UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

Propriedades de Fecho e Condições de Finitude para o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

Guilherme Rocha Ortega

Maringá - PR

2021

[0]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Guilherme Rocha Ortega

Propriedades de Fecho e Condições de Finitude para o Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra

Orientadora: Profª. Drª. Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Ortega, Guilherme Rocha
O771p Propriedades de fecho e condições de finitude para o produto tensorial não abeliano de grupos / Guilherme Rocha Ortega. -- Maringá, 2021.
iv, 62 f. : il.

Orientadora: Profª. Drª. Irene Naomi Nakaoka.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra, 2021.

1. Produto tensorial não abeliano de grupos. 2. Subgrupo comutador. 3. Grupo finitamente gerado. 4. FC-grupo. 5. Grupo solúvel. 6. Non-abelian tensor product. 7. Commutador subgroup. 8. Finitely generated group. 9. FC-group. 10. Solvable group. I. Nakaoka, Irene Naomi, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra. III. Título.

CDD 22.ed. 512.2
Edilson Damasio CRB9-1.123

GUILHERME ROCHA ORTEGA

PROPRIEDADES DE FECHO E CONDIÇÕES DE FINITUDE PARA O PRODUTO TENSORIAL NÃO ABELIANO DE GRUPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Irene Naomi Nakaoka - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior - UnB
Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira - UFG

Aprovado em: 21 de setembro de 2021.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (https://meet.google.com/qbu-dqxp-ntd)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar forças quando não tinha, e capacidade quando me sentia pequeno. Agradeço também a professora Irene Nakaoka pelo apoio, incentivo e dedicação presentes nos seminários e fora deles. Devo aos meus pais e amigos minha gratidão por estarem comigo tanto nos momentos felizes, quanto nos momentos tristes e difíceis.

Além disso, gostaria de agradecer aos professores Raimundo Bastos e Ricardo de Oliveira por aceitarem fazer parte de minha banca examinadora, e por contribuírem com sugestões para elaboração da versão final deste trabalho.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo estudar o produto tensorial não abeliano de grupos, bem como alguns de seus resultados importantes. Em especial, exibiremos algumas condições de finitude para o produto tensorial não abeliano de grupos. Além disso, apresentaremos uma relação de classes de grupos que são fechadas sob a formação de produto tensorial não abeliano.

Palavras-chave: Produto tensorial não abeliano de grupos, subgrupo comutador, grupo finitamente gerado, FC-grupo, grupo solúvel.

Abstract

This dissertation aims to study the non-abelian tensor product of groups, as well as some of its important results. In particular, we present some finite conditions for the non-abelian tensor product of groups. Furthermore, we show a relation of classes of groups that are closed under the formation of a non-abelian tensor product.

Key words: Non-abelian tensor product, commutador subgroup, finitely generated group, FC-group, solvable group.

Índice de Notações

$\emptyset$	conjunto vazio
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_n$	conjunto dos números inteiros módulo n
$X \subset Y$	X é um subconjunto de Y
$\|X\|$	cardinalidade do conjunto X
$X \times Y$	produto direto de X por Y
$X \setminus Y$	$\{x \in X \mid x \notin Y\}$
$H \leq G$	H subgrupo de G
$H < G$	H subgrupo próprio de G
$H \lhd G$	H subgrupo normal de G
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado por X
$G \cong H$	grupo G isomorfo ao grupo H
$Aut(G)$	Grupo dos automorfismos de G
$Im(f)$	imagem da função f
$Ker(f)$	núcleo da função f
$C_G(a)$	Centralizador de a em G
$C_G(H)$	Centralizador de H em G
$Z(G)$	Centro de um grupo G
$[x, y]$	Comutador de x por y
$[X, Y]$	Subgrupo comutador de X e Y
a^g	Conjugado de a por g
a^G	Classe de conjugação de a em G
$\langle X \mid R \rangle$	Apresentação livre de um grupo gerado por X pelo conjunto de relatores R
$G \ltimes H$	Produto semidireto de G e H
$G * H$	Produto livre de G por H
$\langle R \rangle^G$	Fecho normal de R visto no grupo G
$G \otimes H$	Produto tensorial não abeliano dos grupos G e H
$G \otimes_A H$	Produto tensorial dos A-módulos G e H
$D_H(G)$	Subgrupo derivativo de G por H

$[G, H]$	Subgrupo comutador de G por H
G^{ab}	G/G', abelianizado de G
$\gamma_i(G)$	i-ésimo termo da série central inferior de G
$cl(G)$	Classe de nilpotência de G
$G^{(i)}$	i-ésimo termo da série derivada de G
$l(G)$	Comprimento derivado do grupo solúvel G

Sumário

Introdução

O produto tensorial não abeliano de grupos foi introduzido por Brown e Loday em [3] e [4] dentro do contexto da teoria de homotopia e, de certa forma, generaliza o produto tensorial de $\mathbb{Z}$-módulos. O estudo de produtos tensoriais não abelianos não se limitou apenas à área de topologia, pois muitos matemáticos têm investigado este assunto sob um ponto de vista puramente algébrico. Sejam G e H grupos que agem sobre si mesmos por conjugação, e que agem um sobre o outro através de ações que satisfazem as seguintes condições:

$$g^{(h^{g_1})} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1}, \tag{1}$$

$$h^{(g^{h_1})} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}. \tag{2}$$

com $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Quando isso ocorre dizemos que os grupos G e H *agem compativelmente* um sobre o outro. Nesta situação, o *produto tensorial não abeliano* de G e H, o qual é denotado por $G \otimes H$, é o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h$, com $g \in G$ e $h \in H$, satisfazendo as relações:

$$\begin{aligned} gg_1 \otimes h &= (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h), \\ g \otimes hh_1 &= (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}), \end{aligned}$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Quando $G = H$ e as ações são por conjugação, as condições (1) e (2) são satisfeitas, e assim o *o quadrado tensorial não abeliano* $G \otimes G$ é sempre definido.

Em [16] Rocco introduziu uma construção de grupo o qual está relacionado ao produto tensorial não abeliano de grupos e é definido como segue: sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro, H^φ uma cópia de H isomorfo por $\varphi : H \mapsto H^\varphi$, onde escrevemos $(h)\varphi = h^\varphi$ para qualquer $h \in H$. Definimos $\eta(G, H)$ como sendo o grupo

$$\eta(G,H) = \langle G, H^\varphi | [g, h^\varphi]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi], [g, h^\varphi]^{h_1^\varphi} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^\varphi], \forall g, g_1 \in G \, e \, h, h_1 \in H \rangle.$$

em outras palavras, $\eta(G,H) = \dfrac{G * H^{\varphi}}{\langle R \rangle^{G*H^{\varphi}}}$, onde

$$R = \{[g,h^{\varphi}]^{g_1}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1},\ [g,h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}}\left[g^{h_1},\left(h^{h_1}\right)^{\varphi}\right]^{-1};\ \forall g,g_1 \in G \textbf{ e } h,h_1 \in H\},$$

com $\langle R \rangle^{G*H^{\varphi}}$ sendo o fecho normal de R em $G * H^{\varphi}$. A relação entre os grupos $\eta(G,H)$ e $G \otimes H$ está no fato de que existe um isomorfismo $\alpha : [G,H^{\varphi}] \to G \otimes H$ tal que $([g,h^{\varphi}])\alpha = g \otimes h$, para todos $g \in G$ e $h \in H$. Por tal motivo, dedicaremos uma parte deste trabalho a $\eta(G,H)$. Quando $G = H$ e as ações são por conjugação, $\eta(G,G)$ é o grupo $\nu(G)$ introduzido em [15].

Nesta dissertação investigamos o produto tensorial não abeliano de grupos dando ênfase às questões relacionadas à finitude e às propriedades de fecho. A respeito da finitude, em [7] Ellis mostra que $G \otimes H$ é finito se G e H são finitos, mas na demonstração apresentada, são usadas ferramentas de homologia. Até que Thomas em [19] consegue demonstrar o mesmo resultado usando apenas argumentos de teoria de grupos. Vale destacar também o trabalho feito por Bastos, Nakaoka & Rocco em [1], onde estabeleceram alguns critérios de finitude para o produto tensorial não abeliano. Esses autores provaram o seguinte:

Teorema A. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Nestas condições, temos que $G \otimes H$ é finito se, e somente se, o conjunto $\{g \otimes h \mid g \in G,\ h \in H\}$ é finito.*

Suponha que G e H são grupos que agem um sobre o outro. O *derivativo* de G sob a ação de H é o subgrupo $D_H(G) = \langle \{g^{-1}g^h \mid g \in G,\ h \in H\} \rangle$. De modo análogo, definimos o *derivativo* de H sob a ação de G como sendo $D_G(H) = \langle \{h^{-1}h^g \mid g \in G,\ h \in H\} \rangle$. No caso em que G e H são FC-grupos, Bastos *et al.* [1] apresentaram uma condição necessária e suficiente para o produto tensorial não abeliano ser finito como segue:

Teorema B. *Sejam G e H FC-grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Então o produto tensorial não abeliano $G \otimes H$ é finito se, e somente se, $D_H(G)$, $D_G(H)$ e $(G/D_H(G))^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} (H/D_G(H))^{ab}$ são finitos.*

Com relação às propriedades que são preservadas pelo produto tensorial não abeliano de grupos, comecemos citando novamente Ellis e seu trabalho [7], que provou que o produto tensorial não abeliano de p-grupos é também p-grupo. Visscher [20] mostrou que o produto tensorial não abeliano de grupos solúveis (respectivamente nilpotentes) é também solúvel (respectivamente nilpotente). Quase ao mesmo tempo, Nakaoka em [13] provou esses resultados encontrando uma expressão para a série central inferior e para a série derivada do produto tensorial. Em [11, 12], Moravec mostrou que a classe dos grupos policíclicos é também fechada sob a formação do produto tensorial não abeliano, bem como a classe dos grupos localmente finitos. Por fim, Donadze, Ladra e Thomas [6] estabeleceram uma lista de outras propriedades que são fechadas sob a formação do produto tensorial não abeliano de grupos, sendo elas: supersolubilidade, nilpotencia-por-finito, solubilidade-por-finito, localmente solúvel, localmente nilpotente, localmente policíclico e localmente supersolúvel. Além disso, exibiram um condição necessária e suficiente para o produto tensorial não abeliano de grupos finitamente gerados ser finitamente gerado.

Estruturamos este trabalho da seguinte forma. O primeiro capítulo tem como objetivo nos auxiliar com as propriedades e definições referentes à teoria introdutória de grupos que serão necessários para o desenvolvimento desta dissertação. Também apresentaremos o conceito de produto tensorial de módulos.

No segundo capítulo apresentaremos alguns exemplos e propriedades do produto tensorial não abeliano de grupos. Além disso, veremos que, sob certas condições, é possível relacionar este novo conceito ao produto tensorial de $\mathbb{Z}$-módulos. Também estudaremos o grupo $\eta(G, H)$ que nos dará uma outra forma de olhar para o estudo do produto tensorial não abeliano de grupos.

No terceiro capítulo trataremos dos critérios de finitude para o produto tensorial não abeliano de grupos. Em especial, apresentaremos as demonstrações dos Teoremas A e B.

Dedicaremos o último capítulo para estudar as propriedades de fecho do produto tensorial não abeliano de grupos conforme o artigo [6].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados necessários para as conclusões desejadas desta monografia. Muitos resultados terão suas demonstrações omitidas, mas para cada um deles indicaremos uma referência que os trata de forma mais completa.

Antes de prosseguirmos consideramos necessário citar que adotaremos a notação $(x)f$, ao invés de $f(x)$, para uma aplicação qualquer f de domínio X e $x \in X$.

1.1 Cálculo com Comutadores

Baseamos esta seção em [17] e [14], mas seguindo as notações de [14]. Isto é, dados elementos g e h de um grupo G, o conjugado de g por h é o elemento $g^h = h^{-1}gh$. Seguem algumas outras definições e notações.

Definição 1.1. Sejam G um grupo, g, h, l elementos de G, e A, B, C subgrupos de G. O *comutador* de g por h é o elemento $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$. Ainda, definimos $[g, h, l]$ como sendo o comutador de $[g, h]$ por l, isto é, $[[g, h], l]$. O *subgrupo comutador* de A e B é dado por:

$$[A, B] = \langle \{[g, h] \,|\, g \in A,\ h \in H\} \rangle.$$

De forma análoga ao comutador de três elementos, o subgrupo comutador de A, B e C $[A, B, C]$ é definido por $[[A, B], C]$.

Denotaremos o subgrupo comutador $[G, G]$ por G' e o chamaremos de *subgrupo derivado* de G. Podemos também generalizar a definição acima para um número finito de elementos e subgrupos de G, isto é, se $l_1, \dots, l_n \in G$ e $C_1, \dots, C_m \leq G$, com $n, m \in \mathbb{N}$, então

$$[l_1, \dots, l_n] = [[l_1, \dots, l_{n-1}], l_n],$$

e

$$[C_1, \ \dots\ , C_m] = [[C_1, \ \dots\ , C_{m-1}], C_m].$$

O resultados a seguir podem ser demonstrados diretamente da definição de comutador e podem ser encontrados em [14, 5.1.5]. Exibiremos eles pois os mesmos nos possibilitarão operar mais facilmente dentro dos subgrupos comutadores.

Proposição 1.2. *Sejam x, y, z elementos de um grupo G. Então:*

(i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;

(ii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$ *e* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;

(iii) $[x, y^{-1}] = \left([x, y]^{y^{-1}}\right)^{-1}$ *e* $[x^{-1}, y] = \left([x, y]^{x^{-1}}\right)^{-1}$.

Lema 1.3. (Identidade de Hall–Witt) *Se $x, y, z \in G$, então vale a seguinte identidade:*

$$[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1.$$

Lema 1.4. (Lema dos Três Subgrupos) *Sejam A, B, C subgrupos de G. Se $N \lhd G$ e $[A, B, C], [B, C, A] \subset N$, então $[C, A, B] \subset N$.*

Demonstração. Comecemos com o caso de $N = \{1\}$. Pela Identidade de Hall–Witt temos que para quaisquer $x \in A$, $y \in B$ e $z \in C$,

$$[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1 \Rightarrow [z, x^{-1}, y]^x = 1 \Rightarrow [z, x^{-1}, y] = 1,$$

onde $[x, y^{-1}, z] = [y, z^{-1}, x] = 1$ por hipótese. Assim, $[z, x^{-1}] \in C_G(B)$ para todos $x \in A$ e $z \in C$; portanto, $[C, A, B] = \{1\}$. Para o caso de $N \neq \{1\}$, consideremos $\overline{A} = AN/N$, $\overline{B} = BN/N$ e $\overline{C} = CN/N$. Note que no grupo quociente G/N e considerando $\{1\} = \overline{N} \lhd G/N$, temos

$$[\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}] = \left[\frac{AN}{N}, \frac{BN}{N}, \frac{CN}{N}\right] = \frac{[A, B, C]N}{N} = \{1\}.$$

De modo análogo temos $[\overline{B}, \overline{C}, \overline{A}] = \{1\}$. Portanto,

$$[\overline{C}, \overline{A}, \overline{B}] = \frac{[C, A, B]N}{N} = \{1\} \Rightarrow [C, A, B] \subset N,$$

como queríamos. $\square$

Note que se A, B, C são subgrupos normais de G, e $N = [A, B, C][B, C, A]$, temos pelo lema anterior que $[C, A, B] \subset [A, B, C][B, C, A]$.

Proposição 1.5. ([14, página 124]) *Sejam H e K dois subgrupos de G e X e Y subconjuntos de G. Então,*

(i) $[H, K] \lhd \langle H, K \rangle$;

(ii) Se $H = \langle X \rangle$, então $[Y, H] = [Y, X]^H$;

(iii) Se $H = \langle X \rangle$ e $K = \langle Y \rangle$, então $[H, K] = [X, Y]^{HK}$;

1.2 Solubilidade e Nilpotência de Grupos

Nesta seção queremos explorar algumas propriedades referentes aos conceitos de grupos solúveis e nilpotentes. Além disso, veremos um pouco sobre grupos supersolúveis e algumas propriedades de comutadores. Seguiremos aqui nos baseando em [17] e [6]. Primeiramente vejamos as definições principais referentes à esta seção.

Definição 1.6. Seja G um grupo. Dizemos que uma sequência finita de subgrupos

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \ \dots \ \geq H_n = \{1\},$$

é uma *série subnormal* (respectivamente, *série normal*) de G se $H_{i+1} \lhd H_i$ (respectivamente, $H_i \lhd G$) para qualquer $i \in \{0, \ \dots \ , n-1\}$. Os grupos quocientes H_i/H_{i+1}, com $i \in \{0, \ \dots \ , n-1\}$, são chamados de *fatores* da série.

Definição 1.7. Seja G um grupo. Podemos definir os subgrupos $\gamma_i(G)$, com $i \in \mathbb{N}$, como segue:

$$\gamma_1(G) := G \ ; \ \gamma_{i+1}(G) := [\gamma_i(G), G],$$

onde $i \in \mathbb{N}$.

Vale observar que o subgrupo $\gamma_i(G)$ é característico em G e $\gamma_{i+1}(G) \leq \gamma_i(G)$, para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Assim podemos criar uma cadeia de subgrupos de G

$$\gamma_1(G) = G \geq \gamma_2(G) \geq \ \cdots \ \geq \gamma_n(G) \geq \ \cdots$$

Essa série é chamada de *série central inferior* de G.

Lema 1.8. ([14], pág. 126) *Vale que* $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$ *e* $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$ *para quaisquer* $i, j > 0$.

Dado $x \in \mathbb{R}$, denotaremos o piso de x e o teto de x por $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ respectivamente.

Proposição 1.9. *Se* G *é nilpotente de classe* n*, então* G' *também é nilpotente de classe no máximo* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Demonstração. Pelo Lema 1.8 vale que

$$\gamma_k(G') \leq \gamma_{2k}(G).$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Assim, se $n = 2s$, então

$$\gamma_{s+1}(G') \leq \gamma_{n+2}(G) = \{1\};$$

se n for ímpar temos $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$ e

$$\gamma_{\frac{n+1}{2}}(G') \leq \gamma_{n+1}(G) = \{1\}.$$

Portanto G' tem classe no máximo $\frac{n+1}{2} - 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ se n for ímpar e $\frac{n}{2}$ se n for par, isto é, a classe de G' é no máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. □

Definição 1.10. Seja G um grupo. Se para algum $n \in \mathbb{N}$ tivermos $\gamma_n(G) = \{1\}$, o grupo G é chamado de *nilpotente*. Ainda, o menor natural c tal que $\gamma_{c+1}(G) = \{1\}$ é chamado de *classe de nilpotência* de G e denotado por $cl(G)$.

Vejamos agora uma definição de grupo solúvel.

Definição 1.11. Um grupo G é dito ser *solúvel* se podemos construir uma série subnormal de G

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \ \dots \ \geq H_n = \{1\},$$

onde H_i/H_{i+1} é abeliano para qualquer $i = 0, \ \dots\ , n-1$.

Temos um tipo de série que, se for finita, caracteriza a solubilidade de um grupo.

Definição 1.12. Dado um grupo G, definamos

$$G^{(0)} := G \ ; \quad G^{(i+1)} := (G^{(i)})' \quad \text{se } i \in \mathbb{Z}^+.$$

Note que $G^{(i+1)} \lhd G^{(i)}$ se $i \in \mathbb{Z}^+$. Chamamos a série

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} = [G, G] \geq G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}] \geq \ \cdots \ \geq G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}] \geq \ \cdots$$

de série derivada de G. O resultado a seguir não será demonstrado, mas deixamos como referência [17, Teorema 5.23].

Proposição 1.13. *Um grupo G é solúvel se, e somente se, $G^{(n)} = \{1\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Segue deste último resultado que se G é solúvel, podemos encontrar um menor natural n tal que $G^{(n)} = \{1\}$. Tal elemento n é chamado de *comprimento derivado* de G.

As definições a seguir nos fornecem casos especiais dentro dos grupos solúveis.

Definição 1.14. Um grupo G é dito ser *policíclico* se existe uma série subnormal de G

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \ \cdots \ \geq H_n = \{1\},$$

onde H_i/H_{i+1} é cíclico para qualquer $i = 0, \ \dots \ , n-1$.

Podemos pedir ainda mais: que H_i seja normal em G para qualquer $i \in \mathbb{N}$ para então formar os grupos supersolúveis, como a seguir.

Definição 1.15. Um grupo G é dito ser *supersolúvel* se existe uma série normal

$$\{1\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_{s-1} \lhd H_s = G,$$

em que H_{i+1}/H_i é cíclico, para $i \in \{1, \ \dots \ , s-1\}$.

Observemos que grupos policíclicos são finitamente gerados. De fato, sendo G um grupo policíclico, existe uma série subnormal

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \ \cdots \ \geq H_n = \{1\},$$

onde H_i/H_{i+1} é cíclico para qualquer $i = 0, \ \dots \ , n$. Para cada $i \in \{0, 1, \ \dots \ , n-1\}$, seja $h_i \in H_i$ tal que $\langle h_i H_{i+1} \rangle$ gera H_i/H_{i+1}. Podemos decompor um elemento g de G da seguinte forma: Como $H_0 = G$, existem $j_0 \in \mathbb{N}$ e $b_1 \in H_1$ tais que $g = h_0^{j_0} b_1$. Do mesmo modo, existem $j_1 \in \mathbb{N}$ e $b_2 \in H_2$ satisfazendo $b_1 = h_1^{j_1} b_2$, isto é, $g = h_0^{j_0} h_1^{j_1} b_2$. Procedendo de forma análoga, é possível decompor g como

$$g = h_0^{j_0}.h_1^{j_1}. \ \cdots \ .h_{n-1}^{j_{n-1}} b_n,$$

onde $b_n \in H_n = \{1\}$. Assim, concluímos que G é gerado por $\{h_0, h_1, \ \dots \ , h_{n-1}\}$.

Dando prosseguimento, vejamos algumas propriedades de grupos solúveis e nilpotentes.

Proposição 1.16. ([14], pág. 121,122) *Seja G um grupo, H, N subgrupos de G, com N normal em G. Nestas condições temos:*

(i) Se G é nilpotente de classe c, então H e G/N são nilpotentes de classe no máximo c;

(ii) Se G é solúvel de comprimento derivado l, então H e G/N são solúveis de comprimento derivado no máximo l.

Proposição 1.17. *Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G. Se H e G/H são solúveis, então G é solúvel.*

Demonstração. Da hipótese segue que existe uma série subnormal

$$\frac{G}{H} = K_0^* \geq \ \cdots \ \geq K_n^* = \{H\},$$

tal que K_i^*/K_{i+1}^* é abeliano para qualquer $i \in \{0, 1, \ \ldots \ , n-1\}$. Pelo Teorema da Correspondência, para cada K_i^* existe $K_i \leq G$, tal que

$$G = K_0 \geq \ \cdots \ \geq K_n = H,$$

e $K_i/K_{i+1} \cong K_i^*/K_{i+1}^*$ se $i \in \{0, 1, \ \ldots \ , n-1\}$, que é abeliano. Observemos também que por hipótese, H é solúvel. Assim, existe uma série subnormal

$$H = A_0 \geq \ \cdots \ \geq A_l = \{1\},$$

onde A_j/A_{j+1} é abeliano para todo $j \in \{0, 1, \ \ldots \ , l-1\}$. É claro que a cadeia de subgrupos de G:

$$G = K_0 \geq \ \cdots \ \geq K_n \geq A_1 \geq \ \cdots \ \geq A_l = \{1\},$$

é subnormal com todos os fatores abelianos. Portanto, G é solúvel. □

A demonstração do resultado a seguir é análoga à da Proposição 1.17 e será omitida.

Proposição 1.18. *Se $H \lhd G$ é cíclico e G/H e supersolúvel, então G é supersolúvel.*

Proposição 1.19. *Seja $H \leq Z(G)$ e suponha que G/H é nilpotente de classe c. Então G é nilpotente de classe no mínimo c e no máximo $c+1$.*

Demonstração. Primeiro vamos provar por indução sobre r que $\gamma_r(G/H) = \gamma_r(G)H/H$ para qualquer $r \geq 1$. É claro que vale para $r = 1$. Suponha que vale $\gamma_n(G/H) = \gamma_n(G)H/H$; logo

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1}\left(\frac{G}{H}\right) &= \left[\frac{\gamma_n(G)H}{H}, \frac{G}{H}\right] \\
&= \left\langle \left\{ [g_1H, g_2H] \mid g_1H \in \frac{\gamma_n(G)H}{H}, g_2H \in \frac{G}{H} \right\} \right\rangle \\
&= \left\langle \left\{ [g_1, g_2]H \mid [g_1, g_2]H \in \frac{[\gamma_n(G), G]H}{H} \right\} \right\rangle \\
&= \frac{\gamma_{n+1}(G)H}{H}.
\end{aligned}$$

Assim temos que para $r = c+1$, $\gamma_{c+1}(G)H/H = \{1\}$, e portanto, $\gamma_{c+1}(G) \subset H$. Daí, como $H \subset Z(G)$, segue que $\gamma_{c+2}(G) = \{1\}$. Assim, G é nilpotente de classe c ou $c+1$. □

Lema 1.20. *Sejam G e H grupos quaisquer.*

(i) Se G é supersolúvel e se existir um homomorfismo sobrejetor $f : G \to H$, então H é supersolúvel;

(ii) Se G é policíclico e se existir um homomorfismo sobrejetor $f : G \to H$, então H é policíclico.

Demonstração. (i) Seja

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{s-1} \lhd G_s = G,$$

uma série normal de G tal que cada fator é cíclico. Consideremos a seguinte sequência em H:

$$\{1\} = (G_0)f \leq (G_1)f \leq \cdots \leq (G_{s-1})f \leq (G_s)f = H.$$

Sejam $(g_i)f \in (G_i)f$ e $h \in H$. Como f é sobrejetora, existe $g \in G$ tal que $(g)f = h$. Logo $h^{-1}(g_i)fh = (g^{-1}g_ig)f \in (G_i)f$ para qualquer $i \in \{1, 2, \ \dots \ , s-1\}$; com isso concluímos a normalidade dos subgrupos da sequência. Prosseguindo com os resultados, dado $i \in \{1, 2, \ \dots \ , n-1\}$ definamos a aplicação $\varphi_i : G_{i+1}/G_i \to (G_{i+1})f/(G_i)f$, em que $(g_iG_i)\varphi_i = (g_i)f(G_i)f$ para quaisquer $g_i \in G_i$. Observemos que φ_i está bem definida, pois se $g_1G_i = g_2G_i$, então $g_1 = g_2g$ para algum $g \in G_i$, logo

$$(g_1G_i)\varphi_i = (g_1)f(G_i)f = (g_2g)f(G_i)f = (g_2)f(G_i)f.$$

Observemos também que φ_i é um homomorfismo sobrejetor. Além disso, se $G_{i+1}/G_i = \langle a_{i+1}G_i \rangle$, então $(a_{i+1})f(G_i)f$ gera $(G_{i+1})f/(G_i)f$. De fato, dado $h(G_i)f$ elemento de $(G_{i+1})f/(G_i)f$, existe $(g_h)f \in (G_{i+1})f$ em que $h(G_i)f = (g_h)f(G_i)f$. Tomando r tal que $a_i^r G_i = g_h G_i$, então $(a_i)f^r(G_i)f = (g_h)f(G_i)f = h(G_i)f$. Portanto, H é supersolúvel.

(ii) Análogo ao item anterior. □

Proposição 1.21. *(i) Se G é um grupo supersolúvel, então quaisquer subgrupos e grupos quocientes de G são supersolúveis.*

(ii) Se H e J são supersolúveis, então o produto direto $H \times J$ é um grupo supersolúvel.

Demonstração. Consideremos uma série normal de G

$$G_1 = G \geq G_2 \geq \cdots \geq G_n = \{1\},$$

em que G_i/G_{i+1} é cíclico para qualquer $i = 1, \dots, n-1$.

(i) Dado um subgrupo H de G, queremos provar que existe uma série normal

$$H = H_1 \geq H_2 \geq \cdots \geq H_r = \{1\},$$

em que todos os fatores são cíclicos. Tomando $H_j = H \cap G_j$ e $r = n$, teremos que $H \cap G_j \lhd H$ por G_j ser normal em G. Ainda, $(H \cap G_j)/(H \cap G_{j+1}) \cong (G_{j+1}(H \cap G_j))/G_{j+1} \leq G_j/G_{j+1}$ o que garante que H_j/H_{j+1} é cíclico para qualquer $j = 1, \dots, n$. Tomando $N \lhd G$ e considerando o homomorfismo natural de G em G/N, estamos nas condições do Lema 1.20 para concluir o desejado.

(ii) Sejam

$$\{1\} = H_1 \lhd H_2 \lhd \cdots \lhd H_n = H$$

e

$$\{1\} = J_1 \lhd J_2 \lhd \cdots \lhd J_m = J$$

séries normais de H e J tais que H_{i+1}/H_i e J_{l+1}/J_l são cíclicos para todos $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e $l \in \{1, \dots, m-1\}$. Consideremos a seguinte cadeia de subgrupos de $H \times J$:

$$\{1\} \leq H_1 \times \{1\} \leq \cdots \leq H_n \times \{1\} = H \times \{1\} \leq H \times J_1 \leq \cdots \leq H \times J_m = H \times J.$$

Não é difícil verificar que cada termo dessa cadeia é normal em $H \times J$ e que todos os fatores são cíclicos. Portanto $H \times J$ é supersolúvel. □

Note que temos um resultado análogo para grupos policíclicos, isto é

Proposição 1.22. *(i) Se G é um grupo policíclico, então quaisquer subgrupos e grupos quocientes de G são policíclicos.*

(ii) Se H e J são policíclicos, então o produto direto $H \times J$ também é um grupo policíclico.

Demonstração. Análoga à da proposição anterior.

□

1.3 Grupos Livres

Definição 1.23. Um grupo F é dito *livre* sobre um subconjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e qualquer aplicação $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ de modo que $(x)\theta' = (x)\theta$, para todo $x \in X$, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, "\exists\ \theta'"] \\ G & \end{tikzcd}$$

é comutativo, onde $i : X \longrightarrow F$ é a aplicação inclusão. O conjunto X é chamado de uma *base* de F

Se F é livre sobre um conjunto X, então F é gerado por X. Definimos também o *posto* de um grupo livre sobre um conjunto X como sendo a cardinalidade de X. Note que esta definição faz sentido uma vez que, se tomarmos F_1 e F_2 grupos livres sobre os conjuntos X_1 e X_2, respectivamente, então F_1 e F_2 são isomorfos se, e somente se, X_1 e X_2 possuem a mesma cardinalidade (vide [9, pág. 3]). Outro fato importante que devemos expor é que subgrupos de grupos livres também são grupos livres, e isso é mostrado com detalhes em [9, pág. 22].

Proposição 1.24. [9, pág. 7] *Todo grupo é imagem homomórfica de algum grupo livre.*

Observemos que essa proposição nos incentiva a relacionar grupos com quocientes de grupos livres. Assim, consideremos G um grupo qualquer e um epimorfismo $\phi : F \to G$, onde F é um grupo livre com base X. Temos que $G \cong F/Ker(\phi)$. Agora, seja o conjunto

$R \subset F$ tal que $\langle R \rangle^F = Ker(\phi)$, podemos escrever G como $\langle X \,|\, R \rangle$. A esta construção damos o nome *apresentação livre* do grupo G, ou apenas *apresentação* de G. Os elementos de X são chamados de *geradores* e os elementos de R, *relatores*. Um grupo G é chamado *finitamente apresentado* se possuir uma apresentação $\langle X \,|\, R \rangle$ na qual X e R são finitos.

Às vezes, é conveniente substituir R, em $\langle X \,|\, R \rangle$, pelo conjunto de equações $R = 1$, isto é, $\{r = 1;\ r \in R\}$, chamado de conjunto de *relações definidoras* para G. Uma relação definidora pode até assumir a forma "$u = v$", onde $u, v \in F(X)$, correspondente ao relator uv^{-1}, ou também, $uv^{-1} = 1$

Proposição 1.25. [9, página 42] *Todo grupo tem uma apresentação livre e todo grupo finito é finitamente apresentado.*

Seguem alguns exemplos de apresentações livres.

Exemplo 1.26. O grupo $\mathbb{Z}_p$ está relacionado a apresentação livre $\langle a \,|\, a^p = 1 \rangle = \langle a \,|\, a^p \rangle$ e o grupo diedral de ordem $2n$ possui apresentação

$$D_n \cong \langle x, y \,|\, x^2 = 1,\ y^n = 1,\ y^x = y^{-1} \rangle$$

Dada uma apresentação $G = \langle X \,|\, R \rangle$, uma aplicação de X para um grupo H pode ser estendida para um homomorfismo de G em H? O resultado a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para tal fato ocorrer.

Teorema 1.27. (Teste da Substituição, [9, pág. 44]) *Dados uma apresentação $G = \langle X \,|\, R \rangle$, um grupo H e uma aplicação $\theta : X \to H$, temos que θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G \to H$ se, e somente se, para quaisquer $x \in X$ e $r \in R$, o resultado da substituição de x por $(x)\theta$ na expressão de r é a identidade de H.*

Sejam G e H grupos com apresentações $G = \langle X \mid R \rangle$ e $H = \langle Y \mid S \rangle$. A partir destes grupos podemos construir um outro, o qual é denotado por $G * H$, e dado pela seguinte apresentação:

$$G * H := \langle X, Y \mid R, S \rangle.$$

Este grupo é chamado de *produto livre* de G por H.

Proposição 1.28. ([14, pág. 167]) *Seja $G * H$ o produto livre de dois grupos não triviais. Então, o subgrupo comutador $[G, H]$ é normal em $G * H$. Ainda, $[G, H]$ é um grupo livre sobre o conjunto $X = \{[g, h] |\ g \in G,\ h \in H,\ g, h \neq 1\}$*

1.4 Produto Tensorial de Módulos

Sejam $(M, +)$ um grupo abeliano e A um anel com unidade. Nomearemos as funções de domínio $M \times A$ e contra domínio M, como multiplicação por escalar à direita. Se f for uma multiplicação por escalar à direita, $a \in A$ e $m \in M$, escreveremos $((a, m))f$ simplesmente como $a \cdot m$ ou ainda am quando não houver falta de clareza.

Definição 1.29. Seja A um anel com unidade. Um *A-módulo à direita* é um grupo abeliano $(M, +)$ junto com uma multiplicação por escalar à direita $f : M \times A \to M$ que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $a, b \in A$ e $m, n \in M$:

(i) $m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$;

(ii) $(m + n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$;

(iii) $m \cdot (ab) = (m \cdot a) \cdot b$;

(iv) $m \cdot 1_A = m$.

Observemos que poderíamos definir multiplicação por escalar à esquerda e módulo à esquerda da mesma forma que definimos acima. Também vale destacarmos que podemos "olhar" qualquer grupo abeliano como um $\mathbb{Z}$-módulo.

Exemplo 1.30. Seja $(G, +)$ um grupo abeliano e defina uma multiplicação por escalar $\cdot\ : G \times \mathbb{Z} \to G$ tal que:

$$g \cdot n = \begin{cases} \underbrace{g + g + \ \cdots \ + g}_{n-vezes} & , \ n > 0 \\ 0 & , \ n = 0 \\ \underbrace{-g - g - \ \cdots \ - g}_{-n-vezes} & , \ n < 0 \end{cases}$$

para quaisquer $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$. Com essa multiplicação por escalar é fácil ver que G é um $\mathbb{Z}$-módulo.

Assim como em espaços vetoriais podemos definir subespaços, nos módulos podemos fazer o mesmo da seguinte forma.

Definição 1.31. Se M for um A-módulo, um subconjunto não vazio N de M é um *submódulo* de M se para todos $m, n \in N$ e $a \in A$ valem:

(i) $m + n \in N$;

(ii) $n \cdot a \in N$.

Definição 1.32. Sejam M e N A-módulos e $g : M \to N$ um homomorfismo de grupos. Se para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$ valer que

$$(ma)f = (m)fa,$$

dizemos que g é um *homomorfismo de módulos*.

Definição 1.33. Sejam A um anel comutativo com unidade, M, N e P A-módulos. Se uma aplicação $f : M \times N \to P$ satisfaz:

$$\begin{aligned}(m + m', n)f &= (m, n)f + (m', n)f;\\ (m, n + n')f &= (m, n)f + (m, n')f;\\ (ma, n)f &= (m, na)f = (m, n)fa;\end{aligned}$$

para quaisquer $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $a \in A$, dizemos que f é uma aplicação A-*bilinear*.

Observação 1.34. Note que se $m \in M$ e $n \in N$,

$$(0, n)f = (m, 0)f = 0.$$

Queremos agora definir o produto tensorial de módulos. Para mais detalhes veja [18].

Definição 1.35. Sejam A um anel comutativo com unidade e M e N A-módulos. O *produto tensorial* de M e N é o par (T, h), onde T é um grupo abeliano e h é uma aplicação A-bilinear $h : M \times N \to G$ tal que, para quaisquer A-módulo G e aplicação A-bilinear $f : M \times N \to G$, existe um único A-homomorfismo $\tilde{f} : T \to G$ que faz o diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & G \\ T \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

A boa definição e a existência dos produtos tensoriais de módulos vem do seguinte teorema que pode ser encontrado em [18, pág. 71].

Teorema 1.36. *Se A é um anel comutativo com unidade, M e N dois A-módulos, então o produto tensorial de M e N existe e é único a menos de isomorfismos.*

Considerando (T, h) o produto tensorial dos A-módulos M e N, o teorema anterior nos permite associarmos T a M e N. Assim, denotamos T como $M \otimes_A N$ ou simplesmente, $M \otimes N$ quando não houver falta de clareza. Ainda, a aplicação A-bilinear h é escrita como $(m, n)h = m \otimes n$, para todo $(m, n) \in M \times N$. Vale mencionarmos que por h ser A-bilenar, temos que

$$\begin{aligned}(m + m') \otimes n &= (m \otimes n) + (m' \otimes n);\\ m \otimes (n + n') &= (m \otimes n) + (m \otimes n');\\ (ma) \otimes n &= m \otimes (na) = (m \otimes n)a;\end{aligned}$$

para quaisquer $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $a \in A$.

Exemplo 1.37. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, com $mdc(m, n) = 1$. Vejamos que

$$\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \otimes \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = 0$$

De fato, é suficiente mostrarmos que $\bar{a} \otimes \bar{b} = 0$ para todos $\bar{a} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e $\bar{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pela identidade de Bezout temos que existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $mu + nv = 1$. Por $\otimes$ ser $\mathbb{Z}$-bilinear vale que:

$$\begin{aligned}\bar{a} \otimes \bar{b} &= (\bar{a} \cdot 1) \otimes \bar{b}\\ &= (\bar{a}(mu + nv)) \otimes \bar{b}\\ &= \bar{a}mu \otimes \bar{b} + \bar{a}nv \otimes \bar{b}\\ &= \bar{a}mu \otimes \bar{b} + \bar{a} \otimes \bar{b}nv\\ &= (\overline{am})u \otimes \bar{b} + \bar{a} \otimes (\overline{bn})v\\ &= 0 \otimes \bar{b} + \bar{a} \otimes 0 = 0\end{aligned}$$

A seguir apresentamos algumas propriedades de produtos tensoriais de módulos.

Proposição 1.38. *Sejam M, P, N e Q A-módulos. Então*

(i) $M \otimes_A A \cong M$ *e* $A \otimes_A N \cong N$;

(ii) $M \otimes (N \oplus Q) \cong (M \otimes N) \oplus (M \otimes Q)$ *e* $(M \oplus P) \otimes N \cong (M \otimes N) \oplus (P \otimes N)$;

(iii) $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$.

Capítulo 2

Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos

2.1 Conceitos Básicos e Propriedades

Antes de apresentarmos a definição de produto tensorial não abeliano de grupos, relembremos que uma ação de um grupo G sobre um grupo H é um homomorfismo $\alpha : G \to Aut(H)$, onde $Aut(H)$ denota o grupo de automorfismos de H. Dados $g \in G$ e $h \in H$, escreveremos $(h)(g)\alpha = h^g$, representando assim uma ação à direita de H. Quando α é o homomorfismo trivial, ou seja, $h^g = h$ para quaisquer $h \in H$ e $g \in G$, dizemos que G age trivialmente sobre H. A ação de um grupo G nele mesmo dada por $g^{g_1} = g_1^{-1}gg_1$, para todos $g, g_1 \in G$, é chamada de ação por conjugação.

Sejam G e H grupos munidos com uma ação de G sobre H e de H sobre G. Suponhamos ainda que cada grupo age sobre si mesmo por conjugação. Nessas condições, temos uma ação do produto livre $G * H$ sobre G e H de forma natural. Dizemos que as ações de G sobre H e de H sobre G são *compatíveis* se para quaisquer $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ temos:

$$g^{(h^{g_1})} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1}, \tag{2.3}$$

$$h^{(g^{h_1})} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}. \tag{2.4}$$

Quando G e H são grupos que agem um sobre o outro compativelmente, Brown e Loday [3, 4] definiram o *produto tensorial não abeliano* de G e H como sendo o grupo gerado por todos os elementos da forma $g \otimes h$, com $g \in G$ e $h \in H$, que satisfazem:

$$(gg_1) \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h), \tag{2.5}$$

$$g \otimes (hh_1) = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}), \tag{2.6}$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Indicaremos tal grupo por $G \otimes H$. Assim,

$$G \otimes H = \langle \{g \otimes h \mid g \in G,\ h \in H\} \mid R \rangle,$$

onde R é o conjunto

$$\{((gg_1) \otimes h)^{-1}(g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h),\ (g \otimes (hh_1))^{-1}(g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \mid g, g_1 \in G \text{ e } h, h_1 \in H\}.$$

Observemos que se $G = H$ e se tomarmos todas as ações por conjugação, então as ações são compatíveis. De fato, se $g, h, g_1 \in G$, então

$$\begin{aligned} g^{(h^{g_1})} &= g^{g_1^{-1}hg_1} = (g_1^{-1}hg_1)^{-1}g(g_1^{-1}hg_1) = (g_1^{-1}h^{-1}g_1)g(g_1^{-1}hg_1) \\ &= (g_1^{-1}h^{-1})g^{g_1^{-1}}(hg_1) = g_1^{-1}(g^{g_1^{-1}})^h g_1 = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1}. \end{aligned}$$

Assim, podemos falar do produto tensorial $G \otimes G$. Este grupo é chamado de quadrado tensorial não abeliano de G.

A definição do produto tensorial não abeliano $G \otimes H$, de certa forma, relaciona $g \otimes h$ com o comutador de g com h, uma vez as relações (2.5) e (2.6) lembram as identidades de comutadores vistas na Proposição 1.2, isto é,

$$[xy, z] = [x, z]^y[y, z] \quad \text{e} \quad [x, yz] = [x, z][x, y]^z$$

Observação 2.1. Outro fator que devemos observar é que $1 \otimes h$ é o elemento unidade de $G \otimes H$ para qualquer $h \in H$. De fato,

$$(g \otimes h)1_{G \otimes H} = g \otimes h = g1 \otimes h = (g^1 \otimes h^1)(1 \otimes h),$$

e por $G \otimes H$ ser um grupo segue que $1 \otimes h = 1_{G \otimes H}$. Analogamente podemos concluir que $g \otimes 1 = 1_{G \otimes H}$ para qualquer $g \in G$.

Vejamos agora alguns exemplos de produtos tensoriais não abelianos.

Exemplo 2.2. Considere $G = \langle a \,|\, a^2 \rangle$ e $H = \langle b \,|\, b^p \rangle$ com p primo, e suponha que H age trivialmente sobre G e G age sobre H por $h^a = h^{-1}$, com $h \in H$. Estas ações são compatíveis, pois

$$g^{(h^a)} = g^{(h^{-1})} = g$$

e

$$((g^{a^{-1}})^h)^a = (aga)^a = ga^2 = g.$$

Ainda,

$$g^{h^1} = g^h = ((g^1)^h)^1.$$

Temos também que

$$h^{(a^{h_1})} = h^{-1}$$

e

$$((h^{h_1^{-1}})^a)^{h_1} = (h^a)^{h_1} = (h^{-1})^{h_1} = h^{-1}$$

Da mesma forma,

$$h^{1^{h_1}} = h = ((h^{h_1^{-1}})^1)^{h_1},$$

para quaisquer $g \in G$ e $h, h_1 \in H$. Pela definição de $G \otimes H$, temos que o mesmo é gerado pelo conjunto $\{a \otimes b, a \otimes b^2, \ \dots\ , a \otimes b^{p-1}\}$. Agora, provemos por indução que $a \otimes b^r = (a \otimes b)^r$ para $r \in \{1, 2, \ \dots\ , p-1\}$. É claro que isso vale para $r = 1$. Considerando que vale para algum $k < p - 1$, então pela equação (2.6)

$$a \otimes b^{k+1} = a \otimes b^k b = (a \otimes b)(a^b \otimes (b^k)^b) = (a \otimes b)(a \otimes b^k) = (a \otimes b)(a \otimes b)^k = (a \otimes b)^{k+1}.$$

Assim, $G \otimes H = \langle a \otimes b \rangle$, e ainda por (2.5)

$$1 \otimes b = a^2 \otimes b = (a^a \otimes b^a)(a \otimes b) = (a \otimes b^{p-1})(a \otimes b) = (a \otimes b)^p.$$

Dessa forma concluímos que $G \otimes H$ possui ordem 1 ou p. Queremos agora construir um isomorfismo entre $G \otimes H$ e $\mathbb{Z}_p$. Para tal, consideremos uma aplicação α' com domínio $\{g \otimes h\ ;\ g \in G,\ h \in H\}$ e contradomínio $\mathbb{Z}_p$ tal que $(1 \otimes h)\alpha' = \overline{0}$ para qualquer $h \in H$ e $(a \otimes b^n)\alpha' = \overline{n}$ para cada $n \in \{1,\ \dots\ , p\}$. Não é difícil ver que esta aplicação é consistente com as relações definidoras de $G \otimes H$, e assim, podemos Aplicar o Teste da Substituição 1.27 e concluir que α' se estende a um homomorfismo $\alpha : G \otimes H \to \mathbb{Z}_p$, onde $(a \otimes b)\alpha = \overline{1}$. Como $Im(\alpha) = \mathbb{Z}_p$, temos que α deve ser um isomorfismo. Portanto, $G \otimes H \cong \mathbb{Z}_p$.

Exemplo 2.3. Seja $\mathbb{Z}_p \cong \langle x \,|\, x^p \rangle$, com p um número primo diferente de 2, e consideremos $K = \langle a, b \,|\, a^2, b^2, [a, b] \rangle$. Suponha que $\mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre K e K age sobre $\mathbb{Z}_p$ por $x^a = x^{-1}$ e $x^b = x^{-1}$. Temos que essas ações são compatíveis. Temos que o produto tensorial não abeliano $\mathbb{Z}_p \otimes K$ é gerado pelo conjunto

$$\{x^m \otimes a, x^m \otimes b, x^m \otimes ab \,|\, m = 1, 2,\ \dots\ p - 1\}.$$

Queremos agora reduzir este conjunto gerador o máximo possível. Para isso vamos mostrar por indução que $x^n \otimes a = (x \otimes a)^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. De fato, para $n = 1$ não há o que fazer. Suponha que vale para algum $n > 1$ e provemos que vale para $n+1$. Assim,

$$x^{n+1} \otimes a = ((x^n)^x \otimes a^x)(x \otimes a) = (x^n \otimes a)(x \otimes a) = (x \otimes a)^n (x \otimes a) = (x \otimes a)^{n+1}.$$

Como queríamos. Disto segue que $x^p \otimes a = (x \otimes a)^p = 1$. Procedendo de forma análoga é possível provar que

$$x^m \otimes b = (x \otimes b)^m, \; x^m \otimes ab = (x \otimes ab)^m$$

para $m = 1, 2, \; \dots \; , p$. Além disso,

$$x \otimes ab = (x \otimes b)(x^b \otimes a^b) = (x \otimes b)(x^{p-1} \otimes a) = (x \otimes b)(x \otimes a)^{p-1} \tag{2.7}$$

Até agora, isso nos mostra que $\mathbb{Z}_p \otimes K$ é gerado por $x \otimes a$ e $x \otimes b$. Entretanto podemos reduzir ainda mais o conjunto gerador. Observemos primeiramente que

$$\begin{aligned}
(x \otimes ab)^2 &= (x \otimes ab)(x \otimes ba) = (x \otimes b)(x^b \otimes a^b)(x \otimes a)(x^a \otimes b^a) \\
&= (x \otimes b)(x^{p-1} \otimes a)(x \otimes a)(x^{p-1} \otimes b) \\
&= (x \otimes b)(x \otimes a)^{p-1}(x \otimes a)(x \otimes b)^{p-1} \\
&= (x \otimes b)(x \otimes a)^p (x \otimes b)^{p-1} = (x \otimes b)(x \otimes b)^{p-1} = 1.
\end{aligned}$$

Isto é, temos que a ordem de $x \otimes ab$ divide 2 e p. Como $mdc(2, p) = 1$, segue que $x \otimes ab = 1$. Assim, por (2.7) temos $(x \otimes b) = (x \otimes a)^{-(p-1)}$. Portanto $\mathbb{Z}_p \otimes K$ é gerado por $x \otimes a$ (ou $x \otimes b$). Podemos então pensar em uma possível existência de um isomorfismo de $\mathbb{Z}_p \otimes K$ com $\mathbb{Z}_p$. Para tal, consideremos o seguinte conjunto

$$X = \{x^m \otimes a^i b^j \mid m, i, j \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq p-1, \; 0 \leq i, j \leq 1\}$$

e a aplicação $\alpha : X \to \mathbb{Z}_p$ definida por $(x^m \otimes a^i b^j)\alpha = x^{m\varepsilon_{i,j}}$, onde $\varepsilon_{i,j} = 0$ se $i = j$ e $\varepsilon_{i,j} = 1$ se $i \neq j$. Então, para todos $m, n \in \{0, 1, \; \dots \; , p-1\}$ e $i, j \in \{0, 1\}$, temos

$$\begin{aligned}
(x^m x^n \otimes a^i b^j)\alpha &= x^{(m+n)\varepsilon_{i,j}} = x^{m\varepsilon_{i,j}} x^{n\varepsilon_{i,j}} = (x^m \otimes a^i b^j)\alpha (x^n \otimes a^i b^j)\alpha \\
&= ((x^m)^{x^n} \otimes (a^i b^j)^{x^n})\alpha (x^n \otimes a^i b^j)\alpha.
\end{aligned}$$

Além disso, se $m \in \{0, 1, \; \dots \; , p-1\}$ e $i, j, k, l \in \{0, 1\}$, então

$$(x^m \otimes a^i b^j a^k b^l)\alpha = (x^m \otimes a^{i+k} b^{j+l})\alpha = (x^m \otimes a^{\varepsilon_{i,k}} b^{\varepsilon_{j,l}})\alpha = x^{m\varepsilon_{\varepsilon_{i,k}, \varepsilon_{j,l}}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(x^m \otimes a^k b^l)\alpha((x^m)^{a^k b^l} \otimes (a^i b^j)^{a^k b^l})\alpha &= x^{m\varepsilon_{k,l}}((x^{(-1)^{\varepsilon_{k,l}}m}) \otimes a^i b^j)\alpha \\ &= x^{m\varepsilon_{k,l}} x^{(-1)^{\varepsilon_{k,l}} m\varepsilon_{i,j}} \\ &= x^{m(\varepsilon_{k,l}+(-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j})}\end{aligned}$$

Nos falta somente verificar que

$$\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j} \tag{2.8}$$

Temos que considerar 4 casos:

1) se $i = j$ e $k = l$, então teremos $\varepsilon_{i,k} = \varepsilon_{j,l}$, e $\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = 0 = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j}$

2) se $i = j$ e $k \neq l$, então teremos $\varepsilon_{i,k} \neq \varepsilon_{j,l}$. Assim, $\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = 1 = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j}$

3) se $i \neq j$ e $k = l$, então teremos $\varepsilon_{i,k} \neq \varepsilon_{j,l}$. Assim, $\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = 1 = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j}$

4) se $i \neq j$ e $k \neq l$, então $\varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j} = 1 + (-1)^1 1 = 0$.
   Agora, para calcular $\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}}$ temos que observar dois casos

   (i) se $i = k$, então $j = l$. Logo $\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = \varepsilon_{0,0} = 0$

   (ii) se $i \neq k$, então $j \neq l$. Logo $\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = \varepsilon_{1,1} = 0$

Portanto (2.8) acontece e podemos concluir então que

$$(x^m \otimes a^i b^j a^k b^l)\alpha = (x^m \otimes a^k b^l)\alpha((x^m)^{a^i b^j} \otimes (a^k b^l)^{a^i b^j})\alpha$$

Dessa forma, α satisfaz as condições para aplicarmos o Teste da Substituição (Teorema 1.27). Assim, α se estende a um homomorfismo $\tilde{\alpha} : \mathbb{Z}_p \otimes K \to \mathbb{Z}_p$. Daí, por $(x \otimes a)\tilde{\alpha} = x$, $\mathbb{Z}_p \otimes K = \langle x \otimes a \rangle$ e $(x \otimes a)^p = 1$, a aplicação $\tilde{\alpha}$ é um isomorfismo.

Definição 2.4. Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro e L um grupo qualquer. Dizemos que uma aplicação $\phi : G \times H \to L$ é uma *biderivação* se para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$

$$(gg_1, h)\phi = (g^{g_1}, h^{g_1})\phi\ (g_1, h)\phi \tag{2.9}$$

$$(g, hh_1)\phi = (g, h_1)\phi\ (g^{h_1}, h^{h_1})\phi \tag{2.10}$$

Observação 2.5. Pelo Teste da Substituição podemos perceber que uma biderivação $\phi : G \times H \to L$ determina um único homomorfismo $\phi^* : G \otimes H \to L$, tal que para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$, $(g \otimes h)\phi^* = (g, h)\phi$.

Daqui para frente, salvo menção contrária, G e H denotarão grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Dedicaremos o resto desta seção a apresentar algumas propriedades dos produtos tensoriais não abelianos.

Proposição 2.6. [4] *Os grupos G e H agem sobre $G \otimes H$ de maneira que se $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$,*

$$(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g, \ (g \otimes h_1)^h = g^h \otimes h_1^h.$$

Com isso, podemos definir uma ação de $G * H$ em $G \otimes H$ dada por

$$(g \otimes h)^t = g^t \otimes h^t,$$

onde $g \in G$, $h \in H$ e $t \in G * H$.

Demonstração. Dado $g \in G$, defina a aplicação $\phi_g : G \times H \to G \otimes H$ colocando $(g_1, h)\phi_g = g_1^g \otimes h^g$ para todos $g_1 \in G$ e $h \in H$. Vejamos agora que ϕ_g é uma biderivação para qualquer $g \in G$. Com efeito, se $g, g_1, g_2 \in G$ e $h \in H$, então

$$\begin{aligned}
((g_1g_2, h))\phi_g &= (g_1g_2)^g \otimes h^g = g_1^g g_2^g \otimes h^g = ((g_1^g)^{g_2^g} \otimes (h^g)^{g_2^g})(g_2^g \otimes h^g) \\
&= ((g_1^g)^{g^{-1}g_2g} \otimes (h^g)^{g^{-1}g_2g})(g_2^g \otimes h^g) = (g_1^{g_2g} \otimes h^{g_2g})(g_2^g \otimes h^g) \\
&= (g_1^{g_2}, h^{g_2})\phi_g(g_2, h)\phi_g.
\end{aligned}$$

Analogamente se $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos

$$\begin{aligned}
((g_1, hh_1))\phi_g &= g_1^g \otimes (hh_1)^g = g_1^g \otimes h^g h_1^g = (g_1^g \otimes h_1^g)((g_1^g)^{h_1^g} \otimes (h^g)^{h_1^g}) \\
&= (g_1^g \otimes h_1^g)((g_1^g)^{g^{-1}h_1g} \otimes h_1^{-g} h^g h_1^g) = (g_1^g \otimes h_1^g)(g_1^{h_1g} \otimes h^{h_1g}) \\
&= (g_1, h_1)\phi_g(g_1^{h_1}, h^{h_1})\phi_g.
\end{aligned}$$

Logo ϕ_g determina um único homomorfismo $\alpha_g : G \otimes H \to G \otimes H$ tal que $(g_1 \otimes h)\alpha_g = g_1^g \otimes h^g$ para quaisquer $g_1 \in G$ e $h \in H$. Observemos que $\alpha_g \alpha_{-g} = 1 = \alpha_{-g}\alpha_g$. Portanto α_g é um automorfismo e faz sentido a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}
\alpha : G &\to Aut(G \otimes H) \\
g &\mapsto \alpha_g
\end{aligned}$$

que é um homomorfismo pois $\alpha_{g_1g_2} = \alpha_{g_1}\alpha_{g_2}$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$. Assim obtemos uma ação de G sobre $G \otimes H$ tal que $(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g$. Procedendo analogamente temos o outro caso. □

Proposição 2.7. [5] *Existe um único isomorfismo $\theta : G \otimes H \to H \otimes G$ onde $(g \otimes h)\theta = (h \otimes g)^{-1}$ para todos $g \in G$ e $h \in H$.*

Demonstração. Considere a aplicação $\phi : G \times H \to H \otimes G$ dada por $((g, h))\phi = (h \otimes g)^{-1}$. Observemos que ϕ é uma biderivação. De fato, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}(g_1g_2, h)\phi &= (h \otimes g_1g_2)^{-1} = ((h \otimes g_2)(h^{g_2} \otimes g_1^{g_2}))^{-1} \\ &= (h^{g_2} \otimes g_1^{g_2})^{-1}(h \otimes g_2)^{-1} = (g_1^{g_2}, h^{g_2})\phi(g_2, h)\phi.\end{aligned}$$

De modo análogo mostramos que $(g, h_1h_2)\phi = (g, h_2)\phi(g^{h_2}, h_1^{h_2})\phi$ para quaisquer $g \in G$ e $h_1, h_2 \in H$. Desta forma, pela observação anterior, ϕ determina um único homomorfismo $\theta : G \otimes H \to H \otimes G$, onde $(g \otimes h)\theta = (h \otimes g)^{-1}$ para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$. De forma análoga, existe um único homomorfismo $\mu : H \otimes G \to G \otimes H$ tal que $(h \otimes g)\mu = (g \otimes h)^{-1}$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Note que $\theta\mu = Id_{G\otimes H}$ e $\mu\theta = Id_{H\otimes G}$. Portanto θ é um isomorfismo. □

Proposição 2.8. [5] *Sejam $\alpha : G \to A$ e $\beta : H \to B$ homomorfismos de grupos e suponha que A e B agem compativelmente um sobre o outro e que α e β preservam as ações, isto é,*

$$(h^g)\beta = (h\beta)^{(g)\alpha},$$

$$(g^h)\alpha = (g\alpha)^{(h)\beta},$$

para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$. Nessas condições, existe um único homomorfismo $\alpha \otimes \beta : G \otimes H \to A \otimes B$, onde $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = (g)\alpha \otimes (h)\beta$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Além disso, se α e β são sobrejetoras, então $\alpha \otimes \beta$ também é.

Demonstração. Consideremos a aplicação $\phi : G \times H \to A \otimes B$ dada por $(g, h)\phi = (g)\alpha \otimes (h)\beta$, para todos $g \in G$ e $h \in H$. Temos que ϕ é uma biderivação. De fato,

$$\begin{aligned}(g_1g_2, h)\phi &= (g_1g_2)\alpha \otimes (h)\beta = ((g_1)\alpha(g_2)\alpha) \otimes (h)\beta \\ &= ((g_1)\alpha^{(g_2)\alpha} \otimes (h)\beta^{(g_2)\alpha})((g_2)\alpha \otimes (h)\beta) \\ &= ((g_1^{g_2})\alpha \otimes (h^{g_2})\beta)((g_2)\alpha \otimes (h)\beta) \\ &= (g_1^{g_2}, h^{g_2})\phi(g_2, h)\phi,\end{aligned}$$

para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $h \in H$. Analogamente temos $(g, h_1h_2)\phi = (g, h_2)\phi(g^{h_2}, h_1^{2_2})\phi$ para todo $g \in G$ e $h_1, h_2 \in H$. Disto segue que existe um único homomorfismo $\alpha \otimes \beta : G \otimes H \to A \otimes B$ tal que $(g \otimes h)\phi = (g)\alpha \otimes (h)\beta$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Além disso, se α e β são sobrejetoras, dados $a \in A$ e $b \in B$, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $(g)\alpha = a$ e $(h)\beta = b$, ou seja, $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = a \otimes b$. Como $\{a \otimes b \,|\, a \in A \text{ e } b \in B\}$ gera $A \otimes B$, segue a sobrejetividade de $\alpha \otimes \beta$. □

Proposição 2.9. [5, Proposição 3] *Sejam G e H grupos que agem compativelmente entre si. Para quaisquer $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ valem*

(i) $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$

(ii) $(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$

(iii) $(g^{-1}g^h) \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$

(iv) $g_1 \otimes (h^{-g}h) = (g \otimes h)^{g_1}(g \otimes h)$

(v) $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1$

Demonstração. (i) Primeiramente observemos que

$$1 \otimes h = g^{-1}g \otimes h = ((g^{-1})^g \otimes h^g)(g \otimes h) = (g^{-1} \otimes h)^g(g \otimes h);$$

$$g \otimes 1 = g \otimes h^{-1}h = (g \otimes h)(g^h \otimes h^{-h}) = (g \otimes h)(g \otimes h^{-1})^h;$$

para todos $g \in G$ e $h \in H$. Ou seja,

$$(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h.$$

(ii) Sejam $u, v \in G$ e $x, y \in H$. Primeiramente apliquemos (2.5) e (2.6) em $uv \otimes xy$. Assim,

$$\begin{aligned} uv \otimes xy &= (u \otimes xy)^v(v \otimes xy) = ((u \otimes y)(u \otimes x)^y)^v((v \otimes y)(v \otimes x)^y) \\ &= (u \otimes y)^v(u \otimes x)^{yv}(v \otimes y)(v \otimes x)^y. \end{aligned}$$

Ainda, aplicando (2.6) e (2.5) em $uv \otimes xy$

$$\begin{aligned} uv \otimes xy &= (uv \otimes y)(uv \otimes x)^y = ((u \otimes y)^v(v \otimes y))((u \otimes x)^v(v \otimes x))^y \\ &= (u \otimes y)^v(v \otimes y)(u \otimes x)^{vy}(v \otimes x)^y \end{aligned}$$

Comparando as igualdades temos que

$$(u \otimes x)^{yv}(v \otimes y) = (v \otimes y)(u \otimes x)^{vy}$$

Substituindo u por $g_1^{g^{-1}h^{-1}}$, v por g, x por $h_1^{g^{-1}h^{-1}}$ e y por h, a igualdade anterior fica

$$(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{hg}(g \otimes h) = (g \otimes h)(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh} \tag{2.11}$$

Mas

$$(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{hg}(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}hg}(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)(g \otimes h)$$

$$(g \otimes h)(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh} = (g \otimes h)(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh}$$

Assim, (2.11) se torna

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh}$$

Além disso, observando que

$$\begin{aligned} g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} &= (g_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh} = (g^{-1}g_1^{g^{-1}h^{-1}}g)^h = g^{-h}g_1^{g^{-1}h^{-1}h}g^h \\ &= g^{-h}g_1^{g^{-1}}g^h = g_1^{g^{-1}g^h} \end{aligned}$$

e $h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = (h_1^{g^{-1}})^{h^{-1}gh} = (h_1^{g^{-1}})^{g^h} = h_1^{g^{-1}g^h}$, obtemos

$$(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = g_1^{g^{-1}g^h} \otimes h_1^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h}$$

Sabendo também que $g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = g_1^{h^{-g}h}$ e $h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = h_1^{h^{-g}h}$, podemos concluir de forma análoga que $(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$. Portanto,

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$$

(iii) Para todos $g \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos

$$\begin{aligned} (g^{-1}g^h) \otimes h_1 &= (((g^{-h^{-1}})g) \otimes h_1^{h^{-1}})^h = ((g^{-h^{-1}g} \otimes h_1^{h^{-1}g})(g \otimes h_1^{h^{-1}}))^h \\ &= (g^{-h^{-1}g} \otimes h_1^{h^{-1}g})^h(g \otimes h_1^{h^{-1}})^h = (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h_1^{h^{-1}})^h \\ &= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes (hh_1)h^{-1})^h \\ &= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}((g \otimes h^{-1})(g^{h^{-1}} \otimes (hh_1)^{h^{-1}}))^h \\ &= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h^{-1})^h(g \otimes (hh_1)) \\ &= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes (hh_1)) \qquad \text{(item (i))} \\ &= (g^{-1} \otimes h_1)^{gg^{-1}h^{-1}gh}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \\ &= (g \otimes h_1)^{-g^{-1}h^{-1}gh}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \\ &= (g \otimes h_1)^{-[g,h]}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h))(g \otimes h)^{-1} \\
&\quad (g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \qquad \text{(item (ii))} \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}
\end{aligned}
$$

(iv) Análogo ao item anterior

(v) Para todos $g \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos pelos itens (ii) e (iii)

$$
\begin{aligned}
[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] &= (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h)(g_1 \otimes h_1) \\
&= (g \otimes h)^{-1}((g_1 \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h)(g_1 \otimes h_1)) \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1^{-g_1}h_1} \\
&= g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1
\end{aligned}
$$

□

Definição 2.10. Dados grupos P e M, dizemos que um homomorfismo de grupos $\mu : M \to P$ juntamente com uma ação de P sobre M é um *módulo cruzado* se as seguintes condições são satisfeitas:

$$(m^p)\,\mu = p^{-1}\,((m)\mu)\,p$$

$$(m_1)^{(m)\mu} = m^{-1}m_1m$$

para todos $p \in P$ $m, m_1 \in M$.

Lema 2.11. [4] *O núcleo de um módulo cruzado $\mu : M \to P$ é um subgrupo central de M e $Im(\mu) \lhd P$.*

Demonstração. Sejam $m' \in Ker(\mu)$ e $m \in M$. Da definição de módulo cruzado segue que $m^{m'} = m^{(m')\phi} = m^1 = m$, isto é, $Ker(\mu)$ é um subgrupo central de M. Sendo agora $p \in P$ e $c \in Im(\mu)$, existe $m \in M$ tal que $c = (m)\mu$. Nessas condições (por μ ser módulo cruzado) segue $c^p = p^{-1}cp = p^{-1}((m)\mu)p = (m^p)\mu \in Im(\mu)$. □

Proposição 2.12. [4] *Sejam G e H grupos que agem compativelmente. Valem as seguintes propriedades com respeito ao grupo $G \otimes H$:*

(i) Existem homomorfismos de grupos $\lambda : G \otimes H \to G$ e $\mu : G \otimes H \to H$ tais que

$$(g \otimes h)\,\lambda = g^{-1}g^h \;\; \textit{e} \;\; (g \otimes h)\,\mu = h^{-g}h$$

para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$;

(ii) O homomorfismo λ é, juntamente com a ação de G sobre $G \otimes H$ definida na Proposição 2.6, um módulo cruzado. Analogamente, μ com a ação de H sobre $G \otimes H$ definida na Proposição 2.6 é um módulo cruzado;

(iii) Se $g \in G$, $h \in H$ e $t \in G \otimes H$, então $(t)\lambda \otimes h = t^{-1}t^h$ e $g \otimes (t)\mu = t^{-g}t$;

(iv) $(t)\lambda \otimes (t_1)\mu = [t, t_1]$ para todos $t, t_1 \in G \otimes H$;

(v) As ações de G sobre $Ker(\mu)$ e de H sobre $Ker(\lambda)$ são triviais.

Demonstração. (i) considere a aplicação $\alpha : G \times H \to G$, onde para qualquer par $(g, h) \in G \times H$, $((g, h))\alpha = g^{-1}g^h$. Vamos mostrar que α é uma biderivação. Para quaisquer $g, g_1 \in G$ e $h \in H$ temos

$$\begin{aligned} ((gg_1, h))\,\alpha &= (gg_1)^{-1}(gg_1)^h = g_1^{-1}g^{-1}\left(g_1g_1^{-1}\right)g^h\left(g_1g_1^{-1}\right)g_1^h \\ &= \left(g^{-1}\right)^{g_1}\left(g^h\right)^{g_1}g_1^{-1}g_1^h = \left(g^{g_1}\right)^{-1}g^{g_1g_1^{-1}hg_1}g_1^{-1}g_1^h \\ &= \left(g^{g_1}\right)^{-1}\left(g^{g_1}\right)^{g_1^{-1}hg_1}g_1^{-1}g_1^h = \left(g^{g_1}\right)^{-1}\left(g^{g_1}\right)^{h^{g_1}}g_1^{-1}g_1^h \\ &= ((g^{g_1}, h^{g_1}))\alpha\,((g_1, h))\alpha. \end{aligned}$$

De forma análoga podemos mostrar a seguinte identidade

$$((g, hh_1))\,\alpha = ((g, h_1))\alpha\,((g^{h_1}, h^{h_1}))\alpha,$$

para quaisquer $g \in G$ e $h, h_1 \in H$. Logo existe um único homomorfismo $\lambda : G \otimes H \to G$ em que $(g \otimes h)\lambda = g^{-1}g^h$ com $g \in G$ e $h \in H$. Para μ procedemos de maneira análoga.

(ii) Já sabemos que λ e μ são homomorfismos. Nos resta provar que as duas condições da Definição 2.10 valem para todos os geradores de $G \otimes H$ e todo $g \in G$. Sejam $g_1 \otimes h \in G \otimes H$ e $g \in G$, segue que

$$\begin{aligned} ((g_1 \otimes h)^g)\,\lambda &= \left(g_1^g \otimes h^g\right)\lambda = \left(g_1^g\right)^{-1}\left(g_1^g\right)^{h^g} = g_1^{-g}g_1^{gg^{-1}hg} \\ &= g_1^{-g}g_1^{hg} = \left(g_1^{-1}g_1^h\right)^g = g^{-1}\left(g_1^{-1}g_1^h\right)g \\ &= g^{-1}(g_1 \otimes h)\,\lambda\; g. \end{aligned}$$

Para a segunda condição observemos o item (ii) da Proposição 2.9. Para quaisquer $g_1 \otimes h_1, g \otimes h \in G \otimes H$ temos

$$(g_1 \otimes h_1)^{(g\otimes h)\lambda} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h).$$

Analogamente mostra-se que μ também é um módulo cruzado.

(iii) segue diretamente dos itens (iii) e (iv) da Proposição 2.9.

(iv) É uma consequência do item (v) da Proposição 2.9.

(v) Para demonstrar que G age trivialmente sobre $Ker(\mu)$ tomemos $t \in Ker(\mu)$ e $g \in G$. Pelo item (iii) temos que

$$g \otimes (t)\mu = g \otimes 1_H = 1_{G\otimes H} = t^{-g}t.$$

Logo $t^g = t$. O caso de H agir trivialmente sobre $Ker(\lambda)$ é demonstrado de forma análoga.

□

Teorema 2.13. [4] *Se G e H agem trivialmente um sobre o outro, então*

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}.$$

Demonstração. Primeiramente observemos que do item (v) da Proposição 2.9 segue que $G \otimes H$ é abeliano, uma vez que G e H atuam trivialmente um sobre o outro. Ainda, pelo mesmo motivo, λ e μ são homomorfismos triviais. Assim, pelo item (v) da Proposição 2.12 temos que G e H agem trivialmente sobre $G \otimes H$. Defina agora a aplicação $\theta : G^{ab} \times H^{ab} \to G \otimes H$ pondo $\left(\bar{g}, \bar{h}\right)\theta = g \otimes h$ para quaisquer $\bar{g} \in G^{ab}$ e $\bar{h} \in H^{ab}$. Vejamos agora que θ está bem definida. Com efeito, se $g, x \in G$ e $h, y \in H$ são tais que $\bar{g} = \bar{x}$ e $\bar{h} = \bar{y}$, então existem $c \in G'$ e $d \in H'$ satisfazendo $g = cx$ e $h = dy$. Logo,

$$\begin{aligned} g \otimes h &= cx \otimes dy = (c \otimes dy)^x (x \otimes dy) \\ &= \left((c \otimes y)(c \otimes d)^y\right)^x \left((x \otimes y)(x \otimes d)^y\right) \\ &= (c \otimes y)^x (c \otimes d)^{yx} (x \otimes y)(x \otimes d)^y \\ &= (c \otimes y)(c \otimes d)(x \otimes y)(x \otimes d). \end{aligned}$$

Ainda, temos que dados $r, s \in G$ e $t, u \in H$

$$\begin{aligned}
[r,s] \otimes t &= r^{-1}s^{-1}rs \otimes t = \left(s^{-1}\right)^r s \otimes t = \left(\left(s^{-1}\right)^r \otimes t\right)^s (s \otimes t) \\
&= \left(\left(s^{-1}\right)^r \otimes t^r\right)(s \otimes t) = \left(s^{-1} \otimes t\right)^r (s \otimes t) = \left(s^{-1} \otimes t\right)(s \otimes t) \\
&= \left(s^{-1} \otimes t\right)^s (s \otimes t) = s^{-1}s \otimes t = 1_{G\otimes H}.
\end{aligned}$$

Segue de forma análoga que $r \otimes [t,u] = 1_{G\otimes H}$. Dessa forma, temos que $c \otimes y = c \otimes d = x \otimes d = 1_{G\otimes H}$, ou seja, $g \otimes h = x \otimes y$. Por fim, temos que a aplicação θ é $\mathbb{Z}$-bilinear e, isso se deve por G e H agirem trivialmente um sobre o outro. De fato, façamos um dos casos e os outros podem ser mostrados de forma análoga. Sejam $g, g_1 \in G$ e $h \in H$,

$$(\bar{g}\bar{g}_1, h)\theta = gg_1 \otimes h = (g \otimes h)^{g_1}(g_1 \otimes h) = (g \otimes h)(g_1 \otimes h) = (\bar{g}, h)\theta\ (\bar{g}_1, h)\theta$$

Assim, existe um homomorfismo $\tilde{\theta} : G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab} \to G \otimes H$ tal que $(\bar{g} \otimes \bar{h})\tilde{\theta} = g \otimes h$ para todos $\bar{g} \in G'$ e $\bar{h} \in H'$.

Seja também $f : G \times H \to G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$ em que $(g,h)f = \bar{g} \otimes \bar{h}$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Provemos que definida dessa maneira f é uma biderivação. De fato, se $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$

$$(gg_1, h)f = \bar{g}\bar{g}_1 \otimes \bar{h} = (\bar{g} \otimes \bar{h})(\bar{g}_1 \otimes \bar{h})$$

e

$$(g^{g_1}, h^{g_1})f(g_1, h)f = (g,h)f(g_1,h)f = (\bar{g} \otimes \bar{h})(\bar{g}_1 \otimes \bar{h})$$

Provamos de forma análoga que $(g, hh_1)f = (g, h_1)f(g^{h_1}, h^{h_1})f$. Portanto existe um homomorfismo $\tilde{f} : G \otimes H \to G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$ tal que $(g \otimes h)\tilde{f} = \bar{g} \otimes \bar{h}$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Ainda, $\tilde{f}\tilde{\theta} = Id_{G\otimes H}$ e $\tilde{\theta}\tilde{f} = Id_{G^{ab}\otimes H^{ab}}$ e, consequentemente $G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$, como queríamos. □

Para finalizar esta seção vejamos um exemplo de um produto tensorial não abeliano de grupos.

Exemplo 2.14. Consideremos o produto tensorial não abeliano entre os grupos $\mathbb{Z}$ e D_8, onde um age sobre o outro através das ações triviais e sobre si mesmos através da conjugação. Com isso, é possível aplicar o teorema anterior para concluir que $\mathbb{Z} \otimes D_8$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} D_8^{ab}$. Agora, observando que $D_8^{ab} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, segue que pela Proposição 1.35,

$$\mathbb{Z} \otimes D_8 \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

2.2 O Grupo $\eta(G,H)$

Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma construção de grupo que aparece em [16, 13] e que está relacionado com o produto tensorial não abeliano de grupos. Além disso, veremos algumas das propriedades principais dessa construção.

Definição 2.15. Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro, H^φ uma cópia de H isomorfo por $\varphi : H \mapsto H^\varphi$, onde escrevemos $(h)\varphi = h^\varphi$ para qualquer $h \in H$. Definimos $\eta(G,H)$ como sendo o grupo

$$\langle G, H^\varphi \,|\, [g,h^\varphi]^{g_1} = [g^{g_1},(h^{g_1})^\varphi],\, [g,h^\varphi]^{h_1{}^\varphi} = \left[g^{h_1},\left(h^{h_1}\right)^\varphi\right],\, \forall g,g_1 \in G \textbf{ e } h,h_1 \in H\rangle,$$

em outras palavras,

$$\eta(G,H) = \frac{G * H^\varphi}{\langle R\rangle^{G*H^\varphi}},$$

onde

$$R = \{[g,h^\varphi]^{g_1}[g^{g_1},(h^{g_1})^\varphi]^{-1},\, [g,h^\varphi]^{h_1{}^\varphi}\left[g^{h_1},\left(h^{h_1}\right)^\varphi\right]^{-1};\, \forall g,g_1 \in G \textbf{ e } h,h_1 \in H\},$$

e $\langle R\rangle^{G*H^\varphi}$ é o fecho normal de R em $G * H^\varphi$.

Vale citar que há uma outra construção de grupo devida a Ellis e Leonard [8] que é isomorfa a $\eta(G,H)$. Além disso, quando $G = H$ e as ações são por conjugação, $\eta(G,G)$ é o grupo

$$\langle G, G^\varphi \,|\, [g_1,g_2^\varphi]^{g_3} = [g_1^{g_3},(g_2^{g_3})^\varphi] = [g_1,g_2^\varphi]^{g_3{}^\varphi},\, \forall g_1,g_2,g_3 \in G\rangle,$$

denotado por $\nu(G)$, o qual foi introduzido por Rocco em [15].

Exemplo 2.16. Consideremos os grupos G e H com apresentações $G = \langle a \,|\, a^3\rangle$ e o grupo $H = \langle b \,|\, b^2\rangle$. Suponha que G age trivialmente sobre H e que H age sobre G da seguinte forma: $a^b = a^{-1}(= a^2)$. Logo, $\eta(G,H)$ é dado por:

$$\begin{aligned}\eta(G,H) \;=\; & \langle a, b^\varphi \mid a^3 = 1,\ (b^\varphi)^2 = 1,\ [a,b^\varphi]^a = [a,b^\varphi],\ [a,b^\varphi]^{a^2} = [a,b^\varphi],\\ & [a,b^\varphi]^{b^\varphi} = [a^2,b^\varphi],\ [a^2,b^\varphi]^a = [a^2,b^\varphi], [a^2,b^\varphi]^{a^2} = [a^2,b^\varphi],\\ & [a^2,b^\varphi]^{b^\varphi} = [a,b^\varphi]\rangle.\end{aligned}$$

Agora observemos que

$$[a^2,b^\varphi] = [a,b^\varphi]^a[a,b^\varphi] = [a,b^\varphi][a,b^\varphi] = [a,b^\varphi]^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= [1, b^\varphi] = [a^3, b^\varphi] = [a^2, b^\varphi]^a [a, b^\varphi] = [a^2, b^\varphi][a, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^2 [a, b^\varphi] \\ &= [a, b^\varphi]^3. \end{aligned}$$

Ou seja, $[a, b^\varphi]^{-1} = [a^2, b^\varphi]$. Logo, podemos escrever $\eta(G,H)$ como:

$$\eta(G,H) = \langle a, b^\varphi \mid a^3 = 1,\ (b^\varphi)^2 = 1,\ [a, b^\varphi]^a = [a, b^\varphi],\ [a, b^\varphi]^{b^\varphi} = [a, b^\varphi]^{-1} \rangle.$$

Agora, consideremos $V = \langle x, y \mid x^3, y^3, [x,y] \rangle \cong C_3 \times C_3$ e um automorfismo α de V tal que $(x)\alpha = xy$ e $(y)\alpha = y^{-1}$. Tomando $\langle \alpha \rangle \leq Aut(V)$ e uma ação de $\langle \alpha \rangle$ sobre V dada por $v^{\alpha^i} = (v)\alpha^i$ para quaisquer $i \in \mathbb{Z}$ e $v \in V$, é possível definir o produto semidireto $\langle \alpha \rangle \ltimes V$. Afirmamos que $\langle \alpha \rangle \ltimes V \cong \eta(G,H)$. De fato, considere a aplicação $\theta : \{a, b^\varphi\} \to \langle \alpha \rangle \ltimes V$ dada por $(a)\theta = (1_{Aut(V)}, x)$ e $(b^\varphi)\theta = (\alpha, 1_V)$. Podemos aplicar o Teste da Substituição (uma vez que θ satisfaz as relações definidoras de $\eta(G,H)$) para concluir que existe um homomorfismo $\theta_1 : \eta(G,H) \to \langle \alpha \rangle \ltimes V$ que estende θ. Se provarmos que existe um homomorfismo $\theta_2 : \langle \alpha \rangle \ltimes V \to \eta(G,H)$ que é inverso de θ_1 temos o requerido. Assim, defina $\theta_2 : \langle \alpha \rangle \ltimes V \to \eta(G,H)$ colocando $((\alpha^\varepsilon, x^i y^j))\theta_2 = a^i [a, b^\varphi]^j (b^\varphi)^\varepsilon$ para todos $i, j \in \{0,1,2\}$ e $\varepsilon \in \{0,1\}$. Temos que θ_2 é um homomorfismo e claramente $\theta_1\theta_2 = Id_{\eta(G,H)}$, e $\theta_2\theta_1 = Id_{\langle \alpha \rangle \ltimes V}$, o que é suficiente para garantirmos um isomorfismo entre $\langle \alpha \rangle \ltimes V$ e $\eta(G,H)$.

Observação 2.17. Tomando $\theta : G \to \eta(G,H)$ e $\vartheta : H \to \eta(G,H)$ como sendo homomorfismos canônicos, mostremos que são injetores. De fato, suponha que G seja dado pela apresentação livre $\langle X | R \rangle$ e H^φ por $\langle Y | S \rangle$. Consideremos também a aplicação $\rho : X \cup Y \to G$ definida por $(a)\rho = a$, se $a \in X$ e $(a)\rho = 1$, se $a \in Y$. Note que podemos estender ρ para um epimorfismo $\rho_1 : G * H^\varphi \to G$ e é facil ver que $\langle R \rangle^{G * H^\varphi} \subset Ker(\rho_1)$. Desta forma ρ_1 induz um homomorfismo $\theta' : \eta(G, H^\varphi) \to G$ que satisfaz $\theta\theta' = Id$. Portanto θ é injetora. De modo análogo mostramos que ϑ é injetora. Com isso, podemos identificar G e H^φ com as imagens de θ e ϑ em $\eta(G,H)$ respectivamente.

Definição 2.18. Um subgrupo M de G é chamado de *H-subgrupo de G* se $m^h \in M$ para quaisquer $m \in M$ e $h \in H$.

Proposição 2.19. *Se M é um H-subgrupo normal de G e N um G-subgrupo normal de H, então as seguintes propriedades são válidas:*

(i) $[M, N^{\varphi}] \lhd \eta(G,H)$*;*

(ii) $[\gamma_i(M), (\gamma_j(N))^{\varphi}] \lhd \eta(G,H)$*, para todos* $i, j \geq 1$*;*

(iii) $[M^{(i)}, \left(N^{(j)}\right)^{\varphi}] \lhd \eta(G,H)$*, para todos* $i, j \geq 0$*.*

Demonstração. (i) Das relações definidoras de $\eta(G,H)$, temos que $[m, n^{\varphi}]^g = [m^g, (n^g)^{\varphi}]$ para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $g \in G$. Como $M \lhd G$ e N é um G-subgrupo segue que $[m, n^{\varphi}]^g = [m_1, n_1^{\varphi}]$ para algum $m_1 \in M$ e $n_1^{\varphi} \in N^{\varphi}$, isto é, G normaliza $[M, N^{\varphi}]$. Da mesma forma podemos concluir que H^{φ} normaliza $[M, N^{\varphi}]$, e portanto, $[M, N^{\varphi}] \lhd \eta(G,H)$.

(ii) Como $\gamma_i(M)$ char M e $M \lhd G$, então $\gamma_i(M) \lhd G$. Observemos inicialmente que $\gamma_1(M) = M$. Logo $\gamma_1(M)$ é um H-subgrupo de G. Suponha agora $\gamma_{i-1}(M)$ que seja um H-subgrupo de G. Assim, dado $x = [x_{i-1}, m] \in \gamma_i(M)$, onde $x_{i-1} \in \gamma_{i-1}(M)$ e $m \in M$, temos $x^h = [x_{i-1}, m]^h = [x_{i-1}^h, m^h] \in [\gamma_{i-1}(M), M] = \gamma_i(M)$ para todo $h \in H$. Analogamente $\gamma_j(N)$ é um G-subgrupo de H. Portanto, pelo item anterior temos $[\gamma_i(M), (\gamma_j(N))^{\varphi}] \lhd \eta(G,H)$.

(iii) Análogo ao item anterior.

□

Observação 2.20. Denotaremos o subgrupo normal $[G, H^{\varphi}]$ de $\eta(G,H)$ por $\tau(G,H)$. Ainda, $\eta(G,H)$ pode ser decomposto como $\eta(G,H) = \tau(G,H)GH^{\varphi}$. Isso se deve por $G \cup H^{\varphi}$ gerar $\eta(G,H)$, por $\tau(G,H)$ ser normal em $\eta(G,H)$, e também por $h^{\varphi}g = [g^{-1}, (h^{-1})^{\varphi}]^{-1}gh^{\varphi}$ para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$.

Teorema 2.21. *Existe um isomorfismo* $\alpha : \tau(G,H) \to G \otimes H$ *tal que* $([g, h^{\varphi}])\alpha = g \otimes h$*, para todos* $g \in G$ *e* $h \in H$*.*

Demonstração. Consideremos o produto livre $G * H^{\varphi}$. Segue do Lema 1.28 que o subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $G * H^{\varphi}$ é livre, livremente gerado pelos elementos $[g, h^{\varphi}]$, onde $g \in G \setminus \{1\}$ e $h \in H \setminus \{1\}$. Sejam os conjuntos

$$R = \{[g, h^{\varphi}]^{-x}[g^x, (h^x)^{\varphi}],\ [g, h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^y, (h^y)^{\varphi}]^{-1};\ g, x \in G \setminus \{1\} \textbf{ e } h, y \in H \setminus \{1\}\},$$

e

$$\begin{aligned} S \ = \ & \{[gg_1, h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}][g_1, h^{\varphi}],\ [g, (hh_1)^{\varphi}]^{-1}[g, h_1^{\varphi}][g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}]; \\ & g, g_1 \in G \setminus \{1\},\ h, h_1 \in H \setminus \{1\}\}. \end{aligned}$$

Como $[G, H^\varphi]$ é um subgrupo normal de $G * H^\varphi$, R e S são subconjuntos de $[G, H^\varphi]$.
Afirmação: $\langle S\rangle^{[G,H^\varphi]} \lhd G * H^\varphi$.

De fato, sejam $s = [gg_1, h^\varphi]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi][g_1, h^\varphi]$ um elemento de S e $x \in G$. Pelas identidades de comutadores

$$\begin{aligned}
s^x &= [gg_1, h^\varphi]^{-x}[g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi]^x[g_1, h^\varphi]^x \\
&= \left([gg_1, h^\varphi]^x[x, h^\varphi][x, h^\varphi]^{-1}\right)^{-1}\left([g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi]^x[x, (h^{g_1})^\varphi][x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}\right) \\
&\quad \left([g_1, h^\varphi]^x[x, h^\varphi][x, h^\varphi]^{-1}\right) \\
&= \left([(gg_1)x, h^\varphi][x, h^\varphi]^{-1}\right)^{-1}\left([(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi][x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}\right) \\
&\quad \left([g_1x, h^\varphi][x, h^\varphi]^{-1}\right) \\
&= \left([x, h^\varphi][(gg_1)x, h^\varphi]^{-1}\right)\left([(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi][x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}\right) \\
&\quad [g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi]^{-1}[(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi][(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}[(gg_1)x, h^\varphi] \\
&\quad [(gg_1)x, h^\varphi]^{-1}[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi]\left([g_1x, h^\varphi][x, h^\varphi]^{-1}\right) \\
&= [x, h^\varphi]\ (\ [(gg_1)x, h^\varphi]^{-1}[(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi]\ (\ [x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1} \\
&\quad [g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi]^{-1}[(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi]\ )\ [(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}[(gg_1)x, h^\varphi] \\
&\quad ([gg_1x, h^\varphi]^{-1}[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi][g_1x, h^\varphi])\ )\ [x, h^\varphi]^{-1} \\
&= [x, h^\varphi]\ (\ [(gg_1)x, h^\varphi]^{-1}[(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi]\ s_1\ [(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}[(gg_1)x, h^\varphi] \\
&\quad s_2\ )\ [x, h^\varphi]^{-1} \\
&= \left(s_1^{[(g^{g_1})x,(h^{g_1})^\varphi]^{-1}[(gg_1)x,h^\varphi]}s_2\right)^{[x,h^\varphi]^{-1}},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
s_1 &= [x, (h^{g_1})^\varphi]^{-1}[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi]^{-1}[(g^{g_1})x, (h^{g_1})^\varphi] \\
s_2 &= [gg_1x, h^\varphi]^{-1}[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^\varphi][g_1x, h^\varphi].
\end{aligned}$$

Logo $s^x \in \langle S\rangle^{[G,H^\varphi]}$. Para $y \in H$ temos

$$\begin{aligned}
s^y &= [gg_1, h^\varphi]^{-y^\varphi}[g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi]^{y^\varphi}[g_1, h^\varphi]^{y^\varphi} \\
&= \left([gg_1, y^\varphi]^{-1}[gg_1, (hy)^\varphi]\right)^{-1}\left([g^{g_1}, y^\varphi]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1}y)^\varphi]\right) \\
&\quad \left([g_1, y^\varphi]^{-1}[g_1, (hy)^\varphi]\right) \\
&= \left([gg_1, (hy)^\varphi]^{-1}[gg_1, y^\varphi]\right)\left([g^{g_1}, y^\varphi]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1}y)^\varphi]\right) \\
&\quad \left([g_1, y^\varphi]^{-1}[g_1, (hy)^\varphi]\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \big([gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}]\big)\,[g^y g_1^y,(h^y)^{\varphi}][g^y g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1} \\
&\quad [(g^y)^{g_1^y},((h^y)^{g_1^y})^{\varphi}][g_1^y,(h^y)^{\varphi}][g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}[(g^y)^{g_1^y},((h^y)^{g_1^y})^{\varphi}]^{-1} \\
&\quad \big([g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}]\big)\,[g_1^y,(h^y)^{\varphi}][g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1} \\
&\quad \big([g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}]\big) \\
&= \big([gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}][g^y g_1^y,(h^y)^{\varphi}]\big)\,\big([g^y g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1} \\
&\quad [(g^y)^{g_1^y},((h^y)^{g_1^y})^{\varphi}][g_1^y,(h^y)^{\varphi}]\big)[g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}\big([(g^y)^{g_1^y},((h^y)^{g_1^y})^{\varphi}]^{-1} \\
&\quad [g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}]\big)[g_1^y,(h^y)^{\varphi}] \\
&\quad \big([g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}[g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}]\big) \\
&= s_3 s_4 [g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1} s_5 [g_1^y,(h^y)^{\varphi}] s_6 \\
&= s_3 s_4 s_5^{[g_1^y,(h^y)^{\varphi}]} s_6,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
s_3 &= [gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}][g^y g_1^y,(h^y)^{\varphi}] \\
s_4 &= [g^y g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}[(g^y)^{g_1^y},((h^y)^{g_1^y})^{\varphi}][g_1^y,(h^y)^{\varphi}] \\
s_5 &= [(g^y)^{g_1^y},((h^y)^{g_1^y})^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}] \\
s_6 &= [g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}[g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}].
\end{aligned}
$$

Dessa forma, temos que $s^{y^{\varphi}} \in \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$. De forma análoga podemos provar que o conjugado de um elemento de S da forma $[g,(hh_1)^{\varphi}]^{-1}[g,h_1^{\varphi}]\ [g^{h_1},(h^{h_1})^{\varphi}]$ por um elemento qualquer de $G * H^{\varphi}$ pertence a $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$, donde segue que $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \lhd G * H^{\varphi}$.

Afirmação: $\langle R\rangle^{G*H^{\varphi}} = \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$.

Consideremos r, r' elementos de R da forma:

$$r = [g,h^{\varphi}]^{-x}[g^x,(h^x)^{\varphi}],\ r' = [g,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^y,(h^y)^{\varphi}].$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
r &= [g,h^{\varphi}]^{-x}[g^x,(h^x)^{\varphi}] = \big([gx,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1}\big)^{-1}[g^x,(h^x)^{\varphi}] \\
&= [x,h^{\varphi}]\big([gx,h^{\varphi}]^{-1}[g^x,(h^x)^{\varphi}][x,h^{\varphi}]\big)[x,h^{\varphi}]^{-1} \\
&= s^{[x,h^{\varphi}]^{-1}},
\end{aligned}
$$

onde $s = [gx,h^{\varphi}]^{-1}[g^x,(h^x)^{\varphi}][x,h^{\varphi}] \in S$. Também,

$$
\begin{aligned}
r' &= [g,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^y,(h^y)^{\varphi}] = \big([g,y^{\varphi}]^{-1}[g,(hy)^{\varphi}]\big)^{-1}[g^y,(h^y)^{\varphi}] \\
&= [g,(hy)^{\varphi}]^{-1}[g,y^{\varphi}][g^y,(h^y)^{\varphi}] = s' \in S.
\end{aligned}
$$

Assim, $R \subset \langle S\rangle^{[G,H^\varphi]}$ e $S \subset \langle R\rangle^{G*H^\varphi}$. Ainda por $\langle S\rangle^{[G,H^\varphi]} \lhd G*H^\varphi$, temos que $\langle R\rangle^{G*H^\varphi} = \langle S\rangle^{[G,H^\varphi]}$.

Das afirmações anteriores podemos concluir que $\eta(G,H) = (G*H^\varphi)/(\langle S\rangle^{[G,H^\varphi]})$ e portanto, $\tau(G,H) = [G,H^\varphi]/(\langle S\rangle^{[G,H^\varphi]})$. Com isso, o homomorfismo $\psi : [G,H^\varphi] \to G\otimes H$ tal que $([g,h^\varphi])\psi = g\otimes h$ para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$ induz um homomorfismo $\alpha : \tau(G,H) \to G\otimes H$. Por outro lado, a aplicação $\gamma : G\times H \to \tau(G,H)$ dada por $(g,h)\gamma = [g,h^\varphi]$ é um biderivação, e assim induz um homomorfismo $\beta : G\otimes H \to \tau(G,H)$. Por fim, não é difícil ver que $\alpha\beta = Id_{\tau(G,H)}$ e $\beta\alpha = Id_{G\otimes H}$ como queríamos. □

Observação 2.22. Nem sempre temos que $J \leq G$ e $K \leq H$ implicarão em $[J,K^\varphi] \cong J\otimes K$. Como exemplo, consideremos o grupo diedral de ordem 8, onde

$$D_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$$

e $a^4 = 1$, $b^2 = 1$ e $a^ib = ba^{4-i}$, se $i = 1,2,3$. Agora em $\eta(D_8,D_8)$, temos $[a^2,(a^2)^\varphi] = [a,a^\varphi]^4 = [a^4,a^\varphi] = 1$, assim $[\langle a^2\rangle, \langle a^2\rangle^\varphi] = \{1\}$. Mas $\langle a^2\rangle \otimes \langle a^2\rangle \cong \langle a^2\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \langle a^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$.

Proposição 2.23. *Em $\eta(G,H)$ valem as seguintes propriedades:*

(i) Para quaisquer $g,x \in G$ e $h,y \in H$ as seguintes identidades são verdadeiras:

(a) $[g,h^\varphi]^{[x,y^\varphi]} = [g,h^\varphi]^{x^{-1}x^y} = [g,h^\varphi]^{(y^{-x}y)^\varphi}$;

(b) $[g,h^\varphi]^{[x,y^\varphi]^{-1}} = [g,h^\varphi]^{x^{-y}x} = [g,h^\varphi]^{(y^{-1}y^x)^\varphi}$;

(c) $[g^{-1}g^h, y^\varphi] = [g,h^\varphi]^{-1}[g,h^\varphi]^{y^\varphi}$;

(d) $[x,(h^{-g}h)^\varphi] = [g,h^\varphi]^{-x}[g,h^\varphi]$;

(e) $[[g,h^\varphi],[x,y^\varphi]] = [g^{-1}g^{h^\varphi}, (y^{-x}y)^\varphi]$;

(f) $[[g,h^\varphi],[x,y^\varphi]^{-1}] = [g^{-1}g^{h^\varphi}, (y^{-1}y^x)^\varphi]$;

(ii) Existem homomorfismos de grupos $\lambda : \tau(G,H) \to G$ e $\mu : \tau(G,H) \to H$ tais que $([g,h^\varphi])\lambda = g^{-1}g^h$ e $([g,h^\varphi])\mu = h^{-g}h$;

(iii) $[(t)\lambda, ((t_1)\mu)^\varphi] = [t,t_1]$ para todos $t,t_1 \in \tau(G,H)$.

(iv) $[(t)\lambda, h^\varphi] = t^{-1}t^h$ e $[g,((t)\mu)^\varphi] = t^{-g}t$ para quaisquer $g \in G$, $h \in H$ e $t \in \tau(G,H)$.

Demonstração. Seguem diretamente do Teorema 2.21 e das Proposições 2.9 e 2.12. □

Definição 2.24. O subgrupo $\langle\{g^{-1}g^h \mid g \in G, h \in H\}\rangle$ de G é denotado por $D_H(G)$. Chamamos este subgrupo de *subgrupo derivativo* de G por H.

Observação 2.25. Se tivermos que G e H agem compativelmente um sobre o outro, então $D_H(G) = Im(\lambda)$ e $D_G(H) = Im(\mu)$.

Proposição 2.26. [13] *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Então:*

(i) $D_H(G)$ é um H-subgrupo normal de G e $D_G(H)$ é um G-subgrupo normal de H.

(ii) Para quaisquer $i \geq 1$ e $j \geq 0$ temos que $\gamma_i(D_H(G))$ e $D_H(G)^{(j)}$ são H-subgrupos normais de G e $\gamma_i(D_G(H))$ e $D_G(H)^{(j)}$ são G-subgrupos normais de H.

(iii) $D_H(G)^{(i)} = (\tau(G, H)^{(i)})\lambda$ e $D_G(H)^{(i)} = (\tau(G, H)^{(i)})\mu$ para qualquer $i \geq 0$.

(iv) $g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$ e $h^{(t)\lambda} = h^{(t)\mu}$, para todos $g \in G$, $h \in H$ e $t \in \tau(G, H)$.

Demonstração. (i) Como as ações são compatíveis, para quaisquer $g, x \in G$ e $h \in H$, temos

$$(g^{-1}g^h)^x = (g^x)^{-1}g^{xx^{-1}hx} = (g^x)^{-1}(g^x)^{h^x} \in D_H(G),$$

e isso implica $D_H(G) \lhd G$. Ainda, se $g \in G$ e $h, y \in H$,

$$(g^{-1}g^h)^y = (g^y)^{-1}g^{yy^{-1}hy} = (g^y)^{-1}(g^y)^{h^y} \in D_H(G).$$

Portanto, $D_H(G)$ é um H-subgrupo de G. De forma análoga podemos provar que $D_G(H)$ é um G-subgrupo normal de H.

(ii) Uma vez que para qualquer $i \in \mathbb{N}$, $\gamma_i(D_H(G))$ é um subgrupo característico de $D_H(G)$, e por $D_H(G)$ ser um H-subgrupo normal de G, segue que $\gamma_i(D_H(G))$ deve também ser um H-subgrupo normal de G. De forma análoga mostramos os outros casos.

(iii) Vamos provar por indução sobre $n \in \mathbb{N}$ que $D_H(G)^{(n)} = (\tau(G, H)^{(n)})\lambda$. Sabemos que $(\tau(G, H))\lambda = D_H(G)$, assim vale para $n = 0$. Suponha agora que $D_H(G)^{(n)} = (\tau(G, H)^{(n)})\lambda$ para algum $n \in \mathbb{N}$, logo:

$$\begin{aligned}(\tau(G, H)^{(n+1)})\lambda &= ([\tau(G, H)^{(n)}, \tau(G, H)^{(n)}])\lambda = [(\tau(G, H)^{(n)})\lambda, (\tau(G, H)^{(n)})\lambda] \\ &= [D_H(G)^{(n)}, D_H(G)^{(n)}] = D_H(G)^{(n+1)}.\end{aligned}$$

Portanto, $D_H(G)^{(i)} = (\tau(G,H)^{(i)})\lambda$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Analogamente mostramos que $D_G(H)^{(i)} = (\tau(G,H)^{(i)})\mu$ pata todo $i \geq 0$.

(iv) Provemos que $g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$, para quaisquer $g \in G$ e $t \in \tau(G,H)$. De fato, se $x \in G$ e $y \in H$, então

$$g^{x^{-1}y^{-1}xy} = (g^{x^{-1}y^{-1}x})^y = (g^{y^{-x}})^y = g^{y^{-x}y}.$$

Ainda,

$$\begin{aligned} g^{x^{-1}y^{-1}xy} &= (xgx^{-1})^{y^{-1}xy} = (x^{y^{-1}}g^{y^{-1}}x^{-y^{-1}})^{xy} = (x^{-1}x^{y^{-1}}g^{y^{-1}}x^{-y^{-1}}x)^y \\ &= x^{-y}xgx^{-1}x^y = g^{x^{-1}x^y}. \end{aligned}$$

Disto segue que $g^{([g,h^\varphi])\lambda} = g^{([g,h^\varphi])\mu}$ para todos $g, x \in G$ e $y \in H$. Uma vez que $\tau(G,H) = \langle [g,h^\varphi] \,|\, g \in G,\ h \in H \rangle$, concluímos que $g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$ para todos $g \in G$ e $t \in \tau(G,H)$. Analogamente mostramos que $h^{(t)\lambda} = h^{(t)\mu}$, para todos $h \in H$ e $t \in \tau(G,H)$. $\square$

A proposição a seguir segue diretamente do Teorema 2.21.

Proposição 2.27. *Sejam $g \in G$, $h \in H$ e $n \in \mathbb{N}$. As seguintes identidades são válidas:*

(i) $[g,(h^n)^\varphi] = \prod_{i=0}^{n-1}[g^{h^i}, h^\varphi]$;

(ii) $[g^n, h^\varphi] = \prod_{i=1}^{n}[g,(h^{g^{n-i}})^\varphi]$;

Proposição 2.28. [13] *Sejam $\alpha : G \to A$ e $\beta : H \to B$ dois homomorfismos de grupos, em que A e B são tais que agem compativelmente um sobre o outro e ainda α e β preservam as ações. Nessas condições valem:*

(i) Existe um homomorfismo $\gamma : \eta(G,H) \to \eta(A,B)$ em que $(g)\gamma = (g)\alpha$ e $(h^\varphi)\gamma = ((h)\beta)^\psi$;

(ii) Se α e β são sobrejetoras então γ também é e

(a) $Ker(\gamma) = \langle Ker(\alpha), (Ker(\beta))^\varphi \rangle [Ker(\alpha), H^\varphi][G, (Ker(\beta))^\varphi]$;

(b) Se γ' é a restrição de γ em $\tau(G,H)$, então a sequência de grupos a seguir é exata

$$1 \longrightarrow [Ker(\alpha), H^\varphi][G,(Ker(\beta))^\varphi] \xrightarrow{inc} \tau(G,H) \xrightarrow{\gamma'} \tau(A,B) \longrightarrow 1$$

Demonstração. (i) Suponha que $\alpha : G \to A$ e $\beta : H \to B$ são homomorfismos que preservam as ações. Observemos que existe um homomorfismo $\sigma : G * H^\varphi \to \eta(A, B)$ que é induzido por α e β, isto é, tal que $(g)\sigma = (g)\alpha$ e $(h^\varphi)\beta = ((h)\beta)^\psi$. Lembramos que

$$\eta(G, H) = \frac{G * H^\varphi}{\langle R\rangle^{G*H^\varphi}},$$

onde

$$R = \{[g, h^\varphi]^{g_1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi]^{-1},\ [g, h^\varphi]^{h_1{}^\varphi}\left[g^{h_1}, \left(h^{h_1}\right)^\varphi\right]^{-1};\ \forall g, g_1 \in G \text{ e } h, h_1 \in H\}.$$

Agora, se mostrarmos que $\langle R\rangle^{G*H^\varphi} \subset Ker(\sigma)$ então valerá que existe um homomorfismo $\gamma : \eta(G, H) \to \eta(A, B)$ induzido por σ. Para todos $g, x \in G$ e $h \in H$ temos

$$\begin{aligned}([g^x, (h^x)^\varphi])\sigma &= [(g^x)\alpha, ((h^x)\beta)^\psi] = [((g)\alpha)^{(x)\alpha}, (((h)\beta)^{(x)\alpha})^\psi] \\ &= [(g)\alpha, ((h)\beta)^\psi]^{(x)\alpha} = ([g, h^\varphi]^x)\sigma.\end{aligned}$$

Desta forma $([g, h^\varphi]^x[g^x, (h^x)^\varphi]^{-1})\sigma = 1$, e portanto

$$[g, h^\varphi]^x[g^x, (h^x)^\varphi]^{-1} \in Ker(\sigma).$$

Analogamente, se $g \in G$ e $h, y \in H$,

$$[g, h^\varphi]^{y^\varphi}[g^y, (h^y)^\varphi]^{-1} \in Ker(\sigma).$$

(ii) Se α e β são sobrejetoras, é fácil ver que γ também é. Ainda,

(a) Para facilitar notações coloquemos

$$M = Ker(\alpha),\ \ N = Ker(\beta)\ \text{ e }\ K = \langle M, N^\varphi\rangle[M, H^\varphi][G, N^\varphi].$$

Note que $K \subset Ker(\gamma)$ e M é um H-subgrupo normal de G e N um G-subgrupo normal de H. Dessa forma, $K \lhd \eta(G, H)$, e portanto, γ induz um epimorfismo $\overline{\gamma} : \eta(G, H)/K \to \eta(A, B)$ tal que $(Kg)\overline{\gamma} = (g)\alpha$ e $(Kh^\varphi)\overline{\gamma} = ((h)\beta)^\psi$. Vamos mostrar agora que $\overline{\gamma}$ admite um homomorfismo inverso. Por α e β serem sobrejetoras, dados $a \in A$ e $b \in B$ existem $g_a \in G$ e $h_b \in H$ tais que $(g_a)\alpha = a$ e $(h_b)\beta = b$. Dessa forma faz sentido pensarmos na aplicação $\theta : A \cup B^\psi \to \eta(G, H)/K$, onde $(a)\theta = Kg_a$ e $(b^\psi)\theta = Kh_b^\varphi$. Provemos que θ está bem definida. Se $g_{a_1}, g_{a_2} \in G$ são tais que $(g_{a_1})\alpha = (g_{a_2})\alpha = a$, então teremos $(g_{a_1}g_{a_2}^{-1})\alpha = 1$ o que nos leva a $g_{a_1}g_{a_2}^{-1} \in Ker(\alpha) \subset K$, isto é $(g_{a_1})\theta = Kg_{a_1} = Kg_{a_2} = (g_{a_2})\theta$. O mesmo vale para elementos em B^ψ. Além disso, como as restrições de θ a A e a B são homomorfismos, haverá um único homomorfismo $\theta^* : A * B \to \eta(G,H)/K$ que estende θ. Agora, observemos que

$$((g_a)^{g_{a_1}})\,\alpha = a^{a_1} \text{ e } ((h_b)^{g_{a_1}})\beta = ((h_b)\beta)^{(g_{a_1})\alpha} = b^{a_1}$$

portanto,

$$\begin{aligned}([a,b^\psi]^{a_1}[a^{a_1},(b^{a_1})^\psi]^{-1})\theta^* &= ([a,b^\psi]^{a_1})\theta^*([a^{a_1},(b^{a_1})^\psi]^{-1})\theta^* \\ &= [Kg_a, Kh_b^\varphi]^{Kg_{a_1}}[Kg_a^{g_{a_1}}, K(h_b^{g_{a_1}})^\varphi]^{-1} = 1\end{aligned}$$

De forma análoga podemos mostrar que $([a,b^\psi]^{b_1^\psi}[a^{b_1},(b^{b_1})^\psi]^{-1})\theta^* = 1$. Podemos concluir que existe um homomorfismo $\overline{\theta} : \eta(A,B) \to \eta(G,H)/K$ induzido por θ^*. Claramente $\overline{\theta}\overline{\gamma} = 1$ e $\overline{\gamma}\overline{\theta} = 1$. Por fim, provemos que $K = Ker(\gamma)$. Com efeito, se existe $x \in Ker(\gamma)$ tal que $x \notin K$, então $K \neq Kx$, e por $\overline{\gamma}$ ser injetora $(Kx)\overline{\gamma} \neq (K)\overline{\gamma} = 1$. Mas $1 \neq (Kx)\overline{\gamma} = (x)\gamma$, que é uma contradição uma vez que $x \in Ker(\gamma)$. Portanto $K = Ker(\gamma)$.

(b) Defina γ' a restrição de γ em $\tau(G,H)$. Por α e β serem sobrejetoras e γ é definida, temos que γ' é um epimorfismo de $\tau(G,H)$ em $\tau(A,B)$, onde $[g,h^\varphi] \mapsto [(g)\alpha, ((h)\beta)^\varphi]$. Agora, como $L = [M,H^\varphi][G,N^\varphi] \subset Ker(\gamma')$ e por L ser normal em $[G,H^\varphi]$ segue γ' induz um epimorfismo $\overline{\gamma'}$ de $\tau(G,H)/L$ em $\tau(A,B)$. Como em (a) podemos mostrar que existe um homomorfismo inverso $\varepsilon : \tau(A,B) \to \tau(G,H)/L$ de modo que $[a,b^\psi] \mapsto L[g_a, h_b^\varphi]$, onde $g_a \in G$ e $h_b \in H$ são tais que $(g_a)\alpha = a$ e $(h_b)\beta = b$. Desta forma temos $\overline{\gamma'}$ um isomorfismo, e análogo ao item (a), $L = Ker(\gamma')$, isto é, a sequência abaixo é exata

$$1 \longrightarrow [Ker(\alpha), H^\varphi][G,(Ker(\beta))^\varphi] \xrightarrow{inc} \tau(G,H) \xrightarrow{\gamma'} \tau(A,B) \longrightarrow 1$$

$\square$

Capítulo 3

Condições de Finitude para o Produto Tensorial não Abeliano

O estudo de condições de finitude para $G \otimes H$ começou com Brown e Loday em [4] onde provaram que o quadrado tensorial não abeliano de um grupo finito também é finito. Quase ao mesmo tempo, Ellis conseguiu generalizar este resultado em [7], onde, usando argumentos homológicos, provou que G e H serem finitos implica em $G \otimes H$ também ser. Nesse mesmo ano, Brown, Johnson & Robertson indagaram em [5] se esse resultado poderia ser provado somente com argumentos algébricos. Só então, 23 anos depois, Thomas nos forneceu uma demonstração para tal resultado livre de homologia em [19]. Entretanto, existem grupos infinitos cujo produto tensorial não abeliano de grupos é finito (veja Exemplo 3.8). Assim, é interessante estudar condições para que o produto tensorial não abeliano de grupos (não necessariamente finitos) seja finito. O objetivo deste capítulo é apresentar o estudo realizado por Bastos, Nakaoka e Rocco em [1], onde apresentam algumas condições de finitude para o produto tensorial não abeliano de grupos.

3.1 Um Critério de Finitude Geral

Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Dados um subgrupo N de G e um subgrupo K de H, vamos denotar o conjunto $\{[n, k^{\varphi}] \mid n \in N,\ k \in K\}$ por $T_{\otimes}(N, K)$. Obviamente, este conjunto gera o subgrupo $[N, K^{\varphi}]$ de $[G, H^{\varphi}]$.

Antes de prosseguirmos, é necessário esclarecer que um grupo G é dito ser *central-por-finito* se existe um subgrupo normal C de G tal que C é central em G e G/C é finito. Além disso, lembremos os seguintes resultados:

Teorema 3.1. (Schur, [14, pág. 287]) *Se G é um grupo com $G/Z(G)$ finito, então G' também é finito.*

Lema 3.2. (Poincaré, [17, pág. 14]) *Dada uma família finita de subgrupos de um grupo G que possuem índice finito em G, então a interseção dos elementos dessa família também tem índice finito.*

Definição 3.3. *Seja G um grupo e N um subconjunto de G. Dizemos que N é um subconjunto normal de G se $g^{-1}ng \in N$ para quaisquer $g \in G$ e $n \in N$.*

Proposição 3.4. *Seja X um subconjunto normal de um grupo G. Se X for finito, então $\langle X \rangle$ é central por finito.*

Demonstração. Seja x um elemento qualquer de X. Note que por X ser normal, vale que $x^g \in X$ para qualquer $g \in G$. Então $|x^G| \leq |X|$ e, consequentemente,

$$[G : C_G(x)] = |x^G| \leq |X| \quad \forall\, x \in X.$$

Pelo Lema de Poincaré 3.2, o índice $\left[G : \bigcap_{x\in X} C_G(x)\right]$ é também finito. Chamemos o subgrupo $\left(\bigcap_{x\in X} C_G(x)\right) \bigcap \langle X \rangle$ de A. Queremos mostrar que A é central em $\langle X \rangle$ e $\langle X \rangle / A$ é finito. Que A é central em $\langle X \rangle$ segue diretamente de como foi definido. Agora, por $\left[G : \bigcap_{x\in X} C_G(x)\right]$ ser finito, o índice $[\langle X \rangle : A]$ também é. Isso conclui a demonstração. □

Segue agora uma primeira condição de finitude para o produto tensorial não abeliano de grupos mostrado em [1].

Proposição 3.5. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro, $N \leq G$ e $K \leq H$ tais que N é um K-subgrupo e K um N-subgrupo. Nessas condições, se $T_{\otimes}(N, K)$ é um conjunto finito, então o subgrupo $[N, K^{\varphi}]$ de $\eta(G, H)$ é finito.*

Demonstração. Primeiramente observemos que como N é um K-subgrupo e K um N-subgrupo, então $T_{\otimes}(N, K)$ é um subconjunto normal de $\langle N, K^{\varphi} \rangle$, donde $[N, K^{\varphi}] \lhd \langle N, K^{\varphi} \rangle$. Pela Proposição 3.4 segue que $[N, K^{\varphi}]$ também é central-por-finito. Assim, pelo Teorema de Schur 3.1, o subgrupo derivado $[N, K^{\varphi}]'$ é finito. Disto segue que se o grupo quociente $[N, K^{\varphi}]/[N, K^{\varphi}]'$ for finito, então $[N, K^{\varphi}]$ também é. Por tal motivo estudemos o grupo $[N, K^{\varphi}]/[N, K^{\varphi}]'$, o qual é abeliano.

Sejam agora $S = [N, K^{\varphi}, K^{\varphi}]$ e $Q = (S[N, K^{\varphi}]')/[N, K^{\varphi}]'$. Queremos provar que Q é normal em $\langle N, K^{\varphi} \rangle / [N, K^{\varphi}]'$ e também finito. Para tal, sejam $m \in [N, K^{\varphi}]$, $k, h \in K$ e

$n \in N$. Observamos que, módulo $[N, K^{\varphi}]'$, os elementos m e $[k^{-\varphi}, n^{-1}]$ comutam. Desta forma,

$$\begin{aligned}
[m, k^{\varphi}]^n &\equiv n^{-1}m^{-1}k^{-\varphi}mk^{\varphi}nk^{-\varphi}n^{-1}nk^{\varphi} \pmod{[N, K^{\varphi}]'} \\
&\equiv n^{-1}m^{-1}k^{-\varphi}m[k^{-\varphi}, n^{-1}]nk^{\varphi} \pmod{[N, K^{\varphi}]'} \\
&\equiv n^{-1}m^{-1}k^{-\varphi}[k^{-\varphi}, n^{-1}]mnk^{\varphi} \pmod{[N, K^{\varphi}]'} \\
&\equiv [m^n, k^{\varphi}] \pmod{[N, K^{\varphi}]'}.
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
[m, k^{\varphi}]^{h^{\varphi}} &\equiv h^{-\varphi}m^{-1}k^{-\varphi}mk^{\varphi}h^{\varphi} \pmod{[N, K^{\varphi}]'} \\
&\equiv h^{-\varphi}m^{-1}h^{\varphi}h^{-\varphi}k^{-\varphi}h^{\varphi}h^{-\varphi}mh^{\varphi}h^{-\varphi}k^{\varphi}h^{\varphi} \pmod{[N, K^{\varphi}]'} \\
&\equiv [m^{h^{\varphi}}, (k^h)^{\varphi}] \pmod{[N, K^{\varphi}]'}.
\end{aligned}$$

Assim, para a normalidade de Q basta observar que $[N, K^{\varphi}] \lhd \langle N, K^{\varphi} \rangle$. Ainda mais, notemos que S é gerado por $X = \{[n, h^{\varphi}, k^{\varphi}] \mid n \in N, h, k \in K\}$, o qual é finito uma vez que T é finito e $[n, h^{\varphi}, k^{\varphi}] = [n, h^{\varphi}]^{-1}[n^k, (h^k)^{\varphi}] \in T^{-1}T$, para todos $n \in N$, $h, k \in K$, onde $T = T_{\otimes}(N, K)$ e $T^{-1} = \{t^{-1} \mid t \in T\}$. Disto segue que Q é finitamente gerado e, como $Q \leq [N, K^{\varphi}]/[N, K^{\varphi}]'$, Q também é abeliano. Assim, para a finitude de Q basta garantirmos que seus geradores têm ordem finita.

Para este fim sejam $n \in N$, $h, k \in K$, $m = [n, h^{\varphi}]$ e $n_1 = n^{-1}n^h$. Queremos provar que $[n, h^{\varphi}, k^{\varphi}]^{2i} \equiv [n_1^{2i}, k^{\varphi}] \pmod{[N, K^{\varphi}]'}$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Observemos que $[m, k^{\varphi}] = [n, h^{\varphi}, k^{\varphi}] = [n_1, k^{\varphi}]$. Desta forma, módulo $[N, K^{\varphi}]'$, temos:

$$\begin{aligned}
[n, h^{\varphi}, k^{\varphi}]^2 &\equiv [n_1, k^{\varphi}][m, k^{\varphi}] \equiv m^{-1}[n_1, k^{\varphi}]k^{-\varphi}mk^{\varphi} \\
&\equiv m^{-1}[m, k^{\varphi}]k^{-\varphi}mk^{\varphi} \equiv [m^2, k^{\varphi}] \\
&\equiv [m, k^{\varphi}]^m[m, k^{\varphi}] \equiv [n_1, k^{\varphi}]^{[n, h^{\varphi}]}[n_1, k^{\varphi}] \\
&\equiv [n_1, k^{\varphi}]^{n_1}[n_1, k^{\varphi}] \equiv [n_1^2, k^{\varphi}].
\end{aligned}$$

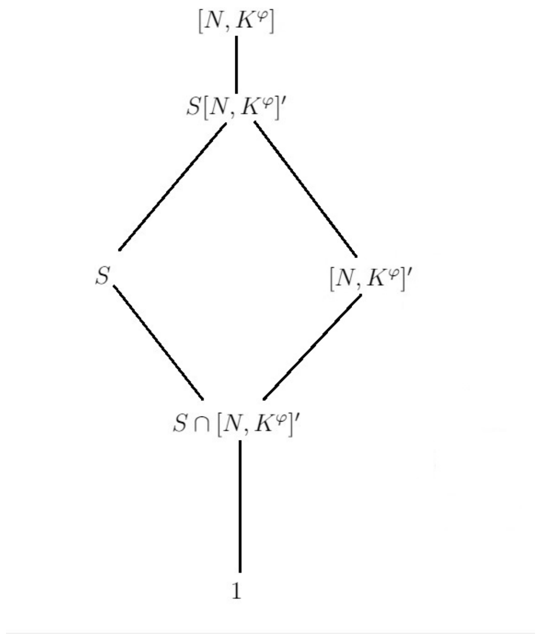
Agora suponha que vale para algum i. Então, módulo $[N, K^{\varphi}]'$,

$$\begin{aligned}
[n, h^{\varphi}, k^{\varphi}]^{2i+2} &\equiv [n, h^{\varphi}, k^{\varphi}]^{2i}[n, h^{\varphi}, k^{\varphi}]^2 \\
&\equiv [n_1^{2i}, k^{\varphi}][m^2, k^{\varphi}] \\
&\equiv [n_1^{2i}, k^{\varphi}]^{m^2}[m^2, k^{\varphi}] \\
&\equiv [n_1^{2i}, k^{\varphi}]^{n_1^2}[n_1^2, k^{\varphi}] \\
&\equiv [n_1^{2i+2}, k^{\varphi}].
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $i \in \mathbb{N}$ temos $[n, h^{\varphi}, k^{\varphi}]^{2i}[N, K^{\varphi}]' \in \{t[N, K^{\varphi}]' \mid t \in T\}$, o qual é um conjunto finito. Logo o grupo Q é abeliano finitamente gerado de torção, o que nos deixa concluir que Q é finito. Por fim, considerando o grupo quociente $R = ([N, K^{\varphi}]/[N, K^{\varphi}]')/Q$, temos que os elementos de $(K^{\varphi}[N, K^{\varphi}]'/[N, K^{\varphi}]')/Q$ comutam com os elementos de R. Dado $x \in [N, K^{\varphi}]$, vamos escrever $\overline{x}$ para a classe lateral $x[N, K^{\varphi}]'$. Agora queremos provar por indução sobre $i \in \mathbb{N}$ que $\overline{[n, k^{\varphi}]^{i}} \equiv \overline{[n, (k^{i})^{\varphi}]}$ (mod Q), para quaisquer $n \in N$, $k \in K$ e $i \in \mathbb{N}$. Para $i = 1$ não há o que fazer. Se agora supormos que $\overline{[n, k^{\varphi}]^{j}} \equiv \overline{[n, (k^{j})^{\varphi}]}$ módulo Q, então

$$\overline{[n, k^{\varphi}]^{j+1}} \equiv \overline{n^{-1}k^{-\varphi}nk^{\varphi}[n, k^{\varphi}]^{j}} \equiv \overline{n^{-1}k^{-\varphi}n[n, (k^{j})^{\varphi}]k^{\varphi}} \equiv \overline{[n, (k^{j+1})^{\varphi}]}.$$

Disto temos que $\overline{[n, k^{\varphi}]^{i}}Q \in \{\overline{t}Q \mid t \in T\}$ para todos $n \in N$, $k \in K$ e $i \in \mathbb{N}$, ou seja, os geradores de R têm ordem finita. Assim, como R é abeliano finitamente gerado, concluímos que é finito. Portanto, uma vez que R e Q são finitos, o grupo $[N, K^{\varphi}]/[N, K^{\varphi}]'$ é finito (veja diagrama abaixo). Temos assim, a finitude do subgrupo $[N, K^{\varphi}]$, como queríamos.



□

Teorema 3.6. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Nestas condições, temos que $T_{\otimes}(G, H)$ é finito se, e somente se, $[G, H^{\varphi}]$ é finito.*

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior considerando $N = G$ e $K = H$. □

O corolário que segue também já foi provado por Ellis em [7] e Thomas em [19].

Corolário 3.7. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Se G e H são finitos, então $[G, H^{\varphi}]$ é finito.*

Demonstração. Se G e H são finitos, é fácil ver que $T_{\otimes}(G, H)$ também é. Assim, segue diretamente do Teorema 3.6 que $[G, H^{\varphi}]$ é finito. □

O Teorema 3.6 também abre um novo leque na pesquisa de condições de finitude para o produto tensorial não abeliano de grupos, uma vez que não exige mais que os grupos que formam o produto tensorial não abeliano sejam finitos. Porém, isso de nada adiantaria se não houvessem grupos infinitos cujo produto tensorial não abeliano fosse finito. Por isso vale observarmos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.8. Seja p um número primo. Consideremos o grupo de Pruffer $A = \mathbb{Z}_{p^{\infty}}$, e $C_2 = \langle c \,|\, c^2 = 1 \rangle$. Definamos $D_{p^{\infty}}$ como sendo o produto semidireto de A por C_2 através da ação definida por

$$a^c = a^{-1},$$

para qualquer $a \in A$. Dados primos p, q, podemos construir os grupos $D_{p^{\infty}}$ e $D_{q^{\infty}}$, os quais são infinitos. Supondo que esses grupos agem trivialmente um sobre o outro, é possível aplicarmos o Teorema 2.13 para concluir que

$$D_{p^{\infty}} \otimes D_{q^{\infty}} \cong D_{p^{\infty}}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} D_{q^{\infty}}^{ab} \cong C_2 \otimes_{\mathbb{Z}} C_2 \cong C_2.$$

Disto segue que o produto tensorial não abeliano dos grupos $D_{p^{\infty}}$ e $D_{q^{\infty}}$ é finito.

Continuemos a explorar mais critérios de finitude do produto tensorial não abeliano de grupos presentes em [1].

Proposição 3.9. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro de tal forma que $D_H(G)$ e $D_G(H)$ sejam finitos. Suponha também que exista um conjunto $X = \{[g_1, h_1^{\varphi}], \ldots, [g_r, h_r^{\varphi}]\} \subset T_{\otimes}(G, H)$ que gera $[G, H^{\varphi}]$, tais que $h_1, \ldots, h_r$ são elementos de torção de H. Nessas condições, o produto tensorial não abeliano $[G, H^{\varphi}]$ é finito.*

Demonstração. Coloquemos $N = [D_H(G), H^{\varphi}]$, e consideremos o seguinte grupo

$$Q = \frac{[G, H^{\varphi}]}{N}.$$

Vamos mostrar que Q e N são finitos, e disto seguirá a finitude de $[G, H^\varphi]$. Segue da hipótese que Q é gerado por $\{N[g_i, h_i^\varphi] \,|\, i = 1, \ldots, r\}$. Além disso, Q é abeliano pois, pela Proposição 2.23 item (iii), temos $[G, H^\varphi]' = [D_H(G), D_G(H)^\varphi] \leq N$. Para todos $g \in G$, $h \in H$ e $q \in \mathbb{N}$, a seguinte relação é válida módulo N:

$$\begin{aligned}
[g, (h^q)^\varphi] &\equiv \prod_{i=0}^{q-1} [g^{h^i}, h^\varphi] \qquad \text{(Proposição 2.27)} \\
&\equiv \prod_{i=0}^{n-1} [g(g^{-1}g^{h^i}), h^\varphi] \\
&\equiv \prod_{i=0}^{n-1} [g, h^\varphi]^{g^{-1}g^{h^i}} [g^{-1}g^{h^i}, h^\varphi] \\
&\equiv \prod_{i=0}^{n-1} [g, h^\varphi]^{g^{-1}g^{h^i}} \\
&\equiv \prod_{i=0}^{n-1} [g, h^\varphi]^{[g,(h^i)^\varphi]} \qquad \text{(Proposição 2.23)} \\
&\equiv \prod_{i=0}^{n-1} [g, (h^i)^\varphi]^{-1} [g, h^\varphi][g, (h^i)^\varphi] \\
&\equiv \prod_{i=0}^{n-1} [g, h^\varphi] \\
&\equiv [g, h^\varphi]^n.
\end{aligned}$$

Desta forma, como $h_1, \ldots, h_r$ têm ordem finita, então as classes $[g_i, h_i^\varphi]N$ também têm ordem finita, para qualquer $i = 1, \ldots, r$. Portanto, Q é finito. Além disso, N é finitamente gerado. Para concluir o resultado devemos provar que N é finito. Para isso, consideremos o seguinte grupo:

$$R = \frac{N}{[D_H(G), D_G(H)^\varphi]}.$$

Como, por hipótese, os derivativos $D_H(G)$ e $D_G(H)$ são finitos, a Proposição 3.5 nos garante que $[D_H(G), D_G(H)^\varphi]$ também é. Disto, é suficiente mostrar que R é finito. Para quaisquer $a \in D_H(G)$, $h \in H$ e $m \in \mathbb{N}$, módulo $[D_H(G), D_G(H)^\varphi]$, vale:

$$\begin{aligned}
[a^m, h^\varphi] &\equiv \prod_{i=1}^{m}[a, (h^{a^{m-i}})^\varphi] \quad \text{(Proposição 2.27)}\\
&\equiv \prod_{i=1}^{m}[a, (h^{a^{m-i}}h^{-1})^\varphi h^\varphi]\\
&\equiv \prod_{i=1}^{m}[a, h^\varphi][a, (h^{a^{m-i}}h^{-1})^\varphi]^h\\
&\equiv \prod_{i=1}^{m}[a, h^\varphi][a^h, (h^{-1}h^{a^{m-i}})^\varphi]\\
&\equiv \prod_{i=1}^{m}[a, h^\varphi]\\
&\equiv [a, h^\varphi]^m.
\end{aligned}$$

Assim, como $D_H(G)$ é finito e R é abeliano finitamente gerado, concluímos que R é finito. Portanto $[G, H^\varphi]$ é finito. □

Antes de apresentarmos o próximo critério de finitude precisamos do seguinte resultado de Donadze, Ladra e Thomas, o qual fornece uma condição necessária e suficiente para que o produto tensorial não abeliano de grupos finitamente gerados seja finitamente gerado.

Proposição 3.10. [6, Proposição 5.1] *Sejam G e H grupos finitamente gerados que agem compativelmente um sobre o outro. Nestas condições temos que $G \otimes H$ é finitamente gerado se, e somente se, $D_H(G)$ e $D_G(H)$ também são finitamente gerados.*

Demonstração. Primeiramente observemos que se $G \otimes H$ é finitamente gerado, então $D_H(G)$ e $D_G(H)$ também o são, pois são imagens homomórficas de $G \otimes H$ (Proposição 2.12, item (i)).

Reciprocamente, suponha que G seja gerado por $x_1, \dots, x_t \in G$ e H por $y_1, \dots, y_r \in H$. Acrescentando os inversos de x_i, $i \in \{1, \dots, t\}$, ao conjunto gerador de G e fazendo o mesmo para os geradores y_j de H, com $j \in \{1, \dots, r\}$, temos que $G = \langle X \rangle$ e $H = \langle Y \rangle$, com $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Consideremos também que $D_G(H)$ seja gerado pelos elementos $h_1^{-g_1}h_1, \dots, h_p^{-g_p}h_p$, e $D_H(G)$ gerado pelos elementos $(g_1')^{-1}(g_1')^{h_1'}, \dots, (g_q')^{-1}(g_q')^{h_q'}$, onde $g_1, \dots, g_p, g_1', \dots, g_q' \in G$ e $h_1, \dots, h_p, h_1', \dots, h_q' \in H$. Vamos provar que $G \otimes H$ é finitamente gerado. Para isso, consideremos o conjunto W formado pelos elementos

$$x \otimes y,\ g_l \otimes h_l,\ g_s' \otimes h_s',\ x \otimes (h_l^{-g_l}h_l)^{\varepsilon_l},\ ((g_s')^{-1}(g_s')^{h_s'})^{\rho_s} \otimes y,$$

onde $x \in X$, $y \in Y$, $l \in \{1, \ldots, p\}$, $s \in \{1, \ldots, q\}$, $\varepsilon_l \in \{-1, 1\}$ e $\rho_s \in \{-1, 1\}$. Vamos mostrar que W é um conjunto gerador de $G \otimes H$. Para tal, observe que os elementos de $G \otimes H$ podem ser escritos como um produto finito de elementos da forma $(x \otimes y)^z$, em que $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in G * H$, e isso segue das relações definidoras de $G \otimes H$. Assim, se mostrarmos que um elemento $(x \otimes y)^z$ pode ser escrito como um produto finito de elementos de W, então $G \otimes H$ é finitamente gerado. Dessa forma, devemos observar que a Proposição 2.9 fornece as seguintes identidades para quaisquer $g, x \in G$ e $h, y \in H$,

$$\begin{aligned} (g \otimes h)^y &= (g \otimes h)\left((g^{-1}g^h) \otimes y\right) && (3.4)\\ (g \otimes h)^x &= \left(x \otimes (h^{-g}h)\right)(g \otimes h)^{-1}. && (3.5) \end{aligned}$$

Em particular, estas igualdades ocorrem para todos $g \otimes h \in W$, $x \in X$ e $y \in Y$. Vamos mostrar que os elementos da forma $g^{-1}g^h \otimes y$ e $x \otimes h^{-g}h$ também pertencem a $\langle W \rangle$. Como $g^{-1}g^h \in D_H(G)$, segue que podemos escrevê-lo como produto finito de geradores de $D_H(G)$, ou seja $g^{-1}g^h = \tilde{g}\left((g'_s)^{-1}(g'_s)^{h'_s}\right)^{\varepsilon}$, onde $s \in \{1, \ldots, q\}$, $\tilde{g} \in \langle\{(g')_1^{-1}(g')_1^{h'_1}, \ldots, (g')_q^{-1}(g')_q^{h'_q}\}\rangle$ e $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Pelo item ii) da Proposição 2.9,

$$\begin{aligned} (g^{-1}g^h) \otimes y &= \tilde{g}\left((g'_s)^{-1}(g'_s)^{h'_s}\right)^{\varepsilon} \otimes y \\ &= (\tilde{g} \otimes y)^{\left((g'_s)^{-1}(g'_s)^{h'_s}\right)^{\varepsilon}}\left(\left((g'_s)^{-1}(g'_s)^{h'_s}\right)^{\varepsilon} \otimes y\right) \\ &= (g'_s \otimes h'_s)^{-\varepsilon}(\tilde{g} \otimes y)(g'_s \otimes h'_s)^{\varepsilon}\left(\left((g'_s)^{-1}(g'_s)^{h'_s}\right)^{\varepsilon} \otimes y\right). \end{aligned}$$

Procedendo indutivamente de maneira análoga para $\tilde{g} \otimes y$, concluímos que $(g^{-1}g^h) \otimes y \in \langle W \rangle$. De modo análogo mostramos que $x \otimes h^{-g}h \in \langle W \rangle$. Dado um elemento z qualquer de $G * H$ temos que z pode ser escrito como $z = y_j\tilde{z}$ ou $z = x_i\tilde{z}$, onde $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ e $\tilde{z} \in \langle\{X \cup Y\rangle \subset G * H$. Então, por (3.4) e (3.5)

$$(x \otimes y)^{y_j\tilde{z}} = \left((x \otimes y)\left(x^{-1}(x)^y \otimes y_j\right)\right)^{\tilde{z}},$$

e

$$(x \otimes y)^{x_i\tilde{z}} = \left(\left(x_i \otimes y^{-x}(y)\right)(x \otimes y)^{-1}\right)^{\tilde{z}}.$$

Observando que $\tilde{z}$ possui uma fatoração finita em termos de X e Y, podemos seguir de modo análogo ao que foi mostrado para concluir o desejado. □

Como consequência das Proposições 3.9 e 3.10, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.11. *Se G e H são grupos finitamente gerados que agem compativelmente um sobre o outro tais que H é de torção e os derivativos $D_H(G)$ e $D_G(H)$ são finitos, então $[G, H^\varphi]$ é finito.*

Demonstração. Por G, H, $D_H(G)$ e $D_G(H)$ serem finitamente gerados, a Proposição 3.10 nos garante que $[G, H^\varphi]$ é finitamente gerado. Assim, estamos nas condições da Proposição 3.9, que nos assegura a finitude de $[G, H^\varphi]$ como queríamos. □

3.2 Produto Tensorial não Abeliano de FC-grupos

A fim de prosseguirmos nos estudos de critérios de finitude para o produto tensorial não abeliano de grupos, precisamos dedicar um pouco do nosso tempo para conhecer os FC-grupos. Isso se deve ao fato de Rocco, Bastos e Nakaoka [1] terem conseguido encontrar uma caracterização para a propriedade de finitude do produto tensorial não abeliano de FC-grupos.

Definição 3.12. Um grupo G é dito ser *FC-grupo* se qualquer elemento de G possuir um número finito de conjugados em G. Em outras palavras, se $[G : C_G(g)]$ é finito para todo $g \in G$.

Vejamos alguns exemplos de FC-grupos:

Exemplo 3.13. Se um grupo é abeliano ou se é finito, então é um FC-grupo.

Exemplo 3.14. Se o centro de um grupo G tem índice finito, então G deve ser um FC-grupo. Isso se deve a $C_G(g) \geq Z(G)$ para qualquer $g \in G$.

Para o próximo resultado precisamos saber o que é um grupo residualmente finito e o que é o "core" de um grupo.

Definição 3.15. Um grupo G é dito ser *residualmente finito* se para todo elemento g de G, com $g \neq 1$, existe um subgrupo normal N_g de G tal que $g \notin N_g$ e G/N_g é finito.

Definição 3.16. Sejam G um grupo e X um subgrupo de G. Definimos o "*core*" de X em G como sendo o subgrupo $\bigcap_{g\in G} g^{-1}Xg$.

Não é difícil ver que o "core" de X é um subgrupo normal de G que está contido em X.

Proposição 3.17. ([14, pág. 36]) *Sejam G um grupo e X um subgrupo de G com índice finito. Então o "core" de X em G também tem índice finito.*

Proposição 3.18. (Baer) *Se G é um FC-grupo, então $G/Z(G)$ é um grupo residualmente finito de torção.*

Demonstração. Vejamos primeiramente que $G/Z(G)$ é residualmente finito. Para tal, considere $g \in G \setminus Z(G)$. Tomando $\{t_1, \ \dots \ , t_n\}$ uma transversal à direita de $C_G(g)$ em G, temos $g \notin \bigcap_{i=1}^{n} C_G(t_i)$. Observemos também que dados $a, h \in G$,

$$C_G(a^h) = C_G(a)^h.$$

Logo, temos que

$$A = \bigcap_{h \in G} \bigcap_{i=1}^{n} C_G(t_i)^h = \bigcap_{h \in G} \bigcap_{i=1}^{n} C_G(t_i^h).$$

Desta forma é possível ver que A é normal em G e G/A é finito por G ser FC-grupo. Além disso,

$$\frac{G/Z(G)}{A/Z(G)} \cong \frac{G}{A}.$$

Suponha que $gZ(G) \in A/Z(G)$, logo existe $z \in Z(G)$ tal que $gz \in A$, isto é,

$$gzt_i = t_i gz \Rightarrow gt_i = t_i g,$$

para qualquer $i \in \{1, \ \dots \ , n\}$ que é uma contradição. Com isso concluímos que $G/Z(G)$ é residualmente finito.

Mostremos agora que $G/Z(G)$ é de torção. Considere $g \in G$ e $\{t_1 \ \dots \ , t_k\}$ uma transversal à direita de $C_G(g)$ em G . Por G ser FC-grupo, $B = C_G(t_1) \cap \ \cdots \ \cap C_G(t_k)$ tem índice finito em G, o que nos possibilita concluir que o "core" de B também tem índice finito em G pela Proposição 3.17. Assim, g^m pertence ao "core" de B para algum $m \in \mathbb{N}$, ou seja, g^m comuta com todos t_i, $i \in \{1, \ ... \ , k\}$. Mas os t_i's e $C_G(x)$ geram G, o que implica em $g^m \in Z(G)$. Portanto, $G/Z(G)$ é de torção. □

Proposição 3.19. (Lema de Dietzmann) *Em um grupo G, qualquer subconjunto normal finito consistindo de elementos de ordem finita, gera um subgrupo normal finito.*

Demonstração. Seja $X = \{x_1, x_2, \ \dots \ , x_n\}$ um subconjunto normal de G em que cada x_i tem ordem finita. Provemos que o subgrupo $N = \langle X \rangle$ é normal e finito. Quanto a normalidade de N não há o que fazer. Para a finitude de N observemos primeiramente que por X ser um subconjunto finito e normal, $|x_i^N| = [N : C_N(x_i)] \leq n$ para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$. Considerando $K = \cap_{i=1}^n C_N(x_i) \leq Z(N)$, podemos aplicar o Lema de Poincaré 3.2 para concluir que $|N/K|$ é finito. Mas, por $K \leq Z(N)$, temos $|N/Z(N)|$ também finito. Pelo Teorema de Schur 3.1 segue a finitude de N'. Por fim, observemos que N/N' é finito, pois é abeliano e finitamente gerado por elementos de ordem finita. Portanto, N também deve ser finito. □

Proposição 3.20. *Um grupo de torção G é um FC-grupo se, e somente se, para cada subconjunto finito X, existe um subgrupo normal finito de G que contém X.*

Demonstração. Se G é um FC-grupo e X um subconjunto finito de G, temos que o conjunto dos conjugados de elementos de X é um subconjunto normal e finito de G. Logo, pelo Lema de Dietzmann 3.19, X gera um subgrupo finito normal de G. Reciprocamente, tomando $x \in G$, por hipótese existe um subgrupo normal finito F em G de tal forma que $x \in F$. Disto segue que o conjunto de conjugados de x em G é finito. □

Definição 3.21. Dados um grupo G e um subgrupo H de G, dizemos que H é *totalmente invariante* se para qualquer endomorfismo α de G, $\alpha(H) \leq H$.

Proposição 3.22. (B.H. Neumann) *Se G é um FC-grupo, então G' é um grupo de torção. Além disso, o conjunto dos elementos de ordem finita de G é um subgrupo totalmente invariante que contém G'.*

Demonstração. Pela Proposição 3.18, $G/Z(G)$ é de torção, e por ser também um FC-grupo, segue da Proposição 3.20 que $G/Z(G)$ é localmente finito. Assim, tomando X um subgrupo finitamente gerado de G, segue que $XZ(G)/Z(G)$ é um subgrupo finito de $G/Z(G)$. Disto, e por existir um isomorfismo de $X/X \cap Z(G)$ em $XZ(G)/Z(G)$, segue que $X/X\cap Z(G)$ é finito e assim, $X/Z(X)$ é finito. Pelo Teorema de Schur 3.1, temos que X' é finito. Portanto, como G é a união de todos X, então G' é a união de todos tais X', e assim, segue que G' é de torção. Agora vamos mostrar que o conjunto dos elementos de ordem finita de G é um subgrupo totalmente invariante de G. Sejam x e y elementos de G tais que $x^m = y^n = 1$, com $m, n > 0$. Assim, a classe lateral $(xy^{-1})^{mn}G'$ coincide com a classe G' em G/G', isto é $(xy^{-1})^{mn} \in G'$. Como G' é de torção, segue que existe $l > 0$, tal que $((xy^{-1})^{mn})^l = (xy^{-1})^{mnl} = 1$. Note que se tivermos um endomorfismo α de G e $x \in G$ tal que $x^m = 1$ para algum $m > 0$, então

$$((x)\alpha)^m = (x^m)\alpha = 1,$$

como queríamos. □

Definição 3.23. Um grupo G é dito ser *BFC-grupo* se existir um inteiro positivo n de modo que qualquer elemento de G não possui mais do que n conjugados.

Teorema 3.24. (B.H. Neumann) *Um grupo G é BFC-grupo se, e somente se, G' for finito.*

Demonstração. Suponha que G' seja finito de ordem d, disto segue que dado um elemento $g \in G$, o número de comutadores da forma $[g, x]$, com $x \in G$, não pode ser maior que d. Assim, o número de conjugados de g não pode exceder d. Logo, G é um BFC-grupo. Reciprocamente, suponha que G seja um BFC-grupo e $d \in \mathbb{N}$ um limitante da cardinalidade das classes de conjugação de G de tal forma que exista $a \in G$ com exatamente d conjugados, isto é, $[G : C_G(a)] = d$. Seja $\{t_1, \ldots, t_d\}$ uma transversal à direita de $C_G(a)$ em G. Definindo C como sendo a interseção dos centralizadores de t_i, $i = 1, \ldots, d$, temos que o índice de C em G é finito. Tomando $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ uma transversal à direita de C em G e N o seguinte subgrupo normal de G:

$$N := \langle a, s_1, \ldots, s_r\rangle^G,$$

temos que N é um FC-grupo finitamente gerado. Logo, pelas Proposições 3.18 e 3.20, $Z(N)$ tem índice finito em N, o que nos garante que N' é finito (Teorema 3.1). Assim, definindo H como sendo o conjunto de todos os elementos de ordem finita de N, segue da Proposição 3.22 que H é um subgrupo de N que contém N'. Assim, H/N' é um subgrupo de N/N', que é abeliano finitamente gerado, ou seja, H/N' é finitamente gerado, abeliano e de torção. Portanto, H/N' é finito, e por N' também ser finito, temos a finitude de H. Disto, basta mostrarmos que $G' \subset N$. Se $x \in C$, então $(xa)^{t_i} = xa^{t_i}$ para qualquer $i = \{1, \ldots, d\}$. Disto segue que temos d elementos distintos da forma xa^{t_i} e estes representam todos os conjugados de xa. Tomando $y \in C$, existe $i \in \{1, \ldots, d\}$ tal que $(xa)^y = xa^{t_i}$, o que implica em $x^y = xa^{t_i}a^{-y}$ e

$$[x, y] = x^{-1}x^y = x^{-1}xa^{t_i}a^{-y} = a^{t_i}a^{-y} \in N.$$

Logo $C' \leq N$, e por $G = CN$, temos válida a cadeia de subgrupos $G' \leq C'N \leq N$, o que conclui a demonstração. □

Estamos agora capacitados a estudar um pouco do produto produto tensorial não abeliano de FC-grupos apresentado em [1].

Lema 3.25. *Se G e H são FC-grupos que agem compativelmente um sobre o outro e $D_H(G)$ e $D_G(H)$ são finitos, então $[G, (D_G(H))^{\varphi}]$ e $[D_H(G), H^{\varphi}]$ são finitos.*

Demonstração. Como $D_H(G)$ é finito, existem $t_1, \ldots, t_k \in [G, H^{\varphi}]$ tais que $D_H(G) = \langle \{(t_1)\lambda, \ldots, (t_k)\lambda\} \rangle$, onde λ é o homomorfismo descrito na Proposição 2.23. Assim:

$$T_{\otimes}(D_H(G), H) = \bigcup_{i=1}^{k} \{[(t_i)\lambda, y^{\varphi}] \mid y \in H\}. \tag{3.6}$$

Agora, tomando $t \in [G, H^{\varphi}]$ dado por $t = [g_1, h_1^{\varphi}] \cdots [g_r, h_r^{\varphi}]$, com $g_1, \ldots, g_r \in G$ e $h_1, \ldots, h_r \in H$, vale que se $y \in H$, então

$$t^y = [g_1^y, (h_1^y)^{\varphi}] \cdots [g_r^y, (h_r^y)^{\varphi}].$$

Para quaisquer $g \in G$ e $y \in H$ temos que $g^y = g(g^{-1}g^y)$ é um elemento de $gD_H(G)$, isto é, variando $y \in H$, $g^y \in gD_H(G)$ que é um conjunto finito por hipótese. Dessa forma, por H ser também um FC-grupo, temos que $\{t^y \mid y \in H\}$ é finito, o que garante a finitude dos conjuntos $\{t_i^{-1}t_i^y \mid y \in H\} = \{[(t_i)\lambda, y^{\varphi}] \mid y \in H\}$ para $i = 1, \ldots, k$. Portanto, $T_{\otimes}(D_H(G), H)$ é finito. Assim, a finitude de $[D_H(G), H^{\varphi}]$ decorre diretamente da Proposição 3.9. Temos que a finitude de $[G, (D_G(H))^{\varphi}]$ segue de forma análoga. □

Teorema 3.26. *Sejam G e H FC-grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Então o produto tensorial não abeliano $[G, H^{\varphi}]$ é finito se, e somente se, $D_H(G)$, $D_G(H)$ e $(G/D_H(G))^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} (H/D_G(H))^{ab}$ são finitos.*

Demonstração. Observemos que as ações de G em H e de H em G induzem ações triviais de $G/D_H(G)$ em $H/D_G(H)$ e de $H/D_G(H)$ em $G/D_H(G)$. Ainda, considerando $\alpha : G \to G/D_H(G)$ e $\beta : H \to H/D_G(H)$ como sendo homomorfismos canônicos, pelo item (i) da Proposição 2.28 existe um homomorfismo sobrejetor

$$\gamma : [G, H^{\varphi}] \to [G/D_H(G), (H/D_G(H))^{\psi}],$$

tal que $[D_H(G), H^{\varphi}][G, (D_G(H))^{\varphi}] = Ker\gamma$. Logo, podemos construir a seguinte sequência exata:

$$\{1\} \to [D_H(G), H^{\varphi}][G, (D_G(H))^{\varphi}] \to [G, H^{\varphi}] \to \left[\frac{G}{D_H(G)}, \left(\frac{H}{D_G(H)}\right)^{\psi}\right] \to \{1\}. \tag{3.7}$$

Sabemos também que pelos Teoremas 2.13 e 2.21,

$$\left[\frac{G}{D_H(G)}, \left(\frac{H}{D_G(H)}\right)^{\psi}\right] \cong \left(\frac{G}{D_H(G)}\right)^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\frac{H}{D_G(H)}\right)^{ab}. \tag{3.8}$$

Assim, se $[G, H^{\varphi}]$ for finito, e por existirem epimorfismos de $[G, H^{\varphi}]$ nos derivativos $D_G(H)$ e $D_H(G)$, segue a finitude dos mesmos. Ainda, pela sequência exata (3.7) e pela equação (3.8), temos $(G/D_H(G))^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} (H/D_G(H))^{ab}$ finito. Reciprocamente, se $D_H(G)$, $D_G(H)$ e $(G/D_H(G))^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} (H/D_G(H))^{ab}$ são finitos, o Lema 3.25 nos garante que o subgrupo $[D_H(G), H^{\varphi}][G, (D_G(H))^{\varphi}]$ é finito e novamente pela sequência exata (3.7) e pelo isomorfismo (3.8) temos a finitude de $[G, H^{\varphi}]$. $\square$

Da Proposição 2.23 com $H = G$, temos o epimorfismo

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & [G, G^{\varphi}] & \rightarrow & G' \\ & [g, h^{\varphi}] & \mapsto & g^{-1}h = [g, h]. \end{array}$$

Logo,

$$\frac{[G, G^{\varphi}]}{Ker\lambda} \cong G'.$$

Assim, se $[G, G^{\varphi}]$ é finito, então $G' \cong [G, G^{\varphi}]/Ker\lambda$ também é finito. Usaremos isso na demonstração do seguinte corolário:

Corolário 3.27. *Se G é um grupo, então $[G, G^{\varphi}]$ é finito se, e somente se, G é um BFC-grupo e $G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$ é finito.*

Demonstração. Se $[G, G^{\varphi}]$ é finito, como vimos acima segue que G' também é finito. Observando o Teorema 3.24 temos que G é um BFC-grupo. Sabemos também que o homomorfismo canônico de G em G/G' induz o homomorfismo sobrejetor

$$\phi : [G, G^{\varphi}] \rightarrow [G^{ab}, (G^{ab})^{\psi}].$$

Assim, $[G^{ab}, (G^{ab})^{\psi}]$ é finito, e como $[G^{ab}, (G^{ab})^{\psi}] \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$ segue a finitude de $G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$. Reciprocamente, se G é um BFC-grupo e $G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$ é finito, temos que G' é finito pelo Teorema 3.24. Logo, uma vez que $D_G(G) = G'$, podemos aplicar o Teorema 3.26 para concluir que $[G, G^{\varphi}]$ é finito. $\square$

Capítulo 4

Propriedades de Fecho do Produto Tensorial não Abeliano

No capítulo anterior vimos que a propriedade de finitude é fechada sob a formação do produto tensorial não abeliano de grupos. Visscher [20] (veja também [13]) mostrou que se $D_G(H)$ ou $D_H(G)$ é solúvel (respectivamente nilpotente), então $G \otimes H$ é solúvel (respectivamente nilpotente). O objetivo deste capítulo é apresentar o estudo de Donadze, Ladra e Thomas feito em [6] em que apresentam outras propriedades de fecho do produto tensorial não abeliano de grupos. No trabalho desenvolvido por estes autores duas extensões centrais tiveram um papel fundamental. A fim de apresentá-las tomemos G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Segue da Proposição 2.12 que existem homomorfismos de grupos $\lambda : G \otimes H \to D_H(G)$ e $\mu : G \otimes H \to D_G(H)$ tais que

$$(g \otimes h)\,\lambda = g^{-1}g^h \textbf{ e } \quad (g \otimes h)\,\mu' = h^{-g}h$$

para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$. Além disso, $Ker(\lambda)$ e $Ker(\mu)$ são centrais em $G \otimes H$. Assim temos as seguintes extensões centrais

$$\{1\} \to A \overset{inc}{\to} G \otimes H \overset{\lambda}{\to} D_H(G) \to \{1\}, \tag{4.5}$$

e

$$\{1\} \to B \overset{inc}{\to} G \otimes H \overset{\mu}{\to} D_G(H) \to \{1\}, \tag{4.6}$$

onde $A = Ker(\lambda)$ e $B = Ker(\mu)$. Donadze, Ladra e Thomas fizeram uso dessas extensões centrais para demonstrar de forma mais simples que o produto tensorial não abeliano de grupos nilpotentes (solúveis) é também nilpotente (solúvel).

Teorema 4.1. *Se G e H agem compativelmente um sobre o outro, então valem as seguintes afirmações:*

(i) Se $D_H(G)$ é solúvel de comprimento derivado l, então $G \otimes H$ é solúvel de comprimento derivado l ou $l+1$;

(ii) Se $D_H(G)$ é nilpotente de classe c, então $G \otimes H$ é nilpotente de classe c ou $c+1$.

Demonstração. Consideremos a seguinte extensão central:

$$\{1\} \to A \overset{inc}{\to} G \otimes H \overset{\phi}{\to} D_H(G) \to \{1\},$$

onde $(g \otimes h)\phi = g^{-1}g^h$, com $g \otimes h \in G \otimes H$, e $A = Ker(\phi)$.

(i) Segue imediatamente do fato que $G \otimes H/A \cong D_H(G)$ e que A é central em $G \otimes H$.

(ii) Para provar este item vamos usar a extensão central acima e Proposição 1.17. Por A ser abeliano, então é solúvel de comprimento derivado no máximo 1 e, portanto, $G \otimes H$ é solúvel de comprimento derivado no máximo $l+1$ e no mínimo l.

(iii) Observemos que $G \otimes H/A \cong D_H(G)$ é nilpotente de classe c e $A \leq Z(G \otimes H)$. Assim podemos aplicar a Proposição 1.19 para concluir que $G \otimes H$ é nilpotente de classe c ou $c+1$. □

Observemos que os itens (ii) e (iii) do resultado anterior nos garantem que se G e H são nilpotentes (respectivamente, solúveis), então $G \otimes H$ também é nilpotente (respectivamente, solúvel), uma vez que estas propriedades são fechadas para subgrupos.

Continuemos no estudo dos resultados presentes em [6]. Temos que se pedirmos G nilpotente, o produto tensorial não abeliano de G por H é nilpotente de classe no máximo $cl(D_H(G))+1$. Mas será que é possível encontrar uma limitação melhor para a classe de nilpotência de $G \otimes H$? A resposta é afirmativa, como mostra o resultado a seguir.

Proposição 4.2. *Sejam G e H grupos nilpotentes de classe n e que agem compativelmente um sobre o outro. Nessas condições, $G \otimes H$ é nilpotente de classe no máximo n.*

Demonstração. Para demonstrar esta proposição basta verificarmos que $\gamma_{n+1}(G \otimes H) = \{1\}$. Para isso, mostremos que $x^{-1}yx = y$ para qualquer $x \in \gamma_n(G \otimes H)$ e $y \in G \otimes H$. Para tal, consideremos $g \otimes h$ sendo conjugado por $[g_1 \otimes h_1, g_2 \otimes h_2, \cdots, g_n \otimes h_n]$, sendo $g, g_1, \ldots, g_n \in G$ e $h, h_1, \ldots, h_n \in H$. Assim, pela Proposição 2.9 e lembrando que por hipótese G e H são nilpotentes de classe n, temos, considerando

$(g\otimes h)^{[g_1\otimes h_1, g_2\otimes h_2,\ \cdots\ ,g_n\otimes h_n]} = a$:

$$\begin{aligned} a &= (g\otimes h)^{[[g_1,h_1],[g_2,h_2],\ \cdots\ ,[g_n,h_n]]} \\ &= g^{[[g_1,h_1],[g_2,h_2],\ \cdots\ ,[g_n,h_n]]} \otimes h^{[[g_1,h_1],[g_2,h_2],\ \cdots\ ,[g_n,h_n]]} \\ &= g^{[g_1^{-1}g_1^{h_1}, g_2^{-1}g_2^{h_2},\ \cdots\ ,g_n^{-1}g_n^{h_n}]} \otimes h^{[h_1^{-g_1}h_1, h_2^{-g_2}h_2,\ \cdots\ ,h_n^{-g_n}h_n]} \\ &= g\otimes h. \end{aligned}$$

Disto segue o requerido. $\square$

Na demonstração apresentada acima não usamos o fato que $\gamma_{n-1}(G) \neq \{1\}$. Por tal motivo poderíamos melhorar o resultado anterior pedindo somente que G e H sejam nilpotentes; neste caso, $cl(G\otimes H) \leq \max\{cl(G), cl(H)\}$.

Na Proposição 1.9 vimos que se G é nilpotente de classe n, então G' é nilpotente de classe no máximo $\lfloor n/2 \rfloor$. Isso nos faz pensar se algo parecido ocorre com a classe de nilpotência do quadrado tensorial não abeliano de um grupo nilpotente e, de fato, acontece, conforme veremos a seguir:

Proposição 4.3. *Se G é nilpotente de classe n, então $G\otimes G$ também é nilpotente de classe no máximo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Demonstração. Para facilitar notação consideremos $\lceil \frac{n}{2} \rceil = q$. Vamos mostrar que o $(q+1)$-ésimo termo da série central inferior, $\gamma_{q+1}(G\otimes G)$, é trivial. Para tal, observemos que pelo Lema 1.8, temos

$$[\gamma_q(G'), G] = [\gamma_q(\gamma_2(G)), G] \leq [\gamma_{2q}(G), G] \leq [\gamma_n(G), G] = \{1\},$$

ou seja, $\gamma_q(G')$ é central em G. Assim, sendo um gerador de $\gamma_q(G\otimes G)$ dado por

$$t = [g_1\otimes g_1', g_2\otimes g_2',\ \dots\ , g_q\otimes g_q']$$

onde $g_1,\ \dots\ , g_q, g_1',\ \dots\ , g_q' \in G$, e tomando $a\otimes b \in G\otimes G$, segue da Proposição 2.9

$$\begin{aligned} (a\otimes b)^t &= (a\otimes b)^{[g_1\otimes g_1', g_2\otimes g_2', \dots , g_q\otimes g_q']} \\ &= (a\otimes b)^{[[g_1,g_1'],[g_2,g_2'],\dots,[g_q,g_q']]} \\ &= (a\otimes b)^{\left[g_1^{-1}g_1^{g_1'}, g_2^{-1}g_2^{g_2'}, \dots , g_q^{-1}g_q^{g_q'}\right]} \\ &= a\otimes b, \end{aligned}$$

uma vez que $\left[g_1^{-1}g_1^{g_1'}, g_2^{-1}g_2^{g_2'},\ \dots\ , g_q^{-1}g_q^{g_q'}\right] \in \gamma_q(G')$, o qual é central em G. Isso conclui a demonstração. $\square$

Vejamos alguns exemplos de que podemos ter do quadrado tensorial.

Exemplo 4.4. Se G é nilpotente de classe 2, então $G \otimes G$ é abeliano. De fato, pela proposição anterior segue que $G \otimes G$ tem classe 1, ou seja, $G \otimes G$ é abeliano.

Exemplo 4.5. Se G for abeliano não trivial, então $G \otimes G \cong G \otimes_{\mathbb{Z}} G$ que também é abeliano não trivial.

O próximo resultado foi mostrado por Moravec em [11]. Observamos que a demonstração dele faz uso de argumentos de Homologia. Recentemente, Bastos, Nakaoka & Rocco conseguiram provar em [2] este mesmo resultado somente com argumentos algébricos.

Teorema 4.6. [11] *Sejam G e H dois grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Se G e H forem policíclicos, então $G \otimes H$ também é.*

Usando este teorema, Donadze, Ladra e Thomas provaram o seguinte:

Teorema 4.7. *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Se G e H são supersolúveis, então $G \otimes H$ é supersolúvel.*

Demonstração. Consideremos a extensão central:

$$\{1\} \to A \to G \otimes H \stackrel{\lambda}{\to} D_H(G) \to \{1\},$$

em que $A = Ker(\lambda)$. Por hipótese, G e H são supersolúveis e, consequentemente, policíclicos. Dessa forma $G \otimes H$ é policíclico pelo Teorema 4.6. Assim, A é um grupo abeliano finitamente gerado, donde é possível exibi-lo como um produto direto de um número finito de grupos cíclicos, digamos, $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$. É claro que cada A_i é um subgrupo cíclico normal de $G \otimes H$, pois $A \leq Z(G \otimes H)$. Não é difícil ver que a sequência abaixo é uma extensão central

$$\{1\} \to A_1 \stackrel{f_1}{\to} \frac{G \otimes H}{B_2} \stackrel{\omega_1}{\to} \frac{G \otimes H}{A} \to \{1\},$$

em que $B_2 = \prod_{i=2}^{n} A_i$, os homomorfismos ω_1 e f_1 dados por $(tB_2)\omega_1 = tA$ e $(a)f_1 = aB_2$ para quaisquer $t \in G \otimes H$ e $a \in A_1$. Como

$$\frac{G \otimes H/B_2}{A_1B_2/B_2} \cong \frac{G \otimes H}{A_1B_2} = \frac{G \otimes H}{A} \cong D_H(G),$$

é possível aplicar a Proposição 1.18 para concluir que $G \otimes H/B_2$ é supersolúvel. Considerando agora a extensão central

$$\{1\} \to A_2 \xrightarrow{f_2} \frac{G \otimes H}{B_3} \xrightarrow{\omega_2} \frac{G \otimes H}{B_2} \to \{1\},$$

onde $B_3 = \prod_{i=3}^{n} A_i$ e f_2 e ω_2 são definidos de forma análoga a f_1 e ω_1, respectivamente, teremos $G \otimes H/B_3$ supersolúvel. Repetindo este processo indutivamente n vezes, concluímos que $G \otimes H/B_n = G \otimes H/A_n$ é supersolúvel, com A_n cíclico. Logo, novamente pela Proposição 1.18, podemos concluir que $G \otimes H$ é supersolúvel. □

Inspirados nos Teoremas 4.1 e 4.7 , Donadze, Ladra e Thomas investigaram quais outras propriedades são fechadas sob a formação de produtos tensoriais não abelianos de grupos.

Proposição 4.8. *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro e suponha que P é uma propriedade de grupos que satisfaz as seguintes condições:*

(i) Se um grupo J tem a propriedade P, então qualquer subgrupo normal de J tem a propriedade P;

(ii) Se um grupo J tem a propriedade P, então qualquer extensão central de J tem a propriedade P.

Nessas condições, se G ou H tem a propriedade P, então $G \otimes H$ também possui.

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade que G tem a propriedade P; logo por (i), $D_H(G)$ também possui. Assim, considerando a extensão central (4.5), de (ii), podemos concluir que $G \otimes H$ tem a propriedade P. □

Definição 4.9. Sejam P e Q duas propriedades de grupos. Dizemos que um grupo G é *P-por-Q* se existir um subgrupo normal N de G tal que N tem a propriedade P e G/N tem a propriedade Q.

Como consequência da proposição anterior temos o seguinte corolário:

Corolário 4.10. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se G ou H é solúvel-por-finito, então $G \otimes H$ também é;

(ii) Se G ou H é nilpotente-por-finito, então $G \otimes H$ também é.

Demonstração. (i) Primeiro vamos provar que a propriedade solúvel-por-finito satisfaz as condições (i) e (ii) da Proposição 4.8. Para isso seja J um grupo solúvel-por-finito. Então existe um subgrupo solúvel normal S de J tal que J/S é finito. Disso, obtemos a seguinte sequência exata:

$$\{1\} \to S \to J \to F \to \{1\},$$

onde $F = J/S$. Queremos provar primeiramente que qualquer subgrupo normal de J é solúvel por finito. Assim, seja $N \lhd J$. Existe uma sequência exata:

$$\{1\} \to S \cap N \to N \to F_1 \to \{1\},$$

em que F_1 é um subgrupo de F e, portanto, finito. Como $S \cap N$ é solúvel e normal em N e $N/(S \cap N) = F_1$ é finito, podemos concluir que N é solúvel-por-finito. Agora, provemos que qualquer extensão central de J é solúvel-por-finito. Tomando uma extensão central de J arbitrária

$$\{1\} \to C \to E \xrightarrow{f} J \to \{1\},$$

podemos pensar na extensão central $\{1\} \to C \to (S)f^{-1} \to S \to \{1\}$. É claro que $(S)f^{-1}$ é normal em E e é solúvel pois é uma extensão central de um grupo solúvel (Proposição 1.17). Para mostrar que $E/(S)f^{-1}$ é finito observemos que as extensões centrais anteriores nos fornecem que $E/C \cong J$ e $(S)f^{-1}/C \cong S$. Disto temos

$$\frac{E}{(S)f^{-1}} \cong \frac{E/C}{(S)f^{-1}/C} \cong \frac{J}{S} = F.$$

Logo $E/(S)f^{-1}$ é finito, e concluímos que E é solúvel-por-finito. Agora, pela Proposição 4.8, se G ou H é solúvel-por-finito, então $G \otimes H$ também é. A demonstração do item (ii) segue de forma análoga. □

Para o próximo resultado, observamos que dada uma propriedade P de grupos, um grupo é *localmente* P se qualquer subgrupo finitamente gerado possui a propriedade P.

Lema 4.11. *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro e suponha que P é uma propriedade de grupos que satisfaz as seguintes condições:*

(a) P é fechado sob subgrupos e imagens homomórficas;

(b) P é fechado sob a construção de produtos tensoriais não abelianos de grupos.

Nessas condições, se G e H forem localmente P, então $G \otimes H$ é localmente P.

Demonstração. Por definição precisamos mostrar que qualquer subgrupo finitamente gerado de $G \otimes H$ possui a propriedade P. Assim, seja X um subgrupo finitamente gerado de $G \otimes H$ e sejam $x_1, \ldots, x_n$ geradores de X, onde $x_i = \prod_{j=1}^{r_i} g_{ij} \otimes h_{ij}$, com $i = 1, \ldots, n$. Defina agora G_1 como sendo o subgrupo de G gerado pelos elementos g_{ij}'s e H_1 o subgrupo de H gerado pelos h_{ij}'s. Pelo item (a) G_1 e H_1 têm a propriedade P; assim, pelo item (b) $G_1 \otimes H_1$ satisfaz P. Pelo Teorema 1.27 existe um homomorfismo $\psi : G_1 \otimes H_1 \to G \otimes H$ tal que $(g_1 \otimes h_1)\psi = g_1 \otimes h_1$, para quaisquer $g_1 \in G_1$ e $h_1 \in H_1$. Pelo item (a), $Im(\psi)$ tem a propriedade P e como claramente $X \subset Im(\psi)$, podemos concluir que X tem a propriedade P, como queríamos. □

A partir deste lema podemos provar o seguinte resultado:

Proposição 4.12. *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro, as seguintes propriedades são válidas:*

(i) Se G e H são localmente nilpotentes, então $G \otimes H$ também é;

(ii) Se G e H são localmente solúveis, então $G \otimes H$ também é;

(iii) Se G e H são localmente supersolúveis, então $G \otimes H$ também é;

(iv) Se G e H são localmente policíclicos, então $G \otimes H$ também é;

(v) Se G e H são localmente finitos, então $G \otimes H$ também é.

Demonstração. (i) Sabemos que todo subgrupo e toda imagem homomórfica de um grupo nilpotente são nilpotentes. Além disso, pela Proposição 4.1, o produto tensorial não abeliano de grupos nilpotentes é nilpotente. Assim, pelo Lema 4.11, se G e H são localmente nilpotentes, então $G \otimes H$ também é.

Os demais itens seguem de forma análoga. □

Referências Bibliográficas

[1] BASTOS R., NAKAOKA I.N. & ROCCO N.R., Finiteness conditions for the non-abelian tensor product of groups. Monatsh Math 187, 603–615, (2018).

[2] BASTOS R., NAKAOKA I.N. & ROCCO N.R., Finiteness conditions for the box-tensor product of groups and related constructions, Journal of Algebra, Volume 587, 594-612, (2021).

[3] BROWN R. & LODAY J.-L., Excision homotopique en basse dimension. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A 298, 353-356, (1984).

[4] BROWN R. & LODAY J.-L., Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces, Topology 26 , 311-335, (1987).

[5] BROWN R., JOHNSON D.L. & ROBERTSON E.F., Some computations of non-abelian tensor products of groups, Journal of Algebra, Volume 111, 177-202, (1987).

[6] DONADZE G., LADRA M. & THOMAS V.Z., On some closure properties of the non-abelian tensor product, Journal of Algebra, Volume 472, 399-413, (2017).

[7] ELLIS G., The non-abelian tensor product of finite groups is finite. J. Algebra 111, 203–205 (1987).

[8] ELLIS G. & LEONARD F., Computing Schur multipliers and tensor products of finite groups, Proc. Royal Irish Acad. 95A , 137-147, (1995).

[9] JOHNSON D., Presentations of Groups (2nd ed., London Mathematical Society Student Texts). Cambridge: Cambridge University Press, (1997).

[10] LADRA M. & THOMAS V.Z., Two generalizations of the nonabelian tensor product. J. Algebra 369, 96–113, (2012).

[11] MORAVEC P., The non-abelian tensor product of polycyclic groups is polycyclic, J. Group Theory 10 (6), 795–798, (2007).

[12] MORAVEC P.,The exponents of nonabelian tensor products of groups,Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 212, Issue 7, 1840-1848, (2008).

[13] NAKAOKA I.N., Non-abelian tensor products of solvable groups, J. Group Theory 3 (2), 157–167, (2000).

[14] ROBINSON D.J.S., A Course in the Theory of Groups, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, (1996).

[15] ROCCO N.R. , On a construction related to the non-abelian tensor square of a group, Bol. Soc. Bras. Mat. 22 , 63-79, (1991).

[16] ROCCO N.R., Nonabelian tensor products under engelian actions: an approach via a related construction, Preprint, University of Brasília, (1997).

[17] ROTMAN J., An Introduction to the Theory of Groups, Springer-Verlag, New York, (1995).

[18] ROTMAN J., An Introduction to Homological Algebra, Springer-Verlag, New York, (2009).

[19] THOMAS V.Z., The non-abelian tensor product of finite groups is finite: a homology-free proof. Glasgow Math. J. 52, 473–477, (2010).

[20] VISSCHER M.P., On the nilpotency class and solvability length of nonabelian tensor products of groups, Arch. Math. (Basel) 73 (3), 161–171, (1999).

[21] VITOR P.V., Produto Tensorial não Abeliano de Grupos. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Departemento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2015.