UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMADE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

Rafael Borges Borri

L-Equivalência e Controlabilidade de Sistemas de Controle com Drift Linear em Grupos de Lie de Dimensão Baixa.

Maringá, 24 de Fevereiro de 2021

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - código de financiamento 001

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMADE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rafael Borges Borri

L-Equivalência e Controlabilidade de Sistemas de Controle com Drift Linear em Grupos de Lie de Dimensão Baixa.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências exatas da Universidade Estadual de Maringá como requisito para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Area de concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Alexandre José Santana
Co-orientador: Prof. Dr. Marcos André Verdi

Maringá, 24 de Fevereiro de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Borri, Rafael Borges
B737L $\mathcal{L}$-Equivalência e controlabilidade de sistemas de controle com drift linear em grupos de Lie de dimensão baixa / Rafael Borges Borri. -- Maringá, 2021.
180 f. : il. figs.

Orientador: Prof°. Dr°. Alexandre José Santana.
Co-orientador: Prof°. Dr°. Marcos André Verdi.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2021.

1. Sistemas de controle. 2. Grupos de Lie. 3. Controlabilidade. 4. Control system. 5. Lie groups. 6. Controllability. I. Santana, Alexandre José, orient. II. Verdi, Marcos André, orient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. IV. Título.

CDD 22.ed. 515.352

RAFAEL BORGES BORRI

L-EQUIVALÊNCIA E CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE COM DRIFT LINEAR EM GRUPOS DE LIE DE DIMENSÃO BAIXA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Alexandre José Santana - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Josiney Alves de Souza - UEM
Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi - UNESP
Prof. Dr. Hélio Vinicius Moreno Tozatti - UTFPR/Campo Mourão
Prof. Dr. João Augusto Navarro Cossich - UTFPR/Medianeira

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2021.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet.

À Matemática, rainha de todas as ciências.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente minha família, meus pais Orestes e Gilce e meus irmãos Rodolfo e Juliana por todos os anos de carinho.

Também deixo meus agradecimentos a todos os professores e funcionários do DMA e PMA por todo o suporte durante todos esses anos de estudo.

Agradeço aos Professores Doutores Josiney Alves de Souza, Claudio Agnaldo Buzzi, Hélio Vinicius Tozatti e João Augusto Navarro Cossich por todas as correções e conselhos fornecidos.

Agradeço especialmente meu orientador, o Professor Doutor Alexandre José Santana e ao meu co-orientador, o Professor Doutor Marcos André Verdi por toda a ajuda e paciência nessa caminhada.

Por fim, minha gratidão a CAPES pelo apoio financeiro.

A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências. (Jacques Hadarmard)

Resumo

Nesta tese abordaremos dois assuntos. O primeiro é uma descrição das classes de L-equivalência para sistemas de controle lineares sobre grupos de Lie conexos e simplesmente conexos de dimensão 2. O segundo assunto é a controlabilidade de sistemas de controles lineares em grupos de Lie G conexos, simplesmente conexos, solúveis e não nilpotentes de dimensão quatro.

Palavaras Chaves: Sistema de Controle, Grupos De Lie, Controlabilidade.

Abstract

In this thesis we will study two issues. The first is a description of the L-equivalence classes for linear control systems over connected and simply connected Lie groups of dimension 2. The second subject is the controllability of linear control systems in connected, simply connected, solvable and non-nilpotent Lie groups G of dimension four.

Keywords: Control System, Lie Groups, Controllability

Sumário

Introdução

O objetivo desta tese é estudarmos vários aspectos sobre equivalência e controlabilidade de sistemas lineares de controle. Mas de certa forma podemos dizer que a intenção é colaborarmos com o estudo de controlabilidade destes sistemas. Nesta direção o estudo de equivalência de sistemas é para, em dado sistema, procurar um equivalente onde seja mais fácil estudarmos controlabilidade e através uma equivalência concluir resultados para o sistema original. Na primeira parte da tese trataremos do estudo de equivalências e na segunda parte trataremos de controlabilidade. Então nas duas partes da tese o conceito central é o de sistemas de controles lineares

$$\frac{dg}{dt} = \mathcal{X}(g(t)) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t) V_i(g(t))$$

em certos grupos de Lie G de dimensão no máximo quatro. Nesta equação, $\mathcal{X}$ descreve um campo de vetores linear do grupo G, $u_i \in \mathbb{R}$ e V_i são campos de vetores invariantes à esquerda (e portanto um vetor da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Lie G). Se o grupo G for de dimensão 4, a quantidade de u_i e V_i na equação acima variará de 1 a 3. Ou seja, estudaremos três tipos de sistemas destes, com um controle , com dois e com três controles na equação. Estes tipos de sistemas, chamados de sistemas lineares em grupos de Lie ou sistemas lineares de controle em grupos de Lie são extensões naturais dos sistemas lineares de controle em espaços euclidianos:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t) B_i,$$

onde $A \in M_{(n \times n, \mathbb{R})}$, $B_i \in \mathbb{R}^n)$, $u_i \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Grande parte da teoria sobre sistemas de controle está conectada com a teoria de sistemas dinâmicos, por exemplo no sistema acima notamos que ele é estruturado sobre o sistema dinâmico $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$.

Segundo Agrachev e Sachkov no livro "Control theory from the geometric viewpoint", o mundo físico determinístico e clássico é descrito por sistemas dinâmicos suaves: o futuro em tais sistemas é completamente determinado pelas condições iniciais. No caso de sistemas de controle, nós temos a possibilidade de mudar livremente certos parâmetros do sistema dinâmico em cada instante de tempo, ou seja, nós tentamos controlar todos estes sistemas dinâmicos (todos, pois para cada escolha da sequência $u_1, \ldots, u_k$ nós temos um sistema dinâmico).

Com relação à primeira parte, procuramos aprimorar o estudo iniciado na tese [11] sobre L-equivalência de sistemas lineares, para grupos de Lie conexos e simplesmente conexos de dimensão 2.

Esta equivalência é construída da seguinte forma: dado um sistema linear

$$\Sigma : \frac{dg}{dt} = \mathcal{X}(g(t)) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t)V_i(g(t))$$

sobre um grupo de Lie G, obtemos um sistema invariante, chamado sistema aumentado, no produto semidireto $\widehat{G} = G \times_{\mathcal{X}} \mathbb{R}$. Este sistema aumentado é dado por

$$\frac{dg}{dt} = \widehat{\mathcal{X}}(g) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t)\widehat{V}_i(g(t)),$$

onde $\widehat{\mathcal{X}}$ e $\widehat{V}_j$ são os campos invariantes sobre $\widehat{G}$ definidos na identidade como $\widehat{\mathcal{X}} = (1,0)$ e $\widehat{V}_j = (V_j, 0)$ (ver [7]). Por outro lado, no artigo [6] os autores definiram uma relação de equivalência entre sistemas de controle invariantes sobre grupos de Lie bastante semelhante à clássica definição de *state-feedback* equivalência, mas na qual a componente de *feedback* depende somente do parâmetro de controle, isto é, ela é descrita por um difeomorfismo da forma

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G \times \mathbb{R}^m & \to & \tilde{G} \times \mathbb{R}^m \\ & (g,u) & \mapsto & (\phi(g), \psi(u)) \end{array}.$$

Esta última equivalência é chamada de *detached feedback equivalência*, abreviada aqui por F-equivalência. Por fim, dizemos que dois sistemas lineares Σ_1 e Σ_2 são L-equivalentes se os respectivos sistemas aumentados são F-equivalentes. Neste trabalho, damos uma descrição das classes de L-equivalência de sistemas sobre grupos de Lie conexos e simplesmente conexos de dimensão 2.

Sobre a segunda parte o principal objetivo é estudarmos a controlabilidade dos sistemas acima onde os espaços estados são grupos de Lie de dimensão quatro, conexos, simplesmente conexos, solúveis e não nilpotentes. Denote por $\phi(t, u^l, g)$ a solução do sistema acima no valor inicial $g \in G$ com controle $u^l = (u_1^l, \ldots, u_k^l)$. Intuitivamente, dizemos que um sistema de controle é controlável se dados dois pontos quaisquer do espaço estado $g_1, g_2 \in G$, existem uma quantidade q de tempos positivos $t_1, \ldots, t_q$, e de controles $u^1, \ldots, u^q$ tais que estas q concatenações de soluções levam g_1 em g_2, i.e., a partir de g_1 podemos atingir g_2 via estas concatenações: $\phi(t_q, u^q, \phi(t_{q-1}, u^{q-1}, \ldots, \phi(t_1, u^1, g_1))) = g_2$, em outras palavras o conjunto dos pontos atingíveis a partir de g_1, usando estas concatenações, temos todo espaço estado G. Neste contexto o que se procura são condições sobre os campos do sistema que garantam controlabilidade, ou ainda condições necessárias e ou suficientes para a controlabilidade. Neste caso, para um sistema de controle em geral o que temos na literatura são resultados parciais, ou resultados mais fortes em casos especiais. Em resumo na segunda metade do nosso trabalho tratamos do estudo de controlabilidade de um dado sistema linear de controle (em grupos de Lie de dimensão quatro, conexos, simplesmente conexos, solúveis e não nilpotentes). Para isso nós procuramos um sistema equivalente que é mais fácil de estudar e depois projetamos o sistema em dimensões mais baixas para podermos usar resultados de Ayala e Da Silva que estudaram controlabilidade destes sistemas em grupos de Lie tridimensionais. Nós usamos uma classificação dos grupos de Lie solúveis de dimensão quatro que distribuem nossos casos em 16 tipos de grupos de Lie. Desta forma fazemos um estudo caso a caso.

Sobre a estrutura desta tese, no primeiro capítulo fazemos uma revisão dos conceitos e resultados mais importantes para a compreensão e desenvolvimento deste trabalho. No segundo capítulo tratamos do estudo de equivalências de sistemas de controle lineares em grupos de Lie de baixa dimensão.

No capítulo três estudamos controlabilidade e outros aspectos importantes para controlabilidade de sistemas de controle linear em grupos de Lie de dimensão quatro, conexos, simplesmente conexos, solúveis e não nilpotentes. No final trazemos alguns apêndices que complementam várias seções da tese.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo apresentaremos os conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento do trabalho. A exposição será resumida, apresentando os resultados apenas na medida que são necessários para o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Conceitos Básicos

Nessa seção apresentaremos os elementos básicos sobre grupos e álgebras de Lie. O objetivo principal é fixar a notação, que pode ser distinta de acordo com a referência bibliográfica consultada.

Dada uma variedade diferenciável M, denotaremos por T_xM o espaço tangente à M e $x \in M$ e por TM o fibrado tangente de M. Um campo de vetores em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $X : M \to TM$ que satisfaz $X(x) \in T_xM$ para todo $x \in M$. Se M e N são variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então a diferencial de f no ponto $x \in M$ será denotada por df_x. Dado um campo de vetores X, a solução maximal da equação da equação diferencial ordinária em M

$$\frac{dx}{dt} = X(x),$$

satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$ será denotada por $t \mapsto X_t(x_0)$, a menos que fixemos explicitamente outra notação. O fluxo de X é entendido como o conjunto dos difeomorfismos locais X_t, $t \in \mathbb{R}$.

A estrutura fundamental neste trabalho é o grupo de Lie.

Definição 1.1.1. *Um* **grupo de Lie** *é uma variedade diferenciável G munida de uma aplicação produto diferenciável*

$$* : (g, h) \in G \times G \mapsto g * h \in G,$$

de modo que com a aplicação produto G se torna-se grupo.

Neste trabalho, tanto G quanto $*$ são tomados de classe C^∞. Quando não houver ambiguidade, o produto $g*h$ será denotado simplesmente pela justaposição gh. Se G e H são grupos de Lie, então um homomorfismo (de grupos) diferenciável $\phi : G \to H$ é chamado de **homomorfismo de grupos de Lie**. Como só iremos trabalhar com homomorfismos diferenciáveis, vamos nos referir a estes simplesmente por homomorfismos. Aplicaremos a mesma terminologia ao isomorfismos e automorfismos. Dado $g \in G$

a **translação à direita** e a **translação à esquerda** por g, $R_g : G \to G$ e $L_g : G \to G$, são definidas, respectivamente, por $R_g(h) = hg$ e $L_g(h) = gh$. A **aplicação inversa** $i : G \to G$ é definida como $i(h) = h^{-1}$, enquanto que a **conjugação** por g, $C_g : G \to G$, é definida por $C_g(h) = ghg^{-1}$.

Uma estrutura algébrica intimamente ligada com um grupo de Lie é a álgebra de Lie.

Definição 1.1.2. *Uma* **álgebra de Lie** *é um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *munido com uma operação, chamada de colchete ou comutador*

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{1.1}$$

satisfazendo as propriedades abaixo:

1. *É bilinear, isto é*
$$[\alpha X + Y, Z] = \alpha[X, Z] + [Y, Z] \tag{1.2}$$
e
$$[X, \alpha Y + Z] = \alpha[X, Y] + [X, Z] \tag{1.3}$$
para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ *e para quaisquer* $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. *É antissimétrico, isto é,* $[X, Y] = [-Y, X]$, *para quaisquer* $X, Y \in \mathfrak{g}$.

3. *Satisfaz a identidade de Jacobi, isto é*
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \tag{1.4}$$
para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.1.3. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *álgebras de Lie. Uma transformação linear* $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *é chamada:*

1. *Homomorfismo se* $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y]$.

2. *Isomorfismo se for um homomorfismo inversível.*

3. *Automorfismo se é um isomorfismo e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

Dada uma base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{g}$, o colchete entre dois elementos desta base pode ser escrito como uma combinação linear

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k.$$

Os coeficientes c_{ij}^k são chamados **constantes de estrutura** da álgebra em relação à base. Estas constantes determinam a álgebra, a menos de isomorfismo.

Vejamos agora como associar uma álgebra de Lie à um grupo de Lie. Começamos relembrando que dados dois campos de vetores X e Y sobre uma variedade qualquer, o **colchete de Lie** entre eles é definido por

$$[X, Y](x) = \frac{d}{dt}\left(d(X_{-t})_{X_t(x)}(Y(X_t(x)))\right)_{|t=0}.$$

O colchete de Lie possui as seguintes propriedades (ver[20],):

Proposição 1.1.4. *Sejam* X *e* Y *campos diferenciáveis em uma variedade diferenciável* M *e* $f, g : M \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis. Temos que :*

- *$[X,Y]$ é um campo vetorial diferenciável em M.*

- *O colchete de Lie é bilinear.*

- *$[fX,gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.*

- *$[X,Y] = -[Y,X]$.*

- *$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]$.*

Aqui, Xg e Yf em um ponto x descrevem, respectivamente, a derivada direcional de g na direção X e a a derivada direcional de f na direção Y, isto é, $Xg(x) = dg_x(X(x))$ e $Yf = df_x(Y(x))$.

Desta forma, o colchete de Lie satisfaz as condições impostas sobre a operação colchete de uma álgebra de Lie. Considerando agora um grupo de Lie G, diremos que um campo de vetores X em G é **invariante à direita** se, para todo $g,h \in G$, tem-se

$$d(R_g)_h(X(h)).$$

Analogamente, X é **invariante à esquerda** se, para todo $g,h \in G$, tem-se

$$d(L_g)_h X(h) = X(gh).$$

Pode-se mostrar que campos invariantes à direita ou à esquerda são completos, isto é, o domínio das trajetórias X_t se prolongam a $(-\infty,+\infty)$ (ver [19], Proposição 5.7). Além disso, tanto o conjunto dos campos invariantes à direita quanto o conjunto dos campos invariantes à direita são espaços vetoriais fechados para o colchete de Lie (ver [19], Lema 5.3). Desta forma, tais espaços são álgebras de Lie, denotadas por Inv^r e Inv^l. Além disso, cada elemento do espaço tangente T_eG, onde e é o elemento neutro de G, determina um único campo invariante à direita e um único campo invariante à esquerda. Dado $X \in T_eG$, denotemos por X^r o único campo invariante à direita tal que $X^r(e) = X$. Isto define uma bijeção entre o conjunto dos campos invariantes à direita e T_eG, que por sua vez induz um colchete em T_eG dado por

$$[X,Y]_r = [X^r, Y^r](e),$$

que torna T_eG um álgebra de Lie isomorfa à álgebra dos campos invariantes à direita. Considerações análogas podem ser feitas para campos invariantes à esquerda. Temos assim a seguinte definição.

Definição 1.1.5. *A* **álgebra de Lie** *de G, denotada por $\mathfrak{g}$ ou $\mathrm{Lie}(G)$, é qualquer uma das álgebras de Lie isomorfas Inv^r, Inv^l ou T_eG.*

Um objeto de grande importância para transferir ao grupo de Lie G propriedades de sua álgebra de Lie é a aplicação exponencial, que é definida da seguinte maneira.

Definição 1.1.6. *Seja $X \in T_eG$. Definimos*

$$\exp X = (X^r)_{t=1}(e) = (X^l)_{t=1}(e).$$

Isso determina uma aplicação $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

Exemplo 1.1.7. *O conjunto* $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ *de todas as matrizes* $n\times n$ *inversíveis é um grupo de Lie. Aqui o produto é o produto usual de matrizes. A álgebra de Lie correspondente é o conjunto* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *de todas as matrizes* $n\times n$*, com colchete dado por*

$$[X,Y]=XY-YX.$$

A aplicação exponencial é dada pela exponencial usual de matrizes. Tomando subgrupos fechados de $\mathrm{G}(n,\mathbb{R})$ *obtemos uma grande variedades de exemplos de grupos de Lie.*

Usaremos repetidamente o conceito de derivação de uma álgebra de Lie.

Definição 1.1.8. *Uma* **derivação** *de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é uma transformação linear* $D:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ *satisfazendo*

$$D([X,Y])=[D(X),Y]+[X,D(Y)].$$

O conjunto de todas as derivações de $\mathfrak{g}$ será denotado por $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. A identidade de Jacobi garante que para cada X em a aplicação $\mathrm{ad}(X):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ dada por

$$\mathrm{ad}(X)(Y)=[X,Y]$$

é uma derivação de $\mathfrak{g}$.

Observação 1.1.9. *A aplicação* $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $X\mapsto\mathrm{ad}(X)$ *é chamada* **representação adjunta** *de* $\mathfrak{g}$*. Aqui* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *indica o conjunto de todas as transformações lineares de* $\mathfrak{g}$ *em* $\mathfrak{g}$*.*

Dada uma derivação D vamos descrever uma decomposição da álgebra de Lie induzida por D. Para isto, tomemos $\bar{\mathfrak{g}}$ a complexificação de $\mathfrak{g}$ e $\bar{D}=D+iD$ a extensão de D para $\bar{\mathfrak{g}}$ (ver [2], páginas 2-3). Definimos os autoespaços reais generalizados de D como

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{X\in\mathfrak{g}:(D-\alpha I)^n(X)=0\text{ para algum }n\geq 1\}$$

para $\alpha\in\mathbb{R}$, e

$$\mathfrak{g}_\alpha=\mathrm{span}\{\mathrm{Re}(v),\mathrm{Im}(v):v\in\bar{\mathfrak{g}}_\alpha\}$$

para $\alpha\in\mathbb{C}$, onde

$$\bar{\mathfrak{g}}_\alpha=\{v\in\bar{\mathfrak{g}}:(D-\alpha I)^n(V)=0\text{ para algum }n\geq 1\}.$$

Tomando

$$\mathfrak{g}^+=\bigoplus_{\alpha:\mathrm{Re}(\alpha)>0}\mathfrak{g}_\alpha,\quad \mathfrak{g}^0=\bigoplus_{\alpha:\mathrm{Re}(\alpha)=0}\mathfrak{g}_\alpha\quad\text{e }\mathfrak{g}^-=\bigoplus_{\alpha:\mathrm{Re}(\alpha)<0}\mathfrak{g}_\alpha,$$

podemos decompor $\mathfrak{g}$ como

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^+\oplus\mathfrak{g}^0\oplus\mathfrak{g}^-.$$

Estas subálgebras são invariantes sob a derivação D. Denotaremos por G^+, G^0, G^-, $G^{0,+}$ e $G^{0,-}$ os subgrupos de Lie conexos de G com álgebras de Lie de $\mathfrak{g}^+$, $\mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{g}^-$, $\mathfrak{g}^+\oplus\mathfrak{g}^0$ e $\mathfrak{g}^-\oplus\mathfrak{g}^-$, respectivamente.

O conceito de produto semidireto entre grupos e entre álgebras de Lie também é de grande importância neste trabalho. Sejam G e H grupos de Lie e denote por $\mathrm{Aut}(H)$ o grupo dos automorfismos de H. Seja ainda $\phi : G \to Aut(H)$ um homomorfismo. O **produto semidireto** de G e H, denotado por $G \times_\phi H$, é dado pela variedade diferenciável $G \times H$ munida do produto

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 \phi(g_1)(h_2)).$$

Pode-se mostrar que o produto semidireto é um grupo de Lie (ver [19], página 203).

Uma construção semelhante é feita ao nível da álgebra. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie e $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ um homomorfismo de álgebras de Lie. O conjunto $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ munido do colchete

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], \theta(X_1)(Y_2) - \theta(X_2)(Y_1) + [Y_2, Y_1]),$$

é uma álgebra de Lie, chamada de **produto semidireto** de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ e denotado por $\mathfrak{g} \times_\theta \mathfrak{h}$.

Frequentemente iremos considerar neste trabalho um produto semidireto da forma $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$, onde θ é uma matriz 3×3 não nilpotente. Em geral, quando $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ e $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^n$, $\theta(1)$ é uma matriz $n \times n$ e o colchete no produto semidireto fica

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = (0, \theta(X_1)(Y_2) - \theta(X_2)(Y_1)),$$

com produto no grupo correspondente dado por

$$((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = (g_1 + g_2, h_1 e^{g_1 \theta}(h_2)).$$

Como trabalharemos com este caso repetidamente, vamos agora descrever de maneira mais detalhada o colchete quando $n = 3$. Consideremos $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$, com

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

e base

$$\{W, X, Y, Z\} = \{(1, (0, 0, 0)), (0, (1, 0, 0)), (0, (0, 1, 0)), (0, (0, 0, 1))\}.$$

Temos então que

$$[X, Y] = [X, Z], [Y, Z] = 0,$$

pois estes elementos possuem a primeira coordenada nula e, como θ é homomorfismo, $\theta(0) = 0$. Temos ainda que

$$[W, X] = (0, (a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1})) = a_{1,1}X + a_{2,1}Y + a_{3,1}Z,$$
$$[W, Y] = (0, (a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2})) = a_{1,2}X + a_{2,2}Y + a_{3,2}Z$$

e

$$[W, Z] = (0, (a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3})) = a_{1,3}X + a_{2,3}Y + a_{3,3}Z.$$

O último conceito básico que será utilizado neste trabalho é o de campo de vetores linear sobre um grupo de Lie, dado na próxima definição. Nela tomamos $\mathfrak{g}$ como o conjunto dos campos invariantes à esquerda, e o colchete considerado é o colchete de Lie de campos de vetores.

Definição 1.1.10. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. O* **normalizador** *de $\mathfrak{g}$, denotado por $N(\mathfrak{g})$, é o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis $\mathcal{F}$ em G tais que $[\mathcal{F}, X] \in \mathfrak{g}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Se, adicionalmente, tivermos $\mathcal{F}(0) = 0$ então diremos que $\mathcal{F}$ é um* ***campo de vetores linear****.*

Descrevemos agora algumas propriedades de campos de vetores lineares. As demonstrações podem ser encontradas em [12], Seção 3.

Teorema 1.1.11. *Seja $\mathcal{X}$ um campo de vetores sobre um grupo de Lie conexo G. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ é linear;*

2. *o fluxo de $\mathcal{X}$ é um grupo a um parâmetro de automorfismos de G;*

3. *$\mathcal{X}$ satisfaz*
$$\forall x, x' \in G, \quad \mathcal{X}(xx') = d(L_x)_{x'}(\mathcal{X}(x')) + d(R_{x'})(\mathcal{X}(x)).$$

O segundo item implica que um campo de vetores lineares sobre um grupo de Lie conexo é completo.

A um dado campo de vetores linear $\mathcal{X}$, podemos associar a derivação D de $\mathfrak{g}$ definida por

$$DY = -[\mathcal{X}, Y],$$

isto é, $D = -\mathrm{ad}(\mathcal{X})$. No caso em que o grupo é simplesmente conexo, a correspondência entre campos de vetores lineares sobre G e derivações de sua álgebra é biunívoca, conforme mostra o seguinte resultado.

Teorema 1.1.12. *Suponha que G é conexo e simplesmente conexo, e seja D uma derivação de sua álgebra de Lie. Então existe um e somente um campo de vetores linear sobre G cuja derivação associada é D.*

1.2 Sistemas de Controle

Nessa seção apresentaremos alguns conceitos e resultados importantes sobres sistemas de controle, que serão utilizados no restante do trabalho. Esta exposição será resumida, e recomendamos ao leitor os livros [14] e [1].

Sejam M um variedade diferenciável e $\mathcal{U}$ um conjunto de parâmetros arbitrário. Um **sistema de controle** em M é uma família de equações diferenciais da forma

$$\Sigma: \quad \dot{x} = F(x, u), \quad x \in M, \quad u \in \mathcal{U}, \tag{1.5}$$

onde para cada $u \in \mathcal{U}$ fixado a aplicação $F_u : M \to TM$ dada por $F_u(x) = F(x, u)$ é um campo de vetores diferenciável sobre M. A aplicação $F : M \times X \to TM$ descreve a *dinâmica* do sistema. A variedade M é chamada **espaço estado** (ou espaço de estados), enquanto que $\mathcal{U}$ é o **espaço de parâmetros de controle**. Neste trabalho, $\mathcal{U}$ será sempre um subconjunto, a ser especificado em cada caso, do conjunto das funções localmente integráveis $u : \mathbb{R} \to U$, onde U é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Por isso, os parâmetros de controle serão também chamados de **funções de controle** ou, para abreviar a escrita, de um controle.

Denotaremos por $V(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis sobre M. Observe que o sistema de controle é determinado pelo subconjunto

$$\mathcal{F} = \{F_u : u \in \mathcal{U}\}$$

de $V(M)$. A álgebra de Lie do sistema é a menor subálgebra de Lie de $V(M)$ contendo $\mathcal{F}$, e será denotada por Lie($\mathcal{F}$) ou Lie(Σ). Usaremos a notação Lie($\mathcal{F}$)(x) para indicar o subconjunto de T_xM obtido ao calcular o valor de todos os campos vetoriais de Lie($\mathcal{F}$) no ponto $x \in M$:

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{F})(x) = \{Y(x) : Y \in \mathrm{Lie}(\mathcal{F})\}.$$

Fixado um controle u, uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} & = & F(x,u) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

será chamada de uma **trajetória do sistema iniciando em** x_0 e será denotada por $\phi(t, x_0, u)$. O **conjunto de atingibilidade a partir de** x_0 **no tempo** $t > 0$ é definido como

$$\mathcal{A}(x_0, t) = \{\phi(t, x_0, u) : u \in \mathcal{U}\}.$$

O **conjunto de atingibilidade a partir de** x_0 **em tempo menor ou igual a** $T > 0$ é definido como

$$\mathcal{A}(x_0, \leq T) = \{\phi(t, x_0, u) : 0 \leq t \leq T, \quad u \in \mathcal{U}\},$$

enquanto que o **o conjunto de atingibilidade a partir de** x_0 é definido por

$$\mathcal{A}(x_0) = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}_t(x_0).$$

Esses conjuntos são formados pelos pontos x da variedade estável para os quais existe uma trajetória começando em x_0 e terminando em x, em exato tempo t no primeiro caso e em tempo t arbitrário no segundo. Por outro lado, também são de interesse os conjuntos dos pontos y para os quais existe uma trajetória iniciando em y e terminando em x_0. Esses são o **conjunto de controlabilidade para** x_0 **no tempo** $t > 0$,

$$\mathcal{A}^*(x_0, t) = \{y \in M : \exists u \in \mathcal{U} \text{ com } \phi(t, y, u) = x_0\},$$

o **conjunto de controlabilidade para** x_0 **em tempo menor ou igual a** $T > 0$,

$$\mathcal{A}^*(x_0, \leq T) = \{y \in M : \exists t \in [0, T], \quad u \in \mathcal{U} \text{ com } \phi(t, y, u) = x_0\}$$

e o **conjunto de controlabilidade para** x_0,

$$\mathcal{A}^*(x_0) = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}^*_t(x_0).$$

Quando estivermos trabalhando com mais de um sistema de controle ao mesmo tempo, usaremos so subíndices Σ ou $\mathcal{F}$ para indicar o correspondente conjunto de atingibilidade ou de controlabilidade, escrevendo, por exemplo, $\mathcal{A}_\Sigma(x_0)$ ou $\mathcal{A}_\mathcal{F}(x_0)$.

Algumas das possíveis propriedades que estudaremos em sistemas de controle são descritas na definição a seguir.

Definição 1.2.1. *Dizemos que o sistema* (Σ)*:*

1. *Tem a* propriedade de acessibilidade em x_0 *se o interior de* $\mathcal{A}(x_0)$ *em* M *é não vazio. Se essa propriedade for válida para todo* x_0 *em* M*, diremos que o sistema tem a* propriedade de acessibilidade.

2. *É* localmente controlável a partir de x_0 *se* x_0 *pertence ao interior de* $\mathcal{A}(x_0)$*. O sistema é* localmente controlável *quando a afirmação for válida para todo* x_0 *em* M*.*

3. *É* controlável à partir de *de* x_0 *se* $\mathcal{A}(x_0) = M$*. Quando a igualdade ocorre para todo* x_0 *em* M*, dizemos que o sistema é* controlável

Naturalmente, a condição de acessibilidade é necessária para a controlabilidade. Por outro lado, uma condição equivalente para a acessibilidade é a chamada **condição do posto da álgebra de Lie**, que veremos a seguir.

Definição 1.2.2. *Dizemos que o sistema* Σ *satisfaz a* condição do posto da álgebra de Lie *em* x *se*

$$\dim(\mathrm{Lie}(\mathcal{F})(x)) = \dim(M)$$

Notação: Usaremos a sigla LARC (do inglês, **Lie algebra rank condition**) para designar a condição dada na definição acima.

No artigo [15], Teorema 3.1, Jurdjevic e Sussmann provaram o seguinte resultado, válido em variedades analíticas. Como nas seções posteriores iremos restringir nossa atenção a sistemas de controle específicos em grupos de Lie, os quais possuem estrutura de variedade analítica, esse resultado nos será muito útil no decorrer do trabalho.

Teorema 1.2.3. *Suponha que* M *é uma variedade analítica e que os campos de vetores* F_u*,* $u \in \mathcal{U}$*, são completos. Então, o sistema* (Σ) *tem a propriedade da acessibilidade em* x_0 *se e somente se satisfaz a* LARC *em* x_0*.*

Conforme dissemos anteriormente, um sistema não pode ser controlável se não possui a condição de acessibilidade. Assim, concluímos do teorema anterior que a LARC *é uma condição necessária* para a controlabilidade.

Apresentaremos agora mais alguns resultados serão úteis no desenvolvimento dessa tese. O primeiro deles nos diz que, quando a LARC é satisfeita em todo ponto da variedade, podemos substituir o conjunto de atingibilidade pelo seu fecho no estudo da controlabilidade. Uma demonstração pode ser encontrada em [1], Corolário 8.1.

Proposição 1.2.4. *Suponha que o sistema de controle satisfaz a* LARC *em todo ponto de* M*. Se para algum* x_0 *em* M *tivermos* $\overline{\mathcal{A}(x_0)} = M$*, então* $\mathcal{A}(x_0) = M$*.*

Do que vimos nas definições anteriores, a família $\mathcal{F}$ de campos de vetores é crucial na definição do sistema. No entanto, quando estudamos aspectos relativos a controlabilidade é interessante podermos considerar, no lugar do sistema original, um outro sistema que possua os mesmos conjuntos de atingibilidade, mas que tenha alguma característica que facilite seu estudo. Com isso, obtemos classes de equivalência de sistemas de controle, de tal forma que em cada classe os sistemas possuem os mesmos conjuntos de atingibilidade. Os representantes maximais destas classes são descritos pelo *saturado de Lie* do sistema, dado na definição a seguir.

Definição 1.2.5. • *O* **saturado forte de Lie** *do sistema de controle* Σ *é o maior subconjunto* $\widehat{\mathcal{F}}$ *de* $\mathrm{Lie}(\mathcal{F})$ *tal que* $\overline{\mathcal{A}_{\widehat{\mathcal{F}}}(x, \leq T)} = \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(x, \leq t)}$ *para todo* x *em* M *e todo* $t > 0$.

- *O* **saturado de Lie** *do sistema de controle* Σ *é o maior subconjunto* $\widehat{\mathcal{F}}$ *de* $\mathrm{Lie}(\mathcal{F})$ *tal que* $\overline{\mathcal{A}_{\widehat{\mathcal{F}}}(x)} = \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(x)}$ *para todo* x *em* M.

Uma importante classe de sistemas de controle é formada pelos **sistemas de controle afim** em uma variedade M. Tais sistemas são determinados por equações da forma

$$\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x),$$

onde $X_0, \ldots, X_m$ são campos de vetores diferenciáveis sobre M. O campo X_0 é chamado **drift**, e os demais campos são chamados **campos controlados**. Para esta classe de sistemas, temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [14], Teorema 2, página 106:

Teorema 1.2.6. *Assuma que os campos controlados* $X_1, \ldots, X_m$ *geram uma álgebra de Lie* $\mathrm{Lie}(X_1, \ldots, X_m)$ *que satisfaz* $\mathrm{Lie}(X_1, \ldots, X_m)(x) = T_xM$ *para todo* x *em* M. *Então o sistema de controle afim*

$$\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x),$$

com funções de controle constante por partes é controlável sempre que não há restrição sobre o tamanho dos controles.

Vejamos uma interessante classe de sistemas de controle: os **sistemas lineares** em $\mathbb{R}^n$, exibidos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.7. *Um* sistema linear *em* $\mathbb{R}^n$ *é um sistema de controle da forma*

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m,$$

onde A *é uma matriz* $n \times n$ *e* $b_1, \ldots, b_n$ *são vetores em* $\mathbb{R}^n$. *Quando restringimos os controles* u *a um subconjunto convexo e compacto de* $\mathbb{R}^n$, *o sistema obtido é chamado* sistema linear com controles restritos. *No caso de sistemas lineares com controles irrestritos, existe um critério bastante simples para verificar a controlabilidade, conhecida como* condição do posto de Kalman*: o sistema linear é controlável se e somente se*

$$\mathrm{span}\{A^j b_i : j = 0, \ldots, n-1, \quad i = 1, \ldots m\} = \mathbb{R}^n.$$

Na verdade, esse critério estabelece condições mais fortes: vale a igualdade acima se e só se $\mathcal{A}_t(x) = \mathbb{R}^n$ *para quaisquer* $t > 0$ *e* x *em* $\mathbb{R}^n$. *Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [1], Teorema 3.1. Para sistemas com controles restritos, essa condição não é suficiente para controlabilidade. Nesse caso, é necessário ainda que os autovalores de* A *tenham parte real nula (ver [14], Capítulo 5, Seção 3).*

O sistema linear

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m,$$

pode ser visto como a família afim de campos de vetores $\mathcal{F} = A + \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores $b_1, \ldots, b_m$. Reciprocamente, dado um subespaço vetorial $\mathcal{B}$ de dimensão m, a escolha de uma base $b_1, \ldots, b_m$ para $\mathcal{B}$ determina um sistema linear como o anterior. Diferentes escolhas de bases dão origem a sistemas de controles lineares equivalentes, no sentido em que possuem as mesmas trajetórias em $\mathbb{R}^n$ (ver [14], Seção 5.1). Por essa razão, assumimos sempre que $b_1, \ldots, b_m$ são linearmente independentes, e podem sempre ser substituídos por elementos $e_1, \ldots, e_m$ que gerem o mesmo espaço vetorial.

1.3 Sistemas de Controle Invariantes

Nesta tese, iremos trabalhar com sistemas de controle invariantes e sistemas lineares em grupos de Lie, sobre os quais passamos a dissertar a partir de agora. Assumiremos sempre que o grupo de Lie G é conexo.

Um **sistema (afim) de controle invariante à esquerda** em um grupo de Lie G é um sistema de controle da forma

$$\Sigma: \quad \dot{g} = X(g) + \sum_{i=1}^{m} u_i Y_i(g), \quad g \in G, \quad u = (u_1, \ldots u_m) \in \mathbb{R}^m,$$

onde $X, Y_1, \ldots, Y_m$ são campos de vetores invariantes à esquerda em G. Nesse caso, a família $\mathcal{F}$ de campos de vetores do sistema, como na Definição 1.2.2, é

$$\mathcal{F} = \{X + \sum_{i=1}^{m} u_i Y_i : u_1, \ldots u_m \in \mathbb{R}\}.$$

Lembramos aqui que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G pode ser vista tanto como o conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda quanto como o espaço tangente a G na identidade e do grupo, identificando o campo invariante Y com $Y(e)$. Com essa identificação, a LARC pode ser caracterizada da seguinte maneira: Definimos Γ^0 como o subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ gerado por $Y_1, \ldots, Y_m$ e Γ como o subespaço afim

$$\Gamma = X + \Gamma^0,$$

que será chamado de **traço** do sistema Σ. Como os campos são invariantes à esquerda, temos que $\dim(\mathrm{Lie}(\mathcal{F})(g)) = \dim G$ se e só se $\mathrm{Lie}(\mathcal{F})(e) = \mathfrak{g}$. Desta forma, o sistema de controle satisfaz a LARC em todo ponto de G se e somente se $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \mathfrak{g}$. Nesse caso, diremos também que o sistema é de **posto máximo**.

Para sistemas de controle invariante as noções de acessibilidade, controlabilidade e controlabilidade local à partir de qualquer ponto se reduzem à analisar tais propriedades na identidade do grupo. Por exemplo, no artigo [17], Seção 2.5, foi mostrado que $\mathcal{A}(e)$ é um subsemigrupo de G, e que $\mathcal{A}(g) = G$ para todo g em G se e somente se $\mathcal{A}(e)$ é todo o grupo. Além disso, basta que o sistema seja localmente controlável à partir de e para que o mesmo seja controlável (globalmente) à partir de qualquer ponto de G.

Consideraremos agora questões sobre a equivalência de sistemas de controle. Em um primeiro momento, considere dois sistemas

$$\Sigma: \quad \dot{x} = F(x,u), \quad x \in M, \quad u \in \mathcal{U}$$

e

$$\tilde{\Sigma}: \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{F}(\tilde{x},\tilde{u}), \quad \tilde{x} \in \tilde{M}, \quad \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}},$$

onde M e $\tilde{M}$ são variedades diferenciáveis. Uma equivalência natural entre os sistemas acima é definida da seguinte forma.

Definição 1.3.1. *Os sistemas* Σ *e* $\tilde{\Sigma}$ *são* state-space equivalentes *se* $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}$ *e existe um difeomorfismo* $\phi : M \to \tilde{M}$ *tal que*

$$d\phi_x \cdot F(x,u) = \tilde{F}(\phi(x),u).$$

No caso em que ambos os sistemas de controle são sobre o mesmo grupo de Lie G e ϕ é um automorfismo de G, diremos que os sistemas são **equivalentes via automorfismo**. Neste tipo de equivalência, o difeomorfismo leva soluções do primeiro sistema em soluções do segundo, mantendo o mesmo controle. Outra noção de equivalência entre sistemas de controle surge quando permitimos também uma mudança no parâmetro de controle, a qual é dada através da chamada **transformação de feedback**. Para esse caso, exigimos que os espaços dos parâmetros de controle também sejam variedades diferenciáveis.

Definição 1.3.2. *Assuma que* $\mathcal{U}$ *e* $\tilde{\mathcal{U}}$ *são variedades diferenciáveis. Os sistemas* Σ *e* $\tilde{\Sigma}$ *são* **feedback equivalentes** *se existe um difeomorfismo* $\Phi : M \times \mathcal{U} \to \tilde{M} \times \tilde{\mathcal{U}}$ *da forma* $\Phi(x,u) = (\phi(x), \psi(x,u))$ *tal que*

$$d\phi_x \cdot F(x,u) = \tilde{F}(\phi(x), \psi(x,u)).$$

Chamamos ϕ *de* componente de estado*, enquanto* ψ *é chamada* componente de feedback*.*

No artigo [5], Biggs e Remsing descrevem um tipo particular de *feedback* equivalência, adaptada à sistemas invariantes à esquerda em grupos de Lie. Para descrevê-la, lembramos primeiramente que dados um difeomorfismo entre variedades $\phi : M \to \tilde{M}$ e um campo de vetores X sobre M, o *push forward* de X por ϕ é o campo de vetores $\phi_* X$ sobre $\tilde{M}$ dado por

$$(\phi_* X)(\phi(x)) = d\phi_g \cdot X(g).$$

Agora, considere os sistemas de controle

$$\Sigma: \quad \dot{x} = F(g,u), \quad g \in G, \quad u \in \mathcal{U}$$

e

$$\tilde{\Sigma}: \quad \dot{\tilde{g}} = \tilde{F}(\tilde{g},\tilde{u}), \quad \tilde{x} \in \tilde{G}, \quad \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}},$$

onde G e $\tilde{G}$ são grupos de Lie e os campos de vetores dados pelas dinâmicas F e $\tilde{F}$ são invariantes à esquerda. Se $\Phi : G \times \mathcal{U} \to \tilde{G} \times \tilde{\mathcal{U}}$ é um difeomorfismo da forma $\Phi(x,u) = (\phi(x), \psi(x,u))$, não temos a garantia que o *push foward* dos campos F_u pela aplicação ϕ são campos invariantes à esquerda sobre $\tilde{G}$. No entanto, na Proposição 4 de [5] foi provado o seguinte resultado:

Proposição 1.3.3. *Nas condições do parágrafo anterior, o push foward $\phi_* F_u$ de um campo invariante à esquerda em Σ é um campo invariante à esquerda em $\tilde{\Sigma}$ se e somente se ψ não depende de G.*

Com o auxílio desse resultado, Biggs e Remsing definiram em [6] a seguinte equivalência entre sistemas de controle invariantes à esquerda.

Definição 1.3.4. *Sejam*

$$\Sigma : \quad \dot{g} = X(g) + \sum_{i=1}^{m} u_i Y_i(g), \quad g \in G, \quad u = (u_1, \ldots u_m) \in \mathbb{R}^m,$$

e

$$\tilde{\Sigma} : \quad \dot{\tilde{g}} = \tilde{X}(\tilde{g}) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i \tilde{Y}(\tilde{g}), \quad \tilde{g} \in \tilde{G}, \quad \tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots \tilde{u}_m) \in \mathbb{R}^m,$$

sistemas de controle invariantes à esquerda nos grupos G e $\tilde{G}$, respectivamente. Diremos que Σ e $\tilde{\Sigma}$ são **detached feedback** *equivalentes (ou* **F-equivalentes** *) se existe um difeomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G \times \mathbb{R}^m & \to & \tilde{G} \times \mathbb{R}^m \\ & (g, u) & \mapsto & (\phi(g), \psi(u)) \end{array},$$

tal que

$$d\phi_g \cdot F(g, u) = \tilde{F}(\phi(g), \psi(u)),$$

onde $F(g, u) = X(g) + \sum_{i=1}^{m} u_i Y_i(g)$ e $\tilde{F}(\tilde{g}, \tilde{u}) = \tilde{X}(\tilde{g}) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i \tilde{Y}(g)$.

No mesmo artigo, os autores provaram o seguinte resultado, que é bastante útil para verificar se dois sistemas são equivalentes (veja [6], Proposição 1).

Proposição 1.3.5. *Suponha que Σ e $\tilde{\Sigma}$ tem posto máximo. Então Σ e $\tilde{\Sigma}$ são F-equivalentes se e somente se existe um isomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \to \tilde{G}$ tal que $D_1\phi \cdot \Gamma = \tilde{\Gamma}$.*

Ainda em [6], Biggs e Remsimg utilizaram o resultado acima para descrever todas as classes de equivalência de sistemas de controle invariante à esquerda, satisfazendo a LARC, em grupos de Lie de dimensão 3. Esta descrição começa com uma adaptação da classificação de Bianchi-Behr para álgebras de Lie tridimensionais, a qual é feita da seguinte maneira: Em termos de uma base ordenada apropriada (E_1, E_2, E_3) pode-se mostrar que os colchetes entre os elementos da base são dados por

$$\begin{array}{rcl} [E_2, E_3] & = & n_1 E_1 - a E_2 \\ [E_3, E_1] & = & a E_1 + n_2 E_2 \\ [E_1, E_2] & = & n_3 E_3 \end{array}$$

As álgebras de Lie tridimensionais são então classificadas em 11 tipos (9 álgebras de Lie e 2 famílias infinitas parametrizadas de álgebras de Lie), de acordo com as constantes de estrutura a, n_1, n_2 e n_3. Na tabela a seguir está exibida esta classificação, bem como os grupos de Lie conexos associados à cada tipo.

Tabela 1.1: A classificação de Bianchi-Behr

Tipo	Bianchi	a	n_1	n_2	n_3	Grupos conexos
$3\mathfrak{g}_1$	I	0	0	0	0	$\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$, $\times\mathbb{T}^3$
$\mathfrak{g}_{2,1} \oplus \mathfrak{g}_1$	III	1	1	-1	0	$\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$, $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{T}$
$\mathfrak{g}_{3,1}$	II	0	1	0	0	H_3, H_3^*
$\mathfrak{g}_{3,2}$	IV	1	1	0	0	$\mathrm{G}_{3,2}$
$\mathfrak{g}_{3,3}$	V	1	0	0	0	$\mathrm{G}_{3,3}$
$\mathfrak{g}_{3,4}^0$	VI_0	0	1	-1	0	$\mathrm{SE}(1,1)$
$\mathfrak{g}_{3,4}^a$	VI_a	$a>0$, $a\neq 1$	1	-1	0	$\mathrm{G}_{3,4}^a$
$\mathfrak{g}_{3,5}^0$	VII_0	0	1	1	0	$\mathrm{SE}(2)$, $\mathrm{SE}_n(2)$, $\widetilde{\mathrm{SE}}(2)$
$\mathfrak{g}_{3,5}^a$	VII_a	$a>0$	1	1	0	$\mathrm{G}_{3,5}^a$
$\mathfrak{g}_{3,6}$	VIII	0	1	1	-1	$\mathrm{SO}(2,1)$, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, A_n, $\tilde{\mathrm{A}}$
$\mathfrak{g}_{3,7}$	IX	0	1	1	1	$\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SO}(3)$

No Apêndice desta tese damos uma descrição, na forma matricial, de alguns dos grupos e álgebras de Lie elencados na tabela anterior. Em vista da Proposição 1.3.5, também descreveremos naquele apêndice os grupos de automorfismos necessários para este trabalho.

Na Tabela 1.2 apresentamos alguns dos resultados obtidos no artigo [6] quanto a classificação de sistemas de controle em grupos de Lie tridimensionais, os quais serão utilizados no decorrer deste trabalho. Naquela tabela, identificamos as álgebras de Lie com o espaço tangente na identidade, e usaremos uma notação mais simplificada para indicar um sistema de controle invariante, escrevendo

$$X + \sum_{i=1}^{m} u_i Y_i$$

para representar o sistema

$$\dot{g} = X(g) + \sum_{i=1}^{m} u_i Y_i(g).$$

Além disso, dado um elemento B de uma base de um espaço vetorial usamos a notação canônica B^* para indicar o elemento correspondente da base dual. Na primeira da coluna da tabela é indicado sobre qual grupo estamos considerando um sistema de controle. A segunda coluna descreve os colchetes não nulos entre os elementos de uma base $\{E_1, E_2, E_3\}$ ou $\{F_1, F_2, F_3\}$ da álgebra de Lie do grupo em questão. Quando os colchetes são os mesmos da classificação de Bianchi-Behr, apresentada anteriormente, escrevemos "Bianchi-Behr". A terceira coluna apresenta até três informações em cada célula: um representante da classe de F-equivalência de um sistema de posto máximo da forma $X+uY$, chamado aqui de um $(1,1)$-sistema, uma restrição sobre o parâmetro γ que, eventualmente, aparece no representante e uma condição necessária e suficiente sobre $X + uY$ para que ele seja F-equivalente ao representante dado. Aqui, γ parametriza famílias de representantes de classes, com valores distintos de γ correspondendo a classes não equivalentes. A última coluna tem uma descrição semelhante à anterior, mas considerando sistemas com dois *inputs*. Em dois casos não existem sistemas da forma $X + uY$ com posto máximo e neste caso escrevemos "Não há"na célula correspondente. Por exemplo, em $\mathrm{G}_{3,3}$

não existem sistemas da forma $X + uY$ com posto máximo, enquanto que qualquer sistema da forma $X + u_1Y_1 + u_2Y_2$ com posto máximo satisfazendo $E_3^*(\Gamma^0) = \{0\}$ é F-equivalente a um sistema da forma $\gamma E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$, com $\gamma \neq 0$.

Tabela 1.2: Alguns representantes de classes de F-equivalência.

Grupo	**Base**	**(1,1)-sistema**	**(2,1)-sistema**
$\mathbb{R}^3$	Bianchi-Behr	Não há	$E_1 + u_1E_2 + u_2E_3$
H	Bianchi-Behr	$E_2 + uE_3$	$E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$ $E_1 \in \Gamma^0$
$\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$	$[E_1, E_3] = E_3$	$\gamma E_1 + u(E_2 + E_3)$ $\gamma \neq 0$ $E_1^*(\Gamma^0) = \{0\}$	$\gamma E_1 + u_1E_2 + u_2E_3$ $\gamma \neq 0$ $E_1^*(\Gamma^0) = \{0\}$
$\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$	$[E_1, E_3] = E_3$	$E_2 + E_3 + uE_1$ $E_1^*(\Gamma) \neq \{0\}$	$E_2 + u_1E_3 + u_2E_1$ $E_1^*(\Gamma^0) \neq \{0\}$,$E_3 \in \Gamma^0$
$\mathrm{SE}(1,1)$	$[F_3, F_1] = -F_3$ $[F_1, F_2] = -F_2$	$\gamma F_1 + u(F_2 + F_3)$ $\gamma > 0$ $F_1^*(\Gamma^0) = \{0\}$	$\gamma F_1 + u_1F_2 + u_2F_3$ $\gamma > 0$ $F_1^*(\Gamma^0) = \{0\}$
$\widetilde{\mathrm{SE}}(2)$	Bianchi-Behr	$\gamma E_3 + uE_2$ $\gamma > 0$ $E_3^*(\Gamma^0) = \{0\}$	$\gamma E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$ $\gamma > 0$ $E_3^*(\Gamma^0) = \{0\}$
$\mathrm{G}_{3,2}$	Bianchi-Behr	$\gamma E_3 + uE_2$ $\gamma \neq 0$ $E_3^*(\Gamma^0) = \{0\}$	$\gamma E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$ $\gamma \neq 0$ $E_3^*(\Gamma^0) = \{0\}$
$\mathrm{G}_{3,3}$	Bianchi-Behr	Não há	$\gamma E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$ $\gamma \neq 0$ $E_3^*(\Gamma^0) = \{0\}$
$\mathrm{G}_{3,5}^a$	Bianchi-Behr	$\gamma E_3 + uE_2$ $\gamma \neq 0$ $E_3^*(\Gamma^0) = \{0\}$	$\gamma E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$ $\gamma \neq 0$ $E_3^*(\Gamma^0) = \{0\}$
$\mathrm{G}_{3,4}^a$	$[F_3, F_1] = -(a+1)F_3$ $[F_1, F_2] = (a-1)F_2$	$\gamma F_1 + u(F_1 + F_2)$ $\gamma \neq 0$ $F_1^*(\Gamma^0) = \{0\}$	$\gamma F_1 + u_1F_2 + u_2F_3$ $\gamma \neq 0$ $F_1^*(\Gamma^0) = \{0\}$

1.4 Sistemas Lineares em Grupos de Lie

Considere um grupo de Lie conexo G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Um **sistema de controle linear** em G é um sistema da forma

$$\Sigma : \quad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{i=1}^{m} u_iY_i(g), \quad g \in G, \quad u = (u_1, \ldots u_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{1.6}$$

onde o *drift* $\mathcal{X}$ é um campo linear em G e os campos controlados $Y_1, \ldots, Y_m$ são campos invariantes à esquerda. Seja D a derivação de $\mathfrak{g}$ associada a $\mathcal{X}$. Como no caso de sistemas invariantes à esquerda, aqui também temos uma formulação equivalente para a LARC, envolvendo uma subálgebra gerada pelos campos controlados. Para descrevê-la, denotaremos por Δ a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $Y_1, \ldots, Y_m$. Seja $D\Delta$ o menor subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ invariante por D. Temos que

$$D\Delta = \text{spam}\{D^k Y : Y \in \Delta, k \in \mathbb{N}\}.$$

De fato, $D\Delta$ deve conter todos os elementos da forma $D^k Y$, com $k \in \mathbb{N}$ e $Y \in \Delta$, bem como combinações lineares de tais elementos. Além disso, como $D(D^i Y) = D^{i+1} Y$, segue o espaço descrito acima é D-invariante, de onde segue a igualdade. Consideraremos também a subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ gerada por $D\Delta$, que é denotada por $\text{Lie}(D\Delta)$. Uma vez que D é derivação, temos que se Y e Z pertencem a Δ então, para quaisquer j k em $\mathbb{N}$, vale a igualdade

$$D[D^j Y, D^k Z] = [D^{j+1} Y, D^k Z] + [D^j Y, D^{k+1} Z].$$

Logo, $\text{Lie}(D\Delta)$ é D-invariante. Como toda subálgebra D-invariante de $\mathfrak{g}$ contendo Δ precisa conter os colchetes de elementos de $D\Delta$, segue que $\text{Lie}(D\Delta)$ é a *menor* subálgebra D-invariante de $\mathfrak{g}$ contendo Δ.

Uma vez que $\mathcal{X}(e) = 0$, temos que $\dim(\text{Lie}(\mathcal{F})(e) = \dim G$, se e somente se $\text{Lie}(D\Delta) = \mathfrak{g}$. Desta forma, podemos redefinir a LARC para sistemas lineares da seguinte maneira equivalente:

Definição 1.4.1. *Dizemos que o sistema linear 1.6 satisfaz a* LARC *se $\mathfrak{g}$ é a menor subálgebra D-invariante de $\mathfrak{g}$ contendo Δ, isto é, se* $\text{Lie}(D\Delta) = \mathfrak{g}$.

Já vimos que a LARC é uma condição necessária para a controlabilidade de um sistema de controle. No caso específico de sistemas lineares, existe uma condição que assegura a controlabilidade *local*, do sistema, chamada condição ad-rank:

Definição 1.4.2. *Dizemos que o sistema 1.6 satisfaz a condição* ad-rank *se $\mathfrak{g}$ é o menor subespaço vetorial D-invariante de $\mathfrak{g}$ contendo Δ, isto é, se $D\Delta = g$.*

No artigo [13], Proposição 6, foi provado o seguinte resultado.

Proposição 1.4.3. *Se o sistema 1.6 satisfaz a condição* ad-rank *então, para todo $t > 0$, o conjunto $\mathcal{A}(e, t)$ é uma vizinhança de e.*

Como $\mathcal{A}(e)$ é a união dos conjuntos $\mathcal{A}(e, t)$, o resultado anterior implica que se um sistema linear satisfaz a condição ad-rank, então o sistema é localmente controlável à partir de e. No entanto, tal condição não é suficiente para a controlabilidade *global* do sistema (ver Exemplo 2 em [13]).

Conforme vimos quando definimos o saturado de Lie, em algumas situações é conveniente substituir o sistema original por outro que possua os mesmos conjuntos de atingibilidade. Um resultado muito útil nessa direção, que pode ser encontrado em [13], Proposição 4, é o seguinte.

Proposição 1.4.4. *A álgebra Δ está contida no saturado forte de Lie de Σ. Desta forma, Σ pode ser substituído pelo sistema*

$$\dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{p} u_j \tilde{Y}_j(g),$$

onde $\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_p$ é uma base de Δ, sem modificar os conjuntos $\overline{\mathcal{A}(g, \leq T)}$.

Pelo resultado anterior, quando estudamos controlabilidade do sistema de controle linear Σ, os campos invariantes $Y_1, \ldots, Y_n$ vistos individualmente não são relevantes, mas sim a álgebra de Lie que eles geram. Além disso, pelo Teorema 1.2.6, se $\Delta = \mathfrak{g}$ então o sistema é controlável. Por isso, passaremos a utilizar a seguinte notação.

Notação: Usaremos a notação

$$\Sigma = (\mathcal{X}, \Delta)$$

para indicar um sistema linear com *drift* $\mathcal{X}$ e campos invariantes dados por qualquer base de Δ, onde Δ é uma subálgebra própria e não vazia de $\mathfrak{g}$. Denotaremos por G_Δ o subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie é Δ.

Vamos agora apresentar alguns resultados relativos a controlabilidade de algumas classes de sistemas lineares, que serão utilizadas nos capítulos subsequentes.

Notação: A partir de agora, denotaremos $\mathcal{A}_t(e), \mathcal{A}(g), \mathcal{A}_t^*(e)$ e $\mathcal{A}^*(e)$ apenas por $\mathcal{A}_t, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t^*$ e $\mathcal{A}^*$, respectivamente.

A proposição fornece condições suficientes para controlabilidade em grupos de Lie solúveis e a demonstração pode ser encontrada em [8].

Proposição 1.4.5. *Seja $\Sigma(X, \Delta)$ um sistema linear em um grupo de Lie solúvel G e assuma que $\mathcal{A}$ é aberto. Então $G^{+,0} \subset \mathcal{A}$ e $G^{+,0} \subset \mathcal{A}^*$. Em particular, se a derivação D associada ao campo linear $\mathcal{X}$ só possui autovalores com a parte real nula e $\mathcal{A}$ é aberto, então $\Sigma(X, \Delta)$ é controlável.*

O próximo resultado, demonstrado em [9], Proposição 7, fornece uma ferramenta para transformar um sistema linear em outro sistema linear. equivalente ao primeiro via automorfismo de grupo.

Proposição 1.4.6. *Sejam $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ um sistema de controle linear no grupo de Lie G, $P : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ um automorfismo da álgebra de Lie correspondente e D a derivação associada ao campo linear $\mathcal{X}$. Então os sistemas de controle $\Sigma(\widetilde{\mathcal{X}}, P\Delta)$ e $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ são equivalentes, onde $\widetilde{\mathcal{X}}$ é o campo linear relacionado com a derivação PDP^{-1}.*

As proposições a seguir nos fornecem ferramentas para o estudo de controlabilidade. As demonstrações podem ser encontradas em [2] e [12]. Para a primeira delas precisamos do conceito de invariância pelo fluxo de um campo de vetores, dada a seguir.

Definição 1.4.7. *Sejam G um grupo de Lie, L um subconjunto de G e $\mathcal{F}$ um campo de vetores de G. Diremos que L é invariante sob o fluxo de X se $X_t(l) \in L$ para todo $l \in L$.*

Lembramos também que se $\phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável entre variedades, então os campos de vetores X em M e Y em N são ditos ϕ-relacionados se $d\phi$ aplica X em Y.

Proposição 1.4.8. *Sejam H um subgrupo fechado de G e $\Pi : G \to G/H$ a projeção canônica. Temos:*

1. *Um campo linear $\mathcal{X}$ está $\Pi -$ relacionado a um campo vetorial em G/H se e somente se H é invariante sob $\mathcal{X}_t$.*

2. *Se H é discreto a condição acima é equivalente a H estar contido no conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{X}_t$.*

3. *Se H é conexo, a condição (1) é equivalente a sua álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ ser invariante sob a derivação D associada a $\mathcal{X}$.*

Proposição 1.4.9. *Para um sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ temos $G_\Delta \subset \mathrm{cl}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{cl}(\mathcal{A}^*)$, onde* cl *denota o fecho em G.*

Proposição 1.4.10. *Seja H um subgrupo normal e fechado de G tal que H é invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$. Um sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$, satisfazendo* LARC*, é controlável se e somente se satisfaz ambas as condições abaixo:*

1. *O sistema de controle linear induzido em G/H é controlável.*

2. *O subgrupo H está contido no fecho de $\mathcal{A}$ e no fecho de $\mathcal{A}^*$*

Proposição 1.4.11. *Seja H um subgrupo conexo e fechado de G tal que que $\mathcal{X}(h) = 0$ para todo $h \in H$. Então*

- *H está contido no conjunto de atingibilidade $\mathcal{A}$ se e somente se $\mathcal{A} \cap H$ for uma vizinhança da identidade em H.*

- *H está contido no conjunto de acessibilidade $\mathcal{A}^*$ se e somente se $\mathcal{A}^* \cap H$ for uma vizinhança da identidade em H.*

A próxima proposição visa, via equivalência de sistemas de controles, reduzir o número de sistemas com os quais precisamos lidar. Tanto as definições quanto a proposição a seguir são adaptações para dimensão grupos de dimensão 4 feitas em [2] para grupos de dimensão 3. Dada uma matriz θ, 3×3 e não nilpotente, definimos $\rho_\theta(t)$, ou simplesmente, ρ_t como

$$\rho_t = e^{t\theta}.$$

Definimos também $\Lambda_\theta(s)$, ou simplesmente Λ_s, como a aplicação que associa a cada número real s uma matriz 3×3 com seguintes propriedades:

- $\Lambda_0 = 0$.

- $\frac{d}{ds}\Lambda_s = \rho_s$.

- $\rho_s - \theta\Lambda_s = 1$.

- $\Lambda_t + \rho_t\Lambda_s = \Lambda_{t+s}$.

A descrição de Λ_s para cada um dos grupos que nós estudaremos controlabilidade encontra-se no Apêndice 3 desta tese.

Considere agora um grupo de Lie quadridimensional G, conexo, simplesmente conexo e que pode ser escrito como $G = \mathbb{R} \times_\rho \mathbb{R}^3$. Definamos para cada $v_0 \in \mathbb{R}^3$ o automorfismo ψ_{v_0} de G dado por

$$\psi_{v_0}(t, v) = (t, v - \Lambda_t v_0).$$

Temos que

$$d(\psi_{v_0})_0(1, v_0) = (1, 0).$$

Além disso, para vetores de $\mathfrak{g}$ da forma $(0, v)$ temos

$$d(\psi_{v_0})_0(0, v) = (0, v).$$

As duas últimas igualdades são importantes para o estudo da controlabilidade pois, como vimos anteriormente, dado um automorfismo de grupos podemos obter um sistema de controle equivalente ao sistema inicial e, como veremos a seguir, as derivações das álgebras de Lie que estudaremos são matrizes 4×4 cuja primeira linha é nula. Deste modo, para o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ satisfazer a condição do posto, é necessário Δ contenha um vetor da forma $(1, v_0)$. Sob esta condição, podemos achar uma base para Δ da forma $\{(1, v_0)\}$, $\{(1, v_0), (0, v_1)\}$ ou $\{(1, v_0), (0, v_1), (0, v_2)\}$ quando $\dim \Delta = 1$, 2 ou 3 respectivamente. Assim, temos que o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é equivalente, via automorfismo de grupo, ao sistema de controle $\Sigma(\mathcal{Y}, \Pi)$ cuja base da subálgebra Π é uma das descritas acima. Deste modo demonstramos a seguinte proposição.

Proposição 1.4.12. *Seja $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$ um sistema de controle em um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo $G = \mathbb{R} \times_\rho \mathbb{R}^3$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$ satisfaz* LARC*, então ele é equivalente, via automorfismo de grupo, a um dos sistemas abaixo:*

- $\Sigma(\mathcal{X}, \langle(1, 0)\rangle)$
- $\Sigma(\mathcal{X}, \langle(1, 0), (0, v_1)\rangle)$
- $\Sigma(\mathcal{X}, \langle(1, 0), (0, v_1), (0, v_2)\rangle)$,

onde $\langle(1, 0)\rangle$, $\langle(1, 0), (0, v_1)\rangle$ e $\langle(1, 0), (0, v_1), (0, v_2)\rangle$ são subálgebras de $\mathfrak{g}$.

Descreveremos agora condições para termos controlabilidade em sistemas lineares em grupos de Lie solúveis e simplesmente conexos de dimensão 2 e 3. Conhecer estas condições será útil para estudarmos controlabilidade nos grupos de Lie de dimensão 4 que estudaremos neste trabalho.

Para os grupos de Lie abelianos $\mathbb{R}^n$, a condição de ad-rank é equivalente à condição de Kalman. Temos assim o seguinte resultado:

Proposição 1.4.13. *Seja $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ um sistema de controle sobre o grupo abeliano simplesmente conexo $\mathbb{R}^n$. Então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição de* ad*-rank.*

Para o grupo de Lie bidimensional não abeliano $G_{2,1}$, também denotado por $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, vale o seguinte resultado, encontrado em [9].

Proposição 1.4.14. *Seja $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ um sistema de controle sobre o grupo de Lie $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$. Então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é controlável se e somente se satisfaz* LARC *e $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$.*

Para o grupo de Heisenberg H_3, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,1}$ munida da base $\{W, X, Y\}$ onde os colchetes são dados por $[W, X] = [Y, X] = 0$ e $[W, Y] = X$, vale o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [9]

Proposição 1.4.15. *Seja $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ um sistema de controle sobre o grupo de Heisenberg, cuja derivação D relacionada ao campo linear $\mathcal{X}$ é da forma*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{1,1} + a_{3,3} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Então vale:

- *Se Δ é unidimensional e $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ satisfaz a condição do posto, então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é equivalente ao sistema $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle W, \rangle)$, onde $\tilde{\mathcal{X}}$ é o campo linear relacionada a derivação*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & d & f \\ 1 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

  $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle W, \rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz uma das condições a seguir:

  1. $b < -\frac{d^2}{4}$
  2. $d = 0$ *e* $f \neq 0$

- *Se Δ é bidimensional, então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é controlável se e somente satisfaz a condição do posto.*

Para o grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$, com álgebra de Lie $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ cujos colchetes entre os elementos de uma base $\{X, Y, Z\}$ são dados por $[X, Y] = Y, [X, Z] = 0$ e $[Y, Z] = 0$, temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [2].

Proposição 1.4.16. *Seja $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ um sistema linear em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$ que satisfaz a condição do posto. Se Δ é unidimensional, então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é equivalente a $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X \rangle)$. Se Δ possui dimensão 2, então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é equivalente a $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y \rangle)$ ou a $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Z \rangle)$. Aqui $\tilde{\mathcal{X}}$ é o campo linear associado a derivação cuja matriz na base $\{X, Y, Z\}$ é*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Além disso:

- *$\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X \rangle)$ é controlável se e somente se $\mathfrak{g}^0 = \mathbf{aff}(\mathbb{R})$*
- *$\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y \rangle)$ é controlável*
- *$\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Z \rangle)$ é controlável se e somente se $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{g}^0$*

Demonstração: A prova da controlabilidade do sistema $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X \rangle)$ pode ser encontrada em [2]. Começaremos pelo sistema linear $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y \rangle) : W + u_1 X + u_2 Y$. A matriz

$$[W, X, D(W), D^2(W)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{2,1} & a_{2,1}a_{2,2} \\ 0 & 0 & a_{3,1} & a_{3,1}a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

nos garante que para o sistema satisfazer a condição do posto e de ad-rank basta que $a_{3,1} \neq 0$. Como $\langle Y \rangle \subset \langle X, Y \rangle$, temos pela Proposição 1.4.9 que $G_{\langle Y \rangle} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$. Uma vez que $\langle Y \rangle$ é ideal de $\mathfrak{g}$, segue que $G_{\langle Y \rangle}$ é subgrupo normal de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$ e, como Y também é invariante sob a derivação D, a Proposição 1.4.8 assegura que $G_{\langle Y \rangle}$ é invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$. Assim, a Proposição 1.4.10 nos garante que $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y \rangle)$ é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Y \rangle}$, isomorfo a $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{z} = a_{3,1}x + a_{3,3}z \end{cases}$$

é controlável, o que de fato acontece se e somente se $a_{3,1} \neq 0$. Como esta é exatamente a única condição para $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y\rangle)$ satisfazer a condição do posto temos que $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.

Por fim olhemos a controlabilidade de $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Z\rangle)$. A matriz $[W, Z, D(W), [W, D(W)]]$ nos fornece que para o sistema satisfazer a condição do posto e de ad-rank, basta que $a_{2,1} \neq 0$. Como Z é ideal de $\mathfrak{g}$ invariante sob D, as Proposições 1.4.8,1.4.9 e 1.4.10 nos fornecem que $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Z\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle}$, isomorfo a $\mathbf{aff}(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{y} = a_{2,1}(e^x - 1) + a_{2,2}y \end{cases}$$

for controlável. Isto so ocorre se e somente se $a_{2,2} = 0$ e $a_{2,1} \neq 0$. Mas se $a_{2,2} = 0$ temos que $\mathfrak{g}^0$ contém o grupo afim.

$\square$

Para o grupo $\mathrm{G}_{3,2}$, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,2}$ cujos colchetes entre os elementos de uma base $\{X, Y, Z\}$ são $[X, Y] = Y, [X, Z] = Y + Z$ e $[Y, Z] = 0$, temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [2].

Proposição 1.4.17. *Seja $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ um sistema linear em $\mathrm{G}_{3,2}$ que satisfaz a condição do posto. Então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é equivalente a $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X\rangle)$ se Δ é unidimensional e a $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y\rangle)$ se Δ é bidimensional. Aqui $\tilde{\mathcal{X}}$ é o campo linear associado com a derivação*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

Além disso,

- $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X\rangle)$ *é controlável se e somente se* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ *e* $a_{2,3} \neq 0$.
- $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y\rangle)$ *é controlável se e somente se* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$

Para o grupo $\mathrm{G}_{3,3}$, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,3}$ munida da base $\{X, Y, Z\}$ com $[X, Y] = Y, [X, Z] = Z$ e $[Y, Z] = 0$, temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [2].

Proposição 1.4.18. *Seja $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ um sistema linear em $\mathrm{G}_{3,3}$ que satisfaz a condição do posto. Então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é equivalente a $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X\rangle)$ se Δ é unidimensional e a $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, \alpha Y + \beta Z\rangle)$, com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, se Δ é bidimensional. Aqui $\tilde{\mathcal{X}}$ é o campo linear associado a derivação*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Além disso, definindo D^* como a submatriz

$$D^* = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

temos que

- $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X \rangle)$ *é controlável se e somente se* D *possui um par de autovalores complexos ou* D^* *é uma matriz nilpotente não nula.*

- $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, \alpha Y + \beta Z \rangle)$ *é controlável se* D *possui um par de autovalores complexos, ou* D^* *é uma matriz nilpotente não nula, ou* $ker D^* \not\subset \Delta$.

Consideremos agora os grupos $\mathrm{G}_{3,4}^0$ e $\mathrm{G}_{3,4}^a$. Suas álgebras de Lie são, respectivamente, $\mathfrak{g}_{3,4}^0$ e $\mathfrak{g}_{3,4}^a$. Para a primeira álgebra, tomamos uma base $\{X, Y, Z\}$ com colchetes $[X, Y] = Y$, $[X, Z] = -Z$ e $[Y, Z] = 0$. Já para a segunda, os colchetes são $[X, Y] = Y, [X, Z] = \lambda Z$ e $[Y, Z] = 0$, onde λ é um número no aberto $(-1, 0) \cup (0, 1)$, determinado por a. Temos o seguinte resultado, também encontrado em [2].

Proposição 1.4.19. *Seja* $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ *um sistema linear em* $\mathrm{G}_{3,4}^0$ *ou* $\mathrm{G}_{3,4}^a$ *que satisfaz a condição do posto. Então* $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ *é equivalente a* $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X \rangle)$ *se* Δ *é unidimensional. Se* Δ *possui dimensão 2, então*$\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ *é equivalente a* $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y \rangle)$ *ou a* $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Z \rangle)$. *Aqui* $\tilde{\mathcal{X}}$ *é um campo linear com derivação na base* $\{X, Y, Z\}$ *dada por*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Além disso,

- $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X \rangle)$ *não é controlável*

- $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Y \rangle)$ *é controlável se e somente se* $a_{3,3} = 0$

- $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X, Z \rangle)$ *é controlável se e somente se* $a_{2,2} = 0$

Os grupos a seguir possuem álgebras de Lie tridimensionais que não possuem subálgebras de dimensão 2. Desta forma, apenas os sistemas de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ onde Δ é subálgebra de dimensão 1 serão considerados.

Consideremos primeiro o grupo $\mathrm{G}_{3,5}^0$, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,5}^0$ munida de uma base $\{X, Y, Z\}$ com colchetes da forma $[X, Y] = -Z, [X, Z] = Y$ e $[Y, Z] = 0$. Temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [2].

Proposição 1.4.20. *Seja* $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ *um sistema linear em* $\mathrm{G}_{3,5}^0$ *que satisfaz a condição do posto. Então* $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ *é equivalente a* $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X \rangle)$ *onde a derivação* D *associada ao campo linear* $\mathcal{X}$, *em relação a base* $\{X, Y, Z\}$, *é dada por*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & -a_{2,3} & a_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Temos que $\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \langle X \rangle)$ *é controlável se e somente se* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ *e* $a_{2,3} \neq 0$.

Por fim, consideramos o Grupo $\mathrm{G}_{3,5}^a$, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,5}^a$. Tomando uma base $\{X, Y, Z\}$ para esta álgebra, com colchetes da forma $[X, Y] = \lambda Y - Z, [X, Z] = Z + \lambda Y$ e $[Y, Z] = 0$, temos o o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [2].

Proposição 1.4.21. *Todo sistema linear* $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ *em* $\mathrm{G}_{3,5}^{a}$ *que satisfaça a condição do posto é controlável.*

Observação 1.4.22. *Fizemos algumas correções nas proposições acima. A primeira foi na Proposição 1.4.16. Em [2] é afirmado que para o sistema de controle* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X, Z\rangle)$ *em* $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$ *ser controlável basta que satisfaça a condição do posto e* $\dim \mathfrak{g}^0 > 1$*, o que não é verdade. Tome como exemplo o seguinte sistema linear em* $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$*:*

$$\dot{g} = \mathcal{X} + u_1 X + u_2 Z,$$

que escrito em coordenadas se torna

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{y} = (e^x - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = u_2 z \end{cases}$$

Aqui, $\mathcal{X}$ *é o campo linear* $(0, e^x - 1 + b_2 y, 0)$*, enquanto que* X *e* Z *são campos invariantes à esquerda da base formada pelos elementos* $X = (1,0,0), Y = (0, e^x, 0), Z = (0,0,1)$*. Tomamos também* $b_2 \neq 0$*. A derivação associada a este campo linear é*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos aqui que o sistema satisfaz a condição do posto, pois a matriz $[X, D(X), Z]$ *é invertível e* $\dim \mathfrak{g}^0 = 2 > 1$*. Entretanto este sistema não é controlável, pois* $b_2 \neq 0$*. De fato, se* $b_2 > 0$ *temos que* $\dot{y} < 0$ *se e somente se* $e^x - 1 + b_2 y < 0$*. Isto equivale a dizer que* $y < \frac{1-e^x}{b_2} < \frac{1}{b_2}$*. Portanto, se* $y > \frac{1}{b_2}$*,* $\dot{y} > 0$ *e assim qualquer ponto* (x,y,z) *com* $y > \frac{1}{b_2}$ *não atinge a origem. Se* $b_2 < 0$ *podemos ver que* $\dot{y} < 0$ *se e somente se* $e^x - 1 + b_2 y < 0$*. Isto equivale a dizer que* $y > \frac{1-e^w}{b_2} > \frac{1}{b_2}$*. Logo se* $y < \frac{1}{b_2}$*.* $\dot{y} > 0$*. Assim vemos que a origem não atinge os pontos* (x,y,z) *onde* $y < \frac{1}{b_2}$*.*

A segunda correção está na Proposição 1.4.18. Em [2] é dito que o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + uX$ *é controlável se e somente se* D *possui um par de autovalores complexos. Na verdade ele é controlável também se a submatriz* D^*

$$D^* = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

da derivação D

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

for nilpotente e não nula. De fato, $\dot{g} = \mathcal{X} + uX$ *é da forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = b_1(e^x - 1) + b_2 y + b_3 z \\ \dot{z} = c_1(e^x - 1) + c_2 y + c_3 z \end{cases}$$

Tal sistema satisfaz ad-rank desde que $b_1 Y + c_1 Z$ *não seja autovalor de* D*. Como* $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha Y + \beta Z$ *para todo* α, β *real temos que as condições de posto e ad-rank são equivalentes. Se* D^* *é nilpotente, temos que* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ *e, como satisfaz ad-rank, a Proposição 1.4.5 nos garante que* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X\rangle)$ *é controlável.*

1.5 L-equivalência

O objetivo desta seção é definir a equivalência entre sistemas lineares com a qual trabalharemos nesta tese. Esta é baseada no conceito de **sistema aumentado**, dado em [7], que passamos a definir agora.

Denote por $\widehat{G}$ o produto semidireto $G \times_{\mathcal{X}} \mathbb{R}$, isto é, o conjunto dos pares ordenados (g, t) com $g \in G$ e $t \in \mathbb{R}$, com produto do grupo dado por

$$(g_1, t_1) \cdot (g_2, t_2) = (g_1 \mathcal{X}_{t_1}(g_2), t_1 + t_2).$$

Temos que $\widehat{G}$ é um grupo de Lie, com elemento neutro $\mathbf{1} = (e, 0)$ e o inverso do elemento (g, t) é $(\mathcal{X}_t(g^{-1}), -t)$. Sua álgebra de Lie e dada por $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times_{-\mathrm{ad}_{t\mathcal{X}}} \mathbb{R}$, com colchete (veja [11], Seção 1.4).

$$\begin{aligned} [(X_1, t_1), (X_2, t_2)] &= ([X_1, X_2] - \mathrm{ad}_{t_1 \mathcal{X}_1}(X) + \mathrm{ad}_{t_2 \mathcal{X}}(X_1), [t_1, t_2]) \\ &= (-[t_1 \mathcal{X}, X_2], +[t_2 \mathcal{X}, X_1], 0). \end{aligned}$$

Sejam agora $\widehat{\mathcal{X}}$ e $\widehat{Y}_j$ os campos vetoriais invariantes à direita sobre $\widehat{G}$ definidos na identidade como $\widehat{\mathcal{X}} = (0, 1)$ e $\widehat{Y}_j = (Y_j, 0)$. O **sistema de controle aumentado invariante à direita** $\widehat{\Sigma}$ sobre $\widehat{G}$ é definido por

$$\widehat{\Sigma} : \dot{\gamma} = \widehat{\mathcal{X}} + \sum_{j=1}^{m} \widehat{Y}_j(\gamma).$$

Por simplicidade, este sistema será chamado simplesmente de **sistema aumentado.** Em [11] os autores utilizaram sistemas aumentados para definir uma equivalência entre sistemas lineares, que passamos a apresentar agora. Considere dois sistemas de controle lineares

$$\Sigma_1 : \quad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(g)$$

e

$$\Sigma_2 : \quad \dot{g} = \mathcal{Y}(g) + \sum_{i=1}^{m} u_i Y_i(g)$$

sobre um grupo de Lie G, bem como os sistemas aumentados

$$\widehat{\Sigma}_1 : \dot{\gamma} = \widehat{\mathcal{X}_1} + \sum_{j=1}^{m} \widehat{X}_j(\gamma)$$

em $\widehat{G}_1 = G \times_{\mathcal{X}_1} \mathbb{R}$ e

$$\widehat{\Sigma}_2 : \dot{\gamma} = \widehat{\mathcal{X}_2} + \sum_{j=1}^{m} \widehat{Y}_j(\gamma)$$

em $\widehat{G}_2 = G \times_{\mathcal{X}_2} \mathbb{R}$.

Definição 1.5.1. *Os sistemas de controle lineares Σ_1 e Σ_2 descritos acima são ditos L-equivalentes se os respectivos sistemas levantados $\widehat{\Sigma}_1$ e $\widehat{\Sigma}_2$ são de posto máximo, F-equivalentes e o $\mathcal{F}-$ismomorfismo $\hat{\phi}$ satisfaz*

$$d\widehat{\phi}_{\widehat{g}}(\widehat{\mathcal{X}}(\widehat{g})) = \widehat{\mathcal{Y}}(\widehat{\phi}(\widehat{g})$$

Na tese [11] foi mostrado que a equivalência acima definida é de fato uma relação de equivalência no conjunto dos sistemas de controle lineares sobre um grupo de Lie G. Ainda em [11] foi provado que tal equivalência preserva controlabilidade, conforme descrito no teorema a seguir (Ver [11], Teorema 3.5):

Teorema 1.5.2. *Sejam Σ_1 e Σ_2 sistemas de controle lineares sobre o grupo de Lie G. Se Σ_1 e Σ_2 são L-equivalentes e Σ_1 é controlável, então Σ_2 também é controlável.*

Nesse trabalho iremos descrever condições suficientes para classes de L-equivalência de sistemas de controle lineares sobre grupos de Lie bidimensionais simplesmente conexos, o que será feito no Capítulo 2.

Capítulo 2

A L-equivalência

Nesse capítulo daremos condições suficientes para que dois sistemas de controle sobre um mesmo grupo de Lie simplesmente conexo de dimensão dois sejam L-equivalentes. Iniciamos esta tarefa descrevendo os campos de vetores lineares em tais grupos. Depois disto, descrevemos o sistema aumentado de um sistema linear sobre estes grupos. Por fim, comparamos a condição de posto máximo do sistema aumentado com a condição de Kalman do sistema original.

2.1 Os Campos Lineares dos Grupos de Lie Bidimensionais Simplesmente Conexos

Existem dois grupos de Lie bidimensionais conexos e simplesmente conexos, um abeliano e um não abeliano. O grupo abeliano corresponde ao plano $\mathbb{R}^2$ munido com a adição usual de vetores. Já o não abeliano é a componente conexa da identidade do grupo afim, que denotaremos por $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$. Veremos nesta seção os campos lineares de cada um destes grupos.

2.1.1 Os Campos Lineares do Plano $\mathbb{R}^2$

Dentre as maneiras de observar o plano $\mathbb{R}^2$ como grupo de Lie de matrizes, ele pode ser visto como o conjunto das matrizes diagonais com entradas positivas,

$$\begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{bmatrix},$$

que, ao ser identificado com o par ordenado (x, y), induz em $\mathbb{R}^2$ a noção usual de um espaço vetorial como grupo de Lie, com o produto $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Prosseguindo para o cálculo dos campos invariantes à esquerda, dado (x_1, y_1) pertencente ao plano, a translação a esquerda

$$L_{(x_1,y_1)}(x, y) = (x_1 + x, y_1 + y)$$

tem sua diferencial $dL_{(x_1,y_1)}$ na base canônica representada pela matriz identidade

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, um campo Y será invariante à esquerda se para quaisquer $g = (x, y)$ e $g_1 = (x_1, y_1)$ em $\mathbb{R}^2$ tivermos isto é

$$Y(g) = Y(g_1 g)$$

Tomando $g_1 = \mathbf{0}$, concluímos que os campos invariantes à esquerda são os campos constantes, ou seja, os que podem ser escritos como

$$Y = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}.$$

Assim, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do plano é gerada pelos campos $X = \frac{\partial}{\partial x}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial y}$, cujo colchete é dado por

$$[X, Y] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0.$$

Portanto, $\mathfrak{g} = 2\mathfrak{g}_1$ é a álgebra abeliana bidimensional e, consequentemente, toda transformação linear nesta álgebra é uma derivação.

Vamos agora determinar o campo linear $\mathcal{X}$ associado à derivação

$$D = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Escreva

$$\mathcal{X}(g) = f_1(g)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(g)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Temos que

$$-\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}(X) = -[f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}] = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$$

e

$$-\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}(Y) == -[f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}] = \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Logo, se $\mathcal{X}$ é o campo linear tal que $D = -\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}$ então

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = c \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = d.$$

Combinando as igualdades acima com o fato de que $\mathcal{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, concluímos que $f_1(x, y) = ax + by$ e $f_2(x, y) = cx + dy$. Deste modo, os campos lineares do plano são da forma

$$\mathcal{X}(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

2.1.2 Os Campos Lineares de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$

O grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ é normalmente identificado como o conjunto das matrizes 2×2 da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & e^x \end{bmatrix},$$

munido com o produto usual de matrizes. Ao identificar o grupo acima com o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais, induzimos em $\mathbb{R}^2$ o produto

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + e^{x_1} y_2),$$

cujo elemento neutro é $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Dado (x_1, y_1) em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, a translação à esquerda por (x_1, y_1) é dada por

$$L_{(x_1,y_1)}(x, y) = (x_1 + x, y_1 + e^{x_1} y),$$

com a matriz da diferencial $dL_{(x_1,y_1)}$ na base canônica dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{x_1} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Calculemos primeiramente os campos invariantes à esquerda de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$. Seja Y um campo vetorial diferenciável. Dado um ponto $g = (x, y)$ em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, escrevemos

$$Y(g) = f_1(g)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(g)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde f_1 e f_2 são funções diferenciáveis. Temos que Y é invariante à esquerda se e somente se para quaisquer $g = (x, y)$ e $g_1 = (x_1, y_1)$ em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ vale a igualdade

$$dL_{g_1} \circ Y(g) = Y(L_{g_1}(g)) = f_1(g_1 g)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(g_1 g)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Aplicando a diferencial (2.1) no membro esquerdo da igualdade acima, devemos ter

$$f_1(g) = f_1(g_1 g)$$

e

$$e^{x_1} f_2(g) = f_2(g_1 g).$$

Tomando $g = \mathbf{0}$, segue que

$$f_1(\mathbf{0}) = f_1(g_1)$$

e

$$e^{x_1} f_2(\mathbf{0}) = f_2(g_1)$$

para todo $g_1 = (x_1, y_1)$ em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$. Denotando $a = f_1(\mathbf{0})$ e $b = f_2(\mathbf{0})$, vemos que Y é invariante à esquerda se e somente se pode ser escrito como

$$Y = a\frac{\partial}{\partial x} + be^x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Concluímos assim que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ é gerada pelos campos $X = \frac{\partial}{\partial x}$ e $Y = e^x\frac{\partial}{\partial y}$, cujo colchete é dado por

$$[X, Y] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, e^x\frac{\partial}{\partial y}\right] = e^x\frac{\partial}{\partial y} = Y.$$

Iremos agora determinar os campos lineares de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$. Para isto, primeiramente veremos como são as derivações de $\mathfrak{g}$, pois, conforme vimos na Seção 1.1, em grupos simplesmente conexos cada campo linear está associado a uma única derivação, dada por $D = -\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}$.

Consideremos a base $\{X, Y\}$ construída acima. Dada uma derivação arbitrária D, escreva $D(X) = aX + bY$ e $D(Y) = cX + dY$, onde a, b, c e c são números reais. Como $[X, Y] = Y$, temos que

$$D([X, Y]) = D(Y) = cX + dY. \tag{2.2}$$

Por outro lado, como D é derivação, temos

$$D([X, Y]) = [DX, Y] + [X, DY] = [aX + bY, Y] + [X, cX + dY] = (a + d)Y. \tag{2.3}$$

Comparando (2.2) e (2.3), vemos que $a = c = 0$. Desta forma, a matriz D com relação a base $\{X, Y\}$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Agora, seja $\mathcal{X}$ um campo linear escrito como

$$\mathcal{X}(g) = f_1(g)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(g)\frac{\partial}{\partial y},$$

com g em $(\mathbb{R})_0$. Temos que

$$\begin{aligned} -\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}(X) &= -[\mathcal{X}, X] = -[f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}] \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}(Y) &= -[\mathcal{X}, Y] = -[f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y}, e^x\frac{\partial}{\partial y}] \\ &= -f_1e^x\frac{\partial}{\partial y} - e^x\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - e^x\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} \\ &= e^x\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + e^x\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - f_1\right)\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Desta forma, se $\mathcal{X}$ é o campo linear tal que $D = -\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}$, então

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x b, \quad e^x\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad e^x\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - f_1\right) = e^x d$$

Da primeira e terceira equações temos que f_1 é constante. Como $\mathcal{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, concluímos $f_1 = 0$. Deste fato, junto da segunda e quarta equações segue que $f_2 = be^x + dy - b$. Portanto, os campos lineares de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ são da forma

$$\mathcal{X}(x, y) = (0, be^x + dy - b).$$

2.2 Levantamento dos grupos e das álgebras

Nessa seção iremos considerar sistemas lineares com um ou dois inputs

$$\Sigma^{(1,1)} : \dot{x} = \mathcal{X}(x) + uY(x)$$

e

$$\Sigma^{(2,1)} : \dot{x} = \mathcal{X}(x) + u_1Y_1(x) + u_2Y_2(x),$$

sobre um grupo de Lie G, conexo e simplesmente conexo. de dimensão 2, e descrever os sistemas aumentados correspondentes. Conforme vimos na Seção 1.4, os sistemas aumentados são sistemas sistemas de controle invariantes definidos no grupos de Lie $\widehat{G} = G \times_{\mathcal{X}} \mathbb{R}$, com álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times_{-\mathrm{ad}_{t\mathcal{X}}} \mathbb{R}$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G. Em algumas situações nos referimos também a $G \times_{\mathcal{X}} \mathbb{R}$ como a álgebra levantada, e aos sistemas aumentados como sistemas levantados.

Em todos as casos a serem estudados precisamos verificar se o sistema aumentado possui posto máximo. Como estamos trabalhando com sistemas invariantes, isto é feito verificando se a menor álgebra de Lie contendo o traço Γ coincide com $\widehat{\mathfrak{g}}$. No caso de sistemas com um *input* o traço é um espaço afim da forma $U + \langle V \rangle$, o qual está contido no subespaço vetorial $\langle U, U+V \rangle$. Uma vez que $\widehat{\mathfrak{g}}$ é tridimensional, o sistema possui posto máximo se e somente se o espaço gerado por U, $U+V$ e $[U, U+V] = [U+V]$ tem dimensão três ou, de forma equivalente, se e somente se a matriz cujas colunas são U, $U+V$ e $[U+V]$ tem determinante não nulo. Esse procedimento será adotado em todos os casos e, por simplicidade, esta matriz será chamada de **matriz do posto**, e seu determinante de **determinante do posto**. No caso de sistemas com dois *inputs*, o traço do sistema aumentado é um espaço afim bidimensional. Consequentemente, qualquer espaço vetorial contendo o mesmo é tridimensional. Portanto, a condição do posto é sempre satisfeita.

2.2.1 Plano

Nesta subseção estudaremos o levantamento de sistemas lineares da forma

$$\Sigma^{(1,1)} : \dot{x} = \mathcal{X}(x) + uY(x)$$

e

$$\Sigma^{(2,1)} : \dot{x} = \mathcal{X}(x) + u_1Y_1(x) + u_2Y_2(x)$$

em $\mathbb{R}^2$. Como vimos na Seção 2.1.1, cada campo linear do plano está identificado com uma matriz D, e os campos invariantes são os campos constantes. Assim, tais sistemas são exatamente os sistemas lineares clássicos vistos no Exemplo 1.2.7. Se $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, a observação feita no final do Exemplo 1.2.7 nos permite escrever

$$\Sigma^{(1,1)} : \dot{x} = Dx + u(\alpha e_1 + \beta e_2)$$

e

$$\Sigma^{(2,1)} : \dot{x} = Dx + u_1e_1 + u_2e_2$$

Veremos nas subseções a seguir que o grupo do sistema aumentado muda de acordo com a matriz D associada ao campo linear $\mathcal{X}$.

Em toda esta subseção $2\mathfrak{g}_1$ irá denotar a álgebra de Lie abeliana bidimensional. Além disso, usaremos as notações e convenções da Tabela 1.2, bem como do parágrafo que a precede. Também usaremos a notação

$$\sigma(D) = \mathrm{tr}^2(D) - 4\det(D)$$

.

Matriz nula

Dados os vetores $((x_1, y_1), t_1)$ e $((x_2, y_2), t_2)$ em $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$, o colchete entre eles é dado por

$$[((x_1, y_1), t_1), ((x_2, y_2), t_2)] = (\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(x_2, y_2) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(x_1, y_1), 0) = (0, 0, 0).$$

Considere a base $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$, com $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ e $E_3 = (0, 0, 1)$. Como todos os colchetes entre os elementos da base se anulam, segue da classificação de Bianchi-Behr (Tabela 1.1) que $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ coincide com $3\mathfrak{g}_1$. Além disso, uma vez que o produto semidireto $\mathbb{R}^2 \times_{\mathcal{X}} \mathbb{R}$ é simplesmente conexo, o grupo de Lie $\widehat{G}$ correspondente é $\mathbb{R}^3$.

Os sistemas aumentados correspondentes são dados por

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : E_3 + u(\alpha E_1 + \beta E_2)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : E_3 + u_1 E_1 + u_2 E_2.$$

O primeiro deles não possui posto completo. De fato, neste caso o subespaço vetorial de $3\mathfrak{g}_1$ contendo o traço $E_3 + \langle \alpha E_1 + \beta E_2 \rangle$ é uma álgebra de Lie, visto que $3\mathfrak{g}_1$ é abeliana. Desta forma, a Definição 1.5.1 não se aplica. O segundo sistema possui posto máximo, pois a menor subálgebra contendo o traço $E_3 + \langle E_1, E_2 \rangle$ é a própria $3\mathfrak{g}_1$. Pela Tabela 1.2, ele é equivalente a

$$E_1 + u_1 E_2 + u_2 E_3.$$

Matriz não nula com determinante e traço iguais a zero

Inicialmente, vamos dividir em 3 casos de acordo com a forma da matriz D:

1. Caso 1: $D = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. Caso 2: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$
3. Caso 3: $D = \begin{bmatrix} a & -ab \\ ab^{-1} & -a \end{bmatrix}$,

com a e b números reais não nulos. O colchete entre os elementos (x_1, y_1, t_1) e (x_2, y_2, t_2) da álgebra levantada $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$, em cada caso, é respectivamente igual a

1. $(a(t_1y_2 - t_2y_1), 0, 0)$

2. $(0, a(t_1x_2 - t_2x_1), 0)$

3. $(a(t_1x_2 - t_2x_1) - ab(t_1y_2 - t_2y_1), ab^{-1}(t_1x_2 - t_2x_1) - a(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$

No primeiro caso, tomando $E_1 = (-a, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ e $E_3 = (0, 0, 1)$, obtemos uma base $\{E_1, E_2, E_3\}$ para $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ tal que

$$[E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = 0, \quad [E_1, E_2] = 0.$$

Pela Tabela 1.1, segue que $\widehat{2\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{g}_{3,1}$. Como $\mathbb{R}^2 \times_{\mathcal{X}} \mathbb{R}$ é simplesmente conexo, o grupo de Lie $\widehat{G}$ correspondente é o grupo de Heisenberg H. Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : E_3 + u(\frac{-\alpha}{a}E_1 + \beta E_2)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : E_3 + u_1\frac{-1}{a}E_1 + u_2E_2.$$

O determinante do posto do primeiro sistema é dado por

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-\alpha}{a} & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \beta^2,$$

de onde segue que o sistema possui posto máximo se e somente se $\beta \neq 0$. Nesse caso, a Tabela 1.2 implica que o mesmo é F-equivalente a

$$E_2 + uE_3.$$

O segundo sistema possui posto completo e, como $E_1 \in \Gamma_0$, a Tabela 1.2 implica que é F-equivalente a

$$\Sigma : E_3 + u_1E_1 + u_2E_2.$$

No Caso 2, tomamos $E_1 = (0, 1, 0)$, $E_2 = (0, 0, a^{-1})$ e $E_3 = (1, 0, 0)$, obtendo as mesmas constantes de estrutura do caso anterior. Assim, temos novamente $\widehat{2\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{g}_{3,1}$, com grupo correspondente H. Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : aE_2 + u(\alpha E_3 + \beta E_1)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : aE_2 + u_1E_3 + u_2E_1.$$

Para o sistema com um *input*, o determinante do posto é

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2,$$

de onde segue que o sistema aumentado possui posto máximo se e somente se $\alpha \neq 0$. Pela Tabela 1.2, tal sistema é F-equivalente a

$$E_2 + uE_3,$$

enquanto que $\widehat{\Sigma^{2,1}}$ é F-equivalente a

$$E_3 + u_1E_1 + u_2E_2.$$

Por fim, no Caso 3 tomamos $E_1 = (ab, a, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ e $E_3 = (0, 0, 1)$, obtendo as mesmas constantes de estrutura, e consequentemente mesma álgebra levantada, dos casos anteriores. Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : E_3 + u\left(\frac{\alpha}{ab}E_1 + \left(\beta - \frac{\alpha}{\beta}\right)E_2\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : E_3 + u_1\left(\frac{1}{ab}E_1 - \frac{1}{b}E_2\right) + u_2E_2.$$

O determinante do posto do primeiro sistema é dado por

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{ab} & -\left(\beta - \frac{\alpha}{b}\right) \\ 0 & \beta - \frac{\alpha}{b} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\beta - \frac{\alpha}{b}\right)^2,$$

de onde se vê que tal sistema é de posto máximo se e somente se $\beta \neq \frac{\alpha}{b}$. Sob esta condição, a Tabela 1.2 implica que este sistema é F-equivalente a

$$E_2 + uE_3,$$

enquanto que $\widehat{\Sigma^{2,1}}$ é F-equivalente a

$$E_3 + u_1E_1 + u_2E_2.$$

Matriz não nula com determinante igual a zero e traço diferente de zero

Novamente, vamos dividir a situação em 3 casos, de acordo com a forma da matriz D:

1. Caso 1: $D = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

2. Caso 2: $D = \lambda \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

3. Caso 3: $D = \lambda \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & ab \end{bmatrix}$, $ab \neq -1$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Dados os elementos (x_1, y_1, t_1) e (x_2, y_2, t_2) na álgebra levantada $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$, o colchete entre eles é, em cada caso, igual a

1. $(0, \lambda c(t_1x_2 - t_2x_1) + \lambda(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$,

2. $(\lambda c(t_1y_2 - t_2y_1), \lambda(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$

3. $(\lambda(t_1x_2 - t_2x_1) + \lambda a(t_1y_2 - t_2y_1), \lambda b(t_1x_2 - t_2x_1) + \lambda ab(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$.

No primeiro caso, tomando $E_1 = (0, 0, \lambda^{-1})$, $E_2 = (1, -c, 0)$ e $E_3 = (0, 1, 0)\}$, obtemos a base $\{E_1, E_2, E_3\}$ tal que

$$[E_2, E_3] = 0, \quad [E_3, E_1] = -E_3, \quad [E_1, E_2] = 0.$$

Fazendo agora $F_1 = \frac{1}{2}(E_2+E_3)$, $F_2 = \frac{1}{2}(E_2-E_3)$ e $F_3 = 2E_1$, obtemos uma nova base $\{F_1, F_2, F_3\}$ para a qual os colchetes são dados por

$$[F_2, F_3] = F_1 - F_2, \quad [F_3, F_1] = F_1 - F_2, \quad [F_1, F_2] = 0.$$

Desta forma, pela Tabela 1.1, $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ é isomorfo a $\mathfrak{g}_{2,1} \oplus \mathfrak{g}_1$, com grupo de Lie correspondente $\widehat{G} = \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$. Para utilizarmos a Tabela 1.2, consideraremos a base $\{E_1, E_2, E_3\}$. Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : \lambda E_1 + u(\alpha E_2 + (c\alpha + \beta)E_3)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{2,1}} : \lambda E_1 + u_1(E_2 + (c\alpha + \beta))E_3 + u_2E_3.$$

O determinante do posto do primeiro sistema é dado por

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & c\alpha + \beta & c\alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha(c\alpha + \beta).$$

Consequentemente, este sistema possui posto máximo se e somente se $\alpha(c\alpha+\beta) \neq 0$ e, sob essa condição, é F-equivalente a um sistema da forma

$$\gamma E_1 + u(E_2 + E_3).$$

Vamos agora usar a Proposição1.3.5 para determinar γ em função dos valores de λ, c, α e β. Conforme descrito no Apêndice, em relação à base $\{E_1, E_2, E_3\}$ o grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}_{2,1} \oplus \mathfrak{g}_1$ tem a forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & u & 0 \\ y & 0 & v \end{bmatrix} : x, y, u, v \in \mathbb{R}, uv \neq 0 \right\}.$$

Um cálculo direto mostra que o automorfismo determinado pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & c\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

aplica o traço do sistema $\lambda E_1 + u(E_2 + E_3)$ no traço do sistema $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$. Portanto, $\gamma = \lambda$.

Usando novamente a Tabela 1.2 vemos que o sistema $\widehat{\Sigma^{2,1}}$ é F-equivalente a um sistema da forma

$$\gamma E_1 + u_1E_2 + u_2E_3.$$

Uma vez que $\langle E_2 + (c\alpha\beta)E_3, E_3\rangle = \langle E_2, E_3\rangle$, temos que os sistemas

$$\lambda E_1 + u_2 E_2 + u_2 E_3$$

e $\widehat{\Sigma^{2,1}}$ possuem o mesmo traço. Portanto, $\widehat{\Sigma^{2,1}}$ é F equivalente a

$$\lambda E_1 + u_2 E_2 + u_2 E_3.$$

Passemos agora ao Caso 2. Tomando $E_1 = (0, 0, \lambda^{-1})$, $E_2 = (1, 0, 0)$ e $E_3 = (c, 1, 0)\}$ obtemos a base $\{E_1, E_2, E_3\}$ na qual, novamente,

$$[E_2, E_3] = 0, \quad [E_3, E_1] = -E_3, \quad [E_1, E_2] = 0.$$

Com os mesmos argumentos utilizados no Caso 1, obtemos que $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ é isomorfa a $\mathfrak{g}_{2,1} \oplus \mathfrak{g}_1$, com grupo de Lie correspondente $\widehat{G} = \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$. Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : \lambda E_1 + u((\alpha - c\beta)E_2 + \beta E_3)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : \lambda E_1 + u_1 E_2 + u_2(-cE_2 + E_3).$$

Seguindo ainda os passos do Caso 1, concluímos que o primeiro sistema possui posto completo se e somente se $\beta(\alpha - c\beta) \neq 0$ e, neste caso, é F-equivalente a

$$\lambda E_1 + u(E_2 + E_3),$$

enquanto que o segundo sistema sempre possui posto completo e é F-equivalente a

$$\lambda E_1 + u_2 E_2 + u_2 E_3.$$

Por fim, para o Caso 3, tomando $E_1 = (0, 0, \lambda^{-1}(1 + ab)^{-1})$, $E_2 = (-a, 1, 0)$ e $E_3 = (1, b, 0)$, obtemos uma base com as mesmas constantes de estrutura dos casos anteriores. Consequentemente, $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ coincide novamente com $\mathfrak{g}_{2,1} \oplus \mathfrak{g}_1$. Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : \lambda(1 + ab)E_1 + u\left(\frac{-\alpha b + \beta}{1 + ab}E_2 + \frac{\alpha + a\beta}{1 + ab}E_3\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : \lambda(1 + ab)E_1 + u_1\left(\frac{-b}{1 + ab}E_2 + \frac{1}{1 + ab}E_3\right) + u_2\left(\frac{1}{1 + ab}E_2 + \frac{a}{1 + ab}E_3\right).$$

Procedendo de maneira semelhante aos casos anteriores, vemos que o primeiro sistema possui posto completo se e somente se $(\beta - \alpha b)(\alpha + a\beta) \neq 0$ e, neste caso, é F-equivalente a

$$\lambda(1 + ab)E_1 + u(E_2 + E_3)$$

O segundo sistema possui posto completo e é F-equivalente

$$\lambda E_1 + u_2 E_2 + u_2 E_3.$$

Observe que em todos os casos acima o coeficiente de E_1 é igual a $\mathrm{tr}(D)$.

Matriz não nula com determinante menor que zero e traço igual a zero

Vamos dividir novamente a situação em 3 casos, de acordo com a forma da matriz D.

1. Caso 1: $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, com a e b não nulos.

2. Caso 2: $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{bmatrix}$, com a e c não nulos

3. Caso 3: $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, com a não nulo.

Dados os elementos (x_1, y_1, t_1) e (x_2, y_2, t_2) na álgebra levantada, o colchete entre eles em cada um dos casos acima é igual a

1. $(a(t_1x_2 - t_2x_1) + b(t_1y_2 - t_2y_1), c(t_1x_2 - t_2x_1) - a(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$

2. $(x_1, y_1, t_1)(x_2, y_2, t_2) = (a(t_1x_2 - t_2x_1), c(t_1x_2 - t_2x_1) - a(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$

3. $(x_1, y_1, t_1)(x_2, y_2, t_2) = (a(t_1x_2 - t_2x_1), -a(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$

No Caso 1, tomamos $E_1 = (b, -a, 0)$, $E_2 = (0, (-\det(D))^{\frac{1}{2}}, 0)$ e $E_3 = (0, 0, \frac{(-\det(D))^{\frac{1}{2}}}{\det(D)})$, obtemos uma base $\{E_1, E_2, E_3\}$ com

$$[E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = -E_2, \quad [E_1, E_2] = 0.$$

Segue da Tabela 1.1 que $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ coincide com $\mathfrak{g}_{3,4}^0$, correspondendo ao grupo de Lie $\mathbf{SE}(1,1)$. Os sistemas aumentados são

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : \frac{\det(D)}{(-\det(D))^{\frac{1}{2}}} E_3 + u\left(\frac{\alpha}{b}E_1 + \frac{a\alpha + b\beta}{b\sqrt{-\det(D)}}E_2\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : \frac{\det(D)}{(-\det D)^{\frac{1}{2}}} E_3 + u_1\left(\frac{1}{b}E_1 + \frac{a}{b\sqrt{-\det D}}E_2\right) + u_2\frac{1}{\sqrt{-\det D}}E_2.$$

O determinante do posto do primeiro sistema é dado por

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{b} & \frac{-(a\alpha+b\beta)}{b\sqrt{-\det D}} \\ 0 & \frac{a\alpha+b\beta}{b\sqrt{-\det D}} & \frac{-\alpha}{b} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{(a\alpha+b\beta)^2}{b^2(-\det D)} = \frac{\alpha^2 c - \beta(2a\alpha + b\beta)}{b\det D}.$$

Portanto, tal sistema possui posto máximo se e somente se

$$\alpha^2 c - \beta(2a\alpha + b\beta) \neq 0.$$

Considere a base $\{F_1, F_2, F_3\}$ com $F_1 = E_3$, $F_2 = E_1+E_2$ e $F_3 = -E_1+E_2$. Observe que $E_1 = \frac{1}{2}(F_2-F_3)$ e $E_2 = \frac{1}{2}(F_2 + F_3)$, o que permite escrever

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : \frac{\det(D)}{(-\det(D))^{\frac{1}{2}}} F_1 + u\left(\frac{\alpha\sqrt{-\det D} + a\alpha + b\beta}{2b\sqrt{-\det D}} F_2 + \frac{a\alpha + b\beta - \alpha\sqrt{-\det D}}{2b\sqrt{-\det D}} F_3\right).$$

Temos pela Tabela 1.2 que este sistema é F equivalente a um sistema da forma

$$\gamma F_1 + u(F_2 + F_3).$$

Relativamente à base $\{F_1, F_2, F_3\}$, a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha\sqrt{-\det D}+a\alpha+b\beta}{2b\sqrt{-\det D}} \\ 0 & \frac{a\alpha+b\beta-\alpha\sqrt{-\det D}}{2b\sqrt{-\det D}} & 0 \end{bmatrix}$$

representa um automorfismo de $\mathfrak{g}_{3,4}^0$ (ver o Apêndice). Tal automorfismo leva o traço do sistema

$$\frac{-\det(D)}{(-\det(D))^{\frac{1}{2}}} F_1 + u(F_2 + F_3)$$

no traço de $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$, o que implica em

$$\gamma = \frac{-\det(D)}{(-\det(D))^{\frac{1}{2}}}.$$

Agora, observe que $\widehat{\Sigma^{(2,1)}}$ tem posto máximo e, com um argumento semelhante ao anterior, é F-equivalente a

$$\frac{-\det(D)}{(-\det(D))^{\frac{1}{2}}} F_1 + u_1 F_2 + u_2 F_3.$$

Para o Caso 2, tomamos a base formada pelos elementos $E_1 = (a, 0, 0)$, $E_2 = (a, c, 0)$ e $E_3 = (0, 0, -a^{-1})$. As constantes de estrutura são as mesmas do caso anterior e assim $\widehat{2\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{g}_{3,4}^0$. Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : -aE_3 + u\left(\frac{c\alpha - a\beta}{ac} E_1 + \frac{\beta}{c} E_2\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : -aE_3 + u_1 \frac{1}{a} E_1 + u_2 \frac{-1}{c} E_2$$

Para o primeiro sistema, o determinante do posto é

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{c} & -\frac{\beta}{c} \\ 0 & \frac{\beta}{c} & -\left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{c}\right) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-\alpha(c\alpha - 2a\beta)}{a^2 c}.$$

Desta forma, o $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ possui posto máximo se e somente se $\alpha(c\alpha - 2a\beta) \neq 0$. Quando $a > 0$, seguindo a notação e os argumentos do Caso 1, obtemos que primeiro sistema possui posto completo se e somente se $\alpha^2 \neq \beta^2$ e neste caso F-equivalente a

$$|a|F_1 + u(F_2 + F_3).$$

O segundo sistema possui posto completo e é F-equivalente a

$$|a|F_1 + u_1F_2 + u_3F_3.$$

Para $a < 0$, a argumentação e as conclusões são semelhantes.

O Caso 3 é tratado de maneira semelhante aos anteriores. Aqui tomamos $E_1 = (-1, 1, 0)$, $E_2 = (1, 1, 0)$ e $E_3 = (0, 0, a^{-1})$. Temos que $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ possui posto completo se e somente se $\alpha\beta \neq 0$, sendo F-equivalente a

$$|a|F_1 + u(F_2 + F_3),$$

enquanto que $\widehat{\Sigma^{(2,1)}}$ é F-equivalente a

$$|a|F_1 + u_1F_2 + u_2F_3.$$

Observe que em qualquer um dos casos acima o coeficiente de F_1 é dado por

$$|\det(D)|^{\frac{1}{2}}.$$

Matriz não nula com determinante maior que zero e traço igual a zero

Suponha que D tenha a forma

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

onde $a^2 + bc < 0$. Vale notar que neste caso $bc \neq 0$. O colchete entre os elementos (x_1, y_1, t_1) e (x_2, y_2, t_2) de $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ igual a

$$(a(t_1x_2 - t_2x_1) + b(t_1y_2 - t_2y_1), c(t_1x_2 - t_2x_1) - a(t_1y_2 - t_2y_1), 0),$$

Ao escolhermos a base $\{E_1, E_2, E_3\}$ com $E_1 = (-b, a, 0)$, $E_2 = (0, (\det(D))^{\frac{1}{2}}, 0)$ e $E_3 = (0, 0, (\det(D))^{\frac{-1}{2}})$, temos

$$[E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = E_2, \quad [E_1, E_2] = 0.$$

Da Tabela 1.1 segue que $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ é isomorfo a $\mathfrak{g}^0_{3,5}$, com $\widehat{G}$ isomorfo a $\widetilde{\mathrm{SE}}(2)$. Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : (\det(D))^{\frac{1}{2}}E_3 + u\left(-\frac{\alpha}{b}E_1 + \frac{a\alpha + b\beta}{b\sqrt{\det D}}E_2\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : (\det(D))^{\frac{1}{2}}E_3 + u_1\left(\frac{-1}{b}E_2 + \frac{a}{b\sqrt{\det D}}E_2\right) + u_2\frac{1}{\sqrt{\det D}}E_2.$$

O determinante do posto do primeiro sistema é dado por

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-\alpha}{b} & \frac{-a\alpha+b\beta}{b\sqrt{\det D}} \\ 0 & \frac{a\alpha+b\beta}{b\sqrt{\det D}} & \frac{-\alpha}{b} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-c\alpha^2 + 2a\alpha\beta + b\beta^2}{b\sqrt{\det D}},$$

de onde segue que o sistema é de posto máximo se e somente se

$$-c\alpha^2 + 2a\alpha\beta + b\beta^2 \neq 0.$$

A Tabela 1.2 garante que ele é F-equivalente a um sistema da forma

$$\gamma E_3 + uE_2.$$

Agora, relativamente a base $\{E_1, E_2, E_3\}$ temos que a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{a\alpha+b\beta}{b\sqrt{\det D}} & -\frac{\alpha}{b} & 0 \\ \frac{\alpha}{b} & \frac{a\alpha+b\beta}{b\sqrt{\det D}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determina um automorfismo de $\mathfrak{g}_{3,5}^0$ (ver o Apêndice) e aplica o traço do sistema $(\det(D))^{\frac{1}{2}}E_3 + uE_2$ no traço de $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$. Portanto, $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ é F-equivalente a

$$(\det(D))^{\frac{1}{2}}E_3 + uE_2.$$

Um argumento análogo mostra que $\widehat{\Sigma^{(2,1)}}$ é equivalente ao sistema

$$\Sigma : (\det(D))^{\frac{1}{2}}E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$$

Matriz não nula, com traço e determinante diferentes de zero, com $\sigma(D) = 0$ e diagonal secundária não nula

Vamos dividir a situação em dois casos, de acordo com a forma da matriz D.

1. Caso 1: $D = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{(a-c)^2}{4b} & c \end{bmatrix}$, com $b \neq 0$, $a \neq -c$.

2. Caso 2: $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, com a e b não nulos.

Dados $(x_1, y_1, t_1), (x_2, y_2, t_2) \in \widehat{2\mathfrak{g}_1}$, o colchete entre eles, em cada caso, é igual a

1. $(a(t_1x_2 - t_2x_1) + b(t_1y_2 - t_2y_1), -\frac{(a-c)^2}{4b}(t_1x_2 - t_2x_1) + c(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$,

2. $(a(t_1x_2 - t_2x_1), b(t_1x_2 - t_2x_1) + a(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$.

No Caso 1, ao escolhermos como elementos da base $E_1 = (-2b, a - c, 0)$, $E_2 = (a + c, 0, 0)$ e $E_3 = (0, 0, \frac{2}{a+c})$ temos que

$$[E_2, E_3] = E_1 - E_2, \quad [E_3, E_1] = E_1, \quad [E_1, E_2] = 0.$$

Desta forma, a Tabela 1.1 implica que $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ é isomorfo a $\mathfrak{g}_{3,2}$, com $\widehat{G}$ isomorfo a $\mathrm{G}_{3,2}$.

Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : \frac{a+c}{2}E_3 + u\left(\frac{\beta}{a-c}E_1 + \left(\frac{\alpha}{a+c} + \frac{2b\beta}{a^2-c^2}\right)E_2\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : \frac{a+c}{2}E_3 + u_1\frac{1}{a+c}E_1 + u_2\left(\frac{1}{a-c}E_1 + \frac{2b\beta}{a^2-c^2}\right)E_2.$$

O determinante do posto de $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ é dado por

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta}{a-c} & \frac{\beta}{a-c} - \left(\frac{\alpha}{a+c} + \frac{2b\beta}{a^2-c^2}\right) \\ 0 & \frac{\alpha}{a+c} + \frac{2b\beta}{a^2-c^2} & \frac{\alpha}{a+c} + \frac{2b\beta}{a^2-c^2} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\alpha(a-c)+2b\beta}{a^2-c^2}\right)^2,$$

de onde se vê que tal sistema possui posto máximo se e somente se .

$$\alpha(a-c) + 2b\beta \neq 0$$

O mesmo procedimento utilizado nas subseções anteriores implica que estes sistemas são F-equivalentes, respectivamente, a

$$\frac{a+c}{2}E_3 + uE_2$$

e

$$\frac{a+c}{2}E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$$

No Caso 2 escolhemos $E_1 = (0, -b, 0)$, $E_2 = (a, 0, 0)$, e $E_3 = (0, 0, \frac{1}{a})\}$, obtendo as mesmas constantes de estrutura do Caso 1. Desta forma, obtemos os sistemas aumentados

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : aE_3 + u\left(\frac{-\beta}{b}E_2 + \frac{\alpha}{a}E_2\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : aE_3 + u_1\frac{1}{a}E_1 + u_2\frac{-1}{b}E_2,$$

ambos sobre $\mathrm{G}_{3,2}$. Para o primeiro sistema temos o determinante do posto dado por

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\beta}{b} & -\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a} \\ 0 & \frac{\alpha}{a} & \frac{\alpha}{a} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2}{a^2}.$$

Desta forma, $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ é de posto máximo se e somente se $\alpha \neq 0$. Tais sistemas são F-equivalentes, respectivamente, a

$$aE_3 + uE_2$$

e

$$aE_3 + u_1E_1 + u_2E_2.$$

Observe que em qualquer um dos casos acima o coeficiente de E_3 é igual a

$$\frac{\mathrm{tr}(D)}{2}.$$

Matriz não nula, com traço e determinante diferentes de zero, com $\sigma(D) = 0$ e diagonal secundária nula

As matrizes que satisfazem esta condição são da forma

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

com $a \neq 0$. O colchete em $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ é dado por

$$(x_1, y_1, t_1)(x_2, y_2, t_2) = (a(t_1x_2 - t_2x_1), a(t_1y_2 - t_2y_1), 0).$$

Tomando a base formada pelos elementos $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ e $E_3 = (0, 0, \frac{1}{a})$ temos

$$[E_2, E_3] = -E_2, \quad [E_3, E_1] = E_1, \quad [E_1, E_2] = 0.$$

Pela Tabela $\widehat{(g)}$ é isomorfo a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,3}$ e $\widehat{G}$ é isomorfo ao grupo de Lie $\mathrm{G}_{3,3}$

Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : aE_3 + u(\alpha E_1 + \beta E_2)$$
$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : aE_3 + u_1E_1 + u_2E_2$$

O primeiro sistema não possui posto completo. De fato, como

$$[E_3, \alpha E_1 + \beta E_2] = -(\alpha E_1 + \beta E_2)$$

segue que o espaço vetorial gerado por E_3 e $\alpha E_1 + \beta E_2$ é uma subálgebra de Lie própria contendo o traço do sistema. Desta forma, a Definição 1.5.1 não se aplica. O segundo sistema possui posto completo e, pela Tabela 1.2, é F-equivalente a

$$aE_3 + u_1E_1 + u_2E_2$$

Matriz não nula, com traço e determinante diferentes de zero, com $\sigma(D) < 0$

Primeiramente note que para toda matriz

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

satisfazendo as condições acima temos $b, c \neq 0$.

Dados (x_1, y_1, t_1) e (x_2, y_2, t_2) em $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$, o colchete entre eles é igual a

$$(a(t_1x_2 - t_2x_1) + b(t_1y_2 - t_2y_1), c(t_1x_2 - t_2x_1) + d(t_1y_2 - t_2y_1), 0).$$

Considere a base $\{E_1, E_2, E_3\}$ com

$$E_1 = \left(-b, \frac{a-d}{2}, 0\right), \quad E_2 = \left(0, \epsilon\frac{(-\sigma(D))^{\frac{1}{2}}}{2}, 0\right), \quad E_3 = \left(0, 0, \epsilon\frac{2}{(-\sigma(D))^{\frac{1}{2}}}\right),$$

onde $\epsilon = 1$ se $\mathrm{tr}(D) > 0$ e $\epsilon = -1$ caso contrário. Temos que

$$[E_2, E_3] = E_1 - \lambda E_2, \quad [E_3, E_1] = \lambda E_1 + E_2, \quad [E_1, E_2] = 0,$$

onde

$$\lambda = \left| \frac{\mathrm{tr}(D)}{(-\sigma(D))^{\frac{1}{2}}} \right|.$$

Segue da Tabela 1.1 que $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$, é isomorfo a $\mathfrak{g}_{3,5}^{\lambda}$. Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : \epsilon \frac{\sqrt{-\sigma(D)}}{2} E_3 + u \left(-\frac{\alpha}{b} E_1 + \epsilon \left(\frac{\alpha(a-d)}{b\sqrt{-\sigma(D)}} + \frac{2\beta}{\sqrt{-\sigma(D)}} \right) \right)$$

e

$$\Sigma : \epsilon \frac{\sqrt{-\sigma(D)}}{2} E_3 + u_1 \left(-\frac{1}{b} E_1 + \epsilon \frac{a-d}{b} \sqrt{-\sigma(D)} E_2 \right) + u_2 \epsilon \frac{2}{\sqrt{-\sigma(D)}} E_2.$$

O determinante do posto do primeiro sistema é dado por

$$\left| \begin{array}{lll} 0 & -\frac{\alpha}{b} & -\frac{\alpha}{\beta}\lambda - \epsilon \left(\frac{\alpha(a-d)}{b\sqrt{-\sigma(D)}} + \frac{2\beta}{\sqrt{-\sigma(D)}} \right) \\ 0 & \epsilon \left(\frac{\alpha(a-d)}{b\sqrt{-\sigma(D)}} + \frac{2\beta}{\sqrt{-\sigma(D)}} \right) & -\frac{\alpha}{b}\lambda\epsilon \left(\frac{\alpha(a-d)}{b\sqrt{-\sigma(D)}} + \frac{2\beta}{\sqrt{-\sigma(D)}} \right) \end{array} \right| =$$

$$\frac{4(c\alpha^2 + d\alpha\beta - a\alpha\beta - b\beta^2)}{b\sigma(D),}$$

o que determina a condição para que $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ seja de posto máximo. Sob estas condições, os sistemas $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ e $\widehat{\Sigma^{(2,1)}}$ são F-equivalentes, respectivamente, a

$$\epsilon \frac{\sigma(D)}{2} E_3 + u E_2$$

e

$$\epsilon \frac{\sigma(D)}{2} E_3 + u_1 E_1 + u_2 E_2.$$

Matriz não nula, com traço e determinante diferentes de zero, com $\sigma(D) > 0$

Dividiremos a situação em 3 casos, de acordo com a forma da matriz D.

1. Caso 1: $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $b \neq 0$.

2. Caso 2: $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$, com $c \neq 0$.

3. Caso 3: $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

Dados os elementos (x_1, y_1, t_1) e (x_2, y_2, t_2) de $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ o colchete entre eles é, em cada caso, igual a

1. $(a(t_1x_2 - t_2x_1) + b(t_1y_2 - t_2y_1), c(t_1x_2 - t_2x_1) + d(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$.
2. $(a(t_1x_2 - t_2x_1), c(t_1x_2 - t_2x_1) + d(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$.
3. $(a(t_1x_2 - t_2x_1), d(t_1y_2 - t_2y_1), 0)$.

Em cada um dos casos acima é possível tomar uma base $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ com

$$[E_2, E_3] = E_1 - \lambda E_2, \quad [E_3, E_1] = \lambda E_1 - E_2, \quad [E_1, E_2] = 0,$$

onde

$$\lambda = \left| \frac{\mathrm{tr}(D)}{\sigma(D)^{\frac{1}{2}}} \right|.$$

Observe que, como $\det D \neq 0$, temos $\lambda \neq 1$. A Tabela1.1 implica que $\widehat{2\mathfrak{g}_1}$ é isomorfo a $\mathfrak{g}_{3,4}^{\lambda}$. A escolha dos elementos desta base depende da forma da matriz D e do sinal de seu traço, e está descrita nos parágrafos a seguir.

No Caso 1, escolhemos

$$E_1 = \left(-b, \frac{a-d}{2}, 0\right), \quad E_2 = \left(0, \epsilon\frac{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}}{2}, 0\right), \quad E_3 = \left(0, 0, \epsilon\frac{2}{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}}\right),$$

onde $\epsilon = 1$ se $\mathrm{tr}(D) > 0$ e $\epsilon = -1$ caso contrário. Neste caso, os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : \epsilon\frac{\sqrt{\sigma(D)}}{2}E_3 + u\left(-\frac{\alpha}{b}E_1 + \epsilon\left(\frac{\alpha(a-d)}{b\sqrt{\sigma(D)}} + \frac{2\beta}{\sqrt{\sigma(D)}}\right)E_2\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{2,1}} : \epsilon\frac{\sigma(D)}{2}E_3 + u_1\left(-\frac{1}{b}E_1 + \epsilon\frac{a-d}{b\sqrt{\sigma(D)}}E_2\right) + u_2\epsilon\frac{2}{\sqrt{\sigma(D)}}.$$

Com cálculos semelhantes aos das subseções anteriores mostra-se que o primeiro sistema possui posto máximo se e somente se

$$\frac{4(b\beta^2 + a\alpha\beta - d\alpha\beta - c\alpha^2)}{b\sigma(D)} \neq 0.$$

Para o Caso 2, tomamos

$$E_1 = \left(\epsilon\frac{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}}{2}, 0, 0\right), \quad E_2 = \left(\frac{d-a}{2}, -c, 0\right), \quad E_3 = \left(0, 0, \epsilon\frac{2}{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Obtemos os sistemas aumentados

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : \epsilon\frac{\sigma(D)}{2}E_3 + u\left(\epsilon\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma(D)}} - \frac{\beta(a-d)}{c\sqrt{\sigma(D)}}\right)E_1 + \epsilon\frac{\beta}{c}E_2\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}}:\epsilon\frac{\sqrt{\sigma(D)}}{2}E_3+u_1\epsilon\frac{2}{\sqrt{\sigma(D)}}E_1+u\epsilon\left(-\frac{a-d}{c\sqrt{\sigma(D)}}+\frac{1}{c}\right)E_2,$$

sendo que $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ possui posto máximo se e somente se

$$\frac{4(-c\alpha^2+a\alpha\beta+d\alpha\beta)}{\sigma(D)c}\neq 0.$$

Por fim, no Caso 3 escolhemos

$$E_1=\left(\frac{d-a}{2},\frac{a-d}{2},0\right),\quad E_2=\left(\epsilon\frac{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}}{2},\epsilon\frac{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}}{2},0\right),\quad E_3=\left(0,0,\epsilon\frac{2}{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}}\right),$$

obtendo os sistemas aumentados

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}}:\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}E_3+u\left(\frac{\beta-\alpha}{a-d}E_1+\epsilon\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\det\sigma(D)}}E_2\right)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{2,1}}:\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}E_3+u_1\left(\frac{-1}{a-d}E_1+\epsilon\frac{1}{\sqrt{\sigma(D)}}E_2\right)+u_2\left(\frac{1}{a-d}E_2+\epsilon\frac{1}{\sqrt{\sigma(D)}}E_2\right).$$

O primeiro sistema possui posto máximo se e somente se

$$4\alpha\beta\neq 0$$

Em qualquer um dos três casos acima, a Tabela 1.2 implica que $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ é F-equivalente a

$$\Sigma:\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}F_1+u(F_2+F_3),$$

onde $\{F_1,F_2,F_3\}$ é a base de $\mathfrak{g}_{3,4}^{\lambda}$ dada por

$$F_1=E_3,\quad F_2=E_1+E_2,\quad F_3=-E_1+E_2.$$

Por outro lado, $\widehat{\Sigma^{2,1}}$ é F-equivalente a

$$\Sigma:\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}F_1+u_1F_2+u_2F_3.$$

Resumo dos Resultados

Nesta subseção, organizamos os resultados obtidos nas subseções anteriores sobre sistemas lineares no plano. No quadro a seguir, a primeira coluna descreve como é a matriz D relacionada com o campo linear. A segunda, o grupo de Lie onde o sistema aumentado é considerado. Na terceira coluna, relativa a um sistema da forma $D+u(\alpha e_1+\beta e_2)$, temos até três informações por célula: Uma condição necessária e suficiente para que o sistema aumentado tenha posto máximo, o sistema ao qual $D+u(\alpha e_1+\beta e_2)$ é F-equivalente e uma descrição de um parâmetro extra utilizado. Quando o sistema aumentado não possui posto máximo, escrevemos “Não se aplica”. A última coluna apresenta informações semelhantes à terceira, mas relativas a um sistema da forma $D+u_1e_1+u_2e_2$.

Tabela 2.1: Sistemas aumentados

D	**Grupo**	$\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$	$\widehat{\Sigma^{(2,1)}}$
$\mathbf{0}$	$\mathbb{R}^3$	Não se aplica	$E_1 + u_1E_2 + u_2E_3$
$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	H	$\beta \neq 0$ $E_2 + uE_3$	$E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$	H	$\alpha \neq 0$ $E_2 + uE_3$	$E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$
$\begin{bmatrix} a & -ab \\ ab^{-1} & -a \end{bmatrix}$	H	$\beta \neq \frac{\alpha}{b}$ $E_2 + uE_3$	$E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$
$D = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \lambda \neq 0$	$\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$	$\alpha(c\alpha + \beta) \neq 0$ $\mathrm{tr}(D)E_1 + u(E_2 + E_3)$	$\mathrm{tr}(D)E_1 + u_1E_1 + u_2E_2$
$D = \lambda \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda \neq 0$	$\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$	$\beta(\alpha - c\beta) \neq 0$ $\mathrm{tr}(D)E_1 + u(E_2 + E_3)$	$\mathrm{tr}(D)E_1 + u_1E_1 + u_2E_2$
$D = \lambda \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & ab \end{bmatrix}$ $ab \neq 1, \lambda \neq 0$	$\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$	$(\beta - \alpha b)(\alpha + a\beta) \neq 0$ $\mathrm{tr}(D)E_1 + u(E_2 + E_3)$	$\mathrm{tr}(D)E_1 + u_1E_1 + u_2E_2$
$\det D < 0$ $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, a, b \neq 0$	$\mathrm{SE}(1,1)$	$\alpha^2 c - \beta(2a\alpha + b\beta) \neq 0$ $\lvert\det(D)\rvert^{\frac{1}{2}} F_1 + u(F_2 + F_3)$	$\lvert\det(D)\rvert^{\frac{1}{2}} F_1 + u_1F_2 + u_2F_3$
$\det D < 0$ $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{bmatrix}, a, c \neq 0$	$\mathrm{SE}(1,1)$	$\alpha(c\alpha - 2a\beta) \neq 0$ $\lvert\det(D)\rvert^{\frac{1}{2}} F_1 + u(F_2 + F_3)$	$\lvert\det(D)\rvert^{\frac{1}{2}} F_1 + u_1F_2 + u_2F_3$
$\det D < 0$ $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, a \neq 0$	$\mathrm{SE}(1,1)$	$\alpha\beta \neq 0$ $\lvert\det(D)\rvert^{\frac{1}{2}} F_1 + u(F_2 + F_3)$	$\lvert\det(D)\rvert^{\frac{1}{2}} F_1 + u_1F_2 + u_2F_3$
$\det D > 0$ $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$	$\widetilde{\mathrm{SE}}(2)$	$-c\alpha^2 + 2a\alpha\beta + b\beta^2 \neq 0$ $(\det D)^{\frac{1}{2}} E_3 + uE_2$	$(\det D)^{\frac{1}{2}} E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$

D	**Grupo**	$\widehat{\sum^{(1,1)}}$	$\widehat{\sum^{(2,1)}}$
$\det D \neq 0 \neq \mathrm{tr}D, \sigma(D) = 0$ $\begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{(a-c)^2}{4b} & c \end{bmatrix}, b \neq 0$ Diagonal secundária não nula	$\mathrm{G}_{3,2}$	$\alpha(a-c) + 2b\beta \neq 0$ $\frac{\mathrm{tr}D}{2}E_3 + uE_2$	$\frac{\mathrm{tr}D}{2}E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$
$\det D \neq 0 \neq \mathrm{tr}D, \sigma(D) = 0$ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix},$ Diagonal secundária não nula	$\mathrm{G}_{3,2}$	$\alpha \neq 0$ $\frac{\mathrm{tr}D}{2}E_3 + uE_2$	$\frac{\mathrm{tr}D}{2}E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$
$\det D \neq 0 \neq \mathrm{tr}D$ $\sigma(D) = 0$ Diagonal secundária nula	$\mathrm{G}_{3,3}$	Não se aplica	$\frac{\mathrm{tr}D}{2} + u_1E_1 + u_2E_2$
$\det D \neq 0 \neq \mathrm{tr}D, \sigma(D) < 0$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, b, c \neq 0$	$\mathrm{G}_{3,5}^{\lambda}$ $\lambda = \left\| \frac{\mathrm{tr}D}{(-\sigma(D))^{\frac{1}{2}}} \right\|$	$c\alpha^2 + d\alpha\beta - a\alpha\beta - b\beta^2 \neq 0$ $\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}E_3 + uE_2$ $\epsilon = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr}D)$	$\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}E_3 + u_1E_1 + u_2E_2$ $\epsilon = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr}D)$
$\det D \neq 0 \neq \mathrm{tr}D, \sigma(D) > 0$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, b \neq 0$	$\mathrm{G}_{3,4}^{\lambda}$ $\lambda = \left\| \frac{\mathrm{tr}D}{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}} \right\|$	$b\beta^2 + a\alpha\beta - d\alpha\beta - c\alpha^2 \neq 0$ $\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}F_1 + u(F_2 + F_3)$ $\epsilon = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr}D)$	$\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}F_1 + u_1F_2 + u_2F_3$ $\epsilon = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr}D)$
$\det D \neq 0 \neq \mathrm{tr}D, \sigma(D) > 0$ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, c \neq 0$	$\mathrm{G}_{3,4}^{\lambda}$ $\lambda = \left\| \frac{\mathrm{tr}D}{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}} \right\|$	$-c\alpha^2 + a\alpha\beta + d\alpha\beta \neq 0$ $\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}F_1 + u(F_2 + F_3)$ $\epsilon = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr}D)$	$\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}F_1 + u_1F_2 + u_2F_3$ $\epsilon = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr}D)$
$\det D \neq 0 \neq \mathrm{tr}D, \sigma(D) > 0$ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$	$\mathrm{G}_{3,4}^{\lambda}$ $\lambda = \left\| \frac{\mathrm{tr}D}{(\sigma(D))^{\frac{1}{2}}} \right\|$	$\alpha\beta \neq 0$ $\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}F_1 + u(F_2 + F_3)$ $\epsilon = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr}D)$	$\epsilon\frac{\sigma(D)}{2}F_1 + u_1F_2 + u_2F_3$ $\epsilon = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr}D)$

Daremos uma descrição mais compacta das classes de L-equivalência na Seção 2.3, na qual mostraremos que o sistema aumentado é de posto máximo se e somente se o sistema linear em $\mathbb{R}^2$ é controlável.

2.2.2 Componente Conexa do Grupo Afim

Denotemos por $\mathfrak{g}_{2,1}$ a álgebra de Lie do grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, com a base $\{X, Y\}$ tal que $[X, Y] = Y$ descrita na Subseção 2.1.2. Considere os sistemas

$$\Sigma^{(1,1)} : \mathcal{X} + u(\alpha X + \beta Y)$$

e

$$\Sigma^{(2,1)} : \mathcal{X} + u_1 X + u_2 Y,$$

com campo linear da forma

$$\mathcal{X} = (0, be^x + dy - b),$$

associado à derivação

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Dados dois vetores $((x_1, y_1), t_1)$ e $((x_2, y_2), t_2)$ em $\widehat{\mathfrak{g}_{2,1}}$, o colchete entre eles é dado por

$$[((x_1, y_1), t_1), ((x_2, y_2), t_2)] =$$

$$([(x_1, y_1), (x_2, y_2)] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t_1 b & t_1 d \end{bmatrix} (x_2, y_2) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t_2 b & t_2 d \end{bmatrix} (x_1, y_1), 0) =$$

$$(0, x_1 y_2 - x_2 y_1 + b(t_1 x_2 - t_2 x_1) + d(t_1 y_2 - t_2 y_1), 0)$$

Sejam $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$ e $A_3 = (0, 0, 1)$ e considere a base $\{A_1, A_2, A_3\}$ de $\widehat{\mathfrak{g}_{2,1}}$. Temos que

$$[A_1, A_2] = A_2, \quad [A_2, A_3] = -dA_2, \quad [A_3, A_1] = bA_2.$$

Tomando $E_1 = A_1$, $E_2 = -dA_1 + bA_2 + A_3$ e $E_3 = A_2$, obtemos uma nova base, com $[E_1, E_3] = E_3$ e demais colchetes nulos. Observe que

$$A_3 = E_2 + dE_1 - bE_3.$$

Por fim, fazendo

$$F_1 = \frac{1}{2}(E_2 + E_3), \quad F_2 = \frac{1}{2}(E_2 - E_3), \quad F_3 = 2E_1$$

obtemos a base $\{F_1, F_2, F_3\}$ com colchetes

$$[F_2, F_3] = F_1 - F_2, \quad [F_3, F_1] = F_1 - F_2, \quad [F_1, F_2] = 0.$$

Da Tabela 1.1 vemos que $\widehat{\mathfrak{g}_{2,1}}$ é isomorfo a $\mathfrak{g}_{2,1} \oplus \mathfrak{g}_1$, enquanto que $\widehat{G} = \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times_{\mathcal{X}} \mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$. Para utilizarmos a Tabela 1.2, iremos considerar a base $\{E_1, E_2, E_3\}$.

Os sistemas aumentados são da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : dE_1 + E_2 - bE_3 + u(\alpha E_1 + \beta E_3)$$

e

$$\widehat{\Sigma^{(2,1)}} : dE_1 + E_2 - bE_3 + u_1 E_1 + u_2 E_3.$$

O determinante do posto do primeiro sistema é

$$\begin{vmatrix} d & d+\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -b & \beta - b & d\beta + b\alpha \end{vmatrix} = -\alpha(d\beta + b\alpha),$$

que não se anula se e somente se $\alpha \neq 0$ e $d\beta + b\alpha \neq 0$. Portanto, $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ possui posto máximo se e somente se

$$\alpha \neq 0 \quad \text{e} \quad d\beta + b\alpha \neq 0.$$

Neste caso, a Tabela 1.2 implica que ele é F-equivalente ao sistema

$$E_2 + E_3 + uE_1.$$

Por fim, temos que $\widehat{\Sigma^{(2,1)}}$ possui posto máximo e, pela Tabela 1.2, é F-equivalente ao sistema

$$E_2 + u_1 E_3 + u_2 E_1.$$

Em resumo, temos os seguintes resultados.

Teorema 2.2.1. *O sistema aumentado de um sistema da forma*

$$\mathcal{X} + u(\alpha X + \beta Y)$$

em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ *tem posto máximo se e somente se* $\alpha \neq 0$ *e* $d\beta + b\alpha \neq 0$*, sendo neste caso* F*-equivalente ao sistema*

$$E_2 + E_3 + uE_1$$

em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$*. O sistema aumentado de um sistema da forma* $\mathcal{X} + u_1 X + u_2 Y$ *é* F*-equivalente ao sistema*

$$E_2 + u_1 E_3 + u_2 E_1$$

em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$*.*

Corolário 2.2.2. *Quaisquer dois sistemas*

$$\mathcal{X}_1 + u(\alpha_1 X + \beta_2 Y) \quad \mathcal{X}_2 + u(\alpha_2 X + \beta_2 Y)$$

com

$$\alpha_i \neq 0 \text{ e } d_i\beta_i + b_i\alpha_i \neq 0, \quad i = 1, 2$$

são L*-equivalentes.*

2.3 Controlabilidade do sistema linear e posto máximo do sistema aumentado

Nesse seção provaremos que a controlabilidade de um sistema linear em $\mathbb{R}^2$ é equivalente à condição de o sistema aumentado ter posto máximo. Isto não é válido em $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0$, conforme veremos no final deste seção.

Proposição 2.3.1. *Para o grupo abeliano $\mathbb{R}^2$, um sistema linear é controlavel se e somente se seu sistema aumentado possui posto máximo.*

Demonstração: De fato, um sistema linear é controlavel em $\mathbb{R}^2$ se satisfaz o critério de Kalman (ver Exemplo 1.2.7). Todo sistema linear em $\mathbb{R}^2$ com 2 controles linearmente independentes satisfaz o critério de Kalman e, da mesma forma, os correspondentes sistemas aumentados possuem posto máximo.

Para o sistemas lineares com um *input*, dividimos a demonstração nos mesmos da Seção 2.2.1. Considere então um sistema linear no plano da forma

$$\widehat{\Sigma^{(1,1)}} : D + u(\alpha e_1 + \beta e_2).$$

Vamos chamar a matriz cujas colunas são $\alpha e_1 + \beta e_2$ e $D(\alpha e_1 + \beta e_2)$ de matriz de Kalman. Do que vimos no Exemplo 1.2.7, $\widehat{\Sigma^{(1,1)}}$ é controlável em $\mathbb{R}^2$ se e somente se o determinante da matriz de Kalman é não nulo.

- Se $D = \mathbf{0}$, o critério de Kalman não é satisfeito, bem como o sistema aumentado correspondente não possui posto máximo.

- Se D é da forma
$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a & -ab \\ ab^{-1} & -a \end{bmatrix}$$
então o determinante da matriz de Kalman é, respectivamente, igual a
$$\begin{vmatrix} \alpha & a\beta \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -a\beta^2, \quad \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & a\alpha \end{vmatrix} = a\alpha^2 \quad \text{ou}$$
$$\begin{vmatrix} \alpha & a\alpha - ab\beta \\ \beta & ab^{-1}\alpha - a\beta \end{vmatrix} = \frac{a(\alpha - b\beta)^2}{b}.$$
Comparando com as condições dadas na Tabela 2.1 vemos que a condição de Kalman é equivalente à condição de posto máximo.

- Se D é da forma
$$\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \lambda \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & ab \end{bmatrix},$$
com $\lambda \neq 0$ e $ab \neq 1$, então o determinante da matriz de Kalman é, respectivamente, igual a
$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \lambda(c\alpha + \beta) \end{vmatrix} = \lambda\alpha(c\alpha + \beta), \quad \begin{vmatrix} \alpha & \lambda c\beta \\ \beta & \lambda\beta \end{vmatrix} = \lambda\beta(\alpha - c\beta), \quad \text{ou}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \lambda(\alpha + a\beta) \\ \beta & \lambda(b\alpha + ab\beta) \end{vmatrix} = \lambda(\alpha + a\beta)(b\alpha - \beta).$$

Usando novamente a Tabela 2.1, concluímos que a condição de Kalman ocorre se e somente se o sistema aumentado é de posto máximo.

- Se $\det D < 0$ e D é da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix},$$

então o determinante da matriz de Kalman é dado, respectivamente, por

$$\begin{vmatrix} \alpha & a\alpha + b\beta \\ \beta & c\alpha - \beta \end{vmatrix} = c\alpha^2 - \beta(2a\alpha + b\beta), \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & c\alpha - a\beta \end{vmatrix} = \alpha(c\alpha - 2a\beta)$$

$$\text{ou} \quad \begin{vmatrix} \alpha & a\alpha \\ \beta & c\alpha - a\beta \end{vmatrix} = -2a\alpha\beta$$

e uma vez mais a Tabela 2.1 implica na equivalência desejada.

- Se $\det D > 0$, com D da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix},$$

então o determinante da matriz de Kalman é

$$\begin{vmatrix} \alpha & a\alpha + b\beta \\ \beta & c\alpha - a\beta \end{vmatrix} = c\alpha^2 - 2a\alpha\beta - b\beta^2$$

o que, com o auxílio da Tabela 2.1, garante que a condição de Kalman equivale à condição de posto máximo para o sistema aumentado.

- Se o determinante, o traço e a diagonal secundária de D são não nulos, com $\sigma(D) = 0$ e D da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{(a-c)^2}{4b} & c \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix},$$

então o determinante da matriz de Kalman é igual, respectivamente, a

$$\begin{vmatrix} \alpha & a\alpha + b\beta \\ \beta & -\frac{(a-c)^2}{4b} + c\beta \end{vmatrix} = -\frac{(\alpha(a-c) + 2b\beta)^2}{4b} \quad \text{ou}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & a\alpha \\ \beta & b\alpha + a\beta \end{vmatrix} = b\alpha^2.$$

Desta forma, a Tabela 2.1 assegura a equivalência entre as condições procuradas.

- Se o determinante e o traço de D são não nulos, mas $\sigma(D)$ e os elementos da diagonal secundária são nulos, então D tem a forma
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$
Logo, o determinante da matriz de Kalman é
$$\begin{vmatrix} \alpha & a\alpha \\ \beta & a\beta \end{vmatrix} = 0.$$
Assim, a condição de Kalman não é satisfeita. Como a Tabela 2.1 assegura que, neste caso, o sistema aumentado correspondente também não possui posto máximo, temos a equivalência desejada.

- Se $\det D$ e $\mathrm{tr}D$ são não nulos, com $\sigma(D) < 0$, então D é da forma
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
com b e c diferentes de 0. O determinante da matriz de Kalman é
$$\begin{vmatrix} \alpha & a\alpha + b\beta \\ \beta & c\alpha + d\beta \end{vmatrix} = c\alpha^2 + d\alpha\beta - a\alpha\beta - b\beta^2.$$
Uma vez mais a Tabela 2.1 implica na equivalência entre as condições de Kalman e de posto máximo.

- Por fim, se $\det D \neq 0 \neq \mathrm{tr}D$, $\sigma(D) > 0$ e D tem a forma
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$
então o determinante da matriz de Kalman é igual, respectivamente, a
$$\begin{vmatrix} \alpha & a\alpha + b\beta \\ \beta & c\alpha + d\beta \end{vmatrix} = c\alpha^2 + d\alpha\beta - a\alpha\beta - b\beta^2,$$
$$\begin{vmatrix} \alpha & a\alpha \\ \beta & c\alpha + d\beta \end{vmatrix} = c\alpha^2 + d\alpha\beta - a\alpha\beta$$
$$\text{ou} \quad \begin{vmatrix} \alpha & a\alpha \\ \beta & d\beta \end{vmatrix} = (a-d)\alpha\beta.$$
Portanto, pela Tabela 2.1 temos novamente a equivalência buscada.

A análise dos casos, feita acima, conclui a demonstração. □

O resultado anterior não vale se trocarmos $\mathbb{R}^2$ pela componente conexa do grupo afim. De qualquer forma, a condição de posto máximo para o sistema aumentado é necessária para a controlabilidade do sistema original. Para ver isto, precisamos dos seguintes resultados, que podem ser encontrados no artigo [9]. Todo sistema linear Σ sobre $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ satisfazendo LARC é equivalente, por um automorfismo de grupo, a um sistema da forma

$$\Sigma_N : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{bmatrix} + \alpha X,$$

com $\alpha \neq 0$ e X o elemento da base $\{X, Y\}$ com $[X, Y] = Y$. Um tal sistema é dito estar na **forma normal**, e é controlável se e somente se $d = 0$ (ver [9], Proposição 8 e Teorema 2). Mas, do que vimos na Seção 2.2.2, o sistema aumentado $\widehat{\Sigma_N}$ tem posto máximo se e somente se $\alpha(d \cdot 0 + 1 \cdot \alpha) = \alpha^2 \neq 0$.

Voltando agora a um sistema linear em $\mathbb{R}^2$ da forma

$$\dot{x} = Dx + uY,$$

a condição de Kalman assegura a controlabilidade desde que $\langle Y, DY \rangle$ tenha dimensão dois, ou seja, desde que Y não seja um autovetor de D. Conforme vimos no resultado anterior, para sistemas lineares no plano o sistema aumentado é de posto máximo se e somente se o sistema linear satisfaz a condição de Kalman. Temos assim o seguinte resultado.

Proposição 2.3.2. *O sistema aumentado de um sistema linear*

$$\Sigma^{(1,1)} : D + uY$$

em $\mathbb{R}^2$ *é de posto máximo se e somente se* Y *não é um autovetor de* D.

Com este resultado, e utilizando a Tabela 2.1, apresentamos no teorema a seguir condições suficientes para que dois sistemas lineares no plano, ambos com um *input*, sejam L-equivalentes. A demonstração será omitida, e é obtida comparando os casos correspondentes da já referida tabela, juntamente com a proposição anterior.

Teorema 2.3.3. *Sejam* $\Sigma_1 : D_1 + uY_1$ *e* $\Sigma_2 : D_2 + uY_2$ *sistemas lineares em* $\mathbb{R}^2$ *tais que* Y_i *não é autovetor de* D_i, $i = 1, 2$. *Temos que:*

1. *Se* $\det D_1 = \det D_2 = 0$ *e* $\mathrm{tr} D_1 = \mathrm{tr} D_2$, *então* Σ_1 *e* Σ_2 *são* L*-equivalentes.*

2. *Se* $\mathrm{tr} D_1 = \mathrm{tr} D_2 = 0$ *e* $\det D_1 = \det D_2$, *então* Σ_1 *e* Σ_2 *são* L*-equivalentes.*

3. *Se* $\det D_1 \neq 0 \neq \det D_2$, $\mathrm{tr} D_1 = \mathrm{tr} D_2 \neq 0$, D_1 *e* D_2 *possuem diagonal secundária não nula e* $\sigma(D_1) = \sigma(D_2) = 0$, *então* Σ_1 *e* Σ_2 *são* L*-equivalentes.*

4. *Se* $\det D_1 \neq 0 \neq \det D_2$, $\mathrm{tr} D_1 \neq 0 \neq \mathrm{tr} D_2$, $\sigma(D_1) = \sigma(D_2) < 0$ *e* $\mathrm{sinal}(\mathrm{tr} D_1) = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr} D_2)$, *então* Σ_1 *e* Σ_2 *são* L*-equivalentes.*

5. *Se* $\det D_1 \neq 0 \neq \det D_2$, $\mathrm{tr} D_1 \neq 0 \neq \mathrm{tr} D_2$, $\sigma(D_1) = \sigma(D_2) > 0$ *e* $\mathrm{sinal}(\mathrm{tr} D_1) = \mathrm{sinal}(\mathrm{tr} D_2)$, *então* Σ_1 *e* Σ_2 *são* L*-equivalentes.*

Capítulo 3

Álgebras de Lie de Dimensão 4

Segundo [16] não há uma abordagem unificada para classificar álgebras de Lie. Uma maneira de determinar um isomorfismo entre duas álgebras de Lie de dimensão finita é através dos colchetes dos elementos de sua base. Lembramos que dado $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{X_1, ..., X_n\}$ base, como $[X_i, X_j]$ é um vetor de $\mathfrak{g}$, podemos escreve-lo como combinação linear dos elementos da base, ou seja $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j}^k X_k$. O coeficientes $c_{i,j}^k$ são denominados **constantes de estrutura** da álgebra de Lie

Usaremos classificação das álgebras de Lie será feita via constante de estruturas, ou seja, a partir do seguinte resultado (ver [3] e [18])

Proposição 3.0.1. *Duas álgebras de Lie são isomorfas se, e somente se, possuem as mesmas constantes de estruturas.*

No entanto estamos interessados no caso particular das álgebras de Lie de dimensão 4, mas não todas, e sim aquelas tais que seus grupos de Lie conexos e simplesmente conexos sejam solúveis e não nilpotentes. Destas álgebras estudaremos aquelas que podem ser escritas como um produto semidireto de $\mathbb{R}$ com $\mathbb{R}^3$. Também estudaremos a álgebra de Lie $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$. Estas álgebras foram classificadas por diversos autores, com notações diferentes (veja por exemplo [16] e [4]), mas seguiremos a classificação de [4]. As próximas páginas nos trazem uma descrição das características, que nos interessam destas álgebras. As subálgebras que estudaremos estarão descritas na última parte de cada seção. No entanto, as subálgebras que nos interessam neste contexto são aquelas que contêm o elemento $W = (1, (0, 0, 0))$, exceto no caso da álgebra $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$. Das álgebras que podem ser escritas como um produto semidireto de $\mathbb{R}$ com $\mathbb{R}^3$, isto é, $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$, só descreveremos as subálgebras contendo $W = (1, (0, 0, 0))$. Isto porque nosso objetivo principal é o de estudarmos a controlabilidade de sistemas de controle lineares $(\Sigma(\mathcal{X}, \Delta))$ e a Proposição 1.4.12 nos garante que, dado um sistema $(\Sigma(\mathcal{X}, \Delta))$ que satisfaz a condição do posto, tem-se que $(\Sigma(\mathcal{X}, \Delta))$ é equivalente a um sistema $(\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\Delta}))$, onde $W \in \tilde{\Delta}$. Em resumo, para estudar a controlabilidade de $(\Sigma(\mathcal{X}, \Delta))$ basta estudar a controlabilidade do seu equivalente $(\Sigma(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\Delta}))$ com $W \in \tilde{\Delta}$.

3.0.1 A Álgebra de Lie $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$

Definimos a álgebra de Lie $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$ como aquela tetra dimensional cuja base $\{W, X, Y, Z\}$ satisfaz $[W, X] = X$, $[Y, Z] = Z$, $[W, Y] = [W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = 0$.

Vejamos agora como são as derivações da álgebra de Lie $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$ nesta base. Dado uma transformação linear D:$\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R}) \to \mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{array}{l} D(W) = a_1W + b_1X + c_1Y + d_1Z \\ D(X) = a_2W + b_2X + c_2Y + d_2Z \\ D(Y) = a_3W + b_3X + c_3Y + d_3Z \\ D(Z) = a_4W + b_4X + c_4Y + d_4Z \end{array} \tag{1}$$

Se D é uma derivação então, da operação colchete, temos que:

$$a_2W + b_2X + c_2Y + d_2Z = D(X) = D([W,X]) = [D(W),X] + [W,D(X)] = (a_1 + b_2)X;$$

$$0 = D(0) = D([W,Y]) = [D(W),Y] + [W,D(Y)] = b_3X + d_1Z;$$

$$0 = D(0) = D([W,Z]) = [D(W),Z] + [W,D(Z)] = b_4X + c_1Z;$$

$$0 = D(0) = D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)] = a_3X + d_2Z;$$

$$0 = D(0) = D([X,Z]) = [D(X),Z] + [X,D(Z)] = a_4X + c_2Z$$

e

$$a_4W + b_4X + c_4Y + d_4 = D(Z) = D([Y,Z]) = [D(Y),Z] + [Y,D(Z)] = (c_3 + d_4)Z.$$

Destas igualdades temos $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = d_1 = d_2 = 0$ e portanto as derivações de $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$ na base ordenada {W,X,Y,Z} são as transformações lineares da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

Podemos escrever $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$ na forma matricial da seguinte maneira: tomando

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ e \ Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim temos que $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$ é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$ gerada por W, X, Y, Z com o colchete usual de matrizes.

A álgebra de Lie $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$ também pode ser ser vista como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ com a operação colchete

$$(w,x,y,z) * (w_1,x_1,y_1,z_1) = [0, wx_1 - w_1x, 0, yz_1 - y_1z]$$

As subálgebras de $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$

Usando as as notações anteriores veremos agora as subálgebras Δ de $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$.

Primeiramente, claro que todo subespaço unidimensional de $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$ é subálgebra. Logo para todo vetor $V = \alpha W + \beta X + \gamma Y + \delta Z$ não nulo, o conjunto gerado por V é subálgebra.

$$\Delta = \langle \alpha W + \beta X + \gamma Y + \delta Z \rangle \qquad (0).$$

Vejamos agora as subálgebras bidimensionais Δ de $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$. Suponha primeiro que ela tem um vetor V_1 da forma $V_1 = W + \beta_1 X + \gamma_1 Y + delta_1 Z \in \Delta$. Então Δ pode ser escrito como gerada por V_1 e um vetor não nulo $V_2 = beta_2 X + \gamma_2 Y + \delta_2 Z$. Observe que

$$[V_1, V_2] = b_2 X + (\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) Z.$$

Como estamos supondo que o espaço vetorial gerado por V_1, V_2 é subálgebra, temos que o colchete $[V_1, V_2]$ é combinação linear de V_1 e V_2, isto é,

$$[V_1, V_2] = \beta_2 X + (\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) Z = \mu(W + \beta_1 X + \gamma_1 Y + \delta_1 Z) + \lambda(\beta_2 X + \gamma_2 Y + \delta_2 Z).$$

Claramente aqui, $\mu = 0$, logo

$$[V_1, V_2] = b_2 X + (c_1 d_2 - d_1 c_2) Z = \lambda(\beta_2 X + \gamma_2 Y + \delta_2 Z).$$

Além disso, se $\lambda \neq 1$ então $\beta_2 = 0$ e se $\lambda \neq 0$, temos que $\gamma_2 = 0$. Para simplificarmos a descrição da subálgebra gerada por V_1 e V_2, seguimos com os seguintes casos:

- Caso $\beta_2 X + (\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) Z = \beta_2 X + \gamma_2 Y + \delta_2 Z$ com $\delta_2 \neq 0$ e $\beta_2 \neq 0$. Temos aqui que $\gamma_2 = 0$ e $\gamma_1 = 1$. Ao adotarmos a base $\{V_1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} V_2, \frac{1}{\beta_2}\}$ Podemos então escrever a subálgebra como

$$\Delta = \langle W + Y + dZ, X + d'Z \rangle . \qquad (3.1)$$

- Caso $\beta_2 X + (\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) Z = \beta_2 X + \gamma_2 Y + \delta_2 Z$ com $\delta_2 = 0$ e $\beta_2 \neq 0$. Temos aqui que $\gamma_2 = 0$. Ao adotarmos a base $\{V_1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} V_2, \frac{1}{\beta_2}\}$, podemos então escrever a subálgebra como

$$\Delta = \langle W + cY + dZ, X \rangle . \qquad (3.2)$$

- Caso $\beta_2 X + (\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) Z = \lambda(\beta_2 X + \gamma_2 Y + \delta_2 Z)$ com $\lambda \neq 0$ $\delta_2 \neq 0$ e $\beta_2 = 0$. Temos aqui que $\gamma_2 = 0$. Ao adotarmos a base $\{V_1 - \frac{d_1}{d_2} V_2, \frac{1}{d_2}\}$, podemos então escrever a subálgebra como

$$\Delta = \langle W + bX + cY, Z \rangle . \qquad (3.3)$$

- Caso $\beta_2 X + (\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) Z = 0$ Neste caso $\beta_2 = 0$, e $\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2 = 0$. Veja que devido ao fato de V_2 ser não nulo, temos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_1 Y + \delta_1 Z = \lambda(\gamma_2 Y + \delta_2 Z)$. Assim, podemos simplificar Δ para

$$\Delta = \langle W + bX, cY + dZ \rangle . \qquad (3.4)$$

Procuremos agora as subálgebras Δ de dimensão 2 que não possuem nenhum vetor da forma V_1. Se Δ não tem nenhum vetor da forma de V_1 então todos os vetores são da forma $\beta X + \gamma Y + \delta Z$. Suponha então que Δ possua um vetor da forma $V_3 = X + \gamma_1 Y + \delta_1 Z$. Então existe em Δ um vetor da forma $V_4 = \gamma_2 Y + \delta_2 Z$. Observe que o resultado do colchete entre V_3 e V_4 é

$$[V_3, V_4] = (\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2)Z.$$

Para simplificarmos a descrição da subálgebra gerada por V_3, V_4, seguimos com os seguintes casos:

- Se $(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2) \neq 0$, temos que $(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2)Z = \lambda(\gamma_2 Y + \delta_2 Z)$. Logo, $\gamma_2 = 0$. Assim, podemos descrever Δ como

$$\Delta = \langle X + cY, Z\rangle . \tag{3.5}$$

- Supondo $(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2) = 0$, e sabendo que V_4 é não nulo, temos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_1 Y + \delta_1 Z = \lambda(c_2 Y + d_2 Z)$. Assim, podemos escrever Δ como

$$\Delta = \langle X, cY + dZ\rangle . \tag{3.6}$$

Por último, se Δ não possui vetores da forma de V_1, nem da forma de V_3. Temos que

$$\Delta = \langle Y, Z\rangle . \tag{3.7}$$

Vejamos agora as subálgebras tridimensionais. Dado Δ uma subálgebra de dimensão três, suponha primeiramente que o espaço ortogonal a Δ, $\Delta^\perp$, seja igual a

$$\langle W - bX - cY - dZ\rangle .$$

Então Δ descreve o hiperplano $w = bx + cy + dz$, com w, x, y, z números reais. Note que $\{V_1, V_2, V_3\}$, onde $V_1 = bW + X$,$V_2 = cW + Y$,$V_3 = dW + Z$ é uma base de Δ.

Temos que $[V_1, V_2] = -cX$, como Δ é subálgebra, temos $-cX = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$ e mais, $[V_1, V_3] = -dX$. Com $-dX = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3$. Por fim, $[V_2, V_3] = Z$ Com $Z = \nu_1 V_1 + \nu_2 V_2 + \nu_3 V_3$.

Claramente $\lambda_2 = \lambda_3 = \mu_2 = \mu_3 = \nu_1 = \nu_2 = 0$. Isto implica que $d = 0$. Vejamos agora os seguintes casos para descrevermos as subálgebras:

- Se $b \neq 0$, então $c = 0$ e temos que

$$\Delta = \langle bW + X, Y, Z\rangle . \tag{3.8}$$

- Se $b = 0$ temos que

$$\Delta = \langle X, cW + Y, Z\rangle . \tag{3.9}$$

Vamos estudar agora as subálgebras Δ cujo complementar $\Delta^\perp$ seja da forma

$$\Delta^\perp = \langle -bX + Y - dZ\rangle ,$$

assim Δ descreve o hiperplano $y = bx + dz$. Tome uma base da forma $\{V_1, V_2, V_3\}$ onde $V_1 = W$,$V_2 = X + bY$, e $V_3 = dY + Z$.

Ao realizar a operação colchete entre eles temos que $[V_1, V_2] = X$, sendo Δ subálgebra temos $X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$. Note também que $[V_1, V_3] = 0$ e $0 = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3$. E mais, $[V_2, V_3] = bZ$ Com $bZ = \nu_1 V_1 + \nu_2 V_2 + \nu_3 V_3$.

Dos colchetes acima temos

$$X = \lambda_1 W + \lambda_2 (X + bY) + \lambda_3 (dY + Z) = \lambda_1 W + \lambda_2 X + (\lambda_2 b + \lambda_3 d) Y + \lambda_3 Z,$$

o que implica que $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Se

$$0 = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3 = \mu_1 W + \mu_2 X + (\mu_2 b + \mu_3 d) Y + \mu_3 Z,$$

então $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ e $bZ = \nu_1 V_1 + \nu_2 V_2 + \nu_3 V_3 = \nu_1 W + \nu_2 X + (\nu_2 b + \nu_3 d) Y + \nu_3 Z$, assim $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$.

Isto implica que $b = 0$. Logo Δ pode ser escrito como

$$\Delta = \langle W, X, dY + Z \rangle . \tag{3.10}$$

Suponha agora que o espaço ortogonal a subálgebra é da forma

$$\Delta^{\perp} = \langle X - dZ \rangle ,$$

então Δ descreve o hiperplano $x = dz$. Considere a base da forma $\{V_1, V_2, V_3\}$ onde $\{V_1 = W$,$V_2 = Y$, e $V_3 = dX + Z$.

Temos que $[V_1, V_2] = 0$, como Δ é subálgebra, $X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$. Também, $[V_1, V_3] = dX$ e como Δ é subálgebra, $0 = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3$. Por fim, $[V_2, V_3] = Z$ e $bZ = \nu_1 V_1 + \nu_2 V_2 + \nu_3 V_3$.

Claramente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1 = \mu_2 = \nu_1 = \nu_2 = 0$. Isto implica que $d = 0$. Logo Δ pode ser escrito como

$$\Delta = \langle W, Y, Z \rangle . \tag{3.11}$$

Por último, se o espaço ortogonal a subálgebra é da forma

$$\Delta^{\perp} = \langle Z \rangle ,$$

então Δ descreve o hiperplano $z = 0$. Tomando uma base da forma $\{V_1, V_2, V_3\}$ com $V_1 = W$,$V_2 = Y$ e $V_3 = X$, temos que ao realizar a operação colchete entre eles temos que $[V_1, V_2] = 0$, $[V_1, V_3] = X = V_3$ e $[V_2, V_3] = 0$ Logo

$$\Delta = \langle W, Y, X \rangle . \tag{3.12}$$

é subálgebra.

3.0.2 A Álgebra $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$

Definimos a álgebra de Lie $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$ como anteriormente, a partir da base $\{W, X, Y, Z\}$ satisfazendo $[W, X] = X$ e $[W, Y] = [W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$.

Podemos escrever $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$ na sua forma matricial da seguinte maneira: tomando

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \ Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí temos que $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ com o colchete usual de matrizes.

A álgebra $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$ é como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido com o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1, 0, 0).$$

$\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$ também pode se vista como o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ é tal que

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As Subálgebras de $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$

Descreveremos aqui apenas as subálgebras Δ de $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$ tais que $W \in \Delta$, pois como justificamos no início, a Proposição 1.4.12 garante que para estudarmos a controlabilidade de sistemas de controle lineares $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$, basta estudarmos a controlabilidade dos sistemas onde W pertença a Δ.

Se Δ possui dimensão 1 é claro que

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{0}$$

Se Δ possui dimensão 2 similarmente aos casos anteriores concluímos que

$$\Delta = \langle W, X \rangle \tag{1}$$

ou

$$\Delta = \langle W, cY + dZ \rangle . \tag{2}$$

com c ou d diferentes de 0.

Se Δ possui dimensão 3 então, com cálculos semelhantes ao caso anterior temos

$$\Delta = \langle W, Y, Z \rangle \tag{3}$$

ou

$$\Delta = \langle W, X, cY + dZ \rangle , \tag{4}$$

com c ou d diferentes de 0.

3.0.3 A Álgebra $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$ é definida como aquela cuja base $\{W, X, Y, Z\}$ satisfaz $[W, X] = X$, $[W, Y] = X + Y$ e $[W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$.

Na forma matricial $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$ tem a base descrita por

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; e \; Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E portanto $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ com o colchete usual de matrizes.

Podemos, também, ver $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$ como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ com o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1, 0, 0).$$

A álgebra $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$ é vista também como o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ é tal que

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$

Descreveremos aqui apenas as subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$ tal que $W \in \Delta$, como justificamos previamente.

Se Δ possui dimensão 1

$$\Delta = \langle W \rangle. \tag{3.13}$$

Se Δ tem dimensão 2 então podemos concluir que

$$\Delta = \langle W, X \rangle \tag{3.14}$$

ou

$$\Delta = \langle W, Z \rangle. \tag{3.15}$$

Se Δ possui dimensão 3 temos

$$\Delta = \langle W, X, Z \rangle \tag{3.16}$$

ou

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle. \tag{3.17}$$

3.0.4 A álgebra $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$

Ja a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$ é dada pela base $\{W, X, Y, Z\}$ com $[W, X] = X$, $[W, Y] = Y$ e $[W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Para sua forma matricial temos

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; e \; Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ com o colchete usual de matrizes.

Vamos descrever agora duas outras maneiras de vermos $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$. A primeira é como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido com o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1, wy_1 - w_1 y, 0).$$

Para a segunda maneira $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$ é vista também como o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R})^3$ é tal que

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$

Como já foi argumentado, veremos aqui apenas as subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$ tal que $W \in \Delta$. Com cálculos semelhantes ao primeiro caso temos:

Se Δ possui dimensão 1 então

$$\Delta = \langle W \rangle. \tag{0}$$

Se Δ possui dimensão 2 então

$$\Delta = \langle W, \alpha X + \beta Y \rangle. \tag{1}$$

com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ou

$$\Delta = \langle W, Z \rangle. \tag{2}$$

Se Δ possui dimensão dimensão 3

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle. \tag{5}$$

ou

$$\Delta = \langle W, \alpha X + \beta Y, Z \rangle. \tag{6}$$

com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

3.0.5 A álgebra $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$ é definida pela base $\{W, X, Y, Z\}$ tal que $[W, X] = X$, $[W, Y] = \lambda Y$ e $[W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$, onde λ é um número real que se encontra em $[-1, 0) \cup (0, 1)$. No caso em que $\lambda = -1$ nós denotaremos a álgebra de Lie por $\mathfrak{g}^0_{3,4} \oplus \mathbb{R}$ e nos demais casos nós denotaremos por $\mathfrak{g}^\alpha_{3,4} \oplus \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$ onde a relação entre λ e α é dada por $\lambda = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$. Podemos escrever $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$ na forma matricial da seguinte maneira: tomando

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; e \; Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e assim temos que $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$.

Tmabém podemos escrever $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$ como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido com o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1, \lambda(wy_1 - w_1 y), 0).$$

ou como o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ é dado por

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$

Descreveremos as subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$ tal que $W \in \Delta$:

Se Δ possui dimensão 1 então

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.18}$$

Se Δ possui dimensão 2 então

$$\Delta = \langle W, X \rangle \tag{3.19}$$

ou

$$\Delta = \langle W, Y \rangle \tag{3.20}$$

ou

$$\Delta = \langle W, Z \rangle . \tag{3.21}$$

Se Δ possui dimensão 3 então

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle . \tag{3.22}$$

ou

$$\Delta = \langle W, Y, Z \rangle . \tag{3.23}$$

ou

$$\Delta = \langle W, X, Z \rangle . \tag{3.24}$$

3.0.6 A álgebra $\mathfrak{g}_{3,5}^{0} \oplus \mathbb{R}$

Definimos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,5}^{0} \oplus \mathbb{R}$ pela base $\{W, X, Y, Z\}$ com $[W, X] = Y$, $[W, Y] = -X$ e $[W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Para a forma matricial temos

Podemos escrever $\mathfrak{g}_{3,5}^{0} \oplus \mathbb{R}$ na forma matricial da seguinte maneira: tomando

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \ Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos também que $\mathfrak{g}_{3,5}^{0} \oplus \mathbb{R}$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ com o colchete usual de matrizes e como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ usamos o colchete o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y1, z_1)] = (0, w_1 y - w y_1, w x_1 - w_1 x, 0).$$

Adicionalmente, $\mathfrak{g}_{3,5}^{0} \oplus \mathbb{R}$ também pode ser descrita como o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ satisfaz

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{3,5}^{0} \oplus \mathbb{R}$

Para as subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{3,5}^{0} \oplus \mathbb{R}$ com $W \in \Delta$, temos

Para dimensão 1,

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.25}$$

Para dimensão 2,

$$\Delta = \langle W, Z \rangle . \tag{3.26}$$

E para dimensão 3,

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle . \tag{3.27}$$

3.0.7 A álgebra $\mathfrak{g}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{R}$

A álgebra$\mathfrak{g}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{R}$ é definida pela base $\{W, X, Y, Z\}$ satisfazendo $[W, X] = \alpha X + Y$, $[W, Y] = -X + \alpha Y$ e $[W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$, ela tem forma matricial dada por

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim temos que $\mathfrak{g}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{R}$. é subálgebra de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ com o colchete usual de matrizes.

Como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ nós colocamos o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y1, z_1)] = (0, \alpha(wx_1 - xw_1) - wy_1 + yw_1, wx_1 - xw_1 + \alpha(wy_1 - yw_1).$$

Adicionalmente $\mathfrak{g}_{3,5}^{0} \oplus \mathbb{R}$ também pode ser descrita como o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ é tal que

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{R}$

As subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{R}$ tal que $W \in \Delta$ são:

Com dimensão 1,

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.28}$$

Com dimensão 2,

$$\Delta = \langle W, Z \rangle . \tag{3.29}$$

E comdimensão 3,

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle . \tag{3.30}$$

3.0.8 A Álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,2}^{\alpha}$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,2}^{\alpha}$ é dada pela base $\{W, X, Y, Z\}$ onde $[W, X] = X$, $[W, Y] = X + Y$, $[W, Z] = \alpha Z$ e $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$, onde α é um número real com $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$

Podemos escrever $\mathfrak{g}_{4,2}^{\alpha}$ na forma matricial a partir de

$$W = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ introduzimos o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y_1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1 + wy_1 - yw_1, wy_1 - yw_1, \alpha(wz_1 - zw_1)).$$

Ela também pode ser escrita como $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ é um homomorfismo definido por

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{4,2}^{\alpha}$

As subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{4,2}^{\alpha}$ tal que $W \in \Delta$ são

Para dimensão 1 dada por

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.31}$$

Para dimensão 2,

$$\Delta = \langle W, Z \rangle \tag{3.32}$$

ou

$$\Delta = \langle W, X \rangle . \tag{3.33}$$

E para dimensão 3,

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle \tag{3.34}$$

ou

$$\Delta = \langle W, X, Z \rangle . \tag{3.35}$$

3.0.9 A Álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,2}^{1}$

Definimos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,2}^{1}$ como aquela cuja base $\{W, X, Y, Z\}$ satisfaz $[W, X] = X$, $[W, Y] = X + Y$, $[W, Z] = Z$ e $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Na forma matricial temos

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \ Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munimos com colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y_1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1 + wy_1 - yw_1, wy_1 - yw_1, wz_1 - zw_1).$$

e na forma de produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ com $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ sendo um homomorfismo definido por

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{4,2}^1$

As subálgebras de $\mathfrak{g}_{4,2}^1$ contendo $W \in \Delta$ são:

Com dimensão 1

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.36}$$

Com dimensão 2,

$$\Delta = \langle W, bX + cZ \rangle . \tag{3.37}$$

E com dimensão 3,

$$\Delta = \langle W, X, cY + dZ \rangle . \tag{3.38}$$

3.0.10 A Álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,3}$

Definimos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,3}$ pela base $\{W, X, Y, Z\}$ com as contantes de estrutura $[W, X] = X$, $[W, Z] = Y$ e $[W, Y] = [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Na forma matricial escrevemos

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \ Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim temos que $\mathfrak{g}_{4,3}$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(4\mathbb{R})$ com o colchete usual de matrizes.

Outra duas formas de escrevermos $\mathfrak{g}_{4,3}$ é como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido com colchete $[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y_1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1, wz_1 - zw_1, 0)$ ou como o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ é definido por

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{4,3}$

As subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{4,3}$ tal que $W \in \Delta$ são

Com dimensão 1 dada por

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.39}$$

Com dimensão 2 dada por

$$\Delta = \langle W, X \rangle \tag{3.40}$$

ou por

$$\Delta = \langle W, Y \rangle . \tag{3.41}$$

E com dimensão 3 dada por

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle \tag{3.42}$$

ou por

$$\Delta = \langle W, Y, Z \rangle . \tag{3.43}$$

3.0.11 A Álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,4}$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,4}$ é determinada pela base $\{W, X, Y, Z\}$ com $[W, X] = X$, $[W, Y] = X + Y$, $[W, Z] = Y + Z$ e $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$

Para a forma matricial temos

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \ Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim temos que $\mathfrak{g}_{4,4}$ é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ gerada por W, X, Y, Z com o colchete usual de matrizes, $\mathfrak{g}_{4,4}$ também é descrita como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido com colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y_1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1 + wy_1 + yw_1, wy_1 + yw_1 + wz_1 - zw_1, wz_1 - zw_1).$$

Também é o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ com $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ definido por

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{4,4}$

As subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{4,4}$ com $W \in \Delta$.

Se Δ possui dimensão 1 então

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.44}$$

Se Δ possui dimensão 2 então

$$\Delta = \langle W, X \rangle . \tag{3.45}$$

Se Δ possui dimensão 3 então

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle . \tag{3.46}$$

3.0.12 A Álgebra $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ é descrita pela base $\{W, X, Y, Z\}$ tal que $[W, X] = X$, $[W, Y] = \alpha Y$, $[W, Z] = \beta Z$ e $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Aqui α e β são números reais distintos pertencentes ao conjunto $[-1, 0) \cup (0, 1)$. Tomando

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; e \; Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ gerada por W, X, Y, Z com o colchete usual de matrizes.

Como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ usamos o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y_1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1, \alpha(wy_1 + yw_1), \beta(wz_1 - zw_1))$$

e como produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ tomamos $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ como

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$

As subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ tal que $W \in \Delta$ são descritas também de acordo com a dimensão

Se Δ possui dimensão 1 então

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.47}$$

Se Δ possui dimensão 2 então

$$\Delta = \langle W, X \rangle \tag{3.48}$$

ou

$$\Delta = \langle W, Y \rangle \tag{3.49}$$

ou então

$$\Delta = \langle W, Z \rangle . \tag{3.50}$$

Se Δ possui dimensão 3 então

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle \tag{3.51}$$

ou

$$\Delta = \langle W, X, Z \rangle \tag{3.52}$$

ou ainda

$$\Delta = \langle W, Y, Z \rangle . \tag{3.53}$$

3.0.13 A Álgebra $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$

Definimos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$ por $\{W, X, Y, Z\}$ com $[W, X] = X$, $[W, Y] = Y$, $[W, Z] = \beta Z$ e $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Aqui β é um número real diferente de zero.

Na forma matricial temos

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \ Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ temos colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y_1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1, wy_1 + yw_1, \beta(wz_1 - zw_1)),$$

e como produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$, temos $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ definido por

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$

As subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$ tal que $W \in \Delta$ são:

Para dimensão 1 a subálgebra

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.54}$$

Para dimensão 2 temos a subálgebra

$$\Delta = \langle W, \alpha X + \beta Y \rangle \tag{3.55}$$

com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ou a subálgebra

$$\Delta = \langle W, Z \rangle . \tag{3.56}$$

E para dimensão 3 então

$$\Delta = \langle W, X, Y \rangle \tag{3.57}$$

ou

$$\Delta = \langle W, \alpha X + \beta Y, Z \rangle \tag{3.58}$$

com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

3.0.14 A Álgebra $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$ é representada pela base $\{W, X, Y, Z\}$ com $[W, X] = X$, $[W, Y] = Y$, $[W, Z] = Z$ e $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$.

Podemos escrever $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$ na forma matricial tomando

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \ Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ temos o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y_1, z_1)] = (0, wx_1 - xw_1, wy_1 + yw_1, \beta(wz_1 - zw_1)).$$

Por fim, $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$ por ser vista como o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1})$ é um homomorfismo definido por

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$

As subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$ tal que $W \in \Delta$ são classificadas pela dimensão.

Se Δ possui dimensão 1 então

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.59}$$

Se Δ possui dimensão 2 então

$$\Delta = \langle W, aX + bY + cZ \rangle \tag{3.60}$$

com $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Se Δ possui dimensão 3 então

$$\Delta = \langle W, \alpha_1 x + \beta_1 Y + \gamma_1 Z, \alpha_2 x + \beta_2 Y + \gamma_2 Z \rangle \tag{3.61}$$

com $\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$ e $\alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z$ são vetores linearmente independentes de $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$.

3.0.15 A Álgebra $\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$

E por fim, $\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ é dada pela base $\{W, X, Y, Z\}$ com $[W, X] = \alpha X$, $[W, Y] = \beta Y - Z$, $[W, Z] = Y + \beta Z$ e $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Para a forma matricial tome

$$W = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \ Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ temos o colchete

$$[(w, x, y, z), (w_1, x_1, y_1, z_1)] = (0, \alpha(wx_1 - xw_1), \beta(wy_1 + yw_1) + wz_1 - zw_1, -wy_1 + yw_1 + \beta(wz_1 - zw_1))$$

e como o produto semidireto $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$,$\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$ é um homomorfismo definido por

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & -1 & \beta \end{bmatrix}.$$

As Subálgebras de $\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$

As subálgebras Δ de $\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ tal que $W \in \Delta$ são:

Com dimensão 1,

$$\Delta = \langle W \rangle . \tag{3.62}$$

Com dimensão 2,

$$\Delta = \langle W, X \rangle . \tag{3.63}$$

E com dimensão 3,

$$\Delta = \langle W, Y, Z \rangle . \tag{3.64}$$

3.1 Grupos de Lie

Esta seção dedica-se a descrever todos os grupos de Lie conexos e simplesmente conexos das álgebras de Lie descritas na seção 3. É construido primeiramente o grupo de Lie de matrizes, seguido por sua forma em $\mathbb{R}^4$. Deste últimos obteremos os campos invariantes à esquerda e os campos lineares do grupo de Lie. Teremos, portanto, ao final desta seção todos os objetos necessários para descrever nossos sistemas de controle lineares.

3.1.1 $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$

Ao calcularmos a exponencial dos elementos da álgebra $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$, obtemos o grupo de Lie $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, que é o grupo formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & e^{w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & e^{y} \end{bmatrix}$$

munido com a multiplicação usual de matrizes. A partir do produto de matrizes do tipo acima definimos em $\mathbb{R}^4$ o produto, assim $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ podde ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ $g_1 * g = (w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + e^{w_1}x, y_1 + y, z_1 + e^{y_1}z)$. Podemos então representar a diferencial da aplicação translação à esquerda, dL_{g_1} como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{w_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{y_1} \end{bmatrix}.$$

Logo, se V é um campo vetorial invariante à esquerda tal que $V(0) = (a, b, c, d)$, temos que para todo $g_1 \in \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$

$$V(g_1) = V(g_1 * 0) = dL_{g_1}(V(0)) = dL_{g_1}((a, b, c, d)) = (a, be^{w_1}, c, de^{y_1}),$$

onde $g_1 = (w_1, x_1, y_1, z_1)$.

Portanto seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma $V(g) = (a, be^{w}, c, de^{y})$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0)$, $X(g) = (0, e^{w}, 0, 0)$,$Y(g) = (0, 0, 1, 0)$ e $Z(g) = (0, 0, 0, e^{y})$, temos que $[W, X] = X, [Y, Z] = Z$ e $[W, Y] = [W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = 0$. Como tanto esta álgebra, quanto aquela gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas, elas são isomorfas.

Vejamos agora como são campos lineares do grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ Seja $\mathcal{X} = (f_1, f_2, f_3, f_4) = f_1\frac{\partial}{\partial w} + f_2\frac{\partial}{\partial x} + f_3\frac{\partial}{\partial y} + f_4\frac{\partial}{\partial z}$ o campo linear relacionado com a derivação D. Então temos as seguintes igualdades

$$[-\mathcal{X}, W] = [-f_1\frac{\partial}{\partial w} - f_2\frac{\partial}{\partial x} - f_3\frac{\partial}{\partial y} - f_4\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w}] = \frac{\partial f_1}{\partial w}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial w}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$[-\mathcal{X}, X] = [-f_1\frac{\partial}{\partial w} - f_2\frac{\partial}{\partial x} - f_3\frac{\partial}{\partial y} - f_4\frac{\partial}{\partial z}, e^{w}\frac{\partial}{\partial x}] = e^{w}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial w} + (-f_1e^{w} + e^{w}\frac{\partial f_2}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x} + e^{w}\frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + e^{w}\frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$[-\mathcal{X}, Y] = [-f_1\frac{\partial}{\partial w} - f_2\frac{\partial}{\partial x} - f_3\frac{\partial}{\partial y} - f_4\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}] = \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$[-\mathcal{X}, Z] = [-f_1\frac{\partial}{\partial w} - f_2\frac{\partial}{\partial x} - f_3\frac{\partial}{\partial y} - f_4\frac{\partial}{\partial z}, e^{y}\frac{\partial}{\partial z}] = e^{y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + e^{y}\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + e^{y}\frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + (-f_3e^{y} + e^{y}\frac{\partial f_4}{\partial z})\frac{\partial}{\partial z}$$

Por outro lado, de (1) temos que

$$D(W) = b_1 X = e^w b_1 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$D(X) = b_2 X = e^w b_2 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$D(Y) = d_3 Z = e^y d_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$D(Z) = d_4 Z = e^y b_4 \frac{\partial}{\partial z}$$

Disto segue que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^w b_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial w} = \frac{\partial f_3}{\partial w} = \frac{\partial f_4}{\partial w} = 0$$

$$(\frac{\partial f_1}{\partial x}) = \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_4}{\partial x} = 0$$

$$-f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} = b_2$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y} = e^y d_3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$$

$$(\frac{\partial f_1}{\partial z}) = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

$$-f_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z} = d_4$$

Assim, temos que $f_1 = f_3 = 0$, $f_2 = b_1(e^w - 1) + b_2 x$ e $f_3 = d_3(e^y - 1) + d_4 z$. Portanto os campos lineares do grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ são da forma $\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x, 0, d_3(e^y - 1) + d_4 z)$, $b_1, b_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$.

3.1.2 $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}^2$

O grupo de Lie $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}^2$ é obtido a partir da exponencial dos elementos da álgebra $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$. Este grupo é então formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & e^w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^z \end{bmatrix}$$

munido com a multiplicação usual de matrizes. A partir do produto de matrizes do tipo acima induzimos em $\mathbb{R}^4$ a operação $(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + e^{w_1}x, y_1 + y, z_1 + z)$. Assim $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}^2$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$.

Seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma $V(g) = (a, be^w, c, d)$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0)$, $X(g) = (0, e^w, 0, 0)$,$Y(g) = (0, 0, 1, 0)$ e $Z(g) = (0, 0, 0, 1)$, temos que as operações colchete são $[W, X] = X, [W, Y] = [W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Como tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas, elas são isomorfas.

Os campos lineares do grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}^2$ são da forma $\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1) + b_2x, c_1w + c_3y + c_4z, d_1w + d_3y + d_4z)$, b_1, b_2, c_1, c_3, c_4, d_1, d_3, $d_4 \in \mathbb{R}$. Seguindo esta mesma base ordenada, temos que a derivação da álgebra de Lie relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$ é a transformação linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

3.1.3 $\mathrm{G}_{3,2} \times \mathbb{R}$

O grupo de Lie da álgebra $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$ é definida via exponenxial dos elemntos desta álgebra e denotado por $\mathrm{G}_{3,2} \times \mathbb{R}$. Seus elementos são matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & e^w & 0 & 0 \\ x & we^w & e^w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^z \end{bmatrix}$$

com a multiplicação usual de matrizes. O grupo de Lie $\mathrm{G}_{3,2} \times \mathbb{R}$, pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a seguinte operação: $(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + w_1e^{w_1}y + e^{w_1}x, y_1 + e^{w_1}y, z_1 + z)$.

Seus campos de vetores invariantes a esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma

$$V(g) = (a, be^w + cwe^w, ce^w, d)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0), X(g) = (0, e^w, 0, 0), Y(g) = (0, we^w, e^w, 0), Z(g) = (0, 0, 0, 1)$ temos que $[W, X] = X, [W, Y] = X + Y, [Y, Z] = [W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = 0$. Como, tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas, elas são isomorfas.

Seus campos Lineares são da forma

$$\mathcal{X} = (0, (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1we^w + b_2x + b_3y, c_1(e^w - 1) + b_2y, d_1w + d_4z)$$

e sua derivação escrita como matriz de transformação linear na base W, X, Y, Z é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

3.1.4 $\mathrm{G}_{3,3} \times \mathbb{R}$

A exponencial dos elementos da álgebra $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$ define o grupo de Lie $\mathrm{G}_{3,4} \times \mathbb{R}$, que é o grupo formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & e^w & 0 & 0 \\ y & 0 & e^w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^z \end{bmatrix}$$

munido com a multiplicação usual de matrizes. O grupo de Lie $\mathrm{G}_{3,3} \times \mathbb{R}$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$, onde $*$ é a seguinte operação $(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + e^{w_1}x, y_1 + e^{w_1}y, z_1 + z)$.

Seus campos de vetores invariantes a esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma

$$V(g) = (a, be^w, ce^w, d)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0), X(g) = (0, e^w, 0, 0), Y(g) = (0, 0, e^w, 0), Z(g) = (0, 0, 0, 1)$ temos que $[W, X] = X, [W, Y] = Y, [Y, Z] = [W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = 0$. Como tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas, elas são isomorfas.

Seus campos Lineares são da forma

$$\mathcal{X} = (0, (b_1(e^w - 1) + b_2x + b_3y, c_1(e^w - 1) + c_2x + c_3y, d_1w + d_4z)$$

e sua derivação escrita como matriz de transformação linear na base W, X, Y, Z é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

3.1.5 $\mathrm{G}^{\alpha}_{3,4} \times \mathbb{R}$ e $\mathrm{G}^{0}_{3,4} \times \mathbb{R}$

Devido a semelahança de contrução destes dois grupos, vamos usar uma notação única para eles aqui, sem diferenciar o sobreescrito α e 0. Ao calcularmos a exponencial dos elementos da álgebra $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$ obtemos o grupo de Lie $\mathrm{G}_{3,4} \times \mathbb{R}$, que é o grupo formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & e^w & 0 & 0 \\ y & 0 & e^{\lambda w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^z \end{bmatrix},$$

onde λ é um número real dentro do conjunto $[-1, 0) \cup (0, 1)$, munido com a multiplicação usual de matrizes. Definido em $\mathbb{R}^4$ a operação $*$ herdada do produto de matrizes, o grupo de Lie $\mathrm{G}_{3,4} \times \mathbb{R}$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + e^{w_1}x, y_1 + e^{\lambda w_1}y, z_1 + z)$.

Seus campos de vetores invariantes a esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma

$$V(g) = (a, be^w + cwe^{\lambda w}, ce^w, d)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0), X(g) = (0, e^w, 0, 0), Y(g) = (0, 0, e^{\lambda w}, 0), Z(g) = (0, 0, 0, 1)$ temos que $[W, X] = X, [W, Y] = \lambda Y, [Y, Z] = [W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = 0$. Esta álgebra e a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas, então são isomorfas.

Seus campos Lineares são da forma

$$\mathcal{X} = (0, (b_1(e^w - 1) + b_2 x, c_1(e^{\lambda w} - 1) + c_3 y, d_1 w + d_4 z)$$

e sua derivação, escrita como matriz de transformação linear na base W, X, Y, Z, é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

3.1.6 $\mathrm{G}^0_{3,5} \times \mathbb{R}$

Ao calcularmos a exponencial dos elementos da álgebra $\mathfrak{g}^0_{3,5} \oplus \mathbb{R}$ obtemos o grupo de Lie $\mathrm{G}^0_{3,5} \times \mathbb{R}$, que é o grupo formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & \cos(w) & -\sin(w) & 0 \\ y & \sin(w) & \cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^z \end{bmatrix}$$

munido com a multiplicação usual de matrizes. Herdado do Grupo de Lie de Matrizes descrito acima, o grupo de Lie $\mathrm{G}^0_{3,5} \times \mathbb{R}$,pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a seguinte operação: $(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + \cos(w_1)x - \sin(w_1)y, y_1 + \sin(w_1)x + \cos(w_1)y, z_1 + z)$.

Seus campos de vetores invariantes a esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma

$$V(g) = (a, b\cos(w) - c\sin(w), -b\sin(w) - c\cos(w), d)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0), X(g) = (0, \cos(w), -\sin(w), 0), Y(g) = (0, -\sin(w), -\cos(w), 0), Z(g) = (0, 0, 0, 1)$ temos que $[W, X] = Y, [W, Y] = -X, [Y, Z] = [W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = 0$. Como tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas, elas são isomorfas.

Seus campos Lineares são da forma

$$\mathcal{X} = (0, b_1\sin(w) + c_1(\cos(w) - 1) + b_2 x + b_3 y, c_1\sin(w) + b_1(1 - \cos(w)) - b_3 x + b_2 y, d_1 w + d_4 z),$$

e sua derivação escrita como matriz de transformação linear na base W, X, Y, Z é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

3.1.7 $G_{3,5}^\alpha \times \mathbb{R}$

A exponencial dos elementos da álgebra $\mathfrak{g}_{3,5}^\alpha \oplus \mathbb{R}$ resulta no o grupo de Lie $G_{3,5}^\alpha \times \mathbb{R}$, formado pelas matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & e^{\alpha w}\cos(w) & -e^{\alpha w}\sin(w) & 0 \\ y & e^{\alpha w}\sin(w) & e^{\alpha w}\cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^z \end{bmatrix}.$$

O grupo de Lie $G_{3,5}^\alpha \times \mathbb{R}$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a operação $(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + \cos(w_1)x - \sin(w_1)y, y_1 + \sin(w_1)x + \cos(w_1)y, z_1 + z)$.

Seus campos de vetores invariantes a esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma

$$V(g) = (a, be^{\alpha w}\cos(w) - ce^{\alpha w} sin(w), be^{\alpha w}\sin(w) + ce^{\alpha w}\cos(w), d)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0), X(g) = (0, \cos(w), \sin(w), 0), Y(g) = (0, -\sin(w), \cos(w), 0), Z(g) = (0, 0, 0, 1)$ temos que $[W, X] = Y, [W, Y] = -X, [Y, Z] = [W, Z] = [X, Y] = [X, Z] = 0$. Esta álgebra e a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas então elas são isomorfas.

Seus campos Lineares são da forma

$$\mathcal{X} = (0, \frac{e^{\alpha w}(\sin(w)(b - \alpha c) + cos(w)(\alpha b + c)) + (-\alpha b - c)}{\alpha^2 + 1} + b_2 x + b_3 y,$$

$$\frac{e^{\alpha w}(\sin(w)(\alpha b + c) + cos(w)(\alpha c - b)) + (-\alpha c + b)}{\alpha^2 + 1} - b_3 x + b_2 y, d_1 + d_4 z)$$

e sua derivação escrita como matriz de transformação linear na base W, X, Y, Z é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

3.1.8 $G_{4,2}^\alpha$

Ao calcularmos a exponencial dos elementos da álgebra $\mathfrak{g}_{4,2}^\alpha$ obtemos o grupo de Lie $G_{4,2}^\alpha$ que é o grupo formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} e^{\alpha w} & 0 & 0 & z \\ 0 & e^w & \alpha w e^w & \alpha x \\ 0 & 0 & e^w & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O grupo de Lie $G_{4,2}^\alpha$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a operação:

$$(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, \alpha x e^{w_1} + \alpha e^{w_1} w_1 y + \alpha x_1, e^{w_1} y + y_1, e^{\alpha w_1} z + z_1)$$

Seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma $V(g) = (a, b\alpha e^w + c\alpha we^w, ce^w, de^{\alpha w})$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0)$, $X(g) = (0, \alpha e^w, 0, 0)$,$Y(g) = (0, \alpha we^w, e^w, 0)$ e $Z(g) = (0, 0, 0, e^{\alpha w})$, temos que $[W, X] = X, [W, Y] = X + Y, [W, Z] = \alpha Z, [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Como tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas, elas são isomorfas.

Os campos lineares do grupo $G^\alpha_{4,2}$ são da forma $\mathcal{X} = (0, (\alpha e^w - 1)(b_1 - c_1) + c_1\alpha we^w + b_2x + b_3\alpha y, c_1(e^w - 1) + b_2y, \frac{d_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + d_4z)$ Seguindo esta mesma base ordenada, temos que a derivação da álgebra de Lie relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$ é a transformação linear

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

3.1.9 $G^1_{4,2}$

A exponencial dos elementos de $\mathfrak{g}^1_{4,2}$ define o grupo de Lie $G^1_{4,2}$ que é dado pelas matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} e^w & 0 & 0 & z \\ 0 & e^w & we^w & x \\ 0 & 0 & e^w & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

munido com a multiplicação usual de matrizes. Herdado do Grupo de Lie de Matrizes descrito acima, o grupo de Lie $G^1_{4,2}$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a seguinte operação:

$$(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, xe^{w_1} + e^{w_1}w_1y + x_1, e^{w_1}y + y_1, e^{w_1}z + z_1)$$

Seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma $V(g) = (a, be^w + cwe^w, ce^w, de^w)$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0)$, $X(g) = (0, e^w, 0, 0)$,$Y(g) = (0, we^w, e^w, 0)$ e $Z(g) = (0, 0, 0, e^z)$, temos que $[W, X] = X, [W, Y] = X + Y, [W, Z] = Z, [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Como tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas, elas são isomorfas.

Os campos lineares do grupo $G^1_{4,2}$ são da forma

$$\mathcal{X} = (0, (e^w - 1)(b_1 - c_1) + c_1we^w + b_2x + b_3y + b_4z, c_1(e^w - 1) + b_2y, d_1(e^w - 1) + d_3y + d_4z)$$

Seguindo esta mesma base ordenada, temos que a derivação da álgebra de Lie relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$ é a transformação linear

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

3.1.10 $\mathrm{G}_{4,3}$

Ao calcularmos a exponencial dos elementos da álgebra $\mathfrak{g}_{4,3}$ obtemos o grupo de Lie $\mathrm{G}_{4,3}$ que é o grupo formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} e^w & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & w & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O grupo de Lie $\mathrm{G}_{4,3}$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a seguinte operação

$$(w_1, x_1, y_1, z_1)(w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + e^{w_1}x, y_1 + y + w_1 z, z_1 + z)$$

Seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma $V(g) = (a, be^w, c + dw, d)$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0)$, $X(g) = (0, e^w, 0, 0)$,$Y(g) = (0, 0, 1, 0)$ e $Z(g) = (0, 0, w, 1)$, temos que $[W, X] = X$, $[W, Z] = Y$, $[W, Y] = [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$ Tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes são isomorfas.

Os campos lineares do grupo $\mathrm{G}_{4,3}$ são da forma

$$\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x, \frac{d_1}{2}w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z, d_1 w + c_3 z)$$

Seguindo esta mesma base ordenada, temos que a derivação da álgebra de Lie relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$ é a transformação linear

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

3.1.11 $\mathrm{G}_{4,4}$

A álgebra $\mathfrak{g}_{4,4}$ gera o grupo de Lie $\mathrm{G}_{4,4}$ que é formado pelas matrizes

$$\begin{bmatrix} e^w & we^e & \frac{1}{2}w^2e^w & z \\ 0 & e^w & we^w & x \\ 0 & 0 & e^w & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O grupo de Lie $\mathrm{G}_{4,4}$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a seguinte operação

$$(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + e^{w_1}x + w_1 e^{w_1}y + \frac{1}{2}w_1^2 e^{w_1}z, y_1 + e^{w_1}y + w_1 e^{w_1}z, z_1 + e^{w_1}z)$$

Seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma $V(g) = (a, be^w + cwe^w + \frac{d}{2}w^2e^w, ce^w + dwe^w, de^w)$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0)$, $X(g) = (0, e^w, 0, 0)$,$Y(g) = (0, we^w, e^w, 0)$ e $Z(g) = (0, \frac{1}{2}w^2e^w, we^w, e^w)$, temos que $[W,X]=X$, $[W,Y]=X+Y$, $[W,Z]=Y+Z$ $[X,Y]=[X,Z]=[Y,Z]=0$ Esta álgebra e a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas, então elas são isomorfas.

Os campos lineares do grupo $\mathrm{G}_{4,4}$ são da forma

$$\mathcal{X}=(0, b_2x+b_3y+b_4z+(b_1-c_1+d_1)(e^w-1)+(c_1-d_1)we^w+\frac{d_1}{2}w^2e^w,$$

$$b_2y+b_3z+(c_1-d_1)(e^w-1)+d_1we^w, b_2z+d_1(e^w-1))$$

Seguindo esta mesma base ordenada, temos que a derivação da álgebra de Lie relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$ é a transformação linear

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ d_1 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

3.1.12 $\mathrm{G}_{4,5}^{\alpha,\beta}$

Ao calcularmos a exponencial dos elementos da álgebra $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ obtemos o grupo de Lie $\mathrm{G}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ que é formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} e^w & 0 & 0 & z \\ 0 & e^\alpha & 0 & x \\ 0 & 0 & e^\beta & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O grupo de Lie $\mathrm{G}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4,*)$ onde $*$ é a seguinte operação: $(w_1,x_1,y_1,z_1)*(w,x,y,z)=(w_1+w, x_1+e^wx, y_1+e^{\alpha w}y, z_1+e^{\beta w}z)$

Seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g=(w,x,y,z)$ são da forma $V(g)=(a, be^w, ce^{\alpha w}, de^{\beta w})$ $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W,X,Y,Z\}$ onde $W(g)=(1,0,0,0)$, $X(g)=(0,e^w,0,0)$,$Y(g)=(0,0,e^{\alpha w},0)$ e $Z(g)=(0,0,0,e^{\beta w})$, temos que $[W,X]=X$, $[W,Y]=\alpha X$, $[W,Z]=\beta Y$ $[X,Y]=[X,Z]=[Y,Z]=0$ Tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes são isomorfas.

Os campos lineares do grupo $\mathrm{G}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ são da forma

$$\mathcal{X}=(0, b_1(e^w-1)+b_2x, \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w}-1)+c_3y, \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w}-1)+d_4z)$$

Seguindo esta mesma base ordenada, temos que a derivação da álgebra de Lie relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$ é a transformação linear

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

3.1.13 $\mathrm{G}_{4,5}^{1,\beta}$

Este grupo é gerado, via exponencial, pelos elementos da álgebra $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$ e é formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} e^w & 0 & 0 & z \\ 0 & e^w & 0 & x \\ 0 & 0 & e^\beta & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O grupo de Lie $\mathrm{G}_{4,5}^{1,\beta}$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a seguinte operação: $(w_1, x_1, y_1, z_1)(w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + e^w x, y_1 + e^w y, z_1 + e^{\beta w} z)$

Seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma $V(g) = (a, be^w, ce^w, de^{\beta w})$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0)$, $X(g) = (0, e^w, 0, 0)$,$Y(g) = (0, 0, e^w, 0)$ e $Z(g) = (0, 0, 0, e^{\beta w})$, temos que $[W, X] = X$, $[W, Y] = Y$, $[W, Z] = \beta Z$ $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$ Como tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes possuem as mesmas contantes de estruturas então elas são isomorfas.

Os campos lineares do grupo $\mathrm{G}_{4,5}^{1,\beta}$ são da forma

$$\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y, \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_2 x + c_3 y, \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z)$$

Seguindo esta mesma base ordenada, temos que a derivação da álgebra de Lie relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$ é a transformação linear

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

3.1.14 $\mathrm{G}_{4,5}^{1,1}$

Da álgebra $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$ obtemos o grupo de Lie $\mathrm{G}_{4,5}^{1,1}$ formado pelas matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} e^w & 0 & 0 & z \\ 0 & e^w & 0 & x \\ 0 & 0 & e^w & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este grupo pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a seguinte operação: $(w_1, x_1, y_1, z_1)(w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + e^w x, y_1 + e^{\alpha w} y, z_1 + e^w z)$

Seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma $V(g) = (a, be^w +, ce^w, de^w)$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0)$, $X(g) = (0, e^w, 0, 0)$,$Y(g) = (0, 0, e^w, 0)$ e $Z(g) = (0, 0, 0, e^w)$, temos que $[W, X] = X$, $[W, Y] = Y$, $[W, Z] = Z$ $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$ Tanto esta álgebra, quanto a gerada pelas matrizes são isomorfas.

Os campos lineares do grupo $\mathrm{G}_{4,5}^{1,1}$ são da forma

$$\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1) + b_2x + b_3y + b_4z, \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_2x + c_3y + c_4z, \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_2x + d_3y + d_4z)$$

Seguindo esta mesma base ordenada, temos que a derivação da álgebra de Lie relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$ é a transformação linear

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

3.1.15 $\mathrm{G}_{4,6}^{\alpha,\beta}$

Finalmente como antes a álgebra $\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ define o grupo de Lie $\mathrm{G}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ que é formado pelas matrizes 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} e^{\alpha w} & 0 & 0 & z \\ 0 & e^{\beta w}\cos(w) & e^{\beta w}\sin(w) & x \\ 0 & -e^{\beta w}\sin(w) & e^{\beta w}\cos(w) & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que pode ser visto como $(\mathbb{R}^4, *)$ onde $*$ é a operação $(w_1, x_1, y_1, z_1) * (w, x, y, z) = (w_1 + w, x_1 + e^w x, y_1 + e^{\beta w_1}(cos(w_1)y + sen(w_1)z), z_1 + e^{\beta w_1}(cos(w_1)z - sen(w_1)y))$

Seus campos de vetores invariantes à esquerda no ponto $g = (w, x, y, z)$ são da forma $V(g) = (a, be^{\alpha w}, ce^{\beta w}\cos(w) + de^{\beta w}\sin(w), -ce^{\beta w}\sin(w) + de^{\beta w}cos(w))$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ao adotarmos a base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ onde $W(g) = (1, 0, 0, 0)$, $X(g) = (0, e^{\alpha w}, 0, 0)$,$Y(g) = (0, e^{\beta w}\cos(w), -e^{\beta w}\sin(w), 0)$ e $Z(g) = (0, 0, e^{\beta w}\sin(w), e^{\beta w}\cos(w))$, temos que $[W, X] = \alpha X$, $[W, Y] = \beta Y - Z$, $[W, Z] = Y + \beta Z$ $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$ Esta álgebra, e a gerada pelas matrizes são isomorfas.

Os campos lineares do grupo $\mathrm{G}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ são da forma

$$\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1),$$

$$c_1\frac{e^{\beta w}sen(w) + \beta e^{\beta w}cos(w)}{1 + \beta^2} + d_1\frac{-e^{\beta w}cos(w) + \beta e^{\beta w}sen(w)}{1 + \beta^2} + c_3y + c_4z + \frac{d_1 - \beta c_1}{1 + \beta^2},$$

$$-c_1\frac{-e^{\beta w}cos(w) + \beta e^{\beta w}sen(w)}{1 + \beta^2} + d_1\frac{e^{\beta w}sen(w) + \beta e^{\beta w}cos(w)}{1 + \beta^2} + c_4y + c_3z - \frac{c_1 + \beta d_1}{1 + \beta^2}).$$

Seguindo esta mesma base ordenada, temos que a derivação da álgebra de Lie relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$ é a transformação linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & -c_4 & c_3 \end{bmatrix}.$$

3.2 Condição de ad-rank para os sistemas de controle

Para estudarmos a condição de ad-rank de sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X},\Delta)$ em um grupo de Lie G, basta conhecermos a derivação D associada a $\mathcal{X}$ e uma base da subálgebra Δ, de fato $\Sigma(\mathcal{X},\Delta)$ satisfaz ad-rank se a álgebra de Lie de G for o menor subespaço $D-$invariante que contem Δ. Nesta seção estudaremos apenas os casos onde G é produto semidireto $\mathbb{R}\times_\theta\mathbb{R}^3$, com $\theta:\mathbb{R}\to Der(\mathbb{R}^3)$ a tranformação linear onde $\theta(1)$ é uma matriz 3×3 não nilpotente. Nós não não faremos o estudo para $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ aqui pois este estudo é feito na seção de controlabilidade usando outra abordagem.

Veremos a condição de ad-rank apenas para sistemas de 1 controle, pois para sistemas com mais de um controle a abordagem fica muito diferente devendo ser criada caso a coso para os grupos. Nas seções de controlabilidade com mais de um controle faremos o estudo de ad-rank para alguns grupos.

A proposição 1.4.12 nos garante que para sistemas de um controle basta vermos os sistemas na forma $\dot{g}=\mathcal{X}+u(1,(0,0,0))$.

Como para estudar ad-rank precisamos conhecer as derivações associada ao campo linear $\mathcal{X}$ vamos começar estudando as derivações na base de $\mathfrak{g}$. Tomando $W=(1,0),X=(0,v_1),Y=(0,v_2),Z=(0,v_3)$ uma base de $\mathfrak{g}=\mathbb{R}\times_\theta\mathbb{R}^3$ vemos que no máximo três colchetes são não nulos já que $[X,Y]=[Y,Z]=[Z,X]=0$. Então olhemos para a aplicação $ad(W):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, onde para qualquer V na álgebra de Lie temos $ad(W)(V)=[W,V]$. Note que W é um autovetor de ad(W), pois $ad(W)(W)=0$. Vejamos como são as derivações D de $\mathfrak{g}$ nos seguintes casos:

1. quando $ad(W)$, além do autovetor W, possui outros três autovetores, $X',Y'eZ'$ com autovalores α,β,γ, distintos entre si, isto é $\alpha\neq\beta$, $\beta\neq\gamma$ e $\gamma\neq\alpha$.

   Este é o caso das álgebras $\mathfrak{g}_{3,4}\oplus\mathbb{R}$ e $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$, cuja construção é feita na seção de álgebras de Lie. Vejamos agora como é a derivação D com relação a sua base de autovetores. Assuma primeiramente que

$$\begin{aligned} D(W)&=a_1W+b_1X'+c_1Y'+d_1Z'\\ D(X')&=a_2W+b_2X'+c_2Y'+d_2Z'\\ D(Y')&=a_3W+b_3X'+c_3Y'+d_3Z'\\ D(Z')&=a_4W+b_4X'+c_4Y'+d_4Z'\end{aligned}$$

   então

$$\begin{aligned}\alpha D(X')=D(\alpha X')=D([W,X'])\ &=[D(W),X']+[W,D(X')]\\ &=[a_1W+b_1X'+c_1Y'+d_1Z',X']+[W,a_2W+b_2X'+c_2Y'+d_2Z']\\ &=\alpha(b_2a_1)-X'+\beta c_2Y'+\gamma d_2Z'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta D(Y')=D(\beta Y')=D([W,Y'])\ &=[D(W),Y']+[W,D(Y')]\\ &=[a_1W+b_1X'+c_1Y'+d_1Z',Y']+[W,a_3W+b_3X'+c_3Y'+d_3Z']\\ &=\alpha b_3X'+\beta(c_3-a_1)Y'+\gamma d_3Z'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma D(Z')=D(\gamma Z')=D([W,Z'])\ &=[D(W),Z']+[W,D(Z')]\\ &=[a_1W+b_1X'+c_1Y'+d_1Z',Z']+[W,a_4W+b_4X'+c_4Y'+d_4Z']\\ &=\alpha b_4X'+\beta c_4Y'+\gamma(d_4-\alpha_{1)}Z'\end{aligned}$$

Daqui temos que $a_1 = c_2 = d_2 = b_3 = d_3 = b_4 = c_4 = 0$. Além disso a_2, a_3 e a_4 só podem ser não nulos se α, β ou γ forem nulos respectivamente. Suponha, sem perda de generalidade que $\gamma = 0$. Então $a_2 = a_3 = 0$ e ao calcular

$$\begin{aligned} 0 = D([X', Z']) &= [D(X), Z'] + [X, D(Z')] \\ &= [a_2 W + b_2 X' + c_2 Y' + d_2 Z', Z'] + [X', a_4 W + b_4 X' + c_4 Y' + d_4 Z'] \\ &= [b_2 X', Z'] + [X', a_4 W + d_4 Z'] = -\alpha a_4 W. \end{aligned}$$

Como $\alpha \neq 0$ temos que $a_4 = 0$.

Deste modo, na base de autovetores $\{W, X', Y', Z'\}$, D é escrito como

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

assim a matriz de ad-rank tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_2^2 \\ 0 & c_1 & c_1 c_3 & c_1 c_3^2 \\ 0 & d_1 & d_1 d_4 & d_1 d_4 \end{bmatrix}.$$

com determinante $b_1 c_1 d_1 (b_2 - c_3)(c_3 - d_4)(d_4 - b_2)$. Logo, para satisfazer ad-rank b_1, c_1e d_1 devem ser não nulos e b_2, c_3 e d_4 devem ser números reais distintos.

2. quando $ad(W)$ possui 3 autovetores além de W, mas existe um autovalor de multiplicidade 2, neste caso temos Estamos falando das $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$ e $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$. Da mesma forma como no item anterior, existe uma base onde a derivação D é da forma

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

Então a matriz de ad-rank é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_1 b_2 + c_1 b_3 & (b_1 b_2 + c_1 b_3) b_2 + (b_1 c_2 + c_1 c_3) b_3 \\ 0 & c_1 & b_1 c_2 + c_1 c_3 & (b_1 b_2 + c_1 b_3) c_2 + (b_1 c_2 + c_1 c_3) c_3 \\ 0 & d_1 & d_1 d_4 & d_1 d_4 \end{bmatrix}.$$

note que não fácil ver a condição de ad-rank, de fato o determinte da matriz de ad-rank é $d_1((b_2 - d_4)(c_3 - d_4) + b_3 c_2)(b_1^2 c_2 + b_1 c_1 (c_3 - b_2) - c_1^2 b_3)$

3. Quando $ad(W)$ possui três outros autovetores, relacionados ao autovalor λ (com $\lambda \neq 0$, senão $\mathfrak{g}$ seria o abeliano $\mathbb{R}^4$.) Este é o caso de $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$. Sem impor hipóteses adicionais não conseguimos ver as condições de ad-rank, pois a matriz ad-rank tem determinante com muitas variaveis e expoentes altos. No entanto a derivação é do tipo,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}.$$

4. Quando $ad(W)$ possui outros três autovalores, sendo dois autovalores complexos e um autovalor real, as algebras de Lie $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ que satisfazem esta condição são $\mathfrak{g}_{3,5} \times \mathbb{R}$ e $\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$, onde para a base de autovetores a derivação D, neste caso tem a forma

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

A correspondente matriz de ad-rank é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_1b_2 + c_1b_3 & (b_1b_2 + c_1b_3)b_2 + (-b_1b_3 + c_1b_2)b_3 \\ 0 & c_1 & -b_1b_3 + c_1b_2 & -(b_1b_2 + c_1b_3)b_3 + (-b_1b_3 + c_1b_2)b_2 \\ 0 & d_1 & d_1d_4 & d_1d_4 \end{bmatrix}.$$

cujo determinante é

$$-d_1b_3(b_1^2 + c_1^2)(b_2^2 + b_3^2 - b_2d_4(d_4 - 1)).$$

5. Quando $ad(W)$ possui dois autovetores além de W, com autovalores distintos entre si, neste caso as álgebras serão de $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$, $\mathfrak{g}_{4,2}^{\alpha}$ e $\mathfrak{g}^{4,3}$. Então existe uma base de $\mathfrak{g}$ onde as derivações são da forma

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

e após alguns calculos temos que o determinante da matriz de ad-rank é

$$-c_1^2d_1b_3(b_2 - d_4)^2.$$

6. Se além do autovalor 0, $ad(W)$ possuir um único autovalor com multiplicidade 2, que é caso de $\mathfrak{g}_{4,2}^{1}$. Dada uma base, as derivações são da forma

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz de ad-rank é

$$c^2(c_1b_4d_3^2 - d_1b_3(b_2+d_4)^2 + d_3(b_2-d_4)(c_1b_3-d_1b_4)$$

7. Por fim, resta ver as derivações D quando $ad(W)$ possui um único autovetor além de W, que é o caso da álgebra $\mathfrak{g}_{4,4}$. Aqui,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ d_1 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}.$$

e após alguns calculos temos que o determinante da matriz de ad-rank é

$$-d_1b_3(b_3^2b_4^2 + b_2(c_1b_3(b_4-d_1) + d_1b_4(b_4-b_2))).$$

Observação 3.2.1. *O estudo da condição do posto, será feito junto com o estudo de controlabilidade dos sistemas de controle lineares.*

Capítulo 4

Controlabilidade de Sistemas de Controle em Grupos de Lie Quadridimensionais

4.1 Sistemas de Controle com 1 controle

Para cada um dos grupos G e correspondentes álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ que abordamos nas seções anteriores faremos um estudo de controlabilidade dos sistemas lineares

$$\Sigma(\mathcal{X}, \Delta) : \dot{g} = \mathcal{X}_g + uV_g$$

onde $g \in G$ $\mathcal{X}$ é um campo linear do grupo G e Δ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por V. A partir da seção 4.1.2 estudaremos apenas os sistemas de controle

$$\Sigma(\mathcal{X}, \Delta) : \dot{g} = \mathcal{X}_g + uW_g$$

onde W é o campo invariante a esquerda do grupo de fase (espaço estado) G. Estes campos $\mathcal{X}$ e W foram descritos em seções anteriores para cada grupo.

Para uma grande parte dos grupos conseguimos condições claras para a controlabilidade.

4.1.1 $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$

Proposição 4.1.1. *Sistemas de controle lineares $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \oplus \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, onde Δ é uma subálgebra de dimensão um, nunca são controláveis*

Demonstração: Esta proposição é consequência do fato deste sistema não satisfazer a condição do posto. Vejamos que de fato não satisfaz a condição do posto. Dado D a derivação relacionada ao campo linear $\mathcal{X}$ e $V = aW + bX + cY + dZ$ um vetor gerador de Δ. Temos que a matriz de ad-rank $[V, D(V), D^2(V), D^3(V)]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & b_1a + b_2b & (b_1a + b_2b)b_2 & (b_1a + b_2b)b_2^2 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & d_3c + d_4d & (d_3c + d_4d)d_4 & (d_3c + d_4d)d_4^2 \end{bmatrix}$$

e não possui posto máximo, pois $D^3(V)$ é combinação linear de $D(V)$ e $D^2(V)$.

Suponha primeiramente que $D(V)$ e $D^2(V)$ são vetores linearmente independentes. Temos então que também os colchetes $[V, D(V)]$ e $[V, D^2(V)]$ podem ser escritos como combinação de $D(V)$ e $D^2(V)$ e portanto, $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ não satisfaz a condição do posto. Suponha então que $D(V)$ e $D^2(V)$ são linearmente dependentes. Assim, a matriz do posto $(V, D(V), [V, D(V)], [V, [V, D(V)]])$ não possui posto máximo pois $[V, [V, D(V)]$ é combinação linear $D(V)$ e $[V, D(V)]$.

Como a condição do posto é necessária para a controlabilidade, o sistema de controle não é controlável. □

4.1.2 $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$

Vejamos agora a controlabilidade para um sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$, quando Δ é uma subálgebra de Lie de dimensão um. Assumindo que o sistema satisfaz a condição do posto, então a Proposição 1.4.12 garante que o sistema é isomorfo a $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + uW$ para algum campo linear $\mathcal{X}$ e para o elemento W da base de $\mathfrak{g}$. Portanto, basta vermos o sistema de controle da forma $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$, que está descrito abaixo:

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1 w + c_3 y + c_4 z \\ \dot{z} = d_1 w + d_3 y + d_4 z \end{cases}$$

com derivação da álgebra, na base $\{W, X, Y, Z\}$, definida da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}.$$

Mudaremos então a base da álgebra para $\{W, X, Y_1, Z_1\}$ onde $\frac{\partial}{\partial y_1} = Y_1 = \alpha Y + \beta Z$, $\frac{\partial}{\partial z_1} = Z_1 = \gamma Y + \delta Z$ de modo que nesta nova base a derivação apresente a submatriz

$$\begin{bmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

na forma de Jordan. Perceba que nesta nova base, as constantes de estrutura dos colchetes se preservam, então as derivações terão o mesmo formato, exceto na submatriz. Da mesma forma os campos lineares terão formato semelhante ao da base original. Sendo mais claro, note que as derivações tem as seguintes formas:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & \lambda & 1 \\ d_1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & \lambda & \mu \\ d_1 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix}.$$

E estão associadas aos campo lineares $\mathcal{X}_1 = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x, c_1 w + \lambda_1 y_1, d_1 w + \lambda_2 z_1)$, $\mathcal{X}_2 = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x, c_1 w + \lambda y_1 + z_1, d_1 w + \lambda z_1)$ e $\mathcal{X}_3 = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x, c_1 w + \lambda y_1 + \mu z_1, d_1 w - \mu y_1 + \lambda z_1)$ respectivamente.

Estudemos primeiramente o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda_1 y \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda_2 z \end{cases}$$

Agora, como Y_1 e Z_1 são invariantes sob D, veja que o sistema restrito as três primeiras linhas

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda_1 y \end{cases}$$

ou restrito a primeira, segunda e quarta linha

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda_2 z \end{cases}$$

são sistemas de controle lineares em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$. Logo, para o sistema ser controlável, o sistema reduzido precisa ser controlável. Portanto, de [2] temos que para termos controlabilidade no sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle)$, b_2 deve ser 0 e os números λ_1, λ_2 devem ser diferentes de zero. Então, se o sistema é controlável, ele é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda_1 y \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda_2 z \end{cases}$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

Para este sistema, com $b_2 = 0$, e λ_1, λ_2 não nulos mostraremos que a condição do posto é equivalente à condição ad-rank. Em geral temos que ad-rank implica na condição do posto, então resta mostrar que a condição do posto implica na condição ad rank.

Suponha por absurdo que satisfaz a condição do posto e não satisfaz ad rank. Se não satisfaz ad rank então a matriz $[W, D(W), D^2(W), D^3(W)]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & \lambda_1 c_1 & \lambda_1^2 c_1 \\ 0 & d_1 & \lambda_2 d_1 & \lambda_2^2 d_1 \end{bmatrix}$$

não é inversível. Assim, $b_1 = 0$ ou $c_1 = 0$ ou $d_1 = 0$ ou $\lambda_1 = \lambda_2$.

Se $b_1 = 0$ então $[W, DW, D^2W, [W, DW]]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & \lambda c_1 & 0 \\ 0 & d_1 & \lambda d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz com determinante nulo e portanto a menor subalgebra D-invariante terá dimensão menor que 4. Assim não satisfaz a condição do posto contradizendo a suposição.

Se $c_1 = 0$, de forma semelhante temos que a matriz $[W, DW, D^2W, [W, DW]]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & \lambda_2 d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

possui determinante nulo e, portanto, o sistema não satisfaz a condição do posto, uma contradição com a nossa hipótese.

Se $d_1 = 0$ também temos que o determinante da matriz $[W, DW, D^2W, [W, DW]]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & \lambda_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é zero e, novamente temos que a condição do posto não é satisfeita, o que é uma contradição.

Por fim, se $\lambda_1 = \lambda_2$ temos que a matriz $[W, DW, D^2W, [W, DW]]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & \lambda c_1 & 0 \\ 0 & d_1 & \lambda d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

novamente possui determinante nulo e, com isso temos mais uma vez que o sistema não satisfaz a condição do posto.

Assim, provamos que a condição do posto é equivalente a condição de ad-rank. Além disso, estamos supondo a condição do posto e finalmente temos que em geral controlabilidade implica na condição do posto. Portanto, se o sistema de controle é controlável, então satisfaz a condição de ad-rank. Como vimos anteriormente $b_2 = 0$ e portanto, a Proposição 1.4.5 nos garante que o subgrupo fechado e normal $G_{\langle X \rangle}$ é invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$ e $G_{\langle X \rangle} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$. Então pela Proposição 1.4.10 o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda_1 y \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda_2 z \end{cases}$$

é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$, que é isomorfo ao abeliano $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda_1 y \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda_2 z \end{cases}$$

é controlável. Logo, temos que

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda_1 y \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda_2 z \end{cases}$$

é controlável, pois já que para o sistema induzido ser controlável basta que $c_1, d_1 \neq 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o que estamos assuimindo ser verdadeiro pela hipótese do sistema linear satisfazer a condição do posto.

Veremos agora o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}_2, W)$.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda y + z \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda z \end{cases}$$

Veja que o sistema reduzido a primeira, segunda e quarta linhas

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda z \end{cases}$$

descreve o sistema de controle linear em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}^2$. Como temos que para o sistema ser controlável, o sistema restrito precisa ser controlável, temos que se o sistema é controlável necessariamente $b_2 = 0$ e $\lambda \neq 0$ Assim, se o sistema é controlável, ele é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda y + z \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda z \end{cases}$$

com $\lambda \neq 0$.

Mostraremos agora que no sistema $\Sigma(\mathcal{X}_2, W)$, assumindo $b_2 = 0$ e $\lambda \neq 0$ temos que a condição de ad-rank e a condição do posto são equivalentes. De fato, como satisfazer a condição de ad-rank implica em satisfazer a condição do posto basta provarmos a recíproca. Então assumamos por absurdo que o sistema satisfaz a condição do posto mas não satisfaz ad-rank. Temos que o sistema não satisfaz ad-rank se e somente o determinante da matriz $[W, DW, D^2W.D^3W]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & \lambda c_1 + d_1 & \lambda^2 c_1 + 2\lambda d_1 \\ 0 & d_1 & \lambda d_1 & \lambda^2 d_1 \end{bmatrix}$$

for zero. Isto acontece apenas se $b_1 = 0$ ou $d_1 = 0$.

Para $b_1 = 0$ a matriz $[W, D(W), D^2W, [W, DW]]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & \lambda c_1 + d_1 & 0 \\ 0 & d_1 & \lambda d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

possui determinate nulo e portanto o sistema não satisfaz a condição do posto, chegando a uma contradição.

Do mesmo modo, se $d_1 = 0$ temos que a matriz $[W, D(W), D^2W, [W, DW]]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & \lambda c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

também possui determinante nulo, outro absurdo. Logo as condições de posto e de ad-rank são equivalentes.

Como estamos supondo a condição do posto para o sistema, temos então que ele satisfaz ad-rank. Como também assumimos $b_2 = 0$, temos, pela Proposição 1.4.5 que $G_{\langle X \rangle}$, subgrupo fechado, normal e invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$ está contido em $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$, isto é, $G_{\langle X \rangle} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$. Então pela Proposição 1.4.10 o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda y + z \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda z \end{cases}$$

é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$, isomorfo a $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda y + z \\ \dot{z} = d_1 w + \lambda z \end{cases}$$

é controlável. Mas para o sistema induzido ser controlável basta que b_1, d_1 e λ sejam não nulos, que são hipóteses adotadas anteriormente.

De forma análoga para o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}_3, W)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda y + \mu z \\ \dot{z} = d_1 w - \mu y + \lambda z \end{cases}$$

com $\mu \neq 0$, o sistema restrito as duas primeiras linhas

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \end{cases}$$

descreve o sistema linear no grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, que para ser controlável é necessário que $b_2 \neq 0$. Deste modo, para o sistema de controle acima ser controlável, ele é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda y + \mu z \\ \dot{z} = d_1 w - \mu y + \lambda z \end{cases}$$

com $\mu \neq 0$. Como anteriormente, mostraremos que para o sistema $\Sigma(\mathcal{X}_3, W)$, assumindo $b_2 = 0$, as condições de ad-rank e posto são equivalentes. Suponha por absurdo que o sistema fatisfaz a condição do posto mas não satisfaz ad-rank. Então a matriz $[W, DW, D^2W, D^3W]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & \lambda c_1 + \mu d_1 & (\lambda_1^2 - \mu^2)c_1 + 2\lambda\mu d_1 \\ 0 & d_1 & -\mu c_1 + \lambda d_1 & (\lambda^2 - \mu^2)d_1 - 2\lambda\mu c_1 \end{bmatrix}$$

Possui determinante 0. Como o determinante da matriz acima é $(\mu^2 + \lambda^2)(c_1^2 + d_1^2)$ e $\mu \neq 0$, o sistema só não satisfaz ad-rank se $(c_1^2 + d_1^2) = 0$, isto é $c_1 = d_1 = 0$. Se isto acontece, a matriz $[W, D(W), D^2W, [W, D(W)]]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

claramente possui determinante nulo e, portanto o sistema não satisfaz a condição do posto, o que é absurdo. Logo, condição de ad-rank e posto são equivalentes. Seguindo com nossas hipóteses como o sistema satisfaz ad-rank e $b_2 = 0$, das proposições 1.4.5 e 1.4.10 temos que o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda y + \mu z \\ \dot{z} = d_1 w - \mu y + \lambda z \end{cases}$$

é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$, isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1 w + \lambda y + \mu z \\ \dot{z} = d_1 w - \mu y + \lambda z \end{cases}$$

é controlável. Pela Proposição 1.4.13 o sistema induzido é controlável se e somente se $\mu \neq 0$ e $c_1^2 + d_1^2 \neq 0$, que são hipóteses assumidas anteriormente.

Com o feito acima, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.1.2. *Seja $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ um sistema linear em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}^2$, onde Δ é uma subálgebra de dimensão 1. $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é controlável se e somente se satisfaz uma das condições a seguir*

1. *Satisfaz a condição do posto, $\mathfrak{g}_0$ é isomorfo ao grupo afim*

2. *Satisfaz a condição do posto, $\mathfrak{g}_0$ é isomorfo a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Lie G e a derivação D relacionada ao campo linear $\mathcal{X}$ do sistema de controle possui dois autovalores imaginários puros.*

4.1.3 $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$

Estudaremos aqui a controlabilidade de sistemas de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$, onde $\mathbf{dim}(\Delta) = 1$. Como estamos supondo que ele satisfaz a condição do posto, o sistema é equivalente à$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + uW$, descrito abaixo.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Observe que o sistema restrito as três primeiras coordenadas

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \end{cases}$$

descreve um sistema de controle linear com subálgebra de dimensão 1 em $\mathfrak{g}_{3,2}$ e por [2] só é controlável quando $b_2 = 0$ e $b_3 \neq 0$. Veja que nesta condições a matriz de ad-rank é da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_1 d_4 & d_1 d_4^2 \end{bmatrix}$$

que possui determinante diferente de zero quando b_3, c_1, d_1, d_4 são todos diferentes de zero. Claramente a condição não será satisfeita se b_3, c_1 ou d_1 forem zero, mas a condição do posto ainda é satisfeita se $d_4 = 0$, desde que b_3, c_1 e d_1 sejam diferentes de zero.

Suponha primeiramente que $d_4 \neq 0$. Como temos que se o sistema de controle é controlável, então satisfaz a condição de ad-rank e $b_2 = 0$, a Proposição 1.4.11 nos garante que o subgrupo fechado e normal $G_{\langle X \rangle}$ é invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$ e $G_{\langle X \rangle} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$. Então pela Proposição 1.4.10 o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

é controlável se e somente se o sistema de controle induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$, isomorfo a $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

é controlável segundo [2], pois satisfaz a condição do posto e pelas hipóteses anteriores a álgebra das raízes $\mathfrak{g}^0$ do sistema induzido é isomorfo ao grupo afim.

Quando $d_4 = 0$ o sistema não é controlável, a demosntração deste fato é consequencia imediata das condições de controlabilidade do sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle \mathcal{W}, \mathcal{X} \rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2 X$ feita na seção 4.3.3(mais adiante neste texto). Como $\Sigma(\mathcal{X}, \langle \mathcal{W}, \mathcal{X} \rangle)$ não é controlável quando $d_4 = 0$ e o conjunto de atingibilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle \mathcal{W} \rangle)$ está contido no conjunto de atingibilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle \mathcal{W}, \mathcal{X} \rangle)$ temos que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle \mathcal{W}, \rangle)$ também não é controlável.

Temos portanto a seguinte proposição:

Proposição 4.1.3. *O sistema de controle Lienar $\Sigma(\mathcal{X}, \langle\mathcal{W}\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + uW$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e dim$(\mathfrak{g}^0) = 3$.*

4.1.4 $\mathfrak{g}_{3,4}^0 \oplus \mathbb{R}$ e $\mathfrak{g}_{3,4}^a \oplus \mathbb{R}$

Nesta subseção abordaremos o sistema de controle

$$\Sigma(\mathcal{X}, W) : \dot{g} = \mathcal{X} + uW,$$

que pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1(e^{-w} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

onde $g = (w, x, y, z) \in \mathrm{G}_{3,4}^0 \times \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x, c_1(e^{-w} - 1) + c_3 x, d_1 w + d_4 z)$ e $W = (1, 0, 0, 0)$. E no caso $\mathrm{G}_{3,4}^a$ pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1(e^{aw} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

onde $g = (w, x, y, z) \in \mathrm{G}_{3,4}^a \times \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x, c_1(e^{aw} - 1) + c_3 x, d_1 w + d_4 z)$ e $W = (1, 0, 0, 0)$.

Perceba que restrito as suas três primeiras linhas, os sistemas de controle descrevem um sistema de controle linear em $\mathrm{G}_{3,4}^0 \times \mathbb{R}$ e $\mathrm{G}_{3,4}^a \times \mathbb{R}$ respectivamente. Ou seja, temos

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1(e^{-w} - 1) + c_3 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1(e^{aw} - 1) + c_3 y \end{cases}$$

note que estes dois sistemas não são controláveis, pois pela Proposição 1.4.19, temos que um sistema de controle com um controle em $\mathrm{G}_{3,4}^0 \times \mathbb{R}$ ou em $\mathrm{G}_{3,4}^a \times \mathbb{R}$ não é controlável. Como, pela Proposição 1.4.12 todo sistema de controle, com um controle, que satisfaz a condição do posto é isomorfo a um sistema da forma $\Sigma(\mathcal{X}, W)$,temos que nenhum sistema de controle com um controle de $\mathrm{G}_{3,4}^0 \times \mathbb{R}$ ou $\mathrm{G}_{3,4}^a \times \mathbb{R}$ é controlável.

Proposição 4.1.4. *Nenhum sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}, W) : \dot{g} = \mathcal{X} + uW$ em $\mathrm{G}_{3,4}^0 \times \mathbb{R}$ ou em $\mathrm{G}_{3,4}^a \times \mathbb{R}$ é controlável.*

4.1.5 $\mathfrak{g}_{3,5}^0 \oplus \mathbb{R}$

Vamos estudar agora a controlabilidade dos sistemas do tipo

$$\dot{g} = \mathcal{X}_g + uW,$$

ou seja, os sistemas $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ onde $\mathbf{dim}(\Delta) = 1$. Se o sistema satisfaz a condição do posto, pela proposição 1.4.12 ele é isomorfo a um sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ que é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1 \sin(w) + c_1(\cos(w) - 1) + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1 \sin(w) + b_1(1 - \cos(w)) - b_3 x + b_2 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Veja que este sistema de controle restrito às suas três primeiras linhas

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1 \sin(w) + c_1(\cos(w) - 1) + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1 \sin(w) + b_1(1 - \cos(w)) - b_3 x + b_2 y \end{cases}$$

descreve um sistema de controle em $G_{3,5}^0$ com apenas um controle. De [2] temos que este sistema só será controlável se $b_2 = 0$ e $b_3 \neq 0$. Nestas condições temos que a matriz de ad-rank é da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 b_3 & -b_1 b_3^2 \\ 0 & c_1 & -b_1 b_3 & -c_1 b_3^2 \\ 0 & d_1 & d_1 d_4 & d_1 d_4^2 \end{bmatrix}$$

que possui determinante diferente de zero se $d_1 \neq 0$ e $(b_1^2 + c_1^2)(d_4^2 + b_3^2) \neq 0$. Além disso, o sistema não satifaz a condição do posto se $d_1 = 0$ ou se $c_1^2 + d_1^2 = 0$. Temos então que se $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ possui $b_2 = 0$ e satisfaz a condição do posto, então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ satisfaz a condição de ad-rank.

Tomemos o caso, $d_4 = 0$ temos que a álgebra das raízes de D, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ e o sistema satisfaz ad-rank, logo é controlável

Resta-nos ver o a controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ quando $b_2 = 0$, $d_4 \neq 0$ e o sistema satisfaz a condição do posto (e portanto, a de ad-rank) Temos neste caso $\mathfrak{g}_0 = \langle W - \frac{d_1}{d_4} Z, X, Y \rangle$ e $\langle X, Y \rangle \subset \mathfrak{g}^0$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Então a Proposição 1.4.5 nos garante que $G_{\langle X,Y \rangle}$ é um subgrupo normal de G, (por ser $\langle X, Y \rangle$ ideal de $\mathfrak{g}$) invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$. Além disso, como o sistema satisfaz ad-rank, temos que $G_{\langle X,Y \rangle} \subset \mathfrak{g}^0 \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$. Logo o sistema é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X,Y \rangle}$, isomorfo a $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

for controlável, o que de fato acontece pois $d_1 \neq 0$ é condição necessária para satisfazer a condição do posto. Destes resultados temos a seguinte proposição

Proposição 4.1.5. *O sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ é controlável se e somente satisfaz a condição do posto e dim$(\mathfrak{g}^0) > 3$*

4.1.6 $\mathfrak{g}_{4,2}^{\alpha}$

Aqui estudaremos o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle) = \dot{g} = \mathcal{X} + uW$.

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(\alpha e^w - 1) + c_1 \alpha w e^w + b_2 x + b_3 \alpha y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + d_4 \end{cases}$$

Este sitema de controle não é controlável, de fato, como mostrado mais à frente, em 4.3.8. temos que o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle) = \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2 X$ não é controlável e como tanto o conjunto de atingibilidade quanto o conjunto de acessibilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$ contém o conjunto de atingibilidade (ou acessibilidade) de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$, temos que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ não é controlável. Assim temos a proposição:

Proposição 4.1.6. *Nenhum sistema de controle linear com um controle, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ em $\mathrm{G}_{4,2}^{\alpha}$ é controlável.*

4.1.7 $\mathfrak{g}_{4,4}$

Estudaremos aqui os sistemas de controle na forma

$$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle) : \dot{g} = \mathcal{X}_g + uW,$$

com $\mathcal{X}$ o campo linear

$$\mathcal{X} = (b_1 - c_1 + d_1)(e^w - 1) + (c_1 - d_1) w e^w + \frac{d_1}{2} w^2 e^w + b_2 + b_3 y + d_4 z, (c_1 - d_1)(e^w - 1) + d_1 w e^w + b_2 y + b_3 z, d_1(e^w - 1) + b_2 z),$$

$W = (1, 0, 0, 0)$ e $g = \mathrm{G}_{4,4}$. Podemos escrever este sistema na forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = (b_1 - c_1 + d_1)(e^w - 1) + (c_1 - d_1) w e^w + \frac{d_1}{2} w^2 e^w + b_2 x + b_3 y + b_4 z \\ \dot{y} = (c_1 - d_1)(e^w - 1) + d_1 w e^w + b_2 y + b_3 z \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + b_2 z \end{cases}.$$

Restrigindo o sistema de controle as suas primeira e última linhas, nós temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + b_2 z \end{cases}.$$

que é um sistema de controle linear no grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$. Este subsistema é controlável se e somente se $d_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$. Logo $b_2 = 0$ é necessário para a controlabilidade do sistema. Note também que $b_2 = 0$ implica que a álgebra das raízes $\mathfrak{g}_0$ é iqual a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo. Ao montar a matriz de ad-rank

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 c_1 + b_4 d_1 & b_3^2 d_1 \\ 0 & c_1 & b_3 d_1 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vemos que ela possui posto máximo quando $b_3 d_1 = 0$. Como $d_1 \neq 0$ é condição necessária para satisfazer a condição do posto, basta estudarmos dois casos quando $b_3 \neq 0$ e $b_3 = 0$.

Quando $b_3 \neq 0$, o sistema satisfaz a condição de ad-rank e $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$. Portanto o sistema é controlável.

Quando $b_3 = 0$, o sistema não é controlável. A prova disto pode ser verificada mais à frente em 4.3.11, quando estudamos o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$ sob o grupo $\mathrm{G}_{4,4}$. Como $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$ não é controlável se $b_3 = 0$ e o conjunto de atingibilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ está contido no conjunto de atingibilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$, temos que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ também não é controlável.

Podemos então escrever a seguinte Proposição

Proposição 4.1.7. *O sistema de controle linear* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ *em* $\mathrm{G}_{4,4}$*, onde* $\mathcal{X} = (b_1 - c_1 + d_1)(e^w - 1) + (c_1 - d_1)we^w + \frac{d_1}{2}w^2 e^w + b_2 + b_3 y + d_4 z, (c_1 - d_1)(e^w - 1) + d_1 w e^w + b_2 y + b_3 z, d_1(e^w - 1) + b_2 z)$ *é controlável se e somente se* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ *e* $d_3 \neq 0$.

4.1.8 $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$

Estudaremos aqui os sistemas de controle $\Sigma(\mathcal{X}, W)$ em $\mathrm{G}_{4,5}^{\alpha,\beta}$, com um controle e que satisfazem a condição do posto. Podemos escrever estes sistemas como

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{cases}.$$

Este sistema restrito as três primeiras linhas é dado por

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3 y \end{cases}.$$

ele descreve um sistema de controle linear em $\mathrm{G}_{3,4}^{\alpha}$, que não é controlável por [2]. Como o sistema restrito não é controlável, temos que o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, W)$ não é controlável.

Então temos o seguinte resultado

Proposição 4.1.8. *Nenhum sistema da forma* $\dot{g} = \mathcal{X} + uW$ *em* $\mathrm{G}_{4,5}^{\alpha.\beta}$ *é controlável.*

4.1.9 $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$

De forma análoga a feita na seção 4.2.1 (a seguir), para estudarmos a controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$: $\dot{g} = \mathcal{X} + W$ em $G_{\alpha,\beta}^{1,1}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y + b_4 z \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y + c_4 z \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_2 x + d_3 y + d_4 z \end{cases}$$

com a derivação D associada a $\mathcal{X}$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

basta estudarmos separadamente os seguintes casos:

1. $\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle)$ onde a derivação D_1 associada ao campo linear $\mathcal{X}_1$ é da forma

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda_1 & 0 & 0 \\ c_1' & 0 & \lambda_2 & 0 \\ d_1' & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

2. $\Sigma(\mathcal{X}_2, \langle W \rangle)$ onde a derivação D_2 associada ao campo linear $\mathcal{X}_2$ é da forma

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda_1 & 1 & 0 \\ c_1' & 0 & \lambda_1 & 0 \\ d_1' & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

3. $\Sigma(\mathcal{X}_3, \langle W \rangle)$ onde a derivação D_3 associada ao campo linear $\mathcal{X}_3$ é da forma

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda_1 & \mu & 0 \\ c_1' & -\mu & \lambda_1 & 0 \\ d_1' & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

4. $\Sigma(\mathcal{X}_4, \langle W \rangle)$ onde a derivação D_4 associada ao campo linear $\mathcal{X}_4$ é da forma

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda & 1 & 0 \\ c_1' & 0 & \lambda & 1 \\ d_1' & 0 & 0 & \lambda. \end{bmatrix}$$

pois $\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle)$ $(\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle), \Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle)$ ou $\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle))$ é de certa forma equivalente ao sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle$ pois D_1 $(D_2, D_3 ou D_3)$ é a matriz D numa base que dá a forma de Jordan da submatriz

$$D = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

Vamos primeiramente estudar $\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda_1 x \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + \lambda_2 y \\ \dot{z} = d_1'(e^w - 1) + \lambda_3 z \end{cases}$$

Dos subsistemas formados pela primeira e segunda linhas, primeira e terceira linhas e primeira e quarta linhas temos que para o sistema linear ser controlável λ_1, λ_2 e λ_3 devem ser nulos. Mas se λ_1, λ_2 e λ_3 são nulos temos que o sistema não satisfaz a condição do posto. Assim concluímos que $\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle)$ nunca é controlável.

Seguindo adiante, $\Sigma(\mathcal{X}_2, \langle W \rangle)$ é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda_1 x + y \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + \lambda_1 y \\ \dot{z} = d_1'(e^w - 1) + \lambda_2 z \end{cases}$$

Observando os subsistemas formados pela primeira e terceira linha e primeira e quarta linha temos que para o sistema ser controlável λ_1 e λ_2 devem ser nulos. Neste caso, a derivação D_2 é da forma

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & 0 & 1 & 0 \\ c_1' & 0 & 0 & 0 \\ d_1' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao calcularmos a matriz de ad-rank do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1' & c_1 & 0 \\ 0 & c_1' & 0 & 0 \\ 0 & d_1' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não possui posto máximo e como $[W, D(W)] = D(W)$ e $[W, D^2(W)] = D^2(W)$ temos que o sistema também não satisfaz a condição do posto, concluindo, então, que $\Sigma(\mathcal{X}_2, \langle W \rangle)$ nunca é controlável.

A partir de agora passamos a estudar o sistema $\Sigma(\mathcal{X}_3, \langle W \rangle)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda_1 x + \mu y \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) - \mu x + \lambda_1 y \\ \dot{z} = d_1'(e^w - 1) + \lambda_2 z \end{cases}$$

Do subsistema restrito a primeira e quarta linha, temos que para $\Sigma(\mathcal{X}_3, \langle W \rangle)$ ser controlável precisamos que $\lambda_2 = 0$. Disto, D_3 é da forma

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda_1 & \mu & 0 \\ c_1' & -\mu & \lambda_1 & 0 \\ d_1' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com a matriz de ad-rank da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1' & \lambda_1 b_1' + \mu c_1' & \lambda(\lambda_1 b_1' + \mu c_1) + \mu(-\mu b_1' + \lambda_1 c_1') \\ 0 & c_1' & -\mu b_1' + \lambda_1 c_1' & -\mu(\lambda_1 b_1' + \mu c_1) + \lambda(-\mu b_1' + \lambda_1 c_1') \\ 0 & d_1' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é $-b_1\mu(\lambda_1^2+\mu^2)(b_1'^2+c_1'^2)$ como $\mu \neq 0$ por hipótese, temos que o sistema satisfaz ad-rank desde que $b_1 \neq 0$ e $b_1X + c_1Y \neq 0$. Como para qualquer vetor V de $\mathfrak{g}$ da forma $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ $[W, V] = V$. temos que as condições para satisfazer a condição do posto são as mesmas para satisfazer a condição de ad-rank, isto é, $b_1 \neq 0$ e $b_1X + c_1Y \neq 0$.

Como supomos sempre que o sistema satisfaz a condição do posto, temos que Z é um ideal de $\mathfrak{g}$ contido no núcleo de D_3, em um sistema que satisfaz ad-rank. Calculando o sitema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w-1) + \lambda_1 x + \mu y \\ \dot{y} = c_1'(e^w-1) - \mu x + \lambda_1 y \end{cases}$$

temos, segundo [2] que o sistema induzido é controlável. Então, pela Proposição 1.4.10 temos que $\Sigma(\mathcal{X}_3, \langle W\rangle)$ é controlável se satisfaz a condição do posto e $d_4 = 0$.

Finalmente, estudaremos o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}_4, \langle W\rangle)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w-1) + \lambda x + y \\ \dot{y} = c_1'(e^w-1) + \lambda y + z \\ \dot{z} = d_1'(e^w-1) + \lambda z \end{cases}$$

Do subsistema formado pela primeira e quarta linha, temos que $\lambda = 0$. D_4 então é da forma

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & 0 & 1 & 0 \\ c_1' & 0 & 0 & 1 \\ d_1' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e o sistema de controle satisfaz ad-rank se e somente se $d_1' \neq 0$. Além disso, $[W, D^n(W)] = D^n(W)$ para todo W, $\Sigma(\mathcal{X}_4, \langle W\rangle)$ satisfaz a condição do posto se e somente se satisfaz ad-rank. Como o sistema satisfaz ad-rank e $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ então o sistema é controlável.

Assim, temos o seguinte resultado

Proposição 4.1.9. *O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W\rangle)$ de é controlável se e somente se satisfaz uma das condições abaixo:*

- *satisfaz a condição do posto com $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$.*
- *satisfaz a condição do posto, $\mathfrak{g}^0$ é isomorfo a a* $\mathbf{aff}(\mathbb{R})$ *e D possui duas raízes complexas.*

4.2 Casos Não Resolvidos Para Sistemas Lineares com 1 controle

Para os casos a seguir nós ainda não temos resultados completos sobre a controlabilidade do sistema

4.2.1 $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$

O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + uW$ é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Olhemos para a derivação D relacionada ao campo Linear $\mathcal{X}$, que na base ordenada $\{W, X, Y, Z\}$ pode ser vista como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Façamos uma mudança de base de $\{W, X, Y, Z\}$ para $\{W, X', Y', Z\}$ onde $X' = \alpha_1 X + \beta_1 Y$ e $Y' = \alpha_2 X + \beta_2 Y$ de tal modo que submatriz

$$\begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

esteja na forma de Jordan. Como [W,X']=X' e [W,Y']=Y', temos que as constantes de estruturas não se alteram, e portanto a derivação de $\mathcal{X}$ na base $\{W, X', Y', Z\}$ assume uma das seguintes formas:

$$D = D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda_1 & 0 & 0 \\ c_1' & 0 & \lambda_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

ou

$$D = D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda & 1 & 0 \\ c_1' & 0 & \lambda & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

ou

$$D = D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda & \mu & 0 \\ c_1' & -\mu & \lambda & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

com $\mu \neq 0$. Vamos agora fazer uma mudança dos campos coorddenados de $\mathfrak{g}$ Lembraremos aqui que $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$ é o conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda e para todo ponto $g = (w, x, y, z)$ de $G_{3,3} \times \mathbb{R}$ temos que $W(g) = (1, 0, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial w}$, $X(g) = (0, e^w, 0, 0) = e^w \frac{\partial}{\partial x}$ $Y(g) = (0, 0, e^w, 0) = e^w \frac{\partial}{\partial y}$ e $Z(g) = (0, 0, 0, 1) = \frac{\partial}{\partial z}$. Assim, na base $\{W, X, Y, Z\}$, X' e Y' são da forma

$$X' = \alpha_1 X + \beta_1 Y = \alpha_1 e^w \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 e^w \frac{\partial}{\partial y} = e^w(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial y})$$

e

$$Y' = \alpha_2 X + \beta_2 Y = \alpha_2 e^w \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 e^w \frac{\partial}{\partial y} = e^w(\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y})$$

Tomando então

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

temos que o campo linear

$$\mathcal{X} = f_1 \frac{\partial}{\partial w} + f_2 \frac{\partial}{\partial x'} + f_3 \frac{\partial}{\partial y'} + f_4 \frac{\partial}{\partial z}$$

relacionado com a derivação D é da forma

$$(0, b_1'(e^w - 1) + \lambda_1 x, c_1'(e^w - 1) + \lambda_2 y, d_1 w + d_4 z)$$

ou

$$(0, b_1'(e^w - 1) + \lambda x + y, c_1'(e^w - 1) + \lambda y, d_1 w + d_4 z)$$

ou

$$(0, b_1'(e^w - 1) + \lambda x + \mu y, c_1'(e^w - 1) - \mu x + \lambda y +, d_1 w + d_4 z)$$

respectivamente.

Tratemos então dos sistemas de controle $\dot{g} = \mathcal{X}_1 + uW$, $\dot{g} = \mathcal{X}_2 + uW$ e $\dot{g} = \mathcal{X}_3 + uW$ separadamente. $\mathcal{X}_1$,$\mathcal{X}_2$ e $\mathcal{X}_3$ são os campos lineares relacionados com a derivação D_1, D_2 e D_3 respecitivamente.

Tomemos $\dot{g} = \mathcal{X}_1 + uW$, que é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda_1 x \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + \lambda_2 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Olhando para o subsistema formado pela primeira e segunda linha, temos que para $\dot{g} = \mathcal{X}_1 + uW$ ser controlável então $\lambda_1 = 0$. Da mesma forma, olhando para o subsistema formado pelas primeira e terceira linha $\lambda_2 = 0$ mas se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ os sistema não satisfaz a condição do posto. Logo o sistema não é controlável.

Observemos então o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}_\in, \langle W \rangle) : \dot{g} = \mathcal{X}_2 + uW$, visto como

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda x + y \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + \lambda y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Do subsistema formado pela primeira e terceira linha, temos que para o subsistema ser controlável $\lambda = 0$ e portanto, para termos controlabilidade em $\Sigma(\mathcal{X}_{\in}, \langle W \rangle)$ λ deve ser nulo. Disto temos que X' está no núcleo de D_2 e portanto é invariante sob a mesma e além disso, X' é ideal $\mathfrak{g}$.

Veja que nestas condições apresentadas ($\lambda = 0$) o sistema satisfaz ad-rank se e somente se $c_1', d_1 e d_4$ são não nulos. Como estamos supondo a condição do posto c_1 e d_1 são não nulos.

O sistema induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$, isomorfo a $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$ é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

que segundo [2] é controlável desde se $d_4 \neq 0$ (satisfaz a condição de ad-rank) e não é controlável se $d_4 = 0$ (não satisfaz ad-rank. Assim, pela Proposição 1.4.10 $\Sigma(\mathcal{X}_2, \langle W \rangle)$ é controlável se $\lambda = 0$ e satisfaz a condição de ad-rank e não é controlável se não o faz.

Para o terceiro caso, $\dot{g} = \mathcal{X}_3 + uW$, vamos descreve-lo antes de falarmos sobre ele.

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda x + \mu y \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + -\mu x + \lambda y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

A partir de sua derivação, temos que o sistema satisfaz a condição de ad-rank desde que

$$-d_1 \mu (b^2 + c^2)(\mu^2 + (\lambda - d_4)^2) \neq 0$$

como $\mu \neq 0$ por hipótese, $d_1 \neq 0$ e $(b^2 + c^2) \neq 0$ são condições necessárias para satisfazer a condição do posto, temos que o sistema satisfaz ad-rank. Se $\lambda = 0$ e $d_4 = 0$ então o sistema é controlável. Se $d_4 = 0$, Z pertence ao núcleo de D e como Z também é ideal de $\mathfrak{g}$ temos que $G_{\langle Z \rangle} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$ e o sistema induzido em $G/G_{\langle Z \rangle}$, isomorfo a $\mathrm{G}_{3,3}$,

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda x + \mu \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + -\mu x + \lambda y \end{cases}$$

é controlável segundo [2]. Portanto, pela Proposição 1.4.10, $\Sigma(\mathcal{X}_3, \langle W \rangle)$ com $d_4 = 0$ e $\lambda \neq 0$ é controlável. De forma análoga vemos que $\Sigma(\mathcal{X}_3, \langle W \rangle)$ é controlável se $\lambda = 0$ e $d_4 = 0$.

Não sabemos dizer a controlabilidade quando λ e μ são não nulos.

4.2.2 $\mathfrak{g}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{R}$

Apresentaremos aqui o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle : \dot{g} = \mathcal{X} + uW$ que é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = \frac{e^{\alpha w}((b_1 - \alpha c_1) sin(w) + (c_1 + \alpha b_1)(cos(w) - 1))}{\alpha^2 + 1} + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = \frac{e^{\alpha w}((c_1 + \alpha b_1) sin(w) + (b_1 - \alpha c_1)(1 - cos(w)))}{-} b_3 x + b_2 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

A derivação D associada a $\mathcal{X}$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Logo o sistema linear satisfaz a condição de ad-rank se

$$-d_1 b_3 (b^2 + c^2)(b_3^2 + (b_2 - d_4)^2) \neq 0$$

Se $d_4 = 0$ temos Z está no núcleo de D e portanto é um ideal de $\mathfrak{g}$, invariante por D. O sistema induzido em $G/G_{\langle Z \rangle}$, isomorfo a $\mathrm{G}_{3,5}^{\alpha}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = \frac{e^{\alpha w}((b_1 - \alpha c_1) sin(w) + (c_1 + \alpha b_1)(cos(w) - 1))}{\alpha^2 + 1} + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = \frac{e^{\alpha w}((c_1 + \alpha b_1) sin(w) + (b_1 - \alpha c_1)(1 - cos(w)))}{-} b_3 x + b_2 y \end{cases}$$

Que é controlável segundo [2].

Não sabemos se o sistema é controlável se $d_4 \neq 0$.

4.2.3 $\mathfrak{g}_{4,2}^{1}$

$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + uW$ é um sistema linear da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)e^w + c_1 w e^w + b_2 x + b_3 y + b_4 z \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_3 y + d_4 z \end{cases}$$

Do sistema restrito às suas primeira, terceira e quarta linha linhas, temos que para $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ ser controlável b_2 e d_4 precisam ser nulos. Então para o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ ser controlável a derivação D é da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & d_3 & 0 \end{bmatrix}$$

e a matriz de ad-rank do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 c_1 + b_4 d_1 & b_4 d_3 c_1 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

possui determinante

$$c_1^3 d_3^2 b_4.$$

Logo se satisfaz ad-rank $c_1, d_3 e b_4$ são nulos. Estamos assumindo a condição do posto, então c_1 e d_3 são diferentes de zero.

Suponha que o $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ satisfaz ad-rank e $b_2 = 0$ Como X, Z estão no núcleo de D e são ideais de $\mathfrak{g}$ temos que o sistema linear induzido $G/G_{\langle X,Z \rangle}$, isomorfo a $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \end{cases}$$

é controlável e portanto, pela Proposição 1.4.10 o sistema é controlável. Concluímos então que o $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ é controlável se b_2 e b_4 forem nulos e o sistema satisfizer a condição de ad-rank, sendo então da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)e^w + c_1 w e^w + b_3 y + b_4 z \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_3 y \end{cases}$$

Não conseguimos saber a controlabilidade para $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ quando satisfaz a condição do posto, mas não a de ad-rank (isto é, quando $b_3 = 0$). Este sistema é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)e^w + c_1 w e^w + b_3 y + b_4 z \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_3 y \end{cases}$$

Com a abordagem que estamos utilizando, não conseguimos estudar este sistema.

4.2.4 $\mathfrak{g}_{4,3}$

Estudaremos agora a controlabilidade de sistemas de controles da forma $\dot{g} = \mathcal{X}_g + uW$ onde $\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x, \frac{d_1}{2} w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z, d_1 w + c_3 z)$ e $W = (1, 0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{d_1}{2} w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z \end{cases}$$

Observemos aqui dois subsistemas. O primeiro é o formado pelas primeira e segunda linhas do sistema, isto é

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \end{cases}$$

Este subsistema descreve um sistema de controle linear no grupo afim, que é controlável, por [9] se e somente se $b_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$.

O segundo subsistema a obervar é formado pelas primeira, terceira e quarta linhas do sistema de controle.

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{y} = \frac{d_1}{2} w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z \end{cases}$$

Tal sistema descreve um sistema de controle linear no grupo de Heinsenbeg. O campo linear deste subsistema está associado com a seguinte derivação da álgebra de Heisenberg cuja base ordenada é formada pelos vetores $\{W, Y, Z\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

Segundo [9] este subsistema, caso satisfaça a condição do posto, é equivalente ao sistema de controle linear no grupo de Heisenberg, cuja derivação é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_4 \\ 1 & 0 & c_3 \end{bmatrix},$$

Que é controlável se e somente se $0 < -\frac{c_3^2}{4}$ ou $c_3 = 0$ e $c_4 \neq 0$. Como $0 < -\frac{c_3^2}{4}$ é claramente falso, temos que para o subsistema ser controlável, devemos ter $c_3 = 0$ e $c_4 \neq 0$.

Modificaremos então nosso sistema de controle original para um equivalente via o automorfismo

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1^{-1} & -c_1 d_1^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & d_1^{-1} \end{bmatrix}$$

e estudaremos a controlabilidade deste, já assumindo aqui $b_2 = 0$ e $c_3 = 0$. Pois como vimos dos subsistemas, $b_2 = c_3 = 0$ é condição necessária para possuirmos controlabilidade. Este sistema é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = \frac{1}{2}w^2 + c_4 z \\ \dot{z} = w \end{cases}$$

Este sistema não satisfaz a condição de ad-rank, porém satisfaz a condição do posto. Não sabemos dizer se este sistema é controlável ou não com as ferramentas que estamos utilizando.

4.2.5 $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$

Veremos aqui as condições para a controlabilidade dos sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + uW$ Tal sistema tem a forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{cases}$$

cuja derivação D relacionada ao campo linear $\mathcal{X}$ na base ordenada {W,X,Y,Z} é

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

Assim como feito na seção 4.2.1, Adotaremos uma nova base ordernada $\{W, X', Y', Z\}$ $X' = \alpha_1 X + \beta_1 Y$ e $Y' = \alpha_2 X + \beta_2 Y$, que não modifica a constantes de estruturas e coloca a submatriz

$$D = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

na forma de Jordan. Assim D pode ser escrito como

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

ou

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & \lambda & 1 & 0 \\ c_1' & 0 & \lambda & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

ou

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda & \mu & 0 \\ c_1' & -\mu & \lambda & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

relacionados aos campos de vetores lineares no sistema coordenado $\{\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z}\}$

$$\mathcal{X}_1 = (0, b_1'(e^w - 1) + \lambda_1 x, c_1'(e^w - 1) + \lambda_2 y, \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z),$$

$$\mathcal{X}_2 = (0, b_1'(e^w - 1) + \lambda x + y, c_1'(e^w - 1) + \lambda y, \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z)$$

e

$$\mathcal{X}_3 = (0, b_1'(e^w - 1) + \lambda x + \mu y, c_1'(e^w - 1) - \mu x + \lambda y, \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z)$$

respectivamente. Estudemos caso a caso cada um dos sistemas de controle.

Para o sistema $\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda_1 x \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + \lambda_2 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{cases}$$

temos, do subsistema formado pela primeira e segunda linha que para o sistema ser controlável $\lambda_1 = 0$. De forma análoga temos que λ_2 e $d_4 = 0$. Mas se o sistema satisfizer estas condições ele não satisfaz a condição do posto, logo $\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W \rangle)$ não é controlável.

O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}_2, \langle W \rangle)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda x + y \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + \lambda y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{cases}$$

para ser controlável precisa que λ e d_4 sejam nulos, nesse caso sua matriz de derivação é da forma

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 \\ c_1' & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

com matriz de ad-rank

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1' & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

que claramente tem determinante nulo.

Para a matriz do posto, precisamos calcular $[W, D(W)] = b_1 X' + c_1 Y' + \beta d_1 Z$

Assim

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1' & c_1 & b_1' \\ 0 & c_1' & 0 & c_1' \\ 0 & d_1 & 0 & \beta d_1 \end{bmatrix}.$$

com determinante $c_1^2 d_1(1 - \beta)$ e temos que o sistema satisfaz a condição do posto se c_1 e d_1 forem não nulos. Não conseguimos resolver a controlabilidade neste caso com as ferramentas que possuimos.

Por fim, vejamos $\Sigma(\mathcal{X}_3, \langle W \rangle)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda x + \mu y \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) - \mu x + \lambda y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{cases}$$

Novamente temos aqui que para o sistema linear ser controlável $d_4 = 0$, e portanto Z é um ideal de $\mathfrak{g}$ contido no núcleo de D.

Agora, Para a matriz D_3 nas condições acima é

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1' & \lambda & \mu & 0 \\ c_1' & -\mu & \lambda & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ao calcularmos a matriz de ad-rank

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1' & b_1\lambda + c_1\mu & \lambda(b_1\lambda + c_1\mu) + \mu(-b_1\mu + c_1\lambda) \\ 0 & c_1' & -b_1\mu + c_1\lambda & -\mu(b_1\lambda + c_1\mu) + \lambda(-b_1\mu + c_1\lambda) \end{bmatrix}.$$

cujo determinante é $-d_1\mu(\mu^2 + \lambda^2)(b^2 + c^2)$. como por hipótese $\mu \neq 0$ o sistema satisfaz ad-rank se $d_1 \neq 0$ e $c_1X' + d_1Y' \neq 0$. Como $[W, D(W)] = b_1X + c_1Y + \beta d_1 Z$, temos que tanto $d_1 \neq 0$ quanto $c_1X' + d_1Y' \neq 0$. são condições necessárias para satisfazer a condição do posto. Assim, se o sistema satisfaz a condição do posto, ele satisfaz ad-rank

Logo $G_{\langle Z\rangle} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$

Temos então que o sistema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle}$, isomorfo a $G_{3,3}$ é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda x + \mu y \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) - \mu x + \lambda y \end{cases}$$

que segundo [2] é controlável. Assim, para $\Sigma(\mathcal{X}_3, \langle W\rangle)$ ser controlável basta que $d_4 = 0$ e satisfaça a condição do posto.

4.2.6 $\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$

Esta parte da seção será dedicada ao estudo do sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + uW$.

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1\frac{e^{\beta w}sen(w)+\beta e^{\beta w}cos(w)}{1+\beta^2} + d_1\frac{-e^{\beta w}cos(w)+\beta e^{\beta w}sen(w)}{1+\beta^2} + c_3 y + c_4 z + \frac{d_1-\beta c_1}{1+\beta^2} \\ \dot{z} = -c_1\frac{-e^{\beta w}cos(w)+\beta e^{\beta w}sen(w)}{1+\beta^2} + d_1\frac{e^{\beta w}sen(w)+\beta e^{\beta w}cos(w)}{1+\beta^2} + c_4 y + c_3 z - \frac{c_1+\beta d_1}{1+\beta^2} \end{cases}$$

Devemos ter do subsistema formado pela primeira e segunda linha que para $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W\rangle)$ ser controlável $b_2 = 0$. Olhemos para a derivação e a matriz de ad-rank do sistema quando $b_2 = 0$.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & -c_4 & c_3 \end{bmatrix}.$$

$$ad - rank = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2c_1 + c_3d_1 & c_2(c_2c_1 + c_3d_1) + c_3(c_2d_1 - c_3c_1) \\ 0 & d_1 & c_2d_1 - c_3c_1 & c_2(c_2d_1 - c_3c_1) - c_3(c_2c_1 + c_3d_1) \end{bmatrix}.$$

Esta matriz de ad-rank possui determinante $-b_1c_3(c_2^2 + c_3^2)(c_1^2 + d_1^2)$. $b_1 \neq 0$ e $(c_1^2 + d_1^2)$ são claramente necessários para a condição do posto. Precisamos ver quando $c_3 = 0$ e quando $(c_2^2 + c_3^2) = 0$.

Para $c_3 = 0$ (mas $c_2 \neq 0$) estudemos a matriz $(W, D(W), D^2(W), [W, D(W)]$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & \alpha b_1 \\ 0 & c_1 & c_2 c_1 & \beta c_1 + d_1 \\ 0 & d_1 & c_2 d_1 & \beta d_1 - c_1 \end{bmatrix}.$$

tem determinante $-b_1 c_2 (c_1^2 + d_1^2)$.

Para $(c_2^2 + c_3^2) = 0$ vejamos a matriz $(W, D(W), [W, D(W)], [W, [W, D(W)]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & \alpha b_1 & \alpha^2 \\ 0 & c_1 & \beta c_1 + d_1 & \beta(\beta c_1 + d_1) + (d_1 - c_1) \\ 0 & d_1 & \beta d_1 - c_1 & \beta(d_1 - c_1) - (c_1 + d_1) \end{bmatrix}.$$

tem determinante $b_1(c_1^2 + d_1^2)(\alpha^2 - \beta^2 - 1 + \alpha\beta)$.

Conclusão: Pela nossa abordagem neste trabalho, se o sistema não satisfaz ad-rank, não cheganos a nenhuma conclusão sobre controlabilidade.

4.3 sistemas de controle com 2 controles

Nesta seção estudaremos controlabilidade de sistemas com dois controles do tipo

$$\dot{g} = \mathcal{X}_g + u_1 V_1 + u_2 V_2$$

com $\mathcal{X}_g$ um campo linear do grupo de lie, V_1 e V_2 campos invariantes à esquerda e o subespaço $\langle V_1, V_2 \rangle$ é subálgebra da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

4.3.1 $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$

Neste primeiro caso estudaremos a controlabilidade dos sistemas de controle lineares, $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \oplus \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ onde Δ é uma subálgebra bidimensional. Das sete subálgebras listadas, os sistemas de controle lineares $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X + cY, Z \rangle)$, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X, cY + dZ \rangle)$ e $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X, Z \rangle)$ não são controláveis pois não satisfazem a condição do posto. Aqui $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X + cY, Z \rangle)$ representa o sistema de controle $\dot{g} = \mathcal{X}_g + u_1(X + cY) + u_2 Z$, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X, cY + dZ \rangle)$ representa o sistema de controle $\dot{g} = \mathcal{X}_g + u_1 X + u_2(cY + dZ)$ e $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X, Z \rangle)$ representa o sistema de controle $\dot{g} = \mathcal{X}_g + u_1 X + u_2 Z$. Pelo mesmo motivo, para o caso $c = 0$, também não são controláveis os sistemas de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + cY + dZ, X \rangle)$, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX + cZ, Z \rangle)$ e $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX, cY + dZ \rangle)$. Então vamos estudar os casos restantes a seguir

Controlabilidade dos sistemas $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + Y + dZ, X + d'Z \rangle)$, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + cY + dZ, X \rangle)$, **e** $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX + cZ, Z \rangle)$

Os sistemas de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + Y + dZ, X + d'Z \rangle)$, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + cY + dZ, X \rangle)$, e $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX + cZ, Z \rangle)$, onde $c \neq 0$, são, repectivamente, da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = u_1 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_1 d e^y + u_2 d' e^y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = c u_1 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_1 d e^y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_1 b e^w \\ \dot{y} = c u_1 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_2 e^y \end{cases}$$

Em todas os sistemas temos que $\dot{y} = c\dot{w}$, ou seja, partindo da condição inicial (w_0, x_0, y_0, z_0) temos que qualquer ponto atingível é da forma $(w, x, cw + y_0 - cw_0, z)$ e portanto não são controláveis.

Controlabilidade dos sistemas $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX, cY + dZ \rangle)$

O sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX, cY + dZ \rangle)$ é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_1 b e^w \\ \dot{y} = c u_2 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_2 d e^y \end{cases}$$

Supondo que o sistema satisfaz a condição do posto, usando o automorfismo

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-b}{b_1 + b_2 b} & \frac{1}{b_1 + b_2 b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-d}{cd_3 + dd_4} & \frac{c}{cd_3 + dd_4} \end{bmatrix}$$

Temos que o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX, cY + dZ \rangle)$ é isomorfo ao sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c u_2 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z \end{cases}$$

Ao olhar para as duas primeiras linhas e para as duas últimas linhas separadamente, vemos que se b_2 ou d_4 são não nulos, o sistema de controle não é controlável. De fato, se $b_2 \neq 0$, suponha primeiramente que $b_2 > 0$. Veja que se $\dot{x} < 0$, então $e^w - 1 + b_2 x < 0$ ou seja $x < \frac{1-e^w}{b_2} < \frac{1}{b_2}$. Portanto, se partimos de um ponto (w, x, y, z) onde $x > \frac{1}{b_2}$, em qualquer ponto (w_1, x_1, y_1, z_1) que atingirmos temos que $x < x_0$ e portanto o sistema não é controlável. Da mesma forma, se supormos $b_2 < 0$ e ao tomarmos $\dot{x} < 0$ temos que $e^w - 1 + b_2 x < 0$ e portanto $x > \frac{1-e^w}{b_2} > \frac{1}{b_2}$. Logo, se partimos de um ponto (w, x, y, z)

onde $x < \frac{1}{b_2}$, em qualquer ponto (w_1, x_1, y_1, z_1) que atingirmos temos que $x < x_0$ e portanto o sistema não é controlável.

A resolução é análoga para $d_4 \neq 0$. Assim, o sistema é controlável se é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (e^w - 1) \\ \dot{y} = cu_2 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) \end{cases}$$

Como este sistema satisfaz a condição de Ad-rank e a álgebra das raízes $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ temos que o sistema é controlável

Assim, temos que o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX, cY + dZ\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$.

Temos então o seguinte resultado

Proposição 4.3.1. *O sistema de controle Linear $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, onde Δ é uma subálgebra de dimensão 2, é controlável se e somente se o sistema satisfizer a condição do posto, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, e Δ possui um vetor da forma $W + bX$ e um vetor da forma $Y + dZ$.*

4.3.2 $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$

Controlabilidade dos sistemas $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$

Trataremos agora da controlalibilidade dos sistemas de controle lineares $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$ onde Δ é uma subágebra de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}^2$, isomorfa ao grupo afim $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$. Como sempre, supomos que $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$ satisfaz a condição do posto, então ela é isomorfa a subálgebra $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$. Será portanto o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$ que iremos estudar. Primeiramente temos que ele é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1 w + c_3 y + c_4 z \\ \dot{z} = d_1 w + d_3 y + d_4 z \end{cases}$$

Perceba aqui que como $X = \frac{e^w \partial}{\partial x}$ é um vetor de $\langle W, X\rangle$, pela proposição 1.4.9 $\{e^{tX}; t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbf{cl}(\mathcal{A}) \cap \mathbf{cl}(\mathcal{A}^*)$. Além disso, X é invariante por D, pois é autovetor da derivação e como X é ideal de $\mathfrak{g}$, $\{e^{tX}; t \in \mathbb{R}\}$ é subgrupo normal de G.

Vamos mostrar agora que o sistema de controle acima é controlável se e somente se o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1 w + c_3 y + c_4 z \\ \dot{z} = d_1 w + d_3 y + d_4 z \end{cases}$$

no espaço homogêneo $\frac{\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}^2}{e^{tX}} = \mathbb{R}^3$ é controlável. De fato, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}^2$ pode ser identificada com o álgebra de Lie das matrizes quadradas 4×4 da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

onde

$$W=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},Z=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

munido com o colchete usual de matrizes $[A,B]=AB-BA$. Logo e^{tX}

$$e^{tX}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\t&e^0&0&0\\0&0&e^0&0\\0&0&0&e^0\end{bmatrix},$$

identificado em $\mathbb{R}^4$ com $(0,t,0,0)$. Deste modo, dado $\overline{(w_1,x_1,y_1,z_1)},\overline{(w,x,y,z)}$ vetores de $\frac{\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R}^2}{e^tX}$, $\overline{(w_1,x_1,y_1,z_1)}*\overline{(w,x,y,z)}=\overline{(w_1+w,x_1+e^{w_1}x,y_1+y,z_1+z)}=\overline{(w_1+w,0,y_1+y,z_1+z_3)}$, claramente $G/G_{\langle X\rangle}$ isomorfo como grupo ao grupo de Lie abeliano $\mathbb{R}^3$.

Assim,

$$\begin{cases}\dot{w}=u_1\\ \dot{y}=c_1w+c_3y+c_4z\\ \dot{z}=d_1w+d_3y+d_4z\end{cases}$$

é um sistema de controle linear no grupo abeliano $\mathbb{R}^3$, que é controlável se e somente se satisfaz a condição de kalman, isto é, se a matriz de kalmann

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c_1&c_3c_1+c_4d_1\\0&d_1&d_3c_1+d_4d_1\end{bmatrix}.$$

é invertível.

Além disso, $\langle X\rangle$ é invariante sob a derivação D. Pela proposição (1.4.10) O sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,X\rangle)$ é controlável se e somente se

$$\begin{cases}\dot{w}=u_1\\ \dot{y}=c_1w+c_3y+c_4z\\ \dot{z}=d_1w+d_3y+d_4z\end{cases}$$

for controlável.

Proposição 4.3.2. $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,X\rangle)$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.*

Controlabilidade dos sistemas $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,cY+dZ\rangle)$

Estudaremos aqui a controlabilidade do sistema de controle linear $\dot{g}=\mathcal{X}+u_1(cY+dZ)$.

$$\begin{cases}\dot{w}=u_1\\ \dot{x}=b_1(e^w-1)+b_2x\\ \dot{y}=c_1w+c_3y+c_4z+u_2c\\ \dot{z}=d_1w+d_3y+d_4z+u_2d\end{cases}$$

onde $(c,d) \neq (0,0)$. Observe que se o sistema é controlável, então $b_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$. De fato, $b_1 \neq 0$ pois se $b_1 = 0$ o sistema não é controlável. Suponha então que $b_1 > 0$. Se $b_2 > 0$, nós temos que $\dot{x} < 0$ se e somente se $b_1(e^w - 1) + b_2 x < 0$. Isto é $x < \frac{b_1(1-e^w)}{b_2} < \frac{b_1}{b_2}$. Logo se $x > \frac{b_1}{b_2}$, $\dot{x} > 0$. Se supormos que $b_2 < 0$ nós temos que $\dot{x} < 0$ se e somente se $b_1(e^w - 1) + b_2 x < 0$. Isto é $x > \frac{b_1(1-e^w)}{b_2} > \frac{b_1}{b_2}$. Logo se $x < \frac{b_1}{b_2}$, $\dot{x} > 0$.

Vejamos então se $b_1 < 0$. Neste caso, se $b_2 > 0$ temos que $\dot{x} < 0$ se e somente se $b_1(e^w - 1) + b_2 x < 0$. Desta forma, $x < \frac{b_1(1-e^w)}{b_2} < \frac{b_1}{b_2}$. Logo se $x > \frac{b_1}{b_2}$, $\dot{x} > 0$. Por fim, se $b_2 < 0$ para $\dot{x} < 0$ se e somente se $b_1(e^w - 1) + b_2 x < 0$. Isto é $x > \frac{b_1(1-e^w)}{b_2} > \frac{b_1}{b_2}$. Logo se $x < \frac{b_1}{b_2}$, $\dot{x} > 0$.

Desta forma temos X é invariante sob D e como X é ideal de $\mathfrak{g}$ nós temos que $G_{\langle X \rangle}$ é um subgrupo normal de G.

Vamos então estudar a controlabilidade primeiramente assumindo que $b_2 = 0$ e que o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, cY + dZ \rangle)$. satisfaz ad-rank. Neste caso temos que a matriz $[W, cY + dZ, D(W), D(cY + dZ), D^2(W)]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c & c_1 & c_3c + c_4d & c_3c_1 + c_4d_1 \\ 0 & d & d_1 & d_3c + d_4d & d_3c_1 + d_4d_1 \end{bmatrix}.$$

possui posto máximo e isso acontece quando $b_1 \neq 0$ e o vetor $D^2(W)$ ou o vetor $D(cY + dZ)$ não é multiplo de $cY + dZ$.

Pela proposição 1.4.10 temos que este sistema é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$, que é um grupo isomorfo a $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_2 c \\ \dot{z} = d_1 w + d_3 y + d_4 z + u_2 d \end{cases}$$

Para o sistema induzido ser controlável, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & c_1 & c_3c + c_4d & c_3c_1 + c_4d_1 \\ 0 & d & d_1 & d_3c + d_4d & d_3c_1 + d_4d_1 \end{bmatrix}.$$

deve ter posto máximo, o que claramente acontece já que temos que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, cY + dZ \rangle)$ satisfaz ad-rank e portanto $D^2(W)$ ou o vetor $D(cY + dZ)$ não é multiplo de $cY + dZ$. Vemos portanto que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, cY + dZ \rangle)$, quando satisfaz ad-rank e $b_2 = 0$ é controlável.

Em seguida vamos estudar a controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, cY + dZ \rangle)$, assumindo que $b_2 = 0$, porém o sistema não satisfaz a propriedade de ad-rank. Como por hipótese o sistema satisfaz a condição do posto, temos que a matriz $[W, cY + dZ, D(W), [W, D(W)]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_1 \\ 0 & c & c_1 & 0 \\ 0 & d & d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

possui determinante $b_1(c_1 d - c d_1)$ não nulo. Por outro lado, como o sistema não satisfaz ad-rank temos que $D^2(W)$ e $D(cY + dZ)$ são multiplos de $cY + dZ$, digamos que $D^2(W) = \alpha(cY + dZ)$ e

$D(cY+dZ)=\beta(cY+dZ)$ Como para satisfazer a condição do posto $(c_1d-cd_1)\neq 0$ temos que $cY+dZ$ e c_1Y+d_1Z são linearmente independentes. Neste caso, troquemos a base $\{W,X,Y,Z\}$ de $\mathfrak{g}$ para a base $\{W,X,Y',Z'\}$ onde $Y'=cY+dZ$ $Z'=c_1Y+d_1Z$ o sistema fica na forma

$$\begin{cases} \dot{w}=u_1 \\ \dot{x}=b_1(e^w-1) \\ \dot{y'}=0+\alpha y+\beta z+u_2c \\ \dot{z'}=w \end{cases}$$

Como Y' é invariante sob D e ideal de $\mathfrak{g}$ nós temos que $G_{Y'}$ é um subgrupo normal do grupo de fase $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R}^2$ que é invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$. Então a Proposição 1.4.10 nos garante que o sistema é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{Y'}$

$$\begin{cases} \dot{w}=u_1 \\ \dot{x}=b_1(e^w-1) \\ \dot{z}=w \end{cases}$$

onde $G/G_{Y'}$ é isomorfo a $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R}$, que para ser isomorfo precisa satisfazer a condição do posto e ter sua álgebra das raízes $\mathfrak{g}^0$ isomorfa a $\mathbf{aff}(\mathbb{R})$. Mas a matriz de derivação do campo linear do sistema induzido é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com $\mathfrak{g}$ isomorfa a $\mathbf{aff}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$. Portanto o sistema induzido não é controlável.

Concluimos portanto que $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,cY+dZ\rangle)$ não é controlável se não satisfaz ad-rank. Assim temos a proposição

Proposição 4.3.3. $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,cY+dZ\rangle)$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição de ad-rank e* $\mathfrak{g}^0$ *contém o grupo afim.*

4.3.3 $\mathfrak{g}_{3,2}\oplus\mathbb{R}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,X\rangle)$

Estudemos agora a controlabilidade para os sistemas de controle lineares $\Sigma(\mathcal{X}',\Delta)$, onde Δ é uma subálgebra de $\mathrm{G}_{3,2}\times\mathbb{R}$ isomorfa ao grupo afim. Estamos supondo que ele satisfaz a condição do posto, logo ele é isomorfo ao sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,X\rangle)$.

Este sistema é da forma

$$\begin{cases} \dot{w}=u_1 \\ \dot{x}=(b_1-c_1)(e^w-1)+c_1we^w+b_2x+b_3y+u_2e^w \\ \dot{y}=c_1(e^w-1)+b_2y \\ \dot{z}=d_1w+d_4z \end{cases}$$

Veja que o sistema restrito as 3 primeiras linhas,

$$\begin{cases} \dot{w}=u_1 \\ \dot{x}=(b_1-c_1)(e^w-1)+c_1we^w+b_2x+b_3y+u_2e^w \\ \dot{y}=c_1(e^w-1)+b_2y \end{cases}$$

descreve um sistema de controle em $\mathrm{G}_{3,2}$. Por [2], o sistema restrito é controlável se e somente satisfaz a condição do posto e $b_2 = 0$. Como para $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, \rangle)$ ser controlável, o sistema restrito precisa ser controlável, então temos que $b_2 = 0$ é condição necessária para a controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, \rangle)$. Assim, se $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, \rangle)$ é controlável, ele é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_3 y + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Prosseguindo no nosso estudo de controlabilidade, veremos agora as condições para o sistema satisfazer a condição de ad-rank. Ao montarmos a matriz $[W, D(W), X, D^2(W), D^3(W)]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 1 & b_3 c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & d_4 d_1 & d_4^2 d_1 \end{bmatrix}$$

vemos que o sistema linear satisfaz a condição de ad-rank se c_1, d_1 e d_4 são não nulos. Note $c_1 \neq 0$ e $d_1 \neq 0$ são condições necessárias para satisfazer a condição do posto, mas caso $d_4 = 0$, o sistema ainda satisfaz a condição do posto, desde que $c_1 \neq 0$ e $d_1 \neq 0$.

A Proposição 1.4.9 nos garante que, como $\langle X \rangle \subset \langle W, X \rangle$, $G_{\langle X \rangle} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$. Então temos que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, \rangle)$, assumindo que $b_2 = 0$, é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$, isomorfo a $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

é controlável. Agora, pela Proposição 1.4.16 Isto acontece se e somente se o sistema induzido satisfaz a condição do posto e $d_4 \neq 0$. Assim temos que $d_4 \neq 0$ é condição necessária para a controlabilidade.

Proposição 4.3.4. *O sistema* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$. *no grupo* $\mathrm{G}_{3,2} \times \mathbb{R}$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e* $dim(\mathfrak{g}^0) = 3$.

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z \rangle)$.

Vejamos agora a controlabilidade para o sistema de controle Linear $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$, onde Δ é uma subálgebra de $\mathrm{G}_{3,2} \times \mathbb{R}$ isomorfa ao grupo abeliano $\mathbb{R}^2$. Se este sistema de controle satisfaz a condição do posto, ele é isomorfo ao sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z \rangle)$. Este Sistema é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_2 \end{cases}$$

Temos Que $\langle Z \rangle$ é um ideal da álgebra de lie $\mathfrak{g}$ de G. Além disso, Z é invariante sob a derivação D. Temos então que $G_{\langle Z \rangle}$ é subgrupo normal de G. e pela Proposição 1.4.9 $G_{\langle Z \rangle} \subset \mathbf{cl}(\mathcal{A}) \cup \mathbf{cl}(\mathcal{A}^*)$. Pela proposição 1.4.10 o sistema linear $\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle$ é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 we^w + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \end{cases}$$

for controlável. Agora, este sistema restrito descreve um sistema de controle linear em $\mathrm{G}_{3,2}$. Por [2], o sistema restrito é controlável se e somente satisfaz a condição do posto, $b_2 = 0$, e $b_3 \neq 0$. isto é

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 we^w + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \end{cases}$$

Desta forma o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 we^w + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_2 \end{cases}$$

com $b_3, c_1 \neq 0$.

Proposição 4.3.5. *O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto, dim$(\mathfrak{g}_0) \geq 3$ e $b_3 \neq 0$.*

4.3.4 $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$

$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, \alpha X + \beta Y\rangle$

Ainda não conseguimos tratar da controlabilidade do sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, \alpha X + \beta Y\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2(\alpha X + \beta Y)$, com forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y + u_2 \alpha e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y + u_2 \beta e^w \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}.$$

Da mesma forma feita em 4.2.1, podemos separá-lo nos seguintes sistemas

$$\Sigma(\mathcal{X}_1, \langle W, \alpha' X' + \beta' Y'\rangle) = \begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda_1 x' + u_2 \alpha' e^w \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + \lambda_2 y' + u_2 \beta' e^w \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}.$$

$$\Sigma(\mathcal{X}_2, \langle W, \alpha' X' + \beta' Y'\rangle) \begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1'(e^w - 1) + \lambda x' + y + u_2 \alpha' e^w \\ \dot{y} = c_1'(e^w - 1) + \lambda y' + u_2 \beta' e^w \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}.$$

e

$$\Sigma(\mathcal{X}_3, \langle W, \alpha' X' + \beta' Y' \rangle) \begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x}' = b_1'(e^w - 1) + \lambda x' + \mu y' + u_2 \alpha' e^w \\ \dot{y}' = c_1'(e^w - 1) - \mu x' + \lambda y' + u_2 \beta' e^w \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}.$$

Não sabemos dizer sobre a controlabilidade destes sistemas, não há criterios claros sobre a condição de ad-rank, informação sobre a álgebra das raízes, ou que o input $\alpha X + \beta Y$ é D invariante.

4.3.5 $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$ e $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y \rangle)$

Os sistemas estudados aqui são os da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^{\lambda w} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\lambda}(e^{\lambda w} - 1) + c_3 y + u_2 e^{-w} \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Lembramos aqui que λ é um número real no conjunto $[-1, 0) \cup (0, 1)]$

Para $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$ e $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y \rangle)$ respectivamente. Para o primeiro sistema, ele será controlável se e somente se o sistema descrito pelas primeira, terceira e quarta linhas for controlável. De fato, $\langle X, \rangle$é ideal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo G. Além disso, $\langle X, \rangle$ é invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Pelas Proposições 1.4.9 e 1.4.10, o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$ é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X, \rangle}$ é controlável e este sistema induzido pode ser visto como o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$ sem a segunda linha. Analogamente o segundo sistema é controlável se e somente se o sistema formado pelas primeira, segunda e quarta linhas for controlável. Então precisamos olhar para os sistemas

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\lambda}(e^{\lambda w} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Mas estes sistemas descrevem um sistema de controle linear em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$. Supondo que os subsistemas satisfazem a condição do posto, o primeiro subsistema é controlável se e somente se $c_3 = 0$ e $d_4 \neq 0$, enquanto o segundo subsistema é controlável se e somente se $b_2 = 0$ e $d_4 \neq 0$.

Proposição 4.3.6. *Sobre os sistemas de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ em $\mathrm{G}_{3,4} \times \mathbb{R}$, que satisfazem a condição do posto,*

$$\mathcal{X} = (0, b_1(e^w - 1) + b_2 x, c_1(e^{-w} - 1) + c_3 y, d_1 w + d_4 z)$$

e Δ é uma subálgebra ismomorfa ao ao grupo $Aff(\mathbb{R})$ e contém W, temos

1. *O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$ em $\mathrm{G}_{3,4}\times\mathbb{R}$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto, $c_3 = 0$ e $d_4 \neq 0$.*

2. *O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y\rangle)$ em $\mathrm{G}_{3,4}\times\mathbb{R}$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto, $b_2 = 0$ e $d_4 \neq 0$.*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$

Nesta subseção olharemos para o sistema de controle, que é da forma $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X}_g + u_1 W + u_2 Z$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\lambda}(e^{\lambda w} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_2 \end{cases}$$

Ao observarmos o subsistema formado pelas três primeiras linhas do sistema acima

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^{-w} - 1) + c_3 y \end{cases}$$

descreve um sistema de controle linear em $\mathrm{G}^0_{3,4}$. Como o subsistema não é controlável, temos que o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ também não é controlável.

Proposição 4.3.7. *Nenhum sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ é controlável.*

4.3.6 $\mathfrak{g}^0_{3,5} \oplus \mathbb{R}$

Controlabiliedade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$

Trabalharemos agora com o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1 \sin(w) + c_1(\cos(w) - 1) + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1 \sin(w) + b_1(1 - \cos(w)) - b_3 x + b_2 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_2 \end{cases}$$

Como $\langle Z\rangle$ é um ideal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G e invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$, as Proposições 1.4.9 e 1.4.10 nos garantem que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle} = \mathrm{G}^0_{3,5}$.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1 \sin(w) + c_1(\cos(w) - 1) + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1 \sin(w) + b_1(1 - \cos(w)) - b_3 x + b_2 y \end{cases}$$

for controlável. De [2] temos que este sistema é controlável se e somente se satisfizer a condição do posto, $b_2 = 0$ e $b_3 \neq 0$.

Então, para o sistema de controle em $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ ser controlável, ele satisfaz a condição do posto e é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1 \sin(w) + c_1(\cos(w) - 1) + b_3 y \\ \dot{y} = c_1 \sin(w) + b_1(1 - \cos(w)) - b_3 x \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_2 \end{cases}$$

Proposição 4.3.8. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ em $\mathrm{G}^0_{3,5} \times \mathbb{R}$ é controlável se e somente satisfaz a condição do posto e $b_2 = 0$ e $b_3 \neq 0$.*

4.3.7 $\mathfrak{g}^a_{3,5} \oplus \mathbb{R}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = \frac{e^{\alpha w}(\sin(w)(b-\alpha c)+cos(w)(\alpha b+c))+(-\alpha b-c)}{\alpha^2+1} + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = \frac{e^{\alpha w}(\sin(w)(\alpha b+c)+cos(w)(\alpha c-b))+(-\alpha c+b)}{\alpha^2+1} - b_3 x + b_2 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_2 \end{cases}$$

Como $\langle Z\rangle$ é um ideal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G e invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$, as Proposições 1.4.9 e 1.4.10 nos garantem que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle} = \mathrm{G}^a_{3,5}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = \frac{e^{\alpha w}(\sin(w)(b-\alpha c)+cos(w)(\alpha b+c))+(-\alpha b-c)}{\alpha^2+1} + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = \frac{e^{\alpha w}(\sin(w)(\alpha b+c)+cos(w)(\alpha c-b))+(-\alpha c+b)}{\alpha^2+1} - b_3 x + b_2 y \end{cases}$$

descreve um sistema de controle em $\mathrm{G}^\alpha_{3,5}$ com um controle. Segundo [2] este sistema de controle é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto. Portanto $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfazer a condição do posto.

Proposição 4.3.9. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ em $\mathrm{G}^a_{3,5} \times \mathbb{R}$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.*

4.3.8 $\mathfrak{g}^\alpha_{4,2}$

Aqui estudaremos a controlabilidade dos sistemas de controle lineares $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$ do grupo $\mathrm{G}^\alpha_{4,2}$, onde α é um número real tal que $\alpha \notin \{0, 1\}$ e Δ é uma subálgebra bidimensional de $\mathfrak{g}$. Qualquer Sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$ que satisfaça a condição do posto é equivalente, pela Pela proposição 1.4.12, a um dos sistemas de controle estudados nas subseções abaixo

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$

Estudaremos aqui os sistemas lineares da forma $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2 X$ descrito abaixo

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (\alpha e^w - 1)(b_1 - c_1) + c_1 \alpha w e^w + b_2 x + b_3 \alpha y + u_2 \alpha e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + d_4 z \end{cases}$$

Temos que $\langle X\rangle \subset \langle W, X\rangle$ é ideal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Lie G e portanto , pela Proposição 1.4.9, o subgrupo normal $G_{\langle X\rangle} \subset \mathbf{cl}(\mathcal{A}) \cap \mathbf{cl}(\mathcal{A}^*)$. e pela Proposição 1.4.10 este sistema é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X\rangle}$, isomorfo a $\mathrm{G}_{3,4}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + d_4 z \end{cases}$$

é controlável. Como nenhum sistema de controle em $\mathrm{G}_{3,4}$ com um input é controlável, temos que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$ não é controlável.

Proposição 4.3.10. *Nenhum sistema de controle* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$ *no grupo* $\mathrm{G}_{4,2}^{\alpha}$ *é controlável*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$

Estudaremos aqui os sistemas lineares da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (\alpha e^w - 1)(b_1 - c_1) + c_1 \alpha w e^w + b_2 x + b_3 \alpha y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + d_4 z + u_2 e^{\alpha w} \end{cases}$$

Temos que $\langle Z\rangle \subset \langle X, Y\rangle$ é ideal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Lie G e portanto , pela Proposição 1.4.9, o subgrupo normal $G_{\langle Z\rangle} \subset \mathbf{cl}(\mathcal{A}) \cap \mathbf{cl}(\mathcal{A}^*)$. e pela Proposição 1.4.10 este sistema é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle}$, isomorfo a $\mathrm{G}_{3,2}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (\alpha e^w - 1)(b_1 - c_1) + c_1 \alpha w e^w + b_2 x + b_3 \alpha y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \end{cases}$$

for controlável. Segundo [2] isto acontece se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle}$, satisfaz a condição do posto, $b_2 = 0$ e $b_3 \neq 0$. Logo, se $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ é controlável, ele é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (\alpha e^w - 1)(b_1 - c_1) + c_1 \alpha w e^w + b_3 \alpha y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + d_4 z + u_2 e^{\alpha w} \end{cases}.$$

Proposição 4.3.11. *O sistema de controle linear* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ *sob o grupo* $\mathrm{G}_{4,2}^{\alpha}$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto,* $b_2 = 0$ *e* $b_3 \neq 0$.

4.3.9 $\mathfrak{g}_{4,2}^1$

Este seção trata dos sistemas lineares $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, bX + cZ\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2(bX + cZ)$, descritos como

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_2 x + b_3 y + b_4 z + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_3 y + d_4 z + u_2 e^w \end{cases}.$$

Da mesma forma como foi feito em 4.3.2, se o sistema é controlável, então $b_2 = 0$. portanto temos que se o sistema satisfizer ad-rank com $b_2 = 0$, pelas proposições 1.4.5 e 1.4.10 ele será controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X\rangle}$, isomorfo a $\mathfrak{g}_{3,3}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_3 y + d_4 z + u_2 e^w \end{cases}.$$

é controlável. O que de fato acontece pois $\overline{bX + cZ} = \overline{Z}$, que é invariante sob o fluxo do sistema induzido, com $G_\langle Z\rangle$ grupo normal de $G/G_{\langle X,\rangle}$. Logo, pelas proposições 1.4.9 e 1.4.10 o sistema induzido é controlável desde que

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \end{cases}$$

é controlável.

Verifiquemos então a controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, bX + cZ\rangle)$ quando o sistema não satisfaz a condição de ad-rank e $b_2 = 0$. a matriz $[W, D(W), D(W), D^3(W), (bX + cZ), D(bX + cZ)]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 c_1 + b_4 d_1 & b_4(d_3 c_1 + d_4 d_1) & b & b_4 c \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 c_1 + d_4 d_1 & d_4(d_3 c_1 + d_4 d_1) & c & d_4 c \end{bmatrix}.$$

Como $[W, \alpha X + \beta Y + \gamma Z] = [(\alpha + \beta)X + \beta Y + \gamma Z]$ temos que $c_1 \neq 0$ é condição necessária tanto para o sistema satisfazer ad-rank, como para satisfazer a condição do posto. Para não satisfazer ad-rank, é preciso que $c_1 = 0$ ou os vetores $(b_4 X + d_4 Z)$ e $bX + cZ$ são linearmente dependentes, assim como os vetores $(b_4 X + d_4 Z)$ e $(b_3 X + d_3).Z$

Percebemos então que se o sistema satisfaz a condição do posto mas não satisfaz ad-rank, então $bX + cZ$ é ideal de $\mathfrak{g}$, invariante sob D, onde o sistema é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + \alpha b y + \beta b z + u_2 b e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + \alpha c y + \beta c z + u_2 b e^w \end{cases}.$$

Vejamos a cara do sistema induzido em $G/G_{\langle bX + cZ\rangle}$. Se $b = 0$, O grupo induzido é isomorfo a $\mathrm{G}_{3,2}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + u_2 b e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \end{cases}$$

que é controlável desde que satisfaça a condição do posto.

Se $c = 0$, $G/G_{\langle bX+cZ\rangle}$ é isomorfo $g_{3,3}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + u_2 b e^w \end{cases},$$

controlável desde que satisfaça a condição do posto. Resta-nos o caso onde b e c são diferentes de zero, neste caso o grupo induzido é isomorfo a $\mathrm{G}_{3,2}$ e

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + \alpha b y + u_2 b e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \end{cases}$$

é controlável desde que a condição do posto seja satisfeita.

Proposição 4.3.12. *O sistema linear* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, bX + cZ\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2(bX + cZ)$ *no grupo* $\mathrm{G}^1_{4,2}$ *é controlável se e somente se* $\dim \mathfrak{g}^0 > 3$ *e satisfaz a condição do posto.*

4.3.10 $\mathfrak{g}_{4,3}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$

Estudaremos agora a controlabilidade de sistemas de controles da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = \frac{d_1}{2} w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z \end{cases}$$

Analogamente ao sistema anterior, este sistema de controle, supondo satisfazer a condição do posto, é equivalente, via o automorfismo,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1^{-1} & -c_1 d_1^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & d_1^{-1} \end{bmatrix}$$

ao sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = \frac{1}{2} w^2 + c_3 y + c_4 z \\ \dot{z} = w + c_3 z \end{cases}$$

Este sistema de controle é controlável se e somente o sistema de controle formado pelas primeira terceira e quarta linha é controlável

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = \frac{1}{2} w^2 + c_3 y + c_4 z \\ \dot{z} = w + c_3 z \end{cases}$$

e isto acontece quando $c_3 = 0$ e $c_4 \neq 0$. Logo o sistema satisfaz a condição do posto e é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = \frac{1}{2}w^2 + c_4 z \\ \dot{z} = w \end{cases}$$

Proposição 4.3.13. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$ em $\mathrm{G}_{4,3}$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto, $c_3 = 0$. e $c_4 \neq 0$.*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y\rangle)$

Estudaremos agora a controlabilidade de sistemas de controles que satisfazem a condição do posto e são da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{d_1}{2}w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_2 \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z \end{cases}$$

Temos aqui que $\langle Y\rangle$ é ideal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Lie G e $\langle Y\rangle$ é invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Então pelas proposições 1.4.9 e 1.4.10 $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y\rangle)$ é controlável se e somente o sistema de controle induzido em $G/G_{\langle Y\rangle}$, isomorfo a $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z \end{cases}$$

for controlável. Segundo [2] isto acontece se e somente se $b_2 = 0$ e $c_3 \neq 0$. Logo, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = \frac{d_1}{2}w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_2 \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z \end{cases}$$

Proposição 4.3.14. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y\rangle)$ em $\mathrm{G}_{4,3}$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto, $b_2 = 0$ e $c_3 \neq 0$.*

4.3.11 $\mathfrak{g}_{4,4}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$

Estudaremos aqui o sistema de controle da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1 + d_1)(e^w - 1) + (c_1 - d_1)we^w + \frac{d_1}{2}w^2 e^w + b_2 x + b_3 y + b_4 z + u_2 e^w \\ \dot{y} = (c_1 - d_1)(e^w - 1) + d_1 w e^w + b_2 y + b_3 z \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + b_2 z \end{cases}.$$

Restrigindo o sistema de controle as suas primeira e última linhas, nós temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + b_2 z \end{cases}.$$

que é um sistema de controle linear no grupo afim.Este subsistema é controlável se e somente se $d_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$. Logo $b_2 = 0$ é nescessário para a controlabilidade do sistema. Note támbem que o fato de $b_2 = 0$ implica que a álgebra das raízes $\mathfrak{g}_0$ é iqual a álgebra de lie $\mathfrak{g}$ do grupo. Ao montar a matriz de ad-rank.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3c_1 + b_4d_1 & b_3^2 d_1 \\ 0 & c_1 & b_3 d_1 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vemos que ele possui posto máximo quando b_3 e d_1 são não nulos. Como $d_1 \neq 0$ é condição nescessária para satisfazer a condição do posto, basta estudarmos quando $b_3 \neq 0$ e $b_3 = 0$.

Quando $b_3 \neq 0$, o sistema satisfaz a condição de ad-rank e $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$. Portanto o sistema é controlável.

Quando $b_3 = 0$, o sistema não satisfaz ad-rank, mas ainda satisfaz a condição do posto. Como $\langle X \rangle$ é ideal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, temos que $G_{\langle X \rangle}$ é grupo normal de G. Pelas proposições 1.4.9 e 1.4.10 $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$ é controlável se e somente se o sistema de controle induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$,

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = (c_1 - d_1)(e^w - 1) + d_1 w e^w \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) \end{cases}.$$

que é isomorfo a $\mathrm{G}_{3.2}$, for controlável. Mas o sistema induzido aqui não é controlável, segundo [2]. $\Sigma(\mathcal{X}, W, X)$ não é controlável quando $b_3 = 0$.

Proposição 4.3.15. *O sistema linear* $\Sigma(\mathcal{X}, W, X) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2 X$ *em* $\mathrm{G}_{4,4}$, *com a derivação* D *relacionada ao campo linear* $\mathcal{X}$ *da forma*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ d_1 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto, $\mathfrak{g}^0 = 0$ *e* $b_3 \neq 0$.

4.3.12 $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$

Dado um sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ em $G = \mathrm{G}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ que satisfaça a condição do posto e Δ é uma subálgebra da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ de dimensão 2. Então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é equivalente a um dos sistemas de controle abaixo.

Controlabilidade dos sistemas de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y\rangle)$ e $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$

Os sistemas de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y\rangle)$ e $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$ do grupo de Lie G são descritos respectivamente como

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3 y + u_2 e^{\alpha w} \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{array}\right.$$

e

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z + u_2 e^{\beta w} \end{array}\right. .$$

Mostraremos que estes sistemas de controles não são controláveis. De fato, veja que $\langle X\rangle$, $\langle Y\rangle$ e $\langle Z\rangle$ são ideais de $\mathfrak{g}$ e invariantes sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Então temos que $G_{\langle X\rangle}$, $G_{\langle Y\rangle}$ e $G_{\langle Z\rangle}$ grupos normais de G. Assim, das proposições 1.4.9 e 1.4.10 O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$, ($\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y\rangle)$ ou $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$), supondo que satisfaz a condição do posto, é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X\rangle}$ ($G/G_{\langle Y\rangle}$ ou $G/G_{\langle Z\rangle}$),

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{array}\right.$$

e

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3 y \end{array}\right. .$$

é controlável. Mas $G/G_{\langle X\rangle}$ ($G/G_{\langle Y\rangle}$ ou $G/G_{\langle Z\rangle}$) é isomorfo a $\mathrm{G}_{3,4}^{\lambda}$. e segundo [2] nenhum sistema de controle com um controle em $\mathrm{G}_{3,4}^{\lambda}$ é controlável. Desta forma $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y\rangle)$ e $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$, não são controláveis.

Proposição 4.3.16. *Nenhum sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ em $\mathrm{G}_{4,5}^{\alpha,\beta}$, onde Δ é uma subálgebra de dimensão 2, é controlável.*

4.3.13 $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$

Dado um sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X},\Delta)$ em $G = \mathrm{G}_{4,5}^{1,\beta}$ que satisfaça a condição do posto e Δ é uma subálgebra da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$ de dimensão 2. Então $\Sigma(\mathcal{X},\Delta)$ é equivalente a um dos sistemas de controle abaixo.

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, W, bX + cY)$

Dado$\Sigma(\mathcal{X}, W, bX + cY) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2(bX + cY)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y + u_2 b e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y + u_2 c e^w \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{cases}.$$

Sabemos do subssistema formado pela primeira e quarta linha, que se este sistema é controlável então $d_4 = 0$. Então, se o sistema satisfaz ad-rank, podemos usar a Proposição 1.4.5 e a Proposição 1.4.10 para garantir que o sistema é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle}$, isomorfo a $\mathrm{G}_{3,3}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y + u_2 b e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y + u_2 c e^w \end{cases}.$$

é controlável

Faremos a seguir o estudo de ad-rank no sistema $\Sigma(\mathcal{X}, W, aX + bY)$ assumindo $d_4 = 0$. A matriz $[W, D(W), D^2(W), D^3(W), bX + cY, D(bX + cY)]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 b_1 + b_3 c_1 & b_2(b_2 b_1 + b_3 c_1) + b_3(c_2 b_1 + c_3 c_1) & b & b_2 b + b_3 c \\ 0 & c_1 & c_2 b_1 + c_3 c_1 & c_2(b_2 b_1 + b_3 c_1) + c_3(c_2 b_1 + c_3 c_1) & c & c_2 b + c_3 c \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que $d_1 \neq 0$ é necessário tanto para ad-rank quanto para a condição do posto. Supondo então $d_1 \neq 0$. para o sistema não satisfazer ad-rank, temos que $D^2(W)$ e $D(bX + cY)$ são vetores multiplos de $bX + cY$. neste caso ao mudarmos a base da derivação D, relacionada ao campo $\mathcal{X}$ de $\{W, X, Y, Z\}$ para $\{W, X', Y', Z\}$ onde $X' = bX + cY$ e $Y' = b_1 X + c_1 Y$ ficamos com a derivação

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x'} = \alpha x + \beta y + u_2 e^w \\ \dot{y'} = (e^w - 1) \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) \end{cases}.$$

que é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{X'}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y'} = (e^w - 1) \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) \end{cases}.$$

é controlável, o que não acontece segundo a Proposição 1.4.19. Assim concluimos a seguinte proposição

Proposição 4.3.17. *O Sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}, W, bX + cY)$ é controlável se e somente se satisfaz $d_4 = 0$, satisfaz ad-rank e o sistema linear induzido em G/G_Z é controlável.*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$

Aqui estudaremos o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2 Z$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z + u_2 e^{\beta w} \end{cases}.$$

Veja que $\langle Z\rangle$ é ideal $\mathfrak{g}$ e invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Então temos que $G_{\langle Z\rangle}$, é grupo normal de G. Assim, das proposições 1.4.9 e 1.4.10 O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z\rangle)$, supondo que satisfaz a condição do posto, é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Z\rangle}$,

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} = c_1(e^{\alpha w} - 1) + c_2 x + c_3 y \end{cases}.$$

é controlável. Segundo [2], o sistema induzido é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e a submatriz

$$\begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

é nilpotente e não nula ou possui um par de autovalores complexos.

Proposição 4.3.18. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, W, Z)$ em $\mathrm{G}_{4,5}^{1,\beta}$ é controlável se e somente se a derivação D relacionada a $\mathcal{X}$*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

possui um par de autovalores complexos ou a submatriz de D, D'

$$D' = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

é nilpotente e não nula.

4.3.14 $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$

Estes sistema não foi resolvido, as dificuldades são parecidas com 4.3.13. $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, \alpha X + \beta Y + \gamma Z\rangle)$: $\dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2(\mathcal{X}, W, \alpha X + \beta Y + \gamma Z)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y + b_4 z \alpha e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y + b_4 z \beta e^w \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_2 x + c_3 y + d_4 z \gamma e^w \end{cases}.$$

Exceto pelos casos de controlabilidade encontrado para o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W\rangle)$ no grupo $\mathrm{G}_{4,5}^{1,1}$, não temos mais casos resolvidos. A inclusão do vetor $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ não nos forneceu mais ferramentas para o estudo de controlabilidade com nossa abordagem.

4.3.15 $\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$

Qualquer sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ em $G = \mathrm{G}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ que satisfaça a condição do posto e Δ é uma subálgebra de dimensão 2 da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$. é equivalente ao sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2 X$ descrito abaixo.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1 \frac{e^{\beta w} sen(w) + \beta e^{\beta w} cos(w)}{1+\beta^2} + d_1 \frac{-e^{\beta w} cos(w) + \beta e^{\beta w} sen(w)}{1+\beta^2} + c_3 y + c_4 z + \frac{d_1 - \beta c_1}{1+\beta^2} \\ \dot{z} = -c_1 \frac{-e^{\beta w} cos(w) + \beta e^{\beta w} sen(w)}{1+\beta^2} + d_1 \frac{e^{\beta w} sen(w) + \beta e^{\beta w} cos(w)}{1+\beta^2} + c_4 y + c_3 z - \frac{c_1 + \beta d_1}{1+\beta^2} \end{cases}.$$

Veja que $\langle X\rangle$ é ideal de $\mathfrak{g}$ e invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Então temos que $G_{\langle X\rangle}$, é grupo normal de G. Assim, das proposições 1.4.9 e 1.4.10 O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, W, X)$, supondo que satisfaz a condição do posto, é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1 \frac{e^{\beta w} sen(w) + \beta e^{\beta w} cos(w)}{1+\beta^2} + d_1 \frac{-e^{\beta w} cos(w) + \beta e^{\beta w} sen(w)}{1+\beta^2} + c_3 y + c_4 z + \frac{d_1 - \beta c_1}{1+\beta^2} \\ \dot{z} = -c_1 \frac{-e^{\beta w} cos(w) + \beta e^{\beta w} sen(w)}{1+\beta^2} + d_1 \frac{e^{\beta w} sen(w) + \beta e^{\beta w} cos(w)}{1+\beta^2} + c_4 y + c_3 z - \frac{c_1 + \beta d_1}{1+\beta^2} \end{cases}.$$

é controlável. Segundo [2] Caso $\beta = 0$, o sistema de controle induzido é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $c_3 = 0$. Caso $\beta \neq 0$ o sistema induzdo é controlável desde que satisfaça a condição do posto.

Proposição 4.3.19. *O sistema de controle* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$ *sob* $\mathrm{G}_{4,6}^{\alpha,\beta}$, *com* $\beta \neq 0$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.*

Proposição 4.3.20. *O sistema de controle* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$ *sob* $\mathrm{G}_{4,6}^{\alpha,0}$, *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e* $dim(\mathfrak{g}^0) > 3$.

4.4 sistemas de controle com 3 controles

4.4.1 $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$

Nesta seção estudaremos os sistemas de controle lineares $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ do grupo de Lie $G = \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \oplus \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ onde Δ é uma subálgebra tridimensional de $\mathfrak{g} = \mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbf{aff}(\mathbb{R})$. Destas álgebras, descritas no capítulo anterior, $\langle X, cW + Y, Z\rangle$, $\langle W, X, dY + Z\rangle$, não satisfazem a condição do posto caso c ou d sejam nulos. Estudaremos a controlabilidade dos casos restantes nas subseções abaixo

Controlabilidade dos Sistemas $\langle bW + X, Y, Z\rangle$ e $\langle W, Y, Z\rangle$

Estamos aqui interessados em estudar os sistemas de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 b \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_1 e^w \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_3 e^y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_3 e^y \end{cases}.$$

Em ambos os casos, $\langle Y, Z\rangle$ são ideais de $\mathfrak{g}$. Logo, $G_{\langle Y,Z\rangle}$ é subgrupo normal de G. Pela Proposição 1.4.9 nós temos que $G_{\langle Y,Z\rangle} \subset cl(\mathcal{A}) \cap cl(\mathcal{A}^*)$. Agora, como $\langle Y, Z\rangle$ é invariante sob qualquer derivação D, temos que é invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$. Então pela Proposição 1.4.10 os sistemas de controle $\langle bW + X, Y, Z\rangle$ e $\langle W, Y, Z\rangle$ são, respectivamente, controláveis se e somente se os sistemas de controle induzidos em $G/G_{\langle Y,Z\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 b \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_1 e^w \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 b \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \end{cases}.$$

forem controláveis. Segundo [9] o sistema induzido são, respectivamente, controláveis se e somente se satisfazem a condição do posto ($b_1 \neq \frac{-b_2}{b}$ e $b_1 \neq 0$, respectivamente) e $b_2 = 0$. Logo, os sistemas de controle $\langle bW + X, Y, Z\rangle$ e $\langle W, Y, Z\rangle$ são controláveis se satisfazem a condição do postos e são da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 b \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + u_1 e^w \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_3 e^y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 b \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_3 e^y \end{cases}.$$

Controlabilidade dos Sistemas $\langle W, X, dY+Z\rangle$ e $\langle W, X, Y\rangle$

Estamos aqui interessados em estudar os sistemas de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 b \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = u_3 d \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_3 e^y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = u_3 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z \end{cases}.$$

Em ambos os casos, $\langle W, X\rangle$ são ideais de $\mathfrak{g}$. Logo, $G_{\langle W,X\rangle}$ é subgrupo normal de G. Pela Proposição 1.4.9 nós temos que $G_{\langle W,X\rangle} \subset cl(\mathcal{A}) \cap cl(\mathcal{A}^*)$. Agora, como $\langle W, X\rangle$ é invariante sob qualquer derivação D, temos que é invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$. Então pela Proposição 1.4.10 os sistemas de controle $\langle W, X, dY+Z\rangle$ e $\langle W, X, Y\rangle$ são, respectivamente, controláveis se e somente se os sistemas de controle induzidos em $G/G_{\langle W,X\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{y} = u_3 d \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_3 e^y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{y} = u_3 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z \end{cases},$$

isomorfo ao grupo afim for controlável. Segundo [9] os sistemas induzidos são, respectivamente, controláveis se e somente se satisfaçam a condição do posto ($d_3 \neq \frac{-d_4}{d}$ e $d_3 \neq 0$, respectivamente) e $d_4 = 0$. Logo, os sistemas de controle $\langle bW + X, Y, Z\rangle$ e $\langle W, Y, Z\rangle$ são controláveis se satisfazem a condição do posto e são da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 b \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = u_3 d \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + u_3 e^y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = u_3 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) \end{cases}.$$

Controlabilidade dos Sistemas $\langle X, cW+Y, Z\rangle$

Estamos aqui interessados em estudar os sistemas de controle da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 c \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = u_1 \\ \dot{z} = d_3(e^y - 1) + d_4 z + u_3 e^y \end{cases}$$

Perceba que este sistema de controle nunca é controlável. De fato, como $\dot{w} = c\dot{y}$, temos que $w = cy + k$. onde k é uma constante a depender da condição inicial. Neste caso Qualquer tragetória do sistema, partindo do ponto (w_0, x_0, y_0, z_0), atinge apenas pontos da forma $(cy + w_0 - cy_0, x, y, z)$. e portanto $\langle X, cW + Y, Z\rangle$ não é controlável.

4.4.2 $\mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$

Controlabilidade dos sistemas $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$.

Vamos tratar agora da controlabilidade dos sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ onde Δ descreve uma subálgebra de Lie isomorfa ao grupo abeliano $\mathbb{R}^3$. Como supomos sempre, este sistema de controle satisfaz a condição do posto e portanto é isomorfo ao sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle) : \dot{g}\mathcal{X}_g + u_1 W + u_2 Y + u_3 Z$ que é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_2 \\ \dot{z} = d_1 w + d_3 y + d_4 z + u_3 \end{cases}$$

Como $\langle Y, Z\rangle$ são ideais de $\mathfrak{g} = \mathbf{aff}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^2$ invariantes pela derivação D e o sistema satisfaz a condição do posto, temos que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$ é controlável se e somente se

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \end{cases}$$

é controlável, E isto acontece quando $b_2 = 0$ e $b_1 \neq 0$. Como $b_1 \neq 0$ é condição nescessária para satisfazer a condição do posto, O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $b_2 = 0$. Equivalentemente, $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$, onde Δ descreve uma subálgebra de Lie isomorfa ao grupo abeliano $\mathbb{R}^3$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e a subálgebra das raízes $\mathfrak{g}_0$ contém uma subálgebra isomorfa ao grupo afim.

Proposição 4.4.1. *O sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$ em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \oplus \mathbb{R}^2$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $b_2 = 0$.*

Controlabilidade dos sistemas $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, cY + dZ\rangle)$

Finalmente, veremos agora a controlabilidade nos sistemas de controle lineares $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ onde Δ descreve uma subálgebra de Lie isomorfa ao grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$. Se o sistema de controle satisfaz a condição do posto, então ele é isomorfo a $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, cY + dZ\rangle)$.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_3 c \\ \dot{z} = d_1 w + d_3 y + d_4 z + u_3 d \end{cases}$$

De forma ánaloga ao sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$, o sistema é controlável se e somente se o sistema restrito a sua primeira, terceira e quarta linhas é controlável, isto é

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_3 c \\ \dot{z} = d_1 w + d_3 y + d_4 z + u_3 d \end{cases}$$

Temos portanto que tanto $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, cY + dZ\rangle)$ quanto o sistema induzido é controlável se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3c_1 + c_4d_1 & c & c_3c + c_4d \\ 0 & d_1 & d_3c_1 + d_4d_1 & d & d_3c + d_4d \end{bmatrix}.$$

possui posto 3. Isto só não acontece se os vetores $c_1Y + d_1Z$ e $cY + dZ$ forem linearmente dependentes e ainda por cima autovetores da derivação D.

Proposição 4.4.2. *O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, cY + dZ\rangle)$ é controlável se somente se satisfaz a condição do posto.*

4.4.3 $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$.

Olharemos agora para a controlabilidade de sistemas de controle lineares com três controles. Primeiramente olhemos para $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$, onde Δ é uma subálgebra de $G_{3,2} \times \mathbb{R}$ isomorfa ao grupo $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$ Se este sistema de controle satisfaz a condição do posto, ele é isomorfo ao sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$. Este Sistema é da forma.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_2 x + b_3 y + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_3 \end{cases}$$

Por $\langle X, Z\rangle$ ser um ideal de $\mathfrak{g}_{3,2} \oplus \mathbb{R}$, contido em $\langle W, X, Y\rangle$ e por hipótese o sistema de controle satisfaz a condição do posto, temos pela Proposição 1.4.10 que o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$. é controlável se e somente se

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \end{cases}$$

Mas o sistema acima descreve um sistema de controle em $G_{3,2}$ que segundo a Proposição 1.4.14 é controlável se e somente se $b_2 = 0$ e $c_1 \neq 0$. Assim, se $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ é controlável, ele é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_3 y + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_3 \end{cases}$$

Proposição 4.4.3. *O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $b_2 = 0$.*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$

Olhemos para $\Sigma(\mathcal{X}', \Delta)$, onde Δ é uma subálgebra de $\mathrm{G}_{3,2} \times \mathbb{R}$ isomorfa ao grupo $\mathrm{G}_{3,2}$. Se este sistema de controle satisfaz a condição do posto, ele é isomorfo ao sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$. Este sistema é da forma.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_2 x + b_3 y + u_2 e^w + u_3 w e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y + u_3 e^w \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Assim como feito anteriormente, como $\langle X, Y\rangle$ é ideal de $\mathfrak{g}$ e invariante por D, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema linear induzido

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

é controlável, e isto acontece se o sistema induzido satisfaz a condição do posto. Temos portanto o seguinte resultado

Proposição 4.4.4. *O sistema* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ *em* $\mathrm{G}_{3,2} \times \mathbb{R}$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.*

4.4.4 $\mathfrak{g}_{3,3} \oplus \mathbb{R}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$

Olhemos agora para o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y + u_3 e^w \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Como $\langle X, Y\rangle$ é ideal da álgebra de Lie e invariante pelo campo linear do sistema. Assim, este sistema será controlável se e somente se o sistema induzido for controlável.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

O sistema induzido é controlável se e somente se $d_1 \neq 0$, mas como $d_1 \neq 0$ é condição necessária para satisfazer a condição do posto do sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$, temos que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$, é controlável se e somente se satisfaz a acondição do posto.

Proposição 4.4.5. *O sistema de controle* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, \alpha X + \beta Y, Z\rangle)$

Olhemos agora para o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y + u_2 e^w \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_3 \end{cases}$$

Como estamos supondo que o sistema satisfaz a condição do posto, ele é controlável se e somente se o sistema formado pelas três primeiras linhas

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y + u_2 e^w \end{cases}$$

for controlável. Mas este é um sistema de controle linear, com dois controles, em $\mathrm{G}_{3,3} \times \mathbb{R}$ que, segundo [2] este sistema de controle é controlável se e somente se a submatriz da matriz de derivação

$$D^* = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

ou possui dois autovalores complexos, ou é uma matriz nilpotente e não nula ou o núcleo da transformação linear $\mathcal{D}^* : \langle X, Y\rangle \to \langle X, Y\rangle$ dada pela matriz não for gerado pelo vetor $\alpha X + \beta Y$ do sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, \alpha X + \beta Y, Z\rangle)$.

Proposição 4.4.6. *O sistema de controle linear* $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, \alpha X + \beta Y, Z\rangle)$ *é controlável se e somente se o sistema linear induzido em* G/G_Z.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + b_3 y + u_2 e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + c_2 x + c_3 y + u_2 e^w \end{cases}$$

for controlável.

4.4.5 $\mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathbb{R}$

Controlabilidade de$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$

Olhemos agora para o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\lambda}(e^{\lambda w} - 1) + c_3 y + u_3 e^{-w} \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Temos que $\langle X, Y\rangle$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Logo pela Proposição 1.4.9 e pela Proposição 1.4.10 o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema linear induzido em $G/G_{\langle X,Y\rangle} = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

for controlável, isto é, $d_1 \neq 0$. Como $d_1 \neq 0$ é condição necessária para satisfazer a condição do posto, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a acondição do posto.

Proposição 4.4.7. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ em $\mathrm{G}_{3,4} \times \mathbb{R}$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$

Olhemos agora para o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\lambda}(e^{\lambda w} - 1) + c_3 y \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_3 \end{cases}$$

Temos que $\langle X, Z\rangle$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Logo pela Proposição 1.4.9 e pela Proposição 1.4.10 o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema linear induzido em $G/G\langle X, Z\rangle = \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\lambda}(e^{\lambda w} - 1) + c_3 y \end{cases}$$

for controlável isto é, $c_1 \neq 0$ e $c_3 = 0$. Como $c_1 \neq 0$ é condição nescessária para satisfazer a condição do posto, temos que o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $c_3 = 0$.

Proposição 4.4.8. *O sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $c_3 = 0$.*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$

Olhemos agora para o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\lambda}(e^{\lambda w} - 1) + c_3 y + u_2 e^{-w} \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z + u_3 \end{cases}$$

Temos que $\langle Y, Z\rangle$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Logo Pela Proposição 1.4.9 e pela Proposição 1.4.10 o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema linear induzido em $G/G\langle Y, Z\rangle = \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \end{cases}$$

for controlável, isto é, $b_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$. Como $b_1 \neq 0$ é condição nescessária para satisfazer a condição do posto, temos que o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $b_2 = 0$.

Proposição 4.4.9. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ em $\mathrm{G}_{3,4} \times \mathbb{R}$ é controlável se e somente se $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ satisfaz a condição do posto e $b_2 = 0$.*

4.4.6 $\mathfrak{g}_{3,5}^0 \oplus \mathbb{R}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$

Resolveremos agora a controlabilidade do sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1 \sin(w) + c_1(\cos(w) - 1) + b_2 x + b_3 y + u_2 \cos(w) - u_3 \sin(w) \\ \dot{y} = c_1 \sin(w) + b_1(1 - \cos(w)) - b_3 x + b_2 y - u_2 \sin(w) - u_3 \cos(w) \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Temos que $\langle X, Y\rangle$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Logo pela Proposição 1.4.9 e pela Proposição 1.4.10 o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema linear induzido em $G/G_{\langle X,Y\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

é controlável.

Este sistema de controle é um sistema de controle linear no grupo de Lie abeliano $\mathbb{R}^2$ e é controlável se $d_1 \neq 0$. Como $d_1 \neq 0$. é condição necessária para o sistema de controle satisfazer a condição do posto, temos que o sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto. Temos então a prosposição

Proposição 4.4.10. $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.*

4.4.7 $\mathfrak{g}_{3,5}^a \oplus \mathbb{R}$

Controlabilidade $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$

Trataremos agora do sistema de controle.

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = \frac{e^{\alpha w}(\sin(w)(b-\alpha c)+cos(w)(\alpha b+c))+(-\alpha b-c)}{\alpha^2+1} + b_2 x + b_3 y + u_2 e^{\alpha w}\cos(w) - u_3 e^{\alpha w}\sin(w) \\ \dot{y} = \frac{e^{\alpha w}(\sin(w)(\alpha b+c)+cos(w)(\alpha c-b))+(-\alpha c+b)}{\alpha^2+1} - b_3 x + b_2 y + u_2 e^{\alpha w}\sin(w) + u_3 e^{\alpha w}\cos(w) \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

Temos que $\langle X, Y\rangle$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Logo pela Proposição 1.4.9 e pela Proposição 1.4.10 o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema linear induzido em $G/G_{\langle X,Y\rangle}$, isomorfo a $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{z} = d_1 w + d_4 z \end{cases}$$

for contrlável. Mas este sistema induzido descreve um sistema de controle linear no grupo de Lie abeliano $\mathbb{R}^2$. Esse sistema de controle é controlável se e somente se $d_1 \neq 0$, que é condição do posto para $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$

Proposição 4.4.11. $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.*

4.4.8 $\mathfrak{g}_{4,2}^{\alpha}$

Controlabilidade $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$

estudaremos aqui o sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(\alpha e^w - 1) + c_1\alpha w e^w + b_2 x + b_3\alpha y + u_2\alpha e^w + u_3\alpha w e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y + u_3 e^w \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + d_4 z \end{cases}$$

Temos que $\langle X, Y\rangle$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Logo pela Proposição 1.4.9 e pela Proposição 1.4.10 o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema linear induzido em $G/G_{\langle X,Y\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + d_4 z \end{cases}$$

for controlável. Mas este é o sistema de controle de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, que é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto ($d_1 \neq 0$) e $d_4 = 0$.

Proposição 4.4.12. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ sob o grupo $\mathrm{G}_{4,2}^{\alpha}$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $d_4 = 0$.*

Controlabilidade $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(\alpha e^w - 1) + c_1\alpha w e^w + b_2 x + b_3\alpha y + u_2\alpha e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + d_4 z + u_3 e^{\alpha w} \end{cases}$$

Temos que $\langle X, Z\rangle$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Logo pela Proposição 1.4.9 e pela Proposição 1.4.10 o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema linear induzido em $G/G_{\langle X,Z\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y \end{cases}$$

for controlável. Mas este é o sistema de controle de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$, que é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto ($c_1 \neq 0$) e $b_2 = 0$.

Proposição 4.4.13. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ sob o grupo $\mathrm{G}_{4,2}^{\alpha}$ é controlável se e somente se satisfaz acondição do posto e $b_2 = 0$.*

4.4.9 $\mathfrak{g}_{4,2}^{1}$

Tratemos aqui do sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, bY + cZ\rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2 X + u_3(cY + dZ)$, descritos como

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1)(e^w - 1) + c_1 w e^w + b_2 x + b_3 y + b_4 z + u_2 e^w + u_3 c w e^w \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y + u_3 c e^w \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_3 y + d_4 z + u_3 d e^w \end{cases}.$$

Como X é invariante sob D as Proposições 1.4.9 e 1.4.10 nos garante que esse sistema é controlável se e somente satisfaz a condição do posto e o sistema induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$, isomorfo a $\mathrm{G}_{3,3}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y + u_3 c e^w \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_3 y + d_4 z + u_3 d e^w \end{cases}.$$

é controlável.

Proposição 4.4.14. *O sistema de controle linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, bY + cZ \rangle) : \dot{g} = \mathcal{X} + u_1 W + u_2 X + u_3(cY + dZ)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e o sistema linear*

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = c_1(e^w - 1) + b_2 y + u_3 c e^w \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + d_3 y + d_4 z + u_3 d e^w \end{cases}.$$

induzido pela projeção em $G/G_{\langle X \rangle}$, isomorfo a $\mathrm{G}_{3,3}$ é controlável.

4.4.10 $\mathfrak{g}_{4,3}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$

Estudaremos agora a controlabilidade de sistemas de controle da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x + u_2 e^w \\ \dot{y} = \frac{d_1}{2} w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_3 \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z \end{cases}$$

Este sistema é controlavel desde que satisfaça a condição do posto. De fato, Como $\langle X \rangle$ é ideal de $\mathfrak{g}$ e $\langle X \rangle$ é invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$, temos que pela Proposição 1.4.9 e pela Proposição 1.4.10 que o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$ é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = \frac{d_1}{2} w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_3 \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z \end{cases}$$

for controlável, mas, por [9] este subsistema é controlável desde que satisfaça a condição do posto.

Assim segue a proposição

Proposição 4.4.15. $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto.*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$

Estudaremos agora o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \\ \dot{y} = \frac{d_1}{2}w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_2 + u_3 w \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z + u_3 \end{cases}$$

Como $\langle Y, Z\rangle$ é ideal de $\mathfrak{g}$, invariante sob qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$, e $\langle Y, Z\rangle \subset \langle W, Y, Z\rangle$, pela Proposição 1.4.9 e pela Proposição 1.4.10, o sistema $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema induzido em $G/G_{\langle Y,Z\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2 x \end{cases}$$

é controlável. Isto é satisfaz a condição do posto ($b_1 \neq 0$) e $b_2 = 0$. Logo o sistema é controlável se satisfaz a condição do posto e é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = \frac{d_1}{2}w^2 + c_1 w + c_3 y + c_4 z + u_2 + u_3 w \\ \dot{z} = d_1 w + c_3 z + u_3 \end{cases}.$$

Proposição 4.4.16. $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e* $b_2 = 0$.

4.4.11 $\mathfrak{g}_{4,4}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$

Estudaremos aqui o sistema de controle da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = (b_1 - c_1 + d_1)(e^w - 1) + (c_1 - d_1)we^w + \frac{d_1}{2}w^2 e^w + b_2 x + b_3 y + b_4 z + u_2 e^w + u_3 w e^w \\ \dot{y} = (c_1 - d_1)(e^w - 1) + d_1 w e^w + b_2 y + b_3 z + u_3 e^w \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + b_2 z \end{cases}.$$

Restrigindo o sistema de controle as suas primeira e última linhas, nós temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{w} = u \\ \dot{z} = d_1(e^w - 1) + b_2 z \end{cases}$$

que é um sistema de controle linear no grupo afim. Este subsistema é controlável se e somente se $d_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$. Logo $b_2 = 0$ é nescessário para a controlabilidade do sistema. Note támbem que o fato de $b_2 = 0$ implica que a álgebra das raízes $\mathfrak{g}_0$ do sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é igual a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo. Ao montar a matriz de ad-rank

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_1 & 0 & 1 \\
0 & c_1 & 1 & 0 \\
0 & d_1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

possui posto máximo quando $d_1 \neq 0$. $d_1 \neq 0$ também é nescessário para a condição do posto. Logo, se o sistema satisfaz a condição do posto e $b_2 = 0$, então ele é controlável.

Aqui a forma do sistema controlável

$$
\begin{cases}
\dot{w} = u_1 \\
\dot{x} = (b_1 - c_1 + d_1)(e^w - 1) + (c_1 - d_1)we^w + \frac{d_1}{2}w^2e^w + b_3y + b_4z + u_2e^w + u_3we^w \\
\dot{y} = (c_1 - d_1)(e^w - 1) + d_1we^w + b_3z + u_3e^w \\
\dot{z} = d_1(e^w - 1)
\end{cases}.
$$

Proposição 4.4.17. $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$

4.4.12 $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$, $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ **e** $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$.

Veremos aqui os sistemas de controle Linear da forma

$$
\begin{cases}
\dot{w} = u_1 \\
\dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2x + u_2e^w \\
\dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3y + u_3e^{\alpha w} \\
\dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4z
\end{cases},
$$

$$
\begin{cases}
\dot{w} = u_1 \\
\dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2x + u_2e^w \\
\dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3y \\
\dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4z + u_3e^{\beta w}
\end{cases}
$$

e

$$
\begin{cases}
\dot{w} = u_1 \\
\dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2x \\
\dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3y + u_2e^{\alpha w} \\
\dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4z + u_3e^{\beta w}
\end{cases}.
$$

Em qualquer um desses sistemas de controle lineares em G, Temos Que $\langle X, Y\rangle$, $\langle X, Z\rangle$ e $\langle Y, Z\rangle$ são invariantes sob qualder derivação D de $\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$. Como além disto, $\langle X, Y\rangle$, $\langle X, Z\rangle$ e $\langle Y, Z\rangle$ são ideais de G, temos que $G_{\langle X,Y\rangle}$, $G_{\langle X,Z\rangle}$ e $G_{\langle Y,Z\rangle}$ são subgrupos normais de G e invariante sob o fluxo de qualquer campo linear $\mathcal{X}$. Logo, pela Proposição 1.4.9 para os três sistemas lineares acima $G_{\langle X,Y\rangle} \subset \mathbf{cl}(\mathcal{A}) \cap \mathbf{cl}(\mathcal{A}^*)$, $G_{\langle X,Z\rangle} \subset \mathbf{cl}(\mathcal{A}) \cap \mathbf{cl}(\mathcal{A}^*)$ e $G_{\langle Y,Z\rangle} \subset \mathbf{cl}(\mathcal{A}) \cap \mathbf{cl}(\mathcal{A}^*)$ respectivamente. Então, a Proposição 1.4.10 nos garante que, supondo que os sistemas lineares acima satisfaçam a condição do posto, eles são controláveis se e somente se seus sistemas de controle induzido em $G/G_{\langle X,Y\rangle}$, $G/G_{\langle X,Z\rangle}$ e $G/G_{\langle X,Z\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{y} = \frac{c_1}{\alpha}(e^{\alpha w} - 1) + c_3 y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^{w} - 1) + b_2 x \end{cases}.$$

são controláveis. Como $G/G_{\langle X,Y\rangle}$, $G_{\langle X,Y\rangle}$ e $G_{\langle X,Y\rangle}$ são isomorfos ao grupo afim, temos por [9] que estes sistemas são controláveis se e somente se satisfazem a condição do posto (d_1, c_1 e $b_1 \neq 0$) respectivamente e d_4, c_3 e $b_2 = 0$ respectivamente.

Proposição 4.4.18. *O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $d_4 = 0$.*

Proposição 4.4.19. *O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $c_3 = 0$.*

Proposição 4.4.20. *O sistema de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $b_2 = 0$.*

4.4.13 $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$

Estudaremos aqui os sistemas de controle lineares $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ em $G = \mathrm{G}_{4,5}^{1,\beta}$ que satisfazem a condição do posto e Δ é uma subálgebra tridimensional de $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$. Todo sistema de de controle $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ é isomofo a um dos descritos nas seções abaixo.

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$

Estudaremos aqui a controlabilidade dos sistemas da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^{w} - 1) + b_2 x + b_3 y + u_2 e^{w} \\ \dot{y} = c_1(e^{w} - 1) + c_2 x + c_3 y + u_3 e^{w} \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{cases},$$

Temos que $\langle X, Y\rangle$ é ideal de $\mathfrak{g}$ o que nos garante que $G_{\langle X,Y\rangle}$ é grupo normal de G. Além disso, por $\langle X, Y\rangle$ ser invariante sob a Derivação D, $G_{\langle X,Y\rangle}$ também é invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$. Então, pelas Proposições 1.4.9 e 1.4.10, temos que $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema de controle induzido em $G/G_{\langle X,Y\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{z} = \frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w} - 1) + d_4 z \end{cases},$$

que por [9], o sistema induzido é controlável desde que satisfaça a condição do posto ($d_1 \neq 0$) e $d_4 = 0$.

Proposição 4.4.21. *O sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$ é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e $d_4 = 0$*

Controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,\gamma X+\delta Y,Z\rangle)$

Estudaremos aqui a controlabilidade dos sistemas da forma

$$\begin{cases} \dot{w}=u_1 \\ \dot{x}=b_1(e^w-1)+b_2x+b_3y+u_2e^w \\ \dot{y}=c_1(e^w-1)+c_2x+c_3y+u_2e^w \\ \dot{z}=\frac{d_1}{\beta}(e^{\beta w}-1)+d_4z+u_3e^{\beta w} \end{cases},$$

Temos que $\langle Z\rangle$ é ideal de $\mathfrak{g}$ o que nos garante que $G_{\langle Z\rangle}$ é grupo normal de G. Além disso, por $\langle Z\rangle$ ser invariante sob a derivação D, $G_{\langle X,Y\rangle}$ também é invariante sob o fluxo de $\mathcal{X}$. Então, pelas Proposições 1.4.9 e 1.4.10, temos que $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,\gamma X+\delta Y,Z\rangle)$ é controlável se e somente se o sistema de controle induzido em $G/G_{\langle Z\rangle}$

$$\begin{cases} \dot{w}=u_1 \\ \dot{x}=b_1(e^w-1)+b_2x+b_3y+u_2\gamma e^w \\ \dot{y}=c_1(e^w-1)+c_2x+c_3y+u_2\delta e^w \end{cases},$$

for controlável.

Proposição 4.4.22. *O sistema linear* $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,\gamma X+\delta Y,Z\rangle)$ *no grupo* $G=\mathrm{G}_{4,5}^{1,\beta}$ *é controlável se e somente se o sistema linear induzido*

$$\begin{cases} \dot{w}=u_1 \\ \dot{x}=b_1(e^w-1)+b_2x+b_3y+u_2\gamma e^w \\ \dot{y}=c_1(e^w-1)+c_2x+c_3y+u_2\delta e^w \end{cases},$$

for controlável.

4.4.14 $\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$

Estes sistema não foi resolvido, as dificuldades são parecidas com 4.3.13. $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,\alpha_1X+\beta_1Y+\gamma_1Z,\alpha_2X+\beta_2Y+\gamma_2Z\rangle):\dot{g}=\mathcal{X}+u_1W+u_2(\mathcal{X},W,\alpha X+\beta Y+\gamma Z)+u_3(\alpha_2X+\beta_2Y+\gamma_2Z)$

$$\begin{cases} \dot{w}=u_1 \\ \dot{x}=b_1(e^w-1)+b_2x+b_3y+b_4z+(\alpha_1u_1+\beta_2u_2)e^w \\ \dot{y}=c_1(e^w-1)+c_2x+c_3y+b_4z+(\beta u_1+\beta_2u_2)e^w \\ \dot{z}=d_1(e^w-1)+d_2x+c_3y+d_4z+(\gamma u_1+\gamma_2u_2)e^w \end{cases}.$$

com a nossa abordagem, não conseguimos falar sobre a controlabilidade de $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,\alpha_1X+\beta_1Y+\gamma_1Z,\alpha_2X+\beta_2Y+\gamma_2Z\rangle)$ exceto nos casos onde $\Sigma(\mathcal{X},\langle W\rangle)$ é controlável.

4.4.15 $\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$

Aqui será estudado os sistemas de controles da forma $\Sigma(\mathcal{X},\langle W,Y,Z\rangle)$. que satisfazem a condição do posto este sistema é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) \\ \dot{y} = c_1\frac{e^{\beta w}sen(w)+\beta e^{\beta w}cos(w)}{1+\beta^2} + d_1\frac{-e^{\beta w}cos(w)+\beta e^{\beta w}sen(w)}{1+\beta^2} + c_3y + c_4z + \frac{d_1-\beta c_1}{1+\beta^2} + u_2e^{\beta w}\cos(w) + u_3e^{\beta w}\sin(w) \\ \dot{z} = -c_1\frac{-e^{\beta w}cos(w)+\beta e^{\beta w}sen(w)}{1+\beta^2} + d_1\frac{e^{\beta w}sen(w)+\beta e^{\beta w}cos(w)}{1+\beta^2} + c_4y + c_3z - \frac{c_1+\beta d_1}{1+\beta^2} - u_2e^{\beta w}\sin(w) + u_3e^{\beta w}\cos(w) \end{cases}.$$

O subgrupo $G_{\langle Y,Z\rangle}$ de G, gerado pelas exponeciais de $\langle Y,Z\rangle \subset \langle X,Y,Z\rangle$ está contido em $G_{\langle X,Y,Z\rangle}$. Portanto, pela Proposição 1.4.9. $G_{\langle Y,Z\rangle} \subset \mathbf{cl}(\mathcal{A}) \cap \mathbf{cl}(\mathcal{A}^*)$. Além disso, como $\langle Y,Z\rangle$ é ideal de $\mathfrak{g}$, $G_{\langle Y,Z\rangle}$ é subgrupo normal de G. Também temos que para qualquer campo linear $\mathcal{X}$ de G, $G_{\langle Y,Z\rangle}$ é invariante pelo fluxo de X, pois $\langle Y,Z\rangle$ é invariante sobre o fluxo de qualquer derivação D de $\mathfrak{g}$. Então, pela Proposição 1.4.10 o sistema linear $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W,Y,Z\rangle)$ de G é controlável se e somente se o sistema linear induzido em $G/G_{\langle Y,Z\rangle}$, isomorfo ao grupo afim, for controlável. Agora, visto como álgebra de Lie matrizes, os vetores Y, Z são da forma $Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e a exponencial de um vetor $cY + dZ$ é da forma

$$\begin{bmatrix} e^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 & c \\ 0 & 0 & e^0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim o sistema induzido é da forma

$$\begin{cases} \dot{w} = u_1 \\ \dot{x} = b_1(e^w - 1) + b_2x \end{cases}.$$

Por [9], temos que o sistema linear induzido é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto $(b_1 \neq 0)$ e $b_2 = 0$.

Logo,

Proposição 4.4.23. $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W,Y,Z\rangle)$ *é controlável se e somente se satisfaz a condição do posto e* $b_2 = 0$.

Capítulo 5

Conclusões

Embora tenhamos conseguidos vários resultados, com as ferramentas utilizadas nós não conseguimos concluir a controlabilidade ou não controlabilidade de cada sistema de controle linear em grupos de Lie conexos e simplesmente conexos de dimensão quatro.

A tabela abaixo resume as condições necessárias e suficientes para que em cada grupo $G = \mathbb{R} \times_{e^\theta} \mathbb{R}^3$ os sistemas descritos na Proposição 1.4.12 sejam controláveis. A primeira coluna indica o Grupo de Lie G onde o sistema linear é considerado, enquanto na segunda coluna encontra-se a matriz θ que descreve a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ do grupo. A terceira coluna nos fornece as derivações, na base determinada pela matriz θ. A quarta coluna descreve o sistema de controle estudado. Por fim, a quinta coluna descreve as condições necessárias (exceto a condição do posto) e suficientes para que o sistema de controle seja controlável. Quando na última coluna escrevemos Controlável significa que para o sistema em questão ser controlável basta satisfazer a condição do posto. Ainda na última coluna quando escrevemos "Não", temos que não existe sistema linear controlável daquela forma.

Tabela 5.1: Controlabilidade em Grupos de Lie de Dimensão 4

Grupo Espaço Estado	θ	**Derivação**	**sistemas de controle**	Controlabilidade
$Aff(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W\rangle)$	$b_2=0$
$Aff(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W,X\rangle)$	Controlável
$Aff(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W,cY+dZ\rangle)$	$b_2=0$ satisfaz ad-rank
$Aff(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W,Y,Z\rangle)$	$b_2=0$
$Aff(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W,X,cY+dZ\rangle)$	Controlável
$G_{3,2}\times\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W\rangle)$	$b_2=0$ $d_4\neq 0$
$G_{3,2}\times\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W,X\rangle)$	$b_2=0$ $d_4\neq 0$
$G_{3,2}\times\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W,Z\rangle)$	$b_2=0$ $b_3\neq 0$
$G_{3,2}\times\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W,X,Y\rangle)$	Controlável
$G_{3,2}\times\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X},\langle W,X,Z\rangle)$	$b_2=0$

$G_{3,3} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, bX + cY \rangle)$	sem resultados
$G_{3,3} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z \rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, bX + cY, Z \rangle)$	O sistema induzido em $G/G_{\langle Z \rangle}$ é controlável.
$G_{3,3} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$	Controlável
$G_{3,4} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$	Não
$G_{3,4} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$	$c_3 = 0$ $d_4 \neq 0$
$G_{3,4} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y \rangle)$	$b_2 = 0$ $d_4 \neq 0$
$G_{3,4} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z \rangle)$	Não
$G_{3,4} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$	controlável
$G_{3,4} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z \rangle)$	$c_3 = 0$
$G_{3,4} \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z \rangle)$	$b_2 = 0$

$G_{3,5}^0 \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$	$b_2 = 0$
$G_{3,5}^0 \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z \rangle)$	$b_2 = 0$
$G_{3,5}^0 \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$	Controlável
$G_{3,5}^a \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$	Sem resultados
$G_{3,5}^a \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z \rangle)$	Controlável
$G_{3,5}^a \times \mathbb{R}$	$\begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$	Controlável
$G_{4,2}^{\alpha}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$	Não
$G_{4,2}^{\alpha}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z \rangle)$	$b_2 = 0$ $b_3 \neq 0$
$G_{4,2}^{\alpha}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$	$d_4 = 0$
$G_{4,2}^{\alpha}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z \rangle)$	$b_2 = 0$

$G^1_{4,2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$	Sem resultados
$G^1_{4,2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, bX + dZ \rangle)$	$b_2 = 0$ se $d \neq 0$ ou não satisfaz ad-rank. $b_2 = d_4 = 0$ e $d_3 \neq 0$ se $d = 0$ e satisfaz ad-rank
$G^1_{4,2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, cY + dZ \rangle)$	Controlável se o sistema induzido em $G/G_{\langle X \rangle}$ for controlável.
$G_{4,3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$	Sem resultados
$G_{4,3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$	$c_3 = 0$ $c_4 \neq 0$
$G_{4,3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y \rangle)$	$b_2 = 0$ $c_3 \neq 0$
$G_{4,3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$	Controlável
$G_{4,3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z \rangle)$	$b_2 = 0$
$G_{4,4}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ d_1 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$	$b_2 = 0$ $b_3 \neq 0$
$G_{4,4}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ d_1 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$	$b_2 = 0$

$G_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X \rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y \rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z \rangle)$	Não
$G_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$,	$d_4 = 0$
$G_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Z \rangle)$,	$c_3 = 0$
$G_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z \rangle)$,	$b_2 = 0$
$G_{4,5}^{1,\beta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$	Sem resultados
$G_{4,5}^{1,\beta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, bX + cY \rangle)$	$d_4 = 0$ satisfaz ad-rank O sistema induzido em $G/G_{\langle Z \rangle}$ é controlável.
$G_{4,5}^{1,\beta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Z \rangle)$	O sistema induzido em $G/G_{\langle Z \rangle}$ é controlável.
$G_{4,5}^{1,\beta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y \rangle)$	$d_4 = 0$
$G_{4,5}^{1,\beta}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, bX + cY, Z \rangle)$	O sistema induzido em $G/G_{\langle Z \rangle}$ é controlável.
$G_{4,5}^{1,1}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W \rangle)$	D possui 2 autovalores complexos e um autovalor nulo ou $\begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}^2 \neq 0$ e $\begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}^3 = 0$

$G_{4,5}^{1,1}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, \beta X + \gamma Y + \delta Z\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, \beta_1 X + \gamma_1 Y + \delta_1 Z,$ $\beta_2 X + \gamma_2 Y + \delta_2 Z\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, \beta_1 X + \gamma_1 Y + \delta_1 Z,$ $\beta_2 X + \gamma_2 Y + \delta_2 Z,$ $\beta_3 X + \gamma_3 Y + \delta_3 Z\rangle)$	Sem resultados
$G_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & -1 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W\rangle)$	Sem resultados
$G_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & -1 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X\rangle)$	Se $\beta \neq 0$ Controlável. Se $\beta = 0$ $c_3 = 0$
$G_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & -1 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & -b_3 & b_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$	$b_2 = 0$
$(\mathbf{Aff}(\mathbb{R}))^2$	Não se aplica	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle aW + bX + cY + dZ\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X, cY + dZ\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle X + cY, Z\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + dZ, X\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX, Z\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + Y + dZ, X + d'Z\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + Y + dZ, X + d'Z\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + cY + dZ, X\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle cW + Y, X, Z\rangle)$	Não
$(\mathbf{Aff}(\mathbb{R}))^2$	Não se aplica	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W + bX, Y + dZ\rangle)$	$b_2 = 0.$ e $d_4 = 0.$
$(\mathbf{Aff}(\mathbb{R}))^2$	Não se aplica	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle bW + X, Y, Z\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, Y, Z\rangle)$	$b_2 = 0.$
$(\mathbf{Aff}(\mathbb{R}))^2$	Não se aplica	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$	$\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, cY + Z\rangle)$ $\Sigma(\mathcal{X}, \langle W, X, Y\rangle)$	$d_4 = 0.$

Apêndice

Classificação de Bianchi-Behr: Representação Matricial

Neste apêndice descrevemos na forma matricial alguns dos grupos de Lie, com as correspondentes álgebras, citados na classificação de Bianchi-Behr. Descrevemos também os grupos de automorfismos utilizados aqui. Em todo este trabalho, $n\mathfrak{g}_1$ denota a álgebra abeliana n-dimensional. Também usamos a notação $\mathfrak{g}_{2,1}$ para indicar a álgebra bidimensional não-abeliana, que é a álgebra de Lie do grupo afim. Além disso, i denota a unidade imaginária. Podemos ter mais de uma representação para uma mesma álgebra de Lie, de acordo com o grupo com o qual a associamos. Estas descrições foram obtidas do artigo [6].

- $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$:

$$\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^y \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathfrak{g}_{2,1} \oplus \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

- $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{T}$:

$$\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{T} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^{ix} \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathfrak{g}_{2,1} \oplus \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z & x & 0 \\ 0 & 0 & iy \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Grupo de Heisenberg:

$$\mathrm{H}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & y & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathfrak{g}_{3,1} = \mathfrak{h}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y & x \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

- $\mathrm{G}_{3,2}$:

$$\mathrm{G}_{3,2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & e^z & 0 \\ x & -ze^z & e^z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{3,2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ x & -z & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\mathrm{G}_{3,3}$:

$$\mathrm{G}_{3,3} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & e^z & 0 \\ x & 0 & e^z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{3,3} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ x & 0 & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\mathrm{SE}(1,1)$:

$$\mathrm{SE}(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & \cosh z & -\sinh z \\ y & -\sinh z & \cosh z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{3,4}^0 = \mathfrak{se}(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & -z \\ y & -z & 0 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\mathrm{G}_{3,4}^a$, $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\mathrm{G}_{3,4}^a = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & e^{az}\cosh z & -e^{az}\sinh z \\ y & -e^{az}\sinh z & e^{az}\cosh z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{3,4}^a = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & az & -z \\ y & -z & az \end{bmatrix} : x, y, z, \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\widetilde{\mathrm{SE}}(2)$:

$$\widetilde{\mathrm{SE}}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & \cos z & -\sin z & 0 \\ y & \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{3,5}^0 = \widetilde{\mathfrak{se}}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & -z & 0 \\ y & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

- $G^a_{3,5}$:

$$G^a_{3,5} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & e^{az}\cos z & -e^{az}\sin z \\ y & e^{az}\sin z & e^{az}\cos z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g}^a_{3,5} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & az & -z \\ y & z & az \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

A seguir, descrevemos os grupos de automorfismos de álgebras de Lie que foram utilizados nestes trabalho. Uma descrição completa pode ser encontrada em [6]. Para cada álgebra, a base em relação a qual os automorfismos são descritos é a mesma da Tabela 1.2.

- $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{2,1} \oplus \mathfrak{g}_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & u & 0 \\ y & 0 & v \end{bmatrix} : x, y, u, v \in \mathbb{R}, uv \neq 0 \right\}$

- $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{3,2}) = \left\{ \begin{bmatrix} u & x & y \\ 0 & u & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z, u \in \mathbb{R}, u \neq 0 \right\}$

- $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{3,3}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}, xv - yu \neq 0 \right\}$

- $\mathrm{Aut}(\mathfrak{se}(1,1)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & u & 0 \\ y & 0 & v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & 0 & u \\ y & v & 0 \end{bmatrix} : x, y, u, v \in \mathbb{R}, uv \neq 0 \right\}$

- $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^a_{3,4}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & u \\ y & x & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, u, v \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 \neq 0 \right\}$

- $\mathrm{Aut}(\widetilde{\mathfrak{se}}(2)) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & u \\ -\epsilon y & \epsilon x & v \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} : x, y, u, v \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0, \epsilon = \pm 1 \right\}$

- $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^a_{3,5}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & u \\ -y & x & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, u, v \in \mathbb{R} \right\}$

Sistemas de Controle Lineares em $(\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0)^n$

Definimos a álgebra de Lie $(\mathbf{aff}(\mathbb{R}))^n$ como aquela cuja base $\{X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n\}$ satisfaz

- para todo $i \neq j$ $[X_i, Y_j] = [X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0$

- para todo $i = 1, ..., n$ $[X_i, Y_i] = Y_i$

Vejamos agora como são as derivações da álgebra de Lie $(\mathbf{aff}(\mathbb{R}))^n$. Dado uma transformação linear $D : (\mathbf{aff}(\mathbb{R}))^n \to (\mathbf{aff}(\mathbb{R}))^n$ tal que

$$D(X_i) = a_{i,1}X_1 + ... + a_{i,n}X_n + b_{i,1}Y_1 + ... + b_{i,n}Y_n$$

e

$$D(Y_i) = c_{i,1}X_1 + ... + c_{i,n}X_n + d_{i,1}Y_1 + ... + d_{i,n}Y_n.$$

Se D é uma derivação temos que

$$c_{i,1}X_1 + ... + c_{i,n}X_n + d_{i,1}Y_1 + ... + d_{i,n}Y_n = D(Y_i) = D([X_i, Y_i]) = [D(X_i), Y_i] + [X_i, D(Y_i)] = (a_{i,i} + d_{i,i})Y_i,$$

$$0 = D([X_i, Y_j]) = [D(X_i), Y_j] + [X_i, D(Y_j)] = a_{i,j}Y_j + d_{j,i}Y_i$$
$$0 = D([X_i, X_j]) = [D(X_i), X_j] + [X_i, D(X_j)] = -b_{i,j}Y_j + b_{j,i}Y_i$$
$$0 = D([Y_i, Y_j]) = [D(Y_i), Y_j] + [Y_i, D(Y_j)] = c_{i,j}Y_j - d_{j,i}Y_i$$

Disto temos que $a_{i,j} = c_{i,j} = 0$ para todo $i, j = 1, ..., n$ e $b_{i,j} = d_{i,j} = 0$ sempre que $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$. Visto como matriz de transformação linear na base ordenada $\{X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n\}$ é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots & 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever $(\mathbf{aff}(\mathbb{R}))^n$. Tomando $V = a_1X_1 + ... + a_nX_n + b_1Y_1 + ... + b_nY_n$, sua forma matricial é uma matriz $2n \times 2n$ da forma

$$V = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{bmatrix}.$$

Via exponcial de matrizes temos que o grupo de lie de matrizes da álgebra $(\mathbf{aff}(\mathbb{R}))^n$ são formado pelo conjunto das matrizes da forma, munido com o produto usual de matrizes.

Herdado do grupo de lie de matrizes descrito acima, o grupo de Lie $(\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0)^n$ pode ser visto como $(\mathbb{R}^{2n}, *)$ onde $*$ é a seguinte operação

$$(x_{1,1}, x_{2,1}, ..., x_n, y_{1,1}, y_{2,1}, ..., y_{n,1}) * (x_{1,2}, x_{2,2}, ..., x_{n,2}, y_{1,2}, y_{2,2}, ..., y_{n,2})$$

$$= (x_{1,1} + x_{1,2}, x_{2,1} + x_{2,2}, ..., x_{n,1} + x_{n,2}, y_{1,1} + e^{x_{1,1}} y_{1,2}, y_{2,1} + e^{y_{2,1}} y_{2,2}, ..., y_{n,1} + e^{x_{n,1}} y_{n,2}.$$

Os campos invariantes à esquerda em um ponto $g = (x_1, ..., x_n, y_1, ...y_n)$ de $(\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0)^n$ são da forma

$$(\alpha_1, ..., \alpha_n, e^{x_1}\beta_1, ..., e^{x_n}\beta_n.$$

Tomemos como base os campos invariantes à esquerda

$$\{X_1, ..., X_i, ..., X_n, Y_1, ...Y_i, ..., Y_n\}$$

onde

$$X_i(g) = (0, ..., 0, 1, 0..., 0, 0, ..., 0)$$

onde apenas a *i-ésima* coordenada é não nula e

$$Y_i(g) = (0, ..., 0, 0, ...0, e^{x_i}, 0, ..., 0)$$

onde apenas a $n + i$-*ésima* é não nula.

O campo linear de $(\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0)^n$ relacionado com a derivação D descrita acima é da forma

$$(0, ..., 0, b_{1,1}(e^{x_1} - 1) + d_{1,1}y_1, ..., b_{n,n}(e^{x_n} - 1) + d_{n,n}y_n).$$

Por fim falemos sobre a controlabilidade de sistemas de controle da forma

$$\dot{g} = \mathcal{X}(g(t)) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t) V_i(g(t))$$

onde $\mathcal{X}$ é um campo linear de $(\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0)^n$ e cada V_i um campo invariante à esquerda de tal forma que V_i o conjunto gerado por estes campo $\langle V_1, ..., V_k\rangle$ seja subálgebra de Lie de $(\mathbf{aff}(\mathbb{R}))^n$.

Veja que se o sistema possuir menos que n controles, ele não é controlável pois não satistaz a condição do posto. De fato, temos que para todo V_i, $P^k(V_i)$ e $[V_i, P^k(V_j)]$ pertencem ao subespaço $\langle Y_1, ..., Y_n\rangle$ que possui dimensão n. Como $\langle V_1, ..., V_k\rangle$ é subálgebra de dimensão $k < n$ temos que a dimensão do posto é no máximo $k + n < 2n$.

Suponha agora que os controles do sistema de controle formam uma subálgebra Δ de dimensão n. Para o sistema ser controlável, deve existir uma base de Δ formada pelos vetores $\{U_1, ..., U_n\}$ onde

$$\begin{array}{rl} U_1 = & X_1 + b_{1,1}Y_1 + b_{1,2}Y_2 + ... + b_{1,n}Y_n \\ U_2 = & X_2 + b_{2,1}Y_1 + b_{2,2}Y_2 + ... + b_{2,n}Y_n \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ U_n = & X_n + b_{n,1}Y_1 + b_{n,2}Y_2 + ... + b_{n,n}Y_n \end{array}$$

De fato, Caso Δ não possua uma base como descrita acima dado qualquer base $\{V_1, ..., V_n\}$ de Δ onde

$$\begin{array}{rl} V_1 = & a_{1,1}X_1 + ... + a_{1,n}X_n + b_{1,1}Y_1 + ... + b_{1,n}Y_n \\ V_2 = & a_{2,1}X_1 + ... + a_{2,n}X_n + b_{2,1}Y_1 + ... + b_{2,n}Y_n \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ V_n = & a_{n,1}X_1 + ... + a_{n,n}X_n + b_{n,1}Y_1 + ... + b_{n,n}Y_n \end{array}$$

via escalonamento podemos obter uma nova base $\{V_1', ...V_{n-1}', V\}$ onde um dos vetores é da forma V da forma $V = b_1Y_1 + ... + b_nY_n$. Mas neste caso, o posto do sitema não é máximo pois $P^k(V_i')$ e $[V_i', P^k(V_j')]$ estão contidos em $\langle Y_1, ..., Y_n\rangle$ e portanto o posto é no máximo $2n-1$.

Veja agora que ao calcularmos o colchete entre dois vetores U_i e U_j

$$\begin{aligned}[U_i, U_j] &= [X_i + b_{i,1}Y_1 + ... + b_{i,j}Y_j + ... + b_{i,n}Y_n, X_j + b_{j,1}Y_1 + ... + b_{j,i}Y_i + ... + b_{j,n}Y_n] \\ &= b_{j,i}Y_i + b_{i,j}Y_j\end{aligned}$$

Mas como $\langle U_1, ...U_n\rangle$ é subálgebra, temos que $b_{j,i}Y_i + b_{i,j}Y_j = 0$ e portanto todo $b_{i,j} = 0$ quando $i \neq j$. desta forma temos que

$$\begin{array}{rl} U_1 = & X_1 + b_{1,1}Y_1 \\ U_2 = & X_2 + b_{2,2}Y_2 \\ \vdots & \vdots \\ U_n = & X_n + b_{n,n}Y_n \end{array}$$

Estudaremos agora a controlabilidade dos sistemas de controle $\dot{g} = \mathcal{X}(g(t)) + \sum u_i(t)U_i(g(t))$ que é da forma onde dado um elemento do grupo $g = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$

$$\mathcal{X}(g) = (0, ..., 0, c_{1,1}(e^{x_1} - 1) + d_{1,1}y_1, ..., c_{n,n}(e^{x_n} - 1) + d_{n,n}y_n).$$

$$\begin{array}{rl} U_1 = & X_1 + b_{1,1}Y_1 \\ U_2 = & X_2 + b_{2,2}Y_2 \\ \vdots & \vdots \\ U_n = & X_n + b_{n,n}Y_n \end{array}$$

este sistema é visto como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u_n \\ \dot{y}_1 = c_{1,1}(e^{x_1} - 1) + d_{1,1}y_1 + u_1b_{1,1}e^{x_1} \\ \vdots \\ \dot{y}_n = c_{n,n}(e^{x_n} - 1) + d_{n,n}y_n + u_nb_{n,n}e^{x_n} \end{cases}.$$

Supondo que este sistema satisfaça a condição do posto (isto é, $c_{i,i} + b_{i,i}d_{i,i} \neq 0$ para todo $i = 1, ..., n$) e usando o automorfismo

$$V = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{-b_{1,1}}{c_{1,1}+b_{1,1}d_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{c_{1,1}+b_{1,1}d_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-b_{2,2}}{c_{2,2}+b_{2,2}d_{2,2}} & \ddots & \vdots & 0 & \frac{1}{c_{2,2}+b_{2,2}d_{2,2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-b_{n,n}}{c_{n,n}+b_{n,n}d_{n,n}} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{c_{n,n}+b_{n,n}d_{n,n}} \end{bmatrix}.$$

Temos que o nosso sistema de controle é isomorfo ao sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u_n \\ \dot{y}_1 = c_{1,1}(e^{x_1} - 1) + d_{1,1}y_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_1 = c_{n,n}(e^{x_n} - 1) + d_{n,n}y_n \end{cases}.$$

Segue do caso da controlabilidade em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ que para o sistema ser controlável, todo $d_{i,i} = 0$ para $i = 1, ..., n$. Portanto se os sistema são controláveis eles são da forma.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u_n \\ \dot{y}_1 = c_{1,1}(e^{x_1} - 1) \\ \vdots \\ \dot{y}_1 = c_{n,n}(e^{x_n} - 1) \end{cases}.$$

Como este sistema satisfaz a condição de ad-rank e a álgebra das raízes é a própria álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. temos que o sistema de controle é controlável.

Disto segue que

Proposição 5.0.1. *Seja $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ um sistema de controle linear em $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0^n$ que satisfaz a condição do posto e Δ uma subálgebra de dimensão n da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0^n$. Então $\Sigma(\mathcal{X}, \Delta)$ se e somente se satisfaz a condição do posto e a álgebra das raízes $\mathfrak{g}_0$ é igual a álgebra do grupo.*

Descrição de Λ_s para cada Álgebra de Lie

Descrevemos na tabela a seguir a aplicação $\Lambda_s : \mathbb{R} \to M_{3\times3}$, necessários para a demonstração da Proposição 1.4.12. Lembramos aqui que todas as álgebras listadas abaixo são vistas $\mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^3$ onde $\theta : \mathbb{R} \to Der(\mathbb{R}^3)$. Na tabela abaixo chamaremos a matriz $\theta(1)$ apenas como θ.

Tabela 5.2:

Álgebra	$\theta(1)$	Λ_s
$\mathbf{aff}(\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}e^s-1&0&0\\0&s&0\\0&0&s\end{bmatrix}$
$\mathfrak{g}_{3,2}\oplus\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}e^s-1&e^s(s-1)+1&0\\0&e^s-1&0\\0&0&s\end{bmatrix}$
$\mathfrak{g}_{3,3}\oplus\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}e^s-1&0&0\\0&e^s-1&0\\0&0&s\end{bmatrix}$
$\mathfrak{g}_{3,4}^0\oplus\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}e^s-1&0&0\\0&e^{-s}-1&0\\0&0&s\end{bmatrix}$
$\mathfrak{g}_{3,4}^a\oplus\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\lambda&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}e^s-1&0&0\\0&e^{\lambda s}&0\\0&0&s\end{bmatrix}$
$\mathfrak{g}_{3,5}^0\oplus\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\sin(s)&\cos(s)-1&0\\1-\cos(s)&\sin(s)&0\\0&0&s\end{bmatrix}$
$\mathfrak{g}_{3,5}^a\oplus\mathbb{R}$	$\begin{bmatrix}\lambda&-1&0\\1&\lambda&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{e^{\lambda s}(\lambda\cos(s)+\sin(s)-\lambda)}{\lambda^2+1}&-\frac{e^{\lambda s}(\lambda\sin(s)+\cos(s)-1)}{\lambda^2+1}&0\\\frac{e^{\lambda s}(\lambda\sin(s)+\cos(s)-1)}{\lambda^2+1}&\frac{e^{\lambda s}(\lambda\cos(s)+\sin(s)-\lambda)}{\lambda^2+1}&0\\0&0&s\end{bmatrix}$
$\mathfrak{g}_{4,2}^\alpha$	$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&\alpha\end{bmatrix}$	$(e^{s\theta}-1)\theta^{-1}$
$\mathfrak{g}_{4,2}^1$	$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$(e^{s\theta}-1)\theta^{-1}$
$\mathfrak{g}_{4,3}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$	$(e^{s\theta}-1)\theta^{-1}$
$\mathfrak{g}_{4,4}$	$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$	$(e^{s\theta}-1)\theta^{-1}$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&\beta\end{bmatrix}$	$(e^{s\theta}-1)\theta^{-1}$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{1,\beta}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\beta\end{bmatrix}$	$(e^{s\theta}-1)\theta^{-1}$
$\mathfrak{g}_{4,5}^{1,1}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$(e^{s\theta}-1)\theta^{-1}$
$\mathfrak{g}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$\begin{bmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&1\\0&-1&\beta\end{bmatrix}$	$(e^{s\theta}-1)\theta^{-1}$

Referências Bibliográficas

[1] Agrachev, A. A., Sachkov, Y.: Control Theory from the Geometric Viewpoint. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[2] Ayala, V., Da Silva, A.: *On the characterization of the controllability property for linear control systems on nonnilpotent, solvable three-dimensional Lie groups.* Journal of Differential Equations, 266(12), 8233-8257, 2019 doi:10.1016/j.jde.2018.12.027

[3] Braga Barros, C. J., Santana, A. J.: Estruturas Algébricas com Ênfase em Elementos da Teoria de Lie. Maringá: Eduem, 2011.

[4] Biggs, R; Remsing, C.C.: *On the Classification of Real Four-Dimensional Lie Groups*. Journal of Lie Theory, v. 26, p. 1001-1035, 2016.

[5] Biggs, R.; Remsing, C.C.: *A Category of Control Systems*. An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, v. 20(1), p. 355-368, 2012.

[6] Biggs, R.; Remsing, C.C.: *Control Systems on Three-Dimensional Lie Groups: Equivalence and Controllability.* An. J. Dyn Control Syst v 20, p. 307-339, 2014.

[7] Cardeti, F., Mittenuber, D.:*Local Controllability for Linear Control Systems on Lie Groups*. Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 11, Number 3, p. 353-373, 2005.

[8] Da Silva, A.: *Controllability of linear systems on solvable Lie groups.* SIAM Journal on Control and Optimization, 54 (1), 372-390, 2016. doi: 10.1137 / 140998342

[9] Dath, M., Jouan, P.:*Controllability of Linear Systems on Low Dimensional Nilpotent and Solvable Lie Groups.* J Dyn Control Syst, v 22, p. 207-225, 2016.

[10] Hall, B. C.: *An Elementary Introduction to Groups and Representations* . Versão online disponível em http://arxiv.org/abs/math-ph/0005032.

[11] Hungaro, R. M.: Órbita Equivalência de Sistemas Lineares sobre Variedades, Classificação de Sistemas Lineares sobre Grupos de Lie e Ações de Semigrupos sobre Espaços Homogêneos. 2016. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá (PR), 2016.

[12] Jouan, P.: *Equivalence of Control Systems with Linear Systems on Lie Groups and Homogeneous Spaces*. ESAIM: Control Optm. Calc. Var. v 16, p. 956-973, 2010.

[13] Jouan, P.: *Controllability of Linear Systems on Lie Groups*. Journal of Dynamical and Control Systems v 17, n.o 4, p. 591-616, 2011.

[14] Jurdjevic, V.: Geometric Control Theory. New York: Cambridge Univ. Press, 1997.

[15] Jurdjevic, V.; Sussmann, H. J.: *Controllability of Non Linear Systems*. Journal of Differential Equations, v. 12, p. 95-116, 1972.

[16] Onishchik, A. L., E.B. Vinberg, E. B.: Lie Groups and Lie Algebras III. Berlin: Springer, 1990.

[17] Sachkov, Y.: *Controllability of Invariant Systems on Lie Groups and Homogeneous Spaces*. Journal of Mathematical Sciences, v. 100 (4), p. 2355-2427, 2000.

[18] San Martin, L.A.B.: Álgebras de Lie, Segunda Edição. Campinas: Editora Unicamp, 1999.

[19] San Martin, L.A.B.: Grupos de Lie. Campinas: Editora Unicamp, 2016.

[20] Warner, F. W.: Foundations of Diferentiable manifolds and Lie Groups. New York: Scott, Foresman and Company, 1971.