UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

s-Números Lineares e Multilineares em Espaços quase-Banach

Luan Carlos Della Pasqua

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva

Maringá - PR

2021

[0]O presente trabalho foi realizado com apoio do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - Brasil (131849/2019-0)

s-Números Lineares e Multilineares em Espaços quase-Banach

Luan Carlos Della Pasqua

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Análise Funcional

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva

Maringá - PR

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Della Pasqua, Luan Carlos
D357s s-Números lineares de multilineares em espaços quase-Banach / Luan Carlos Della Pasqua. -- Maringá, 2021.
101 p. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Eduardo Brandani da Silva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2021.

1. s-númeras em espaços quase-Banach. 2. s-números multilineares. 3. Números de entropia. 4. Números de aproximação. 5. Números de Kolmogorov. 6. Números de Gelfand. 7. s-numbers on quasi-Banach spaces. 8. Multilinear s-numbers. 9. Entropy numbers. 8. Approximation numbers. 9. Kolmogorov numbers. 10. Gelfand numbers. I. Silva, Eduardo Brandani da, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.7
Edilson Damasio CRB9-1.123

LUAN CARLOS DELLA PASQUA

s-Números Lineares e Multilineares em Espaços quase-Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática, tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez - UNICAMP
Prof. Dr. César Adolfo Hernandez Melo - UEM

Aprovada em: 13 de julho de 2021.
Local de defesa: Videoconferência - Google Meet.

Agradecimentos

A minha amada família que sempre me apoiou em todas as minhas decisões, ao CNPq pelo apoio financeiro, aos meus amigos que sempre se fizeram presentes em minha caminhada e a todos que de alguma forma fizeram parte de minha jornada acadêmica, meus mais sinceros agradecimentos.

"A vida é uma sequência de
encontros inéditos com o mundo,
e portanto ela não se deixa traduzir
em fórmulas de nenhuma espécie."

Clóvis de Barros Filho

Resumo

Palavras-chave: s-números em espaços quase-Banach, s-números multilineares, números de entropia, números de aproximação, números de Kolmogorov, números de Gelfand.

Este trabalho visa estudar alguns s-números associados a operadores lineares e multilineares contínuos entre espaços quase-Banach. Para o caso linear, estamos interessados principalmente em demonstrar algumas propriedades operatórias, relação com compacidade e algumas estimativas (para o caso de dimensão finita) que esses números possuem.

Para o caso multilinear, definimos os números de aproximação, Kolmogorov e Gelfand de um operador multilinear contínuo do modo mais natural possível, a fim de que os dois primeiros tenham de fato a propriedade de serem sequências de s-números.

Abstract

Key words: s-numbers on quasi-Banach spaces, multilinear s-numbers, entropy numbers, approximation numbers, Kolmogorov numbers, Gelfand numbers.

This work aims to study some s-numbers of continuous linear and multilinear operators between quasi-Banach spaces. For the linear case, we are interested mainly in demonstrating some operative properties, relation with compactness and some estimates (for finite dimension case) that these numbers have.

For the multilinear case, we define the approximation numbers, Kolmogorov and Gelfand of a continuous multilinear operator in the most natural way possible, in order to that the first two actually have the property of being sequences of s-numbers.

Sumário

Introdução

A teoria axiomática de s-números foi introduzido por Albrechet Pietstch no contexto de espaços de Banach. Este trabalho visa um estudo introdutório sobre a teoria axiomática de alguns s-números em espaços quase-Banach, para o caso de operadores lineares e multilineares contínuos. Também estudaremos os números de entropia (que não são s-números) mas que possuem propriedades muito interessantes, e ao mesmo tempo análogas com a teoria axiomática de s-números.

Nosso estudo foi baseado principalmente no trabalho de Gerhold "Entropy-, Approximation- and Kolmogorov Numbers on quasi-Banach Spaces" [12], e é focado em demonstrar propriedades operatórias, relação com compacidade de operadores e algumas estimativas (para o caso de dimensão finita) que esses números possuem, além de introduzir o conceito de s-números multilineares. Isto é, estamos interessados de modo geral, em fazer um apanhado de resultados relativos a teoria axiomática de s-números para espaços quase-Banach.

Para iniciar nossos estudos, dedicamos o primeiro capítulo à definições e resultados necessários para a teoria que se segue, principalmente focados em espaços quase-Banach e p-Banach. Sentimos a necessidade de organizar uma sequência de resultados, mesmo que básica, sobre esses espaços, pois normalmente não os encontramos em um único texto.

No segundo capítulo, tratamos de definir o que são os s-números associados a um operador linear e limitado $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$. Definimos também, números de entropia, aproximação, Kolmogorov e Gelfand, mostrando que os três últimos, para o caso linear, de fato são s-números. Nesse capítulo, também estendemos alguns resultados a respeito de números de Gelfand em espaços de Banach para espaços quase-Banach, além de mostrar algumas relações com compacidade que esses números possuem.

Já no capítulo 3 discutimos algumas desigualdades entre os números definidos no capítulo 2. A motivação para esse estudo é a desigualdade de Carl, que relaciona alguns s-números e números de entropia. Começamos o capítulo apresentando algumas relações com teoria espectral para introduzir uma estimativa muito conhecida de números de entropia usando autovalores de um operador linear entre espaços quase-Banach. Posteriormente apresentamos algumas relações já conhecidas entre números de aproximação, Kolmogorov e entropia, além de apresentar um estudo mais recente de Vybíral, Kolleck e Hinrichs para desigualdade de Carl usando números de Gelfand. Tais desigualdades são muito importantes para o que se segue na teoria, principalmente para demonstrar estimativas desses números para o caso de espaços quase-Banach de dimensão finita.

No capítulo 4 estão algumas estimativas dos s-números definidos no texto, além do número de entropia, para o caso do operador identidade entre os espaços quase-Banach de dimensão finita ℓ_p^n e ℓ_q^n. Também inserimos nesse capítulo estimativas recentes relativas aos números de Gelfand, onde faz-se o uso do Teorema de Carl.

No quinto e último capítulo, introduzimos o conceito de s-números relativos a operadores multilineares contínuos entre espaços quase-Banach, generalizando a definição dada por Fernandez, Mastylo e Brandani recentemente em [9]. Com isso, conseguimos mostrar usando estratégias parecidas com as do caso linear, que os números de aproximação e de Kolmogorov são s-números, porém não podemos garantir que os números de Gelfand são s-números. Também mostramos algumas desigualdades entre esses números e relações com compacidade que facilmente conseguimos generalizar do caso linear.

Capítulo 1

Conceitos Iniciais

Nesse capítulo faremos um breve apanhado do que diz respeito a definições, exemplos e alguns resultados de espaços quase-normados. Introduziremos também o conceito de espaço p-normado e mostraremos que em um certo sentido existe uma equivalência entre trabalhar com espaços quase-normados e p-normados, para uma p-norma adequada. Tais resultados são de fundamental importância para nosso estudo, e normalmente não são encontrados em um mesmo texto, e devido a isso, sentimos a necessidade de criar uma sequência para apresentá-los.

Salvo menção contrária, sempre denotaremos $\mathbb{K}$ como corpo dos números reais ou dos números complexos. As definições a seguir podem ser encontradas em [8, Sec. 1] e [12, Sec. 1].

1.1 Espaços quase-Banach

Definição 1.1. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. A função $||.|| : \mathbb{X} \to [0, \infty)$ é dita ser uma quase-norma se satisfazer as seguintes condições:*

i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii) $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$;

iii) $||x + y|| \leq C(||x|| + ||y||)$, *para algum* $C \geq 1$, *e para todos* $x, y \in \mathbb{X}$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Veja que esta definição difere da de norma apenas pela desigualdade triangular, que nesse caso, recebe o nome de desigualdade quase-triangular em (iii).

Definição 1.2. *As bolas aberta e fechada centradas em $a \in \mathbb{X}$ e raio $r > 0$ com respeito a essa quase-norma são respectivamente:*

$$B_{a,r} := \{x \in \mathbb{X}; ||x - a|| < r\}, \quad \overline{B_{a,r}} := \{x \in \mathbb{X}; ||x - a|| \leq r\}.$$

Por simplicidade escrevemos $B_{\mathbb{X}}$ *e* $\overline{B_{\mathbb{X}}}$ *para as bolas unitárias abertas e fechadas, respectivamente, do espaço* $\mathbb{X}$ *com respeito a essa quase-norma.*

Observação 1.3. *É fácil ver que* $\mathbb{X}$ *é um espaço vetorial topológico de Hausdorff com respeito a topologia gerada pelas bolas abertas da quase-norma.*

Um fato curioso sobre quase-normas é que elas não induzem naturalmente métricas, falhando na desigualdade triangular, como esperado. Entretanto, tal topologia é metrizável, como veremos na Observação 1.9.

Proposição 1.4. *Munidos dessa noção de topologia, podemos definir convergência de forma natural e ver que:*

i) A sequência $\{x_n\}_n \subset \mathbb{X}$ *converge a* $x \in \mathbb{X} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$;

ii) A sequência $\{x_n\}_n \subset \mathbb{X}$ *é de Cauchy se* $\lim\limits_{m,n\to\infty} ||x_n - x_m|| = 0$.

Definição 1.5. *Dizemos que o espaço vetorial quase-normado* $\mathbb{X}$ *é um espaço quase-Banach se for completo com respeito a topologia induzida por essa quase-norma.*

Exemplo 1.6. *Consideremos* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *e* $0 < p < \infty$*. Os conjuntos da forma*

$$\ell_p^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n);\ x_i \in \mathbb{K}\},$$

equipados com $||x||_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ *são espaços quase-Banach, tomando a constante* $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$.

Demonstraremos tal fato a seguir no texto.
Considerando $1 \le p < \infty$ as quase-normas viram normas e temos $(\mathbb{C}^n, ||x||_p)$ ou $(\mathbb{R}^n, ||x||_p)$ espaços de Banach muito conhecidos em Análise Funcional, assim, fica explícito que normas são também quase-normas.

Observação 1.7. *Se olharmos para* $0 < p \le 1$ *vemos que a quase-norma* $||.||_p$ *cumpre a desigualdade* $||x + y||^p \le ||x||^p + ||y||^p$*. Essa desigualdade é chamada de desigualdade p-triangular e é o que motiva nossa próxima definição.*

1.2 Espaços p-Banach

Definição 1.8. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. A função $||.|| : \mathbb{X} \to [0, \infty)$ é dita ser uma p-norma se satisfazer as condições i) e ii) da Definição (1.1) e em adição, existir $0 < p \leq 1$ cumprindo iii)$'$:*

iii)' $||x + y||^p \leq ||x||^p + ||y||^p$

Observação 1.9. *Toda p-norma induz naturalmente uma métrica fazendo $d(x, y) = ||x - y||^p$, assim podemos herdar naturalmente as definições e resultados clássicos sobre topologia em espaços métricos, e fica subentendido que o leitor os conheça.*

Diremos que um espaço $p-$normado é $p-$Banach quando for completo com relação a métrica dita acima.

Observação 1.10. *Todo espaço de Banach é também $p-$Banach, pois naturalmente toda norma é uma $p-$ norma, para $p = 1$.*

Exemplo 1.11. *Consideremos $0 < p \leq 1$. Os espaços*

$$\ell_p^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n,);\ x_i \in \mathbb{K}\},$$

$$\ell_p = \ell_p(\mathbb{N}) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...); \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \quad x_i \in \mathbb{K}\},$$

equipados com $||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, e $||x|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$ respectivamente, são espaços $p - $ Banach.

Antes de demonstrar tal fato, precisamos do

Lema 1.12. *Considere a e b números reais não negativos. Então $(a + b)^p \leq a^p + b^p$.*

Demonstração: De fato, tome $c = \dfrac{a}{a+b}$ e $d = \dfrac{b}{a+b}$ e note que

$$c + d = 1 \ \text{ e } \ 0 < c \leq 1,\ 0 < d \leq 1$$

Como $0 < p \leq 1$, temos $1 \leq c \leq c^p$ e $1 \leq d \leq d^p$, de onde segue

$$1 \leq \left(\frac{a}{a+b}\right)^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^p$$

□

Demonstração: A demonstração do Exemplo 1.11 foi dividida em alguns passos:

(i) Primeiramente, dados x, y números reais ou complexos e $0 < p \leq 1$, então $|x+y|^p \leq |x|^p + |y|^p$.

De fato, como $| \, . \, |$ é uma norma sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ temos

$$|x+y|^p \leq (|x|+|y|)^p,$$

substituindo $a = |x|$ e $b = |y|$ no Lema 1.12 chegamos no almejado

$$|x+y|^p \leq (|x|+|y|)^p \leq |x|^p + |y|^p.$$

(ii) Para ℓ_p^n, utilizamos o item (i), isto é,

$$||x+y||^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = |x_1+y_1|^p + |x_2+y_2|^p + ... + |x_n+y_n|^p$$

$$\leq |x_1|^p + |y_1|^p + |x_2|^p + |y_2|^p + ... + |x_n|^p + |y_n|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p = ||x||^p + ||y||^p$$

(iii) Para o caso geral, dados $x = (x_1, x_2, ...x_n, ...), y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in \ell_p$.

Pelo ítem anterior

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p,$$

vale para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p < \infty.$$

Isso mostra que se $x, y \in \ell_p$ então $x + y \in \ell_p$ e vale a desigualdade $p-$triangular, como queríamos.

Por outro lado, para a completude desse espaço, considere $(x^{(m)})_m$ uma sequência de Cauchy em ℓ_p, onde a cada $m \in \mathbb{N}$, $(x_j^{(m)})_j$ é uma sequência em $\mathbb{K}$. como

$$|x_j^{(m)} - x_j^{(k)}| \leq ||x^{(m)} - x^{(k)}||_p,$$

e $(x^{(m)})_m$ é de Cauchy, a cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, $(x_j^{(m)})_m$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$, logo converge a algum elemento de $\mathbb{K}$, que chamaremos x_j. Defina $x = (x_j)_j$, mostraremos que $x \in \ell^p$ e que $(x^{(m)})_m$ converge a x em ℓ_p.

De fato, primeiramente, do fato que toda sequência de Cauchy é limitada em um espaço métrico, existe um limitante $\alpha > 0$, e $\forall m, k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{s} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^p \leq ||x^{(m)} - x^{(k)}||_p^p \leq ||x^{(m)}||_p^p + ||x^{(k)}||_p^p \leq 2\alpha. \tag{1.1}$$

Perceba que a primeira desigualdade ocorre por que consideramos a soma finita, até $s \in \mathbb{N}$ qualquer. Tomando então $m \to \infty$ temos

$$\sum_{j=1}^{s} |x_j - x_j^{(k)}|^p \leq 2\alpha.$$

Agora, olhando para ℓ_p^s, já mostramos que vale a desigualdade p-triangular, resultando em

$$\sum_{j=1}^{s} |x_j|^p - \sum_{j=1}^{s} |x_j^{(k)}|^p \leq \sum_{j=1}^{s} |x_j - x_j^{(k)}|^p \leq 2\alpha,$$

para $s \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$. Assim, tomando $k \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{s} |x_j|^p \leq 2\alpha + ||x^{(k)}|||_p^p,$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Logo, $x = (x_j)_j \in \ell_p$. Resta-nos mostrar que a sequência $(x^{(m)})_m$ converge a x em ℓ^p.

Dado $\varepsilon > 0$, como $(x^{(m)})$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, k > n_0$, então

$$\left(\sum_{j=1}^{s} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq ||x^{(m)} - x^{(k)}||_p \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Tomando $k \to \infty$ e $m > n_0$ segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{s} |x_j^{(m)} - x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como tal afirmação vale para todo $s \in \mathbb{N}$, tomando o limite de $s \to \infty$ e $m > n_0$ temos

$$||x^{(m)} - x||_p \leq \varepsilon,$$

como queríamos.

□

Teorema 1.13. *Seja $0 < p \leq 1$ e Ω um conjunto mensurável a Lebesgue ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ou $\Omega \subset \mathbb{C}^n$). Seja f uma função de Ω para $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o espaço de funções L^p é definido como o espaço de todas as funções de módulo $p-$integrável a Lebesgue, isto é,*

$$\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty.$$

Nesse espaço, definimos a $p-$norma.

$$||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Nessas condições, tal espaço é $p-$Banach.

Assim como ℓ_p, é fato sabido que L^p para $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach. Curiosamente, quando olhamos para $0 < p \leq 1$, assim como no exemplo anterior, tal espaço é também $p-$Banach.

Demonstração: É facil ver as propriedades (i) e (ii) de p-norma. Para a desigualdade p-triangular, usaremos novamente a subaditividade da função $f(x) = x^p$ quando $0 < p \leq 1$.

Usando a desigualdade triangular de módulo e substituindo $a = |f| \geq 0$ e $b = |g| \geq 0$ no Lema 1.12, vale a desigualdade

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq |f|^p + |g|^p$$

Como f, g são de módulo $p-$integrável a Lebesgue, temos que a soma também é, e vale

$$\int_\Omega |f+g|^p d\mu \leq \int_\Omega (|f|^p + |g|^p) d\mu = \int_\Omega |f|^p d\mu + \int_\Omega |g|^p d\mu,$$

em outras palavras,

$$||f+g||^p_{L^p} \leq ||f||^p_{L^p} + ||g||^p_{L^p}.$$

Com relação a completude desse espaço, o intuito é generalizar o caso $p \geq 1$, encontrado em [3, Theo. 4.8]. A ideia geral é utilizar o fato que L^p é um espaço métrico, com a métrica definida em Observação 1.9. Logo, basta mostrar que qualquer sequência de Cauchy possui uma subsequência que converge.

De fato, seja $(f_n)_n$ uma sequência de Cauchy em L^p, podemos escolher a cada $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ e extrairmos um subsequência $(f_{n_k})_k$ da seguinte forma:

Primeiramente para $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, encontramos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_1$ então

$$||f_m - f_n||_{L^p} \leq \frac{1}{2}.$$

Assim, fixamos f_{n_1}. Para f_{n_2}, tome $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, e novamente encontramos $n_2 \geq n_1$ tal que se $m, n \geq n_2$, vale

$$||f_m - f_n||_{L^p} \leq \frac{1}{2^2},$$

em particular,

$$||f_{n_2} - f_{n_1}||_{L^p} \leq \frac{1}{2}.$$

Procedendo indutivamente, encontramos f_{n_k} tal que

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Mostraremos agora, que tal subsequência converge em L^p. Por simplicidade, denote $f_{n_k} = f_k$. Defina $g_0(x) := 0$ e para todo $n \geq 1$

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k|,$$

e veja que

$$|g_n(x)|^p \leq \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k|^p.$$

de onde, $g \in L^p$, pois a diferença $f_{k+1} - f_k \in {}^p$, e

$$\int_\Omega |g_n|^p d\mu < \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega |f_{k+1}(x) - f_k|^p d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_{k+1} - f_k||_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1.$$

Como consequência do Teorema da Convergência Monótona, $g_n(x)$ converge pontualmente a um limite, que chamaremos de $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ em quase todo ponto de Ω e,

$$\int_\Omega |g|^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |g_n|^p d\mu,$$

isto é, $g \in L^p$.

Por outro lado, para todo $m \geq n \geq 2$, fazendo uma soma telescópica, e usando a deigualdade triangular do módulo seguidas vezes, veja que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + ... + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \sum_{k=n}^{m} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \quad (1.2)$$

Mas, para q.t.p. em Ω

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_{k+1}(x)-f_k(x)| = \sum_{k=1}^{n-1}|f_{k+1}(x)-f_k(x)| + \sum_{k=n}^{m}|f_{k+1}(x)-f_k(x)| + \sum_{k=m}^{\infty}|f_{k+1}(x)-f_k(x)|,$$

isto é,

$$g(x) = g_{n-1}(x) + \sum_{k=n}^{m}|f_{k+1}(x)-f_k(x)| + \sum_{k=m}^{\infty}|f_{k+1}(x)-f_k(x)|.$$

Assim, em 1.2 temos em q.t.p. de Ω.

$$|f_m(x)-f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x),$$

de onde vemos que $(f_k(x))_k$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$ que é completo, e podemos chamar de $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Logo, tomando o limite em m na desigualdade acima, segue

$$|f(x)-f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \geq 2.$$

Como g é p-integrável, temos que $f - f_n$ está em L^p, de onde $f \in L^p$. Finalmente, resta-nos mostrar que $||f_n - f||_{L^p}$ tende a zero. Isso se deve ao Teorema da Convergência Dominada, pois $|f_n - f|^p \leq g^p \in L^1$ e $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ em q.t.p. de Ω. □

O próximo Lema será usado diretamente para provar que toda $p-$norma é também quase-norma, portanto é de fundamental importância em nosso trabalho.

Lema 1.14. *Dados $0 < p \leq 1$ e a, b dois números reais não negativos, vale*

$$2^{1/p-1}(a+b) \geq (a^p + b^p)^{1/p}.$$

Demonstração: Isso sai diretamente do fato que a função real $f(x) = x^p$ $(x \geq 0)$ é côncava, isto é, $f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$ $\forall\ a, b \geq 0$ *e* $t \in [0,1]$.

Assim, dados $a, b \geq 0$ e tomando $t = \frac{1}{2}$ temos

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \geq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b),$$

isto é,

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^p \geq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p$$

$$\frac{1}{2^p}(a+b)^p \geq \frac{1}{2}(a^p + b^p)$$

$$2^{-p+1}(a+b)^p \geq (a^p+b^p),$$

portanto,

$$2^{\frac{1}{p}-1}(a+b) \geq (a^p+b^p)^{1/p}.$$

□

O próximo resultado nos permite catalogar vários exemplos de espaços quase-Banach.

Teorema 1.15. *Toda p-norma é também uma quase-norma, tomando* $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$.

Demonstração: Usando a desigualdade $p-$triangular, basta mostrar que para todo $x, y \in \mathbb{X}$, existe uma constante $C > 1$ cumprindo

$$||x+y|| \leq (||x||^p + |y||^p)^{1/p} \leq C(||x|| + ||y||).$$

Para isso, tomamos $a = ||x|| \geq 0$ e $b = ||y|| \geq 0$ no Lema 1.14 e segue imediatamente o desejado

$$2^{\frac{1}{p}-1}(||x|| + ||y||) \geq (||x||^p + ||y||^p)^{1/p},$$

basta tomar $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$ pois, $2^{\frac{1}{p}-1} \geq 1$ para todo $0 < p \leq 1$. □

Observação 1.16. *Pelo Teorema 1.15, e o Corolário 1.27 (que veremos adiante), conseguimos fazer uma lista de vários epaços que são além de p-Banach, quase-Banach.*

i) $\ell_p^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n);\ x_i \in \mathbb{K}\}$ *equipado com* $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ *são espaços quase-Banach se* $0 < p < \infty$, *em particular p-Banach quando* $0 < p \leq 1$.

ii) $\ell_\infty^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n);\ x_i \in \mathbb{K}\}$ *e* $||x||_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ *temos um espaço de Banach e portanto quase-Banach com* $C = 1$.

iii) $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N}) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, .); \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \quad x_i \in \mathbb{K}\}$ *equipado com* $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$ *são espaços quase-Banach se* $0 < p < \infty$, *em particular p-Banach quando* $0 < p \leq 1$.

iv) $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N}) := \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ..); \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\ x_i \in \mathbb{K}\}$ *equipado com* $||x||_\infty := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ *é um espaço de Banach, e portanto quase-Banach.*

v) $L^p = \{f : \Omega \to \mathbb{K}; \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$, *equipado com* $||f||_{L^p} = (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{1/p}$ *como no Lema 1.13 é um espaço p-Banach quando* $0 < p \leq 1$ *e portanto quase-Banach. No caso geral, valeu que tal espaço é quase-Banach no caso geral* $0 < p < \infty$.

vi) $L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{K}; f$ *é limitada em q.t.p. de* $\Omega\}$ *equipado com* $||f||_{L^\infty} := \inf\{C; |f(x)| \leq C$ *em q.t.p. de* $\Omega\}$.

Veja que nos casos acima, quando restringimos $p \geq 1$, as desigualdades p-triangulares viram desigualdades triangulares, e então temos espaços de Banach. Assim, toda a teoria que se desenvolverá vale para esses espaços com qual já temos afinidade.

1.3 Topologia

Nesta seção veremos alguns resultados de topologia em espaços quase-normados e apresentaremos uma das ferramentas mais importantes nesse sentido, o Teorema de Aoki-Rolewics. Esse teorema pode ser encontrado em [12, Theo. 3, p. 5] ou em [7, Theo. 1.1, p. 20].

Teorema 1.17. *(Aoki-Rolewics versão quase-norma). Seja* $\mathbb{X}$ *um espaço vetorial e* $||.||$ *uma quase-norma. Então existe uma p-norma* $||.||_0$ *equivalente a quase-norma dada.*

Demonstração: Defina

$$||x||_0 = \inf_{x=x_1+x_2+...+x_m} \{||x_1||^p + ||x_2||^p + ... + ||x_m||^p\}^{1/p},$$

o ínfimo sobre todas as combinações possíveis que gerem x. Vamos mostrar que tal regra satisfaz as condições de p-norma.

Primeiramente, para mostrar que $||x||_0 = 0 \iff x = 0$ usaremos o fato que provaremos em 1.3:

$$||x|| = ||x_1 + x_2 + ... + x_m|| \leq C_0||x_1||^p + ||x_2||^p + ... + ||x_m||^p,$$

onde $2 \leq C_0$, assim:

$$||x|| = \inf_{x=x_1+x_2+...+x_m} ||x_1+x_2+...+x_m|| \leq C_0 \inf_{x=x_1+x_2+...+x_m} \{||x_1||^p+||x_2||^p+...+||x_m||^p\} = ||x||_0,$$

logo, se $||x||_0 = 0$, então $||x|| = 0$, de onde $x = 0$.

O segundo ítem sai imediatamente por propriedade de ínfimo. Para o ítem $iii)$ da definição de p-norma, veja que

$$||x+y||_0^p = \inf_{x+y=x_1+x_2+...+x_m+y_1+y_2+...+y_n} \{||h_1||^p + ||h_2||^p + ... + ||h_{m+n}||^p\}.$$

Onde, $h_i = x_i + y_i$ para todo $i \in \{1,2,...,m+n\}$ completando com zeros caso necessário. Usando que se $A \subset B$ então $\inf B \leq \inf A$, temos:

$$||x+y||_0^p \leq \inf_{x+y=x_1+x_2+...+x_m+y_1+y_2+...+y_n} \{||x_1||^p + ... + ||x_m||^p + ||y_1||^p + ... + ||y_n||^p\},$$

e do fato de que

$$\inf_{a\in A, b\in B} a+b \leq \inf_{a\in A} a + \inf_{b\in B} b,$$

implica em

$$||x+y||_0^p \leq \inf_{x=x_1+x_2+...+x_m} \{||x_1||^p + ... + ||x_m||^p\} + \inf_{y=y_1+y_2+...+y_n} \{||y_1||^p + ... + ||y_n||^p\} \quad (1.3)$$

$= ||x||_0^p + ||y||_0^p$.

Para mostrar a equivalência, exibiremos duas constantes positivas K_1 e K_2 tais que:

$$K_1||.||_0 \leq ||.|| \leq K_2||.||_0.$$

A desigualdade $K_1||.||_0 \leq ||.||$ é verificada facilmente, tomando $K_1 = 1$ e vendo que:

$$||x||_0 = \inf_{x=x_1+x_2+...+x_m} \{||x_1||^p + ||x_2||^p + ... + ||x_m||^p\}^{1/p} \leq \inf_{x=x_1} \{||x_1||^p\}^{1/p} = ||x||.$$

Para a segunda desigualdade, vamos precisar mostrar alguns fatos:

Afirmação 1.18.
$$||x_1+x_2+...+x_m|| \leq \max_{1\leq j\leq m} C_0^j ||x_j||,$$

onde $C_0 = 2C$ e C é a constante da quase-norma.

Para $m = 1$ a afirmação é óbvia, pois $2 \leq C_0$, assim:

$$||x_1|| \leq C_0||x_1||.$$

Suponha por hipótese de indução, que tal desigualdade vale para $m = k$.

$$||x_1 + x_2 + ... + x_k|| \leq \max_{1 \leq j \leq k} C_0^j||x_j||.$$

Para $k+1$, temos:

$$||x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}|| \leq C(||x_1 + x_2 + ... + x_k|| + ||x_{k+1}||)$$

$$\leq 2C \max\{||x_1 + x_2 + ... + x_k||, ||x_{k+1}||\} \leq C_0 \max\{\max_{1 \leq j \leq k} C_0^j||x_j||, ||x_{k+1}||\}$$

$$\leq \max\{\max_{1 \leq j \leq k} C_0^j||x_j||, C_0^k||x_{k+1}||\} \leq \max_{1 \leq j \leq k+1} C_0^j||x_j||. \tag{1.4}$$

Defina

$$N(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x = 0 \\ C_0^k, & se \quad C_0^{k-1} < ||x|| \leq C_0^k. \end{cases}$$

Obs: Note que se $x \neq 0$, sempre existe o número desejado acima, de onde $N(x)$ fica bem definido, e, vale a desigualdade:

$$C_0^{-1}N(x) < ||x|| \leq N(x).$$

Afirmação 1.19. $||x_1 + x_2 + ... + x_m|| \leq C_0(N(x_1)^p + N(x_2)^p + ... + N(x_m)^p)^{1/p}$.

Por indução, para $m = 1$ temos:

$$||x_1|| \leq N(x_1) \leq C_0(N(x_1)^p)^{1/p},$$

pois $2 \leq C_0$. Suponha tal afirmação válida para $m = k-1$, isto é,

$$||x_1 + x_2 + ... + x_{k-1}|| \leq C_0(N(x_1)^p + N(x_2)^p + ... + N(x_{k-1})^p)^{1/p}$$

Para $m = k$, vamos separar em dois casos:

1º Caso: Suponha $N(x_i) \neq N(x_j)$ sempre que $i \neq j$, $i, j = 1, 2, .., k$. Nesse caso, podemos supor sem perda de generalidade (reenumerando caso necessário) que:

$$N(x_1) > N(x_2) > ... > N(x_k).$$

Disso, segue que

$$C_0^j||x_j|| \leq C_0^j N(x_j) \leq C_0 N(x_1) \leq C_0(N(x_1)^p + N(x_2)^p + ... + N(x_k)^p)^{1/p}. \qquad (1.5)$$

Como isto vale para todo $j = 1, 2, ..., k$, *e já provamos no ítem (1.4) que*

$$||x_1 + x_2 + ... + x_k|| \leq \max_{1 \leq j \leq k} C_0^j ||x_j||,$$

de onde:

$$||x_1 + x_2 + ... + x_k|| \leq C_0(N(x_1)^p + N(x_2)^p + ... + N(x_k)^p)^{1/p}.$$

Note que a segunda desigualdade em 1.5 é facilmente demonstrada, vendo que

$$N(x_1) = C_0^{l_1} \geq C_0^{l_j} = N(x_j), \quad onde \quad j = 2, 3, ..., k.$$

Disto, segue que: $l_1 \geq l_j + j - 1$ *e,*

$$C_0 N(x_1) = C_0 C_0^{l_1} \geq C_0 C_0^{l_j + j - 1} = C_0 C_0^{l_j} C_0^{j-1} = C_0^j N(x_j).$$

2º Caso: Suponha que exista algum $N(x_j) = N(x_{j+1})$ *(reenumerando caso necessário) onde* $j = 1, 2, .., k - 1$.

Note, primeiramente que:

$$||x_j + x_{j+1}|| \leq C_0 \max\{||x_j, x_{j+1}||\} \leq C_0 C_0^{l_j} \leq C_0^{l_{j+1}},$$

pois $N(x_j) = N(x_{j+1}) = C_0^{l_j}$. *Como* $N(x)$ *é a menor potência de* C_0, *tal que* $C_0^{k-1} \leq ||x|| \leq C_0^k$, *temos que:*

$$N(x_j + x_{j+1}) \leq C_0^{l_{j+1}} \Rightarrow N(x_j + x_{j+1})^p \leq (C_0^{l_{j+1}})^p = (C_0^p)^{l_{j+1}}$$

$$= 2^{l_{j+1}} = 2.2^{l_j} = 2^{l_j} + 2^{l_j} = C_0^{l_j} + C_0^{l_j} = N(x_j) + N(x_{j+1}).$$

Usando, finalmente a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned}
& ||x_1 + x_2 + ... + (x_j + x_{j+1}) + ... + x_k|| \\
\leq \; & C_0(N(x_1)^p + N(x_2)^p + ... + N(x_j + x_{j+1})^p + ... + N(x_k))^{1/p} \\
\leq \; & C_0(N(x_1)^p + N(x_2)^p + ... + N(x_j)^p + N(x_{j+1})^p + ... + N(x_k))^{1/p} \\
\leq \; & C_0(C_0 N(x_1)^p + N(x_2)^p + ... + N(x_j)^p + N(x_{j+1})^p + ... + N(x_k))^{1/p}.
\end{aligned}$$

Note que nos dois casos temos essa desigualdade, o que conclui a afirmação.

Dito isso, relembrando que $C_0^p = 2$, e que, $C_0 \geq 2$ chegamos em:

$$||x|| = ||x_1 + x_2 + ... + x_k|| \leq C_0^2 \left(\left(\frac{N(x_1)}{C_0} \right)^p + \left(\frac{N(x_2)}{C_0} \right)^p + ... + \left(\frac{N(x_k)}{C_0} \right)^p \right)^{1/p}.$$

Como $\left(\frac{N(x_j)}{C_0} \right)^p \leq ||x_j||^p$, aplicando o ínfimo sobre combinações de x na desigualdade acima, obtemos

$$||x|| = \inf ||x|| \leq \inf_{x = x_1 + x_2 + ... + x_m} \{||x_1||^p + ||x_2||^p + ... + ||x_m||^p\}^{1/p} = ||x||_0,$$

o que conclui a demonstração. □

Perceba que essa equivalência é muito importante, pois ganhamos uma nova ferramenta para analisar propriedades como convergência, compacidade, dentre outras, relacionadas a quase-normas, como se segue no

Corolário 1.20. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial, $||.||$ uma quase-norma sobre $\mathbb{X}$ e $||.||_p$ sua p-norma equivalente, $A \subset \mathbb{X}$ um subconjunto qualquer e $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$. Então valem as seguintes equivalências:*

i) A é aberto em $(\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$. se e só se é aberto em $(\mathbb{X}, ||.||_p)$;

ii) A é fechado em $(\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$. se e só se é fechado em $(\mathbb{X}, ||.||_p)$;

iii) $(x_n)_n$ converge em $(\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$. se e só se converge em $(\mathbb{X}, ||.||_p)$;

iv) $(x_n)_n$ é de Cauchy em $(\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$ se, e só se, é de Cauchy em $(\mathbb{X}, ||.||_p)$;

v) O fecho de $A \in \mathbb{X}$ com $||.||$ é igual ao fecho de A com $||.||_p$, isto é, $\overline{A}^{||.||} = \overline{A}^{||.||_p}$;

vi) $A \in \mathbb{X}$ é compacto $(\mathbb{X}, ||.||)$ se, e somente se, é compacto em $(\mathbb{X}, ||.||_p)$.

Demonstração: A demonstração dos itens i) ao v) são imediatas e recaem diretamente da existência das constantes $k_1, k_2 > 0$, demonstrada no teorema anterior, cumprindo:

$$k_1||.||_p \leq ||.|| \leq k_2||.||.$$

No item vi), suponha que A é aberto com a p-norma, então dado $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura de abertos de A em $(\mathbb{X}, ||.||)$, pelo ítem i) $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma cobertura de abertos de A em $(\mathbb{X}, ||.||_p)$, de onde existe uma subcobertura finita $\{A_i\}_{i=1}^n$, e, novamente pelo item i) esta é uma subcobertura finita de A em $(\mathbb{X}, ||.||)$. A recíproca segue o mesmo raciocínio. □

Recordaremos agora alguns resultados importates sobre esses espaços métricos, mas sem demonstrá-los, pois estes são fundamentais para a teoria que se segue.

Definição 1.21. *Seja $(\mathcal{M}, d)$ um espaço métrico. Dizemos que A é relativamente compacto se o fecho de A for compacto.*

Definição 1.22. *Dado $\varepsilon > 0$, e $x_1, x_2, ..., x_n$ pontos de A. Dizemos que o conjunto $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ é uma $\varepsilon-$rede de A se*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Proposição 1.23. *$(\mathcal{M}, d)$ for completo, então A é relativamente compacto se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir uma $\varepsilon-$rede de A.*

1.4 Operadores lineares contínuos

Nesta seção apresentaremos os conceitos necessários relativos a operadores lineares contínuos entre espaços quase-Banach que utilizaremos no texto.

Definição 1.24. *Sejam $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear entre os espaços quase-normados $(\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$ e $(\mathbb{Y}, ||.||_{\mathbb{Y}})$, dizemos que:*

i) T é contínuo se existir $c > 0$ tal que $||T(x)||_{\mathbb{Y}} \leq c.||T(x)||_{\mathbb{X}}$
No caso afirmativo escrevemos $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, o conjunto de todos os operadores lineares contínuos entre $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$.

ii) posto$(T) := dim(Im(T))$, a dimensão da imagem de T.

iii) T é compacto se para qualquer subconjunto limitado $A \subset \mathbb{X}$ tivermos $T(A)$ relativamente compacto em $(\mathbb{Y}, ||.||_{\mathbb{Y}})$. Definimos $\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ o conjunto dos operadores compatos.

iv) Dizemos que T tem posto finito se posto$(T) < \infty$.

Lema 1.25. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ então $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ se e somente se $T(\overline{B}_{\mathbb{X}})$ é compacto em $\mathbb{Y}$.*

Lema 1.26. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ onde $(\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$ é um espaço quase-normado e $(\mathbb{Y}, ||.||_{\mathbb{Y}})$ quase-Banach. Se existir uma sequência de operadores $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de posto finito, convergindo a T em $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, então T é compacto.*

A demonstração dos Lemas acima encontram-se em [11].

Corolário 1.27. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial, $||.||$ uma quase-norma sobre $\mathbb{X}$ e $||.||_p$ sua p-norma equivalente. Então $(\mathbb{X}, ||.||)$ é quase-Banach se, e somente se, $(\mathbb{X}, ||.||_p)$ é p-Banach.*

Esse resultado segue imediatamente dos itens iii) e iv) do Corolario 1.16

Lema 1.28. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ entre os espaços quase-Banach $(\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$ e $(\mathbb{Y}, ||.||_{\mathbb{Y}})$. Considere $||.||_{p_1}$, $||.||_{p_2}$ as $p-$normas equivalentes, respectivamente, nestes espaços, com $p_1, p_2 \in (0, 1]$. $T : (\mathbb{X}, ||.||_{p_1}) \to (\mathbb{Y}, ||.||_{p_2})$ é compacto, se e somente se, $T : (\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}}) \to (\mathbb{Y}, ||.||_{\mathbb{Y}})$ é compacto.*

Demonstração: Tome $X \subset (\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$ um conjunto limitado e suponha que $T : (\mathbb{X}, ||.||_{p_1}) \to (\mathbb{Y}, ||.||_{p_2})$ é compacto. Pela equivalência das normas X é limitado em $(\mathbb{X}, ||.||_{p_1})$ de onde $\overline{T(X)}^{||.||_{p_2}}$ é compacto em $(\mathbb{Y}, ||.||_{p_2})$. Pelo item v) do corolário 1.20, $\overline{T(X)}^{||.||_{p_2}} = \overline{T(X)}^{||.||_{\mathbb{Y}}}$ que será compacto em $(\mathbb{Y}, ||.||_{\mathbb{Y}})$ pelo item (vi) do mesmo Corolário.
A recíproca é análoga. □

1.5 Espaço quociente

Definição 1.29. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial e U um subepaço de $\mathbb{X}$. Nós definimos o espaço quociente de $\mathbb{X}$ com respeito a U e denotamos por $\mathbb{X}/U$ o espaço*

$$\mathbb{X}/U := \{[x] = x + U; x \in \mathbb{X}\},$$

com a soma e multiplicação por escalar usuais:

$$[x] + [y] := [x + y] \quad e \quad \lambda[x] := [\lambda x].$$

Com isso, fica bem definida a aplicação quociente $\mathbb{Q}_U^{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}/U$, tal que $\mathbb{Q}_U^{\mathbb{X}}(x) := [x]$.

Lema 1.30. *Sejam $\mathbb{X}$ um espaço p-Banach (ou quase-Banach) e U um subespaço de $\mathbb{X}$. Então valem:*

i) *$\mathbb{X}/U$ é um espaço p-normado (ou quase-normado).*

ii) *Se U for fechado, então $\mathbb{X}/U$ é $p-$ Banach (respectivamente, quase-Banach).*

Demonstração: A demonstração, por conveniência, será feita para a $p-$norma, mas é completamente análoga no caso quase-norma, fazendo as alterações necessárias na desigualdade quase triangular.

O ítem $i)$ sai diretamente por propriedade de ínfimo, dado que se $[x], [y] \in \mathbb{X}/U$ e $\varepsilon > 0$ então existem z^x e $z^y \in U$ tais que,

$$||x - z^x||_{\mathbb{X}} \leq (1+\varepsilon)||[x]||_{\mathbb{X}/U} \quad e \quad ||y - z^y||_{\mathbb{X}} \leq (1+\varepsilon)||[y]||_{\mathbb{X}/U}.$$

Note que $-z^x - z^y \in U$, e novamente por propriedade de ínfimo, temos

$$||[x+y]||_{\mathbb{X}/U} \leq ||x + y - z^x - z^y||_{\mathbb{X}},$$

de onde,

$$\begin{aligned} ||[x+y]||^p_{\mathbb{X}/U} &\leq ||x + y - z^x - z^y||^p_{\mathbb{X}} \leq ||x - z^x||_{\mathbb{X}} + ||y - z^y||_{\mathbb{X}} \\ &\leq (1+\varepsilon)^p (||[x]||^p_{\mathbb{X}/U} + ||[y]||^p_{\mathbb{X}/U}), \end{aligned}$$

e o resultado segue, fazendo $\varepsilon \to 0$.

Para o ítem $ii)$, a demonstração da completude é facilmente estendida do caso Banach. Ver [1, Prop. 1.2.4.].

□

Lema 1.31. *Seja $(\mathbb{X}, ||.||)$ um espaço vetorial quase-normado e $U \subset \mathbb{X}$ um subespaço. Então: $\mathbb{Q}^{\mathbb{X}}_U(B_{\mathbb{X}}) = B_{\mathbb{X}/U}$.*

A inclusão $\mathbb{Q}^{\mathbb{X}}_U(B_{\mathbb{X}}) \subset B_{\mathbb{X}/U}$ sai imediatamente do fato: $\mathbb{Q}^{\mathbb{X}}_U(x) = [x]$, mas,

$$||[x]||_{\mathbb{X}/U} = \inf_{u \in U} ||x + u|| \leq \inf_{u=0} ||x + u|| = ||x||.$$

Então, se $||x|| \leq 1$, temos $||[x]||_{\mathbb{X}/U} \leq 1$, e segue o resultado.

Por outro lado, se $||[x]||_{\mathbb{X}/U} \leq 1$, da sobrejetividade da função $\mathbb{Q}^{\mathbb{X}}_U$ é fácil ver que existe $x \in B_{\mathbb{X}}$ cumprindo o desejado.

Teorema 1.32. *Seja* $(\mathbb{X}, ||.||)$ *um espaço vetorial quase-normado, com constante* $C_{\mathbb{X}}$ *e,* $U \in \mathbb{X}$ *um subespaço de dimensão finita de* $\mathbb{X}$*. Então, para todo elemento* $f \in \mathbb{X}$*, existe* $g \in U$ *tal que:*

$$||f - g|| = \inf_{h \in U} ||f - h||.$$

No Teorema 1.17, mostramos que dada uma quase-norma, existe uma p-norma equivalente. Neste resultado, portanto, demonstraremos para a p-norma:

Demonstração:

Primeiramente, note que tal ínfimo sempre existe, pois $\{||f - h|| : h \in U\}$ é limitado inferiormente.
Pela definição de ínfimo, é possível encontrar $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ tal que:

$$\lim_{n \to \infty} ||f - h_n|| = \inf_{h \in U} ||f - h||,$$

deste modo, é fácil ver que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, pois:

$$||h_n||^p = ||h_n + f - f||^p \leq ||f||^p + ||h_n - f||^p.$$

Portanto $(h_n)_n$ é uma sequência limitada no subespaço U de dimensão finita, isto é, existe $(h_{n_k})_k$ uma subsequência que converge a $g \in \mathbb{X}$ (pois o operador identidade $id : U \to U$é compacto). Mais do que isso, veja que

$$||f - g||^p \leq ||f - h_{n_k}||^p + ||h_{n_k} - g||^p \leq ||f - g||^p + ||g - h_{n_k}|| + ||h_{n_k} - g||,$$

tomando o limite quando k tende ao infinito na desigualdade acima, e usando que $\lim\limits_{k \to \infty} ||h_{n_k} - g|| = 0$, temos

$$||f - g||^p \leq ||f - h_{n_k}||^p \leq ||f - g||^p.$$

Assim, da unicidade do limite resulta que

$$\inf_{h \in U} ||f - h|| = \lim_{n \to \infty} ||f - h_n|| = \lim_{k \to \infty} ||f - h_{n_k}|| = ||f - g||$$

e portanto $g \in U$, como queríamos. $\square$

1.6 Espaço dual e teoria espectral

Nesta seção introduziremos o conceito de dual de um espaço quase-normado, mergulho canônico, injeção canônica além de alguns exemplos de duais muito interessantes. Também introduziremos algumas poucas definições a respeito de teoria espectral nesses espaços.

Definição 1.33. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço quase-normado e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ um corpo. Definimos o dual de $\mathbb{X}$ e denotamos por $\mathbb{X}'$ o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos partindo de $\mathbb{X}$ e chegando em $\mathbb{K}$, isto é,*

$$\mathbb{X}' := \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{K}); f \textit{ é linear e contínua}\}.$$

Observação 1.34. *É fácil ver que apesar de $\mathbb{X}$ ser quase-normado, $\mathbb{X}'$ é um espaço vetorial normado, munido com $||f|| = \sup_{x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}}\{|f(x)|\}$.*
De fato, dados $f, g \in \mathbb{X}'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$||f + g|| = \sup_{x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}}\{|f(x) + g(x)|\} \leq \sup_{x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}}\{|f(x)|\} + \sup_{x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}}\{|g(x)|\} = ||f|| + ||g||.$$

Mais do que isso, como o caso linear, podemos mostrar que de fato $\mathbb{X}'$ é Banach. Isso recai diretamente sobre o fato de $\mathbb{K}$ ser um corpo.

Apesar de todas essas coincidências com o caso normado, um fato curioso quando estamos analisando espaços quase-Banach é que nem sempre conseguimos garantir que tal espaço é diferente do trivial ($\mathbb{X}' = \{0\}$), isso nos faz perdermos algumas propriedades porém torna nosso estudo ainda mais rico. Os próximos exemplos foram retirados do livro "An F sampler", [15] que faz um estudo aprofundado sobre o tema.

Exemplo 1.35. *Um exemplo curioso de dual de espaço quase-Banach é quando olhamos para ℓ_p, para $0 < p \leq 1$. É fato sabido em análise funcional que quando $p = 1$, o dual de ℓ_p é isométrico a ℓ_∞, porém isso se mantém quando variamos p em $(0, 1]$, isto é,*

$$(\ell_p, ||.||_p)' \cong (\ell_\infty, ||.||_\infty) \textit{ para todo } p \in (0, 1].$$

A demonstração desse fato encontra-se em [15, Theo. 2.3.],

Exemplo 1.36. *Considere $(L^p, ||.||_p)$ como definindo no 1.13, e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. É possível mostrar que $(L^p)'$ tem dual trivial.*

Isso ocorre por que a medida de Lebesgue μ dos subconjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ não possui átomos. Esse exemplo encontra-se demonstrado com os devidos detalhes em [15, Theo. 2.2.].

Definição 1.37. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço quase-Banach. Definimos a injeção canônica de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{X}'' = (\mathbb{X}')'$ como:*

$$\begin{array}{rcl} k_{\mathbb{X}}: \mathbb{X} & \longmapsto & \mathbb{X}'' \\ x & \longmapsto & k_{\mathbb{X}}x: \ \mathbb{X}' \longmapsto \ \mathbb{R} \\ & & \qquad\quad f \longmapsto \ k_{\mathbb{X}}x(f) = f(x). \end{array} \tag{1.6}$$

Vemos facilmente que como no caso Banach, $k_{\mathbb{X}}$ além de ser um operador linear contínuo é também um isomorfismo entre $\mathbb{X}$ e $k_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$. O que não coneguimos garantir em geral é que tal aplicação é isometria (entre $\mathbb{X}$ e $k_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$), isso se dá pelo fato de que não possuímos um análogo para o Teorema de Hanh-Banach para Quase-Normas. O que sempre vale é $||k_{\mathbb{X}}x|| \leq ||x||$, pois

$$||k_{\mathbb{X}}x|| = \sup_{f\in\overline{B}_{\mathbb{X}'}} ||k_{\mathbb{X}}x(f)|| = \sup_{f\in\overline{B}_{\mathbb{X}'}} ||f(x)|| \leq \sup_{f\in\overline{B}_{\mathbb{X}'}} ||f||.||x|| = ||x||.$$

Disso, segue também que $||k_{\mathbb{X}}|| \leq 1$.

Definição 1.38. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço quase-Banach, definimos o mergulho canônico de $(\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$ no espaço $(\ell_\infty(\overline{B}_{\mathbb{X}'}), ||.||_\infty)$ como:*

$$\begin{array}{rl} J_{\mathbb{X}}: \ \mathbb{X} & \to (\ell_\infty(\overline{B}_{\mathbb{X}'}), ||.||_\infty) \\ x & \to J_{\mathbb{X}}x = (f(x))_{f\in\overline{B}_{\mathbb{X}'}}. \end{array} \tag{1.7}$$

É fácil ver que tal aplicação é linear e contínua, e está fortemente ligada a injeção canônica. Mais que isso, podemos provar que

$$||J_{\mathbb{X}}|| = \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{X}}} ||J_{\mathbb{X}}x||_{\ell_\infty(\overline{B}_{\mathbb{X}'})} = \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{X}}} ||(f(x))_{f\in\overline{B}_{\mathbb{X}'}}||_{\ell_\infty(\overline{B}_{\mathbb{X}'})} = \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{X}}} \sup_{f\in\overline{B}_{\mathbb{X}'}} |f(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{X}}} \sup_{f\in\overline{B}_{\mathbb{X}'}} ||f||.||x|| = \sup_{f\in\overline{B}_{\mathbb{X}'}} ||f|| = 1. \tag{1.8}$$

Isto é, $||J_{\mathbb{X}}|| \leq 1$. Veja que no caso de $\mathbb{X}$ ser Banach, novamente pelo Teorema de Hahn-Banach, temos a igualdade, pois

$$||J_{\mathbb{X}}x||_{\ell_\infty(\overline{B}_{\mathbb{X}'})} = \sup_{f\in\overline{B}_{\mathbb{X}'}} |f(x)| = ||x||. \tag{1.9}$$

Introduziremos agora alguns conceitos de teoria Espectral sobre espaços quase-Banach. Esses conceitos são essenciais para mostrar algumas conexões entre autovalores e números de entropia. No texto não os usaremos diretamente, mas os apresentaremos a fim de ter coerência com o proposto no começo do capítulo.

Definição 1.39. *Seja* $\mathbb{X}$ *um espaço quase-Banach complexo e* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ *então definimos:*
(i) $\varrho := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (T - \lambda id_{\mathbb{X}})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{X})\}$ *o resolvente de* T.
(ii) $\sigma(T) := \mathbb{C} - \varrho$ *o espectro de* T.
(iii) λ *é um autovalor de* T *se existir um elemento não nulo* $x \in \mathbb{X}$ *onde* $Tx = \lambda x$.
(iv) $r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}$ *o raio espectral.*

Proposição 1.40. *Seja* $\mathbb{X}$ *um espaço quase-Banach complexo e* $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. *O espectro* $\sigma(T)$ *consiste apenas de* 0 *e uma sequência enumerável (ou finita) de autovalores de* T *com multiplicidade finita e que tende a zero.*

$$\sigma(T) = \{0\} \bigcup \{(\lambda_n)_n \subset \mathbb{C};\ \lambda_n \neq 0 \ \ \textit{é} \ \ \textit{autovalor} \ \ \textit{de} \ \ T, \ \ dim(ker(T - \lambda_n id)) < \infty\}.$$

Mais do que isso, é possível mostrar que essa sequência (renumerando caso necessário) cumpre

$$|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq ... \geq 0.$$

A demonstração desse fato encontra-se com todos os detalhes no livro "Function Spaces, Entropy Numbers and Differential Operators" [8, Sec. 1.2.].

Capítulo 2

s-Números em Espaços Quase-Banach

Nesse capítulo definiremos o conceito de s-números relativos à um operador linear limitado entre espaços quase-Banach e apresentaremos alguns desses números, que serão o foco do nosso estudo. Esse conceito foi introdzido e estudado por Albrecht Pietsch no contexto de ideais de operadores, sequências de Lorentz, e como teoria axiomática, em espaços de Banach, com a contribuição principalmente de Carl, e no contexto de espaços quase-Banach por Edmunds e Tribel.

Entre outras aplicações, nessa teoria buscamos relacionar sequências de números positivos $(s_n)_n \subset \mathbb{R}$ a um operador linear limitado, de modo que, essa sequência tenda a zero quando o operador for compacto, isto é, em um certo sentido, consigamos medir o quanto um operador não é compacto.

Com o passar do tempo, descobriu-se muitas propriedades que estas sequências de números possuem, e nosso foco é fazer um estudo dessas propriedades, assim como o encontrado em [12] e [8], para o caso quase-Banach.

Definição 2.1. *($s-$Números). Sejam $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ e $\mathbb{W}$ espaços quase-Banach e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. A regra $s : T \to (s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ que associa a cada operdador T uma sequência de números $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ não negativos é chamada de sequência de s-números se gozar das seguintes propriedades:*

(M_s) *Monotonicidade: $||T|| = s_1(T) \geq s_2(T) \geq ... \geq 0$;*

(A_s) *Aditividade: $s_{m+n-1}(S+T) \leq C_{\mathbb{Y}}(s_m(S) + s_n(T))$, para todo $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, onde $C_{\mathbb{Y}}$ é a constante do espaço quase-Banach $\mathbb{Y}$;*

(S_s) *Propriedade de Ideal: $s_n(RTU) \leq ||R|| s_n(T) ||U||$, para todo $U \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{X})$, $R \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ e $n \in \mathbb{N}$;*

(R_s) *Propriedade de Posto: $posto(T) < n \Rightarrow s_n(T) = 0$;*

(I_s) *Propriedade de Norma:* $s_n(id) = 1$, *onde* $id : \ell_2^n \to \ell_2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Uma sequência de s-números é dita multiplicativa, ou possuir a produto (P_s) *se cumprir*

(P_s) $s_{m+n-1}(RT) \leq s_m(R)s_n(T)$ *para todo* $R \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ *e* $m, n \in \mathbb{N}$.

Além disso, se o espaço de chegada $\mathbb{Y}$ *for p-Banach, podemos definir uma propriedade análoga a aditividade, que chamaremos* $(A_e)'$.

$(A_s)'$ $e_{m+n-1}(S+T)^p \leq s_m(S)^p + s_n(T)^p$.

Observação 2.2. *Se uma sequência* $s_n(T)$ *cumprir* M_s *e* P_s *então também cumpre* S_s.

Demonstração: Considere $U \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{X})$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $R \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$. Usando P_s para o operador RTU duas vezes temos:

$$s_n(RTU) \leq s_{n+1-1}(RTU) \leq s_n(RT)s_1(U) = s_{n+1-1}(RT)s_1(U) \leq s_1(R)s_n(T)s_1(U).$$

Usando agora M_s para $s_1(R)$ e $s_1(U)$ segue o resultado. Perceba que a condição $s_1(T) = ||T||$ é suficiente, porém não é necessária, pois precisamos da desigualdade $s_1(T) \leq ||T||$. □

Muitas vezes, como abuso de linguagem, nos referimos a apenas um número dessa sequência, ou a sequência toda pelo mesmo nome, mas fica claro o contexto e não há ambiguidade nisso.

2.1 Números de entropia

Definição 2.3. *Sejam* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *dois espaços quase-Banach,* $n \in \mathbb{N}$ *um número natural e* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. *Nós definimos o n-ésimo número de entropia, relativo ao operador* T *como*

$$e_n(T) := \inf \left\{ \varepsilon > 0; \exists y_1, y_2, \cdots, y_{2^{n-1}} \in \mathbb{Y}; T(\overline{B}_{\mathbb{X}}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \{y_i + \varepsilon \overline{B}_{\mathbb{Y}}\} \right\}.$$

Essa definição é baseada na noção de entropia de um subconjunto compacto K *de um espaço métrico, que Kolmogorov introduziu nos anos 1930. A idéia era que dado* $\varepsilon > 0$, *estudar o número mínimo necessário* $N = N_\varepsilon$ *de bolas centradas em alguns elentos de* K, *a fim de cobrir K. Podemos definir os números de entropia de um subconjunto qualquer A de $\mathbb{X}$ da seguinte forma:*

$$e_n(A,\mathbb{X}) := \inf\left\{\varepsilon > 0; \exists x_1, x_2, \cdots, x_{2^{n-1}} \in \mathbb{X}; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \{x_i + \varepsilon \overline{B_{\mathbb{X}}}\}\right\}.$$

Podemos ver facilmente que $e_n(T) = e_n(T(\overline{B_{\mathbb{X}}}, \mathbb{Y}))$.

Veremos que os números de entropia não são s-números, porém provaremos que estes possuem uma relação com compacidade de operadores, além de propriedades muito interessantes. Esses números, além de ter sido historicamente um dos primeiros a serem introduzidos, desempenham papel importante em algumas estimativas, principalmente na desigualdade de Carl.

Teorema 2.4. *(Propriedades de $e_n(T)$). Sejam $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{W}$ espaços quase-Banach com constantes $C_{\mathbb{X}}, C_{\mathbb{Y}}, C_{\mathbb{W}}$ respectivamente. Dados $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ e m, n números naturais, temos as seguintes propriedades:*

(M_e) $C_{\mathbb{Y}} e_1(T) \geq ||T|| \geq e_1(T) \geq e_2(T) \geq ... \geq 0$;

(A_e) $e_{m+n-1}(S+T) \leq C_{\mathbb{Y}}(e_m(S) + e_n(T))$, *para todo* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$;

$(A_e)'$ *Se em adição $\mathbb{Y}$ for p-Banach, temos para todo $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*
$e_{m+n-1}(S+T)^p \leq e_m(S)^p + e_n(T)^p$;

(P_e) $e_{m+n-1}(ST) \leq e_m(S)e_n(T)$ *para todo* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$.

Demonstração: Com efeito, para (M_e) note que $T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset ||T||\overline{B_{\mathbb{Y}}}$, pois T é linear e $||x|| \leq 1$, então

$$||T(x)|| \leq ||T||||x|| \leq ||T||.$$

Daí, resulta que $T(B_X) \subset \{0 + ||T||\overline{B_{\mathbb{Y}}}\}$. Por propriedade de ínfimo, tomando $y_1 = 0$ na definição de $e_1(T)$, temos que $e_1(T) \leq ||T||$.

Usando novamente tal propriedade de ínfimo, como $\#\{y_1, y_2, ..., y_n\} < \#\{y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}\}$, temos

$$e_n(T) \geq e_{n+1}(T).$$

Resta apenas mostrar que $||T|| \leq C_{\mathbb{Y}} e_1(T)$. Para isso, tome $\varepsilon > e_1(T) \geq 0$ e veja que $T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subseteq \{y_1 + \varepsilon\overline{B_{\mathbb{Y}}}\}$. Logo, dado $x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}$, exite $n_1 \in \overline{B_{\mathbb{Y}}}$, tal que, $T(x) = y_1 + \varepsilon n_1$.

Analogamente,

$$T(-x) = -T(x) = y_1 + \varepsilon n_2, \ com\ n_2 \in \overline{B_{\mathbb{Y}}},$$

de onde resulta

$$2T(x) = T(x) - T(-x) = \varepsilon(n_1 - n_2), \text{ então } T(x) = \frac{\varepsilon}{2}(n_1 - n_2).$$

Assim,

$$||T(x)|| \leq \frac{\varepsilon}{2}||(n_1 - n_2)|| \leq \frac{C_{\mathbb{Y}}\varepsilon}{2}(||n_1|| + ||n_2||) \leq \frac{C_{\mathbb{Y}}\varepsilon}{2}(2) = C_{\mathbb{Y}}\varepsilon.$$

Note que tal desigualdade vale sempre que $||x|| \leq 1$. Tomando o supremo com $||x|| \leq 1$ na desigualdade acima e o ínfimo em ϵ, tal que $e_1(T) \leq \epsilon$ segue o resultado.

$$||T|| \leq C_{\mathbb{Y}} e_1(T).$$

Para demonstrar a aditividade (A_e), tome $\lambda > e_n(T) \geq 0$ e $\mu > e_m(S) \geq 0$. Por definição destes números, exitem $y_1, y_2, ..., y_N,\ z_1, z_2, .., z_M.$, tais que:

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{i=1}^{N}\{y_i + \lambda\overline{B_{\mathbb{Y}}}\} \quad e \quad S(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{j=1}^{M}\{z_j + \mu\overline{B_{\mathbb{Y}}}\},$$

para $N = 2^{n-1}$ e $M = 2^{m-1}$.

Como na propriedade anterior, podemos encontrar n_i, n'_j, tais que

$$T(x) = y_i + \lambda n_i \ e\ S(x) = z_j + \mu n'_j,$$

onde $n_i, n'_j \in \overline{B_{\mathbb{Y}}},\ \forall i = 1, 2, ..., N$ e $j = 1, 2, ..., M$, e $||x|| \leq 1$.

Note primeiramente que

$$||\lambda n_i + \mu n'_j|| \leq C_{\mathbb{Y}}(\lambda||n_i|| + \mu||n'_j||) \leq C_{\mathbb{Y}}(\lambda + \mu) \ \rightarrow \lambda n_i + \mu n'_j \in C_{\mathbb{Y}}(\lambda + \mu)\overline{B_{\mathbb{X}}}. \quad (2.1)$$

Por outro lado,

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x) = \{y_i + z_j + \lambda n_i + \mu n'_j\},$$

assim

$$(S + T)(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{j=1}^{M}\{y_i + z_j + C_{\mathbb{Y}}(\lambda + \mu)\overline{B_{\mathbb{Y}}}\} \quad (2.2)$$

Agora, note que $\#\{y_i+z_j, 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq M\} \leq N.M = 2^{n-1}.2^{m-1} = 2^{(m+n-1)-1}$. Daí, segue que:

$$C_{\mathbb{Y}}(\lambda+\mu) \in \{\varepsilon : \exists x_1, x_2, ..., x_{2^{m+n-1}} : (S+T)(\overline{B_{\mathbb{X}}})\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N+M} \{x_i + \varepsilon \overline{B_{\mathbb{Y}}}\}.$$

De onde, $e_{m+n-1}(S+T) \leq C_{\mathbb{Y}}(\lambda+\mu)$. Tomando o ínfimo dos valores de λ e μ que cumprem tal desigualdade, segue o resultado. $e_{m+n-1}(S+T) \leq C_{\mathbb{Y}}(e_m + e_n)$.

Na desigualdade análoga $(A_e)'$ para p-norma $(||.||_p)$, observe que o racicínio é o mesmo, observando apenas que em (2.1) temos a desigualdade p-triangular:

$$||\lambda n_i + \mu n'_j||_p^p \leq ||\lambda n_i||_p^p + ||\mu n'_j||_p^p \leq (\lambda^p + \mu^p) \text{ então, } ||\lambda n_i + \mu n'_j||_p \leq (\lambda^p + \mu^p)^{1/p}.$$

E, analogamente a (2.2) temos:

$$(S+T)(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{M} \{y_i + z_j + (\lambda^p + \mu^p)^{1/p} \overline{B_{\mathbb{Y}}}\},$$

concluindo que

$$(e_{m+n-1}(S+T))^p \leq (e_m(S))^p + (e_n(T))^p.$$

Para Multiplicidade (P_e), a ideia novamente, é tomar $\lambda > e_n(T) \geq 0$ e $\mu > e_m(S) \geq 0$. Então existem $y_1, y_2, ..., y_N,\ z_1, z_2, .., z_M.$, tais que:

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} \{y_i + \lambda \overline{B_{\mathbb{Y}}}\} \quad e \quad S(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{j=1}^{M} \{z_j + \mu \overline{B_{\mathbb{W}}}\},$$

para $N = 2^{n-1}$ e $M = 2^{m-1}$. Assim,

$$S(T(\overline{B_{\mathbb{X}}})) \subset S(\bigcup_{i=1}^{N} \{y_i + \lambda \overline{B_{\mathbb{Y}}}\}) = \bigcup_{i=1}^{N} \{S(y_i) + S(\lambda \overline{B_{\mathbb{Y}}})\} =$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \{S(y_i) + \lambda S(\overline{B_{\mathbb{Y}}})\} = \bigcup_{i=1}^{N} \{S(y_i) + \lambda \bigcup_{j=1}^{M} \{z_j + \mu \overline{B_{\mathbb{W}}}\}\} =$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{M} \{S(y_i) + \lambda z_j + \lambda\mu \overline{B_{\mathbb{W}}}\}.$$

Como,

$$\#\{S(y_i) + \lambda z_j : 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq M\} \leq 2^{(n+m-1)-1},$$

temos que

$$\lambda\mu \in \{\varepsilon : \exists x_1, x_2, ..., x_{2^{m+n-1}} : (ST)(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N+M} \{x_i + \varepsilon\overline{B_{\mathbb{W}}}\}\},$$

de onde $e_{m+n-1}(ST) \leq \lambda\mu$. Tomando o ínfimo dos valores de λ e μ que cumprem tal desiguadade, chegamos no desejado $e_{m+n-1}(ST) \leq e_m(S)e_n(T)$. □

2.2 Números de aproximação

Os números de aproximação são os primeiros s-números que estudaremos. A definição dada aqui é apenas uma generalização do caso em que T é um operador entre espaços de Banach. Mostraremos, assim como Edmunds e Triebel em [8] e Gerhold em [12] que se mantém a maioria das propriedades interessantes.

Definição 2.5. *Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dois espaços quase-Banach, $n \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Definimos o n-ésimo número de aproximação do operador T como*

$$a_n(T) := \inf\{||T - S|| : S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}),\ posto(S) < n\}.$$

Intuitivamente, vemos que em um certo sentido estamos pensando em aproximar um um operador T por operadores de posto finito e "medindo" essa distância através do ínfimo. Essa definição nos permite uma relação estrita com compacidade como veremos mais adiante.

Teorema 2.6. *Propriedades de $a_n(T)$. Sejam $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ e $\mathbb{W}$ espaços quase-Banach com constantes $C_{\mathbb{X}}, C_{\mathbb{Y}}, C_{\mathbb{W}}$, respectivamente. Dados $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{W})$ e m, n números naturais, valem as seguintes propriedades:*

(M_a) $||T|| = a_1(T) \geq a_2(T) \geq ... \geq 0$;

(A_a) $a_{m+n-1}(S + T) \leq C_{\mathbb{Y}}(a_m(S) + a_n(T))$, para todo $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$;

$(A_a)'$ Se em adição, $\mathbb{Y}$ for p-Banach temos para todo $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,
$a_{m+n-1}(S + T)^p \leq a_m(S)^p + a_n(T)^p$;

(P_a) $a_{m+n-1}(ST) \leq a_m(S)a_n(T)$, para todo $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$;

(R_a) $posto(T) < n \Rightarrow a_n(T) = 0$;

(N_a) $dim(\mathbb{X}) \geq n \Rightarrow a_n(id_{\mathbb{X}}) = 1.$

Demonstração: Para a monotonicidade (M_a) veja que

$a_1(T) = ||T||$, pois a única transformação linear S, com $posto(S) < 1$ é a transformação identicamente nula $S = 0$, assim:

$$a_1(T) = inf\{||T - S|| : S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), posto(S) < 1\} = \inf\{||T||\} = ||T||.$$

Para mostrar que $a_n(T) \geq a_{n+1}(T), \forall n \in \mathbb{N}$ basta ver que

$$\{S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), posto(S) < n\} \subset \{S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), posto(S) < n + 1\},$$

de onde segue a desigualdade.

A aditividade dos números de aproximação segue do fato que dados $\lambda > a_n(T) \geq 0$ e $\mu > a_m(S) \geq 0$, segue da definição de ínfimo, existem $L, R \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, com $posto(L) < n$ e $posto(R) < m$ que cumprem:

$$||T - L|| < \lambda \ e \ ||S - R|| < \mu.$$

Defina $M = L + R$, que obviamente é linear e contínua.

Como $posto(L) < n$ e $n \in \mathbb{N}$, então $posto(L) \leq n - 1$. O mesmo, vale para R, isto é, $posto(R) \leq m - 1$, de onde, $posto(M) \leq n - 1 + m - 1$, isto é, $posto(M) < n + m - 1$.

Veja que, dado $x \in X$ com $||x|| = 1$,

$$||(S+T-M)(x)|| = ||(S+T-L-M)(x)|| \leq C_{\mathbb{Y}}(||(S-M)(x)||+||(T-L)(x)||) < C_{\mathbb{Y}}(\lambda+\mu). \tag{2.3}$$

Tomando então, $sup_{||x||=1}$ nesta desigualdade, segue:

$$||S + T - M|| = \sup_{||x||=1} ||(S + T - M)(x)|| \leq C_{\mathbb{Y}}(\lambda + \mu).$$

Como

$$\{M = L + R \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), posto(M) < n\} \subset \{M \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), posto(M) < n\}.$$

tomando o ínfimo no lado esquerdo dessa desigualdade, segue que

$$a_{m+n-1}(S + T) \leq C_{\mathbb{Y}}(\lambda + \mu).$$

Tomando agora o ínfimo dos valores de λ e μ, obtemos o resultado desejado.

Para o caso em que $\mathbb{Y}$ for também p-Banach, o raciocínio é o mesmo, porém a desigualdade em (2.3), é substituida pela $p-$ triangular

$$||(S+T-M)(x)||^p = ||(S+T-L-M)(x)||^p \leq$$

$$||(S-M)(x)||^p + ||(T-L)(x)||^p < (\lambda)^p + (\mu)^p \text{ então } ||(S+T-M)(x)|| < (\lambda^p + \mu^p)^{1/p}.$$

Tomando novamente, o supremo de x, com $||x|| = 1$ e depois o ínfimo dos valores de λ e μ, segue o resultado.

$$a_{m+n-1}(S+T)^p \leq a_m(T)^p + a_n(S)^p.$$

Para (P_a), seja $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{W})$, tome, $\lambda > a_n(T)$ e $\mu > a_m(S)$. Então, existem $L \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $R \in \mathcal{L}(Y, W)$, com $posto(L) < n$ e $posto(R) < m$ que cumprem:

$$||T-L|| < \lambda \ e \ ||S-R|| < \mu.$$

Defina $M = RT + SL - RL$, e note que $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{W})$, pois é composição e soma de tranformações lineares contínuas. Dado $||x|| = 1$,

$$||(ST-M)(x)|| = ||(ST-RT-SL+RL)(x)|| = ||(S-R)(T-L)(x)||$$

$$\leq ||(S-R)||||(T-L)(x)|| \leq ||(S-R)||||(T-L)||||x||$$

$$\leq ||(S-R)||||(T-L)|| < \lambda\mu.$$

Tomando então, o supremo com $||x|| = 1$ nesta desigualdade, segue

$$||(ST-M)|| \leq \lambda\mu.$$

Por outro lado, note que $posto(SL) \leq posto(L)$, pois $dim(L(X)) < n$, e do fato de S ser linear, $dim(S(L(X)))$ é no máximo $n-1$. Analogamente, $posto(R(T-L)) \leq posto(R)$. Disto, sai diretamente que $posto(M) < n+m-1$, e como

$$\{M = L+R \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{W}), posto(M) < m+n-1\} \subset \{M : M \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{W}), posto(M) < m+n-1\},$$

temos,

$$a_{m+n-1}(ST) \leq \inf\{||(ST - M)|| : M = L + R \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{W}),\ posto(M) < m + n - 1\} \leq \lambda\mu.$$

Tomando o ínfimo dos valores λ e μ que cumprem tal desigualdade, segue o resultado:

$$a_{m+n-1}(ST) \leq a_m(T)a_n(S).$$

Já a propriedade (R_a) sai imediatamente do fato que se $posto(T) < n$, aplicando o ínfimo e lembrando da que $a_n(T) \geq 0$, logo

$$a_n(T) \leq inf\{||T - S||, S = T\} = 0.$$

Veja primeiramente que a propriedade de norma N_a é mais geral que a propriedade de norma de s-números I_s. Para demonstrá-la, usando (M_a), temos que $||T|| = a_1(T) \geq a_2 \geq ... \geq a_n(T)$ e lembrando que $||I|| = 1$, temos que $a_n \leq 1\ \forall n \in N$.

Por outro lado, dado $L \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ e $posto(L) < n$, do fato que $dim(X) \geq n$, existe $x_0 \in X$, com $x_0 \neq 0$ tal que $L(x_0) = 0$. (Pois se não fosse assim, L seria injetiva, e consequentemente $posto(L) \geq n$).

Defina $x = \frac{x_0}{||x_0||}$ e note que

$$1 = ||x|| = ||x - L(x)|| = ||(I - L)(x)|| = \sup_{y=x} ||(I - L)(x)|| \leq \sup_{||y|| \leq 1} ||(I - L)(y)||.$$

Tomando então o ínfimo destes valores, com $posto(L) < n$ temos:

$$1 \leq inf\{||(I - L)||\} = a_n(I),$$

o que mostra a desigualdade faltante.

$\square$

Corolário 2.7. *Consideremos T um operador linear e contínuo entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$. Então $(a_n(T))_n$ é uma sequência de s-números multiplicativos.*

A demonstração desse fato é corolário imediato do Teorema 2.6, da Observação 2.2 e vendo que N_a implica em I_a.

2.3 Números de Kolmogorov

Os números de Kolmogorov foram introduzidos como uma medida de diâmetro de conjuntos. Posteriormente, tanto Kolmogorov quanto Pietsch estudaram tais números no contexto de operadores lineares contínuos entre espaços de Banach, mostrando assim suas relações com a compacidade.

Motivados pela definição inicial de Kolmogorov relativa a conjuntos, apresentaremos aqui uma definição de números de Kolmogorov da bola unitária fechada.

Definição 2.8. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço quase-Banach, $\overline{B_{\mathbb{X}}}$ sua bola unitária e $n \in \mathbb{N}$ e $A \subset \mathbb{X}$. Definimos o n-ésimo número de Kolmogorov do conjunto $\overline{B_{\mathbb{X}}}$ em $\mathbb{X}$ como:*

$$d_n(\overline{B_{\mathbb{X}}}, \mathbb{X}) := \inf_{\substack{U_n \subset \mathbb{Y} \\ \dim(U_n) < n}} \sup_{x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y \in U_n} ||x - y||_{\mathbb{X}}.$$

Observação 2.9. . *Antes de falarmos de operadores, é possível demonstrar que se $\mathbb{X}$ um espaço quase-Banach, com $dim(X) \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$d_k(\overline{B_{\mathbb{X}}}, \mathbb{X}) = 1, \quad para \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Demonstração: Primeiramente note que

$$d_{n+1}(\overline{B_{\mathbb{X}}}, X) \leq d_n(\overline{B_{\mathbb{X}}}, X),$$

pois por propriedade de ínfimo

$$d_n(\overline{B_{\mathbb{X}}}, X) = \inf_{\substack{U_n \subset \mathbb{Y} \\ \dim(U_n) < n}} \sup_{x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y \in U_n} ||x - y|| \geq$$

$$\inf_{\substack{U_{n+1} \subset \mathbb{Y} \\ \dim(U_n) < n+1}} \sup_{x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y \in U_n} ||x - y|| = d_{n+1}(\overline{B_{\mathbb{X}}}, X).$$

Logo, $d_n(\overline{B_{\mathbb{X}}}, X) \geq d_{n+1}(\overline{B_{\mathbb{X}}}, \mathbb{X})$.

Por outro lado, $d_1(\overline{B_{\mathbb{X}}}, \mathbb{X}) = 1$.

Como $dim(U_1) < 1$, temos que $U_1 = \{0\}$ é o espaço trivial, e portanto,

$$d_1(\overline{B_{\mathbb{X}}}, X) = \sup_{x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y \in U_1} ||x - y|| = \sup_{x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}} ||x|| = 1.$$

Usando esses dois resultamos, temos

$$d_n(\overline{B_{\mathbb{X}}}, X) \leq d_1(\overline{B_{\mathbb{X}}}, X) = 1. \tag{2.4}$$

Para provar a desigualdade oposta, vamos provar que para todo subespaço $U_n \subset X$, com $dim(U_n) < n$ existe $x_n \in X$ e $x \neq 0$ tal que

$$\inf_{y \in U_N} ||y - x_n|| = ||x||.$$

Como $dim(X) \geq n$, dado $U_n \subset X$, sempre é possível tomar $a \in X - U_n$ pois $dim(U_n) \leq n$. Pelo Teorema 1.32, sempre é possível encontrar $y_n \in U_n$ tal que:

$$\inf_{u \in U_N} ||a - u|| = ||a - y_n|| > 0.$$

Defina $x_n = \frac{a - y_n}{||a - y_n||}$ e $u - y_n = y \in U_n$. Portanto:

$$1 = ||x|| = ||a - y_n|| = \inf_{u \in U_n} ||a - u|| = \inf_{u \in U_n} ||a - y_n - (u - y_n)|| = \inf_{u \in U_n} ||x_n - y|| = \inf_{y_n \in U_n} ||x_n - y||.$$

Do fato que U_n é espaço vetorial, variar u ou variar y tanto faz, pois todos os valores são alcançados, assim temos

$$\sup_{x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y \in U_n} ||x - y|| \geq \inf_{y \in U_n} ||x - y|| \geq \inf_{y = x_n} ||x - y|| = ||x_n|| = 1,$$

onde na desigualdade acima, tomamos $||x|| = 1$. Aplicando o ínfimo de todos U_n com $dim(U_n) < n$ nesta desigualdade, segue o resultado. □

Definição 2.10. *Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços quase-Banach, $n \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Nós definimos o n-ésimo número de Kolmogorov do operador T como*

$$d_n(T) := \inf_{\substack{U_n \subset \mathbb{Y} \\ \dim(U_n) < n}} \sup_{x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y \in U_n} ||Tx - y||_{\mathbb{Y}}.$$

Teorema 2.11. *Dados $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ e $\mathbb{W}$ espaços quase-Banach, com constantes $C_{\mathbb{X}}, C_{\mathbb{Y}}, C_{\mathbb{W}}$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ e $m, n \in \mathbb{N}$ valem as seguintes propriedades para os números de Kolmogorov.*

(M_d) $||T|| = d_1(T) \geq d_2(T) \geq ... \geq 0$;

(A_d) $d_{m+n-1}(S + T) \leq C_{\mathbb{Y}}(d_m(S) + d_n(T))$, *para todo* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

$(A_d)'$ *Se em adição, $\mathbb{Y}$ for p-Banach temos para todo* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$
$d_{m+n-1}(S + T)^p \leq d_m(S)^p + d_n(T)^p$;

(P_d) $d_{m+n-1}(ST) \leq d_m(S) d_n(T)$ *para todo* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$;

(R_d) *posto*$(T) < n \Rightarrow d_n(T) = 0$;

(N_d) $dim(\mathbb{X}) \geq n \to d_n(id_{\mathbb{X}}) = 1$.

Demonstração: A Monotonicidade (M_d), sai imediatamente da obervação (2.9), apenas usando que $d_n(T(\overline{B_{\mathbb{X}}}), X) = d_n(T)$.

Em (A_d), dado $\varepsilon > 0$, da definição do números de Kolmogorov de T e S, existem U_n e U_m, com $dim(U_n) < n$ e $dim(U_m) < m$, tais que:

$$\sup_{||x||\leq 1} \inf_{y\in U_n} ||T(x) - y|| < d_n(T) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Note, que mantendo $||x|| = 1$, temos:

$$\inf_{y\in U_n} ||T(x) - y|| \leq \sup_{||x||\leq 1} \inf_{y\in U_n} ||T(x) - y|| < d_n(T) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

de onde, existe $v_n^x \in U_n$ tal que

$$||T(x) - v_n^x|| < d_n(T) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d_n(T) + \varepsilon.$$

O mesmo vale para S, isto é, dado $\varepsilon > 0$ e, para todo x, $||x|| \leq 1$, existe $u_m^x \in U_m$, tal que:

$$||S(x) - u_m^x|| < d_m(T) + \varepsilon.$$

Denote $W_{m,n} = \{x + y : x \in U_n \ e \ y \in U_m\}$, de onde $dim(W_{m,n}) < m + n - 1$.

Defina $w_{m,n}^x = u_m^x + v_n^x$ e, se $||x|| \leq 1$, temos:

$$||(S+T)x - w_{m,n}^x|| = ||Sx + Tx - u_m^x + v_n^x|| \leq C_{\mathbb{Y}}(||Sx - u_m^x|| + ||Tx + v_n^x||) \leq C_{\mathbb{Y}}(d_n(T) + d_m(S) + 2\varepsilon). \tag{2.5}$$

Tomando o ínfimo destes valores, temos:

$$\inf_{w_{m,n}^x \ \in \ W_{m,n}} ||(S+T)x - w_{m,n}^x|| \leq C_{\mathbb{Y}}(d_n(T) + d_m(S) + 2\varepsilon),$$

tomando o supremo com $||x|| = 1$ e o ínfimo em todos os U_{m+n-1}, com $dim(U_{m+n-1}) \leq$

$m+n-1$ e vendo que $W_{m,n} \subset \{U_{m+n-1}; dim(U_{m+n-1}) \leq m+n-1\}$ segue,

$$\begin{aligned} d_{m+n-1}(S+T) &= \inf_{U_{m+n-1}} \sup_{||x||\leq 1} \inf_{y\in U_{m+n-1}} ||(S+T)x-y|| \\ &\leq \inf_{U_{m+n-1}} \sup_{||x||\leq 1} \inf_{y\in U_{m+n-1}} ||(S+T)x-y|| \\ &\leq \inf_{U_{m+n-1}=W_{m,n}} \sup_{||x||\leq 1} \inf_{w^x_{m,n}\in\ W_{m,n}} ||(S+T)x-w^x_{m,n}|| \\ &\leq C_{\mathbb{Y}}(d_n(T)+d_m(S)+2\varepsilon). \end{aligned}$$

Como isto vale para todo $\varepsilon > 0$, obtemos o resultado.

Caso $\mathbb{Y}$ seja p-Banach, os resultados valem identicamente bastando em (2.5) trocarmos a desigualdade quase-triangular pela p-triangular, resultando em

$$||(ST)x - w^x_{m,n}||^p = ||Sx+Tx-u^x_m+v^x_n||^p \leq ||Sx-u^x_m||^p + ||Tx+v^x_n||^p$$

$$\leq d_n(T)^p + d_m(S)^p + 2\varepsilon,$$

o que conclui a prova de $(A_d)'$.

Para a propriedade de produto (P_d), como em (A_d), dado $\varepsilon > 0$, existe $U_m \subset W, U_n \subset Y$ com $dim(U_m) < m$ e $dim(U_n) < n$ e para todo $x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}$ e $y \in \overline{B_{\mathbb{Y}}}$, existe $u^x_m \in U_m$ e $v^x_n \in U_n$ que cumprem.

$$||Tx - v^x_n|| < d_n(T)+\varepsilon, \quad e \quad ||Sy-u^y_m|| < d_m(S)+\varepsilon,$$

de onde,
$$\left|\left|\frac{Tx-v^x_n}{d_n(T)+\varepsilon}\right|\right| < 1.$$

Defina
$$y = y(x) = \frac{Tx-v^x_n}{d_n(T)+\varepsilon} \in \overline{B_{\mathbb{Y}}} \quad e \quad W_{m,n} = S(V_n)+U_m.$$

que é um subespaço vetorial de W, cuja dimensão é no máximo $m+n-2$, ou seja, $dim(W_{m,n}) < m+n-1$.

Assim, tomando $w^x_{m,n} = Sv^x_n + (d_n(T)+\varepsilon)u^y_m \in W_{m,n}$ temos.

$$\frac{w_{m,n}-Sv^x_n}{d_n(T)+\varepsilon} = -u^y_m,$$

do fato que $y = y(x) \in \overline{B_{\mathbb{Y}}}$, temos:

$$||Sy-u^y_m|| = \left|\left| S\left(\frac{Tx-v^x_n}{d_n(T)+\varepsilon}\right) - \left(\frac{w_{m,n}-Sv^x_n}{d_n(T)+\varepsilon}\right)\right|\right| < d_m(S)+\varepsilon,$$

$$||STx - STv_n^x + Sv_n^x - w_{m,n}|| < (d_m(S) + \varepsilon)(d_n(T) + \varepsilon),$$

logo,

$$|STx - w_{m,n}|| < (d_m(S) + \varepsilon)(d_n(T) + \varepsilon).$$

Note que isto vale para todo x, com $||x|| \leq 1$. Tomando o supremo para $||x|| = 1$ do ínfimo destes valores para $w_{m,n} \in W_{m,n}$, segue que

$$\sup_{||x|| \leq 1} \inf_{w_{m,n} \in W_{m,n}} ||STx - w_{m,n}|| < (d_m(S) + \varepsilon)(d_n(T) + \varepsilon).$$

Do fato que $dim(W_{m,n}) < m + n - 1$, ao tomarmos o ínfimo dos subespçosl U_{m+n-1} e fazendo $\varepsilon \to 0$ segue o resultado

$$d_{m+n-1}(ST) \leq d_m(S) d_n(T).$$

Em (R_d), supondo que $posto(T) < n$, e como $T(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$ sempre é subespaço vetorial cuja dimensão é $R(T) = dim(T(\mathbb{X})) < n$, segue que:

$$\inf_{y \in U_n} ||Tx - y|| \leq \inf_{y \in R(T)} ||Tx - y|| = 0.$$

de onde $d_n(T) = 0$.

Para justificarmos a propriedade multiplicativa (P_d), note que $I(\overline{B_{\mathbb{X}}}) = \overline{B_{\mathbb{X}}}$, e como já foi mostrado na observação 2.9, $d_n(\overline{B_{\mathbb{X}}}, \mathbb{X}) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Basta então relembrar que $d_n(T(\overline{B_{\mathbb{X}}}), \mathbb{X}) = d_n(T)$ que o resultado segue imediatamente. □

Como corolário imediato deste teorema, da observação (2.2) e do fato que assim como N_a, a propriedade N_d implica na propriedade de norma dos números de Kolmogorov (I_d), temos o

Corolário 2.12. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$. Então $(d_n(T))_n$ é uma sequência de s-números multiplicativos.*

Para o caso Banach, existem várias formas de se definir números de Kolmogorov. Mostraremos aqui duas delas, que permanecem equivalentes a dada na definição 2.10 para o caso quase-Banach.

Teorema 2.13. *Sejam $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espaços quase-Banach, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ e $n \in \mathbb{N}$. Então o $n-$ésimo número de Kolmogorov de T pode se expressado de duas novas formas:*

i) $d'_n(T) = \inf\{\varepsilon \ ; \ T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset N_\varepsilon + \varepsilon \overline{B_{\mathbb{Y}}}\}$;

ii) $d''_n(T) = \inf\{||\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}}T||; V \subset \mathbb{Y}, dim(V) < n\}$,

onde N_ε é um subespaço de $\mathbb{Y}$ de dimensão finita menor de que n e $\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}}T$ é a aplicação quociente canônica, que leva cada Tx na classe $[Tx]$ em $\mathbb{Y}/V$.

Demonstração: Para *i)* vamos considerar a $p-$norma equivalente. Defina

$$d'_n(T) := \inf\{\varepsilon : T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset N_\varepsilon + \varepsilon\overline{B_{\mathbb{Y}}}\}.$$

Vamos mostrar que $d'_n(T) = d_n(T)$. Por definição de $d_n(T)$, dado $\delta > 0$ podemos encontrar $N \subset Y, dim(N) < n$ tal que

$$\sup_{x\in\overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y\in N} ||Tx - y||_0 \leq d_n(T) + \frac{\delta}{2},$$

fixando x na bola unitária, existe $y \in N$ tal que $||Tx - y||_0 \leq d_n(T) + \delta$. Em outras palavras $Tx \in B(y, d_n(T) + \delta) = \{y + (d_n(T) + \delta)\overline{B_{\mathbb{Y}}}\}$.

Variando x na bola unitária, e do fato que isto vale para todo $\delta > 0$, segue que

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset N + d_n(T)\overline{B_{\mathbb{Y}}},$$

de onde, $d'_n(T) \leq d_n(T)$.

Por outro lado, dado $\delta > 0$, para $d'_n(T) + \delta$ existe $N \subset Y$, $dim(N) < n$ tal que

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset N + (d'_n(T) + \delta)\overline{B_{\mathbb{Y}}}.$$

Disto, segue que $||Tx - y|| \leq (d'_n(T) + \delta)$, para $x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}$. Assim aplicando ínfimo de $y \in N$ e o supremo de $||x|| \leq 1$

$$\sup_{x\in\overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y\in N} ||Tx - y||_0 \leq \sup_{x\in\overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y\in N} (d'_n(T) + \delta) = (d'_n(T) + \delta).$$

Aplicando o ìnfimo de todos os subespaços de X, com dimensão menor que n, temos $d_n(T) \leq d'_n(T)$ e o teorema fica demonstrado.

Para a segunda definição de $d_n(T)$, no ítem *ii)*, vamos mostrar a equivalência com *i)*, pois esta já se provou verdadeira. Considere a notação:

$$d''_n(T) = \inf\{||\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}}T||_{\mathbb{Y}/V}; V \subset Y, dim(V) < n\}.$$

Seja $\varepsilon = d_n(T)$. Pela definição dada em *i)* existe $V = V_\varepsilon$, com $dim(V) < n$ onde:

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset V + d_n(T) + \varepsilon \overline{B_{\mathbb{Y}}}.$$

Considerando a aplicação quociente canônica $\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}/V$ na inclusão acima, temos:

$$\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} V + \mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} \varepsilon \overline{B_{\mathbb{Y}}} = 0_{\mathbb{Y}/V} + \varepsilon \mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} \overline{B_{\mathbb{Y}}} = \varepsilon \mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} \overline{B_{\mathbb{Y}}} = \varepsilon \overline{B_{\mathbb{Y}/V}}.$$

A última igualdade, se dá pelo Lema (1.31). Do fato que $\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \varepsilon \overline{B_{\mathbb{Y}/V}}$, temos

$$||\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} T(x)||_{\mathbb{Y}/V} \leq \varepsilon \ \forall x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}.$$

Tomando o supremo com $||x|| = 1$, resulta em $||\mathbb{Q}_{V^Y} T||_{\mathbb{Y}/V} \leq \varepsilon$. Ao aplicarmos o ínfimo em todos os subspaços V, com $dim(V) < n$, segue $d_n''(T) \leq d_n(T)$.

Para mostrar a desigualdade oposta, pela definição de $d_n''(T)$, escolhendo $\delta > 0$, como $d_n''(T) + \delta > d_n''(T)$, existe $V_\delta = V$ tal que:

$$||\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} T||_{\mathbb{Y}/V} \leq d"_n(T) + \delta.$$

Mas,

$$||\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} Tx||_{\mathbb{Y}/V} \leq \sup_{x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}} ||\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} Tx||_{\mathbb{Y}/V} = ||\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} T||_{\mathbb{Y}/V} < d_n''(T) + \delta,$$

em outras palavras,

$$\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset (d_n''(T) + \delta) \overline{B_{\mathbb{Y}/V}},$$

e como $\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} V = 0_{\mathbb{Y}/V}$,

$$\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset 0_{\mathbb{Y}/V} + (d_n''(T) + \delta) \overline{B_{\mathbb{Y}/V}} = \mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} V + (d_n''(T) + \delta) \overline{B_{\mathbb{Y}/V}}.$$

Usando novamente o Lema 1.31. Chegamos em $T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset V + (d"_n(T) + \delta) \overline{B_{\mathbb{Y}}}$. Como $dim(V) < n$, segue que $d_n(T) \leq d"_n(T) + \delta$. Note que esta desigualdade vale para todo $\delta > 0$, fazendo $\delta \downarrow 0$, segue o resultado. □

2.4 Números de Gelfand

Existem várias formas de se definir números de Gelfand para um operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, e cada uma delas contém suas peculiaridades. Para esse texto generalizaremos algumas ideias encontradas em [6, Sec. 2.3.].
Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, onde $\mathbb{X}$ possui dual não trivial. O $n-$ésimo número de Gelfand asso-

ciado a T é definido por:

Definição 2.14. *: $c_n(T)$ é o ínfimo dos valores $||TI_M^{\mathbb{X}}||$, onde M é um subespaço de $\mathbb{X}$, cuja codimensão é finita e menor que n, e $TI_M^{\mathbb{X}}$ é a restrição de T a M, isto é,*

$$c_n(T) := \inf\{||TI_M^{\mathbb{X}}|| : M \subset \mathbb{X},\ codim(M) < n.\} \tag{2.6}$$

Definição 2.15. *: De forma auxiliar, definimos $\tilde{c}_n(T)$ como o ínfimo dos $\varepsilon > 0$ tal que existem funionais $f_i \in \mathbb{X}'$, $(1 \leq i \leq k < n)$ que admitem a estimativa*

$$||Tx|| \leq \sup_{1 \leq i \leq k} |f_i(x)| + \varepsilon ||x||,$$

isto é,

$$\tilde{c}_n(T) := \inf\{\varepsilon > 0 : ||Tx|| \leq \sup_{1 \leq i \leq k} |f_i(x)| + \varepsilon ||x||,\ \forall x \in \mathbb{X},\ onde\ f_i \in \mathbb{X}'\ e\ \ k < n.\} \tag{2.7}$$

Observação 2.16. *Em acordo com o dito na Observação 1.34 precisamos exigir que $\mathbb{X}$ possua dual não trivial a fim de usar os resultados que provem da definição de $\tilde{c}_n(T)$. No caso dos espaços $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ serem Banach, podemos garantir que tais definições se equivalem (ver [6, Prop. 2.3.2]) e não precisamos exigir que $\mathbb{X}$ possua dual não trivial.*

Proposição 2.17. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ entre os espaços quase-Banach, então vale a desigualdade entre os números definidos acima:*

$$c_n(T) \leq \tilde{c}_n(T) \leq C_{\mathbb{Y}}^2 c_n(T).$$

Demonstração: Para provar que $c_n(T) \leq \tilde{c}_n(T)$ definimos $M = \{x \in \mathbb{X} : f_i(x) = 0,\ para\ 1 \leq i \leq k < n\}$. Com isso, vemos que $codim(M) = m < n$, isto é, $dim(\overline{\mathbb{X}}) = dim(\mathbb{X}/M) = m$. Como $codim(M) < n$, temos diretamente $c_n(T) \leq ||TI_M^{\mathbb{X}}||$, pois para todo $z \in M$, vale

$$||TI_M^{\mathbb{X}} z|| = ||Tz|| \leq \sup_{1 \leq i \leq k} |f_i(x)| + \varepsilon ||z|| = \varepsilon ||z||,$$

relembrando da definição de $c_n(T)$ em (2.6),

$$c_n(T) \leq ||TI_M^{\mathbb{X}}|| \leq \varepsilon.$$

de onde, tomando o ínfimo de ε, temos o desejado .

Por outro lado, tome $\varepsilon > 0$ e $M \subset \mathbb{X}$ um subespaço de $\mathbb{X}$ com $codim(M) = m < n$ de tal modo que $||TI_M^{\mathbb{X}}|| < c_n(T) + \varepsilon$, isto é,

$$||Tz|| = ||TI_M^{\mathbb{X}}z|| < (c_n(T) + \varepsilon)||z|| \ ,\forall z \in M. \tag{2.8}$$

A fim de obter a estimativa desejada para $||Tx||$, primeiramente, escolha uma base $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}$ para o espaço quociente, então todo elemento de $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}/M$ se escreve unicamente como

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overline{x_i}.$$

Os coeficientes λ_i definem um funcional linear sobre $\overline{\mathbb{X}}$ de maneira natural: Defina $\overline{f}_i(\overline{x}) = \lambda_i \ 1 \leq i \leq m$. Cada $\overline{f}_i(\overline{x})_i$ é linear e sua continuidade recai sobre o fato da dimensão do espaço quociente ser finita, portanto, existe uma constante $C > 0$ cumprindo:

$$||\overline{f}_i(\overline{x})|| \leq C.||\overline{x}||.$$

Dito isso, podemos estender a definição para todo $x \in \mathbb{X}$, pondo $f_i(x) = \overline{f}_i(\overline{x})$ a cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Assim, temos obviamente a linearidade de f_i, e a cotinuidade sai da definição de norma em $\overline{\mathbb{X}}$, dado que M é subespaço vetorial, isto é, $0 \in M$, então

$$||f_i(x)|| = ||\overline{f}_i(\overline{x})|| \leq C.||\overline{x}|| = C. \inf\{||x - z||; z \in M\} \leq C.||x - 0||.$$

Desejamos construir uma projeção $P : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ que tenha núcleo $N(P) = M$. Para isso, considere elementos $x_i \in \mathbb{X}$ tais que o operador quociente canônico cumpre:

$$Q_M^{\mathbb{X}} x_i = \overline{x_i}.$$

Então, de posse de f_i, definimos

$$Px = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) x_i,$$

e note que o operador P possui a propriedade que gostaríamos,

$$Px = 0 \Leftrightarrow f_i(x) = 0 \ para \ 1 \leq i \leq m.$$

Note também que: $P_M = I_{\mathbb{X}} - P$ é a projeção de P sobre M, pois

$$P_M^2 = I_{\mathbb{X}} - 2P + P^2 = I_{\mathbb{X}} - P = P_M \quad e,$$

$$P_M(\mathbb{X}) = \{z \in \mathbb{X} : \; z = x - Px\} = N(P) = M.$$

Portanto, vale a igualdade $I_{\mathbb{X}} = P + P_M$ e temos a estimativa

$$||Tx|| = ||T(Px + P_M x)|| \leq C_{\mathbb{Y}}(||TPx|| + ||TP_M x||). \tag{2.9}$$

Então, para $z = P_M x$ podemos aplicar a estimativa de 2.8, de onde

$$||TP_M x|| \leq (c_n(T) + \varepsilon)||P_M x||. \tag{2.10}$$

Lembrando da definição de P_M e de que $C_{\mathbb{Y}}$ é a constante do espaço $\mathbb{Y}$ obtemos no lado direito da desigualdade em 2.10,

$$(c_n(T) + \varepsilon)||P_M x|| \leq C_{\mathbb{Y}}(\tilde{c}_n(T) + \varepsilon)(||x|| + ||Px||).$$

Assim, em 2.9 teremos:

$$||Tx|| \leq C_{\mathbb{Y}}||TPx|| + C_{\mathbb{Y}}^2(c_n(T) + \varepsilon)(||x|| + ||Px||). \tag{2.11}$$

Da definição de P, da continuidade de T e, usando a desigualdade quase triangular várias vezes, existe um $\tilde{C} > 0$ tal que:

$$C_{\mathbb{Y}}||TPx|| + C_{\mathbb{Y}}^2(c_n(T) + \varepsilon)||Px|| \leq \tilde{C}. \sup_{1 \leq i \leq m} |f(x)|,$$

onde $\tilde{C} > 0$ é uma constante que dependende de $C_{\mathbb{Y}}$, $||T||$, $||x_i||$ e $c_n(T)$. Portanto, podemos rescrever 2.11

$$||Tx|| \leq \tilde{C} \sup_{1 \leq i \leq m} |f(x)| + C_{\mathbb{Y}}^2(c_n(T) + \varepsilon)||x||.$$

Como $\mathbb{X}' = \tilde{C}\mathbb{X}'$ podemos escrever $\tilde{f}_i = \tilde{C} f_i$, e usando a definição de $\tilde{c}_n(T)$, temos $\tilde{c}_n(T) \leq C_{\mathbb{Y}}^2(c_n + \varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$, de onde

$$\tilde{c}_n(T) \leq C_{\mathbb{Y}}^2 c_n(T).$$

□

Proposição 2.18. *Dado $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ entre espaços quase-Banach, vale a desigualdade entre os números de Gelfand e os números de aproximação:*

$$\tilde{c}_n(T) \leq C_{\mathbb{Y}} a_n(T).$$

Demonstração: Fixe $\varepsilon > 0$ e tome $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ com $posto(S) < n$, então, pela definição de números de aproximação, temos:

$$||T - S|| \leq a_n(T) + \varepsilon.$$

Como

$$||Tx|| \leq C_{\mathbb{Y}}||(T - S)x|| + C_{\mathbb{Y}}||Sx||,$$

temos

$$||Tx|| \leq C_{\mathbb{Y}}||Sx|| + C_{\mathbb{Y}}(a_n(T) + \varepsilon)||x||.$$

Vejamos também que $posto(S) = m < n$, assim existem elementos Sx_i na imagem de tal forma que

$$C_{\mathbb{Y}}Sx = \sum_{i=1}^{m} C_{\mathbb{Y}}\lambda_i S(x_i) = \sum_{i=1}^{m} S(C_{\mathbb{Y}}\lambda_i x_i).$$

E, de maneira análoga a ação de Px na Proposição (2.17), podemos definir funcionais lineares f_i em todo E em função de $C_{\mathbb{Y}}\lambda_i$.

Portanto, temos a limitação

$$C_{\mathbb{Y}}||Sx|| \leq \sup_{1 \leq i \leq m} |f_i(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Com isso, concluímos que

$$||Tx|| \leq \sup_{1 \leq i \leq m} |f_i(x)| + C_{\mathbb{Y}}(a_n(T) + \varepsilon)||x||.$$

Para adequados $f_i \in \mathbb{X}'$, com $1 \leq i \leq m < n$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, lembrando da definição de $\tilde{c}_n(T)$, temos o desejado. □

Proposição 2.19. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$. Dado $\varepsilon > 0$, se existirem funcionais lineares $f_i \in \mathbb{X}'$, $1 \leq i \leq n_\varepsilon$ cumprindo*

$$||Tx|| \leq \sup_{1 \leq i \leq n_\varepsilon} |f_i(x)| + \varepsilon||x||.$$

para todo $x \in \mathbb{X}$ então T é compacto.

Demonstração: Sabemos que dado uma quase-norma, exite uma $p - norma$ equivalente ($p \in (0, 1]$). Assim, é suficiente mostrar que $T(\overline{B}_{\mathbb{X}})$ é précompacto para a $p - norma$ equivalente. Para isso considere $\varepsilon > 0$ e $y_j \in T(\overline{B}_{\mathbb{X}})$ tais que :

$$||y_j - y_k|| \geq 4^{1/p}\varepsilon \quad para\ k \neq j. \tag{2.12}$$

Como $y_j = Tx_j$, com $x_j \in \overline{B}_{\mathbb{X}}$, e usando a hipótese da Proposição, temos

$$4^{1/p}\varepsilon \leq ||Tx_j - Tx_k|| \leq \sup_{1\leq i\leq n_\varepsilon} |f(x_j - x_k)| + \varepsilon||x_j - x_k||.$$

Lembrando que $||x_j - x_k||^p \leq ||x_j||^p + ||x_k||^p = 1^p + 1^p = 2$, temos $||x_j - x_k|| \leq 2^{1/p}$, de onde

$$4^{1/p}\varepsilon \leq ||Tx_j - Tx_k|| \leq \sup_{1\leq i\leq n_\varepsilon} |f_i(x_j - x_k)| + 2^{1/p}\varepsilon,$$

e então,

$$2^{1/p}\varepsilon \leq \sup_{1\leq i\leq n_\varepsilon} |f_i(x_j - x_k)| \quad para\ x_j \neq x_k. \tag{2.13}$$

Note que esse supremo pode ser visto como a distância dos elementos $u_j = (f_i(x_j))_{1\leq i\leq n\varepsilon}$ e $u_k = (f_i(x_k))_{1\leq i\leq n\varepsilon}$, no espaço de Banach $\ell_\infty^{n_\varepsilon}$ e

$$||u_j||_\infty = \sup_{1\leq i\leq n_\varepsilon} |f_i(x_j)| \leq \sup_{1\leq i\leq n_\varepsilon} ||f_i||,$$

pois $x_j \in \overline{B}_{\mathbb{X}}$. Com isso, mostramos que $\{u_j\}$ é um subconjunto limitado de $\ell_\infty^{n_\varepsilon}$, que tem dimensão finita, portanto é pré-compacto (ver [6, Sec. 1.1]). Por 2.13, os elementos $u_j \in \ell_\infty^{n_\varepsilon}$ que satisfazem:

$$2^{1/p}\varepsilon \leq ||u_j - u_k||_\infty,$$

são finitos. Assim, o sistema original $y_j \in T(\overline{B}_{\mathbb{X}})$ cumprindo 2.12 é finito, de onde $T(\overline{B}_{\mathbb{X}})$ está contido na união finita de bolas centradas em y_j e raio $4^{1/p}\varepsilon$, provando que $T(\overline{B}_{\mathbb{X}})$ é pré-compacto

□

Teorema 2.20. *: Sejam $\mathbb{W}, \mathbb{X}, \mathbb{Z}$ espaços quase-Banach, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Então valem as seguintes propriedades para $c_n(T)$:*

(M_c) $||T|| = c_1(T) \geq c_2(T) \geq ...0$;

(A_c) $c_{m+n-1}(S + T) \leq C_{\mathbb{Y}}(c_m(S) + c_n(T))$, *para todo* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*;*

$(A_c)'$ *Se em adição, $\mathbb{Y}$ for p-Banach temos para todo $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*
$c_{m+n-1}(T)^p \leq c_m(T)^p + c_n(T)^p$;

(P_c) *Seja* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{W})$, $n, m \in \mathbb{N}$, *então nós temos* $c_{m+n-1}(ST) \leq c_m(S)c_n(T)$;

(R_c) *posto*$(T) < n \Rightarrow c_n(T) = 0$;

(N_c) *dim*$(\mathbb{X}) \geq n \Rightarrow c_n(T)(id_{\mathbb{X}}) = 1$.

Demonstração: (M_c) segue diretamente da definição, considere os conjuntos $A = \{M \subset \mathbb{X},\ codim(M) < n\}$ e $B = \{M \subset \mathbb{X},\ codim(M) < m\}$ com $m < n$. É imediato que $A \subset B$, de onde, por propriedade de ínfimo temos $c_m(T) \geq c_n(T)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $m < n$.

Completamos a demonstração da primeira propriedade dos números de Gelfand analisando que $codim(M) < 1$ se, e somente se, $codim(M) = 0$, isto é, $\mathbb{X} = M$. Logo, $TI_M^{\mathbb{X}} = T$, de onde $||T|| = ||TI_M^{\mathbb{X}}||$, isto é $c_1(T) = ||T||$.

Para (A_c), considere $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Da definição de números de Gelfand e por propriedade de ínfimo, nós podemos encontrar subespaços A e B de $\mathbb{X}$ e tais que

$$||TI_A^{\mathbb{X}}|| \leq (1+\varepsilon)c_n(T) \text{ e } codim(A) < n,$$

$$||SI_B^{\mathbb{X}}|| \leq (1+\varepsilon)c_m(T) \text{ e } codim(B) < m. \tag{2.14}$$

Definindo $M = A \cap B$, e como estes espaços tem codimensão finita, temos o resultado de álgebra linear

$$codim(M) \leq codim(A) + codim(B) < m + n - 1,$$

que usaremos sem provar. Novamente da definição de números de Gelfand, veja que:

$$c_{m+n-1}(S+T) \leq ||(S+T)I_M^{\mathbb{X}}|| \leq C_{\mathbb{Y}}(||SI_M^{\mathbb{X}}|| + ||TI_M^{\mathbb{X}}||) \leq C_{\mathbb{Y}}(||SI_A^{\mathbb{X}}|| + ||TI_B^{\mathbb{X}}||) \tag{2.15}$$

A última desigualdade ocorre por que M é subespaço de A e de B. Usando as desigualdades de (2.15), temos

$$c_{m+n-1}(S+T) \leq C_{\mathbb{Y}}(1+\varepsilon)(c_m(S) + c_n(T)),$$

fazendo $\varepsilon \to 0$, segue o desejado.

A propriedade $(A_c)'$ para $p-$norma segue naturalmente do mesmo raciocínio, trocando a desigualdade de quase-triangular pela a desigualdade de $p-$triangular em 2.15.

Para justificarmos (P_c), vamos proceder de maneira análogo a (A_c), para isso, seja $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{W})$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar subespaços A e B de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ respectivamente, tais que

$$||TI_A^{\mathbb{X}}|| \leq (1+\varepsilon)c_n(T) \ e \ codim(A) < n,$$

$$||SI_B^{\mathbb{Y}}|| \leq (1+\varepsilon)c_m(T) \ e \ codim(B) < m.$$

Definindo $M = A \cap T^{-1}(B)$, novamente temos:

$$codim(M) \leq codim(A) + codim(T^{-1}(B)) < m + n - 1.$$

e, da definição de $c_{m+n-1}(T)$ juntamente com o fato de que os operadores são lineares e contínuos, temos

$$c_{m+n-1}(ST) \leq ||STI_M^{\mathbb{X}}|| \leq ||SI_B^{\mathbb{Y}}||.||T_A^{\mathbb{X}}|| \leq (1+\varepsilon)^2 c_m(S)c_n(T),$$

fazendo $\varepsilon \to 0$ temos o desejado.

Para a propriedade (R_c), sabemos que se $posto(T) \leq n$ então $a_n(T) = 0$. Usando a Proposição (2.17) e a Proposição (2.18), temos:

$$0 \leq c_n(T) \leq \tilde{c}_n(T) \leq C_{\mathbb{Y}} a_n(T) = 0.$$

Por outro lado, (N_c) sai do fato de que se $dim(\mathbb{X}) \geq n$ teremos para todo $M \subset \mathbb{X}$ com $codim(M) < n$, $dim(M) \geq 1$, de onde $M \neq \{0\}$. Assim, $||II_M^{\mathbb{X}}|| = ||I_M^{\mathbb{X}}|| = 1$ e segue o desejado.

□

2.5 Relação com compacidade

Mostraremos agora algumas relações entre os s-números definidos acima e a compacidade de um operador linear limitado entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$.

Teorema 2.21. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, valem as segintes propriedades:*

(C_e) $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e_n(T) = 0$;

(C_a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(T) = 0 \Rightarrow T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$;

(C_d) $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \iff \lim\limits_{n\to\infty} d_n(T) = 0$;

(C_c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(T) = 0 \Rightarrow T \in \mathcal{K}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Demonstração: Para a propriedade de compacidade (C_e) *dos números de entropia, veja que se* $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(T) = 0$ *significa que para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que* $e_n(T) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0$.

Mas se $e_n(T) < \frac{\varepsilon}{2}$*, então*

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} \{y_i + \varepsilon \overline{B_{\mathbb{Y}}}\}, \quad \textit{com} \quad N = 2^{n-1}.$$

Note que,

$$\{y_i + \frac{\varepsilon}{2}\overline{B_{\mathbb{Y}}}\} = \overline{B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)} \subset B(y_i, \varepsilon).$$

Assim, $T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B(y_i, \varepsilon)$*, de onde é relativamente compacta.*

Para provarmos a implicação contrária, usaremos o resultado encontrado no Lema 1.25: $T \in \mathbb{K}(X,Y) \iff T(\overline{B_{\mathbb{X}}})$ *é relativamente compacto.*

Supondo T *compacto, temos* $T(\overline{B_{\mathbb{X}}})$ *relativamente campacto, então para cada* $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ *dado, existe um número finito de elementos* $y_i \in Y, i = 1, 2, ..., k$*, tais que*

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B(y_i, \varepsilon)} = \bigcup_{i=1}^{k} \{y_i + \varepsilon \overline{B_{\mathbb{Y}}}\}.$$

Como sempre é possível tomar $n \in \mathbb{N}$*, de modo que* $N = 2^{n-1} \geq k$ *e por definição de ínfimo, temos que:*

$$\varepsilon \in \{\delta : \exists x_1, x_2, ..., x_{2^{n-1}} : T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} \{y_i + \delta \overline{B_{\mathbb{Y}}}\},$$

assim, $e_n(T) \leq \varepsilon$ *para todo* $n \geq k$.

Na propriedade de compacidade dos números de aproximação, (C_a)*, veja que se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que* $a_n(T) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

Da definição de $a_n(T)$*, existe* $L_n \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *com posto*$(L_n) < n$ *tal que:*

$$||T - L_n|| < \varepsilon.$$

Como podemos tomar $\varepsilon \to 0$*, fica bem definida a sequência de operadores* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $L_n \to T$*, e cada* L_n *tem posto finito. Pelo Lema 1.26, segue que* T *é compacto, pois existe uma sequência de operadores compactos* L_n *convergindo a* T *em* $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

No caso de (C_d)*, vamos utilizar novamente o Lema 1.25. Se* $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *então* $T(\overline{B_{\mathbb{X}}})$ *é relativamente compacta, i.é., para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $y_1, y_2, ..., y_{n_0}$ *tais que:*

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon).$$

Defina $U_{n_0} = [y_1, y_2, ..., y_{n_0}]$ *o subespaço gerado pelas combinações lineares de* y_i*, para* $i = 1, 2, ..., n_0$*, onde* $dim(U_{n_0}) \leq n_0$*.*

Primeiramente, veja que $d_{n_0+1}(T) \leq \varepsilon$*, pois, dado* $x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}$ *temos que:*

$$\inf_{y \in U_{n_0}} ||Tx - y|| \leq \varepsilon, \quad do \quad fato \quad que \quad Tx \in \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon).$$

Usando (M_d)*, i.é.,* $d_n(T) \geq d_{n+1}(T)$ $\forall n \in \mathbb{N}$*. Logo,*

$$\varepsilon \geq d_{n_0}(T) \geq d_{n_0+1}(T) \geq d_{n_0+2} \geq ...$$

Como isso vale para todo ε *maior que zero, sempre encontramos* n_{0_ε} *onde*

$$\varepsilon \geq d_{n_{0_\varepsilon}}(T) \geq d_{n_0+1}(T) \geq d_{n_0+2} \geq ...$$

Em outras palavras, $\lim\limits_{n \to \infty} d_n(T) = 0$*.*

Por outro lado, se $\lim\limits_{n \to \infty} d_n(T) = 0$*, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $d_n(T) < \varepsilon$*,* $\forall n > n_0$*. Dito isto, como já mostrado na demonstração do Teorema 2.11, existe* $U_n \subset Y$*, com* $dim(U_n) < n$*, e* $\forall x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}$ *existe* $u_n^x \in U_n$*, cumprindo*

$$||Tx - u_n^x|| < \varepsilon.$$

Logo, usando (M_d)*, i.é.,* $||T|| = d_1(T)$*, sai que*

$$||u_n^x|| = ||u_n^x + Tx - Tx|| \leq C_{\mathbb{Y}}(||u_n^x - Tx|| + ||Tx||) \leq C_{\mathbb{Y}}(\varepsilon + ||Tx||)$$
$$\leq \sup_{||x||=1} C_{\mathbb{Y}}(\varepsilon + ||Tx||) = C_{\mathbb{Y}}(\varepsilon + ||T||) = C_{\mathbb{Y}}(\varepsilon + d_1(T)).$$

Agora, defina $M_0 = \{u \in U_n : ||u|| \leq C_{\mathbb{Y}}(\varepsilon + d_1(T))\}$ *e note que* $M_0 \neq \{\phi\}$ *pois* $T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset M_0$*.*

Como $M_0 \subset U_n$*, que tem dimensão finita, e* M_0 *é limitado, então* M_0 *é relativamente compacto, i.é., existe uma* $\varepsilon-$*rede de bolas abertas centradas em* y_i*,* $i = 1, 2, ..., m \in \mathbb{Y}$*, tais que para todo* $u \in M_0$ *vale:*

$$||u - y_i|| < \varepsilon.$$

Tomando $u = u_n^x$ *:*

$$||u_n^x + Tx - Tx - y_i|| < \varepsilon.$$

Mas

$$\left(\frac{||Tx - y_i||}{C_{\mathbb{Y}}} - ||u_m^x - Tx||\right) \leq ||u_n^x + Tx - Tx - y_i|| < \varepsilon,$$

de onde,

$$\left(\frac{||Tx - y_i||}{C_{\mathbb{Y}}} - \varepsilon\right) \leq \varepsilon \iff ||Tx - y_i|| \leq 2C_{\mathbb{Y}}\varepsilon.$$

Como $||x|| \leq 1$*, resulta que* $T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, 2C_{\mathbb{Y}}\varepsilon)$*. Logo,* $T(\overline{B_{\mathbb{X}}})$ *é relativamente compacta, o que conclui a demonstração.*

Finalmente, para (C_c)*, note que se* $\lim_{n\to\infty} c_n(T) = 0$*, pela desigualdade provada na 2.17, temos* $\lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n(T) = 0$*. Com isso, vemos que as hipóteses da 2.19 são satisfeitas, de onde,* T *é compacto.* $\square$

Capítulo 3

Algumas Relações entre s-Números

Nesse capítulo mostraremos algumas desigualdades entre os números definidos no texto, principalmente entre o número de entropia e os outros s-números, motivados por extender alguns resultados dados por Carl e Pietsch. No caso de estarmos trabalhando com espaços de Banach e um operador linear e contínuo, mostrou-se que dado $\alpha > 0$, existe $\gamma_\alpha > 0$ cumprindo

$$\sup_{1 \leq k \leq n} k^\alpha e_k(T) \leq \gamma_\alpha \sup_{1 \leq k \leq n} k^\alpha s_k(T), \tag{3.1}$$

oinde s_k denota o $k-$ésimo número de aproximação, Gelfand ou Kolmogorov. No caso quase-Banach, mostraremos algumas desigualdades parecidas, que podem ser encontradas em [8] [20], [14]. A desigualdade de Carl, considerando números de Gelfand é recente, e devida a Vybíral, Kolleck e Hinrichs, que também a incorporamos nesse texto.

3.1 Relação com a teoria espectral

Começamos nossos estudos apresentando um dos resultados mais clássicos dessa teoria, que relaciona autovalores e números de entropia, que é uma ferramenta poderosa para estimar várias desigualdades entre s-números. Esse resultado foi mostrado por Carl e Triebel em [4] para o caso de espaço de Banach e posteriormente por Edmunds e Triebel no caso de espaços quase-Banach (ver [8, Sec. 1.3.4]).

Teorema 3.1. *Sejam $\mathbb{X}$ um espaço quase-Banach complexo e $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, a cada $k \in \mathbb{N}$ vale*

$$(\prod_{i=1}^{k} |\lambda_i(T)|)^{1/k} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} 2^{n/2k} e_n(T).$$

Corolário 3.2. *Nas condições do teorema anterior, temos para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$|\lambda_k(T)| \leq \sqrt{2} e_k(T).$$

A demonstração desse resultado encontra-se em [12, Theo. 50, p. 49].

Corolário 3.3. *A desigualdade mostrada no corolário acima é essencial para provar para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{n \to \infty} (e_k(T^n))^{1/n} = r(T),$$

onde $r(T)$ é o raio espectral de T (Definição 1.33).

Observação 3.4. *Não demonstramos os resultados acima pois acreditamos fugir da proposta do texto, porém resolvemos apresentá-los mesmo assim pois são clássicos na teoria. As demonstrações dos fatos apresentados acima podem ser encontrados com os devidos detalhes na seção 1 do livro [8].*

Agora, estudaremos uma desigualdade entre os números de aproximação e os números de entropia. Para isso, precisamos do lema a seguir, que usaremos sem demonstrar mas encontra-se em [10, Sec. 3.31].

Lema 3.5. *Um operador agindo entre os espaços quase-Banach (reais) $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ tem posto m se, e somente se, existem constantes $C, c > 0$ tais que:*

$$c.2^{-(n-1)/m} \leq e_n(T) \leq C||T||.2^{-(n-1)/m} \ \ para\ n = 1, 2, 3, ...$$

Se os espaços forem complexos, o resultado é modificado para:

$$c.2^{-(n-1)/2m} \leq e_n(T) \leq C||T||.2^{-(n-1)/2m} \ ,\ para\ n = 1, 2, 3, ...$$

3.2 Relação entre e_n e a_n

A proposição que se segue recebe o nome de desigualdade do tipo Bernstein e foi introduzida por Carl no contexto de espaços de Banach (ver [6, Sec. 3.1.]), e generalizada por Edmunds e Triebel para o contexto de espaços quase-Banach (ver [8, Sec.1.3.3.]).

Proposição 3.6. *Dados $0 < r < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, onde $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são espaços quase-Banach com constantes $C_{\mathbb{X}}$ e $C_{\mathbb{Y}}$ respectivamente. Então:*

$$\sup_{1\leq k\leq m} k^{1/r}e_k(T) \leq c_p \sup_{1\leq k\leq m} k^{1/r}a_k(T)\ para\ m\ =\ 1,2,3,...$$

.

Perceba que se provarmos tal desigualdade, conseguimos uma desigualdade parecida com a definida em 3.1, para $\alpha = 1/r$.

Demonstração: Nesta demonstração usaremos novamente a $p-$norma associada a norma que torna $\mathbb{Y}$ quase-Banach.

Dito isto, a estratégia aqui é olhar para os números $a_n(T)$, cujo n é da forma $n = 2^N, N \in \mathbb{N}$.

Por definição de $a_{2^j}(T)$, dado $\varepsilon = \varepsilon(j) > 0$, existe um $A_j \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$tal que

$$||T - A_j|| \leq a_{2^j}(T) + \varepsilon(j)$$

Pela propriedade R_a, se tivermos $posto(T) < n$ então $a_n(T) = 0$. Por outro lado se $posto(T) > n$ então $a_n(T) > 0$, mas esta propriedade não é conclusiva no caso em que $posto\ T = n$, isto é, pode ocorrer que $a_n(T) = 0$ ou que $a_n(T) \neq 0$.

Considerando o caso em que $posto\ T \geq n$ e $a_n(T) \neq 0$, para $n = 2^j,\ j = 1,2,...,N$ e tomando $\varepsilon(j) = a_{2^j}$ encontramos na desigualdade acima:

$$||T - A_j|| \leq 2a_{2^j}(T). \tag{3.2}$$

Deste modo, notando que $A_0 = 0$, o operador nulo, vale a representação de T:

$$\begin{aligned} T = -A_0 + T &= (A_1 - A_0) + (A_2 - A_1) + ... + (A_N - A_{N-1}) + (T - A_N) \\ &= \sum_{j=1}^{N}(A_j - A_{j-1}) + (T - A_N) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Onde sempre podemos tomar $A_j \neq A_{j-1}$, do fato que $posto\ T \geq n$ e $a_n(T) \neq 0$. Dados $n_1, n_2, ..., n_N$ números naturais quaisquer, usando sucessivamente a propriedade $(A_e)'$ para $p-$normas $(e_{m+n-1}(S+T))^p \leq (e_m(S))^p + (e_n(T))^p)$ temos:

$$[e_{n_1+n_2+...+n_N-(N-1)}(T)]^p = [e_{n_1+n_2+...+n_N-(N-1)}(\sum_{j=1}^{N}(A_j - A_{j-1}) + (T - A_N))]^p$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ [e_{n_1}(A_1 - A_0)]^p + [e_{n_2+\ldots+n_N-(N-1)+1}(\sum_{j=2}^{N}(A_j - A_{j-1}) + (T - A_N))]^p \\
&\leq \ [e_{n_1}(A_1 - A_0)]^p + [e_{n_2}(A_2 - A_1)]^p + [e_{n_3+\ldots+n_N-(N-1)+2}(\sum_{j=3}^{N}(A_j - A_{j-1}) + (T - A_N))]^p \\
&\leq \ [e_{n_1}(A_1 - A_0)]^p + [e_{n_2}(A_2 - A_1)]^p + \ldots + [e_{n_N-(N-1)+(N-1)}(A_N - A_{N-1}) + (T - A_N)]^p \\
&\leq \ [e_{n_1}(A_1 - A_0)]^p + [e_{n_2}(A_2 - A_1)]^p + \ldots + [e_{n_N}(A_N - A_{N-1})]^p + e_1[(T - A_N)]^p \\
&= \ \sum_{j=1}^{N}[e_{n_j}(A_j - A_{j-1})] + e_1[(T - A_N)]^p.
\end{aligned}
$$

Pela propriedade (M_e) do Teorema 2.4, temos o resultado:

$$
[e_{n_1+n_2+\ldots+n_N-(N-1)}(T)]^p \leq \sum_{j=1}^{N}[e_{n_j}(A_j - A_{j-1})]^p + ||(T - A_N)||^p. \tag{3.4}
$$

Como $posto(A_j) < 2^j$ e $posto(A_{j-1}) < 2^{j-1}$, temos que $posto(A_j - A_{j-1}) < 2^j + 2^{j-1} < 2^j + 2^j = 2.2^j = 2^{j+1}$.

Supondo que $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ são espaços reais, e usando no Lema 3.5 com $m = 2^{j+1}$.

$$
e_n(A_j - A_{j-1})^p \leq [C||A_j - A_{j-1}||.2^{-(n_{j-1})/2^{j+1}}]^p = C^p||A_j - A_{j-1}||^p.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}}
$$

Onde $C > 0$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. O mesmo vale se os espaços forem complexos tomando $2m = 2^{j+2}$.

Do fato que

$$
||A_j - A_{j-1}||^p \leq ||A_j - T||^p + ||T - A_{j-1}||^p,
$$

de (3.2) e de (M_a) segue

$$
||A_j - T||^p \leq (2a_{2^j}(T))^p \quad e \quad ||A_j - T||^p \leq (2a_{2^{j-1}}(T))^p.
$$

de onde resulta

$$
||A_j - A_{j-1}||^p \leq (2a_{2^j}(T))^p + (2a_{2^{j-1}}(T))^p \leq 2.(2a_{2^{j-1}}(T))^p. \tag{3.5}
$$

Voltando em (3.4), concluímos que:

$$
e_n(A_j - A_{j-1})^p \leq C^p.2^{p+1}.(a_{2^{j-1}}(T))^p.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}}.
$$

Portanto,

$$e_n(A_j - A_{j-1})^p \leq C_2.(a_{2^{j-1}}(T))^p.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}} \tag{3.6}$$

para $C_2 = C^p.2^{p+1}$ e $j = 1, 2, ..., N$.

Com tal resultado em mãos, podemos voltamos em (3.4) e usar (3.2) e (3.6) para estimar o somatório em:

$$[e_{n_1+n_2+...+n_N-(N-1)}(T)]^p \leq \sum_{j=1}^{N} C_2.(a_{2^{j-1}}(T))^p.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}} + (2a_{2^N}(T))^p \tag{3.7}$$

Note que:

$$2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}} = 2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}-(j-1)\frac{p}{r}+(j-1)\frac{p}{r}} = 2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}-(j-1)\frac{p}{r}}.\sup_{1\leq\ j\leq N} 2^{(j-1)\frac{p}{r}}$$

Fazendo o somatório de $j = 1$ até N e lembrando que $2^{N\frac{p}{r}}a_{2^N}(T) > 0$, segue:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} C_2.(a_{2^{j-1}}(T))^p.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}} &\leq \sum_{j=1}^{N} C_2.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}-(j-1)\frac{p}{r}}.\sup_{1\leq\ j\leq N} 2^{(j-1)\frac{p}{r}}(a_{2^{j-1}}(T))^p \\
\leq \sum_{j=1}^{N} C_2.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}-(j-1)\frac{p}{r}}.\sup_{1\leq\ j\leq N} 2^{(j-1)\frac{p}{r}}(a_{2^{j-1}}(T))^p + 2^{N\frac{p}{r}}a_{2^N}(T) \\
= \sum_{j=1}^{N} C_2.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}-(j-1)\frac{p}{r}}.\sup_{1\leq\ j\leq N+1} 2^{(j-1)\frac{p}{r}}(a_{2^{j-1}}(T))^p.
\end{aligned}$$

Usando propriedade de supremo e o fato de que $1 \leq 2^{j-1} \leq 2^N$, temos

$$\sum_{j=1}^{N} C_2.(a_{2^{j-1}}(T))^p.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}} \leq \sum_{j=1}^{N} C_2.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}-(j-1)\frac{p}{r}}.\sup_{1\leq\ j\leq 2^N} j^{\frac{p}{r}}(a_j(T))^p. \tag{3.8}$$

Por outro lado, é facil ver que

$$2^p(a_{2^N}(T))^p \leq 2^p 2^{-N\frac{p}{r}} \sup_{1\leq j\leq 2^N} j^{\frac{p}{r}}(a_j(T))^p.$$

Combinando este resultado com (3.7) em (3.8) segue:

$$[e_{n_1+n_2+...+n_N-(N-1)}(T)]^p \leq \sum_{j=1}^{N}[C_2.2^{-(n_{j-1})p/2^{j+1}-(j-1)\frac{p}{r}} + 2^p2^{-N\frac{p}{r}}]. \sup_{1\leq\ j\leq 2^N} j^{\frac{p}{r}}(a_j(T))^p. \tag{3.9}$$

Por outro lado, como $1 \leq p \leq \infty$, sempre podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 + \frac{1}{p} \leq k \leq 2 + \frac{1}{p}$. De posse de k e como até aqui os resultados valem para qualquer $n_j \in \mathbb{N}$, podemos definir $n_j = 1 + k(N-j)2^{j+1}$ *para* $j = 1, 2, ..., N$. Dito isso, segue diretamente que $2^{-(n_j-1)/2^{j+1}} = 2^{-k(N-j)}$.

Com isso, estimaremos o somatório em (3.9), sabendo que $-k(N-j)p - (j-1)\frac{p}{r} = \frac{p}{r} - pkN + (k - \frac{1}{r})pj$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{N} 2^{-k(N-j)p-(j-1)\frac{p}{r}} = 2^{p/r}2^{-pkN}\sum_{j=1}^{N} 2^{(k-1/r)pj},$$

lembrando das propriedades de séries geométricas finitas, temos:

$$\sum_{j=1}^{N} x^j = x(\frac{x^N-1}{x-1}),$$

de onde

$$\sum_{j=1}^{N} 2^{(k-1/r)pj} = 2^{(k-1/r)p}\frac{2^{(k-1/r)pN}-1}{2^{(k-1/r)p}-1},$$

portanto

$$\sum_{j=1}^{N} 2^{-k(N-j)p-(j-1)\frac{p}{r}} = 2^{p/r}2^{-pkN}2^{(k-1/r)p}\frac{2^{(k-1/r)pN}-1}{2^{(k-1/r)p}-1} = 2^{-kNp}2^{kp}\frac{2^{(k-1/r)pN}-1}{2^{(k-1/r)p}-1} \leq C_3 2^{-Np/r}.$$

para algum $C_3 > 0$ cumprindo a desigualdade acima.

Voltando em (3.9), e chamando $C_4 = C_3.C_2$, temos:

$$[e_{n_1+n_2+...+n_N-(N-1)}(T)]^p \leq 2^{-Np/r}C_4 \sup_{1\leq j\leq 2^N} j^{p/r}a_j(T)^p.$$

Por outro lado, da definição dos n_j, note que

$$n_1 + n_2 + ... + n_j - N = [\sum_{j=1}^{N} 1 + k(N-j)2^{j+1}] - N] = \sum_{j=1}^{N} k(N-j)2^{j+1}.$$

Novamente, das propriedades de séries gemétricas finitas, temos:

$$\sum_{j=1}^{N} 1 + (N-j)2^{j+1} = 4.(2^N - (N+1)) \leq 4.2^N \;\; de\ onde:$$

$$k\sum_{j=1}^{N} 1 + (N-j)2^{j+1} \leq 4.2^N.$$

Usando a monotonicidade (M_e), temos $[e_{4.k.2^N}(T)]^p \leq e_{n_1,n_2,\ldots,n_N-(N-1)}(T)]^p$. de onde:

$$e_{4.k.2^N}(T)^p \leq 2^{-Np/r} C_4 \sup_{1\leq j\leq 2^N} j^{p/r} a_j(T)^p \tag{3.10}$$

Note que essa estimativa depende de N e de k. N é um número natural qualquer, mas k foi fixado cumprindo $1+\frac{1}{p} \leq k \leq 2+\frac{1}{p}$. Por isso devemos pensar, em como estimar $e_n(T)$, para n um natural qualquer.

Primeiramente, note que se $n \geq 8k$ sempre conseguimos um natural N tal que $8k2^{N-1} \leq n \leq 8k2^N$.

Do lado direito da desigualdade temos que

$$n \leq 8k2^N \Rightarrow n^{-1} \geq 8k^{-1}2^{-N} \Rightarrow n^{-p/r} \geq 8k^{-p/r}2^{-Np/r} \Rightarrow n^{-p/r}8k^{p/r} \geq 2^{-Np/r}.$$

Do lado esquerdo, como $8k2^{N-1} \leq n$, sai que $4k2^N \leq n$, e, usando propriedade de supremo:

$$\sup_{1\leq j\leq 2^N} j^{p/r} a_j(T)^p \leq \sup_{1\leq j\leq n} j^{p/r} a_j(T)^p.$$

Também do fato que $4k2^N \leq n$ e de (M_e) temos $e_n(T)^p \leq e_{4.k.2^N}(T)^p$. Combinando esses três ultimos resultados em (3.10):

$$e_n(T)^p \leq C_4(8k)^{p/r} n^{-p/r} \sup_{1\leq j\leq n} j^{p/r} a_j(T)^p$$

$$e_n(T)^p n^{p/r} \leq C_4(8k)^{p/r} n^{-p/r} \sup_{1\leq j\leq n} j^{p/r} a_j(T)^p \;\; \forall n \geq 8k. \tag{3.11}$$

Resta-nos estimar o caso em que $n \leq 8k$.

Neste caso, $n^{p/r} \leq (8k)^{p/r}$, pois $p/r \geq 0$. Usando novamete (M_e), temos

$$e_n(T)^p \leq ||T|| \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

e, combinando esses resultados segue $n^{p/r} e_n(T)^p \leq (8k)^{p/r}||T||$.

Como $\{j^{p/r}a_j(T)^p; 1 \leq j \leq n; n \leq 8k\}$ é um conjunto finito de números maiores ou iguais a zero, sempre conseguimos encontrar $C_4 \geq 0$ tal que:

$$||T|| \leq C_4 \sup_{1\leq j\leq n} j^{p/r}a_j(T)^p,$$

de onde,

$$n^{p/r}e_n(T)^p \leq C_4 \sup_{1\leq j\leq n} j^{p/r}a_j(T)^p, \ \forall n \leq 8k. \tag{3.12}$$

Assim, conseguimos retirar desta desigualdade a depêndencia de k. Nos dois casos, aplicando a raiz $p-$ésima na desigualdade 3.12

$$n^{1/r}e_n(T) \leq c_p \sup_{1\leq j\leq n} j^{1/r}a_j(T), \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Onde $8k(C_4)^{1/p} = c_p$ depende de p. Assim, tomando o supremo na equação acima, com $n \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ e vendo que:

$$\sup_{1\leq n\leq m} \sup_{1\leq j\leq n} j^{1/r}a_j(T) = \sup_{1\leq n\leq m} n^{1/r}a_n(T),$$

concluímos a demonstração

$$\sup_{1\leq n\leq m} n^{1/r}e_n(T) \leq c_p \sup_{1\leq n\leq m} n^{1/r}a_n(T), \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

□

Teorema 3.7. *(Relação entre a_n e e_n). Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dois espaços quase-Banach, $C_{\mathbb{X}}$ e $C_{\mathbb{Y}}$ suas constantes respectivamente. Dado $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ e $1 < p < \infty$ valem:*

$$(i) \ e_n(T) \leq c_p \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i(T))^p\right)^{1/p}, \ \forall n \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \ \lim_{n\to\infty} e_n(T) \leq \lim_{n\to\infty} a_n(T).$$

Demonstração: Para o ítem (i) veja que

$$k^{1/p}a_k(T) = (ka_k(T)^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i(T)^p\right)^{1/p}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

A segunda desigualdade se dá pois a função $x^{1/p}$ $(1 < p)$ é crescente. Aplicando o supremo até um $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{1\leq k\leq n} k^{1/p}a_k(T) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(T)^p\right)^{1/p}.$$

Usando tal resultado na Proposição 3.6, temos:

$$e_n(T) = n^{-1/p}n^{1/p}e_n(T) \leq n^{-1/p}\sup_{1\leq k\leq n} k^{1/p}e_k(T) \leq c_p.n^{-1/p}\sup_{1\leq k\leq n} k^{1/p}a_k(T).$$

Isto é,

$$e_n(T) \leq c_p.n^{-1/p}\sup_{1\leq k\leq n} k^{1/p}a_k(T) \leq c_p.n^{-1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(T)^p\right)^{1/p} = c_p.\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i(T)^p\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow e_n(T) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(T)^p\right)^{1/p}.$$

Para o ítem ii, vamos supor que $a_n(T) \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, pois se houver n_0 tal que $a_{n_0}(T) = 0$, pela propriedade M_a, teríamos $a_n(T) = 0\ \forall n \geq n_0$. Disto segue que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(T) = 0$ de onde, pela propriedade C_a temos que $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Pela propriedade C_e temos que se $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ então $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(T) = 0$, de onde segue a igualdade.

Supondo então que $a_n(T) \neq 0$ para todo n natural, em particular, fixando um n, podemos tomar $\delta > a_n(T)$. Por definição de números de aproximação, existe $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, com $posto(A) < n$ tal que $||T - A|| < \delta$.

Por outro lado, da linearidade de T, temos

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset ||T||\overline{B_{\mathbb{Y}}} \ \ pois \ \ ||Tx|| \leq ||T||||x||.$$

Como,

$$||T||^p \leq ||T - A||^p + ||A||^p, \ \ temos \ \ T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset (||T - A||^p + ||A||^p)^{1/p}\overline{B_{\mathbb{Y}}}.$$

Como $posto(A) < n$, A é compacto. Sabemos que um operador é compacto se, e somente se, $A(\overline{B_{\mathbb{X}}})$ é um conjunto compacto. Disto, dado $\varepsilon > 0$ existem $y_i \in Y$, $i = 1, 2, ..., m$. tais que:

$$A(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{j=1}^{m}\{y_j + \varepsilon\overline{B_{\mathbb{Y}}}.\}$$

Isto é, $||Ax - y_j|| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}$ e um $j = 1, 2, ..., m$. adequado. Disto, temos:

$$T(\overline{B_{\mathbb{X}}}) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{y_j + (\varepsilon^p + \delta^p)^{1/p} \overline{B_{\mathbb{Y}}}.\}$$

De fato, dado $x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}$, temos

$$||Tx - y_j||^p \leq ||Tx - Ax||^p + ||Ax - y_j||^p \leq ||T - A||^p + ||Ax - y_j||^p \leq \delta^p + \varepsilon^p,$$

de onde, $||Tx - y_j|| \leq (\delta^p + \varepsilon^p)^{1/p}$, o que prova a afirmação.

Pela definição de números de entropia, temos que $e_n(T) \leq (\delta^p + \varepsilon^p)^{1/p}$. Pela propriedade M_e, $e_k(T) \leq e_n(T)$ sempre que $k \geq n$. Usando esse dois fatos, segue

$$\lim_{k \to \infty} e_k(T) \leq e_n(T) \leq (\delta^p + \varepsilon^p)^{1/p}.$$

Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, temos $\lim\limits_{k \to \infty} e_k(T) \leq \delta$. Tomando o ínfimo dos valores de δ, temos

$$\lim_{k \to \infty} e_k(T) \leq a_n(T), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, fica demonstrado o ítem

$$\lim_{k \to \infty} e_k(T) \leq \lim_{k \to \infty} a_k(T).$$

$\square$

3.3 Relação entre d_n e a_n

Teorema 3.8. *Relação entre a_n e d_n. Dados $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dois espaços quase-Banach e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, e $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Então*

$$d_n(T) \leq a_n(T).$$

Demonstração: Por definição de $a_n(T)$,

$$dado \;\; \varepsilon > 0, \;\; \exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \;\; posto(L) < n : ||T - L|| \leq a_n(T) + \varepsilon.$$

Defina $U_n = R(L) \subset \mathbb{Y}$ e note que $dim(U_n) = posto(L) < n$. Por outro lado, para $x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}$, temos

$$||Tx - Lx|| \leq ||T - L|| \leq a_n(T) + \varepsilon.$$

Como $L(X) = y \in U_n \subset Y$, mostramos que

$$\exists U_n, \quad dim(U_n) < n \ \ \forall x \in \overline{B_{\mathbb{X}}} \ \ \exists y \in U_n : ||Tx - y|| \leq a_n(T) + \varepsilon,$$

por propriedade de ínfimo,

$$\inf_{y \in U_n} ||Tx - y|| \leq \inf_{y = Lx} ||Tx - y|| \leq a_n(T) + \varepsilon,$$

para todo x na bola unitária fechada. De onde,

$$\sup_{x \in \overline{B_{\mathbb{X}}}} \inf_{y \in U_n} ||Tx - y|| \leq a_n(T) + \varepsilon.$$

Tomado o ínfimo de todos os U_n com $dim(U_n) < n$, e usando novamente a mesma propriedade de ínfimo, temos o resultado $d_n(T) \leq a_n(T) + \varepsilon$.
Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon \downarrow 0$ temos provado o teorema. □

Proposição 3.9. *Nas mesmas condições do Teorema 3.8, podemos mostrar que*

$$a_n(T) \leq (2n)^{1/2} d_n(T).$$

3.4 Relação entre e_n e d_n

Analogamente a desigualdade provada na proposição 3.6, temos a proposição a seguir que foi mostrada por Carl ([4, Theo. 1]), no contexto de espaços de Banach e relaciona números de entropia com números de Kolmogorov.

Proposição 3.10. *Seja $\alpha > 0$, $0 < p < \infty$ e $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ dois espaços quase-Banach com constantes $C_{\mathbb{X}}, C_{\mathbb{Y}}$ respectivamente. Dado $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ e $n \in \mathbb{N}$, então existe uma constante $c > 0$ tal que:*

$$\sup_{1 \leq k \leq n} k^{\alpha} e_k(T) \leq c_{p,\alpha} . \sup_{1 \leq k \leq n} k^{\alpha} d_k(T).$$

A demonstração desse fato pode ser encontrada em [2, Lem. 1].

De posse de tal resultado, podemos demonstrar um resultado análogo ao Teorema 3.7, porém usando números de Kolmogorov.

Corolário 3.11. *(Relação entre e_n e d_n). Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dois espaços quase-Banach, $C_{\mathbb{X}}, C_{\mathbb{Y}}$ suas constantes, respectivamente. Dados $0 < p < \infty$, então existe C_p tal que:*

$$e_n(T) \leq C_p \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(T)^p \right)^{1/p}.$$

Demonstração: Assim como foi feito no 3.7 (i),

$$k^{1/p}d_k(T) = (kd_k(T)^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} d_i(T)^p\right)^{1/p}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

de onde

$$\sup_{1\leq k\leq n} k^{1/p}d_k(T) \leq [\sum_{i=1}^{n} d_i(T)^p]^{1/p}. \tag{3.14}$$

Por outro lado, tomando $\alpha = \frac{1}{p}$ na Proposição 3.10, temos

$$\sup_{1\leq k\leq n} k^{1/p}e_k(T) \leq c_{p,\alpha}. \sup_{1\leq k\leq n} k^{1/p}d_k(T).$$

Usando tal resultado na seguinte manpulação algébrica, temos

$$e_n(T) = n^{-1/p}n^{1/p}e_n(T) \leq n^{-1/p} \sup_{1\leq k\leq n} k^{1/p}e_k(T) \leq c_{p,\alpha}.n^{-1/p} \sup_{1\leq k\leq n} k^{1/p}d_k(T),$$

usando (3.14) nessa desigualdade, segue

$$e_n(T) \leq c_{p,\alpha}.n^{-1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i(T)^p\right)^{1/p}$$

Vendo que α depende apenas de p, e tomando $C_p = c_{p,\alpha}.n^{-1/p}$ segue o resultado. □

3.5 Relação entre a_n e c_n

Teorema 3.12. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$. Então*

$$c_n(T) \leq C_{\mathbb{Y}}a_n(T), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A demonstração desse fato sai diretamente de unir as proposições 2.17 e 2.18.

No caso Banach, podemos demonstrar que os números de aproximação são os maiores entre os s-números. Aqui, não conseguimos mostrar esse fato com as ferramentas que utilizamos, mas isso nada quer dizer com respeito a veracidade da afirmação.

3.6 Relação entre c_n e e_n

O objetivo principal dessa seção é mostrar uma versão da desigualdade de Carl, usando números de Gelfand para espaços quase-Banach. Para isso, precisaremos enunciar e demonstrar vários resultados auxiliares.

Lema 3.13. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço $p-$ Banach e $\mathbb{Y}$ um espaço $q-$Banach. Para todo $x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}$ existem $M_n \subset \mathbb{X}$ um subespaço de codimensão finita, com $z_n \in M_n$, e $N_n \subset \mathbb{X}$ um subconjunto, com $x_n \in N_n$, tais que:*

$$||x - (x_n + z_n)|| < \varepsilon_n.$$

Os detalhes sobre quem é N_n serão dados na demonstração, por ora é suficiente dizer que x_n é tal que $||x_n|| \leq 2^{1/p}$.

Demonstração: Fixe $(\varepsilon_n)_n$ uma sequência de números positivos não maior que 1. Podemos fixar uma sequência de subespaços M_n cuja codimensão é finita. Como a codimensão de M_n é finita, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\mathbb{M}_n$ uma $\varepsilon_n - rede$ da bola unitária de X/M_n, isto é, para cada $[x] \in B_{X/M_n}$, temos

$$||[x] - [x_n]||_{X/M_n} = inf_{z \in M_n} ||x - x_n - z||_X < \varepsilon_n. \tag{3.15}$$

Aplicando a desigualdade $p-$triangular em (3.15), temos

$$||[x_n]||^p_{X/M_n} \leq ||[x] - [x_n]||^p_{X/M_n} + ||[x]||^p_{X/M_n} < \varepsilon_n^p + 1, \tag{3.16}$$

de onde, $\mathbb{M}_n \subset B_{X/M_n}$, pois $||[x_n]||_{X/M_n} < 2^{1/p}$. Pela definição da $p-$ norma no quociente, conseguimos encontrar $x_n \in X$ um representante da classe $[x_n]$ tal que $||x_n||_X < 2^{1/p}$. Defina $N_n := \{x_n \in X, ||x_n||_X < 2^{1/p} \text{ e } [x_n] \in \mathbb{M}_n\}$, este conjunto é chamado de "levantamento"de $\mathbb{M}_n$. Veja que $N_n \subset 2^{1/p} B_X$.

Novamente por (3.15), da definição de $p-$norma, existe um $z = z_n$ tal que

$$||x - x_n - z_n||_X < \varepsilon_n,$$

pois, se fosse $||x - x_n - z||_X \geq \varepsilon_n$ para todo $z \in M_n$, teríamos $inf_{z \in M_n} ||x - x_n - z||_X \geq \varepsilon_n$, um absurdo.

Portanto, tomando $x_n \in N_n$ temos o desejado. □

Lema 3.14. *Para qualquer $x \in \mathbb{X}$, com $||x|| < \delta$, com $0 < \delta \leq 1$ existe $x_n \in N_n$ e $z_n \in M_n$ tais que.*

$$||z_n|| < 4^{1/p} \quad e \quad ||x - \delta(x_n + z_n)|| < \delta.\varepsilon_n. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demonstração: De fato, veja que $||x/\delta|| < 1$, e pelo Lema anterior podemos encontrar $x_n \in N_n$ e $z_n \in M_n$ tais que

$$||x/\delta - (x_n + z_n)||_X < \varepsilon_n. \tag{3.17}$$

O que mostra a segunda parte do Lema, a primeira parte vem de usarmos a desigualdade $p-$triangular e usarmos 3.17, assim

$$\begin{aligned} || - z_n||^p &= ||z_n + x/\delta - x/\delta + x_n - x_n||^p \\ &\leq ||x/\delta - (x_n + z_n)||^p + ||x/\delta||^p + ||x_n||^p \\ &< \varepsilon_n^p + 1^p + 2 < 4. \end{aligned}$$

pois, do Lema 3.13, $\varepsilon_n < 1$ e $||x_n|| < 2^{1/p}$. □

Lema 3.15. . *Defina $\delta_0 = 1$ e, para todo natural, $\delta_n = \prod_{j=1}^{n} \varepsilon_j$ e $\tau_n = ||T_{|M_n}||$ onde $T_{|M_n}$ é a restrição T ao subespaço M_n. Então para todo $x \in B_X$, existe uma sequência $(x_n)_n \subset N_n$ e $(z_n)_n \subset M_n$ tais que*

(*i*) $||z_n||_X < 4^{1/p} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(*ii*) $||x - \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1}(x_k + y_k)||_X < \delta_n$;

(*iii*) $||Tx - \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1}T(x_k)||_Y^q < (||T||\delta_n)^q + 4^{q/p} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1}^q \tau_k$.

Demonstração: Os ítens (*i*) e (*ii*) saem diretamente 3.14, indutivamente: Dado que a construção vale para n-1, temos:

$$||z_{n-1}|| < 4^{1/p} \quad e \quad ||x - \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{k-1}(x_k + y_k)||_X < \delta_{n-1},$$

De onde, vendo que $\delta_n \leq 1$, e aplicando o Lema 3.14 para $x - \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{k-1}(x_k + y_k)$, existem $x_n \in N_n$ e $z_n \in M_n$ tais que

$$||z_n|| < 4^{1/p} \quad e \quad ||(x - \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{k-1}(x_k + y_k)) - \delta_n(x_n + z_n)|| < \delta_{n-1}.\varepsilon_n$$

O que concluí o ítem (ii). Para o (iii) usamos a desigualdade $q - triangular$ nos itens (i) e (ii), concluindo que

$$
\begin{aligned}
||Tx - \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1} T(x_k)||_Y^q &\leq ||Tx - \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1} T(x_k + z_k)||_Y^q + ||\sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1} T(z_k)||_Y^q \\
\leq & \; ||T||^q.||(x - \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1}(x_k + z_k))||_X^q + \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1}^q.||T_{|M_k}||.||(z_k)||_Y^q \\
\leq & \; ||T||^q.\delta_n^q + 4^{q/p} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1}^q.\tau_k^q.
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.16. *Seja $\mathbb{X}$ um epsaço $p-$Banach real $m-$dimensional, onde $0 < p \leq 1$. Então, para todo natural n*

$$e_n(id : \mathbb{X} \to \mathbb{X}) \leq 4^{1/p} 2^{\frac{-n-1}{m}}.$$

Demonstração: Sabemos que em espaços quase-Banach vale a desigualdade $e_1(id : \mathbb{X} \to \mathbb{X}) \leq 1$. Logo, se $(n-1) \leq 2m/p$ para algum $n \in \mathbb{N}$ então $2^{\frac{n-1}{p}} \leq 4^{1/p}$ de onde $1 \leq 4^{1/p} 2^{-\frac{n-1}{p}}$ e o resultado segue da monotonicidade dos números de entropia.
Caso contrário, $(n-1) > 2m/p$, e então escolhermos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left[\frac{(1 + \varepsilon^p/2)^{1/p}}{\varepsilon/2^{1/p}} \right]^m = 2^{n-1}$$

isto é

$$\varepsilon = \left[\frac{2}{2^{\frac{p(n-1)}{m}} - 1} \right]^{1/p} < 1. \tag{3.18}$$

Considere $x_1, x_2, ..., x_N \in B_X$ o conjunto maximal de B_X tal que $||x_i - x_j|| \geq \varepsilon$ $(i, j = 1, 2, ..., N$ e $i \neq j)$. Assim, B_X pode ser coberto pelas bolas $x_i + \varepsilon B_X$, e mais do que isso, a bolas $x_i + \frac{\varepsilon}{2^{1/p}} B_X$ são disjuntas a cada $(i, j = 1, 2, ..., N$ e $i \neq j)$. De fato, se existisse $y \in X$ nessa interseção, teríamos:

$$||x_i - z||^p \leq \varepsilon/2^{1/p} \;\; e \;\; ||x_j - z||^p \leq \varepsilon/2^{1/p}, \; com \;\; i \neq j$$

de onde,

$$||x_i - x_j||^p \leq ||x_i - z||^p + ||x_j - z||^p \leq 2(\varepsilon/2^{1/p})^p = \varepsilon^p, \; absurdo.$$

Além disso, podemos ver que dado $y \in x_i + \frac{\varepsilon}{2^{1/p}} B_X$, então $y = x_i + z$, com $||z|| < \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}$. Aplicando a desigualdade $p - triangular$ resulta em

$$||y||^p \leq ||x_i||^p + ||z||^p < 1 + \varepsilon^p/2.$$

Tal desigualdade nos fornece que dado $y \in x_i + \frac{\varepsilon}{2^{1/p}} B_X$ então $y \in x_i + (1 + \frac{\varepsilon^p}{2})^{1/p} B_X$.

Então, podemos comparar os volumes destas bolas (esse volume respeita medidas invariantes por translações em $\mathbb{X}$).

$$N.(\frac{\varepsilon}{2^{1/p}})^m \leq (1 + \varepsilon^p/2)^{m/p},$$

e usando a primeira desigualdade em (3.18)

$$N \leq \Big[\frac{(1+\varepsilon^p/2)^{m/p}}{\frac{\varepsilon}{2^{1/p}}}\Big]^m = 2^{n-1}.$$

Assim, cobrimos a bola unitária de $\mathbb{X}$ com de bolas centradas em x_i com $i = 1, 2, ..., N$ onde $N \leq 2^{n-1}$. Da definição de números de entropia, segue

$$e_n(id : \mathbb{X} \to \mathbb{X}) \leq \varepsilon = \Big[\frac{(1+\varepsilon^p/2)^{m/p}}{\frac{\varepsilon}{2^{1/p}}}\Big] \leq [4.2^{-\frac{p(n-1)}{m}}]^{1/p}.$$

para o caso que faltava. □

Teorema 3.17. *Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ um operador linear limitado entre os espaços $p-$Banach e $q-$ Banach respectivamente, onde $0 < p, q \leq 1$. Sejam $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências de números naturais positivos. Então*

$$e_{k_1+k_2+...+k_n+1-n}(T)^q \leq 2^{2nq/p - \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j-1}{m_j}.q} + 4^{q/p} \sum_{l=1}^{n} 2^{2(l-1)q/p - \sum_{j=1}^{l-1} \frac{k_j-1}{m_j}.q} c_{ml+1}(T)^q.$$

Demonstração: De fato, a ideia geral aqui é aplicar o 3.15 a uma sequência $(M_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de subespaços de codimensão finita, menor ou igual a m_j.

Usando o Lema 3.16 juntamente com o Lema 3.14, podemos escolher $\varepsilon_{m_j}-$redes onde

$$\varepsilon_j = 4^{1/p} 2^{-\frac{k_j-1}{m_j}} \quad e \quad \#\mathbb{M}_{m_j} = \#N_{m_j} \leq 2^{k_j-1}.$$

Então, da definição de δ_k, nós temos

$$\delta_k = \prod_{j=1}^{k} \varepsilon_{m_j} = \prod_{j=1}^{k} 2^{2/p - \frac{k_j - 1}{m_j}} = 2^{2k/p - \sum_{j=1}^{k} \frac{k_j - 1}{m_j}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Defina

$$N = \Big\{ T(\sum_{j-1}^{n} \delta_{j-1} x_j) : x_j \in N_{m_j} \Big\},$$

e veja que $\# N \leq \# \prod_{j=1}^{n} N_{m_j} \leq \prod_{j=1}^{n} 2^{k_j - 1} = 2^{(\sum_{j=1}^{n} k_j) - n}$.

Agora, pelo ítem (iii) do 3.15, para cada $x \in B_X$ existe $y \in N$ tal que

$$||Tx - y||_Y^q \leq (||T|| \delta_n)^q + 4^{q/p} \sum_{k=1}^{n} \delta_{l-1}^q \tau_{m_l}^q.$$

Portanto, da definição de números de entropias, tomando $\varepsilon^q = (||T||\delta_n)^q + 4^{q/p} \sum_{k=1}^{n} \delta_{l-1}^q \tau_{m_l}$ e lembrando que $\# N \leq 2^{(\sum_{j=1}^{n} k_j) - n} < 2^{(\sum_{j=1}^{n} k_j) - n + 1}$ temos

$$e_{k_1 + k_2 + \ldots + k_n - n + 1}(T)^q \leq (||T|| \delta_n)^q + 4^{q/p} \sum_{k=1}^{n} \delta_{l-1}^q \tau_{m_l}^q.$$

Podemos estimar δ_n e δ_{l-1} no lado direito desta igualdade usando a desigualdade em (3.19), resultando em

$$e_{k_1 + k_2 + \ldots + k_n - n + 1}(T)^q \leq 2^{2nq/p - \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j - 1}{m_j} . q} ||T||^q + 4^{q/p} \sum_{k=1}^{n} 2^{2(l-1)q/p - \sum_{j=1}^{l-1} \frac{k_j - 1}{m_j} . q} \tau_{m_l}^q.$$

Lembrando que $\tau_{m_l} = ||T_{|m_l}||$ e da definição de $c_{m_l + 1}$, tomando o ínfimo dos valores acima, variando todas as sequências de subespaços (M_j) cuja codimensão é menor que $m_l + 1$ temos o desejado

$$e_{k_1 + k_2 + \ldots + k_n - n + 1}(T)^q \leq 2^{2nq/p - \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j - 1}{m_j} . q} ||T||^q + 4^{q/p} \sum_{k=1}^{n} 2^{2(l-1)q/p - \sum_{j=1}^{l-1} \frac{k_j - 1}{m_j} . q} c_{m_l + 1}(T)^q.$$

□

Finalmente estamos aptos a provar o resultado principal desta seção.

Teorema 3.18. *Seja $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma transformação linear limitada entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, então para todo $\alpha > 0$ existe γ_α tal que*

$$\sup_{1 \leq k \leq n} k^\alpha e_k(T) \leq \gamma_\alpha \sup_{1 \leq k \leq n} k^\alpha c_k(T).$$

Demonstração: Perceba que é suficiente mostrar para todo $n \in \mathbb{N}$ e alguma constante γ_α

vale

$$n^\alpha e_k(T) \leq \gamma_\alpha \sup_{1\leq k\leq n} k^\alpha c_k(T).$$

Por homogeneidade podemos assumir que $c_k(T) \leq k^{-\alpha}$ para $1 \leq k \leq n$. Em particular, $c_1(T) = ||T|| \leq 1$. Usando a monotonicidade dos números de Gelfand, é suficiente mostrar tal resultado para $n = C2^N$, onde $C \geq 1$ é um natural qualquer (daremos mais detalhes na demonstração) e $N \in \mathbb{N}$ é um natural qualquer.

Escolha $\beta > \alpha > 0$, $m_j = 2^{N-j}$, e $k_j = [2^{N-j}(2/p + \beta) + 1]$, onde $j = 1, 2, ..., N$ Aqui $\lceil x \rceil$ representa o menor inteiro maior ou igual a x. Assim, temos:

$$(k_j - 1)/m_j \geq 2/p + \beta.$$

Definindo $\varepsilon_j = 4^{1/p}2^{-\frac{k_j-1}{m_j}}$ como foi feito no teorema anterior, temos

$$-(\frac{k_j - 1}{m_j}) + \frac{2}{p} \leq -\beta \quad isto \ \ é, \quad 4^{1/p}.2^{-\frac{k_j-1}{m_j}} \leq 2^{-\beta},$$

usando essa estimativa no Teorema 3.17, temos

$$e_{k_1+k_2+...+k_N+1-N}(T)^q \leq 2^{-\beta N q} + 4^{q/p} \sum_{l=1}^{N} 2^{-\beta(l-1).q}(2^{N-l} + 1)^{-\alpha q}$$

$$\leq 2^{-\beta N} + 4^{q/p}.2^{-\alpha N q}2^{\beta q} \sum_{l=1}^{N} 2^{(\alpha-\beta)q} \leq \gamma_{\alpha,\beta}2^{-N\alpha q}, \tag{3.20}$$

onde $\gamma_{\alpha,\beta}$ depende apenas de α e de β. Como C é um natural qualquer, podemos fixar $C > 2/p + \beta + 1$. Assim podemos estimar o índice do número de entropia, retirando a dependência direta de p e de β

$$1 - N + \sum_{j=1}^{N} k_j \leq 1 - N + \sum_{j=1}^{N}[2^{N-j}(2/p + \beta) + 2] = 1 + N + (2/p + \beta)\sum_{j=1}^{N} 2^{N-j}$$

$$\leq 1 + N + (2/p + \beta)2^N \leq C2^N.$$

Utilizando essa estimativa, junto com a propriedade M_e em 3.20, segue

$$e^q_{C2^N} \leq e_{k_1+k_2+...+k_N+1-N}(T)^q \leq \gamma_{\alpha,\beta}2^{-N\alpha q} \leq c'(C2^N)^{-\alpha q}.$$

Onde $c' > 0$ foi tomado a fim de cumprir $c' \geq C^{\alpha q}\gamma_{\alpha,\beta}$. Veja que assim, c' depende apenas de α, pois C foi fixado e β depende de α. Assim, concluímos que

$$e_{C2^N} \leq (c')^{1/q}(C2^N)^{-\alpha}.$$

Tomando $n = C2^N$, mostramos que existe uma constante $\gamma_\alpha > 0$ cumprindo

$$n^\alpha e_n \leq \gamma_\alpha \leq \gamma_\alpha \sup_{1\leq k\leq n} c_k(T),$$

como queríamos. $\square$

Capítulo 4

Estimativas em Dimensão Finita

Nese capítulo estudaremos algumas estimativas que conseguimos para o operador identidade entre os espaços de dimensão finita ℓ_p^n e ℓ_q^n sobre um corpo $\mathbb{K}$ que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Essas estimativas são muito importantes e já foram bastante estudadas para o caso de espaços de Banach.

Antes de começarmos, fixemos algumas notações. As vezes denotamos apenas por s_n ao invés $s_n(id)$ o n-ésimo s-número do operador identidade (fazendo aqui um abuso de notação para englobar os números de entropia). Escrevemos, quando fizer-se necessário $s_n^{\mathbb{R}}(T)$ para dizer $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são $\mathbb{R}$-espaços vetoriais. Por fim, quando escrevermos $s_n(T) \sim a$, para algum número real positivo a, queremos dizer que existem constantes positivas $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$a.k_1 \leq s_n(T) \leq k_2.a$$

O Lema que se segue foi retirado do [8] e será utilizado sem a devida demonstração, pois entendemos que demonstrar tal fato não é crucial para a teoria.

Lema 4.1. . *Dado $n \in \mathbb{N}$, então:*
i)se $0 < p \leq \infty$, então o volume da bola unitária em ℓ_p^n é $vol(\overline{B}_{\ell_p^n}) = \pi^n \frac{\Gamma(1+\frac{2}{p})^n}{\Gamma(1+\frac{2n}{p})}$
ii) Existe uma função $\theta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,com $0 < \theta(x) < \frac{1}{12}$, para todo $x > 0$, tal que para todo $p \in (0, \infty)$.
$vol(\overline{B}_{\ell_p^n}) = 2^{n-1}\pi^{\frac{1}{2}3n-1}p^{\frac{-(n-1)}{2}}n^{\frac{2n}{p}-\frac{1}{2}}exp(n\theta(2/p)p/2 - \theta(2n/p)(p/2n))$.

Antes de prosseguirmos apresentaremos duas versões da desigualdade de Hölder.

Teorema 4.2. *(Desigualdades de Hölder) Sejam $x, y \in \ell_p^n$ e p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, então valem as seguintes desigualdades:*

(i) $\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'})^{1/p'}$ *se* $1 < p$;

(ii) $\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \geq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'})^{1/p'}$ *se* $0 < p < 1$.

Perceba que no segundo caso, temos $p' < 0$ para cumprir a propriedade de conjugado de Hölder.

A demonstração de (i) é um fato conhecido em análise funcional e a demonstração de (ii) pode ser encontrada no Teorema 13.6 *do livro [13].*

4.1 Estimativas dos números de entropia

Proposição 4.3. *Estimativa superior dos números de entropia* $e_k(id : \ell_p^n \to \ell_q^n) = e_k$ *Seja* $0 < p \leq q \leq \infty$

$$e_k \leq C_{p,q} \begin{cases} 1 & se \quad 1 \leq k \leq log_2(2n) \\ (k^{-1}log_2(1+\frac{2n}{k}))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} & se \quad log_2(2n) \leq k \leq 2n \\ 2^{-\frac{k}{2n}}(2n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} & se \quad k \geq 2n \end{cases}$$

Onde $C_{p,q}$ *é uma constante que independe de* n *e de* K*.*

Demonstração: Primeiramente, consideraremos o caso em que $k \geq 2n$ e $0 < p \leq q \leq 1$. Nesse caso, ℓ_p^n e ℓ_q^n são espaços $p - Banach$. Defina $r = 2^{\frac{-k}{2n}}(2n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ e $K = K(r)$ o número de pontos $y_j \in \overline{B}_p^n$ tal que $||y_j - y_m||_q > r$, onde $j \neq m$, $j, m \in \{1, 2, ..., K\}$.

Com essa definição, e do fato que ℓ_p^n tem dimensão finita, $\overline{B}_p^n$ é compacta, e $\{y_j + rB_q^p; j = 1, 2, ..., K\}$ é uma cobertura aberta e finita para a bola fechada unitária. Imediatamente disto resulta que:

$$\overline{B}_p^n \subset \bigcup_{j=1}^{K}\{y_j + r\overline{B}_q^n.\} \tag{4.1}$$

Usando a desigualdade de Hölder, considerando $0 < p < 1$ e $z \in \overline{B}_q^n$ podemos verificar que

$$||z||_p^p \leq r^p||z||_q^p n^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Disto, sai que:

$$||y_j + rz||_p \leq 1 + r^p||z||_p^p \leq 1 + r^p||z||_q^p n^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

$$\leq 1 + r^p||z||_p^p = 1 + r^p n^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \leq 2,$$

Portanto

$$||y_j + rz||_p \leq 2^{\frac{1}{p}}. \tag{4.2}$$

A última desigualdade se dá diretamente da definição de r.

Combinando esse resultado com a desigualdade de (4.1), segue

$$\overline{B}_p^n \subset \bigcup_{j=1}^{K}\{y_j + r\overline{B}_q^n\} \subset 2^{\frac{1}{q}}\overline{B}_p^n. \tag{4.3}$$

Agora, daremos uma olhada nas bolas $y_j + 2^{-\frac{1}{q}}r\overline{B}_q^n$ para $j = 1, 2, ..., K$. Se supormos que existem duas bolas dessa forma com interseção não nula, com $q \leq 1$, existe $i \neq j \in \{1, 2, .., K\}$ e z na interseção tal que:

$$||y_j - y_i||_q^q \leq ||y_j - z||_q^q + ||y_i - z||_q^q \leq (2^{-\frac{1}{q}}r)^q + (2^{-\frac{1}{q}}r)^q$$

$$\leq 2^{-1}r^q + 2^{-1}r^q = 2.2^{-1}r^q = r^q \leq r,$$

de onde,

$$||y_j - y_i||_q^q \leq r^q. \tag{4.4}$$

A desigualdade acima vem do fato que $0 < q \leq 1$, e $2^{-\frac{1}{q}}r \geq 1$, assim a exponencial é não decrescente. O mesmo ocorre com $r^q \leq r$, gerando assim o absurdo, isto é, tais bolas são disjuntas.

Combinando (4.3) e (4.4) temos que

$$K2^{\frac{-2n}{q}}r^{2n}vol(\overline{B}_q^n) \leq 2^{\frac{2n}{p}}vol(\overline{B_p^n})\ . \tag{4.5}$$

Aqui usamos o fato que $vol(r\overline{B_p^n}) = r^{2n}vol(\overline{B_p^n})$, pois o corpo de escalares é $\mathbb{C}$, que é isométrico a $\mathbb{R}^2$.
Usando (ii) do Lema 4.1 e a desigualdade de Hölder, existe uma constante positiva $c = c_{p,q}$ dependendo apenas de p e q tal que:

$$vol\overline{B_p^n} \leq c^{2n}(2n)^{-2n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}vol\overline{B_q^n}. \tag{4.6}$$

Combinando (4.5) e (4.6), sai que $K \leq 2^{k+cn}$. Já em (4.4), lembrando que

$$I(\overline{B_p^n}) = \overline{B_p^n} \subset \bigcup_{j=1}^{K}\{y_j + r\overline{B_q^n}\}.$$

Pondo $K = 2^{n'-1}$, para algum $n' \in \mathbb{N}$, temos $e_{n'-1} \leq r$. Como $k + cn \geq n' - 1$ da propriedade M_e, temos que $e_{n'-1} \geq e_{k+cn}$.

Note que acima cometemos um abuso de notação pois 2^{k+cn} nem sempre é um número natural. Então, se $k' \geq 1$ denote $e_{k'} = e_{\lfloor k'\rfloor+1}$, onde $\lfloor k'\rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a k'.

$$e_{k+cn} = e_{k'} \leq 2^{\frac{-(k'-cn)}{2n}}(2n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} = 2^c.2^{\frac{-k'}{2n}}(2n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \; para \; k \geq 2n. \tag{4.7}$$

Então, pondo k da forma $k = c_1 n$, para $c_1 > 1$, independente de n e k, nós temos provado este caso com $0 < p \leq q \leq 1$.

Para o caso $1 \leq p \leq q \leq \infty$ com $k \geq 2n$ temos ℓ_p^n e ℓ_q^n espaços de Banach. Note que a argumentação feita para o primeiro caso continua valendo, apenas devemos trocar a desigualdade $p-triangular$ pela desigualdade triangular em (4.2) e (4.4) e a prova segue da mesma forma.

Um caso interessante é quando consideramos $0 < p = q \leq \infty$. Nesse caso, considere $id : \ell_p^n \to \ell_p^n$. De M_d temos $e_1 \leq ||id||$, de onde

$$||id|| = \sup_{||x||_p} \leq 1||id(x)||_p = \sup_{||x||_p} \leq 1||x||_p = 1,$$

temos

$$e_k \leq 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para o terceiro caso, considerando $0 < p < q = \infty$, tome novamente $c_1 > 1$ e para $k \leq c_1 n$ escolha

$$c_2 > (\frac{1}{c_1} log_2(1 + \frac{1}{c_1})^{-1/p}),$$

e defina

$$\sigma := c_2(k^{-1} log_2(\frac{n}{k}))^{1/p} = c_2 n^{\frac{-1}{p}}(\frac{n}{k} log_2(\frac{n}{k}+1))^{\frac{1}{p}}.$$

Note que da escolha de c_2, temos que $\sigma > n^{\frac{-1}{p}}$. Nós definimos n_σ o número máximo de componentes y_n que $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \overline{B_p^n}$ pode ter para o qual $|y_n| > \sigma$.

Obviamente, $n_\sigma < n$. Além disso podemos ver que $n_\sigma \sigma^p \leq 1$ ainda da escolha de c_2.

Podemos supor que $\sigma^{-p} \in \mathbb{N}$ e que $n_\sigma \sigma^p = 1$ por que σ depende diretamente de c_2, e podemos toma-lo de forma que cumpra o desejado.

Defina $e_k^{(\sigma)} := e_k(id : \; l_p^{n_\sigma} \to l_\infty^{n_\sigma})$ e coloque $k = c_1 \sigma^{-p}$ voltando em (4.7), temos

$$e_{c_1\sigma^{-p}}^{(\sigma)} \leq c_3 n_\sigma^{\frac{-1}{p}} = c_3 \sigma \quad Para \;\; c_1 \leq 1 \;\; e \;\; c_3 \leq 1.$$

□

Lema 4.4. *Estimativa inferior I de e_k para $id : \ell_p^n \to \ell_q^n$.*
Tome $0 < p \leq q \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$ então

$$e_k \geq c. \begin{cases} 1 & se \quad 1 \leq k \leq log_2(2n) \\ 2^{-\frac{k}{2n}}(2n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} & se \qquad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Para uma constante positiva c, independente de k e n mas que pode depender de p e q.

Demonstração: Para o primeiro caso, seja $1 \leq k \leq log_2(2n)$ e considere $y \in \ell_q^n$ tal que y possui todas as entradas nulas, exceto por uma, que pode ser 1 ou -1. Assim, sabemos que existem $2n$ elementos dessa forma.
Da definição de e_k, existem $x_1, x_2, ..., x_{2^{k-1}}$ tal que

$$\overline{B_p^n} \subset \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} \{x_i + \varepsilon \overline{B_q^n}\}. \tag{4.8}$$

Como $k \leq log_2\ (2n)$, resulta em $2^k \leq 2n$, de onde, $2^{k-1} < 2n$, existem pelo menos $y_1 \neq y_2$ contidos em uma mesma $\varepsilon-$bola centrada em x_0, i.é.,

$$y_1 \in \{x_0 + \varepsilon\overline{B_q^n}\} \rightarrow ||y_1 - x_0||_q \leq \varepsilon,$$

$$y_2 \in \{x_0 + \varepsilon\overline{B_q^n}\} \rightarrow ||y_2 - x_0||_q \leq \varepsilon.$$

Tome então $\overline{q} = \{1, q\}$ a fim de que sempre valha a seguinte desigualdade.

$$||y_1 - y_2||_q^{\overline{q}} \leq ||y_1 - x_0||_q^{\overline{q}} + ||x_0 - y_2||_q^{\overline{q}} \leq 2\varepsilon^{\overline{q}}. \tag{4.9}$$

(Essa desigualdade sempre vale no caso que $q \leq 1$ pois, ℓ_q^n é $q-$Banach. No caso em que $q > 1$, ℓ_q^n é Banach e a desigualdade se mantém do modo que $\overline{q}$ foi tomado).
Basta tomar $c > 0$ tal que :

$$c \leq ||y_1 - y_2||^{\overline{q}} \rightarrow c \leq 2\varepsilon^{\overline{q}} \rightarrow (\frac{c}{2})^{\frac{1}{\overline{q}}} \leq \varepsilon.$$

Tomando o ínfimo dos valores de ε, temos o desejado $c' = (\frac{c}{2})^{\frac{1}{\overline{q}}} \leq e_k$.

Perceba que supomos apenas y_1, y_2 na mesma $\varepsilon-$ bola centrada em x_0, o caso de mais elementos na mesma $\varepsilon-$bola se resume a esse, pois temos $2n$ elementos da forma y_i, então basta tomar o menor c cumprindo (4.8) para cada dois $y_i \neq y_j$.

Para o caso $k > log_2(2n)$, usamos novamente (4.8) para cobrir B_p^n com $\varepsilon-$bolas centradas em $x_i \in \ell_q^n$, $i = 1, 2, ..., 2^{k-1}$. Segue diretamente disto que: $vol(\overline{B_p^n}) \leq 2^{k-1}vol(\varepsilon\overline{B_q^n}) \leq 2^k vol(\varepsilon\overline{B_q^n})$.

Como estamos considerando espaços complexos, fazemos a identificação de $\mathbb{C}^n$ com

$\mathbb{R}^{2n}$, isto é,

$$vol(\varepsilon\overline{B_q^n}) = \varepsilon^{2n} vol(\overline{B_q^n}).$$

Portanto

$$vol(\overline{B_p^n}) \leq 2^k \varepsilon^{2n} vol(\overline{B_q^n}).$$

Tomando o ínfimo dos valores de ε na definição de e_k, temos:

$$e_k \geq \frac{2^{\frac{-k}{2n}} vol(\overline{B_p^n})^{\frac{1}{2n}}}{vol(\overline{B_q^n})^{\frac{1}{2n}}}. \tag{4.10}$$

Usando [19, Sect. 7, 7.1], existem c_1 e c_2 tais que:

$$c_1 n^{\frac{-1}{p}} \leq (vol(\overline{B_p^n}))^{\frac{1}{2n}} \leq c_2 n^{\frac{-1}{p}}.$$

Usando esse resultado duas vezes em (4.10), existem c_1 e c_2' tais que

$$e_k \geq \frac{2^{\frac{-k}{2n}} vol(\overline{B_p^n})}{vol(\overline{B_q^n})} \geq \frac{2^{\frac{-k}{2n}} c_1 n^{\frac{-1}{p}}}{vol(\overline{B_q^n})} \geq \frac{2^{\frac{-k}{2n}} c_1 n^{\frac{-1}{p}}}{c_2' n^{\frac{-1}{q}}}$$

$$= c\frac{2^{\frac{-k}{2n}} n^{\frac{-1}{p}}}{n^{\frac{-1}{q}}} = c.2^{\frac{-k}{2n}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \geq c.2^{\frac{-k}{2n}} 2n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

para $c = \frac{c_1}{c_2'}$.

A última desgualdade ocorre pois $p \leq q$ então $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \leq 0$, junto com o fato de que $n \leq 2n$, temos

$$n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \geq 2n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

A fim de que valham as duas desigualdades, basta tomar o mínimo entre c' no primeiro caso e c no segundo. □

Lema 4.5. ($Estimativa\ inferior\ II\ de\ e_k\ da\ id: \ell_p^n \to \ell_q^n,$).
Seja $0 < p \leq q \leq \infty$. *Então*

$$e_k \geq (k^{-1} log_2(1 + \frac{2n}{k}))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

para alguma constante positiva c, *que independe de* n *e de* k, *mas pode depender de* p *e de* q.

Demonstração: Consideraremos primeiramente espaços reais, e sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com

$n \geq 4$ e $1 \leq m \leq \frac{n}{4}$. Defina o conjunto

$$S := \{x = (x_j)_{j=1}^n \in \{-1, 0, 1\}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 2m\}.$$

Note que S é o conjunto das $n-uplas$ com $2m$ entradas diferentes de 0. Por isso, temos $\binom{n}{2m}$ formas de escolher $\{x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{j2m}; x_{ji} \neq 0\}$, onde cada uma dessas entradas pode ser 1 ou -1, assim $\#S = \binom{n}{2m}2^{2m}$.

Definimos a distância de Hamming em S como

$$h(x, y) := \#\{j \in \{1, 2, ..., n\} : x_j \neq y_j\}.$$

Note que para um $x \in S$ fixado, temos um limitante superior para a cardinalidade do subconjunto de S onde $h(x, y) \leq m$

$$\#\{y \in S : h(x, y) \leq m\} \leq \binom{n}{m}.3^m. \tag{4.11}$$

Para vermos isso basta tomar $J \subset \{1, 2, ..., n\}$ com $\#J = m$ e por $y_j = x_j$ quando $j \notin J$, assim, quando $j \in J$, temos três possibilidades para cada y_j, isto é $y_j \in \{-1, 0, 1\}$.

Portanto, para esse J temos 3^m possibilidades de escolher $y \in S$ com $h(x, y) \leq m$.

Como temos $\binom{n}{m}$ possibilidades de escolher $J \in \{1, 2, ..., n\}$ com $\#J = m$, segue o afirmado.

Ao tomarmos arbitrariamente $A \subset S$, onde $\#A \leq a := \binom{n}{2m}/\binom{n}{m}$, por (4.11) temos

$$\#\{y \in S : \exists x \in A \mid h(x, y) \leq m\} \leq \#A\binom{n}{m}.3^m \leq \binom{n}{2m}.3^m < \binom{n}{2m}.2^{2m} = \#S. \tag{4.12}$$

Com isso, garantimos que para todo $x \in A$ existe $y \in S$ tal que $h(x, y) > m$. Construímos então indutivamente um subconjunto A' com $\#A' > a$ e $h(x, y) > m$ para todo $x, y \in A'$ e $x \neq y$. Logo, para quaisquer $x, y \in A'$ concluímos que

$$\|x - y\|_q > m^{1/q}. \tag{4.13}$$

diretamente do fato que $\sum_{j=1}^n |x_j - y_j| > m$, já que $x_j \neq y_j$ em pelo menos $m + 1$ entradas e, nessas posições, $|x_j - y_j| > 1$.

Note que

$$(2m)^{-1/p}A' \subset \overline{B}_p^n. \tag{4.14}$$

pois, $|x_j|^p = |x_j|\ \forall j = 1, 2, ..., n$ e $x \in A'$. Assim,

$$\|(2m)^{-1/p}x\|_p^p = \sum_{j=1}^{n} \|(2m)^{-1/p}x_j|^p = (2m)^{-1}\sum_{j=1}^{n}|x_j| = (2m)^{-1}2m = 1.$$

Lembrando que o resultado do último somatório se da pela definição de S. Em verdade, diretamente de (4.14),

$$\|x-y\|_q \geq (2m)^{-1/p}.m^{1/q} \ \ para \ \ todo \ \ x, y \in (2m)^{-1/p}A'.$$

Defina $k = log_2 a$ e $r = (2m)^{-1/p}.m^{1/q}$ e vamos usar a notação de números de entropia e_λ usada na Proposição 4.3.

Da definição de k, temos $2^{k-1} \leq a \leq \#A'$. De (4.14) e da definição de números de entropia, existe uma $\varepsilon-$bola, centrada em algum $y_i \in \ell_q^n$ tal que, $x_1, x_2 \in (2m)^{-1/p}A'$ estão nesta bola, i.é.,

$$||x_1 - y_i\|_q \leq \varepsilon \ e \ \|x_2 - y_i\|_q \leq \varepsilon,$$

de onde resulta,

$$r^q \leq \|x_1 - x_2\|_q^q \leq \|x_1 - y_i\|_q^q + \|x_2 - y_i\|_q^q \leq 2\varepsilon^q.$$

Tomando o ínfimo dos valores de ε, temos

$$e_k \geq \frac{r}{2^q} = c_1 m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \tag{4.15}$$

onde $c_1 > 0$ é uma constante que depende apenas de p e q.

Agora olharemos mais de perto para melhor estimar e_k.

$$a = \frac{\binom{n}{2m}}{\binom{n}{m}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{n-2m+j}{m+j}.$$

Pela escolha de n e m, a função

$$f(x) = \frac{n-2m+x}{m+x},$$

decresce para $x > 0$, então

$$\frac{n-2m+j}{m+j} \leq \frac{n-2m}{m}, \ \forall j = 1, 2, ..., m.$$

Por outro lado, é fácil ver também que

$$\frac{n-m}{2m} \leq \frac{n-2m+j}{m+j}.$$

Assim,

$$(\frac{n-m}{2m})^m \leq a \leq (\frac{n-2m}{m})^m.$$

Relembrando da definição de k, temos:

$$c_2.m.log_2(\frac{n}{m}) \leq m.log_2(\frac{n-m}{2m}) \leq m.log_2(\frac{n-2m}{m}) \leq m.log_2(\frac{n}{m}).$$

Onde a primeira desigualdade se dá aplicando propriedade de logarítmo pois $\frac{n-m}{2m} = \frac{1}{2}(\frac{n}{m} - 1)$, de onde existe c_2 $(0 < c_2 \leq \frac{1}{2}log_2(\frac{3}{2}))$ cumprindo o desejado.

Note que a função $g(x) = x.log_2(\frac{n}{x})$ é estritamente crescente no intervalo $[1, \frac{n}{4}]$ que contém o intervalo $[log_2 n, \frac{n}{2}]$ pois $n \geq 4$. Além de ser estritamente crescente, tal função é contínua nesse intervalo, portanto a inversa existe, e

$$g(x) = y = x.log_2\left(\frac{n}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{n}{y} = \frac{n}{x}.\frac{1}{log_2\left(\frac{n}{x}\right)} \Rightarrow log_2\left(\frac{n}{y}\right) = log_2\left(\frac{n}{x}\right) + log_2\left(\frac{1}{log_2(\frac{n}{x})}\right)$$

$$\Rightarrow log_2\left(\frac{n}{y}\right) = log_2\left(\frac{n}{x}\right) - log_2\left(log_2\left(\frac{n}{x}\right)\right) \Rightarrow \frac{y}{log_2\left(\frac{n}{y}\right)} = x.\frac{log_2\left(\frac{n}{x}\right)}{log_2(\frac{n}{x})\left(1 - \frac{log_2(log_2(\frac{n}{x}))}{log_2(\frac{n}{x})}\right)} \geq x.$$

Onde a última desigualdade ocorre pois $x \in [1, \frac{n}{4}]$. Agora podemos considerar $\log_2 n \leq k \leq \frac{c_2 n}{2}$ e $x = m$ e $y = k$ e veja que

$$m \leq m.\frac{k}{log_2(\frac{n}{k} + 1)},$$

por que $\frac{n}{k} \geq 2$, e portanto

$$log_2(\frac{n}{k}) \geq log_2\left(\frac{n}{k} + 1\right). \tag{4.16}$$

Para o caso $\log_2 n \leq k \leq \frac{c_2}{2}$, usando novamente (4.15) é possível concluír que:

$$e_k \geq c_1 m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} = c_1 \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = c_1 \left(\frac{1}{m}.\frac{k}{k}.\frac{\log_2\left(1+\frac{n}{m}\right)}{\log_2\left(1+\frac{n}{m}\right)}.\frac{\log_2\left(1+\frac{n}{k}\right)}{\log_2\left(1+\frac{n}{k}\right)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

$$= c_1 \left(\frac{\log_2(1+\frac{n}{k})}{k}.\frac{k}{m.\log_2(1+\frac{n}{m})}.\frac{\log_2(1+\frac{n}{m})}{\log_2(1+\frac{n}{k})}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \geq c' \left(\frac{\log_2\left(1+\frac{n}{k}\right)}{k}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Onde $m.\log\left(1+\frac{n}{m}\right) \geq c_3$ que independe de k e n pois $\log_2 x$ é uma função crescente e k cresce. Analogamente, usando (4.16) é possível mostrar que existe $c_4 > 0$ cumprindo:

$$\frac{\log\left(1+\frac{n}{m}\right)}{\log_2\left(1+\frac{n}{k}\right)} \geq \frac{\log_2(n)}{\log_2\left(\frac{n}{\log_2 n}+1\right)} \geq \bar{c}.\frac{\log_2(n)}{\log_2\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)} = \bar{c}.\frac{\log_2(n)}{\log_2(n)-\log_2(\log_2 n)} \geq c_4.$$

pois n é fixado. Assim a constante $c' > 0$ fica bem definida, cumprindo a desigualdade desejada.

Para o caso $\frac{c_2 n}{2} \leq k \leq n$ usamos a monotonicidade dos números de entropia e a estimativa de (4.15).

$$e_k \geq c_1 n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \geq c_1 n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \geq c'' \left(\frac{\log_2\left(1+\frac{n}{k}\right)}{k}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

onde a segunda desigualdade ocorre por que $m \leq n$ e $\frac{1}{q}-\frac{1}{p} \leq 0$ e a terceira por $\frac{c_2 n}{2} \leq k \leq n$ e c'' não depende de k e de n.

Assim, tomando $c = min\{c', c''\}$ temos demonstrado a estimativa inferior para o caso de ℓ_p^n ser um espaço real. Perceba que no caso complexo basta por $n = 2l$. □

Teorema 4.6. *Comportamento de* $e_k(id : \ell_p^n \to \ell_q^n)$
Tome $0 < p \leq q \leq \infty$. *Então*

$$e_k(: id : \ell_p^n \to \ell_q^n) \sim \begin{cases} 1, & se \quad 1 \leq k \leq \log_2(2n) \\ (k^{-1}\log_2(1+\frac{2n}{k}))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} & se \quad \log_2(2n) \leq k \leq 2n \\ 2^{-\frac{k}{2n}}(2n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} & se \quad k \geq 2n \end{cases}$$

Demonstração: A demonstração desse fato se deve a unir os casos encontrados em 4.3,4.4 e 4.5 □

4.2 Estimativas dos números de aproximação

Definição 4.7. *Sejam $k \leq n$, $1 \leq p$ e $q \leq \infty$. Definimos*

$$\phi(n,k,p,q) := \begin{cases} (\min\left\{1; n^{\frac{1}{q}}k^{-\frac{1}{2}}\right\}), & se\ 2 \leq p < q \leq \infty \\ max\left\{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \min\{1, n^{\frac{1}{q}}k^{-\frac{1}{2}}\}.\sqrt{1-\frac{k}{n}}\right\}, & se\ 1 \leq p < 2 \leq q \leq \infty \\ max\left\{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \left(\sqrt{1-\frac{k}{n}}\right)^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}\right\}, & se\ 1 \leq p < q \leq 2 \end{cases}$$

e

$$\psi(n,k,p,q) := \begin{cases} \phi(n,k,p,q), & se \quad 1 \leq p < q < p' \\ \phi(n,k,q',p') & se \quad max\{p,p'\} < q \leq \infty \end{cases}$$

Onde p' e q' são tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ e $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}$.

A seguir, apresentaremos alguns resultados sem demonstrá-los, começando no Teorema 4.8 ao Lema 4.12. A maioria desses resultados são clássicos nessa teoria e apenas os usaremos para mostrar outras estimativas.

Teorema 4.8. *Seja $a_k^{\mathbb{R}} := a_k(id : \ell_p^{n,\mathbb{R}} \to \ell_q^{n,\mathbb{R}})$ é o k-ésimo número de aproximação da identidade entre os espaços reais $\ell_p^{n,\mathbb{R}}, \ell_q^{n,\mathbb{R}}$.*
(i) Se assumirmos $1 \leq p < q \leq \infty$ e $(p,q) \neq (1,\infty)$, então

$$a_k^{\mathbb{R}} \sim \psi(n,k,p,q)$$

Onde as constantes de equivalência dependem apenas de p e q.
(ii) Se $1 \leq p \leq q \leq 2$ ou $2 \leq p \leq q \leq \infty$ então

$$a_k^{\mathbb{R}} \geq \sqrt{(1-\frac{k}{n})}$$

A demonstração desse resultado é encontrado em [8, Sec. 3.2.3].

Lema 4.9. *Seja $k \in \mathbb{N}$ e tome p, q no fechado $[1,\infty]$. Então*

$$a_{2k-1}^{\mathbb{R}} \leq a_k \leq 2.a_{2k}^{\mathbb{R}}$$

A demonstração desse fato pode ser encontrada em [20] nos Lemas 3.3 e 3.4.

Lema 4.10. *Se $1 \leq k \leq n < \infty$ e $0 < q \leq p \leq \infty$, então*

$$a_k = (n-k)^{1/q-1/p}.$$

A demonstração desse resultado, segundo o autor, é uma generalização do caso encontrado na seção 11.11.5. do livro [17].

Lema 4.11. *Seja* $0 < p \leq 1$.
(*i*) *Seja* $0 < \lambda < 1$. *Então existe um número* $c_\lambda > 0$ *tal que para todos* $k, n \in \mathbb{N}$ *com* $n^\lambda < k \leq n$ *temos*

$$a_k(id : \ell_p^n \to \ell_\infty) \leq \frac{c_\lambda}{\sqrt{k}}.$$

(*ii*) *Existe* $c > 0$ *tal que se* $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n^{\mathbb{R}}(id : \ell_p^{2n} \to \ell_\infty^{2n}) \geq \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

A demonstração encontra-se em [20, Lem. 3.4.].

Lema 4.12. *Seja* $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p$ *e* $q \leq \infty$ *e* $k \leq \frac{n}{4}$, *então*

$$a_k \sim \begin{cases} 1 & se \quad 1 \leq p < q \leq 2 \\ min(1, n^{\frac{1}{q}} k^{-\frac{1}{2}}) & se \quad 1 \leq p < 2 \leq q < p' \\ min(1, n^{\frac{1}{p'}} k^{-\frac{1}{2}}) & se \quad 1 \leq p < 2 < p' \leq q \leq \infty \quad e\ (p,q) \neq (1,\infty) \\ 1 & se \quad 2 \leq p \leq q \leq \infty \end{cases}$$

A prova é corolário do Teorema 4.8 e do Lema 4.9

Teorema 4.13. *Seja* $n \in \mathbb{N}$, *então*
(*i*) *Se* $0 < p \leq q \leq 2$ *e* $k \leq \frac{n}{4}$, *então* $a_k \sim 1$.
(*ii*) *Se* $0 < q \leq p \leq \infty$ *e* $n = 2k$, *então* $a_k \geq 2^{-\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$.
(*iii*) *Se* $0 < p < 2 < q < p'$ *e* $k \leq \frac{n}{4}$, *então* $a_k \sim (1, k^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}})$.

Demonstração: Primeiramente, provaremos (*iii*). Defina $\beta_k = a_k(id : \ell_1^n \to \ell_q^n)$ e $e^p = (\delta_{i,r})_{i=1}^n$, com $r = 1, 2, ..., n$ e $\delta_{i,r}$ o delta de Kronecker. Assim podemos denotar a bola fechada de l_1^q por

$$\overline{B}_1^q = \{x = \sum_{r=1}^n \lambda_r e^p : \sum_{r=1}^n |\lambda_r| \leq 1\}.$$

Da definição do $k-$*ésimo* número de aproximação, tome $T : \ell_1^n \to \ell_q^n$ com $dim(Im(T)) < k$ e $x \in \overline{B}_1^n$

$$Ix - Tx = x - Tx = \sum_{r=1}^n \lambda_r (e^p - Te^p) = \sum_{r=1}^n \lambda_r w^p.$$

Logo,

$$\beta_k = \sup_{x \in \overline{B}_1^n} ||x - Tx||_q^q = sup_{x \in \overline{B}_1^n} || \sum_{r=1}^{n} \lambda_r w^p ||_q^q$$

$$\leq \sup_{x \in \overline{B}_1^n} \sum_{r=1}^{n} |\lambda_r|^q \max_{1 \leq r \leq n} \{||w^p||_q^q\} = \max_{1 \leq r \leq n} ||w^p||_q^q.$$

Onde $w^p = e^p - Te^p$. Da definição de β_k, temos

$$\beta_k \leq \max_{1 \leq r \leq r} ||w^p||. \tag{4.17}$$

Dito isso, note que

$$\max_{1 \leq r \leq n} ||w^p|| = \max_{1 \leq r \leq n} ||(id : \ell_p^n \to \ell_q^n) w^p - Tw^p||_q \leq ||id - T||.$$

Tomando o ínfimo desses valores para todos operadores T, de $dim(Im(T)) \leq k$, temos $\beta_k \leq a_k(id : \ell_p^n \to \ell_q^n)$. Usando o Lema 4.12, chegamos em

$$\min(1, n^{\frac{1}{q}} k^{-\frac{1}{2}} \ \beta_k) \leq a_k. \tag{4.18}$$

Por outro lado, a desigualdade oposta e obtida pelo fato que estamos considerando $1 < p$ (pois estamos generelazindo o Lema 4.12) e da monotonicidade dos espaços ℓ_p^n, temos $\ell_p^n \hookrightarrow \ell_1^n$ completando esse caso.

Para demonstrar (i), primeiramente assumiremos que $0 < p < 1 < q \leq 2$, assim, (4.18) continua valendo e temos $a_k \geq c.1$. Novamente, pela monotonicidade dos espaços ℓ_p^n chegamos em $a_k \leq \beta_k$, de onde $a_k \sim 1$. Basta analisarmos o caso restante, quando $0 < p \leq q \leq 1$. Voltando ao primeiro passo, veja que (4.17) continua valendo quando consideramos β_k como o k-ésimo número de aproximação da identidade $(id : \ell_q^n \to \ell_q^n)$, assim:

$$\beta_k \leq \max_{1 \leq r \leq n} ||(id : \ell_p^n \to \ell_q^n) - T||_q.$$

Portanto, tomando o ínfimo de todos os operadores T e relembrando que nesse caso $\beta_k = 1$ para todo k natural, temos o desejado $1 \leq a_k$. A desigualdade oposta, novamente é obtida usando a monotonicidade dos espaços ℓ_p^n, o que concluí $a_k \sim 1$.

Finalizando o Teorema 4.13, no ítem (ii) veja que $n = 2k$, assim, dado $T : \ell_p^n \to \ell_q^n$ contínuo com $dim(Im(T)) < k$, temos que a matriz $n \times n$ que reprenta T é tal que $postoT = k < \frac{n}{2}$. Dito isso, sabemos que $dim(ker(T)) \geq \frac{n}{2}$ e usando o Lema de V.D.Milman (ver [17, Sec. 2.9., Lem. 2.9.6]) que nos diz que existe um elemento $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in kerT$ com $|x_j| \leq 1$ para todo $j = 1, 2, ..., n$, por exemplo, $|x_1| =$

$|x_2| = ... = |x_{\frac{n}{2}}| = 1$. Assim, para esse x temos:

$$||x||_q \geq (n/2)^{1/q} \; e ||x||_p \leq n^{1/p}. \tag{4.19}$$

Logo, para esse x temos $Tx = 0$, de onde

$$||x||_q = ||(I - T)x||_q \leq ||I - T||.||x||_p$$

$$||I - T|| \geq \frac{||x||_p}{||x||_q} \geq \frac{n^{1/p}}{(n/2)^{1/q}}. \tag{4.20}$$

Tomando o ínfimo desses valores, para T com $dim(Im(T)) \leq k$, por (4.20) $a_k = a_k(id : \ell_p^n \to \ell_q^n)$ chegamos em $a_k \geq 2^{-\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$. □

Corolário 4.14. *Seja* $0 < p \leq 2 \leq q \leq \infty$ *(ou* $1 < p \leq 2 < q = \infty$*). Então*
(i) Existe uma constante $c > 0$ *tal que para todo* $k, n \in \mathbb{N}$

$$a_k \leq c n^{1/\min\{p', q\}} k^{-\frac{1}{2}}.$$

(ii) Existe $c > 0$ *tal que para todo* $k, n \in \mathbb{N}$ *com* $k \leq \frac{1}{4} n^{2/\min\{p', q\}}$.

$$a_k \geq c.$$

Demonstração: (i): Primeiramente consideramos $k > n$, assim, pelo item R_a do Teorema 2.6, sabemos que $a_k = 0$ e a desigualdade vale. Para o caso em que $k \leq n$, considere as aplicações $J : \ell_p^n \to \ell_p^{4n}$ definida por $J(x) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)$ $\forall x \in \ell_p^n$ e $P : \ell_q^{4n} \to \ell_q^n$ $P(y) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ $\forall y \in \ell_q^{4n}$, assim:

$$\begin{aligned}
a_k(id : \ell_p^n \to \ell_q^n) &= a_{k+1-1}(P(id : \ell_p^{4n} \to \ell_q^n)J) \\
&\leq a_1(P) a_{k+1}((id : \ell_p^{4n} \to \ell_q^n)J) \\
&\leq a_1(P) a_{k+1-1}((id : \ell_p^{4n} \to \ell_q^n)J) \\
&\leq a_1(P).a_1(J).a_{k+1}(id : \ell_p^{4n} \to \ell_q^n) \\
&\leq a_1(P).a_1(J).a_{k+1-1}(id : \ell_p^{4n} \to \ell_q^n) \\
&\leq ||P||.||J||.a_k(id : \ell_p^{4n} \to \ell_q^n).
\end{aligned}$$

Perceba que nas desigualdades acima usamos as propriedades M_a e P_a do 2.6 várias vezes. É fácil ver que o operador J injeção J e o operador projeção P são limitados. Dito isto, perceba que estamos nas hipóteses do Lema 4.12, âssim podemos estimar $a_k(id : \ell_p^{4n} \to \ell_q^n)$ tomando $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ de onde:

$$a_k \leq ||P||.||J||.(4n)^{\frac{1}{q}}k^{-\frac{1}{2}},$$

$$e$$

$$a_k \leq ||P||.||J||.(4n)^{\frac{1}{p'}}k^{-\frac{1}{2}},$$

de onde, concluímos a primeira estimativa.

A segunda estimativa (ii) vem do fato que $0 < p \leq 2 \leq q < \infty$ (ou completamente análogo $1 < p \leq q \leq \infty$). Segue disso, que $\min\{p', q\} \geq 2$, pois $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (É convencionado que $p' = \infty$ quando $0 < p \leq 1$). Como nesse caso $k < \frac{1}{4}n^{1/\min\{p',q\}}$, temos $k < \frac{n}{4}$ e podemos usar novamente o 4.12. Note também que

$$n^{1/\min\{p',q\}}k^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(n^{2/\min\{p',q\}})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$$

de onde, segue a existência de $c > 0$ cumprindo o desejado e independente de k e n. $\square$

4.3 Estimativas dos números de Kolmogorov

Lema 4.15. *Seja $1 \leq k \leq n < +\infty$ e $1 \leq p,\ q < \infty$, definimos:*

$$\Phi(n,k,p,q) := \begin{cases} (n-k+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & se\ 1 \leq p \leq q \leq \infty \\ (\min\left\{1, n^{\frac{1}{q}}k^{-\frac{1}{2}}\right\}), & se\ 2 \leq p < q \leq \infty \\ max\left\{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \sqrt{1-\frac{k}{n}}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}\right\}, & se\ 1 \leq p < q \leq 2 \\ max\left\{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \min\left\{1, n^{\frac{1}{q}}k^{-\frac{1}{2}}\right\}.\sqrt{1-\frac{k}{n}}\right\}, & se\ 1 \leq p < 2 < q \leq \infty \end{cases}$$

Então $d_k(\ell_p^n \to \ell_q^n) \sim \Phi(n,k,p,q)$ se $p < \infty$, onde as constantes de equivalências independem de k e n mas pode depender de p e q.

Além disso, existem constantes c_p e $C_p > 0$ tais que :

$$c_p\Phi(n,k,p,q) \leq d_k(\ell_p^n \to \ell_q^n) \leq C_p\Phi(n,k,p,q)(log(\frac{en}{k}))^{3/2}$$

se $p < \infty$.

A demonstração desse resultado encontra-se em [20] no Lema 4.2.

Lema 4.16. *Se $0 < q \leq p \leq \infty$ então existe uma constante $c > 0$ tal que.*
$d_{\lceil cn \rceil+1}(id : \ell_p^{2n} \to \ell_q^{2n}) \geq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ para todo k natural. Onde $\lceil . \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a cn.

Demonstração:. Primeiramente, consideramos o caso em que $q \geq 1$, usamos [16, Subsec. 11.11.4, Lem. 1], de onde temos:

$$d_n(id : \ell_p^m \to \ell_q^m) \geq (m-n+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \quad para \quad 1 \leq n \leq m.$$

Porém esse argumento em geral não vale para $q < 1$. Para isso, recordamos dois fatos, sendo o primeiro deles a estimativa encontrada em4.4, onde mostramos que

$$e_k(id : ell_p^{2n} \to \ell_q^{2n}) \geq c_1.2^{-\frac{k}{4n}(4n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}.$$

para uma constante $c_1 > 0$ que depende unicamente de p e q. O segundo fato decorre da Proposição 3.10, de onde tiramos que

$$c_2.n^{\alpha} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq \sup_{1 \leq k \leq n} k^{\alpha} d_k(id : \ell_p^{2n} \to \ell_q^{2n}).$$

Isso quer dizer que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \leq n$ tal que

$$c_2.n^{\alpha} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq k_n^{\alpha} d_{k_n}(id : \ell_p^{2n} \to \ell_q^{2n}).$$

Além disso, existe uma constante $c \in (0, 1]$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $n \geq k \geq cn$. Combinando essa conclusão com a estimativa inferior chegamos em:

$$c_2.n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq d_{[cn]+1}(id : \ell_p^{2n} \to \ell_q^{2n}).$$

□

4.4 Estimativas dos números de Gelfand

Nessa seção mostraremos algumas estimativas do número de Gelfand do operador identidade estudadas recentemente por Vybíral, Kolleck e Hinrichs em [14]. Também apresentaremos algumas estimativas estudadas por Vybíral em [20]. Nesse caso, apenas usaremos tais estimativas, porém sem demonstrá-las.

Optamos por manter a notação utilizada no artigo [14], portanto até o final dessa seção $\log(x) = \log_2(x)$ e a identificação ℓ_p^n sobre $\mathbb{C}$ com ℓ_p^{2n} sobre $\mathbb{R}$ fica implícita.

Definição 4.17. *Para* $1 \leq n \leq m < \infty$ *e* $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$*, definimos:*

$$\phi(m,n,p_1,p_2) = \begin{cases} (m-n+1)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}, & se \quad 1 \leq p_2 \leq p_1 \leq \infty \\ \left(min\{1, m^{1-\frac{1}{p_1}} n^{\frac{-1}{2}}\}^{\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{2}}} \right), & se \quad 1 < p_1 < p_2 \leq 2 \\ max \left\{ \sqrt{\{m^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\}}. \sqrt{1-\frac{n}{m}}^{\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}}} \right\}, & se \quad 2 \leq p_1 < p_2 \leq \infty \\ max \left\{ m^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}, min \left\{ 1, m^{1-\frac{1}{p_1}} n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-\frac{n}{m}} \right\} \right\}, & se \quad 1 < p_1 \leq 2 < p_2 \leq \infty \end{cases}$$

Lema 4.18. *Se* $p_1 > 1$*, e* $1 \leq n \leq m < \infty$*. então:*

$$c_n(id : \ell_{p_1}^m \to \ell_{p_2}^m) \approx \phi(m,n,p_1,p_2).$$

A demonstração desse fato encontra-se em [20, Lem. 4.7.].

Lema 4.19. *Se* $0 < p_2 \leq p_1 \leq \infty$*, então:*

$$c_n(id : \ell_{p_1}^m \to \ell_{p_2}^m) = (m-n-1)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}.$$

Esse resultado encontra-se em [20, Lem. 4.8.].

Lema 4.20. *Seja* $0 < p < 1$*. Então existe uma constante real* $c > 0$ *tal que:*

$$c_n(id : \ell_{p_1}^m \to \ell_{p_2}^m) \leq c \left(\frac{n}{log(1+\frac{m}{n})} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

$\forall 1 \leq n \leq m < \infty.$

Esse resultado encontra-se em do [20, Lem. 4.9.].

Lema 4.21. *Seja* $0 < p_1 < 1$ *e* $p_1 < p_2 \leq \infty$*, então*

$$c_n(id : \ell_{p_1}^m \to \ell_{p_2}^m) \leq c \left(\frac{n}{log(1+\frac{m}{n})} \right)^{\frac{1}{min(p_2,2)}-\frac{1}{p_1}}.$$

Esse Lema é consequência imediata do Lema 4.20, e está em [20], Lema 4.11.

Teorema 4.22. *Para* $m \in \mathbb{N}$ *com* $1 \leq n \leq m$ *e* $0 < p \leq q \leq 2$ *então existem constantem* $c_{p,q}$ *e* $C_{p,q}$ *maiores que 0 que não dependem de n e m.*

$$c_{p,q} \min\big\{1, \frac{1+log(m/n)}{n}\big\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq c_n(id : \ell_p^m \to \ell_q^m) \leq C_{p,q}\big\{1, \frac{1+log(m/n)}{n}\big\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \quad (4.21)$$

Demonstração: Primeiramente, considere o caso em que se $p = q$. Da propriedade (N_c), temos $c_n(id) = 1$ de onde segue a igualdade. Caso $p \neq q$, isto é, $p < q$ definimos $\alpha := 1/p - 1/q > 0$ e a estimativa superior sai imediatamente do Lema 4.21, pois $q \leq 2$ e temos

$$c_n(id : \ell_p^m \to \ell_q^m) \leq c \left(\frac{n}{log(1 + \frac{m}{n})} \right)^{-\alpha} = c \left(\frac{log(1 + \frac{m}{n})}{n} \right)^{\alpha} \leq c \left(\frac{1 + log(\frac{m}{n})}{n} \right)^{\alpha},$$

e multiplicando por $n^{2\alpha}$ no Teorema 4.6, encontramos C para todo natural n, tal que $log(m) < n < m$.

$$C \left(\frac{1 + log(m/n)}{n} \right)^{\alpha} n^{2\alpha} = C\left(n(1 + log(m/n))\right)^{\alpha} \leq n^{2\alpha} e_n(id : \ell_p^m \to \ell_q^m).$$

Onde C é a constante de equivalência dada pelo 3.18. Combinando com o 4.6,

$$C\left(n(1 + log(m/n))\right)^{\alpha} \leq \sup_{1 \leq j \leq n} j^{2\alpha} e_j(id : \ell_p^m \to \ell_q^m) \leq \gamma_{2\alpha} \sup_{1 \leq j \leq n} j^{2\alpha} c_j(id : \ell_p^n \to \ell_q^m). \tag{4.22}$$

Agora tomaremos $\lambda > 1$ um número real que fixaremos mais tarde, e dividindo o último supremo em (4.22) temos

$$\sup_{1 \leq j \leq n} j^{2\alpha} c_j(id : \ell_p^m \to \ell_q^m) \leq \sup_{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{\lambda} \rfloor} j^{2\alpha} c_j(id : \ell_p^n \to \ell_q^m) + \sup_{\lceil \frac{n}{\lambda} \rceil \leq j \leq n} j^{2\alpha} c_j(id : \ell_p^n \to \ell_q^m). \tag{4.23}$$

Perceba que se $n < \lambda$, temos $\lfloor \frac{n}{\lambda} \rfloor = 0$ e $\lceil \frac{n}{\lambda} \rceil$=1, assim o conjunto onde calcularemos o primeiro supremo é vazio e não estaremo fazendo nada de novo nesta desigualdade. Agora supondo que $n \geq \lambda$, no primeiro supremo, utilizaremos a estivamativa superior em 4.21 que já foi demonstrada, isto é

$$\sup_{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{\lambda} \rfloor} j^{2\alpha} c_j(id : \ell_p^n \to \ell_q^m) \leq \sup_{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{\lambda} \rfloor} j^{2\alpha} C_{p,q} \left(\frac{1 + log(m/j)}{j} \right)^{\alpha} \leq C_{p,q} \left(\frac{n(1 + log(\lambda m/n))}{\lambda} \right)^{\alpha}.$$

A última desigualdade ocorre por que a função real $f(x) := (x.(1 + log(m/x)))^{\alpha}$ é decrescente para $1 \leq x \leq m$.

Usando o fato que $\lambda > 1$ e propriedade de logaritmo, temos

$$\sup_{1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{\lambda} \rfloor} j^{2\alpha} c_j(id : \ell_p^n \to \ell_q^m) \leq C_{p,q} \left(\frac{n(1 + log(\lambda) + \log(m/n))}{\lambda} \right)^{\alpha}.$$

$$\leq C_{p,q}\left(\frac{1+log(\lambda)}{\lambda}.n(1+\log(m/n))\right)^{\alpha}. \tag{4.24}$$

Para estimar o segundo supremo na 4.23, usamos a monotonicidade dos números de Gelfand, pois $c_{\lceil \frac{n}{\lambda}\rceil}(T) \geq c_j(T)\ \forall\ j \geq\ \lceil \frac{n}{\lambda}\rceil$, de onde

$$\sup_{\lceil \frac{n}{\lambda}\rceil \leq j \leq n} j^{2\alpha} c_j(id:\ell_p^n \to \ell_q^m) \leq n^{2\alpha} c_{\lceil \frac{n}{\lambda}\rceil}(id:\ell_p^n \to \ell_q^m). \tag{4.25}$$

Usando as estimativas de4.22, 4.24 e 4.25 em 4.23, temos

$$C\left(n(1+log(m/n))\right)^{\alpha} \leq \gamma_{2\alpha} C_{p,q}\left(\frac{1+log(\lambda)}{\lambda}.n(1+\log(m/n))\right)^{\alpha} + \gamma_{2\alpha} n^{2\alpha} c_{\lceil \frac{n}{\lambda}\rceil}(id:\ell_p^n \to \ell_q^m).$$

Dividindo os dois lado dessa equação por $n^{2\alpha}$ e reagrupando o termos temos

$$\left(C-\gamma_{2\alpha}C_{p,q}\left(\frac{1+log(\lambda)}{\lambda}\right)\right)^{\alpha}\left(\frac{(1+log(m/n))}{n}\right)^{\alpha} \leq \gamma_{2\alpha} c_{\lceil \frac{n}{\lambda}\rceil}(id:\ell_p^n \to \ell_q^m). \tag{4.26}$$

Observando que $\frac{1+log(\lambda)}{\lambda}$ tende a zero quando λ cresce, então existe $\lambda_0 > 1$ tal que.

$$\frac{1+log(\lambda)}{\lambda} \leq C' \quad \forall \lambda \geq \lambda_0.$$

Onde C' não depende de n e de m. Assim, podemos reescrever a estimativa de (4.26)

$$C'.\left(\frac{(1+log(m/n))}{n}\right)^{\alpha} \leq \gamma_{2\alpha} c_{\lceil \frac{n}{\lambda}\rceil}(id:\ell_p^n \to \ell_q^m). \tag{4.27}$$

Perceba que como dito acima, se $\lambda_0 < n$, teremos apenas o segundo supremo na desigualdade 4.23, e o raciocínio é o mesmo, utilizando apenas a estimativa de 4.25 e adaptando C'.

Agora, de posse da desigualdade 4.27, veja que se existir $k \in \mathbb{N}$ cumprindo $log(N) \leq k \leq m/\lambda_0$. Escrevendo $n = \lfloor \lambda_0(k-1)+1 \rfloor$. Do fato que $\lambda_0 > 1$ nos temos $n \leq \lambda_0 k \leq m$ e $\lceil n/\lambda_0 \rceil = k$. Pela monotonicidade da função real $f(x) := (1+log(m/x))/x$ e usando propriedades operatórias de logaritmo nos obtemos

$$c_k(id:\ell_p^m \to \ell_q^m) \geq C'\left(\frac{1+log(m/n)}{n}\right)^{\alpha} \geq C'\left(\frac{1+log(m/\lambda_0 k)}{\lambda_0 k}\right)^{\alpha}$$

$$\geq \frac{C'}{\lambda_0(1+log(\lambda_0))^{\alpha}}\left(\frac{1+log(m/k)}{k}\right)^{\alpha} = C''\left(\frac{1+log(m/k)}{k}\right)^{\alpha}. \tag{4.28}$$

Por outro lado, quando $m/\lambda_0 \leq n \leq m$, nós temos da monotonicidade de número de Gelfand,

$$c_n(id : \ell_p^m \to \ell_q^m) \geq c_m(id : \ell_p^m \to \ell_q^m) = \inf_{M \subset \ell_p^m,\ cod(M) < m} \sup_{x \in M,\ ||x||_p \leq 1} ||x||_q.$$

$$\inf_{x \in \ell_p^m} \frac{||x||_q}{||x||_p} = ||(id : \ell_p^m \to \ell_q^m)||^{-1} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\alpha} \leq 1. \tag{4.29}$$

A ultima deigualdade ocorre por que $m \geq 1$ e $\alpha > 0$. Assim, unindo 4.28 e 4.29 temos demonstrado o requerido para $log(m) \leq n \leq m$. Para o caso restante, $1 \leq n \leq log(m)$, basta utilizar novamente (M_c) e ver que $c_n(id : \ell_p^m \to \ell_q^m) \geq c_{\lceil log(m) \rceil}(id : \ell_p^m \to \ell_q^m)$, recaindo no caso já demonstrado, pois $\lceil log(m) \rceil \in 1 \leq n \leq log(m)$. $\square$

Capítulo 5

Caso Multilinear

Nesse capítulo, generalizaremos para espaços quase-Banach os conceitos de m-quase s-números, quase s-números e s-números associados a um operador multilinear limitado, estudado por Dicesar L. Fernandez, Mieczslaw Mastylo e Eduardo Brandani da Silva no artigo [9]. Mostraremos nesse contexto que os números de aproximação e Kolmogorov são s-números.

Definição 5.1. *Sejam $(\mathbb{X}_i, ||.||_{\mathbb{X}_i})$ espaços quase-Banach, com suas respectivas quase-normas, para i=1,2,...,m. Definimos no espaço produto cartesiano $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m$ a soma e multiplicação por escalar usuais, e a quase-norma*

$$||x|| = \max_{1 \leq i \leq m} ||x_i||_{\mathbb{X}_i}$$

Com isso, é simples ver que tal espaço também é quase-Banach, cuja constante C pode ser tomada $C = \max_{1 \leq i \leq m} C_{\mathbb{X}_i}$, onde $C_{\mathbb{X}_i}$ é a constante de cada espaço quase-Banach $\mathbb{X}_i$.

De fato, dados $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ dois elementos do espaço cartesiano,

$$||x+y|| = ||(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_m+y_m)|| = \max_{1 \leq i \leq m} ||x_i+y_i||_{\mathbb{X}_i} \leq \max_{1 \leq i \leq m} C_{\mathbb{X}_i}(||x_i||_{\mathbb{X}_i}+||y_i||_{\mathbb{X}_i})$$

$$= C \max_{1 \leq i \leq m} (||x_i||_{\mathbb{X}_i} + ||y_i||_{\mathbb{X}_i}) = C(||x|| + ||y||).$$

A completude do espaço produto é herdada naturalmente da completude de cada espaço, pois dada uma sequência de Cauchy $(x^{(n)})_n$ em $(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, ||.||)$ então, para todos n, k naturais vale que

$$||x^{(n)} - x^{(k)}|| < \varepsilon \text{ então, } \max_{1 \leq i \leq m} ||x_i^{(n)} - x_i^{(k)}||_{\mathbb{X}_i} \leq \varepsilon,$$

definindo para cada $i = 1, 2, ..., m$ a sequência $(x_i^{(n)})_n = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, ..., x_i^{(n)}, ..)$ no espaço

$\mathbb{X}_i$, temos imediatamente que $(x_i^{(n)})_n$ é uma sequência de Cauchy no respectivo espaço $\mathbb{X}_i$. Assim, para cada $i = 1, 2, ..., m$ existe x_i tal que $(x_i^{(n)})_n \to x_i$.

Portanto, definindo $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, vemos que $(x^{(n)})_n \subset (\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, ||.||)$ converge a x.

Proposição 5.2. *A bola unitária no produto cartesiano $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m$ é igual ao produto cartesiano das bolas unitárias de cada espaço $\mathbb{X}_i$, $i = 1, 2, ..., m$, isto é,*

$$\overline{B}_{\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m} = \overline{B}_{\mathbb{X}_1} \times \overline{B}_{\mathbb{X}_2} \times ... \times \overline{B}_{\mathbb{X}_m}$$

Demonstração: De fato, veja que se $x \in \overline{B}_{\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m}$ então,

$$||x|| = \max_{1 \leq i \leq m} ||x_i||_{\mathbb{X}_i} \leq 1,$$

de onde, $x_i \in \overline{B}_{\mathbb{X}_i}$, $\forall\ i = 1, 2, ..., m$.

Reciprocamente, se $x_i \in \overline{B}_{\mathbb{X}_i}$ $\forall\ i = 1, 2, ..., m$, então $\max\limits_{1 \leq i \leq m} ||x_i||_{\mathbb{X}_i} \leq 1$ como queríamos.
$\square$

Para o que se segue, vale ressaltar que nem sempre a imagem de um operador multilinear é um subespaço vetorial do espaço de chegada. A próxima definição versa sobre isso.

Definição 5.3. *Dado um operador multilinear contínuo T entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y}$, definimos o posto de T como:*

$$posto(T) := dim([T(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times, ..., \times \mathbb{X}_m)]),$$

onde [.] denota o espaço gerado por combinações lineares de elementos da imagem de T, isto é, posto(T) é a dimensão do menor subespaço de $\mathbb{Y}$ que contém $Im(T)$.

A partir daqui denotaremos por $\mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$ o espaço dos operadores multilineares contínuos entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y}$. Vemos a dependência do número natural m nessa definição, pois ele está a priori fixado, mas pode ser tomado de modo genérico, desde que existam os espaços $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m$.

Definição 5.4. *Dado um operador multilinear $T \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$, a regra que associa a cada $m \in \mathbb{N}$ a sequência $s = (s_n) :\ \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y}) \to [0, \infty)^N$ de números não negativos é dita ser uma sequência de m-quase s-números do operador T se para todos k, n números naturais satisfizer*

(S_1) *Monotonicidade:* $||T|| = s_1(T) \geq s_2(T) \geq ... \geq 0.$
(S_2) *Aditividade: Para todo* $S \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$,

$$s_{k+n-1}(S+T) \leq C_{\mathbb{Y}}(s_k(S) + s_n(T)).$$

(S_3)*Propriedade de Ideal: Para todo* $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$,

$$s_n(ST) \leq ||S||s_n(T).$$

(S_4) *Propriedade de posto* : *posto*$(T) < n \Rightarrow s_n(T) = 0.$

Se (s_n) *for uma sequência de m-quase s-números a cada* $m \in \mathbb{N}$ *então* (s_n) *é dita ser apenas uma sequência de quase s-números. Os quase s-números são chamados de s-números se satisfizerem*

(S_5) *Propriedade de norma*

$$s_n(id : \ell_2^n \to \ell_2^n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Os quase s-números (s_n) *são chamados multiplicativos se para todo* $S \in L(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ *valer*
(S_6) *Propriedade multiplicativa:* $s_{k+n-1}(ST) \leq s_k(S)s_n(T).$

Quando $\mathbb{Y}$ *for também um espaço* $p-$*Banach, assim como no caso linear, definimos uma propriedade análoga a aditividade, que chamaremos de* $(S_2)'$.

(S_2)' *Para todo* $S \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$,

$$s_{k+n-1}(S+T)^p \leq s_k(S)^p + s_n(T)^p.$$

Observação 5.5. *Perceba que na definição acima, usamos a notação do artigo [9] para diferenciar a notação utilizada no caso linear. Porém, como esperado, quando restringimos tal definição a apenas um espaço de partida quase-Banach, as definições se equivalem.*

Observação 5.6. *Se* $(s_n) : \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y}) \to [0, \infty)^{\mathbb{N}}$ *cumprir* S_1 *e* S_6 *então cumpre* S_3.

A demonstração desse fato é imediata da observação 2.2, vendo que para a demonstração não usamos a linearidade em nenhum momento. Nesse sentido, fazendo pequenas alterações segue o resultado.

5.1 Números de aproximação: caso multilinear

Estamos interessados em estender a definição de números de aproximação dada na definição 2.5 para o caso de um operador multilinear e contínuo entre espaços quase-Banach. A motivação vem do fato que podemos estender naturalmente tal definição quando olhamos para espaços de Banach e operadores multilineares contínuos preservando as principais propriedades. Veremos que no caso quase-Banach, a generalização também ocorre como esperado, respeitando o caso linear.

Definição 5.7. *Dado $T \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$ um operador multilinear entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_m, \mathbb{Y}$, definimos os $n-$ésimo número de aproximação do operador T como*

$$a_n(T) := inf\{||T - A||;\ A \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y}),\ posto(A) < n.\}$$

Corolário 5.8. *Nas condições da definição acima, $(a_n)_n$ é uma sequência de s-números multiplicativos, além disso, quando o espaço de chegada $\mathbb{Y}$ também for $p-$Banach, vale $(S_2)'$.*

Com o mesmo raciocínio usado no que no caso linear, podemos ver que $a_n(T)$ cumpre $(S_1), (S_2), (S_2)', (S_3), (S_4), (S_5)$ e (S_6), pois na demonstração do Teorema 2.6 e do Corolário 2.7 não usamos linearidade, e nesse sentido tais propriedades se equivalem a $(M_s), (A_s), (A_s)', (S_s), (R_s), (I_s)$ e (P_s), respectivamente.

Proposição 5.9. *Seja $(s_n) : \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y}) \to [0, \infty)^{\mathbb{N}}$ uma sequência satisfazendo $(S_1), (S_2)$ e (S_4).*
(i) Se $\mathbb{Y}$ for também $p-$Banach, $(a_n)_n$ é a maior sequência que satisfaz

$$s_n(T) \leq a_n(T).$$

(i') No caso geral, considerando $C_{\mathbb{Y}} \geq 1$ a constante do espaço quase-Banach Y, vale a desigualdade.

$$s_n(T) \leq C_{\mathbb{Y}} a_n(T).$$

(ii) Se $\mathbb{Y}$ for $p-$Banach e (s_n) for uma sequência de m-quase s-números, então (s_n) tem a propriedade multiplicativa mista, isto é, para todo $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$, $T \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$ e $k, n \in \mathbb{N}$

$$s_{k+n-1}(ST) \leq s_n(T) a_k(T) \quad e \quad s_{k+n-1}(ST) \leq s_k(T) a_n(T).$$

$(ii)'$ *No caso geral,*

$$s_{k+n-1}(ST) \leq C_{\mathbb{Y}} s_n(T) a_k(T) \ \ e \ \ s_{k+n-1}(ST) \leq C_{\mathbb{Y}} s_k(T) a_n(T).$$

Demonstração: (i) Considere $A, T \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$ com *posto*$(A) < n$ e $\mathbb{Y}$ $p-$Banach. Pela aditividade $(S_2)'$, veja que

$$s_n(T)^p = s_{n+1-1}(T + A - A)^p \leq s_n(A)^p + s_1(T - A)^p. \tag{5.1}$$

Pelas propriedades (S_1) e (S_4) temos $s_n(A) = 0$ e $s_1(T - A) = ||T - A||$, de onde

$$s_n(T)^p \leq ||T - A||^p$$

e aplicando o ínfimo nessa desigualdade, onde os operadores A tem *posto*$(A) < n$, segue o resultado.

Para o caso geral, perceba que a desigualdade em (5.1) se reescreve como

$$s_n(T) \leq C_{\mathbb{Y}}(s_n(A) + s_1(T - A)) = C_{\mathbb{Y}}||T - A||,$$

e o resultado segue novamente.

(ii) Seja $A \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$ e Y $p-$Banach, com *posto*$(A) < n$. Disso, segue que *posto*$(SA) < n$ e usando novamente $(S_1), (S_2), (S_4)$, temos

$$s_{k+n-1}(ST)^p = s_{k+n-1}(S(T - A) + SA)^p \tag{5.2}$$

$$\leq s_k(S(T - A))^p + s_n(SA)^p = s_k(S(T - A))^p. \tag{5.3}$$

Pela propriedade de ideal (S_3), segue que $s_k(S(T - A)) \leq s_k(s)||T - A||$, isto é,

$$s_{k+n-1}(ST)^p \leq s_k(S)^p ||T - A||^p,$$

de onde provamos a primeira desigualdade. A segunda desigualdade vem do fato de podermos comutar a soma na primeira igualdade em (5.2), de onde resulta que

$$s_{k+n-1}(ST)^p \leq s_n(S)^p ||T - A||^p.$$

Para o caso geral, onde $C_{\mathbb{Y}}$ é a constante do espaço quase-Banach $\mathbb{Y}$, veja que o resultado segue trocando a desigualdade $p-$triangular em (5.2) pela desigualdade quase triangular, assim temos as duas desigualdades

$$s_{k+n-1}(ST) \leq C_{\mathbb{Y}}(s_k(S(T-A)) + s_n(SA)) \leq C_{\mathbb{Y}} s_k(S)||T-A||,$$

$$s_{k+n-1}(ST) \leq C_{\mathbb{Y}}(s_k(SA) + s_n(S(T-A))) \leq C_{\mathbb{Y}} s_n(S)||T-A||,$$

que encerram a demonstração. □

5.2 Números de Kolmogorov: caso multilinear

Veremos agora que a definição de números de Kolmogorov é facilmente estendida para o caso multilinear, mantendo a propriedade de serem s-números. Aqui estenderemos a definição 2.8 ao invés da definição encontrada na seção 4 do artigo [9]. Optamos por fazer isso para aproveitar os resultados já demonstrados no caso linear, porém mostraremos na observação 5.11 duas outras definições equivalentes, sendo uma delas a do artigo.

Definição 5.10. *Dado $T \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$ um operador multilinear entre os espaços quase-Banach $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_m, \mathbb{Y}$, definimos o $n-$ésimo número de Kolmogorov relativo ao operador T como*

$$d_n(T) = \inf_{\substack{U_n \subset Y \\ \dim(U_n) < n}} \sup_{||x|| \leq 1} \inf_{y \in U_n} ||Tx - y||.$$

A definição foi feita desta forma a fim de usar os resultados provados no Teorema 2.11, mas assim como no caso linear é possível provar duas equivalências desta definição.

Observação 5.11. *Valem as seguintes equivalências na definição de números de Kolmogorov:*

i) $d_n(T) = inf\{\varepsilon : T(\overline{B}_{X_1 \times X_2 \times ... \times X_m}) \subset N_\varepsilon + \varepsilon \overline{B_{\mathbb{Y}}}\}$.

ii) $d_n(T) = inf\{||\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}} T|| : V \subset Y, dim(V) < n\}$.

Onde N_ε é um subespaço de $\mathbb{Y}$ de dimensão finita menor de que n e $\mathbb{Q}_V^{\mathbb{Y}}$ é a aplicação quociente canônica sobre a imagem de T com respeito a V, que leva cada Tx na sua classe $[Tx]$.

A demonstração dessas equivalências foi feita no Teorema 2.13 para o caso linear. Para esse caso, vemos que a argumentação é a mesma, fazendo apenas uma pequena modificação quando consideramos $\overline{B}_{\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2\times...\times\mathbb{X}_m}$, observando da Proposição 5.2 a equivalência entre a bola unitária do produto cartesiano e o cartesiano das bolas unitárias de cada espaço.

Definição 5.12. *Dados $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m$ espaços quase-Banach, dizemos que este espaço possuí a propriedade de levantamento métrico multilinear, se para todo $\varepsilon > 0$, e todo operador $m-$linear contínuo $T : \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m \to \mathbb{Y}/N$ existir um $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$ cumprindo*

$$||T|| = ||Q_N^{\mathbb{Y}}\tilde{T}|| \quad e \quad ||\tilde{T}|| \leq (1+\varepsilon)||T||.$$

Onde $N \subset \mathbb{Y}$ é um subespaço qualquer.

Proposição 5.13. *Seja, $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_m, \mathbb{Y}$ espaços quase-Banach, tal que $\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2\times...\times\mathbb{X}_m$ possui a propriedade de levantamento métrico multilinear e $T \in L(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$, então*

$$a_n(T) \leq d_n(T).$$

Demonstração: Tome $\varepsilon > 0$, da equivalência das definições provada no Teorema 2.13, existe N um subespaço de $\mathbb{Y}$, tal que $dim(N) < n$ e $d_n(T) < ||Q_N^{\mathbb{Y}}T|| + \varepsilon$. Veja que $Q_N^{\mathbb{Y}}T$ sai de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m$ e chega em $\mathbb{Y}/N$, assim da propriedade de levantamento métrico multilinear, existe $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$ tal que

$$||Q_N^{\mathbb{Y}}T|| = ||Q_N^{\mathbb{Y}}\tilde{T}|| \quad e \quad ||\tilde{T}|| \leq (1+\varepsilon)||Q_N^{\mathbb{Y}}T||.$$

Defina $A : T - \tilde{T}$, e veja que $Q_N^{\mathbb{Y}}(A) = Q_N^{\mathbb{Y}}T - Q_N^{\mathbb{Y}}\tilde{T} = 0$, de onde $Im(A) \subset N$ e $posto(A) \leq dim(N) < n$, e da definição de $a_n(T)$, temos

$$a_n(T) \leq ||T - A|| = ||\tilde{T}|| \leq (1+\varepsilon)||Q_N^{\mathbb{Y}}T|| < (1+\varepsilon)(d_n(T) + \varepsilon).$$

Fazendo ε tender a 0, segue o resultado. □

Corolário 5.14. *Se o produto cartesiano de espaços Quase-Banch $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_m$ possui a propriedade de levantamento métrico multilinear e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$, então*
(i) Se $\mathbb{Y}$ for também $p-$Banach, então

$$d_n(T) = a_n(T).$$

(ii) No caso geral, sempre é possível mostrar que

$$a_n(T) \leq d_n(T) \leq C_{\mathbb{Y}} a_n(T).$$

Isso sai imediatamente de que $d_n(T)$ de fato é um s-número, assim podemos usar a Proposição 5.9.

Para o ítem i) basta combinarmos o ítem (i) da Proposição 5.9 com a Propoição 5.13.

Para o ítem ii), analogamente, usamos o ítem i)$'$ da Proposição 5.9 com a Proposição 5.13.

5.3 Números de Gelfand: caso multilinear

Ao tentarmos definir os númeroes de Gelfand multlineares no caso quase-Banach nos deparamos com vários problemas. Quando estendemos o caso Banach linear para o multilinear, foi mostrado no artigo [9] que se preservam as propriedades de serem s-números, o que não podemos garantir aqui. Porém, no caso em que estamos trabalhando, organizamos para que as perdas fossem as menores possíveis.

Definição 5.15. *Seja $T \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times, ..., \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$ o n-ésimo número de Gelfand é definido como*

$$c_n(T) = a_n(J_{\mathbb{Y}} T).$$

Onde $J_{\mathbb{Y}}$ é o mergulho canônico de $\mathbb{Y}$ em $(\ell_\infty(\overline{B}_{\mathbb{Y}'}), ||.||_\infty)$.

Essa definição é equivalente a dada em 2.14 para o caso linear e Banach (ver [6, Theo. 2.3.1.]), ou multilinear e Banach (ver [9]). Quando olhamos para o caso Banach e multilinear, não podemos garantir que o núcleo de um operador é subespaço, e isso é crucial em algumas demonstrações.

Porém, é possível contornar esse problema no caso multilinear e Banach, usando algumas equivalências e o fato da injeção canônica e o mergulho canônico serem isometrias sobre suas imagens.

É importante destacar aqui, que no caso linear e quase-Banach, perdemos essas propriedades pois não temos um análogo do Teorema de Hanh-Banach. Mais do que isso, como dito no Exemplo 1.36, não podemos nem garantir que que o dual desses espaços é diferente do trivial, assim também perdemos essa ferramenta.

Observação 5.16. *Não conseguimos garantir que os números de Gelfand sempre são s-números.*

Demonstração: É fácil ver que as propriedades (S_2, S_3, S_4) e S_5 são herdadas naturalmente da definição de números de aproximação multilineares, porém, devemos fazer uma consideração sobre a propriedade S_1.
Veja que se $k, n \in \mathbb{N}$ com $k \geq n$, temos

$$c_n(T) = a_n(J_{\mathbb{Y}}T) \geq a_k(J_{\mathbb{Y}}T) = c_k(T).$$

Porém, da propriedade de Ideal (S_3)

$$c_1(T) = a_1(J_{\mathbb{Y}}T) \leq ||J_{\mathbb{Y}}||.a_1(T) = ||J_{\mathbb{Y}}||.||T||,$$

e da desigualdade 1.8 temos que $||J_{\mathbb{Y}}|| \leq 1$, provando que $c_1(T) \leq ||T||$.

Veja que no caso de $\mathbb{Y}$ ser Banach, na equação (1.8) da Definição (1.38) fazendo a composição com T.

$$||J_{\mathbb{Y}}Tx||_{\ell_\infty(\overline{B}_{\mathbb{Y}'})} = \sup_{f \in \overline{B}_{\mathbb{Y}'}} |f(Tx)| = ||Tx||.$$

de onde, tomando o supremo com x na bola unitária do produto cartesiano segue $||J_{\mathbb{Y}}|| = ||T||$.

Assim, ocorre a igualdade $c_1(T) = 1$. Isso ocorre pela falta de um análogo do Teorema de Hanh-Banach para o caso quase-Banach, de onde não podemos garantir sempre a igualdade no caso geral.

O que podemos mostrar sempre é

$$||T|| \geq c_1(T) \geq c_2(T) \geq ... \geq 0.$$

Porém, fica claro também que no caso em que $||J_{\mathbb{Y}}|| = 1$, teremos s-números. □

Teorema 5.17. *Considere $T \in \mathcal{L}_m(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times, ..., \times \mathbb{X}_m, \mathbb{Y})$, então vale a desigualdade entre os números de Gelfand e os números de aproximação.*

$$c_n(T) \leq a_n(T).$$

Demonstração: A demonstração desse fato é imediata da propriedade de ideal de $a_n(T)$, pois

$$c_n(T) = a_n(J_{\mathbb{Y}}T) \leq ||J_{\mathbb{Y}}||a_n(T) \leq a_n(T).$$

□

Considerações Finais

Essa dissertação teve como objetivo principal estudar a teoria axiomática de s-números para operadores lineares contínuos entre espaços quase-Banach, além de uma breve introdução ao caso multilinear. No último caso, quase não existem trabalhos publicados, e isso é um fator motivador para estudos futuros.

Além da teoria clásica envonlvendo números de aproximação, entropia e Kolmogorov, procuramos apresentar os números de Gelfand para o caso quase-Banach e mostrar que tal definição produz de fato s-números. As estratégias utilizadas para provar tal afirmação foram uma generalização das utilizadas no caso Banach (ver [6, Sec. 2.3.]), porém não é usual utilizá-las para o caso quase-Banach, e esse foi mais um motivo para apresentá-las.

A apresentação de estimativas para o caso linear e dimensão finita que apareceram no texto é resultado de um esforço contínuo dos pesquisadores dessa área, e nos rende bons frutos, como a versão do Teorema de Carl usando números de Gelfand. Com isso, apresentamos algumas estimativas dos números de Gelfand, além de desigualdades entre s-números obtidas generalizando ideias do caso Banach.

Como mostrado no texto, quando saímos do caso linear e Banach para o linear e quase-Banach, perdemos várias ferramentas. Um exemplo muito importante disso é o Teorema de Hanh Banach, que relaciona espaços vetoriais e seus duais. Esse teorema e seus corolários são ferramentas muito conhecidas na análise funcional e, provaram-se necessárias ao trabalharmos com resultados ligados ao mergulho canônico de um espaço em $\ell_\infty(B_{\mathbb{X}'})$ ou para mostrar que a injeção canônica de um espaço em seu bidual é uma isometria (restrita a imagem). Isso gera algumas dificuldades quando trabalhamos com operadores lineares contínuos em espaços quase-Banach, e torna as coisas ainda mais difíceis no caso multilinear.

Outro exemplo de propriedade perdida é a de extensão métrica que $\ell_\infty(\overline{B}_{\mathbb{X}'})$ possui no caso de espaços de Banach, porém não podemos garantir em espaços quase-Banach. Isso se dá principalmente pelo fato de que quando consideramos quase-normas, existem espaços cujo dual é trivial. Além disso, mesmo restringindo tais espaços, ainda nos falta o Teorema de Hahn Banach para estender funcionais no caso quase-Banch, o que acaba

por inviabilizar tal ferramenta.
Porém, esse é outro fator motivador para continuar pesquisando nessa área, e que pode render muitos frutos futuramente nessa teoria.

O caso multilinear é muito interessante, pois mesmo quando estamos trabalhando com espaços de Banach, ao saltarmos do caso linear ao multilinear, já existem resultados muito triviais que deixam de valer, como o fato do núcleo de uma transformação multilinear nem sempre ser um subespaço vetorial. Esse exemplo é muito trivial, mas de grande valia ao provarmos propriedades operatórias de s-números. Assim, fica nítido o desafio que é trabalhar no caso multilinear e quase-Banach, pois além de todas as dificuldades já impostas por não estarmos trabalhando num espaço de Banach, surgem novas dificuldades intrínsicas ao fato do operador ser multilinear.

Por fim, a motivação desse trabalho foi a de escrever uma sequência considerada por nós apropriada, baseados principalmente no texto [12], onde apresentamos resultados gerais, que valem para qualquer espaço quase-Banach e portanto para a maioria dos espaços que estamos habituados a trabalhar. O intuito foi de partirmos dos principais resultados necessários, referente à teoria de espaços quase-Banach, até chegarmos ao conceito de s-números multilineares, objeto esse que é o foco das pesquisas nessa área no momento.

Referências Bibliográficas

[1] Abuabara, T.; Lesmes, J. *Elementos de Análisis Funcional*, Geometrical Functional Análisis, Bogotá, 1981.

[2] Bastero, J.; Bernués, J.; Peña, A. *An Extension of Milman's reverse Brunn-Minkowski inequality*, Geometrical Functional Analisis, 5(3):572-581,1995.

[3] Brezis, H. *Functional Analysis Sobolev Spaces ans Partial Differential Equations*, Springer, New Yorl, 2010.

[4] Carl, B.; Triebel, H. *Inequalities between Eigenvalues, Entropy Numbers and Related Quantities of Compact Operators in Banach Spaces*, Math. Ann. 251:129-133, 1980.

[5] Carl, B. *Entropy Numbers, s-Numbers and Eigenvalue Problems*, Journal of Functional Analysis, 41:290-306, 1981.

[6] Carl, B.; Stephani, I. *Entropy, Compactness and the Approxiation of Operators.* Cambridge University Press, New York, 1990.

[7] DeVore, R.; Lorentz, G.G. *Constructive approximation*, volume 303 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, 1993.

[8] Edmunds, D.E.; Triebel, H. *Function Spaces, Entropy Numbers and Diferential Operators.* Cambridge University Press, New York, 1996.

[9] Fernandez, D.F.; Mastylo, M.; Silva, E.B. *Quasi s-Numbers and Measures of Non-Compactness of Multilinear Operators.* Annales Academic Scientiarum Fennicae Mathematica, 38: 805-823, 2013.

[10] Haroske, D.D. *Approximations theorie Vorlesungsskript*, Friedrich-Schiller-Universität Jena, winter term 2009/2010

[11] Haroske, D.D., *Höhere Analysis Vorlesungsskript*, Friedrich-Schiller-Universität Jena, academic year 2010/2011

[12] Gerhold, M; Haroske, D.D. *Entropy-, Approximation- and Kolmogorov Numbers on quasi-Banach Spaces*, 2011.

[13] Hewitt, E.; Stromberg, K. *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[14] Hinrichs, A.; Kolleck, A.; Vibýral, J.; *Carl's Inequality for quasi-Banach Spaces.*, J. Funct. Anal., vol. 271, no. 8, pp. 2293-2307, 2016.

[15] Kalton, N.J.; Peck, N.T.; Roberts, J.W.; *An F-Space Sampler.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[16] Pietsch, A. *Operators Ideals.* North-Holand Publishing Company, Amsterdam, 1980.

[17] Pietsch, A. *Eingenvalues and s-numbers.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[18] Rolewicz, S. *Metric Linear Spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[19] Triebel, H. *Fractals and Spectra*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[20] Vibýral, J.; *Widths of Embeddings in Function Spaces.* Journal of Complexity, 24:545-570, 2008.