temos

$$\rho(A', A'') = \frac{1}{u_2^*} (\log y'' - \log y').$$

Assim temos que $\rho_1(A', A'') = \rho_2(A', A'')$ e o comprimento de arco entre os pontos A' e A'' independem da curva considerada. Além disso, pelo Lema 4.8, temos que as curvas do tipo (4.2-19) e do tipo (4.2-20) não se intersectam em dois pontos (a menos que $F^*(x, y) = 1$ não seja estritamente localmente convexa nos pontos de interseção com o eixo x , mas neste caso as curvas do tipo (4.2-19) e do tipo (4.2-20) compartilham o segmento entre os dois pontos). Disso segue que as curvas do tipo (4.2-20) são caminhos minimizantes entre quaisquer de seus pontos.

Lema 4.11. *Se a função $F^*(x, y)$ é estritamente convexa, então duas curvas do tipo (4.2-19) são disjuntas ou tem apenas um ponto em comum.*

Demonstração: Suponha que o lema é falso. Como cada curva do tipo (4.2-19) resulta de uma translação horizontal e homotetia na curva $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F^*(x, y) = 1, y > 0\}$, vamos considerar duas curvas distintas C_1 e C_2 obtidas pelas transformações $\gamma_i, i = 1, 2$ na curva C' , dadas por

$$\gamma_i(x, y) = (\alpha_i x + a_i, \alpha_i y) \quad i = 1, 2,$$

que se intersectam nos pontos $c_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ e $c_2 = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$, $c_1 \neq c_2$. Assim tomando as imagens inversas desses pontos pela inversa da aplicação γ_1 , temos pontos sobre a curva C' tais que

$$\gamma_1^{-1}(c_i) = \gamma_1^{-1}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = (\alpha_1^{-1}(\tilde{x}_i - a_1), \alpha_1^{-1}\tilde{y}_i) = A_i = (x_i, y_i) \quad i = 1, 2. \quad (4.3-26)$$

Temos o mesmo para a aplicação γ_2

$$\gamma_2^{-1}(c_i) = \gamma_2^{-1}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = (\alpha_2^{-1}(\tilde{x}_i - a_2), \alpha_2^{-1}\tilde{y}_i) = B_i = (kx_i + b, ky_i) \quad i = 1, 2, \quad (4.3-27)$$

onde $k = \alpha_1\alpha_2^{-1} > 0$ e $b = (a_1 - a_2)\alpha_2^{-1}$, com $-\infty < b < +\infty$. Assim, com esses valores, podemos escrever as coordenadas dos pontos $B_i, i = 1, 2$ em função das coordenadas dos pontos $A_i, i = 1, 2$. Disso segue que $A_1 \neq A_2$ e $B_1 \neq B_2$, pois $c_1 \neq c_2$. Além disso, não podemos ter simultaneamente $k = 1$ e $b = 0$, pois nesse caso teríamos que $\gamma_1 = \gamma_2$, o que resulta em $C_1 = C_2$, o que é um absurdo. Logo, $A_1 \neq B_1$ e $A_2 \neq B_2$.

Seja l_1 a reta que liga A_1 e A_2 , e l_2 a reta que liga B_1 e B_2 . Temos que l_1 é paralela a l_2 , pois l_2 é resultante de l_1 por composição de homotetias e translações horizontais.

Como $F^*(x, y)$ é estritamente convexa, temos que toda reta pode intersectar C' em no máximo dois pontos de C' . Se $l_1 = l_2$, teríamos a existência de uma reta que conteria mais que dois pontos de C' . Assim $l_1 \neq l_2$, $A_1 \neq B_2$ e $A_2 \neq B_1$.

Assim os seguintes três casos são possíveis para a disposição dos pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 sobre a curva C' :

1) Exatamente um dos pontos B_1 ou B_2 está entre A_1 e A_2 . Nesse caso, suponha, para fixar as ideias, que B_1 está entre A_1 e A_2 . Como a reta l_1 divide o plano cartesiano em dois semi-planos, logo ela também divide a curva $F^*(x, y) = 1$ em duas componentes (uma componente em cada semi-plano), de onde segue que B_1 e B_2 estão em componentes distintas, assim a reta l_2 possui pontos em ambos os semi-planos. Portanto segue que l_2 intersecta a reta l_1 em algum ponto, o que contraria o fato de l_1 ser paralela a l_2 . A análise para B_2 entre A_1 e A_2 segue de modo análogo.

2) Os arcos $\widehat{A_1A_2}$ e $\widehat{B_1B_2}$ são disjuntos.

Suponha sem perda de generalidade que o arco $\widehat{A_1A_2}$ vem antes de antes $\widehat{B_1B_2}$, isto é,

$$P_1 = \beta(0) \prec A_1 = \beta(\theta_1) \prec A_2 = \beta(\theta_2) \prec B_1 = \beta(\theta'_1) \prec B_2 = \beta(\theta'_2) \prec P_2 = \beta(\pi), \quad (4.3-28)$$

ou

$$P_1 = \beta(0) \prec A_1 = \beta(\theta_1) \prec A_2 = \beta(\theta_2) \prec B_2 = \beta(\theta'_2) \prec B_1 = \beta(\theta'_1) \prec P_2 = \beta(\pi), \quad (4.3-29)$$

onde β é a função definida em [2.3-4](#).

Assim $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta'_1 < \theta'_2 < \pi$ ou $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta'_2 < \theta'_1 < \pi$ respectivamente nos casos [\(4.3-28\)](#) e [\(4.3-29\)](#) e P_1 e P_2 são os pontos de interseção da curva C' com o eixo x .

Note que se l_1 for paralela a l_2 , então $\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(\theta'_1, \theta'_2)$ (caso [\(4.3-28\)](#)) ou $\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(\theta'_2, \theta'_1) + \pi$ (caso [\(4.3-29\)](#)). Mostraremos que essas igualdades não ocorrem.

Pela Proposição [2.51](#), temos as seguintes desigualdades estritas para as angulações das retas sobre a curva C' para o caso [\(4.3-28\)](#)

$$\phi(0, \theta_1) < \phi(\theta_1, \theta_2) < \phi(\theta_2, \theta'_1) < \phi(\theta'_1, \theta'_2) < \phi(\theta'_2, \pi).$$

Essas desigualdades são estritas, pois a reta que liga dois pontos de C' não pode conter um terceiro. Então $\phi(\theta_1, \theta_2) \neq \phi(\theta'_1, \theta'_2)$, o que é um absurdo.

Para o caso [\(4.3-29\)](#) são válidas as seguintes desigualdades estritas pelo mesmo motivo

$$\phi(0, \theta_1) < \phi(\theta_1, \theta_2) < \phi(\theta_2, \theta'_2) < \phi(\theta'_2, \theta'_1) < \phi(\theta'_1, \pi).$$

Como P_1 e P_2 são pontos simétricos temos que

$$\phi_{min}(\pi) - \phi_{max}(0) \leq \pi. \quad (4.3-30)$$

Pelas desigualdades temos $\phi(\theta_1, \theta_2) < \phi(\theta'_2, \theta'_1)$ e por [4.3-30](#) concluimos que

$$\phi(\theta'_2, \theta'_1) - \phi(\theta_1, \theta_2) < \pi$$

o que é um absurdo, pois isso contraria o fato de l_1 ser paralela a l_2 .

3) O arco $\widehat{A_1A_2}$ incluir o arco $\widehat{B_1B_2}$. Assuma sem perda de generalidade que $x_1 \geq x_2$. Façamos a seguinte troca de coordenadas no plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$:

$$x' = x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), \quad y' = x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi), \quad (4.3-31)$$

onde:

$$\cos(\varphi) = \frac{x_1 - x_2}{r}, \quad \sin(\varphi) = \frac{y_2 - y_1}{r} \quad e \quad r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

No novo plano (x', y') os pontos A'_i e B'_i , $i = 1, 2$, têm coordenadas:

$$x'_i = x_i \frac{x_1 - x_2}{r} - y_i \frac{y_2 - y_1}{r} = \frac{x_i(x_1 - x_2) - y_i(y_2 - y_1)}{r} \quad (4.3-32)$$

$$\begin{aligned} (kx_i + b)' &= (kx_i + b) \frac{x_1 - x_2}{r} - (ky_i) \frac{y_2 - y_1}{r} \\ &= k \left(\frac{x_i(x_1 - x_2) - y_i(y_2 - y_1)}{r} \right) + b \frac{x_1 - x_2}{r} = kx'_i + b \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (4.3-33)$$

$$\begin{aligned} y'_1 &= x_1 \frac{y_2 - y_1}{r} + y_1 \frac{x_1 - x_2}{r} = \frac{x_1 y_2 - x_1 y_1 + y_1 x_1 - y_1 x_2}{r} = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{r} \\ &= \frac{x_2 y_2 - x_2 y_1 + y_2 x_1 - y_2 x_2}{r} = x_2 \frac{y_2 - y_1}{r} + y_2 \frac{x_1 - x_2}{r} = y'_2 \end{aligned} \quad (4.3-34)$$

$$\begin{aligned} (ky_1)' &= (kx_1 + b) \frac{y_2 - y_1}{r} + (ky_1) \frac{x_1 - x_2}{r} = k \left(\frac{x_1 y_2 - x_1 y_1 + y_1 x_1 - y_1 x_2}{r} \right) + b \sin(\varphi) \\ &= ky'_1 + b \sin(\varphi) = k \left(\frac{x_2 y_2 - x_2 y_1 + y_2 x_1 - y_2 x_2}{r} \right) + b \sin(\varphi) = (ky_2)' \end{aligned} \quad (4.3-35)$$

Notemos que:

$$x'_1 - x'_2 = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1)}{r} = \frac{((x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2)r}{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = r.$$

Logo $x'_1 > x'_2$.

Uma interpretação geométrica para essa troca de coordenadas é se imaginarmos que rotacionamos nosso sistema de coordenadas de modo a deixar a reta orientada $\overline{A'_1 A'_2}$ paralela ao eixo x , pois $y'_1 = y'_2$ e $x'_1 > x'_2$.

As retas l_1 e l_2 não contém O , pois A_1, A_2, B_1 e B_2 estão no semiplano superior e a função β é injetora.

Como $F^*(0, 0) = 0 < 1$ e a função $F^*(x, y)$ é estritamente convexa, o arco $\widehat{A_1 A_2}$ e o ponto O estão em semi-planos definidos pela reta l_1 distintos. O arco $\widehat{A_1 A_2}$ inclui o arco $\widehat{B_1 B_2}$. Isso implica que a distância euclidiana da origem de O a l_2 é maior que a distância até l_1 . Por (4.3-31) e o fato dos arcos $\widehat{A_1 A_2}$ e $\widehat{B_1 B_2}$ estarem no semi-plano superior, temos que as retas l_1 e l_2 estão simultaneamente em um dos semi-planos $y' > 0$ ou $y' < 0$. Além disso

$$|(ky_1)'| > |y'_1|. \quad (4.3-36)$$

Pelo posicionamento relativo dos pontos A'_1, A'_2, B'_1 e B'_2 , temos que

$$k > 1. \quad (4.3-37)$$

No plano (x', y') , o arco $\widehat{A'_1 A'_2}$ inclui o arco $\widehat{B'_1 B'_2}$. Como $x'_1 > x'_2$, os seguintes casos são possíveis para a disposição dos pontos A'_i e B'_i , $i = 1, 2$. Trabalhando primeiro o caso $y' > 0$. Vamos denotar por r_1 a reta orientada $\overline{A'_1 B'_1}$ e r_2 a reta orientada $\overline{A'_2 B'_2}$.

3a $(ky_2 + b)' \leq x'_2 < x'_1 \leq (kx_1 + b)'$. Neste caso vamos usar as funções ϕ_{min} e ϕ_{max} já definidas no sistema de coordenadas (x', y') . Tomemos os pontos P'_1 e P'_2 como os pontos de interseção da curva $F^*(x, y) = 1$ com o eixo x' . Portanto $\beta(0) = P'_1$ e $\beta(\pi) = P'_2$.

No sentido anti-horário da curva, temos a seguinte ordem para os pontos em relação as hipóteses até agora assumidas

$$P'_1 = \beta(0) \prec A'_1 = \beta(\theta_1) \prec B'_1 = \beta(\theta'_1) \prec B'_2 = \beta(\theta'_2) \prec A_2 = \beta(\theta_2) \prec P'_2 = \beta(\pi).$$

Assim $0 < \theta_1 < \theta'_1 < \theta'_2 < \theta_2 < \pi$. Pela Proposição 2.51 temos as seguintes desigualdades para as angulações das retas sobre a curva C' :

$$\phi(0, \theta_1) < \phi(\theta_1, \theta'_1) < \phi(\theta'_1, \theta'_2) < \phi(\theta'_2, \theta_2) < \phi(\theta_2, \pi). \quad (4.3-38)$$

Observemos que as desigualdade são estritas, em razão de que a reta que liga dois pontos de C' não pode conter um terceiro.

Em vista de (4.3-34) e da desigualdade (4.3-36) temos

$$\text{sen}(\phi(\theta_1, \theta'_1)) = \frac{(ky_1)' - y'_1}{d(A'_1, B'_1)} > 0,$$

pois $(ky_1)' > y'_1$, $d(A'_1, B'_1) > 0$ e

$$\text{cos}(\phi(\theta_1, \theta'_1)) = \frac{(kx_1 + b)' - x'_1}{d(A'_1, B'_1)} > 0,$$

pois $(kx_1 + b)' > x'_1$ e $d(A'_1, B'_1) > 0$. Então $\phi(\theta_1, \theta'_1)$ pertence ao primeiro quadrante e $0 < \phi(A'_1, B'_1) \leq \frac{\pi}{2}$. De modo análogo segue para $\phi(\theta'_2, \theta_2)$ que

$$\text{sen}(\phi(\theta'_2, \theta_2)) = \frac{y'_2 - (ky_2)'}{d(B'_2, A'_2)} < 0,$$

pois $(ky_2)' > y'_2$ e $d(B'_2, A'_2) > 0$ e

$$\text{cos}(\phi(\theta'_2, \theta_2)) = \frac{x'_2 - (kx_2 + b)'}{d(B'_2, A'_2)} > 0,$$

pois $x'_2 > (kx_2 + b)'$ e $d(B'_2, A'_2) > 0$. Então $\phi(\theta'_2, \theta_2)$ pertence ao quarto quadrante e $\frac{3\pi}{2} \leq \theta(B'_2, A'_2) < 2\pi$. Disso segue que

$$\phi_{\max}(0) < \phi(\theta_1, \theta'_1) \leq \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} \leq \phi(\theta'_2, \theta_2) < \phi_{\min}(\pi),$$

o que implica

$$\phi_{\min}(P'_2) - \phi_{\max}(P'_1) > \pi,$$

um absurdo, pois pela simetria de P'_1 e P'_2 temos que $\phi_{\min}(\pi) - \phi_{\max}(0) \leq \pi$.

$$\mathbf{3b} \quad x'_2 < (kx_2 + b)' \leq x'_1 < (kx_1 + b)'.$$

Neste caso, (4.3-36) e a condição de $F^*(0, 0) < 1$ implicam que a reta r_2 , ligando A'_2 e B'_2 , e a reta r_1 , ligando A'_1 e B'_1 , separam em semi-planos distintos os arcos entre seus pontos geradores e a origem, O . Logo r_2 deve intersectar o semi eixo positivo de y' e r_1 deve intersectar o semi eixo negativo de y' . Assim a origem $O = (0, 0)$ deve pertencer a região entre as retas r_1 e r_2 .

A equação da reta que liga A'_2 e B'_2 pode ser obtida a partir do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 & 1 \\ (kx_2 + b)' & (ky_2)' & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x'_2(ky_2)' + xy'_2 + y(kx_2 + b)' - x(ky_2)' - y'_2(kx_2 + b)' - yx'_2 = 0$$

$$y((kx_2 + b)' - x'_2) - x((ky_2)' - y'_2) + (x'_2(ky_2)' - y'_2(kx_2 + b)') = 0.$$

Por hipótese, segue que $(kx_2 + b)' - x'_2 > 0$, e por (4.3-36) temos que $(ky_2)' - y'_2 > 0$. Logo a reta r_2 tem inclinação positiva, e por intersectar o semi-eixo positivo y' , temos

que o ponto de interseção com o eixo x' deve ser negativo. Assim:

$$x'_2(ky_2)' - (kx_2 + b)'y'_2 < 0.$$

Aplicando (4.3-32) e (4.3-34) obtemos

$$\begin{aligned} & x'_2(ky'_2 + b \operatorname{sen} \varphi) - (kx'_2 + b \cos \varphi)y'_2 < 0 \\ \Rightarrow & x'_2ky'_2 + bx'_2 \operatorname{sen} \varphi - kx'_2y'_2 - b \cos \varphi y'_2 < 0 \\ \Rightarrow & bx'_2 \operatorname{sen} \varphi - b \cos \varphi y'_2 < 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$b(x'_2 \operatorname{sen}(\varphi) - y'_2 \cos(\varphi)) < 0 \quad (4.3-39)$$

e segue de (4.3-31) que:

$$\begin{aligned} & x'_2 \operatorname{sen}(\varphi) - y'_2 \cos(\varphi) \\ &= (x_2 \cos(\varphi) - y_2 \operatorname{sen}(\varphi)) \operatorname{sen}(\varphi) - (x_2 \operatorname{sen}(\varphi) + y_2 \cos(\varphi)) \cos(\varphi) \\ &= x_2 \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi) - y_2 \operatorname{sen}^2(\varphi) - x_2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi) - y_2 \cos^2(\varphi) \\ &= -y_2 \operatorname{sen}^2(\varphi) - y_2 \cos^2(\varphi) = -y_2(\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = -y_2 < 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$x'_2 \operatorname{sen}(\varphi) - y'_2 \cos(\varphi) = -y_2 < 0$$

e $b > 0$ por (4.3-39).

De maneira análoga temos que a equação da reta que liga A'_1 e B'_1 pode ser obtida a partir do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ (kx_1 + b)' & (ky_1)' & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e mostraremos que $b < 0$, o que nos dará a contradição desejada. A equação de r_1 fica

$$x'_1(ky_1)' + xy'_1 + y(kx_1 + b)' - x(ky_1)' - y'_1(kx_1 + b)' - yx'_1 = 0$$

$$y((kx_1 + b)' - x'_1) - x((ky_1)' - y'_1) + (x'_1(ky_1)' - y'_1(kx_1 + b)') = 0.$$

Por hipótese, $(kx_1 + b)' - x_1' > 0$, e por (4.3-36) $(ky_1)' - y_1' > 0$. Logo a reta tem inclinação positiva, e por intersectar o semi-eixo negativo y' , temos que o ponto de interseção com o eixo x' deve ser positivo. Assim:

$$x_1'(ky_1)' - (kx_1 + b)'y_1' > 0.$$

Aplicando (4.3-32) e (4.3-34) obtemos

$$\begin{aligned} & x_1'(ky_1' + b \operatorname{sen} \varphi) - (kx_1' + b \cos \varphi)y_1' > 0 \\ \Rightarrow & x_1'ky_1' + bx_1' \operatorname{sen} \varphi - kx_1'y_1' - b \cos \varphi y_1' > 0 \\ \Rightarrow & bx_2' \operatorname{sen} \varphi - b \cos \varphi y_2' > 0, \end{aligned}$$

logo

$$b(x_1' \operatorname{sen}(\varphi) - y_1' \cos(\varphi)) > 0 \quad (4.3-40)$$

e segue de (4.3-31) que:

$$\begin{aligned} & x_1' \operatorname{sen}(\varphi) - y_1' \cos(\varphi) \\ &= (x_1 \cos(\varphi) - y_1 \operatorname{sen}(\varphi)) \operatorname{sen}(\varphi) - (x_1 \operatorname{sen}(\varphi) + y_1 \cos(\varphi)) \cos(\varphi) \\ &= x_1 \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi) - y_1 \operatorname{sen}^2(\varphi) - x_1 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi) - y_1 \cos^2(\varphi) \\ &= -y_1 \operatorname{sen}^2(\varphi) - y_1 \cos^2(\varphi) = -y_1(\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = -y_1 < 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$x_2' \operatorname{sen}(\varphi) - y_2' \cos(\varphi) = -y_1 < 0$$

e $b < 0$ por (4.3-40), o que nos dá a contradição desejada.

3c $(kx_2 + b)' < x_2' \leq (kx_1 + b)' < x_1'$. Segue de maneira análoga ao caso **3b** e podemos concluir que a primeira condição fornece $b > 0$ e a segunda, $b < 0$, o que é novamente impossível.

3d Suponha que

$$x_2' < (kx_2 + b)' < (kx_1 + b)' < x_1'. \quad (4.3-41)$$

Note que a distância euclidiana de A_1 à A_2 satisfaz

$$d_E(A_1, A_2) = d_E(A'_1, A'_2) = x'_1 - x'_2. \quad (4.3-42)$$

A primeira igualdade é devido (4.3-31), que é uma isometria euclidiana, e a segunda igualdade é devido à (4.3-34). Por outro lado, B_1 e B_2 , que são relacionadas com A_1 e A_2 através de uma homotetia e translação (ver 4.3-26 e 4.3-27), satisfazem

$$kd_E(A_1, A_2) = d_E(B_1, B_2) = d_E(B'_1, B'_2), \quad (4.3-43)$$

onde a última igualdade é novamente devido (4.3-31). Mas

$$d_E(B'_1, B'_2) = (kx_1 + b)' - (kx_2 + b)' < x'_1 - x'_2 = d_E(A_1, A_2), \quad (4.3-44)$$

onde a primeira equação é pelo fato de B'_1 e B'_2 estarem na mesma horizontal (4.3-35) e a desigualdade é devido a (4.3-41). Mas note que teríamos $kd_E(A_1, A_2) < d_E(A_1, A_2)$, o que nos dá a contradição desejada, pois $k > 1$ (veja (4.3-37)). Logo o caso 3d não ocorre.

Resta trabalharmos com o caso de $y'_1 < 0$, isto é, pela equação (4.3-34) é o caso $x_1y_2 - x_2y_1 < 0$. Em outras palavras a base gerada pelos vetores dos pontos, $\overrightarrow{OA_1}$ e $\overrightarrow{OA_2}$, tem orientação negativa, isto é, o ângulo orientado no sentido da ordem dos vetores da base tem o sentido horário. Mas os casos 3a, 3b, 3c e 3d para a disposição dos pontos A'_i e B'_i , $i = 1, 2$, no semi-plano $y' < 0$, podem ser analisados de maneira idêntica ao caso de $y' > 0$, o que conclui a demonstração deste caso e do lema

■

Lema 4.12. *Suponha que a função $F^*(x, y)$ não é estritamente convexa. Se duas curvas distintas do tipo (4.2-19) tem dois pontos em comum, então elas também contém o segmento afim entre estes dois pontos.*

Demonstração: De fato, suponha que as curvas $m_1 = \gamma_1(C')$ e $m_2 = \gamma_2(C')$ do tipo (4.2-19) se intersectam nos pontos $C_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ e $C_2 = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$, com $C_1 \neq C_2$

Seguindo a mesma notação do Lema 4.11, temos que existem pontos $A_i, B_i \in C'$

tais que

$$A_i = (x_i, y_i) \quad e \quad B_i = (kx_i + b, ky_i) \quad i = 1, 2.$$

Segue que $A_1 \neq A_2$ e $B_1 \neq B_2$, pois $C_1 \neq C_2$, e também notemos que não pode ocorrer simultaneamente $k = 1$ e $b = 0$.

Seja l_1 a reta que liga A_1 e A_2 e l_2 a reta que liga B_1 e B_2 . Temos que l_1 é paralela a l_2 e como $F^*(x, y)$ não é estritamente convexa, podemos ter $l_1 = l_2$. Afirmamos que A_1, A_2, B_1 e B_2 são colineares ou $\widehat{A_1A_2}$ e $\widehat{B_1B_2}$ são disjuntos. De fato, suponha, sem perda de generalidade, que $A_1 \prec A_2$ e considere $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Se só o ponto B_i estiver contido no arco $\widehat{A_1A_2}$ e $B_j \succ B_i$ (o $B_j \prec B_i$ é análogo), então

$$\phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta'_i, \theta_2) \leq \phi(\theta'_i, \theta'_j),$$

onde $A_1 = \beta(\theta_1)$, $A_2 = \beta(\theta_2)$, $B_i = \beta(\theta'_i)$ e $B_j = \beta(\theta'_j)$. Mas $\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(\theta'_i, \theta'_j)$. Logo $B_i \in \overline{A_1A_2}$ e $l_1 = l_2$. Os outros casos quando somente um dos pontos B_1 ou B_2 pertence a $\widehat{A_1A_2}$ seguem de modo análogo.

Se $\widehat{B_1B_2}$ estiver contido em $\widehat{A_1A_2}$ e $l_1 \neq l_2$ então

$$\phi(\theta_1, \theta'_1) < \phi(\theta'_1, \theta'_2) < \phi(\theta'_2, \theta_2)$$

é satisfeita (compare com (4.3-38)) e a demonstração do caso 3 do Lema 4.11 pode ser feita de modo análogo para obtermos uma contradição. Logo $l_1 = l_2$ e $\overline{C_1C_2}$ está contido em m_1 e m_2 . Portanto $l_1 = l_2$ ou $\widehat{A_1A_2}$ e $\widehat{B_1B_2}$ são disjuntos. Vamos trabalhar com cada caso individualmente.

Caso 1: Se A_i e B_i , $i = 1, 2$, pertencem a uma mesma reta, podemos ter $A_1 = B_2$ ou $A_2 = B_1$, o que nos dá três pontos distintos sobre C' , ou então teríamos quatro pontos sobre C' .

Em qualquer caso teríamos ao menos três pontos distintos e colineares sobre C' , e pela Proposição 2.56, tais pontos pertencem a um segmento de reta contido em $\partial(C)$.

Portanto os pontos A_i e B_i com $i = 1, 2$ pertencem a um segmento de reta contido em C' , e como as transformações γ_i , $i = 1, 2$, levam segmentos em segmentos, temos que o segmento $\overline{C_1C_2}$ está contido em m_1 e m_2 .

Caso 2: Suponha que os arcos $\widehat{A_1A_2}$ e $\widehat{B_1B_2}$ sejam disjuntos. Os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e

$\overline{B_1B_2}$ são paralelos pela construção dos seus pontos.

Sejam $P_1 = \beta(0)$ e $P_2 = \beta(\pi)$ pontos de C' . Assumindo, sem perda de generalidade, que o arco $\widehat{A_1A_2}$ vem antes do arco $\widehat{B_1B_2}$, temos duas possibilidades

$$P_1 = \beta(0) \prec A_1 = \beta(\theta_1) \prec A_2 = \beta(\theta_2) \prec B_1 = \beta(\theta'_1) \prec B_2 = \beta(\theta'_2) \prec P_2 = \beta(\pi) \quad (4.3-45)$$

ou

$$P_1 = \beta(0) \prec A_1 = \beta(\theta_1) \prec A_2 = \beta(\theta_2) \prec B_2 = \beta(\theta'_2) \prec B_1 = \beta(\theta'_1) \prec P_2 = \beta(\pi), \quad (4.3-46)$$

o que implica $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta'_1 < \theta'_2 < \pi$ e $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta'_2 < \theta'_1 < \pi$ respectivamente.

Analisaremos o caso 4.3-45. Neste caso, temos que

$$\phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta_2, \theta'_1) \leq \phi(\theta'_1, \theta'_2)$$

e $\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(\theta'_1, \theta'_2)$. Com isso $\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi(\theta_2, \theta'_1)$, A_1, A_2, B_1 (e portanto B_2) são colineares, e analogamente ao caso 1 temos que $\overline{C_1C_2}$ está contido em m_1 e m_2 .

Analisaremos o caso 4.3-46

Pela Proposição 2.51 temos as seguintes desigualdades para as angulações das retas sobre a curva C'

$$\phi_{max}(0) \leq \phi(0, \theta_1) \leq \phi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta_2, \theta'_2) \leq \phi(\theta'_2, \theta'_1) \leq \phi(\theta'_1, \pi) \leq \phi_{min}(\pi).$$

Mas $\phi(\theta'_2, \theta'_1) = \phi(\theta_1, \theta_2) + \pi$, pois o vetor $\overrightarrow{B_2B_1}$ tem a mesma direção, mas sentido oposto de $\overrightarrow{A_1A_2}$. Como P_1 e P_2 são pontos simétricos temos pela Proposição 2.59 que

$$\phi_{min}(\pi) - \phi_{max}(0) \leq \pi.$$

Note que

$$\phi_{max}(0) \leq \phi(0, \theta_1) \leq \phi(\theta_1, \theta_2) < \phi(\theta_1, \theta_2) + \pi = \phi(\theta'_2, \theta'_1) \leq \phi(\theta'_1, \pi) \leq \phi_{min}(\pi),$$

de onde seguem as igualdades

$$\phi(0, \theta_1) = \phi(\theta_1, \theta_2) \quad \text{e} \quad \phi(\theta'_2, \theta'_1) = \phi(\theta'_1, \pi).$$

Disso temos que P_1, A_1 e A_2 são colineares e da mesma forma P_2, B_1 e B_2 , porém em retas distintas. Logo, pela Proposição 2.56, temos que

$$\widehat{P_1 A_2} = \overline{P_1 A_2} \quad \text{e} \quad \widehat{B_2 P_2} = \overline{B_2 P_2}.$$

Portanto os pontos A_i e B_i com $i = 1, 2$ pertencem a segmentos de reta contidos em C' , e como as transformações $\gamma_i, i = 1, 2$, levam segmentos em segmentos, temos que o segmento $\overline{C_1 C_2}$ está contido em m_1 e m_2 .

■

Os resultados do Lema 4.6 ao Lema 4.12 e o Princípio do Máximo de Pontryagin implicam o seguinte:

Teorema 4.13. *Nos planos quase-hiperbólicos, a família das curvas do tipo (4.2-19) e (4.2-20) é a família dos caminhos minimizantes em (S, \cdot) .*

Demonstração: Pelo princípio do Máximo de Pontryagin, aplicado no sistema

$$x'(t) = y(t)u_1(t) \quad \text{e} \quad y'(t) = y(t)u_2(t),$$

temos que os candidatos a caminhos minimizantes de (S, \cdot) são as curvas do tipo (4.2-19),

$$F^*(x - a, y) = k, \quad y > 0, \quad k > 0, \quad -\infty < a < +\infty$$

e as do tipo (4.2-20),

$$x(t) = x_0 + y_0 \int_0^t u_1^*(\tau) e^{u_2^* \tau} dt, \quad y(t) = y_0 e^{u_2^* t},$$

com $y_0 > 0, -\infty < a < +\infty$ e $(u_1^*(t), u_2^*) \in \Delta$.

Pelo Lema 4.10, resta mostrar que todo segmento das curvas do tipo (4.2-19) são caminhos minimizantes. Notemos que temos que considerar dois casos: $F^*(x, y) = 1$ ser estritamente convexa, ou não.

• Se $F^*(x, y) = 1$ for estritamente convexa, então as curvas do tipo (4.2-19) e do (4.2-20) não compartilham mais que um ponto devido ao Lema 4.8. Pelo Lema 4.10, temos que todo intervalo das curvas do tipo (4.2-20) são caminhos minimizantes e pelo Lema 4.11 as curvas do tipo (4.2-19), não compartilham mais que um ponto. Logo todo segmento das curvas do tipo (4.2-19) são caminhos minimizantes.

• Se $F^*(x, y) = 1$ não for estritamente convexa, então pelo Corolário 4.9 temos que as curvas do tipo (4.2-19) e do tipo (4.2-20) podem compartilhar dois pontos. Mas neste caso, elas compartilham também o segmento afim entre eles. Então este intervalo é um caminho minimizante. Pelo Lema 4.12, se duas curvas do tipo (4.2-19) tem dois pontos em comum, então elas compartilham o segmento afim entre esses dois pontos.

Com isso, todos os possíveis casos foram analisados, o que demonstra o teorema.

■

Encerraremos esta seção com um exemplo desses caminhos minimizantes.

Exemplo 4.14. Consideremos a norma F definida por:

• Se (x, y) pertence ao primeiro ou terceiro quadrante, então $F(x, y)$ se comporta como a norma do máximo, isto é, se $x, y < 0$ ou $x, y > 0$, então

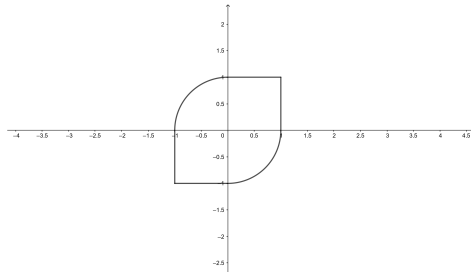
$$F(x, y) = \max\{|x|, |y|\};$$

• Se (x, y) pertence ao segundo ou quarto quadrante, então $F(x, y)$ se comporta como a norma euclidiana, isto é, se $x < 0 < y$ ou $y < 0 < x$, então

$$F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Temos que a esfera de raio 1 dessa norma pode ser representada geometricamente como na Figura 4.1.

Encontraremos agora F^* a partir da sua interpretação geométrica. Para isso consideremos as oito sub-regiões do plano delimitadas pelos eixos coordenados e pelas retas $x = y$ e $x = -y$, enumeradas no sentido anti-horário a iniciar pela delimitada pelo semi eixo positivo x e pela reta $x = y$. Assim podemos estudar $F^*(x, y)$ para (x, y) pertencendo a cada uma dessas regiões.

Figura 4.1: Esfera de raio 1 da norma F .

Se $A = (x, y)$ pertence as regiões um e dois, isto é, $x, y > 0$, então $A' = (-y, x)$ pertence as regiões três e quatro, onde F se comporta como a norma euclidiana. Logo analisando as curvas de nível da função $\langle A', \cdot \rangle$ temos que o ponto u^* que irá maximizar nossa função será o ponto na fronteira de F na direção do vetor $\overrightarrow{0A'}$. Assim temos que

$$F^*(x, y) = \left\langle (-y, x), \frac{(-y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\rangle = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ou seja, para pontos que pertencem as regiões um e dois, F^* é a norma euclidiana.

Se $A = (x, y)$ pertence as regiões cinco e seis, isto é, $x, y < 0$, então $A' = (-y, x)$ pertence as regiões sete e oito, onde F se comporta como a norma euclidiana. Logo a norma F^* se comportará de modo análogo ao caso anterior, ou seja, para pontos que pertencem as regiões cinco e seis, F^* é a norma euclidiana.

Se $A = (x, y)$ pertence as regiões três e quatro, isto é, $x < 0 < y$, então $A' = (-y, x)$ pertence as regiões cinco e seis, onde F se comporta como a norma do máximo. Logo analisando as curvas de nível da função $\langle A', \cdot \rangle$ temos que o ponto que irá maximizar nossa função será o ponto $u^* = (-1, -1)$. Assim temos que

$$F^*(x, y) = \langle (-y, x), (-1, -1) \rangle = |x| + |y|,$$

ou seja, para pontos que pertencem as regiões três e quatro, F^* é a norma da soma.

Se $A = (x, y)$ pertence as regiões sete e oito, isto é, $y < 0 < x$, então $A' = (y, -x)$ pertence as regiões um e dois, onde F se comporta como a norma do máximo. Logo a norma F^* se comportará de modo análogo ao caso anterior com $u^* = (1, 1)$, ou seja para pontos que pertencem as regiões sete e oito, F^* é a norma da soma.

Assim temos a interpretação geométrica da esfera de raio 1 da norma F^* na Figura

4.2

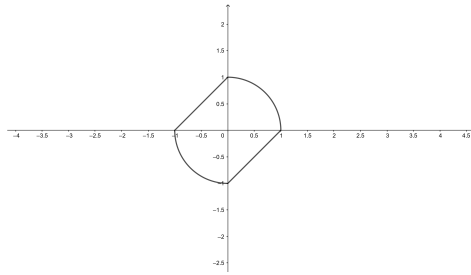


Figura 4.2: Esfera de raio 1 da norma F^* .

Um exemplo de caminho minimizante do tipo (4.2-19) considerando $a = 0$ e $k = 1$ é a representada na Figura 4.3

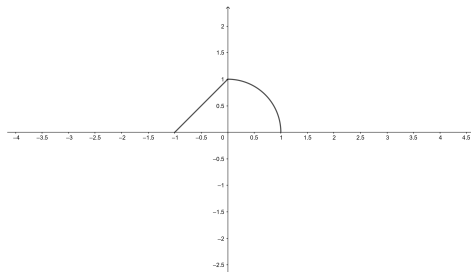


Figura 4.3: Exemplo de curva do tipo (4.2-19).

Temos que $u_2^* = 1$. Vejamos uma curva do tipo (4.2-20). Logo Δ neste caso corresponde ao segmento ligando o ponto $(0, 1)$ ao ponto $(1, 1)$.

Assim um exemplo de caminho minimizante do tipo (4.2-20) é dado pela função de controle ótima

$$u_1^*(t) = \frac{\text{sen}(4t)}{2} + \frac{1}{2},$$

e tomando $(x_0, y_0) = (0, 1)$ pode ser representada graficamente pela Figura 4.4.

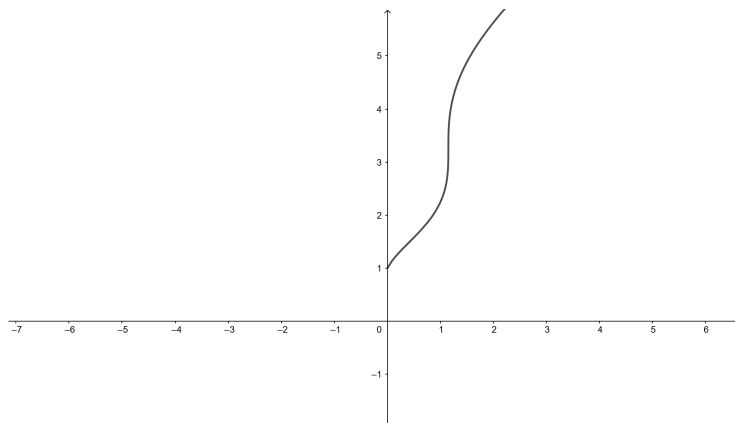


Figura 4.4: Exemplo de curva do tipo (4.2-20).

4.4 O caso Assimétrico

Na seção anterior consideramos as estruturas de Finsler Φ de classe C^0 invariante à esquerda com $\Phi((x, y), \cdot)$ sendo uma norma em $T_{(x,y)}S$. Vamos considerar agora as estruturas de Finsler de classe C^0 assimétricas, isto é, com $\Phi((x, y), \cdot)$ sendo uma norma assimétrica em $T_{(x,y)}S$ e invariantes à esquerda. O caso assimétrico não foi estudado no trabalho original de Gribanova. Entretanto o mesmo foi estudado em [3] utilizando trigonometria convexa. Tentaremos aqui obter alguns resultados adaptando as técnicas do trabalho da Gribanova.

Definição 4.15. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que uma aplicação $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma assimétrica se ela satisfizer as seguintes propriedades:

- i) $F(v) \geq 0$ para todo $v \in V$ e $F(v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$;
- ii) $F(kv) = kF(v)$ para todo $v \in V$ e $k > 0$;
- iii) $F(v + w) \leq F(v) + F(w)$ para todo $v, w \in V$.

Definição 4.16. Uma estrutura de Finsler de classe C^0 assimétrica em S é uma função contínua $\Phi : S \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ do fibrado tangente $S \times \mathbb{R}^2$ de S a valores reais tal que $\Phi((x, y), \cdot)$ é uma norma assimétrica em $T_{(x,y)}S$.

Assim vamos considerar agora o plano quase-hiperbólico como sendo S munido com uma estrutura de Finsler Φ de classe C^0 assimétrica e invariante à esquerda.

Notemos que a demonstração do Lema 4.6 não sofre muitas alterações.

Lema 4.17. Uma estrutura de Finsler Φ de classe C^0 assimétrica é invariante à esquerda se, e somente se,

$$\Phi((x, y), (v, w)) = y^{-1}F(v, w), \quad (4.4-47)$$

onde F é uma norma assimétrica em \mathbb{R}^2 . Neste caso $F(v, w) = \Phi((0, 1), (v, w))$.

Demonstração: É análoga ao caso simétrico.

Prosseguiremos agora o estudo para encontrar os caminhos minimizantes de (S, \cdot) munido com um estrutura de Finsler de classe C^0 assimétrica e invariante à esquerda

$$\Phi((x, y), (v, w)) = \frac{F(v, w)}{y}.$$

Tomemos novamente o sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t)u_1(t), \\ y'(t) = y(t)u_2(t), \end{cases} \quad (4.4-48)$$

onde $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são funções mensuráveis, definidas sobre o conjunto de controle U dado pela esfera de raio um, centrada na origem da norma assimétrica F , isto é,

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; F(u_1, u_2) = 1\}.$$

Temos que esse sistema continua tornando o nosso problema de encontrar os caminhos minimizantes um problema de tempo ótimo. A demonstração é análoga ao caso simétrico.

Ainda podemos considerar as trajetórias $(x(t), y(t))$ com condição inicial o elemento neutro $e = (0, 1)$, isto é, $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$. Entretanto devemos observar que se $(x(t), y(t))$ é um caminho que liga (x_1, y_1) a (x_2, y_2) , então o caminho reverso a $(x(t), y(t))$ que liga (x_2, y_2) a (x_1, y_1) não tem, em geral, o mesmo comprimento de $(x(t), y(t))$ pois a norma é assimétrica.

Notemos que o sistema de controle (4.4-48) e a função de custo $y^{-1}F(v, w)$ continuam os mesmos que nas seções anteriores, assim podemos definir a mesma função Hamiltoniana, isto é,

$$H(x, y, \psi_1, \psi_2, u_1, u_2) = y(\psi_1 u_1 + \psi_2 u_2).$$

Em razão disso temos que $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ satisfaz o mesmo sistema das seções anteriores

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \psi_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\psi_1 u_1 - \psi_2 u_2, \end{cases} \quad (4.4-49)$$

quase sempre.

Fixando (x, y) e (ψ_1, ψ_2) a função de máximo ainda é definida como

$$M(x, y, \psi_1, \psi_2) = \max_{(u_1, u_2) \in U} H(x, y, \psi_1, \psi_2, u_1, u_2).$$

Novamente pelo PMP, para $u(t)$ ser uma função de controle ótima, isto é, para a trajetória $(x(t), y(t))$ ser minimizante e satisfazer o sistema [4.4-48](#) é necessário que exista uma função $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ não nula satisfazendo [4.4-49](#) para quase todo $t \in I$ tal que a função H atinga seu máximo em $(u_1, u_2) = (u_1(t), u_2(t))$ quase sempre, isto é,

$$\begin{aligned} H(t) &:= H(x(t), y(t), \psi_1(t), \psi_2(t), u_1(t), u_2(t)) = M(t) \\ &= M(x(t), y(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) = M > 0, q.s. \end{aligned} \quad (4.4-50)$$

Tomando um valor inicial arbitrário, porém fixado, da função $\psi(t)$, ou seja, $\psi(0) = (\phi_1, \phi_2)$, temos que considerar dois casos: $\phi_1 = 0$ e $\phi_1 \neq 0$, por uma análise análoga ao das seções anteriores.

Caso *i*): $\phi_1 = 0$. Neste caso a função de máximo continua a mesma, isto é,

$$M(t) = \max_{(u_1, u_2) \in U} \phi_2 u_2. \quad (4.4-51)$$

Ainda temos que $\phi_2 \neq 0$ e $M(t)$ depende apenas do valor máximo ou mínimo que u_2 pode assumir em U dependendo se ϕ_2 é positivo ou negativo respectivamente. Para encontrar esse valor vamos novamente definir a função $F^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F^*(x, y) = \max_{(u_1, u_2) \in U} (xu_2 - yu_1). \quad (4.4-52)$$

Temos dessa vez que F^* é uma norma assimétrica. De fato, se $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}_+$, então F^* satisfaz as seguintes propriedades:

i) $F^*(x, y) \geq 0$, pois como F é uma norma assimétrica, u_1 e u_2 ainda podem assumir valores estritamente positivos e negativos, de modo que

$$\max_{(u_1, u_2) \in U} (xu_2 - yu_1) > 0.$$

Além disso temos que $F^*(x, y) = 0$ se, e somente se, $(x, y) = (0, 0)$.

ii) $F^*(kx, ky) = kF^*(x, y)$. Se $k \geq 0$ então

$$\max_{(u_1, u_2) \in U} (kxu_2 - ky u_1) = \max_{(u_1, u_2) \in U} k(xu_2 - yu_1),$$

e

$$F^*(kx, ky) = \max_{(u_1, u_2) \in U} k(xu_2 - yu_1) = k \max_{(u_1, u_2) \in U} (xu_2 - yu_1) = kF^*(x, y),$$

pois $k > 0$.

iii) F^* satisfaz a desigualdade triangular, pois

$$\begin{aligned} F^*((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \max_{(u_1, u_2) \in U} ((x_1 + x_2)u_2 - (y_1 + y_2)u_1) \\ &\leq \max_{(u_1, u_2) \in U} (x_1u_2 - y_1u_1) + \max_{(u_1, u_2) \in U} (x_2u_2 - y_2u_1) \\ &= F^*(x_1, y_1) + F^*(x_2, y_2), \end{aligned}$$

pelas propriedades da função máximo. Portanto, temos que a função F^* é uma norma assimétrica. Além disso, o máximo para u_2 em U é u_2^* obtido por

$$u_2^* = F^*(1, 0) \quad (4.4-53)$$

e o mínimo é dado por

$$u_2^* = F^*(-1, 0). \quad (4.4-54)$$

Segue então de (4.4-51) que a equação

$$\phi_2 u_2^* = M, \quad u_1 \in \mathbb{R}, \quad (4.4-55)$$

ainda determina uma reta L , suporte ao conjunto de controle U e paralela a reta $u_2 = 0$.

Assim temos novamente que considerar a interseção Δ entre a reta suporte (4.4-55) e o conjunto U .

Se Δ for um conjunto unitário, então a trajetória ótima é dada pela semirreta,

$$x(t) = \frac{u_1^*}{u_2^*}(y - 1), \quad y > 0.$$

A dedução é análoga ao caso simétrico.

Se Δ não for um conjunto unitário, temos que toda função mensurável $u_1^*(t)$, tal que $(u_1^*(t), u_2^*) \in \Delta$, determina uma trajetória ótima e neste caso geral temos que a trajetória ótima é dada por

$$x(t) = \int_0^t u_1^*(\tau) e^{u_2^* \tau} d\tau, \quad y(t) = e^{u_2^* t}, \quad (4.4-56)$$

com ponto inicial $(0, 1)$, função de controle $(u_1(t), u_2(t)) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ e a função auxiliar $(\psi_1(t), \psi_2(t)) = (0, \psi_2(t))$ satisfazendo as condições do PMP.

Caso *ii*): $\phi_1 \neq 0$.

Neste caso a função de máximo continua a mesma, isto é,

$$M(t) = \max_{(u_1, u_2) \in U} \phi_1 u_1 y(t) + (\phi_2 - \phi_1 x(t)) u_2 = \max_{u \in U} \langle r(t), u(t) \rangle, \quad (4.4-57)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em \mathbb{R}^2 e

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \quad r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (\phi_1 y(t), \phi_2 - \phi_1 x(t)). \quad (4.4-58)$$

Temos que $y(t)$ nunca se anula e $\phi_1 \neq 0$. Logo temos que $r(t) \neq 0$ para todo t . Como U é a esfera da norma F de raio um, a função de máximo é constante e estritamente positiva, ou seja, $M(t) = M > 0$.

Temos de (4.4-48), (4.4-49) e (4.4-57) que se multiplicarmos ϕ_1 e ϕ_2 por uma constante positiva k , a trajetória continua a mesma, mas M será multiplicada por k .

Assim se tomarmos $k = \frac{1}{M}$, temos a condição inicial

$$\psi(0) = (\psi_1(0), \psi_2(0)) = \left(\frac{\phi_1}{M}, \frac{\phi_2}{M} \right),$$

e $M(t) = 1$.

Temos agora por (4.4-57) que $r(t)$ pertence a fronteira C da região

$$U^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F_U(x, y) \leq 1\},$$

onde $F_U(x, y)$ é a função suporte de Minkowski sobre U ,

$$F_U(x, y) = \max_{(u_1, u_2) \in U} (x u_1 + y u_2).$$

De (4.4-57) e (4.4-58) podemos escrever

$$F_U(\phi_1 y(t), \phi_2 - \phi_1 x(t)) = 1. \quad (4.4-59)$$

Agora usando (4.4-52) podemos reescrever (4.4-59) como

$$F^*(\phi_2 - \phi_1 x(t), -\phi_1 y(t)) = 1, \quad (4.4-60)$$

e como F^* é uma norma assimétrica temos dois sub casos a considerar: $\phi_1 > 0$ e $\phi_1 < 0$.

Se $\phi_1 > 0$, então (4.4-60) se torna

$$F^*\left(\frac{\phi_2}{\phi_1} - x(t), -y(t)\right) = \frac{1}{\phi_1} \Leftrightarrow F^*\left(-\left(x(t) - \frac{\phi_2}{\phi_1}\right), -y(t)\right) = \frac{1}{\phi_1}. \quad (4.4-61)$$

Se $\phi_1 < 0$, então (4.4-60) se torna

$$\begin{aligned} F^*(\phi_2 - \phi_1 x(t), -\phi_1 y(t)) &= 1 \\ \Rightarrow F^*\left(-\phi_1\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1} + x(t)\right), -\phi_1 y(t)\right) &= 1 \\ \Rightarrow -\phi_1 F^*\left(x(t) - \frac{\phi_2}{\phi_1}, y(t)\right) &= 1 \\ \Rightarrow F^*\left(x(t) - \frac{\phi_2}{\phi_1}, y(t)\right) &= -\frac{1}{\phi_1}. \end{aligned} \quad (4.4-62)$$

Note que $F^*(\tilde{x}, \tilde{y}) = \max_{(u_1, u_2) \in U} (-\tilde{y}u_1 + \tilde{x}u_2) = F_U(-\tilde{y}, \tilde{x})$. No caso $\phi_1 > 0$, temos que $(x(t), y(t))$ é tal que

$$F^*\left(\frac{\phi_2}{\phi_1} - x(t), -y(t)\right) = F_U(y(t), \frac{\phi_2}{\phi_1} - x(t)) = \frac{1}{\phi_1},$$

ou seja, a candidata à trajetória ótima $(x(t), y(t))$, neste caso, estará contida na fronteira da região dada pela interseção de S com a figura obtida pela rotação de $\frac{U^*}{\phi_1}$ por $\frac{\pi}{2}$ seguida de uma translação pelo vetor $(\frac{\phi_2}{\phi_1}, 0)$.

De modo análogo, se $\phi_1 < 0$, temos que a candidata a trajetória ótima $(x(t), y(t))$ estará contida pela interseção de S com a figura obtida pela rotação de $\frac{U^*}{|\phi_1|}$ por $\frac{-\pi}{2}$ seguida de uma translação pelo vetor $(\frac{\phi_2}{\phi_1}, 0)$.

Lembre-se que estamos trabalhando no grupo de Lie em S e podemos tomar as trajetórias ótimas começando em qualquer ponto $(x, y) \in S$. Dessa forma os caminhos minimizantes no plano quase-hiperbólico serão curvas de três tipos:

As obtidas pelas esferas correspondentes a F^* ,

$$F^*(x - a, y) = k, \quad \text{com } y > 0, \quad k > 0, \quad -\infty < a < +\infty, \quad (4.4-63)$$

as obtidas pela inversão das esferas correspondentes à fronteira de F^* , em relação à origem, isto é

$$F^*(-x + a, -y) = k, \quad \text{com } y > 0, \quad k > 0, \quad -\infty < a < +\infty \quad (4.4-64)$$

e as obtidas pelas equações

$$x(t) = x_0 + y_0 \int_0^t u_1^*(t) e^{u_2^* t} dt, \quad y(t) = y_0 e^{u_2^* t}, \quad (4.4-65)$$

onde $(x_0, y_0) \in S$ e $(u_1^*(t), u_2^*) \in \Delta$. Encerraremos esta seção com um exemplo desses caminhos minimizantes.

Exemplo 4.18. Consideremos a norma assimétrica F definida por:

- Se (x, y) pertence ao primeiro quadrante, então $F(x, y)$ se comporta como a norma do máximo, isto é, se $x, y > 0$, então

$$F(x, y) = \max\{|x|, |y|\};$$

- Se (x, y) pertence ao segundo ou quarto quadrante, então $F(x, y)$ se comporta como a norma euclidiana, isto é, se $x < 0 < y$ ou $y < 0 < x$, então

$$F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

- Se (x, y) pertence ao terceiro quadrante, então $F(x, y)$ se comporta como a norma da soma, isto é, se $x, y < 0$, então

$$F(x, y) = |x| + |y|;$$

Temos que a esfera de raio 1 dessa norma pode ser representada geometricamente na Figura [4.5](#).

Notemos que essa norma coincide com a norma do Exemplo [4.14](#) exceto pelo ter-

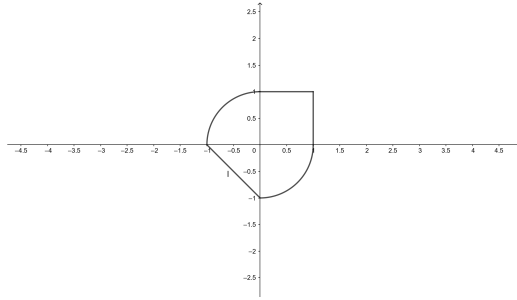


Figura 4.5: Esfera de raio 1 da norma assimétrica F .

ceiro quadrante.

Encontraremos agora F^* a partir da sua interpretação geométrica. Para isso consideremos as oito sub-regiões do plano delimitadas pelos eixos e pelas retas $x = y$ e $x = -y$, enumeradas no sentido anti-horário a iniciar pela delimitada pelo semi eixo positivo x e pela reta $x = y$. Assim podemos estudar $F^*(x, y)$ para (x, y) pertencendo a cada uma dessas regiões.

Notemos que para os pontos que pertencem ao primeiro, terceiro e quarto quadrante a função F^* irá se comportar de maneira análoga ao do Exemplo 4.14 restando analisar apenas os pontos pertencentes as regiões três e quatro.

Se $A = (x, y)$ pertence a região três, isto é, $x < 0 < y$ e $|x| < |y|$, então $A' = (-y, x)$ pertence a região cinco, onde F se comporta como a norma da soma. Logo, analisando as curvas de nível da função $\langle A', \cdot \rangle$ temos que o ponto que irá maximizar nossa função será o ponto $u^* = (-1, 0)$. Assim

$$F^*(x, y) = \langle (-y, x), (-1, 0) \rangle = |y|,$$

ou seja, para pontos que pertencem a região três, temos $F^*(x, y) = |y|$.

Se $A = (x, y)$ pertence a região quatro, isto é, $x < 0 < y$ e $|x| > |y|$, então $A' = (-y, x)$ pertence a região seis, onde F se comporta como a norma da soma. Logo, analisando as curvas de nível da função $\langle A', \cdot \rangle$ temos que o ponto que irá maximizar nossa função será o ponto $u^* = (0, -1)$. Assim

$$F^*(x, y) = \langle (-y, x), (0, -1) \rangle = |x|,$$

ou seja, para pontos que pertencem a região quatro, temos $F^*(x, y) = |x|$.

Podemos assim interpretar que para os pontos pertencem às regiões três e quatro, temos que F^* será a norma do máximo.

Assim temos a interpretação geométrica da esfera de raio 1 da norma F^* na Figura 4.6.

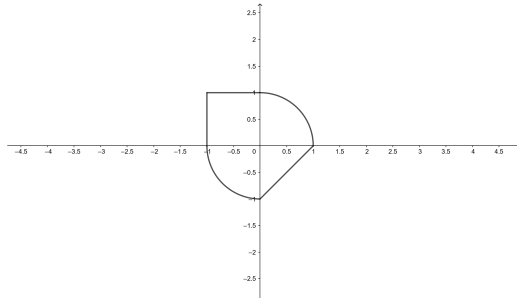


Figura 4.6: Esfera de raio 1 da norma assimétrica F^* .

Um caminho minimizante do tipo (4.4-63) com $a = 0$ e $k = 1$ é o representado na Figura 4.7.

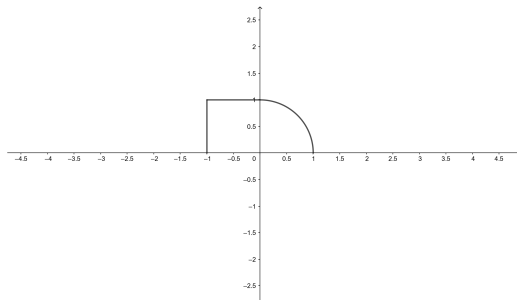


Figura 4.7: Exemplo de curva do tipo (4.4-63).

Um exemplo de caminho minimizante do tipo (4.4-64) com $a = 0$ e $k = 1$ é representado na Figura 4.8.

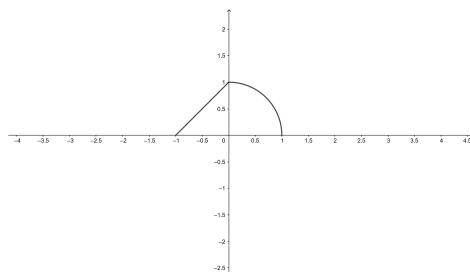


Figura 4.8: Exemplo de curva do tipo (4.4-64).

Temos que se $\phi_2 > 0$, então $u_2^* = 1$, logo Δ neste caso corresponde ao segmento ligando o ponto $(0, 1)$ ao ponto $(1, 1)$.

Assim um exemplo de caminho minimizante do tipo (4.4-65) é dado pela função de controle ótima

$$u_1^*(t) = \frac{\text{sen}(4t)}{2} + \frac{1}{2},$$

tomando $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e pode ser representada graficamente pela Figura 4.9.

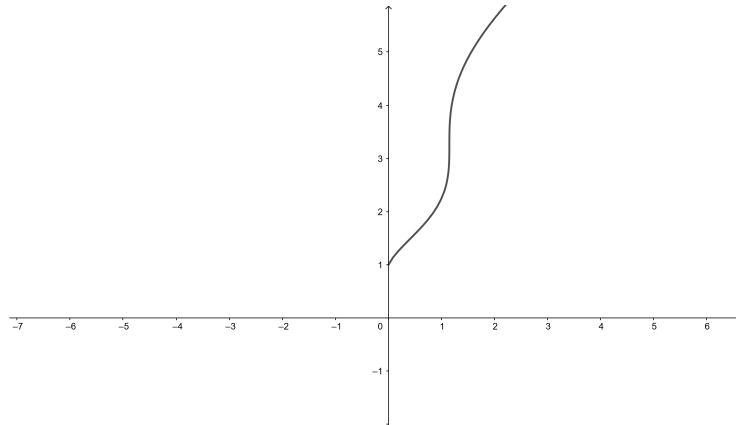


Figura 4.9: Exemplo de curva do tipo (4.4-65) com $\phi_2 > 0$.

Temos que se $\phi_2 < 0$, então $u_2^* = -1$, logo Δ neste caso corresponde ao conjunto unitário $\{(0, -1)\}$.

Assim um outro exemplo de caminho minimizante do tipo (4.4-65) é dado pela função de controle ótima constante $u_1^*(t) = 0$ e tomando $A = (x_0, y_0) = (1, 1)$ e pode ser representada graficamente pela Figura 4.10.

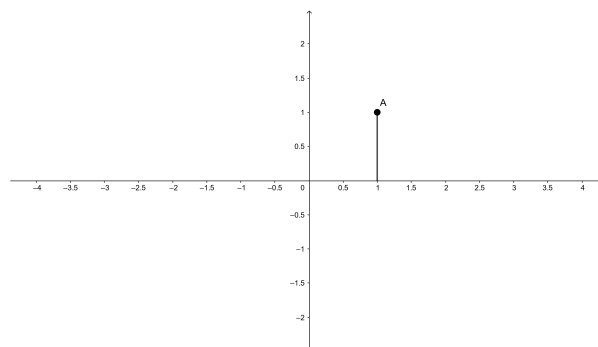


Figura 4.10: Exemplo de curva do tipo (4.4-65) com $\phi_2 < 0$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho estudamos os caminhos minimizantes em planos quase-hiperbólicos. Para isso usamos o princípio do máximo de Pontryagin, que foi estudado no capítulo três, para apresentar os extremais de Pontryagin como candidatos a caminhos minimizantes. No capítulo quatro, quando consideramos F uma norma, estudamos as possíveis interseções entre os extremais de Pontryagin a fim de caracterizá-los como caminhos minimizantes. Assim classificamos tais caminhos em dois tipos, os obtidos por esferas da norma F^* (4.2-19) e os obtidos por integrais (4.2-20). Ao final desse capítulo apresentamos os candidatos a caminhos minimizantes, isto é, os extremais de Pontryagin para quando consideramos F uma norma assimétrica. Assim conseguimos apresentar três tipos de candidatos a caminhos minimizantes, um tipo obtido por integrais (4.4-65), que dependem do valor de ϕ_2 , e dois tipos obtidos por esferas da norma assimétrica F^* , que se distinguem pelo valor de ϕ_1 , sendo os do tipo (4.4-63) para $\phi_1 < 0$ e os do tipo (4.4-64) para $\phi_1 > 0$. Ressaltamos que esses últimos três tipos são apenas candidatos a caminhos minimizantes, pois não foi feita a análise a fim de caracterizá-los como tais.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AGRACHEV, A.; BARILLARI, D.; BOSCAIN, U. **A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry**. Cambridge: Cambridge University Press. 2020.
- [2] ARDENTOV, A.A.; LE DONNE, E.; SACHKOV, Y.L. **A Sub-Finsler Problem on the Cartan Group**. Proc. Steklov Inst. Math. 304, 42–59 (2019).
- [3] ARDENTOV, A. A.; LOKUTSIEVSKIY, L. V.; SACHKOV, Yu L. **Extremals for a series of sub-Finsler problems with 2-dimensional control via convex trigonometry**. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, v. 27, p. 32, 2021.
- [4] BARILARI, D.; BOSCAIN, U.; GAUTHIER, J.P. **On 2-step, corank 2, nilpotent sub-Riemannian metrics**. SIAM Journal on Control and Optimization, v. 50, n. 1, p. 559-582, 2012.
- [5] BERESTOVSKII, V.; ZUBAREVA, I. **Pontryagin maximum principle,(co) adjoint representation, and normal geodesics of left-invariant (sub-) Finsler metrics on Lie groups**. 2019.
- [6] BERESTOVSKII, V.; ZUBAREVA, I. **Extremals of a left-invariant sub-Finsler metric on the Engel group**. Siberian Mathematical Journal, v. 61, n. 4, p. 575-588, 2020.
- [7] BERESTOVSKII, V.; ZUBAREVA, I. **Abnormal extremals of left-invariant sub-Finsler quasimetrics on four-dimensional Lie groups**. 2020.

- [8] FUKUOKA, R.; RODRIGUES, H. M. **Geodesic fields for Pontryagin type C^0 -Finsler manifolds**. 2020.
- [9] GRIBANOVA, I. A. **On a quasihyperbolic plane**. Sib Math J 40, 245–257, 1999.
- [10] HAKAVUORI, E. **Infinite geodesics and isometric embeddings in Carnot groups of step 2**. SIAM Journal on Control and Optimization, v. 58, n. 1, p. 447-461, 2020.
- [11] HALE, J. K. **Ordinary Differential Equations**. 2. ed. Robert E. Krieger Publishing Company, INC, 1980.
- [12] LOKUTSIEVSKIY, L. V. **Explicit Formulae for Geodesics in Left-Invariant Sub-Finsler Problems on Heisenberg Groups via Convex Trigonometry**. Journal of Dynamical and Control Systems, p. 1-21, 2020.
- [13] MONTGOMERY, R. **A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications**. American Mathematical Soc., 2002.
- [14] PONTRYAGIN, L.S; BOLTYANSKIJ, V.G; GAMKRELIDZE, R.V; MISHCHENKO, E.F. **The mathematical theory of optimal processes**. Pergamon Press, 1964.
- [15] ROCKAFELLAR, R. T. **Convex Analysis**. Princeton University Press, 1970.
- [16] ROYDEN, H. L; FITZPATRICK, P. M. **Real Analysis**. 4. ed. Prentice-Hall, 2010.
- [17] SACHKOV, Y. **Optimal Bang-Bang Trajectories in Sub-Finsler Problem on the Cartan Group**. Nelineinaya Dinamika. 14. 583-593. 2018.
- [18] SACHKOV, Y. **Optimal Bang-Bang Trajectories in Sub-Finsler Problems on the Engel Group**. Nelineinaya Dinamika. 16. 355-367. 2020.