UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

GISELE DETOMAZI ALMEIDA

Estabilidade Orbital de Soluções Ondas Viajantes Periódicas Para as Equações de Kawahara e Kawahara Regularizada

Maringá/PR

2021

GISELE DETOMAZI ALMEIDA

Estabilidade Orbital de Soluções Ondas Viajantes Periódicas para as Equações de Kawahara e Kawahara Regularizada

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá/PR

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Almeida, Gisele Detomazi
A447e Estabilidade orbital de soluções ondas viajantes periódicas para equações de Kawahara e Kawahara regularizada / Gisele Detomazi Almeida. -- Maringá, 2021.
xiii, 82 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2021.

1. Estabilidade orbital. 2. Ondas viajantes periódicas. 3. Equação de Kawahara regularizada. 4. Equação de Kawahara modificada. 5. Equação dispersiva regularizada. 6. Equação Benjamim-Bona-Mahony. 7. Orbital stability. 8. Periodic traveling waves. 9. Regularizes Kawahara equation. 10. Modified Kawahara equation. 11. Regularized dispersive equation. 12. Benjamim-Bona-Mahony equation. I. Natali, Fábio Matheus Amorin, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353
Edilson Damasio CRB9-1.123

Estabilidade Orbital de Soluções Ondas Viajantes Periódicas para as Equações de Kawahara e Kawahara Regularizada

Gisele Detomazi Almeida

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutora em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali - UEM (presidente)

Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin - UEM

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira – UEM

Prof. Dr. Eleomar Cardoso Junior - UFSC-Blumenau

Prof. Dr. André Vicente - UNIOESTE

Aprovada em: 27 de abril de 2021.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet.

À minha filha Beatriz e
à minha família,
dedico.

AGRADECIMENTOS

Sento-me aqui para escrever meus agradecimentos com uma lista de pessoas em mente, onde mais que gratidão sinto também admiração. Outras, às vezes foram aquelas que num momento simples, nos disseram a palavra correta, ou nos estenderam a mão com uma generosidade natural. Cada pessoa que passa pelo nosso caminho cumpre um papel e merece reconhecimento. Algumas serão citadas, a outras peço perdão pela ausência do nome aqui, mas tenham certeza que neste longo caminho foram muito importantes para mim.

Deus sempre esteve comigo. Suas palavras me fortalecem e a fé Nele que fez por diversas vezes minhas lágrimas se transformarem em combustível para seguir.

Ao meu orientador Fábio, por todo aprendizado, oportunidades e compreensão.

Aos professores que compuseram a Banca, Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin (UEM), Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira (UEM), Prof. Dr. Eleomar Cardoso Junior (UFSC-Blumenau), Prof. Dr. André Vicente(UNIOESTE), agradeço por todas contribuições neste trabalho. A cada professor do Doutorado em Matemática de Maringá, por todo compromisso com o ensino. Ao atual Coordenador, Professor Josiney. Em especial, agradeço a professora Claudete, pela postura e preocupação com o ensino, tem uma sensibilidade que admiro e acredito ser essencial para um bom ensino em qualquer nível de formação.

Aos funcionários administrativos do PMA, Edilson, Vânia e em especial à querida Lúcia e ao Zelito, estes doi últimos, muitas vezes foram amigos e psicólogos, e posso dizer que isso acontece há pelo menos 20 anos.

À minha família, pelas palavras de incentivo, pelos auxílios em todos os sentidos, por entenderem minhas ausências quando necessárias, por estarmos todos aqui considerando que não foram anos fáceis. Amo vocês, cada um tem papel essencial aqui. Minha mãe é meu maior exemplo. Pai e mãe, Jana e Fábio, Bruno e Michele, Gabriel e Maria Fernanda, amo vocês sem medidas.

Aos meus colegas de trabalho, por todo apoio, em especial agradeço os que além de colega são amigos, Adriano, Alcione, Keidna, Ivo, Dirlei, e de forma ainda mais especial meu amigo, meu anjo e irmão de coração Kaled.

Aos colegas de curso meu muito obrigada, mas destaco o grupo que inicialmente chamamos de meninas do doutorado e se tornou "Amigas do Doutorado,"companheiras para a vida. Adriana e Janaína, foram irmãs em Maringá. Não posso esquecer da Luana, Cláudia e Vandy.

Aos meus familiares, em especial ao meus tios Luzia e Hélcio e minhas primas Sandra e Gleice, que foram neste período o meu alicerce. Jana, Sandra, Gleice e Gi, amo minha Tulipas. Primos e primas, tios e tias, cada palavra, sorriso ou abraço, ainda que virtual, foi importante.

À toda República da Ferradura, que está enferrujando, mas é indestrutível. Evelyn, Ana, Débora, Lucimar, Fabrício, Bruno, Jair e Tedson. Minhas Lus, amo vocês.

Aos amigos, que de uma forma ou outra deixaram suas marcas nesse caminho. Obrigada Ana, Andréia e família, Alice, Cleofa, Giselly, Jean, Liliane, Luciana, Luísa, Marcelo Koy, Marlene, Márcia, Priscila, Raquel, Renata, Suze, cada um de vocês é muito especial. E ao pai da filha, Leonardo e sua família. Tem me dado muita força nesses momentos finais.

À UEM, por todo apoio e estrutura excelente que nos oferece.

À UFT, pela possibilidade que nos oferecem de ampliar nossos conheceimentos, em especial ao Campus de Arraias e principlamente ao Curso de Licenciatura em Matemática.

À CAPES, pelo apoio financeiro dado aos Programas de Pós-GRaduação em Matemática da UEM - PMA.

E finalmente, à minha filha Beatriz, meu porquê, minha força, minha vidinha. Mamãe te ama do tamanho do Universo.

Obrigada!

"...Você pode se render
Sem uma oração
Mas, nunca pode realmente orar
Sem uma rendição
Você pode lutar
Sem nunca vencer
Mas, você nunca vencerá
Sem antes lutar..."

(Neil Peart)

RESUMO

Esta tese teve como objetivo principal estabelecer condições suficientes para obtenção de estabilidade orbital de soluções tipo ondas viajantes de equações dispersivas tipo Benjamin-Bona-Mahony, de maneira simplificada. Em particular, estudamos a estabilidade de ondas associadas à equação de Kawahara regularizada, através de um critério simplificado, sem que fosse necessário conhecermos a matriz Hessiana associada a um certo funcional de Lyapunov, convenientemente definido a partir da equação envolvida. Seguimos os passos de [5] e [18] para resultados para obtenção da estabilidade orbital da solução tipo onda viajante da equação de Kawahara modificada regularizada, também sem que fosse necessário conhecer todas as entradas principais da matriz Hessiana. A boa-colocação das duas equações supracitadas, foi provada através de um resultado mais geral sobre o problema de Cauchy associado à equação de Kawahara generalizada regularizada, onde seguimos a abordagem de [6], [10] e [11]. Por fim, utilizamos as condições de estabilidade estabelecidas em [5], para obtenção da estabilidade orbital de soluções tipo ondas viajantes da equação de Kawahara modificada. As equações abordadas possuem solução com perfil dnoidal e os critérios de estabilidade foram satisfeitos analisado o espectro não positivo de um operador linearizado ao redor da onda, onde utilizados os critérios definidos em [9].

Palavras chave: Estabilidade orbital, Ondas viajantes periódicas, Equação de Kawahara regularizada, Equação de Kawahara modificada, Equação dispersiva regularizada, Equação Benjamim-Bona-Mahony.

ABSTRACT

This thesis had as main goal to establish sufficient conditions to obtain orbital stability of traveling wave solutions of dispersive equations type Benjamin-Bona-Mahony, in a simplified manner. In particular, we studied the stability of waves associated with the regularized Kawahara equation, using a simplified criterion, without it being necessary to know the Hessian matrix associated with a certain Lyapunov functional, conveniently defined from the equation involved. We followed the steps of [5] and [18] for results to obtain the orbital stability of the traveling wave solution of the modified Kawahara equation, also without having to know all the main inputs of the Hessian matrix. The well-posedness of the two aforementioned equations was proven through a more general result on the Cauchy problem associated with the regularized generalized Kawahara equation, where we follow the [6], [10] and [11]. Lastly, we used the stability conditions established in [5], to obtain the orbital stability of traveling wave solutions of the modified Kawahara equation. The equations approached have a solution with a dnoidal profile and the stability criteria were satisfied by analyzing the non-positive spectrum of a linearized operator around the wave, using the criteria defined in [9].

Key Words: Orbital stability, periodic traveling waves, regularized Kawahara equation, modified Kawahara equation, regularized dispersive equation, Benjamin-Bonn-Mahony equation.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

O estudo de equações diferenciais dispersivas tem despertado muito interesse devido à quantidade de fenômenos que podem ser modelados por equações deste tipo. Por exemplo, elas surgem em problemas de: ótica não linear, dinâmica de fluidos, física de plasma, fluxos de água, ondas eletromagnéticas, entre outros. Uma vez que uma equação modela um problema, diversos estudos relacionados a tais problemas e suas soluções tornam-se relevantes, como a própria determinação de existência de soluções, sua boa-colocação em algum espaço conveniente e ainda estudos qualitativos como por exemplo, a estabilidade de soluções considerando pequenas perturbações.

A importância em estudos de estabilidade é crucial para o bom funcionamento e controle de sistemas relacionados aos fenômenos descritos pelas equações envolvidas em cada caso. Uma situação interessante de aplicação do estudo de estabilidade se dá considerando o caso de linhas de transmissão de energia, que com aumento da demanda de energia sobre os sistemas elétricos, tem tornado necessário o avanço em técnicas de controle para amortecer as perturbações nos sistemas.

Nossos estudos envolvem equações diferenciais parciais dispersivas não lineares e são baseados em teorias clássicas sobre estabilidade orbital de soluções ondas viajantes solitárias como [2] , [12] e [19]. Como nosso interesse é no caso de ondas viajantes periódicas, trabalhos como de [8] tornam-se essenciais para este desenvolvimento.

Utilizamos as palavras de Natali, em [35], para descrever informalmente o que acontece em fenômenos relacionados às equações dispersivas.

"A existência de soluções que mantêm sua forma enquanto viaja com velocidade cons-

> *tante é um dos fenômenos mais fascinantes determinados por equações dispersivas. Estas soluções especiais (em geral, chamadas ondas viajantes) surgem devido ao equilíbrio perfeito entre os efeitos não lineares e dispersivos no meio."*

Acreditamos que estas palavras descrevam ou justifiquem o que motivou as observações, no ano de 1834, feitas por John Scott Russel sobre tais ondas enquanto andava à cavalo ao lado do estreito Canal Union perto de Edimburgo, na Escócia. Ele observou que ondas, criadas na superfície de um canal de águas rasas, se propagavam com velocidade constante c, e sem mudar seu formato, ver [40]. A equação obtida empiricamente por Russel, onde ele relaciona a velocidade c da onda com sua altura, amplitude, e a força de gravidade g, é dada por

$$c^2 = g(h + a).$$

Esta equação foi questionada, pois apesar de ter sido relacionada a teorias sobre ondas existentes na época, as características sobre a dispersão contrariavam algumas destas mesmas teorias.

No ano de 1895, dois cientistas holandeses Korteweg e de-Vries, descreveram tais fenômenos formalmente, ou seja, com bases teóricas, em [32], e obtiveram a equação

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

onde u é uma função suave em relação às variáveis x e t, com domínio em $\mathbb{R}^2$ e imagem em $\mathbb{R}$. O termo uu_x representa a não linearidade e u_{xxx} é o termo dispersivo, o equilíbrio entre eles que proporciona soluções ondas viajantes estáveis. A equação descrita recebeu o nome Equação Korteweg de-Vries (KdV daqui em diante) para homenageá-los.

A equação KdV, juntamente com a a equação de Schrödinger não linear, são as mais importantes equações não lineares dispersivas. Em particular, a KdV como esperado, descreve um modelo de ondas em águas rasas. Entre suas propriedades, encontra-se a presença de simetrias e leis de conservação, onde destacamos a simetria por translações, e as leis de conservação de energia e de massa. Propriedades estas, que foram essenciais para o desenvolvimento das teorias de estabilidade já mencionadas, baseadas no cálculo variacional.

Variações da equação de Kawahara generalizada, inclusive no contexto periódico, é o foco do nosso trabalho. A equação de Kawahara, foi determinada por T. Kawahara , ver [30], e surge a partir de análises da equação KdV. A equação de Kawahara generalizada tem a forma,

$$u_t + u^p u_x + (\gamma u_{xx} - \mu u_{xxxx})_x = 0,$$

onde $p \in \mathbb{N}$ denota a potência da não linearidade e $\gamma \geq 0$ e $\mu > 0$ são parâmetros que controlam o termo de dispersão de terceira e quinta ordem, respectivamente. A equação de Kawahara, onde $p = \gamma = \mu = 1$ na equação acima, foi estabelecida como um modelo para ondas de água com baixa amplitude em relação ao comprimento de onda.

Mais precisamente, estudamos a estabilidade de soluções das equações:

(I) Equação de Kawahara modificada regularizada:

$$u_t + u_x + u^2 u_x - (\gamma u_{xx} - u_{xxxx})_t = 0;$$

(II) Equação de Kawahara regularizada:

$$u_t + u_x + u u_x - (u_{xx} - u_{xxxx})_t = 0;$$

(III) Equação de Kawahara modificada:

$$u_t + u^2 u_x + (u_{xx} - u_{xxxx})_x = 0.$$

Sobre estas equações, até este momento não conhecíamos resultados de estabilidade orbital. No entanto, para a equação de Kawahara a estabilidade orbital foi obtida por [16], [20] e [35], onde este último obteve um resultado mais amplo.

De um modo geral as equações acima possuem a forma,

$$u_t + (f(u))_x - (\mathcal{M}u)_x = 0, \tag{1}$$

e para o caso regularizado,

$$u_t + u_x + (f(u))_x + (\mathcal{M}u)_t = 0, \tag{2}$$

onde, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica na variável espacial, com período $L > 0$, fixado. $\mathcal{M}$ é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no sentido periódico e é definido como um multiplicador de Fourier, dado por

$$\widehat{\mathcal{M}g}(k) = \theta(k)\widehat{g}(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

onde θ representa uma função par e contínua em $\mathbb{R}$, satisfazendo a condição

$$v_1|k|^m \leq \theta(k) \leq v_2|k|^m, \qquad m > \frac{1}{3},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e para alguns $v_i > 0$, para $i = 1, 2$.

Como já observado por Russel, as ondas aqui tratadas são invariantes por translações, em relação ao grupo $\mathbb{R}$. Com isso, uma solução tipo onda viajante de (1) possui a forma

$$u(x,t) = \phi(x - ct),$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é a velocidade da onda. Note que ao substituirmos esta forma na equação (1) e integrando posteriormente, obtemos a equação diferencial ordinária

$$-\mathcal{M}\phi + (f(\phi)) - c\phi + A = 0, \tag{3}$$

onde A é uma constante de integração. Observe, pela equação obtida, que uma solução em geral depende da velocidade c e de A, ou seja, $\phi := \phi_{(c,A)}$.

O estudo sobre a estabilidade orbital de tais soluções surge justamente para entender o comportamento de ondas em relação à órbita gerada por translações, a partir de um dado inicial u_0. Formalmente, diz-se que uma solução ϕ é orbitalmente estável no espaço energia $X = H^{\frac{m}{2}}_{per}([0, L])$, com relação ao fluxo periódico de (1), se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer u_0 em X satisfazendo $\| u_0 - \phi \|_X < \delta$, a solução $u(t)$ de (1) com dado inicial $u_0(x) = u(x, 0)$ existe globalmente e satisfaz $\rho(u(t), \phi) < \varepsilon$, para todo $t > 0$. Aqui $\rho(u(t), \phi)$ é a semi-distância entre $u \in X$ e a órbita de ϕ, a qual está formalmente definida no Capítulo 1.

A teoria de estabilidade, inicialmente foi desenvolvida para o estudo de ondas viajantes solitárias, que são ondas $u(x,t) = \phi(x - ct)$, cujo perfil ϕ satisfaz $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \phi^{(n)}(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Aqui, $\phi^{(n)}(x)$ denota a n-ésima derivada de $\phi(x)$. E assim, para o caso de ondas solitárias, $A \equiv 0$. E considerando que a equação (1), com condição inicial $u(0) = u_0 \in X := H^{\frac{m}{2}}_{per}([0, L]))$ seja bem colocada em X, podemos supor que (1) possua pelo menos três quantidades conservadas P, F, e M. Quantidades estas relacionadas à Energia, Momento e Massa, respectivamente.

Considerando propriedades destas quantidades, como o fato de serem conservadas em relação ao fluxo das respectivas equações e também por serem invariantes por translações, é que a teoria por Grillakis, Shatah, Strauss e Weinstein, para obtenção de estabilidade foi desenvolvida. Assim, com o intuito de minimizar a energia P, define-se o funcional conservado $G(u) = P(u) + cF(u)$, de forma que a onda ϕ solução de (3), seja um ponto crítico de G. E então, obtém-se a estabilidade mostrando que a onda viajante ϕ é um mínimo local do funcional P restrito a um certo vínculo Q, também definido como combinação de quantidades conservadas. Com isso, o operador linearizado ao redor da onda ϕ, $\mathcal{L} := G''(\phi)$, desempenha um papel crucial na análise de estabilidade, a qual será obtida pelo método variacional.

No caso periódico, as ondas viajantes são ondas $u(x,t) = \phi(x - ct)$, cujo perfil ϕ é periódico, com período fixo $L > 0$ e satisfaz $\phi(0) = \phi(L)$ e $\phi'(0) = \phi'(L)$. Portanto, nem sempre $A = 0$. Para o caso onde $A \neq 0$, a onda ϕ não é um ponto crítico do funcional G. Tornando-se necessário impor alguma condição sobre a onda viajante, e este problema foi contornado considerando que ϕ possua média zero, isto é $M(\phi) = 0$, ver [8].

Abordagens do caso onde $A \neq 0$, são mais recentes e a partir desta consideração a teoria de estabilidade foi adaptada de forma que o funcional G foi estendido, tornando-se

$$G(u) = P(u) + cF(u) + AM(u).$$

Entre os primeiros trabalhos a fazer tal consideração foi [24], em que o autor estudou a estabilidade da $GKdV$. Em [36], os autores consideraram também $A \neq 0$ e provaram a estabilidade das equações 3-KdV e logarítmica Schrödinger, baseados nos trabalhos de Weinstein em [42] e [43]. Tanto em [24], como em [36], não foi utilizada a forma explícita da solução ϕ. Porém, as abordagens são distintas.

Stuart, em [41], determinou condições suficientes para a estabilidade orbital de ondas estacionárias solitárias para $u_t = JP'(u(t))$ em um espaço de Hilbert. Aqui, P é a quantidade relacionada à energia associada à equação (1) e J é um operador invertível, limitado e antissimétrico. No entanto, os resultados estabelecidos por ele, tratavam de equações com duas simetrias: rotação e translação. Esta abordagem motivou os autores em [5], que modificando os argumentos em [41], estabeleceram um critério razoável para obtenção de estabilidade orbital de soluções tipo ondas viajantes periódicas da equação (1) em X. Tal estabilidade pode ser obtida através de um funcional de Lyapunov, definido a partir do funcional G e do vínculo $Q = aF + bM$. Sob estas condições, uma das dificuldades para obtenção da estabilidade orbital que é determinar a matriz Hessiana associada ao funcional G, é substituída pela existência de uma certa função Φ, que satisfaz algumas condições de ortogonalidade em relação a um certo conjunto estabelecido a partir da quantidade Q. Estes argumentos foram base para a demonstração da estabilidade orbital da equação de Kawahara modificada, no Capítulo 4 desta tese.

Os resultados estabelecidos em [5], também puderam ser estendidos para o caso regularizado. Com isso, em [18], os autores apresentaram um resultado interessante para equações dispersivas regularizadas com $f(u) = \frac{u^2}{2}$. No entanto, foi preciso construir uma superfície suave das ondas periódicas para obter, usando manipulações adequadas com a matriz Hessiana de $G(\phi_{(c,A)})$, obtendo uma função que não depende de derivadas de $F(\phi_{(c,A)})$ e $M(\phi_{(c,A)})$.

No Capítulo 3, baseados nos trabalhos [5], [18], [22] , [25], [37] e [41] , estabelecemos um critério simplificado para obtenção de estabilidade orbital de soluções ondas viajantes periódicas de equações na forma

$$u_t + u_x + uu_x + (\mathcal{M}u)_t = 0, \tag{4}$$

sem que haja necessidade de conhecer a positividade associada à uma matriz Hessiana ou a Jacobianos. Definimos um funcional de Lyapunov

$$V(u) = G(u) - G(\phi) + N(Q(u) - Q(\phi))^2,$$

onde $N > 0$ é uma constante e $Q(u) = -K(u) + (c - 1 - A)M(u)$, e a quantidade $K(u) = F(u) - P(u)$. Este funcional remove a necessidade da já mencionada positividade. O que é um grande avanço para obtenção de estabilidade de equações importantes que não possuem superfície de ondas, como a equação de Kawahara regularizada por exemplo. A hipótese (H) necessária para obtenção de tais resultados, além das condições da Φ, impõe o seguinte:

(H) Considere $m > \frac{1}{3}$. Seja $(c_0, A_0) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ fixo. Suponhamos que $\phi \in \mathbb{C}^\infty_{per}([0, L])$ uma solução onda viajante, $L-$periódica de (4), com $L > 0$. O operador autoadjunto $\mathcal{L}$ possui apenas um autovalor negativo, o qual é simples. Além disso, zero é um autovalor simples associado à autofunção $\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

Para obtenção das condições impostas na hipótese (H), apresentamos soluções explícitas das equações estudadas, obtidas com a ajuda do programa Maple 17, onde substituímos o ansatz (ver [38]) nas equações diferenciais ordinárias associadas a cada equação. E com isso, para determinarmos as propriedades espectrais, foi possível fazer uso da teoria desenvolvida por [9] para o caso periódico.

Diante do que foi exposto, a organização deste trabalho apresenta-se da seguinte maneira:

No Capítulo 1, apresentamos notações e resultados sobre espaçoes de Sobolev, estabilidade orbital e teoria espectral, necessários para a obtenção da estabilidade orbital de soluções tipo ondas periódicas das equações acima.

No Capítulo 2, estabelecemos a estabilidade orbital da equação de Kawahara modificada regularizada. Antes disso, provamos a boa colocação para a equação de Kawahara generalizada regularizada seguindo os passos de [6]. A boa colocação local é obtida utilizando a equação de Duhamel associada ao problema de Cauchy e o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para a boa colocação global é essencial que a norma de u seja conservada em X. Este resultado de boa-colocação pode ser utilizado também para a equação de Kawahara regularizada, cuja estabilidade foi provada no quarto capítulo.

No Capítulo 3, como já mencionamos, estabelecemos um critério simplificado para obtenção da estabilidade orbital de soluções periódicas equações do tipo (4), ou seja, da forma

$$u_t + u_x + uu_x + (\mathcal{M}u)_t = 0.$$

Neste caso, não é necessária a existência de uma superfície de ondas.

O resultado obtido, foi útil para provarmos a estabilidade orbital de soluções ondas viajantes da equação de Kawahara regularizada. Para provarmos a condição dada na hipótese (H), a qual trata das propriedades espectrais do operador $\mathcal{L}$ associado à equação de Kawahara regularizada, utilizamos os critérios de positividade de [9]. A solução desta equação é dada explicitamente pelo ansatz

$$\phi(x) = a + b dn^2\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right) + d dn^4\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right),$$

onde dn é a função elíptica de Jacobi dnoidal, e K é a integral elíptica completa de primeiro tipo e os coeficientes a, b e d dependem suavemente do módulo elíptico $k \in (0,1)$, assim como c e a constante de integração A, a qual surge na equação diferencial associada à equação, fazendo $u = u(x,t) = \phi(x-ct)$, onde $c > 0$ é a velocidade de propagação da onda viajante ϕ.

No Capítulo 4, provamos a estabilidade orbital de soluções ondas viajantes da equação de Kawahara modificada, dada por

$$u_t + u^2 u_x + (\gamma u_{xx} - u_{xxxx})_x = 0,$$

com $\gamma \geq 0$. Os resultados de estabilidade aqui apresentados são baseados nos argumentos utilizados por [5]. A da solução desta equação é dada explicitamente pelo ansatz

$$\phi(x) = a + bdn^2\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right),$$

bem como a equação de Kawahara modificada regularizada, ver detalhes em [38]. Os coeficientes a e b dependem suavemente do módulo elíptico $k \in (0,1)$, assim como a velocidade da onda c e a constante de integração A.

A partir dos resultados obtidos no Capítulo 4, foi publicado o trabalho [3]. Este resultado é o primeiro encontrado na literatura sobre estabilidade orbital da equação de Kawahara modificada.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

1.1 Notações e Preliminares

Neste capítulo, encontram-se notações e resultados necessários para o desenvolvimento desta tese. Utilizaremos as notações padrões com relação às equações diferenciais parciais. Algumas teorias importantes utilizadas ao longo do trabalho foram abordadas no Apêndice (Capítulo 5). Em particular, na Seção 5.1, mencionamos conceitos importantes sobre espaços de Sobolev periódicos, para mais detalhes consultar [23].

Consideremos $\mathcal{P} = C^{\infty}_{per}([0,L])$, o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que são periódicas de classe C^{∞} e com período $L > 0$, e $\mathcal{P}'$ o conjunto das distribuições periódicas. Assim, para $s \in \mathbb{R}$, o Espaço de Sobolev de ordem s, denotado por $H^s_{per}([0,L])$ é o conjunto de todas $f \in \mathcal{P}'$ tal que

$$\| f \|^2_{H^s_{per}([0,L])} = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty,$$

onde $\widehat{f}$ denota a transformada de Fourier de f.

Observamos que o espaço $H^s_{per}([0,L])$, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^s_{per}([0,L])} = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)},$$

é um Espaço de Hilbert.

Para o caso particular $s = 0$, temos $L^2_{per}([0,L]) := H^0_{per}([0,L])$, o qual é um espaço de

Hilbert munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle_{L^2_{per}([0,L])} = \int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx, \quad \forall\, f, g \in L^2_{per}([0, L]),$$

e norma $\| \cdot \|_{L^2_{per}([0,L])}$. Por simplicidade, quando for claro, utilizaremos a notação $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\| \cdot \|$, para representar respectivamente, o produto interno e a norma em $L^2_{per}([0, L])$.

A norma

$$\| f \|_{H^n_{per}([0,L])} = \left(\sum_{j=0}^{n} \| f^{(j)} \|_{L^2_{per}([0,L])} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^n_{per}([0, L])$$

é equivalente à norma definida em $H^s_{per}([0, L])$, no caso em que $s = n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Dadas duas sequências $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de números complexos e s um número real. Definimos o espaço de $\ell^2_{s,L} := \ell^2_{s,L}(\mathbb{Z})$ da seguinte forma

$$\ell^2_{s,L}(\mathbb{Z}) = \{\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}; \| \alpha \|_{\ell^2_{s,L}} := L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2 < \infty\},$$

desta forma, $\ell^2_{s,L}$ é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno

$$\langle \alpha, \beta\rangle_{\ell^2_{s,L}} = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \alpha_k \overline{\beta_k}.$$

Assim, $f \in H^s_{per}([0, L])$ se, e somente se, $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{s,L}$, e ainda $\| f \|_{H^s_{per}} = \| \widehat{f} \|_{\ell^2_{s,L}}$.

Definição 1.1 *Sejam $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ duas sequências de números complexos e s um número real. A convolução de α e β é a sequência $\alpha * \beta$, dada por*

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{k-j}\beta_j.$$

Uma vez que as principais notações por nós utilizadas foram estabelecidas, nas próximas seções seguiremos da seguinte maneira: apresentaremos, na Seção 1.2, informações gerais sobre as equações dispersivas, em particular sobre algumas generalizações da equação de Kawahara, que é foco dos nossos estudos, ainda destacamos o caso regularizado. Na Seção 1.3, enunciaremos condições suficientes para obtenção de estabilidade orbital, resultados estes estabelecidos em [18] como uma extensão para o caso de equações regularizadas, das condições impostas por [5]. Finalizaremos este capítulo, com resultados estabelecidos em [9], que serão úteis para determinarmos propriedades espectrais, as quais são essenciais para obtenção dos resultados sobre estabilidade.

1.2 Equações Diferenciais Dispersivas Regularizadas

O objetivo principal deste trabalho é obter estabilidade orbital de soluções periódicas tipo ondas viajantes das equações:

(1) Equação de Kawahara modificada regularizada,

$$u_t + u_x + u^2 u_x - (u_{xx} - u_{xxxx})_t = 0;$$

(2) Equação de Kawahara regularizada,

$$u_t + u_x + uu_x - (u_{xx} - u_{xxxx})_t = 0;$$

(3) Equação Kawahara modificada, dada por

$$u_t + u^2 u_x + (\gamma u_{xx} - u_{xxxx})_x = 0, \quad \gamma \geq 0.$$

As equações acima são equações diferenciais parciais dispersivas não lineares, em particular as equações (1) e (2), são equações regularizadas.

Aqui, apresentaremos condições suficientes para determinarmos a estabilidade orbital de soluções periódicas tipo ondas viajantes de equações dispersivas regularizadas, baseados na abordagem feita em [18], da forma

$$u_t + u_x + (f(u))_x + (\mathcal{M}u)_t = 0, \tag{1.1}$$

onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica na variável espacial, com período $L > 0$, o qual pode ser fixado ou não. O operador $\mathcal{M}$ é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no sentido periódico e é definido como um Multiplicador de Fourier, por

$$\widehat{\mathcal{M}g}(k) = \theta(k)\widehat{g}(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

onde θ representa uma função par e contínua em $\mathbb{R}$, satisfazendo a condição

$$v_1|k|^m \leq \theta(k) \leq v_2|k|^m, \qquad m > \frac{1}{3}, \tag{1.3}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e para alguns números reais $v_i > 0$, onde $i = 1, 2$.

Em particular, nas três equações dadas temos $\mathcal{M} = \partial_x^4 - \partial_x^2$, com isso temos $m = 4$. Nosso interesse aqui é em equações com não linearidade da forma $f(u) = \frac{u^{p+1}}{p+1}, \ \ p \in \mathbb{N}$.

Observamos que equações da forma (1.1) abrangem uma grande classe de equações diferenciais, dentre as quais citamos:

– Equação generalizada Benjamin-Ono regularizada (rGBO), dada por

$$u_t + u_x + u^p u_x + (\mathcal{H}u)_t = 0,$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro e $\mathcal{H}$ é a Transformada de Hilbert;

– Equação generalizada Benjamin-Bona-Mahony, dada por

$$u_t + u_x + u^p u_x - u_{xxt} = 0,$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro. No caso, $p = 1$ torna-se a equação Benjamin-Bona-Mahony (BBM), dada por

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0.$$

Salientamos que, a estabilidade de soluções e a boa colocação das equações rGBO e BBM, foram estabelecidas em [10], os autores utilizaram teoria clássica de estabilidade como [1], [12] e [19] .

A partir destas teorias, inclusive para o caso periódico, diversos resultados vem sendo estabelecidos nas últimas décadas. Em particular, Stuart em [41], apresenta resultados para ondas estacionárias de equações cujas soluções possuem propriedades referentes a duas simetrias: por translações e por rotações. Tais resultados foram aplicados por exemplo em [17] e [37]. Baseado em [41], os autores em [5] adaptaram a teoria de estabilidade para soluções ondas viajantes que são invariantes por translações. As vantagens de tais resultados são que a condição de positividade da matriz Hessiana associada a um funcional de Lyapunov definido convenientemente, considerando quantidades conservadas relacionadas às equações em questão, é substituída por uma condição que não exige a existência de uma superfície de ondas, o que nem sempre é possível de ser feito como no caso da equação de Kawahara. Para o caso regularizado, os resultados de [5] foram estendidos em [18], considerando equações do tipo (1.1) com não linearidade $f(u) = \frac{u^2}{2}$. Isto é,

$$u_t + u_x + uu_x + (\mathcal{M}u)_t = 0.$$

Porém, no Capítulo 3 apresentamos um critério simplificado para a obtenção de estabilidade destas equações, apresentando um grande avanço, pois, nosso resultado impõe menos condições e ainda não exige a existência nem mesmo de uma curva de soluções ondas viajantes.

A abordagem sobre estabilidade de [18] servirá como referência para provarmos os resultados desejados em relação às equações (1) e (2), e serão aqui apresentados. Para a equação (3), ou seja, para a equação de Kawahara Modificada os resultados aplicados são os mesmos estabelecidos em [5], e serão mencionados no Capítulo 4.

Observação 1.2 *Neste capítulo consideraremos, com o objetivo de definirmos condições suficientes para a estabilidade orbital de soluções ondas viajantes de equações do tipo (1.1), que o problema de Cauchy,*

$$\begin{cases} u_t + u_x + (f(u))_x + (\mathcal{M}u)_t = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.4}$$

onde, $x \in [0, L]$, *é bem-posto em* $X = H_{per}^{\frac{m}{2}}([0, L])$, *onde* m *satisfaz (1.3).*

Antes de apresentarmos as condições suficientes para a obtenção da estabilidade, precisamos de algumas informações importantes relacionadas às equações dispersivas regularizadas.

A equação (1.1) admite pelo menos três quantidades conservadas, que são dadas por

$$P(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u\mathcal{M}u - W(u))dx, \tag{1.5}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u\mathcal{M}u + u^2)dx \tag{1.6}$$

e

$$M(u) = \int_0^L u dx, \tag{1.7}$$

onde W é a primitiva de f, ou seja, $W' = f$.

Suponhamos agora que a equação (1.1) admita soluções ondas viajantes da forma $u(x,t) = \phi(x - ct)$, onde $c > 0$ é uma constante e representa a velocidade de propagação da onda, e ainda $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica, de período $L > 0$. Assim, ao substituirmos esta forma na Equação (1.1), obtemos a equação

$$-c(\mathcal{M}\phi)' - (c-1)\phi' + [f(\phi)]' = 0,$$

e ao integrarmos encontramos

$$c\mathcal{M}\phi + (c-1)\phi - f(\phi) + A = 0, \tag{1.8}$$

aqui A é uma constante de integração.

A partir das quantidades conservadas definidas em (1.5), (1.6) e (1.7), definimos o funcional de Lyapunov

$$G(u) = P(u) + (c-1)F(u) + AM(u). \tag{1.9}$$

Ou ainda,

$$G(u) = cF(u) - K(u) + AM(u),$$

em que K é uma quantidade conservada dada por $K(u) = F(u) - P(u)$.

Consideremos ainda, a quantidade

$$Q(u) = aF(u) + bM(u), \tag{1.10}$$

onde a e b são números reais que podem ser determinados posteriormente.

Notemos que,

$$G'(\phi_{(c,A)}) = c\,\mathcal{M}\phi_{(c,A)} + (c-1)\phi_{(c,A)} - f(\phi_{(c,A)}) + A, \tag{1.11}$$

sendo que $\phi_{(c,A)}$ é uma solução do tipo onda viajante da equação (1.8), logo $G'(\phi_{(c,A)}) = 0$. Com isso, podemos definir o operador linearizado $\mathcal{L} := G''(\phi_{(c,A)})$ ao redor da onda $\phi_{(c,A)}$, onde G'' denota a segunda derivada de Fréchet de G.

Assim,

$$\mathcal{L} := G''(\phi) = c\,\mathcal{M} + (c-1) - f'(\phi). \tag{1.12}$$

Daqui para frente utilizaremos a notação ϕ para representar a onda $\phi_{(c,A)}$, salvo em alguma situação que seja necessário mencionar os parâmetros c e A.

O operador $\mathcal{L}$ desempenha um papel crucial para obtenção da estabilidade orbital da onda ϕ. Como pode ser visto com mais detalhes na Seção 4.1, de [15], $\mathcal{L}$ é o único operador autoadjunto tal que

$$[G''(\phi)u, v] = \langle \mathcal{L}u, v\rangle, \quad u \in C^{\infty}_{per}([0, L]), \ \ v \in X,$$

onde $[\cdot, \cdot]$ representa a dualidade em X'. Ainda, considerando a injeção natural de X em X' em relação ao produto interno em $L^2_{per}([0, L])$, isto é,

$$[\mathcal{I}u, v] = \langle u, v\rangle, \quad\quad u, \ v \in X,$$

temos que

$$G''(\phi)v = \mathcal{L}v, \quad \forall v \in C^{\infty}_{per}([0, L]).$$

Dessa forma, com o intuito de garantir a existência de minimizadores de G, baseados no Cálculo Variacional, torna-se conveniente impor restrições sobre o operador $\mathcal{L}$.

1.3 Condições para obtenção de estabilidade orbital

Para obtenção resultados sobre estabilidade consideremos a hipótese a seguir.

Hipótese 1.3 *Considere $m > \frac{1}{3}$. Seja $(c_0, A_0) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ fixo. Suponhamos que $\phi \in \mathbb{C}^{\infty}_{per}([0, L])$ uma solução onda viajante, $L-$periódica de (1.8), com $L > 0$. O operador auto-adjunto $\mathcal{L}$ possui apenas um autovalor negativo, o qual é simples. Além disso, zero é um autovalor simples associado à autofunção $\phi' = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$.*

Faremos referência, quando necessário, a esta hipótese como (H). Baseados em [5], [22] e [41], os autores em [18], provaram que se a hipótese (H) for satisfeita e se existir uma função Φ, satisfazendo condições de ortogonalidade em um conjunto conveniente, então $\mathcal{L}$ é estritamente positivo. Este resultado associado a um funcional de Lyapunov convenientemente definido nos garante a estabilidade orbital de ϕ sobre o fluxo periódico de (1.1).

Antes de apresentarmos tal resultado, precisamos de algumas definições, entre elas a definição formal de estabilidade orbital.

Definição 1.4 *Sejam $u, v \in X := H_{per}^{\frac{m}{2}}([0,L])$, definimos ρ como a semi-distância entre u e v, por*

$$\rho(u,v) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \| u - v(\cdot + y) \|_X .$$

Podemos observar que a semi-distância ρ é definida entre u e a órbita de v. Agora, considerando a onda periódica $\phi := \phi_{(c_0, A_0)} \in X$ dada em (H), definimos formalmente a estabilidade orbital da seguinte forma.

Definição 1.5 *Dizemos que uma solução ϕ L-periódica é orbitalmente estável em X, pelo fluxo periódico de (1.1), se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para qualquer $u_0 \in X$ satisfazendo*

$$\| u_0 - \phi \|_X < \delta,$$

a solução $u(t)$ de (1.1) existe globalmente e satisfaz

$$\rho(u(t), \phi) < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

Para um dado $\varepsilon > 0$, definimos a ε-vizinhança da órbita $O_\phi = \{\phi(\cdot + y); y \in \mathbb{R}\}$, como

$$U_\varepsilon := \{u \in X;\ \rho(u, \phi) < \varepsilon\}, \tag{1.13}$$

onde ρ é a semi-distância da Definição 1.4. Considere também o conjunto

$$\Upsilon_0 = \{u \in X; \langle Q'(\phi), u \rangle = 0\}, \tag{1.14}$$

aqui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno em $L^2_{per}([0,L])$ e Q como definido em 1.10. Observe que Υ_0 é exatamente o espaço tangente para $\{u \in X; Q(u) = Q(\phi)\}$ em ϕ.

Proposição 1.6 *Suponhamos que (H) seja válida e que existe $\Phi \in X := H_{per}^{\frac{m}{2}}([0,L])$ tal que $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi \rangle = 0$, para todo $\varphi \in \Upsilon_0$ e*

$$\mathcal{B} := \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle < 0.$$

Então, existe uma constante $\tau > 0$, tal que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq \tau \| v \|_X^2,$$

para todo $v \in \Upsilon_0$ tal que $\langle v, \phi' \rangle = 0$.

Demonstração: Ver Proposição 4.1 em [5]. □

O resultado acima fornece o resultado de positividade sobre o operador $\mathcal{L}$ sem que seja necessário conhecer a matriz Hessiana associada ao funcional G. Assim, por argumentos de densidade temos que $[G''(\phi)v, v] \geq \tau \parallel v \parallel_X^2$, para todo $v \in \Upsilon_0 \cap \phi'^{\perp}$. Em [15], o Lema 4.7 mostra, usando o isomorfismo de Riez sobre o produto interno, que se forem mantidas as condições de ortogonalidade da Proposição 1.6, o resultado de positividade obtido é válido em X.

No Capítulo 3, apresentamos uma função Φ satisfazendo as hipóteses deste teorema, para equações tipo BBM, e aplicamos tal critério para provar a estabilidade da equação de Kawahara regularizada, o que mostra a importância do critério que foi estabelecido, visto que esta equação não possui superfície de ondas.

Considerando a validade da Proposição 1.6 prova-se a existência de constantes positivas, cruciais para a construção de um conveniente funcional de Lyapunov.

Lema 1.7 *Sob as hipóteses da Proposição 1.6, existem constantes positivas $N > 0$ e $\tau > 0$ tais que*

$$\langle \mathcal{L}v, v\rangle_X + 2N\langle Q'v, v\rangle_X^2 \geq \tau \parallel v \parallel_X^2,$$

para todo $v \in \{\phi'\}^{\perp} = \{u \in X; \langle u, \phi'\rangle_X = 0\}$.

Demonstração: *Ver Lema 2.5, em [18].* □

Definamos o funcional $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo

$$V(u) = G(u) - G(\phi) - N(Q(u) - Q(\phi))^2, \tag{1.15}$$

onde G e Q são dadas por (1.9) e (1.10), e a constante N satisfaz as condições dadas pelo Lema 1.7.

Considerando que a equação aqui tratada possui a simetria por translação definimos, como em [4], funcional de Lyapunov neste contexto.

Definição 1.8 *Uma função $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional de Lyapunov para a órbita $\Omega_\phi \subset X$, se satisfaz as propriedades:*

(i) Existe $\varepsilon > 0$ *tal que* $V : U_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ *é de classe* C^2 *e, para todo* $v \in \Omega_\phi$ *vale* $V(v) = 0$ *e* $V'(v) = 0$.

(ii) Existe $\varsigma > 0$*, tal que para todo* $v \in U_\varepsilon$*, vale*

$$V(v) \geq \varsigma(\rho(v, \Omega_\phi))^2.$$

(iii) Para todo $v \in U_\varepsilon$*, temos*

$$\langle V'(v), \partial_x v\rangle = 0.$$

(iv) Se $u(t)$ *for uma solução global para o problema de Cauchy associado à equação (1.1) com dado inicial* u_0*, então* $V(u(t)) = V(u_0)$*, para todo* $t \geq 0$.

Lema 1.9 *Considerando as hipóteses da Proposição 1.6, existem* $\alpha > 0$ *e* $D > 0$ *tais que*

$$V(u) \geq D\rho(u, \phi)^2,$$

para todo $u \in U_\alpha$.

Demonstração: Ver demonstração Lema 4.3, Capítulo 4. □

Sob as hipóteses da Proposição 1.6, considerando que G e Q são invariantes por translação por serem definidos como combinação das quantidades conservadas P, F e M, definidas em (1.5)-(1.7), e ainda que sendo ϕ solução de (1.1) temos $\langle Q'(\phi), \phi'\rangle = 0$, pode-se provar a seguinte proposição.

Proposição 1.10 *Suponhamos que o problema de Cauchy (1.4) seja globalmente bem colocado, em um Espaço de Sobolev conveniente* $H^s_{per}([0, L])$, $\;s \geq \frac{m}{2}$*. Então, existe* $N > 0$*, tal que o funcional definido em (1.15) é um funcional de Lyapunov para a órbita* $\Omega_\phi = \{\phi(\cdot + y); y \in \mathbb{R}\}$.
Demonstração*: Ver Proposição 3.5, em [5].* □

Com isso, obtemos o resultado principal aqui, ou seja, sob as condições da Proposição 1.6, é possível definir o Funcional de Lyapunov (1.15) e garantirmos a estabilidade orbital.

Teorema 1.11 *Suponhamos que as hipóteses da Proposição 1.6 sejam válidas, ou seja, suponha que a hipótese (H) seja válida. Além disso para $\mathcal{L}$, definido em (3.9). Suponha que exista $\Phi \in X$ tal que $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi \rangle = 0$, para todo $\varphi \in \Upsilon_0$, e $I = \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle < 0$, então a solução onda viajante periódica ϕ de (1.1) é orbitalmente estável no sentido da Definição 1.5 com órbita Ω_ϕ.*

Demonstração*: Ver Proposição 4.8 em [4], por exemplo.* □

Observação 1.12 *O resultado apresentado no Capítulo 3 deste trabalho, em particular destacamos o Teorema 3.11, é um corolário da Proposição 1.11, para o caso particular da equação (1.1), quando $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$, onde para obtermos o resultado de estabilidade não é necessário que tenhamos uma família parametrizada de ondas periódicas que dependam dos parâmetros c e A. Um resultado similar para o caso não-regularizado, foi apresentado em [5], no Corolário 4.11. Resultados como esse não são comuns em geral, para estabelecer resultados de estabilidade orbital de ondas periódicas, o conhecimento prévio de tal família faz-se necessário.*

Apresentamos ainda um importante resultado sobre a regularidade das soluções ondas viajantes de (1.1), essencial para a existência da função Φ satisfazendo o resultado anterior.

Teorema 1.13 *Seja $m > \frac{1}{3}$. Se $\phi \in X$ é uma solução da equação (1.8), no sentido de distribuições, então $\phi \in H^n_{per}([0, L])$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração*: Ver Proposição 3.1, [18].* □

Para obtenção da estabilidade das ondas ϕ, exigidas na hipótese (H), é necessário determinar informações sobre o espectro não positivo do operador linearizado $\mathcal{L}$, conveniente em cada caso, definido ao redor da onda. Para isso, usaremos os resultados estabelecidos em [9], os quais serão apresentados brevemente na próxima seção deste capítulo.

1.4 Propriedades Espectrais

Considerando que a equação (1.8) possua uma solução ϕ, o operador linear $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \longrightarrow L^2_{per}([0, L])$, definido em um subespaço denso de $L^2_{per}([0, L])$ dado por

$$\mathcal{L} := c\,\mathcal{M} + (c-1) - \phi^p. \tag{1.16}$$

Aqui enunciaremos alguns resultados de [9], os quais são propriedades de positividade impostas aos coeficientes de Fourier de ϕ, com o objetivo de determinar as propriedades espectrais de $\mathcal{L}$ exigidas em (H). Denotaremos por $\sigma_{ess}(\mathcal{L})$ o espectro essencial do operador $\mathcal{L}$, o qual é vazio visto que $\mathcal{L}$ é autoadjunto.

Proposição 1.14 *O operador $\mathcal{L}$ definido em (1.16) é fechado, não-limitado e autoadjunto sobre $L^2_{per}([0, L])$. Seu espectro consiste em um conjunto enumerável infinito de autovalores (que se acumulam no infinito), isto é, tem-se $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \emptyset$. Além disso, 0 é um autovalor de $\mathcal{L}$ associado à autofunção ϕ'.*

Demonstração: *Ver Proposição 3.1.1 em [34], página 35.* □

Definição 1.15 *Seja uma sequência de números reais $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, diz-se que ela está na classe Pólya Frequency (2), a partir daqui PF(2), estrita e discreta, se:*

i) $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$;

ii) $a_{n_1-m_1}a_{n_2-m_2} - a_{n_1-m_2}a_{n_2-m_1} \geq 0$, para $n_1 < n_2$ e $m_1 < m_2$;

iii) a desigualdade dada em (ii), ocorrer estritamente sempre que os intervalos (n_1, n_2) e (m_1, m_2) se interceptarem.

A definição acima é uma discretização do caso contínuo com funções reais $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde g está na classe PF(2), se:

$i)$ $g(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

$ii)$ $g(x_1 - y_1)g(x_2 - y_2) - g(x_1 - y_2)g(x_2 - y_1) \geq 0$, para $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$;

$iii)$ a desigualdade dada em (ii), ocorre estritamente sempre que os intervalos (x_1, x_2) e (y_1, y_2) se interceptarem.

O Lema a seguir fornece uma condição suficiente para que um função g esteja na classe PF(2).

Lema 1.16 *Suponha que g seja uma função positiva e duas vezes diferenciável sobre $\mathbb{R}$ e ainda que satisfaça*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g(x)) < 0, \quad para\ x \neq 0.$$

Então, $g \in PF(2)$.

Demonstração*: Ver demonstração em [2], Lema 11.* □

Teorema 1.17 *A convolução de duas sequências pares em PF(2) estrito e discreto está em PF(2) estrito e discreto.*

Demonstração*: Ver demonstração em [28].* □

Teorema 1.18 *Seja ϕ uma solução onda viajante periódica positiva e par para (1.8). Suponhamos $\widehat{\phi} > 0$ e $\widehat{\phi^p} \in$ PF(2) estrito e discreto, então o operador $\mathcal{L}$, definido em (1.16) possui um único autovalor negativo e este autovalor é simples. Além disso, o autovalor 0 também é simples.*

Demonstração*: Ver demonstração do Teorema 3.33, em [9].* □

CAPÍTULO 2

BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS PARA A EQUAÇÃO DE KAWAHARA MODIFICADA REGULARIZADA

Neste capítulo, mostraremos que soluções do tipo ondas viajantes periódicas da equação de Kawahara modificada regularizada são orbitalmente estáveis, no sentido da Definição 1.5. Nos basearemos em argumentos de [5], [17], [18] e [41], os quais foram desenvolvidos a partir de adaptações da teoria estabelecida em [19], e foram mencionados no Capítulo 1.

Antes de provarmos a estabilidade, provaremos que o problema de Cauchy associado à equação de Kawahara generalizada regularizada é bem posto em X. É válido observar que, considerando que outro problema a ser abordado no Capítulo 3 tem sua boa colocação demonstrada de maneira análoga ao da equação de Kawahara modificada regularizada, a demonstração será feita para um resultado mais geral.

2.1 Equação de Kawahara Generalizada Regularizada

A equação de Kawahara generalizada regularizada é dada por

$$u_t + u_x + u^p u_x + (u_{xxxx} - u_{xx})_t = 0, \tag{2.1}$$

ou ainda,

$$u_t + u_x + \left(\frac{u^{p+1}}{p+1}\right)_x + (u_{xxxx} - u_{xx})_t = 0,$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro e $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave periódica, de período $L > 0$, na variável espacial x. Em particular, para a equação de Kawahara generalizada o operador diferencial $\mathcal{M}$ é dado por

$$\mathcal{M} = \partial_x^4 - \partial_x^2,$$

satisfazendo assim a condição (1.2). Com isso temos $\theta(k) = k^4$, e o espaço energia da equação (2.1) é $X = H^2_{per}([0, L])$.

A equação (2.1) admite solução periódica do tipo ondas viajantes. Ou seja, soluções da forma $u(x,t) = \phi(x - ct)$, onde $c > 0$ é a velocidade de propagação da onda. Substituindo-se esta forma em (2.1), e integrando de 0 a L, encontramos a equação diferencial ordinária associada à (2.1), dada por

$$(c-1)\phi - \frac{1}{p+1}\phi^{p+1} - c\left(\phi'' - \phi''''\right) + A = 0, \tag{2.2}$$

onde A é uma constante de integração.

Formalmente, a equação (2.1) admite três quantidades conservadas, dadas por

$$P(u) = \int_0^L \left(\frac{u_{xx}^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} - \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right) dx, \tag{2.3}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)dx, \tag{2.4}$$

e

$$M(u) = \int_0^L u dx. \tag{2.5}$$

Agora, fazendo $K(u) = F(u) - P(u)$, obtemos

$$K(u) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(u^2 + \frac{2u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right) dx. \tag{2.6}$$

Observação 2.1 *É importante salientar que* $F(u) = \| u \|^2_{H^2_{per}([0,L])}$ *. Provaremos que as quantidades (2.3)-(2.6) são conservadas em relação ao tempo, em particular o fato da norma de* u *em* $H^2_{per}([0, L])$ *ser conservada é essencial para provar a boa colocação global do problema de Cauchy associado à equação (2.1).*

Ainda, a partir de (2.3), (2.4) e (2.5) definimos o funcional de Lyapunov

$$G(u) = P(u) + (c-1)F(u) + AM(u). \tag{2.7}$$

Notemos, que $G'(\phi) = 0$, considerando que $\phi = \phi_{(c,A)}$ é solução da equação (2.2). e definimos o operador linearizado

$$\mathcal{L} := G''(\phi_{(c,A)}) = c\mathcal{M} + (c-1) - \phi^p_{(c,A)}. \tag{2.8}$$

Para determinarmos a estabilidade orbital de soluções periódicas tipo onda viajante de (2.1), para algum p, determinaremos as propriedades espectrais do operador $\mathcal{L}$, seguindo os argumentos de [9]. Com isso, o funcional G desempenha papel crucial para obtenção dos resultados desejados, pois o método para provar a estabilidade orbital de ϕ, baseia-se em provarmos que ϕ é um mínimo de G. No entanto, para isso ainda definiremos Q, a qual é uma quantidade conservada auxiliar conveniente, de forma a nos auxiliar na obtenção da estabilidade desejada.

No entanto, antes da prova da estabilidade é necessário provar que o problema de Cauchy associado à equação (2.1) é globalmente bem colocado em $H^2_{per}([0,L])$. Para isto seguiremos os passos apresentados por [6], [11] e [15].

2.2 Boa-colocação Global da Equação de Kawahara Generalizada Regularizada

Consideremos o problema de Cauchy periódico associado à equação (2.1)

$$\begin{cases} u_t + u_x + u^p u_x + (u_{xxxx} - u_{xx})_t = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro.

Mostraremos que (2.9) está bem colocado no espaço energia $X := H^2_{per}([0, L_0])$, onde $L_0 > 0$ é o período da função u na variável espacial. Isto é, provaremos a existência e unicidade de solução em X.

Observe inicialmente que a equação (2.1), dada por

$$u_t + u_x + u^p u_x + (u_{xxxx} - u_{xx})_t = 0,$$

pode ser escrita da forma

$$(1+\partial_x^4-\partial_x^2)u_t = -\partial_x\left(u+\frac{u^{p+1}}{p+1}\right).$$

Podemos então aplicar a transformada de Fourier, em relação à variável x, em ambos os lados da última igualdade e assim

$$(1+k^4+k^2)\widehat{u_t}(k) = -ik(u+\frac{u^{p+1}}{p+1})\widehat{\ }(k), \quad k\in\mathbb{Z}, \tag{2.10}$$

ou ainda,

$$\widehat{u_t}(k) = \frac{-ik}{1+k^2+k^4}(u+\frac{u^{p+1}}{p+1})\widehat{\ }(k), \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{2.11}$$

Fazendo,

$$K = \frac{-ik}{1+k^2+k^4}, \qquad k\in\mathbb{Z} \tag{2.12}$$

e assim, considerando que $\widehat{(K*u)}(k) = K\widehat{u}(k)$, de (2.11), obtemos

$$u_t = K*(u+\frac{u^{p+1}}{p+1}). \tag{2.13}$$

Integrando esta última igualdade de 0 a t, resulta que

$$u(x,t)-u(x,0) = \int_0^t (K*(u+\frac{u^{p+1}}{p+1}))(x,\tau)d\tau.$$

Mas, $u(x,0)=u_0(x)$ daí

$$u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t (K*(u+\frac{u^{p+1}}{p+1}))(x,\tau)d\tau, \tag{2.14}$$

que é a forma de Duhamel associada ao problema de Cauchy 2.9.

Teorema 2.2 *Para cada $u_0\in X$ existe $T>0$ e uma única solução de (2.14), tal que $u\in C([0,T],X)$.*

Demonstração*: Consideremos um tempo $T>0$ a ser convenientemente definido posteriormente. Definamos o seguinte espaço*

$$S := C([0,T],X),$$

munido da norma

$$\| u \|_S = \sup_{t\in[0,T]} \| u(t) \|_X \ .$$

Seja

$$\begin{aligned} A : S &\longrightarrow S \\ u \longmapsto A(u) &= u_0 + \int_0^t \left(K * (u + \frac{u^{p+1}}{p+1}) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Utilizaremos agora o Teorema do Ponto Fixo de Banach, com o objetivo de provarmos a existência local de solução para (2.9). Para tanto, vejamos que existe $r_0 > 0$ *e* $T > 0$ *tais que* $A(u) \in B_{r_0}$, *onde*

$$B_{r_0} = \{u \in S; \| u \|_S \leq r_0\}.$$

Além disso, mostraremos também que $A : B_{r_0} \longrightarrow B_{r_0}$ *é uma contração.*

De fato, sabendo-se que $\dfrac{(1+k^2)^2k^2}{(1+k^2+k^4)^2} \leq 1$, *para todo* $k \in \mathbb{Z}$, *ao tomarmos um* $w \in B_{r_0}$, *temos*

$$\begin{aligned} \| K * w \|_X^2 &= L_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^2 |\widehat{K}(k)|^2 |\widehat{w}(k)|^2 \\ &= L_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^2 \frac{|-ik|^2}{(1+k^2+k^4)^2} |\widehat{w}(k)|^2 \\ &\leq L_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{w}(k)|^2 = \| w \|^2 \ . \end{aligned}$$

Isto é,

$$\| K * w \|_X \leq \| w \|, \qquad \forall\, w \in B_{r_0}. \tag{2.15}$$

Considerando que para $s > \frac{1}{2}$, H^2_{per} *é uma álgebra de Banach, e então existe* $C_1 > 0$ *satisfazendo*

$$\| \frac{u^{p+1}}{p+1} \|_X \leq \ C_1 \| u \|_X^{p+1}, \quad \forall \ p \in \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Com estas informações, tomando-se $u_0 \in X$ *obtemos por (2.15) e (2.16), em particular* *para* $w = u + \dfrac{u^{p+1}}{p+1}$ *que*

$$\begin{aligned}
\| A(u(t)) \|_X &\leq \| u_0 \|_X + \int_0^t \| K * (u + \frac{u^{p+1}}{p+1}) \|_X \, d\tau \\
&\leq \| u_0 \|_X + \int_0^t (\| u \|_X + \| \frac{u^{p+1}}{p+1} \|_X) d\tau \\
&\leq \| u_0 \|_X + \int_0^t (\| u \|_X + C_1 \| u \|_X^{p+1}) d\tau \\
&\leq \| u_0 \|_S + T(\| u \|_S + C_1 \| u \|_S^{p+1}), \; \forall \, t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\| A(u) \|_S \leq \| u_0 \|_S + T(\| u \|_S + C_1 \| u \|_S^{p+1}). \tag{2.17}$$

O que mostra que $A : S \longrightarrow S$ *está bem definido.*

Resta mostrarmos que A *é uma contração. Mas, de (2.15) e do Teorema do Valor Médio, que garante a existência de* $\theta \in (0,1)$, *segue que*

$$\begin{aligned}
\| K * (u^{p+1} - v^{p+1}) \|_X^2 &\leq \| u^{p+1} - v^{p+1} \|_X^2 \\
&\leq (p+1)^2 \, \| |\theta v + (1-\theta) u|^p (u - v) \|_X^2 \\
&\leq C_2 (\| v \|_X + \| u \|_X)^{2p} \| u - v \|_X^2,
\end{aligned}$$

onde $C_2 > 0$. *De onde concluímos que*

$$\| K * (u^{p+1} - v^{p+1}) \|_X \leq \sqrt{C_2} (\| v \|_X + \| u \|_X)^p \| u - v \|_X \, . \tag{2.18}$$

Assim, para todo $t \in [0,T]$ *vale*

$$\begin{aligned}
\| A(u(t)) - A(v(t)) \|_X &\leq \int_0^t \| u - v \|_X \, d\tau + \sqrt{C_2} \int_0^t (\| u \|_X + \| v \|_X)^p \| u - v \|_X \, d\tau \\
&\leq \int_0^t \| u - v \|_S \, d\tau + \sqrt{C_2} \int_0^t (\| u \|_S + \| v \|_S)^p \| u - v \|_X \, d\tau \\
&\leq T \| u - v \|_S \, [1 + \sqrt{C_2} (\| u \|_S + \| v \|_S)^p].
\end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\| A(u) - A(v) \|_S \leq T \| u - v \|_S \, [1 + \sqrt{C_2} (\| u \|_S + \| v \|_S)^p]. \tag{2.19}$$

Com isso, ao tomarmos quaisquer $u,\ v \in B_{r_0}$*, segue desta última desigualdade que*

$$\| A(u) - A(v) \|_S \ \leq\ T \| u - v \|_S \, [1 + (2r_0)^p \sqrt{C_2}]. \tag{2.20}$$

De (2.17) temos,

$$\| A(u) \|_S \ \leq\ \| u_0 \|_X + T\, (r_0 + C_1 r_0^{p+1}). \tag{2.21}$$

Agora, convenientemente podemos escolher $r_0 = 2 \| u_0 \|_X$ *e* $T = \frac{1}{2}(1 + C_3 r_0^p)^{-1}$*, tomando* $C_3 = \max\{C_1, 2^p\sqrt{C_2}\}$*. Com isso da desigualdade (2.21) segue que*

$$\| A(u) \|_S \quad \leq \quad \frac{r_0}{2} + \frac{1}{2}(1 + C_3 r_0{}^p)^{-1}(r_0 + C_3 r_0^{p+1}) = \ r_0. \tag{2.22}$$

Dessa forma, ao substituirmos os valores escolhidos para r_0 *e* T *em (2.20) resulta*

$$\begin{aligned} \| A(u) - A(v) \|_S \quad &\leq \quad \frac{1}{2}(1 + C_3 r_0{}^p)^{-1} \| u - v \|_S \, (1 + C_3 r_0{}^p) \\ &= \quad \frac{1}{2} \| u - v \|_S, \end{aligned}$$

donde concluímos que $A : B_{r_0} \longrightarrow B_{r_0}$ *é uma contração. E assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única solução* $u \in B_{r_0}$*, tal que* $A(u) \ = \ u$*.*

Com objetivo de provar a unicidade de solução, suponhamos que existam $u,\ v\ \in X$ *satisfazendo (2.14), com dados iniciais* u_0 *e* v_0*, respectivamente. De (2.15) e (2.18), temos*

$$\begin{aligned} \| u(t) - v(t) \|_X \quad &\leq \quad \| u_0 - v_0 \|_X + \int_0^t \| u(\tau) - v(\tau) \|_X \, (1 + \sqrt{C_2}(\| u \|_S + \| v \|_S)^p) d\tau \\ &= \quad \| u_0 - v_0 \|_X + (1 + \sqrt{C_2}(\| u \|_S + \| v \|_S)^p) \int_0^t \| u(\tau) - v(\tau) \|_X \, d\tau. \end{aligned}$$

E então, pela desigualdade de Gronwall

$$\| u(t) - v(t) \|_{H^2_{per}} \leq \| u_0 - v_0 \|_{H^2_{per}} \exp\{[1 + \sqrt{C_2}(\| u \|_S + \| v \|_S)^p] t\}, \tag{2.23}$$

para todo $t \in [0, T]$*. Como por hipótese* $u_0 = v_0$*, concluímos que* $u = v$ *em* S *e está provada a unicidade.* □

Uma vez provado o Teorema 2.2, temos a boa colocação local do problema de Cauchy 2.9. No entanto, desejamos garantir que este problema esteja bem posto globalmente. Para isto, precisaremos garantir que as energias relacionadas à equação de Kawahara generalizada regularizada dadas por (2.3), (2.4) e (2.5) sejam conservadas.

Lema 2.3 *Os funcionais P, F, K e M são conservados.*

Demonstração: *Com efeito, temos por (2.11) que*

$$u_t = -(1 + \partial_x^4 - \partial_x^2)^{-1}\partial_x(u + \frac{u^{p+1}}{p+1}). \tag{2.24}$$

Considerando

$$\Lambda = (1 + \partial_x^4 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.25}$$

temos que $\Lambda^{-2} \in B(L^2_{per}([0,L_0]), H^4_{per}([0,L_0]))$ e assim, $u_t \in X = H^2_{per}([0,L_0])$, visto que igualdade (2.24) torna-se

$$u_t = -\Lambda^{-2}\partial_x(u + \frac{u^{p+1}}{p+1}),$$

e assim $F(u_t) < +\infty$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}F(u) &= \frac{1}{2}\int_0^{L_0} \frac{\partial}{\partial t}\,(u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)\,dx \\ &= -\int_0^{L_0} \Lambda^2\, u\, \Lambda^{-2}\partial_x\,(u + \frac{u^{p+1}}{p+1})\,dx \\ &= -\int_0^{L_0} u\,\partial_x\,(u + \frac{u^{p+1}}{p+1})\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{L_0} \partial_x\,(u^2 + \frac{2}{p+2}u^{p+2})\,dx = 0. \end{aligned}$$

De onde concluímos que a quantidade F é conservada em relação ao tempo. Em particular, isto implica que a norma de u em X é conservada, visto que $\| u \|^2_{H^2_{per}([0,L_0])} = \frac{1}{2}\int_0^{L_0} (u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)\,dx = F(u)$.

A prova de que as quantidades K, P e M são conservadas seguem como no Lema 3.2, em [6]. □

Com estes resultados, podemos provar que o problema de Cauchy 2.9 é globalmente bem colocado em $X = H^2_{per}([0,L_0])$.

Teorema 2.4 *Para cada $u_0 \in X$, o problema de Cauchy 2.9 é globalmente bem posto em X com $u \in C(\mathbb{R}, X)$.*

Demonstração: *Inicialmente mostraremos que a solução de (2.14), com dado inicial u_0, pode ser* *estendida para todo* $\mathbb{R}$. *Para isso, seja* $v_0 = u(T)$ *e considere a equação integral*

$$v(x,t) = v_0\,(x) + \int_0^t K * (v + \frac{v^{p+1}}{(p+1)})(x,\tau)\,d\tau, \tag{2.26}$$

onde $K = \dfrac{-ik}{1+k^2+k^4}$, *definido em (2.12) para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

Pelo Teorema 2.2 existem $T_1 > 0$ *e uma única solução* v *para a equação (2.26) tal que* $v \in C([0,T_1],X)$. *Definamos então,*

$$B(x,t) := \begin{cases} u(x,t), & se\ 0\ \leq\ t <\ T \\ v(x,t-T), & se\ T \leq\ t\ \leq\ T+T_1. \end{cases} \tag{2.27}$$

Seguindo os passos da demonstração do Teorema 3.3, em [6], concluímos que para todo $0 < s < T_1$ *temos que* B *é a extensão única da solução de* u *de (2.14) ao intervalo* $[0, T+T_1]$. *E assim,*

$$T_1 = \frac{1}{2}(1 + C_3 \parallel v_0 \parallel_X^p)^{-1}.$$

Como B *é uma solução do problema de Cauchy (2.9) e a norma de* B *em* X *de é conservada no tempo, visto que* $\parallel u \parallel_X^2 = F(u)$, *temos*

$$\parallel B(t) \parallel_X^2 = \parallel v_0 \parallel_X \parallel u(T) \parallel_X = \parallel v_0 \parallel_X \parallel u_0 \parallel_X,$$

ou ainda,

$$\parallel B(t) \parallel_X = \parallel u(T) \parallel_X = \parallel u_0 \parallel_X,$$

daí

$$T_1 = \frac{1}{2}(1 + C_3 \parallel u_0 \parallel_X^p)^{-1} = T.$$

O que nos faz concluir que u *pode ser estendida à* $C([0,T+T_1],X) = C([0,2T]),X$. *Ao repetirmos este processo,* u *pode ser estendida à* $C([0,+\infty),X)$. *Finalmente, considerando que* K *não depende de* t, u *em*

$$u(x,t) = u_0(t) + \int_0^t K * \left(u + \frac{u^{p+1}}{p+1}\right)(x,\tau)d\tau$$

é reversível no tempo e consequentemente pode ser estendida por toda reta, então $u \in C([0,\mathbb{R}],X)$. *Isto mostra que o problema de Cauchy 2.9 é bem colocado globalmente em* $X = H^2_{per}([0,L_0])$, *como queríamos mostrar.* $\square$

2.3 Estabilidade de Soluções Para a Equação de Kawahara Modificada Regularizada

O objetivo aqui é provar a estabilidade orbital da equação de Kawahara modificada regularizada no sentido da Definição 1.5. Esta equação é um caso particular da equação de Kawahara generalizada regularizada, onde $p = 2$. Assim, é da forma

$$u_t + u_x + u^2 u_x - (u_{xx} - u_{xxxx})_t = 0, \tag{2.28}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é periódica, de período $L > 0$, na variável espacial x.

Com isto, o Teorema 2.4 fornece o resultado de boa colocação global para o problema de Cauchy associado à equação de Kawahara Modificada Regularizada, dado por

$$\begin{cases} u_t + u_x + u^2 u_x - (u_{xxt} - u_{xxxxt}) = 0, \\ u(x,0) \;=\; u_0(x). \end{cases} \tag{2.29}$$

no Espaço de Sobolev Periódico $X := H^2_{per}([0, L])$.

A estratégia utilizada para provar a estabilidade orbital da equação (2.28) será usar a teoria de estabilidade apresentada no Capítulo 1. Ou seja, usaremos como referência as abordagens em [5] e [18], onde este último traz uma adaptação da teoria espectral desenvolvida em [5], para o caso regularizado. Citamos ainda como referências [41], que serviu como base para os trabalhos supracitados.

Supondo que a equação (2.28) possua soluções tipo ondas viajantes do tipo $u(x, t) = \phi(x - ct)$, onde $c > 0$ é a velocidade de propagação da onda, ao substituirmos ϕ em (2.28), e integrando posteriormente, encontraremos a equação diferencial ordinária dada por

$$(c - 1)\phi - \frac{1}{3}(\phi^3) - c(\phi'' - \phi'''') + A = 0, \tag{2.30}$$

onde A é uma constante de integração.

A equação de Kawahara modificada regularizada admite ao menos três quantidades conservadas

$$P(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_{xx}^2 + u_x^2 - \frac{1}{6}u^4)dx, \tag{2.31}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)dx, \tag{2.32}$$

e

$$M(u) = \int_0^L udx. \tag{2.33}$$

Considerando as quantidades conservadas (2.31)-(2.33) definimos o funcional de Lyapunov

$$G(u) = P(u) + (c-1)F(u) + AM(u), \tag{2.34}$$

Notemos que $G'(\phi) = 0$, ou seja, se ϕ é uma solução de (2.30), então ϕ é um ponto crítico de G. Podemos então definir o operador linearizado ao redor da onda ϕ, por

$$G''(\phi) := \mathcal{L} = c\mathcal{M} + (c-1) - \phi^2. \tag{2.35}$$

Nosso objetivo é mostrar que ϕ é um mínimo de G, com isso as propriedades do espectro não positivo do operador $\mathcal{L}$ são essenciais para provarmos o resultado desejado, dada a relação em (2.35).

A onda ϕ, que satisfaz (2.30) possui solução explícita, de acordo com [38], com perfil dnoidal dado pelo ansatz

$$\phi(x) = a + b\left(dn^2(\frac{2K(k)}{L}x, k) - \frac{E(k)}{K(k)}\right). \tag{2.36}$$

onde a e b dependem suavemente da velocidade de propagação da onde $c > 0$. Aqui, dn representa a Função Elíptica de Jacobi do tipo dnoidal, e $K = K(k)$ é a integral elíptica completa de primeiro tipo, $E = E(k)$ é a integral elíptica completa de segundo tipo e ambas são dependentes do módulo elíptico $k \in (0, 1)$, para obtenção de mais detalhes desta solução ver [14] e [31].

Uma vez que a solução explícita dada por (2.36) pode ser determinada, é possível usar a abordagem feita em [9], com o objetivo de conhecer o comportamento do espectro não positivo do operador $\mathcal{L}$ definido em (2.35), resultados estes já apresentados preliminarmente.

2.3.1 Condições Básicas para Estabilidade Orbital

Considerando os dados sobre a equação (2.28), e ainda que o seu problema de Cauchy associado está bem colocado em X, estamos aptos a provar a estabilidade orbital desejada.

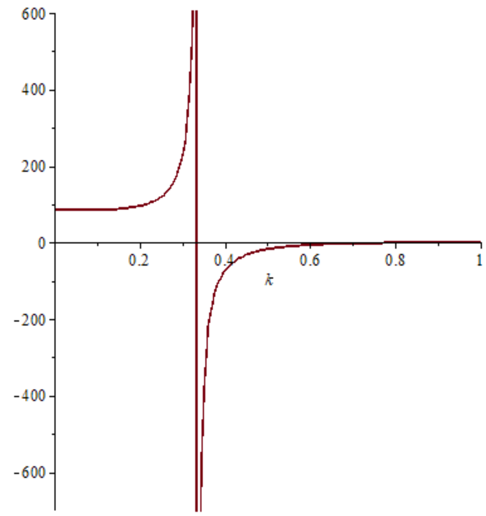

Figura 2.1: Gráfico $c = c(k, L)$, com período $L_0 = \frac{228}{100}\pi$ fixado e $k \in (0, 1)$.

Referente à onda ϕ solução de (2.28), para um dado $\varepsilon > 0$, a ε-vizinhança da órbita $O_\phi = \{\phi(\cdot + y); y \in \mathbb{R}\}$, como U_ε, como em (1.13), considere também $Q(u)$ e Υ_0, dados em (1.10) e (1.14), respectivamente. Provaremos que a hipótese (H), é válida.

Com o auxílio do programa Maple 17, ao substituirmos o ansatz (2.36) na equação (2.30), obtivemos

$$a = \frac{\sqrt{10\,c}}{10L^2}(80K^2k^2 + L^2 - 160K^2 + 240E\;K), \tag{2.37}$$

$$b = \frac{24\sqrt{10\,c}K^2}{L^2}, \tag{2.38}$$

e

$$\begin{aligned} A \;\; = \;\; & \frac{-\sqrt{10c}}{300L^6}((-512000c(k^4 + \frac{k^2}{5} + 1)(K^2 + 1)K^6) + \\ & (-19200cL^2(k^4 - k^2 + 1)K^4 + 2160(c - \frac{10}{9})(k^2 + 1)L^4K^2 + (29c - 30)L^6)), \end{aligned}$$

onde $k \in (0, 1)$ é o módulo elíptico.

Através do mesmo processo, determinamos uma expressão para a velocidade da onda c, onde

$$c = \frac{10L^4}{3840(k^2 - k^4 - 1)K^4(k) + 9L^4}. \tag{2.39}$$

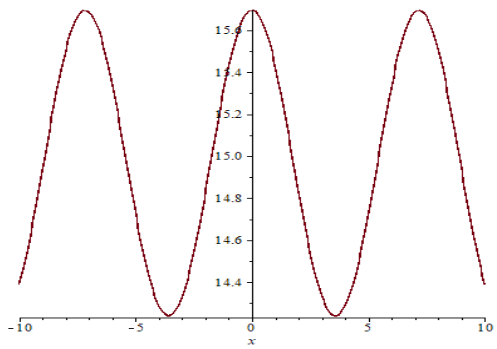

Figura 2.2: Gráfico $\phi(x)$, para $k_0 = 0,2 \in (0, k_L)$ e $L_0 = \frac{228}{100}\pi$.

Facilmente vemos, de acordo com as expressões dos coeficientes obtidos, que é necessário que $c > 0$, para isso devemos tomar $L > 0$, suficientemente grande para que $c > 0$, para algum $k \in (0,1)$. Observamos que $c \longrightarrow c_0$, para algum $c_0 > 1$, quando $L \longrightarrow +\infty$. Em particular, para $L \geq \frac{228}{100}\pi$, existe $k_L \in (0,1)$, tal que $c = c(k,L) > 0$, para todo $k \in (0, k_L)$. plotamos o gráfico de c, considerando um período fixo $L = \frac{228}{100}\pi$.

Além disso, como k é um parâmetro livre, o ansatz (2.36) estabelece uma curva suave de soluções suaves periódicas para a equação (2.30), $k \longmapsto \phi := \phi_{(c(k),A(k))}$, onde $k \in (0, k_L)$.

Para que a hipótese (H) seja satisfeita, resta analisarmos as propriedades espectrais relacionadas ao operador $\mathcal{L}$ definido em (2.35).

A Proposição 1.14 fornece que o operador $\mathcal{L}$ é auto adjunto, além disso a solução explícita ϕ dada pelo ansatz (2.36), e (2.37)-(2.39) é uma função par e periódica, visto que possui perfil dnoidal. Também é positiva, para todo $k \in (0,1)$ e possui período fixo $L > 0$. Ilustramos através da Figura 2.2, o gráfico de $\phi(x)$, considerando $k \in (0, k_L)$.

Dessa forma, podemos utilizar o Teorema 1.18, para estabelecer que o operador $\mathcal{L}$ possui um único autovalor negativo o qual é simples e zero é um autovalor simples cuja autofunção é ϕ'. Conforme [31], a solução ϕ da equação (2.30), possui expansão de Fourier

$$\phi(x) = a + \sum_{n=1}^{+\infty} n\beta\, csch\left(\frac{n\pi K(k')}{K(k)}\right)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \tag{2.40}$$

aqui $\beta = \dfrac{b\pi^2}{K^2(k)}$ (ver detalhes no apêndice) e $k' = \sqrt{1+k^2}$ é o complementar do módulo elíptico k.

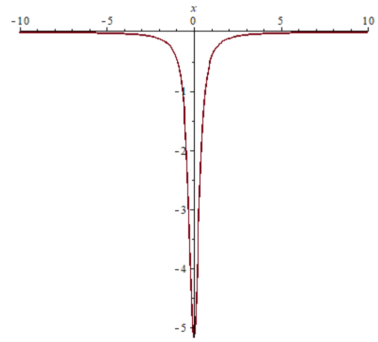

Figura 2.3: Gráfico H(x), $k_0 \in (0, k_L)$ e $L_0 = \frac{228}{100}\pi$.

Consequentemente, os coeficientes de Fourier de ϕ, são dados por

$$\hat{\phi}(n) = \begin{cases} a, & n = 0, \\ \dfrac{\beta}{2}\, n\, csch\left(\dfrac{n\pi K(k')}{K(k)}\right), & n \neq 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

Considerando,

$$g_k(x) \;=\; \frac{\beta}{2}\, x\, csch\left(\frac{x\pi K(k')}{K(k)}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

podemos então, definir a função

$$H(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g_k(x)).$$

Com isso, podemos observar pelo gráfico representado na Figura 2.3 desta função, considerando $k_0 \in (0, k_L)$, que para todo $x \in \mathbb{R}$, $H(x) < 0$. Então, de acordo com a Proposição 1.18, obtemos o resultado esperado para $\mathcal{L}$, de onde concluímos que a hipótese (H) é válida.

Agora determinaremos Φ, de modo que $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi \rangle \geq 0$, para todo $\varphi \in \Upsilon_0$, dado por (1.14), e ainda satisfaça $\langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle = 0$, como exigido no Proposição 1.6. Como $\phi := \phi_{(c(k), A(k))}$, podemos considerar $\Phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial k}$, onde ϕ é solução de (2.30), que satisfaz

$$-A = c\mathcal{M}\phi + (c-1)\phi - \frac{1}{2}\phi^2. \tag{2.42}$$

Derivando esta igualdade em relação à variável k, resulta

$$-\frac{\partial A}{\partial k} \;=\; \frac{\partial c}{\partial k}\mathcal{M}\phi + c\mathcal{M}\frac{\partial \phi}{\partial k} + \frac{\partial c}{\partial k}\phi + (c-1)\frac{\partial \phi}{\partial k} - \phi.\frac{\partial \phi}{\partial k},$$

e assim,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{\partial c}{\partial k}(\mathcal{M}\phi + \phi) &= c\mathcal{M}\frac{\partial \phi}{\partial k} + (c-1)\frac{\partial \phi}{\partial k} - \phi.\frac{\partial \phi}{\partial k} \\ &= c\mathcal{M}\Phi + (c-1)\Phi - \phi\Phi \\ &= \mathcal{L}\Phi. \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando $Q(u) = \nu F(u) + \mu M(u)$, dada por (1.10), e tomando $\nu = \dfrac{\partial c}{\partial k}$ e $\mu = \dfrac{\partial A}{\partial k}$, obtemos

$$Q'(\phi) = \frac{\partial c}{\partial k}(\mathcal{M}\phi + \phi) + \frac{\partial A}{\partial k} = -\mathcal{L}\Phi.$$

O que nos fornece $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi \rangle = -\langle Q'(\phi), \varphi \rangle = 0$, para todo $\varphi \in \Upsilon_0$. Ainda,

$$\mathcal{B} = \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle = \langle -Q'(\phi), \Phi \rangle = -\frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}F(\phi) - \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}M(\phi).$$

Utilizando a solução explícita dada por (2.36), é possível deduzir que $M(\phi) = aL$, onde a é dado por (2.37). De fato,

$$\begin{aligned} M(\phi) &= \int_0^L (a + b(dn^2(\frac{2K(k)}{L}x, k) - \frac{E(k)}{K(k)}))dx \\ &= aL - bL\frac{E(k)}{K(k)} + b\int_0^L dn^2(\frac{2K(k)}{L}x, k)dx \\ &= aL - bL\frac{E(k)}{K(k)} + bL\frac{E(k)}{K(k)} = aL. \end{aligned}$$

Também com o auxílio de [14] e do programa Maple 17, obtemos

$$F(\phi) = \| \phi \|^2_{H^2_{per}([0,L])} = \frac{1}{126L^7 - 53760(k^4 - k^2 + 1)L^3K^4(k)} f(k, L),$$

onde $f(k, L)$ é uma complicada função que envolve potências de k e L. Assim,

$$\mathcal{B} = \frac{4096000}{81}\frac{1}{(g(k)K^4(k) + L^4)^4(k-1)^2(k+1)^2k^2}(G(k, L)),$$

onde $g(k) = -\frac{1280}{3}(k^4 - k^2 + 1)$ e $G(k, L)$, ver Figura 2.4, que representa o gráfico da função $\mathcal{B} = \mathcal{B}(k, L)$, $k \in (0, 1)$ e $L = \frac{228}{100}\pi$.

Com todos estes resultados estabelecidos, podemos provar a estabilidade orbital das soluções de (2.30).

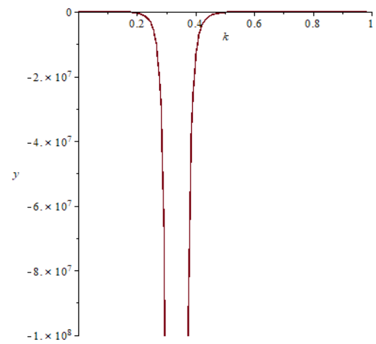

Figura 2.4: Gráfico $\mathcal{B} = \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle$, com $L_0 = \frac{228}{100}\pi$.

Teorema 2.5 *As ondas periódicas em (2.36) são orbitalmente estáveis no sentido da Definição 1.5 com relação ao fluxo periódico de (2.28).*

Demonstração: Seja ϕ uma solução onda viajante de (2.30), dada pelo ansatz (2.36), periódica de período fixo $L > 0$. Pelo exposto anteriormente, ϕ satisfaz a hipótese (H) e $\Phi = \frac{\partial \phi}{\partial k}$, satisfaz as hipóteses da Proposição 1.6.

Além disso, como $Q'(\phi) = \nu(\phi + \mathcal{M}\phi) + \mu$, a periodicidade de ϕ e o Teorema Fundamental do Cálculo, nos fornecem que $\langle Q'(\phi), \phi' \rangle = 0$. Com isso, podemos considerar $N > 0$, como definido pelo Lema 1.7, e definir o funcional $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$, como em (1.15), ou seja,

$$V(u) = G(u) - G(\phi) + N(Q(u) - Q(\phi))^2.$$

Como, $V(\phi) = 0$ e sendo ϕ um ponto crítico de G, segue que $V'(\phi) = 0$. O funcional V é um funcional de Lyapunov para a órbita Ω_ϕ e segue do Teorema 1.11 que ϕ é orbitalmente estável em relação ao fluxo da equação de Kawahara modificada regularizada, dada em (2.28). $\square$

CAPÍTULO 3

ESTABILIDADE ORBITAL DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DISPERSIVAS REGULARIZADAS: UM CRITÉRIO SIMPLES

3.1 Condições Iniciais

Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar um conjunto simplificado de condições que sejam suficientes para obtenção de estabilidade orbital de soluções do tipo ondas viajantes associadas a equações tipo Benjamin-Bona-Mahony, daqui por diante BBM. De uma forma geral, tais equações podem ser escritas da seguinte forma

$$u_t + u_x + uu_x + (\mathcal{M}u)_t = 0, \tag{3.1}$$

onde, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real L-periódica na variável espacial. Na equação (3.1), $\mathcal{M}$ é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no sentido periódico e é definido como um multiplicador de Fourier por (1.2), isto é

$$\widehat{\mathcal{M}g}(k) = \theta(k)\widehat{g}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aqui, θ representa uma função par e contínua em $\mathbb{R}$, satisfazendo (1.3), assim

$$v_1|k|^{m_1} \leq \theta(k) \leq v_2|k|^{m_1}, \qquad m_1 > \frac{1}{3},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e para alguns números reais $v_i > 0$, tal que $i = 1, 2$.

Equações da forma (3.1) abrangem uma grande classe de equações diferenciais dispersivas, por exemplo :

- A equação Benjamin-Ono Regularizada (rBO), dada por

$$u_t + u_x + uu_x + (\mathcal{H}u)_t = 0,$$

onde $\mathcal{H}$ é a transformada de Hilbert no contexto periódico. A equação rBO descreve a Picnoclina no oceano profundo, e o sistema de duas camadas criado pelo influxo de água doce de um rio para o mar (ver [26] e referências nele);

- A equação Benjamin-Bona-Mahony, dada por

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

que é a equação regularizada da KdV, que modela ondas de gravidade de superfície longas de pequena amplitude propagando-se unidirecionalmente em 1+1 dimensões;

- A equação de Kawahara Regularizada, dada por

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} + u_{xxxxt} = 0,$$

que modela a propagação de ondas com baixa amplitude em uma dimensão.

A boa colocação do problema de Cauchy associado às equações rBO e rBBM, assim como a estabilidade orbital, foram estabelecidas em [10], baseados em critérios para obtenção de estabilidade de soluções tipo ondas viajantes estabelecidos pelos autores de [19]. Na última seção deste capítulo, apresentaremos a estabilidade da equação de Kawahara regularizada, como aplicação do resultado que será estabelecido aqui.

Equações do tipo (3.1) admitem as quantidades conservadas

$$P(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u\mathcal{M}u - \frac{1}{3}u^3)\, dx, \tag{3.2}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u\mathcal{M}u + u^2)\, dx \tag{3.3}$$

e

$$M(u) = \int_0^L u\, dx. \tag{3.4}$$

A partir das quantidades acima é possível através de combinações definir outras. Em particular, fazendo $K(u) = F(u) - P(u)$, obtemos

$$K(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u^2 + \frac{1}{3}u^3)dx. \tag{3.5}$$

Esta quantidade auxiliar será útil no desenvolvimento do nosso resultado principal.

Consideremos agora $u(x,t) = \phi(x - ct)$ uma solução tipo onda viajante da equação (3.1), onde $c > 0$ é uma constante e representa a velocidade da onda $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a qual é uma função periódica, de período $L > 0$. Notemos que, ondas viajantes são ondas que se propagam com velocidade constante c sem alterar sua forma. Substituindo a forma $u(x,t) = \phi(x-ct)$ na Equação (3.1), e integrando em seguida de 0 a L, obtemos

$$c\mathcal{M}\phi + (c-1)\phi - \frac{1}{2}\phi^2 + A = 0, \tag{3.6}$$

onde A é uma constante de integração.

A partir das quantidades conservadas definidas em (3.2), (3.3) e (3.4), podemos ainda, definir o funcional de Lyapunov como definido em (1.9), o que nos fornece

$$G(u) = \frac{1}{2}\int_0^L [c\,(u\mathcal{M}u) - \frac{1}{3}u^3 + (c-1)u^2 + 2Au]dx. \tag{3.7}$$

Observemos que, se $\phi_{(c,A)}$ é uma solução do tipo onda viajante da equação diferencial ordinária (3.6), então

$$G'(\phi_{(c,A)}) = c\,\mathcal{M}\phi_{(c,A)} + (c-1)\phi_{(c,A)} - \frac{1}{2}\phi^2_{(c,A)} + A = 0. \tag{3.8}$$

De onde concluímos que $\phi_{(c,A)}$ for um ponto crítico do Funcional G. E com o objetivo de mostrar que ϕ é um mínimo local de G, definimos o operador linearizado em torno da onda

$$\mathcal{L} := G''(\phi_{(c,A)}) = c\,\mathcal{M} + (c-1) - \phi_{(c,A)}. \tag{3.9}$$

O número de autovalores não-positivos de $\mathcal{L}$ (considerando multiplicidades), exercem um papel crucial para garantirmos a existência de minimizadores de G. Onde, faz-se necessário garantir a validade de

$$G(u) - G(\phi_{(c,A)}) \geq C\ \rho(u, \phi_{(c,A)})^2,$$

onde $C > 0$ e ρ é a semidistância entre a evolução e a onda $\phi_{(c,A)}$ definida em um conveniente espaço de Hilbert, conforme Definição 3.1. Para obter essa positividade, torna-se necessário impor convenientes restrições ao operador $\mathcal{L}$.

Em alguns trabalhos já desenvolvidos, sobre a equação (3.1) e suas respectivas generalizações, vemos que é necessário obter, além de conhecer a quantidade e multiplicidade de autovalores não-positivos do operador $\mathcal{L}$, o comportamento do sinal da matriz Hessiana associada ao funcional de Liapunov G, em termos dos parâmetros (c, A) de um conveniente conjunto aberto do $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, se $A \equiv 0$ na equação (3.6), em [10] os autores provam a estabilidade orbital de ondas periódicas explícitas de (3.1), quando $\mathcal{M} = -\partial_x^2$ e $\mathcal{M} = \mathcal{H}\partial_x$, combinando a teoria espectral desenvolvida em [9], juntamente com o fato que a matriz Hessiana

$$\begin{aligned} d''(c) &= \frac{\partial^2}{\partial^2 c}(P(\phi_{(c,0)}) + (c-1)F(\phi_{(c,0)})) \\ &= \frac{\partial}{\partial c}(F(\phi_{(c,0)}) \end{aligned}$$

é positiva.

O objetivo neste capítulo é estabelecermos um novo critério para estabilidade orbital, de tal forma que não seja necessário estudar a positividade da matriz Hessiana ou do Jacobiano. Para tanto, com base nos trabalhos [5], [37] e [41], utilizaremos o funcional de Lyapunov, dado por

$$V(u) = G(u) - G(\phi) + N(Q(u) - Q(\phi))^2, \tag{3.10}$$

onde $N > 0$ é uma constante, G é definido em (3.7). Observe que o Funcional V acima é o mesmo definido em (1.15), porém o funcional auxiliar aqui utilizado não é o mesmo dado em (1.10). Assim, consideremos agora

$$Q(u) := -K(u) + (c - 1 - A)M(u). \tag{3.11}$$

É importante mencionar, que essa nova funcionalidade remove a suposição de positividade mencionada na teoria de estabilidade orbital e estabelece um critério simples para obter a estabilidade orbital de ondas periódicas para a equação (3.1). O que de, fato, é um grande avanço, considerando por exemplo a Equação Kawahara Regularizada que não admite superfície de ondas.

Para obtenção dos resultados desejados é necessário assumir a seguinte hipótese:

(H_0) Assuma que $m_1 > \frac{1}{3}$. Considere $(c_0, A_0) \in (1, +\infty) \times \mathbb{R}$ fixado. Suponha que

$$\phi := \phi_{(c_0,A_0)} \in X := H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L_0])$$

é uma solução periódica não-trivial de (3.6) no sentido de distribuições cujo período fixado é $L_0 > 0$. Além disso, suponha que o operador auto-adjunto

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_{(c_0,A_0)} = c_0\mathcal{M} + (c_0 - 1) - \phi_{(c_0,A_0)}, \tag{3.12}$$

possua apenas um autovalor negativo o qual é simples e zero é um autovalor cuja autofunção é ϕ'.

Com a hipótese (H_0) em mente, sabe-se da literatura corrente que se ϕ for par e $\ker(\mathcal{L}_\prime) = [\phi']$ é possível construir uma superfície suave

$$(c, A) \in \mathcal{O} \mapsto \phi_{(c,A)} \in H_{per}^n([0, L_0]), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.13}$$

de soluções periódicas para a (3.6), cujo período fixado é L_0. Isto significa, que para qualquer (c, A) pertencente a uma vizinhança aberta $\mathcal{O} \subset (1, +\infty) \times \mathbb{R}$ de (c_0, A_0), $\phi_{(c,A)}$ é uma solução da (3.6) com período L_0. Além disso, a hipótese (H) é também adequada para obter o espectro não positivo do operador linearizado $\mathcal{L}_{(c,A)}$ em (3.9), uma vez que é válida a convergência $\mathcal{L}_{(c,A)} \longrightarrow \mathcal{L}_{(c_0,A_0)}$, no sentido de Kato (ver detalhes em [29]). Nossa análise não requer esse tipo de construção de ondas periódicas. De fato, obtivemos uma melhoria considerável em comparação com resultados semelhantes na literatura atual, pois nosso método determina a estabilidade orbital de ondas periódicas sem conhecer o comportamento da matriz hessiana associada à função $(c, A) \longmapsto G(\phi_{(c,A)})$, conforme exigido em [9], [10], [19],[22], [25], [36] e em outras referências relacionadas. Em um resultado mais recente, os argumentos em [18] não exigiram informações sobre a matriz Hessiana mencionada para concluir a estabilidade em um primeiro momento. No entanto, os autores precisaram construir a superfície suave das ondas periódicas como em (3.13) para obter, usando manipulações adequadas com a matriz Hessiana de $G(\phi_{(c,A)})$, uma função $s(\phi)$ que não depende de derivadas de $F(\phi_{(c,A)})$ e $M(\phi_{(c,A)})$, com $(c,A) \in \mathcal{O}$. Ao assumir que a suposição (H_0) é válida, a afirmação no Corolário 3.5 em [18] diz que, para determinar a estabilidade orbital das ondas periódicas, é necessário provar que $s(\phi) > 0$. Em alguns casos, a positividade de s (a partir daqui) torna-se uma tarefa difícil, pois são necessárias informações adicionais sobre a onda ϕ como soluções explícitas (consulte a Seção 4 em [18]).

Este capítulo, está organizado da seguinte forma: na próxima seção, apresentaremos nossos resultados sobre a teoria da estabilidade orbital das ondas periódicas. E a seção subsequente é dedicada a uma aplicação, onde estabeleceremos a estabilidade orbital de soluções tipo ondas viajantes da equação de Kawahara regularizada.

3.2 Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas

O resultado principal deste capítulo é o Teorema 3.11, que associado a teoria espectral apresentada no Capítulo 1, nos fornece o resultado de estabilidade orbital de soluções tipo ondas viajantes para equações como em (3.1). A definição de estabilidade orbital foi dada em Definição 1.5, aqui definimos formalmente a semi-distância ρ,

Definição 3.1 *Sejam u e v funções em $X := H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L_0])$, consideraremos ρ a semi-distância entre u e a órbita de v, por*

$$\rho(u, v) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \| u - v(\cdot + y) \|_X .$$

Observe que, a grosso modo, a distância entre u e v é medida através da semi-distância entre u e a órbita de v, gerada por translações.

Nesta seção, simplificaremos a notação considerando $\phi = \phi_{(c_0, A_0)} \in X$ a onda periódica satisfazendo (H_0).

Observação 3.2 *É importante salientar que para provar a estabilidade orbital de soluções ondas viajantes de equações do tipo (3.1), é necessário provarmos a existência e unicidade de tais soluções, ou seja a boa colocação do problema de Cauchy associado a (3.1), com dados iniciais*

$u(x,0) = u_0(x),\ x \in [0, L]$. *Para estabelecer os critérios aqui desejados, consideraremos que o referido problema de Cauchy é bem-posto em* X.

Definição 3.3 *Dado* $\varepsilon > 0$*, define-se a* ε *- vizinhança da órbita* $O_\phi = \{\phi(\cdot + y), y \in \mathbb{R}\}$ *como*

$$U_\varepsilon := \{u \in X; \rho(u, \phi) < \varepsilon\}.$$

Considere ainda o funcional

$$Q(u) := -K(u) + (c_0 - 1 - A_0)M(u), \quad u \in X, \tag{3.14}$$

onde $K(u)$ e $M(u)$ estão definidos em (3.5) e (3.4), respectivamente.

No que segue, definimos

$$\Upsilon_0 = \{u \in X; \langle Q'(\phi), u\rangle = 0\},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar em $L^2_{per}([0, L_0])$. Note que Υ_0 é o espaço tangente para $\{u \in X; Q(u) = Q(\phi)\}$ em ϕ.

Considerando todas as notações, segue o teorema principal apresentado em [18].

Teorema 3.4 *Suponha que a hipótese* (H_0) *seja válida. Além disso para* $\mathcal{L}_0$*, definido em (3.12), suponha que exista* $\Phi \in X$ *tal que* $\langle \mathcal{L}_0\Phi, \varphi\rangle = 0$*, para todo* $\varphi \in \Upsilon_0$*, e* $I = \langle \mathcal{L}_0\Phi, \Phi\rangle < 0$*. Então,* ϕ *é orbitalmente estável em* X *em relação ao fluxo periódico de (3.1).*

Demonstração*: Ver Teorema 2.3, em [18].* □

Apresentaremos o nosso resultado principal deste capítulo, o qual estabelece uma melhoria considerável em relação aos critérios utilizados para determinar a estabilidade orbital das ondas periódicas relacionadas à equação (3.1).

Teorema 3.5 *Suponha que a hipótese* (H_0) *seja verdadeira. A onda periódica* ϕ *é orbitalmente estável no espaço energia* X*, se* $\langle \mathcal{L}_0(1 + \phi), 1 + \phi\rangle < 0$.

Demonstração*: De fato, considerando a validade da hipótese* (H_0)*, e*

$$
\begin{aligned}
Q(u) &= -K(u) + (c_0 - 1 - A_0)M(u) \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{L_0} (u^2 + \frac{u^3}{3})dx \ + (c_0 - 1 - A_0)\int_0^{L_0} u\, dx,
\end{aligned}
$$

ao derivarmos esta quantidade, obtemos

$$
Q'(u) = -u - \frac{u^2}{2} \ + (c_0 - 1 - A_0),
$$

onde A_0 é dado na equação (3.6), ou seja, $-A_0 = c_0\mathcal{M}\phi + (c_0 - 1)\phi - \frac{\phi^2}{2}$. Com isso,

$$
\begin{aligned}
Q'(\phi) &= -\phi - \frac{\phi^2}{2} \ + (c_0 - 1 - A_0) \\
&= -\phi - \frac{\phi^2}{2} \ + (c_0 - 1) + c_0\mathcal{M}\phi + (c_0 - 1)\phi - \frac{\phi^2}{2} \\
&= c_0\mathcal{M}\phi + (c_0 - 1)\phi - \phi^2 + (c_0 - 1) - \phi \\
&= \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_0(1) = \mathcal{L}_0(1 + \phi) = \mathcal{L}_0(\Phi).
\end{aligned}
$$

Então, como $\langle Q'(\phi), \varphi\rangle = 0$, temos que $\langle \mathcal{L}_0\Phi, \varphi\rangle = \langle \mathcal{L}_0(1 + \phi), \varphi\rangle = 0$, para todo $\varphi \in \Upsilon_0$. Supondo ainda que, $\langle \mathcal{L}_0\Phi, \Phi\rangle = \langle \mathcal{L}_0(1 + \phi), 1 + \phi\rangle < 0$, pelo Teorema (3.4), tem-se a estabilidade orbital de ϕ, no espaço energia X. Assim, o teorema está demonstrado. □

Observação 3.6 *Além disso, um cálculo direto nos fornece o critério simples como*

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_0(1 + \phi), 1 + \phi\rangle &= (c_0 - 1 - A_0)L_0 + (c_0 - 2 - 2A_0)M(\phi) \\
&\quad - \int_0^{L_0} (c_0\phi\mathcal{M}\phi + (c_0 + \frac{1}{2})\phi^2)dx \\
&= (c_0 - 1 - A_0)L_0 + (c_0 - 2 - 2A_0)M(\phi) - 2c_0F(\phi) - \frac{1}{2}\int_0^{L_0} \phi^2 dx,
\end{aligned}
$$

onde F e M são dados por (3.3) e (3.4), respectivamente.

Observação 3.7 *Abaixo enunciamos um Teorema, que se apresenta como o Corolário 3.5 de [18], com o objetivo de que seja observado que nele é necessário assumir que $(c_0 - 1 - 2A_0) \neq 0$, para definir a função $s(\phi)$. Nossa análise não impõe tal hipótese, fornecendo assim um cenário mais geral. Antes disso, definimos formalmente a quantidade $s(\phi)$ exatamente como no artigo supracitado.*

Definição 3.8 *Considerando que $c_0 - 1 - 2A_0 \neq 0$, definimos a quantidade*

$$\begin{aligned} s(\phi) &= (2c_0(c_0-1)+2A_0+1)M(\phi)+c_0\int_0^{L_0}\phi\mathcal{M}\phi\,dx \\ &\quad +(2A_0(c_0+1)-c_0+1)L_0. \end{aligned}$$

Teorema 3.9 *Suponha que a afirmação (H_0) seja válida e seja $s(\phi)$ como acima definida. Se $c_0 - 1 - 2A_0 \neq 0$ e $s(\phi) > 0$, então a onda periódica ϕ é orbitalmente estável em X.*

Demonstração: *ver prova em [18], Corolário 3.5.* □

Observação 3.10 *É interessante observar que a hipótese (H_0) deste trabalho, é praticamente a mesma de [18], porém aqui tomamos $c_0 > 1$, o que significa que em particular, $c_0 \in \mathbb{R}/\{0\}$. Não alterando assim a validade dos resultados de [18] aqui enunciados.*

3.3 Aplicações

3.3.1 Estabilidade de Soluções Tipo Ondas Viajantes da Equação de Kawahara Regularizada

Nesta seção, mostraremos que soluções do tipo ondas viajantes da equação de Kawahara regularizada são orbitalmente estáveis em X no sentido da Definição 1.5. Para tanto, utilizaremos o método simplificado apresentado na seção anterior, onde mostraremos que uma solução ϕ da equação de Kawahara é um mínimo local do funcional G, com G definido como uma combinação linear das quantidades P, F e M, admitidas pela equação e são conservadas em relação ao tempo.

Primeiramente apresentaremos a equação de Kawahara regularizada e as informações necessárias para aplicação da teoria espectral. Antes disso, precisamos provar a validade da hipótese (H_0). Ou seja, mostraremos a existência de soluções tipo onda viajante $\phi := \phi_{(c_0,A_0)}$, da equação diferencial ordinária associada à equação em questão, onde ϕ é periódica na variável espacial x, com período $L_0 > 0$ fixado. Como tal solução é explicita, poderemos utilizar a teoria desenvolvida por [9], para provar as propriedades espectrais do operador linearizado $\mathcal{L}_0$, obtido a partir do funcional G. Com a validade da hipótese (H), podemos aplicar o Teorema 3.11 e assim, obter o resultado de estabilidade desejado.

A Equação de Kawahara Regularizada

A equação de Kawahara regularizada é dada por

$$u_t + u_x + uu_x - (u_{xx} - u_{xxxx})_t = 0, \tag{3.15}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é periódica, de período $L > 0$, na variável espacial x. Em particular aqui $\mathcal{M} = \partial_x^4 - \partial_x^2$, e assim satisfaz as condições (1.2) e (1.3), com $m_1 = 4$, o que nos leva a provar a estabilidade desejada no Espaço de Sobolev $X = H^2_{per}([0, L])$. A equação (3.15), na forma não regularizada, foi definida por Kawahara, em [30], como modelos para ondas unidimensionais de baixa amplitude.

Formalmente, no contexto periódico, a equação (3.15) admite as quantidades conservadas (3.2)-(3.4), mais especificamente

$$P(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_{xx}^2 + u_x^2 - \frac{1}{3}u^3)\, dx, \tag{3.16}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2)\, dx \tag{3.17}$$

e

$$M(u) = \int_0^L u\, dx. \tag{3.18}$$

Vamos supor que a equação (3.15) tenha solução tipo ondas viajantes, isto é, soluções da forma $u(x,t) = \phi(x - ct)$, onde $c > 0$ é a velocidade de propagação da onda e $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica, de período $L > 0$. Ao substituirmos esta forma em (3.15), obtemos

$$c\phi' - c\phi' - \frac{1}{2}(\phi^2)' - c\phi''' + c\phi''''' = 0.$$

De forma que ao integrarmos esta última equação de 0 a x, percebemos que ϕ deve satisfazer a equação diferencial ordinária

$$(c-1)\,\phi - \frac{1}{2}\phi^2 - c(\phi'' - \phi'''') + A = 0, \tag{3.19}$$

onde A é uma constante de integração.

Considerando que ϕ seja uma solução de (3.19) e também as quantidades definidas (3.16)-(3.18), temos que

$$\begin{aligned} & P'(u) + (c-1)F'(u) + M'(u) \\ = & \mathcal{M}u - \frac{u^2}{2} + (c-1)(\mathcal{M}u + u) + A \\ = & c\,\mathcal{M}u - \frac{u^2}{2} + (c-1)u + A. \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned} G'(\phi) &= c\,\mathcal{M}\phi - \frac{1}{2}\phi^2 + (c-1)\phi + A \\ &= c\,\mathcal{M}\phi - \frac{1}{2}\phi^2 + (c-1)\phi - (c-1)\,\phi + \frac{1}{2}\phi^2 - c\mathcal{M}\phi = 0. \end{aligned}$$

de onde podemos concluir ϕ é um ponto crítico de um funcional de Lyapunov definido por $G(u) := P(u) + (c-1)F(u) + AM(u)$, onde A é dada em (3.19). Com o intuito de mostrar que ϕ é um mínimo local de G para que possamos provar a estabilidade orbital de ϕ, vamos analisar o operador linearizado em torno da onda definido por

$$\mathcal{L} := G''(\phi) = \mathcal{M} + (c-1) - \phi, \tag{3.20}$$

em que G'' representa a segunda derivada do funcional G no sentido de Fréchet. Com estas informações em mente, provaremos que a hipótese (H_0) é satisfeita. Primeiramente, mostraremos que existe (c_0, A_0), de forma que $\phi := \phi_{(c_0,A_0)}$ é uma solução periódica não trivial de (3.19), com período $L_0 > 0$ fixo.

Antes de analisarmos a estabilidade desejada, lembramos que a equação (3.15) é da forma dada em (2.1), onde $p = 1$. Portanto, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x - (u_{xx} - u_{xxxx})_t = 0 \\ u(x,0) = \;u_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.21}$$

é globalmente bem posto em X, conforme Teorema 2.4, para $m = 2$.

A equação (3.19) possui soluções do tipo ondas viajantes L_0 periódicas com perfil dnoidal dadas por,

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2\left[dn^2\left(\frac{2K}{L_0}x, k\right) - \frac{E}{K}\right] + \alpha_3\left[dn^4\left(\frac{2K}{L_0}x, k\right) - (2-k^2)\frac{2E}{3K} + \frac{1-k^2}{3}\right], \tag{3.22}$$

onde dn é a Função Elíptica de Jacobi, denominada dnoidal, $k \in (0,1)$ é o módulo e α_1, α_2, α_3 são parâmetros que dependem suavemente de k. Também, $K = K(k)$ e $E = E(k)$, são as integrais elípticas de Jacobi de primeiro e segundo tipos, respectivamente. É válido ressaltar que o ansatz (3.22), foi obtido segundo [38]. E com ajuda do programa Maple 17, substituindo (3.22) em (3.19), chegamos aos seguintes coeficientes

$$\alpha_1 = \frac{c_0\{-10816(k^4-k^2+1)K^4 + L_0^2[520(k^2-2)K^2 + 1560E\,K + 17L_0^2\}}{507L_0^4} - 1,$$

$$\alpha_2 = \frac{1120\,K^2\,c_0\,[(208k^2-416)K^4 + L_0^2]}{13L_0^4}$$

e

$$\alpha_3 = \frac{26880\,c_0\,K^4}{L_0^4}.$$

Notemos que o parâmetro c_0 é livre, o que nos possibilita escolher convenientemente a velocidade da onda $c_0 > 1$.

A partir dos coeficientes acima e utilizando o mesmo processo, determinamos a constante de integração A_0, da equação diferencial ordinária (3.19), expressa por

$$\begin{aligned} A_0 \;=\; & \frac{c_0^2}{514098\,L_0}[91716911104(k^8 - \frac{314}{7}k^6 + \frac{1221}{7}k^4 - \frac{314}{7} + 1)K^8 + \\ & -8818933760L_0^2(k^2+1)(k^2+3k+1)(k^2-3k+1)K^6 + \\ & 230770176L_0^4(k^4-k^2+1)K^4(k) - 902720L_0^6(k^2+1)K^2(k) - 256088L_0] + c_0 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Com isso $A_0 = A(c_0)$, constante em relação à variável espacial x, é uma função suave que depende de c_0 e do par (k, L_0), para algum. Onde (k, L_0) deve satisfazer a seguinte equação implícita, obtida substituindo os coeficientes no ansatz (3.22),

$$\frac{89989120}{31}(k^2+1)(k^2-2)(k^2-\frac{1}{2})K^6 - \frac{908544}{31}L^2(k^4-k^2+1)K^4 + L^6 = 0. \qquad (3.23)$$

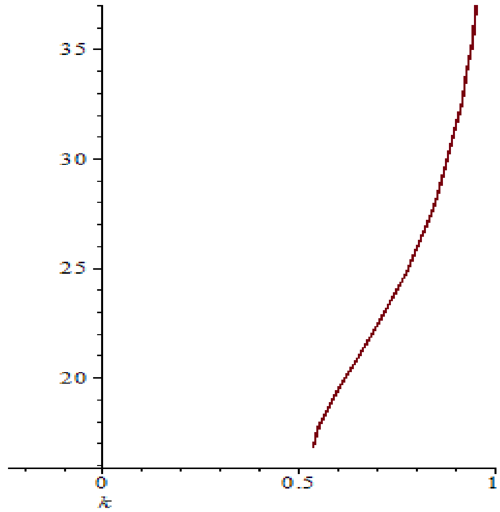

Figura 3.1: Gráfico L(k).

Agora, fazendo $L := L(k)$, considerando a equação implícita (3.23), e plotando no Maple 17, obtemos o gráfico de $L(k)$ representado na Figura 3.1.

É válido salientar que, ao considerarmos $c_0 > 1$, é necessário que exista um par (k_0, L_0) que tal que $\phi = \phi_{(c_0,A_0)}$ seja solução da equação (3.23).

Com isto em mente, fazendo $Y = L^2$ na equação (3.23), obtemos

$$\frac{89989120}{31}(k^2+1)(k^2-2)(k^2-\frac{1}{2})K^6 - \frac{908544}{31}Y(k^4-k^2+1)K^4 + Y^3 = 0,$$

ou seja, uma equação de terceiro grau e assim, a garantia que existe ao menos uma solução $(k_0, L_0) \in (0,1) \times (0,+\infty)$.

Então, podemos concluir de acordo com o Teorema da Função Implícita, que existe um intervalo $I \subset (0,1)$ e um outro $J \subset (0,+\infty)$, com $(k_0, L_0) \in I \times J$, onde a função $k \mapsto L(k)$ é suave e $(k, L(k))$ para todo $k \in I$.

Concluímos até aqui que para $m > \frac{1}{3}$, existe $k_0 \in I \subset (0,1)$ e $L_0 \in J \subset (0,+\infty)$, tal que $\phi = \phi_{(c_0,A_0)}$ é solução da equação (3.19), onde $c_0 > 1$ é um parâmetro livre e A_0 depende de (c_0, k_0, L_0), com o par (k_0, L_0) satisfazendo a equação implícita (3.23). Observamos ainda, que estes termos devem satisfazer também as condições do Teorema 3.11, o que será analisado posteriormente. Visto que, na sequência analisaremos as propriedades espectrais do operador $\mathcal{L}_0$.

Propriedades Espectrais

Para a segunda parte da hipótese (H_0), é necessário provarmos determinadas propriedades do operador linearizado $\mathcal{L}$ associado ao funcional de Lyapunov G, dado por

$$\mathcal{L}_0 := c_0(\partial_x^4 - \partial_x^2) + (c_0 - 1) - \phi_{(c_0,A_0)}. \tag{3.24}$$

Tais propriedades serão obtidas, segundo a abordagem feita em [9], a qual foi brevemente descrita na Seção 1.4, do Capítulo 1. Ressaltamos, que isto é possível por conhecermos a solução explícita da equação (3.19), dada por (3.22). O fato do operador $\mathcal{L}_0$ ser autoadjunto, decorre diretamente da Proposição 1.14.

Para analisarmos o espectro não positivo do operador $\mathcal{L}_0$ utilizaremos o Teorema 1.18. Mais especificamente, tais propriedades são obtidas se $\widehat{\phi} > 0$ e $\widehat{\phi^p}$ pertencem a classe PF(2) estrito e discreto. Resultado que será estabelecido utilizando-se o Lema 1.16. No entanto, tais resultados exigem que a onda viajante ϕ seja periódica, positiva e par.

Considerando que a solução ϕ em (3.22) possui perfil dnoidal, e a função dnoidal é par com período $2K$ (ver detalhes no Apêndice), onde K é a Integral Elíptica de Jacobi completa de primeiro tipo, temos que ϕ é par e periódica, de período $L_0 > 0$. Além disso, a equação (3.19) possui a propriedade da Invariância Galileana, o que nos possibilita analisar o espectro de um operador $\mathcal{L}_\mu$, ao redor da onda $\phi + \mu$, com $\mu \in \mathbb{R}$ tomado convenientemente, onde $\phi + \mu$ é par, positiva e periódica e o operador $\mathcal{L}_\mu$ preserva as propriedades espectrais do operador $\mathcal{L}_0$.

Considere agora, a solução ϕ em (3.22), com expansão de Fourier dada por

$$\phi(x) = \alpha_1 + \gamma \sum_{n=1}^{+\infty} n\, csch\left(\frac{n\pi K'}{K}\right) cos\left(\frac{2k\pi}{L}\, x\right), \tag{3.25}$$

onde

$$\gamma = \frac{\alpha_2 \pi^2}{K} + \frac{\alpha_3 \pi^2}{k^2 K^2}\left[\frac{2(2-k^2)}{3} + \frac{n^2\pi^2}{6K}\right].$$

Assim, os coeficientes de Fourier são dados por

$$\widehat{\phi}(x) = \begin{cases} \alpha_1, & n = 0 \\ \frac{\gamma}{2}\, n\, csch(\frac{n\pi K'}{K}), & n \neq 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

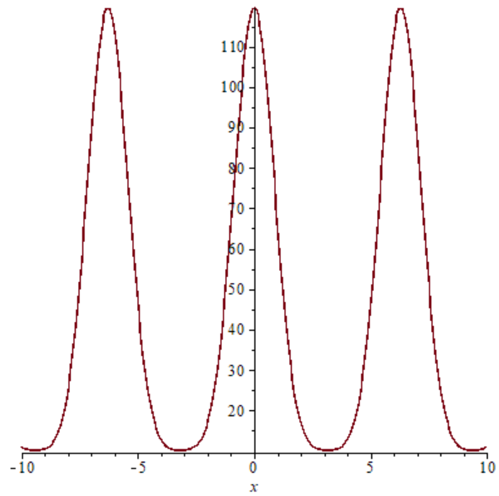

Figura 3.2: Gráfico $\eta(x) = \mu + \phi(x)$, com $\mu = 50$.

Agora, pela Invariância Galileana já mencionada, seja $\mu \in \mathbb{R}$ e considere o $\eta := \mu + \phi$, ou ainda, $\phi = \eta - \mu$, onde $\phi = \phi_{(c_0,A_0)}$ é a solução de (3.19). Note que η é solução de

$$c_0\eta'''' - c_0\eta'' + (c_0 - 1 + \mu)\eta - \frac{1}{2}\eta^2 + A_\mu = 0, \tag{3.27}$$

onde $A_\mu = A_0 - \mu(c_0 - 1) - \dfrac{\mu^2}{2}$. Destacamos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu &:= c_0\,\mathcal{M} + (c_0 - 1 + \mu) - \eta \\ &= c_0\,\mathcal{M} + (c_0 - 1) + \mu - \eta \\ &= c_0\,\mathcal{M} + (c_0 - 1) - \phi \\ &= \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

E assim, as propriedades espectrais de $\mathcal{L}_0$ podem ser obtidas, caso seja conveniente, analisando o espetro de $\mathcal{L}_\mu$.

Com isto em mente, definamos

$$g(x) := \frac{\gamma}{2}\, x\, csch\left(\frac{x\pi K'}{K}\right), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.28}$$

Considere agora, μ suficientemente grande tal que $\widehat{\eta}(0) = \alpha_1 + \mu \;\; > g(0)$.

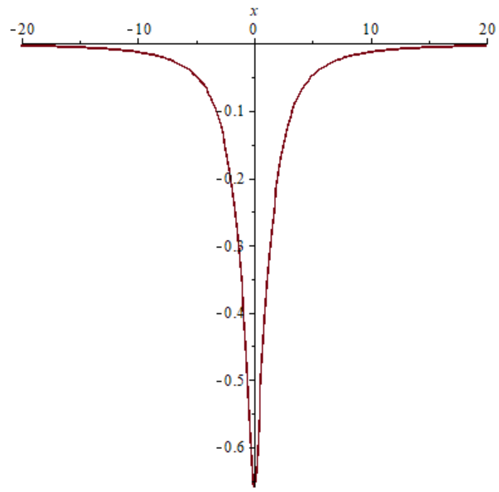

Figura 3.3: Gráfico H(x).

Assim, mais uma vez utilizando o Maple 17, obtivemos o gráfico da Figura 3.3 e verificamos que $H(x) = \dfrac{\partial^2}{\partial_x^2}(\log g(x)) \ < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \ > \ 0$.

Portanto, concluímos que g pertence à classe PF(2), conforme Lema 1.16. E assim a função h, definida por

$$h(x) = \begin{cases} h(0) = a + \mu, \\ g(x) \qquad se \ \ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty). \end{cases} \tag{3.29}$$

Fornecendo-nos que $h(n) = \widehat{\eta}(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $h(n)$ pertence à classe discreta de PF(2), e do Teorema 1.18 segue que $\mathcal{L}_\mu$ possui um único autovalor negativo o qual é simples e além disso, zero é um autovalor simples com autofunção $\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$. Mas, $\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_0$ e $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$.

Podemos então concluir que a hipótese (H) é válida, a qual é exigida Teorema 3.11, e assim para obtenção da estabilidade orbital de ϕ em $X = H^2_{per}([0, L_0])$ resta-nos mostrar que $\langle \mathcal{L}_0(1+\phi), 1+\phi \rangle \ < 0$.

Teorema 3.11 *A onda periódica ϕ é orbitalmente estável no espaço energia X.*

Demonstração: Seja $\phi = \phi_{(c_0, A_0)}$ uma solução tipo onda viajante da equação diferencial (3.19) dada explicitamente pelo ansatz (3.22), diante da validade da hipótese (H), anteriormente provada, consideremos $\Phi = 1 + \phi$ e vamos mostrar que $\langle \mathcal{L}_0(\Phi), \Phi \rangle < 0$.

Lembremos que, $\mathcal{L}_0 = c_0\mathcal{M} + (c_0 - 1) - \phi$ e a solução da equação (3.19) nos fornece

$$-A_0 = c_0\mathcal{M}\phi + (c_0 - 1)\phi - \frac{1}{2}\phi^2, \tag{3.30}$$

onde A_0 a constante . Ainda, ao multiplicarmos igualdade acima por ϕ, obtemos

$$\frac{1}{2}\phi^3 = c_0\phi\mathcal{M}\phi + (c_0 - 1)\phi^2 + A_0\phi.$$

Com isso, temos

$$\mathcal{L}_0(1+\phi) = -A_0 - \frac{1}{2}\phi^2 + (c_0 - 1) - \phi.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{L}_0(1+\phi), 1+\phi\rangle \\
=\ &\int_0^{L_0} (c_0 - 1) + c_0(\mathcal{M}\phi) + (c_0 - 2)\phi - \phi^2 + (c_0 - 1)\phi + c_0\phi(\mathcal{M}\phi) + (c_0 - 2)\phi^2 - \phi^3 dx \\
=\ &(c_0 - A_0 - 1)L_0 \ + \ (c_0 - 2 - 2A_0)\int_0^{L_0} \phi\, dx - \int_0^{L_0} c_0\, \phi\mathcal{M}\phi + (c_0 + \frac{1}{2})\, \phi^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \mathcal{L}_0(1+\phi), 1+\phi\rangle \ = (c_0 - A_0 - 1)L_0 \ + \ (c_0 - 2 - 2A_0)M(\phi) - 2c_0F(\phi) - \frac{1}{2}\int_0^{L_0} \phi^2 dx, \tag{3.31}$$

onde M e F, são dadas por (3.18) e (3.17), respectivamente. Considerando que ϕ é dada explicitamente por (3.22), e utilizando [14], temos que

$$M(\phi) = \alpha_1 L_0. \tag{3.32}$$

Para obtermos $F(\phi) = \|\ \phi\ \|^2_{H^2_{per}([0,L_0])}$, precisamos também da ajuda do programa Maple 17, chegando a

$$F(\phi) = \frac{1}{L_0^{11}} f(k_0, L_0, c_0), \tag{3.33}$$

em que f é uma complicada função positiva que depende de c_0 que é um parâmetro livre, de k_0 e $L_0 = L(k_0)$, onde o par (k_0, L_0) satisfaz a equação implícita (3.23). De modo que ao resolvermos tal equação encontramos

$$L_0 = L(k_0) = (\frac{104}{31} q(k_0))^{\frac{1}{2}}.$$

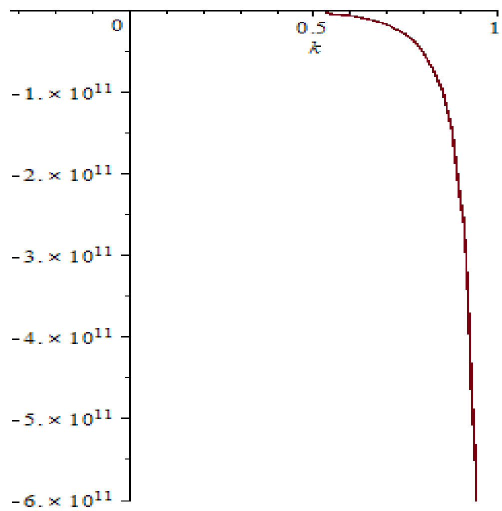

Figura 3.4: Gráfico $\langle \mathcal{L}_0(1+\phi), 1+\phi\rangle$.

Aqui $q(k_0)$ é uma função positiva complicada, a qual é a razão entre duas funções contendo várias potências de $k_0 \in \mathcal{I} \subset (0,1)$.

Finalmente, substituindo L_0, $M(\phi)$ e $F(\phi)$ em (3.31) resulta que $\langle \mathcal{L}_0(1+\phi), 1+\phi\rangle < 0$, como podemos observar no gráfico da função obtida e plotado pelo Maple 17, para um $c_0 > 1$ e $k_0 \in I$, ver Figura 3.4.

Portanto, a onda ϕ é um mínimo local de G e assim, concluímos sua estabilidade orbital em $X = H^2_{per}([0, L_0])$. $\square$

CAPÍTULO 4

ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES PARA A EQUAÇÃO DE KAWAHARA MODIFICADA

4.1 Equação de Kawahara Modificada

O objetivo neste capítulo é provar a estabilidade orbital de soluções periódicas tipo ondas viajantes da equação de Kawahara Modificada, dada pela equação

$$u_t + u^2 u_x + \gamma u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \tag{4.1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é periódica, com período $L > 0$ na variável espacial x e $\gamma \geq 0$. A equação (4.1) modela propagação de ondas em uma linha de transmissão não linear (ver [27]).

Uma solução tipo onda viajante $u(x,t) = \phi(x - ct)$, onde $c > 0$ é a velocidade de propagação da onda e $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função L-periódica. Ao substituirmos esta forma em (4.1), obtemos

$$c\phi' - \frac{1}{3}(\phi^3)' - \gamma\phi''' + \phi''''' = 0.$$

De forma que ao integrarmos esta última equação, encontramos

$$c\phi - \frac{1}{3}\phi^3 - \gamma\phi'' + \phi'''' + A = 0, \tag{4.2}$$

onde A é uma constante de integração.

A equação de Kawahara Modificada é uma equação diferencial dispersiva, e tem a forma

$$u_t + (f(u))_x - (\mathcal{M}u)_x = 0, \tag{4.3}$$

onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, u como descrita acima e com período $L > 0$ na variável espacial. Ainda, $\mathcal{M}$ é um operador diferencial ou pseudo diferencial satisfazendo (1.2) e (1.3). Em [5] e [41], os autores impõem condições suficientes para determinar estabilidade de soluções do tipo ondas viajantes para a equação (4.3), com isso tais referências serão base para obtenção do resultado desejado aqui.

Formalmente, equações do tipo (4.3) admitem as quantidades conservadas

$$P(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u\mathcal{M}u - W(u))dx,$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2 dx, \tag{4.4}$$

e

$$M(u) = \int_0^L u dx, \tag{4.5}$$

onde W denota a primitiva de f, ou seja, $W' = f$.

Dessa forma, a equação (4.1) possui as quantidades conservadas $F(u)$ e $M(u)$, como dadas em (4.4) e (4.5), respectivamente. Enquanto a quantidade $P(u)$ torna-se

$$P(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_{xx}^2 + \gamma u_x^2 - \frac{1}{6}u^4)dx. \tag{4.6}$$

Assim, ao considerarmos as quantidades conservadas (4.4)-(4.6), podemos definir o funcional de Lyapunov,

$$G(u) = P(u) + cF(u) + AM(u), \tag{4.7}$$

onde A é a constante de integração obtida na equação (4.2).

Observemos agora, que a solução ϕ de (4.2) é um ponto crítico de G, isto é, $G'(\phi) = 0$. Podemos assim, definir o operador linearizado $\mathcal{L}$ em torno da onda ϕ como

$$\mathcal{L} := G''(\phi) = \partial_x^4 - \gamma\, \partial_x^2 + c - \phi^2. \tag{4.8}$$

Quando na equação (4.3), $f(u) = u^{p+1}$ a equação obtida é a equação de Kawahara generalizada, dada por

$$u_t + u^p u_x + \gamma u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \tag{4.9}$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro. Para o caso $p = 1$, temos a equação de Kawahara, ou seja,

$$u_t + uu_x + \gamma u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0. \tag{4.10}$$

Os autores em [7] e [35], mostraram a estabilidade orbital de soluções periódicas tipo onda viajante explícita da forma

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \left(dn^2 \left(\frac{2K}{L} x, k \right) - \frac{E}{K} \right) + \alpha_3 \left(dn^4 \left(\frac{2K}{L} x, k \right) - (2 - k^2) \frac{2E}{3K} + \frac{1 - k^2}{3} \right), \tag{4.11}$$

onde α_1, α_2 e α_3 são parâmetros reais. Aqui, dn representa a função elíptica de Jacobi do tipo dnoidal, e $K = K(k)$ é a integral elíptica completa de primeiro tipo, $E = E(k)$ é a integral elíptica completa de segundo tipo e ambas são dependentes do módulo elíptico $k \in (0, 1)$. Para obtenção de mais detalhes desta solução ver [14] e [31].

A equação de Kawahara Modificada (4.1) é um caso particular da equação de Kawahara generalizada (4.9), com $p = 2$. E a solução periódica explícita para a equação (4.2) é dada por

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \left(dn^2 \left(\frac{2K(k)}{L} x, k \right) - \frac{E(k)}{K(k)} \right), \tag{4.12}$$

onde α_1 e α_2 dependem suavemente da velocidade de propagação da onda $c > 0$.

Uma vez que a solução explícita dada por (4.12) está determinada, é possível usar a abordagem feita em [9], com o objetivo de determinar o comportamento do espectro não positivo do operador $\mathcal{L}$ definido em (4.8). Com isso, podemos usar as recentes abordagens feitas em em [5] e [41] para estabelecer um resultado de estabilidade orbital para soluções positivas e periódicas associadas à equação (4.1).

Observamos que o resultado estabelecido em [9], que aqui será utilizado, consta no Capítulo 1 e destacamos a aplicação do Lema 1.16 e do Teorema 1.18.

4.2 Condições Básicas para Estabilidade Orbital

Para mostrar que uma solução tipo onda viajante da equação (4.1) é orbitalmente estável, seguiremos os argumentos em [5].

Considere o problema de Cauchy associado à equação (4.1), isto é

$$\begin{cases} u_t + u^2 u_x + \gamma u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \\ u(x,0) \;=\; u_0(x). \end{cases} \tag{4.13}$$

O problema de Cauchy (4.13) é localmente bem posto no espaço energia $X = H^2_{per}([0,L])$. Este resultado foi provado em [33]. Para o caso $\gamma = 0$, podemos considerar além deste já citado, que a boa colocação também decorre de resultados apresentados em [21], onde os autores utilizam estimativas Strichartz. A boa colocação global em X, pode ser obtida combinando a teoria local com a desigualdade de Gagliardo-Niremberg.

Considere agora o funcional $Q : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$Q(u) = \nu F(u) + \mu M(u), \tag{4.14}$$

onde ν e μ são números reais que podem ser escolhidos posteriormente. E ainda, F e M, estão definidos em (4.4) e (4.5).

Para um dado $\varepsilon > 0$, definimos a ε-vizinhança da órbita $O_\phi = \{\phi(\cdot + y); y \in \mathbb{R}\}$, como

$$U_\varepsilon := \{u \in X; \rho(u,\phi) < \varepsilon\}, \tag{4.15}$$

onde ρ é a semi-distância da Definição 3.1. Considere também o conjunto

$$\Upsilon_0 = \{u \in X; \langle Q'(\phi), u\rangle = 0\}, \tag{4.16}$$

aqui $\langle \cdot,\cdot \rangle$ representa o produto interno em $L^2_{per}([0,L])$. Observe que Υ_0 é exatamente o espaço tangente para $\{u \in X; Q(u) = Q(\phi)\}$ em ϕ.

Com o objetivo de provar a estabilidade desejada, seguimos as estratégias apresentadas em [17], [37] e [41]. Primeiramente, mostraremos que o operador $\mathcal{L}$, definido em (4.8), é estritamente positivo quando restrito ao espaço $\Upsilon_0 \cap \{\phi'\}^\perp$. Com este objetivo, suponhamos que a hipótese seguinte seja válida:

(H) Existe uma solução L-periódica $\phi \in C^\infty_{per}([0,L])$ de (4.2), com período $L > 0$ fixo. Além disso, o operador auto adjunto $\mathcal{L}$, possui um único autovalor negativo que é simples e zero é um autovalor simples cuja autofunção é ϕ'.

Lema 4.1 *Suponha que a hipótese (H) seja válida. Considere* Φ *uma função suave de tal forma que* $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi\rangle = 0$, *para todo* $\varphi \in \Upsilon_0$ *e* $\mathcal{I} := \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi\rangle < 0$. *Assim, existe* $a > 0$ *tal que* $\langle \mathcal{L}v, v\rangle \geq a \parallel v \parallel_X^2$, *para todo* $v \in \Upsilon_0 \cap \{\phi'\}^{\perp}$.

Demonstração: Ver Proposição 4.12 em [17]. □

O Lema 4.1 é útil para estabelecer o resultado a seguir.

Lema 4.2 *Considerando válidas as hipóteses do Lema 4.1, existem* $N > 0$, *e* $\tau > 0$ *tais que*

$$\langle \mathcal{L}v, v\rangle + 2N\langle Q'(\phi), v\rangle^2 \geq \tau \parallel v \parallel_X^2,$$

para todo $v \in \{\phi'\}^{\perp}$.

Demonstração: Dado $v \in \{\phi'\}^{\perp}$ defina $z = v - \zeta w$, onde $w = \dfrac{Q'(\phi)}{\parallel Q'(\phi) \parallel_{L^2_{per}}}$ e $\zeta = \langle v, w\rangle$. Como $\langle Q'(\phi), \phi'\rangle = 0$, temos

$$\langle z, \phi'\rangle = \langle v, \phi'\rangle - \frac{1}{\parallel Q'(\phi) \parallel_{L^2_{per}}^2}\langle v, Q'(\phi)\rangle\langle Q'(\phi), \phi'\rangle = 0.$$

E por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle Q'(\phi), z\rangle &= \langle Q'(\phi), v - \zeta w\rangle \\ &= \langle Q'(\phi), v - v\rangle \frac{\langle Q'(\phi), Q'(\phi)\rangle}{\parallel Q'(\phi) \parallel_{L^2_{per}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $z \in \Upsilon_0 \cap \{\phi'\}^{\perp}$. Além disso, como

$$\langle \mathcal{L}v, v\rangle = \zeta^2\langle \mathcal{L}w, w\rangle + 2\zeta\langle \mathcal{L}w, z\rangle + \langle \mathcal{L}z, z\rangle,$$

do Lema 4.1, segue que

$$\langle \mathcal{L}v, v\rangle \geq \zeta^2\langle \mathcal{L}w, w\rangle + 2\zeta\langle \mathcal{L}w, z\rangle + a \parallel z \parallel_X^2 . \tag{4.17}$$

Usando as desigualdade de Cauchy-Schwarz e de Young, temos

$$|2\zeta\langle \mathcal{L}w, z\rangle| \leq \frac{a}{2} \parallel z \parallel_X^2 + \frac{2\zeta^2}{a} \parallel \mathcal{L}w \parallel_X^2,$$

donde segue que,

$$2\zeta\langle \mathcal{L}w, z\rangle \geq -\frac{a}{2} \parallel z \parallel_X^2 -\frac{2\zeta^2}{a} \parallel \mathcal{L}w \parallel_X^2 . \tag{4.18}$$

Escolhendo $N > 0$ dependendo apenas de ϕ tal que

$$\langle \mathcal{L}w, w\rangle - \frac{2}{a} \parallel \mathcal{L}w \parallel_X^2 +2N \parallel Q'(\phi) \parallel_{L^2_{per}} \geq \frac{a}{2} \parallel w \parallel_X^2 . \tag{4.19}$$

Lembrando que $z = v - \zeta w$ e $w = \dfrac{Q'(\phi)}{\parallel Q'(\phi) \parallel_{L^2_{per}}}$, temos

$$\langle \mathcal{L}v, v\rangle + 2N\langle Q'(\phi), v\rangle^2 = \langle \mathcal{L}v, v\rangle + 2N\zeta^2 \parallel Q'(\phi) \parallel_{L^2_{per}},$$

assim, usando (4.17)-(4.19), segue a desigualdade

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}v, v\rangle + 2N\zeta^2 \parallel Q'(\phi) \parallel_{L^2_{per}} &\geq a \parallel z \parallel_X^2 +\frac{a}{2}\zeta^2 \parallel w \parallel_X^2 +2\zeta\langle \mathcal{L}w, z\rangle + \frac{2\zeta}{a} \parallel \mathcal{L}w \parallel_X^2 \\ &\geq \frac{a}{2}(\zeta^2 \parallel w \parallel_X^2 + \parallel z \parallel_X^2) \\ &\geq \tau \parallel v \parallel_X^2,\end{aligned}$$

onde $\tau > 0$ é uma constante que não depende de $v \in \{\phi'\}^\perp$. E assim, a demonstração está completa. □

Agora, considere $N > 0$ a constante obtida no Lema 4.2 e defina o funcional modificado de Lyapunov $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$V(u) = G(u) - G(\phi) + N(Q(u) - Q(\phi))^2, \tag{4.20}$$

onde G é o funcional definido em (4.7). Dessa forma, temos que $V(\phi) = 0$ e além disso, como ϕ é solução de (4.2), segue que $A = -c\phi + \frac{1}{3}(\phi^3) + \gamma\phi'' - \phi''''$ e assim $V(\phi') = 0$.

Lema 4.3 *Considerando as hipóteses do Lema 4.1, existem $\alpha > 0$ e $D > 0$ tais que*

$$V(u) \geq D\rho(u, \phi)^2,$$

para todo $u \in U_\alpha$.

Demonstração: Da definição de V, segue que

$$\langle V''(u)v,v\rangle = \langle G''(u)v,v\rangle + 2N(Q(u)-Q(\phi))\langle Q''(u)v,v\rangle + 2N\langle Q'(u),v\rangle^2,$$

para todo $u, v \in X$. Daí, para $u=\phi$

$$\begin{aligned} \langle V''(\phi)v,v\rangle &= \langle G''(\phi)v,v\rangle + 2N(Q(\phi)-Q(\phi))\langle Q''(u)v,v\rangle + 2N\langle Q'(\phi),v\rangle^2 \\ &= \langle \mathcal{L}v,v\rangle + 2N\langle Q'(\phi),v\rangle^2. \end{aligned}$$

Portanto, decorre do Lema 4.2, que existe $\tau > 0$ tal que

$$\langle V''(\phi)v,v\rangle \geq \tau \parallel v \parallel_X^2, \tag{4.21}$$

para todo $v \in \{\phi'\}^\perp$. Por outro lado, da expansão de Taylor de V em torno de ϕ, segue que

$$V(u) = V(\phi) + \langle V'(\phi), u-\phi\rangle + \frac{1}{2}\langle V''(\phi)(u-\phi), u-\phi\rangle + h(u), \tag{4.22}$$

onde $\lim\limits_{u\to\phi} \frac{h(u)}{\|u-\phi\|_X^2} = 0$. Dessa forma, pode-se escolher $\alpha_1 > 0$ tal que

$$|h(u)| \leq \frac{\tau}{4} \parallel u-\phi \parallel_X^2, \tag{4.23}$$

para todo $u \in B_{\alpha_1}$, onde $B_{\alpha_1} = \{u \in X; \parallel u-\phi \parallel_X < \alpha_1\}$.

Considerando que $V(\phi)=0$ e $V'(\phi)=0$, temos de (4.21) $-$ (4.23) que

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{1}{2}\langle V''(\phi)(u-\phi), u-\phi\rangle + h(u) \\ &\geq \frac{1}{2}\tau \parallel u-\phi \parallel_X^2 - \frac{1}{4}\tau \parallel u-\phi \parallel_X^2 \\ &= \frac{1}{4}\tau \parallel u-\phi \parallel_X^2 . \end{aligned}$$

Portanto, $V(u) \geq \dfrac{\tau}{4}\rho(u,\phi)^2$, para todo $u \in B_{\alpha_1}$ tal que $(u-\phi) \in \{\phi'\}^\perp$. Agora, definamos a aplicação suave $S : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$S(u,r) = \langle u(\cdot - r), \phi'\rangle.$$

Considerando que $S(\phi,0)=0$ e $\dfrac{\partial S}{\partial r}(\phi,0) = -\langle \phi', \phi'\rangle \neq 0$, nós garantimos, do Teorema da Função Implícita, a existência de $\alpha_2 > 0$, $\delta_0 > 0$ e uma única função de classe C^1, dada por $r : B_{\alpha_2}(\phi) \longrightarrow (-\delta_0, \delta_0)$ tal que $r(\phi) = 0$ e $S(u, r(u)) = 0$, para todo $u \in B_{\alpha_2}(\phi)$. A prova é concluída com argumentos similares aos apresentados por [24], no Lema 4.6 e por [12], no Lema 5.6. □

O Lema 4.3 é essencial para provar a estabilidade orbital desejada. V é um funcional de Lyapunov conveniente para trabalhar com nosso problema. O teorema a seguir é o resultado de estabilidade.

Teorema 4.4 *Suponha que as hipóteses do Lema 4.1 sejam válidas, então ϕ é orbitalmente estável em X pelo fluxo periódico da equação (4.1), dada por*

$$u_t + u^2 u_x + \gamma u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0. \tag{4.24}$$

Demonstração: Considere $\alpha > 0$ como a constante obtida no Lema 4.3. Como V é contínua em ϕ, então para um dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in (0, \alpha)$ tal que se $\| u_0 - \phi \|_X < \delta$, dada a relação $V(u_0) = V(u_0) - V(\phi) < D\varepsilon^2$, onde $D > 0$ é a constante obtida no Lema 4.3.

A continuidade em relação ao tempo da função $\rho(u(t), \phi) < \alpha$ permite escolher $T > 0$ de forma que

$$\rho(u(t), \phi) < \alpha, \ para\ todo\ t \in [0, T). \tag{4.25}$$

Assim, obtemos $u(t) \in U_\alpha$, para todo $t \in [0, T)$. Combinando o Lema **??** e o fato de que $V(u(t)) = V(u_0)$ para todo $t \geq 0$, temos

$$\rho(u(t), \phi) < \epsilon, \ para\ todo\ t \in [0, T). \tag{4.26}$$

Agora, resta provarmos que $\rho(u(t), \phi) < \alpha$, para todo $t \in [0, +\infty)$, de onde concluiremos a estabilidade orbital. De fato, considere $T_1 > 0$ como o supremo dos valores de $T > 0$ tal que seja válida (4.25). Suponhamos por contradição que T_1<+∞. Escolhendo $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$, obtemos de (4.26) que $\rho(u(t), \phi) < \frac{\alpha}{2}$, para todo $t \in [0, T_1)$. Como $t \in [0, +\infty) \longmapsto \rho(u(t), \phi)$ é contínua, existe $T_0 > 0$ tal que $\rho(u(t), \phi) < \frac{3}{4}\alpha < \alpha$, para todo $t \in [0, T_1 + T_0)$, o que contraria a maximalidade de T_1. Portanto, $T_1 = +\infty$ e o teorema está provado. □

4.3 Estabilidade de Ondas Periódicas da Equação de Kawahara Modificada

Nesta seção, aplicaremos os argumentos desenvolvidos na Seção 4.2 com o objetivo de obter a estabilidade orbital para a equação (4.1) no caso onde $\gamma = 0$, isto é,

$$u_t + u^2 u_x - u_{xxxxx} = 0. \tag{4.27}$$

Considerando uma solução tipo onda viajante periódica na forma $u(x,t) = \phi(x-ct)$, com $c > 0$ e substituindo na equação (4.27), obtemos

$$\phi''''' + c\phi' - \frac{1}{3}(\phi^3)' = 0.$$

Integrando, obtemos que (ϕ) é solução da equação diferencial ordinária não-linear

$$\phi'''' + c\phi - \frac{1}{3}(\phi^3) + A = 0. \tag{4.28}$$

Como foi mencionado na Seção 4.1, a equação (4.28) admite solução explícita L-periódica dada pelo ansatz

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \left(dn^2 \left(\frac{2K(k)}{L} x, k \right) - \frac{E(k)}{K(k)} \right), \tag{4.29}$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{8\sqrt{10}K(k)[K(k)k^2 - 2K(k) + 3E(k)]}{L^2}, \tag{4.30}$$

$$\alpha_2 = \frac{24\sqrt{10}K(k)^2}{L^2}. \tag{4.31}$$

α_1 e α_2 foram obtidos usando o programa Maple 17.

Além disso, é interessante observarmos que se $L > 0$ for fixo, k é um parâmetro livre e estabelece uma curva suave de soluções periódicas para a equação (4.28), $k \longmapsto \phi := \phi_{(c(k),A(k))}$ tal que

$$c(k) = \frac{384(k^4 - k^2 + 1)K^4(k)}{L^4} \tag{4.32}$$

e

$$A(k) = \frac{-2048\sqrt{10}(k^2-2)K(k)^6(2k^2-1)(k^2+1)}{3L^6}. \tag{4.33}$$

É importante salientar, que a razão para considerarmos $\gamma = 0$ na equação (4.1) é porque o caso $\gamma \neq 0$ possui uma solução onda viajante periódica similar a obtida em (4.29) com um perfil fechado dependendo da função elíptica de Jacobi do tipo dnoidal. Neste caso, a onda periódica tem constantes α_1, α_2, c e A complicadas, que assim como as acima apresentadas dependem do módulo elíptico $k \in (0,1)$ e período $L > 0$. Em particular, para $\gamma = 1$, obtemos

$$\phi(x) = \alpha + \beta\left(dn^2\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right) - \frac{E(k)}{K(k)}\right),$$

onde

$$\alpha = \frac{8\sqrt{10}K(k)[K(k)((k)^2-2)+240E(k)]}{L^2} + \frac{\sqrt{10}}{10},$$
$$\beta = \frac{24\sqrt{10}K(k)^2}{L^2}$$

e

$$c = \frac{384(k^4-k^2+1)K(k)^4}{L^4} + \frac{1}{10L^4},$$

A questão sobre a estabilidade desta onda periódica pode ser tratada por um meio similar com as modificações necessárias.

Considerando ainda a equação (4.27), obteremos as propriedades espectrais relacionadas ao operador $\mathcal{L} = \partial_x^4 + c - \phi^2$, que são exigidas em (H). Para fazer isto, utilizaremos o Teorema 1.18 resultado de [9], para mais detalhes ver Seção 1.4.

Proposição 4.5 *Suponha que ϕ seja uma solução positiva e par da equação (4.28), tal que $\hat{\phi} > 0$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g(x)) < 0, x \neq 0$, onde g é uma função real tal que $g(n) = \hat{\phi}(n), n \geq 0$. Então, o autovalor $\mathcal{L}$ possui um único autovalor negativo o qual é simples e zero é um autovalor simples cuja autofunção é ϕ'.*

Com estes dados estabelecidos, podemos provar a estabilidade orbital da onda ϕ que satisfaz a equação (4.1), através do próximo resultado.

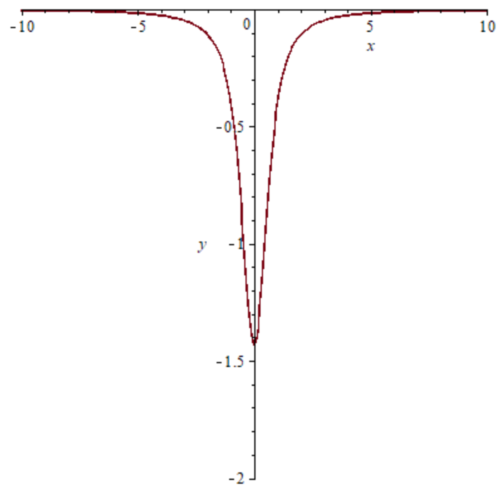

Figura 4.1: Gráfico $G(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g_k(x))$, para $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Teorema 4.6 *As ondas periódicas em (4.29) são orbitalmente estáveis no sentido da Definição 1.5.*

Demonstração*: Com efeito, de acordo com [31], a solução ϕ dada por (4.29) tem expansão de Fourier*

$$\phi(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma csch\left(\frac{n\pi K(k')}{K(k)}\right)\cos(\frac{2\pi nx}{L}), \tag{4.34}$$

onde $\Gamma = \dfrac{b\pi^2}{K^2(k)}$ *e* $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Portanto, como pode ser visto em (5.15), os coeficientes de Fourier de ϕ são dados por

$$\hat{\phi}(n) = \begin{cases} a, & n = 0, \\ \dfrac{\Gamma}{2}\, n\ csch\left(\dfrac{n\pi K(k')}{K(k)}\right), & n \neq 0. \end{cases} \tag{4.35}$$

Considere

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \frac{\Gamma}{2}\, x\ csch\left(\frac{x\pi K(k')}{K(k)}\right) \\ &= \frac{12\sqrt{10}}{L^2}\pi^2\ xcsch\left(\frac{x\pi K(k')}{K(k)}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, é possível ver pelo gráfico da função $G(x)$, apresentado na Figura 4.6, para $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que

$$G(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g_k(x)) < 0,$$

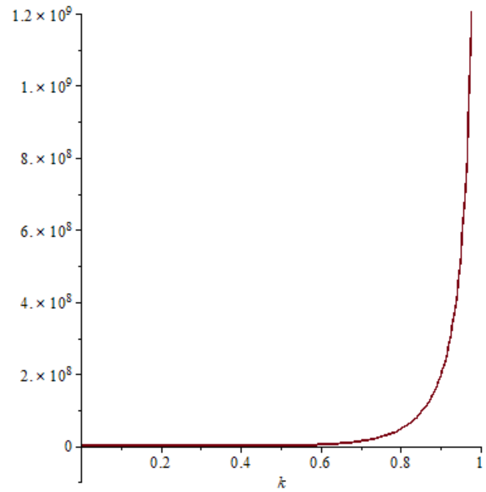

Figura 4.2: Gráfico f(k).

para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando a Proposição 4.5, obtemos que $\mathcal{L}$ possui um único autovalor negativo que é simples e zero é um autovalor simples cuja autofunção é ϕ'. Donde se conclui que neste caso a hipótese (H) é válida.

O próximo passo é determinar Φ, como indicado no Lema 4.1. Com isto em mente, considere $\Phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial k}$ e observe que da equação (4.28)

$$\mathcal{L}\Phi = -\frac{\partial c}{\partial k}\phi - \frac{\partial A}{\partial k}. \tag{4.36}$$

A igualdade acima nos leva a escolher $\nu = \dfrac{\partial c}{\partial k}$ e $\mu = \dfrac{\partial A}{\partial k}$, visto que c e A, dadas em (4.32) e (4.33) respectivamente, dependem suavemente apenas do módulo k. Assim, obtemos

$$Q(u) = \frac{\partial c}{\partial k}F(u) + \frac{\partial A}{\partial k}M(u)$$

e

$$\mathcal{L}\Phi = -Q'(\phi).$$

Portanto, temos

$$\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi\rangle = \langle -Q'(\phi), \varphi\rangle = 0,$$

para todo $\varphi \in \Upsilon_0$ e

$$\mathcal{I} = \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi\rangle = \langle -Q'(\phi), \Phi\rangle = -\frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}F(\phi) - \frac{\partial A}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}M(\phi).$$

Utilizando a solução explícita dada por (4.29), é possível deduzir que

$$M(\phi) = \alpha_1 L \quad e \qquad F(\phi) = \frac{480K^3(k)}{L^4}[k^2L + 2L(\frac{k^4 - k^2 + 1}{3})K(k)],$$

de onde obtemos

$$\langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle = -\frac{1}{L^7} f(k),$$

onde f é uma complicada função positiva que depende suavemente do módulo $k \in (0, 1)$, ver Figura 4.2. Isto prova a condição exigida no Lema 4.1. Finalmente, do Teorema 4.4, concluímos que ϕ é estável em $X = H^2_{per}([0, L])$ pelo fluxo periódico de (4.27). □

CAPÍTULO 5

APÊNDICES

5.1 Espaços de Sobolev Periódicos

Considerando que os resultados deste trabalho estão relacionados a soluções periódicas de equações da forma (1.1), nesta seção serão apresentados conceitos e resultados relacionados a funções periódicas. Destacamos aqui o conceito de transformada de Fourier para funções periódicas o qual é necessário para definirmos os espaços de Sobolev periódicos. Além disso, os coeficientes de Fourier são essenciais para um importante resultado de positividade com objetivo de determinarmos propriedades espectrais.

Como principal referência, utilizamos Iório e Iório, e assim em [23] encontram-se mais detalhes.

Definição 5.1 *A transformada de Fourier de uma função* $f \in L^1(\mathbb{R})$*, denotada por* $\widehat{f}$*, é definida por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx, \;\; onde \;\; \xi \in \mathbb{R}.$$

O Teorema de Plancherel possibilita definir a transformada de Fourier de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$. Para maiores detalhes, sugerimos [39] e [44].

Seja $L > 0$ um número real fixado. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita periódica de período L se, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale $f(x + L) = f(x)$. O conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, infinitamente diferenciáveis e periódicas com período L será denotado por $\mathcal{P} = C^{\infty}_{per} = C^{\infty}_{per}([0, L])$. Aqui, $\mathcal{P}'$ denota o espaço das distribuições periódicas, ou seja, é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos de $\mathcal{P}$ em $\mathbb{C}$. O valor de $\psi \in \mathcal{P}'$ em $\phi \in \mathcal{P}$ é

$$\psi(\phi) = [\psi, \phi].$$

Definimos agora a Transformada de Fourier para funções periódicas.

Definição 5.2 *Seja $k \in \mathbb{Z}$ e a função $\Theta_k(x) = e^{\frac{2\pi i x k}{L}}$, para todos $x \in \mathbb{R}$. A Transformada de Fourier de $\psi \in \mathcal{P}'$ é a função $\widehat{\psi} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{\psi}(k) = \frac{1}{L}[\psi, \Theta_{-k}],$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

O espaço das sequências rapidamente decrescentes, denotado por $S(\mathbb{Z})$, é o conjunto de todas a sequências de valores complexos $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, tais que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^j |\alpha_k| < \infty, \qquad \forall \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

A transformada de Fourier inversa de $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in S(\mathbb{Z})$ é uma função $\check{\alpha} \in \mathcal{P}$ dada por,

$$\check{\alpha}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k \Theta_k.$$

Toda função $\psi \in L^P([0, L]),\ p \geq 1$, é um elemento de $\mathcal{P}'$, o qual é definido por

$$[\psi, \phi] = \frac{1}{L}\int_0^L \psi(x)\phi(x)dx,$$

onde $\phi \in \mathcal{P}$.

Se $\psi \in L^p([0, L]), p \geq 1$, então para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\psi}(k) = \frac{1}{L}\int_0^L \psi(x) e^{\frac{-2ik\pi x}{L}}, \qquad \forall \ k \in \mathbb{Z}.$$

Define-se o espaço ℓ^2, como o espaço das sequências $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de forma que

$$\ell^2 = \{\alpha; \| \ \alpha \ \|_{\ell^2} := (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

Para $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev $H^s_{per}([0,L]) := H^s_{per}$ é definido como sendo o conjunto de todas as distribuições periódicas $f \in \mathcal{P}'$ tal que,

$$\| f \|^2_{H^s_{per}} = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

O espaço $H^s_{per}([0,L])$ munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle_{H^s_{per}([0,L])} = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)},$$

é um espaço de Hilbert.

Para caso particular $s=0$, definimos $L^2_{per}([0,L]) := H^0_{per}([0,L])$, o qual é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle_{L^2_{per}([0,L])} = \int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx, \quad \forall\, f, g \in L^2_{per}([0,L])$$

e norma $\| \cdot \|_{L^2_{per}([0,L])}$.

Temos ainda que, para todo $s \in \mathbb{R}$, o dual topológico de $H^s_{per}([0,L])$ é $(H^s_{per}([0,L]))'$, o qual é isometricamente isomorfo ao espaço $H^{-s}_{per}([0,L])$. Para $f \in H^{-s}_{per}([0,L])$ e $g \in H^s_{per}([0,L])$, o par dualidade é dado por

$$[f,g]_{H^{-s}_{per}([0,L]),H^s_{per}([0,L])} = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Considerando $s > r$, onde $r, s \in \mathbb{R}$, temos que $H^s_{per}([0,L]) \hookrightarrow H^r_{per}([0,L])$, segue daí e de $H^0_{per}([0,L]) = L^2_{per}([0,L])$ que para todo $s \geq 0$,

$$H^s_{per}([0,L]) \hookrightarrow L^2_{per}([0,L]).$$

E ainda, para todo $m_i \in [1,+\infty],\ i = 1,\ 2$, com $m_1 \geq m_2$, é válido que

$$H^1_{per}([0,L]) \hookrightarrow L^{m_1}_{per}([0,L]) \hookrightarrow L^{m_2}_{per}([0,L]),$$

onde

$$L^m_{per}([0,L]) := \{f; f \text{ é } L-\text{periódica e } f_{|_{[0,L]}} \in L^m([0,L])\}$$

e

$$\| f \|_{L^m_{per}([0,L])} = \| f \|_{L^m([0,L])},$$

para todo $f \in L^m_{per}([0,L])$.

5.2 Funções Elípticas de Jacobi

Considerando que as equações estudadas neste trabalho possuem solução com perfil dnoidal, apresentamos algumas propriedades sobre as Funções Elípticas de Jacobi. Para uma leitura mais completa sobre tais funções sugerimos [13] e [14].

Definição 5.3 *Considere $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $k \in (0,1)$. A Integral Elíptica de Primeiro Tipo é dada por*

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2sen^2\theta}} \equiv F(\varphi,k), \tag{5.1}$$

onde $y = sen\varphi$. No caso $y = 1$, a integral elíptica é dita completa e assim,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2sen^2\theta}} \equiv K(k), \tag{5.2}$$

torna-se a Integral de Elíptica Completa de Primeiro Tipo. Além disso, k é denominado módulo elíptico e $k' = \sqrt{1-k^2}$ é o módulo elíptico complementar. O parâmetro φ é denominado argumento da integral elíptica.

Definimos também a Integral Elíptica de segundo tipo.

Definição 5.4 *A Integral Elíptica de Segundo Tipo é dada por*

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2sen^2\theta}d\theta \equiv E(\varphi,k), \tag{5.3}$$

aqui também $y = sen\varphi$, assim como $k \in (0,1)$. A Integral Elíptica Completa de Segundo tipo é dada por

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2sen^2\theta}d\theta \equiv E(k). \tag{5.4}$$

Para definirmos algumas funções elípticas relacionadas com as integrais acima definidas, é relevante observarmos que $\lim\limits_{k\to 0^+} K(k) = \lim\limits_{k\to 0^+} E(k) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{k\to 1^-} K(k) = +\infty(k)$ e $\lim\limits_{k\to 1^-} E(k) = 1$.

Consideremos a seguinte função

$$u(y_1;k) \equiv \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2sen^2\theta}} \equiv F(\varphi_1,k), \tag{5.5}$$

onde $\varphi_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e $y_1 = sen(\varphi_1)$. Para k fixo, u é uma função estritamente crescente na variável y_1. Ainda para k fixado, a inversa da função u é definida como a função senoidal, dada por

$$sn(u;k) \equiv sen(\varphi_1) = y_1,$$

onde $\varphi_1 = am(u;k)$ é a função amplitude de u. A partir da função senoidal define-se as funções elípticas denominadas de cnoidal e dnoidal, e dadas por

$$cn(u;k) \equiv \sqrt{1-y_1^2} = \sqrt{1-sn^2(u;k)}$$

e

$$dn(u;k) \equiv \sqrt{1-k^2y_1^2} = \sqrt{1-k^2sn^2(u;k)},$$

respectivamente. As funções senoidal, cnoidal e dnoidal são normalizadas fazendo-se uso de $sn(0;k) = 0$, $cn(0;k) = 1$ e $dn(0;k) = 1$. Temos ainda, que as a função $cn(;k)$ e $dn(;k)$ são pares enquanto $sn(;k)$ é ímpar. Além disso, estas funções são periódicas, de forma que

$$sn(u+4K;k) = sn(u;k),$$

$$cn(u+4K;k) = cn(u;k)$$

e

$$dn(u+2K;k) = dn(u;k).$$

5.3 Coeficientes de Fourier

As soluções das equações apresentadas aqui possuem perfil dnoidal. Mais especificamente, as equações de Kawahara Modificada e equação de Kawahara Modificada Regularizada possuem soluções do tipo

$$\phi_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2 dn^2\left(\frac{2K\pi}{L}x, k\right). \tag{5.6}$$

Enquanto, a equação de Kawahara Regularizada possui solução da forma

$$\phi_2(x) = \beta_1 + \beta_2 dn^2\left(\frac{2K\pi}{L}x, k\right) + \beta_3 dn^4\left(\frac{2K\pi}{L}x, k\right), \tag{5.7}$$

onde dn é a Função Elíptica de Jacobi, ver [13] e [14], denominada dnoidal, $k \in (0,1)$ é o módulo elíptico, α_1, α_2, β_1, β_2 e β_3 são parâmetros que dependem suavemente de k. $K = K(k)$ é a integral elíptica completa de primeiro tipo e $L > 0$ é o período da função. Como objetivamos determinar as propriedades espectrais de $\mathcal{L}$ através do Teorema 1.18, faz-se necessário calcularmos os coeficientes de Fourier das soluções (5.12) e (5.13), que são os coeficientes a_0, a_n e b_n, onde

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right].$$

Como dn é uma função par, $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Para determinar a_0 e a_n, utilizaremos [31] que fornece expressões para estes coeficientes. Donde,

$$dn^2\left(\frac{2Kx}{L}, k\right) = \frac{E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\cos\left(\frac{2nK\pi}{L}x\right),$$

onde $E = E(k)$ é a integral elíptica de Jacobi completas de segundo tipo, $k' = \sqrt{1-k^2}$ é o modulo elíptico complementar e $q = exp(\frac{-\pi k'}{k})$. Denotaremos, aqui $K' = K(k')$.

Para determinar potências pares da função dnoidal a expressão é

$$k^{2r+2}dn^{2r+2}\left(\frac{2Kx}{L}, k\right) = \mathcal{P}_d^{(r)} + \frac{2\pi^2k^2}{K^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\mathcal{R}_{d,n}^{(r)}\cos\left(\frac{2nK\pi}{L}x\right), \quad r = 1, 2, 3, ...,$$

onde $\mathcal{P}_d^r$ e $\mathcal{R}_{d,n}^r$ são expressões dadas em [31].

Assim, para $r = 1$, ou seja, $dn^4\left(\frac{2K}{L}x, k\right)$ é dado por

$$\begin{aligned} dn^4\left(\frac{2K}{L}x, k\right) &= \frac{2E}{3K}(2-k^2) - \frac{1-k^2}{3} \\ &+ \frac{2\pi^2}{3k^4K^2}\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left[2(2-k^2) + \frac{n^2\pi^2}{2K^2}\right]\cos\left(\frac{2nK\pi}{L}x\right)\}. \end{aligned}$$

Com estas expressões em mente, reescrevemos de forma conveniente (5.12), tornando-se

$$\phi_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2\left(dn^2\left(\frac{2K}{L}x, k\right) - \frac{E}{K}\right). \tag{5.8}$$

Logo, a expansão de Fourier de ϕ_1 é dada por

$$\phi_1(x) = \alpha_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma csch\left(\frac{n\pi K'}{K}\right)\cos\left(\frac{2nk\pi}{L}x\right),$$

onde $\Gamma = \frac{\alpha_2 \pi^2}{K^2}$. Considerando que $q = \exp(\frac{-\pi K'}{K})$ e $csch(z) = \dfrac{2}{e^z - e^{-z}}$, $z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = \frac{1}{2} csch\left(\frac{n\pi K'}{K}\right),$$

e os coeficientes de Fourier são da forma

$$\widehat{\phi_1}(x) = \begin{cases} \alpha_1, & n = 0, \\ \frac{\Gamma}{2} n\ csch(\frac{n\pi K'}{K}), & n \neq 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Seguindo os mesmos passos, a solução (5.13), torna-se

$$\phi_2(x) = \beta_1 + \beta_2 \left(dn^2\left(\frac{2K}{L}x, k\right) - \frac{E}{K}\right) + \beta_3\left(dn^4\left(\frac{2K}{L}x, k\right) - (2-k^2)\frac{2E}{3K} + \frac{1-k^2}{3}\right). \tag{5.10}$$

Assim,

$$\phi_2(x) = \beta_1 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} ncsch\left(\frac{n\pi K'}{K}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right),$$

e os coeficientes de Fourier são

$$\widehat{\phi_2}(x) = \begin{cases} \beta_1, & n = 0 \\ \frac{\gamma}{2} n\ csch(\frac{n\pi K'}{K}), \end{cases} \tag{5.11}$$

onde $\gamma = \dfrac{\beta_2 \pi^2}{K^2} + \dfrac{\beta_3 \pi^2}{k^2 K^2}\left[\dfrac{2(2-k^2)}{3} + \dfrac{n^2\pi^2}{6K}\right]$.

As soluções das equações apresentadas aqui possuem perfil dnoidal. Mais especificamente, as equações de Kawahara Modificada e equação de Kawahara Modificada Regularizada possuem soluções do tipo

$$\phi_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2 dn^2\left(\frac{2K\pi}{L}x, k\right). \tag{5.12}$$

Enquanto, a equação de Kawahara Regularizada possui solução da forma

$$\phi_2(x) = \beta_1 + \beta_2 dn^2\left(\frac{2K\pi}{L}x, k\right) + \beta_3 dn^4\left(\frac{2K\pi}{L}x, k\right), \tag{5.13}$$

onde dn é a Função Elíptica de Jacobi, ver [13] e [14], denominada dnoidal, $k \in (0,1)$ é o módulo elíptico, α_1, α_2, β_1, β_2 e β_3 são parâmetros que dependem suavemente de k. $K = K(k)$ é a integral elíptica completa de primeiro tipo e $L > 0$ é o período da função. Como objetivamos determinar as propriedades espectrais de $\mathcal{L}$ através do Teorema 1.18, faz-se necessário calcularmos os coeficientes de Fourier das soluções (5.12) e (5.13), que são os coeficientes $a_0, \ \ a_n$ e b_n, onde

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right].$$

Como dn é uma função par, $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Para determinar a_0 e a_n, utilizaremos [31] que fornece expressões para estes coeficientes. Donde,

$$dn^2\left(\frac{2Kx}{L}, k\right) = \frac{E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos\left(\frac{2nK\pi}{L}x\right),$$

onde $E = E(k)$ é a integral elíptica de Jacobi completas de segundo tipo, $k' = \sqrt{1-k^2}$ é o modulo elíptico complementar e $q = exp(\frac{-\pi k'}{k})$. Denotaremos, aqui $K' = K(k')$.

Para determinar potências pares da função dnoidal a expressão é

$$k^{2r+2} dn^{2r+2}\left(\frac{2Kx}{L}, k\right) = \mathcal{P}_d^{(r)} + \frac{2\pi^2 k^2}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \mathcal{R}_{d,n}^{(r)} \cos\left(\frac{2nK\pi}{L}x\right), \quad r = 1, 2, 3, ...,$$

onde $\mathcal{P}_d^r$ e $\mathcal{R}_{d,n}^r$ são expressões dadas em [31].

Assim, para $r = 1$, ou seja, $dn^4\left(\frac{2K}{L}x, k\right)$ é dado por

$$\begin{aligned} dn^4\left(\frac{2K}{L}x, k\right) &= \frac{2E}{3K}(2-k^2) - \frac{1-k^2}{3} \\ &+ \frac{2\pi^2}{3k^4K^2}\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \left[2(2-k^2) + \frac{n^2\pi^2}{2K^2}\right] \cos\left(\frac{2nK\pi}{L}x\right)\}. \end{aligned}$$

Com estas expressões em mente, reescrevemos de forma conveniente (5.12), tornando-se

$$\phi_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \left(dn^2\left(\frac{2K}{L}x, k\right) - \frac{E}{K} \right). \tag{5.14}$$

Logo, a expansão de Fourier de ϕ_1 é dada por

$$\phi_1(x) = \alpha_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma csch\left(\frac{n\pi K'}{K}\right) \cos\left(\frac{2nk\pi}{L}x\right),$$

onde $\Gamma = \frac{\alpha_2 \pi^2}{K^2}$. Considerando que $q = \exp(\frac{-\pi K'}{K})$ e $csch(z) = \dfrac{2}{e^z - e^{-z}}$, $z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = \frac{1}{2} csch\left(\frac{n\pi K'}{K}\right),$$

e os coeficientes de Fourier são da forma

$$\widehat{\phi_1}(x) = \begin{cases} \alpha_1, & n = 0, \\ \frac{\Gamma}{2} n\, csch(\frac{n\pi K'}{K}), & n \neq 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Seguindo os mesmos passos, a solução (5.13), torna-se

$$\phi_2(x) = \beta_1 + \beta_2 \left(dn^2 \left(\frac{2K}{L} x, k \right) - \frac{E}{K} \right) + \beta_3 \left(dn^4 \left(\frac{2K}{L} x, k \right) - (2 - k^2) \frac{2E}{3K} + \frac{1 - k^2}{3} \right). \tag{5.16}$$

Assim,

$$\phi_2(x) = \beta_1 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} ncsch \left(\frac{n\pi K'}{K} \right) \cos \left(\frac{2k\pi}{L} x \right),$$

e os coeficientes de Fourier são

$$\widehat{\phi_2}(x) = \begin{cases} \beta_1, & n = 0 \\ \frac{\gamma}{2} n\, csch(\frac{n\pi K'}{K}), \end{cases} \tag{5.17}$$

onde $\gamma = \dfrac{\beta_2 \pi^2}{K^2} + \dfrac{\beta_3 \pi^2}{k^2 K^2} \left[\dfrac{2(2 - k^2)}{3} + \dfrac{n^2 \pi^2}{6K} \right]$.

Capítulo 6

Comentários e Estudos Futuros

Ainda existem muitos problemas envolvendo equações diferenciais dispersivas com não linearidades em aberto. Os métodos aqui utilizados, estabelecidos em [5] e [18], podem ser aplicados para obtenção de estabilidade orbital de outras equações, ou mesmo para melhorar condições em resultados já estabelecidos.

Em especial, o critério de estabilidade aqui apresentado no Capítulo 3, traz um grande avanço no estudo de estabilidade orbital de equações regularizadas com não-linearidade $f(u) = \frac{u^2}{2}$, principalmente para equações onde não é possível construir superfícies ou curvas de ondas, como foi o caso da equação de Kawahara regularizada. Por este motivo, este método poderá ser amplamente aplicado. Inclusive em problemas com $A \equiv 0$ ou com média zero.

Considerando ainda que, os critérios acima mencionados são baseados em resultados de [41], onde o próprio autor menciona que os resultados podem ser ampliados, é de nosso interesse tentar estabelecer critérios que possam ser aplicados em um conjunto de equações ainda maior. Isto também acontece com os resultados estabelecidos em [22] e [25].

Durante nossos estudos, tivemos contatos com outras ferramentas, ainda que não tenham sido úteis aqui, se mostraram interessantes para futuros trabalhos como por exemplo as Transformações de Miúra.

Outras equações que surgiram ao longo dos estudos, despertaram nosso interesse para uma busca maior de conhecimento. Destaco aqui a equação Rosenau-KdV e Rosenau-Kawahara.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. P. Albert, *Positivity properties and stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, *Comm. Part. Differ.* , 17 (1992), pp. 1–22.

[2] J. P. Albert and J. L. Bona, *Total positivity and the stability of internal waves in fluids of finite depth*, *IMA J. Applied Math.,* 46 (1991), pp. 1–19.

[3] G. D. Almeida, F. Cristófani and F. Natali, *On the stability of periodic traveling waves for the modified Kawahara Equation*, *J. Applicable Analysis*, (2019).

[4] G. Alves, *Funcionais de Lyapunov e a Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para Equações de Evolução Não Lineares*, *Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UEM - Maringá/PR*, 2017.

[5] G. Alves, F. Natali and A. Pastor, *Sufficient conditions for orbital stability of periodic traveling waves*, *J. Diff. Equat.*, 267 (2019), pp. 879-901.

[6] T. P. Andrade, *Equações dispersivas: estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas*, *Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP*, 2014.

[7] T. P. Andrade, F. Cristófani and F. Natali, *Orbital stability of periodic traveling ave olutions for the Kawahara Equation*, *J. Math. Phys.*, 58 (2017), pp. 051504.

[8] J. Angulo, J. L. Bona, and M. Scialom, *Stability of cnoidal waves, Advances in Differential Equations,* 11 (2006), pp. 1321–1374.

[9] J. Angulo and F. Natali, *Positivity properties of the Fourier transform and the stability of periodic travelling-wave solutions*, *SIAM J. Math. Anal.,* 40 (2008), pp. 1123–1151.

[10] J. Angulo, M. Scialom and C. Banquet, *The regularized Benjamim-Ono e BBM equations: Well posedness and nonlinear stability*, *J.Differential Equations,* 250 (2011), pp. 4011–4036.

[11] C. Banquet, *Existência e estabilidade de ondas viajantes periódicas para alguns modelos dispersivos*, *Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP*, 2009.

[12] J. L. Bona, P. E. Souganidis and W. A. Strauss, *Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries types*, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. IMA J. Applied Math.,* 411 (1987), pp. 395–412.

[13] F. Bowman, *Introduction to elliptic functions with applications*, *Dover publications.* New York, 1961.

[14] P. F. Byrd and M. D. Friedman., *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists 2nd ed., Springer, New York*, (1971).

[15] F. Cristófani, *Estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para equações do tipo Korteweg-de Vries e dispersiva regularizada*, *Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UEM - Maringá/PR*, 2018.

[16] T. P. Andrade, F. Cristófani and F. Natali, *Orbital Stability of Periodic Traveling Wave Solutions for the Kawahara Equation*, *Journal of Mathematical Physics, 58 (2017), pg. 051504.*

[17] F. Cristófani, F. Natali and A. Pastor, *Orbital stability of periodic traveling-wave solutions for the Log-KdV equation*, *J. Differential Equations,* 263 (2017), pp. 2630–2660.

[18] F. Cristófani, F. Natali and A. Pastor, *Periodic traveling-wave solutions for regularized dispersive equations: Suficcient conditions for orbital stability with applications*, *Preprint,* (2017).

[19] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, *Stability Theory of Solitary waves in the presence of symmetry I*, *J. Funct. Anal.* 74 (1987), pp. 160–197.

[20] M. Haragus, E. Lombardi and A. Scheel, *Spectral Stability of Wave Trains in the Kawahara Equation*, *J. math. Fluid Mech,* 8 (2006), pp. 482–509.

[21] Y. Hu and X. Li, *Local Well-possedness of periodic fifth-order KdV-Type Equations, The Journal of Geometric Analysis,* 25 (2015), pp. 709–739.

[22] V. M. Hur and M. Johnson, *Stability of Periodic Traveling Waves for Nonlinear Dispersive Equations, SIAM J. Math. Anal.,* 47 (2015), pp. 3528–3554.

[23] R. J. Iório Jr. and V. M. Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations, Cambridge University Press,* Cambridge, UK, 2001.

[24] M. Johnson, *Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation, SIAM, J. Math. Anal.* 41 (2009), pp. 1921–1947.

[25] M. Johnson, *On the Stability of Periodic Solutions of the Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation, Physic. D,* 239 (2010), pp. 1892–1908.

[26] H. Kalisch, *Error analysis of a spectral projection of the regularized Benjamin-Ono equation, BIT, 45 (2005), pp. 69–89.*

[27] K. Kano and T. Nakayama, *An exact solution of the wave equation* $u_t + uu_x - u_{5x} = 0$, *J. Phys. Soc. Jpn., 50 (1981), pp. 361–362.*

[28] S. Karlin, *Total Positivity. Standford University Press*, 1968.

[29] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, Berlin*, (1976).

[30] T. Kawahara, *Oscilatory waves in dispersive media, Phys. Soc. Japan,* 33 (1972), pp. 260-264.

[31] A. Kiper, *Fourier series coefficients for powers of the Jacobian elliptic functions, Math. Comput.*, 43 (1984), pp. 247–259.

[32] D. J. Korteweg, and G.de Vries, *On the change of form of long wave advancing in a retangular canal, and on a new type of long stationary waves, Philos. Mag. (5) 39, (1895), p.422.*

[33] C. Kwak, *Well-posedness issues on the periodic modified Kawahara equation, Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 37 (2020), pp. 373-416.

[34] F. Natali, *Propriedades de Positividade e Estabilidade de Ondas Viajantes Peri ´0dicas*, *Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP*, 2007.

[35] F. Natali, *Orbital Stability of periodic traveling-waves solutions for a dispersive equation, São Paulo Journal of Math. Sciences,* 13 (2019), pp. 447–464.

[36] F. Natali and A. Neves, *Orbital Stability of Solitary Waves, IMA J. Appl. Math,* 79 (2014), pp. 1161–1179.

[37] F. Natali and A. Pastor, *The fouth-order dispersive nonlinear Schöndiger equation: orbital stability of a standing wave*, *SIAM J. Appl. Dyn. Systens,* 14 (2015), pp. 1326–1347.

[38] E. J. Parkes, B. R. Duffy and P. C.Abbot, *The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations, Phys. Lett. A 295, 280–286 (2002).*

[39] S. Reed and B. Simon, *Method of Modern Mathematuical Physics: Fourier Analysis, Selff-adjointness, vol. II, Academic Press*, 1975.

[40] J. S. Russel, *Report of fourteenth meeting of the British Association for the Advanced of Science, Plates XLVII-L:301, York*, (1844).

[41] C. A. Stuart, *Lectures on the orbital stability of standing waves and applications to the nonlinear Schröndiger equation, Milan J. Math*, 76 (2008), pp. 329–399.

[42] M. I. Weinstein, *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations., Comm. Pure Appl. Math.*, 39 (1986), pp. 51–67.

[43] M. I. Weinstein, *Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation, Comm. Partial Differential Equations* 12 (1987), p. 1133–1173.

[44] K. Yosida, *Functional Analysis, Springer Berlin Heidelberg*, 1978.