UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

CLÉIA FABIANE WINCK

Atratores Globais para Sistemas Dinâmicos Impulsivos - Uma Aproximação Pré-Compacta

Maringá-PR

2021

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atratores Globais para Sistemas Dinâmicos Impulsivos - Uma Aproximação Pré-Compacta

Cléia Fabiane Winck

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.
Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins.

Maringá-PR
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Winck, Cléia Fabiane
W761a Atratores globais para sistemas dinâmicos impulsivos : uma aproximação pré-compacta / Cléia Fabiane Winck. – Maringá, 2021.
111 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Claudete Matilde Webler Martins.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2021.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Sistemas dinâmicos impulsivos. 3. Atrator global. 4. Dynamical systems. 5. Impulsive dynamical systems. 6. Global attractor. I. Martins, Claudete Matilde Webler, orient. II. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353

Edilson Damasio CRB9-1.123

CLÉIA FABIANE WINCK

ATRATORES GLOBAIS PARA SISTEMAS DINÂMICOS IMPULSIVOS – UMA APROXIMAÇÃO PRÉ-COMPACTA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins - UEM (Presidente)
Profa. Dra. Patrícia Hilário Tacuri Córdova - UEM
Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto - ICMC-USP

Aprovado em: 22 de março de 2021.
Local de defesa: Videoconferência – Google meet.

À Professora Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes (in memorian)

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade e por ser a minha força nos momentos de dificuldade.

À minha família, que sempre me incentivou, acreditando em meu potencial.

Ao meu namorado, por permanecer ao meu lado em todos os momentos, com paciência e amor.

Agradeço e dedico este trabalho à Professora Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes (in memorian), que além de ser uma ótima professora, sempre foi uma pessoa maravilhosa, ensinando lições de vida e de amor em cada momento compartilhado.

À Professora Dra. Claudete, pela paciência, disponibilidade e determinação com que orientou este trabalho. Meu agradecimento também à Professora Dra. Patricia Córdova por toda a ajuda prestada.

Ao Professor Dr. Sandro Marcos Guzzo por todos os ensinamentos e orientações desde a graduação. Sem seu incentivo não seria possível chegar até aqui.

Aos meus amigos, que trilharam esse caminho junto comigo, me incentivando e não permitindo que eu me sentisse sozinha, apesar da distância. Agradeço pelas risadas compartilhadas e por estenderem a mão nos momentos em que precisei de ajuda.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."

Madre Teresa de Calcutá

Resumo

Neste trabalho, estudamos a teoria dos sistemas dinâmicos impulsivos, com foco na existência de atrator global para tais sistemas. O estudo dos sistemas dinâmicos impulsivos requer conhecimento prévio sobre sistemas dinâmicos autônomos contínuos e esta teoria é apresentada no primeiro capítulo. No segundo capítulo, é apresentada a definição de sistemas dinâmicos impulsivos, estudando algumas de suas propriedades relacionadas à existência de atratores globais.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Sistemas Dinâmicos Impulsivos, Atrator Global.

Abstract

In this work, we study the theory of impulsive dynamical systems, with emphasis on the existence of a global attractor for these systems. The study of impulsive dynamical sistems requires a previous knowledge of continuous autonomous dynamical systems and this theory is presented in the first chapter. In the second chapter, the definition of the impulsive dynamical systems is showcased, studying some of their properties related to the existence of global attractors.

Keywords: Dynamical Systems, Impulsive Dynamical Systems, Global Attractor.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atualmente, a teoria dos sistemas dinâmicos representa uma área fértil e diversificada, apresentando a evolução de sistemas que tem seu desenvolvimento contínuo interrompido por mudanças repentinas de estado. Este assunto tem sido objeto de pesquisa de muitos autores nas últimas décadas, tendo aparecido pela primeira vez nas pesquisas de Rozko, na década de 70, em [20] e [21]. Mais tarde, em 1990, Kaul construiu a base desta teoria com impulsos em tempos variáveis, em [12]. Esta teoria foi sendo complementada por vários autores, como o próprio Kaul, em [13] e Ciesielski, em [8].

Muitos problemas reais podem ser definidos por sistemas impulsivos: por exemplo, no jogo de bilhar as bolas se encontram com velocidade nula, até o momento em que um impulso exterior muda esta situação. Além disso, a ingestão de medicamentos controlados por determinado paciente também causa uma mudança repentina no organismo deste.

Para compreender a teoria básica sobre os sistemas impulsivos faz-se necessário um conhecimento prévio sobre sistemas dinâmicos autônomos, cujos resultados principais podem ser encontrados no primeiro capítulo deste trabalho. No mesmo capítulo, na primeira seção, encontramos uma seleção de resultados preliminares que serão utilizados no decorrer desta dissertação.

Por fim, no capítulo 2 faremos um estudo sobre a teoria dos Sistemas Dinâmicos Impulsivos e a existência de atratores Globais em tais sistemas. Nosso estudo será baseado no artigo [7]. Ao final deste trabalho, encontramos uma definição adequadada para atrator global em sistemas dinâmicos impulsivos, definição esta que permite identificar a existência de atrator global para algumas classes de sistemas impulsivos para os quais não existiria atrator à luz de outras definições. Como aplicação de tais resultados, são feitos dois exemplos, onde mostra-se a existência de atrator global em cada caso.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

1.1 Resultados Básicos de Topologia

Nesta seção, apresentamos os principais resultados e definições de Topologia elementar referentes às propriedades de conexidade, compacidade ou continuidade em Espaços Métricos.

Definição 1.1. Uma **métrica** em um conjunto X é uma função

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

que possui as seguintes propriedades:

$i)$ $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$; $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

$ii)$ $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

$iii)$ $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ para todo $x, y, z \in X$ (Desigualdade Triangular).

Um **espaço métrico** é um par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X.

Dada uma métrica d em X e $\varepsilon > 0$, utilizaremos a notação $B_x(\varepsilon)$ para o conjunto

$$B_x(\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

para indicar uma bola centrada em x de raio ε.

Definição 1.2. Sejam (X, d) um espaço métrico e C um subconjunto não vazio de X. Para cada $x \in X$, definimos a **distância** de x ao conjunto C como

$$d(x, C) = inf\{d(x, c) \mid c \in C\}.$$

Teorema 1.3. *Seja X um espaço topológico. Então, as seguintes propriedades são válidas:*

1. *$\varnothing$ e X são fechados.*

2. *A intersecção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

3. *A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração. Ver [17], p. 94. ∎

Teorema 1.4. *Seja C um subconjunto do espaço topológico X. Então, $x \in \overline{C}$ se, e somente se, todo conjunto aberto U contendo x intersecta C.*

Demonstração. Ver [17], p. 96. ∎

Definição 1.5. Um espaço topológico X é chamado de **espaço de Hausdorff** se para cada par de pontos distintos x, y em X, existem abertos U e V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$.

Definição 1.6. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é dita **contínua** se para cada subconjunto aberto A de Y, o conjunto $f^{-1}(A)$ é um subconjunto aberto de X.

Definição 1.7. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma bijeção. Se a função f e sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ são ambas contínuas, então f é chamada de **homeomorfismo**.

Teorema 1.8. *Sejam X, Y espaços métricos e $f : X \to Y$. A continuidade de f é equivalente a afirmar que dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Demonstração. Ver [17], p. 129. ■

Proposição 1.9. *Sejam X e Y espaços métricos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo subconjunto fechado $F \subset Y$ é um subconjunto fechado de X.*

Demonstração. Ver [16], p. 85. ■

Definição 1.10. Uma **cisão** de um espaço métrico X é uma decomposição $X = A \cup B$, de X como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B. A cisão $X = A \cup B$ é dita trivial quando $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$. Dizemos que X é **conexo** quando a única cisão possível é a trivial.

Teorema 1.11. *A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.*

Demonstração. Ver [17], p. 150. ■

Teorema 1.12. *O produto cartesiano finito de espaços conexos é conexo.*

Demonstração. Ver [17], p. 150. ■

Corolário 1.13. *A reta real $\mathbb{R}$ é conexa, assim como seus intervalos.*

Demonstração. Ver [17], p. 154. ■

Corolário 1.14. ***(Teorema do Valor Intermediário)*** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Ver [16], p. 107. ■

Definição 1.15. Seja X um espaço métrico e $x \in X$. A **componente conexa** de x em X é a reunião C_x de todos os subconjuntos conexos de X que contêm x.

Definição 1.16. Seja (x_n) uma sequência em X. Dizemos que o ponto $a \in X$ é limite da sequência (x_n) quando para todo $\varepsilon > 0$ pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $d(x_n, a) < \varepsilon$. Escrevemos então $\lim x_n = a$ ou que $x_n \to a$

Corolário 1.17. *A aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, a imagem $(f(x_n))$ de toda sequência convergente (x_n) em X é uma sequência convergente em Y. No caso afirmativo, temos $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$.*

Demonstração. Ver [16], p. 140. ■

Definição 1.18. Seja A um subconjunto do espaço métrico X. Uma **cobertura** de A é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X tal que $A \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Ainda, dizemos que a cobertura é aberta se C_λ é aberto, para todo λ.

Definição 1.19. Um espaço métrico X é chamado de **compacto** quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.

Teorema 1.20. *Sejam S um Hausdorff contínuo (um espaço de Hausdorff compacto e conexo), U um subconjunto aberto de S e C uma componente conexa de U. Então, $\overline{U} - U$ contém um ponto de acumulação de C.*

Demonstração. Ver [10], p. 47. ■

Teorema 1.21. *Todo subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração. Ver [17], p. 165. ■

Teorema 1.22. *Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

Demonstração. Ver [17], p. 165. ■

Teorema 1.23. *A imagem de um espaço compacto por uma aplicação contínua é compacto.*

Demonstração. Ver [17], p. 166. ■

Teorema 1.24. *O produto cartesiano finito de espaços compactos é compacto.*

Demonstração. Ver [17], p. 167. ■

Definição 1.25. Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tem a chamada **propriedade da intersecção finita** se para toda subcoleção finita $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de $\mathcal{C}$, a intersecção $C_1 \cap \cdots \cap C_n$ é não vazia.

Teorema 1.26. *Seja X um espaço topológico, então X é compacto se, e somente se, para cada coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos fechados de X com a propriedade da intersecção finita, a intersecção $\cap_{c \in \mathcal{C}} C$ é não vazia.*

Demonstração. Ver [17], p. 169. ■

Corolário 1.27. *Todo intervalo fechado em $\mathbb{R}$ é compacto.*

Demonstração. Ver [17], p. 173. ■

Definição 1.28. Um espaço métrico X chama-se **localmente compacto** quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança compacta.

Definição 1.29. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico X chama-se **sequência de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. O espaço X é chamado de **completo** se toda sequência de Cauchy em X é convergente.

Lema 1.30. *Um espaço métrico X é completo se, e somente se, toda sequência de Cauchy em X possui uma subsequência convergente em X.*

Demonstração. Ver [17], p. 264. ■

Proposição 1.31. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Ver [16], p. 184. ■

Proposição 1.32. *A reunião de um número finito de subconjuntos compactos é compacta.*

Demonstração. Ver [16], p. 234. ■

Corolário 1.33. *Qualquer intersecção $K = \cap K_\lambda$ de subconjuntos compactos K_λ de um espaço métrico X é compacta.*

Demonstração. Ver [16], p. 236. ■

Corolário 1.34. *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Ver [16], p. 236. ■

Definição 1.35. Um subconjunto M de um espaço métrico X chama-se **totalmente limitado** se para todo $\varepsilon > 0$ existe um conjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de pontos de X tal que $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$, onde $B(x_i, \varepsilon)$ é uma bola de centro x_i e raio ε para cada $i = 1, ..., n$.

Definição 1.36. Seja X um espaço topológico e $K \subset X$. Dizemos que K é relativamente compacto ou precompacto se $\overline{K}$ é um subconjunto compacto de X.

Lema 1.37. *Seja X um espaço métrico e $A \subset X$ precompacto. Então, A é totalmente limitado.*

Demonstração. Ver [15], p. 58. ■

Lema 1.38. *Seja X um espaço métrico e $A \subset X$ totalmente limitado. Então, para todo $\varepsilon > 0$, A está contido em um número finito de bolas de raio ε centradas em pontos de A.*

Demonstração. Ver [15], p. 59. ■

Lema 1.39. *Seja X um espaço métrico completo e $A \subset X$ totalmente limitado. Então, A é precompacto.*

Demonstração. Ver [15], p. 59. ■

Lema 1.40. *Todo subconjunto compacto de um espaço métrico é totalmente limitado.*

Demonstração. Ver [1], p. 37. ■

Teorema 1.41. *Seja X um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *X é compacto.*

ii) *Todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação.*

iii) *Toda sequência em X possui uma subsequência convergente.*

iv) *X é completo e precompacto.*

Demonstração. Ver [1], p. 38. ■

Corolário 1.42. *Seja X um espaço métrico completo. Um subconjunto $M \subset X$ é totalmente limitado se, e somente se, $\overline{M}$ é compacto em X.*

Demonstração. Ver [1], p. 40. ■

1.2 Sistemas Dinâmicos

Nesta seção, vamos abordar o conteúdo que será base de nosso trabalho, os chamados sistemas dinâmicos, bem como apresentar alguns conceitos e propriedades dos mesmos. No decorrer desta seção, X representa um espaço métrico com métrica d.

Um sistema dinâmico pode ser caracterizado por estados que mudam com o tempo, no seguinte sentido: dizemos que um ponto x andou num tempo t e associamos a x o deslocamento feito, que será denotado por $\pi(t)x$. Formalmente, temos a definição:

Definição 1.43. Um **Sistema Dinâmico** é uma tripla $(X, \pi, \mathbb{T})$, em que $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, (X, d) é um espaço métrico e $\pi : \mathbb{T} \times X \to X$ é uma função contínua, cumprindo as seguintes condições:

i) $\pi(0)x = x$ para todo $x \in X$;

ii) $\pi(s + t)x = \pi(s)\pi(t)x$, para quaisquer que sejam $s, t \in \mathbb{T}$ e $x \in X$.

Da mesma maneira definimos um sistema semidinâmico, considerando $\mathbb{T} = \mathbb{T}^+$. Quando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ dizemos que o sistema dinâmico é contínuo. Já no caso em que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, temos um sistema dinâmico discreto.

A segunda condição sobre a definição acima é também chamada de propriedade de grupo, uma vez que, com esta condição, a família de funções $\{\pi_t(x); t \in \mathbb{T}\}$, onde $\pi_t : X \to X$ é dada por $\pi_t(x) = \pi(t)x$, forma um grupo com a operação de composição.

Lema 1.44. *Para cada $t \in \mathbb{T}$ a função π_t é um homeomorfismo.*

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{T}^+$ fixo qualquer. A continuidade já nos é dada pela definição de sistema dinâmico. Resta mostrar que tal função admite uma inversa e que essa inversa é contínua. Para isso, mostremos primeiro que π_t é bijetora. Sejam x_1 e x_2 em X, com $\pi_t(x_1) = \pi_t(x_2)$, isto é, $\pi(t)x_1 = \pi(t)x_2$. Da primeira condição da definição de sistema dinâmico, temos

$$\begin{aligned} x_1 &= \pi(0)x_1 \\ &= \pi(-t + t)x_1 \\ &= \pi(-t)\pi(t)x_1 \\ &= \pi(-t)\pi(t)x_2 \\ &= \pi(-t + t)x_2 \\ &= \pi(0)x_2 \\ &= x_2, \end{aligned}$$

ou seja, π_t é injetora. Para a sobrejetividade, note que dado qualquer $y \in X$, tomando $x = \pi_{-t}(y) \in X$, obteremos que $\pi_t(x) = y$. Portanto, para cada t fixado, π_t é uma bijeção. Mais ainda, afirmamos que a inversa de π_t é dada pela função π_{-t}, pois para todo $x \in X$, temos que

$$\pi_t \circ \pi_{-t}(x) = \pi(t)\pi(-t)x = \pi(t-t)x = x.$$

A continuidade da inversa também é garantida por estarmos trabalhando com um sistema dinâmico, pois como π_t é contínua para qualquer que seja $t \in \mathbb{T}$, em particular, π_{-t} também é contínua. Portanto, π_t é de fato um homeomorfismo. ■

Vejamos agora um exemplo clássico de sistema dinâmico.

Exemplo 1.45. Considere o sistema diferencial autônomo

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua e assuma que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ exista uma única solução para tal sistema, $x(t) = \pi(t)x$, satisfazendo $\pi(0)x = x$.

Definamos a função $\varphi(t,x) = \pi(t)x$ e provemos que tal função define um sistema dinâmico, isto é, que $\varphi(0,x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e que $\varphi(s+t,x) = \varphi(s,\varphi(t,x))$ para todos $s,t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Para isso, consideremos o seguinte problema de valor inicial, para $s \in \mathbb{R}$ qualquer fixado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \pi(s)x \end{cases}$$

e as funções

$$\psi_1(t) = \varphi(t, \varphi(s,x))$$

e

$$\psi_2(t) = \varphi(t+s, x),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Note que tanto ψ_1 quanto ψ_2 são soluções do problema de valor inicial, pois $\psi_1(0) =$

$\varphi(0, \varphi(s, x)) = \varphi(s, x)$ e $\psi_2(0) = \varphi(0 + s, x) = \varphi(s, x)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\psi_1'(t) &= (\varphi(t, \varphi(s, x))' \\
&= (\pi(t)\pi(s)x)' \\
&= \pi'(t)\pi(s)x \\
&= f(\pi(t)\pi(s)x) \\
&= f(\varphi(t, \varphi(s, x)) \\
&= f(\psi_1(t))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\psi_2'(t) &= (\varphi(t + s, x))' \\
&= (\pi(t + s)x)' \\
&= \pi'(t + s)x \\
&= f(\pi(t + s)x) \\
&= f(\varphi(t + s, x)) \\
&= f(\psi_2(t)),
\end{aligned}$$

donde concluímos que tanto ψ_1 quanto ψ_2 são soluções do problema de valor inicial. Da unicidade de soluções, devemos ter $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde segue que $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$ para quaisquer que sejam $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

1.2.1 Conjuntos Invariantes

Uma noção importante dentro da teoria de sistemas dinâmicos é o conceito de invariância, que definiremos a seguir.

Definição 1.46. Seja $(X, \pi, \mathbb{T})$ um sistema dinâmico. O subconjunto $M \subset X$ é dito **invariante** se $\pi(t)x \in M$ para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{T}$. Ainda, M é dito **positivamente (negativamente) invariante** se $\pi(t)x \in M$ para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{T}^+$ $(t \in \mathbb{T}^-)$.

Definição 1.47. Seja $(X, \pi, \mathbb{T}^+)$ um sistema semidinâmico. O subconjunto $M \subset X$ é dito **invariante** se $\pi(t)M = M$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Ainda, M é **positivamente (negativamente) invariante** se $\pi(t)M \subset M$ $(M \subset \pi(t)M)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Note que as definições acima são equivalentes a dizer que um conjunto $M \subset X$ é invariante se, e somente se, for ao mesmo tempo positivamente e negativamente invariante. Outras propriedades importantes de conjuntos invariantes serão abordadas a seguir.

Teorema 1.48. *Seja $\{M_i\}$ uma coleção de subconjuntos de X, positivamente invariantes, negativamente invariantes, ou invariantes. Então, a intersecção e a união arbitrária de conjuntos desta coleção tem a mesma propriedade.*

Demonstração. Seja $x \in \bigcup_{i \in I} M_i$. Então existe um índice $i_0 \in I$ tal que $x \in M_{i_0}$. Como M_{i_0} é invariante, segue que $\pi(t)x \in M_{i_0}$ para todo $t \in \mathbb{T}$ e, portanto, $\pi(t)x \in \bigcup_{i \in I} M_i$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Assim, temos que a união é invariante.

Agora, seja $x \in \bigcap_{i \in I} M_i$. Então $x \in M_i$ para todo $i \in I$. Como todo M_i é invariante, $\pi(t)x \in M_i$ para todo $t \in \mathbb{T}$ e $i \in I$. Portanto, a intersecção arbitrária de conjuntos invariantes possui a propriedade da invariância. A demonstração para conjuntos positivamente ou negativamente invariantes é feita de maneira análoga. ■

Teorema 1.49. *Seja $M \subset X$ positivamente invariante, negativamente invariante, ou invariante. Então, $\overline{M}$ possui a mesma propriedade.*

Demonstração. Novamente faremos a demonstração para o caso em que M é invariante e os demais casos são análogos a este. Seja $x \in \overline{M}$. Por definição de fecho de um conjunto, existe uma sequência (x_n) em M tal que $x_n \to x$ quando $n \to +\infty$. Pela invariância de M, $\pi(t)x_n \in M$ para todo n e, portanto, $\lim_{n\to\infty} \pi(t)x_n \in \overline{M}$. Entretanto, pela continuidade da função π, temos $\pi(t)x_n \to \pi(t)x$, donde segue que $\pi(t)x \in \overline{M}$. Portanto, $\overline{M}$ é um conjunto invariante. ■

Teorema 1.50. *Um subconjunto $M \subset X$ é positivamente invariante se, e somente se, $X \setminus M$ é negativamente invariante. M é invariante se, e somente se, $X \setminus M$ é invariante.*

Demonstração. Suponhamos M positivamente invariante. Queremos provar que $X \setminus M$ é negativamente invariante, ou seja, que $\pi(t)x \in X \setminus M$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$ e $x \in X \setminus M$. Suponha que isso não ocorra. Então, deve existir $t \in \mathbb{T}^-$ e $x \in X \setminus M$ tal que $\pi(t)x \notin X \setminus M$, mas nesse caso teríamos $\pi(t)x \in M$. Agora, como M é positivamente invariante e $t \in \mathbb{T}^-$, temos $-t \in \mathbb{T}^+$ e $\pi(-t, x) \in M$ para todo $x \in M$. Assim, $x = \pi(0)x =$

$\pi(t-t)x = \pi(t)\pi(-t)x \in M$ e portanto, $x \in M$, o que é uma contradição. Daí, segue que $\pi(t)x \in X \setminus M$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$ e $x \in X \setminus M$, como queríamos.

O caso em que M é invariante pode ser provado de maneira análoga. ■

O próximo resultado pode ser visto como uma consequência dos teoremas anteriores. Tal resultado possui grande importância dentro da teoria estudada.

Teorema 1.51. *Seja $M \subset X$ invariante. Então, seu interior $(int(M))$ e sua fronteira (∂M) são também invariantes.*

Demonstração. Seja M invariante. Então, pelo teorema anterior $X \setminus M$ é também invariante e, consequentemente, $\overline{M}$ e $\overline{X \setminus M}$ também o são. Note que $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$, e assim, como a intersecção de conjuntos invariantes é invariante, pelo Teorema 1.48, temos a invariância de ∂M.

Vamos provar agora que se a fronteira é invariante, então o interior também o é. De fato, suponha que isso não aconteça, isto é, que exista $x \in int(M)$ e $t_0 \in \mathbb{T}$ tal que $\pi(t_0)x \notin int(M)$. Note que o intervalo fechado $[0, t_0]$ é conexo e a função π é contínua, o que nos permite afirmar que o conjunto $\{\pi(t)x; t \in [0, t_0]\}$ é conexo (ver Teoremas 1.11 e 1.13). Assim, existe τ entre 0 e t_0 de modo que $\pi(\tau)x \in \partial M$. Mas como ∂M é invariante, devemos ter $\pi(t)\pi(\tau)x \in \partial M$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Particularmente, devemos ter $\pi(-\tau)\pi(\tau)x \in \partial M$, ou seja, $x \in \partial M$, o que é uma contradição com o fato que $x \in int(M)$. Desta contradição concluímos que $int(M)$ deve ser invariante. ■

Observação 1.52. *A recíproca do teorema anterior é válida caso M seja um conjunto aberto ou fechado. De fato, suponha que $int(M)$ e ∂M sejam invariantes. Se M for aberto, temos $int(M) = M$ e, portanto, M é invariante. Agora, se M for fechado, $\overline{M} = M$, e podemos escrever $M = \overline{M} = int(M) \cup \partial M$, donde temos também a invariância de M, por ser escrito como união de dois conjuntos invariantes (ver Teorema 1.48).*

Agora, definiremos conjuntos muito importantes dentro da teoria estudada.

Definição 1.53. Seja $(X, \pi, \mathbb{T})$ um sistema dinâmico. Definamos os seguintes conjuntos para qualquer $x \in X$:

i) $\gamma(x) = \{\pi(t)x;\ t \in \mathbb{T}\}$;

ii) $\gamma^+(x) = \{\pi(t)x;\ t \in \mathbb{T}^+\}$;

iii) $\gamma^-(x) = \{\pi(t)x;\ t \in \mathbb{T}^-\}$.

Tais conjuntos são chamados, respectivamente, de **órbita**, **órbita positiva** e **órbita negativa** de x.

Observação 1.54. *Para qualquer $x \in X$ a órbita de x é invariante. De fato, seja $\pi(t_0)x$ um ponto qualquer da órbita de x. Então, para qualquer $t \in \mathbb{T}$ temos que $\pi(t)\pi(t_0)x = \pi(t+t_0)x \in \gamma(x)$, provando que $\gamma(x)$ é invariante. Da mesma forma, o conjunto $\gamma^+(x)$ é positivamente invariante e o conjunto $\gamma^-(x)$ é negativamente invariante.*

Definição 1.55. Seja $(X, \pi, \mathbb{T})$ um sistema dinâmico e B um subconjunto de X. A órbita de B é dada por

$$\gamma(B) = \{\pi(t)x; t \in \mathbb{T} \text{ e } x \in B\} = \bigcup_{x \in B} \gamma(x).$$

1.2.2 Pontos Críticos e Pontos Periódicos

Nesta subseção, definiremos pontos críticos e pontos periódicos, que podem ser caracterizados por particularidades de suas órbitas. No caso de um ponto crítico, sua órbita é composta apenas por ele próprio. Já os pontos periódicos possuem uma órbita que apresenta um comportamento que se repete após determinado período, podendo ser descrita como a imagem da função π_x, restringindo seu domínio para algum intervalo $[0, t] \subset \mathbb{T}$.

Definição 1.56. Um ponto $x \in X$ é dito um **ponto crítico** (ou ponto de equilíbrio) se $\pi(t)x = x$, para todo $t \in \mathbb{T}$.

O próximo teorema nos traz uma caracterização de pontos críticos, porém, para prová-lo, enunciaremos primeiro um lema auxiliar.

Lema 1.57. *Se $x \in X$ e $\pi(t)x = x$ para algum $t \in \mathbb{T}$, então $\pi(nt)x = x$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Note que se $\pi(t)x = x$, então $\pi(-t)x = \pi(-t)\pi(t)x = \pi(0)x = x$. Assim, é suficiente provar o resultado apenas para os inteiros positivos. Tal prova será feita por indução finita. Da definição de sistema dinâmico já temos que $\pi(0)x = x$. Suponhamos que $\pi(nt)x = x$ e $\pi(t)x = x$. Então $\pi((n+1)t)x = \pi(tn+t)x = \pi(tn)\pi(t)x = \pi(tn)x = x$, como queríamos. ■

Teorema 1.58. *Seja $x \in X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *x é um ponto crítico,*

ii) *$\gamma(x) = \{x\}$,*

iii) *$\gamma^+(x) = \{x\}$,*

iv) *$\gamma^-(x) = \{x\}$,*

v) *$\pi(t)x = x$ para todo $t \in [a,b]$, com $a < b$,*

vi) *Existe uma sequência (t_n) de termos positivos tal que $t_n \to 0$, com $x = \pi(t_n)x$ para todo n.*

Demonstração. A equivalência entre os quatro primeiros itens decorre diretamente da definição de ponto crítico, assim, provaremos apenas os demais.

i) $\Rightarrow$ v) Se x é um ponto crítico, temos $\pi(t)x = x$ para todo $t \in \mathbb{T}$ e, consequentemente, para qualquer intervalo $[a,b]$ em $\mathbb{T}$ temos $\pi(t)x = x$, para todo $t \in [a,b]$.

v) $\Rightarrow$ i) Se $\pi(t)x = x$ para todo $t \in [a,b]$, com $a < b$, então segue do Lema 1.57 que $\pi(t)x = x$ para todo $t \in [-b,-a]$ e ainda, que $\pi(nt)x = x$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Note que podemos escrever $\mathbb{T}$ da seguinte maneira: $\mathbb{T} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [-n(b-a), n(b-a)]$, e daí segue que x é um ponto crítico.

i) $\Rightarrow$ vi) Se $\pi(t)x = x$ para todo $t \in \mathbb{T}$, então qualquer sequência (t_n) tomada em $\mathbb{T}$ vai satisfazer $\pi(t_n)x = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em particular, qualquer sequência positiva tendendo a zero vai satisfazer esta condição.

vi) $\Rightarrow$ i) Suponhamos agora que exista uma sequência (t_n) em $\mathbb{T}$, de termos positivos, convergindo para zero, com $\pi(t_n)x = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $\pi(t)x = x$ para qualquer que seja $t \in \mathbb{T}$. Para isso, tomemos $t \in \mathbb{T}$. Temos dois casos a considerar:

- Se $t = kt_n$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, pelo lema anterior temos a garantia de que $\pi(t)x = x$.

- Por outro lado, se $t \neq kt_n$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado existe um inteiro k_n tal que

$$k_n t_n < t < (k_n+1)t_n.$$

  Da mesma forma, tomando $m > n$, existe um inteiro k_m tal que

$$k_n t_n < k_m t_m < t < (k_m+1)t_m < (k_n+1)t_n.$$

Observe que desta forma estamos construindo uma sequência $(k_n t_n)$ que converge para t, e como $\pi(t_n)x = x$ para todo n, pelo lema anterior temos que $\pi(k_n t_n)x = x$ para todo n. Mais ainda,

$$\lim_{n\to\infty} \pi(k_n t_n)x = \pi(t)x,$$

ou seja, $\pi(t)x = x$ para todo $t \in \mathbb{T}$ e, portanto, x é um ponto crítico.

■

Lema 1.59. *Seja $(X, \pi, \mathbb{T})$ um sistema dinâmico. Se $\pi(t)x \neq x$ para algum $x \in X$ e $t \in \mathbb{T}$, então existem vizinhanças abertas U e V de x e de $\pi(t)x$, respectivamente, tais que $V = \pi(t)U$ e $U \cap V = \varnothing$.*

Demonstração. Tomemos $x \in X$ e $t \in \mathbb{T}$ tais que $\pi(t)x \neq x$. Deste modo, existe uma distância ε entre esses pontos. Assim, podemos definir os abertos

$$W_1 = B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

e

$$W_2 = B\left(\pi(t)x, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Note que $\pi(t)W_1$ é um aberto, uma vez que W_1 é aberto e a função π_t é um homeomorfismo para cada $t \in \mathbb{T}$. Além disso, $\pi(t)x \in \pi(t)W_1$, uma vez que $x \in W_1$. Tomemos então $V = \pi(t)W_1 \cap W_2$. Observe que V é intersecção de dois conjuntos abertos, sendo portanto aberto. Assim, V é uma vizinhança aberta de $\pi(t)x$.

Definamos agora $U = \pi(-t)V$. Vamos mostrar que este conjunto atende as condições do lema, isto é, que $U \cap V = \varnothing$ e que $V = \pi(t)U$. Para mostrar que a intersecção é vazia, mostraremos que $U \subset W_1$. De fato, seja $x \in U$, então $x = \pi(-t)v$ para algum $v \in V$. Como $V = \pi(t)W_1 \cap W_2$, podemos escrever $v = \pi(t)w_1$, com $w_1 \in W_1$. Assim, $x = \pi(-t)v = \pi(-t)\pi(t)w_1 = w_1$. Logo, $x \in W_1$ e, consequentemente, $U \subset W_1$.

Por fim, como $U = \pi(-t)V$, temos que

$$\pi(t)U = \pi(t)\pi(-t)V = \pi(t)\pi(-t)V = \pi(t-t)V = \pi(0)V = V,$$

como queríamos. ■

Teorema 1.60. *Um ponto $x \in X$ é crítico se, e somente se, toda vizinhança de x contém uma órbita.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Se x é um ponto crítico, pelo Teorema 1.58 , a órbita de x possui apenas o próprio ponto x. Assim, toda vizinhança de x contém uma órbita, neste caso, $\gamma(x) = \{x\}$.

$\Leftarrow$) Suponha que toda vizinhança de x contenha uma órbita, mas x não é crítico. Então existe $t \in \mathbb{T}$ tal que $\pi(t)x \neq x$. Assim, pelo lema anterior, existem abertos U e V, contendo x e $\pi(t)x$ respectivamente, com $V = \pi(t)U$ e $U \cap V = \varnothing$. Como $V = \pi(t)U$, temos que para qualquer $y \in U$, $\pi(t)y \in V$ e como os conjuntos U e V são disjuntos, $\pi(t)y \notin U$ para qualquer que seja $y \in U$, implicando que U não contém nenhuma órbita, o que é uma contradição com a hipótese, donde concluímos que x é um ponto crítico. ∎

Teorema 1.61. *O conjunto de todos os pontos críticos em X é fechado.*

Demonstração. Seja

$$C = \{x \in X \,;\, x \text{ é ponto crítico}\},$$

e suponha que C não é fechado. Então existe $(x_n) \subset C$ tal que $x_n \to x$ e x não é um ponto crítico. Mas isso implica que existe $t \in \mathbb{T}$ tal que $\pi(t)x \neq x$. Pelo Lema 1.59, temos a garantia da existência de abertos U e V tais que $x \in U$, $\pi(t)x \in V$, $V = \pi(t)U$ e $U \cap V = \varnothing$.

Como $x_n \to x$ e U é aberto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então $x_n \in U$. Como $V = \pi(t)U$, temos que $\pi(t)x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Mas como U e V são disjuntos, a partir do índice n_0 não podemos ter nenhum ponto $\pi(t)x_n$ em U, o que é uma contradição, pois x_n é uma sequência de pontos críticos e assim $\pi(t)x_n = x_n$ para todo n. Dessa contradição concluímos que não existe t em $\mathbb{T}$ tal que $\pi(t)x \neq x$ e x é um ponto crítico, mostrando que o conjunto dos pontos críticos de X é fechado. ∎

Teorema 1.62. *Seja $(X, \pi, \mathbb{T})$ um sistema dinâmico. Se $x, y \in X$ e $d(\pi(t)y, x) \to 0$ quando $t \to +\infty$ (ou $t \to -\infty$), então x é crítico.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança qualquer de x. Como $d(\pi(t)y, x) \to 0$ quando $t \to +\infty$, então existe $t_0 \geq 0$ tal que se $t \geq t_0$, então $\pi(t)y \in U$. Note que nesse caso a órbita

$$\gamma^+(\pi(t_0)y) = \{\pi(t)\pi(t_0)y; t \in \mathbb{T}^+\} = \{\pi(t+t_0)y; t \in \mathbb{T}^+\}$$

está contida em U. Como U contém uma órbita, pelo Teorema 1.60, x é um ponto crítico. ■

Com este resultado finalizamos a teoria básica sobre pontos críticos, passando à definição e propriedades de pontos periódicos.

Definição 1.63. Um ponto $x \in X$ é dito periódico se existe $\tau \neq 0$ tal que $\pi(t)x = \pi(t+\tau)x$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Neste caso, τ é chamado de período de x.

Proposição 1.64. *Um ponto $x \in X$ é periódico se, e somente se, existe $\tau \neq 0$ com $\pi(\tau)x = x$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Se x é um ponto periódico, por definição existe $\tau \neq 0$ tal que $\pi(t)x = \pi(t+\tau)x$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Considerando $t = 0$ temos que existe $\tau \neq 0$ tal que $\pi(0)x = \pi(0+\tau)x$, ou seja, $\pi(\tau)x = x$.

$\Leftarrow$) Suponha que existe $\tau \neq 0$ com $\pi(\tau)x = x$ e tomemos $t \in \mathbb{T}$ arbitrário. Assim,

$$\pi(t)x = \pi(t)\pi(\tau)x = \pi(t+\tau)x,$$

mostrando que x é um ponto periódico. ■

Note que se τ atende às condições da proposição acima, então τ é um período de x.

Teorema 1.65. *Se $x \in X$ é periódico, mas não crítico, então existe $\tau > 0$ tal que τ é o menor período positivo de x. Mais ainda, se T é qualquer outro período de x, então $T = k\tau$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Considere

$$P = \{t > 0;\ t \text{ é período de } x\}.$$

Vamos provar que este conjunto não é vazio, isto é, que x possui um período positivo. Já sabemos que x possui um período $t \neq 0$. Supondo que este período seja negativo, então $-t$ é positivo. Mais ainda,

$$\pi(-t)x = \pi(-t)\pi(t)x = \pi(0)x = x.$$

Portanto, se t é um período de x, então $-t$ também é, sendo um destes positivo. Assim, o conjunto P é não vazio, admitindo portanto um ínfimo. Denotemos o ínfimo deste conjunto por τ. Vamos provar que $\tau \neq 0$ e que, além disso, $\tau \in P$.

Suponhamos, por contradição, que $\tau = 0$. Nesse caso, existe uma sequência (t_n) em P tal que $t_n \to \tau = 0$. Como t_n é um período de x para cada $n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 1.64 temos que $\pi(t_n)x = x$. Assim, pelo item **vi)** do Teorema 1.58, x é um ponto crítico, o que contradiz a hipótese. Portanto, τ é estritamente maior que zero.

Além disso, como $\pi(t_n)x = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t_n \to \tau$, pela continuidade da função π temos que $\pi(t_n)x \to \pi(\tau)x$, ou seja, $\pi(\tau)x = x$ e τ é um período de x.

Resta provar que qualquer outro período de x é múltiplo de τ. De fato, seja $T \in \mathbb{T}$ um período de x. Se $T \neq k\tau$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, então existe $\overline{k}$ tal que

$$\overline{k}\tau < T < (\overline{k}+1)\tau.$$

Note que como τ é um período de x, pelo Lema 1.57 temos que $\pi(\overline{k}\tau, x) = \pi(\tau, x) = x$, e assim, tanto $\overline{k}\tau$ quanto $-\overline{k}\tau$ são períodos de x. Como T também é um período de x, temos $\pi(\overline{k}\tau, x) = \pi(T)x = x$. Daí segue que

$$\pi(-\overline{k}\tau + T)x = \pi(-\overline{k}\tau)\pi(T)x = \pi(-k\tau)x = x,$$

e portanto, $T - \overline{k}\tau$ é também período de x.

Entretanto, como $\overline{k}\tau < T < (\overline{k}+1)\tau$, subtraindo $\overline{k}\tau$ de todos os membros desta desigualdade, temos $0 < T - \overline{k}\tau < \tau$, o que contradiz o fato de τ ser o ínfimo de P. Portanto, $T = k\tau$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. ■

Definição 1.66. Se um ponto x é periódico, mas não crítico, então o menor período positivo de x é chamado de **fundamental** ou **período primitivo**.

Lema 1.67. *Se (x_n) é uma sequência de pontos periódicos, com período positivo $t_n \to 0$ e $x_n \to x$, então x é um ponto crítico.*

Demonstração. Tomemos $t \in \mathbb{T}$ arbitrário. Podemos afirmar que para cada n existe um inteiro k_n tal que $k_n t_n \leq t < k_n t_n + t_n$. Como $t_n \to 0$, temos que $k_n t_n \to t$ quando

$n \to +\infty$. Mas, como cada t_n é período de x_n, então pelo Lema 1.57 temos

$$\pi(k_n t_n)x_n = x_n,$$

e portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \pi(k_n t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

ou seja,

$$\pi(t)x = x.$$

Da arbitrariedade de t, temos que $\pi(t)x = x$ para todo $t \in \mathbb{T}$, concluindo que x é um ponto crítico. ■

Teorema 1.68. *Seja qualquer $\alpha > 0$. O conjunto de todos os $x \in X$ tais que x é periódico com período $\tau \leq \alpha$ é fechado.*

Demonstração. Definamos

$$A_\alpha = \{x \in X; x \text{ é periódico, com período } \tau \leq \alpha\}.$$

Vamos provar que para cada $\alpha > 0$ este conjunto é fechado. Para isso, tomemos uma sequência (x_n) de pontos periódicos em X com período $\tau_n \leq \alpha$ e $x_n \to x$.

Como $0 \leq \tau_n \leq \alpha$, temos que τ_n é uma sequência limitada. Assim, consideraremos dois casos: o caso em que τ_n tende a zero e o caso em que τ_n possui uma subsequência convergindo para algum T, estritamente maior que zero e menor ou igual a α.

- Se $\tau_n \to 0$, o lema anterior garante que x é um ponto crítico e, portanto, periódico.

- Se τ_n possui uma subsequência $\tau_{n_k} \to T$, com $0 < T \leq \alpha$, pela continuidade da função π temos que
$$\pi(\tau_{n_k})x_{n_k} \to \pi(T)x.$$

  Por outro lado, como cada τ_{n_k} é período do ponto x_{n_k}, temos que $\pi(\tau_{n_k})x_{n_k} = x_{n_k}$. Assim, $\pi(T)x = x$, pela unicidade do limite. Portanto, x é periódico com período $T \leq \alpha$, isto é, $x \in A_\alpha$, donde concluímos que A_α é fechado para qualquer que seja $\alpha > 0$.

■

1.2.3 Conjuntos Limites

Nesta subseção, vamos definir os chamados conjuntos limites e abordar os principais resultados e propriedades relacionados a eles.

Definição 1.69. Definiremos os conjuntos $\Lambda^+(x)$ e $\Lambda^-(x)$ da seguinte maneira:

- $\Lambda^+(x) = \{y \in X \mid$ existe uma sequência (t_n) em $\mathbb{T}$ com $t_n \to +\infty$ e $\pi(t_n)x \to y\}$.
- $\Lambda^-(x) = \{y \in X \mid$ existe uma sequência (t_n) em $\mathbb{T}$ com $t_n \to -\infty$ e $\pi(t_n)x \to y\}$.

Para cada $x \in X$ chamamos o conjunto $\Lambda^+(x)$ de **conjunto limite positivo** (ou ω-**limite**) e o conjunto $\Lambda^-(x)$ é chamado de **conjunto limite negativo** (ou α-**limite**).

Definição 1.70. Seja $(X, \pi, \mathbb{T})$ um sistema dinâmico e B um subconjunto de X. O conjunto limite positivo de B é dado por

$$\Lambda^+(B) = \{y \in X \mid \text{existem sequências } (t_n) \text{ em } \mathbb{T} \text{ e } (x_n) \text{ em } B \text{ com } t_n \to +\infty \text{ e } \pi(t_n)x_n \to y\}.$$

Na sequência, vamos estabelecer as principais propriedades e relações entre os conjuntos limites e as órbitas de x.

Teorema 1.71. *Para qualquer $x \in X$ temos que*

i) *$\Lambda^+(x)$ e $\Lambda^-(x)$ são conjuntos invariantes e fechados,*

ii) *$\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$ e $\overline{\gamma^-(x)} = \gamma^-(x) \cup \Lambda^-(x)$.*

Demonstração. $i)$ Vamos considerar o conjunto $\Lambda^+(x)$ e primeiro mostraremos que ele é fechado.

De fato, seja $y \in \overline{\Lambda^+(x)}$. Por definição de fecho, existe uma sequência (y_n) em $\Lambda^+(x)$ tal que $y_n \to y$. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $d(y_n, y) < \dfrac{1}{2n}$, onde d é a métrica em X.

Como $y_n \in \Lambda^+(x)$, por definição, para cada inteiro positivo n existe uma sequência $(t_n^k) \subset \mathbb{T}$ tal que $t_n^k \to +\infty$ e $\pi(t_n^k)x \to y_k$. Assuma, sem perda de generalidade, que $d(y_k, \pi(t_n^k)x) < \dfrac{1}{2k}$ e $t_n^k \geq k$ para $n \geq k$. Vamos considerar a sequência $(t_n) \subset \mathbb{T}$ definida por $t_n := t_n^n$.

Afirmação: $\pi(t_n)x \to y$. Com efeito, note que como X é um espaço métrico, pela desigualdade triangular, temos que

$$d(y, \pi(t_n)x) \leq d(y, y_n) + d(y_n, \pi(t_n)x) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Assim, quando $n \to +\infty$ temos $\pi(t_n)x \to y$ e como $t_n \to +\infty$, segue que $y \in \Lambda^+(x)$. Portanto, $\Lambda^+(x)$ é fechado.

Mostraremos agora que $\Lambda^+(x)$ é invariante. De fato, seja $y \in \Lambda^+(x)$ e $t \in \mathbb{T}$ arbitrário. Então, existe uma sequência (t_n) em $\mathbb{T}$ tal que $t_n \to +\infty$ e $\pi(t_n)x \to y$. Pela continuidade da π, temos que $\pi(t)\pi(t_n)x) \to \pi(t)y$. Além disso, como $(X, \pi, \mathbb{T})$ é um sistema dinâmico segue que $\pi(t)\pi(t_n)x = \pi(t_n + t)x$ e definindo a sequência $\tau_n := (t_n + t)$, obteremos que $\tau_n \to +\infty$ (pois $t_n \to +\infty$). Logo, $\pi(t)y \in \Lambda^+(x)$.

Portanto, como $t \in \mathbb{T}$ é arbitrário, concluímos que $\Lambda^+(x)$ é um conjunto invariante. A demonstração para o conjunto $\Lambda^-(x)$ é análoga.

$ii)$ Mostraremos que $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$.

Note que $\gamma^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$. Também, pela definição de $\Lambda^+(x)$, temos que $\Lambda^+(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$. Assim,

$$\overline{\gamma^+(x)} \supset \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x).$$

Então, só resta mostrar que

$$\overline{\gamma^+(x)} \subset \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x).$$

Para tanto, tome $y \in \overline{\gamma^+(x)}$, ou seja, existe uma sequência (y_n) em $\gamma^+(x)$ tal que $y_n \to y$. Considere $y_n = \pi(t_n)x$ para algum $t_n \in \mathbb{T}^+$. Então, se $t_n \to +\infty$, teremos $y \in \Lambda^+(x)$. Caso contrário, existe uma subsequência $t_{n_k} \to t \in \mathbb{T}^+$, pois $\mathbb{T}^+ \subset \mathbb{R}$ é fechado. Dessa forma, devemos ter $\pi(t_{n_k})x \to \pi(t)x \in \gamma^+(x)$ e como $\pi(t_{n_k}, x) \to y$ segue que $y = \pi(t)x \in \gamma^+(x)$. Logo, $\overline{\gamma^+(x)} \subset \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$. Portanto, $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$.

A demonstração para $\overline{\gamma^-(x)} = \gamma^-(x) \cup \Lambda^-(x)$ é análoga. ■

Teorema 1.72. *Dado $x \in X$, valem as seguintes igualdades*

$$\Lambda^+(x) = \bigcap_{y \in \gamma^+(x)} \overline{\gamma^+(y)} = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+(\pi(t)x)}.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $z \in \Lambda^+(x)$, por definição existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{T}$, tal que $t_n \to +\infty$ e $\pi(t_n)z \to x$. Dado $t_0 \in \mathbb{T}^+$, para qualquer $t_n > t_0$ temos que $\pi(t_n)x \in \gamma^+(\pi(t_0)x) = \{\pi(t)\pi(t_0)x; t \in \mathbb{T}^+\}$, donde segue que $z \in \overline{\gamma^+(\pi(t_0)x)}$, para $t_0 \in \mathbb{T}^+$ arbitrário. Portanto, $z \in \overline{\gamma^+(y)}$ para todo $y \in \gamma^+(x)$.

Note ainda que $\{\overline{\gamma^+(y)}; y \in \gamma^+(x)\} = \{\overline{\gamma^+(\pi(t,x))}; t \in \mathbb{T}^+\}$, pois variando $t \in \mathbb{T}^+$, cada $\pi(t)x$ nos dá um elemento da órbita positiva de x. Assim, se $z \in \overline{\gamma^+(y)}$ para todo $y \in \gamma^+(x)$, então $z \in \overline{\gamma^+(\pi(t)x)}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Daí segue que

$$z \in \bigcap_{y \in \gamma^+(x)} \overline{\gamma^+(y)} = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+(\pi(t)x)},$$

e, portanto, $\Lambda^+(x) \subset \bigcap_{y \in \gamma^+(x)} \overline{\gamma^+(y)}$.

Agora, tomemos $z \in \bigcap_{y \in \gamma^+(x)} \overline{\gamma^+(y)}$. Isto é, para cada $y \in \gamma^+(x)$, $z \in \overline{\gamma^+(y)}$, ou ainda, $z \in \overline{\gamma^+(\pi(t)x)}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Particularmente, dado $n \in \mathbb{N}$ temos $z \in \overline{\gamma^+(\pi(n)x)}$.

Daí, segue por definição de fecho de um conjunto, que existe uma sequência em $\gamma^+(\pi(n)x)$ convergindo para z. Seja (z_n^k) essa sequência, definida por

$$z_n^k := \pi(t_n^k)x,$$

com $(t_n^k) \subset \mathbb{T}^+$ tal que $t_n^k \geq n$. Note que k está variando em $\mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Como z_n^k converge para z, existe $k_n^0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_n^0$, então $d(z_n^k, z) < \frac{1}{n}$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_n^0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n^k, z) < \frac{1}{n}$ se $k \geq k_n^0$. Assim, tomando $k_1 = \text{máx}\{k_n^0; n \in \mathbb{N}\}$ temos que $d(z_n^k, z) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definindo $t_n = t_n^{k_1}$, temos que $d(\pi(t_n)x, z) < \frac{1}{n}$ para todo n. Fazendo n tender ao infinito dos dois lados da desigualdade obtemos que $\pi(t_n, x) \to z$. Notemos ainda que $\pi(t_n^{k_1})x \in \gamma^+(\pi(n)x)$, donde segue que $t_n = t_n^{k_1} \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim, fazendo n tender ao infinito obtemos que $t_n \to \infty$. Deste modo, existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\pi(t_n)x \to z$ e portanto, $z \in \Lambda^+(x)$.

Assim, concluímos que $\bigcap_{y \in \gamma^+(x)} \overline{\gamma^+(y)} \subset \Lambda^+(x)$. Com as duas inclusões provadas, temos a igualdade, como queríamos demonstrar. ∎

Até este ponto, estudamos a teoria dos sistemas dinâmicos autônomos e seus principais resultados. A partir daqui, consideraremos sistemas semidinâmicos, sobre os quais definiremos importantes resultados relacionados a existência de atratores globais.

1.3 Atratores para Sistemas Semidinâmicos

1.3.1 Semi-distância de Hausdorff

Para definir as noções de atração e absorção em sistemas semidinâmicos, definiremos primeiro a **semi-distância de Hausdorff** entre dois subconjuntos A e B de X da seguinte forma

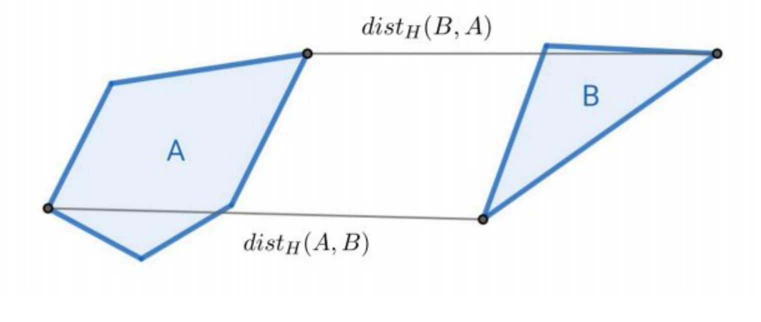
$$dist_H(A, B) := \sup_{x \in A}(\inf_{y \in B} d(x, y)).$$

Denotaremos por $d(A, B)$ a distância usual entre os conjuntos A e B. Isto é

$$d(A, B) := \inf_{x \in A}(\inf_{y \in B} d(x, y)).$$

Note, em geral, a semi-distância de Hausdorff não possui a propriedade da simetria, uma vez que $dist_H(A, B)$ pode não ser igual à $dist_H(B, A)$. Esse fato pode ser observado na figura a seguir

Figura 1.1: Exemplo em que $dist_H(A, B) \neq dist_H(B, A)$.



Proposição 1.73. *Para quaisquer $A, B, C \subset X$ vale a desigualdade*

$$dist_H(A, C) \leq dist_H(A, B) + dist_H(B, C).$$

Demonstração. Sejam $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$ quaisquer. Temos

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c).$$

Aplicando o ínfimo em C temos

$$\inf_{c\in C} d(a,c) \le d(a,b) + \inf_{c\in C} d(b,c)$$

e portanto

$$d(a,C) \le d(a,b) + d(b,C).$$

Aplicando agora o ínfimo em B temos

$$\begin{aligned} d(a,C) &\le \inf_{b\in B} d(a,b) + \inf_{b\in B} d(b,C) \\ &\le d(a,B) + \sup_{b\in B}(d(b,C)) \\ &= d(a,B) + dist_H(B,C). \end{aligned}$$

Por fim, aplicando o supremo em A temos

$$\begin{aligned} &\sup_{a\in A} d(a,C) \le \sup_{a\in A} d(a,B) + dist_H(B,C) \\ &\Rightarrow dist_H(a,c) \le dist_H(A,B) + dist_H(B,C). \end{aligned}$$

∎

Proposição 1.74. *Sejam $A, B \subset X$ não vazios. Então $dist_H(A,B) = 0$ se, e somente se, $A \subset \overline{B}$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $dist_H(A,B) = 0$. Fixando $a \in A$,

$$\begin{aligned} 0 &\le d(a,B) \\ &\le \sup_{a\in A} d(a,B) \\ &= \sup_{a\in A}\left(\inf_{b\in B} d(a,b)\right) \\ &= dist_H(A,B) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $d(a,B) = 0$, ou seja $\inf_{b\in B} d(a,b) = 0$. Das propriedades de ínfimo podemos afirmar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in B$ tal que

$$0 = d(a,B) < d(a,b_n) < \frac{1}{n}$$

logo, $d(a,b_n) \to 0$, donde segue que $b_n \to a$, e $a \in \overline{B}$. Da arbitrariedade de a segue que $A \subset \overline{B}$.

$\Leftarrow$) Suponha $A \subset \overline{B}$. Assim, dado $a \in A$, temos que $a \in \overline{B}$, ou seja, existe uma sequência $(b_n) \subset B$ tal que $b_n \to a$ quando $n \to \infty$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $d(a,b_n) < \varepsilon$. Assim,

$$d(a,B) \leq d(a,b_n) + d(b_n,B) < \varepsilon$$

ou seja,

$$lim_{n\to\infty} d(a,B) = d(a,B) = 0.$$

Pela definição de distância de um ponto a um conjunto, temos $\inf_{b\in B} d(a,b) = 0$. Tomando o supremo em A concluímos que $\sup\limits_{a\in A}\left(\inf\limits_{b\in B} d(a,b)\right) = 0$, e portanto $dist_H(A,B) = 0$. ■

1.3.2 Existência de Atrator Global para Sistemas Semidinâmicos

Definição 1.75. Se A e B são subconjuntos de X, e $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é um sistema dinâmico, dizemos que A atrai B se

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(\pi_t(B), A) = 0.$$

Se existir $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi_t(B) \subset A$ para todo $t \geq t_0$, diremos que A absorve B.

Em particular, se A absorve B, então A atrai B (a recíproca não é verdadeira).

Definição 1.76. Dados $A \subset X$ e $\varepsilon > 0$ definimos a ε vizinhança de A como

$$B(A,\varepsilon) = \{x \in X; d(x,A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a\in A} B(a,\varepsilon)$$

Proposição 1.77. *Sejam $A, B \subset X$, então A atrai B se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe τ tal que $\pi_t(B) \subset B(A,\varepsilon)$ para todo $t \geq \tau$.*

Demonstração. Suponha que A atrai B, isto é, $\lim\limits_{t\to\infty} dist_H(\pi_t(B), A) = 0$. Tomemos $x \in \pi_t(B)$. Pela definição de limite, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\tau \in \mathbb{N}$ tal que para todo

$t \geq \tau$, temos $|dist_H(\pi_t(B), A) - 0| < \varepsilon$, ou ainda,

$$\left| \sup_{x \in \pi_t(B)} \left(\inf_{a \in A} d(x,a) \right) \right| < \varepsilon$$

para qualquer $t \geq \tau$. Note que $\inf\limits_{a \in A} d(x,a) = d(x,A)$ donde segue que

$$\left| \sup_{x \in \pi_t(B)} (d(x,A)) \right| < \varepsilon$$

para todo $t \geq \tau$ e portanto $x \in \bigcup\limits_{a \in A} B(a,\varepsilon) = B(A,\varepsilon)$, e $\pi_t(B) \subset B(A,\varepsilon)$ para todo $t \geq \tau$, como queríamos.

$\Leftarrow$) Por outro lado, suponha que para qualquer $\varepsilon > 0$ exista $\tau \geq 0$ tal que $\pi_t(B) \subset B(A,\varepsilon)$ para todo $t \geq \tau$, e tomemos $x \in \pi_t(B)$ para algum $t \geq \tau$. Deste modo, temos que $d(x,A) < \varepsilon$, ou seja, $x \in B(A,\varepsilon)$. Note que isso se verifica para qualquer que seja $x \in \pi_t(B)$, logo,

$$\left| \sup_{x \in \pi_t(B)} (d(x,A)) \right| < \varepsilon,$$

e assim o $\lim\limits_{t \to \infty} dist_H(\pi_t(B), A) = 0$, e A atrai B. ■

A partir disso, podemos definir atratores globais.

Definição 1.78. Um conjunto $\mathcal{A}$ é chamado um atrator global para o sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ se é compacto, invariante, e atrai todo subconjunto limitado de X.

Proposição 1.79. *Se existe um atrator global para um sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$, então este atrator é único.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ atratores globais para o sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$. Como $\mathcal{A}_2$ é um conjunto compacto, temos que tal conjunto é fechado e limitado. Além disso, $\mathcal{A}_1$ é um atrator global, o que quer dizer que $\mathcal{A}_1$ atrai todo subconjunto limitado de X. Em particular, $\mathcal{A}_1$ atrai $\mathcal{A}_2$, ou seja

$$\lim_{n \to \infty} dist_H(\pi_t(\mathcal{A}_2), \mathcal{A}_1) = 0.$$

Agora, como $\mathcal{A}_2$ é um conjunto invariante, $\pi_t(\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_2$, e assim

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} dist_H(\pi_t(\mathcal{A}_2), \mathcal{A}_1) \\ &= \lim_{t\to\infty} dist_H(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) \\ &= dist_H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2). \end{aligned}$$

Como $dist_H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0$, pela Proposição 1.74 temos $\mathcal{A}_2 \subset \overline{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$.

De maneira análoga provamos que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, e portanto $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. ■

Proposição 1.80. *Se um sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ possui atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é dado pela união de todos os subconjuntos invariantes limitados de X.*

Demonstração. Suponha que o sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ possui atrator global, e denotemos tal atrator por $\mathcal{A}$. Vamos provar que $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} A_i$, em que $\{A_i\}_{i\in I}$ é a família de todos os subconjuntos invariantes e limitados de X.

Note que pela definição de atrator global, $\mathcal{A}$ é invariante e limitado, portanto, $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Resta mostrar a inclusão contrária. Como para cada $i \in I$ o conjunto A_i é limitado, temos que $\mathcal{A}$ atrai cada um desses conjuntos, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(\pi_t(A_i), \mathcal{A}) = 0$$

para todo $i \in I$. Ainda, como cada A_i é invariante, $\pi_t(A_i) = A_i$, e assim

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(A_i, \mathcal{A}) = 0$$

para todo $i \in I$, ou seja, $dist_H(A_i, \mathcal{A}) = 0$. Pela Proposição 1.74 segue que para qualquer $i \in I$,

$$A_i \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$$

portanto,

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \mathcal{A}.$$

■

Definição 1.81. Seja $(X, \pi, \mathbb{T}^+)$ um sistema semidinâmico. Uma solução global de π por $x \in X$ é uma função contínua $\psi : \mathbb{T} \to X$ tal que $\psi(0) = x$ e $\pi(t)\psi(s) = \psi(t+s)$ para todo $t, s \in \mathbb{T}$, com $t \geq 0$. Uma solução global constante será chamada de solução estacionária e o seu valor um ponto de equilíbrio.

Se existe uma solução global ela não precisa ser única. Quando existe uma solução global $\psi : \mathbb{T} \to X$ por $x \in X$, definiremos a órbita global de X relativa a solução global ψ por $\gamma_\psi(x) := \{\psi(t); t \in \mathbb{T}\}$.

Proposição 1.82. *Seja $(X, \pi, \mathbb{T}^+)$ um sistema semidinâmico. Suponha que esse sistema possua um atrator global $\mathcal{A}$. Afirmamos que*

$$\mathcal{A} = \{x \in X;\ \textit{existe uma solução global limitada de } \pi \textit{ por } x\}.$$

Demonstração. Suponha que exista uma solução global limitada $\psi(.)$ de π por x. Provaremos ainda que $\psi(\mathbb{R})$ é $\tilde{\pi}-$invariante. De fato, seja $t \geq 0$ arbitrário e $a \in \mathbb{R}$, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $a = t + s$. Assim,

$$\psi(a) = \psi(t+s) = \pi(t)\psi(s) \in \pi(t)\psi(\mathbb{R})$$

provando que $\psi(\mathbb{R}) \subset \pi(t)\psi(\mathbb{R})$ para todo $t \geq 0$. a Para a outra inclusão, tomando $t \geq 0$ e $b \in \mathbb{R}$, temos $t + b = r \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\pi(t)\psi(b) = \psi(t+b) = \psi(r) \in \psi(\mathbb{R})$$

concluindo a igualdade.

Como $\mathcal{A}$ atrai subconjuntos limitados de X e a solução global é limitada, temos

$$\begin{aligned} &dist_H(\pi(t)(\psi(\mathbb{R})), \mathcal{A}) \to 0 \text{ quando } t \to \infty \\ &\Rightarrow dist_H(\psi(\mathbb{R}), \mathcal{A}) = 0. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.74 segue que $\psi(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, como queríamos.

Reciprocamente, seja $x \in \mathcal{A}$. Queremos mostrar que existe uma solução global limitada de $\tilde{\pi}$ por x. Para isso, construiremos esta função. Como $\mathcal{A}$ é invariante, $x \in \pi(t)\mathcal{A}$

para todo $t \geq 0$. Particularmente, temos $x \in \pi(1)\mathcal{A}$, ou seja, existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$, tal que

$$\pi(1)x_{-1} = x.$$

Da mesma forma, como $x_{-1} \in \mathcal{A}$, existe $x_{-2} \in \mathcal{A}$ tal que

$$\pi(1)x_{-2} = x_{-1}.$$

Indutivamente, obtemos uma sequência (x_{-n}) tal que $\pi(1)x_{-n-1} = x_{-n}$. Dessa forma, temos que $\pi(n)x_{-n} = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $x = \pi(1)x_{-1} = \pi(1)\pi(1)x_{-2} = \pi(2)x_{-2} = \ldots = \pi(n)x_{-n}$.

Além disso, se $m \leq n$, $\pi(n-m)x_{-n} = x_{-m}$, pois

$$\begin{aligned} \pi(n-m)x_{-n} &= \pi(n-m)\pi(1)x_{-n-1} \\ &= \pi(n-m)\pi(m)x_{-m-n} \\ &= \pi(n)x_{-m-n} \\ &= \pi(1)x_{-m-1} \\ &= x_{-m}. \end{aligned} \tag{1.3-1}$$

Assim, definamos para $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(t) = \begin{cases} \pi(t+n)x_{-n}, \text{ se } t \in [-n, -n+1], \\ \pi(t)x, \text{ se } t \geq 0. \end{cases}$$

Já sabemos que $\psi(0) = x$ e que $\psi(\mathbb{R})$ é limitada, pois $\psi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Portanto, resta mostrar que $\pi(t)\psi(\tau) = \psi(t+\tau)$ para todo $t \geq 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Para isso, consideremos dois casos:

• *Caso 1:* Se $\tau \geq 0$, pelas propriedades de sistemas dinâmicos, temos

$$\begin{aligned} \pi(t)\psi(\tau) &= \pi(t)\pi(\tau)x \\ &= \pi(t+\tau)x \\ &= \psi(t+\tau). \end{aligned}$$

• *Caso 2:* Se $\tau < 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in [-n, -n+1)$. Daí segue que

$$\begin{aligned}\pi(t)\psi(\tau) &= \pi(t)\pi(n+\tau)x_{-n}\\ &= \pi(t+n+\tau)x_{-n}.\end{aligned}$$

Agora temos duas possibilidade: $t+\tau \geq 0$ ou $t+\tau < 0$.

- Se $t+\tau \geq 0$, então

$$\begin{aligned}\pi(t+\tau+n)x_{-n} &= \pi(t+\tau)\pi(n)x_{-n}\\ &= \pi(t+\tau)x = \psi(t+\tau),\end{aligned}$$

como queríamos.

- Se $t+\tau < 0$, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $t+\tau \in [-m, -m+1)$. Note que $m \leq n$, portanto

$$\begin{aligned}\pi(t+\tau+n)x_{-n} &= \pi((t+\tau+m)+(n-m))x_{-n}\\ &= \pi(t+\tau+m)\pi(n-m)x_{-n}\\ &\overset{(1.3\text{-}1)}{=} \pi(t+\tau+m)x_{-m}\\ &= \psi(t+\tau)\end{aligned}$$

donde concluímos que $\psi(.)$ é de fato solução global de π por x.

■

Proposição 1.83. *Seja $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinâmico, K um subconjunto compacto de X, e (x_n) uma sequência em X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, K) = 0$, então (x_n) possui uma subsequência convergente (em K). Além disso, se K atrai um conjunto compacto K_1, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\varnothing \neq \Lambda^+(K_1) \subset K$.*

Demonstração. Como

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, K) = 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então $d(x_n, K) < \varepsilon$. Assim, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, podemos tomar $\varepsilon = \frac{1}{m}$, sendo que para cada m existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_m$, então $d(x_n, K) < \frac{1}{m}$. Em outras palavras, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $x_{n_m} \in X$ e $y_m \in K$ tal que $d(x_{n_m}, y_m) < \frac{1}{m}$. Note que quando $m \to \infty$, $d(x_{n_m}, y_m) \to 0$, assim, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_0$, então $d(x_{n_m}, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como K é compacto, podemos assumir que (y_m) converge para algum $y_0 \in K$. (tomando subsequência se necessário). Assim, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_1$, então $d(y_m, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Agora, tomando $m_2 = \text{máx}\{m_0, m_1\}$, se $m \geq m_2$ temos

$$\begin{aligned} d(x_{n_m}, y_0) &\leq d(x_{n_m}, y_m) + d(y_m, y_0) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

donde concluímos que (x_n) possui de fato uma subsequência convergente.

Para a segunda parte do teorema, utilizaremos a Proposição 1.77, isto é, se K atrai K_1, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$\pi_t(K_1) \subset B(K, \varepsilon) \text{ para todo } t \geq \tau. \tag{1.3-2}$$

Como K é compacto e $B(K, \varepsilon) = \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon)$ é uma cobertura para o conjunto K, podemos extrair desta uma subcobertura finita. Assim, $\bigcup_{t \geq \tau} \pi_t(K_1)$ está contido em uma união finita de bolas de raio ε, donde segue que tal conjunto é totalmente limitado.

Por outro lado, $\bigcup_{0 \leq t \leq \tau} \pi_t(K_1)$ é compacto, e assim, pelo Lema 1.40, é totalmente limitado. Como $\gamma^+(K_1) = \left(\bigcup_{t \geq \tau} \pi_t(K_1) \right) \cup \left(\bigcup_{0 \leq t \leq \tau} \pi_t(K_1) \right)$, que são dois conjuntos totalmente limitados, $\gamma^+(K_1)$ é também totalmente limitado. Consequentemente, $\gamma^+(K_1) \cup K$ é totalmente limitado.

Além disso, provaremos que $\gamma^+(K_1) \cup K$ é completo. De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\gamma^+(K_1) \cup K$. Vamos mostrar que (x_n) é convergente.

Suponha que (x_n) possui infinitos termos em K, assim, como K é compacto, (x_n) deve possuir subsequência convergente em K, mas como (x_n) é de Cauchy, então a sequência toda converge para o mesmo limite que a subsequência.

Agora, se (x_n) não possuir infinitos termos em K, a sequência possui infinitos pontos em $\gamma^+(K_1)$, possuindo assim uma subsequência da forma $(\pi(t_{n_k}, y_{n_k}))$. Como K

atrai K_1 temos

$$\lim_{k\to\infty} dist_H(\pi(t_{n_k}, y_{n_k}), K) = 0.$$

Isso implica que

$$\lim_{k\to\infty} d(\pi(t_{n_k}, y_{n_k}), K) = 0,$$

logo, pela primeira parte desta proposição, $(\pi(t_{n_k}, y_{n_k}))$ possui subsequência convergente em K. Novamente, pelo fato de (x_n) ser uma sequência de Cauchy, e possuir uma subsequência convergente, toda a sequência deve convergir para o mesmo limite da subsequência.

Portanto, em qualquer caso temos (x_n) convergente, provando que $\gamma^+(K_1) \cup K$ é completo. Assim, pelo Corolário 1.42 temos que $\gamma^+(K_1)$ é precompacto, pois é totalmente limitado e está contido em um conjunto completo.

Finalmente, como $\overline{\gamma^+(K_1)}$ é compacto, $\overline{\gamma^+(\pi_t, K_1)}$ é também compacto para todo $t \in \mathbb{T}^+$, pois é um subconjunto fechado de $\overline{\gamma^+(K_1)}$. Note que a família $\{\overline{\gamma^+(\pi_t(K_1))}; t \in \mathbb{T}^+\}$ possui a propriedade da intersecção finita, pois $\overline{\gamma^+(\pi_t(K_1))} \subset \overline{\gamma^+(\pi_s(K_1))}$ sempre que $s \leq t$. Assim, pelo Teorema 1.26 temos

$$\Lambda^+(K_1) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+(K_1)} \neq \varnothing.$$

Agora mostraremos que $\Lambda^+(K_1) \subset K$. De fato, seja $y \in \Lambda^+(K_1)$, e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $y \in \Lambda^+(K_1)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$ temos $y \in \overline{\gamma^+(\pi(t_0, K_1))}$. Além disso, por (1.3-2) existe $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi_t(K_1) \subset B(K, \varepsilon)$ para todo $t \geq \tau$. Daí segue que exite $\tau \in \mathbb{T}^+$ de modo que

$$y \in \overline{\gamma^+(\pi(\tau, K_1))} \subset B(K, \varepsilon).$$

Como $d(y, K) < \varepsilon$ e ε é arbitrário, temos $y \in k$, como queríamos. ∎

Lema 1.84. *Seja $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinâmico. Se $B \subset X$, então $\pi_t(\Lambda^+(B)) \subset \Lambda^+(B)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Além disso, se B é tal que $\Lambda^+(B)$ é compacto e atrai B, então $\Lambda^+(B)$ é invariante, ou seja, $\pi_t(\Lambda^+(B)) = \Lambda^+(B)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.*

Demonstração. Se $\Lambda^+(B) = \varnothing$, não há o que provar. Agora, se $\Lambda^+(B) \neq \varnothing$, fixando $t \in \mathbb{T}^+$, se $y \in \Lambda^+(B)$, então existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ e $(x_n) \subset B$ tais que $t_n \to \infty$ e $y = \lim\limits_{n\to\infty} \pi(t_n, x_n)$. Pela continuidade da função π, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(t + t_n, x_n) =$

$\lim_{n\to\infty} \pi(t+t_n, x_n) = \pi(t,y)$, e assim $\pi(t,y) \in \Lambda^+(B)$, uma vez que a sequência $(t+t_n) \to \infty$. Da arbitrariedade de y segue que para todo $y \in \Lambda^+(B)$, temos $\pi(t,y) \in \Lambda^+(B)$, portanto $\pi_t(\Lambda^+(B)) \subset \Lambda^+(B)$.

Agora, resta mostrar que se $\Lambda^+(B)$ é compacto e atrai B, então $\Lambda^+(B) \subset \pi_t(\Lambda^+(B))$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

De fato, seja $x \in \Lambda^+(B)$, isto é, existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ e $(x_n) \subset B$ tais que $t_n \to \infty$ e $\pi(t_n, x_n) \to x$.

Como por hipótese $\Lambda^+(B)$ atrai B, temos $\lim_{t\to\infty} dist_H(\pi_t(B), \Lambda^+(B)) = 0$, ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que se $t \geq t_0$, então $dist_H(\pi_t(B), \Lambda^+(B)) < \varepsilon$. Tomando $t \in \mathbb{T}^+$ arbitrário, como a semi-distância de Hausdorff entre $\pi_t(B)$ e $\Lambda^+(B)$ é a maior distância entre um ponto de $\pi_t(B)$ e o conjunto $\Lambda^+(B)$, temos que essa semi-distância é maior ou igual a distância usual entre qualquer ponto de $\pi_t(B)$ e $\Lambda^+(B)$. Além disso, como $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $t_n > t_0 + t$. Deste modo, $t_n - t > t_0 > 0$, e $\pi(t, (\pi(t_n - t, x_n))) = \pi(t_n, x_n) \to x$ quando $n \to \infty$, e $\pi(t_n - t, x_n) \in \{\pi_t(B); t \geq t_0\}$ para todo $n > n_0$. Daí segue que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, temos $t_n - t > t_0$, e assim, $d(\pi(t_n - t, x_n), \Lambda^+(B)) < \varepsilon$. Ou seja, $\lim_{n\to\infty} d(\pi(t_n - t, x_n)\Lambda^+(B) = 0$.

Pela proposição anterior, como $\Lambda^+(B)$ é compacto, $\pi(t_n - t, x_n)$ possui subsequência $\pi(t_{n_k} - t, x_{n_k})$ que converge para algum $y \in \Lambda^+(B)$.

Note que $\pi(t, (\pi(t_{n_k} - t, x_{n_k})))$ é uma subsequência de $\pi(t, (\pi(t_n - t, x_n)))$, que converge para x, logo a primeira deve convergir para o mesmo limite. Por outro lado, pela continuidade de π, temos que $\pi(t, (\pi(t_{n_k} - t, x_{n_k})))$ converge para $\pi(t,y)$. Pela unicidade do limite temos $\pi(t,y) = x$, logo $x \in \pi_t(\Lambda^+(B))$ e $\Lambda^+(B) \subset \pi_t(\Lambda^+(B))$. Como a inclusão contrária já foi provada na primeira parte deste lema, temos a igualdade

$$\Lambda^+(B) = \pi_t(\Lambda^+(B)).$$

■

Lema 1.85. *Sejam $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinâmico e $x \in X$. Se $\overline{\gamma^-(x)}$ é compacto, então $\Lambda^-(x)$ será não vazio, compacto e invariante.*

Demonstração. Já provamos que $\Lambda^-(x)$ é invariante. Observe agora que como $\overline{\gamma^-(x)}$ é compacto, então qualquer coleção de subconjuntos fechados de $\overline{\gamma^-(x)}$ com a propriedade da intersecção finita, possui a intersecção arbitrária não vazia. Sabemos que a coleção $\{\overline{\gamma^-(\pi(t,x))}; t \in \mathbb{T}^-\}$ possui a propriedade da intersecção finita, pois $\overline{\gamma^-(\pi(t,x))} \subset \overline{\gamma^-(\pi(s,x))}$ sempre que $t \leq s$. Daí segue que

$$\Lambda^-(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^-} \overline{\gamma^-(\pi(t,x))} \neq \varnothing.$$

Por fim, como $\overline{\gamma^-(x)} = \gamma^-(x) \cup \Lambda^-(x)$ é compacto, temos $\Lambda^-(x) \subset \overline{\gamma^-(x)}$. Assim, $\Lambda^-(x)$ é fechado, e está contido em um conjunto compacto, donde segue sua compacidade. ■

Observação 1.86. *Se $x \in X$ e $\Lambda^+(x) = \{x^*\}$, então x^* é um ponto crítico.*

Lema 1.87. *Seja $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinâmico. Se $B \subset X$ é tal que $\Lambda^+(B)$ é compacto e atrai B, temos o seguinte:*

i) *Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, B é conexo e $\Lambda^+(B) \subset B$, então $\Lambda^+(B)$ é conexo.*

ii) *Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e B é conexo, então $\Lambda^+(B)$ é conexo.*

Demonstração. **i)** Consideremos $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, e suponhamos que $\Lambda^+(B)$ seja desconexo. Assim, existem fechados P e Q tais que $P \cup Q = \Lambda^+(B)$, e $P \cap Q = \varnothing$. Logo, existe uma distância entre os conjuntos P e Q, que denotaremos por r.

Como por hipótese $\Lambda^+(B)$ é compacto, pelo Lema 1.84 temos que $\Lambda^+(B)$ é invariante. Assim, $\Lambda^+(B) = \pi_t(\Lambda^+(B)) \subset \pi_t(B)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, pois $\Lambda^+(B) \subset B$ por hipótese. Além disso, como $\Lambda^+(B)$ atrai B, pela Proposição 1.77 temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\tau \in \mathbb{T}^+$ de modo que $\pi_t(B) \subset B(\Lambda^+(B), \varepsilon)$ sempre que $t \geq \tau$. Em particular, para $\varepsilon = \frac{r}{2}$, existe $\tau_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi_t(B) \subset (\Lambda^+(B), \frac{r}{2})$ para todo $t \geq \tau_0$, e assim $\pi_t(B)$ está contido na $\frac{r}{2}$ − vizinhança de P ou de Q, para t suficientemente grande.

Suponhamos, sem perda de generalidade que $\pi_t(B) \subset B(Q, \frac{r}{2})$ para todo $t \geq \tau_0$, e tomemos $p \in P$ arbitrário. Note que $p \in \Lambda^+(B)$, que é positivamente invariante. Assim, P é também positivamente invariante, pois se existisse algum ponto da órbita de p que não pertencesse ao conjunto P, esse ponto deveria pertencer ao conjunto Q, e assim, teríamos pontos da órbita de p fora de $\Lambda^+(B)$, o que é um absurdo.

Por outro lado, como $p \in P \subset \pi_t(B)$, temos que existe $b \in B$, e $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $p = \pi(t_0, b)$, e pela invariância de P, deveríamos ter $\pi(t, \pi(t_0, b)) \in P$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, o que contradiz o fato que $\pi_t(B) \subset B(Q, \frac{r}{2})$ para todo $t \geq \tau_0$. Dessa contradição segue que $\Lambda^+(B)$ é conexo.

ii) Suponhamos agora $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Nesse caso, como o intervalo $[t, \infty)$ é conexo para todo $t \in \mathbb{T}^+$, e B é conexo, o produto cartesiano $[t, \infty) \times B$ é um conjunto conexo. Como a função π é contínua, considerando o domínio conexo $[t, \infty) \times B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, temos a conexidade da imagem dessa função, ou seja, $\gamma^+(\pi_t(B))$ é um conjunto conexo para cada $t \in \mathbb{T}^+$. Deste modo, $\overline{\gamma^+(\pi_t(B))}$ é conexo para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Como $\Lambda^+(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+(\pi_t(B))}$, temos que $\Lambda^+(B)$ é conexo. ∎

Observação 1.88. *Note que $\Lambda^+(\pi(t,x)) = \Lambda^+(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e $x \in X$. Ou seja,*

$$\bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+(\pi(t,x))} = \bigcap_{t \geq t_0} \overline{\gamma^+(\pi(t,x))}.$$

De fato, se $y \in \Lambda^+(\pi(t,x))$, por definição existe $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\pi(t_n, \pi(t,x)) \to y$, ou seja, $\pi(t_n + t, x) \to y$, e $y \in \Lambda^+(x)$. A outra inclusão acontece pois para qualquer $t_0 \in \mathbb{T}^+$ temos

$$\begin{aligned}
\Lambda^+(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+(\pi(t,x))} \subset & \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+; t \geq t_0} \overline{\gamma^+(\pi(t,x))} \\
= & \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+(\pi(t+t_0,x))} \\
= & \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+(\pi(t,\pi(t_0,x)))} = \Lambda^+(\pi(t_0,x)).
\end{aligned}$$

Lema 1.89. *Se B é um subconjunto não vazio de X tal que $\overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$ é compacto para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\Lambda^+(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Demonstração. Note que $\overline{\gamma^+(\pi_t(B))}$ é compacto para todo $t \geq t_0$, uma vez que $\overline{\gamma^+(\pi_t(B))} \subset \overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$, que é compacto por hipótese. Note que a coleção $\{\overline{\gamma^+(\pi_t(B))}\}$ de subconjuntos fechados de $\overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$ possui a propriedade da intersecção finita, de modo que a intersecção arbitrária é não vazia. Isto é, $\Lambda^+(B) = \bigcap_{t \geq t_0} \overline{\gamma^+(\pi_t(B))} \neq \varnothing$. Ainda, como a intersecção arbitrária de conjuntos compactos é um conjunto compacto, segue que $\Lambda^+(B)$ é um conjunto compacto.

Mostraremos agora que $\Lambda^+(B)$ atrai B. De fato, suponha que isso não ocorra, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(\pi_t(B), \Lambda^+(B)) \geq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Da arbitrariedade de t, podemos tomar uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ e $(x_n) \subset B$ tal que $t_n \to \infty$ e

$d(\pi(t_n, x_n), \Lambda^+(B)) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $t_n > t_0$, e deste modo, $\pi(t_n, x_n) \subset \overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$, que é um conjunto compacto. Assim, $\pi(t_n, x_n)$ possui uma subsequência $\pi(t_{n_j}, x_{n_j})$ que converge para algum $y \in \overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$. Dessa convergência temos que para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n_j > n_1$, então $d(\pi(t_{n_j}, x_{n_j}), y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Agora, como $t_{n_j} \to \infty$, temos que $y \in \Lambda^+(B)$, mas por outro lado, tomando $n_2 = $ máx$\{n_0, n_1\}$, se $n_j > n_2$ então

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq d(\pi(t_{n_j}, x_{n_j}), \Lambda^+(B)) \\ &\leq d(\pi(t_{n_j}, x_{n_j}), y) + d(y, \Lambda^+(B)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + d(y, \Lambda^+(B))\end{aligned}$$

e portanto, devemos ter $d(y, \Lambda^+(B)) > \frac{\varepsilon}{2}$, o que uma contradição com o fato que $y \in \Lambda^+(B)$. Portanto, $\Lambda^+(B)$ atrai B.

Por fim, como $\Lambda^+(B)$ é compacto e atrai B, o Lema 1.84 nos garante que $\Lambda^+(B)$ é invariante. ■

Definição 1.90. Um sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é dito assintoticamente compacto se, para qualquer subconjunto fechado, limitado e não vazio $B \subset X$ para o qual $\pi_t(B) \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, existe um subconjunto compacto $J \subset B$ que atrai B.

Lema 1.91. *Seja $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinâmico assintoticamente compacto e B um subconjunto não vazio de X tal que $\gamma^+(\pi_{t_0}(B))$ é limitado para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$. Nestas condições $\Lambda^+(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Demonstração. Inicialmente, note que para qualquer $t \in \mathbb{T}^+$ temos $\pi_t(\gamma^+(\pi_{t_0}(B))) \subset \gamma^+(\pi_{t_0}(B))$.

Desse fato, e da continuidade da função π temos que $\pi_t(\overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}) \subset \overline{\pi_t(\gamma^+(\pi_{t_0}(B)))} \subset \overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$.

Como por hipótese $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é assintoticamente compacto, e $\overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$ é um subconjunto fechado, limitado, e não vazio de X tal que $\pi_t(\overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}) \subset \overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, temos que existe $J \subset \overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$ que atrai $\overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$. Assim, pela Proposição 1.77, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\tau_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que se $t \geq \tau_0$, então $\pi_t(\overline{\gamma^+(\pi_{\tau_0}(B))}) \subset B(J, \varepsilon)$, logo, tomando $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ temos um $t_n \in \mathbb{T}^+$ correspondente, tal que $\pi_t(\overline{\gamma^+(\pi_{\tau_0}(B))}) \subset B(J, \varepsilon_n)$ para todo $t \geq t_n$. Por construção, $t_n \to \infty$ e $\varepsilon_n \to 0$, de modo que $\pi_t(\overline{\gamma^+(\pi_{\tau_0}(B))}) \subset J$. Da invariância de $\overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))}$ segue que $\overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))} \subset J$, e assim, $\Lambda^+(B) \subset \overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))} \subset J$, donde segue que $\Lambda^+(B)$ é compacto.

Resta mostrar que $\Lambda^+(B)$ atrai B. De fato, suponha por contradição que isso não ocorra. Então deve existir $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{T}^+$, temos

$$d(\pi_t(B), \Lambda^+(B)) \geq \varepsilon_0.$$

Da arbitrariedade de t, podemos tomar uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$, e $(x_n) \subset B$ tal que $t_n \to \infty$ e $d((\pi(t_n, x_n)), \Lambda^+(B)) \geq \varepsilon_0$.

Note que, como $t_n \to \infty$, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $t_n > t_0$. Nesse caso,

$$\pi(t_n, x_n) \in \gamma^+(\pi_{t_0}(B)) \subset \overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(B))} \subset J$$

sempre que $n > n_0$. Assim, como J é compacto e $(\pi(t_n, x_n)) \subset J$ quando $n > n_0$, existe uma subsequência $(\pi(t_{n_k}, x_{n_k}))$ convergindo para algum $z \in J$, ou seja, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n_k > n_0$, e $n_k > n_1$ então $d(\pi(t_{n_k}, x_{n_k}), z) < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Assim, tomando $n_2 = \text{máx}\{n_0, n_1\}$ temos que, se $n_k > n_2$ então

$$\varepsilon_0 \leq d(\pi(t_{n_k}, x_{n_k}), z) + d(z, \Lambda^+(B)) < \frac{\varepsilon_0}{2} + d(z, \Lambda^+(B)),$$

logo, devemos ter $d(z, \Lambda^+(B)) > \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$, o que é uma contradição, pois $t_{n_k} \to \infty$, e assim $z \in \Lambda^+(B)$. Portanto, $\Lambda^+(B)$ atrai B.

A invariância segue do Lema 1.84. ■

Definição 1.92. Um sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é dito eventualmente limitado se para cada subconjunto limitado $B \subset X$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+(\pi_{t_0}(B))$ é limitado. Diremos que $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é limitado se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B for limitado.

Proposição 1.93. *Se $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é um sistema semidinâmico tal que $(\pi(t_n, x_n))$ é relativamente compacto sempre que $(\pi(t_n, x_n))$ é limitada em X, (x_n) é limitada em X, e $t_n \to \infty$, então o sistema semidinâmico é assintoticamente compacto.*

Reciprocamente, se $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, então $(\pi(t_n, x_n))$ é relativamente compacto sempre que (x_n) é limitada em X e $t_n \to \infty$.

Demonstração. Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não vazio tal que $\pi_t(B) \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Então $\Lambda^+(B) \subset B$ é não vazio, compacto e atrai B. De fato, considerando $(x_n) \subset B$ e $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ tal que $t_n \to \infty$, então $(\pi(t_n, x_n)) \subset B$. Assim, tanto $(\pi(t_n, x_n))$ quanto (x_n) são limitadas.

Da limitação dessas sequências e do fato que $t_n \to \infty$, a hipótese nos garante que $(\pi(t_n, x_n))$ é relativamente compacto, ou seja $(\overline{\pi(t_n, x_n)})$ é compacto. Portanto, $(\pi(t_n, x_n))$ possui uma subsequência $(\pi(t_{n_k}, x_{n_k}))$ que converge para algum y. Como $t_{n_k} \to \infty$, e $(x_{n_k}) \subset B$, temos $y \in \Lambda^+(B) \neq \varnothing$.

Para provar que $\Lambda^+(B) \subset B$, basta observar que $\Lambda^+(B) \subset \overline{\gamma^+(\pi_t(B))} = \overline{\cup_{s \geq t} \pi_s(B)} \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Dessa afirmação podemos concluir também que o conjunto $\Lambda^+(B)$ é compacto, uma vez que $\Lambda^+(B)$ é fechado, e B é compacto (fechado e limitado).

Por fim, mostraremos que $\Lambda^+(B)$ atrai B. Para isso, suponhamos, por contradição, que isso não ocorre. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{T}^+$ temos $d(\pi_t(B), \Lambda^+(B)) \geq \varepsilon_0$.

Da arbitrariedade de t, podemos tomar uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ e $(x_n) \subset B$, tal que $t_n \to \infty$, e $d(\{\pi(t_n, x_n); n \in \mathbb{N}\}, \Lambda^+(B)) \geq \varepsilon_0$. Agora, como $(\pi(t_n, x_n)) \subset B$, que é compacto, essa sequência deve possuir subsequência $(\pi(t_{n_k}, x_{n_k}))$ convergente para algum $y \in B$, ou seja, deveria existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n_k > n_0$, então

$$d(\{\pi(t_{n_k}, x_{n_k}); n_k \in \mathbb{N}\}, y) < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

mas deste modo, teríamos

$$\varepsilon_0 \leq d(\{\pi(t_{n_k}, x_{n_k}); n_k \in \mathbb{N}\}, \Lambda^+(B)) \leq d(\{\pi(t_{n_k}, x_{n_k}); n_k \in \mathbb{N}\}, y) + d(y, \Lambda^+(B)),$$

e portanto $d(y, \Lambda^+(B)) > \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$, o que é um absurdo, pois por definição, $y \in \Lambda^+(B)$, uma vez que $t_{n_k} \to \infty$ e $(x_{n_k}) \subset B$. Portanto, $\Lambda^+(B)$ atrai B, donde cocluímos que existe um subconjunto compacto $\Lambda^+(B)$ de B, que atrai o conjunto B. Assim, $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é assintoticamente compacto.

Para a recíproca, seja $(x_n) \subset X$ uma sequência limitada, e $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ tal que $t_n \to \infty$. Como $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é eventualmente limitado, existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma^+(\pi_{t_0}(\{x_n; n \in \mathbb{N}\}))$ é um conjunto limitado, e consequentemente $B = \overline{\gamma^+(\pi_{t_0}(\{x_n; n \in \mathbb{N}\}))}$ é limitado, fechado, não vazio para o qual $\pi_t(B) \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Assim, como $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é assintoticamente compacto, existe $J \subset B$ que atrai B. Pela Proposição 1.77, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\tau \in \mathbb{T}^+$ de modo que, se $t \geq \tau$, então $\pi_t(B) \subset B(J, \varepsilon)$. Logo, seja dado $\varepsilon > 0$ arbitrário. Podemos tomar uma sequência (ε_n) tendendo a zero, e para cada ε_n existirá um $\tau_n \in \mathbb{T}^+$ tal que se $t \geq \tau_n$, então $\pi_t(B) \subset B(J, \varepsilon_n)$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $t \geq \tau_{n_0}$, temos $d(\pi_t(B), J) < \varepsilon$.

Por outro lado, como $t_n \to \infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$, então $t_n > \tau_{n_0}$, e nesse caso $d(\pi(t_n, x_n), J) < \varepsilon$, isto é, $d(\pi(t_n, x_n), J) \to 0$.

Assim, pela Proposição 1.83, $(\pi(t_n, x_n))$ possui subsequência convergente em J, e portanto, é relativamente compacto. ∎

Definição 1.94. Um sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é dito condicionalmente eventualmente compacto se dado B limitado e positivamente invariante, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{\pi_{t_0}(B)}$ é compacto.

Um sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é dito eventualmente compacto se dado B limitado existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{\pi_{t_0}(B)}$ é compacto.

Teorema 1.95. *Um sistema semidinâmico condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Seja $B \subset X$ um subconjunto não vazio, fechado e limitado tal que $\pi_t(B) \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Como $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é condicionalmente eventualmente compacto, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{\pi_{t_0}(B)}$ é compacto. Assim, pelo Lema 1.89, $\Lambda^+(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B, portanto, existe um subconjunto compacto de B que atrai B, donde concluímos que B é assintoticamente compacto. ∎

Definição 1.96. Diremos que um sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é ponto dissipativo (limitado dissipativo/compacto dissipativo) se existir um subconjunto limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de X.

Observação 1.97. *Na definição acima podemos trocar a palavra atrai pela palavra absorve sem mudar os significados dos conceitos. Basta observar que se A é limitado e atrai um subconjunto B de X, pela Proposição 1.77, existe $\tau \in \mathbb{T}$ tal que $\pi_t(B) \subset B(A, \varepsilon)$ para todo $t \geq \tau$. Como A é limitado, e ε é arbitrário, existe ε_0 tal que $B(A, \varepsilon_0)$ é limitado, e para este ε_0 existe $\tau_0 \in \mathbb{T}$ tal que $\pi_t(B) \subset B(A, \varepsilon_0)$ para todo $t \geq \tau_0$. Deste modo, pela Definição 1.75, $B(A, \varepsilon_0)$ absorve B, ou seja, existe um subconjunto limitado de X que absorve B.*

Lema 1.98. *Seja $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinâmico ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Se $\gamma^+(K)$ é limitado sempre que K é compacto, então $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é compacto dissipativo.*

Demonstração. Como $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é ponto dissipativo, por definição, existe um subconjunto não vazio e limitado $B \subset X$ que absorve pontos de X. Seja $U = \{x \in B; \gamma^+(x) \subset B\}$. Valem as seguintes afirmações:

i) U é não vazio. Como B absorve pontos de X, tomando $x \in X$ temos que existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi(t, x) \in B$ para todo $t \geq t_0$. Assim, definindo $y = \pi(t_0, x) \in B$, temos $\pi(t, y) = \pi(t + t_0, x) \in B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, portanto $y \in U \neq \varnothing$.

ii) $\gamma^+(U) = U$. Claramente temos $U \subset \gamma^+(U)$. Resta mostrar a inclusão contrária.

Note que, se $y \in \gamma^+(U)$, então existem $t_0 \in \mathbb{T}^+$ e $x_0 \in U$ tal que $y = \pi(t_0, x_0)$. Como $x_0 \in U$, temos $\gamma^+(x_0) \subset B$, por definição do conjunto U, assim, como $y \in \gamma^+(x_0)$ segue que $y \in B$, e $\pi(t, y) = \pi(t + t_0, x_0) \subset \gamma^+(x_0) \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, e assim, $y \in U$.

iii) U é limitado. De fato, note que B é limitado e U é um subconjunto de B. Assim, U é também limitado.

iv) U absorve pontos de X. Seja $x \in X$, queremos mostrar que existe $\tau_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi(t, x) \in U$ para todo $t \geq \tau_0$. Como B absorve pontos de X, sabemos que existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi(t, x) \in B$ para todo $t \geq t_0$, e assim como no item **i)** temos $\pi(t_0, x) \in U$, e consequentemente $\pi(t, x) \in U$ para todo $t \geq t_0$, pois pelo item **ii)** temos $\gamma^+(U) = U$, assim, $\gamma^+(y) \subset U$ para todo $y \in U$, em particular, para $y = \pi(t_0, x)$.

v) $\pi_t(\overline{\gamma^+(U)}) \subset \overline{\gamma^+(U)}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Essa afirmação segue da continuidade de π, e do fato que $\pi_t(\gamma^+(U)) \subset \gamma^+(U)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, pois assim temos $\pi_t(\overline{\gamma^+(U)}) \subset \overline{\pi_t(\gamma^+(U))} \subset \overline{\gamma^+(U)}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Das afirmações provadas acima e do fato de $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ ser assintoticamente compacto, temos que existe um subconjunto compacto $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$ que atrai $\overline{U}$ e, consequentemente, K também atrai U.

Note que, como U absorve pontos de X, para qualquer $x \in X$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi(t, x) \in U$ sempre que $t \geq t_0$. Por outro lado, como K atrai U, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $t_1 \in \mathbb{T}^+$ tal que se $t \geq t_1$, então $\pi_t(U) \subset B(k, \varepsilon)$. Assim, tomando $t_2 = \text{máx}\{t_0, t_1\}$, se $t \geq t_2$ então $\pi(t, x) \in B(K, \varepsilon)$. Da arbitrariedade de x, temos que K atrai todo ponto de X.

Mostremos agora que existe uma vizinhança V de K tal que $\gamma^+(\pi_t(V))$ é limitada para algum t. De fato, se isso não acontece, existem sequências $(x_n) \subset X$ e $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ tais que $x_n \to y \in K$, $t_n \to \infty$ e $(\pi(t_n, x_n))$ não é limitada.

Considerando $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, temos que $\overline{A}$ é compacto (fechado e limitado), e $\gamma^+(A)$ é não limitada para cada $t \in \mathbb{T}^+$, pois $(\pi(t_n, x_n)) \subset \gamma^+(A) \subset \gamma^+(\overline{A})$. Isso contradiz a hipótese, pois se $\overline{A}$ é compacto, então $\gamma^+(\overline{A})$ deveria ser limitada. Portanto, existe uma vizinhança V de K tal que $\pi_{t_V}(V)$ é limitada.

Tomemos tal vizinhança V. Vamos mostrar que $\gamma^+(\pi_{t_V}(V))$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$. Como K atrai pontos de X, temos que para cada $x \in X$, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_x \in \mathbb{T}^+$ tal que $d(\pi(t_x, x), K) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \geq t_x$.

Além disso, como $\pi_t : X \to X$ é contínua para qualquer $t \in \mathbb{T}^+$, particularmente, $\pi_{t_x} : X \to X$ é contínua. Assim, existe $\delta > 0$ tal que, se $y \in B(x, \delta)$ então $d(\pi_{t_x}(x), \pi_{t_x}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d(\pi_{t_x}(y), K) &\leq d(\pi_{t_x}(x), \pi_{t_x}(y)) + d(\pi_{t_x}(x), K) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $y \in B(x, \delta)$. Ou seja, $\pi_{t_x}(y) \in \overline{K} = K \subset V$. Da arbitrariedade de $y \in B(x, \delta)$ temos $\pi_{t_x}(B(x, \delta)) \subset V$ e assim $\pi_{t_V}(\pi_{t_x}, (B(x, \delta))) \subset \pi_{t_V}(V)$, ou ainda,

$$\pi(t_V + t_x, (B(x, \delta))) \subset \pi_{t_V}(V) \subset \gamma^+(\pi_{t_V}(V)).$$

Daí segue que

$$\pi_t(\pi(t_V + t_x, (B(x, \delta)))) \subset \pi_t(\pi_{t_V}(V)) \subset \gamma^+(\pi_{t_V}(V))$$

para todo $t \in \mathbb{T}^+$, isto é, $\pi_t((B(x, \delta)) \subset \gamma^+(\pi_{t_V}(V))$ sempre que $t \geq t_V + t_x$, e assim $\gamma^+(\pi_{t_V}(V))$ absorve $B(x, \delta)$.

Por fim, mostremos que $\gamma^+(\pi_{t_V}(V))$ absorve conjuntos compactos de X. De fato, seja $J \subset X$ compacto. Para cada $x \in J$ consideremos a vizinhança $B(x, \delta_x)$ de x que é absorvida por $\gamma^+(\pi_{t_V}(V))$. Assim, a coleção $\{B(x, \delta_x); x \in J\}$ forma uma cobertura aberta para J. Como J é compacto, esta cobertura admite subcobertura finita

$\{B(x_1, \delta_{x_1}), ..., B(x_n, \delta_{x_n})\}$, donde segue que

$$\pi_t(J) \subset \pi_t(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_t(B(x_i, \delta_{x_i})) \tag{1.3-3}$$

para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Ainda, $\pi_t(B(x_i, \delta_{x_i})) \subset \gamma^+(\pi_{t_V}(V))$ para todo $t \geq t_{x_i}$. Assim, tomando $t_0 = \text{máx}\{t_{x_1}, ...t_{x_n}\}$ temos que, se $t \geq t_0$ então

$$\bigcup_{i=1}^{n} \pi_t B(x_i, \delta_{x_i}) \subset \gamma^+(\pi_{t_V}(V)).$$

Como por (1.3-3) temos $\pi_t(J) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \pi_t B(x_i, \delta_{x_i})$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, segue que se $t \geq t_0$, então

$$\pi_t(J) \subset \gamma^+(\pi_{t_V}(V)).$$

Portanto, $\gamma^+(\pi_{t_V}(V))$ absorve J, e da arbitrariedade de J temos que $\gamma^+(\pi_{t_V}(V))$ absorve todo subconjunto compacto de X, e $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é compacto dissipativo. ■

Proposição 1.99. *Seja $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinamico. Se K é compacto e atrai a si mesmo, então $\Lambda^+(K) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \pi_t(K)$.*

Demonstração. Note que $\bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \pi_t(K) \subset \Lambda^+(K)$. Assim, resta mostrar a inclusão contrária. Para isso, consideremos a Proposição 1.83, com $K_1 = K$. Como K é compacto e atrai a si mesmo, temos $\varnothing \neq \Lambda^+(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ relativamente compacto e então $\overline{\gamma^+(\pi_t(K))}$ é compacto para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Daí, segue pelo Lema 1.89, que $\Lambda^+(K)$ é compacto, invariante e atrai K, ou seja,

$$\Lambda^+(K) = \pi_t(\Lambda^+(K)) \subset \pi_t(K)$$

para todo $t \in \mathbb{T}^+$. ■

Teorema 1.100. *Um sistema semidinâmico $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ se, e somente se, $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ for eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Seja $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado. Vamos provar que para qualquer conjunto $K \subset X$ compacto, temos $\gamma^+(K)$ limitada. De fato, suponha por contradição que isso não ocorra. Então deve existir uma sequência ilimitada em $\gamma^+(K) = \{\pi(t,x); t \in \mathbb{T}^+ \text{ e } x \in K\}$, ou seja, existe $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ e $(x_n) \subset K$ tal que $(\pi(t_n, x_n))$ não é limitada. Como K é compacto, e $(x_n) \subset K$, (x_n) é limitada, mas $\gamma^+(\pi_t(\{x_n; n \in \mathbb{N}\}))$ não é limitada para todo $t \in \mathbb{T}^+$, uma vez que para cada t fixado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $t_n > t$, e consequentemente

$$\pi(t_n, x_n) \in \gamma^+(\pi_t(\{x_n; n \in \mathbb{N}\})).$$

Porém, isso é uma contradição, pois como $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é eventualmente limitado, deveria existir $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+(\pi(t_0, \{x_n; n \in \mathbb{N}\}))$ fosse limitada. Dessa contradição segue que $\gamma^+(K)$ é limitada sempre que K for compacto.

Assim, cumprem-se as condições do Lema 1.98, e portanto, $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é compacto dissipativo, ou seja, existe $C \subset X$ limitado que absorve compactos de X. A partir disso, definamos o conjunto

$$B = \{x \in C; \gamma^+(x) \subset C\}.$$

Vamos provar que $B \subset C$ é não vazio, limitado, que $\pi_t(\overline{B}) \subset \overline{B}$ e que B absorve compactos de X. De fato, note que B é não vazio, pois, considerando $K \subset X$ compacto, como C absorve conjuntos compactos de X temos que C absorve K. Ou seja, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que, se $t \geq t_0$ então $\pi_t(K) \subset C$. Assim, tomemos $x \in K$, então $y = \pi(t_0, x) \in C$. Além disso, $\pi(t + t_0, x) \in C$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, logo $\gamma^+(y) = \gamma^+(\pi(t_0, x)) \subset C$, e $y \in B \neq \varnothing$.

Repare ainda que $B \subset C$ e portanto B é limitado. Além disso, como para qualquer conjunto compacto $K \subset X$ temos que existe t_0 tal que $\pi_t(K) \subset C$ sempre que $t \geq t_0$, pela forma como definimos o conjunto B temos que $\pi_t(K) \subset B$ para todo $t \geq t_0$. Assim, B absorve compactos de X.

Por fim, provemos que $\pi_t(\overline{B}) \subset \overline{B}$. De fato, dado $x \in B$, pela definição do conjunto B temos que $x \in C$ e $\gamma^+(x) \subset C$, ou seja, $\pi(t,x) \in C$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, logo, $\gamma^+(\pi(t,x)) \subset C$, e assim, $\pi_t(B) \subset B$. Pela continuidade da função π temos $\pi_t(\overline{B}) \subset \overline{\pi_t(B)} \subset \overline{B}$, como queríamos.

Das condições provadas, como $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é assintoticamente compacto, deve existir

$J \subset \overline{B}$ tal que J atrai B.

Como J atrai B, por definição existe $t_1 \in \mathbb{T}^+$ tal que se $t \geq t_1$ então $\pi_t(B) \subset B(J, \varepsilon)$. Por outro lado, como B absorve compactos de X, se K é compacto então existe $t_2 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi_t(K) \subset B$ sempre que $t \geq t_2$. Assim, tomando $t_3 = \text{máx}\{t_1, t_2\}$, então $\pi_t(K) \subset B(J, \varepsilon)$ sempre que $t \geq t_3$ e J atrai subconjuntos compactos de X, atraindo portanto a si mesmo. Pela Proposição 1.83, segue que $\varnothing \neq \Lambda^+(J) \subset J$ e que $\gamma^+(J)$ é relativamente compacto e, consequentemente, $\overline{\gamma^+(\pi_t(J))}$ é compacto para todo $t \in \mathbb{T}^+$, assim, pelo Lema 1.89 temos que $\Lambda^+(J)$ é invariante e atrai J.

Mostraremos que $\mathcal{A} = \Lambda^+(J)$ é um atrator global para o sistema semidinâmico, ou seja, que $\mathcal{A}$ atrai todo subconjunto limitado de X. Inicialmente, mostraremos que $\mathcal{A}$ atrai compactos de X.

De fato, seja K compacto. Sabemos que J atrai K e assim, pela Proposição 1.83 temos $\varnothing \neq \Lambda^+(K) \subset J$, e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto.

Como $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto, novamente pelo Lema 1.89 temos que $\Lambda^+(K)$ é compacto, invariante e atrai K. Da invariância e do fato que $\Lambda^+(K) \subset J$, segue que

$$\Lambda^+(K) = \pi_t(\Lambda^+(K)) \subset \pi_t(J)$$

para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Assim, temos $\Lambda^+(K) \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \pi_t(J)$.

Repare ainda que pela Proposição 1.99 como J é compacto, temos $\Lambda^+(J) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \pi_t(J)$, e assim $\Lambda^+(K) \subset \Lambda^+(J)$. Por fim, como $\Lambda^+(K)$ atrai K, existe $t_4 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi_t(K) \subset B(\Lambda^+(K), \varepsilon)$ se $t \geq t_4$, e assim $\pi_t(K) \subset B(\Lambda^+(J), \varepsilon)$. Então $\mathcal{A} = \Lambda^+(J)$ atrai K.

Por fim, considere B limitado. Como $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é eventualmente limitado, por definição, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+(\pi_{t_0}(B))$ é limitado. Como o sistema semidinâmico é ainda assintoticamente compacto, o Lema 1.91 nos garante que $\Lambda^+(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Assim, temos

$$dist_H(\Lambda^+(B), \Lambda^+(J)) = dist_H(\pi_t(\Lambda^+(B)), \Lambda^+(J))$$

para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Aplicando o limite quando $t \to \infty$ em ambos os membros da igualdade, temos que $dist_H(\Lambda^+(B), \Lambda^+(J)) = 0$, pois $\Lambda^+(B)$ é compacto e $\mathcal{A} = \Lambda^+(J)$ atrai compactos de X, assim, $dist_H(\pi_t(\Lambda^+(B)), \Lambda^+(J)) \to 0$. Pela Proposição 1.74,

$\Lambda^+(B) \subset \Lambda^+(J)$.

Agora, como $\Lambda^+(B)$ atrai B, existe $\tau_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que se $t \geq \tau_0$, então $\pi_t(B) \subset B(\Lambda^+(B), \varepsilon)$. Como $\Lambda^+(B) \subset \Lambda^+(J)$, temos $B(\Lambda^+(B), \varepsilon) \subset B(\Lambda^+(J), \varepsilon)$ e assim, se $t \geq \tau_0$ temos $\pi_t(B) \subset B(\Lambda^+(J)\varepsilon)$. Portanto, $\Lambda^+(J)$ atrai todo subconjunto limitado de X, sendo portanto um atrator global.

$\Rightarrow$) Reciprocamente, se o sistema semidinâmico possui um atrator global $\mathcal{A}$, então por definição, este atrator é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X, donde segue que $(\mathbb{T}^+, X\pi)$ é limitado dissipativo, ou seja, para qualquer $B \subset X$ limitado existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi_t(B) \subset B(\mathcal{A}, \varepsilon)$ se $t \geq t_0$ e assim $\gamma^+(\pi_{t_0}(B)) \subset B(\mathcal{A}, \varepsilon)$ e o sistema semidinâmico é eventualmente limitado.

Note ainda que $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é também ponto dissipativo e que $\mathcal{A}$ atrai pontos de X. Deste modo, resta provar que o sistema semidinâmico é assintoticamente compacto.

Para isso, consideremos $(x_n) \subset X$ limitada e $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $(\pi(t_n, x_n))$ limitada. Dessas condições segue que $\mathcal{A}$ atrai $(\pi(t_n, x_n))$ e assim $d(\{\pi(t_n, x_n); n \in \mathbb{N}\}, \mathcal{A}) \to 0$ e $\{\overline{(\pi(t_n, x_n))}; n \in \mathbb{N}\}$ é compacta pela Proprosição 1.83. Nessas condições, pela Proposição 1.93 temos que $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é assintoticamente compacto, como queríamos. ■

Teorema 1.101. *Se* $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ *é ponto dissipativo e eventualmente compacto, então* $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ *possui atrator global.*

Demonstração. Note que um sistema semidinâmico eventualmente compacto é também condicionalmente eventualmente compacto e assim, pelo Teorema 1.95, $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é assintoticamente compacto.

Da hipótese ainda temos que tal sistema semidinâmico é ponto dissipativo e assim, pelo teorema anterior, para garantir a existência de atrator global, é suficiente mostrar que $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é eventualmente limitado, ou seja, que existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+(\pi_{t_0}(B))$ é limitada para todo B limitado. Sabemos que existe $\tau_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi_{\tau_0}(B)$ é relativamente compacto, isto é, $\overline{\pi_{\tau_0}(B)}$ é compacto. Vamos provar que a órbita de conjuntos compactos de X é limitada, pois $\gamma^+(\pi_{\tau_0}(B)) \subset \gamma^+\overline{(\pi_{\tau_0}(B))}$, assim, se a órbita de conjuntos compactos for limitada, teremos garantia que $\gamma^+(\pi_{\tau_0}(B)$ é limitada.

Seja $K \subset X$ compacto e B_0 um aberto limitado em X que absorve pontos. Dado $x \in K$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\pi_t(x) \in B_0$ para todo $t \geq t_0$. Pela continuidade da função π, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $y \in B(x, \delta)$, então $d(\pi_{t_0}(x), \pi_{t_0}(y)) < \varepsilon$.

Consequentemente, $\pi_{t_0}(y) \in B_0$ para todo $y \in B(x, \delta)$, pois, se isso não acontecesse, deveria existir uma distância $\varepsilon_0 > 0$ entre $\pi_{t_0}(y)$ e B_0, entretanto, pela desigualdade triangular, para qualquer $\varepsilon > 0$ temos

$$d(\pi_{t_0}(y), B_0) \leq d(\pi_{t_0}(y), \pi_{t_0}(x)) + d(\pi_{t_0}(x), B_0) < \varepsilon.$$

Assim, segue que $\pi_t(B(x, \delta)) \subset B_0$ para todo $t \geq t_0$. Logo,

$$\pi_{\tau_0}(\pi_t(B(x, \delta))) \subset \pi_{\tau_0}(B_0)$$

para todo $t \geq t_0$, ou seja, existe $t_x = \tau_0 + t_0$ tal que $\pi_s(B(x, \delta)) \subset \pi_{\tau_0}(B_0)$ para todo $s \geq t_x$.

Tomando para cada $x \in K$ a vizinhança que cumpre as condições acima, temos uma cobertura para K, que é compacto e portanto, esta cobertura possui subcobertura finita. Ou seja, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta_{x_i})$. Tomando $t_1 = \text{máx}\{t_{x_1}, ..., t_{x_n}\}$ temos que se $t \geq t_1$ então

$$\begin{aligned} \pi_t(K) &\subset \pi_t(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta_{x_i})) \subset \pi_{\tau_0}(B_0) \\ \Rightarrow \pi_t(K) &\subset \bigcup_{i=1}^{n} \pi_t(B(x_i, \delta_{x_i})) \subset \pi_{\tau_0}(B_0). \end{aligned}$$

Assim, como $\pi_{\tau_0}(B_0)$ é relativamente compacto, temos $\bigcup_{t \geq t_1} (\pi_t(K))$ limitada.

Por fim, como $\gamma^+(K) = \left(\bigcup_{t \geq t_1} (\pi_t(K)) \right) \cup \left(\bigcup_{0 \leq t < t_1} (\pi_t(K)) \right)$, temos que $\gamma^+(K)$ é limitada, concluindo assim esta demonstração. ∎

Lema 1.102. *Seja $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema dinâmico. Se $B \subset X$ é tal que $\pi_t(B) \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $\Lambda^+(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\pi_t(B)}$.*

Demonstração. Por definição, temos que $\Lambda^+(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma^+(\pi_t(B))}$. Assim, provaremos que nas condições dadas, $\pi_t(B) = \gamma^+(\pi_t(B))$. De fato, já sabemos que $(\pi_t(B)) \subset \gamma^+(\pi_t(B))$ para qualquer t. Resta mostrar a inclusão contrária. Para isso, consideremos $t_0 \in \mathbb{T}^+$ e $y \in \gamma^+(\pi_{t_0}(B))$, então, $y = \pi(t, (\pi_{t_0}, x))$ para algum $t \in \mathbb{T}^+$ e $x \in B$. Agora, como $\pi_t(B) \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, segue que $y = \pi(t_0, \pi(t, x)) \in \pi_{t_0}(B)$. Da arbitrariedade de t_0 temos que $\gamma^+(\pi_t(B)) \subset \pi_t(B)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, donde segue a igualdade desejada. ■

Teorema 1.103. *Sejam $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinâmico e X um espaço de Banach. Suponha que $\pi = \varphi + \psi$, com φ e ψ satisfazendo*

i) *Para cada subconjunto limitado B em X existe um $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\psi_t(B)$ é relativamente compacto para todo $t \geq t_0$.*

ii) *Para cada subconjunto limitado $B \subset X$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\sup\limits_{x \in B} ||\varphi_t(x)||_x := s_0(t) < \infty$ para todo $t \geq t_0$ e $s_0(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.*

Então $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é assintoticamente compacto. Além disso, se $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é ponto dissipativo e eventualmente limitado, então ele possui atrator global.

Demonstração. Dado um subconjunto $B \subset X$ limitado, fechado e não vazio, tal que $\pi_t(B) \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\tau_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\tau_0 \geq t_0$ e $s_0(\tau_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $\psi_{\tau_0}(B)$ é relativamente compacto, existem $N = N(\tau_0, B) \in \mathbb{N}$ e $y_1, ..., y_N$ em $\psi_{\tau_0}(B)$ tais que $\psi_{\tau_0}(B) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\Lambda^+(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\pi_t(B)} &\subset \pi_{\tau_0}(B) \subset \varphi_{\tau_0}(B) + \psi_{\tau_0}(B) \\ &\subset B(0, \frac{\varepsilon}{2}) + \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, \varepsilon).\end{aligned}$$

Da arbitrariedade de ε, temos que $\Lambda^+(B)$ é totalmente limitado (está contida na união finita de bolas de raio ε). Logo, $\Lambda^+(B)$ é fechado e totalmente limitado em X, que é completo, portanto, $\Lambda^+(B)$ é compacto.

Note que $\Lambda^+(B)$ não é vazio, pois tomando $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $(x_n) \subset B$, temos que a sequência $(\pi(t_n, x_n)) = \varphi(t_n, x_n) + \psi(t_n, x_n)$ é totalmente limitada, possuindo assim subsequência convergente. Ou seja, existe $(\pi(t_{n_k}, x_{n_k}))$ convergindo para algum y. Como $t_{n_k} \to \infty$ e $(x_{n_k}) \subset B$, temos que $y \in \Lambda^+(B)$ por definição.

Agora, suponha que $\Lambda^+(B)$ não atrai B. Então deve existir $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{T}^+$ temos $d(\pi_t(B), \Lambda^+(B)) \geq \varepsilon_0$. Sendo válido para qualquer t, podemos tomar uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{T}^+$ e $(x_n) \subset B$ tal que $t_n \to \infty$. Daí segue que

$$d(\pi(t_n, x_n), \Lambda^+(B)) \geq \varepsilon_0.$$

Porém, como $\pi(t_n, x_n)$ possui subsequência convergente, deveria existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n_k > n_0$ então $d(\pi(t_{n_k}, x_{n_k}), y) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Mas dessa forma deveríamos ter para $n_k > n_0$,

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &\leq d(\pi(t_{n_k}, x_{n_k})), \Lambda^+(B))\\ &\leq d(\pi(t_{n_k}, x_{n_k})), y) + d(y, \Lambda^+(B)\\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} + d(y, \Lambda^+(B)).\end{aligned}$$

Assim, deveria existir uma distância maior que $\frac{\varepsilon_0}{2}$ entre y e $\Lambda^+(B)$, o que é um absurdo, pois por definição, $y \in \Lambda^+(B)$. Portanto, $\Lambda^+(B)$ atrai B e $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ é assintoticamente compacto.

Se além disso o sistema semidinâmico é ponto dissipativo e eventualmente limitado, o Teorema 1.100 nos garante que $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ possui atrator global. ■

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DINÂMICOS IMPULSIVOS

2.1 Definições Básicas

Nesta seção, nosso estudo se concentrará nos chamados Sistemas Dinâmicos Impulsivos, ou seja, sistemas dinâmicos dotados de um nova característica a ser estudada: os impulsos. Tal conteúdo será a base de todo nosso trabalho.

Definição 2.1. Seja $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ um sistema semidinâmico. Para cada $D \subset X$ e $J \subset \mathbb{R}^+$, definamos

$$F(D, J) = \{x \in X; \pi(t)x \in D \text{ para algum } t \in J\}.$$

Se $F(x, t) = \varnothing$ para todo $t > 0$, então x é chamado de ponto inicial.

Definição 2.2. Um **sistema semidinâmico impulsivo**, que representaremos por (X, π, M, I), consiste de um sistema semidinâmico $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$, um subconjunto fechado e não vazio M de X e uma função contínua $I : M \to X$ que satisfaz a seguinte propriedade: para cada $x \in M$, existe um $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$F(x, (0, \varepsilon_x)) \cap M = \varnothing \; e \; \pi((0, \varepsilon_x), x) \cap M = \varnothing. \tag{2.1-1}$$

Denominamos M de **conjunto impulsivo** e a função I de **função impulso**. A Propriedade 2.1-1 nos diz que os pontos do conjunto M são isolados em todas as trajetórias do sistema semidinâmico $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$.

Além disso, podemos definir o seguinte conjunto

$$M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} \pi(t)x \right) \cap M$$

para todo $x \in X$.

Lema 2.3. *Seja (X, π, M, I) um sistema semidinâmico impulsivo. Então, para qualquer $x \in X$, existirá um número real positivo s_1, com $0 < s_1 \leq +\infty$, de maneira que $\pi(t, x) \notin M, 0 < t < s_1$, e se $M^+(x) \neq \varnothing$, então $\pi(s_1, x) \in M$.*

Demonstração. Primeiro, note que se $M^+(x) = \varnothing$, então $\pi(t)x \notin M$ para todo $t > 0$.

Assim, se tomarmos $s_1 = +\infty$ teremos satisfeito o lema. Se $M^+(x) \neq \varnothing$, temos que existe pelo menos um $t_1 \in \mathbb{R}_+$ de modo que $\pi(t_1)x \in M$. Observemos que do fato de que o conjunto M é não vazio e fechado e da continuidade da função $\pi_x : \mathbb{R}_+ \to X$, obtemos que o subconjunto compacto $[0, t_1] \cap \pi_x^{-1}(M)$ de $\mathbb{R}_+$ possui um menor elemento, s_1, que satisfaz o lema. ■

Definição 2.4. Defina a função $\phi : X \to (0, +\infty]$ do seguinte modo:

$$\phi(x) = \begin{cases} s, \ \ se \ \pi(s)x \in M \ e \ \pi(t)x \notin M \ para \ 0 < t < s, \\ +\infty, \ \ se \ M^+(x) = \varnothing. \end{cases} \tag{2.1-2}$$

Notemos que da definição acima, $\phi(x)$ pode ser entendido como o menor tempo positivo para o qual a trajetória de x encontra o conjunto M.

Definição 2.5. Dado $x \in X$, chamamos $\pi(\phi(x), x)$ de **ponto impulsivo** de x.

Definição 2.6. A **trajetória impulsiva** de x em (X, π, M, I) é uma função $\tilde{\pi}(t)x$ definida sobre um subconjunto $[0, s)$ de $\mathbb{R}_+$ (s pode ser $+\infty$) em X. Vamos considerar (X, π, M, I) um sistema impulsivo e $x \in X$. Se $M^+(x) = \varnothing$, então $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $\phi(x) = +\infty$. Por outro lado, se $M^+(x) \neq \varnothing$, então vai existir um menor positivo $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(s_0)x = x_1 \in M$ e $\pi(t)x \notin M$, para $0 < t < s_0$. Dessa forma, definimos $\tilde{\pi}(t)x$ sobre o intervalo $[0, s_0]$ como

2.7.

$$\tilde{\pi}(t)x = \begin{cases} \pi(t)x, & 0 \leq t < s_0, \\ x_1^+, & t = s_0, \end{cases}$$

onde $x_1^+ = I(x_1)$ *e* $\phi(x_0) = s_0$.

Agora, observe que pelo fato de $s_0 < +\infty$, *o processo continua, mas com início em* x_1^+. *Assim, se* $M^+(x_1^+) = \varnothing$, *definimos* $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x_1^+$ *para* $s_0 \leq t < +\infty$ *e* $\phi(x_1^+) = +\infty$.

Por outro lado, se $M^+(x_1^+) \neq \varnothing$, *pelo Lema* 1 *temos que existe um menor positivo* $s_1 \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $\pi(s_1)x_1^+ = x_2 \in M$ *e* $\pi(t - s_0)x_1^+ \notin M$ *para* $s_0 < t < s_0 + s_1$. *Assim, definimos* $\tilde{\pi}(t)x$ *sobre* $[s_0, s_0 + s_1]$ *por*

$$\tilde{\pi}(t)x = \begin{cases} \pi(t - s_0)x_1^+, & s_0 \leq t < s_0 + s_1, \\ x_2^+, & t = s_0 + s_1, \end{cases}$$

onde $x_2^+ = I(x_2)$ *e* $\phi(x_1^+) = s_1$ *e assim por diante.*

Observemos que $\tilde{\pi}(t)x$ *está definida no intervalo* $[t_{n-1}, t_n]$ *e que* $\tilde{\pi}(t_n)x = x_n^+$, *onde* $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$. *Então, se* $M^+(x_n^+) = \varnothing$, *então* $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x_n^+$ *para* $0 \leq t < +\infty$ *e* $\phi(x_n^+) = +\infty$.

Agora, se $M^+(x_n^+) \neq \varnothing$, *então vai exisir* $s_n \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $\pi(s_n)x_n^+ = x_{n+1} \in M$ *e* $\pi(t - t_n)x_n^+ \notin M$, *para* $t_n < t < t_{n+1}$. *Além disso, definimos*

$$\tilde{\pi}(t)x = \begin{cases} \pi(t - t_n)x_n^+, & t_n \leq t < t_{n+1}, \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}, \end{cases}$$

onde $x_{n+1}^+ = I(x_{n+1})$ *e* $\phi(x_n^+) = s_n$.

Com isso, temos que $\tilde{\pi}(t)x$ *está definida sobre cada intervalo* $[t_n, t_{n+1}]$, *com* $t_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} s_i$, *ou seja,* $\tilde{\pi}(t)x$ *está definida sobre o intervalo* $[0, t_{n+1}]$.

No processo que acabamos de descrever, se $M^+(x_n^+) = \varnothing$ *para algum* n, *então o processo chega ao fim após um número finito de passos, ou se* $M^+(x_n^+) \neq \varnothing, n = 0, 1, 2, \ldots,$ *e* $\tilde{\pi}(t)x$ *estiver definida em* $[0, T(x)]$ *ele continua indefinidamente, onde* $T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$.

Com estas definições e resultados, assumindo que todas as trajetórias impulsivas existam para todo tempo $t \geq 0$, isto é, assumindo que $T(x) = \infty$ para todo $x \in X$, somos capazes de iniciar nossa busca por uma definição adequada para atrator global.

Para isso, assumiremos sempre válida a seguinte condição:

$T(x) = \infty$ para todo $x \in X$ e $\{\tilde{\pi}(t); t \geq 0\}$ satisfaz a proriedade de semigrupo:

$$\tilde{\pi}(t+s)x = \tilde{\pi}(t)\tilde{\pi}(s)x, \ x \in X, \ \tilde{\pi}(0)x = x, \ x \in X.$$

Veja que, para qualquer $x \in X$, uma das três condições é válida:

1. A trajetória de x não possui descontinuidades se $M^+(x) = \varnothing$.
2. Para algum $n \geq 1$, x_k^+ está definida para $k = 1, 2, \ldots, n$ e $M^+(x_n^+) = \varnothing$. Assim, teremos que a trajetória x possui um número finito de descontinuiades.
3. Para qualquer $k \geq 1$, x_k^+ está definida e $M^+(x_k^+) \neq \varnothing$. Dessa maneira, a trajetória de x possuirá um número infinito de descontinuidades.

Além disso, se a solução x satisfazer as condições 1 ou 2, temos $T(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} s_i = +\infty$.

Definição 2.8. Para qualquer $x \in X$ fixado, a **Órbita positiva impulsiva** de x no sistema semidinâmico com impulso (X, π, M, I) será dada pelo conjunto

$$\tilde{\gamma}^+(x) = \{\tilde{\pi}(t)x; t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Definição 2.9. Dados $A \subset X$ e $\Delta \subset \mathbb{R}_+$, definimos

$$\tilde{\gamma}^+(A) = \bigcup\{\tilde{\gamma}^+(x); x \in A\}$$

e

$$\tilde{\pi}(\Delta)X) = \bigcup\{\tilde{\pi}(t)x; t \in \Delta \ e \ x \in A\}.$$

Observação 2.10. *Neste trabalho, vamos nos valer do seguinte fato: Dado qualquer $0 \leq t < T(x)$, existe $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ tal que*

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} \psi(x_{i-1}^+) + t',$$

onde $x = x_0^+$, $\psi(x_{-1}^+) = 0$ e $\psi(x_j^+) = \phi(x_j^+)$ para $j \geq 0$. Assim, $\tilde{\pi}(t)x) = \pi(t')x_k^+$ para $0 \leq t' < \psi(x_{k-1}^+)$.

Definição 2.11. Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo. Um subconjunto $B \subset X$ é dito $\tilde{\pi}$-invariante se $\tilde{\pi}(t)B = B$ para todo $t \geq 0$. Além disso, B é $\tilde{\pi}$-positivamente (negativamente) invariante se $\tilde{\pi}(t)B \subset B$ ($\tilde{\pi}(t)B \supseteq B$) para todo $t \geq 0$.

Definição 2.12. Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo, e $A, B \subset X$. Dizemos que A $\tilde{\pi}$-atrai B se $\lim\limits_{t \to \infty} dist_H(\tilde{\pi}(t)B, A) = 0$.

Definição 2.13. Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X é um atrator global para (X, π, M, I) se é compacto, $\tilde{\pi}$-invariante, $\tilde{\pi}$-atrai todo subconjunto limitado de X, e $\mathcal{A} \cap M = \varnothing$.

Esta definição é consistente com a noção de atrator global para sistemas semidinâmicos, isto é, quando $M = \varnothing$ as duas definições coincidem. Entretanto, esta definição exclui uma classe muito importante de sistemas dinâmicos impulsivos, uma vez que o comportamento de $\tilde{\pi}$ pode ser diferente do comportamento de π. Assim, precisamos de uma definição mais adequada, que inclua os casos em que a dinâmica de $\tilde{\pi}$ ao longo do tempo é diferente da dinâmica de π. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.14. Considere a seguinte equação diferencial contínua

$$\dot{x} = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ 1 - x, \text{ se } x \geq 0 \end{cases} \tag{2.1-3}$$

com a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, e considere a ação da função impulsiva $I : \{0\} \to \{-1\}$ tal que $I(0) = -1$. A solução de (2.1-3) sem a ação de I é dada por

$$\pi(t)x_0 = \begin{cases} t + x_0, \text{ se } x_0 < 0 \text{ e } t \in [0, -x_0), \\ -e^{-t-x_0} + 1, \text{ se } x_0 < 0 \text{ e } t \in [-x_0, \infty), \\ (x_0 - 1)e^{-t} + 1, \text{ se } x_0 \geq 0 \text{ e } t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Note que o conjunto $\{1\}$ é limitado e invariante, uma vez que $\pi(t)1 = (1-1)e^{-t}+1 = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Além disso, para qualquer conjunto limitado $B \subset X$ nós temos $\pi(t)(B) \to 1$, uma vez que $-e^{-t-x_0}+1 \to 1$ e $(x_0-1)e^{-t}+1 \to 1$ quando $n \to \infty$. Assim, $\{1\}$ é o unico conjunto limitado e invariante para tal sistema dinâmico. Além disso, é um ponto crítico, uma vez que $\pi(t)1 = 1$.

Pela Proposição 1.80 segue que $\{1\}$ é um atrator global para (2.1-3). Agora, considerando a função impulsiva $I(0) = -1$, obtemos outra solução para (2.1-3), através da Definição 2.8.

Note que o domínio da função impulsiva I é o conjunto $M = \{0\}$. Assim, o nosso primeiro passo para descrever a função $\tilde{\pi}(t)x$ através de $\pi(t)x$, é analisar para que valores de x temos o conjunto $M^+(x) \neq \varnothing$. Para isso, analisaremos separadamente cada uma das partes desta função.

Inicialmente, observamos que quando $x_0 < 0$ e $t \in [0, -x_0)$, os valores de $\pi(t)x_0$ variam no intervalo $[x_0, 0)$. Assim, neste caso $M^+(x) = \varnothing$, e $\tilde{\pi}(t)x_0 = \pi(t)x_0$ quando $x_0 < 0$ e $t \in [0, -x_0)$.

Agora, no caso em que $x_0 < 0$ e $t \in [-x_0, \infty)$, temos $M^+(x_0) \neq \varnothing$ para todo x_0. Além disso, $t = -x_0$ é o menor tempo positivo para o qual a trajetória de x_0 encontra o conjunto $M = \{0\}$ (basta verificar que se $t = -x_0$, então $\pi(t)x_0 = \pi(-x_0)x_0 = -e^{x_0 - x_0} + 1 = 0$). Assim, como neste caso $M^+(x_0) \neq \varnothing$, usaremos a Definição 2.8 para descrever $\tilde{\pi}(t)x_0$ neste intervalo.

Inicialmente, denotamos $x_0 = x_0^+$, e definimos $\tilde{\pi}(t)x_0$ em $[0, \phi(x_0^+)] = [0, -x_0]$, por

$$\tilde{\pi}(t)x_0 = \begin{cases} \pi(t)x_0, \text{ se } 0 \leq t < -x_0, \\ I(\pi(-x_0)x_0), \text{ se } t = -x_0. \end{cases}$$

Note que $I(\pi(-x_0)x_0) = I(0) = -1$, e assim, podemos reescrever a função acima como

$$\tilde{\pi}(t)x_0 = \begin{cases} \pi(t)x_0, \text{ se } 0 \leq t < -x_0, \\ -1, \text{ se } t = -x_0. \end{cases}$$

Agora, seja $s_0 = \phi(x_0^+) = -x_0,\ x_1 = \pi(s_0)x_0^+ = 0$, e $x_1^+ = I(\pi(s_0)x_0^)+ = I(0) = -1$. Neste caso, como $M^+(x_1^+) \neq \varnothing$, continuamos com o mesmo processo, mas agora partindo de x_1. Assim, definimos $\tilde{\pi}(t)x_0$ em $[s_0, s_0 + \phi(x_1^+)] = [-x_0, -x_0 + 1]$ por

$$\tilde{\pi}(t)x_0 = \begin{cases} \pi(t + x_0) - 1, \text{ se } -x_0 \leq t < -x_0 + 1, \\ -1, \text{ se } t = -x_0 + 1. \end{cases}$$

Variando t no intervalo $[-x_0, -x_0 + 1)$, temos que $t + x_0$ varia no intervalo $[0, 1) = [0, -x_1^+)$, ou seja, estamos aplicando a função π em $t_0 \in [0, 1)$, e $x_0 = -1$, assim, $\pi(t + x_0) - 1 = t + x_0 - 1$, donde reescrevemos a função $\tilde{\pi}$ a seguir:

$$\tilde{\pi}(t)x_0 = \begin{cases} t + x_0 - 1, \text{ se } -x_0 \leq t < -x_0 + 1, \\ -1, \text{ se } t = -x_0 + 1. \end{cases}$$

Para continuar, definimos $s_1 = \phi(x_1^+) = 1$, $x_2 = \pi(s_1)(x_1^+) = 0$ e $x_2^+ = I(\pi(s_1)x_1^+ = I(0) = -1$. Continuando com este processo, em n etapas teremos $s_n = 1$, assim, $t_n = \sum_{1=0}^{n-1} s_i = -x_0 + n - 1$, e definimos $\tilde{\pi}(t)x_0$ em $[t_n, t_n + \phi(x_n^+)] = [-x_0 + n - 1, -x_0 + n]$ por

$$\tilde{\pi}(t)x_0 = \begin{cases} \pi(t + x_0 - n + 1) - 1, \text{se } -x_0 + n - 1 \leq t < -x_0 + n, \\ -1, \text{se } t = -x_0 + n. \end{cases}$$

Novamente, como $t \in [-x_0 + n - 1, -x_0 + n)$, temos que $t + x_0 - n + 1$ varia no intervalo $[0, 1)$, e assim estamos aplicando a função π em $t_0 \in [0, 1)$ e $x_0 = -1$, donde segue que $\pi(t + x_0 - n + 1) - 1 = t + x_0 - n$. Assim, reescrevemos $\tilde{\pi}$ da seguinte forma

$$\tilde{\pi}(t)x_0 = \begin{cases} t + x_0 - n, \text{se } -x_0 + n - 1 \leq t < -x_0 + n, \\ -1, \text{se } t = -x_0 + n. \end{cases}$$

Note que a condição de que $\tilde{\pi}(t)x_0 = -1$ já é atendida pela primeira parte da definição de $\tilde{\pi}$, assim, podemos omitir esta parte da definição da função.

Por fim, resta analisar o que ocorre com $M^+(x_0)$ quando $x_0 \geq 0$. Repare que neste caso, $\pi(t)x_0 = (x_0 - 1)e^{-t} + 1$ será igual a 0 se, e somente se, $t = 0$ e $x_0 = 0$.

Neste caso, $(\bigcup_{t>0} \pi(t)x_0 \bigcap M) = \varnothing$, ou seja $M^+(x_0) = \varnothing$ para todo $x_0 \geq 0$, e assim $\tilde{\pi}(t)x_0 = \pi(t)x_0$.

Assim, temos a seguinte solução para (2.1-3), considerando a ação da função impulsiva I:

$$\tilde{\pi}(t)x_0 = \begin{cases} t + x_0, \text{ se } x_0 < 0 \text{ e } t \in [0, -x_0), \\ t + x_0 - n, \text{ se } x_0 < 0 \text{ e } t \in [-x_0 + n - 1, -x_0 + n) n \in \mathbb{N}, \\ (x_0 - 1)e^{-t} + 1, \text{ se } x_0 \geq 0 \text{ e } t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Podemos obsevar que a dinâmica é diferente, pois nesse caso apareceu a órbita impulsiva periódica $[-1, 0)$, que é a órbita positiva de todo $x_0 \leq 0$.

Note ainda que neste caso não existe subconjunto de $\mathbb{R}$ satisfazendo todas as condições da Definição 2.13, mas podemos distinguir alguns conjuntos interessantes:

• O conjunto $\mathcal{A}_1 = [-1, 0) \cup \{1\}$ é $\tilde{\pi}-$invariante, pois para $t \in [0, -x_0)$ temos que $\tilde{\pi}(t)x_0 = t + x_0$, que como vimos, tem seus valores variando entre -1 e 0, ou ainda, para cada $t \in [0, -x_0)$, a função $\tilde{\pi}(t) : [-1, 0) \to [-1, 0)$ que leva cada x do conjunto $[-1, 0)$ em $\tilde{\pi}(t)x = t + x$, é uma bijeção. Além disso, considerando $x = 1$, temos $\tilde{\pi}(t)1 = (1 - 1)e^{-t-1} + 1 = 1$ para todo $t \geq 0$, e assim, $\tilde{\pi}(t)\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1$. Da mesma forma, para cada $t \in [-x_0 + n - 1, -x_0 + n]$, com $n \in \mathbb{N}$, a função $\tilde{\pi}(t) : [-1, 0) \to [-1, 0)$ que associa cada x a $\tilde{\pi}(t)x = t + x - n$ é bijetora, e assim, para t neste intervalo temos também $\tilde{\pi}(t)\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1$, donde concluímos que $\mathcal{A}_1$ é de fato invariante.

Além disso, $\mathcal{A}_1$ atrai subconjuntos limitados de X. Basta observar que, se B é um subconjunto limitado e negativo de X, então $\tilde{\pi}(t)x \in [-1, 0)$ para todo $x \in B$, e $t \in [-x, \infty)$. Deste modo, temos $\lim_{t\to\infty} dist_H(\tilde{\pi}(t)B, \mathcal{A}_1) = 0$.

Por outro lado, se B é um subconjunto limitado e positivo de X, então $\tilde{\pi}(t)x = (x - 1)e^{-t-x} + 1$ para todo $x \in B$, e neste caso, fazendo $t \to \infty$, em algum momento teremos $\tilde{\pi}(t)x = 1$, e novamente temos $\lim_{t\to\infty} dist_H(\tilde{\pi}(t)B, \mathcal{A}_1) = 0$. Portanto, em qualquer dos dois casos, $\mathcal{A}_1$ atrai subconjuntos limitado de X.

Por fim, $\mathcal{A}_1 \cap M = \varnothing$, mas $\mathcal{A}_1$ não é compacto, e assim $\mathcal{A}_1$ não pode ser considerado um atrator global pela Definição 2.13.

• O conjunto $\mathcal{A}_2 = [-1, 0] \cup \{1\}$ $\tilde{\pi}-$atrai subconjuntos limitados de X, $\mathcal{A}_2$ é compacto, mas $\mathcal{A}_2$ não é $\tilde{\pi}-$invariante, pois considerando $x = 0$, para $t = 1$ temos $\tilde{\pi}(t)x = -e^{-1} + 1 \simeq 0,6321 \notin \mathcal{A}_2$. Além disso, $\mathcal{A}_2 \cap M \neq \varnothing$.

• O conjunto $\mathcal{A}_3 = [-1, 1]$ $\tilde{\pi}-$atrai subconjuntos limitados de X, é compacto, mas $\mathcal{A}_3$ não é $\tilde{\pi}-$ invariante, pois apesar de ser $\tilde{\pi}-$positivamente invariante, não é $\tilde{\pi}-$negativamente invariante, isto é,

$\tilde{\pi}(t)\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_3$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, mas existe algum $t \in \mathbb{T}^+$ tal que $\mathcal{A}_3 \not\subseteq \tilde{\pi}(t)\mathcal{A}_3$. Basta observar que para $t = 1$ a função $\tilde{\pi}(1) : [0, 1) \to [0, 1)$ não é sobrejetora, e assim, existe $x \in [0, 1)$ que não pertence a $\tilde{\pi}(1)[0, 1)$. Por fim, $\mathcal{A}_3 \cap M \neq \varnothing$.

Na teoria de sistemas semidinâmicos, caracterizamos o atrator global como a união de todos os conjuntos limitados e invariantes de X (Proposição 1.80). Assim, olhando para os três conjuntos acima, podemos conjecturar que o conjunto $\mathcal{A}_1$ é um candidato para atrator global deste sistema impulsivo, uma vez que é o único conjunto $\tilde{\pi}-$invariante dos três.

Ainda, recorrendo a definição de trajetória impulsiva, vemos que não pode existir *solução global* de $\tilde{\pi}$ pelos pontos de M. Basta observar que tomando $t > 0$ qualquer e $s = -t$ temos $\psi(t+s)0 = 0$, e entretanto, $\tilde{\pi}(t)\psi(s) = 0$ se, e somente se, $t = 0$ e $\psi(s) = 0$. Como não temos nenhuma das duas condições, não temos a igualdade $\psi(t+s) = \tilde{\pi}(t)\psi(s)$ no ponto $x = 0 \in M$.

Por outro lado, a Proposição 1.82 afirma que se $\mathcal{A}$ é um atrator global para um sistema semidinâmico, então deve existir uma solução global por cada ponto $x \in \mathcal{A}$. Assim, a hipótese de que $\mathcal{A} \cap M = \varnothing$ da Definição 2.13 também precisa ser mantida. Consequentemente, a hipótese da compacidade de $\mathcal{A}$ é a única que pode ser enfraquecida. O conjunto $\mathcal{A}_1$ não é compacto, mas é precompacto, e além disso, $\mathcal{A}_1 = \overline{\mathcal{A}_1} \setminus M$.

Todos esses argumentos, nos conduzem a uma nova definição de atrator global para sistemas dinâmicos impulsivos.

Definição 2.15. Um subconjunto $\mathcal{A} \subset X$ é dito atrator global para o sistema dinâmico impulsivo (X, π, M, I), se satisfaz as seguintes condições:

i) $\mathcal{A}$ é pré-compacto e $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus M$;

ii) $\mathcal{A}$ é $\tilde{\pi}-$invariante;

iii) $\mathcal{A}$ $\tilde{\pi}-$atrai subconjuntos limitados de X.

Com esta definição, podemos ver que o conjunto $\mathcal{A}_1$ é de fato atrator global para o exemplo anterior. Tal atrator é desconexo e é dado pela união de dois conjuntos invariantes isolados, sem conexão entre eles. Apesar de ser um exemplo simples, fica evidente que sua dinâmica é muito mais rica que a dinâmica de equações diferenciais contínuas.

Esse exemplo nos mostra que existe uma grande classe de sistemas que não podem ser descritos apenas com a Definição 2.13. Nosso objetivo, é descrever a dinâmica assintótica de uma classe maior de sistemas dinâmicos impulsivos, assim como é feito em [7]. Para isso, este capítulo é dividido em três seções principais.

A seção 2.2 é de natureza técnica e trata de desenvovler resultados relacionados às condições de tubo, que são de suma importância para provar a invariância negativa de conjuntos $\omega-$limites impulsivos.

Na seção 2.3, discutimos os conjuntos $\omega-$limite impulsivos de subconjuntos limitados de X. Nesta seção definimos sistemas dinâmicos impulsivos limitado-dissipativos, e estudamos as propriedades de tais conjuntos, incluindo resultados sobre atração.

Na seção 2.4, mostramos a existência de atrator global para sistemas dinâmicos impulsivos limitado-dissipativos, e apresentamos dois exemplos, em ordem de complexidade. Em cada um desses casos, mostraremos a existência de atrator global.

2.2 Condições de Tubo em Sistemas Dinâmicos Impulsivos

Definição 2.16. Sejam $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinâmico e $x \in X$. Um conjunto fechado S contendo x é dito *seção* (ou λ-seção), se existem $\lambda > 0$ e um conjunto fechado L tais que

$i)$ $F(L, \lambda) = S$;

$ii)$ $F(L, [0, 2\lambda])$ contém uma vizinhança de $x \in X$;

$iii)$ $F(L, \alpha) \cap F(L, \beta) = \emptyset$, se $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\lambda$.

Dizemos que o conjunto $F(L, [0, 2\lambda])$ é um $\lambda-$tubo (ou simplesmente tubo) e o conjunto L é uma barra.

Fonte: J. C. Ferreira / Teoria de estabilidade em sistemas dinâmicos impulsivos, 2011.

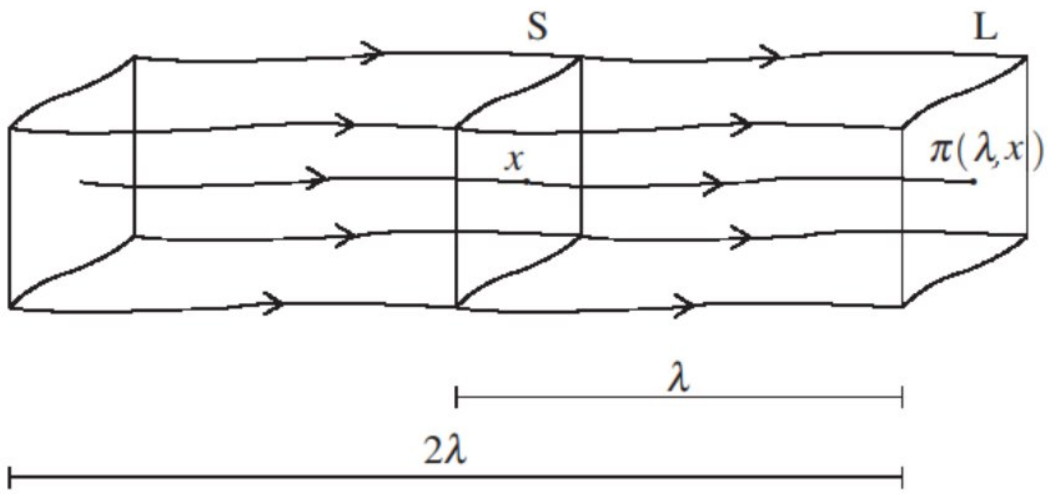


Figura 2.1: $\lambda-$tubo $F(L, [0, 2\lambda])$.

Lema 2.17. *Sejam $(\mathbb{T}^+, X, \pi)$ um sistema semidinâmico e $x \in X$. Se S é uma λ-seção por x, e $\lambda > 0$ é dado pela definição anterior, então qualquer $0 < \mu \leq \lambda$ satisfaz as condições da Definição 2.16, substituindo L por $L_\mu = F(L, \lambda - \mu)$ e λ por μ.*

Demonstração. Se $\mu = \lambda$, nada temos a provar. Agora, seja $0 < \mu < \lambda$, e $L_\mu = F(L, \lambda - \mu) = \pi(\lambda - \mu)^{-1}(L)$. Como L é fechado e π é contínua, temos que L_μ é fechado. Resta mostrar que as condições da Definição 2.16 são válidas com tais substituições, isto é, que S é uma $\mu-$seção através de x. Como S é $\lambda-$seção, da condição **i)** da Definição 2.16, temos

$$y \in F(L_\mu, \mu) \Leftrightarrow \pi(\mu, y) \in L_\mu \Leftrightarrow \pi(\lambda - \mu, \pi(\mu, y)) \in L \Leftrightarrow \pi(\lambda, y) \in L \Leftrightarrow y \in S,$$

provando assim que $F(L_\mu, \mu) = S$. Para provar a condição $ii)$, como S é $\lambda-$seção por x, temos que existe um aberto U_1 contendo x, tal que $U_1 \subset F(L, [0, 2\lambda])$. Queremos provar que existe um aberto V que contém x, e $V \subset F(L_\mu, [0, 2\mu])$. Para isso, definimos o conjunto $T = F(L, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda])$. Vamos mostrar que T é fechado. De fato, seja $(t_n) \subset T$, tal que $t_n \to t$. Pela definição do conjunto T, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ tal que $\pi(t_n, z_n) \in L$.

Assim, temos que a sequência $(\pi(t_n, z_n))$ está contida em L, e $(z_n) \subset [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$, que por sua vez é um conjunto compacto (união de dois conjuntos fechados e limitados), donde podemos assumir que $z_n \to z \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$. Da continuidade de π temos

$$\pi(t_n, z_n) \to \pi(t, z).$$

Repare ainda que $\pi(t, z) \in L$, pois $(\pi(t_n, z_n)) \subset L$, que é um conjunto fechado. Como $\pi(t, z) \in L$ e $z \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$, segue que $t \in F(L, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]) = T$ e portanto T é fechado.

Deste modo, temos que $T^c = X \setminus T$ é um conjunto aberto, e $S = \pi(\lambda)^{-1}(L) \subset T^c$. Assim, segue que $x \in S \subset T^c$, e portanto, existe um aberto $U_2 \subset T^c$ tal que $x \in U_2$.

Como também $x \in U_1$, segue que $x \in U_1 \cap U_2$. Denotemos $V = U_1 \cap U_2$. Vamos provar que V está contido em $F(L_\mu, [0, 2\mu])$. De fato, seja $w \in V$. Como $x \in U_1 \subset F(L, [0, 2\lambda])$, e $x \in U_2 \subset T^c$, segue que existe t de modo que $\lambda - \mu < t < \lambda + \mu$ e $\pi(t)w \in L$. Somando $\mu - \lambda$ em todos os membros da inequação anterior, temos $0 < t + \mu - \lambda < 2\mu$.

Além disso, como

$$\pi(\lambda - \mu)\pi(t + \mu - \lambda)w = \pi(t, w) \in L,$$

temos

$$\pi(t+\mu-\lambda)w \in L_\mu.$$

Como $0 < t+\mu-\lambda < 2\mu$ segue que $w \in F(L_\mu, [0, 2\mu])$, e $V \subset F(L_\mu, [0, 2\mu])$, como queríamos.

Para provar a terceira condição da Definição 2.16 vamos supor, por contradição, que existam $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\mu$ tais que $F(L_\mu, \alpha) \cap F(L_\mu, \beta) \neq \varnothing$. Assim, seja $\gamma \in F(L_\mu, \alpha) \cap F(L_\mu, \beta)$. Deste modo temos que $\pi(\alpha)\gamma \in L_\mu$ e $\pi(\beta, \gamma) \in L_\mu$. Assim, temos

$$\pi(\alpha+\lambda-\mu)\gamma = \pi(\lambda-\mu)\pi(\alpha)\gamma \in L,$$

e

$$\pi(\beta+\lambda-\mu)\gamma = \pi(\lambda-\mu)\pi(\beta)\gamma \in L.$$

Mas assim temos $\gamma \in F(L, \alpha+\lambda-\mu) \cap F(L, \beta+\lambda-\mu)$, com $0 \leq \alpha+\lambda-\mu \leq 2\lambda$, o que é uma contradição com a condição $iii)$ da Definição 2.16. Portanto, $F(L_\mu, \alpha) \cap F(L_\mu, \beta) = \varnothing$ sempre que $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\mu$, e S é uma μ-seção, como queríamos. ■

Definição 2.18. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente em $a \in X$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, a) < \delta$, então $f(x) < f(a) + \varepsilon$. Uma função é dita semicontínua superiormente em X, se o for para todo $a \in X$.

Analogamente, dizemos que a função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente em $a \in X$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, a) < \delta$, então $f(x) > f(a) - \varepsilon$. Uma função é dita semicontínua inferiormente em X, se o for para todo $a \in X$.

Proposição 2.19. ***a)*** *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente em $a \in X$ se para toda sequência $(x_n) \subset X$ com $x_n \to a$, $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(a)$.*

b) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente em $a \in X$ se para toda sequência $(x_n) \subset X$ com $x_n \to a$, $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(a)$.*

c) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, é semicontínua superiormente e semicontínua inferiormente neste ponto.*

Definição 2.20. Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo e $x \in M$. Dizemos que x satisfaz a condição forte de tubo (STC), se existe uma seção S sobre x tal que $S = F(L, [0, 2\lambda]) \cap M$. Além disso, dizemos que um ponto $x \in M$ satisfaz a condição especial forte de tubo (SSTC) se satisfaz a condição forte de tubo, e o $\lambda-$tubo $F(L,[0,2\lambda])$ é tal que $F(L,[0,\lambda])\cap I(M)=\varnothing$.

Lema 2.21. *Seja (X,π,M,I) um sistema dinâmico impulsivo. Suponha que exista $x\in X$ que satisfaça a condição forte de tubo com uma $\lambda-$seção S através de x. Então, para qualquer $\mu<\lambda$ o conjunto S é também uma $\mu-$seção com um STC tubo.*

Demonstração. Dado $\mu<\lambda$, queremos mostrar que $S=F(L_\mu,[0,2\mu])\cap M$.

Pelo Lema 2.17 temos que S é uma $\mu-$seção através de $x\in X$, com o tubo $F(L_\mu,[0,2\mu])$. Assim, a primeira condição da Definição 2.16 nos garante que $F(L_\mu,\mu)=S$. Como por hipótese x satisfaz a condição forte de tubo, temos $S=F(L_\lambda,[0,2\lambda])\cap M$, donde segue que $S\subset M$. Por outro lado, como $S=F(L_\mu,\mu)$ podemos afirmar que para cada $x\in S$ existe $t=\mu\in[0,2\mu]$ tal que

$$\pi(t)x\in L_\mu,$$

e assim, temos $S\subset F(L_\mu,[0,2\mu])\cap M$.

Agora mostremos que vale a inclusão contrária, isto é, que $F(L_\mu,[0,2\mu])\cap M\subset S$. De fato, seja $x\in F(L_\mu,[0,2\mu])\cap M$. Por definição do conjunto $F(L_\mu,[0,2\mu])$ temos que existe $t\in[0,2\mu]$ de modo que

$$\pi(t)x\in L_\mu.$$

Recordemos ainda que $L_\mu=F(L_\lambda,\lambda-\mu)$, e deste modo, como $\pi(t)x\in L_\mu$, podemos afirmar que

$$\pi(\lambda-\mu)\pi(t)x\in L_\lambda,$$

isto é,

$$\pi(\lambda-\mu+t)x\in L_\lambda.$$

Como $t\in[0,2\mu]$, temos $\lambda-\mu+t\in[\lambda-\mu,\lambda+\mu]\subset[0,2\lambda]$, pois $\mu<\lambda$. Ou seja, existe $t_0=\lambda-\mu+t\in[0,2\lambda]$ tal que

$$\pi(t_0)x\in L_\lambda,$$

donde concluímos que $x\in F(L_\lambda,[0,2\lambda])\cap M=S$. Das duas inclusões, concluímos que $S=F(L_\mu,[0,2\mu])\cap M$, como queríamos. ■

Teorema 2.22. *Seja (X,π,M,I) um sistema dinâmico impulsivo. Então ϕ é semicontínua inferiormente em $X\setminus M$.*

Demonstração. Seja $x \in X \setminus M$. Temos dois casos a considerar, que são o caso em que $\phi(x) = +\infty$ e o caso em que $\phi(x) < +\infty$.

- Se $\phi(x) = \infty$, temos $\tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$ para todo $t \geq 0$. Assim, seja $t_1 = 1$. Como $\pi([0, t_1])x \cap M = \varnothing$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\pi([0, t_1])x, \varepsilon) \cap M = \varnothing$, (pelo fato que $\pi([0, t_1])x$ é um conjunto fechado (compacto), e M é fechado por hipótese. Como X é um espaço métrico, $\pi([0, t_1])x$ é compacto e M fechado, podemos separar estes conjuntos, ou seja
$$d(\pi([0, t_1])x, M) > \varepsilon.$$
Isso implica que $B(\pi(s)x, \varepsilon) \cap M = \varnothing$ para $s \in [0, t_1]$. Ainda, pela continuidade de $\pi(t)$ para qualquer t fixado, temos particularmente, que $\pi(t)$ é contínua para qualquer que seja $t \in [0, t_1]$.

Assim, existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $d(x, y) < \delta_1$, então
$$d(\pi(t)x, \pi(t)y) < \frac{\varepsilon}{2}$$
para qualquer que seja $t \in [0, t_1]$. Daí segue que
$$\varepsilon < d(\pi([0, t_1])x, M) \leq d(\pi([0, t_1])x, \pi([0, t_1])y) + d(\pi([0, t_1])y, M).$$

Portanto, a distância entre $\pi([0, t_1])y$ e o conjunto M é estritamente maior que $\frac{\varepsilon}{2}$, donde segue que
$$B\left(\pi([0, t_1])y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap M = \varnothing,$$
e $\pi(t)y \cap M = \varnothing$ para todo $t \in [0, t_1]$, e assim, $\phi(y) > t_1 = 1$ para $y \in B(x, \delta_1)$.

Repetindo o mesmo raciocínio, para cada n consideremos $\varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon}{n+1}$. Assim temos que para cada ε_n existe um δ_n correspondente tal que $\phi(y) > n$ sempre que $y \in B(x, \delta_n)$. Deste modo conseguimos uma sequência decrescente $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots > \delta_n > \ldots > 0$ de modo que $\delta_n \to 0$, e para todo $y \in B(x, \delta_n)$ temos $\phi(y) > n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, seja dada uma sequência (x_k) tal que $x_k \to x$, vamos provar que $\phi(x_k) \to \infty$. De fato, dado $\tau > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \tau$. Também, da convergência de x_k para x temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_0$ então $x_k \in B(x, \delta_{n_0})$. Mas deste modo temos $\phi(x_k) > n_0 > \tau$. Logo, para todo τ, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(x_k) > \tau$

sempre que $k > k_0$, e $\phi(x_k) \to \infty$, portanto $\liminf \phi(x_k) = +\infty \geq \phi(x)$, como queríamos.

- Agora suponha que $\phi(x) = c < +\infty$. Tomemos uma sequência (z_n) de modo que $z_n \to x$. Se $\liminf \phi(z_n) = +\infty$, então temos $\liminf \phi(z_n) = +\infty \geq \phi(x)$. Agora se tivermos $t = \liminf \phi(z_n) < +\infty$, queremos provar que $t \geq c$. Para isso, suponha que $t < c$. Isso quer dizer que c é o menor tempo positivo que faz com que $\pi(c)x \in M$ e assim, $\pi(t)x \notin M$.

  Tomemos uma subsequência (z_{n_k}) de (z_n) tal que $\phi(z_{n_k}) \to t$. Note que, para n_k suficientemente grande, temos que $z_{n_k} \notin M$, uma vez que $x \notin M$. Ainda, como $\pi(\phi(z_{n_k}))z_{n_k} \in M$ para todo $n_k \in \mathbb{N}$, e M é fechado, temos

  $$\pi(\phi(z_{n_k}))z_{n_k} \to \pi(t)x \in M,$$

  o que é uma contradição, pois se $t < c$ não podemos ter $\pi(t)x \in M$.

Desta contradição concluímos que $t \geq c$, portanto $t \geq c = \phi(x)$, e ϕ é semicontínua inferiormente em $X \setminus M$. ■

Teorema 2.23. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo tal que todo $x \in M$ satisfaz a condição forte de tubo. Então ϕ é semicontínua superiormente em X.*

Demonstração. Seja $x \in M$. Vamos mostrar que ϕ é semicontínua superiormente em x. Novamente, temos dois casos a considerar:

- Se $\phi(x) = +\infty$, então para qualquer sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x$, temos $\limsup \phi(x_n) \leq +\infty = \phi(x)$, e ϕ é semicontínua superiormente.

- Se $\phi(x) = c < +\infty$, pela definição da função φ, temos que $y = \pi(c)x \in M$, e $\pi((0, +\infty))x \cap M \neq \varnothing$.

Agora, como todo ponto $x \in M$ satisfaz a condição forte de tubo, e $y = \pi(c, x) \in M$, existem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e L fechado tais que $F(L, [0, 2\varepsilon])$ é um STC-tubo através de $y \in M$, com seção $S = F(L, \varepsilon)$. O Lema 2.21 nos permite assumir, sem perda de generalidade que $0 < \varepsilon < c$, uma vez que se ε for maior ou igual a c, qualquer $\mu < \varepsilon$ será também $\mu-$seção, com $F(L_{\mu}, [0, 2\mu])$ um $STC-$tubo.

Além disso, como $F(L,[0,2\varepsilon])$ é uma vizinhança de y, e $\pi(c)$ é contínua, então existe uma vizinhança V de x tal que

$$\pi(c)V \subset F(L,[0,2\varepsilon]).$$

Tomemos agora $z \in V$ qualquer. Podemos afirmar que existe $w \in F(L,[0,2\varepsilon])$ tal que $\pi^{-1}(c)w = z$, ou seja, $\pi(c)z = w \in F(L,[0,2\varepsilon])$.

Pela definição do conjunto $F(L,[0,2\varepsilon])$ temos que existe $t \in [0,2\varepsilon]$ tal que

$$\pi(t)w \in L,$$

isto é

$$\pi(t)w = \pi(t)\pi(c)z = \pi(t+c)z \in L.$$

Além disso, podemos escrever $\pi(t+c)z = \pi(t+c-\varepsilon)\pi(\varepsilon)z \in L$, com $t+c-\varepsilon > 0$. Portanto,

$$\pi(t+c-\varepsilon)z \in S = F(L,\varepsilon) \subset M$$

e

$$\phi(z) \leq c+t-\varepsilon \leq c+\varepsilon = \phi(x)+\varepsilon,$$

como queríamos. ■

Teorema 2.24. *Seja (X,π,M,I) um sistema dinâmico impulsivo. Se nenhum ponto em M é ponto inicial e ϕ é contínua em x, então $x \notin M$.*

Demonstração. Seja ϕ contínua em $x \in X$. Vamos mostrar que $x \in X \setminus M$. De fato, suponha que $x \in M$. Da continuidade temos que ϕ é semicontínua superiormente e inferiormente em x. Por hipótese, temos que x não é ponto inicial, ou seja, existem $\varepsilon > 0$ e $y \in X$ tais que $\pi(\varepsilon, y) = x$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\pi([0,\varepsilon), y) \cap M = \varnothing$.

Por outro lado, tomemos uma sequência crescente $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\varepsilon_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\varepsilon_n \to \varepsilon$. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $\pi(\varepsilon - \varepsilon_n)\pi(\varepsilon_n)y = \pi(\varepsilon)y \in M$. Vamos mostrar que $\phi(\pi(\varepsilon_n)y) = \varepsilon - \varepsilon_n$ para cada n.

Suponha por absurdo que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(\pi(\varepsilon_{n_0})y) = t_{n_0} < \varepsilon - \varepsilon_{n_0}$. Assim, temos

$$\pi(\varepsilon_{n_0} + t_{n_0})y = \pi(t_{n_0})\pi(\varepsilon_{n_0})y \in M,$$

com $0 < \varepsilon_{n_0} < \varepsilon_{n_0} + t_{n_0} < \varepsilon$, o que contradiz o fato de $\pi([0, \varepsilon))y \cap M = \varnothing$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\phi(\pi(\varepsilon_n)y) = \varepsilon - \varepsilon_n.$$

Agora, como $\varepsilon_n \to \varepsilon$, temos que $\varepsilon - \varepsilon_n \to 0$, e assim, aplicando o limite em ambos os lados da igualdade obtemos $\phi(\pi(\varepsilon)y) = 0 < \phi(x)$, e portanto ϕ não é semicontínua inferiormente em M.

Desta contradição concluímos que $x \notin M$. ■

Observação 2.25. *Note que se assumirmos que $I(M) \cap M = \varnothing$, então não existe $x \in M$ que esteja em qualquer $\tilde{\pi}-$trajetória impulsiva, exceto as trajetórias que começam em x. Essa é uma simples consequência da definição de trajetórias impulsivas, e usaremos este fato posteriormente.*

A próxima proposição é a mais importante desta seção e será útil quando tratarmos de conjuntos negativamente $\tilde{\pi}-$invariantes.

Proposição 2.26. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M) \cap M = \varnothing$. Se $y \in M$ satisfaz a condição especial forte de tubo $(SSTC)$ com $\lambda-$tubo $F(L, [0, 2\lambda])$, então $\tilde{\pi}(t)X \cap F(L, [0, \lambda]) = \varnothing$ para todo $t > \lambda$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que existe $t > \lambda$ de modo que $z = \tilde{\pi}(t)x \in F(L, [0, \lambda])$ para algum $x \in X$. Assim, pela definição do conjunto $F(L, [0, \lambda])$ temos que existe $\mu \in [0, \lambda]$ tal que $\pi(\mu)z \in L$. Consideremos inicialmente o caso em que $\mu = \lambda$. Neste caso, $z \in F(L, \lambda) = S$.

Por outro lado, a condição STC nos fornece ainda que $S = F(L, [0, 2\lambda]) \cap M$, e assim, se $z \in S$, temos também $z \in M$, o que contradiz a observação anterior, pois se z é um ponto de M, então z não pode pertencer a $\tilde{\pi}-$trajetória impulsiva de x. Portanto, devemos considerar $\mu \in [0, \lambda)$.

Variando μ no intervalo $[0, \lambda)$, temos novamente dois casos a considerar: $t < \phi(x)$ ou $t \leq \phi(x)$.

Se $t < \phi(x)$, então $z = \tilde{\pi}(t)x = \pi(t)x$. Desta forma, considerando $w = \pi(t-(\lambda-\mu))x$, temos

$$\pi(\lambda)w = \pi(t+\mu)x = \pi(\mu)\pi(t)x = \pi(\mu)z \in L,$$

ou seja

$$w \in F(L, \lambda) = S \subset M.$$

Mas se $w \in M$ e $w = \pi(t - (\lambda - \mu))x$, temos uma contradição, pois μ é menor que λ, e assim $0 < t - (\lambda - \mu) < t < \phi(x)$, e por definição, $\phi(x)$ é o menor real positivo que faz com que $\pi(.)x$ intercepte o conjunto M. Desta contradição segue que $\phi(x) \leq t$, e neste caso, $\tilde{\pi}(t)x$ é dada pela Definição 2.6, ou seja,

$$z = \tilde{\pi}(t)x = \pi(t')x^+,$$

com $x^+ \in I(M)$, e $t' \in [0, \phi(x^+))$. A partir disso consideraremos dois casos: o caso em que $t' \geq \lambda - \mu$, e o caso em que $t' \in [0, \lambda - \mu)$.

- Se $t' \geq \lambda - \mu$, então considerando $w = \pi(t' - (\lambda - \mu))x^+$, temos

  $$\pi(\lambda)w = \pi(t' + \mu)x^+ = \pi(\mu)\pi(t')x^+ = \pi(\mu)z \in L,$$

  ou seja,

  $$w \in F(L, \lambda) = S \subset M.$$

  Neste caso temos uma contradição, pois $0 < t' - (\lambda - \mu) < t' < \phi(x^+)$, e $\phi(x^+)$ deveria ser o menor valor real que faz com que $\pi(.)x$ intercepte o conjunto M.

- Resta analisar o caso em que $t' \in [0, \lambda - \mu)$. Neste caso, temos

  $$\pi(t' + \mu)x^+ = \pi(\mu)\pi(t')x^+ = \pi(\mu)z \in L.$$

  Observe que $\leq \mu \leq t' + \mu < \lambda$, portanto

  $$x^+ \in F(L[0, \lambda]),$$

  e como x^+ também pertence a $I(M)$, temos

  $$x^+ \in F(L[0, \lambda]) \cap I(M),$$

  o que é uma contradição com a condição especial forte de tubo, pois nesse caso devemos ter $F(L[0,\lambda]) \cap I(M) = \varnothing$. Portanto, $\tilde{\pi}(t)X \cap F(L,[0,\lambda])$ para todo $t > \lambda$, como queríamos.

∎

2.2.1 Conjuntos ω-Limite Impulsivos

Definição 2.27. Representaremos a órbita impulsiva de $x \in X$ começando em $s \geq 0$ pelo conjunto

$$\tilde{\gamma}_s^+(x) = \{\tilde{\pi}(t)x; t \geq s\}.$$

Definimos também o conjunto $\tilde{\gamma}^+(x) = \tilde{\gamma}_0^+(x)$.

Dado um subconjunto $B \subset X$, definimos

$$\tilde{\gamma}_s^+(B) = \bigcup_{x \in B} \tilde{\gamma}_s^+(x).$$

Além disso, definimos o conjunto $\omega-$limite impulsivo de B por

$$\tilde{\omega}(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\tilde{\gamma}_t^+(B)}.$$

Lema 2.28. *Sejam (X,π,M,I) um sistema dinâmico impulsivo e $B \subset X$. Então*

$$\tilde{\omega}(B) = \{x \in X; \textit{existem sequências } (x_n) \subset B \textit{ e } (t_n) \subset \mathbb{R}^+ \\ \textit{com } t_n \to \infty \textit{ e } \tilde{\pi}(t_n)x_n \to x\}.$$

Além disso, para cada $B \subset X$ temos $\tilde{\omega}(B)$ fechado.

Demonstração. Seja $x \in \tilde{\omega}(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\tilde{\gamma}_t^+(B)}$. Então para todo $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \overline{\tilde{\gamma}_t^+(B)}$. Particularmente, dado $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$x \in \overline{\tilde{\gamma}_n^+(B)}.$$

Pela definição de fecho, podemos afirmar que existe uma sequência em $\tilde{\gamma}_n^+(B)$ convergindo para x.

Denotaremos essa sequência por

$$z_n^k := \tilde{\pi}(t_n^k)x_n^k,$$

com $x_n^k \subset B$, $t_n^k \subset \mathbb{R}^+$ e $t_n^k \geq n$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $z_n^k \to x$, então existe $k_n^0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k \geq k_n^0$, então

$$d(z_n^k, x) < \frac{1}{n}.$$

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ vai existir um determinado k_n^0 tal que $d(z_n^k, x) < \frac{1}{n}$ se $k \geq k_n^0$. Deste modo, tomando $k_1 = \text{máx}\{k_n^0; n \in \mathbb{N}\}$ temos que, se $k \geq k_1$. então

$$d(z_n^k, x) < \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, definindo as sequências

$$t_n = t_n^{k_1} \text{ e } x_n = x_n^{k_1},$$

temos

$$d(\tilde{\pi}(t_n)x_n, x) < \frac{1}{n}$$

e fazendo n tender a infinito nos dois lados da desigualdade, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\pi}(t_n)x_n = x,$$

com $(x_n) \subset B$, $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$. Notemos ainda que $\tilde{\pi}(t_n^{k_1})x_n^{k_1} \in \tilde{\gamma}_n^+(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto $t_n = t_n^{k_1} \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, fazendo n tender a infinito temos $t_n \to \infty$ também. Assim, vale a primeira inclusão.

Por outro lado, se existem sequências $(x_n) \subset B$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, então para qualquer $t \in \mathbb{R}^+$ fixado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$ então $t_n > t$.

Desse modo, temos

$$\tilde{\pi}(t_n)x_n \subset \tilde{\gamma}_t^+(B)$$

para todo $n \geq n_0$, ou seja, existe uma subsequência de $\tilde{\pi}(t_n)x_n$ contida em $\tilde{\gamma}_t^+(B)$. Como $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, esta subsequência também tende a x e assim $x \in \overline{\tilde{\gamma}_t^+(B)}$, mostrando assim a igualdade desejada.

Por fim, $\tilde{\omega}(B)$ é fechado, pois é dado pela intersecção de conjuntos fechados. ■

Para continuar estudando as propriedades de conjuntos $\omega-$limite impulsivos, precisamos definir primeiro a condição de dissipatividade.

Definição 2.29. Um sistema dinâmico impulsivo (X, π, M, I) é dito limitado dissipativo se existe um subconjunto pré-compacto $K \subset X$ com $K \cap M = \varnothing$ que $\tilde{\pi}-$atrai todo subconjunto limitado de X. Qualquer conjunto K que satisfaça essas condições é chamado de pré-atrator.

Proposição 2.30. *Se (X, π, M, I) é um sistema dinâmico impulsivo limitado dissipativo com o pré-atrator K, então para qualquer subconjunto limitado $B \subset X$, $\tilde{\omega}(B)$ é não vazio, compacto e $\tilde{\omega}(B) \subset \overline{K}$.*

Demonstração. Provaremos primeiro que $\tilde{\omega}(B) \subset \overline{K}$. De fato, seja $x \in \tilde{\omega}(B)$. Pelo Lema 2.28 existem sequências $(x_n) \subset B$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$.

Das propriedades da semidistância de Hausdorff e do fato que K $\tilde{\pi}-$atrai B temos

$$dist_H(\tilde{\pi}(t_n)x_n, K) \leq dist_H(\tilde{\pi}(t_n)B, K) \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Assim, segue que $dist_H(\tilde{\pi}(t_n)x_n, K) \to 0$. Como K é compacto e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, segue que $x \in \overline{K}$, donde concluímos que $\tilde{\omega}(B) \subset \overline{K}$.

A compacidade de $\tilde{\omega}(B)$ segue da inclusão provada acima e do Lema 2.28, uma vez que $\tilde{\omega}(B)$ é um conjunto fechado que está contido em um conjunto compacto.

Para provar que $\tilde{\omega}(B)$ é não vazio basta tomar qualquer sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ tendendo ao infinito e $(x_n) \subset B$. Como visto acima, $dist_H(\tilde{\pi}(t_n)x_n, K) \to 0$ e assim $(\tilde{\pi}(t_n)x_n)$ possui uma subsequência convergente. Como $t_n \to \infty$ e $(x_n) \subset B$, por definição, o limite desta subsequência é um ponto do conjunto $\tilde{\omega}(B)$, que é portanto não vazio. ■

Proposição 2.31. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo limitado dissipativo com* *um pré-atrator K. Então para qualquer subconjunto limitado não vazio $B \subset X$, o conjunto $\tilde{\omega}(B)$ $\tilde{\pi}-$atrai B.*

Demonstração. Suponha por contradição que $\tilde{\omega}(B)$ não atrai B. Deste modo, pela Proposição 1.77 existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$d(\tilde{\pi}(t)B, \tilde{\omega}(B)) \geq \varepsilon_0$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Da arbitrariedade de t, segue que podemos tomar sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ e $(x_n) \subset B$, tal que $t_n \to \infty$ e

$$d(\tilde{\pi}(t_n)x_n, \tilde{\omega}(B)) \geq \varepsilon_0.$$

Além disso, como K atrai B, a $dist_H(\tilde{\pi}(t_n)x_n, K) \to 0$, donde segue que existe $\tau \in \mathbb{R}^+$ tal que $\tilde{\pi}(t_n)x_n \in \overline{K}$ para todo $t_n \geq \tau$. Como $\overline{K}$ é compacto, existe uma subsequência $(\tilde{\pi}(t_{n_k})x_{n_k})$ de $(\tilde{\pi}(t_n)x_n)$ que converge para algum $y \in \overline{K}$. Isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k > n_0$ então

$$d(\tilde{\pi}(t_{n_k})x_{n_k}, y) < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Das desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &\leq d(\tilde{\pi}(t_{n_k})x_{n_k}, \tilde{\omega}(B)) \\
&\leq d(\tilde{\pi}(t_{n_k})x_{n_k}, y) + d(y, \tilde{\omega}(B)) \\
&< \frac{\varepsilon_0}{2} + d(y, \tilde{\omega}(B))
\end{aligned}$$

donde segue que $d(y, \tilde{\omega}(B)) > \frac{\varepsilon_0}{2}$, o que é uma contradição, pois $t_{n_k} \to \infty$ e $(x_{n_k}) \subset B$, portanto deveríamos ter $y \in \tilde{\omega}(B)$. Desta contradição segue que $\tilde{\omega}(B)$ atrai B. ∎

2.2.2 Invariância Positiva de Conjuntos ω-Limite Impulsivos

Lema 2.32. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M) \cap M = \varnothing$ e cada ponto de M satisfaz a condição forte de tubo. Seja $x \in X \setminus M$ e (z_n) uma sequência em X tal que $z_n \to x$. Então, dado $t \geq 0$, existe uma sequência $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon_n \to 0$ e $\tilde{\pi}(t + \varepsilon_n)z_n \to \tilde{\pi}(t)x$.*

Demonstração. Seja $x \in X \setminus M$ e (z_n) uma sequência em X tal que $z_n \to x$. Suponhamos inicialmente $\phi(x) = \infty$. Pelo Teorema 2.22 temos que ϕ é semicontínua inferiormente em $X \setminus M$, ou seja

$$\liminf_{n\to\infty} \phi(z_n) \geq \phi(x) = \infty.$$

Como o limite inferior de $\phi(z_n)$ é o menor valor de aderência da sequência $(\phi(z_n))$, para todo $t \geq 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\phi(z_n) > t$.

Consequentemente, para $n \geq n_0$ temos

$$\tilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n.$$

Como π é contínua, considerando a sequência (ε_n) tal que $\varepsilon_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\varepsilon_n \to 0$ e

$$\tilde{\pi}(t+\varepsilon_n)z_n = \tilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n \to \pi(t)x.$$

Agora, se $\phi(x) < \infty$, temos três casos a considerar.

• **1º caso:** $0 \leq t < \phi(x)$. Neste caso, considerando $0 < \varepsilon < \phi(x) - t$, como ϕ é semicontínua inferiormente em x, pela definição de semicontinuidade inferior segue que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então

$$\phi(x) - \varepsilon < \phi(z_n).$$

Como $0 < \varepsilon < \phi(x) - t$, segue que $t < \phi(z_n)$ para todo $n \geq n_0$ e assim

$$\tilde{\pi}(t)z_n = \pi(t)z_n$$

para todo $n \geq n_0$. Neste caso, tomando novamento $\varepsilon_n = 0$ para todo n, temos o desejado.

• **2º caso:** $t = \phi(x)$. Nesse caso, considerando $x_1 = \pi(t)x$ e $x_1^+ = \tilde{\pi}(t)x = I(x_1)$, como ϕ é contínua em x (Teoremas 2.22 e 2.23), temos $\phi(z_n) \to \phi(x) = t$, donde podemos supor que $\phi(z_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, considerando $(z_n)_1 = \pi(\phi(z_n))z_n$, pela continuidade de π temos que $(z_n)_1 \to \pi(\phi(x))x = \pi(t)x = x_1$, pois $\pi(\phi(z_n))z_n \to$

$\pi(\phi(x))x$. Ainda, como I é contínua temos

$$(z_n)_1^+ = I((z_n)_1) \to I(x_1) = x_1^+.$$

Ainda, como $\phi(z_n) \to \phi(x)$, segue que $|\phi(z_n) - \phi(x)| \to 0$, portanto definindo ε_n de modo que $\varepsilon_n + t = \phi(z_n) > 0$, temos $\varepsilon_n \to 0$ e

$$\tilde{\pi}(t+\varepsilon_n)z_n = \tilde{\pi}(\phi(z_n))z_n = I((z_n)_1) = (z_n)_1^+ \to x_1^+ = \tilde{\pi}(t)x,$$

como queríamos.

• **3º caso:** $0 < \phi(x) < t$. Nesse caso, pela definição de órbita impulsiva temos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$t = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_i^+) + t'$$

com $0 \leq t' < \phi(x_m^+)$. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ a sequência $((z_n)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma:

$$(z_n)_1 = \pi(\phi(z_n))z_n,$$

$$(z_n)_2 = \pi(\phi(z_n)_1^+)(z_n)_1^+.$$

Supondo que $(z_n)_k = \pi(\phi(z_n)_{k-1}^+)(z_n)_{k-1}^+$, defina $(z_n)_{k+1} = \pi(\phi(z_n)_k^+)(z_n)_k^+$, $k > 2$. Seja $t_n = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(z_n)_i^+$, onde $(z_n)_0^+ = z_n$. Como $\phi(z_n) \to \phi(x)$, temos

$$(z_n)_1 = \pi(\phi(z_n))z_n \to \pi(\phi(x))x = x_1.$$

Pela continuidade de I temos

$$(z_n)_1^+ = I(z_n)_1 \to I(x_1) = x_1^+.$$

Daí,

$$(z_n)_2 = \pi(\phi(z_n)_1^+)(z_n)_1^+ \to \pi(\phi(x_1^+)x_1^+ = x_2.$$

Prosseguindo com este raciocínio obtemos que $(z_n)_k \to x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$(z_n)_k^+ = I((z_n)_k) \to I(x_k) = x_k^+$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Pela continuidade de ϕ temos

$$t_n = \sum_{i=0}^{m-1} \phi((z_n)_i^+) \to \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_i^+) = t - t'.$$

A partir disso, definamos a sequência $\varepsilon_n = t_n + t' - t$. Note que quando $n \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$, uma vez que $t_n \to t - t'$. Como ϕ é contínua em x_m^+ e $(z_n)_m^+ \to x_m^+$, para n suficientemente grande temos $0 \leq t' < \phi((z_n)_m^+)$. Com isso,

$$\tilde{\pi}(t + \varepsilon_n)z_n = \tilde{\pi}(t_n + t')z_n = \tilde{\pi}(t')\tilde{\pi}(t_n)z_n = \pi(t')(z_n)_m^+.$$

Fazendo $n \to \infty$ temos

$$\pi(t')(z_n)_m^+ \to \pi(t')x_m^+ = \tilde{\pi}(t')x_m^+ = \tilde{\pi}(t')\tilde{\pi}(\sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_i^+))x = \tilde{\pi}(t)x.$$

■

Proposição 2.33. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M) \cap M = \varnothing$ e cada ponto de M satisfaz a condição forte de tubo. Então para qualquer subconjunto limitado $B \subset X$ o conjunto $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ é positivamente $\tilde{\pi}-$invariante.*

Demonstração. Seja $x \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$. Pelo Lema 2.28 existem sequências $(x_n) \subset B$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Como M é fechado e $x \notin M$, podemos assumir que $\tilde{\pi}(t_n)x_n \notin M$.

Pelo Lema 2.32 existe uma sequência $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon_n \to 0$ e

$$\tilde{\pi}(t_n + t + \varepsilon_n)x_n = \tilde{\pi}(t + \varepsilon_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n \to \tilde{\pi}(t)x.$$

Assim $\tilde{\pi}(t)x \in \tilde{\omega}(B)$, pois $(x_n) \subset B$ e $(t_n + t + \varepsilon_n) \to \infty$. Observe ainda que $\tilde{\pi}(t)x \notin M$, uma vez que $I(M) \cap M = \varnothing$, pois assim qualquer trajetória impulsiva começando em um ponto de $X \setminus M$ não alcança M em um tempo finito. Daí segue que $\tilde{\pi}(t)x \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$, donde segue a $\tilde{\pi}-$invariância positiva deste conjunto. ■

2.2.3 Invariância Negativa de Conjuntos ω-Limite Impulsivos

Lema 2.34. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo tal que cada ponto em M satisfaz a condição forte de tubo, $z \notin M$ e (z_n) é uma sequência em $X \setminus M$ tal que $z_n \to z$. Se $\alpha_n \to 0$ e $\alpha_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\tilde{\pi}(\alpha_n)z_n \to z$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $z \in X \setminus M$ e pelos Teoremas 2.22 e 2.23, ϕ é contínua em $X \setminus M$, segue que $\phi(z_n) \to \phi(z)$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então

$$|\phi(z_n) - \phi(z)| < \frac{\phi(z)}{2},$$

ou seja

$$-\frac{\phi(z)}{2} < \phi(z_n) - \phi(z) < \frac{\phi(z)}{2}.$$

Daí segue que, se $n > n_0$ então

$$\frac{\phi(z)}{2} < \phi(z_n) < \frac{3\phi(z)}{2}.$$

Por outro lado, como $\alpha_n \to 0$ e $\alpha_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ segue que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$ então

$$0 \leq \alpha_n < \frac{\phi(z)}{2}.$$

Agora, considerando $n_2 = \text{máx}\{n_0, n_1\}$ temos que se $n > n_2$ então

$$0 \leq \alpha_n < \frac{\phi(z)}{2} < \phi(z_n).$$

Por fim, pela continuidade da função π temos que $\pi(\alpha_n)z_n \to \pi(0)z = z$, ou seja, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_3$ então $d(\pi(\alpha_n)z_n, z) < \varepsilon$, assim tomando $n_4 = \text{máx}\{n_2, n_3\}$ temos que, se $n > n_4$, então $\tilde{\pi}(\alpha_n)z_n = \pi(\alpha_n)z_n$ e portanto

$$d(\tilde{\pi}(\alpha_n)z_n, z) = d(\pi(\alpha_n)z_n, z) < \varepsilon$$

donde segue que $\tilde{\pi}(\alpha_n)z_n \to z$, como queríamos. ■

Corolário 2.35. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M) \cap M = \varnothing$ e cada ponto de M satisfaz a condição forte de tubo. Também, seja $z \in X \setminus M$ e (z_n) uma sequência em X tal que $z_n \to z$. Então dado $t \geq 0$, existe sequência $(\varepsilon_n) \subset [0, \infty)$ tal que*

$\varepsilon_n \to 0$ *e* $\tilde{\pi}(t+\varepsilon_n)z_n \to \tilde{\pi}(t)z$.

Demonstração. Pelo Lema 2.32 segue que existe uma sequência $(\delta_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\delta_n \to 0$ e $\tilde{\pi}(t+\delta_n)z_n \to \tilde{\pi}(t)z \notin M$. Ainda, pelo Lema 2.34 temos

$$\tilde{\pi}(t+\delta_n+|\delta_n|)z_n = \tilde{\pi}(|\delta_n|)\tilde{\pi}(t+\delta_n)z_n \to \tilde{\pi}(t)z,$$

uma vez que $|\delta_n| \to 0$ e $\tilde{\pi}(t+\delta_n)z_n \to \tilde{\pi}(t)z$. Assim, considerando a sequência $\varepsilon_n = (\delta_n + |\delta_n|)$, temos o desejado. ■

Lema 2.36. *Sejam* (X, π, M, I) *um sistema dinâmico impulsivo e* $x \in M$ *satisfazendo a condição forte de tubo com o* λ*−tubo* $F(L, [0, 2\lambda])$. *Assuma que existe uma sequência* (z_n) *tal que* $z_n \in F(L, (\lambda, 2\lambda])$ *e* $z_n \to x$. *Então existe uma subsequência* (z_{n_k}) *de* (z_n) *e uma sequência* (ε_k) *tal que* $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, $x_k = \pi(\varepsilon_k)z_{n_k} \in M$, $\phi(z_{n_k}) = \varepsilon_k$ *e* $x_k \to x$.

Demonstração. Como $z_n \in F(L, (\lambda, 2\lambda])$, existe λ_n de modo que $\lambda < \lambda_n \leq 2\lambda$ e $\pi(\lambda_n)z_n \in L$. Assim, variando n temos uma sequência $(\lambda_n) \subset (\lambda, 2\lambda]$, que é um conjunto relativamente compacto, donde segue que (λ_n) possui alguma subsequência (λ_{n_k}) que converge para $\overline{\lambda}$.

Pela continuidade de π temos

$$\pi(\lambda_{n_k})z_{n_k} \to \pi(\overline{\lambda})x.$$

Note que para todo $n_k \in \mathbb{N}$ temos $\pi(\lambda_{n_k})z_{n_k} \in L$, que é fechado, assim devemos ter $\pi(\overline{\lambda})x \in L$, donde segue que $x \in F(L, \overline{\lambda})$.

Por outro lado, a hipótese nos garante que $x \in F(L, \lambda)$, portanto

$$x \in F(L, \lambda) \cap F(L, \overline{\lambda}).$$

Note que $\overline{\lambda} \in [\lambda, 2\lambda]$, ou seja, $\lambda \leq \overline{\lambda} \leq 2\lambda$. Assim temos $\lambda = \overline{\lambda}$ (caso contrário deveríamos ter $0 \leq \lambda < \overline{\lambda} \leq 2\lambda$ e $F(L, \lambda) \cap F(L, \overline{\lambda}) \neq \emptyset$, o que contradiz a condição $iii)$ da definição de tubo).

Agora, seja $\varepsilon_k = \lambda_{n_k} - \lambda > 0$ e considere $x_k = \pi(\varepsilon_k)z_{n_k}$. Assim temos

$$\pi(\lambda)x_k = \pi(\lambda)\pi(\varepsilon_k)z_{n_k} = \pi(\lambda_{n_k})z_{n_k} \in L.$$

Como $\pi(\lambda)x_k \in L$, segue que $x_k \in F(L,\lambda) = S$ para todo k. Pela condição forte de tubo temos $S \subset M$, assim segue que $x_k = \pi(\varepsilon_k)z_{n_k} \in M$. Pela continuidade de π ainda temos, para todo k

$$x_k = \pi(\varepsilon_k)z_{n_k} \to \pi(0)x = x.$$

Por fim, resta mostrar que $\phi(z_{n_k}) = \varepsilon_k$ para cada k. De fato, suponha que $w_{n_k} = \pi(t_0)z_{n_k} \in M$, com $t_0(k) \in (0,\varepsilon_k)$. Então

$$\pi(\lambda_{n_k} - t_0)w_{n_k} = \pi(\lambda_{n_k} - t_0)\pi(t_0)z_{n_k} = \pi(\lambda_{n_k})z_{n_k} \in L.$$

Assim $w_{n_k} \in F(L,[0,2\lambda])$, pois $0 < t_0 < \lambda_{n_k} - \lambda < 2\lambda$ e portanto $0 \leq \lambda \leq \lambda_{n_k} - t_0 \leq 2\lambda$.

Daí segue que

$$w_{n_k} \in F(L,[0,2\lambda]) \cap M = S$$

pela condição forte de tubo.

Por outro lado, a definição de tubo nos fornece $S = F(L,\lambda)$, portanto

$$w_{n_k} \in F(L,\lambda) \cap F(L,\lambda_{n_k} - t_0).$$

Novamente, pela terceira condição da definição de tubo, temos que $t_0 = \lambda_{n_k} - \lambda = \varepsilon_k$. Dessa contradição segue que $\phi(z_{n_k}) = \varepsilon_k$. ■

Lema 2.37. *Seja (X,π,M,I) um sistema dinâmico impulsivo com $I(M) \cap M = \varnothing$. Assuma que cada ponto de M satisfaz a condição especial forte de tubo e seja $B \subset X$. Se $y \in \tilde{\omega}(B) \cap M$ então $I(y) \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$.*

Demonstração. Seja $(x_n) \subset B$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to y \in \tilde{\omega}(B) \cap M$.

Podemos assumir que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \tilde{\pi}(t_n)x_n \in F(L,[0,2\lambda])$ e $t_n > \lambda$ para algum $\lambda-$tubo $F(L,[0,2\lambda])$ sobre y. Como $\tilde{\pi}(t)X \cap F(L,[0,\lambda]) = \varnothing$ para $t > \lambda$, segue que $y_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$.

Além disso, pelo Lema 2.21 $t_n > \lambda$ para algum $\lambda-$tubo sobre y. Como $\tilde{\pi}(t)X \cap F(L,[0,\lambda]) = \varnothing$ para $t > \lambda$ (Proposição 2.26), segue que $y_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$. Assim, pelo lema anterior existe uma sequência positiva $\varepsilon_k \to 0$ tal que $\pi(\varepsilon_k)y_{n_k} \in M$ para alguma subsequência y_{n_k} e além disso, $\pi(\varepsilon_k)y_{n_k} \to y$. Pela continuidade de I segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(t_{n_k}+\varepsilon_k)x_{n_k} &= \tilde{\pi}(\varepsilon_k)\tilde{\pi}(t_{n_k})x_{n_k} \\
&= \tilde{\pi}(\varepsilon_k)y_{n_k} \\
&= I(\pi(\varepsilon_k)y_{n_k}) \to I(y).
\end{aligned}$$

Assim, $I(y) \in \tilde{\omega}(B)$, mas $I(y) \notin M$, uma vez que $y \in M$ e $I(M) \cap M = \varnothing$. Portanto $I(y) \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$. ■

Proposição 2.38. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo tal que $I(M) \cap M = \varnothing$ e cada ponto de M satisfaz a condição especial forte de tubo. Seja $B \subset X$, se $\tilde{\omega}(B)$ é compacto e $\tilde{\pi}-$atrai B, então $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ é negativamente invariante.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\tilde{\omega}(B) \setminus M \subset \tilde{\pi}(t)(\tilde{\omega}(B) \setminus M)$ para todo $t \geq 0$. De fato, seja $x \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$ e $t \geq 0$. Pelo Lema 2.28, existe $(x_n) \subset B$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$.

Como $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ então $t_n > t$, ou seja, $t_n - t > 0$ sempre que $n > n_0$. Além disso, como $t_n \to \infty$, temos que $t_n - t \to \infty$. Ainda, como $\tilde{\omega}(B)$ atrai B, podemos afirmar que $\{\tilde{\pi}(t_n - t)x_n; n \in \mathbb{N}\}$ possui subsequência convergente (que será denotada da mesma forma que a sequência). Isto é,

$$\tilde{\pi}(t_n - t)x_n \to y \in \tilde{\omega}(B).$$

A partir disso, consideraremos dois casos:

• Se $y \in M$, definindo $y_n := \tilde{\pi}(t_n - t)x_n$, a Proposição 2.26 nos garante que $y_n \in F(L, (\lambda, 2\lambda])$, onde $F(L, [0, 2\lambda])$ é um $\lambda-$tubo sobre y. Assim, pelo Lema 2.36 existe uma sequência $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$ e uma subsequência de (y_n) (que será denotada da mesma forma que a sequência) tais que $z_n := \pi(\varepsilon_n)y_n \in M$ e $z_n \to y$.

Pela continuidade de I, definindo $z_n^+ := \tilde{\pi}(\varepsilon_n)y_n$ temos

$$z_n^+ = I(z_n) \to I(y).$$

Note que $y \in \tilde{\omega}(B)$ e $y \in M$ pela hipótese. Assim, pelo Lema 2.37 segue que $z := I(y) \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$.

A partir disso, temos as condições da hipótese do Corolário 2.35, logo, existe uma sequência não negativa $\alpha_n \to 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(t + \alpha_n)z_n^+ \to \tilde{\pi}(t)z.$$

Como $z_n^+ = \tilde{\pi}(\varepsilon_n)y_n$, segue que

$$\tilde{\pi}(t + \alpha_n)z_n^+ = \tilde{\pi}(t + \alpha_n)(\tilde{\pi}(\varepsilon_n)y_n).$$

Além disso, substituindo $y_n = \tilde{\pi}(t_n - t)x_n$, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(t + \alpha_n)z_n^+ &= \tilde{\pi}(t + \alpha_n)(\tilde{\pi}(\varepsilon_n)\tilde{\pi}(t_n - t)x_n)\\ &= \tilde{\pi}(t_n + \varepsilon_n + \alpha_n)x_n\\ &= \tilde{\pi}(\varepsilon_n + \alpha_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n.\end{aligned}$$

Repare que $\varepsilon_n + \alpha_n \to 0$ e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Assim, o Lema 2.34 nos garante que $\tilde{\pi}(\varepsilon_n + \alpha_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Portanto, $\tilde{\pi}(t + \alpha_n)z_n^+ \to x$, donde seque que $x = \tilde{\pi}(t)z \in \tilde{\pi}(t)(\tilde{\omega}(B) \setminus M)$.

• Se $y \notin M$, o Corolário 2.35 nos garante que existe uma sequência $\varepsilon_n \to 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(t + \varepsilon_n) \to \tilde{\pi}(t)y.$$

Mas

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(t + \varepsilon_n)y_n &= \tilde{\pi}(t + \varepsilon_n)\tilde{\pi}(t_n - t)x_n\\ &= \tilde{\pi}(\varepsilon_n + t_n)x_n\\ &= \tilde{\pi}(\varepsilon_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon_n \to 0$ e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, o Lema 2.34 nos garante que $\tilde{\pi}(t+\varepsilon_n)y_n = \tilde{\pi}(\varepsilon_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Assim, concluímos que $x = \tilde{\pi}(t)y \in \tilde{\pi}(t)(\tilde{\omega}(B) \setminus M)$. ■

2.3 Atração

Anteriormente, provamos que se um sistema dinâmico impulsivo é limitado dissipativo e B um subconjunto não vazio de X, então $\tilde{\omega}(B)$ $\tilde{\pi}-$atrai B. Mas nesse caso, $\tilde{\omega}(B)$ pode possuir pontos de M, mas de acordo com a nossa definição de atrator global, não queremos que isso aconteça, pois o atrator não pode conter pontos de M. Assim, usaremos esta seção para provar que $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ também atrai B.

Lema 2.39. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo limitado dissipativo com um pré-atrator K tal que $I(M) \cap M = \varnothing$ e cada ponto de M satisfaz a condição especial forte de tubo. Assuma que existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$. Se B é um subconjunto limitado não vazio de X, então $\tilde{\omega}(B) \cap M \subset \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$.*

Demonstração. Seja $x \in \tilde{\omega}(B) \cap M$. Então existem sequências $(x_n) \subset B$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Como x também pertence a M, então esse ponto satisfaz a condição especial forte de tubo com o $\lambda-$tubo $F(L, [0, 2\lambda])$. Assim, como $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$ podemos assumir que $\tilde{\pi}(t_n)x_n \in F(L, [0, 2\lambda])$ para todo n. Além disso, podemos assumir que $t_n > \lambda$. Daí segue, pela Proposição 2.26, que $z_n := \tilde{\pi}(t_n)x_n \in F(L, (\lambda, 2\lambda])$ para todo n.

Assim, garantimos a existência de uma sequência $(z_n) \subset F(L, (\lambda, 2\lambda])$ tal que $z_n \to x$. Logo, pelo Lema 2.36, existe uma subsequência de (z_n) (para a qual utilizaremos a mesma notação da sequência) e uma sequência $(\varepsilon_n) = (\lambda_n - \lambda)$ tal que $\pi(\lambda_n - \lambda)z_n \in M$.

Podemos assumir ainda que $0 < \varepsilon_n = \lambda_n - \lambda < \frac{\xi}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que $\lambda_n - \lambda \to 0$. Além disso, a definição de sistema dinâmico impulsivo nos garante que existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $F(x, (0, \varepsilon_x)) \cap M = \varnothing$.

Agora, tomemos $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m_0} < \min\{\varepsilon_x, \frac{\xi}{2}\}.$$

Para cada $m \geq m_0$ definamos a sequência

$$w_n^m = \tilde{\pi}(t_n - \frac{1}{m})x_n.$$

Observe que, para cada $m \geq m_0$ fixado, temos $t_n - \frac{1}{m} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Além disso, como o sistema dinâmico é limitado dissipativo, a Proposição 2.31 garante que $\tilde{\omega}(B)$ atrai B, isto é

$$dist_H(\tilde{\pi}(t)B, \tilde{\omega}(B)) \to 0.$$

Dessa convergência e da compacidade de $\tilde{\omega}(B)$ segue que $w_n^m \to y_m \in \tilde{\omega}(B)(tomandosubsequnc$

Vamos provar que $\phi(w_n^m) > \frac{1}{m}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$.

De fato, suponha que $\phi(w_n^m) \leq \frac{1}{m}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$. Deste modo temos $\pi(\phi(w_n^m))w_n^m \in M$ e $v_n^m = \tilde{\pi}(\phi(w_n^m))w_n^m \in I(M)$. Assim temos

$$\pi(\varepsilon_n + \frac{1}{m} - \phi(w_n^m))v_n^m = \pi(\varepsilon_n)\pi(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m))v_n^m.$$

Como $v_n^m \in I(M)$, a hipótese nos garante

$$\phi(v_n^m) \geq \xi > \frac{1}{m} > \frac{1}{m} - \phi(w_n^m),$$

assim, $\pi(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m))v_n^m = \tilde{\pi}(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m))v_n^m$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\pi(\varepsilon_n)\pi(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m))v_n^m &= \pi(\varepsilon_n)\tilde{\pi}(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m))v_n^m \\
&= \pi(\varepsilon_n)\tilde{\pi}(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m))\tilde{\pi}(\phi(w_n^m))w_n^m \\
&= \pi(\varepsilon_n)\tilde{\pi}(\frac{1}{m})w_n^m \\
&= \pi(\varepsilon_n)\tilde{\pi}(\frac{1}{m})\tilde{\pi}(t_n - \frac{1}{m})x_n \\
&= \pi(\varepsilon_n)\tilde{\pi}(t_n)x_n \\
&= \pi(\varepsilon_n)z_n \in M.
\end{aligned}$$

Nesse caso, obtivemos que $\pi(\varepsilon_n + \frac{1}{m} - \phi(w_n^m))v_n^m \in M$, o que é uma contradição, pois $\frac{1}{m} - \phi(w_n^m) < \frac{1}{m}$, e assim $0 < \varepsilon_n + \frac{1}{m} - \phi(w_n^m) < \varepsilon_n + \frac{1}{m} < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi$, pois pela hipótese, como $v_n^m \in I(M)$, devemos ter $\phi(v_n^m) \geq \xi$. Dessa contradição, segue que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$, $\phi(w_n^m) > \frac{1}{m}$, ou seja

$$
\begin{aligned}
\pi(\frac{1}{m})w_n^m &= \tilde{\pi}(\frac{1}{m})w_n^m \\
&= \tilde{\pi}(\frac{1}{m})\tilde{\pi}(t_n - \frac{1}{m})x_n \\
&= \tilde{\pi}(t_n)x_n.
\end{aligned}
$$

Pela continuidade de π, temos que $\pi(\frac{1}{m})w_n^m \to \pi(\frac{1}{m})y_m$. Por outro lado, $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$, donde segue, pela unicidade do limite, que

$$\pi(\frac{1}{m})y_m = x \in M.$$

Ainda, como $\frac{1}{m} < \varepsilon_x$ temos que $y_m \in F(x,(0,\varepsilon_x))$, portanto, $y_m \notin M$, uma vez que $F(x,(0,\varepsilon_x)) \cap M = \varnothing$. Daí segue que $y_m \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$. A partir disso, mostraremos que $x \in \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$. Para isso, consideraremos dois casos:

- Se $y_m \to x$, temos o desejado, uma vez que $y_m \in \tilde{\omega}(B) \setminus M$.

- Se $y_m \nrightarrow x$, podemos tomar uma subsequência (y_{m_k}) de (y_m) que converge para algum $x_0 \neq x$. Mas desta forma, $x = \pi(\frac{1}{m_k})y_{m_k} \to \pi(0)x_0 = x_0$, o que é uma contradição. Portanto, $y_m \to x$, e assim $x \in \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$.

■

Proposição 2.40. *Sendo válidas as hipóteses do lema anterior, se $\tilde{\omega}(B)$ $\tilde{\pi}-$atrai B, então $\tilde{\omega}(B)\setminus M$ $\tilde{\pi}-$atrai B.*

Demonstração. Vamos provar que, nessas condições, $\tilde{\omega}(B) = \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$. De fato, como $\tilde{\omega}(B) \setminus M \subset \tilde{\omega}(B)$, segue que $\overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M} \subset \overline{\tilde{\omega}(B)} = \tilde{\omega}(B)$.

Para mostrar a inclusão contrária, tomemos $x \in \tilde{\omega}(B)$. A partir disso temos $x \in M$, ou $x \notin M$. Se $x \notin M$, temos $x \in \tilde{\omega}(B) \setminus M \subset \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$, como queríamos. Agora, se $x \in M$, temos $x \in \tilde{\omega}(B) \cap M \subset \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M}$ pelo lema anterior.

Dessa igualdade, temos a atração imediata, uma vez que $dist_H(\tilde{\pi}(t)B, \tilde{\omega}(B) \setminus M = dist_H(\tilde{\pi}(t)B, \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M} \to 0$, pois o $\inf \overline{\tilde{\omega}(B) \setminus M} = \inf \tilde{\omega}(B) \setminus M$.

■

2.4 Atratores Globais para Sistemas Dinâmicos Impulsivos

Nesta seção, temos por objetivo formular um teorema sobre a existência de atratores globais para sistemas dinâmicos impulsivos, de acordo com a definição apresentada neste trabalho, uma vez que os resultados apresentados em outros trabalhos excluem classes importantes de sistemas dinâmicos com impulsos, por exemplo, aqueles que contém uma órbita periódica com pontos de M em seu conjunto $\omega-$limite, assim como o Exemplo 2.14.

Antes de provar a existência de atrator global, faremos algumas caracterizações, análogas às que já temos para o caso sem impulso.

Proposição 2.41. *Com a Definição 2.15, se $\mathcal{A}$ existe, ele é unicamente determinado.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ atratores globais para o sistema dinâmico impulsivo. Pela segunda condição desta definição, $\mathcal{A}_1$ é $\tilde{\pi}-$invariante, ou seja, $\tilde{\pi}(t)\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1$ para todo t. Além disso, $\mathcal{A}_1$ é limitado.

Como $\mathcal{A}_2$ também satisfaz as condições da Definição 2.15, a terceira condição nos garante que $\mathcal{A}_2$ $\tilde{\pi}-$atrai $\mathcal{A}_1$, ou seja, $dist_H(\tilde{\pi}(t)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \to 0$. Assim, $dist_H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0$.

Pelas propriedades da semi-distância de Hausdorff temos $\mathcal{A}_1 \subset \overline{\mathcal{A}_2}$. Analogamente, obtemos $dist_H(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0$, donde seque que $\mathcal{A}_2 \subset \overline{\mathcal{A}_1}$ e portanto $\overline{\mathcal{A}_1} = \overline{\mathcal{A}_2}$.

Por fim, pela primeira condição da Definição 2.15 temos

$$\mathcal{A}_1 = \overline{\mathcal{A}_1} \setminus M = \overline{\mathcal{A}_2} \setminus M = \mathcal{A}_2.$$

■

Definição 2.42. Dizemos que uma função $\psi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global de $\tilde{\pi}$ se

$$\tilde{\pi}(t)\psi(s) = \psi(t+s), \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se $\psi(0) = x$, dizemos que ψ é uma solução global por x.

Proposição 2.43. *Com a Definição 2.15, se o sistema dinâmico impulsivo (X, π, M, I) possui* *atrator global $\mathcal{A}$ e $I(M) \cap M = \varnothing$, então*

$$\mathcal{A} = \{x \in X; \textit{existe uma solução global limitada de } \tilde{\pi} \textit{ por } x\}.$$

Demonstração. Suponha que exista uma solução global limitada $\psi(.)$ de $\tilde{\pi}$ por x. Assim, $\psi(\mathbb{R}) \cap M = \varnothing$, pois, se existisse $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(t_0) \in M$, então $\tilde{\pi}(s)\psi(t_0 - s) = \psi(t_0) \in M$ para todo $s > 0$, o que é um absurdo, pois quando $I(M) \cap M = \varnothing$, nenhuma trajetória de pontos de X pode interceptar M. (Observação 2.25). Assim, temos $\psi(\mathbb{R}) \cap M = \varnothing$.

Provaremos ainda que $\psi(\mathbb{R})$ é $\tilde{\pi}-$invariante. De fato, seja $t \geq 0$ arbitrário e $x \in \mathbb{R}$, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $r = t + a$. Assim,

$$\psi(x) = \psi(t + a) = \tilde{\pi}(t)\psi(a) \in \tilde{\pi}(t)\psi(\mathbb{R})$$

provando que $\psi(\mathbb{R}) \subset \tilde{\pi}(t)\psi(\mathbb{R})$ para todo $t \geq 0$.

Para a outra inclusão, tomando $t \geq 0$ e $b \in \mathbb{R}$, temos $t + b = s \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\tilde{\pi}(t)\psi(b) = \psi(t + b) = \psi(s) \in \psi(\mathbb{R})$$

concluindo a igualdade.

Como $\mathcal{A}$ atrai subconjuntos limitados de X e a solução global é limitada, temos

$$\begin{aligned} &dist_H(\tilde{\pi}(t)(\psi(\mathbb{R})), \mathcal{A}) \to 0 \\ &\Rightarrow dist_H(\psi(\mathbb{R}), \mathcal{A}) = 0. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.74 segue que $\psi(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{A}}$, e como $\psi(\mathbb{R}) \not\subseteq M$, temos $\psi(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{A}} \backslash M = \mathcal{A}$, como queríamos.

Reciprocamente, seja $x \in \mathcal{A}$. Queremos mostrar que existe uma solução global limitada de $\tilde{\pi}$ por x. Para isso, construiremos esta função. Como $\mathcal{A}$ é $\tilde{\pi}-$invariante, $x \in \tilde{\pi}(t)\mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$. Particularmente, temos $x \in \tilde{\pi}(1)\mathcal{A}$, ou seja, existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$, tal que

$$\tilde{\pi}(1)x_{-1} = x.$$

Da mesma forma, como $x_{-1} \in \mathcal{A}$, existe $x_{-2} \in \mathcal{A}$ tal que

$$\tilde{\pi}(1)x_{-2} = x_{-1}.$$

Indutivamente, obtemos uma sequência (x_{-n}) tal que $\tilde{\pi}(1)x_{-n-1} = x_{-n}$. Dessa forma, temos que $\tilde{\pi}(n)x_{-n} = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $x = \tilde{\pi}(1)x_{-1} = \tilde{\pi}(1)\tilde{\pi}(1)x_{-2} = \tilde{\pi}(2)x_{-2} = ... = \tilde{\pi}(n)x_{-n}$.

Além disso, se $m \leq n$, $\tilde{\pi}(n-m)x_{-n} = x_{-m}$, pois

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(n-m)x_{-n} &= \tilde{\pi}(n-m)\tilde{\pi}(1)x_{-n-1} \\
&= \tilde{\pi}(n-m)\tilde{\pi}(m)x_{-m-n} \\
&= \tilde{\pi}(n)x_{-m-n} \\
&= \tilde{\pi}(1)x_{-m-1} \\
&= x_{-m}.
\end{aligned} \tag{2.4-4}$$

Assim, definamos

$$\psi(t) = \begin{cases} \tilde{\pi}(t+n)x_{-n}, \text{ se } t \in [-n, -n+1], \\ \tilde{\pi}(t)x, \text{ se } t \geq 0 \end{cases}$$

Já sabemos que $\psi(0) = x$ e que $\psi(\mathbb{R})$ é limitada, pois $\psi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Portanto, resta mostrar que $\tilde{\pi}(t)\psi(\tau) = \psi(t+\tau)$ para todo $t \geq 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Para isso, consideremos dois casos:

• *Caso 1:* Se $\tau \geq 0$, pelas propriedades de sistemas dinâmicos impulsivos, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(t)\psi(\tau) &= \tilde{\pi}(t)\tilde{\pi}(\tau)x \\
&= \tilde{\pi}(t+\tau)x \\
&= \psi(t+\tau)
\end{aligned}$$

• *Caso 2:* Se $\tau < 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in [-n, -n+1)$. Daí segue que

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(t)\psi(\tau) &= \tilde{\pi}(t)\tilde{\pi}(n+\tau)x_{-n}\\ &= \tilde{\pi}(t+n+\tau)x_{-n}.\end{aligned}$$

Agora temos duas possibilidade: $t+\tau \geq 0$ ou $t+\tau < 0$.

- Se $t+\tau \geq 0$, então

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(t+\tau+n)x_{-n} &= \tilde{\pi}(t+\tau)\tilde{\pi}(n)x_{-n}\\ &= \tilde{\pi}(t+\tau)x = \psi(t+\tau),\end{aligned}$$

como queríamos.

- Se $t+\tau < 0$, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $t+\tau \in [-m, -m+1)$. Note que $m \leq n$, portanto

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(t+\tau+n)x_{-n} &= \tilde{\pi}((t+\tau+m)+(n-m))x_{-n}\\ &= \tilde{\pi}(t+\tau+m)\tilde{\pi}(n-m)x_{-n}\\ &\overset{(2.4\text{-}4)}{=} \tilde{\pi}(t+\tau+m)x_{-m}\\ &= \psi(t+\tau),\end{aligned}$$

donde concluímos que $\psi(.)$ é de fato solução global de $\tilde{\pi}$ por x.

■

Proposição 2.44. *Com a Definição 2.15, se o sistema dinâmico impulsivo (X, π, M, I) possui um atrator global $\mathcal{A}$ e $I(M) \cap M = \varnothing$, então, denotando por $\mathcal{B}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos limitados de X, nós temos*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}(X)} (\tilde{\omega}(B) \setminus M).$$

Demonstração. Seja B um subconjunto limitado de X. Note que, se o sistema dinâmico impulsivo possui um atrator global $\mathcal{A}$, este atrator é também um pré atrator, assim, podemos usar a Proposição 2.30, donde obtemos $\tilde{\omega}(B) \subset \overline{\mathcal{A}}$, assim, $\tilde{\omega}(B) \setminus M \subset \overline{\mathcal{A}} \setminus M = \mathcal{A}$, o que prova a primeira inclusão.

Por outro lado, tomemos $x_0 \in \mathcal{A}$. Pela Definição de atrator global, podemos garantir que $x_0 \notin M$. Utilizando a Proposição anterior, podemos considerar uma solução global ψ de $\tilde{\pi}$ por x_0 e uma sequência arbitrária $t_n \to \infty$. Note que $(\psi(-t_n)) \subset \psi(\mathbb{R})$, daí segue que $\tilde{\pi}(t_n)\psi(-t_n) = x_0 \in \tilde{\omega}(\psi(\mathbb{R})) \setminus M$. Como $\psi(\mathbb{R})$ é limitada, concluímos que $\mathcal{A} \subset \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}(X)} (\tilde{\omega}(B) \setminus M)$. ■

Proposição 2.45. *Com a Definição 2.15, se o Sistema Dinâmico Impulsivo (X, π, M, I) possui um atrator global $\mathcal{A}$, então ele é o minimal de todos os subconjuntos $K \subset X$ com $K = \overline{K} \setminus M$ que $\tilde{\pi}-$atrai todo subconjunto limitado de X.*

Demonstração. Seja $K \subset X$ um subconjunto que cumpre tais condições. Como $\mathcal{A}$ é limitado, K deve atrair $\mathcal{A}$. Além disso, pela invariância positiva de $\mathcal{A}$, temos

$$dist_H(\mathcal{A}, K) = dist_H(\tilde{\pi}(t)\mathcal{A}, K) \to 0.$$

Assim, $dist_H(\mathcal{A}, K) = 0$ e pela Proposição 1.74 segue que $\overline{\mathcal{A}} \subset \overline{K}$, logo $\mathcal{A} \subset K$, comprovando a minimalidade de $\mathcal{A}$. ■

Definição 2.46. Um sistema dinâmico impulsivo (X, π, M, I) é chamado fortemente limitado dissipativo se existe um subconjunto pré-compacto não vazio $K \subset X$ tal que $K \cap M = \varnothing$ e K $\tilde{\pi}-$absorve todo subconjunto limitado de X, isto é, para qualquer limitado $B \subset X$ existe $t_B \geq 0$ tal que $\tilde{\pi}(t)(B) \subset K$ para todo $t \geq t_B$.

Note que se (X, π, M, I) é fortemente limitado dissipativo, então é também limitado dissipativo, uma vez que a definição de absorção implica em atração.

Teorema 2.47. *Seja (X, π, M, I) um sistema dinâmico impulsivo fortemente limitado dissipativo com $\tilde{\pi}-$absorvente K, tal que $I(M) \cap M = \varnothing$, cada ponto de M satisfaz a condição especial forte de tubo e existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$. Então (X, π, M, I) possui um atrator global $\mathcal{A} = \tilde{\omega}(K) \setminus M$.*

Demonstração. Como o sistema dinâmico é fortemente limitado dissipativo, é também limitado dissipativo, assim, pela Proposição 2.30 temos que $\tilde{\omega}(K)$ é não vazio, compacto, e $\tilde{\omega}(K) \subset \overline{K}$. Com a compacidade, temos as hipóteses das Proposições 2.33 e 2.38 e assim, $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ é $\tilde{\pi}-$invariante.

Além disso, se $\tilde{\omega}(K) \cap M = \varnothing$, então $\tilde{\omega}(K) \setminus M \neq \varnothing$. Agora, se $\tilde{\omega}(K) \cap M \neq \varnothing$, o Lema 2.37 garante que $\tilde{\omega}(K) \setminus M \neq \varnothing$, pois se $y \in \tilde{\omega}(K) \cap M$, então $I(y) \in \tilde{\omega}(K) \setminus M$. Assim, em qualquer caso temos $\tilde{\omega}(K) \setminus M \neq \varnothing$. Assim, temos

$$\overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M} \subset \overline{\tilde{\omega}(K)} = \tilde{\omega}(K).$$

Note que $\overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M}$ é compacto, pois é um conjunto fechado contido no compacto $\tilde{\omega}(K)$. Assim, $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ é um subconjunto pré-compacto de X. Pela Proposição 2.40 ainda temos $\tilde{\omega}(K) = \overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M}$, portanto

$$\tilde{\omega}(K) \setminus M = \overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M} \setminus M.$$

Já provamos que $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ é $\tilde{\pi}-$invariante, pré-compacto e $\tilde{\omega}(K) \setminus M = \overline{\tilde{\omega}(K) \setminus M} \setminus M$. Resta mostrar que este conjunto $\tilde{\pi}-$atrai todo subconjunto limitado de X. Para isso, mostraremos primeiro que $\tilde{\omega}(B) \subset \tilde{\omega}(K)$ para todo subconjunto limitado $B \subset X$.

De fato, se $x \in \tilde{\omega}(B)$, então existem sequências $(x_n) \subset B$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \infty$ e $\tilde{\pi}(t_n)x_n \to x$. Como (X, π, M, I) é fortemente limitado dissipativo, sabemos que $\tilde{\pi}(t_B)x_n \in K$ e $\tilde{\pi}(t_n - t_B)\tilde{\pi}(t_B)x_n \to x$ e assim, $x \in \tilde{\omega}(K)$, mostrando que $\tilde{\omega}(B) \subset \tilde{\omega}(K)$.

Assim, como $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ contém $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ para todo $B \subset X$ limitado. A Proposição 2.31 ainda nos garante que $\tilde{\omega}(B)$ $\tilde{\pi}-$atrai B. Assim, pela Proposição 2.40, segue que $\tilde{\omega}(B) \setminus M$ $\tilde{\pi}-$atrai B. Portanto

$$dist_H(\tilde{\pi}(t)B, \tilde{\omega}(K) \setminus M) \leq dist_H(\tilde{\pi}(t)B, \tilde{\omega}(B) \setminus M) \to 0$$

e $\tilde{\omega}(K) \setminus M$ é de fato atrator global para este sistema dinâmico. ■

Exemplo 2.48. Considere o sistema dinâmico impulsivo em $X = \mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y, \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \\ I : M \to I(M), \end{cases}$$

onde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, $I(M) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 9\}$ e a função $I : M \to I(M)$ é dada da seguinte forma: dado $(x, y) \in M$, considere o segmento que conecta os pontos (x, y) e $(3, y)$. O ponto $I(x, y)$ é a intersecção entre este segmento e o conjunto $I(M)$, como podemos ver na figura:

Fonte: E. M. Bonotto et al. / J. Differential Equations 259 (2015) 2602-2625.

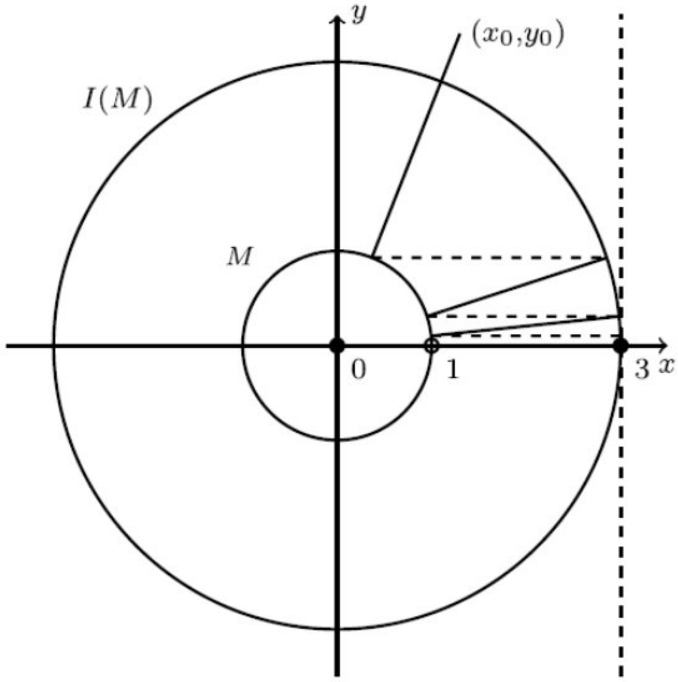


Figura 2.2: Trajetória impulsiva de $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Inicialmente resolveremos a equação diferencial dada. Utilizarenos o método da separação de varíaveis, que pode ser encontrado em [22]. Temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = -y \\
&\Rightarrow \frac{1}{y}dy = -1dt \\
&\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int -1dt \\
&\Rightarrow ln(y) = -t + c_1 \\
&\Rightarrow e^{ln(y)} = e^{-t+c_1} \\
&\Rightarrow y = e^{-t+c_1}.
\end{aligned}
$$

Além disso, utilizando a condição inicial $y(0) = y_0$ obtemos

$$y_0 = y(0) = e^{-0}e^{c_1} = e^{c_1}$$

donde segue que

$$y = y_0 e^{-t}.$$

De maneira análoga obtemos $x = x_0 e^{-t}$, donde segue que o sistema dinâmico sem impulso gerado por esta equação pode ser escrito como $\pi(t)(x_0, y_0) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t})$. A partir disso, consideremos o sistema dinâmico impulsivo (X, π, M, I). Vamos provar que cada ponto de M satisfaz a condição especial forte de tubo. Inicialmente, provemos que existe uma $\lambda-$seção para cada ponto de M. Para isso, consideremos $(x_0, y_0) \in M$, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = e^{-2}\}$ e $\lambda = 1$. Note que L é fechado e que

$$\begin{aligned}
\pi(1)(x_0, y_0) &= (x_0 e^{-1})^2 + (y_0 e^{-1})^2 \\
&= (x_0^2 + y_0^2)e^{-2} \\
&= e^{-2},
\end{aligned}$$

provando assim que todo ponto de M pertence a $F(L, 1)$.

A segunda condição da definição de tubo também pode ser verificada. Tomando $(x_0, y_0) \in M$, vamos mostrar que existe uma vizinhança de tal ponto contida em $F(L, [0, 2])$. De fato, considerando o conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; e^{-2} < x^2 + y^2 < e^2\}$$

temos a vizinhança desejada, uma vez que para todo $(x, y) \in B$ temos

$$\begin{aligned}
&(xe^{-t})^2 + (ye^{-t})^2 = (x^2 + y^2)e^{-2t} \\
&\Rightarrow (x^2 + y^2) = e^{-2+2t},
\end{aligned}$$

donde segue o desejado, uma vez que a função

$$\begin{aligned}
f : [0, 2] &\to [e^{-2}, e^2] \\
t &\mapsto e^{-2+2t}
\end{aligned}$$

é bijetora. Ou seja, para todo $(x, y) \in B$ existe $t \in [0, 2]$ tal que $\pi(t)y \in F(L, [0, 2])$, como queríamos.

Para provar que a terceira condição da definição de tubo é válida, basta tomar $0 \leq \alpha < \beta \leq 2$ e supor, por contradição, que existe $(x, y) \in (F(L, \alpha) \cap F(L, \beta))$. Deste modo, devemos ter

$$\pi(\alpha)(x, y) \in L \text{ e } \pi(\beta)(x, y) \in L,$$

donde segue que

$$\begin{aligned}(xe^{-\alpha})^2 + (ye^{-\alpha})^2 &= (xe^{-\beta})^2 + (ye^{-\beta})^2 \\ \Rightarrow (x^2 + y^2)e^{-2\alpha} &= (x^2 + y^2)e^{-2\beta} \\ \Rightarrow \alpha &= \beta.\end{aligned}$$

Desta contradição segue que $F(L, \alpha) \cap F(L, \beta)) = \varnothing$ sempre que $0 \leq \alpha < \beta \leq 2$.

Provada a existência de um $\lambda - tubo$ sobre cada $(x, y) \in M$, devemos ainda provar que estes pontos satisfazem a condição especial forte de tubo, o que pode ser facilmente verificado. De fato, devemos mostrar que a seção $S = F(L, 1)$ sobre (x, y) é tal que $S = F(L, [0, 2]) \cap M$. Para isso, observe que

$$S = F(L, 1) = M$$

e

$$F(L, [0, 2\lambda]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; e^-2 < x^2 + y^2 < e^2\}$$

logo,

$$F(L, [0, 2]) \cap M = M,$$

concluindo a igualdade desejada.

Além disso, temos

$$F(L, [0, 1]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \pi(t)(x, y) \in L \text{ e } t \in [0, 1]\},$$

isto é,

$$F(L, [0, 1]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = e^{-2+2t}\}$$

donde conluímos que

$$F(L, [0, 1]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; e^{-2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

conjunto esse que claramente não intercepta $I(M)$. Com todas as condições provadas acima, concluímos que todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaz a condição especial forte de tubo com $\lambda-$tubo dado. Para concluir a prova da existência de atrator global para o sistema impulsivo em questão, mostraremos que (X, π, M, I) é fortemente limitado dissipativo, com o conjunto $\tilde{\pi}-$absorvente

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9\} \setminus M.$$

Note que K é um conjunto pré compacto de $\mathbb{R}^2$ e $K \cap M = \varnothing$. Além disso, provaremos que K $\tilde{\pi}-$absorve todo subconjunto limitado de X, isto é, que existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\pi_t(B) \subset K$ para todo $t \geq t_0$. Para isso, tomemos um conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ limitado.

• *Caso 1:* Se $B \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9\} = \varnothing$, então todo ponto (x_0, y_0) de B pertence a alguma circunferência centrada na origem, de raio maior que 3. Mostraremos que existe $t > 0$ tal que $\pi(t)(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 9\} \subset K$. De fato, suponha que $(x_0e^{-t})^2 + (y_0e^{-t})^2 \neq 9$ para todo $t > 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
&(x_0e^{-t})^2 + (y_0e^{-t})^2 \neq 9 \\
&\Rightarrow x_0^2e^{-2t} + y_0^2e^{-2t} \neq 9 \\
&\Rightarrow (x_0^2 + y_0^2)e^{-2t} \neq 9 \\
&\Rightarrow e^{-2t} \neq \frac{9}{(x_0^2 + y_0^2)}
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Note que $\frac{9}{(x_0^2+y_0^2)}$ é estritamente menor que 1, uma vez que $(x_0^2 + y_0^2) > 9$, o que é uma contradição, uma vez que a função $f(t) = e^{-2t}$ com domínio em $\mathbb{R}^+$ assume todos os valores reais no intervalo $(0, 1]$. Logo, existe $t_0 > 0$ tal que $\pi(t_0)(x_0, y_0) \in K$, e além disso, $\pi(t)(x_0, y_0) \in K$ para todo $t \geq t_0$.

• *Caso 2:* Se $B \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9\} \neq \varnothing$, podemos ter pontos de B nos conjuntos K, M e ainda, pontos externos ao círculo de raio 3 centrado na origem. No item anterior, já provamos que existe $t_0 > 0$ que faz com que $\pi(t)(x_0, y_0) \subset K$ para todo $t \geq t_0$ se (x_0, y_0) não pertence ao círculo de raio 3. Agora, se $(x_1, y_1) \in M$, temos $\pi(t)(x_1, y_1) \in K$ para todo $t > 0$, pois $\pi(t)(x_1, y_1) \to (0, 0)$ quando $t \to \infty$ e $\pi(t)(x_1, y_1) \in M$ se, e somente se, $t = 0$. Deste modo, podemos afirmar que $\pi(t)(x_1, y_1) \in K$ para todo $t \geq t_0$. Por fim, se $(x_2, y_2) \in K$, então $\pi(t)(x_2, y_2) \in K$ para todo t e novamente temos $\pi(t)(x_2, y_2) \in K$ para todo $t \geq t_0$.

Provamos que K $\tilde{\pi}-$ absorve todo subconjunto limitado de X, o que nos garante que (X, π, M, I) é fortemente limitado dissipativo com o conjunto $\tilde{\pi}-$absorvente K. Assim, pelo Teorema 2.47, (X, π, M, I) possui atrator global $\mathcal{A} = \tilde{\omega}(K) \setminus M$.

Note que o conjunto $\tilde{\omega}(K)$ é dado por

$$\tilde{\omega}(K) = \{(0, 0)\} \cup \{(x, 0); x \in [1, 3]\},$$

assim

$$\mathcal{A} = \{(0, 0)\} \cup \{(x, 0); x \in (1, 3]\}.$$

Exemplo 2.49. Considere o sistema dinâmico gerado por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponhamos que a solução deste sistema esteja definida em toda a reta real, originando o sistema dinâmico $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \pi)$.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto impulsivo e $I : M \to \mathbb{R}^n$ a função impulsiva. Consideremos M e I de modo que $I(M) \cap M = \varnothing$, todo ponto de M satisfaz a condição especial forte de tubo, existe $\xi > 0$ tal que $\phi(x) \geq \xi$ para todo $x \in M$, são válidas as condições da hipótese de sistema dinâmico impulsivo e todas as trajetórias impulsivas existem (para todo $t \geq 0$).

Então, consideremos o sistema dinâmico impulsivo associado:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \\ I : M \to \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.4-5}$$

Agora, seja $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ uma função satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\nabla V(x).f(x) \leq \alpha_1 - \alpha_2 V(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $V(I(x)) \leq \mu$ para todo $x \in M$,

(iii) $V^{-1}((-\infty, \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}])$ é limitado,

com $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e $\mu > 0$.

A partir disso, provaremos que o sistema dinâmico dado é fortemente limitado dissipativo (e, consequentemente, possui atrator global).

Lema 2.50. *Se $z \in I(M)$, então $V(\tilde{\pi}(t)z) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Seja $z \in I(M)$ e $0 \leq t \leq \phi(z)$. (Se $\phi(z) = \infty$ tomamos $0 \leq t < \phi(z)$). Então, pelo item *(i)*, temos

$$\frac{d}{dt}V(\pi(t)z) = \nabla V(\pi(t)z).f(\pi(t)z) \leq \alpha_1 - \alpha_2 V(\pi(t)z).$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}V(\pi(t)z) \leq \alpha_1 - \alpha_2 V(\pi(t)z) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}V(\pi(t)z) + \alpha_2 V(\pi(t)z) \leq \alpha_1. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{\alpha_2 t}$ obtemos

$$\begin{aligned} &e^{\alpha_2 t}\frac{d}{dt}V(\pi(t)z) + e^{\alpha_2 t}\alpha_2 V(\pi(t)z) \leq e^{\alpha_2 t}\alpha_1 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}(V(\pi(t)z).e^{\alpha_2 t}) \leq e^{\alpha_2 t}\alpha_1. \end{aligned}$$

A partir disso, integrando os dois membros da equação, temos

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{d}{ds}(V(\pi(s)z).e^{\alpha_2 s})ds \leq \int_0^t e^{\alpha_2 s}\alpha_1 ds \\ &\Rightarrow (V(\pi(t)z).e^{\alpha_2 t}) - V(z) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2}e^{\alpha_2 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2}e^{\alpha_2 t}. \end{aligned}$$

Multiplicando a igualdade por $e^{-\alpha_2 t}$ obtemos

$$\begin{aligned}
&e^{-\alpha_2 t}((V(\pi(t)z).e^{\alpha_2 t}) - V(z)) \leq e^{-\alpha_2 t}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}e^{\alpha_2 t}\right)\\
&\Rightarrow V(\pi(t)z) \leq V(z)e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\\
&\Rightarrow V(\pi(t)z) \leq V(z) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Por fim, pela a condição sobre a função V nos garante que $V(z) \leq \mu$, donde concluímos que

$$V(\pi(t)z) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

para todo $0 \leq t \leq \phi(z)$.

Assim, para $0 \leq t < \phi(z)$ temos $V(\tilde{\pi}(t)z) = V(\pi(t)z) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Se $\phi(z) = \infty$, a demonstração está concluída. Caso contrário, $z_1^+ = \tilde{\pi}(\phi(z))z \in I(M)$, assim, podemos repetir o processo desta demonstração, obtendo $V(\tilde{\pi}(t)z_1^+) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Indutivamente, obtemos o mesmo para todo z_n^+, obtendo o resultado desejado. ■

Teorema 2.51. *O sistema 2.4-5 é fortemente limitado dissipativo.*

Demonstração. Seja $K = V^{-1}((-\infty, \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}]) \setminus M$. Então K é um conjunto precompacto e $K \cap M = \varnothing$. Vamos mostrar ainda que K $\tilde{\pi}-$absorve subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$. Para isso, é suficiente mostrar que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\delta_x > 0$ e $T = T(x, \delta_x) \geq 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(t)y \in K \text{ para todo } y \in B_{\delta_x}(x) \text{ e } t \geq T.$$

Vamos considerar alguns casos:

- **Caso 1:** $x \notin M$ e $\phi(x) = \infty$.

Inicialmente, tomemos uma bola B centrada em x e $\beta = \max_{y\in\overline{B}} V(y)$. Seja $k > \max\{0, -\alpha_2^{-1}ln\left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right)\}$ dado. Pela continuidade de ϕ em $X \setminus M$, existe $\delta = \delta(x,k) > 0$ tal que $\phi(y) > k$ para todo $y \in B_\delta(x) \subset \overline{B}$.

Agora, podemos reescrever a bola $B_\delta(x)$ como $B_1 \cup B_2$, onde $B_1 = \{y \in B_\delta(x); \phi(y) = \infty\}$ e $B_2 = \{y \in B_\delta(x); k < \phi(y) < \infty$. Utilizando os argumentos da demonstração do Lema 2.50 em B_1, temos

$$V(\pi(t)y) \leq e^{-\alpha_2 t}V(y) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

e como $\beta = \max_{y\in\overline{B}} V(y)$ temos que $\beta \geq V(y)$ para todo $y \in \overline{B}$, consequentemente

$$V(\pi(t)y) \leq e^{-\alpha_2 t}\beta + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Desta forma, se $T := \max\{0, -\alpha_2^{-1} ln\left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right)\}$, então

$$\begin{aligned} V(\pi(t)y) \leq e^{-\alpha_2 t}\beta + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &\leq e^{-\alpha_2\left(-\frac{1}{\alpha_2}\right)ln\left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right)}\beta + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ &= \left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right)\beta + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ &\leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \end{aligned}$$

para todo $t \geq T$ e $y \in B_1$.

Em B_2, temos

$$V(\pi(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

para todo $k \leq t < \phi(y)$ e $y \in B_2$ (mostrado no caso anterior). No caso de $t = \phi(y)$ definimos $z_1^+ = \tilde{\pi}(\phi(y))y$. Note que $z_1^+ \in I(M)$ e assim, podemos proceder como na demonstração do Lema 2.50, garantindo que $V(\tilde{\pi}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ para todo $t \geq \phi(y)$ e $y \in B_\delta(x)$.

• **Caso 2:** $x \notin M$ e $\phi(x) < \infty$.

Pela continuidade de ϕ, existe $\delta_x > 0$ tal que $|\phi(y) - \phi(x)| < 1$ se $y \in B_{\delta_x}(x)$. Assim, podemos afirmar que existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $\phi(x) - 1 < t < \phi(x) + 1$ e $\pi(t)y \in M$. Pela definição de órbita impulsiva, temos $y_1^+ = \tilde{\pi}(\phi(y))y \in I(M)$ e pelo Lema 2.50 segue que $V(\tilde{\pi}(t)y_1^+) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, ou seja, a órbita impulsiva de $y_1^+ \subset K$. Como a órbita de y_1^+ está contida na órbita de y, segue que $\tilde{\pi}(t)y \subset K$ para todo $t \geq \phi(y)$. Tomando $T \geq \sup\{\phi(y); y \in B_{\delta_x}(x)\}$ temos $\tilde{\pi}(t)y \subset K$ para todo $t \geq T$ e $y \in B_{\delta_x}(x)$.

• **Caso 3:** $x \in M$ e $\phi(x) = \infty$.

Por hipótese, $x \in M$ satisfaz a condição especial forte de tubo com o $\lambda-$tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ e a seção S sobre x. Além disso, a segunda condição da definição de tubo nos garante que $F(L, [0, 2\lambda])$ contém uma vizinhança de x, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset F(L, [0, 2\lambda])$.

Sejam

$$H_1 = F(L, (\lambda, 2\lambda]) \cap B_\varepsilon(x)$$

e

$$H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B_\varepsilon(x).$$

Vamos provar que $\phi(y) \leq \lambda$ para todo $y \in H_1$. De fato, se $y \in H_1$, então $\pi(\mu)y \in L$ para algum $\mu \in (\lambda, 2\lambda]$, logo

$$\pi(\lambda)(\pi(\mu - \lambda)y) = \pi(\mu)y \in L$$

donde segue $\pi(\mu - \lambda)y \in F(L, \lambda)$. Da condição especial forte de tubo temos $F(L, \lambda) \subset M$, consequentemente $\pi(\mu - \lambda)y \in M$, donde conluímos que

$$\phi(y) \leq \mu - \lambda \leq \lambda.$$

Como $\phi(y) < \infty$, existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $\pi(t)y \in M$ e nessa caso a conclusão segue assim como no caso 2.

Por outro lado, como $\phi(x) = \infty$, para qualquer $k > 0$ existe $0 < \delta = \delta(x, k, \varepsilon) < \varepsilon$ tal que $\phi(y) > k$ para todo $y \in B_\delta(x) \cap H_2$. De fato, assuma por contradição que existe $k_0 > 0$ e uma sequência $x_n \in H_2$ tal que $x_n \to x$ e $\phi(x_n) \leq k_0$. Então $\pi(\lambda_n)x_n \in L$ para algum $\lambda_n \in [0, \lambda]$. Tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que $\lambda_n \to \lambda$. De fato, (λ_n) possui uma subsequência (que denotaremos por (λ_n)) que converge para $s \in [0, \lambda]$. Pela continuidade de π obtemos

$$\pi(s)x_n \in L.$$

Além disso, como $x \in M$, temos $x \in F(L, \lambda)$, isto é,

$$\pi(\lambda)x \in L.$$

Das duas afirmações segue que $x \in (F(L, \lambda) \cap F(L, s))$, donde conluímos, pela terceira condição da definição de tubo, que $\lambda = s$.

Provaremos ainda que $\phi(x_n) \to 0$. De fato, suponha, por contradição que $\phi(x_n) \to s \neq 0$. Nesse caso, como $\pi(\phi(x_n))x_n \in M$ que é fechado, deveríamos ter $\pi(s)x \in M$, com $s \neq 0$, o que é uma contradição com o fato que $\phi(x) = \infty$. Desta contradição segue que $\phi(x_n) \to 0$. Assim, para n suficientemente grande temos

$$\phi(x_n) < \lambda \text{ e } \pi(\lambda + \phi(x_n))x_n \subset L,$$

logo,

$$\pi(\phi(x_n))x_n \in F(L, [0, 2\lambda]).$$

Como também temos $\pi(\phi(x_n))x_n \in M$, segue que

$$\pi(\phi(x_n))x_n \in F(L, [0, 2\lambda]) \cap M = S = F(L, \lambda).$$

Note que, desta forma, temos $\pi(\lambda_n)x_n \in L$ e $\pi(\lambda + \phi(x_n)) \in L$, ou seja,

$$x_n \in (F(L, \lambda_n)) \cap (F(L, (\lambda + \phi(x_n))))$$

e portanto, a terceira condição da definição de tubo nos garante que

$$\lambda_n = \phi(x_n) + \lambda$$

o que contradiz a hipótese que $\lambda_n \in [0, \lambda]$.

Dessa forma, assim como no caso 1 podemos escolher $\delta > 0$ e $T > 0$ tal que

$$V(\tilde{\pi}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

para todo $y \in B_\delta(x) \cap H_2$ e $t \geq T$. Assim, temos

$$V(\tilde{\pi}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

para todo $y \in B_\delta(x)$ e $t \geq \max\{\lambda, T\}$.

• **Caso 4:** $x \in M$ e $\phi(x) < \infty$.

Nesse caso, basta utilizar a semicontinuidade superior de ϕ em x (Teorema 2.23). De fato, dado $\varepsilon = 1$, a semicontinuidade superior nos garante que existe $\delta > 0$ tal que

$$\phi(y) \leq \phi(x) + 1$$

para todo $y \in B_\delta(x)$, donde concluímos o desejado, assim como no caso 2.

■

Corolário 2.52. *O sistema 2.4-5 possui atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração. De fato, são cumpridas todas as hipóteses do Teorema 2.47, donde segue o resultado desejado. ■

REFERÊNCIAS

[1] ABUABARA, Teófilo; LESMES C., Jaime. **Elementos de analisis funcional**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2011.

[2] BATHIA, Nam Parshad; SZEGÖ, Giorgio P. **Dynamical Systems: stability theory and applications**. Lecture Notes in Mathematics, 35. Nova York: Springer, 1967.

[3] BATHIA, Nam Parshad; SZEGÓ, Giorgio P. **Stability Theory of Dynamical Systems**. Nova York: Springer, 1970.

[4] CARVALHO, Alexandre N. **Sistemas dinâmicos não-lineares**. 2012. 333 f. Notas de aula - ICMC-USP São Carlos.

[5] BONOTTO, Everaldo de Mello. **Sistemas semidinâmicos impulsivos**. 2005. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo.

[6] BONOTTO, Everaldo de Mello; DEMUNER, D.P.; JIMENEZ, M. Z. **Convergence for non-autonomos semidynamical systems with impulses.** Journal of Differential Equations. v. 266, p. 227-256, jan. 2019.

[7] BONOTTO, Everaldo de Mello; BORTOLAN, M. C.; CARVALHO, A. N.; CZAJA, R. **Global Attractors for impulsive Dynamical Systems - A Precompact Approach**. Journal of Differential Equations. v. 259, p. 2602-2625, out. 2015.

[8] CIESIELSKI, K. **On semicontinuity in impulsive dynamical systems.** Bull. Polish Acad. Sci. Math. 52, 2004, p. 71-80.

[9] FERREIRA, Jaqueline C. **Teoria de estabilidade em sistemas semidinâmicos impulsivos**. 2011. 119 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo.

[10] HOCKING, John G.; YOUNG, Gail S. **Topology**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1961.

[11] JIMENEZ, Manuel Francisco Zuloeta. **Propriedades recursivas em sistemas semidinâmicos impulsivos**. 2014. 108 f. Tese (Doutorado em Matemática). Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo.

[12] KAUL, S. K. **On impulsive dynamical systems.** J. Math. Anal. Appl. 150 (1), 1990, p. 120-128.

[13] KAUL, S. K. **Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems.** J. Applied Math. and Stochatic Analysis t(4), 1994, p. 509-523.

[14] KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. Nova York :John Wiley & Sons, 1978.

[15] LIMA, Elaine Andressa Tavares de. **Conjuntos relativamente compactos em espaços de Lebesgue com expoente variável**. 2019. 104 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Minas Gerais.

[16] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[17] MUNKRES, J. R. **Topology**. New Jersey: Prentice Hall, 1975.

[18] NOLASCO, Victor Hugo. **Sistemas semidinâmicos impulsivos**. 2013. 125 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo.

[19] PACIFICO, Tiago Alves. **Sistemas dinâmicos dispersivos e paralelizáveis**. 2017. 101 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná.

[20] ROZKO, V. **A class of almost periodic motions in pulsed systems.** Diff. Uravn. (8), 1972, p. 2012-2020.

[21] ROZKO, V. **Stability in terms of Lyapunov discontinuous dynamic systems** Diff. Uravn. (11), 1975, p. 1005-1012.

[22] ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Makron Books. 2001.