UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

TALITA DRUZIANI MARCHIORI

Comportamento assintótico da equação da onda viscoelástica com história passada e termo de fonte supercrítico [1]

Maringá
2021

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

TALITA DRUZIANI MARCHIORI

Comportamento assintótico da equação da onda viscoelástica com história passada e termo de fonte supercrítico

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profª. Drª. Valéria N. Domingos Cavalcanti
Coorientadora: Profª. Drª. Claudete Matilde Webler Martins

Maringá
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Marchiori, Talita Druziani

M317c Comportamento assintótico da equação da onda viscoelástica com história passada e termo de fonte supercrítico / Talita Druziani Marchiori. -- Maringá, 2021.
99 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Valéria Neves Domingos Cavalcanti.
Coorientadora: Prof.ª Dr.ª Claudete Matilde Webler Martins.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2021.

1. Equação de onda viscoelástica. 2. Memória com história passada. 3. Crescimento Supercrítico. 4. Comportamento assintótico. 5. Viscoelastic wave equation. 6. Memory with past history. 7. Supercritical sources. 8. Asymptotic behaviour. I. Cavalcanti, Valéria Neves Domingos, orient. II. Martins, Claudete Matilde Webler, orient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. IV. Título.

CDD 22.ed. 515.39

Edilson Damasio CRB9-1.123

TALITA DRUZIANI MARCHIORI

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA EQUAÇÃO DA ONDA VISCOELÁSTICA COM HISTÓRIA PASSADA E TERMO DE FONTE SUPERCRÍTICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutora em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti - UEM (Presidente)
Profa. Dra. Claudete Matilde Weber Martins - UEM (Coorientadora)
Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita - UNESP / São José do Rio Preto
Profa. Dra. María Rosario Astudillo Rojas - UFSC / Florianópolis
Prof. Dr. Cícero Lopes Frota - UEM
Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo - UEM

Aprovada em: 26 de agosto de 2021.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (https://meet.google.com/fxh-smpw-qoc)

Dedico este trabalho ao meu pai,
Luiz Carlos Marchiori (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele, nada disso seria possível.

Ao meu marido Cristian, pelo amor, carinho, abraço, conforto e apoio dados a mim durante toda a pós graduação, contribuindo imensamente para que eu chegasse até essa etapa na minha vida.

Aos meus pais Luiz e Maris, que me encheram de princípios e me ensinaram ser persistente. Pai, mesmo não estando mais presente fisícamente neste mundo, te devo muito desta conquista. Mãe, muito obrigada pelos incentivos diários.

Aos meus amigos, não citarei nomes para não correr o risco de esquecer alguém. Vocês possuem um lugar especial no meu coração. A parceria de cada um sempre me amparou, com isso pude ir mais longe.

A Professora Valéria, por ter me acolhido e por ter me doado muito de seu tempo e conhecimento, sempre com muita competência, amor e carinho. A Professora Claudete, por ter caminhado tantos anos comigo, sendo atenciosa, amorosa e contribuindo imensamente para minha formação. São exemplos de profissionais que desejo ser. Muito obrigada pela confiança depositada em mim.

A todos os professores que tive a honra de ser aluna.

A CAPES e a Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribíram para a construção de quem sou hoje. Muito obrigada!

“Portanto, eu lhes digo: tudo o que pedirem em oração, creiam que já o receberam, e assim lhes sucederá.” Marcos 11:24

Resumo

Neste trabalho, estudamos a boa colocação e o comportamento assintótico da seguinte equação da onda viscoelástica com memória localizada e história passada, e termos de fonte e dissipação com crescimento supercrítico

$$\rho(x)u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s)\mathrm{div}[a(x)\nabla u(\cdot, t-s)]\, ds + h(u_t) = f(u),$$

em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Palavras-chave: equação de onda viscoelástica; memória com história passada; crescimento supercrítico; comportamento assintótico.

Abstract

In this work, we study the well-posedness and asymptotic behavior of the following viscoelastic wave equation with localized memory with past history and supercritical source and damping terms

$$\rho(x)u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s)\mathrm{div}[a(x)\nabla u(\cdot, t-s)]\, ds + h(u_t) = f(u),$$

on a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Keywords: viscoelastic wave equation; memory with past history; supercritical sources; asymptotic behaviour.

Sumário

Introdução

No presente trabalho estudamos a existência de soluções bem como o comportamento assintótico do funcional de energia associado à uma equação da onda viscoelástica com memória localizada e história passada, e termos de fonte e dissipação com crescimento supercrítico. Obtemos a existência global de soluções e taxas de decaimento uniforme da energia, introduzindo a noção de poço de potencial e definindo o funcional de energia modificado que denominamos *funcional de energia total expandida*. Ressaltamos que nesse caso não impomos nenhuma relação entre os coeficientes de crescimento dos termos de fonte e de dissipação friccional. Provamos também que as soluções fracas "explodem"(blow-up) em tempo finito.

Mais precisamente, consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \Delta u + \displaystyle\int_0^\infty g(s)\mathrm{div}[a(x)\nabla u(\cdot, t-s)]\,ds + h(u_t) = f(u) \ \text{ in } \ \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,s) = u^0(x,s), \quad (x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0], \end{cases} \tag{0.1}$$

onde Ω é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $\rho(x) > 0$ é a função densidade de massa, g representa o núcleo da memória, $a(x) \geqslant 0$ é uma função suave e $u^0 : \Omega \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ descreve a história passada de u.

Vários são os fenômenos físicos que são modelados por equações diferenciais parciais e cujos valores no estado presente são influenciados pelos valores passados de uma ou mais variáveis. Nessa direção podemos citar os fenômenos viscoelásticos (combinação de características elásticas e viscosas), polímeros sintéticos (usados na fabricação de canos, sacolas, materiais acrílicos, por exemplo), metais sob alta temperatura e dinâmica populacional. Essas equações são denominadas equações com memória. No final do século XIX e no início do século XX, Boltzmann ([8], [9]) e Volterra ([36], [37]), respectivamente, relacionaram a noção de memória com a análise de materiais elásticos. Nos anos 60, Coleman e Mizel ([17] [18]), introduziram a noção de "fading memory": termo este que significa que um material não esquece completamente o que aconteceu no seu passado, no entanto, é cada vez menos influenciado à deformações passadas do que àquelas mais recentes.

No que segue, faremos uma apresentação resumida de trabalhos existentes na literatura que se relacionam com equações com memória e que influenciaram o nosso estudo. No que concerne à existência de soluções e comportamento assintótico de problemas viscoelásticos, devemos começar citando artigo de Dafermos [20], um dos primeiros trabalhos a estudar a equação da onda sujeita à história passada. Em Renardy, Hrusa e Nohel [31], os autores estudam equações que modelam os movimentos de materiais com memória no que concerne à existência de solução em várias classes bem como as propriedades de tais soluções.

Quando o termo de dissipação viscoelástica é efetivo em todo o domínio, Alabau-Boussouira, Cannarsa e Sforza [2] estabeleceram um método unificado para a obtenção de estimativas para o decaimento de equações de evolução integro-diferencial de segunda ordem, enquanto em [1], Alabau-Boussouira e Canarsa obtiveram taxas de decaimento assumindo hipóteses mais gerais e, quando aplicadas em exemplos concretos, são taxas ótimas. Também, Lasiecka, Messaoudi e Mustafa [26] estudaram a equação da onda viscoelástica abstrata em que o núcleo da memória verifica algumas hipóteses de crescimento.

Em relação às equações viscoelásticas com memória e história passada, Liu e Liu [28] estabeleceram taxas de decaimento de energia exponencial para o modelo Kelvin-Voigt considerando funções coeficientes suaves para o modelo de Boltzmann com descontinuidade das propriedades dos materiais nas interfaces. Mais recentemente, Conti et al. [19] provaram que a dissipação fraca dada pelo termo memória foi suficiente para garantir a existência e regularidade ótima do atrator global, quando termos de fonte com crescimento crítico são considerados.

Fabrizio, Giorgi e Pata [21], consideraram uma versão abstrata da equação de evolução

$$\partial_{tt} - \Delta \left[G(0)u(x,t) + \int_0^\infty G' u(x,t-s)\, ds \right] = 0,$$

onde $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função convexa crescente. Neste trabalho, os autores discutiram uma nova abordagem para o estudo das equações com memória, baseada na nova noção de estado. Esta é a configuração inicial do sistema no tempo $t = 0$, o qual pode ser determinado pelo conhecimento do sistema para tempos positivos.

Além disso, quando ambos os tipos de dissipação frictional e viscoelástica estão presentes, referendamos o trabalho de Cavalcanti e Oquendo [16], os trabalhos de Cavalcanti et al. ([14], [15]) e os trabalhos de Guo at al. ([23], [24]) onde em [24] eles investigaram a existência global de soluções para a equação da onda viscoelástica com não linearidades supercríticas e em [23] obtiveram o decaimento da energia para um sistema de equações de ondas com dissipação e termos de fonte com crescimento supercrítico.

No que concerne a equação da onda sujeita à efeitos viscoelásticos localizados, existe uma literatura reduzida a respeito. Neste contexto, podemos citar o trabalho de Munõz-Rivera e Salvatierra [29] e, mais recentemente, o trabalho de Cavalcanti et al. [12], em que no primeiro artigo os autores consideraram um modelo viscoelástico com memória curta, enquanto no segundo, os autores consideraram a equação da onda com memória localizada e história passada com termo de fonte semilinear e crescimento subcrítico.

No presente trabalho, combinamos o termo de memória localizada com o termo de fonte com crescimento supercrítico e obtivemos a existência global de soluções bem como o comportamento assintótico do funcional de energia. De acordo com o nosso conhecimento no assunto abordado, este é o primeiro trabalho que combina efeitos viscoelásticos localizados com não linearidades supercríticas. Nossos resultados generalizam os resultados de Guo et al. [23] e [25], e geraram um artigo que está submetido para publicação. Gostaríamos de observar que em três dimensões, uma função f é denominada possuir crescimento supercrítico, com relação as imersões de Sobolev, se satisfazer o crescimento da hipótese (H-5), presente no Capítulo 2, e $p > 3$; é denominada subcrítica se $1 \leq p < 3$ e crítica se $p = 3$.

Para obtermos os resultados estabelecidos neste trabalho, lidamos com as dificuldades técnicas provenientes do termo de memória localizada posto que as estimativas são obtidas em um subconjunto do domínio Ω. Os resultados de boa colocação foram obtidos adaptando algumas ideias dos artigos de Bociu e Lasiecka ([6], [7]) e Guo et al. [23]. Para a obtenção das taxas de decaimento do funcional de energia, inicialmente definimos (*o que denominamos*) o funcional de energia total expandida relativo ao problema (0.1) e, na sequência, usamos os resultados de Lasiecka e Tataru [25]. Finalmente, os resultados concernentes ao blow-up das soluções em tempo finito, foram obtidos usando uma adaptação do método de Georgiev e Tododorova [22].

No Capítulo 2 introduzimos as notações, os espaços funcionais e as hipóteses que serão utilizados ao longo de todo o trabalho. Estabelecemos também os resultados relativos à existência e unicidade de solução fraca para o problema (0.1), assim como a dependência contínua dos dados iniciais. No Capítulo 3, estudamos a existência de solução global para o problema (0.1), obtendo dois resultados distintos. No primeiro resultado, fez-se necessário assumir a hipótese que o termo de dissipação friccional dominasse a fonte, ou seja, $m \geq p$. Para obtenção do segundo resultado, definimos o funcional de energia total expandida e a noção adequada de poço de potencial.

Continuamos estudando com o problema (0.1) no Capítulo 4, onde obtemos o decaimento da energia total expandida no poço de potencial. Dedicamos o Capítulo 5 à obtenção dos de blow-up das soluções em tempo finito. O Capítulo 1, dedicado às Preliminares, apresenta os resultados clássicos da literatura que serão utilizados como apoio.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Operadores maximais monótonos e m-acretivos

Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador multívoco A de X em Y pode ser identificado com seu gráfico em $X \times Y$, que é dado pelo conjunto $\{(x,y) \in X \times Y;\ y \in Ax\}$. Se, para cada $x \in D(A)$, tivermos que Ax possui um único elemento, dizemos que A é um operador unívoco.

Definição 1.1.1. *Um operador multivalor $A : X \to X'$ (ou, de forma equivalente, o conjunto $A \subset X \times X'$) é monótono se*

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0,\ \forall (x_i, y_i) \in A,\ i = 1, 2.$$

Dizemos que A é fortemente monótono se existir $C > 0$ tal que

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq C\|x_1 - x_2\|_X^2,\ \forall (x_i, y_i) \in A,\ i = 1, 2.$$

Um conjunto $A \subset X \times X'$ monótono é chamado de maximal monótono se ele não está propriamente contido em um outro subconjunto maximal monótono de $X \times X'$.

Se $A : X \to X'$ é um operador unívoco, então A é monótono se, e somente se,

$$(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2) \geq 0,\ \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

Proposição 1.1.1. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador unívoco. As seguintes propriedades são equivalentes:*

i) A é maximal monótono;

ii) A é monótono e $Im(I + A) = H$;

iii) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração definida sobre todo H.

Demonstração: Ver [10], página 23.

Teorema 1.1.1. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e A um subconjunto maximal monótono de $X \times X'$. Se $[a_n, b_n] \in A$ tal que $a_n \to a$ fraco, $b_n \to b$ fraco e ou*

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup(a_n - a_m, b_n - b_m) \leq 0$$

ou

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup(a_n - a, b_n - b) \leq 0$$

então, $[a, b] \in A$ e $(a_n, b_n) \to (a, b)$, com $n \to \infty$.

Demonstração: Ver [4], página 38.

Teorema 1.1.2. *Sejam X e Y espaços de Banach e considere $A_1 : X \to X'$, $A_2 : Y \to Y$' operadores maximais monótonos. Então, o operador $A : D(A_1) \times D(A_2) \subset X \times Y \to X' \times Y'$ é maximal monótono.*

Demonstração: Ver [38], página 56.

Teorema 1.1.3. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e A e B subconjuntos maximais monótonos de $X \times X'$ tais que*

$$(intD(A)) \cap D(B) \neq \emptyset.$$

Então, $A + B$ é maximal monótono em $X \times X'$.

Demonstração: Ver [4], página 43.

Teorema 1.1.4. *Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador maximal monótono e $B : H \to H$ é um operador monótono e Lipschitz então $A + B$ é um operador maximal monótono.*

Demonstração: Ver [10], página 34.

Definição 1.1.2. *Um operador multívoco $A : X \to X'$ é chamado coercivo se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle x_n, x'_n\rangle_{X,X'}}{\|x_n\|_X} = \infty,$$

para todo $(x_n, x'_n) \in A$ com $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \infty$.

Teorema 1.1.5. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se $A : D(A) \subset X \to X'$ é um operador coercivo e maximal monótono então A é sobrejetivo.*

Demonstração: Ver [4], página 36

Definição 1.1.3. *Um operador unívoco $A : D(A) = X \to X'$ é hemicontínuo se*

$$A(x + \lambda y) \rightharpoonup Ax, \ \forall x, y \in X, \quad \textit{quando} \quad \lambda \to 0,$$

onde $\rightharpoonup$ denota a convergência fraca.

Teorema 1.1.6. *Seja $A : X \to X'$ um operador hemicontínuo e monótono tal que $D(A) = X$. Então, A é maximal monótono.*

Demonstração: Ver [4], página 36.

Definição 1.1.4. *Sejam X um espaço de Banach real e $\varphi : X \to (-\infty, +\infty] := \overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que φ é própria se ela não é identicamente $+\infty$.*
Chamamos o conjunto $D_e(\varphi) = \{x \in X; \varphi(x) < \infty\}$ de domínio efetivo de φ.

Definição 1.1.5. *Seja X um espaço de Banach real. Dizemos que uma função $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é convexa se*

$$\varphi\Big((1-\lambda)x + \lambda y\Big) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y), \ \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0,1].$$

Definição 1.1.6. *Seja X um espaço de Banach real. Dizemos que uma função convexa $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é semicontínua inferiormente se*

$$\liminf_{u \to x} \varphi(u) \geq \varphi(x), \ \forall x \in X,$$

ou, equivalentemente, se todo conjunto de nível

$$N(\lambda) = \{x \in X; \ \varphi(x) \leq \lambda\}$$

é fechado.

Definição 1.1.7. *Sejam X um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$. A aplicação $f' : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f'(x, y) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}, \ x, y \in X,$$

se existe, é chamada de derivada direcional de f em x na direção de y.
Além disso, a função f é dita ser G-diferenciável em $x \in X$ se existe $\nabla f(x) \in X'$ tal que

$$f'(x, y) = (\nabla f(x), y), \ \forall y \in X.$$

Teorema 1.1.7. *Sejam $K \subset X$ um conjunto convexo. Se $f : K \to (-\infty, +\infty]$ é uma função G-diferenciável em cada ponto $u \in K$, Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) f é convexa;

b) $f'(u)(v-u) \leq f(v) - f(u),\ \forall u, v \in K$;

c) $\langle f'(u) - f'(v), u - v\rangle_{X',X} \geq 0,\ \forall u, v \in K$.

Demonstração: Ver [33], página 80.

Definição 1.1.8. *Seja $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente. A aplicação $\partial\varphi : X \to X'$ definida por*

$$\partial\varphi(x) = \{x' \in X'; \varphi(x) \leq \varphi(y) + (x', x - y),\ \forall y \in X\}$$

é chamada de subdiferencial de φ.

Lema 1.1.1. *Se φ é uma função convexa e G-diferenciável em x, então $\partial\varphi(x) = \nabla\varphi(x)$.*

Demonstração: Ver [4], página 8.

Teorema 1.1.8. *Seja X um espaço de Banach real. Se ϕ é uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente em X então, $\partial\phi$ é um operador maximal monótono de X em X'.*

Demonstração: Ver [4], página 47.

Definição 1.1.9. *Seja X um espaço de Hilbert. Um subconjunto A de $X \times X$ (ou equivalentemente, um operador $A : X \to X$) é acretivo se*

$$(Ax, x)_X \geq 0,\ \forall x \in D(A).$$

Se, em adição $R(I + A) = X$, dizemos que A é m-acretivo.

Teorema 1.1.9. *Seja A um operador acretivo tal que $Im(A + \lambda I) = X$, para algum $\lambda > 0$. Então $Im(A + \omega I) = X$ para todo $\omega > 0$.*

Demonstração: Ver [33], página 159.

Teorema 1.1.10. *Seja X um espaço de Hilbert. Se A é um operador m- acretivo e B é um operador acretivo e Lipschitziano, temos que $A + B$ é m-acretivo.*

Demonstração: Ver [33], página 165.

Considere $A : D(A) \subset X \to X$ um operador no espaço de Hilbert X, $f \in L^1(0, T, X)$ e o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni \omega u(t) + f(t), \quad u(0) = u_0. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1.11. *(Teorema de Kato) Seja A um operador m-acretivo no espaço de Hilbert X e $\omega \geq 0$. Para cada $u_0 \in D(A)$ e $f : [0,T] \to X$ absolutamente contínua, existe uma única $u : [0,T] \to X$ tal que $u(0) = u_0$ e (1.1) vale para quase todo $0 < t < T$. Também, u é Lipschitz contínua e diferenciável à direita com $u(t) \in D(A)$ para todo $0 \leq t \leq T$.*

Demonstração: Ver [33], página 180.

Definição 1.1.10. *No contexto do Teorema 1.1.11, a função u será denominada solução forte de (1.1) em $[0,T]$.*

Observação 1.1.1. *No contexto do Teorema 1.1.11, temos que $u \in C([0,T];X)$, $u : [0,T] \to X$ é Lipschitz e X é reflexivo, então $U \in W^{1,\infty}(0,T;X)$.*

Definição 1.1.11. *Uma solução generalizada de (1.1) em $[0,T]$ é uma função $u \in C([0,T];X)$ para o qual existe uma sequência de soluções fortes $\{u_n\}$ de*

$$\frac{du_n}{dt} + A(u_n) \ni \omega u_n + f_n, \quad n \geq 1,$$

em $[0,T]$ com $f_n \to f$ em $L^1(0,T;X)$ e $u_n \to u$ em $C([0,T];X)$.

1.2 Resultados auxiliares

Teorema 1.2.1. *(Teorema da Média) Seja $f : (a,b) \to X$ uma função contínua, onde X é um espaço de Banach. Para todo $t \in [a,b]$ tem-se*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds = f(t).$$

Demonstração: Ver [13], página 20.

Lema 1.2.1. *(Lema de Fatou) Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis e não negativas que converge quase sempre para uma função u. Se $\lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega u_n$ é finito, então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf u_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega u_n.$$

Demonstração: Ver [11], página 90.

Teorema 1.2.2. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}$, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_n| \leq u_0$ quase sempre, para todo $n \in \mathbb{N}$ então, u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n.$$

Demonstração: Ver [11], página 90.

Teorema 1.2.3. *(Desigualdade de Jensen) Seja B um hipercubo do $\mathbb{R}^n$, então para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$, teremos*

$$F\left(\frac{1}{medB}\int_B g(x)\,dx\right) \geq \frac{1}{medB}\int_B F(g(x))\ dx.$$

Demonstração: Ver [32].

Lema 1.2.2. *Seja p uma função real crescente, positiva com $p(0) = 0$. Defina*

$$q = Id - (Id + p)^{-1}.$$

Considere uma sequência de números reais positivos $\{s_m\}$ tal que

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Então $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0.$$

Além disso, se $p(s) > 0$, quando $s > 0$, então $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$.

Demonstração: Ver [25], página 531.

Proposição 1.2.1. *Seja uma sequência de funções $\{w_j\}$ limitadas em $L^p(\Omega)$ e convergente quase sempre para w. Então esta sequência converge forte para w em $L^q(\Omega)$ onde $1 \leq q < p$ e, converge fraco em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [35], página 646.

Teorema 1.2.4. *(Lema de Lions) Seja (u_n) uma sequência de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se $u_n \to u$ quase sempre em Q e $\|u_n\|_{L^q(Q)} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $u_n \to u$ fraco em $L^q(Q)$.*

Demonstração: Ver [27], página 12.

Teorema 1.2.5. *(Teorema de Aubin-Lions-Simon) Sejam X, Y e Z espaços de Banach com $X \subset Y \subset Z$. Suponha que X é imerso compactamente em Y e que Y é imerso continuamente em Z. Para $1 \leq p, q \leq \infty$ seja*

$$W = \{u \in L^p([0,T]; X); u' \in L^q([0,T]; Z)\}.$$

Então,

(i) Se $p < \infty$, W *está imersamente compacto em* $L^p([0,T];Y)$.

(ii) Se $p = \infty$ *e* $q > 1$, W *está imersamente compacto em* $C([0,T],Y)$.

Demonstração: Ver [34], página 21.

Teorema 1.2.6. *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Se* $w \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ *e* $u \in H_0^1(\Omega)$ *são tais que*

$$w(x)u(x) \geq -|h(x)|, \quad q.s. x \in \Omega,$$

para algum $h \in L^1(\Omega)$, *então* $wu \in L^1(\Omega)$ *e*

$$w(u) = \int_\Omega w(x)u(x)dx.$$

Demonstração: Ver [4], página 71.

Capítulo 2

Existência de solução local para a equação da onda viscoelástica

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado, com fronteira suave $\partial\Omega$. Neste capítulo, estudaremos a existência e unicidade de solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \Delta u + \displaystyle\int_0^\infty g(s)\text{div}[a(x)\nabla u(t-s)]ds + h(u_t) = f(u), & \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, & \text{em } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u(x,s) = u^0(x,s), & (x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\rho(x)$ é a função densidade de massa, g representa o núcleo da memória e $u^0 : \Omega \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ descreve a história passada de u.

No decorrer de todo o trabalho, consideremos as hipóteses (H-1)-(H-7) descritas abaixo.

(H-1) $a \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma função não-negativa e existe um conjunto conexo $A \subset\subset \Omega$ tal que $a(x) = 0$ se, e somente se, $x \in A$;

(H-2) $\rho \in C^\infty(\Omega)$ tal que existem $a_1, a_2 > 0$ de modo que

$$0 < a_1 \leq \rho(x) \leq a_2 < \infty, \quad \text{para todo } x \in \Omega;$$

(H-3) $g \in L^1(0,\infty) \cap C^1([0,\infty))$ é uma função positiva não-crescente verificando $g(\infty) = 0$ e

$$l := 1 - g_0 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} > 0, \tag{2.2}$$

onde $g_0 := \displaystyle\int_0^\infty g(s)\, ds$;

(H-4) $h \in C^0(\mathbb{R})$ é uma função monótona crescente com $h(0) = 0$. Além disso, existem constantes positivas b_1 e b_2 tais que para todo $|s| \geq 1$

$$b_1|s|^{m+1} \leq h(s)s \leq b_2|s|^{m+1}, \quad \text{em que } m \geq 1; \tag{2.3}$$

(H-5) f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ e

$$|f'(s)| \leq C(|s|^{p-1} + 1) \;\; \text{para } 1 \leq p < 6;$$

(H-6) $p\dfrac{m+1}{m} < 6.$

Observe que como $a \in C^\infty(\Omega)$, A é fechado. De fato, sejam $\{x_n\} \subset A$ e $x \in \Omega$ tais que $x_n \to x$. Como a é contínua, então $a(x_n) \to a(x)$, mas $a(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $a(x) = 0$, e assim, $x \in A$.

Então $A = \overline{A} \subset \Omega$, donde segue que $\partial\Omega \cap A = \emptyset$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon = d(A, \partial\Omega)$ e $B \subset\subset \Omega$ aberto verificando $A \subset\subset B$ e $d(B, \partial\Omega) = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Definamos $\omega := \overline{\Omega} \setminus B$. Este conjunto é compacto e $a(x) > 0$, para todo $x \in \omega$. Isso com a continuidade de a, resulta que existe $M > 0$ tal que

$$a(x) \geq M > 0, \quad \forall x \in \omega.$$

Temos que $\partial\omega = \partial\Omega \cup \partial B$.

No que segue, definiremos os espaços funcionais que serão utilizados ao longo de todo o trabalho, e explicitar suas topologias. Denote por $\|.\|$ e $(.,.)$, respectivamente, a norma e o produto interno usuais de $L^2(\Omega)$.

Considere o espaço

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega);\, u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

munido da topologia dada por

$$\|u\|_1^2 := \int_\Omega \kappa(x)|\nabla u|^2 dx,$$

onde $\kappa := 1 - g_0 a(x)$. Por (2.2), esta topologia é equivalente a topologia usual de $H_0^1(\Omega)$.

Defina o espaço $L^2_\rho(\Omega)$ como

$$L^2_\rho(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R};\, \int_\Omega \rho(x)|u(x)|^2 dx < \infty\right\},$$

munido do produto interno

$$(u, v)_\rho = \int_\Omega \rho(x)u(x)v(x)dx, \quad \forall, u, v \in L^2_\rho(\Omega).$$

Pela Hipótese (H-2), temos que $u \in L^2(\Omega)$ se, e somente se, $u \in L^2_\rho(\Omega)$ e

$$a_1\|\cdot\|^2 \leq \|\cdot\|^2_\rho \leq a_2\|\cdot\|^2.$$

Considere a satisfazendo a Hipótese (H-1) e defina

$$H^1_a = \left\{ u \in L^2(\Omega); \int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx < \infty; \gamma_0(u) = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}.$$

Observe que

(i) o traço de ordem zero de u está bem definido em $\partial\Omega$ nas condições do conjunto $H^1_a(\Omega)$. De fato, temos $u \in L^2(\omega)$ e

$$\int_\omega |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{M}\int_\omega a(x)|\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{M}\int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx < \infty,$$

donde $u \in H^1(\omega)$. Logo, considerando a aplicação traço de ordem zero

$$\gamma_0 : H^1(\omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega \cup \partial B),$$

temos que $\gamma_0(u)$ está definido quase sempre em $\partial\Omega$.

(ii) H^1_a é um espaço de Hilbert munido dos respectivos produto interno e norma

$$(u,v)_a = (u,v) + (\sqrt{a}\nabla u, \sqrt{a}\nabla v);\ \|u\|^2_a = \|u\|^2 + \|\sqrt{a}\nabla u\|^2.$$

De fato, provemos que tal espaço é completo. Seja $\{u_n\} \subset H^1_a$ uma sequência de Cauchy. Então

$$\|u_n - u_m\|^2 + \|\sqrt{a}\nabla u_n - \sqrt{a}\nabla u_m\|^2 \to 0 \text{ quando } m,n \to \infty.$$

Como $L^2(\Omega)$ é completo, existem $u \in L^2(\Omega)$ e $w \in [L^2(\Omega)]^3$ tais que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ e $\sqrt{a}\nabla u_n \to w$ em $[L^2(\Omega)]^3$. Em particular, do fato que $a \in C^\infty(\Omega)$ e da convergência $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ temos que $a\nabla u_n \to a\nabla u$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Pela imersão $[L^2(\Omega)]^3 \hookrightarrow [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ e pela unicidade do limite em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ resulta que $\sqrt{a}w = a\nabla u \in [L^2(\Omega)]^3$. Em particular,

$$a\nabla u = \sqrt{a}w \text{ em } [L^2(\Omega \setminus A)]^3,$$

o que implica em

$$\sqrt{a}(\sqrt{a}\nabla u - w) = 0,\ \text{quase sempre em } \Omega \setminus A,$$

isto é,

$$\sqrt{a}\nabla u - w = 0,\ \text{quase sempre em } \Omega \setminus A,$$

ou ainda,

$$\sqrt{a}\nabla u = w \text{ quase sempre em } \Omega \setminus A.$$

Além disso,

$$\int_\omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{M}\int_\omega a(x)|\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \to 0,$$

donde concluímos que $u_n \to u$ em $H^1(\omega)$. Pela continuidade de γ_0, obtemos $\gamma_0(u) = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_0(u_n) = 0$, quase sempre em $\partial\Omega$. Portanto, $u \in H^1_a$ e $u_n \to u$ em H^1_a.

Logo, o espaço com peso

$$L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_a) = \left\{\mu : [0,\infty) \to H^1_a; \int_0^\infty g(s)\|\mu(s)\|_a^2 ds < \infty\right\},$$

munido do produto interno

$$\begin{aligned}(\mu,\zeta)_g &= \int_0^\infty g(s)(\mu(s),\zeta(s))_a ds \\ &= \int_0^\infty g(s)(\mu(s),\zeta(s))ds + \int_0^\infty g(s)(\sqrt{a}\nabla\mu(s),\sqrt{a}\nabla\zeta(s))ds,\end{aligned}$$

é um espaço de Hilbert.

Também, considere o espaço $H^1_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega))$, definido por

$$H^1_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega)) = \{u \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega)); u_t \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega))\}.$$

Analogamente, o espaço $L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega))$ é definido pelas funções $u : (-\infty, 0] \to H^1_0(\Omega)$ tal que $u(-t) \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega))$ e $H^1_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega))$ é dado por

$$H^1_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega)) = \{u \in L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega)); u_t \in L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega))\}.$$

Das considerações acima, a seguinte hipótese é feita acerca dos dados iniciais.

(H-7) $u^0(x,t) \in L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega))$ com $\partial_t u^0(x,t) \in L^2_g(\mathbb{R}^-, L^2_\rho(\Omega))$ tal que $u^0 : \mathbb{R}^- \to H^1_0(\Omega)$ e $\partial_t u^0 : \mathbb{R}^- \to L^2_\rho(\Omega)$ são fracamente contínuas em $t = 0$. Além disso, para todo $t \leq 0$, $u^0(x,t) = 0$ em $\partial\Omega$.

Começamos com a definição de solução fraca para o problema (2.1).

Definição 2.0.1. *Uma função $u(x,t)$ é dita solução fraca de (2.1) em $(-\infty, T]$ se $u \in L^2_g((-\infty,T); H^1_0(\Omega)) \cap C([0,T]; H^1_0(\Omega))$ tal que $u_t \in L^2_g((-\infty,T]; L^2(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$ com $u(x,t) = u^0(x,t)$, para $t \leq 0$, e é válida a seguinte identidade variaci-*

onal

$$(\rho u_t(t),\phi(t)) - (\rho u_t(0),\phi(0)) - \int_0^t \int_\Omega \rho(x) u_t(x,\tau)\phi_t(x,\tau)dxd\tau$$

$$+ \quad \int_0^t \int_\Omega \nabla u(x,\tau)\nabla\phi(x,\tau)dxd\tau + \int_0^t \int_\Omega h(u_t(x,\tau))\phi(x,\tau)dxd\tau$$

$$- \quad \int_0^t \int_0^\infty \int_\Omega a(x)\nabla u(x,\tau-s)\nabla\phi(x,\tau)dxg(s)dsd\tau = \int_0^t \int_\Omega f(u(x,\tau))\phi(x,\tau)dxd\tau, \tag{2.4}$$

para todo $t \in [0,T]$ *e* $\phi \in \mathcal{G}$, *em que*

$$\mathcal{G} = \{\phi; \phi \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^{m+1}(\Omega\times(0,T)) \ \ \textit{com} \ \ \phi_t \in C([0,T]; L^2(\Omega))\}.$$

Para demonstrar a existência e unicidade de solução fraca do problema (2.1), considere a mudança de variável introduzida por Dafermos em [20] dada por

$$\eta^t(x,s) := u(x,t) - u(x,t-s), \quad x\in\Omega, \ t\geq 0, \ s\in(0,\infty). \tag{2.5}$$

De modo formal, obtemos

$$\eta_t^t(x,s) = u_t(x,t) - u_t(x,t-s) \ \text{ e } \ \eta_s^t(x,s) = u_t(x,t-s)$$

de onde temos

$$\eta_t^t(x,s) = -\eta_s^t(x,s) + u_t(x,t) \ \text{ para } \ x\in\Omega, \ \ t>0, \ s\in(0,\infty).$$

Pela definição de η, temos que

$$\int_0^\infty g(s)\text{div}[a(x)\nabla u(t-s)]ds \ = \ g_0\text{div}[a(x)\nabla u(t)] - \int_0^\infty g(s)\text{div}[a(x)\nabla\eta^t(x,s)]ds.$$

Além disso,

$$\eta^t(x,0) := \lim_{s\to 0_+}\eta^t(\cdot,s) = 0 \qquad \text{para} \quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),$$

$$\eta^0(x,s) := u^0(x,0) - u^0(x,-s) \quad \text{para} \quad (x,s)\in\Omega\times(0,\infty)$$

e

$$\eta^t(x,s) = 0 \text{ para } (x,s,t)\in\Gamma\times(0,\infty)\times(0,\infty).$$

Consequentemente, podemos reescrever o problema (2.1) como um sistema autônomo dado por

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \text{div}[\kappa(x)\nabla u] - \displaystyle\int_0^\infty g(s)\text{div}[a(x)\nabla\eta^t(x,s)]ds + h(u_t) = f(u) \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\ \eta_t + \eta_s = u_t \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty) \times (0,\infty), \end{cases} \tag{2.6}$$

com condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Gamma \times (0,\infty) \\ \eta^t(x,s) = 0, \ (x,s,t) \in \Gamma \times (0,\infty) \times (0,\infty) \\ \eta^t(x,0) = 0, \ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) := u^0(x,0), \ x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega, \\ \eta^0(x,s) = \eta_0(x,s) := u^0(x,0) - u^0(x,-s), \ (x,s) \in \Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{2.7}$$

Considere o espaço de fase $\mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L_\rho^2(\Omega) \times L_g^2(\mathbb{R}^+, H_a^1).$$

onde, munido do produto interno

$$((u_1, v_1, \eta_1), (u_2, v_2, \eta_2))_{\mathcal{H}} = (u_1, u_2)_1 + (v_1, v_2)_\rho + (\eta_1, \eta_2)_g,$$

é um espaço de Hilbert.

Definindo o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como

$$\mathcal{A}(u,v,\eta) = \begin{pmatrix} -v \\ \dfrac{1}{\rho(x)}\left\{-\text{div}[\kappa(x)\nabla u] - \displaystyle\int_0^\infty g(s)\text{div}(a(x)\nabla\eta(s))ds + h(v)\right\} \\ \eta_s - v \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} (u,v,\eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_g^1(\mathbb{R}^+, H_a^1); \ \eta(0) = 0; \ h(v) \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega); \\ \dfrac{1}{\rho(x)}\left\{-\text{div}[\kappa(x)\nabla u] - \displaystyle\int_0^\infty g(s)\text{div}(a(x)\nabla\eta(s))ds + h(v)\right\} \in L_\rho^2(\Omega) \end{array} \right\},$$

e o operador $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por

$$\mathcal{F}(u,v,\eta) = \left(0, -\frac{1}{\rho(x)}f(u), 0\right),$$

o problema (2.6)-(2.7) é equivalente ao seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) + \mathcal{A}U(t) + \mathcal{F}U(t) = 0, \quad t > 0 \\ \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $U = (u, u_t, \eta)$ e $U_0 = (u_0, u_1, \eta_0)$.

O primeiro resultado deste capítulo, considera que $f : H_0^1(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ é localmente lipschitziana e, com esta hipótese, estabelece a existência de solução forte local para o problema (2.9). Para demonstrar este resultado, as Hipóteses (H-1)-(H-7) não são necessárias de forma integral. Por isso, em seu enunciado, as hipóteses necessárias são descritas.

Proposição 2.0.1. *Suponha que h é uma função contínua, monótona crescente tal que $h(0) = 0$ e $b_1 |s|^{m+1} \leq h(s)s$, onde $m \geq 1$ e $b_1 > 0$. Se $f : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é localmente lipschitziana e $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então o sistema (2.9) possui uma única solução forte local $U \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H})$, para algum $T > 0$.*

Demonstração. O operador $\mathcal{A} + \alpha I$ é acretivo para alguma constante positiva α. De fato, dado $U = (u, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$, temos que

$$\begin{aligned}
((\mathcal{A} + \alpha I)U, U)_{\mathcal{H}} &= (-v + \alpha u, u)_1 + (\eta_s - v + \alpha\eta, \eta)_g \\
&+ \left(\tfrac{1}{\rho(x)}\left\{-div[\kappa(x)\nabla u] - \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta(s)]ds + h(v)\right\} + \alpha v, v\right)_\rho \\
&= -\int_\Omega \kappa(x)\nabla v \nabla u dx + \alpha\|u\|_1^2 + \int_\Omega \kappa(x)\nabla u\nabla v dx \\
&\quad + \int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\eta(s)\nabla v dx ds + \int h(v) v dx + \alpha\|v\|_\rho^2 \\
&\quad + \int_0^\infty g(s)(\eta_s, \eta)_{H_a^1} ds - \int_0^\infty g(s)\int_\Omega v\ \eta\ dx ds + \alpha\int_0^\infty g(s)\left\|\eta(s)\right\|^2 ds \\
&\quad - \int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla v\nabla\eta dx ds + \alpha\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta(s)\right\|^2 ds \\
&\geq \alpha\|v\|_\rho^2 + \int_0^\infty g(s)(\eta_s, \eta)_{H_a^1} ds - \int_0^\infty g(s)\int_\Omega v\ \eta dx ds \\
&\quad + \alpha\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^2\right\|^2 ds,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

uma vez que $\alpha > 0$ implica em

$$\alpha\|u\|_1^2,\ \alpha\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta(s)\right\|^2 ds \geq 0$$

e, pelo Teorema 1.2.6, temos

$$\int_\Omega h(v)v dx \geq 0.$$

Pela integração por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(s)(\eta_s,\eta)_{H_a^1} ds &= \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\eta\|_{H_a^1}^2 ds \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta\|_{H_a^1}^2 ds \\ &\geq 0,\end{aligned} \tag{2.11}$$

pois $g'(s) \leq 0$, para todo $s \in (0,\infty)$, $g(\infty) = 0$ e $\eta(0) = 0$.

Das desigualdades de Holder e Young, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(s)\int_\Omega v\ \eta dx ds &\leq \int_0^\infty \left(\int_\Omega g(s)|v|^2 dx\right)^{\dfrac{1}{2}}\left(\int_\Omega g(s)|\eta|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \int_\Omega g(s)|v|^2 dx ds + \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_\Omega g(s)|\eta|^2 dx ds \\ &= \frac{g_0}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\|\eta\|^2 ds \\ &\leq \frac{g_0}{2a_1}\|v\|_\rho^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\|\eta\|^2 ds,\end{aligned}$$

donde,

$$-\int_0^\infty g(s)\int_\Omega v\ \eta dx ds \geq -\frac{g_0}{2a_1}\|v\|_\rho^2 - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\|\eta\|^2 ds. \tag{2.12}$$

Portanto, substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10), concluímos que

$$\begin{aligned}((\mathcal{A}+\alpha I)U,U)_{\mathcal{H}} &\geq \left(\alpha - \frac{g_0}{2a_1}\right)\|v\|_\rho^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\int_0^\infty g(s)\|\eta\|^2 ds \\ &\geq 0,\end{aligned} \tag{2.13}$$

desde que $\alpha \geq \max\left\{\dfrac{g_0}{2a_1}, \dfrac{1}{2}\right\}$, isto é, $A+\alpha I$ é acretivo para todo $\alpha \geq \max\left\{\dfrac{g_0}{2a_1}, \dfrac{1}{2}\right\}$.

Pelo Teorema 1.1.9, o operador $(A+\alpha I)+I$ é sobrejetor se $Im(A+\lambda I) = \mathcal{H}$, para algum $\lambda > 0$. Dado $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathcal{H}$,suponha que exista $(u, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$ satisfazendo

$$\begin{cases} -v + \lambda u = \gamma_1 \\ \\ \frac{1}{\rho(x)} \left\{ -div[\kappa(x)\nabla u] - \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta(s)]ds + h(v) \right\} + \lambda v = \gamma_2 \\ \\ -v + \eta_s + \lambda\eta = \gamma_3 \end{cases} \tag{2.14}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} -\frac{1}{\lambda} div[\kappa(x)\nabla v] - \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta(s)]ds + h(v) + \rho(x)\lambda v = \gamma_2\rho(x) + \dfrac{1}{\lambda} div[\kappa(x)\nabla\gamma_1] \\ \\ -v + \eta_s + \lambda\eta = \gamma_3. \end{cases} \tag{2.15}$$

Denote por X o espaço $X = H_0^1(\Omega) \times L_g^2(\mathbb{R}^+, H_a^1)$ munido do produto interno

$$(U_1, U_2)_X = \int_\Omega \kappa(x)\nabla v_1 \nabla v_2 dx + (\eta_1, \eta_2)_g,$$

onde $U_1 = (u_1, \eta_1)$ e $U_2 = (u_2, \eta_2)$. Identificando $L_g^2(\mathbb{R}^+, H_a^1)$ com seu dual, temos que $X' = H^{-1}(\Omega) \times L_g^2(\mathbb{R}^+, H_a^1)$.

Defina o operador $T : D(T) \subset X \to X'$ por

$$T(u, \eta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} div[\kappa(x)\nabla v] - \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta(s)]ds + h(v) + \rho\lambda v \\ \\ -v + \eta_s + \lambda\eta \end{pmatrix}^{tr}$$

com domínio

$$D(T) = \left\{ (v, \eta) \in X; h(v) \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega); \eta \in H_g^1(\mathbb{R}^+, H_a^1), \eta(0) = 0 \right\}.$$

Para verificar que o operador T é sobrejetivo, considere os operadores T_1, T_2 e T_3 dados, respectivamente, por

$T_1 : X \to X'$, definido por

$$T_1(u,\eta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} div[\kappa(x)\nabla v] - \int_0^\infty g(s) div[a(x)\nabla\eta(s)]ds + \lambda\rho(x)v \\ \\ -v + \lambda\eta \end{pmatrix}^{tr};$$

$T_2 : D(T_2) \subset H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, definido por

$$T_2(v) = h(v),$$

com domínio $D(T_2) = \{v \in H_0^1(\Omega); h(v) \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)\}$;
$T_3 : D(T_3) \subset L_g^2(\mathbb{R}^+, H_a^1) \to L_g^2(\mathbb{R}^+, H_a^1)$, definido por

$$T_3(\eta) = \eta_s,$$

com domínio $D(T_3) = \{\eta \in H_g^1(\mathbb{R}^+, H_a^1), \eta(0) = 0\}$.

Similarmente ao que foi feito em (2.13), temos que

$$\begin{aligned}
&\langle T_1(v_1,\eta_1) - T_1(v_2,\eta_2), (v_1,\eta_1) - (v_2,\eta_2)\rangle_{X',X} \\
= \;& \frac{1}{\lambda}\|v_1 - v_2\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla(\eta_1-\eta_2)\nabla(v_1-v_2)dxds + \lambda\|v_1-v_2\|_{L^2_\rho} \\
& -\int_0^\infty g(s)\int_\Omega(\eta_1-\eta_2)(v_1-v_2)dxds - \int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla(\eta_1-\eta_2)\nabla(v_1-v_2)dxds \\
& +\lambda\int_0^\infty g(s)\|\eta_1-\eta_2\|^2 ds + \lambda\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla(\eta_1-\eta_2)\right\|^2 ds \\
\geq \;& \lambda\|v_1-v_2\|_{L^2_\rho} - \int_0^\infty g(s)\int_\Omega(\eta_1-\eta_2)(v_1-v_2)dxds + \lambda\int_0^\infty g(s)\|\eta_1-\eta_2\|^2 ds \\
\geq \;& \left(\lambda - \frac{g_0}{2a_1}\right)\|v_1-v_2\|_{L^2_\rho} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\int_0^\infty g(s)\|\eta_1-\eta_2\|^2 ds \\
\geq \;& 0,
\end{aligned}$$

desde que $\lambda \geq \max\left\{\frac{g_0}{2a_1}, \frac{1}{2}\right\}$. Consequentemente, o operador T_1 é monótono para todo $\lambda \geq \max\left\{\frac{g_0}{2a_1}, \frac{1}{2}\right\}$.

E ainda, para quaisquer $(a,b) \in X$, é válido que

$$\langle T_1((v_1,\eta_1) + t(v_2,\eta_2)), (a,b)\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle T_1(v_1,\eta_1), (a,b)\rangle_{X',X},$$

quando $t \to 0$. Logo, T_1 é hemicontínuo e, pelo Teorema 1.1.6, o operador T_1 é maximal monótono.

O operador T_2 é o subdiferencial de uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente. De fato, defina $J : H_0^1(\Omega) \to [0, \infty)$ por

$$J(v) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega j(v)dx, & se \quad v \in D(T_2) \\ \\ \infty, & se \quad v \in H_0^1(\Omega) \backslash D(T_2) \end{cases},$$

onde $j(v) = \displaystyle\int_0^v h(\tau)d\tau$. Note que, se $v \in D(T_2)$, então

$$J(v) \leq \left| \int_\Omega j(v)dx \right| \leq \int_\Omega \int_0^{v(x)} |h(s)|\, dsdx.$$

Podemos ter: $0 \leq v(x) \leq 1$, $-1 \leq v(x) \leq 0$, $v(x) > 1$ e $v(x) < -1$.
Se $0 \leq v(x) \leq 1$, temos que

$$\int_0^{v(x)} |h(s)|\, ds = \int_0^{v(x)} h(s)ds \leq \int_0^1 |h(1)|\, ds = h(1),$$

uma vez que, $h(0) = 0$ e h é monótona crescente, donde

$$J(v) \leq \int_\Omega \int_0^{v(x)} |h(s)|\, dsdx \leq h(1)\, |\Omega| < \infty.$$

Se $v(x) > 1$, note que

$$\int_0^{v(x)} |h(s)|\, ds = \int_0^{v(x)} h(s)ds \leq \int_0^{v(x)} |h(v(x))|\, ds = h(v(x))v(x),$$

donde, pelo Teorema 1.2.6, obtemos

$$J(v) \leq \int_\Omega \int_0^{v(x)} |h(s)|\, dsdx \leq \int_\Omega h(v(x))v(x)dx < \infty.$$

O caso $-1 \leq v(x) \leq 0$, segue de maneira análoga ao caso $0 \leq v(x) \leq 1$. E, o caso $v(x) < -1$ é análago ao caso $v(x) > 1$. Como em todos os casos $J(v) < \infty$ para todo $v \in D(T_2)$, temos que a função J está bem definida.

Além disso, $D_e(J) = D(T_2) \neq \emptyset$, isto é, J é uma função própria. Também, para todo $v, w \in D(T_2)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle J'(v), w\rangle &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{J(v+\lambda w)-J(v)}{\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left(\int_\Omega\int_0^{v+\lambda w} h(s)dsdx-\int_\Omega\int_0^{v} h(s)dsdx\right)\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\left(\int_\Omega\frac{1}{\lambda}\int_{v(x)}^{v(x)+\lambda w(x)} h(s)dsdx\right).
\end{aligned}
$$

Denotando $\delta=\lambda w(x)$, concluimos pelo Teorema da Média (Teorema 1.2.1) que

$$
\frac{1}{\lambda}\int_{v(x)}^{v(x)+\lambda w(x)} h(s)ds=\frac{1}{\delta}\left[\int_{v(x)}^{v(x)+\delta} h(s)ds\right]w(x)\longrightarrow h(v(x))w(x),
$$

quando $\delta\to 0$.

E ainda, se $v(x)\geq 0$ e $v(x)+\delta\geq v(x)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\delta}\int_{v(x)}^{v(x)+\delta} h(s)\,dsw(x)\right| &\leq \frac{|w(x)|}{|\delta|}\int_{v(x)}^{v(x)+\delta}|h(s)|\,ds\leq\frac{|w(x)|}{|\delta|}\int_0^{v(x)+\delta}h(v(x)+\delta)\,ds\\
&\leq \frac{|w(x)|}{|\delta|}h(v(x)+\delta)(v(x)+\delta)\\
&= \frac{1}{|\lambda|}h(v(x)+\lambda w(x))(v(x)+\lambda w(x)):=F(x)\in L^1(\Omega),
\end{aligned}
$$

pela monotocidade de h. E, se $v(x)\geq 0$ e $v(x)+\delta<v(x)$, então

$$
\left|\frac{1}{\delta}\int_{v(x)}^{v(x)+\delta} h(s)\,dsw(x)\right|=\left|-\frac{1}{\delta}\int_{v(x)+\delta}^{v(x)} h(s)\,dsw(x)\right|\leq\frac{|w(x)|}{|\delta|}\int_{v(x)+\delta}^{v(x)}|h(s)|\,ds.
$$

Para $v(x)+\delta\geq 0$, vem que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\delta}\int_{v(x)}^{v(x)+\delta} h(s)\,dsw(x)\right| &\leq \frac{|w(x)|}{|\delta|}\int_{v(x)+\delta}^{v(x)}|h(s)|\,ds\leq\frac{1}{|\lambda|}\int_0^{v(x)}|h(s)|\,ds\\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\int_0^{v(x)}h(v(x))\,ds=\frac{1}{|\lambda|}h(v(x))v(x):=F(x)\in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, para $v(x)+\delta<0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\delta}\int_{v(x)}^{v(x)+\delta} h(s)\,dsw(x)\right| &\leq \frac{|w(x)|}{|\delta|}\int_{v(x)+\delta}^{v(x)}|h(s)|\,ds\\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\int_{v(x)+\delta}^{0}|h(s)|\,ds+\int_0^{v(x)}|h(s)|\,ds\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\Big(-\int_{v(x)+\delta}^{0} h(s)\,ds + \int_{0}^{v(x)} h(s)\,ds\Big)\\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\Big(-\int_{v(x)+\delta}^{0} h(v(x)+\delta)\,ds + \int_{0}^{v(x)} h(v(x))\,ds\Big)\\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\Big(h(v(x)+\delta)(v(x)+\delta) + h(v(x))v(x)\Big) := F(x) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

De modo análogo, concluímos os casos em que $v(x) < 0$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(v+\lambda w) - J(v)}{\lambda} = \int_\Omega h(v(x))w(x)dx.$$

Pelo Teorema 1.2.6, temos que

$$\langle T_2(v), w\rangle = \int_\Omega h(v)w(x)dx = \langle J'(v), w\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)},$$

para quaisquer $v, w \in D(T_2)$. Logo, J é G-diferenciável e $J'(v) = T_2(v)$ para todo $v \in D(T_2)$. Novamente pelo Teorema 1.2.6, segue que

$$\begin{aligned}
\langle J'(v) - J'(w), v - w\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= \langle T_2(v) - T_2(w), v - w\rangle\\
&= \int_\Omega (h(v(x)) - h(w(x)))(v(x) - w(x))dx\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

ou seja, J é convexo. Portanto, J é subdiferenciável para todo $v \in D(T_2)$ e $\partial J = T_2$.

Seja

$$N(\lambda, J) = \{u \in H_0^1(\Omega); J(u) \leq \lambda\},$$

um conjunto de nível qualquer de J. Dado $u \in \overline{N(\lambda, J)}$, existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset N(\lambda, J)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \ \ em\ H_0^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Temos que, $J(u_n) \leq \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De (2.16), existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tal que $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)\ \ q.s.\ \Omega$, o que implica em $j(u_{n_k}(x)) \longrightarrow j(u(x))\ \ q.s.\ \Omega$, pela continuidade de j. Em particular,

$$j(u(x)) = \lim_{k\to\infty} \inf\ j(u_{n_k}(x)).$$

Assim, pelo Lema de Fatou (Lema 1.2.1), é válido que

$$J(u) = \int_\Omega j(u(x))dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} \inf\ j(u_{n_k}(x))dx \leq \liminf \int_\Omega j(u_{n_k}(x))dx \leq \lambda,$$

isto é, $J(u) \leq \lambda$ concluindo que $N(\lambda, J)$ é fechado. Como N foi considerado arbitrário, todos os conjuntos de nível de J são fechados, logo J é semicontínua inferiormente. Portanto, pelo Teorema 1.1.8, o operador T_2 é maximal monótono.

Note que,

$$\begin{aligned} (T_3(\eta_1) - T_3(\eta_2), \eta_1 - \eta_2)_g &= \int_0^\infty g(s)(\eta_{1,s} - \eta_{2,s}, \eta_1 - \eta_2)_{H_a^1} ds \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \frac{d}{ds} \|\eta_1 - \eta_2\|_{H_a^1}^2 ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\eta_1 - \eta_2\|_{H_a^1}^2 ds \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

pois, por hipótese, $g'(s) \leq 0$. Também, para cada $\sigma \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_a^1)$, temos que

$$\begin{aligned} (T_3 + I)w(s) = \sigma(s) &\Leftrightarrow \frac{d}{ds} w(s) + w(s) = \sigma(s) \\ &\Leftrightarrow e^s \frac{d}{ds} w(s) + e^s w(s) = e^s \sigma(s) \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{ds}(e^s w(s)) = e^s \sigma(s) \\ &\Leftrightarrow w(\tau) = \int_0^\tau \sigma(s) e^{-(\tau - s)} ds, \end{aligned}$$

pois $w(0) = 0$. Então, considerando $\eta(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau \sigma(s) e^{(s-\tau)} ds$, temos que $(T_3 + I)\eta = \sigma$. Além disso, pelo decrescimento de g, obtemos

$$\begin{aligned} \|\eta\|_g^2 &\leq \int_0^\infty g(\tau) \left(\int_0^\tau e^{-(\tau - s)} \|\sigma(s)\|_{H_a^1} ds \right)^2 d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^\tau g(s)^{\frac{1}{2}} e^{-(\tau - s)} \|\sigma(s)\|_{H_a^1} ds \right)^2 d\tau \\ &= \|\psi_1 * \psi_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde $\psi_1(s) = e^{-s}$ e $\psi_2 = g(s)^{\frac{1}{2}} \|\sigma(s)\|_{H_a^1}$. Mas, utilizando a desigualdade de Holder, vemos que

$$\begin{aligned}
\|\psi_1 * \psi_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t \psi_1(t-s)ds\right)\left(\int_0^t \psi_1(t-s)\psi_2^2(s)ds\right)dt \\
&= \int_0^\infty \psi_2^2(s)\int_s^\infty \psi_1(t-s)dtds \\
&= \|\psi_2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&< \infty,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

pois $\int_0^t \psi_1(t-s)ds \leq 1$ e $\int_s^\infty \psi_1(t-s)dt = 1$. E ainda,

$$\frac{d}{ds}\eta = \frac{d}{ds}\left(e^{-s}\int_0^s e^y\sigma(y)dy\right) = -w + \sigma. \tag{2.20}$$

Concluímos por (2.18), (2.19) e (2.20) que $\eta \in H_g^1(\mathbb{R}^+, H_a^1)$, ou seja, $\eta \in D(T_3)$ e $T_3 + I$ é sobrejetor. Portanto, o operador T_3 é maximal monótono.

Pelo Teorema 1.1.2, o operador $T_4 : D(T_2)\times D(T_3) \subset X \to X'$ definido por $T_4(v,\eta) = (T_2(v), T_3(\eta))$ é maximal monótono. Também, pelo Teorema 1.1.3, o operador T é maximal monótono pois é a soma dos operadores T_1 e T_4.

E ainda, como T_1, T_2 e T_3 são operadores monótonos, temos que

$$\begin{aligned}
\langle (v,\eta), T(v,\eta)\rangle_{X,X'} &= \langle (v,\eta), (T_1(v,\eta))\rangle + \langle (v,\eta), (T_2(v), T_3(\eta))\rangle \\
&= \langle (v,\eta), (T_1(v,\eta))\rangle + \langle v, T_2(v)\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} + (\eta, T_3(\eta))_g.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\langle (v,\eta), T(v,\eta)\rangle_{X,X'} &\geq \frac{1}{\lambda}\|v\|_1^2 + \left(\lambda - \frac{g_0}{2a_1}\right)\|v\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\|\eta\|_g^2 \\
&\geq \frac{1}{\lambda}\|v\|_1^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|_g^2 \\
&\geq \gamma\left(\|(v,\eta)\|_X\right)\left[\|v\|_1 + \|\eta\|_g\right] = \gamma\left(\|(v,\eta)\|_X\right)\|(v,\eta)\|_X,
\end{aligned}$$

onde $\gamma\left(\|(v,\eta)\|_X\right) = \min\{\frac{1}{\lambda}\|(v,\eta)\|_X, \frac{1}{2}\|(v,\eta)\|_X\}$. Logo, temos que $\gamma\left(\|(v,\eta)\|_X\right) \to \infty$ quando $\|(v,\eta)\|_X \to \infty$. Portanto, o operador T é coercivo.

Pelo que vimos até aqui, T é maximal monótono e coercivo. Logo, pelo Teorema

1.1.5, T é sobrejetivo. Disso, temos que existe $(v,\eta) \in D(T)$ satisfazendo (2.15) para qualquer $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) \in \mathcal{H}$. Definindo $u = \dfrac{v+\gamma_1}{\lambda} \in H_0^1(\Omega)$ concluímos que

$$\frac{1}{\rho(x)}\left\{-div[\kappa(x)\nabla u] - \int_0^\infty g(s)div[a(x)\nabla\eta(s)]ds + h(v)\right\} = \gamma_2 - \lambda v \in L^2(\Omega),$$

isto é, $(u,v,\eta) \in D(\mathcal{A})$. Portanto, $\mathcal{A} + \lambda I$ é m-acretivo.

Para cada constante positiva k, defina o seguinte truncamento:

$$f_k(u) = \begin{cases} f(u), & se \quad \|u\|_1 \le k \\ f\left(\frac{ku}{\|u\|_1}\right), & se \quad \|u\|_1 > k \end{cases}.$$

De f ser localmente lipschitziana segue para quaisquer $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|f_k(u) - f_k(v)\| \le L_k \|u - v\|_1 ,$$

concluindo que $f_k : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é globalmente lipschitziana, para cada k. Com isso, temos que o operador $F_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por

$$F_k(u,v,\eta) = \left(0, -\frac{1}{\rho(x)}f_k(u), 0\right), \quad \forall (u,v,\eta) \in \mathcal{H},$$

é globalmente lipschitziano, com constante C_{F_k}, para cada k. E ainda, de $F_k(0) = 0$, obtemos

$$-(F_kU,U)_{\mathcal{H}} \le |-(F_kU,U)| \le \|F_kU\|\,\|U\| \le C_{F_k}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 ,$$

donde $(F_kU,U)_{\mathcal{H}} \ge -C_{F_k}\|U\|_{\mathcal{H}}^2$, para todo $U \in \mathcal{H}$. Logo,

$$((F_k + C_{F_k}I)U,U)_{\mathcal{H}} \ge 0, \quad \forall U \in \mathcal{H},$$

isto é, $F_k + C_{F_k}I$ é acretivo e globalmente lipschitziano com constante $2C_{F_k}$.

Denotando $\mathcal{F}_k = F_k + (2C_{F_k} + \lambda)\, I$ concluímos, pelo Teorema 1.1.10, que o operador $\mathcal{A} + \mathcal{F}_k$ é m-acretivo.

Seja $U_0 \in D(\mathcal{A})$ e considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} U_t(t) + (\mathcal{A} + \mathcal{F}_k)\, U(t) = (2C_{F_k} + \lambda)\, U(t), & t > 0 \\ \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Pelo Teorema de Kato (Teorema 1.1.11), o problema (2.21) possui uma única solução forte U_k em $[0,T[$.

Observe que, de $f : H_0^1(\Omega) \to L^{\frac{m}{m+1}}(\Omega)$ ser localmente lipschitziana, também temos que $f_k : H_0^1(\Omega) \to L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega)$ é globalmente lipschitziana com constante C_k. Disso, as desigualdades de Holder e Young e a hipótese $f(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega f_k(u)v \, dx d\tau &\leq \int_0^t \|f_k(u)\|_{\frac{m+1}{m}} \|v\|_{m+1} \, d\tau \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|v\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t \|f_k(u)\|_{\frac{m+1}{m}}^{\frac{m+1}{m}} \, d\tau \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|v\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau + C_\epsilon \, C^{\frac{m+1}{m}} \int_0^t \|u\|_1^{\frac{m+1}{m}} \, d\tau. \end{aligned} \tag{2.22}$$

No que segue, para não sobrecarregar a notação, omitiremos o índice k de U_k. Sendo $U = (u, \, v, \, \eta)$ com $v = u_t$ solução forte de (2.21), temos que

$$\rho(x)v_t - \text{div}[\kappa(x)\nabla u] - \int_0^\infty g(s)\text{div}(a(x)\nabla\eta(s))ds + h(v) - f_k(u) = 0$$

é válida quase sempre. Multiplicando a igualdade acima por $v = u_t$ e integrando sobre $\Omega \times (0, t)$ com $0 < t < T$, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\|v(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds\right] + \int_0^t \int_\Omega h(v)v dx d\tau \\ \leq \; &\frac{1}{2}\left[\|v(0)\|_\rho^2 + \|u(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^0(s)\right\|^2 ds\right] + \int_0^t \int_\Omega f_k(u)v \, dx d\tau, \end{aligned} \tag{2.23}$$

uma vez que $g'(s) \leq 0$. Mas, h é uma função contínua com $h(s)s \geq b_1 |s|$ para todo $|s| \geq 1$, então

$$\int_0^t \int_\Omega h(v)v \, dx d\tau \geq b_1 \int_0^t \|v\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau - b_1 t \, |\Omega| \, . \tag{2.24}$$

Substituindo (2.22) e (2.24) em (2.23), temos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\|v(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds\right] + b_1 \int_0^t \|v\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau \\ \leq \; &\frac{1}{2}\left[\|v(0)\|_\rho^2 + \|u(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^0(s)\right\|^2 ds\right] \\ + \; &\epsilon \int_0^t \|v\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau + C_\epsilon \, C^{\frac{m+1}{m}} \int_0^t \|u\|_1^{\frac{m+1}{m}} \, d\tau + b_1 t \, |\Omega| \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\|v(0)\|_\rho^2 + \|u(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^0(s)\right\|^2 ds\right]$$

$$+ \epsilon\int_0^t \|v\|_{m+1}^{m+1}\, d\tau + C_\epsilon\, C^{\frac{m+1}{m}}\int_0^t \|u\|_1^2\, d\tau + \left(C_\epsilon C^{\frac{m+1}{m}} + b_1|\Omega|\right)t,$$

pois $1 < \dfrac{m+1}{m} \leq 2$. Mas,

$$\|u\|_1^2 \leq \|v(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds.$$

Então, considerando $\epsilon \leq b_1$ em (2.25), temos que

$$\|v(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds$$

$$\leq \|v(0)\|_\rho^2 + \|u(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^0(s)\right\|^2 ds + \left(C_\epsilon C^{\frac{m+1}{m}} + b_1|\Omega|\right)T$$

$$+ C(C_k)\int_0^t \left[\|v(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds\right] d\tau,$$

para todo $t \in [0,T]$. Pela desigualdade de Gronwall, segue que

$$\|v(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds$$

$$\leq \left[\|v(0)\|_\rho^2 + \|u(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^0(s)\right\|^2 ds + \left(C_\epsilon C^{\frac{m+1}{m}} + b_1|\Omega|\right)T\right] e^{C(C_k)T},$$

para todo $t \in [0,T]$. Em particular, para $T = \min\left\{\dfrac{1}{C_\epsilon C^{\frac{m+1}{m}} + b_1|\Omega|}, \dfrac{1}{C(C_k)\ln 2}\right\}$, obtemos

$$\begin{aligned}&\|v(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds\\ \leq\;& 2\left(\|v(0)\|_\rho^2 + \|u(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^0(s)\right\|^2 ds + 1\right) \leq K^2, \quad \forall t \in [0,T],\end{aligned} \tag{2.26}$$

desde que

$$K^2 \geq 2\left(\|v(0)\|_\rho^2 + \|u(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla^0(s)\right\|^2 ds + 1\right). \tag{2.27}$$

Consequentemente, por (2.26) concluímos que $\|u(t)\|_1 \leq K$, para todo $t \in [0,T]$, ou seja, $\mathcal{F}_K U(t) = \mathcal{F}U(t)$, para todo $t \in [0,T]$. Portanto, U é solução forte de (2.9) em $[0,T]$. E, de U ser Lipschitz contínua, com $\mathcal{H}$ reflexivo, concluímos que $U \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H})$, encerrando a prova deste resultado. $\square$

Observação 2.0.1. *Observe que decorre da Proposição 2.0.1, $U(t) \in D(\mathcal{A})$ para todo $t \in [0,T]$. E, como $U = (u, u_t, \eta)$, temos que*

$$u \in W^{2,\infty}(0,T; L^2_\rho(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T,H^1_0(\Omega)), \eta \in W^{1,\infty}(0,T,H^1_a).$$

Observação 2.0.2. *Na Proposição 2.0.1, o tempo de existência local T depende de C_K, que é a constante de Lipschitz de $f : H^1_0(\Omega) \to L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega)$. Mas, é importante observar que T não depende da constante de Lipschitz de $f : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Esta é uma observação fundamental para a prova do Teorema 2.0.1.*

Nosso próximo passo é retirar a hipótese de f ser localmente Lipschitz de $H^1_0(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Com o objetivo de estender o nosso resultado anterior de existência de soluções, defina o seguinte truncamento realizado na função f do termo de fonte, introduzido por Radu [30],

$$f_n(u) := f(u)\gamma_n(u),$$

onde $\gamma_n \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ e satisfaz

i. $0 \leq \gamma_n \leq 1$;

ii. $\gamma_n(u) = 1, \quad se \quad |u| \leq n$;

iii. $\gamma_n(u) = 0, \quad se \quad |u| \geq 2n$;

iv. $|\gamma_n'(u)| \leq \dfrac{c}{n}$.

Então,

$$f_n(u) = \begin{cases} f(u), & se \quad |u| \leq n \\ f(u)\gamma_n(u), & se \quad n < |u| < 2n \\ 0, & se \quad |u| \geq 2n. \end{cases} \tag{2.28}$$

Para este truncamento, é válido o seguinte resultado:

Proposição 2.0.2. *Considere $m \geq 1,\ 0 < \epsilon < 1$. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz*

$$|f'(s)| \leq C(|s|^{p-1} + 1),$$

onde $p\frac{m+1}{m} \leq \frac{6}{1+2\epsilon}$. Seja f_n definida como em (2.28), então:

- *$f_n : H^{1-\epsilon}(\Omega) \to L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega)$ é localmente lipschitziana com constante não dependendo de n.*

- *$f_n : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é globalmente lipschitziana com constante dependendo de n.*

Agora, com o truncamento (2.28) e a Proposição 2.0.2, demonstraremos o resultado de existência de solução fraca local do problema (2.1), sem a hipótese adicional acerca da função f.

Teorema 2.0.1. *Suponha que as Hipóteses (H-1) - (H-7) são válidas. Então, existe uma solução fraca local (no tempo) u de (2.1) definida em* $(-\infty, T]$, *para algum* $T > 0$ *dependendo da energia linear inicial* $\mathcal{E}(0)$, *onde a energia linear é definida por*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds\right].$$

Demonstração. Seja $u_0 \in L_g^2(\mathbb{R}^-, H_0^1(\Omega))$ satisfazendo a Hipótese (H-7). Então, existe uma sequência $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}} \in H_g^1(\mathbb{R}^-, C_0^2(\Omega))$ tal que

$$\begin{aligned}
&u_{0,n} \to u_0 && \text{em} \quad L_g^2(\mathbb{R}^-, H_0^1(\Omega))\\
&u_{0,n}(0) \to u_0(0) && \text{em} \quad H_0^1(\Omega)\\
&v_{0,n}(0) := \tfrac{du_{0,n}}{dt}_{|t=0} \to v_0(0) := \tfrac{du_0}{dt}_{|t=0} && \textit{em} \quad L_\rho^2(\Omega),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

quando $n \to \infty$.

Defina $\mathcal{F}_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $\mathcal{F}_n U = \left(0, \frac{1}{\rho} f_n(u), 0\right)$, onde $U = (u,\ v,\ \eta) \in \mathcal{H}$ e f_n é dada em (2.28) e $\eta_{0,n}(s) = u_{0,n}(0) - u_{0,n}(-s)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que, dado o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (2.8), temos que $\eta_{0,n} = 0$ e $\eta_{0,n} \to \eta_0$ em $L_g^2(\mathbb{R}^+, H_a^1)$, donde, $U_n^0 = ((u_{0,n}, (v_{0,n}, \eta_{0,n}) \in D(\mathcal{A})$. Então, com raciocínio análodo ao usado na Proposição 2.0.1, temos que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} U_t + (\mathcal{A} + \mathcal{F}_n)U = 0 \\ U(0) = U_{0,n} \end{cases} \tag{2.30}$$

possui uma única solução forte local $U_n \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H})$, onde $U_n = (u_n, v_n, \eta_n^t)$ e $v_n = \frac{d}{dt}u_n$. Conforme observado na Observação 2.0.2, o tempo T depende de uma constante relacionada com a função $f_n : H_0^1(\Omega) \to L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega)$. Além disso, pela Proposição 2.0.2, tal constante não depende de n. Consequentemente, o tempo T não depende de n.

Prosseguindo similarmente a (2.26) obtemos que, para cada n, existe Y satisfazendo

$$\|v_n(t)\|_\rho^2 + \|u_n(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta_n^t(s)\right\|^2 ds \le Y^2, \quad \forall t \in [0, T],$$

onde

$$Y^2 \ge 2\left(\|v_{0,n}\|_\rho^2 + \|u_{0,n}\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta_{0,n}(s)\right\|^2 ds + 1\right).$$

Das convergências (2.29), temos que $U_{0,n} \to U_0$. Logo, existe $c \geq 0$ tal que $\|U_{0,n}\|_{\mathcal{H}} \leq c$, para todo $n \geq n_0$. Além disso,

$$\|v_{0,n}\|_\rho^2 + \|u_{0,n}\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\sqrt{a}\nabla\eta_{0,n}(s)\right\|^2 ds \leq \|U_{0,n}\|_{\mathcal{H}}.$$

Então, Y pode ser considerado suficientemente grande de modo que

$$\|v_n(t)\|_\rho^2 + \|u_n(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\sqrt{a}\nabla\eta_n^t(s)\right\|^2 ds \leq Y^2, \tag{2.31}$$

para todo $t \in [0,T]$, $n \geq n_0$. Portanto, $\|v_n(t)\|_\rho$, $\|u_n(t)\|_1$ e $\int_0^\infty g(s) \left\|\sqrt{a}\nabla\eta_n^t(s)\right\|^2 ds$ são uniformemente limitadas em $[0,T]$. Além disso, analogamento ao que foi feito em (2.25), é válido que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[\|v_n(t)\|_\rho^2 + \|u_n(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\sqrt{a}\nabla\eta_n^t(s)\right\|^2 ds\right] + b_1 \int_0^t \|v_n\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau \\ \leq \; & \frac{1}{2}\left[\|v_{0,n}\|_\rho^2 + \|u_{0,n}\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\sqrt{a}\nabla\eta_{0,n}(s)\right\|^2 ds\right] \\ + \; & \epsilon \int_0^t \|v\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau + C_\epsilon \, C^{\frac{m+1}{m}} \int_0^t \|u\|_1^2 \, d\tau + b_1 t \, |\Omega| . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Considerando $\epsilon \leq \dfrac{b_1}{2}$ em (2.32), obtemos

$$\int_0^T \|v_n\|_{m+1}^{m+1} d\tau \leq C_K, \tag{2.33}$$

onde a constante C_K depende de K.

Portanto, existe uma subsequência de $U_n = (u_n, v_n, \eta_n)$, denotada de mesmo nome, tal que

$$\begin{aligned} & u_n \to u && \text{fraco estrela em } \; L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)), \\ & v_n = u_n' \to u' = v && \text{fraco estrela em } \; L^\infty(0,T,L_\rho^2(\Omega)), \\ & \sqrt{a}\nabla\eta_n \to \xi && \text{fraco estrela em } \; L^\infty(0,T,L_g^2(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))) \; \text{ e} \\ & v_n = u_n' \to u' = v && \text{fraco estrela em } \; L^{m+1}(\Omega \times (0,T)), \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $u_n' := (u_t)_n$ e $u' := u_t$.

Denote $w(x,t,s) = u(x,t) - u(x,t-s)$, temos que

$$\sqrt{a}\nabla\eta_n \to \sqrt{a}\nabla w \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T,L^2_g(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))). \tag{2.35}$$

De fato, seja $\theta \in L^1(0,T,L^2_g(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)))$. Pela definição de η e de w, temos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \sqrt{a(x)}\nabla(\eta_n^t(x,s) - w(x,t,s))\theta(x,t,s)dxdsdt \\
= & \int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \sqrt{a(x)}\nabla((u_n(x,t) - u(x,t))\theta(x,t,s)dxdsdt \\
- & \int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \sqrt{a(x)}\nabla(u_n(x,t-s) - u(x,t-s)))\theta(x,t,s)dxdsdt \\
= & I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Note que,

$$I_1 = \int_0^T \left(\sqrt{a}\nabla((u_n(t) - u(t)), \int_0^\infty g(s)\theta(t,s)ds\right)dt$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^\infty g(s)\theta(t,s)ds\right\| & \leq \int_0^\infty g(s)\left\|\theta(t,s)\right\|ds \\
& \leq \left(\int_0^\infty g(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty g(s)\left\|\theta(t,s)\right\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& < \infty,
\end{aligned}$$

ou seja, $\int_0^\infty g(s)\theta(s)ds \in L^1(0,T,L^2(\Omega))$. Disso e da convergência $u_n \to u$ fraco estrela em $L^\infty(0,T,H^1_0(\Omega))$, concluímos que

$$I_1 \to 0. \tag{2.37}$$

Com a mudança de variável $k = t - s$, podemos reescrever I_2 como

$$\begin{aligned}
I_2 & = -\int_0^T\int_\Omega\int_{-\infty}^t g(t-k)\sqrt{a}\nabla(u_n(x,k) - u(x,k))\theta(x,t,t-k)dkdxdt \\
& = -\int_0^T\int_\Omega\int_{-\infty}^0 g(t-k)\sqrt{a}\nabla(u_{n,0}(k) - u_0(k))\theta(t,t-k)dkdxdt
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_\Omega \int_0^t g(t-k)\sqrt{a}\nabla(u_n(x,k)-u(x,k))\theta(x,t,t-k)dkdxdt \\
&= I_{2,1} + I_{2,2}.
\end{aligned}
$$

Considerando $b=-k$ em $I_{2,1}$, temos

$$
\begin{aligned}
I_{2,1} &= \int_0^T \int_\Omega \int_\infty^0 g(t+b)\sqrt{a}\nabla(u_{n,0}(x,-b)-u_0(x,-b))\theta(x,t,t+b)dbdxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\infty^0 g(t+k)\left\|\sqrt{a}\nabla(u_{n,0}(-b)-u_0(-b))\right\| \|\theta(t,t+b)\| \, dbdt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\infty^0 g(t+b)\left\|\sqrt{a}\nabla(u_{n,0}(-b)-u_0(-b))\right\|^2 db\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g(t+b)\left\|\theta(t,t+b)\right\|^2 db\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\infty^0 g(b)\left\|\sqrt{a}\nabla(u_{n,0}(-b)-u_0(-b))\right\|^2 db\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g(t+b)\left\|\theta(t,t+b)\right\|^2 db\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \|\sqrt{a}\nabla(u_0^n-u_0)\|_{L^2_g(\mathbb{R}^-,L^2(\Omega))} \int_0^T \left(\int_0^\infty g(t+b)\left\|\theta(t,t+b)\right\|^2 db\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \|\sqrt{a}\nabla(u_0^n-u_0)\|_{L^2_g(\mathbb{R}^-,L^2(\Omega))} \|\theta\|_{L^1(0,T,L^2_g(\mathbb{R}^-,L^2(\Omega)))} \to 0,
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

pois g é decrescente, $u_0^n \to u_0$ em $L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega))$ e $\theta \in L^1(0,T,L^2_g(\mathbb{R}^-,L^2(\Omega)))$.

Agora, da mudança de região de integração $t=k$ em $I_{2,2}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_{2,2} &= -\int_0^T \int_k^T \int_\Omega g(t-k)\sqrt{a(x)}\nabla(u_n(x,k)-u(x,k))\theta(x,t,t-k)dxdtdk \\
&= -\int_0^T \left(\sqrt{a}\nabla(u_n(k)-u(k)), \int_k^T g(t-k)\theta(t,t-k)dt\right) dk.
\end{aligned}
$$

Mas,

$$
\int_k^T g(t-k)\theta(t,t-k)dt = \int_0^{T-k} g(y)\theta(t,y)dy;
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_0^{T-k} g(y)\theta(t,y)dy\right\| &\leq \int_0^{T-k} g(y)\left\|\theta(t,y)\right\| dy \leq \int_0^\infty g(y)\left\|\theta(t,y)\right\| dy \\
&\leq \left(\int_0^\infty g(y)dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g(y)\left\|\theta(t,y)\right\|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}
$$

logo, $\int_k^T g(t-k)\theta(t-k)dt \in L^1(0,T,L^2(\Omega))$. Disso e da convergência fraco estrela $u_n \to u$ em $L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$, obtemos

$$I_{2,2} \to 0. \tag{2.40}$$

Logo, de (2.38), (2.39) e (2.40), temos que

$$I_2 \to 0. \tag{2.41}$$

Assim, por (2.36), (2.37) e (2.41), concluímos que

$$\int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \sqrt{a(x)}\nabla(\eta_n^t(x,s) - w(x,t,s))\theta(x,t,s)dxdsdt \to 0, \tag{2.42}$$

verificando a convergência desejada em (2.35). Além disso, da unicidade do limite fraco estrela, $\xi = \sqrt{a(x)}\nabla\eta$, onde $\eta^t(x,s) = u(x,t) - u(x,t-s)$.

Por (2.31) e (2.34), vemos que

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \liminf \|u_n\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq K$$

de onde segue

$$\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K. \tag{2.43}$$

Analogamente, de (2.33) e (2.34), temos

$$\|u'\|_{L^{m+1}(\Omega\times(0,T))} \leq \liminf \|u_n'\|_{L^{m+1}(\Omega\times(0,T))} < C_K,$$

obtendo

$$\int_0^T \|u'(t)\|_{m+1}^{m+1} dt \leq C_K. \tag{2.44}$$

Considere $X = H_0^1(\Omega), Y = H_0^{1-\epsilon}(\Omega), Z = L^2(\Omega)$ e $W = \{g \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)); g' \in L^{m+1}(0,T,L^2(\Omega))\}$. Pelo Teorema de Aubin-Lions-Simon (Teorema 1.2.5), temos que

$$W \hookrightarrow^c C([0,T],H^{1-\epsilon}(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T,H^{1-\epsilon}(\Omega)),$$

para todo $0 < \epsilon < 1$, uma vez que, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow^c H_0^{1-\epsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Portanto

$$u_n \to u \;\text{ em }\; L^\infty(0,T,H^{1-\epsilon}(\Omega)), \;\text{ para }\; 0 < \epsilon < 1. \tag{2.45}$$

Em particular, para cada n, $U_n(t) \in D(\mathcal{A}_n)$ é uma solução fraca de (2.30), donde a identidade variacional (2.4) é válida. Então,

$$
\begin{aligned}
&(\rho u_n'(t),\phi(t))-(\rho u_n'(0),\phi(0))-\int_0^t\int_\Omega \rho(x)u_n'(x,\tau)\phi'(x,\tau)dxd\tau\\
+\;&\int_0^t\int_\Omega \kappa(x)\nabla u_n(x,\tau)\nabla\phi(x,\tau)dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega h(u_n'(x,\tau))\phi(x,\tau)dxd\tau \qquad (2.46)\\
+\;&\int_0^t\int_0^\infty\int_\Omega a(x)\nabla\eta_n^\tau(x,s)\nabla\phi(x,\tau)dxg(s)dsd\tau=\int_0^t\int_\Omega f_n(u_n(x,\tau))\phi(\tau)dxd\tau
\end{aligned}
$$

para toda $\phi\in C([0,T],H_0^1(\Omega))\cap L^{m+1}(\Omega\times(0,T))$ com $\phi_t\in C([0,T],L^2(\Omega))$ e para quase todo $t\in[0,T]$.

Da convergência $u_n'=v_n\to u'=v$ fraco estrela em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ e pela imersão $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))\hookrightarrow L^2(0,T,L^2(\Omega))$, temos que $u_n'\to u'$ fraco em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$, então

$$\int_0^t(\rho u_n'(\tau),\phi'(\tau))d\tau\to\int_0^t(\rho u'(\tau),\phi'(\tau))d\tau, \qquad (2.47)$$

uma vez que $\phi'\in C([0,T],L^2(\Omega))$. E, de $v_0^n(0)=v^n(0)\to v_0(0)$, obtemos

$$(\rho u_n'(0),\phi(0))\to(\rho u_0'(0),\phi(0)). \qquad (2.48)$$

Também, pela convergência $u_n\to u$ fraco estrela em $L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ e por $\Delta\phi(\tau)\in H^{-1}(\Omega)$, para todo $\tau\in(0,t)$, é válido

$$\int_0^t\int_\Omega\kappa(x)\nabla u_n(x,\tau)\nabla\phi(x,\tau)dxd\tau\to\int_0^t\int_\Omega\kappa(x)\nabla u(x,\tau)\nabla\phi(x,\tau)dxd\tau. \qquad (2.49)$$

No que segue, mostraremos a convergência

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_\Omega f_n(u_n)\phi dxd\tau=\int_0^t\int_\Omega f(u)\phi dxd\tau, \qquad (2.50)$$

para toda $\phi\in C([0,T],H_0^1(\Omega))\cap L^{m+1}(\Omega\times(0,T))$ e quase todo $t\in[0,T]$.

Note que,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^t\int_\Omega(f_n(u_n)-f(u))\phi dxd\tau\right| &\le \int_0^t\int_\Omega|f_n(u_n)-f_n(u)||\phi|dxd\tau\\
&+\int_0^t\int_\Omega|f_n(u)-f(u)||\phi|dxd\tau=I_1+I_2.
\end{aligned} \qquad (2.51)
$$

Como visto na Proposição 2.0.2, $f_n:H^{1-\epsilon}(\Omega)\to L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega)$ é localmente lipschitziana com constante não dependendo de n. Da desigualdade de Holder, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left(\int_0^t \int_\Omega |f_n(u_n) - f_n(u)|^{\frac{m+1}{m}} dxd\tau\right)^{\frac{m}{m+1}} \left(\int_0^t \int_\Omega |\phi|^{m+1} dxd\tau\right)^{\frac{1}{m+1}} \\ &\leq C(K) \left(\int_0^t \|u_n - u\|^{\frac{m+1}{m}}_{H^{1-\epsilon}(\Omega)} d\tau\right)^{\frac{m}{m+1}} \|\phi\|_{L^{m+1}(\Omega\times(0,t))} \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

pois $u_n \to u$ em $L^\infty(0,t,H^{1-\epsilon}(\Omega)) \hookrightarrow L^{\frac{m+1}{m}}(0,t,H^{1-\epsilon}(\Omega))$ e $\phi \in L^{m+1}(\Omega \times (0,t))$.

Também,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left(\int_0^t \int_\Omega |f_n(u) - f(u)|^{\frac{m+1}{m}} dxd\tau\right)^{\frac{m}{m+1}} \left(\int_0^t \int_\Omega |\phi|^{m+1} dxd\tau\right)^{\frac{1}{m+1}} \\ &= \left(\int_0^t \int_\Omega |f(u)\gamma_n(u) - f(u)|^{\frac{m+1}{m}} dxd\tau\right)^{\frac{m}{m+1}} \|\phi\|_{L^{m+1}(\Omega\times(0,t))} \\ &= \left(\int_0^t \int_\Omega (|f(u)||\gamma_n(u) - 1|)^{\frac{m+1}{m}} dxd\tau\right)^{\frac{m}{m+1}} \|\phi\|_{L^{m+1}(\Omega\times(0,t))}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Mas $p\frac{m+1}{m} < 6$, $1 < \frac{m+1}{m} < 2$ e $|f(u)| \leq C(|u|^{p-1} + 1)\,|u|$, então

$$|f(u)|^{\frac{m+1}{m}} \leq C\left((|u|^{p-1} + 1)\,|u|\right)^{\frac{m+1}{m}} \leq C(|u|^{p\frac{m+1}{m}} + |u|^{\frac{m+1}{m}}) \leq C\,|u|^6$$

donde,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega |f(u)|^{\frac{m+1}{m}} dxd\tau &\leq C\left(\int_0^t \int_\Omega |u|^6 dxd\tau\right) \\ &\leq C\int_0^t \|u\|_1^6 d\tau \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Logo, $f(u) \in L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega \times (0,t))$. Além disso, $\gamma_n(u(x,\tau)) \to 1$ quase sempre em $\Omega \times [0,T]$. Então, para cada $(x,\tau) \in \Omega \times [0,T]$ fixado, temos que

$$K_n(x,\tau) := |f(u(x,\tau))|^{\frac{m+1}{m}} |\gamma_n(u(x,\tau)) - 1|^{\frac{m+1}{m+1}} \to 0,$$

e

$$|K_n(x,\tau)| \leq |f(u(x,\tau))|^{\frac{m+1}{m}} \in L^1(\Omega \times [0,T]),$$

uma vez que, $0 \leq \gamma_n(u(x,\tau)) \leq 1$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_0^t \int_\Omega (|f(u)||\eta_n(u)-1|)^{\frac{m+1}{m}}\,dxd\tau \to 0. \tag{2.54}$$

Por (2.53) e (2.54), obtemos

$$I_2 \to 0, \tag{2.55}$$

pois $\phi \in L^{m+1}(\Omega\times(0,t))$. Portanto, pelas convergências (2.52) e (2.55), temos o desejado em (2.50).

Para analisar a convergência do termo $\int_0^t\int_\Omega h(u_n'(\tau))\phi(\tau)dxd\tau$, defina $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |u_n'(x)| < 1\}$ e $\Omega_2 = \{x\in\Omega; |u_n'(x)|\geq 1\}$. Da hipótese $h(s)s \leq b_2\,|s|^{m+1}$ para todo $|s|\geq 1$ e (2.33), temos que

$$\begin{aligned}
\|h(u_n')\|^{\frac{m+1}{m}}_{L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega\times(0,t))} &= \int_0^t\int_{\Omega_1}|h(u_n'(\tau,x))|^{\frac{m+1}{m}}\,dxd\tau + \int_0^t\int_{\Omega_2}|h(u_n'(\tau,x))|^{\frac{m+1}{m}}\,dxd\tau\\
&\leq T.\,|\Omega|\,.C + b_1\int_0^t\int_{\Omega_2}|u_n'(\tau,x)|^{m+1}\,dxd\tau\\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ou seja, $h(u_n')$ é uniformemente limitada em $L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega\times(0,t))$. Então, existe uma subsequência, que denotaremos pelo mesmo nome, tal que

$$h(u_n') \to H \quad \text{fraco em} \quad L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega\times(0,t)).$$

Sendo U_n e U_j soluções fortes de (2.30), as igualdades abaixo são válidas

$$\rho(x)u_n'' - div[\kappa(x)\nabla u_n] + h(u_n') - \int_0^\infty g(s)div((a(x)\nabla\eta_n^t(s))ds - f_n(u_n) = 0; \tag{2.56}$$

$$\rho(x)u_j'' - div[\kappa(x)\nabla u_j] + h(u_j') - \int_0^\infty g(s)div((a(x)\nabla\eta_j^t(s))ds - f_j(u_j) = 0. \tag{2.57}$$

Denote por $(\overline{u},\overline{u'},\overline{\eta^t}) = \overline{U} = U_n - U_j$. Subtraindo as equações (2.56) e (2.57), compondo com $\overline{u'}$ e integrando o resultado sobre $\Omega\times(0,t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left\|\overline{u'}(t)\right\|_\rho^2 + \|\overline{u}(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\overline{\eta^t}\right\|^2 ds\right]\\
-&\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\overline{\eta^\tau}\right\|^2 dsd\tau + \int_0^t\int_\Omega [h(u_n') - h(u_j')]\overline{u'}dxd\tau\\
=&\frac{1}{2}\left[\left\|\overline{u'}(0)\right\|_\rho^2 + \|\overline{u}(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\overline{\eta^0}\right\|^2 ds\right] + \int_0^t\int_\Omega [f(u_n) - f(u_j)]\overline{u'}dxd\tau.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Prosseguindo como em (2.50), concluímos que

$$\int_0^t \int_\Omega |f_n(u_n) - f_j(u_j)| \left|\overline{u'}\right| dx d\tau \longrightarrow 0,$$

quando $n \to \infty$ e $j \to \infty$. Também sabemos que as convergências $U_{0,n} \to U_0$ e $U_{0,j} \to U_0$, respectivamente, para $n, j \to \infty$, são válidas. Consequentemente,

$$\frac{1}{2}\left[\left\|\overline{u'}(0)\right\|_\rho^2 + \|\overline{u}(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\overline{\eta^0}\right\|^2 ds\right] \longrightarrow 0, \quad n, j \to \infty.$$

Então, o lado direito de (2.58) converge pra zero. E ainda, sabemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[\left\|\overline{u'}(t)\right\|_\rho^2 + \|\overline{u}(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\overline{\eta^t}\right\|^2 ds\right] - \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\overline{\eta^\tau}\right\|^2 ds d\tau \\ + & \int_0^t \int_\Omega [h(u_n') - h(u_j')]\overline{u'} dx d\tau \\ \geq & \; 0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Logo, $\int_0^t \int_\Omega [h(u_n') - h(u_j')]\overline{u'} dx d\tau \longrightarrow 0$, quando $n, j \to \infty$.

Considere o operador $h(.) : L^{m+1}(\Omega \times (0,t)) \to L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega \times (0,t))$. Do Teorema 1.2.6 e da monotocidade de h, vem que

$$\langle h(f_1) - bh(f_2), f_1 - f_2\rangle_{L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega), L^{m+1}(\Omega)} = \int_0^t \int_\Omega (h(f_1) - h(f_2))(f_1 - f_2) dx d\tau \geq 0. \tag{2.60}$$

Denote $f_n = h(u + t_n v)w$, onde $t_n \to 0$. Se $|u(x,\tau) + t_n v(x,\tau)| \geq 1$, temos que

$$|h(u(x,\tau) + t_n v(x,\tau))| \leq b_1 |u + t_n v|^m \leq C(|u|^m + |t_n| |v|^m) \leq C\left(|u|^m + |v|^m\right)$$

donde,

$$|h(u + t_n v)| |w| \leq C(|u|^m |w| + |v|^m |w|) \in L^1(\Omega \times (0,t)).$$

Se $|u(x,\tau) + t_n v(x,\tau)| < 1$,

$$|h(u(x,\tau) + t_n v(x,\tau))| \leq \max_{x \in [-1,1]} \{h(u + t_n v)\},$$

obtendo, $|h(u + t_n v)| |w| \leq C |w| \in L^1(\Omega \times (0,t))$. Também, da continuidade da função h e de $t_n \to 0$, temos

$$h(u + t_n v) \to \; h(u) \;\; \text{em} \;\; \Omega \times (0,t).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos

$$\int_0^t \int_\Omega h(u+t_n v)dxd\tau \longrightarrow \int_0^t \int_\Omega h(u)dxd\tau,$$

ou seja,

$$h(u+t_n v) \to h(u) \;\; \text{fraco estrela em} \;\; L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega \times (0,t)). \tag{2.61}$$

De (2.60) e (2.61), temos que o operador $h(.)$ é monótono e hemícontínuo. Portanto, pelo Teorema 1.1.6, h é maximal monótono.

Até aqui, verificamos que $u_n' \to u'$ fraco em $L^{m+1}(\Omega \times (0,t))$, $h(u_n') \to H$ fraco em $L^{m+1}(\Omega\times(0,t))$, $\lim_{n,j\to\infty}\sup \int_0^t \int_\Omega (h(u_n')-h(u_j'))(u_n'-u_j')\, dxd\tau = 0$ e que $h(.)$ é um operador maximal monótono. Então, pelo Teorema 1.1.1, temos que $h(u') = H$. Consequentemente,

$$h(u_n') \to h(u'), \;\; \text{fraco em} \;\; L^{m+1}(\Omega \times (0,t))$$

e

$$\int_0^t \int_\Omega h(u_n')\phi \, dxd\tau \to \int_0^t \int_\Omega h(u')\phi \, dxd\tau, \tag{2.62}$$

pois $\phi \in L^{m+1}(\Omega \times (0,t))$.

Anteriormente, a convergência

$$\int_0^t \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x)\nabla(\eta_n - \eta)\theta \; dxdsd\tau \to 0, \;\; \forall \theta \in L^1(0,T,L_g^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)))$$

foi verificada. Então,

$$\int_0^t \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x)\nabla\eta_n^\tau(s)\nabla\phi(\tau) \; dxdsd\tau \to \int_0^t \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x)\nabla\eta^\tau(s)\nabla\phi(\tau) \; dxdsd\tau, \tag{2.63}$$

uma vez que, $\nabla\phi \in L^1(0,T,L_g^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)))$.

Por (2.58) e (2.59), temos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|(u_n - u_j)(t)\|_1^2 \to 0 \;\; \text{e} \;\; \sup_{t\in[0,T]} \left\|(u_n' - u_j')(t)\right\|_\rho^2 \to 0,$$

isto é,

$$u_n \to u \;\; \text{em} \;\; C([0,T],H_0^1(\Omega)) \;\; \text{e} \;\; u_n' \to u' \;\; \text{em} \;\; C([0,T],L_\rho^2(\Omega)), \tag{2.64}$$

concluindo que

$$u \in L_g^2((-\infty,T],H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T],H_0^1(\Omega))$$

e

$$u' \in L_g^2((-\infty,T],L_\rho^2(\Omega)) \cap C([0,T],L_\rho^2(\Omega)) \cap L^{m+1}(\Omega \times (0,T)).$$

Passando o limite em (2.46), obtemos, para toda $\phi \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$ com $\phi_t \in C([0,T], L^2(\Omega))$ e para todo $t \in [0,T]$, que

$$
\begin{aligned}
& (\rho u'(t), \phi(t)) - (\rho u_0'(0), \phi(0)) - \int_0^t \int_\Omega \rho(x) u'(\tau)\phi'(\tau)\, dx d\tau \\
+ & \int_0^t \int_\Omega \kappa(x) \nabla u(\tau) \nabla \phi(\tau)\, dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega h(u'(\tau))\phi(\tau)\, dx d\tau \\
+ & \int_0^t \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) \nabla \eta^\tau(s) \nabla \phi(\tau)\, dx ds d\tau = \int_0^t \int_\Omega f(u(\tau))\phi(\tau)\, dx d\tau,
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

onde usamos as convergências (2.48)-(2.50), (2.62), (2.63) e (2.64), ou seja, (2.4) é válida para u. Além disso, para $t = 0$, temos que

$$
u_{0,n} = u_n^0(0) \to u^0(0) = u_0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega) \;\text{ e }\; u_{0,n}' = u_n'(0) \to u'(0) = u_0' \;\text{ em }\; L^\rho(\Omega),
$$

ou seja, $u(x,t) = u^0(x,t)$, para todo $t \leq 0$, uma vez que já era válido $u(x,t) = u^0(x,t)$ para todo $t < 0$. Portanto, u é uma solução fraca de (2.1), como queríamos demonstrar. □

Observação 2.0.3. *A solução fraca u, obtida no Teorema 2.0.1, satisfaz a seguinte desigualdade de energia*

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\{ \|u'(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\| \sqrt{a} \nabla \eta^t(s) \right\|^2 ds \right\} + \int_0^t \int_\Omega h(u')u'\, dx d\tau \\
\leq \; & \frac{1}{2}\left\{ \|u'(0)\|_\rho^2 + \|u(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\| \sqrt{a} \nabla \eta^0(s) \right\|^2 \; ds \right\} + \int_0^t \int_\Omega f(u)u'\, dx d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

Com efeito, para cada n, o problema (2.30) possui uma única solução forte $U_n \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H})$. Logo, a igualdade abaixo é válida

$$
\rho(x) u_n'' - div[\kappa(x) \nabla u_n] + h(u_n') - \int_0^\infty g(s) div((a(x) \nabla \eta_n^t(s)) ds - f_n(u_n) = 0,
$$

quase sempre. Multiplicando esta igualdade por u_n' e integrando sobre $\Omega \times (0,t)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left[\|u_n'(t)\|_\rho^2 + \|u_n(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\| \sqrt{a} \nabla \eta_n^t \right\|^2 ds \right] + \int_0^t \int_\Omega h(u_n')u_n'\, dx d\tau \\
\leq \; & \frac{1}{2}\left[\|u_n'(0)\|_\rho^2 + \|u_n(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\| \sqrt{a} \nabla \eta_n^0 \right\|^2 \; ds \right] + \int_0^t \int_\Omega f(u_n)u_n'\, dx d\tau,
\end{aligned}
$$

uma vez que, $g'(s) \leq 0$ para todo $s \in R^+$.

Como vimos na demonstração do Teorema 2.0.1, $u_n(\tau) \to u(\tau)$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n'(\tau) \to$

$u'(\tau)$ *em* $L^2_\rho(\Omega)$, *para todo* $\tau \in [0,T]$ *e* $\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla(\eta_n^t - \eta^t)(s)\right\| ds \to 0$, *em outras palavras,* $\{\sqrt{a}\nabla\eta_n^t\}$ *é uma sequência de Cauchy em* $L^2(0,T,L^2_g(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)))$. *Então, existe* $\xi \in L^2(0,T,L^2_g(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)))$ *tal que*

$$\sqrt{a}\nabla\eta_n^t \to \xi \quad em \quad L^2(0,T,L^2_g(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega))).$$

Então, por (2.34), temos que

$$\sqrt{a}\nabla\eta_n^\tau \to \sqrt{a}\nabla\eta^\tau \quad em \quad L^2_g(\mathbb{R}^+,L^2(\Omega)),$$

para quase todo $\tau \in [0,T]$.

Nas hipóteses do Teorema 2.0.1, $h(s)s \leq b_2|s|^{m+1}$ *para todo* $|s| \geq 1$ *e a sequência* (u_n') *é uniformemente limitada em* $L^{m+1}(\Omega\times(0,T))$, *logo* $|h(u_n')u_n'| \leq |u_n'|^{m+1} \leq c$, *para todo* n. *Por outro lado, temos* $u_n'(t) \to u'(t)$ *em* $L^2_\rho(\Omega)$, *para todo* $t \in [0,T]$, *então* $u_n'(x,t) \to u'(x,\tau)$ *quase sempre em* $\Omega\times(0,t)$, *onde* $0 < t < T$ *e, da continuidade de* h, $h(u_n'(x,t)) \to h(u'(x,\tau))$ *quase sempre em* $\Omega\times(0,t)$. *Isto é,*

$$h(u_n'(x,t))u_n'(x,t) \to h(u'(x,t))u'(x,t)$$

quase sempre em $\Omega\times(0,t)$. *Pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos*

$$\int_0^t\int_\Omega h(u_n')u_n' \ dxd\tau \to \int_0^t\int_\Omega h(u')u' \ dxd\tau.$$

Para mostrar que (2.66) é válida, resta verificar a convergência do termo da f. *Como* $f(0)=0$ *e* $0 \leq \gamma_n \leq 1$, *temos que*

$$\begin{aligned} |f_n(u_n(x,\tau))| &= |f(u_n(x,\tau)\gamma_n(u_n(x,\tau))| \\ &\leq |f(u_n(x,\tau)| \leq C(|u_n(x,\tau)|^p + |(u_n(x,\tau))|). \end{aligned}$$

De $1 \leq p < 6$, *obtemos* $1 < \dfrac{6}{p} \leq 6$. *Sendo assim, considere* $1 \leq r \leq \dfrac{6}{p}$, *donde* $r \leq 6$ *e* $1 \leq pr \leq 6$. *Logo,* $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *e* $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{pr}(\Omega)$. *Então,*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f_n(u_n(x,\tau))|^r \ dx &= C\int_\Omega (|u_n(x,\tau)|^p + |(u_n(x,\tau))|)^r \ dx \\ &\leq C\left(\|u_n\|^{pr}_{L^{pr}(\Omega)} + \|u_n\|^r_{L^r(\Omega)}\right) \leq C\left(\|u_n\|^{pr}_{H^1_0(\Omega)} + \|u_n\|^r_{H^1_0(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|f_n(u_n)\|_{L^r((0,t)\times\Omega)} \leq C. \tag{2.67}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
|f_n(u_n(x,\tau)) - f(u(x,\tau))| &\leq |f(u_n(x,\tau))\gamma_n(u_,(x,\tau)) - f(u_n(x,\tau))| \\
&\quad + |f(u_n(x,\tau)) - f(u(x,\tau))| \\
&= |f(u_n(x,\tau))\,(\gamma_n(u_n(x,\tau)) - 1)| + |f(u_n(x,\tau)) - f(u(x,\tau))|\,.
\end{aligned}
$$

Pela continuidade de f e de $u_n(x,\tau) \to u(x,\tau)$ quase sempre, obtemos $f(u_n(x,\tau)) \to f(u(x,\tau))$, quase sempre em $\Omega \times (0,t)$. Além disso, $\gamma_n(u_n(x,\tau)) \to 1$. Então,

$$
f(u_n(x,\tau))(\gamma_n(u_n(x,\tau) - 1) \to 0
$$

quase sempre em $\Omega \times (0,t)$. E,

$$
f_n(u_n(x,\tau)) \to f(u(x,\tau)), \tag{2.68}
$$

quase sempre em $\Omega \times (0,t)$. Portanto, de (2.67), (2.68) e pela Proposição 1.2.1, concluímos que

$$
f_n(u_n) \to f(u) \;\; L^q(\Omega \times (0,t)),
$$

para todo $1 \leq q < r < \dfrac{6}{p}$. Mas, $p\dfrac{m+1}{m} < 6$ por hipótese, donde $\dfrac{m+1}{m} < \frac{6}{p}$. Logo $f_n(u_n) \to f(u) \;\; L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega \times (0,t))$ e

$$
\langle f_n(u_n), u_n' \rangle_{L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega\times(0,t)),L^{m+1}(\Omega\times(0,t))} \to \langle f(u), u' \rangle_{L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega\times(0,t)),L^{m+1}(\Omega\times(0,t))},
$$

uma vez que, $u_n' \to u'$ fraco em $L^{m+1}(\Omega \times (0,t))$, concluindo a prova.

O último resultado deste capítulo estabelece a dependência contínua dos dados iniciais para o problema (2.1).

Teorema 2.0.2. *Suponha que as Hipóteses (H-1)-(H-7) são válidas, $u^0(0) \in L^{\frac{3(p-1)}{2}}(\Omega)$ e que e $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $|f''(s)| \leq C(|s|^{p-2} + 1)$, para $p > 3$. Se $u_n^0 \in L_g^2(\mathbb{R}^-, H_0^1(\Omega))$ é uma sequência de dados iniciais tal que $u_n^0 \to u^0$ em $L_g^2(\mathbb{R}^-, H_0^1(\Omega))$ com $u_n^0 \to u^0(0)$ em $H_0^1(\Omega)$ e em $L^{\frac{3(p-1)}{2}}(\Omega)$, $\frac{d}{dt}u_n^0(0) \to \frac{d}{dt}u^0(0)$ em $L^2(\Omega)$, então as correspondentes soluções fracas u_n e u de (2.1) satisfazem*

$$
u_n \to u \;\; \text{em} \;\; C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \;\; \text{e} \;\; u_n' \to u' \;\; \text{em} \;\; C([0,T], L^2(\Omega)). \tag{2.69}
$$

Demonstração. Sejam $u_n^0, u^0 \in L_g^2(\mathbb{R}^-, H_0^1(\Omega))$ tal que $u_n^0 \to u^0$ em $L_g^2(\mathbb{R}^-, H_0^1(\Omega))$ com $u_n^0(0) \to u^0(0)$ em $H_0^1(\Omega)$ e em $L^{\frac{3(p-1)}{2}}(\Omega)$, $\frac{d}{dt}u_n^0(0) \to \frac{d}{dt}u^0(0)$ em $L^2(\Omega)$. Considere $\{u_n\}$ e

u soluções fracas em $[0,T]$, correspondentes aos dados iniciais $\{u_n^0\}$ e u^0, respectivamente. Como vimos na demonstração do Teorema 2.0.1, o tempo de existência local T pode ser considerado independente de n, mas dependendo de K. Também, vimos que podemos tomar K suficientemente grande tal que K independa de n. Logo, T e K são independentes de n. Além disso, de (2.43) e (2.44) resulta que

$$\begin{cases} \|v_n(t)\|_\rho^2 + \|u_n(t)\|_1^2 + \displaystyle\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta_n^t(s)\right\|^2 ds \leq K^2, \ \forall t \in [0,T], \forall n \in \mathbb{N} \\ \|v(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 + \displaystyle\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds \leq K^2, \ \forall t \in [0,T] \\ \displaystyle\int_0^T \|u_n'\|_{m+1}^{m+1} dt \leq C(K), \quad \int_0^T \|u'\|_{m+1}^{m+1} dt \leq C(K), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.70}$$

Denote $z_n = u_n - u$ e

$$F_n(t) = \frac{1}{2}\left(\|z_n'(t)\|_\rho^2 + \|z_n(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla(z_n(x,t) - z_n(xt-s))\right\|^2 ds\right).$$

Note que, $F_n(0) \to 0$, quando $n \to \infty$. No que segue, mostraremos que

$$F_n(t) \to 0, \tag{2.71}$$

uniformemente em $[0,T]$ quando $n \to \infty$. Com efeito, através de ideias similares as usadas na prova da desigualdade (2.66), temos que

$$F_n(t) \leq F_n(0) + \int_0^t \int_\Omega (f(u_n) - f(u)) z_n' \, dx d\tau. \tag{2.72}$$

Para obtermos o desejado em (2.71), considere dois casos:

1º Caso: $1 \leq p \leq 3$.

Neste caso, $f : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é localmente Lipschitz, então pelas desigualdades de Holder e Young, temos

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega (f(u_n) - f(u))z_n' dx d\tau &\leq \int_0^t \left(\int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |z_n'|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq C(K) \int_0^t \|u_n - u\|_1 \|z_n'\| d\tau \\ &\leq C(K) \int_0^t \|z_n\|_1^2 + \|z_n'\|_\rho^2 d\tau \\ &\leq C(K) \int_0^t F_n(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Então, por (2.72), temos

$$F_n(t) \leq F_n(0) + C(K) \int_0^t F_n(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, T].$$

Pelo Lema de Gronwall, segue que

$$F_n(t) \leq C(K, T) F_n(0) \to 0, \tag{2.73}$$

uma vez que, $F_n(0) \to 0$. Portanto,

$$F_n(t) \to 0, \tag{2.74}$$

uniformemente em $[0, T]$.

2º Caso: $3 < p < 6$.

Inspirados nas ideias de Bociu e Lasieka presentes em [7] e usando integração por partes a expressão duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega (f(u_n) - f(u)) z_n' dx d\tau \\ = &\int_\Omega \left\{ [(f(u_n) - f(u))u_n]_0^t - \int_0^t (f'(u_n)u_n' - f'(u)u')z_n \right\} dx \\ = &\left[\int_\Omega (f(u_n) - f(u))\overline{u_n}\right]_0^t - \int_0^t \int_\Omega (f'(u_n) - f'(u))u_n' z_n dx d\tau \\ - &\int_0^t \int_\Omega f'(u)(u_n' - u')z_n dx d\tau \end{aligned} \tag{2.75}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega (f(u_n(t)) - f(u(t)))z_n(t)dx - \int_\Omega (f(u_n(0)) - f(u(0)))z_n(0)dx \\
&- \int_0^t \int_\Omega (f'(u_n) - f'(u))u_n' z_n dx d\tau - \frac{1}{2}\int_\Omega f'(u(t))z_n(t)^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega f'(u(0))z_n(0)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega f''(u)u' z_n^2 dx d\tau.
\end{aligned}
$$

Pelas hipóteses de crescimento em torno de f, temos as seguintes desigualdades são válidas

$$
\begin{cases}
|f''(u)| \leq C(|u|^{p-2} + 1); \\
|f'(u)| \leq C(|u|^{p-1} + 1); \\
|f(u_n) - f(u)| \leq C(|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1} + 1)\,|z_n|\,; \\
|f'(u_n) - f'(u)| \leq C(|u_n|^{p-2} + |u|^{p-2} + 1)\,|z_n|\,.
\end{cases}
\tag{2.76}
$$

Então, de (2.75) em (2.76), vem que

$$
\begin{aligned}
& \int_0^t \int_\Omega (f(u_n) - f(u))z_n' dx d\tau \\
\leq\ & \int_\Omega (|z_n(t)|^2 + |z_n(0)|^2)dx + \int_\Omega (|u_n(t)|^{p-1} + |u(t)|^{p-1})\,|z_n(t)|^2\, dx \\
+\ & \int_\Omega (|u_n(0)|^{p-1} + |u(0)|^{p-1})\,|z_n(0)|^2\, dx + \int_0^t \int_\Omega |z_n|^2\,(|u_n'| + |u'|)dx d\tau \\
+\ & \int_0^t \int_\Omega (|u_n|^{p-2} + |u|^{p-2})\,|z_n|^2\,(|u_n'| + |u'|)dx d\tau \\
=\ & I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

A desigualdade de Holder e as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, implicam em

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Omega (|z_n(t)|^2 + |z_n(0)|^2)dx = \int_\Omega \left(\left| \int_0^t z_n'(\tau)d\tau + u_n(0)d\tau \right|^2 + |u_n(0)|^2 \right) dx \\
&\leq C\left[t\int_0^t \|z_n'\|^2\, d\tau dx + \|z_n(0)\|^2 \right] \leq \left[T\int_0^t F_n(\tau)d\tau + F_n(0) \right]
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

para todo $t \in [0, T]$, e

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_\Omega (|u_n(0)|^{p-1} + |u(0)|^{p-1})\, |z_n(0)|^2\, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (|u_n(0)|^{p-1} + |u(0)|^{p-1})^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_\Omega |z_n(0)|^6\, dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C \left(\|u_n(0)\|^{p-1}_{(p-1)\frac{3}{2}} + \|u(0)\|^{p-1}_{(p-1)\frac{3}{2}} \right) \|z_n(0)\|_1^2 \leq C F_n(0), \end{aligned} \tag{2.79}$$

pois $u_n(0) \to u(0)$ em $L^{(p-1)\frac{3}{2}}(\Omega)$, por hipótese.

Pelas imersões

$$L^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{3}{2}}(\Omega), \qquad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega),$$

a desigualdade de Holder e (2.70), temos que

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^t \int_\Omega |z_n|^2\, (|u_n'| + |u'|) dx d\tau \leq C \int_0^t \|z_n\|_6^2 \left(\|u_n'\|_{\frac{3}{2}} + \|u'\|_{\frac{3}{2}} \right) d\tau \\ &\leq C \int_0^t \|z_n\|_1^2 \left(\|u_n'\|_{m+1} + \|u'\|_{m+1} \right) d\tau \leq C(K) \int_0^t F_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.80}$$

De $p\frac{m+1}{m} < 6$, temos que $\frac{6}{6-p} < m+1$, donde $L^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{6}{6-p}}(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^t \int_\Omega (|u_n|^{p-2} + |u|^{p-2})\, |z_n|^2\, (|u_n'| + |u'|) dx d\tau \\ &\leq \int_0^t \left(\int_\Omega \left(|u_n|^{p-2} + |u|^{p-2} \right)^{\frac{6}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{6}} \left(\int_\Omega \left[|z_n|^2\, (|u_n'| + |u'|) \right]^{\frac{6}{8-p}} dx \right)^{\frac{8-p}{6}} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \left\{ \left(\|u_n\|_6^{p-2} + \|u\|_6^{p-2} \right) \left[\left(\int_\Omega |z_n|^6\, dx \right)^{\frac{2}{8-p}} \left(\int_\Omega |u_n'|^{\frac{6}{6-p}} + |u'|^{\frac{6}{6-p}}\, dx \right)^{\frac{6-p}{8-p}} \right]^{\frac{8-p}{6}} \right\} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \left(\|u_n\|_1^{p-2} + \|u\|_1^{p-2} \right) \|z_n\|_6^2 \left(\|u_n'\|_{\frac{6}{6-p}} + \|u'\|_{\frac{6}{p-2}} \right) \\ &\leq C(K) \int_0^t \left(\|u_n\|_1^{p-2} + \|u\|_1^{p-2} \right) \|z_n\|_1^2\, (\|u_n'\|_{m+1} + \|u'\|_{m+1}) d\tau \\ &\leq C(K) \int_0^t F_n(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{2.81}$$

onde também foram usados a desigualdade de Holder, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ e (2.70).

Resta estimar $I_2 = \int_\Omega (|u_n(t)|^{p-1} + |u(t)|^{p-1}) |z_n(t)|^2 \, dx$. Para isso, basta analisar o termo $\int_\Omega |u_n(t)|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx$, pois a análise de $\int_\Omega |u(t)|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx$ segue de forma análoga.

Considere dois subcasos, $3 < p < 5$ e $5 \leq p < 6$. Se $3 < p < 5$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_n(t)|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx &= \int_{\Omega_1} |u_n(t)|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx + \int_{\Omega_2} |u_n(t)|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx \\ &= I_{2,1} + I_{2,2}, \end{aligned} \tag{2.82}$$

onde $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |u_n(x)| \leq 1\}$ e $\Omega_2 = \{x \in \Omega; |u_n(x)| > 1\}$. Como feito anteriormente, para o termo I_1, temos que

$$\begin{aligned} I_{2,1} &\leq C\left(\|z_n(0)\|^2 + t\int_0^t \|u_n'(\tau)\|^2 \, d\tau \right) \\ &\leq C\left(F_n(0) + T\int_0^t F_n(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \tag{2.83}$$

Desde que $\epsilon \in (0, 5-p)$, é válido $p - 1 < 4 - \epsilon < 4$. Então, pelas desigualdades de Holder e Young e a interpolação de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= \int_{\Omega_2} |u_n(t)|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx \\ &\leq \int_\Omega |u_n(t)|^{4-\epsilon} |z_n(t)|^2 \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |u_n(t)|^6 \, dx \right)^{\frac{4-\epsilon}{6}} \left(\int_\Omega |z_n(t)|^{\frac{6}{1+\frac{\epsilon}{2}}} \, dx \right)^{2(\frac{1+\frac{\epsilon}{2}}{6})} \\ &\leq C \|u_n(t)\|_1^{4-\epsilon} \|z_n(t)\|^2_{H^{1-\frac{\epsilon}{4}}(\Omega)} \\ &\leq C(K)\left(\epsilon \|z_n(t)\|_1^2 + C_\epsilon \|z_n(t)\|^2 \right) \\ &\leq C(K)\left[\epsilon F_n(t) + C_\epsilon \left(F_n(0) + T.\int_0^t F_n(\tau) d\tau \right) \right], \end{aligned} \tag{2.84}$$

onde também foram usados a imersão $H^{1-\epsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{6}{1+2\epsilon}}(\Omega)$ e as desigualdades (2.70).

Então, substituindo (2.83) e (2.84) em (2.82), é válido que

$$\int_\Omega |u_n(t)|^{p-1} |\overline{u_n}(t)|^2 \, dx \leq C(K,\epsilon)\left(\overline{F_n}(0) + T\int_0^t \overline{F_n}(\tau) d\tau \right) + C(K)\epsilon \overline{F_n}(t), \tag{2.85}$$

para $3 < p < 5$.

Agora, conside $5 \leq p < 6$. Da densidade de $C^0(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\phi \in C_0(\Omega)$ tal que $\|u_0(0) - \phi\|_{\frac{3(p-1)}{2}} < \epsilon^{\frac{1}{p-1}}$. Com isso,

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega |u_n(t)|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx \\
\leq\ & C \int_\Omega |u_n(t) - u_0^n(0)|^{p-1} |z_n|^2 \, dx + C \int_\Omega |u_0^n(0) - u_0(0)|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx \\
+\ & C \int_\Omega |u_0(0) - \phi|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx + C \int_\Omega |\phi|^{p-1} |z_n(t)|^2 \, dx \\
=\ & J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

Por hipótese, $p\dfrac{m+1}{m} < 6$ e $5 \leq p < 6$, donde $m > 5$,

$$
5 \leq p < \frac{6m}{m+1}, \text{ e } \frac{3(p-1)}{2(m+1)} < \frac{3(5m-1)}{2(m+1)^2} < 1.
$$

Então, da desigualdade de Holder, imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ e as desigualdades (2.70), temos que

$$
\begin{aligned}
J_1 &= C \int_\Omega |u_n(t) - u_0^n(0)|^{p-1} |z_n|^2 \, dx \\
&\leq C \left(\int_\Omega |u_n(t) - u_n(0)|^{\frac{3(p-1)}{2}} \, dx \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_\Omega |z_n(t)|^6 \, dx \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= C \left(\int_\Omega \left| \int_0^t u_n'(\tau) d\tau \right|^{\frac{3(p-1)}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}} \|z_n\|_6^2 \\
&\leq C \int_\Omega \left(\int_0^t |u_n'(\tau)|^{m+1} \, d\tau \right)^{\frac{3(p-1)}{2(m+1)}} dx \ \ T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}} \|z_n\|_6^2 \\
&\leq C \int_\Omega \int_0^t |u_n'(\tau)|^{m+1} \, d\tau dx \ \ T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}} \|z_n\|_6^2 \\
&\leq C \int_0^t \|u_n'(\tau)\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau \ \ T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}} \|z_n\|_1^2 \\
&\leq C(K) T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}} F_n(t).
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

Pela desigualdade de Holder, sabemos que

$$J_2 = C\int_\Omega |u_0^n(0)-u_0(0)|^{p-1}|z_n(t)|^2\,dx \le \|u_0^n(0)-u_0(0)\|^{p-1}_{\frac{3(p-1)}{2}}\|z_n(t)\|_6^2 \le C\epsilon F_n(t), \tag{2.88}$$

uma vez que, $u_0^n(0)\to u_0(0)$ em $L^{\frac{3(p-1)}{2}}(\Omega)$, para n suficientemente grande. Novamente pela desigualdade de Holder, concluímos que

$$J_3 = C\int_\Omega |u_0(0)-\phi|^{p-1}|z_n(t)|^2\,dx \le \|u_0(0)-\phi\|^{p-1}_{\frac{3(p-1)}{2}}\|z_n(t)\|_6^2 \le C\epsilon F_n(t), \tag{2.89}$$

pois $\|u_0(0)-\phi\|_{\frac{3(p-1)}{2}} < \epsilon^{\frac{1}{p-1}}$. Por fim, usando argumentos similares aos usados anteriormente, é válido que

$$\begin{aligned} J_4 = C\int_\Omega |\phi|^{p-1}|z_n(t)|^2\,dx &\le C(\epsilon)\int_\Omega |z_n(t)|^2\,dx \\ &\le C(\epsilon)\left(F_n(0)+T\int_0^t F_n(\tau)d\tau\right), \end{aligned} \tag{2.90}$$

pois $\phi\in C_0(\Omega)$.

Substituindo as desigualdades (2.87)-(2.90) em (2.86), concluímos que

$$\int_\Omega |u_n(t)|^{p-1}|\overline{u_n}(t)|^2\,dx \le C(K)\left(T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}}+\epsilon\right)\overline{F_n}(t) + C(K)\left(\overline{F_n}(0)+T\int_0^t \overline{F_n}(\tau)d\tau\right), \tag{2.91}$$

para $5\le p<6$.

De (2.85) e (2.91), temos que

$$\int_\Omega |u_n(t)|^{p-1}|z_n(t)|^2\,dx \le C(K)\left(T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}}+\epsilon\right)F_n(t) + C(K,\epsilon)\left(F_n(0)+T\int_0^t F_n(\tau)d\tau\right), \tag{2.92}$$

para qualquer $3<p<6$, ou seja,

$$I_2 \le C(K)\left(T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}}+\epsilon\right)F_n(t) + C(K,\epsilon)\left(F_n(0)+T\int_0^t F_n(\tau)d\tau\right), \tag{2.93}$$

para todo $3<p<6$.

Substituindo as desigualdade (2.77)-(2.81), (2.93) em (2.75), resulta em

$$\begin{aligned} &\int_0^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u))z_n'\,dxd\tau \\ \le\ & C(K)\left(T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}}+\epsilon\right)F_n(t) + C(K,T,\epsilon)\left(F_n(0)+T\int_0^t F_n(\tau)d\tau\right). \end{aligned}$$

Então, por (2.72), obtemos

$$F_n(t) \leq C(K)\left(T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}}+\epsilon\right)F_n(t)+C(K,T,\epsilon)\left(F_n(0)+T\int_0^t F_n(\tau)d\tau\right),$$

para todo $t\in[0,T]$. Consequentemente, considerando ϵ e T suficientemente pequenos, de modo que $C(K)\left(T^{\frac{3(p-1)m}{2(m+1)}}+\epsilon\right)<1$, segue que

$$\begin{aligned} F_n(t) &\leq C(K,T,m,\epsilon)F_n(0)e^{(C(K,T,m,\epsilon))} \\ &\leq C(K,T,m,\epsilon)F_n(0)\to 0, \end{aligned} \tag{2.94}$$

uniformemente em $[0,T]$, pelo Lema de Gronwall.

Portanto, de (2.74) e (2.94), temos que

$$F_n(t)=\frac{1}{2}\left(\|u_n'-u'\|_\rho^2+\|u_n-u\|_1^2+\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla(\eta_n^t-\eta^t)\right\|^2\right)\to 0,$$

quando $n\to\infty$, uniformemente em $[0,T]$, para qualquer $1\leq p<6$.

Logo,

$$u_n'\to u' \text{ em } C([0,T],L_\rho^2(\Omega))$$

e

$$u_n\to u \text{ em } C([0,T],H_0^1(\Omega)).$$

Mas, $u\in L^2(\Omega)$ se, e somente se, $u\in L_\rho^2(\Omega)$. Então,

$$u_n'\to u' \text{ em } C([0,T],L^2(\Omega)),$$

obtendo o desejado em (2.69), finalizando a prova deste resultado. □

Observação 2.0.4. *Com raciocínio análago ao usado na demonstração do Teorema 2.0.2, se $u_0(0)\in L^{\frac{3(p-1)}{2}}(\Omega)$ e $f\in C^2(\mathbb{R})$ tal que $|f''(s)|\leq C(|s|^{p-2}+1)$, para $p>3$, concluímos que a solução fraca de (2.1) é única.*

Capítulo 3

Existência global de soluções para a equação da onda viscoelástica

Este capítulo é dedicado ao estudo da existência global de soluções para o problema (2.1). No que segue, assuma que as Hipóteses (H-1)-(H-7) são válidas.

No primeiro resultado deste capítulo, mostraremos que se o termo de dissipação friccional domina o termo de fonte, ou seja, se $m \geq p$, a solução fraca é global.

Teorema 3.0.1. *Suponha que as Hipóteses (H-1) - (H-7) são válidas e que $u^0(0) \in L^{p+1}(\Omega)$. Se $m \geq p$, a solução fraca de (2.1) é global.*

Demonstração. Por definição, temos que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \mathcal{E}(t) + \int_0^\infty g(s) \left\|\eta^t(s)\right\|^2 dt \tag{3.1}$$

onde

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2 \, dx + \int_0^\infty g(s) \left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 ds\right].$$

Denote por $V(t) = \mathcal{E}(t) + \dfrac{1}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}$.

Seja u uma solução fraca de (2.1) em $[0, T]$. Da Observação 2.0.3, segue que

$$V(t) + \int_0^t h(u_t)u_t \, dx d\tau \leq V(0) + \int_0^t \int_\Omega f(u)u_t \, dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega |u(\tau)|^{p-1} u(\tau)u_t(\tau) \, dx d\tau. \tag{3.2}$$

Utilizando a Hipótese (H-5) e as desigualdades de Holder e Young, obtemos

$$\left|\int_0^t \int_\Omega f(u)u_t \, dx d\tau\right| \leq C \int_0^t \int_\Omega (|u|^p + 1)\, |u_t| \, dx d\tau \tag{3.3}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\int_0^t \|u_t\|_{p+1}\left(\|u\|_{p+1}^p + |\Omega|^{\frac{p}{p+1}}\right)d\tau \\
&\leq \epsilon\int_0^t \|u_t\|_{p+1}^{p+1}d\tau + C_\epsilon\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}d\tau + C_{T,\epsilon}|\Omega| \\
&\leq \epsilon\int_0^t \|u_t|_{p+1}^{p+1}d\tau + C_\epsilon\int_0^t V(\tau)d\tau + C_{T,\epsilon}|\Omega|,
\end{aligned}
$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Analogamente,

$$
\left|\int_0^t\int_\Omega |u(\tau)|^{p-1}u(\tau)u_t(\tau)\ dxd\tau\right| \leq \epsilon\int_0^t \|u_t|_{p+1}^{p+1}d\tau + C_\epsilon\int_0^t V(\tau)d\tau. \tag{3.4}
$$

Também, da Hipótese (H-4), vem que

$$
\int_0^t\int_\Omega h(u_t)u_t dxd\tau \geq b_1\int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1}d\tau - b_1 t|\Omega|. \tag{3.5}
$$

Substituindo (3.3)-(3.5) em (3.2), temos

$$
\begin{aligned}
V(t) + b_1\int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1}d\tau &\leq V(0) + \epsilon\int_0^t \|u_t|_{p+1}^{p+1}d\tau + C_\epsilon\int_0^t V(\tau)\,d\tau + C_{T,\epsilon,|\Omega|} \\
&\leq V(0) + \epsilon\int_0^t \|u_t|_{m+1}^{m+1}d\tau + C_\epsilon\int_0^t V(\tau)\,d\tau + C_{T,\epsilon,|\Omega|},
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

uma vez que, $m \geq p$. Escolhendo $\epsilon < a$ em (3.6), obtemos

$$
V(t) \leq (V(0) + C_{T,\epsilon,|\Omega|}) + C_\epsilon\int_0^t V(\tau)\,d\tau
$$

donde, pelo Lema de Gronwall, concluímos

$$
V(t) \leq (V(0) + C_{T,\epsilon,|\Omega|})e^{(C_\epsilon T)},
$$

para todo $t \in [0,T]$. Portanto,

$$
\lim_{t\to T_{\max}^-}\sup \mathcal{E}(t) < \lim_{t\to T_{\max}^-}\sup V(t) < \infty. \tag{3.7}
$$

Por outro lado, como $u_t = \eta_t + \eta_s$, segue que

$$
\int_0^t\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \eta^\tau(s)u_t dxdsd\tau = \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left[\left\|\eta^t(s)\right\|^2 - \left\|\eta^0(s)\right\|^2\right]ds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty g'(s)\left\|\eta^\tau(s)\right\|^2 dsd\tau,
$$

donde, usando as desigualdades de Holder e Young e o fato que $g'(s) \leq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|^2 ds &= \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^0(s)\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty g'(s)\left\|\eta^\tau(s)\right\|^2 dsd\tau ds \\
&\quad + \int_0^t\int_0^\infty g(s)\int_\Omega \eta^\tau(s)u_t dxdsd\tau \\
&\leq C\left\|u_t\right\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))} + C\int_0^t\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^\tau(s)\right\|^2 dsd\tau + C \\
&\leq C + C\int_0^t\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^\tau(s)\right\|^2 dsd\tau,
\end{aligned}
$$

uma vez que, $u_t \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Assim, pelo Lema de Gronwall, temos que

$$
\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\| ds \leq Ce^T,
$$

para todo $t \in [0,T]$. Consequentemente,

$$
\lim_{t\to T^-_{max}} \sup \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\| ds < \infty. \tag{3.8}
$$

Portanto, por (3.1), (3.7) e (3.8), concluímos que

$$
\lim_{t\to T_{\max -}} \sup \|U(t)\|^2_{\mathcal{H}} < \infty,
$$

para todo $0 < T_{max} < \infty$. Portanto, a solução fraca u obtida no Teorema 2.0.1 é global, como queríamos demonstrar. $\square$

Para demonstrar o Teorema 3.0.1, foi necessário impor que o termo de dissipação friccional domine o termo da fonte, isto é, $m \geq p$. No próximo teorema deste capítulo, esta hipótese não será necessária. Porém, antes de enunciá-lo, precisaremos de hipóteses adicionais, definições e resultados auxiliares.

No que segue, suponha válidas as seguintes hipóteses.

(H-8) Existe uma função não negativa $F \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $F'(s) = f(s)$ e F é homogênea de ordem $p+1$, ou seja, $F(\lambda s) = \lambda^{p+1}F(s)$, $\forall \lambda > 0, s \in \mathbb{R}$.

(H-9) Existem constantes positivas c_1, c_2 com $c_2 = k+1$, onde k é uma constante positiva, tais que $-c_1 g(s) \leqslant g'(s) \leqslant -c_2 g(s), \forall s \geq 0$.

(H-10) Em adição a Hipótese (H-4), suponha que $b_1 > \frac{g_0}{k}$ e, para $|s| < 1$, é válido

$$b_1|s|^2 \leqslant h(s)s \leqslant b_2|s|^2.$$

Como consequência da Hipótese (H-8), o Teorema da Função Homogênea de Euler garante que

$$f(s)s = (p+1)F(s), \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Também, pela hipótese (H-5), temos que $|f'(s)| \le C(|s|^{p-1} + 1)$. Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $M > 0$ tal que $|f(s)| \le M(|s|^p + 1)$, donde $F(s) \le \tilde{M}(|s|^{p+1} + 1)$, para $\tilde{M} > 0$. Portanto, pela homogeneidade de F, concluímos que

$$F(s) \le C\, |s|^{p+1}\,, \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

onde C é uma constante positiva.

Definimos a energia total do sistema (2.1) como

$$E(t) = \frac{1}{2}\, \|u_t(t)\|_\rho^2 + \frac{1}{2}\, \|u(t)\|_1^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \left\| \sqrt{a} \nabla \eta^t(s) \right\|^2 ds - \int_\Omega F(u(x,t))dx. \tag{3.11}$$

Também, definimos a energia total expandida do sistema (2.1) como

$$E_a(t) = \frac{1}{2}\, \|u(t)\|_1^2 + \frac{1}{2}\, \|u_t(t)\|_\rho^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \left\| \eta^t(s) \right\|_{H_a^1}^2 ds - \int_\Omega F(u(x,t))dx. \tag{3.12}$$

Pelas definições, $E(t) \le E_a(t)$ para $t \ge 0$.

Pela Hipótese (H-9), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^\infty & (-c_1 g(s)) \left\| \sqrt{a} \nabla (\eta_n^t - \eta^t) \right\|^2 dsdt \\ & \le \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^\infty g'(s) \left\| \sqrt{a} \nabla (\eta_n^t - \eta^t) \right\|^2 ds \\ & \le \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^\infty (-c_2 g(s)) \left\| \sqrt{a} \nabla (\eta_n^t - \eta^t) \right\|^2 dsdt. \end{aligned}$$

Mas, pela demonstração da Observação 2.0.3, $\sqrt{a}\nabla\eta_n^t \to \sqrt{a}\nabla\eta^t$ em $L^2(0,T; L_g^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)))$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^\infty (-c_1 g(s)) \left\| \sqrt{a} \nabla (\eta_n^t - \eta^t) \right\|^2 dsdt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^\infty (-c_2 g(s)) \left\| \sqrt{a} \nabla (\eta_n^t - \eta^t) \right\|^2 dsdt = 0$$

donde,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^\infty g'(s) \left\| \sqrt{a} \nabla (\eta_n^t - \eta^t) \right\|^2 dsdt,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta_n^t\right\|^2 ds\ dt=\int_0^T\int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t\right\|^2 ds\ dt. \tag{3.13}$$

A convergência (3.13), juntamente com a Observação 2.0.3, implicam em

$$E(T)-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2\ dsdt+\int_0^T\int_\Omega h(u_t(t))u_t(t)\ dxdt=E(0), \tag{3.14}$$

para $1\leq p<6$.

Podemos afirmar que a energia total expandida $E_a(t)$ é não crescente. Com efeito, pela definição de $E(t)$ e $E_a(t)$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_a(t) &= \frac{d}{dt}E(t)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|^2\ ds\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2\ ds-\int_\Omega h(u_t(t))u_t(t)\ dx+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|^2\ ds\right),\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde usamos a identidade (3.14).

Mas $\eta_t^t(x,s)=-\eta_s^t(x,s)+u_t(x,t)$, $g(\infty)=0$ e $\eta^t(x,0)=0$, então

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|^2\ ds\right)=\int_0^\infty g'(s)\left\|\eta^t(s)\right\|^2\ ds+\int_0^\infty g(s)\left(u_t(t),\eta^t(s)\right)ds. \tag{3.16}$$

Das desigualdades de Holder e Young, obtemos

$$\int_0^\infty g(s)\left(u_t(t),\eta^t(s)\right)ds\leq\frac{g_0}{k}\left\|u_t(t)\right\|^2+\int_0^\infty kg(s)\left\|\eta^t(s)\right\|^2 ds, \tag{3.17}$$

onde k é uma constante positiva verificando $c_2=k+1$. De (3.16) e (3.17), segue que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|^2\ ds\right)\leq\int_0^\infty[g'(s)+kg(s)]\left\|\eta^t(s)\right\|^2\ ds+\frac{g_0}{k}\left\|u_t(t)\right\|^2. \tag{3.18}$$

Substituindo (3.18) em (3.15) e definindo os conjuntos $\Omega_1=\{x\in\Omega;|u(x,t)|<1\}$, $\Omega_2=\{x\in\Omega;|u(x,t)|\geqslant 1\}$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_a(t) &\leq \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2\ ds-\int_\Omega h(u_t(t))u_t(t)\ dx\\ &\quad+\int_0^\infty[g'(s)+kg(s)]\left\|\eta^t(s)\right\|^2\ ds+\frac{g_0}{k}\left\|u_t(t)\right\|^2 \qquad (3.19)\\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2\ ds+\int_0^\infty[g'(s)+kg(s)]\left\|\eta^t(s)\right\|^2\ ds\end{aligned}$$

$$-\int_{\Omega_1}\left(b_1-\frac{g_0}{k}\right)|u_t(t)|^2\ dx-\int_{\Omega_2}\left(b_1-\frac{g_0}{k}\right)|u_t(t)|^{m+1}\ dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2\ ds+\int_0^\infty[g'(s)+kg(s)]\left\|\eta^t(s)\right\|^2\ ds$$

$$-\frac{\left(b_1-\frac{g_0}{k}\right)}{b_2}\int_\Omega h(u_t(t))u_t(t)dx,$$

onde usamos as hipóteses (H-4) e (H-10). Com isso, segue que

$$\frac{d}{dt}E_a(t)\leq 0, \tag{3.20}$$

uma vez que, $b_1-\frac{g_0}{k}>0$. Portanto $E_a(t)$ é não crescente.

Note que a energia total expandida definida em (3.12) é a soma da energia cinética $\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_\rho^2$ com a energia potencial ampliada

$$J(t):=\frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_1^2+\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds\right)-\int_\Omega F(u(x,t))dx. \tag{3.21}$$

Isso, e o conceito da variedade de Nehari, nos motiva definir

(i) o conjunto M no espaço $L_g^2(\mathbb{R}^-,H_0^1(\Omega))$ dado por

$$M=\left\{\begin{array}{l} v\in L_g^2(\mathbb{R}^-;H_0^1(\Omega))\backslash\{0\}; v \text{ é fracamente contínua em } \ t=0 \text{ e} \\ \|v(0)\|_1^2+\displaystyle\int_0^\infty g(s)\,\|v(0)-v(-s)\|_{H_a^1}^2 ds=(p+1)\int_\Omega F(v(x,0))dx \end{array}\right\}; \tag{3.22}$$

(ii) o funcional J, para cada $v\in L_g^2(\mathbb{R}^-;H_0^1(\Omega))$, onde v é fracamente contínuo em $t=0$ dado por

$$\mathcal{J}(v)=\frac{1}{2}\left(\|v(0)\|_1^2+\int_0^\infty g(s)\,\|v(0)-v(-s)\|_{H_a^1}^2 ds\right)-\int_\Omega F(v(x,0))dx. \tag{3.23}$$

Observe que existe uma relação entre $J(t)$ e $\mathcal{J}(v)$. Se $u^0\in L_g^2(\mathbb{R}^-;H_0^1(\Omega))$ descreve a história passada do problema (2.1), então $\mathcal{J}(u^0)=J(0)$.

Lema 3.0.1. *Suponha que* $1<p\leq 5$, *então*

$$d=\inf_{v\in M}\mathcal{J}(v)=\inf_{v\in L_g^2(\mathbb{R}^-;H_0^1(\Omega))\backslash\{0\}}\sup\mathcal{J}(\lambda v)>0,$$

para todo $\lambda\geq 0$.

Demonstração. Seja $v \in M$. De (3.22) e (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(v) &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p+1}\right)\left(\|v(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\, \|v(0) - v(-s)\|_{H_a^1}^2\, ds\right) \\ &\geqslant \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p+1}\right)\|v(0)\|_1^2 > 0, \end{aligned} \tag{3.24}$$

pois $p > 1$. Novamente por (3.22), temos que

$$\begin{aligned} \|v(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\, \|v(0) - v(-s)\|_{H_a^1}^2\, ds &= (p+1)\int_\Omega F(v(x,0))dx \\ &\leq C\, \|v(0)\|_{p+1}^{p+1} \leq C\, \|v(0)\|_1^{p+1}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde usamos (3.10) e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

Observe que $v(0) \neq 0$, pois caso contrário, se $v(0) = 0$ em $H_0^1(\Omega)$ teríamos por (3.25) que $\displaystyle\int_0^\infty g(s)\, \|v(-s)\|_{H_a^1}^2\, ds = 0$, ou seja, $v \equiv 0$, contradizendo o fato de $v \in M$. Dividindo ambos os lados de (3.25) por $\|v(0)\|_1^2$, obtemos

$$1 \leq C\, \|v(0)\|_1^{p-1}. \tag{3.26}$$

Então, pela desigualdade (3.24), temos que

$$d = \inf_{v \in M} \mathcal{J}(v) > 0. \tag{3.27}$$

Por outro lado, considere $v \in L_g^2(\mathbb{R}^-; H_0^1(\Omega))\backslash\{0\}$. Da Hipótese (H-8), vem que

$$\mathcal{J}(\lambda v) = \frac{1}{2}\lambda^2\left(\|v(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\, \|v(0) - v(-s)\|_{H_a^1}^2\, ds\right) - \lambda^{p+1}\int_\Omega F(v(x,0))dx,$$

para todo $\lambda \geqslant 0$, donde

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\mathcal{J}(\lambda v)\right) = \lambda\left[\|v(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\, \|v(0) - v(-s)\|_{H_a^1}^2\, ds - (p+1)\lambda^{p-1}\int_\Omega F(v(x,0))dx\right].$$

Denotando por λ_0 o único ponto crítico da função $\lambda \mapsto \mathcal{J}(\lambda v)$ em $(0, \infty)$, temos que

$$\|v(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\, \|v(0) - v(-s)\|_{H_a^1}^2\, ds = (p+1){\lambda_0}^{p-1}\int_\Omega F(v(x,0))dx \tag{3.28}$$

e

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{J}(\lambda v) = \mathcal{J}(\lambda_0 v). \tag{3.29}$$

E ainda, a igualdade (3.28) implica que $\lambda_0 v \in M$. Logo, a desigualdade

$$\mathcal{J}(\lambda_0 v) \geq \inf_{u \in M} \mathcal{J}(u) = d \tag{3.30}$$

é válida. Consequentemente, por (3.29) e (3.30), obtemos que

$$d \leq \inf_{v \in L^2_g(\mathbb{R}^-; H^1_0(\Omega)) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{J}(\lambda v). \tag{3.31}$$

Além disso, de $v \in M$ e (3.28), concluímos que $\lambda_0 = 1$. Então $\sup\limits_{\lambda \geq 0} \mathcal{J}(\lambda v) = \mathcal{J}(v)$ para $v \in M$. Assim,

$$d = \inf_{v \in M} \mathcal{J}(v) = \inf_{v \in M} \sup_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{J}(\lambda v) \geq \inf_{v \in L^2_g(\mathbb{R}^-; H^1_0(\Omega)) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{J}(\lambda v). \tag{3.32}$$

De (3.31) e (3.32), temos que

$$d = \inf_{v \in L^2_g(\mathbb{R}^-; H^1_0(\Omega)) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{J}(\lambda v). \tag{3.33}$$

Portanto,

$$d = \inf_{v \in M} \mathcal{J}(v) = \inf_{v \in L^2_g(\mathbb{R}^-; H^1_0(\Omega)) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{J}(\lambda v) > 0,$$

pelas igualdades (3.27) e (3.33), como desejado. □

Agora, defina o conjunto $\mathcal{W} \subset L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega))$ da forma

$$\mathcal{W} = \left\{ v \in L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega)); v \ \text{ é fracamente contínua em } t = 0 \ \text{ e } \mathcal{J}(v) < d \right\}.$$

O conjunto $\mathcal{W}$ é chamado de poço de potencial no espaço $L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega))$. A partir de $\mathcal{W}$, considere os subconjuntos $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ de $\mathcal{W}$, definidos da forma

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ v \in \mathcal{W}; \|v(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \, \|v(0) - v(-s)\|^2_{H^1_a} ds > (p+1) \int_\Omega F(v(x,0)) dx \right\} \cup \{0\}$$

e

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ v \in \mathcal{W}; \|v(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \, \|v(0) - v(-s)\|^2_{H^1_a} ds < (p+1) \int_\Omega F(v(x,0)) dx \right\}.$$

Note que, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ e $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}$.

Veremos no próximo, e último, resultado deste capítulo que se $u^0 \in \mathcal{W}_1$ e $E_a(0) < d$, a solução fraca obtida no Teorema 2.0.1 é global, mesmo quando a hipótese $m > p$, exigida no Teorema 3.0.1, não é imposta. Mas, antes de enunciar e demonstrar este resultado, definiremos uma função.

Dada a solução fraca de (2.1) em $(-\infty, T)$ com história passada $u^0 \in L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega))$ defina, para cada $t \in (0, T)$, a função $u^t : \mathbb{R}^- \to H^1_0(\Omega)$ dada por

$$u^t(\tau) = u(t+\tau).$$

Observe que,

$$\mathcal{J}(u^t) = \frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds\right) - \int_\Omega F(u(x,t))dx. \tag{3.34}$$

Teorema 3.0.2. *Seja $1 < p \leq 5$ e suponha que as Hipóteses (H-1)-(H-10) são válidas. Também, suponha que $E_a(0) < d$ e $u^0 \in \mathcal{W}_1$. Se u é a solução fraca de (2.1) em $(-\infty, T)$, então $u^t \in \mathcal{W}_1$ para todo $t \in (0,T)$ e a solução fraca u é global. Além disso, é válido que:*

$$\mathcal{E}_a(t) < d\left(\frac{p+1}{p-1}\right); \tag{3.35}$$

$$0 \leq \left(\frac{p-1}{p+1}\right)\mathcal{E}_a(t) \leq E_a(t) \leq \mathcal{E}_a(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.36}$$

onde $\mathcal{E}_a$ representa a energia linear expandida definida por

$$\mathcal{E}_a(t) := \frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_1^2 + \|u_t(t)\|_\rho^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds\right). \tag{3.37}$$

Demonstração. Como $E_a(t)$ é não crescente, $E_a(t) \leq E_a(0)$, para todo $t \in (0,T)$. Disso, da hipótese $E_a(0) < d$ e de (3.34), obtemos

$$\mathcal{J}(u^t) = \mathcal{J}(u) \leq E_a(t) \leq E_a(0) < d, \quad \forall t \in (0,T), \tag{3.38}$$

implicando em $u^t \in \mathcal{W}$, para todo $t \in (0,T)$.

Considere $u^0 \in \mathcal{W}_1$. Verificaremos que $u^t \in \mathcal{W}_1$, para todo $t \in (0,T)$. Se $u^0 = 0$, temos que a única solução fraca u de (2.1) é tal que $u(t) = 0$, para todo $t \in (0,T)$, donde $u^t \in \mathcal{W}_1$ para todo $t \in (0,T)$. Se $u^0 \neq 0$ suponha, por contradição, que existe $t_1 \in (0,T)$ tal que $u^{t_1} \notin \mathcal{W}_1$. Como $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$, $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}$ e $u^t \in \mathcal{W}$, para todo $t \in (0,T)$, temos que $u^{t_1} \in \mathcal{W}_2$.

Temos que a função $t \mapsto \int_\Omega F(u(t))\, dx$ é contínua em $[0,T)$. De fato, considere $t_0 \in [0,T)$ fixo porém arbitrário. Pelo Teorema do Valor médio e a Hipótese (H-8), temos que existe uma constante positiva C_p, dependendo de p, verificando:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |F(u(t)) - F(u(t_0))|\, dx &\leq C_p \int_\Omega (|u(t)|^p + |u(t_0)|^p + |u(t)| + |u(t_0)|)|u(t) - u(t_0)|dx \\ &\leq C_p(||u(t)||_{\frac{6}{5}p}^p + ||u(t_0)||_{\frac{6}{5}p}^p)||u(t) - u(t_0)||_6 + C_p(||u(t)|| + ||u(t_0)||)||u(t) - u(t_0)||.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Pela imsersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, a hipótese $p \leqslant 5$ e $u \in C^0([0,T], H_0^1(\Omega))$, temos que a desigualdade (3.39) implica na continuidade da função $\int_\Omega F(u(t))\,dx$ em $[0,T)$.

Pela definição dos conjuntos $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$, $u^0 \neq 0 \in \mathcal{W}_1$ e $u^{t_1} \in \mathcal{W}_2$, existe $\hat{t} \in (0,t_1)$ verificando

$$\left\|u(\hat{t})\right\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^{\hat{t}}(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds = (p+1)\int_\Omega F(u(x,\hat{t}))dx. \tag{3.40}$$

Denote por t^s o supremo de todos os $\hat{t} \in (0,t_1)$ satisfazendo (3.40). Então, $t^s \in (0,t_1)$, t^s satisfaz (3.40) e $u^t \in \mathcal{W}_2$, para todo $t \in (t^s,t_1]$.

Suponha que $u^{t^s} \neq 0$. Neste caso, $u^{t^s} \in M$ e, pelo Lema 3.0.1 e (3.34), obtemos

$$\mathcal{J}(u^{t^s}) \geq d,$$

contradizendo (3.38).

Agora, suponha que $u^{t^s} = 0$. Para todo $t \in (t^s,t_1]$, $u^t \in \mathcal{W}_2$, logo

$$\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds < (p+1)\int_\Omega F(u(x,t))dx \leqslant C\,\|u(t)\|_1^2, \tag{3.41}$$

onde usamos (3.10) e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$. Então $0 < \|u(t)\|_1^2$, para todo $t \in (t^s,t_1]$. Dividindo ambos os lados de (3.41) por $\|u(t)\|_1^2$, obtemos

$$1 < C\,\|u(t)\|_1^{p-1},$$

implicando em $\|u(t)\|_1 > s_1 > 0$, para todo $t \in (t^s,t_1]$. Por continuidade, obtemos $\|u(t^s)\|_1 > s_1 > 0$, gerando um abusrdo.

Como em ambos os casos temos uma contradição, concluímos que $u^t \in \mathcal{W}_1$ para todo $t \in (0,T)$. Com isso, para todo $t \in [0,T)$, é válido que

$$\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds > (p+1)\int_\Omega F(u(x,t))dx. \tag{3.42}$$

As desigualdades (3.42) e (3.38), implicam em

$$\int_\Omega F(u(x,t))\,dx < \frac{2d}{p-1}, \quad \text{para todo } t \in [0,T). \tag{3.43}$$

Uma vez que, $\mathcal{E}_a(t) = E_a(t) + \int_\Omega F(u(t))\,dx$, pela desigualdade (3.43), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a(t) &\leq E_a(0) + \int_\Omega F(u(x,t))\,dx \\ &< d\left(\tfrac{p+1}{p-1}\right), \end{aligned} \tag{3.44}$$

para todo $t \in [0, T)$, o que verifica a desigualdade (3.35). Disso também concluímos que a solução fraca é global e que $\mathcal{E}_a(t)$ é uniformemente limitada.

Por outro lado, de $E_a(t) \leq \mathcal{E}_a(t)$ e $u^t \in \mathcal{W}_1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(u(x,t))\, dx &\leq \tfrac{1}{p+1}\left(\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\eta^t(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds \right) \\ &\leq \tfrac{2}{p+1}\, \mathcal{E}_a(t), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} E_a(t) &= \mathcal{E}_a(t) - \int_\Omega F(u(x,t))\, dx \\ &\geq \mathcal{E}_a(t) - \tfrac{2}{p+1}\, \mathcal{E}_a(t) = \tfrac{p-1}{p+1}\, \mathcal{E}_a(t) \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, finalizando a prova deste resultado. □

Capítulo 4

Estabilidade da equação da onda viscoelástica

Neste capítulo, investigaremos a estabilidade do sistema (2.1). De modo a obter as taxas de decaimento uniforme para (2.1), assuma que as Hipóteses (H-1)- (H-10), se verifiquem. Nosso objetivo é provar que a energia total expandida decai para zero quando $t \to \infty$, no entanto, antes de estabelecermos o resultado de decaimento uniforme da energia, faremos algumas considerações.

Seja $1 < p \leqslant 5$. Por (3.10), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) \quad & \geq \tfrac{1}{2}\left(\|u(0)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^0(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds\right) - C\,\|u(0)\|_{p+1}^{p+1} \\ & \geq \tfrac{1}{2}\|u(0)\|_1^2 - M_0\,\|u(0)\|_1^{p+1}, \end{aligned}$$

onde M_0 é uma constante positiva dependendo da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$. Inspirados nesta desigualdade, defina $G = \dfrac{1}{2}s^2 - M_0 s^{p+1}$. Logo,

$$\mathcal{J}(u) \geq G\left(\|u(0)\|_1\right). \tag{4.1}$$

Observe que $G'(s) = s(1 - M_0(p+1)s^{p-1})$ e existe um único $s_0 > 0$ satisfazendo

$$(p+1)M_0 s_0^{p-1} = 1 \quad \text{e} \quad \sup_{s\in[0,\infty)} G(s) = G(s_0) > 0. \tag{4.2}$$

Defina o conjunto $\tilde{W}_1$ da forma

$$\tilde{W}_1 = \{v \in L_g^2(\mathbb{R}^-, H_0^1(\Omega));\, \|v(0)\|_1 < s_0, \mathcal{J}(v) < G(s_0)\}.$$

Note que, $\tilde{W}_1 \subset W_1$. Com efeito, seja $v \in \tilde{W}_1$ tal que $v \neq 0$. De (4.1), sabemos que

$$\mathcal{J}(\lambda v) \geq G\left(\|\lambda v(0)\|_1\right), \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Então, $\sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{J}(\lambda v) \geq G(s_0)$. No Lema 3.0.1, vimos que $d = \inf\limits_{v \in L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega))\setminus\{0\}} \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{J}(\lambda v)$, donde, $d \geqslant G(s_0)$. Além disso, como $\|v(0)\|_1 < s_0$ e (4.2) é válida, obtemos

$$\begin{aligned}(p+1)\int_\Omega F(v(0))dx &\leq (p+1)C\,\|v(0)\|^{p+1}_{p+1} \leq (p+1)M\,\|v(0)\|^{p+1}_1 \\ &< \|v(0)\|^2_1\left[(p+1)Ms_0^{p-1}\right] \\ &\leq \|v(0)\|^2_1 + \int_0^\infty g(s)\,\|v(0)-v(-s)\|^2_{H^1_a}\,ds,\end{aligned}$$

verificando que $\tilde{W}_1 \subset W_1$.

A partir do conjunto $\tilde{W}_1$, definimos para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o subconjunto fechado $\tilde{W}^\delta_1 \subset \tilde{W}_1$ da forma

$$\tilde{W}^\delta_1 := \{v \in L^2_g(\mathbb{R}^-, H^1_0(\Omega)); \|v(0)\|_1 \leq s_0 - \delta, \mathcal{J}(v) \leq G(s_0-\delta)\}.$$

Seja u a solução fraca global de (2.1). Se $E_a(0) \leq G(s_0-\delta)$ e a história passada $u^0 \in \tilde{W}^\delta_1$, então $u^t \in \tilde{W}^\delta_1$, para todo $t \geqslant 0$. De fato, sabemos que $\mathcal{J}(u^t) \leq E_a(t) \leqslant E_a(0)$, $\mathcal{J}(u^t) \leq G(s_0-\delta)$, para todo $t \geq 0$ e $\|u^0(0)\|_1 \leq s_0-\delta$. Resta verificar que $\|u^t(0)\|_1 \leqslant s_0-\delta$, para todo $t \geq 0$. Suponha, por contradição, que $\|u^t(0)\|_1 \leqslant s_0-\delta$ não ocorra para todo $t \geq 0$. Então, pela continuidade de u, existe $t_1 > 0$ e $\epsilon \in (0,\delta)$ tal que $\|u^{t_1}(0)\|_1 = s_0-\delta+\epsilon$. Como G é estritamente crescente em $(0, s_0)$, temos que $\mathcal{J}(u^{t_1}) \geq G(\|u^{t_1}(0)\|) = G(s_0-\delta+\epsilon) > G(s_0-\delta)$, contradizendo $\mathcal{J}(u^t) \leqslant G(s_0-\delta)$, para todo $t \geqslant 0$. Portanto, $\|u^t(0)\|_1 \leqslant s_0-\delta$, para todo $t \geq 0$, concluindo o desejado.

Para a prova do resultado de decaimento, seguiremos a estrutura dada por Lasieka e Tataru em [25]. Seja $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função contínua, crescente, côncava, que se anula na origem e satisfazendo

$$\phi(h(s)s) \geq |h(s)|^2 + s^2 \quad \text{para} \quad |s| < 1. \tag{4.3}$$

Observe que, a Hipótese (H-10) nos permite definir a função ϕ. Considere a função $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ como

$$\Phi(s) := \phi(s) + s, \quad s \geq 0.$$

Teorema 4.0.1. *Suponha que as Hipóteses (H-1)-(H-10) são válidas,* $1 < p < 5$, $u^0 \in \tilde{W}^\delta_1$ *e* $E_a(0) < G(s_0-\delta)$, *para algum* $\delta > 0$. *Suponha também que,* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{\frac{3}{2}(m-1)}(\Omega))$ *e* $u^0(0) \in L^{m+1}(\Omega)$, *se* $m > 5$. *Então, a energia total expandida* $E_a(t)$ *satisfaz*

$$E_a(t) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right),$$

para todo $t > T \geq T_0$, onde $T_0 = max\left\{1, 8c_0\frac{p+1}{p-1}, \frac{1}{|\Omega|}\right\}$ e $S(t)$ é solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S + \left[Id - \left(Id + (C(T)\Phi)^{-1}\right)^{-1}\right](S) = 0, \quad S(0) = E_a(0). \tag{4.4}$$

Além disso, $S(t)$ é decrescente e $S(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Demonstração. Seja u a solução fraca global de (2.1), estabelecida no Teorema 3.0.2. Defina

$$F_a(T) := E_a(0) - E_a(T). \tag{4.5}$$

Pelo que vimos em (3.19), é válido que

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad -\tfrac{1}{2}\int_0^T \int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2\, ds\; dt - \int_0^T\int_0^\infty [g'(s) + kg(s)]\left\|\eta^t(s)\right\|^2\, ds\; dt \\ &\quad + \left(b_1 - \tfrac{g_0}{k}\right)\tfrac{1}{b_2}\int_0^T\int_\Omega h(u'(t))u'(t)dx\; dt \\ &\leq \quad F_a(T). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para provarmos o desejado neste resultado, basta verificarmos a desigualdade

$$E_a(T) \leq C(T)\Phi(F_a(T)), \tag{4.7}$$

para todo $T \geq T_0$, $T_0 = max\left\{1, 8c_0\frac{p+1}{p-1}, \frac{1}{|\Omega|}\right\}$. De fato, a igualdade (4.5) e a desigualdade (4.7), implicam em

$$E_a(T) \leq C(T)\Phi(E_a(0) - E_a(T)),$$

ou seja,

$$E_a(T) + (C(T)\Phi)^{-1}(E_a(T)) \leq E_a(0).$$

Como $E_a(t)$ é não crescente, podemos repetir a estimativa acima $\nu + 1$ vezes, obtendo

$$E_a((\nu+1)T) + (C(T)\Phi)^{-1}(E_a((\nu+1)T)) \leq E_a(\nu T),$$

para qualquer $\nu = 0, 1, 2, ...$ Como $(C(T)\Phi)^{-1}$ é uma função real positiva, crescente e nula na origem, vem do Lema 1.2.2 que

$$E_a(\nu T) \leq S(\nu), \tag{4.8}$$

para qualquer $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, onde S é solução de (4.4).

Considere $t > T$. Logo, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $t = \nu T + r$, com $0 \leq r < T$. Consequentemente, $\nu = \frac{t}{T} - \frac{r}{T} > \frac{t}{T} - 1$. Então, usando a desigualdade (4.8) e o fato de

$E_a(t), S(t)$ serem não crescentes, concluímos

$$E_a(t) = E_a(\nu T + r) \leq E_a(\nu T) \leq S(\nu) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right),$$

para qualquer $t > T$, como queríamos.

A partir de agora, demonstraremos (4.7). Sabemos que $u, u' \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, então

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |u|^{m+1} \; dxdt &= \int_0^T \int_\Omega \left| \int_0^t u'(\tau) d\tau + u_0 \right|^{m+1} \; dxdt \\ &\leq 2^m \left(T^{m+1} \|u'\|_{L^{m+1}(\Omega\times(0,T))}^{m+1} + T \|u_0\|_{m+1}^{m+1} \right) < \infty, \end{aligned} \tag{4.9}$$

uma vez que, $u' \in L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$ e $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$. Logo, $u \in L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$ e, com isso, u satisfaz a regularidade exigida para ϕ na definição de solução fraca. Então, tomando $\phi = u$ em (2.4), temos

$$\begin{aligned} 2\int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt &= -\int_\Omega \rho(x)u'(x,T)u(x,T)dx + \int_\Omega \rho(x)u'(x,0)u(x,0)dx + 2\int_0^T \|u'(t)\|_\rho^2 \, dt \\ &+ \int_0^T \int_0^\infty g(s) \left\| \sqrt{a}\nabla\eta^t(s) \right\|^2 dsdt + \int_0^T \int_0^\infty g(s) \left\| \eta^t(s) \right\|^2 dsdt \\ &- \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x)\nabla\eta^t(x,s)\nabla u(x,t) dxdsdt \\ &- \int_0^T \int_\Omega h(u'(x,t))u(x,t)dxdt + (p+1)\int_0^T \int_\Omega F(u(t))dxdt, \end{aligned}$$

pois $\eta^t(x,s) = u(x,t) - u(x,t-s)$ e a igualdade (3.9) é válida. Pela desigualdade (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt &\leq \left| -\int_\Omega \rho(x)u'(x,T)u(x,T)dx + \int_\Omega \rho(x)u'(x,0)u(x,0)dx \right| + \int_0^T \|u'(t)\|_\rho^2 \, dt \\ &+ \int_0^T \int_0^\infty g(s) \left\| \sqrt{a}\nabla\eta^t(s) \right\|^2 dsdt + \int_0^T \int_0^\infty g(s) \left\| \eta^t(s) \right\|^2 dsdt \\ &+ \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) \left| \nabla\eta^t(x,s)\nabla u(x,t) \right| dxdsdt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega |h(u'(x,t))u(x,t)| \, dxdt + C\int_0^T \|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \, dt. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Das desigualdades de Holder e Young, segue que

$$\left|\int_\Omega \rho(x)u'(t)u(t)dx\right| \leqslant C\left(\|u'(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_1^2\right) \leqslant C\ \mathcal{E}_a(t),$$

donde,

$$\begin{array}{rcl}\left|-\int_\Omega \rho(x)u'(T)u(T)dx + \int_\Omega \rho(x)u'(0)u(0)dx\right| & \leqslant & C_0(\mathcal{E}_a(T)+\mathcal{E}_a(0)) \\ & \leqslant & C_0\left(\frac{p+1}{p-1}\right)(E_a(T)+E_a(0)) \\ & \leqslant & C_0\left(\frac{p+1}{p-1}\right)(2E_a(T)+F_a(T)),\end{array} \tag{4.11}$$

onde foi usado o Teorema 3.0.2 e a identidade (4.5).

Pelas hipóteses sobre a g e a definição de Φ, obtemos

$$\begin{array}{rcl}\int_0^T\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 dsdt & \leq & -C\int_0^T\int_0^\infty g'(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 dsdt \\ & \leq & CF_a(T) \\ & \leq & T\ C\Phi(F_a(T)); \\ \int_0^T\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|^2 dsdt & \leqslant & -\int_0^T\int_0^\infty [g'(s)+kg(s)]\left\|\eta^t(s)\right\|^2 dsdt \\ & \leq & F_a(T) \\ & \leq & T\Phi(F_a(T)),\end{array} \tag{4.12}$$

desde que, $T \geq 1$.

Também, das desigualdades de Holder e Young, vem que

$$\begin{array}{rcl}\int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\left|\nabla\eta^t(s)\nabla u(x,t)\right| dxdsdt & \leq & 2\epsilon\|a\|_\infty g_0\int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt \\ & + & C_\epsilon\int_0^T\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t(s)\right\|^2 dsdt \\ & \leq & 2\epsilon\|a\|_\infty g_0\int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt + C(\epsilon)F_a(T) \\ & \leq & \epsilon C\int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt + TC(\epsilon)\Phi(F_a(T)),\end{array} \tag{4.13}$$

onde $\epsilon > 0$.

De $1 < p < 5$, existe $0 < \delta < 1$ suficientemente pequeno, tal que $p+1 = \dfrac{6}{1+2\delta}$.

Pela imersão $H^{1-\delta}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{6}{1+2\delta}}(\Omega)$ e a interpolação de Sobolev, segue que

$$\|u\|_{p+1} \leq C \|u\|_{H^{1-\delta}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\delta} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\delta}.$$

Observe que, $\delta = \dfrac{5-p}{2(p+1)} < \frac{2}{p+1}$. Então

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \epsilon_0 \|u\|_1^{\frac{2(1-\delta)(p+1)}{2-\delta(p+1)}} + C_{\epsilon_0} \|u\|^2,$$

desde que $\epsilon_0 > 0$. Mas, por $p > 1$ temos a igualdade $\dfrac{2(1-\delta)(p+1)}{2-\delta(p+1)} = 2 + \xi$, onde $\xi > 0$. Pelo Teorema 3.0.2, obtemos

$$\|u\|_1^2 \leq 2\mathcal{E}_a(t) \leq 2\left(\frac{p+1}{p-1}\right) E_a(t) \leq 2\left(\frac{p+1}{p-1}\right) E_a(0).$$

Com isso,

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \epsilon_0 C(E_a(0)) \|u\|_1^2 + C_{\epsilon_0} \|u\|^2.$$

Portanto, para $\epsilon_0 > 0$ escolhamos $\epsilon = \dfrac{\epsilon_0}{C(E_a(0))}$, donde

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \epsilon \|u\|_1^2 + C(\epsilon, E_a(0)) \|u\|^2,$$

isto é,

$$\int_0^T \|u\|_{p+1}^{p+1} dt \leq 2\epsilon \int_0^T \mathcal{E}_a(t) dt + C(\epsilon, E_a(0)) \int_0^T \|u\|^2 dt. \tag{4.14}$$

Pela Hipótese (H-4), a desigualdade (4.3) e a desigualdade de Jensen, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u'(t)\|_\rho^2 dt &\leq C \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt \\
&\leq T|\Omega|\ C\phi\left(\int_0^T \int_\Omega h(u')u' dx dt\right) + C\int_0^T \int_\Omega h(u')u' dx dt \\
&\leq TC(|\Omega|)\left(\phi(F_a(T)) + F_a(T)\right) \\
&= TC(|\Omega|)\Phi(F_a(T)),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $A = \{(x,t) \in \Omega \times (0,T); |u'(x,t)| < 1\}$ e $B = \{(x,t) \in \Omega \times (0,T); |u'(x,t)| \geqslant 1\}$. Também,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega |h(u'(x,t))u(x,t)|\, dxdt \\
&\leq \epsilon \int_0^T \|u(t)\|_\rho^2\, dt + C_\epsilon \int_0^T \int_A |h(u')|^2\, dxdt + \int_0^T \int_B |h(u')u|\, dxdt \qquad (4.16)\\
&\leq \epsilon \int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt + C_\epsilon T\, |\Omega|\, \phi\left(\int_0^T h(u')u' dxdt\right) + \int_0^T \int_B |h(u')u|\, dxdt.
\end{aligned}$$

onde $\epsilon > 0$ e foi usado as desigualdades de Holder e Young.

Agora, estimaremos $\int_0^T \int_B |h(u')u|\, dxdt$. Para isto, considere dois casos, $1 \leq m \leq 5$ e $m > 5$. Se $1 \leqslant m \leqslant 5$, temos que $|h(s)| \leq b_2\, |s|^m \leq b_2\, |s|^5$ para todo $|s| \geq 1$. Consequentemente,

$$|h(s)|^{\frac{6}{5}} = |h(s)|\, |h(s)|^{\frac{1}{5}} \leq b_2^{\frac{1}{5}}\, |h(s)|\, |s|\, .$$

Então, das desigualdades de Holder e Young, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_B |h(u')u|\, dxdt &\leq b_2^{\frac{1}{6}} \left(\int_0^T \|u\|^6\, dt\right)^{\frac{1}{6}} \left(\int_0^T \int_B |h(u')|\, |u'|\, dxdt\right)^{\frac{5}{6}} \\
&\leq C \left(\int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt\right)^{\frac{1}{6}} \left(\int_0^T \int_B |h(u')|\, |u'|\, dxdt\right)^{\frac{5}{6}} \qquad (4.17)\\
&\leq \epsilon \int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt + C_\epsilon \int_0^T \int_\Omega h(u')u' dxdt, \quad \text{onde } \ \epsilon > 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $m > 5$ temos por hipótese que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{\frac{3}{2}(m-1)}(\Omega))$. Disso, da Hipótese (H-4) e das desigualdades de Holder e Young, vem que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_B |h(u')u|\, dxdt &\leq \left(\int_0^T \int_B |h(u')|^{\frac{m+1}{m}}\, dx\ dt\right)^{\frac{m}{m+1}} \left(\int_0^T \int_B |u|^2\, |u|^{m-1}\, dx\ dt\right)^{\frac{1}{m+1}} \\
&\leq \left(b_2^{\frac{1}{m}} \int_0^T \int_B |h(u')|\, |u'|\, dx\ dt\right)^{\frac{m}{m+1}} \left(\int_0^T \|u\|_6^2\, \|u\|_{\frac{3}{2}(m-1)}^{m-1}\, dt\right)^{\frac{1}{m+1}} \\
&\leq C\, \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{\frac{3}{2}(m-1)})}^{m-1} \left(\int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt\right)^{\frac{1}{m+1}} \left(\int_0^T \int_B |h(u')|\, |u'|\, dx\ dt\right)^{\frac{m}{m+1}}
\end{aligned}$$

(4.18)

$$\leq \quad \epsilon \int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt + C_\epsilon \int_0^T \int_\Omega |h(u')|\,|u'|\,dx\;dt.$$

Pelas desigualdades (4.16), (4.17) e (4.18), concluímos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |h(u'(x,t))u(x,t)|\,dxdt \quad &\leq \quad 2\epsilon \int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt + C_\epsilon T\,|\Omega|\,\phi\left(\int_0^T h(u')u'dxdt\right) \\ &\quad +C_\epsilon \int_0^T \int_\Omega h(u')u'dxdt \\ &\leq \quad \epsilon \int_0^t \mathcal{E}_a(t)dt + TC(\epsilon, |\Omega|)\Phi(F_a(T)),\end{aligned} \tag{4.19}$$

para $m \geqslant 1$ e $\epsilon > 0$.

Substituindo as estimativas (4.11)-(4.15) e (4.19) em (4.10), temos que

$$\frac{1}{2}\int_0^T \mathcal{E}_a(t)dt \leq c_0\left(\frac{p+1}{p-1}\right)(2E_a(T)+F_a(T)) + C(\epsilon, E_a(0))\int_0^T \|u\|^2\,dt + TC(\epsilon, |\Omega|)\Phi(F_a(T)), \tag{4.20}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Mas, $\mathcal{E}_a(t) \geq E_a(t)$, para todo $t \geq 0$ e $E_a(t)$ é não crescente. Por (4.20), segue que

$$\frac{1}{4}TE(T) \leq c_0\left(\frac{p+1}{p-1}\right)F_a(T) + C(\epsilon, E_a(0))\int_0^T \|u\|^2\,dt + TC(\epsilon, |\Omega|)\Phi(F_a(T)), \tag{4.21}$$

pois $T \geq T_0$. Dividindo ambos lados de (4.21) por T e usando o fato de $T > 1$, concluímos que

$$E_a(T) \leq C\left[\Phi(F_a(T)) + \int_0^T \|u\|^2\,dt\right], \tag{4.22}$$

para todo $T \geq T_0$, onde $C > 0$ é uma constante que não depende de T.

Para finalizar a prova de (4.7), resta mostrar que

$$\int_0^T \|u\|^2\,dt \leq C_T\Phi(F_a(T)). \tag{4.23}$$

Suponha, por contradição, que exista uma sequência de dados iniciais $\{u_0^n, u_1^n\} \subset \tilde{W}_1^\delta \times L_g^2(\mathbb{R}^-, L^2(\Omega))$ tal que a sequência de soluções fracas correspondente satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(F_{a,n}(T))}{\int_0^T \|u_n\|^2\,dt} = 0, \tag{4.24}$$

onde $F_{a,n}(T) = E_{a,n}(0) - E_{a,n}(T)$ e $T \geqslant T_0$.

Com raciocínio análago ao usado para verificar (3.35), concluimos que $\mathcal{E}_{a,n}(t) \leq d\left(\frac{p+1}{p-1}\right)$ para todo $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^2 \, dt \leq C \; T \; d\left(\frac{p+1}{p-1}\right),$$

isso, juntamente com (4.24), fornece

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(F_{a,n}(T)) = 0. \tag{4.25}$$

Pelas estimativas (4.12), (4.15) e (4.25), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_0^\infty g(s) \left\|\sqrt{a}\nabla\eta_n^\tau(s)\right\|^2 \; dsd\tau = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|u_n'(t)\|_\rho^2 \, dt = 0. \tag{4.26}$$

Das hipóteses em torno de h, é válido que

$$|h(s)| \leqslant b_2 \, |s| \, , \;\; |s| < 1$$

e

$$|h(s)|^{\frac{m+1}{m}} \leqslant b_2^{\frac{m+1}{m}} \, |s|^{m+1} \leqslant b_2^{\frac{m+1}{m}} \frac{1}{b_1} h(s)s, \;\; |s| \geq 1.$$

Dados $A_n := \{(x,t) \in \Omega \times (0,T); |u_n'(x,t)| < 1\}$ e $B_n := \{(x,t) \in \Omega \times (0,T); |u_n'(x,t)| \geq 1\}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |h(u_n')|^{\frac{m+1}{m}} \, dxdt \;\; &\leq \;\; \int_{A_n} |h(u_n')|^{\frac{m+1}{m}} \, dxdt + \int_{B_n} |h(u_n')|^{\frac{m+1}{m}} \, dxdt \\ &\leq \;\; b_2^{\frac{m+1}{m}} \, |\Omega| \, T + b_2^{\frac{m+1}{m}} \tfrac{1}{b_1} \int_0^T \int_\Omega h(u_n')u_n' dxdt, \end{aligned} \tag{4.27}$$

uma vez que, $\Omega = A_n \cup B_n$. De (4.25), obtemos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^T \int_\Omega |h(u_n')|^{\frac{m+1}{m}} \, dxdt < \infty. \tag{4.28}$$

Mas, pela continuidade de h e convergência (4.26), temos que

$$h(u_n') \to 0 \quad \text{q.s. em} \quad \Omega \times (0,T). \tag{4.29}$$

Logo, (4.28) e (4.29), implicam em

$$h(u_n') \to 0 \;\; \text{fraco em} \; L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega \times (0,T)). \tag{4.30}$$

Como $\mathcal{E}_n(t)$ é uniformemente limitada em $[0,T]$, existem subsequências de (u_n) e (u_n'), que chamaremos de mesmo nome, e existem $u \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ e $u' \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$, satisfazendo

$$u_n \to u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)) \;\text{ e }\; u'_n \to u' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)), \tag{4.31}$$

donde, pelo Teorema de Aubin Lions Simon, segue que

$$u_n \to u \quad \text{em } L^\infty(0,T,H_0^{1-\epsilon}(\Omega)) \hookrightarrow L^s(\Omega \times (0,T)), \tag{4.32}$$

onde $0 < \epsilon \leq 1$ e $1 \leq s < 6$.

Considere $t \in (0,T)$ e $\varphi \in C(\overline{\Omega \times (0,t)})$. Pelas hipóteses em torno de f e a convergência (4.32), obtemos

$$|f(u_n)\varphi| \leq C\,|u_n|^p \quad \text{e} \quad f(u_n)\varphi \to f(u)\varphi \quad \text{q. s. em } \Omega \times (0,T)$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, é válido que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_\Omega f(u_n)\varphi dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f(u)\varphi dx d\tau, \;\; \text{para toda } \varphi \in C(\overline{\Omega \times (0,t)}). \tag{4.33}$$

Agora, considere $\varphi \in C(\overline{\Omega \times (0,t)}) \cap C([0,t];H_0^1(\Omega))$, tal que $\varphi(t) = \varphi(0) = 0$ e $\varphi' \in L^2(\Omega \times (0,t))$. Substituindo φ em (2.4), temos

$$\begin{aligned} &-\int_0^t \int_\Omega \rho(x) u'_n \varphi' dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega \kappa(x) \nabla u_n \cdot \nabla \varphi dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega h(u'_n)\varphi dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) \nabla \eta_n \cdot \nabla \varphi dx ds d\tau = \int_0^t \int_\Omega f(u_n)\varphi dx d\tau. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Passando o limite em (4.34), obtemos

$$\int_0^t (u,\varphi)_1 d\tau = \int_0^t \int_\Omega f(u)\varphi dx d\tau, \tag{4.35}$$

onde foi usado as convergências (4.26), (4.30), (4.31) e (4.33). Substituindo φ por $\varphi(x,\tau) = \tau(t-\tau)\tilde{\varphi}(x)$ em (4.35), onde $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e derivando a expressão obtida em relação a t duas vezes, obtemos

$$(u(t),\tilde{\varphi})_1 = \int_\Omega f(u(t))\tilde{\varphi} dx. \tag{4.36}$$

Considere a sequência $\tilde{\varphi}_n \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\tilde{\varphi}_n \to u(t)$ em $H_0^1(\Omega)$. Por (4.36) e

(3.9), segue que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_1^2 &= \int_\Omega f(u(t))u(t)dx \\ &= (p+1)\int_\Omega F(u(t))dt. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Como t foi considerado arbitrariamente, a igualdade (4.37) é válida para todo $t \in (0,T)$.

Por outro lado, por (4.31) e (4.32) existe uma subsequência de (u_n), que chamaremos de mesmo nome, satisfazendo $u_n(t) \to u(t)$ fraca em $H_0^1(\Omega)$ para quase todo $t \in [0,T]$, e

$$\|u(t)\|_1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n(t)\|_1 . \tag{4.38}$$

Por hipótese, $\{u_{0,n}\} \in \tilde{W}_1^\delta$ e $E_{n,a}(0) < G(s_0-\delta)$, então $\{u_n^t\} \in \tilde{W}_1^\delta$, $t \geqslant 0$. Por (4.38), obtemos que

$$\|u(t)\|_1 = \left\|u^t(0)\right\|_1 \leqslant s_0 - \delta, \quad \text{q. s. em } (0,T).$$

Sabemos que $I(u_n^t) \leq G(s_0-\delta)$, para todo $t \geqslant 0$, ou seja,

$$G(s_0-\delta) \geq \frac{1}{2}\left(\|u_n(t)\|_1 + \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\eta_n^t(s)\right\|^2 ds\right) - \int_\Omega F(u_n(t))dx. \tag{4.39}$$

Também, $\mathcal{E}_n(t)$ é limitado uniformemente em $[0,T]$. Logo,

$$\eta_n^t \to \eta$$

fraco estrela em $L^\infty(0,T;L_g^2(\mathbb{R}^+,H_a^1(\Omega))$ e

$$\left\|\eta^t\right\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+,H_a^1)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \left\|\eta_n^t\right\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+,H_a^1)} \text{ para quase todo } t \in (0,T). \tag{4.40}$$

Além disso, de (3.10) e (4.32), obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega F(u_n(t))dx = \int_\Omega F(u(t)) \ \text{ q. s. em } [0,T], \tag{4.41}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Combinando (4.38) - (4.41), concluímos que $G(s_0-\delta) \geq I(u^t)$ e, donde, $u^t \in \tilde{W}_1^\delta \subset \tilde{W}_1$ quase sempre em $(0,T)$. Suponha que $u(t) \neq 0$, $t \in (0,T)$. De $u^t \in \tilde{W}_1$ e (4.2), temos que

$$\begin{aligned} (p+1)\int_\Omega F(u(t))dx &\leq (p+1)M\|u(t)\|_1^{p+1} \\ &< \|u(t)\|_1^2\left[(p+1)Ms_0^{p-1}\right] \\ &= \|u(t)\|_1^2, \end{aligned} \tag{4.42}$$

gerando uma contradição com (4.37). Então, temos que $u(t) = 0$ quase sempre em $(0, T)$ e, por (4.32), concluímos que

$$u_n \to 0 \ \text{ em } L^s(\Omega \times (0,T)), \tag{4.43}$$

para todo $1 \leq s < 6$.

Agora, defina

$$\alpha_n := \left(\int_0^T \|u_n\|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por (4.43), $\alpha_n \to 0$. E, denotando $v_n = \frac{u_n}{\alpha_n}$, temos que

$$\int_0^T \|v_n\|^2 \, dt = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.44}$$

Com isso, reescrevemos (4.24) como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(F_{a,n}(T))}{\alpha_n^2} = 0. \tag{4.45}$$

Também, de (4.12) e (4.15), temos convergências abaixo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^T \int_0^\infty g(s) \left\| \sqrt{a} \nabla \eta_n^t(s) \right\|^2 ds \ dt}{\alpha_n^2} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|v_n'(t)\|^2 \, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^T \|u_n'(t)\|^2 \, dt}{\alpha_n^2} = 0. \tag{4.46}$$

Considerando n suficientemente grande, tal que $\alpha_n < 1$, e usando a definição de ϕ, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \left| \frac{h(u_n')}{\alpha_n} \right|^{\frac{m+1}{m}} dxdt &= \int_{A_n} \left| \frac{h(u_n')}{\alpha_n} \right|^{\frac{m+1}{m}} dxdt + \int_{B_n} \left| \frac{h(u_n')}{\alpha_n} \right|^{\frac{m+1}{m}} dxdt \\
&\leq C(T, |\Omega|) \left(\int_{A_n} \left| \frac{h(u_n')}{\alpha_n} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{m+1}{2m}} + \frac{1}{\alpha_n^2} \int_{B_n} |h(u_n')|^{\frac{m+1}{m}} dxdt \\
&\leq C(T, |\Omega|) \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \int_{A_n} \phi(h(u_n')u_n') dxdt \right)^{\frac{m+1}{2m}} + \frac{b_2^{\frac{m+1}{m}}}{b_1 \alpha_n^2} \int_{B_n} h(u_n')u_n' dxdt \\
&\leq C(T, |\Omega|) \left(\frac{\Phi(F_{a,n}(T))}{\alpha_n^2} \right)^{\frac{m+1}{2m}} + \frac{b_2^{\frac{m+1}{m}}}{b_1} \frac{\Phi(F_{a,n}(T))}{\alpha_n^2},
\end{aligned}$$

pr argumentos análagos aos que foram usados anteriormente. Esta desigualdade juntamente com a convergência (4.45), implicam em

$$\frac{h(u_n')}{\alpha_n} \to 0 \ \text{ em } L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega \times (0,T)). \tag{4.47}$$

Pelo que vimos até aqui, da igualdade $E_{a,n}(T) + F_{a,n}(T) = E_{a,n}(0)$ resulta a limitação uniforme de $\left\{\frac{E_{a,n}(t)}{\alpha_n^2}\right\}$, para todo $t \geq 0$. Então, existe uma subsequência de $\{v_n\}$, que chamaremos de mesmo nome, e $v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, tais que

$$v_n \to v \ \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \ \text{ e } \ v_n' \to v' \ \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{4.48}$$

donde

$$v_n \to v \ \ L^s(\Omega \times (0,T)), \tag{4.49}$$

para todo $1 \leq s < 6$. Então, por (4.44), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|v_n\|^2 \, dt = \int_0^T \|v\|^2 \, dt = 1. \tag{4.50}$$

Por outro lado, pelas convergências (4.43) e (4.49), temos que

$$\int_0^T \int_\Omega |v_n| \, |u_n|^{p-1} \, dxdt \leqslant \left(\int_0^T \int_\Omega |v_n|^5 \, dxdt \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T \int_\Omega |u_n|^{\frac{5}{4}(p-1)} \, dxdt \right)^{\frac{4}{5}} \longrightarrow 0, \tag{4.51}$$

onde a desigualdade de Holder foi usada. Como anteriormente, considere $\varphi \in C(\overline{\Omega \times (0,t)})$. Usando as hipóteses em torno de f, a definição de v_n e (4.51), segue que

$$\int_0^T \int_\Omega \left| \frac{f(u_n)}{\alpha_n} \varphi \right| dxdt \leq \int_0^T \int_\Omega |v_n| \, |u_n|^{p-1} \, dxdt \longrightarrow 0, \tag{4.52}$$

para todo $t \in (0,T)$.

Dividindo ambos os lados de (4.34) por α_n e usando as convergências (4.46) - (4.48) e (4.52), temos que

$$\int_0^t \int_\Omega \kappa(x) \nabla v \cdot \nabla \varphi dx d\tau = 0, \quad t \in (0,T). \tag{4.53}$$

Então, considerando $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $\varphi(x,\tau) = \tau(t-\tau)\tilde{\varphi}(x)$ em (4.53). Derivando a expressão em relação a t duas vezes, obtemos

$$(v(t), \tilde{\varphi})_1 = 0,$$

contradizendo (4.50). Portanto, a desigualdade (4.23) é válida, finalizando a demonstração deste resultado.

□

Resultados de "Blow-up" para a equação da onda viscoelástica

No decorrer do capítulo, suponha que as Hipóteses (H-1)-(H-7) se verifiquem. Além disso, suponha que $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(\tau)\,d\tau$ e que a seguinte hipótese adicional é válida.

(H-11) g_0 suficientemente pequeno, de modo que $(p - 1 - l^{-\frac{1}{2}} g_0 \|a\|_\infty) > 0$, onde $l = 1 - g_0\|a\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$ foi definido em (2.2), na Hipótese (H-3).

No primeiro resultado de blow-up deste capítulo, consideramos a energia inicial total negativa e $p > m$, ou seja

Teorema 5.0.1. *Seja $1 < p \leq 5$ e $E(0) < 0$. Suponha que as Hipóteses (H-1)-(H-7) e (H-11) são válidas. Além disso, suponha que para todo $s \in \mathbb{R}$ e $m \geq 1$, $b_1 |s|^{m+1} \leq h(s)s \leq b_2 |s|^{m+1}$ com $b_1, b_1 > 0$, $F(u) \geq \alpha_0 |u|^{p+1}$ para algum $\alpha_0 > 0$ e $p > m$. Então, a solução fraca local u de (2.1) possui um blow-up em um tempo finito.*

Demonstração. A prova segue as ideias de Bociu e Lasiecka presentes em [5] e Georgiev e Todorova [22]. Defina as funções

$$L(t) = -E(t), \quad N(t) = \|u(t)\|_\rho^2 \quad \text{e} \qquad R(t) = \int_\Omega F(u(t))\,dx. \tag{5.1}$$

Pela definição de $E(t)$, temos que

$$L(t) = -\frac{1}{2}\left(\|u_t\|_\rho^2 + \|u\|_1^2 + \int_0^\infty \int_\Omega g(s)\left\|\sqrt{a}\eta\right\|^2\right) + R(t). \tag{5.2}$$

Também, de $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$, para todo $t \in [0, T)$ temos que $\frac{d}{dt}L(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, T)$, ou seja, $L(t)$ é não decrescente. Pela hipótese $E(t) < 0$ e (5.2), obtemos que

$$0 < L(0) \leq L(t) \leq R(t), \tag{5.3}$$

para todo $0 \leq t < T$.

Agora, baseado em Georgiev e Todorova [22], defina

$$Y(t) = L(t)^{1-\alpha} + \epsilon N'(t),$$

onde $0 < \alpha < min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{m+1} - \frac{1}{p+1}\}$, $0 < \epsilon \leqslant min\{L(0), \frac{1}{2C_\delta L(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\alpha}}\}$ e C_δ é uma constante positiva que será definida depois. Consequentemente,

$$Y'(t) = (1-\alpha)G(t)^{-\alpha}G'(t) + \epsilon N''(t). \tag{5.4}$$

De $m < p \leq 5$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, temos que $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$. Além disso, $u, u' \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, então

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |u|^{m+1} \ dxdt &= \int_0^T \int_\Omega \left| \int_0^t u'(\tau)d\tau + u_0 \right|^{m+1} \ dxdt \\ &\leq 2^m \left(T^{m+1} \|u'\|^{m+1}_{L^{m+1}(\Omega\times(0,T))} + T\|u_0\|^{m+1}_{m+1} \right) < \infty, \end{aligned} \tag{5.5}$$

ou seja $u \in L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$. Então, substituindo u na definição de solução fraca, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N'(t) &= \int_\Omega \rho u_1 u_0 \ dx + \int_0^t \int_\Omega \rho(x)|u_t|^2 \ dxd\tau - \int_0^t \int_\Omega |u|_1^2 \, d\tau - \int_0^t \int_\Omega h(u_t)u \ dxd\tau \\ &\quad - \int_0^t \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x)\nabla\eta\nabla u \ dxdsd\tau + (p+1)\int_0^t \int_\Omega F(u) \ dxd\tau, \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} N''(t) &= 2\|u_t(t)\|_\rho^2 \ dxd\tau - 2\|u(t)\|_1^2 \, d\tau - 2\int_\Omega h(u_t(t))u(t) \ dxd\tau \\ &\quad -2\int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\eta^t\nabla u(t) \ dxds + 2(p+1)\int_\Omega F(u(t)) \ dx. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pelas desigualdades de Holder e Young, obtemos

$$\left| \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x)\nabla\eta^t\nabla u(t) \ dxds \right| \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty g(s) \left\| \sqrt{a}\nabla\eta^t \right\|^2 \ ds + l^{-\frac{1}{2}} g_0 \|a\|_\infty \|\nabla u(t)\|^2 \right). \tag{5.7}$$

Substituindo (5.7) em (5.6), temos

$$\begin{aligned} N''(t) &\geq -2\int_\Omega h(u_t(t))u(t)\ dxd\tau - 2\left(\|u(t)\|_1^2 - \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t\right\|^2\ ds\right) \\ &\quad -l^{-\frac{1}{2}}g_0\|a\|_\infty\|u(t)\|_1^2 + 2(p+1)\int_\Omega F(u(t))\ dx. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Mas, pela definição de $E(t)$, segue que

$$\begin{aligned} -\|u(t)\|_1^2 - \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t\right\|^2\ ds &= -2E(t) - 2\int_\Omega F(u(t))\ dx + \|u_t(t)\|_\rho^2\ dx \\ &\geq 2L(t) - 2\int_\Omega F(u(t))\ dx \end{aligned} \tag{5.9}$$

e, analogamente,

$$-l^{-\frac{1}{2}}g_0\|a\|_\infty\|u(t)\|_1^2 \geq 2l^{-\frac{1}{2}}g_0\|a\|_\infty L(t) - 2l^{-\frac{1}{2}}g_0\|a\|_\infty\int_\Omega F(u(t))\ dx. \tag{5.10}$$

Consequentemente, de (5.8), (5.9) e (5.10), obtemos

$$N''(t) \geq -2\int_\Omega h(u_t(t))u(t)\ dxd\tau + 2\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\|a\|_\infty\right)\int_\Omega F(u(t))\ dx + \left(4+2l^{-\frac{1}{2}}g_0\|a\|_\infty\right)L(t). \tag{5.11}$$

Assim, por (5.4) e (5.11), concluímos

$$\begin{aligned} Y'(t) &\geq (1-\alpha)L^{-\alpha}G'(t) - 2\epsilon\int_\Omega h(u_t(t))u(t)\ dxd\tau + 2\epsilon\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\|a\|_\infty\right)R(t) \\ &\quad +\epsilon\left(4+2l^{-\frac{1}{2}}g_0\|a\|_\infty\right)L(t). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Pelas desigualgades de Holder e Young e as hipóteses $|h(s)| \leq b_2|s|^m$, para todo

$s \in \mathbb{R}$, $F(u) \geq \alpha_0 |u|^{p+1}$ e $p > m$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega h(u_t(t))u(t)\ dx \right| &\leq b_2 \int_\Omega |u_t(t)|^m |u(t)|\ dx \\
&\leq C \|u(t)\|_{m+1} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\
&\leq C \|u(t)\|_{p+1} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\
&\leq C \left(\frac{1}{\alpha_0} \int_\Omega F(u(t))\ dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\
&= CR(t)^{\frac{1}{p+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m .
\end{aligned} \tag{5.13}$$

A hipótese $p > m$, implica em $\dfrac{1}{p+1} < \dfrac{1}{m+1}$. Considere α suficientemente pequeno, de modo que $\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{m+1} + \alpha < 0$. De (5.3) e a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}
R(t)^{\frac{1}{p+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m &= R(t)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1}} R(t)^{\frac{1}{m+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\
&\leq L(t)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1}} \left(\delta R(t) + C_\delta \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} \right) \\
&\leq \delta L(t)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1}} R(t) + C_\delta b_1 L(t)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1}} L'(t) \\
&= \delta L(t)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1}} R(t) + C_\delta b_1 L'(t) L(t)^{-\alpha} L(t)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1} + \alpha} \\
&\leq \delta L(0)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1}} R(t) + C_\delta b_1 L'(t) L(t)^{-\alpha} L(0)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1} + \alpha},
\end{aligned}$$

pois L é não decrescente e $b_1 \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} \leq L'(t)$. Com isso, (5.13) nos dá

$$\left| \int_\Omega h(u_t(t))u(t)\ dx \right| \leq \delta C L(0)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1}} R(t) + C_\delta L'(t) L(t)^{-\alpha} L(0)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1} + \alpha}. \tag{5.14}$$

Considere,

$$V = 1 - 2\epsilon C_\delta G(0)^{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1} + \alpha}$$

e ϵ suficientemente pequeno de modo que $V \geq 0$. Então, por (5.12) e (5.14), temos que

$$\begin{aligned}
Y'(t) &\geq V L(t)^{-\alpha} L'(t) + 2\epsilon \left(p - 1 - l^{-\frac{1}{2}} g_0 \|a\|_\infty \right) R(t) + \epsilon \left(4 + 2 g_0 \|a\|_\infty \right) L(t) \\
&\geq +2\epsilon \left(p - 1 - l^{-\frac{1}{2}} g_0 \|a\|_\infty \right) R(t) \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

uma vez que, $\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)\geq 0$, por hipótese. Consequentemente, $Y(t)$ é não decrescente em $[0,T)$ e

$$Y(t)=L(t)^{1-\alpha}+\epsilon N'(t)\geq L(0)^{1-\alpha}+\epsilon N'(0).$$

Se $N'(0)\geq 0$, temos que $Y(t)>0$ para todo $t\in[0,T)$. Se $N'(0)<0$, é necessário impor mais uma condição acerca de ϵ, a saber,

$$0<\epsilon\leq -\frac{L(0)^{1-\alpha}}{2N'(0)}.$$

Em ambos os casos obtemos

$$Y(t)\geq \frac{1}{2}L(0)^{1-\alpha}>0, \tag{5.16}$$

para todo $t\in[0,T)$.

No que segue, mostraremos que

$$Y'(t)\geq C\epsilon^{1-\sigma}Y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{5.17}$$

para todo $t\in[0,T)$, onde $1<\dfrac{1}{1-\alpha}<2$ e $\sigma=1-\dfrac{2}{(1-2\alpha)(p+1)}>0$. Note que para garantirmos que $\sigma>0$, precisamos impor $\alpha<\dfrac{p-1}{2(p+1)}$.

Primeiro, suponha que $N'(t_0)\leq 0$, para algum $t_0\in[0,T)$. Então,

$$Y(t_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left[L(t_0)^{1-\alpha}+\epsilon N'(t_0)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq L(t_0). \tag{5.18}$$

Disso e de (5.15), segue que

$$Y'(t_0)\geq \epsilon\left(4+2g_0\left\|a\right\|_\infty\right)L(t_0)\geq \epsilon^{1+\sigma}\left(4+2g_0\left\|a\right\|_\infty\right)L(t_0)\geq \epsilon^{1+\sigma}\left(4+2g_0\left\|a\right\|_\infty\right)Y(t_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Donde, a desigualdade (5.17) é válida para todo $t\in[0,T)$ tal que $N'(t)\leq 0$.

Agora, considere $t\in[0,T)$ tal que $N'(0)>0$. Neste caso, temos que

$$Y(t)=L(t)^{1-\alpha}+\epsilon N'(t)\leq L(t)^{1-\alpha}+N'(t)$$

e

$$Y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\left[L(t)+N'(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]. \tag{5.19}$$

Pelas desigualdades de Holder e Young, $L(0) \leq R(t)$ e $-\sigma < 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
N'(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq C\left(\|u_t(t)\|_\rho \|u(t)\|\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&\leq C\left(\|u_t(t)\|_\rho^2 + \|u(t)\|_{p+1}^{\frac{2}{1-2\alpha}}\right) \\
&\leq C\|u_t(t)\|_\rho^2 + CR(t)^{\frac{2}{(1-2\alpha)(p+1)}} \\
&\leq C\|u_t(t)\|_\rho^2 + CL(0)^{-\sigma}R(t) \\
&\leq C\|u_t(t)\|_\rho^2 + C\epsilon^{-\sigma}R(t) \\
&\leq C\epsilon^{-\sigma}\left(\|u_t(t)\|_\rho^2 + R(t)\right),
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

desde que $\epsilon \leq L(0)$ e $\epsilon^{-\sigma} > 1$.

Pelas estimativas (5.15), (5.19) e (5.20), segue que

$$
Y'(t) \geq C_\epsilon\left[L(t) + \|u_t\|_\rho + R(t)\right] \geq C_\epsilon\left[L(t) + \epsilon^\sigma N'(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]
$$

$$
\geq C_\epsilon^{1+\sigma}\left[L(t) + N'(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] \geq C\epsilon^{1+\sigma}Y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}},
$$

isto é, a desigualdade (5.17) é válida para todo $t \in [0,T)$ tal que $N'(t) > 0$. Portanto, (5.17) é válida para todo $t \in [0,T)$.

Então, por argumentos presentes em Ball [3], de (5.16) - (5.17) temos que $Y(t)$ tem um blow-up em tempo finito T, onde T é dado por

$$
T < C\epsilon^{-(1+\sigma)}Y(0)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \leqslant C\epsilon^{-(1+\sigma)}L(0)^{-\alpha}. \tag{5.21}
$$

□

O próximo lema mostra que o conjunto $\mathcal{W}_2$ é invariante com hipóteses convenientes.

Lema 5.0.1. *Seja $1 < p \leq 5$ e suponha válidas as Hipóteses (H-1)-(H-9) e (H-11). Se $u^0 \in \mathcal{W}_2$, $E_a(0) < d$ e u é a solução fraca local de (2.1) em $(-\infty, T)$, então $u^t \in \mathcal{W}_2$ para todo $t \in [0,T)$. Além disso,*

$$
\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t\right\|_{H_a^1}^2 ds > 2d\left(\frac{p+1}{p-1}\right), \tag{5.22}
$$

para todo $t \in [0,T)$.

Demonstração. Argumentando, por contradição, existe $t_1 \in (0,T)$ tal que $u^{t_1} \notin \mathcal{W}_2$. Procedendo analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.0.2, deduzimos que $u^t \in \mathcal{W}$ para todo $t \in [0,T)$. Mas, $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}$ e $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$, logo $u^{t_1} \in \mathcal{W}_1$.

Sabemos que $u \in C([0,T), H_0^1(\Omega))$ e que a função $\psi(t) = (p+1)\int_\Omega F(u(t))dt$ é contínua. Então, como $u^0 \in \mathcal{W}_2$ e $u^{t_1} \in \mathcal{W}_1$, fazendo cálculos idênticos àqueles feitos na prova do Teorema 3.0.2, existe $r \in (0,t_1)$ satisfazendo

$$\|u(r)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\,\|\eta^r\|_{H_a^1}^2\,ds = (p+1)\int_\Omega F(u(r))dx. \tag{5.23}$$

Denote por r^* o ínfimo dentre todos $r \in (0,t_1)$ satisfazendo (5.23). Pela continuidade, $r^* \in (0,t_1)$ e $u^t \in \mathcal{W}_2$, para todo $t \in [0,r^*)$.

Suponha que $u^{r^*} \neq 0$. Como r^* satisfaz (5.23), temos que $u^{r^*} \in M$, donde, pelo Lema 3.0.1, $d \leq \mathcal{J}(u^{r^*})$, onde

$$\mathcal{J}(u^t) = \frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds\right) - \int_\Omega F(u(x,t))dx.$$

Por outro lado, $\mathcal{J}(u^{r^*}) \leq E_a(r^*) \leq E_a(0) < d$, gerando uma contradição.

Agora, suponha que $u^{r^*} = 0$. De $u^t \in \mathcal{W}_2$, para todo $t \in [0,r^*)$, temos que

$$\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t(s)\right\|_{H_a^1}^2 ds < (p+1)\int_\Omega F(u(x,t))dx \leq C\,\|u(t)\|_1^{p+1},$$

de onde temos $\|u(t)\|_1 > 0$ e

$$\|u(t)\|_1^2 < C\,\|u(t)\|_1^{p+1}, \quad \text{para todo } t \in [0,r^*).$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por $\|u(t)\|_1^2$, temos

$$1 < C\,\|u(t)\|_1^{p-1}, \quad \text{para todo } t \in [0,r^*),$$

ou seja, $\|u(t)\|_1 > \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0$, para todo $t \in [0,r^*)$. Pela continuidade, temos

$$\|u(r^*)\|_1 \geq \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0,$$

contradizendo $u^{r^*} = 0$. Portanto, $u^t \in \mathcal{W}_2$ para todo $t \in [0,T)$.

No que segue, verificaremos (5.22). Considere $u^t \in \mathcal{W}_2$ fixo e λ_0 obtido no Lema

3.0.1, onde λ_0 é o único ponto crítico da função $\lambda \mapsto \mathcal{J}(\lambda v)$ em $(0, \infty)$, satisfazendo

$$\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\eta^t\right\|_{H_a^1}^2 ds = (p+1)\lambda_0{}^{p-1} \int_\Omega F(u(t))dx. \tag{5.24}$$

Pela definição de $\mathcal{W}_2$, temos que $\lambda_0 < 1$.

A função $\lambda \mapsto \mathcal{J}(\lambda v)$ atinge seu máximo absoluto sobre o eixo positivo em seu ponto crítico $\lambda = \lambda_0$. Pelo Lema 3.0.1 e (5.24), temos que

$$\begin{aligned}
d &\leq \sup_{\lambda \geq 0} \mathcal{J}(\lambda u(t)) = \mathcal{J}(\lambda_0 u(t)) \\
&= \frac{1}{2}\lambda_0^2 \left(\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\eta^t\right\|_{H_a^1}^2 ds \right) - \lambda_0^{p+1} \int_\Omega F(u(t))\, dx \\
&= \frac{1}{2}\lambda_0^2 \left(\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\eta^t\right\|_{H_a^1}^2 ds \right) - \frac{1}{p+1}\lambda_0^2 \left(\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\eta^t\right\|_{H_a^1}^2 ds \right) \\
&= \frac{\lambda_0^2(p-1)}{2(p+1)} \left(\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\eta^t\right\|_{H_a^1}^2 ds \right).
\end{aligned}$$

E, como $\lambda_0 < 1$, obtemos

$$\|u(t)\|_1^2 + \int_0^\infty g(s) \left\|\eta^t\right\|_{H_a^1}^2 ds \geq d\frac{2(p+1)}{\lambda_0^2(p-1)} > 2d\left(\frac{p+1}{p-1}\right),$$

como queríamos demonstrar. □

Para finalizar este capítulo, e nossos estudos em torno do problema (2.1), mostraremos um resultado de blow-up quando a energia total expandida inicial é maior ou igual a zero e $p > m$.

Teorema 5.0.2. *Seja $1 < p \leq 5$, $u^0 \in \mathcal{W}_2$ e $0 \leq E_a(0) < d$. Suponha válidas as Hipóteses (H-1)-(H-9) e (H-11). Além disso, suponha que é válido $b_1 |s|^{m+1} \leq h(s)s \leq b_2 |s|^{m+1}$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $m \geq 1$, $F(u) \geq \alpha_0 |u|^{p+1}$ para algum $\alpha_0 > 0$ e que $p > m$. Então, a solução fraca local u possui um blow-up em um tempo finito.*

Demonstração. Nosso objetivo é provar que T é finito. Argumentaremos por contradição. De fato, assuma que a solução $u(t)$ de (2.1) possa ser estendida a todo intervalo $[0, \infty)$. Como $u^0 \in \mathcal{W}_2$, pelo Lema 5.0.1, temos que $u^t \in \mathcal{W}_2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por hipótese, $0 < E_a(0) < d$ e sabemos que $E_a(t) \leq E_a(0)$, para todo t.

Se existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $E_a(t_0) < 0$. Sabemos que $E(t_0) \leq E_a(t_0)$, logo $E(t_0) < 0$. Seguindo o mesmo raciocínio da prova do Teorema 5.0.1, obtemos que a solução fraca u não é global, e obtemos uma contradição.

Então, temos que para todo $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq E_a(t) \leq E_a(0) < d$. Seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 5.0.1 , defina as funções

$$N(t) = \|u(t)\|_\rho^2 \quad \text{e} \quad R(t) = \int_\Omega F(u(t))\ dx. \tag{5.25}$$

Note que $N'(t) = 2\int_\Omega \rho u(t) u_t(t)\ dx$, pois $u_t \in C(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$. De (5.5), temos que $u \in L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$. Substituindo u na definição de solução fraca, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N'(t) &= \int_\Omega \rho u_1 u_0\ dx + \int_0^t \int_\Omega \rho(x) |u_t|^2\ dx d\tau - \int_0^t \|u\|_1^2 d\tau - \int_0^t \int_\Omega h(u_t) u\ dx d\tau \\ &\quad - \int_0^t \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) \nabla\eta \nabla u\ dx ds d\tau + (p+1) \int_0^t \int_\Omega F(u)\ dx d\tau, \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N''(t) &= \|u_t(t)\|_\rho^2\ dx d\tau - \|u(t)|_1^2 d\tau - \int_\Omega h(u_t(t)) u(t)\ dx d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) \nabla\eta^t \nabla u(t)\ dx ds + (p+1) \int_\Omega F(u(t))\ dx. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Pelas desigualgades de Holder e Young, as hipóteses $|h(s)| \leq b_2 |s|^m$, para todo $s \in \mathbb{R}$, $F(u) \geq \alpha_0 |u|^{p+1}$ e $p > m$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega h(u_t(t)) u(t)\ dx \right| &\leq b_2 \int_\Omega |u_t(t)|^m |u(t)|\ dx \\ &\leq C \|u(t)\|_{m+1} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &\leq C \|u(t)\|_{p+1} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &\leq C \left(\frac{1}{\alpha_0} \int_\Omega F(u(t))\ dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &= C R(t)^{\frac{1}{p+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &\leq \epsilon R(t)^{\frac{m+1}{p+1}} + C_\epsilon \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

E, pelas desigualdades de Holder e Young

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty g(s)\int_\Omega a(x)\nabla\eta^t\nabla u(t)\ dxds\right| &\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t\right\|^2\ ds + g_0\left\|a\right\|_\infty\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t\right\|^2_{H_a^1}\ ds + g_0\left\|a\right\|_\infty\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Substituindo (5.27) e (5.28) em (5.26) e usando a definição de H_a^1, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}N''(t) + C_\epsilon\left\|u_t(t)\right\|_{m+1}^{m+1} &\geq -\epsilon R(t)^{\frac{m+1}{p+1}} - \left\|u(t)\right\|_1^2 - \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t\right\|^2_{H_a^1}\ ds\\
&\quad -\frac{l^{\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty}{2}\left\|u(t)\right\|_1^2 + (p+1)\int_\Omega F(u(t))\ dx.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Pela definição de $E_a(t)$, segue que

$$\begin{aligned}
-\left\|u(t)\right\|_1^2 - \int_0^\infty g(s)\left\|\sqrt{a}\nabla\eta^t\right\|^2_{H_a^1}\ ds &= -2E_a(t) - 2\int_\Omega F(u(t))\ dx + \left\|u_t(t)\right\|_\rho^2\ dx\\
&\geq -2E_a(t) - 2\int_\Omega F(u(t))\ dx
\end{aligned} \tag{5.30}$$

e,

$$-\frac{l^{\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty}{2}\left\|u(t)\right\|_1^2 \geq -l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty E_a(t) - l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\int_\Omega F(u(t))\ dx. \tag{5.31}$$

Substituindo (5.30) e (5.31) em (5.29), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}N''(t) + C_\epsilon\left\|u_t(t)\right\|_{m+1}^{m+1}\\
&\geq -\epsilon R(t)^{\frac{m+1}{p+1}} + \left(p - 1 - l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)\int_\Omega F(u(t))\ dx - \left(2 + g_0\left\|a\right\|_\infty\right)E_a(t).
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Pela hipótese (H-11) e a desigualdade (5.22), temos que

$$\begin{aligned}\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)\int_\Omega F(u(t))\,dx &> \frac{\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)}{p+1}\left(\|u(t)\|_1^2+\int_0^\infty g(s)\left\|\eta^t\right\|_{H_a^1}^2 ds\right)\\ &> \frac{\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)}{p+1}\left(2d\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\right)\\ &= 2d\left[\frac{p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty}{p-1}\right]\\ &= 2d\gamma\\ &= 2d-2dl^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty,\end{aligned}\tag{5.33}$$

onde $\gamma=\dfrac{p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty}{p-1}<1$. Então, de

$$1.\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)=(\delta-\delta+1)\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)\int_\Omega F(u(t))\,dx &= (\delta-\delta+1)\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)\int_\Omega F(u(t))\,dx\\ &> \delta\left(p-1-l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)\int_\Omega F(u(t))\,dx\\ &\quad +2d(1-\delta)-2d(1-\delta)l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty.\end{aligned}\tag{5.34}$$

Por outro lado, de $0\le E_a(t)\le E_a(0)<d$, existe $\delta>0$ satisfazendo

$$0\le E_a(t)\le E_a(0)\le(1-\delta)d,$$

para todo $t\in\mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}-\left(2+l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)E_a(t) &\ge -\left(2+l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\right)(1-\delta)d\\ &= -2d(1-\delta)-d(1-\delta)l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty\\ &\ge -2d(1-\delta)-2d(1-\delta)l^{-\frac{1}{2}}g_0\left\|a\right\|_\infty.\end{aligned}\tag{5.35}$$

Combinando (5.32) (5.34) e (5.35), temos

$$\frac{1}{2}N''(t) + C_\epsilon \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} \geq -\epsilon R(t)^{\frac{m+1}{p+1}} + \delta\left(p - 1 - l^{-\frac{1}{2}} g_0 \|a\|_\infty\right) \int_\Omega F(u(t))\, dx. \tag{5.36}$$

Suponha que $S(t) > 1$. De $p > m$ temos $\frac{m+1}{p+1} < 1$ e, consequentemente, $S^{\frac{m+1}{p+1}}(t) < S(t)$. Então, tomando

$$0 < \epsilon < \frac{\delta\left(p - 1 - l^{-\frac{1}{2}} g_0 \|a\|_\infty\right)}{2}$$

e usando (5.33), concluímos por (5.36) que

$$\frac{1}{2}N''(t) + C_\epsilon \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} \geq \frac{\delta\left(p - 1 - l^{-\frac{1}{2}} g_0 \|a\|_\infty\right)}{2} \int_\Omega F(u(t)) > \delta d\gamma. \tag{5.37}$$

Agora, suponha $S(t) \leq 1$. Neste caso $S^{\frac{m+1}{p+1}}(t) < 1$, então tomando $0 < \epsilon < \delta d\gamma$ e usando (5.33) em (5.36), obtemos

$$\frac{1}{2}N''(t) + C_\epsilon \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} \geq 2\delta d\gamma - \epsilon > \delta d\gamma. \tag{5.38}$$

Então, considerando $0 < \epsilon < \min\left\{\frac{\delta\left(p - 1 - l^{-\frac{1}{2}} g_0 \|a\|_\infty\right)}{2}, \delta d\gamma\right\}$, por (5.37) e (5.38) temos para qualquer $S(t)$, que é válido

$$N''(t) + 2C_\epsilon \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} \geq 2\delta d\gamma,$$

ou ainda, integrando a desigualdade acima sobre $(0, t)$

$$N'(t) - N'(0) + 2C_\epsilon \int_0^t \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1}\, d\tau \geq (2\delta d\gamma)\, t. \tag{5.39}$$

Mas, como $h(s)s \geq |s|^{m+1}$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1}\, d\tau &\leq C \int_0^t \int_\Omega h(u_t) u_t\, dx d\tau \\ &\leq C(E(0) - E(t)) \\ &\leq CE(0) < Cd, \end{aligned} \tag{5.40}$$

onde usamos a relação $E(t) \leq E_a(t)$ e a hipótese $E_a(0) < d$.

Substituindo (5.40) em (5.39), vemos que

$$N'(t) > (2\delta d\gamma)t + N'(0) - C_\epsilon d$$

o que implica em

$$N(t) > (\delta d\gamma)t^2 + (N'(0) - C_\epsilon d)\, t + N(0), \tag{5.41}$$

ou seja, se $t \to \infty$, $N(t)$ possui um crescimento quadrático.

Por outro lado, utilizando a desigualdade de Holder e (5.40), observamos que

$$\begin{aligned}
N(t) &\leq C\,\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= C\int_\Omega \left| u_0 + \int_0^t u_t(\tau)\ d\tau \right|^2\ dx \\
&\leq 2C\,\|u_0\|^2 + 2Ct\left(\int_0^t \int_\Omega |u_t(\tau)|^2\ dx d\tau\right) \\
&\leq 2C\,\|u_0\|^2 + 2Ct\,(t.\,|\Omega|)^{\frac{m-1}{m+1}} \left(\int_0^t \int_\Omega |u_t(\tau)|^{m+1}\ dx d\tau\right)^{\frac{2}{m+1}} \\
&< 2C\,\|u_0\|^2 + 2Cd^{\frac{2}{m+1}} t^{\frac{2m}{m+1}} \\
&\leq 2C\,\|u_0\|^2 + Cd^{\frac{2}{m+1}} t^2,
\end{aligned}$$

para $t > 1$, uma vez que $\dfrac{2m}{m+1} < 2$, gerando uma contradição com (5.41).

Portanto, como em ambos os casos obtemos uma contradição, a solução fraca $u(t)$ não pode ser estendida a todo o intervalo $[0, \infty)$.

$\square$

Bibliografia

[1] Alabau-Boussouira, F; Cannarsa, P. *A general method for proving sharp energy decay rates for memorydissipative evolution equations*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009), 867-872.

[2] Alabau-Boussouira, F; Cannarsa, P; Sforza, D. *Decay estimates for second order evolution equations with memory.* Journal of Functional Analysis, 254, (2008), 1342-1372.

[3] Ball, J. M. *Renarks on blow-up and non existence theorems for nonlinear evolution equations.*, Quart. J. Math. 28, (1977), 473-486.

[4] Barbu, V. *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer New York, 2010.

[5] Bociu, L.; Lasiecka, I.*Blow-up of weak solutions for the semilinear wave equations with nonlinear boundary and interior sources and damping*, Appl. Math. 35(3) (2008) 281-304.

[6] Bociu, L.; Lasiecka, I. *Local Hadamard well-posedness for nonlinear wave equations with supercritical sourcesand damping*, J. Differential Equations, 249, no. 3 (2010,) 654-683.

[7] Bociu, L.; Lasiecka, I. *Uniqueness of weak solutions for the semilinear wave equations with supercritical boundary/interior sources and damping*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 22, no. 4 (2008), 835–860.

[8] Boltzmann, L. E. *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*, Wien. Ber. 70 (1874), 275-306.

[9] Boltzmann, L. E.*Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*, Wien. Ber. 5 (1878), 430-432.

[10] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext. Springer New York, 1973.

[11] Brezis, H. *Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert.* Amsterdam: North Holland Publishing Co., 2010.

[12] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Jorge Silva, M. A.; Souza Franco, A. Y. *Exponential stability for the wave model with localized memory in a past history framework.* J. Diferential Equations 264 (2018), 6535-6584.

[13] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Palomino, J. A. S. *Semigrupos Lineares e Não Lineares e Aplicações.* Maringá, 2016.

[14] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Lasiecka, I.; Falcão Nascimento, F. A. *Intrinsic decay rate estimates for the wave equation with competing viscoelastic and frictional dissipative effects.* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 19 (2014), no. 7, 1987-2012.

[15] Cavalcanti, M. M.; Fatori, L. H.; To, F. M. *Attractors for wave equations with degenerate memory.* J. Differential Equations 260 (2016), no. 1, 56-83.

[16] Cavalcanti, M. M.; Oquendo, H. P *Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation.* SIAM J. Control Optim. 42 (2003), no. 4, 1310-1324.

[17] Coleman, B. D.; Miel, V. J. *Norms and semigroups in the theory of fading memory*, Arch. Rational Mech. Anal., 23 (1967), 87-123.

[18] Coleman, B. D.; Miel, V. J. *On the general theory of fading memory*, Arch. Rational Mech. Anal., 29 (1968), 18-31.

[19] Conti, M.; Ma, T. F.; Marchini, E. M.; Seminario Huertas, P. N. *Asymptotics of viscoelastic material with nonlinear density and memory effects*, J. Differential Equations, 264 (2018), 4235-4259.

[20] Dafermos, C. M. *Asymptotic stability in viscoelasticity.* Arch. Ration. Mech. Anal. 37 (1970) 297-308.

[21] Fabrizio, M.; Giorgi C. and Pata, V. *A new approach to equations with memory*, Arch. Ration. Mech. Anal., 198 (2010), no. 1, 189–232.

[22] Georgiev, V.; Todorova G. *Existence of solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms* J. Differential Equations 109, (1994), 295-308.

[23] Guo, Y.; Rammaha, M. A.; Sakuntasathien, S.; Titi, E.S; Toundykov, D. *Hadamard well-posedness for a hyperbolic equation of viscoelasticity with supercritical sources and damping*, J. Differential Equations, 257 (2014), 3778–3812.

[24] Guo, Y.; Rammaha, M. A.; Sakuntasathien, S. *Energy decay of a viscoelastic wave equation with supercritical nonlinearities*, ZAMP, (2018), 69:65.

[25] Lasiecka, I.; Tataru, D. *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping*, Differential and Integral Equations, Volume 6, no. 3, May 1993, 507-533.

[26] Lasiecka, I; Messaoudi, S. A; Mustafa, M. I. *Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory.* J. Math. Phys. 54 (2013), no. 3, 031504, 18.

[27] Lions, J. L. *Quelques méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires.* Dunod, Guthier-Villars, 1969.

[28] Liu, K.; Liu, Z. *Exponential decay of energy of vibrating strings with local viscoelasticity*, ZAMP, 53 (2002), 265-280.

[29] Munoz Rivera, J. E.; Peres Salvatierra, A. *Asymptotic behaviour of the energy in partially viscoelastic materials.* Quart. Appl. Math. 59 (2001), no. 3, 557-578.

[30] Radu, P. *Weak solutions to the Cauchy problem of a similinear wave equation with damping and source terms.* Adv. Differential Equations 10 (2005), 1261 - 1300.

[31] Renardy, M.; Hrusa, J. W.; Nohel, J. A. *Mathematical Problems in Viscoelasticity*, Wiley, New York, 1987.

[32] Rivera, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais. Textos Avançados.* Rio de Janeiro, Petrópolis, LNCC. 1999.

[33] Showalter, R. E. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations.* Mathematical Surveys and Monogrphs, Volume 49. AMS, 1997.

[34] Simon, J.*Compact sets in the Space* $L^p(0,t;B)$. Annali di Matematica pura ed applicata, Volume CXLVI (1987), 65-96.

[35] Strauss, W. A. *On wealk solutions of semi-linear hyperbolic equations*, Brown University, Providence, Rhode Island, USA, 42 (1970) 645-651.

[36] Volterra, V. *Sur les équations intégro-diffeéerentielles et leurs applications*, Acta Math., 35 (1912) 295-356.

[37] Volterra, V. *Lenços sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

[38] Yanqiu, G.; Mohammad, A. R. *Sustems of nonlinear wave equations with damping and supercritical boundary and interior sources.* Trans. Amer. Math. Soc 366 (2014), no. 5, 2265-2325.