

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**HENRIQUE TAPPARELLO MORESCO<sup>1</sup>**

---

---

**Formas normais de pares de involuções lineares e transversais  
no estudo de diagramas divergentes de dobras e de  
difeomorfismos reversíveis.**

---

**MARINGÁ  
2021**

---

<sup>1</sup>O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**HENRIQUE TAPPARELLO MORESCO  
ORIENTADORA: PROF<sup>a</sup>. DR<sup>a</sup>. PATRÍCIA HERNANDES BAPTISTELLI**

---

---

**Formas normais de pares de involuções lineares e transversais  
no estudo de diagramas divergentes de dobras e de  
difeomorfismos reversíveis.**

---

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática - PMA/UEM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**MARINGÁ  
2021**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)**

M843f Moresco, Henrique Tapparello  
Formas normais de pares de involuções lineares e transversais no estudo de diagramas divergentes de dobras e de difeomorfismos reversíveis / Henrique Tapparello Moresco. - Maringá, 2021.  
126 f. : il. color.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Patrícia Hernandes Baptistelli.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2021.  
Incluí índice.

1. Pares de involuções. 2. Formas normais. 3. Difeomorfismos reversíveis. 4. Simetrias. 5. Conjuntos de pontos fixos. 6. Equação diferencial binária. 2. Simetria. 3. Forma quadrática equivariante. 4. Grupo de Lie compacto. 5. Teoria de representação. 6. Pairs of involutions. 7. Normal forms. 8. Diagrams of folds. 9. Reversible diffeomorphisms. 10. Symmetries. 11. Fixed-points sets. I. Baptistelli, Patrícia Hernandes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 515.3

# HENRIQUE TAPPARELLO MORESCO

## FORMAS NORMAIS DE PARES DE INVOLUÇÕES LINEARES E TRANSVERSAIS NO ESTUDO DE DIAGRAMAS DIVERGENTES DE DOBRAS E DE DIFEOMORFISMOS REVERSÍVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

### COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli - UEM (Presidente)

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza - UEM

Profa. Dra. Isabel Salgado Labouriau - UNIVERSIDADE DO PORTO

Aprovada em: 27 de abril de 2021.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet.

*À minha família*

---

# AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha amada esposa Stefane por seu carinho e amor que me mantiveram encorajado a fazer esse trabalho. Sua força e paciência foram essenciais nessa jornada.

À minha família, por sempre acreditar em mim e ser base e suporte para toda essa caminhada desde a graduação.

Aos meus colegas, que me ensinaram como pode ser divertido e interessante estudar matemática. Amigos que transcendem o ambiente profissional. Não há nem a necessidade de nomeá-los, visto que se lerem com atenção verão suas contribuições implícitas neste trabalho.

À minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dra. Patrícia Hernandez Baptistelli por aceitar me orientar e estar comigo durante esses mais de quatro anos de pesquisa, desde o primeiro ano de graduação. Compartilhar o conhecimento é uma dádiva a qual desempenhou com excelência, obrigado.

À CAPES pelo apoio financeiro durante todo esse ano.

Ao FNDE pelo apoio financeiro durante a graduação e, conseqüentemente, o primeiro ano do mestrado.

Ao PET, e aqui incluo novamente os meus colegas, mas em especial aos tutores por seu comprometimento com a formação de seus alunos. Seus esforços fazem e farão parte de mim durante toda a minha carreira acadêmica.

A minha cachorrinha Pedrita, que esteve comigo em cada um dos caracteres digitados neste texto. Obrigado por seu companheirismo, respeito e carinho, espero que um dia todos tenham a oportunidade de conhecer um "*serzinho*" como você.

---

# RESUMO

Neste trabalho, estudamos os diagramas divergentes de dobras e os difeomorfismos reversíveis por meio de uma associação com pares de involuções. Vamos dar ênfase ao contexto linear, determinando primeiramente as formas normais das  $s$ -uplas de involuções lineares e transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Utilizamos essas formas normais para classificar os diagramas divergentes de dobras associados às uplas de involuções. Em um segundo momento, determinamos os subespaços de pontos fixos, as simetrias e as simetrias reversíveis de difeomorfismos reversíveis da forma  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ , em que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é um par de involuções lineares e transversais, com o intuito de analisar a dinâmica discreta gerada por  $F$ . Completamos nosso estudo analisando o comportamento dos subespaços de pontos fixos de duas sequências de involuções reversíveis associadas a  $F$ .

**Palavras-chave:** Pares de involuções, formas normais, diagramas de dobras, difeomorfismos reversíveis, simetrias, conjuntos de pontos fixos.

---

# ABSTRACT

In this work, we study the divergent diagrams of folds and the reversible diffeomorphisms through an association with pairs of involutions. We emphasize the linear context, first determining the normal forms of the  $s$ -tuples of linear and transversal involutions in  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . We use these normal forms to classify the divergent diagrams of folds associated with the tuples of involutions. In a second moment, we determine the fixed-points subspaces, the symmetries and reversible symmetries of reversible diffeomorphisms of the form  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ , where  $(\varphi_1, \varphi_2)$  is a pair of linear and transversal involutions, in order to analyze the discrete dynamics generated by  $F$ . We complete our study by analyzing the behavior of the fixed-points subspaces of two sequences of reversible involutions associated with  $F$ .

**Keywords:** Pairs of involutions, normal forms, diagrams of folds, reversible diffeomorphisms, symmetries, fixed-points sets.

---

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Matrizes . . . . .	4
1.2 Difeomorfismos reversíveis . . . . .	8
1.3 Dinâmica e os conjuntos de pontos fixos . . . . .	13
1.4 Involuções . . . . .	17
1.5 Uma introdução à teoria invariante . . . . .	24
<b>2 Diagramas divergentes de dobras</b>	<b>28</b>
2.1 Dobras e involuções . . . . .	29
2.2 Diagramas divergentes . . . . .	41
2.3 Caracterização das órbitas . . . . .	51
2.3.1 Caso $s = n = 2$ . . . . .	54
2.3.2 Casos $s = 2$ e $n \geq 3$ . . . . .	65
<b>3 Difeomorfismos reversíveis e reconhecimento de simetrias</b>	<b>76</b>
3.1 As simetrias reversíveis $\varphi_k$ e $\varphi'_k$ . . . . .	77
3.2 Reconhecimento de simetrias para o caso $n = 2$ . . . . .	83
3.2.1 $\Lambda$ é abeliano . . . . .	83
3.2.2 $\Lambda$ é não abeliano e $\text{Fix}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$ . . . . .	84
3.2.3 $\Lambda$ é não abeliano e $\text{Fix}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$ . . . . .	87
3.3 Reconhecimento de simetrias para o caso $n \geq 3$ . . . . .	99
3.3.1 A suspensão do caso $(v)$ . . . . .	104

3.3.2	Simetrias e simetrias reversíveis das suspensões . . . . .	107
3.4	Dinâmica dos difeomorfismos reversíveis . . . . .	111

*“Há três caminhos para o fracasso: não ensinar o que se sabe, não praticar o que se ensina, e não perguntar o que se ignora.” - Beda*

---

# INTRODUÇÃO

O termo involução tem diferentes conotações dependendo do contexto em que está inserido. No presente trabalho, uma involução é um germe de um difeomorfismo  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  que coincide com sua inversa. No estudo local, este conceito vem ganhando cada vez mais espaço, desde o estudo de Devaney [10] que utiliza pares de involuções para analisar os difeomorfismos reversíveis em espaços de dimensão par, até a classificação de diagramas divergentes de dobras associados às uplas de involuções, como visto em [17].

A ideia de determinar formas normais de um objeto é algo amplamente utilizado na matemática. Tentativas de linearização são um exemplo clássico disto, como no teorema de linearização de Hartman–Grobman [13]. No caso das formas normais de involuções, elas desempenham um papel relevante na classificação de outros objetos tais como difeomorfismos reversíveis, diagramas divergentes de dobras e campos de vetores descontínuos (veja [3, 17, 18, 24]). Uma vasta coleção de problemas envolvendo involuções é apresentada por Voronin [26].

No estudo dos diagramas divergentes de dobras, Teixeira [24] mostra que a  $C^0$ -equivalência (conjugação simultânea por um homeomorfismo) entre dois pares de involuções  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\psi_1, \psi_2)$  em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  implica na equivalência entre os diagramas divergentes de dobras  $(f_1, f_2)$  e  $(g_1, g_2)$  associados a tais pares, respectivamente. Mais tarde, Mancini, Manoel e Teixeira [17] generalizam esse resultado garantindo que dois diagramas divergentes de dobras  $(f_1, \dots, f_s)$  e  $(g_1, \dots, g_s)$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  são equivalentes se, e somente se, as uplas de involuções associadas  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  e  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  são equivalentes, para todo  $s, n \geq 2$ . Sendo assim, classificar as uplas de involuções e determinar suas formas normais é suficiente para classificar os diagramas divergentes de dobras associados.

A classificação de pares de involuções também tem sua importância no estudo dos difeomorfismos reversíveis. Um germe de um difeomorfismo  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é dito  $\varphi$ -reversível se  $F \circ \varphi = \varphi \circ F^{-1}$ . Nestas condições,  $\varphi$  é chamada de simetria reversível de  $F$ . Em nosso

estudo, assumimos que existe sempre uma involução  $\varphi$  de forma que  $F$  seja  $\varphi$ -reversível. Neste caso, é possível associar  $F$  a um par de involuções  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são simetrias reversíveis de  $F$  tais que  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ . Por esta razão, a classificação desses pares implica na classificação dos difeomorfismos reversíveis. Neste contexto, Baptistelli, Labouriau e Manoel [3] utilizam a classificação dos pares de involuções lineares e transversais obtida em [17] para compreender a dinâmica gerada por  $F$ .

Por sua vez, os sistemas dinâmicos reversíveis têm diversas aplicações na física e nas engenharias. Exemplos de trabalhos que exploram o significado físico de tais sistemas são [6, 23]. Do ponto de vista matemático, os sistemas reversíveis contínuos podem ser estudados usando ferramentas da teoria invariante de grupos e da teoria de singularidades, como podemos ver em [1, 4, 5, 15, 16, 20, 25]. No presente trabalho, estudamos os sistemas reversíveis discretos por um viés algébrico, porém buscando também entender a sua dinâmica. É válido mencionar que, sob certas condições, o estudo a tempo discreto apresenta uma diferença se comparado ao caso contínuo, que é a existência de infinitas simetrias e simetrias reversíveis de um difeomorfismo reversível sob uma involução (Proposição 1.10). Tal fato não é esperado, em geral, no estudo de campos de vetores (tempo contínuo) reversíveis sob uma involução.

O texto está organizado da seguinte forma. O Capítulo 1 apresenta os conceitos e as propriedades que utilizamos no decorrer do texto. Na Seção 1.1, estudamos algumas propriedades de matrizes em blocos que serão utilizadas na Seção 3.3, quando trabalhamos com as suspensões de germes de aplicações. Na Seção 1.2, abordamos os difeomorfismos reversíveis  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , associado-o a um par de involuções  $(\varphi_1, \varphi_2)$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  formado por simetrias reversíveis de  $F$ . Um estudo introdutório da dinâmica gerada por  $F$  é apresentado na Seção 1.3 juntamente com o estudo dos conjuntos de pontos fixos e antipodais, que são centrais nos próximos dois capítulos. As propriedades básicas de um conjunto de involuções via equivalência são apresentadas na Seção 1.4, onde provamos uma versão adaptada ao nosso estudo do teorema de linearização de Bochner-Montgomery [21] em conjuntos compactos (Teorema 1.23). No nosso caso, o grupo é abeliano e gerado por involuções, o qual provamos ser finito e, conseqüentemente, compacto. Esta linearização nos permite considerar uma estrutura de subvariedade diferenciável para os conjuntos de pontos fixos. Na Seção 1.5, introduzimos brevemente a teoria invariante sob a ação de um grupo de Lie linear, com destaque para o Teorema de Schwarz (Teorema 1.34).

No Capítulo 2, estudamos os diagramas divergentes de dobras e encontramos as formas normais dos pares  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de involuções lineares e transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . A relação entre dobras e involuções é trabalhada na Seção 2.1, onde mostramos que dada uma dobra  $f$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  podemos sempre obter uma única involução  $\varphi$  que está associada a ela (Proposição 2.4). Contudo,  $\varphi$  está associada a uma quantidade infinita de dobras. Mais precisamente, o

conjunto das dobras associadas a  $\varphi$  é o conjunto das dobras  $\mathcal{L}$ -equivalentes a  $f$  (Corolário 2.16). Na Seção 2.2, utilizamos a Proposição 2.4 juntamente com o Corolário 2.16 como base para mostrar que a classificação dos diagramas divergentes de dobras está relacionada com a classificação das uplas de involuções associadas (Teorema 2.20). Esse resultado é mais uma razão para determinar as formas normais para as uplas de involuções. Na Seção 2.3, com as hipóteses de linearidade e transversalidade, classificamos os pares de involuções em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , para  $n = 2$  na Subseção 2.3.1 e para  $n \geq 3$  na Subseção 2.3.2.

No Capítulo 3, utilizamos as formas normais obtidas nas Subseções 2.3.1 e 2.3.2 para analisar os difeomorfismos reversíveis em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  da forma  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ , com  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  involuções que se comportam como simetrias reversíveis de  $F$ . A Seção 3.1 é dedicada a estudar as sequências de involuções

$$\varphi_k = \varphi_2 \circ F^{k-2} \quad \text{e} \quad \varphi'_k = F^{k-1} \circ \varphi_1, \quad (1)$$

para  $k \geq 1$ , as quais também são simetrias reversíveis de  $F$ . Mostramos a existência de duas cadeias de subvariedades de pontos fixos dessas involuções (Corolário 3.5) cujas dimensões podem ser obtidas a partir das dimensões de  $\text{Fix}(\varphi_1)$  e de  $\text{Fix}(\varphi_2)$  (Corolário 3.6). Além disso, mostramos como determinar as simetrias e simetrias reversíveis de  $F$  a partir das simetrias e simetrias reversíveis de sua forma normal (Proposição 3.7). Na Seção 3.2 determinamos as formas normais para os difeomorfismos reversíveis no plano, com a hipóteses de linearidade e transversalidade sobre as involuções  $\varphi_1, \varphi_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ . Também reconhecemos as simetrias e simetrias reversíveis de  $F$ , bem como os subespaços de pontos fixos das involuções  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$  definidas em (1). Na Seção 3.3, generalizamos os resultados da seção anterior para o caso em que  $n \geq 3$ , utilizando o conceito de suspensões. Na Seção 3.4, estudamos as órbitas dos pontos  $x \in (\mathbb{R}^2, 0)$  com respeito à dinâmica discreta gerada por  $F$ .

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## PRELIMINARES

O objetivo central desse capítulo é definir conceitos, lembrar propriedades e estabelecer notações que serão utilizadas nos próximos capítulos. Começamos lembrando algumas propriedades de matrizes. Por simplicidade, confundiremos matrizes com transformações lineares, tendo em mente a associação que existe entre elas, fixada uma base.

Este capítulo está dividido em cinco seções. Na Seção 1.1, apresentamos algumas propriedades de matrizes em blocos. Na Seção 1.2, introduzimos os conceitos de difeomorfismo reversível, de simetria e simetria reversível de um difeomorfismo, bem como provamos propriedades básicas de uma classe especial de simetrias, as involuções. Na Seção 1.3, definimos os conjuntos de pontos fixos de um germe e introduzimos a relação desses conjuntos com a dinâmica dos difeomorfismos reversíveis e das involuções. Na Seção 1.4, estudamos as  $s$ -uplas de involuções mediante uma relação de equivalência e introduzimos o conceito de transversalidade, que será utilizado no Capítulo 2 na classificação dos pares de involuções e dos diagramas divergentes de dobras associados. Para finalizar o capítulo, na Seção 1.5 apresentamos brevemente a teoria invariante sob a ação de um grupo de Lie linear cujo principal resultado é o Teorema 1.34.

### 1.1 Matrizes

Quando se trata de matrizes quadradas de ordens maiores, calcular seu determinante ou até mesmo verificar se ele é não nulo pode ser uma tarefa complicada. Um forma interessante de trabalhar com matrizes de maior tamanho é dividi-las em blocos. As duas seguintes proposições nos cedem uma boa forma de calcular o determinante de uma matriz em blocos. Para mais detalhes, veja [2].

**Proposição 1.1.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada escrita em blocos como*

$$A = \left( \begin{array}{c|c} M & R \\ \hline 0_{r \times s} & N \end{array} \right),$$

onde  $0_{r \times s}$  denota a matriz nula de ordem  $r \times s$ . Então,

$$\det A = \det M \det N.$$

*Demonstração.* Veja [2, Chapter 10, p. 230]. □

**Proposição 1.2.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  escrita em blocos como*

$$A = \left( \begin{array}{c|c} M & R \\ \hline S & N \end{array} \right),$$

onde  $M$  e  $N$  são matrizes quadradas de ordem  $p < n$  e  $q < n$ , respectivamente. Suponha que  $M$  seja inversível. Então,

$$\det A = \det M \det(N - SM^{-1}R).$$

*Demonstração.* Considere a matriz

$$B = \left( \begin{array}{c|c} I_p & 0_{p \times q} \\ \hline -SM^{-1} & I_q \end{array} \right),$$

onde  $I_p$  e  $I_q$  são as matrizes identidades de ordem  $p$  e  $q$ , respectivamente, e  $0_{p \times q}$  é a matriz nula de ordem  $p \times q$ . Como  $B$  é uma matriz triangular inferior, segue que  $\det B = 1$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left( \begin{array}{c|c} I_p & 0_{p \times q} \\ \hline -SM^{-1} & I_q \end{array} \right) \det \left( \begin{array}{c|c} M & R \\ \hline S & N \end{array} \right) \\ &= \det \left( \left( \begin{array}{c|c} I_p & 0_{p \times q} \\ \hline -SM^{-1} & I_q \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} M & R \\ \hline S & N \end{array} \right) \right) \\ &= \det \left( \begin{array}{c|c} M & R \\ \hline 0_{q \times p} & N - SM^{-1}R \end{array} \right) \\ &= \det M \det(N - SM^{-1}R), \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue da proposição anterior. □

O posto de uma matriz de qualquer ordem corresponde ao número de linhas ou de colunas linearmente independentes da matriz. Tal conceito é um dos primeiros tópicos abordados em um bom curso de álgebra linear tanto para a resolução de sistemas lineares quanto para a compreensão de transformações lineares. Em nosso contexto, usaremos o posto de uma matriz no estudo de dobras realizado na Seção 2.1. Com esse intuito, apresentamos o seguinte resultado (veja [11, II, Lemma 5.2]).

**Lema 1.3.** *Seja  $S$  uma matriz de ordem  $m \times n$  com*

$$S = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),$$

onde  $A$  é uma matriz inversível de ordem  $k$ . Então  $\text{posto}(S) = k$  se, e somente se,  $D - CA^{-1}B = 0$ .

*Demonstração.* Considere

$$T = \left( \begin{array}{c|c} I_k & 0_{k \times m-k} \\ \hline -CA^{-1} & I_{m-k} \end{array} \right).$$

Pela Proposição 1.1,

$$\det(T) = \det(I_k) \det(I_{m-k}) = 1 \neq 0,$$

donde segue que  $T$  é inversível. Logo,

$$\text{posto}(S) = \text{posto}(TS) = \text{posto} \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D - CA^{-1}B \end{array} \right). \quad (1.1)$$

Claramente, se  $D - CA^{-1}B = 0$ , então

$$\text{posto}(S) = \text{posto}(A) = k,$$

visto que  $A$  é inversível. Agora, se  $\text{posto}(S) = k = \text{posto}(A)$ , de (1.1) obtemos que

$$\text{posto}(D - CA^{-1}B) = 0,$$

e, conseqüentemente,  $D - CA^{-1}B = 0$ . □

A diagonalização de matrizes também é um assunto de grande interesse em álgebra linear, pois as facilidades de se trabalhar com a forma diagonal de uma matriz são inúmeras, inclusive no cálculo do determinante. A propriedade de uma mesma base diagonalizar duas matrizes simultaneamente está intimamente ligada com um dos casos da classificação feita nas Subseções 2.3.1 e 2.3.2. Assim, é natural que busquemos alguma equivalência para esta propriedade, o que é apresentado a seguir.

**Proposição 1.4.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$  diagonalizáveis. Então  $A$  e  $B$  são simultaneamente diagonalizáveis se, e somente se,  $AB = BA$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $A$  e  $B$  sejam simultaneamente diagonalizáveis. Assim, existe uma matriz inversível  $P$  de forma que  $PAP^{-1}$  e  $PBP^{-1}$  sejam matrizes diagonais. Logo,

$$\begin{aligned} PABP^{-1} &= (PAP^{-1})(PBP^{-1}) \\ &= (PBP^{-1})(PAP^{-1}) \\ &= PBAP^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,  $AB = BA$ .

Reciprocamente, suponha que  $AB = BA$ . Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  os autovalores distintos de  $A$ . Considere  $E_i$  o autoespaço associado ao autovalor  $\lambda_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ . Observe que, para todo  $v \in E_i$ ,

$$A(B(v)) = B(A(v)) = B(\lambda_i v) = \lambda_i B(v).$$

Logo,  $B(v) \in E_i$ , para todo  $v \in E_i$  e todo  $i = 1, \dots, k$ , isto é,  $E_i$  é  $B$ -invariante. Assim, podemos definir o operador linear

$$\begin{aligned} B_i : E_i &\rightarrow E_i \\ v &\mapsto B(v) \end{aligned}$$

para cada  $i = 1, \dots, k$ . Fixado  $i$ , escolha uma base  $\gamma_i = \{v_{1,i}, \dots, v_{r_i,i}\}$  para o autoespaço  $E_i$ . Complete  $\gamma_i$  a fim de formar uma base para  $\mathbb{R}^n$ , digamos  $\gamma'_i$ . Assim, a matriz de  $B$  na base  $\gamma'_i$  é dada como uma matriz em blocos por

$$[B]_{\gamma'_i} = \left( \begin{array}{c|c} [B_i]_{\gamma_i} & Y_i \\ \hline 0_{(n-r_i) \times r_i} & X_i \end{array} \right), \quad (1.2)$$

onde  $Y_i$  e  $X_i$  são blocos de matrizes de ordem  $r_i \times (n - r_i)$  e  $(n - r_i) \times (n - r_i)$ , respectivamente, para todo  $i = 1, \dots, k$ . Denote por  $m_B(x)$  e  $m_{B_i}(x)$  os polinômios minimais de  $B$  e  $B_i$ , respectivamente. Então,

$$m_B([B]_{\gamma'_i}) = 0_{n \times n},$$

onde  $0_{n \times n}$  é a matriz nula de ordem  $n$ . Por (1.2) segue que

$$m_B([B]_{\gamma'_i}) = \left( \begin{array}{c|c} m_B([B_i]_{\gamma_i}) & Z_i \\ \hline 0_{(n-r_i) \times r_i} & m_B(X_i) \end{array} \right)$$

para alguma matriz  $Z_i$ , visto que para quaisquer matrizes quadradas  $C$  e  $D$  temos que

$$\left( \begin{array}{c|c} C & \star \\ \hline 0 & D \end{array} \right)^m = \left( \begin{array}{c|c} C^m & \star \\ \hline 0 & D^m \end{array} \right)$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Logo,

$$m_B([B_i]_{\gamma_i}) = 0_{r_i \times r_i}.$$

Como  $m_{B_i}(x)$  é o polinômio mônico de menor grau que anula  $B_i$ , concluímos que  $m_{B_i}(x)$  divide  $m_B(x)$ . Agora,  $B$  é diagonalizável e, portanto, seu polinômio minimal  $m_B(x)$  é o produto de fatores lineares. Portanto,  $m_{B_i}(x)$  é o produto de fatores lineares, donde segue que  $B_i$  é diagonalizável. Seja  $\beta_i$  uma base para  $E_i$  formada por autovetores de  $B|_{E_i}$ , para cada  $i = 1, \dots, k$ . Como  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ , temos que

$$\beta = \bigcup_{i=1}^k \beta_i$$

é uma base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovetores de  $A$  e de  $B$ , provando que  $A$  e  $B$  são simultaneamente diagonalizáveis. □

## 1.2 Difeomorfismos reversíveis

O estudo dos difeomorfismos reversíveis é o principal assunto deste trabalho e, nesta seção, introduzimos algumas definições e resultados da abordagem que iremos adotar. Nosso objetivo é estudar os germes de difeomorfismos que são reversíveis segundo uma involução. Veremos que esta condição implicará em resultados interessantes, do ponto de vista local, sobre a dinâmica discreta gerada por um difeomorfismo.

A principal referência nesta seção é [3]. Começamos com a definição de um germe. Sem perda de generalidade, o estudo local desenvolvido no presente trabalho é em torno da origem  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.5.** Seja  $F : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação definida em uma vizinhança  $U_1$  de 0 tal que  $F(0) = 0$ . O germe de  $F$  na origem, denotado por  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , é o conjunto das aplicações  $G : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que existe uma vizinhança  $U \subset U_1 \cap U_2$  de 0 com

$$F|_U = G|_U.$$

Quando  $F$  for um difeomorfismo, dizemos que  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é um germe de um difeomorfismo.

Por conveniência, a palavra “germe” será omitida em alguns casos, contudo sempre estaremos considerando os germes de aplicações em vez das aplicações.

Considere  $\Omega$  o grupo das aplicações inversíveis em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  munido da composição. Defina

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega \times (\mathbb{R}^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \\ (\varphi, x) &\mapsto \varphi(x) \end{aligned} \tag{1.3}$$

e observe que  $\Phi$  é uma ação de  $\Omega$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . De fato, o elemento neutro de  $\Omega$  é o germe da aplicação identidade  $Id_n : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\Phi(Id_n, x) = Id_n(x) = x,$$

para todo  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . Além disso, dados  $\varphi, \phi \in \Omega$  temos

$$\Phi(\varphi, \Phi(\phi, x)) = \Phi(\varphi, \phi(x)) = \varphi(\phi(x)) = \varphi \circ \phi(x) = \Phi(\varphi \circ \phi, x),$$

para todo  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . Vale ressaltar que a ação  $\Phi$  não é linear, visto que se tomarmos  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  definida por

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^3, x_2, \dots, x_n)$$

temos que  $\varphi \in \Omega$  e, no entanto, a restrição de  $\Phi$  a  $\{\varphi\} \times (\mathbb{R}^n, 0)$  não é linear.

A partir de agora, denotamos  $\Phi(\varphi, x)$  por  $\varphi(x)$ , para simplificar a notação. Fixado um germe de um difeomorfismo  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , podemos definir dois subconjuntos de  $\Omega$  que nos ajudam a estudar a dinâmica gerada por  $F$ .

**Definição 1.6.** Seja  $\varphi \in \Omega$ . Um germe de um difeomorfismo  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é dito  $\varphi$ -equivariante se  $F \circ \varphi = \varphi \circ F$  e é dito  $\varphi$ -reversível se  $F \circ \varphi = \varphi \circ F^{-1}$ . No primeiro caso,  $\varphi$  é uma simetria de  $F$  e no segundo caso  $\varphi$  é um simetria reversível de  $F$ .

**Observação 1.7.** Seja  $\varphi \in \Omega$ . Se  $\varphi$  for uma simetria reversível para um germe de um difeomorfismo  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , então  $\varphi$  também é uma simetria reversível para  $F^{-1}$ . Com efeito, se

$$F \circ \varphi = \varphi \circ F^{-1},$$

então  $F \circ \varphi \circ F = \varphi$ , donde segue que

$$F^{-1} \circ \varphi = F^{-1} \circ (F \circ \varphi \circ F) = \varphi \circ (F^{-1})^{-1}.$$

Denote por  $\Gamma_+$  o conjunto de todas as simetrias de um germe de um difeomorfismo  $F$ , isto é,

$$\Gamma_+ = \{\varphi \in \Omega; F \circ \varphi = \varphi \circ F\}.$$

Note que  $\Gamma_+ \neq \emptyset$ , pois a identidade  $Id_n \in \Omega$  é uma simetria de  $F$ . Sejam  $\varphi, \psi \in \Gamma_+$ . Então,

$$(\varphi \circ \psi) \circ F = \varphi \circ (\psi \circ F) = \varphi \circ (F \circ \psi) = (\varphi \circ F) \circ \psi = (F \circ \varphi) \circ \psi = F \circ (\varphi \circ \psi),$$

donde segue que  $\varphi \circ \psi$  também é uma simetria de  $F$ . Além disso, como  $\varphi \circ F = F \circ \varphi$ , temos  $\varphi \circ F \circ \varphi^{-1} = F$  e, portanto,

$$F \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ F.$$

Assim,  $\varphi^{-1}$  também é uma simetria de  $F$ . Deste modo, o conjunto  $\Gamma_+$  é um subgrupo de  $\Omega$ . Vamos denotar o conjunto das simetrias reversíveis de  $F$  por  $\Gamma_-$ , ou seja,

$$\Gamma_- = \{\varphi \in \Omega; F \circ \varphi = \varphi \circ F^{-1}\} = \{\varphi \in \Omega; F^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ F\},$$

em que a segunda igualdade segue da Observação 1.7. Suponha que  $\Gamma_- \neq \emptyset$  e observe que fixado  $\delta \in \Gamma_-$ , temos  $\Gamma_- = \delta\Gamma_+$ . De fato, primeiramente note que dado  $\varphi \in \Gamma_+$ , então  $F^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ F^{-1}$ , ou seja,  $\varphi$  também é uma simetria de  $F^{-1}$ . Então

$$F \circ (\delta \circ \varphi) = (F \circ \delta) \circ \varphi = (\delta \circ F^{-1}) \circ \varphi = \delta \circ (F^{-1} \circ \varphi) = \delta \circ (\varphi \circ F^{-1}) = (\delta \circ \varphi) \circ F^{-1},$$

donde segue que  $\delta \circ \varphi \in \Gamma_-$  e, conseqüentemente,  $\delta\Gamma_+ \subset \Gamma_-$ . De modo análogo ao que fizemos para  $\Gamma_+$ , é possível mostrar que se  $\delta \in \Gamma_-$ , então  $\delta^{-1} \in \Gamma_-$ . De fato, se  $F \circ \delta = \delta \circ F^{-1}$ , então  $\delta^{-1} \circ F \circ \delta = F^{-1}$ , implicando que

$$\delta^{-1} \circ F = F^{-1} \circ \delta^{-1},$$

ou seja,  $\delta^{-1}$  é uma simetria reversível de  $F$ . Logo, dado  $\varphi \in \Gamma_-$ , temos

$$F \circ (\delta^{-1} \circ \varphi) = (F \circ \delta^{-1}) \circ \varphi = (\delta^{-1} \circ F^{-1}) \circ \varphi = \delta^{-1} \circ (F^{-1} \circ \varphi) = \delta^{-1} \circ (\varphi \circ F) = (\delta^{-1} \circ \varphi) \circ F.$$

Assim,  $\delta^{-1} \circ \varphi \in \Gamma_+$  e, portanto,

$$\varphi = \delta \circ \delta^{-1} \circ \varphi \in \delta\Gamma_+,$$

o que prova a outra inclusão. Logo,

$$\Gamma_- = \delta\Gamma_+, \tag{1.4}$$

para todo  $\delta \in \Gamma_-$  fixado, o que mostra que  $\Gamma_-$  é uma classe lateral de  $\Gamma_+$ . Assim, podemos escrever o conjunto de todas as simetrias e simetrias reversíveis de  $F$  como

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \delta\Gamma_+.$$

Queremos agora verificar se  $\Gamma_- = \delta\Gamma_+$  tem estrutura de grupo. Já mostramos que se  $\delta \in \Gamma_-$ , então  $\delta^{-1} \in \Gamma_-$ . Com isso,  $\Gamma_-$  possui os inversos de seus elementos. No entanto, dados  $\varphi, \psi \in \Gamma_-$  temos que

$$F \circ (\varphi \circ \psi) = (F \circ \varphi) \circ \psi = (\varphi \circ F^{-1}) \circ \psi = \varphi \circ (F^{-1} \circ \psi) = \varphi \circ (\psi \circ F) = (\varphi \circ \psi) \circ F,$$

ou seja,  $\varphi \circ \psi \in \Gamma_+$ . Uma condição necessária e suficiente para  $\Gamma_-$  ter estrutura de grupo, sob a operação de composição, é a seguinte.

**Proposição 1.8.** *O conjunto  $\Gamma_-$  tem estrutura de grupo se, e somente se,  $\Gamma_+ \cap \Gamma_- \neq \emptyset$ . Neste caso,  $\Gamma_+ = \Gamma_-$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, note que  $\Gamma_+ \cap \Gamma_- \neq \emptyset$  se, e somente se,  $\Gamma_+ = \Gamma_-$ . De fato, suponha que exista  $\delta \in \Gamma_+ \cap \Gamma_-$ . Como  $\delta \in \Gamma_-$ , temos  $\Gamma_- = \delta\Gamma_+$ . Agora, como  $\delta \in \Gamma_+$ , segue que  $\delta\Gamma_+ = \Gamma_+$ . Portanto,  $\Gamma_- = \Gamma_+$ . A recíproca é óbvia.

Assim, se  $\Gamma_-$  for um subgrupo de  $\Omega$ , então  $Id_n \in \Gamma_+ \cap \Gamma_-$  e, portanto,  $\Gamma_- = \Gamma_+$ . Claramente, se  $\Gamma_+ = \Gamma_-$  então  $\Gamma_-$  é um grupo. □

Portanto, o conjunto  $\Gamma_-$  não tem sempre uma estrutura de grupo. Vale ressaltar que exigir  $\Gamma_+ = \Gamma_-$  é equivalente a exigir  $F^2 = Id_n$ . De fato, se  $\varphi \in \Omega$  for tal que

$$\varphi \circ F^{-1} = F \circ \varphi = \varphi \circ F,$$

então como  $\varphi$  é inversível temos  $F^{-1} = F$ . Reciprocamente, se  $F = F^{-1}$ , então por definição  $\varphi \in \Gamma_+$  se, e somente se,  $\varphi \in \Gamma_-$ . Este é o único caso para o qual  $\Gamma_-$  é um grupo e será tratado com mais detalhes na Subseção 3.2.1.

Uma classe particularmente importante de simetrias (reversíveis ou não) são as involuções. Uma involução é um objeto amplamente utilizado nas mais diversas áreas da matemática, desde a matemática aplicada e computacional à álgebra abstrata. Em cada área a definição de involução é adaptada para as necessidades específicas. No nosso contexto, para um estudo local, vamos assumir que involuções são germes de difeomorfismos iguais ao seu inverso.

**Definição 1.9.** Uma involução é um germe de um difeomorfismo  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  satisfazendo  $\varphi \circ \varphi = Id_n$ .

A partir de agora, vamos assumir que sempre existe uma involução em  $\Gamma_-$ . Isso nos permite mostrar que os difeomorfismos reversíveis estão em correspondência biunívoca com pares de involuções. Mais precisamente, vamos identificar  $F$  com um par de involuções da seguinte forma. Suponha que  $\varphi_1$  seja uma involução. Então,  $F$  é  $\varphi_1$ -reversível se, e somente se,

$$F = \varphi_1 \circ \varphi_2,$$

para a involução  $\varphi_2 = \varphi_1 \circ F$ . Com efeito, se  $F$  for  $\varphi_1$ -reversível, então  $\varphi_2 = \varphi_1 \circ F$  satisfaz

$$\varphi_2 \circ \varphi_2 = \varphi_1 \circ F \circ \varphi_1 \circ F = \varphi_1 \circ \varphi_1 \circ F^{-1} \circ F = Id_n,$$

ou seja,  $\varphi_2$  é uma involução. Claramente, como  $\varphi_1^2 = Id_n$ , então

$$F = \varphi_1^2 \circ F = \varphi_1 \circ \varphi_1 \circ F = \varphi_1 \circ \varphi_2.$$

Reciprocamente, se  $F$  for um difeomorfismo da forma  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ , com  $\varphi_2 = \varphi_1 \circ F$  uma involução, então  $\varphi_1 = \varphi_2 \circ F^{-1}$  e, portanto,

$$\varphi_1^{-1} = (\varphi_2 \circ F^{-1})^{-1} = F \circ \varphi_2^{-1} = F \circ \varphi_2.$$

Segue que

$$F \circ \varphi_1 = F \circ (\varphi_2 \circ F^{-1}) = (F \circ \varphi_2) \circ F^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ F^{-1} = \varphi_1 \circ F^{-1},$$

pois  $\varphi_1$  é uma involução. Portanto,  $F$  é  $\varphi_1$ -reversível. Observe que  $\varphi_2$  também é uma simetria reversível de  $F$ , visto que

$$F \circ \varphi_2 = \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ F^{-1}.$$

Portanto, dado um germe de um difeomorfismo  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  podemos associá-lo a um par  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de involuções que são simetrias reversíveis de  $F$ .

Daqui em diante, assumimos

$$F = \varphi_1 \circ \varphi_2,$$

com  $\varphi_1, \varphi_2$  involuções pertencentes a  $\Gamma_-$ . Mais geralmente, existe uma sequência infinita de pares de involuções  $(\varphi_k, \varphi'_k)$  tais que  $F$  é  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$ -reversível, desde que  $F^m \neq Id_n$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Tais aplicações são definidas por

$$\varphi_k = \varphi_2 \circ F^{k-2} \quad \text{e} \quad \varphi'_k = F^{k-1} \circ \varphi_1, \quad (1.5)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , com  $k \geq 1$ . Para  $k = 1$  e  $k = 2$ , recuperamos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , com  $\varphi'_1 = \varphi_1$ .

Vejamos que  $\varphi_k$  é, de fato, uma involução e uma simetria reversível de  $F$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Inicialmente, temos que se  $\varphi$  é um simetria reversível de  $F$ , então

$$\varphi \circ F^k = F^{-k} \circ \varphi, \quad (1.6)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Provamos isso por indução sobre  $k$ . O caso  $k = 1$  segue da Definição 1.6. Agora, suponha que a igualdade (1.6) seja válida para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Logo,

$$\varphi \circ F^{k+1} = \varphi \circ F^k \circ F = F^{-k} \circ \varphi \circ F = F^{-k} \circ F^{-1} \circ \varphi = F^{-(k+1)} \circ \varphi,$$

o que conclui a indução. Assim, dado  $k \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\varphi_k \circ \varphi_k = (\varphi_2 \circ F^{k-2}) \circ (\varphi_2 \circ F^{k-2}) = \varphi_2 \circ \varphi_2 \circ F^{-k+2} \circ F^{k-2} = Id_n, \quad (1.7)$$

donde segue que  $\varphi_k$  é uma involução. Além disso,

$$F \circ \varphi_k = F \circ \varphi_2 \circ F^{k-2} = \varphi_2 \circ F^{-1} \circ F^{k-2} = \varphi_2 \circ F^{k-2} \circ F^{-1} = \varphi_k \circ F^{-1} \quad (1.8)$$

e, portanto,  $\varphi_k \in \Gamma_-$ . De modo análogo, obtemos as mesmas conclusões para  $\varphi'_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Até o momento não temos muitas informações sobre os conjuntos de simetrias  $\Gamma_+$  e  $\Gamma_-$ . Agora, com o uso das involuções definidas em (1.5), somos capazes de concluir sobre a cardinalidade de tais conjuntos.

**Proposição 1.10.** *Seja  $\varphi_1 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  uma involução e  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de um difeomorfismo  $\varphi_1$ -reversível tal que  $F^m \neq Id_n$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Então,  $F$  tem um grupo de simetrias infinito e um conjunto de simetrias reversíveis infinito.*

*Demonstração.* De acordo com a Definição 1.6,  $F$  é uma simetria de si mesmo. Considere o subgrupo de  $\Gamma_+$  gerado por  $F$ ,

$$[F] = \{F^k; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Observe que se  $F^k = F^j$ , para algum  $k, j \in \mathbb{Z}$ , então

$$F^{k-j} = Id_n = F^{j-k}.$$

Como  $F^m \neq Id_n$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ , segue que  $F^k \neq F^j$ , para todo  $k \neq j$ . Assim,  $[F]$  é um subgrupo infinito, o que prova que  $\Gamma_+$  também é infinito. Para as simetrias reversíveis, observe que as involuções definidas em (1.5) são distintas para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Com efeito, se  $\varphi_k = \varphi_j$ , então

$$\varphi_2 \circ F^{k-2} = \varphi_2 \circ F^{j-2},$$

o que implica em  $F^k = F^j$ . Como  $F^k \neq F^j$ , segue que  $\varphi_k \neq \varphi_j$ , para todo  $k \neq j$ . Logo, o subconjunto

$$\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma_-$$

é infinito e, portanto,  $\Gamma_-$  é um conjunto infinito. □

## 1.3 Dinâmica e os conjuntos de pontos fixos

Dada uma aplicação  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é sempre possível considerar um sistema dinâmico associado que se obtém fazendo as iteradas de  $F$ . Este é chamado de sistema dinâmico discreto. Estamos interessados em estudar o comportamento dos difeomorfismos reversíveis mediante essa dinâmica. Um estudo mais aprofundado sobre os sistemas dinâmicos discretos pode ser visto em [14]. Nossa principal referência nesta e na próxima seção é [17].

Para nossos propósitos, a seguinte definição de sistema dinâmico discreto é suficiente.

**Definição 1.11.** Dado um germe de um difeomorfismo  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , um sistema dinâmico discreto é uma sequência de pontos  $x_k \in (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que cada ponto está relacionado ao anterior por meio da equação

$$x_{k+1} = F(x_k). \tag{1.9}$$

A equação de evolução dada em (1.9) permite determinar o estado  $x_{k+1}$  num instante  $t_{k+1}$  a partir do estado  $x_k$  no instante  $t_k$ . Logo, o estado em um sistema discreto só muda em períodos determinados  $\{t_k; k \in \mathbb{Z}\}$ , em oposição ao tempo contínuo, permanecendo constante no intervalo de tempo entre dois desses períodos. Referimo-nos assim ao tempo discreto. Mais especificamente, dado um estado inicial  $x_0 \in (\mathbb{R}^n, 0)$ , a evolução desse estado é obtido aplicando-se  $F$  sucessivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0), \\ x_2 &= F(x_1) = F(F(x_0)) = F^2(x_0), \\ &\vdots \\ x_k &= F(x_{k-1}) = F^k(x_0). \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} x_{-1} &= F^{-1}(x_0), \\ x_{-2} &= F^{-1}(x_{-1}) = F^{-1}(F^{-1}(x_0)) = F^{-2}(x_0), \\ &\vdots \\ x_{-k} &= F^{-1}(x_{-k+1}) = F^{-k}(x_0). \end{aligned}$$

Assim, podemos definir as órbitas discretas de um sistema dinâmico, nas quais o tempo aumenta em passos discretos.

**Definição 1.12.** Seja  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de um difeomorfismo. A  $F$ -órbita de  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$  é o conjunto ordenado

$$\{x_k = F^k(x); k \in \mathbb{Z}\}.$$

Quando  $F$  estiver subentendido chamaremos a  $F$ -órbita de  $x$  apenas de órbita de  $x$ . No caso em que  $F$  admite simetrias reversíveis, temos o seguinte resultado.

**Lema 1.13.** Se  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  for um germe de um difeomorfismo  $\varphi$ -reversível, então  $\varphi$  levará a  $F$ -órbita de  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$  na  $F^{-1}$ -órbita de  $\varphi(x)$ , preservando a ordem.

*Demonstração.* Seja  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . Se  $z$  pertence à  $F$ -órbita de  $x$ , então  $z = F^k(x)$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Como  $\varphi \circ F = F^{-1} \circ \varphi$ , segue de (1.6) que

$$\varphi(z) = \varphi(F^k(x)) = (\varphi \circ F^k)(x) = (F^{-k} \circ \varphi)(x) = (F^{-1})^k(\varphi(x)).$$

Assim,  $\varphi(z)$  pertence à  $F^{-1}$ -órbita de  $\varphi(x)$  para o mesmo  $k$ .

□

Com o estudo das órbitas surge, naturalmente, o conceito de ponto fixo de uma órbita ou de um germe. Nosso objetivo agora é apresentar o conceito de conjunto de pontos fixos e estabelecer algumas propriedades que serão utilizadas recorrentemente no texto, tal como a Proposição 1.15.

**Definição 1.14.** O conjunto de pontos fixos de um germe  $\varphi \in \Omega$  é definido por

$$\text{Fix}(\varphi) = \{x \in (\mathbb{R}^n, 0); \varphi(x) = x\}$$

e o conjunto de pontos fixos de um subgrupo  $\Sigma \leq \Omega$  é definido por

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in (\mathbb{R}^n, 0); \varphi(x) = x, \forall \varphi \in \Sigma\}.$$

Na definição anterior é necessário considerar os conjuntos  $\text{Fix}(\Sigma)$  e  $\text{Fix}(\varphi)$  como germes na origem do seguinte modo: sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  contendo a origem  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $A \sim B$  se, e somente se, existir uma vizinhança  $V$  de  $0$  tal que  $V \cap A = V \cap B$ . Um germe de um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  na origem é a classe de equivalência de  $A$  com respeito à relação  $\sim$ .

Seja  $\mathbf{GL}(n)$  o grupo das matrizes inversíveis de ordem  $n$ . Observe que se  $\varphi \in \Omega$  for linear e  $\Sigma$  for um subgrupo de  $\mathbf{GL}(n)$ , então  $\text{Fix}(\varphi)$  e  $\text{Fix}(\Sigma)$  são subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^n$ . Com efeito, considere o operador linear  $\phi = \varphi - Id_n : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ . Como

$$\text{Fix}(\varphi) = \ker(\phi), \tag{1.10}$$

temos que  $\text{Fix}(\varphi)$  é um subespaço vetorial de  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Além disso, se  $\Sigma \leq \mathbf{GL}(n)$ , temos

$$\text{Fix}(\Sigma) = \bigcap_{\varphi \in \Sigma} \text{Fix}(\varphi),$$

donde segue que  $\text{Fix}(\Sigma)$  é um subespaço de  $(\mathbb{R}^n, 0)$ .

No caso geral, para  $\varphi \in \Omega$  não necessariamente linear,  $\text{Fix}(\varphi)$  é uma subvariedade diferenciável de  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Isto será mostrado na Seção 1.4. Para o momento, nos restringimos ao seguinte resultado.

**Proposição 1.15.** *Sejam  $\varphi, \varphi' \in \Omega$ . Seja  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de um difeomorfismo tal que  $\varphi' = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ . Então,*

$$h(\text{Fix}(\varphi)) = \text{Fix}(\varphi').$$

*Demonstração.* Considere

$$h|_{\text{Fix}(\varphi)} : \text{Fix}(\varphi) \rightarrow \text{Fix}(\varphi').$$

Note que  $h$  está bem definida quanto ao seu contradomínio, pois dado  $x \in \text{Fix}(\varphi)$ , temos

$$\varphi'(h(x)) = h \circ \varphi \circ h^{-1}(h(x)) = h \circ \varphi(x) = h(x)$$

e, portanto,  $h(x) \in \text{Fix}(\varphi')$ . Logo,  $h(\text{Fix}(\varphi)) \subset \text{Fix}(\varphi')$ . Reciprocamente, dado  $y \in \text{Fix}(\varphi')$ , temos que

$$\varphi(h^{-1}(y)) = \varphi \circ h^{-1}(y) = h^{-1} \circ \varphi'(y) = h^{-1}(y).$$

Logo,  $h^{-1}(y) \in \text{Fix}(\varphi)$ , donde segue que  $h^{-1}(\text{Fix}(\varphi')) \subset \text{Fix}(\varphi)$ . Portanto,  $h(\text{Fix}(\varphi)) = \text{Fix}(\varphi')$ .

□

Um outro conjunto auxiliar em nosso estudo é o antipodal cuja definição é como segue.

**Definição 1.16.** O conjunto antipodal de um germe  $\varphi \in \Omega$  é definido por

$$\mathcal{A}(\varphi) = \{x \in (\mathbb{R}^n, 0); \varphi(x) = -x\}.$$

Claramente, no caso em que  $\varphi$  é linear,  $\mathcal{A}(\varphi)$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ . Mais ainda, temos o seguinte resultado.

**Proposição 1.17.** *Seja  $\varphi \in \Omega$  uma involução linear. Então,*

$$\mathbb{R}^n = \text{Fix}(\varphi) \oplus \mathcal{A}(\varphi). \quad (1.11)$$

*Demonstração.* Como  $\varphi$  é uma involução,  $\varphi$  satisfaz a igualdade  $\varphi^2 - Id_n = 0$ , donde segue que o polinômio minimal  $m_\varphi(x)$  de  $\varphi$  divide o polinômio  $p(x) = x^2 - 1$ . Portanto,  $m_\varphi(x)$  é o produto de fatores lineares da forma

$$m_\varphi(x) = x - 1 \quad \text{ou} \quad m_\varphi(x) = x + 1 \quad \text{ou} \quad m_\varphi(x) = x^2 - 1,$$

implicando que  $\varphi$  é diagonalizável. Além disso, se  $m_\varphi(x) = x - 1$ , então  $\varphi = Id_n$ , ou seja,  $\text{Fix}(\varphi) = \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{A}(\varphi) = \{0\}$ . Se  $m_\varphi(x) = x + 1$ , então  $\varphi = -Id_n$ , ou seja,  $\text{Fix}(\varphi) = \{0\}$  e  $\mathcal{A}(\varphi) = \mathbb{R}^n$ . No caso em que  $m_\varphi(x) = x^2 - 1$ , os únicos autovalores de  $\varphi$  são 1 e  $-1$ . Como  $\text{Fix}(\varphi)$  e  $\mathcal{A}(\varphi)$  são, respectivamente, os autoespaços associados aos autovalores 1 e  $-1$ , segue que

$$\mathbb{R}^n = \text{Fix}(\varphi) \oplus \mathcal{A}(\varphi).$$

Portanto, a igualdade segue nos três casos mencionados acima.

□

Assim sendo, no caso em que  $\varphi$  é uma involução linear, temos uma das condições abaixo:

(i)  $\varphi = Id_n$ ;

(ii)  $\varphi = -Id_n$ ;

(iii)  $\varphi$  é conjugada a  $\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m, -x_{m+1}, \dots, -x_n)$ ,

em que  $m = \dim \text{Fix}(\varphi) > 0$ . Em outras palavras, existe uma base de  $\mathbb{R}^n$  segundo a qual a matriz de  $\varphi$  é da forma

$$\varphi = \left( \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-m} \end{array} \right).$$

## 1.4 Involuções

Em nossa abordagem, vamos nos restringir às involuções e uplas de involuções em  $\Omega$ , primeiramente considerando o caso planar (Subseção 2.3.1) e depois dimensões maiores (Subseção 2.3.2). Por esta razão, devemos construir uma noção de equivalência desses objetos.

**Definição 1.18.** Sejam  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  e  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$   $s$ -uplas de involuções, com  $s \geq 1$ . Dizemos que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  se existir um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $\varphi_i = h \circ \psi_i \circ h^{-1}$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ .

Essa definição introduz uma relação de equivalência no conjunto das  $s$ -uplas de involuções e, portanto, podemos classificá-las segundo tal relação. A importância das uplas e de sua classificação para um caso específico é discutida nos dois próximos capítulos. Por ora, estudamos o caso em que o grupo  $\Gamma = [\varphi_1, \dots, \varphi_s]$  gerado por  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  é abeliano.

Para os dois próximos resultados, supomos sem perda de generalidade que  $\varphi_1 \neq Id_n$ , pois caso contrário temos

$$[\varphi_1, \dots, \varphi_s] = [\varphi_2, \dots, \varphi_s].$$

Além disso, observe que se  $\varphi_i \notin [\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}]$  para todo  $i \in \{2, \dots, n\}$ , podemos concluir que  $\varphi_i \neq Id_n$ , visto que

$$Id_n = \varphi_1^2 \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}]$$

e  $\varphi_i \notin [\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}]$ .

**Lema 1.19.** Seja  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  uma  $s$ -upla de involuções em  $\Omega$  tal que  $\varphi_1 \neq Id_n$ ,  $[\varphi_1, \dots, \varphi_s]$  é um grupo abeliano e  $\varphi_i \notin [\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}]$ , para todo  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Então,

$$\varphi_1^{k_1} \circ \dots \circ \varphi_s^{k_s} = Id_n$$

se, e somente se,  $k_i \in \mathbb{Z}$  é par para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ .

*Demonstração.* Para qualquer involução  $\varphi \in \Omega$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que

$$\varphi^k = \begin{cases} Id_n, & \text{se } k \text{ é par} \\ \varphi, & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}. \quad (1.12)$$

Assim, se  $k_i$  for par para todo  $i = 1, \dots, s$ , então

$$\varphi_1^{k_1} \circ \dots \circ \varphi_s^{k_s} = Id_n \circ \dots \circ Id_n = Id_n,$$

visto que  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  são involuções. Reciprocamente, suponha que  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  sejam tais que

$$\varphi_1^{k_1} \circ \dots \circ \varphi_s^{k_s} = Id_n,$$

para  $k_i \in \mathbb{Z}$ . Procedemos por indução sobre  $s$ . Se  $s = 1$ , segue que

$$\varphi_1^{k_1} = Id_n.$$

Como  $\varphi_1 \neq Id_n$ , temos que  $k_1$  é par. Suponha agora que a igualdade

$$\varphi_1^{k_1} \circ \cdots \circ \varphi_s^{k_s} = Id_n$$

implique que  $k_i$  seja par, para todo  $i = 1, \dots, s$ . Considere

$$\varphi_1^{k_1} \circ \cdots \circ \varphi_s^{k_s} \circ \varphi_{s+1}^{k_{s+1}} = Id_n. \quad (1.13)$$

Se  $k_{s+1}$  for ímpar, da igualdade (1.12) temos que

$$\varphi_{s+1}^{k_{s+1}} = \varphi_{s+1}.$$

Logo, (1.13) torna-se

$$\varphi_1^{k_1} \circ \cdots \circ \varphi_s^{k_s} \circ \varphi_{s+1} = Id_n.$$

Como  $\varphi_{s+1}$  é uma involução, segue que

$$\varphi_1^{k_1} \circ \cdots \circ \varphi_s^{k_s} = \varphi_{s+1}.$$

Assim,  $\varphi_{s+1} \in [\varphi_1, \dots, \varphi_s]$ , o que contradiz a hipótese. Portanto,  $k_{s+1}$  é par. Neste caso, novamente por (1.12), temos que (1.13) torna-se

$$\varphi_1^{k_1} \circ \cdots \circ \varphi_s^{k_s} = Id_n.$$

Pela hipótese de indução,  $k_i$  é par para todo  $i = 1, \dots, s$ , o que prova o resultado. □

**Teorema 1.20.** *Seja  $\Gamma = [\varphi_1, \dots, \varphi_s]$  um grupo abeliano gerado por involuções tais que  $\varphi_1 \neq Id_n$  e  $\varphi_i \notin [\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}]$ , para todo  $i \in \{2, \dots, s\}$ . Então,  $\Gamma$  é finito e tem  $2^s$  elementos.*

*Demonstração.* Defina a aplicação

$$\begin{aligned} f : \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} &\rightarrow \Gamma \\ (x_1, \dots, x_s) &\mapsto \varphi_1^{x_1} \circ \cdots \circ \varphi_s^{x_s}. \end{aligned}$$

Seja  $\varphi \in \Gamma$ . Como  $\Gamma$  é abeliano, podemos escrever

$$\varphi = \varphi_1^{k_1} \circ \cdots \circ \varphi_s^{k_s}, \quad (1.14)$$

para  $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$ . Como  $\varphi_i$  é uma involução, segue de (1.12) que  $\varphi_i^{k_i} = \varphi_i^{x_i}$ , para algum  $x_i \in \{0, 1\}$ , com  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Portanto, existem  $(x_1, \dots, x_s) \in \{0, 1\}^s$  tais que

$f(x_1, \dots, x_s) = \varphi$ , implicando que  $f$  é sobrejetora. Sejam  $(x_1, \dots, x_s), (y_1, \dots, y_s) \in \{0, 1\}^s$  tais que  $f(x_1, \dots, x_s) = f(y_1, \dots, y_s)$ . Assim,

$$\varphi_1^{x_1} \circ \dots \circ \varphi_s^{x_s} = \varphi_1^{y_1} \circ \dots \circ \varphi_s^{y_s}.$$

Como  $\Gamma$  é abeliano e  $\varphi_i^{-1} = \varphi_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ , segue que

$$\varphi_1^{x_1+y_1} \circ \dots \circ \varphi_s^{x_s+y_s} = Id_n.$$

Pelo Lema 1.19, temos  $x_i + y_i = 2k_i$ , com  $k_i \in \{0, 1\}$  para cada  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Assim, se  $x_i = 0$ , então  $y_i = 0$ , bem como se  $x_i = 1$ , então  $y_i = 1$ , para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Logo,  $x_i = y_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, s\}$  e, portanto,  $f$  é bijetora. Consequentemente,  $\Gamma$  e  $\{0, 1\}^s$  têm a mesma cardinalidade, ou seja,  $\Gamma$  é finito e possui  $2^s$  elementos. □

Observe que se  $\Gamma = [\varphi_1, \dots, \varphi_s]$  for abeliano, então  $\Gamma$  será finito mesmo que  $\varphi_i \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}]$ , para algum  $i = 1, \dots, s$ . De fato, considere

$$X = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\} - \{\varphi_i; \varphi_i \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}]\}.$$

Note que o subgrupo  $[X]$  gerado por  $X$  coincide com  $\Gamma$ . Claramente,  $[X]$  está nas condições do teorema anterior, o que nos permite garantir que  $[X]$  é finito e tem  $2^{|X|}$  elementos. Logo,  $\Gamma$  tem  $2^{|X|}$  elementos e, portanto, é finito.

Um exemplo de um grupo gerado por  $s$  involuções e com menos de  $2^s$  elementos é dado a seguir.

**Exemplo 1.21.** Considere as involuções  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  definidas por

$$\varphi_1(x_1, x_2) = (-x_1, x_2), \quad \varphi_2(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \quad \text{e} \quad \varphi_3(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2).$$

Veja que o grupo  $\Gamma = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$  é abeliano e pode ser escrito como

$$\Gamma = \{Id_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}.$$

Logo, o número de elementos de  $\Gamma$  é 4 e não  $2^3$ . Isso ocorre pois

$$\varphi_3 = \varphi_1 \circ \varphi_2 \in [\varphi_1, \varphi_2].$$

**Observação 1.22.** Um invariante particularmente interessante sob a equivalência introduzida na Definição 1.18 é o traço  $\text{tr}(d(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_s))(0)$ . De fato, se  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  e  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$

são equivalentes, então existe um germe de um difeomorfismo  $h$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $\varphi_i = h \circ \psi_i \circ h^{-1}$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(d(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_s)(0)) &= \operatorname{tr}(d(h \circ \psi_1 \circ h^{-1} \circ \dots \circ h \circ \psi_s \circ h^{-1})(0)) \\ &= \operatorname{tr}(d(h \circ \psi_1 \circ \dots \circ \psi_s \circ h^{-1})(0)) \\ &= \operatorname{tr}(dh(0)d(\psi_1 \circ \dots \circ \psi_s)(0)dh^{-1}(0)) \\ &= \operatorname{tr}(dh(0)d(\psi_1 \circ \dots \circ \psi_s)(0)dh(0)^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}(d(\psi_1 \circ \dots \circ \psi_s)(0)). \end{aligned}$$

Portanto, o traço da diferencial  $d(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_s)(0)$  permanece invariante sob a equivalência das  $s$ -uplas de involuções.

O próximo resultado nos permite considerar uma  $s$ -upla de involuções lineares como representante da classe de uma  $s$ -upla  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ , em que  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  são involuções que geram um grupo abeliano. Esse resultado é uma consequência do Teorema de Bochner-Montgomery (veja [21, Chapter V, Theorem 1]).

**Teorema 1.23.** *Seja  $\Gamma = [\varphi_1, \dots, \varphi_s]$  um conjunto abeliano gerado por involuções. Então,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente à  $s$ -upla de involuções lineares  $(d\varphi_1(0), \dots, d\varphi_s(0))$ .*

*Demonstração.* Defina  $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  por

$$k = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} d\gamma(0) \circ \gamma, \quad (1.15)$$

onde  $|\Gamma| < \infty$  é a cardinalidade de  $\Gamma$ . Pelo teorema anterior, a aplicação  $k$  está bem definida, pois o somatório definido em (1.15) é finito. Seja  $\varphi \in \Gamma$ . Como  $\Gamma$  é abeliano,  $\varphi$  é da forma (1.14). Portanto, ainda utilizando o fato de  $\Gamma$  ser abeliano, temos que

$$\varphi^2 = \varphi_1^{2k_1} \circ \dots \circ \varphi_s^{2k_s} = Id_n,$$

ou seja,  $\varphi$  é uma involução tal que  $\varphi(0) = 0$ , pois  $\varphi \in \Omega$ . Pela regra da cadeia,

$$d\varphi(0) \circ d\varphi(0) = Id_n. \quad (1.16)$$

Note que, tomando  $\alpha = \varphi \circ \gamma$ , com  $\gamma \in \Gamma$ , temos

$$\begin{aligned} d\varphi(0) \circ k &= d\varphi(0) \circ \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} d\gamma(0) \circ \gamma \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} d(\varphi \circ \gamma)(0) \circ \gamma \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\alpha \in \Gamma} d\alpha(0) \circ \varphi \circ \alpha \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\alpha \in \Gamma} d\alpha(0) \circ \alpha \circ \varphi \\ &= k \circ \varphi, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue pois  $\Gamma$  é abeliano. Além disso, como  $\gamma \in \Gamma$ , a igualdade (1.16) é válida para  $\gamma$ , implicando que

$$dk(0) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} d\gamma(0) \circ d\gamma(0) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} Id_n = Id_n.$$

Pelo teorema da função inversa,  $k$  é um germe de um difeomorfismo na origem e, portanto, podemos escrever

$$\varphi = k^{-1} \circ d\varphi(0) \circ k.$$

Pela arbitrariedade de  $\varphi$ , concluímos que  $\varphi_i = k^{-1} \circ d\varphi_i(0) \circ k$ , para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Assim, o resultado segue pela Definição 1.18, considerando  $h = k^{-1}$ . □

**Observação 1.24.** Como mencionamos anteriormente, o teorema anterior é proveniente de um resultado mais geral para grupos de transformações compactos. A demonstração desse resultado segue as mesmas linhas da demonstração anterior, considerando

$$k = \int_{\Gamma} d\gamma^{-1}(0) \circ \gamma,$$

onde  $\int_{\Gamma}$  denota a integral de Haar normalizada sobre  $\Gamma$ . Em particular, quando  $\Gamma = [\varphi_1, \dots, \varphi_s]$  é um grupo abeliano de involuções,  $\Gamma$  é finito e a integral de Haar normalizada coincide com o somatório utilizado em (1.15). Para mais detalhes sobre grupos de transformações e integral de Haar veja [21, 22].

De acordo com o Teorema 1.23, podemos considerar representantes lineares para as classes de equivalências das  $s$ -uplas de involuções. Vejamos inicialmente as implicações desse resultado no caso  $s = 1$ :

- (i) Todo germe de uma involução  $\varphi \in \Omega$  é conjugado ao germe de sua parte linear  $d\varphi(0) \in \Omega$ , ou seja, existe um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\varphi = h \circ d\varphi(0) \circ h^{-1}. \tag{1.17}$$

Pela Proposição 1.15,  $h|_{\text{Fix}(d\varphi(0))}$  é uma bijeção entre  $\text{Fix}(d\varphi(0))$  e  $\text{Fix}(\varphi)$ . Como o conjunto  $\text{Fix}(d\varphi(0))$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ , pois  $d\varphi(0)$  é linear, é possível embutir em  $\text{Fix}(\varphi)$  uma estrutura de subvariedade diferenciável de  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Em outras palavras, o conjunto de pontos fixos de qualquer involução  $\varphi \in \Omega$  é uma subvariedade de  $(\mathbb{R}^n, 0)$ .

(ii) É fato que todas as involuções lineares são diagonalizáveis, como vimos na demonstração da Proposição 1.17. Portanto, dada uma involução  $\varphi \in \Omega$ , a involução  $d\varphi(0) \in \Omega$  é diagonalizável com autovalores  $\pm 1$ . Assumindo que  $d\varphi(0) \neq Id_n$ , temos que existe uma matriz inversível  $P$  de ordem  $n$  tal que

$$d\varphi(0) = P \left( \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-m} \end{array} \right) P^{-1},$$

onde  $m = \dim \text{Fix}(d\varphi(0)) = \dim \text{Fix}(\varphi)$ . Por (1.17) segue que

$$\varphi = hP \left( \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-m} \end{array} \right) (hP)^{-1},$$

com  $m = \dim \text{Fix}(\varphi)$ . Por uma reordenação da base de  $\mathbb{R}^n$  concluímos que o representante da classe de qualquer involução  $\varphi \in \Omega$  mediante a relação de conjugação (Definição 1.18) tem a forma matricial

$$\left( \begin{array}{c|c} -I_l & 0 \\ \hline 0 & I_{n-l} \end{array} \right), \quad (1.18)$$

com  $l = \text{codim } \text{Fix}(\varphi)$ .

Veremos no próximo capítulo uma generalização do item (ii) acima para  $s$ -uplas de involuções,  $s \geq 2$ , com a hipótese adicional de transversalidade, a saber Teorema 2.24. A teoria de transversalidade tem uma vertente bastante geométrica com uma ideia de oposição à tangência entre variedades. Para uma visão geométrica e aprofundada do conceito veja [8].

**Definição 1.25.** Sejam  $M$  e  $N$  subvariedades de uma variedade diferenciável  $Y$ . Dizemos que  $M$  e  $N$  são transversais no ponto  $x \in M \cap N$  se

$$T_x M + T_x N = T_x Y,$$

onde  $T_x M$ ,  $T_x N$  e  $T_x Y$  denotam os espaços tangentes a  $M$ ,  $N$  e  $Y$  em  $x$ , respectivamente. Dizemos que  $M$  e  $N$  são transversais se forem transversais em cada ponto  $x \in M \cap N$ .

Neste texto, vamos utilizar uma abordagem mais algébrica, definindo a transversalidade de involuções. Na próxima definição estabelecemos uma condição genérica que assumimos para as uplas de involuções tratadas neste trabalho.

**Definição 1.26.** Um conjunto  $G_s = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$  de involuções em  $\Omega$ , com  $s \leq n$ , é dito transversal se  $\text{Fix}(\varphi_i)$  é transversal a  $\text{Fix}(\varphi_j)$  em  $x = 0$  para todo  $i \neq j$  e

$$\text{codim} \bigcap_{i=1}^s T_0 \text{Fix}(\varphi_i) = \sum_{i=1}^s \text{codim } \text{Fix}(\varphi_i).$$

Em nossa abordagem, é de interesse que as propriedades de comutatividade e transversalidade das  $s$ -uplas de involuções sejam preservadas por equivalência. Isso mostra a compatibilidade das propriedades que estudamos com os conceitos que definimos. Uma resposta afirmativa para esse questionamento é apresentada agora.

**Proposição 1.27.** *Sejam  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  e  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$   $s$ -uplas de involuções equivalentes. Temos que:*

(i) *Se  $G_s = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$  for um conjunto transversal, então  $R_s = \{\psi_1, \dots, \psi_s\}$  também é transversal.*

(ii) *Se  $[\varphi_1, \dots, \varphi_s]$  for um grupo abeliano, então  $[\psi_1, \dots, \psi_s]$  também é abeliano.*

*Demonstração.* Como  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ , existe um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\psi_i = h \circ \varphi_i \circ h^{-1},$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ . Começamos provando (i). Pela Proposição 1.15,

$$h(\text{Fix}(\varphi_i)) = \text{Fix}(\psi_i),$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ , sendo  $h|_{\text{Fix}(\varphi_i)} : \text{Fix}(\varphi_i) \rightarrow \text{Fix}(\psi_i)$  um difeomorfismo. Logo,

$$dh(0)|_{T_0\text{Fix}(\varphi_i)} : T_0\text{Fix}(\varphi_i) \rightarrow T_0\text{Fix}(\psi_i)$$

é um isomorfismo, para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Como  $G_s$  é um conjunto transversal de involuções, então

$$T_0\text{Fix}(\varphi_i) + T_0\text{Fix}(\varphi_j) = \mathbb{R}^n,$$

para todo  $i, j = 1, \dots, s$ , com  $i \neq j$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= dh(0)(\mathbb{R}^n) \\ &= dh(0)(T_0\text{Fix}(\varphi_i) + T_0\text{Fix}(\varphi_j)) \\ &= dh(0)(T_0\text{Fix}(\varphi_i)) + dh(0)(T_0\text{Fix}(\varphi_j)) \\ &= T_0\text{Fix}(\psi_i) + T_0\text{Fix}(\psi_j), \end{aligned}$$

o que implica que  $\text{Fix}(\psi_i)$  é transversal a  $\text{Fix}(\psi_j)$  na origem, para todo  $i \neq j$ . Além disso,

para todo  $i = 1, \dots, s$ , temos

$$\begin{aligned}
\text{codim} \bigcap_{i=1}^s T_0 \text{Fix}(\psi_i) &= \text{codim} \bigcap_{i=1}^s dh(0) (T_0(\text{Fix}(\varphi_i))) \\
&= \text{codim} dh(0) \left( \bigcap_{i=1}^s T_0(\text{Fix}(\varphi_i)) \right) \\
&= \text{codim} \bigcap_{i=1}^s T_0(\text{Fix}(\varphi_i)) \\
&= \sum_{i=1}^s \text{codim} \text{Fix}(\varphi_i) \\
&= \sum_{i=1}^s \text{codim} h^{-1}(\text{Fix}(\psi_i)) \\
&= \sum_{i=1}^s \text{codim} \text{Fix}(\psi_i).
\end{aligned}$$

Portanto,  $\{\psi_1, \dots, \psi_s\}$  é um conjunto transversal de involuções.

Provamos agora (ii). Basta mostrar que  $\psi_i \circ \psi_j = \psi_j \circ \psi_i$ , para todo  $i, j = 1, \dots, s$ . Com efeito, como  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  comutam entre si, temos

$$\begin{aligned}
\psi_i \circ \psi_j &= h \circ \varphi_i \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi_j \circ h^{-1} \\
&= h \circ \varphi_i \circ \varphi_j \circ h^{-1} \\
&= h \circ \varphi_j \circ \varphi_i \circ h^{-1} \\
&= h \circ \varphi_j \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi_i \circ h^{-1} \\
&= \psi_j \circ \psi_i,
\end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

## 1.5 Uma introdução à teoria invariante

O último assunto que discorreremos neste capítulo se refere à teoria invariante sob a ação de um grupo de Lie linear. Nosso objetivo central é estabelecer os conceitos básicos para enunciar o Teorema de Schwarz, o qual será utilizado no próximo capítulo. Nossa abordagem segue os passos de [12, Chapter XII].

**Definição 1.28.** Um grupo de Lie linear  $\Gamma$  é um subgrupo fechado de  $\mathbf{GL}(n)$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $\mathbf{GL}(n)$  denota o grupo das matrizes inversíveis de ordem  $n$ .

Na definição anterior,  $\mathbf{GL}(n)$  é visto como um subespaço topológico com a topologia induzida de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Por esta razão, conceitos como subconjuntos fechados e compactos podem ser utilizados. Neste caso,  $\Gamma$  é compacto se for compacto como um subconjunto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Exemplos de grupos de Lie lineares compactos são o grupo ortogonal  $n$ -dimensional  $\mathbf{O}(n)$ , o grupo especial ortogonal  $\mathbf{SO}(n)$  e todos os grupos de matrizes finitos. Para o que segue, denote por  $e_\Gamma$  o elemento neutro de  $\Gamma$ .

**Definição 1.29.** Sejam  $\Gamma$  um grupo de Lie linear e  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que  $\Gamma$  age linearmente em  $V$  se existir uma aplicação contínua

$$\begin{aligned}\phi : \Gamma \times V &\rightarrow V \\ (\gamma, v) &\mapsto \gamma v\end{aligned}$$

tal que  $e_\Gamma v = v$  e para cada  $\gamma \in \Gamma$  a aplicação

$$\begin{aligned}\rho_\gamma : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto \gamma v\end{aligned}$$

é linear e satisfaz  $\rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\gamma_2} = \rho_{\gamma_1 \gamma_2}$ , para todo  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ .

**Exemplo 1.30.** Seja  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$  o grupo multiplicativo isomorfo ao grupo  $\{I_n, -I_n\}$ , onde  $I_n$  denota a matriz identidade de ordem  $n$ . Podemos definir uma ação de  $\mathbb{Z}_2$  em  $\mathbb{R}^n$  por

$$-1(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e para  $i \in \{1, \dots, n\}$  fixado. Observe que a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i^2$$

satisfaz

$$\begin{aligned}f(-1(x_1, \dots, x_n)) &= f(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n) \\ &= (-x_i)^2 \\ &= x_i^2 \\ &= f(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

ou seja,  $f(\gamma x) = f(x)$  para todo  $\gamma \in \mathbb{Z}_2$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Funções com essa propriedade são largamente estudadas e conhecidas como funções invariantes.

**Definição 1.31.** Sejam  $\Gamma$  um grupo de Lie linear agindo linearmente em um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial  $V$ . Uma função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  é dita  $\Gamma$ -invariante, ou invariante sob a ação de  $\Gamma$ , se

$$f(\gamma v) = f(v),$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$  e  $v \in V$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  o conjunto de todas as funções polinomiais  $\Gamma$ -invariantes. Mostremos que  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  munido com a soma e o produto usuais de polinômios é um anel. Em verdade, basta provar que  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  é um subanel do anel das funções polinomiais de  $V$  em  $\mathbb{R}$ . De fato, se  $f, g \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ , então

$$(f + g)(\gamma x) = f(\gamma x) + g(\gamma x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

e

$$(fg)(\gamma x) = f(\gamma x)g(\gamma x) = f(x)g(x) = (fg)(x).$$

Portanto,  $f + g \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$  e  $fg \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ , implicando que  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$  tem estrutura de anel.

**Exemplo 1.32.** Considere a ação de  $\mathbb{Z}_2$  em  $\mathbb{R}^n$  definida como no Exemplo 1.30. Seja  $\alpha$  uma função polinomial  $\mathbb{Z}_2$ -invariante. Para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , escreva

$$\alpha(x) = \sum_{\lambda \in L} \beta_\lambda x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n},$$

com  $\beta_\lambda \neq 0$  e  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in L$ , onde  $L$  é um subconjunto de índices em  $\mathbb{N}^n$ . Como  $\alpha$  é  $\mathbb{Z}_2$ -invariante,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in L} \beta_\lambda x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} &= \alpha(x) \\ &= \alpha(-1x) \\ &= \alpha(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, x_n) \\ &= \sum_{\lambda \in L} (-1)^{\lambda_i} \beta_\lambda x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \end{aligned}$$

e, portanto,  $\beta_\lambda = (-1)^{\lambda_i} \beta_\lambda$ , para todo  $\lambda \in L$ . Assim,  $\lambda_i = 2k_i$ , para algum  $k_i \in \mathbb{N}$ . Logo,  $\alpha$  é da forma

$$\alpha(x) = \sum_{\lambda \in L} \beta_\lambda x_1^{\lambda_1} \dots x_{i-1}^{\lambda_{i-1}} (x_i^2)^{k_i} x_{i+1}^{\lambda_{i+1}} x_n^{\lambda_n},$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Neste caso,  $\alpha$  é escrito como uma função de  $\pi_i(x) = x_i^2$  e  $\pi_j(x) = x_j$  para  $j \neq i$ , isto é, existe uma função polinomial  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\alpha(x) = h(\pi_1(x), \dots, \pi_{i-1}(x), \pi_i(x), \pi_{i+1}(x), \dots, \pi_n(x)).$$

Veja que se  $j \neq i$ , temos

$$\pi_j(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, x_n) = x_j = \pi_j(x).$$

Ainda,

$$\pi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, x_n) = (-x_i)^2 = x_i^2 = \pi_i(x),$$

ou seja, as funções polinomiais  $\pi_j$  são  $\mathbb{Z}_2$ -invariantes, para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Em resumo, dado  $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{Z}_2)$ , existe uma função polinomial  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\alpha(x) = h(\pi_1(x), \dots, \pi_n(x)),$$

para determinados  $\pi_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{Z}_2)$ , com  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

A conclusão obtida no exemplo anterior não é particular ao caso. Sempre que o grupo  $\Gamma$  em questão for compacto, existirá um número finito de funções polinomiais  $u_1, \dots, u_s$  tais que qualquer  $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$  é escrita como uma função polinomial de  $u_1, \dots, u_s$ . Este conjunto finito de elementos é chamado de base de Hilbert para o anel  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ . A demonstração desse resultado usa ferramentas que saem do escopo deste trabalho e, portanto, será omitida.

**Teorema 1.33** (Hilbert-Weyl). *Seja  $\Gamma$  um grupo de lie linear compacto agindo em um espaço vetorial  $V$ . Então, existe uma base de Hilbert para o anel das funções polinomiais  $\Gamma$ -invariantes.*

*Demonstração.* Veja [12, XII, §6, pág. 54]. □

Com relação ao Exemplo 1.32, temos que  $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$  constitui uma base de Hilbert para o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{Z}_2)$ . Outro teorema importante para o qual omitiremos a demonstração é o Teorema de Schwarz. Este é, em linhas gerais, uma generalização do Teorema de Hilbert-Weyl para germes de funções.

**Teorema 1.34** (Schwarz). *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie linear compacto agindo em um espaço vetorial  $V$ . Seja  $\{u_1, \dots, u_s\}$  uma base de Hilbert para  $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ . Então, dado um germe de uma função  $f : (V, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável  $\Gamma$ -invariante, existe um germe de uma função diferenciável  $h : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$f(x) = h(u_1(x), \dots, u_s(x)),$$

para todo  $x \in V$ .

*Demonstração.* Veja [12, XII, §6, pág. 58]. □

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# DIAGRAMAS DIVERGENTES DE DOBRAS

No capítulo anterior, associamos um germe de um difeomorfismo reversível  $F$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  a um par de involuções no grupo  $\Omega$  das aplicações inversíveis em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Mais precisamente, se  $\varphi_1 \in \Omega$  for uma involução, então  $F$  é  $\varphi_1$ -reversível se, e somente se,

$$F = \varphi_1 \circ \varphi_2,$$

com  $\varphi_2 = \varphi_1 \circ F$  uma involução. Logo, associamos  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$  ao par de involuções  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Esta associação tem a propriedade de que se  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\psi_1, \psi_2)$  são dois pares de involuções equivalentes, então existe um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$F = h \circ G \circ h^{-1},$$

onde  $G = \psi_1 \circ \psi_2$ . De fato, se  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\psi_1, \psi_2)$  são equivalentes, então existe um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\varphi_i = h \circ \psi_i \circ h^{-1}$$

para  $i = 1, 2$  e, portanto,

$$F = \varphi_1 \circ \varphi_2 = h \circ \psi_1 \circ h^{-1} \circ h \circ \psi_2 \circ h^{-1} = h \circ \psi_1 \circ \psi_2 \circ h^{-1} = h \circ G \circ h^{-1}.$$

Atente-se à recíproca, ou seja, se  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$  e  $G = \psi_1 \circ \psi_2$  são tais que

$$F = h \circ G \circ h^{-1}$$

para algum difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , então  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\psi_1, \psi_2)$  são equivalentes? A resposta para essa questão é negativa, como vemos mais adiante. Contudo, podemos exibir condições para que essa equivalência seja verdadeira. Assim, temos um bom argumento para estudar a classificação dos pares de involuções. Além disso, nas duas próximas seções elucidamos mais razões para se obter uma classificação para as  $s$ -uplas de involuções em geral.

O presente capítulo é dividido como segue: na Seção 2.1, apresentamos uma associação entre dobras e involuções, buscando entender as propriedades que envolvem esses dois conceitos. Na Seção 2.2, vemos que é possível classificar os diagramas divergentes de dobras usando uplas de involuções. Na Seção 2.3, classificamos as  $s$ -uplas de involuções em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  para o caso  $s = n = 2$  (Subseção 2.3.1) e para o caso em que  $s = 2$  e  $n \geq 3$  (Subseção 2.3.2).

## 2.1 Dobras e involuções

Nesta seção, estudamos a relação que as involuções têm com as dobras em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Citamos como a principal referência para nossa abordagem a Seção 2 de [17]. Começamos com a definição de dobra.

**Definição 2.1.** Um germe de uma aplicação  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é dito uma dobra se for  $\mathcal{A}$ -equivalente ao germe  $f^0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  definido por

$$f^0(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2, x_2, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

isto é, se existirem germes de difeomorfismos  $h, k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tais que

$$f = k \circ f^0 \circ h^{-1}.$$

Segue da definição que  $f^0$  é uma dobra. Além disso, a diferencial na origem de toda dobra tem posto igual a  $n - 1$ , visto que o posto de  $df^0(0)$  é  $n - 1$ .

A maneira com que vamos relacionar as dobras com as involuções é a seguinte.

**Definição 2.2.** Dada uma involução  $\varphi \in \Omega$  e uma dobra  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , dizemos que  $f$  está associada a  $\varphi$  ou  $\varphi$  está associada a  $f$  se  $\varphi \neq Id_n$  e  $f \circ \varphi = f$ .

**Lema 2.3.** A involução  $\varphi^0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  definida por

$$\varphi^0(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.2)$$

é a única involução associada à dobra  $f^0$  definida em (2.1).

*Demonstração.* Naturalmente,  $\varphi^0$  está associada a  $f^0$ , pois  $\varphi^0 \neq Id_n$  e

$$\begin{aligned} f^0 \circ \varphi^0(x_1, \dots, x_n) &= f^0(-x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= ((-x_1)^2, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_1^2, x_2, \dots, x_n) \\ &= f^0(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Agora, seja  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  uma involução tal que  $f^0 \circ \varphi = f^0$ . Escreva  $\varphi$  em funções coordenadas como  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , com  $\varphi_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Assim,

$$\begin{aligned} (x_1^2, x_2, \dots, x_n) &= f^0(x_1, \dots, x_n) \\ &= f^0 \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= f^0(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)) \\ &= ((\varphi_1(x_1, \dots, x_n))^2, \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

donde segue que  $(\varphi_1(x_1, \dots, x_n))^2 = x_1^2$  e  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ , para todo  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Se  $\varphi \neq Id_n$ , então  $\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = -x_1$ , o que nos garante que  $\varphi = \varphi^0$ . □

A existência e a unicidade de uma involução associada a uma dobra não é exclusivo de  $f^0$ . Qualquer dobra tem uma única involução associada a ela, como mostra a seguinte proposição.

**Proposição 2.4.** *Dada uma dobra  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , existe uma única involução associada a  $f$ .*

*Demonstração.* Por definição, como  $f$  é uma dobra, existem germes de difeomorfismos  $h$  e  $k$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  tais que

$$f = k \circ f^0 \circ h^{-1}.$$

Temos que  $\varphi = h \circ \varphi^0 \circ h^{-1}$  é uma involução associada a  $f$ , para  $\varphi^0$  definida em (2.2). De fato, veja que  $\varphi \neq Id_n$ , pois caso contrário temos  $h \circ \varphi^0 \circ h^{-1} = Id_n$ , o que implica em  $h \circ \varphi^0 = h$ . Como  $h$  é inversível, obtemos  $\varphi^0 = Id_n$ , o que é um absurdo. Além disso,

$$f \circ \varphi = k \circ f^0 \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi^0 \circ h^{-1} = k \circ f^0 \circ \varphi^0 \circ h^{-1} = k \circ f^0 \circ h^{-1} = f,$$

onde a terceira igualdade segue pois  $\varphi^0$  está associada a  $f^0$ . Portanto,  $\varphi$  está associada a  $f$ . Para mostrar a unicidade, considere  $\varphi'$  uma involução associada a  $f$ , ou seja,  $\varphi' \neq Id_n$  e  $f \circ \varphi' = f$ . Então

$$k \circ f^0 \circ h^{-1} \circ \varphi' = k \circ f^0 \circ h^{-1},$$

o que implica em  $f^0 \circ (h^{-1} \circ \varphi' \circ h) = f^0$ . Perceba que  $h^{-1} \circ \varphi' \circ h \neq Id_n$ , pois caso contrário teremos  $\varphi' = Id_n$ , o que é uma contradição. Além disso, como  $\varphi'$  é uma involução, segue que

$h^{-1} \circ \varphi' \circ h$  também é uma involução. Assim,  $h^{-1} \circ \varphi' \circ h$  é uma involução associada a  $f^0$ . Pelo Lema 2.3, temos

$$h^{-1} \circ \varphi' \circ h = \varphi^0,$$

isto é,  $\varphi' = h \circ \varphi^0 \circ h^{-1} = \varphi$ , donde segue a unicidade desejada. □

Na Proposição anterior, garantimos que dada uma dobra podemos encontrar uma única involução  $\varphi$  associada a ela. O prosseguimento natural nesta situação é nos perguntarmos se essa relação é biunívoca, ou ao menos se dada uma involução  $\varphi$  podemos obter uma dobra associada a  $\varphi$ . Começamos obtendo informações sobre a dimensão da subvariedade de pontos fixos de  $\varphi$ . Para isso, utilizamos o conjunto das singularidades de um germe.

**Definição 2.5.** O conjunto das singularidades de um germe de uma aplicação  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , denotado por  $\Sigma(f)$ , é o conjunto dos pontos  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$  tais que a diferencial  $df(x)$  não tem posto máximo.

Como feito anteriormente, analisaremos primeiramente  $f^0$  para depois fazer o caso geral. Para  $f^0$  definido em (2.1), temos

$$df^0(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Então  $df^0(x_1, \dots, x_n)$  não tem posto máximo se, e somente se,  $x_1 = 0$ . Portanto,

$$\Sigma(f^0) = \{(0, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0)\}$$

cuja dimensão é  $n - 1$ . Por outro lado, para  $\varphi^0$  definida em (2.2) temos  $\varphi^0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$  se, somente se,  $x_1 = 0$ . Portanto,

$$\text{Fix}(\varphi^0) = \Sigma(f^0). \quad (2.3)$$

Mais geralmente, o conjunto das singularidades de uma dobra arbitrária coincide com o conjunto dos pontos fixos da involução associada a ela, como mostramos a seguir.

**Teorema 2.6.** *Sejam  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  uma dobra e  $\varphi \in \Omega$  uma involução associada a  $f$ . Então,*

$$\Sigma(f) = \text{Fix}(\varphi).$$

*Demonstração.* Como  $f$  é uma dobra, existem germes de difeomorfismos  $h, k$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  tais que

$$f = k \circ f^0 \circ h^{-1}. \quad (2.4)$$

Como  $\varphi$  é uma involução associada a  $f$ , pela demonstração da Proposição 2.4 temos que  $\varphi$  é da forma

$$\varphi = h \circ \varphi^0 \circ h^{-1},$$

onde  $\varphi^0$  é a involução definida em (2.2). Pela Proposição 1.15,

$$\text{Fix}(\varphi) = h(\text{Fix}(\varphi^0)). \quad (2.5)$$

Veja que

$$df(x) = d(k \circ f^0 \circ h^{-1})(x) = dk(f^0 \circ h^{-1}(x))df^0(h^{-1}(x))dh^{-1}(x),$$

para todo  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . Como  $k$  e  $h$  são germes de difeomorfismos, segue que  $df(x)$  não tem posto máximo se, e somente se,  $df^0(h^{-1}(x))$  não tem posto máximo. Em outras palavras,  $df(h(x))$  não tem posto máximo se, e somente se,  $df^0(x)$  não tem posto máximo, o que nos garante que  $h(x) \in \Sigma(f)$  se, e somente se,  $x \in \Sigma(f^0)$ . Logo,

$$\Sigma(f) = h(\Sigma(f^0)).$$

Segue de (2.3) e de (2.5) que

$$h(\Sigma(f^0)) = h(\text{Fix}(\varphi^0)) = \text{Fix}(\varphi).$$

Portanto,  $\Sigma(f) = \text{Fix}(\varphi)$ , como queríamos demonstrar. □

Voltando ao questionamento que fizemos precedente à Definição 2.5, observe que pela demonstração do resultado anterior se  $f$  for uma dobra, então  $h(\Sigma(f^0)) = \Sigma(f)$ , onde  $h$  e  $f^0$  satisfazem (2.4). Consequentemente,

$$n - 1 = \dim \Sigma(f^0) = \dim h(\Sigma(f^0)) = \dim \Sigma(f) = \dim \text{Fix}(\varphi),$$

em que  $\varphi$  é a involução associada a  $f$ . Tal cálculo nos fornece uma orientação para a resposta que procuramos.

**Corolário 2.7.** *Se  $\varphi \in \Omega$  for uma involução associada a uma dobra, então*

$$\text{codim } \text{Fix}(\varphi) = 1.$$

Portanto, para que seja possível associar uma involução  $\varphi$  a uma dobra é necessário que  $\text{codim Fix}(\varphi) = 1$ . Esta é uma condição suficiente também, como mostra a seguinte proposição.

**Proposição 2.8.** *Dada uma involução  $\varphi \in \Omega$  com  $\text{codim Fix}(\varphi) = 1$ , existe uma dobra  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  associada a  $\varphi$ .*

*Demonstração.* Vimos na Seção 1.4 que dada uma involução  $\varphi$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , podemos conjugá-la a uma involução linear cuja representação matricial é dada em (1.18), ou seja,

$$\left( \begin{array}{c|c} -I_l & 0 \\ \hline 0 & I_{n-l} \end{array} \right),$$

com  $l = \text{codim Fix}(\varphi)$ . Como  $\text{codim Fix}(\varphi) = 1$ , temos que  $\varphi$  é conjugada à involução linear  $\varphi^0$  definida em (2.2), isto é, existe um germe de um difeomorfismo  $h$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\varphi = h \circ \varphi^0 \circ h^{-1}.$$

Tomando  $f = f^0 \circ h^{-1}$ , segue pela Definição 2.1 que  $f$  é uma dobra em que  $k = Id_n$ . Além disso,

$$f \circ \varphi = f^0 \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi^0 \circ h^{-1} = f^0 \circ \varphi^0 \circ h^{-1} = f^0 \circ h^{-1} = f,$$

onde a terceira igualdade segue pois  $f^0$  é uma dobra associada a  $\varphi^0$ . Portanto,  $f$  é uma dobra associada a  $\varphi$ . □

Daqui em diante todas as involuções são consideradas com codimensão igual a 1, salvo menção do contrário. Resta a questão relacionada à biunivocidade da associação entre involuções e dobras, a qual é respondida no próximo exemplo.

**Exemplo 2.9.** Considere  $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um difeomorfismo arbitrário e  $f^0$  a dobra definida em (2.1). De acordo com a Definição 2.1, o germe  $g = k \circ f^0$  também é uma dobra em que  $h = Id_n$ . Além disso, para a involução  $\varphi^0$  definida em (2.2) temos

$$(k \circ f^0) \circ \varphi^0 = k \circ (f^0 \circ \varphi^0) = k \circ f^0,$$

ou seja,  $g$  é uma dobra associada a  $\varphi^0$ . Considerando por exemplo

$$k(x_1, \dots, x_n) = (2x_1, x_2, \dots, x_n),$$

temos  $g \neq f^0$  e ambas as dobras  $g$  e  $f^0$  associadas a  $\varphi^0$ .

Com base no exemplo anterior, provamos o seguinte resultado.

**Proposição 2.10.** *Sejam  $k' : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um difeomorfismo e  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  uma dobra associada a um involução  $\varphi \in \Omega$ . Então,  $g = k' \circ f$  também é uma dobra associada a  $\varphi$ .*

*Demonstração.* Como mostramos no início da prova do Teorema 2.6, existem difeomorfismos  $k$  e  $h$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  tais que

$$f = k \circ f^0 \circ h^{-1} \quad \text{e} \quad \varphi = h \circ \varphi^0 \circ h^{-1}.$$

Claramente  $g = k' \circ f$  é uma dobra, pois

$$g = k' \circ (k \circ f^0 \circ h^{-1}) = (k' \circ k) \circ f^0 \circ h^{-1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g \circ \varphi &= (k' \circ k) \circ f^0 \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi^0 \circ h^{-1} \\ &= (k' \circ k) \circ f^0 \circ \varphi^0 \circ h^{-1} \\ &= (k' \circ k) \circ f^0 \circ h^{-1} \\ &= g, \end{aligned}$$

uma vez que  $f^0 \circ \varphi^0 = f^0$ . Portanto,  $g$  é uma dobra associada a  $\varphi$ . □

Deste modo, como  $k$  no resultado anterior é um difeomorfismo arbitrário, existem infinitas dobras associadas a uma dada involução, o que nos conduz diretamente à procura do conjunto de todas essas dobras. É o que faremos agora. Começamos definindo os germes das aplicações  $\varphi_i^0, f_i^0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  como

$$\varphi_i^0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (2.6)$$

e

$$f_i^0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^2, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (2.7)$$

com  $i = 1, \dots, n$ . Observe que  $\varphi_1^0 = \varphi^0$  e que  $\varphi_i^0$  é uma involução, para todo  $i = 1, \dots, n$ . Além disso,  $f_1^0 = f^0$  e  $f_i^0$  é uma dobra, para todo  $i = 1, \dots, n$ . Para verificar essa última afirmação, considere o difeomorfismo  $h_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  definido como a permutação de  $x_i$  por  $x_1$ , ou seja,

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = (x_i, x_2, \dots, x_1, \dots, x_n). \quad (2.8)$$

Como  $h_i^{-1} = h_i$ , temos  $f_i^0 = h_i \circ f^0 \circ h_i^{-1}$ . Também é possível verificar que

$$f_i^0 \circ \varphi_i^0 = f_i^0. \quad (2.9)$$

Portanto, cada  $f_i^0$  é uma dobra associada a  $\varphi_i^0$ .

Para o que segue, consideramos a definição de germes  $\mathcal{L}$ -equivalentes.

**Definição 2.11.** Dois germes de difeomorfismos  $g, h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  são ditos  $\mathcal{L}$ -equivalentes se existir um germe de um difeomorfismo  $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$g = k \circ h.$$

Com base na definição anterior, concluímos pelo Exemplo 2.9 que todo germe  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f^0$  é uma dobra associada à involução  $\varphi^0$ . Uma propriedade mais geral é provada no Lema 2.14 com o auxílio dos dois próximos lemas.

**Lema 2.12.** *Seja  $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe diferenciável na origem tal que  $g = k \circ f_n^0$  é uma dobra, onde  $f_n^0$  é a dobra canônica definida em (2.7) para  $i = n$ . Então,  $k$  é um germe de um difeomorfismo.*

*Demonstração.* Como  $k$  é diferenciável, pelo teorema da aplicação inversa precisamos apenas mostrar que  $dk(0)$  é inversível. Para facilitar a notação, consideramos

$$(X, y) = (x_1, \dots, x_n),$$

onde  $X = (x_1, \dots, x_{n-1})$  e  $y = x_n$ . Novamente pela diferenciabilidade de  $k$  na origem, podemos escrever

$$k(X, y) = dk(0)(X, y) + R(X, y),$$

onde  $R(X, y)$  representa a cauda da série de potências de  $k$  na origem para termos de ordem maior ou igual a 2. Escreva

$$T := dk(0) = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & d \end{array} \right),$$

onde  $A, B, C$  são matrizes de ordem  $n-1, n-1 \times 1, 1 \times n-1$ , respectivamente, e  $d \in \mathbb{R}$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} dg(0) &= d(k \circ f_n^0)(0) \\ &= dk(f_n^0(0))df_n^0(0) \\ &= dk(0)df_n^0(0) \\ &= d(T + R)(0)df_n^0(0) \\ &= (dT(0) + dR(0))df_n^0(0) \\ &= Tdf_n^0(0) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & d \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times n-1} & 0 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} A & 0_{n-1 \times 1} \\ \hline C & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Como  $g$  é uma dobra,  $\text{posto}(dg(0)) = n - 1$ . Se  $A$  não for inversível, é possível multiplicar  $dg(0)$  à direita e/ou à esquerda por uma matriz de permutação, de modo que a nova submatriz  $A$  tenha posto  $n - 1$ . Assim, podemos supor sem perda de generalidade que  $\text{posto}(A) = n - 1$ , ou seja, que  $A$  é inversível. Considere o isomorfismo linear cuja matriz na base canônica é dada por

$$L = \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ \hline -CA^{-1} & 1 \end{array} \right).$$

Escreva  $R$  em coordenadas  $R(X, y) = (R_1(X, y), R_2(X, y))$ , onde  $R_1 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-1}, 0)$  e  $R_2 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} L \circ k \circ f_n^0(X, y) &= L \circ k(X, y^2) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ \hline -CA^{-1} & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & d \end{array} \right) \begin{pmatrix} X \\ y^2 \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ \hline -CA^{-1} & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} R_1(X, y^2) \\ R_2(X, y^2) \end{pmatrix} \\ &= \left( \begin{array}{c|c} I_{n-1} & A^{-1}B \\ \hline 0_{1 \times n-1} & -CA^{-1}B + d \end{array} \right) \begin{pmatrix} X \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1(X, y) \\ U_2(X, y) \end{pmatrix} \\ &= (X + A^{-1}By^2 + U_1(X, y), (d - CA^{-1}B)y^2 + U_2(X, y)), \end{aligned}$$

onde  $U_1(X, y)$  e  $U_2(X, y)$  contêm os termos de ordem maior ou igual a 2 em  $X$  e maior ou igual a 4 em  $y$ . Considere  $\alpha : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-1}, 0)$  definido por

$$\alpha(X, y) = X + A^{-1}By^2 + U_1(X, y).$$

Defina também  $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  por

$$\phi(X, y) = (\alpha(X, y), y).$$

Como  $L \circ k \circ f_n^0$  é diferenciável,  $\alpha$  também é e, conseqüentemente,  $\phi$  é diferenciável. Mais ainda,

$$d\phi(0) = \left( \begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0_{n-1 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times n-1} & 1 \end{array} \right) = I_n,$$

donde segue que  $\phi$  é um germe de um difeomorfismo. Temos que

$$\alpha \circ \phi^{-1}(X, y) = X. \tag{2.10}$$

De fato, escreva

$$\phi^{-1}(X, y) = (\eta(X, y), y).$$

Logo,

$$\begin{aligned} (X, y) &= \phi \circ \phi^{-1}(X, y) \\ &= \phi(\eta(X, y), y) \\ &= (\alpha(\eta(X, y), y), y), \end{aligned}$$

donde segue que

$$X = \alpha(\eta(X, y), y) = \alpha \circ \phi^{-1}(X, y).$$

Escrevendo  $L \circ k \circ f_n^0(X, y) = (\alpha(X, y), (d - CA^{-1}B)y^2 + U_2(X, y))$ , obtemos por (2.10) que

$$L \circ k \circ f_n^0 \circ \phi^{-1}(X, y) = (X, (d - CA^{-1}B)y^2) + R'(X, y),$$

com  $R'(X, y)$  contendo termos de ordem maior ou igual a 4 em  $y$ . Como  $L \circ k \circ f_n^0 \circ \phi^{-1}$  é uma dobra, temos que

$$\frac{d^2(L \circ k \circ f_n^0 \circ \phi^{-1})}{dy^2}(0) \neq 0,$$

o que implica em  $d - CA^{-1}B \neq 0$  (para mais detalhes sobre a derivada segunda de uma dobra veja [19, p. 73]). Pelo Lema 1.3, segue que

$$\text{posto} \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & d \end{array} \right) \neq n - 1.$$

Como

$$\begin{aligned} n - 1 &= \text{posto}(dg(0)) \\ &= \text{posto}(d(k \circ f_n^0)(0)) \\ &= \text{posto}(dk(0)df_n^0(0)) \\ &\leq \min\{\text{posto}(dk(0)), \text{posto}(df_n^0(0))\} \\ &\leq \text{posto}(dk(0)), \end{aligned}$$

concluimos que  $\text{posto}(dk(0)) = n$ , o que prova que  $dk(0)$  é inversível. Portanto,  $k$  é um germe de um difeomorfismo. □

**Lema 2.13.** *Seja  $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe diferenciável na origem tal que  $g = k \circ f_i^0$  é uma dobra, onde  $f_i^0$  é definido em (2.7). Então  $k$  é um germe de um difeomorfismo.*

*Demonstração.* De modo análogo à demonstração do resultado anterior, basta provar que  $dk(0)$  é inversível. Considere a involução  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  definida por

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_i).$$

Inicialmente, provemos que  $r = g \circ \varphi$  é uma dobra. Com efeito, como  $g$  é uma dobra, existem germes de difeomorfismos  $l, h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tais que

$$g = l \circ f^0 \circ h.$$

Logo,

$$r = g \circ \varphi = l \circ f^0 \circ (h \circ \varphi).$$

Como  $\varphi$  também é um difeomorfismo,  $h \circ \varphi$  é um difeomorfismo e, portanto,  $r$  é uma dobra. Note que

$$\begin{aligned} \varphi \circ f_n^0 \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi \circ f_n^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_i) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_i^2) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^2, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= f_i^0(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

ou seja,  $f_i^0 = \varphi \circ f_n^0 \circ \varphi$ . Assim,

$$g = k \circ f_i^0 = k \circ \varphi \circ f_n^0 \circ \varphi,$$

ou equivalentemente,

$$r = g \circ \varphi = (k \circ \varphi) \circ f_n^0.$$

Como  $r$  é uma dobra, pelo Lema 2.12 segue que  $k \circ \varphi$  é um germe de um difeomorfismo. Então

$$0 \neq \det(d(k \circ \varphi)(0)) = \det(dk(0)) \det(d\varphi(0)),$$

o que prova que  $dk(0)$  é inversível. □

**Lema 2.14.** *Considere os germes  $\varphi_i^0$  e  $f_i^0$  definidos em (2.6) e (2.7), respectivamente. Uma dobra  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  está associada a  $\varphi_i^0$  se, e somente se,  $g$  é  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f_i^0$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $g$  seja uma dobra associada a  $\varphi_i^0$ . Assim,  $g \circ \varphi_i^0 = g$ , donde segue que

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n). \quad (2.11)$$

Considere a ação de  $\mathbb{Z}_2$  em  $\mathbb{R}^n$  definida no Exemplo 1.30 e a respectiva base de Hilbert obtida no Exemplo 1.32, ou seja, o anel  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{Z}_2)$  das funções polinomiais  $\mathbb{Z}_2$ -invariantes  $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  é gerado pelas funções

$$\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i^2 \quad \text{e} \quad \pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j,$$

para todo  $j \neq i$ . Escreva  $g = (g_1, \dots, g_n)$ , onde  $g_j : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  são as funções coordenadas de  $g$ , para  $j = 1, \dots, n$ . Pela igualdade (2.11), segue que

$$g_j(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n) = g_j(x_1, \dots, x_n).$$

Logo,  $g_j$  é um germe  $\mathbb{Z}_2$ -invariante, para cada  $j = 1, \dots, n$ . Pelo Teorema 1.34, existe um germe de uma função diferenciável  $k_j : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  tal que

$$\begin{aligned} g_j(x) &= k_j(\pi_1(x), \dots, \pi_n(x)) \\ &= k_j(x_1, \dots, x_i^2, \dots, x_n) \\ &= k_j \circ f_i^0(x), \end{aligned}$$

para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0)$  e todo  $j = 1, \dots, n$ . Defina  $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  como  $k = (k_1, \dots, k_n)$ . Veja que

$$g = (g_1, \dots, g_n) = (k_1 \circ f_i^0, \dots, k_n \circ f_i^0) = k \circ f_i^0.$$

Pelo Lema 2.13, segue que  $k$  é um germe de um difeomorfismo e, portanto,  $g$  é  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f_i^0$ .

Reciprocamente, seja  $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de um difeomorfismo tal que  $g = k \circ f_i^0$ . Segue de (2.9) que

$$g \circ \varphi_i^0 = k \circ f_i^0 \circ \varphi_i^0 = k \circ f_i^0 = g.$$

Portanto,  $g$  é uma dobra associada a  $\varphi_i^0$ , donde segue o resultado. □

Para o próximo resultado, fixamos  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Considere  $\varphi \in \Omega$  uma involução conjugada a  $\varphi_i^0$ , ou seja,

$$\varphi = h \circ \varphi_i^0 \circ h^{-1},$$

para algum difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ . Mostremos que  $f = f_i^0 \circ h^{-1}$  é uma dobra associada a  $\varphi$ . De fato, seja  $h_i$  o difeomorfismo definido em (2.8). Veja que

$$f = f_i^0 \circ h^{-1} = h_i \circ f_i^0 \circ h_i^{-1} \circ h^{-1} = h_i \circ f_i^0 \circ (h \circ h_i)^{-1}.$$

Além disso,

$$f \circ \varphi = f_i^0 \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi_i^0 \circ h^{-1} = f_i^0 \circ \varphi_i^0 \circ h^{-1} = f_i^0 \circ h^{-1} = f,$$

onde a terceira igualdade segue de (2.9). Nestas condições, é possível mostrar que toda dobra  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f_i^0 \circ h^{-1}$  também está associada a  $\varphi$ . Mais precisamente, temos:

**Proposição 2.15.** *Considere  $\varphi_i^0$  e  $f_i^0$  definidos como em (2.6) e (2.7), respectivamente. Sejam  $\varphi \in \Omega$  uma involução e  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de um difeomorfismo tal que  $\varphi = h \circ \varphi_i^0 \circ h^{-1}$ . Então  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é uma dobra associada a  $\varphi$  se, e somente se,  $g$  é  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f_i^0 \circ h^{-1}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\varphi$  e  $h$  nas hipóteses da proposição e suponha que  $g$  seja uma dobra associada a  $\varphi$ . Como  $h$  é um difeomorfismo, temos que  $g \circ h$  é uma dobra. Mostremos que tal dobra está associada com  $\varphi_i^0$ . De fato,

$$g = g \circ \varphi = g \circ h \circ \varphi_i^0 \circ h^{-1}$$

e, assim,

$$g \circ h = g \circ h \circ \varphi_i^0.$$

Pelo Lema 2.14,  $g \circ h$  é  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f_i^0$ , ou seja, existe um germe de um difeomorfismo  $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$g \circ h = k \circ f_i^0.$$

Logo,  $g = k \circ f_i^0 \circ h^{-1}$ , implicando que  $g$  é  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f_i^0 \circ h^{-1}$ . Reciprocamente, suponha que  $g$  seja  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f_i^0 \circ h^{-1}$ . Assim, existe um germe de um difeomorfismo  $k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $g = k \circ f_i^0 \circ h^{-1}$ . Como  $f_i^0$  é uma dobra, segue pela Definição 2.1 que  $g$  também é. Além disso,

$$g \circ \varphi = k \circ f_i^0 \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi_i^0 \circ h^{-1} = k \circ f_i^0 \circ \varphi_i^0 \circ h^{-1} = k \circ f_i^0 \circ h^{-1} = g,$$

donde segue o resultado. □

Como consequência direta, temos:

**Corolário 2.16.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  uma dobra associada a uma involução  $\varphi \in \Omega$ . Então  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  também é uma dobra associada a  $\varphi$  se, e somente se,  $g$  é  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $g$  seja uma dobra associada a  $\varphi$ . Como  $f$  é um dobra, existem germes de difeomorfismos  $h, k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tais que

$$f = k \circ f^0 \circ h^{-1}. \quad (2.12)$$

Sendo  $f$  associada a uma única involução  $\varphi$ , concluímos pela demonstração da Proposição 2.4 que

$$\varphi = h \circ \varphi^0 \circ h^{-1},$$

onde  $\varphi^0 = \varphi_1^0$  é definida em (2.6). Pela Proposição 2.15, como  $g$  também está associada a  $\varphi$ , temos que  $g$  é  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f_1^0 \circ h^{-1}$ , em que  $f_1^0 = f^0$ . Logo,

$$g = r \circ f^0 \circ h^{-1},$$

para algum germe de difeomorfismo  $r : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ . Neste caso,

$$g = (r \circ k^{-1}) \circ (k \circ f^0 \circ h^{-1}) = (r \circ k^{-1}) \circ f.$$

Portanto,  $g$  é  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f$ .

Reciprocamente, suponha que  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  seja  $\mathcal{L}$ -equivalente à dobra  $f$ , ou seja, existe um germe de um difeomorfismo  $k' : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $g = k' \circ f$ . De (2.12) segue que

$$g = (k' \circ k) \circ f^0 \circ h^{-1},$$

implicando que  $g$  é uma dobra. Além disso, sendo  $f \circ \varphi = f$  temos

$$g \circ \varphi = (k' \circ f) \circ \varphi = k' \circ (f \circ \varphi) = k' \circ f = g.$$

Portanto,  $g$  é uma dobra associada a  $\varphi$ . □

Baseados nesse último resultado, podemos identificar todas as dobras associadas a uma mesma involução  $\varphi$ . Esse é o conjunto das dobras  $\mathcal{L}$ -equivalentes a uma dada dobra  $f$  associada a  $\varphi$ .

## 2.2 Diagramas divergentes

Na seção anterior, analisamos a relação entre as dobras e as involuções. Essa associação, apesar de não ser biunívoca, servirá como uma ferramenta para a classificação de diagramas divergentes de dobras. A hipótese de que todas as involuções consideradas têm codimensão 1 ainda é assumida durante todo o restante do texto.

O objetivo central desta seção é apresentar uma forma de equivalência entre os diagramas divergentes de dobras e utilizar as uplas de involuções associadas para classificá-los. Para tanto, vamos primeiramente encontrar uma maneira de relacioná-los com as uplas de involuções. A principal referência aqui são as Seções 3 e 4 de [17].

**Definição 2.17.** Um diagrama de germes de aplicações do tipo

$$(f_1, \dots, f_s) : (\mathbb{R}^n, 0) \begin{array}{l} \nearrow f_1 \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \\ \vdots \\ \searrow f_s \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \end{array} \quad (*)$$

é chamado de diagrama divergente. No caso em que  $f_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é uma dobra, com  $i = 1, \dots, s$ , dizemos que  $(*)$  é um diagrama divergente de dobras.

De outro modo, o diagrama  $(\star)$  também pode ser escrito como  $(f_1, \dots, f_s) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, 0)$ , em que

$$(f_1, \dots, f_s)(x) = (f_1(x), \dots, f_s(x)),$$

para todo  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . Na maior parte do texto, vamos indicar tal diagrama simplesmente por  $(f_1, \dots, f_s)$ .

**Definição 2.18.** Dois diagramas divergentes de dobras  $(f_1, \dots, f_s)$  e  $(g_1, \dots, g_s)$  são ditos equivalentes se existirem germes de difeomorfismos  $h, k_1, \dots, k_s$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  tais que  $g_i = k_i \circ f_i \circ h^{-1}$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ .

Desejamos agora classificar os diagramas divergentes de dobras a partir das  $s$ -uplas de involuções. Uma maneira natural de relacionar esses conceitos é dada a seguir.

**Definição 2.19.** Sejam  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  uma  $s$ -upla de involuções em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  e  $(f_1, \dots, f_s)$  um diagrama divergente de dobras. Dizemos que  $(f_1, \dots, f_s)$  está associado a  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  ou que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  está associada a  $(f_1, \dots, f_s)$  se cada dobra  $f_i$  está associada a  $\varphi_i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ .

Observe que a definição anterior recupera a associação entre dobras e involuções apresentada na seção anterior, bastando tomar  $s = 1$ . Para utilizar as  $s$ -uplas de involuções na classificação dos diagramas divergentes de dobras é preciso que sempre que dois diagramas forem equivalentes, as respectivas  $s$ -uplas de involuções associadas também sejam equivalentes e vice-versa. Essa propriedade é provada a seguir.

**Teorema 2.20.** Sejam  $(f_1, \dots, f_s)$  e  $(g_1, \dots, g_s)$  diagramas divergentes de dobras associados, respectivamente, às  $s$ -uplas de involuções  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  e  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ . Então,  $(f_1, \dots, f_s)$  é equivalente a  $(g_1, \dots, g_s)$  se, e somente se,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ .

*Demonstração.* Suponha que  $(f_1, \dots, f_s)$  seja equivalente a  $(g_1, \dots, g_s)$ . Então, existem germes de difeomorfismos  $k_1, \dots, k_s, h$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  tais que

$$k_i \circ f_i \circ h^{-1} = g_i,$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} g_i \circ (h \circ \varphi_i \circ h^{-1}) &= k_i \circ f_i \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi_i \circ h^{-1} \\ &= k_i \circ f_i \circ \varphi_i \circ h^{-1} \\ &= k_i \circ f_i \circ h^{-1} \\ &= g_i, \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue pois cada  $f_i$  está associada a  $\varphi_i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Logo, cada dobra  $g_i$  está associada à involução  $h \circ \varphi_i \circ h^{-1}$ . Como  $g_i$  está associada a  $\psi_i$  por hipótese, segue da unicidade demonstrada na Proposição 2.4 que

$$\psi_i = h \circ \varphi_i \circ h^{-1},$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ . Pela Definição 1.18, temos  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  equivalente a  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ .

Reciprocamente, suponha que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  seja equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ . Assim, existe um germe de um difeomorfismo  $h$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $\psi_i = h \circ \varphi_i \circ h^{-1}$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Como  $f_i$  é uma dobra, então  $f_i \circ h^{-1}$  também é. Além disso, temos por hipótese que  $f_i \circ \varphi_i = f_i$ , donde obtemos

$$\begin{aligned} f_i \circ h^{-1} \circ \psi_i &= f_i \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi_i \circ h^{-1} \\ &= f_i \circ \varphi_i \circ h^{-1} \\ &= f_i \circ h^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f_i \circ h^{-1}$  é uma dobra associada a  $\psi_i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Pelo Corolário 2.16, como  $g_i$  também é uma dobra associada a  $\psi_i$ , concluímos que  $g_i$  é  $\mathcal{L}$ -equivalente a  $f_i \circ h^{-1}$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Assim, existe um germe de um difeomorfismo  $k_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$k_i \circ f_i \circ h^{-1} = g_i.$$

Pela Definição 2.18, os diagramas divergentes de dobras  $(f_1, \dots, f_s)$  e  $(g_1, \dots, g_s)$  são equivalentes, donde segue o resultado. □

Relembremos da Observação 1.22 que se  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  e  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  são  $s$ -uplas de involuções equivalentes, então

$$\text{tr}(d(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_s)(0)) = \text{tr}(d(\psi_1 \circ \dots \circ \psi_s)(0)). \quad (2.13)$$

Como consequência do teorema anterior, para o caso de diagramas divergentes de dobras temos o mesmo invariante sob a equivalência da Definição 2.18. Mais especificamente, se  $(f_1, \dots, f_s)$  e  $(g_1, \dots, g_s)$  são diagramas divergentes de dobras equivalentes associados às  $s$ -uplas de involuções  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  e  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ , respectivamente, então pelo Teorema 2.20 a igualdade (2.13) é válida.

Como já comentamos, um dos nossos objetivos neste capítulo é a classificação dos diagramas divergentes de dobras, a qual se dá por meio das uplas de involuções associadas. Contudo, a nossa classificação não é geral, precisamos adicionar duas hipóteses principais: a linearidade e a transversalidade das involuções. Assumimos que as involuções das  $s$ -uplas sejam lineares, pois as ferramentas usadas são fundamentalmente de natureza linear. Já a importância da transversalidade segundo a Definição 1.26 fica clara mais adiante.

Para o próximo resultado, considere a Definição 1.18. Dizemos que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é linearmente equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  se o difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  que fornece a conjugação

$$\varphi_i = h \circ \psi_i \circ h^{-1}$$

é linear.

**Proposição 2.21.** *Seja  $G_s = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$  um conjunto transversal de involuções lineares em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Então,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é linearmente equivalente à  $s$ -upla de involuções  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  tal que*

$$\text{Fix}(\psi_i) = \{x \in (\mathbb{R}^n, 0); x_i = 0\}, \quad (2.14)$$

para cada  $i = 1, \dots, s$ .

*Demonstração.* Sendo cada  $\varphi_i$  uma involução linear, temos que  $\text{Fix}(\varphi_i)$  é um subespaço vetorial de  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Além disso, como  $\dim \text{Fix}(\varphi_i) = n - 1$ , temos que  $\text{Fix}(\varphi_i)$  é um hiperplano de  $(\mathbb{R}^n, 0)$  e, portanto, existe um funcional linear  $f_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  de forma que

$$\ker(f_i) = \text{Fix}(\varphi_i), \quad (2.15)$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ . Logo,

$$\text{codim } \ker(f_i) = \text{codim } \text{Fix}(\varphi_i) = 1.$$

Como  $G_s$  é um conjunto transversal de involuções, segue da Definição 1.26 que

$$\begin{aligned} \text{codim } \bigcap_{i=1}^s \ker(f_i) &= \text{codim } \bigcap_{i=1}^s \text{Fix}(\varphi_i) \\ &= \text{codim } \bigcap_{i=1}^s T_0 \text{Fix}(\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^s \text{codim } \text{Fix}(\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^s \text{codim } \ker(f_i) \\ &= s. \end{aligned}$$

Seja  $\beta' = \{u_1, \dots, u_{n-s}\}$  uma base para  $\bigcap_{i=1}^s \ker(f_i)$ . Complete  $\beta'$  de modo a obter uma base

$$\beta'' = \{u_1, \dots, u_{n-s}, v_1, \dots, v_s\}$$

de  $\mathbb{R}^n$ . Como  $\beta' \subset \bigcap_{i=1}^s \ker(f_i)$ , segue que

$$f_j(u_i) = 0,$$

para  $i = 1, \dots, n - s$  e  $j = 1, \dots, s$ . Afirmamos que para cada  $j$ , existe um único  $k = 1, \dots, s$  tal que  $f_j(v_k) \neq 0$ . Com efeito, fixe  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Veja que  $f_j \neq 0$ , pois  $\text{codim ker}(f_j) = 1$ . Como  $f_j(u_i) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n - s$ , existe  $k \in \{1, \dots, s\}$  tal que

$$f_j(v_k) \neq 0.$$

Agora, se existir  $v_l$ , com  $l \neq k$ , tal que  $f_j(v_l) \neq 0$ , como  $\{v_k, v_l\}$  é um conjunto linearmente independente contido no  $\text{ker}(f_j)$ , teremos

$$\text{codim ker}(f_j) \geq 2,$$

o que é um absurdo. Logo, existe um único  $k \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $f_j(v_k) \neq 0$ .

Sejam  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  tais que  $f_i(v_k) \neq 0$  e  $f_j(v_k) \neq 0$  para algum  $k \in \{1, \dots, s\}$ . Mostremos que  $i = j$ . De fato, como  $v_k$  é o único vetor de  $\beta''$  tal que  $f_i(v_k) \neq 0$  e  $f_j(v_k) \neq 0$ , temos

$$\text{ker}(f_i) = \text{ker}(f_j) = [u_1, \dots, u_{n-s}, v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_s]. \quad (2.16)$$

Se  $i \neq j$ , segue de (2.15) e da condição de transversalidade de  $G_s$  que

$$\text{ker}(f_i) + \text{ker}(f_j) = \mathbb{R}^n,$$

o que contradiz (2.16). Portanto,  $i = j$ . Podemos assim assumir, reordenando a base  $\beta''$  se necessário, que

$$f_j(v_j) \neq 0 \quad \text{e} \quad f_j(v_k) = 0,$$

para todo  $j, k \in \{1, \dots, s\}$ , com  $k \neq j$ . Provemos que  $\{f_1, \dots, f_s\}$  é um conjunto linearmente independente. De fato, se  $\{f_1, \dots, f_s\}$  for linearmente dependente, então existe  $j \in \{1, \dots, s\}$  tal que

$$f_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s \alpha_i f_i,$$

para escalares  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$0 \neq f_j(v_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s \alpha_i f_i(v_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s \alpha_i 0 = 0,$$

o que é um absurdo. Portanto,  $\{f_1, \dots, f_s\}$  é linearmente independente. Complete agora tal conjunto de forma a obter uma base para  $(\mathbb{R}^n)^*$ , digamos

$$\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}.$$

Considere a base canônica  $\gamma^* = \{\pi_1, \dots, \pi_n\}$  de  $(\mathbb{R}^n)^*$ , onde  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção canônica definida por  $\pi_i(x) = x_i$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $i = 1, \dots, n$ . Considere a base  $\beta =$

$\{w_1, \dots, w_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  de forma que  $\beta^*$  seja a base dual de  $\beta$ . Sejam  $\gamma = \{e_1, \dots, e_n\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o único operador linear tal que

$$h(w_i) = e_i,$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ . Como  $h$  leva base de  $\mathbb{R}^n$  em base de  $\mathbb{R}^n$ , claramente  $h$  é um isomorfismo linear. Assim,

$$f_j \circ h^{-1}(e_i) = f_j(w_i) = \delta_{ij},$$

para todo  $i, j = 1, \dots, n$ , isto é,

$$f_j \circ h^{-1} = \pi_j,$$

para todo  $j = 1, \dots, n$ . Defina as involuções  $\psi_i = h \circ \varphi_i \circ h^{-1}$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Pela Definição 1.18, temos que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ . Mostremos que

$$\text{Fix}(\psi_i) = \ker(\pi_i), \tag{2.17}$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ . De fato, seja  $x \in \ker(\pi_i) = \ker(f_i \circ h^{-1})$ . Então,  $f_i \circ h^{-1}(x) = 0$ , o que implica que

$$h^{-1}(x) \in \ker(f_i) = \text{Fix}(\varphi_i).$$

Pela Proposição 1.15,

$$h(\text{Fix}(\varphi_i)) = \text{Fix}(\psi_i),$$

o que nos garante que  $x \in \text{Fix}(\psi_i)$ . Reciprocamente, seja  $x \in \text{Fix}(\psi_i)$ . Então,

$$x = \psi_i(x) = (h \circ \varphi_i \circ h^{-1})(x),$$

o que é equivalente a  $\varphi_i \circ h^{-1}(x) = h^{-1}(x)$ . Assim,  $h^{-1}(x) \in \text{Fix}(\varphi_i) = \ker(f_i)$ , ou seja,

$$\pi_i(x) = f_i \circ h^{-1}(x) = 0,$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ . Portanto,

$$\text{Fix}(\psi_i) = \ker(\pi_i) = \{x \in (\mathbb{R}^n, 0); x_i = 0\},$$

como queríamos demonstrar. □

A proposição anterior não apresenta de maneira explícita as involuções lineares  $\psi_1, \dots, \psi_s$  cujo conjunto de pontos fixos é da forma (2.14). O próximo resultado tem justamente esse objetivo. Para tanto, introduzimos a seguinte nomenclatura: se  $G_s = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$  for um conjunto transversal de involuções, diremos que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é uma  $s$ -upla de involuções transversais.

**Proposição 2.22.** *Nas condições da proposição anterior temos que*

$$\psi_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + a_{i1}x_i, \dots, -x_i, \dots, x_n + a_{in}x_i), \quad (2.18)$$

para algumas constantes  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , com  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \neq i$ .

*Demonstração.* Pela proposição anterior, se  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  for uma  $s$ -upla de involuções lineares transversais, então ela é linearmente equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ , em que cada involução  $\psi_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  satisfaz

$$\text{Fix}(\psi_i) = \{x \in (\mathbb{R}^n, 0); x_i = 0\}. \quad (2.19)$$

Lembremos da demonstração anterior que

$$\psi_i = h \circ \varphi_i \circ h^{-1},$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ , onde  $h$  e  $\varphi_i$  são lineares. Portanto,  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  é uma  $s$ -upla de involuções lineares. Além disso, por (2.19) temos que

$$\psi_i(e_j) = e_j, \quad (2.20)$$

para todo  $j \neq i$ , onde  $e_j$  é o  $j$ -ésimo elemento da base canônica de  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Escreva

$$\psi_i(e_i) = (a_{i1}, \dots, a_{in}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \psi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= x_1\psi_i(e_1) + \dots + x_i\psi_i(e_i) + \dots + x_n\psi_i(e_n) \\ &= x_1e_1 + \dots + x_i(a_{i1}, \dots, a_{in}) + \dots + x_ne_n \\ &= (x_1 + a_{i1}x_i, \dots, a_{ii}x_i, \dots, x_n + a_{in}x_i), \end{aligned}$$

para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . Como  $\psi_i$  é uma involução, temos

$$\begin{aligned} e_i &= \psi_i(\psi_i(e_i)) \\ &= \psi_i(a_{i1}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{in}) \\ &= (a_{i1} + a_{i1}a_{ii}, \dots, a_{ii}^2, \dots, a_{in} + a_{in}a_{ii}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i1}(1 + a_{ii}) = 0 \\ \vdots \\ a_{ii}^2 = 1 \\ \vdots \\ a_{in}(1 + a_{ii}) = 0 \end{array} \right. ,$$

para cada  $i = 1, \dots, s$ , o que implica que  $a_{ii} = \pm 1$ . Note que se  $a_{ii} = 1$ , então  $a_{ij} = 0$ , para todo  $j \neq i$ , com  $j = 1, \dots, n$ . Portanto,  $\psi_i(e_i) = e_i$ , o que juntamente com (2.20) implica em  $\psi_i = Id_n$ . Mais isso é uma contradição, pois  $\dim \text{Fix}(\psi_i) = n - 1$ . Assim,  $a_{ii} = -1$ , donde segue a forma (2.18) para  $\psi_i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ .

□

Desta maneira, obtemos uma forma explícita para as  $s$ -uplas de involuções lineares transversais e, conseqüentemente, uma forma explícita para os diagramas divergentes de dobras por meio do Teorema 2.20, como mostramos a seguir.

**Proposição 2.23.** *Seja  $G_s = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$  um conjunto transversal de involuções lineares em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Então, qualquer diagrama divergente de dobras  $(f_1, \dots, f_s)$  associado a  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente ao diagrama divergente de dobras  $(g_1, \dots, g_s)$  associado a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ , onde  $\psi_i$  é dado em (2.18) e*

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i, \dots, x_i^2, \dots, x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i \right). \quad (2.21)$$

*Demonstração.* Seja  $i \in \{1, \dots, s\}$  e considere  $\psi_i$  como em (2.18) e  $g_i$  como definido em (2.21). Defina o germe do difeomorfismo  $h_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  como

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1 - \frac{a_{i1}}{2}x_i, \dots, x_i, \dots, x_n - \frac{a_{in}}{2}x_i \right).$$

Veja que

$$h_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i, \dots, x_i, \dots, x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i \right),$$

pois

$$\begin{aligned} h_i \left( x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i, \dots, x_i, \dots, x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i \right) &= \left( \left( x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i \right) - \frac{a_{i1}}{2}x_i, \dots, x_i, \dots, \left( x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i \right) - \frac{a_{in}}{2}x_i \right) \\ &= (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Como  $h_i$  é linear, toda inversa à direita é também uma inversa à esquerda. Considere agora a involução  $\varphi_i^0$  definida em (2.6). Então

$$\begin{aligned} h_i \circ \varphi_i^0 \circ h_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= h_i \circ \varphi_i^0 \left( x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i, \dots, x_i, \dots, x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i \right) \\ &= h_i \left( x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i, \dots, -x_i, \dots, x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i \right) \\ &= \left( x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i - \left( \frac{a_{i1}}{2}(-x_i) \right), \dots, -x_i, \dots, x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i - \left( \frac{a_{in}}{2}(-x_i) \right) \right) \\ &= (x_1 + a_{i1}x_i, \dots, -x_i, \dots, x_n + a_{in}x_i) \\ &= \psi_i(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Logo,  $\psi_i = h_i \circ \varphi_i^0 \circ h_i^{-1}$ , para cada  $i = 1, \dots, s$ . Além disso, considerando a dobra  $f_i^0$  definida em (2.7), temos

$$\begin{aligned} f_i^0 \circ h_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= f_i^0 \left( x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i, \dots, x_i, \dots, x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i \right) \\ &= \left( x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i, \dots, x_i^2, \dots, x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i \right) \\ &= g_i(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Como  $h_i^{-1} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é um difeomorfismo, segue que  $g_i$  definida em (2.21) é uma dobra, uma vez que  $f_i^0$  o é. Ainda,

$$g_i \circ \psi_i = f_i^0 \circ h_i^{-1} \circ h_i \circ \varphi_i^0 \circ h_i^{-1} = f_i^0 \circ \varphi_i^0 \circ h_i^{-1} = f_i^0 \circ h_i^{-1} = g_i,$$

onde a terceira igualdade segue de (2.9). Logo,  $g_i$  é uma dobra associada a  $\psi_i$ , para cada  $i = 1, \dots, s$ . Pela Definição 2.19,  $(g_1, \dots, g_s)$  é um diagrama divergente de dobras associado a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ . Pela Proposição 2.22, como  $G_s$  é um conjunto transversal de involuções lineares, temos que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é linearmente equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ . Portanto, pelo Teorema 2.20, todo diagrama divergente de dobras  $(f_1, \dots, f_s)$  associado a  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente a  $(g_1, \dots, g_s)$ . □

Como vimos no início da demonstração da Proposição 2.8, toda involução  $\varphi \in \Omega$  satisfazendo  $\text{codim Fix}(\varphi) = 1$  é equivalente (via conjugação) à involução linear  $\varphi_1^0 = \varphi^0$  definida em (2.6). No caso das  $s$ -uplas, com  $s \geq 2$ , podemos utilizar o Teorema 1.23 para concluir que toda  $s$ -upla  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  de involuções que comutam é equivalente a  $(d\varphi_1(0), \dots, d\varphi_s(0))$ . Nosso objetivo agora é obter um resultado semelhante ao Teorema 1.23, impondo a condição extra de transversalidade.

**Teorema 2.24.** *Se  $G_s = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$  for um conjunto transversal de involuções e  $\Lambda_s = [\varphi_1, \dots, \varphi_s]$  for um grupo abeliano, então  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente a  $(\varphi_1^0, \dots, \varphi_s^0)$ , onde cada involução  $\varphi_i^0$  é definida em (2.6), para todo  $i = 1, \dots, s$ .*

*Demonstração.* Como  $\Lambda_s$  é um grupo abeliano, pelo Teorema 1.23 temos que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente a  $(\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_s)$ , onde  $\overline{\varphi}_i = d\varphi_i(0)$  é a linearização de  $\varphi_i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Pela Proposição 1.27, como  $G_s$  é transversal, então  $\overline{G}_s = \{\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_s\}$  também é transversal. Agora, pela Proposição 2.21, temos que  $(\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_s)$  é linearmente equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ , com

$$\text{Fix}(\psi_i) = \{x \in (\mathbb{R}^n, 0); x_i = 0\},$$

para  $i = 1, \dots, s$ . Logo,  $\{\psi_1, \dots, \psi_s\}$  é um conjunto transversal de involuções. Sendo  $\Lambda_s$  um grupo abeliano, podemos utilizar novamente a Proposição 1.27 para concluir que o grupo  $[\psi_1, \dots, \psi_s]$  é abeliano. Como cada involução linear  $\psi_i$  é diagonalizável (Proposição 1.17), segue pela Proposição 1.4 que  $\{\psi_1, \dots, \psi_s\}$  é um conjunto de operadores lineares simultaneamente diagonalizáveis, ou seja, existe uma base  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $(\mathbb{R}^n, 0)$  formada por autovetores de  $\psi_1, \dots, \psi_s$  que diagonaliza simultaneamente tais involuções. Pela Proposição 1.17, os autovalores de  $\psi_i$  são  $\pm 1$ . Como  $\text{codim Fix}(\psi_i) = 1$ , para cada  $i = 1, \dots, s$ , existe um único  $\alpha_i \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$\psi_i(v_{\alpha_i}) = -v_{\alpha_i},$$

isto é, existe um único vetor  $v_{\alpha_i} \in \beta$  associado ao autovalor  $-1$ . Veja que se  $\alpha_i = \alpha_j$ , então

$$\text{Fix}(\psi_{\alpha_i}) + \text{Fix}(\psi_{\alpha_j}) = \text{Fix}(\psi_{\alpha_i}) \neq \mathbb{R}^n,$$

o que contraria a transversalidade de  $\{\psi_1, \dots, \psi_s\}$ . Portanto,  $\alpha_i \neq \alpha_j$  para todo  $i \neq j$ . Considere uma reordenação

$$\beta' = \{u_1, \dots, u_n\}$$

da base  $\beta$  de forma que

$$u_i = v_{\alpha_i},$$

com  $i = 1, \dots, s$ . Assim,

$$\psi_i(u_i) = \psi(v_{\alpha_i}) = -v_{\alpha_i} = -u_i$$

e

$$\psi_i(u_j) = u_j,$$

para todo  $j \neq i$ , com  $i = 1, \dots, s$  e  $j = 1, \dots, n$ . Deste modo,

$$[\psi_i]_{\beta'} = [\varphi_i^0]_{\gamma},$$

em que  $\gamma$  é a base canônica de  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Isso implica que  $P^{-1}[\psi_i]_{\gamma}P = [\varphi_i^0]_{\gamma}$  para todo  $i = 1, \dots, s$ , onde  $P = [I]_{\beta', \gamma}$  é a matriz mudança de bases de  $\gamma$  para  $\beta'$  (veja [9, Subseção 3.4.6]). Pela Definição 1.18,  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  é equivalente a  $(\varphi_1^0, \dots, \varphi_s^0)$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

Como consequência, obtemos uma classificação para os diagramas divergentes de dobras associados às uplas de involuções.

**Corolário 2.25.** *Seja  $G_s = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$  um conjunto transversal de involuções tal que  $\Lambda_s = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$  é um grupo abeliano. Então qualquer diagrama divergente de dobras  $(f_1, \dots, f_s)$  associado a  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente ao diagrama divergente de dobras  $(f_1^0, \dots, f_s^0)$ , em que cada  $f_i^0$  é definido em (2.7).*

*Demonstração.* Seja  $(f_1, \dots, f_s)$  um diagrama divergente de dobras associado a  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ . Pelo teorema anterior,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  é equivalente a  $(\varphi_1^0, \dots, \varphi_s^0)$ , onde cada  $\varphi_i^0$  é uma involução associada a  $f_i^0$ , por (2.9). Pela Definição 2.18, temos que  $(\varphi_1^0, \dots, \varphi_s^0)$  está associada a  $(f_1^0, \dots, f_s^0)$ . Segue do Teorema 2.20 que  $(f_1, \dots, f_s)$  é equivalente a  $(f_1^0, \dots, f_s^0)$ .  $\square$

## 2.3 Caracterização das órbitas

A partir de agora, assumimos que toda  $s$ -upla de involuções lineares seja transversal, exceto menção do contrário. Neste caso, como demonstrado nas Proposições 2.21 e 2.22, toda  $s$ -upla é equivalente a  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ , em que  $\psi_i$  é da forma (2.18). Assim, para decidir se duas  $s$ -uplas são equivalentes basta caracterizar as órbitas das  $s$ -uplas  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$ , como faremos no próximo resultado. Citamos a Seção 5 de [17] como nossa principal referência para o que segue.

**Teorema 2.26.** *Considere as  $s$ -uplas de involuções lineares transversais  $(\psi_{1_a}, \dots, \psi_{s_a})$  e  $(\psi_{1_b}, \dots, \psi_{s_b})$ , onde*

$$\psi_{i_a}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + a_{i1}x_i, \dots, -x_i, \dots, x_n + a_{in}x_i),$$

$$\psi_{i_b}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + b_{i1}x_i, \dots, -x_i, \dots, x_n + b_{in}x_i),$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ , com  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$  e  $j \neq i$ . Então  $(\psi_{1_a}, \dots, \psi_{s_a})$  é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \dots, \psi_{s_b})$  se, e somente se, existe uma matriz inversível com entradas reais

$$H = \left( \begin{array}{cccc|ccc} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_s & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \delta_{s+1} & \gamma_{s+1,2} & \cdots & \gamma_{s+1,s} & \beta_{s+1,s+1} & \cdots & \beta_{s+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_n & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{ns} & \beta_{n,s+1} & \cdots & \beta_{nn} \end{array} \right) \quad (2.22)$$

tal que:

(i)  $\alpha_1 = 1$ ;

(ii) Se  $1 \leq i, j \leq s$ , com  $i \neq j$ , então

$$b_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} a_{ij};$$

(iii) Se  $s+1 \leq j \leq n$ , então

$$b_{1j} = -2\delta_j + \sum_{k=2}^s \gamma_{jk} a_{1k} + \sum_{k=s+1}^n \beta_{jk} a_{1k};$$

(iv) Se  $2 \leq i \leq s$  e  $s+1 \leq j \leq n$ , então

$$b_{ij} = \frac{1}{\alpha_i} \left( \delta_j a_{i1} - 2\gamma_{ji} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^s \gamma_{jk} a_{ik} + \sum_{k=s+1}^n \beta_{jk} a_{ik} \right).$$

*Demonstração.* Por definição,  $(\psi_{1_a}, \dots, \psi_{s_a})$  é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \dots, \psi_{s_b})$  se, e somente se, existe um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\psi_{i_b} = h \circ \psi_{i_a} \circ h^{-1}, \quad (2.23)$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ . Derivando na origem a equação (2.23) vemos que  $h$  pode ser considerada linear, pois

$$\psi_{i_b} = dh(0)\psi_{i_a}dh^{-1}(0).$$

Portanto,  $h$  é um difeomorfismo linear cuja matriz com relação a uma base fixada de  $\mathbb{R}^n$  é denotada por  $H = (c_{jk})_{n \times n}$ . Utilizando a representação matricial temos que (2.23) é equivalente a

$$\psi_{i_b}H = H\psi_{i_a}, \quad (2.24)$$

com

$$\psi_{i_b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & b_{i1} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & b_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{in} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_{i_a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_{i1} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Por um lado,

$$H\psi_{i_a} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik}c_{1k} - c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik}c_{2k} - c_{2i} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik}c_{nk} - c_{ni} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

e por outro lado

$$\psi_{i_b}H = \begin{pmatrix} c_{11} + c_{i1}b_{i1} & \cdots & c_{1n} + c_{in}b_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ -c_{i1} & \cdots & -c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} + c_{i1}b_{in} & \cdots & c_{nn} + c_{in}b_{in} \end{pmatrix}.$$

Para  $1 \leq i \leq s$  e  $1 \leq j \leq n$ , com  $i \neq j$ , segue de (2.24) que  $c_{ij} = -c_{ji}$ , ou seja,  $c_{ij} = 0$ . Assim, a matriz  $H$  é da forma

$$H = \left( \begin{array}{cccc|ccc} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline c_{s+1,1} & c_{s+1,2} & \cdots & c_{s+1,s} & c_{s+1,s+1} & \cdots & c_{s+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{ns} & c_{n,s+1} & \cdots & c_{nn} \end{array} \right).$$

Como  $H$  é inversível,  $c_{ii} \neq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Denote  $\alpha_i = c_{ii}$ . Veja que  $H$  satisfaz a igualdade (2.24) se, e somente se,  $\alpha H$  também a satisfaz, para todo  $\alpha \neq 0$ . Sendo assim, podemos supor  $\alpha_1 = 1$ . Para  $1 \leq i, j \leq s$ , com  $i \neq j$ , segue de (2.24) que

$$c_{ji} + \alpha_i b_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik} c_{jk} - c_{ji},$$

implicando que  $\alpha_i b_{ij} = a_{ij} \alpha_j$ , uma vez que  $c_{ij} = 0$  nestes casos, se  $i \neq j$ . Portanto,

$$b_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} a_{ij}.$$

Para  $i = 1$  e  $s+1 \leq j \leq n$ ,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{1k} c_{jk} - c_{j1} = c_{j1} + \alpha_1 b_{1j},$$

o que prova que

$$b_{1j} = -2c_{j1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{1k} c_{jk}.$$

De maneira análoga, se  $2 \leq i \leq s$  e  $s+1 \leq j \leq n$ , então

$$c_{ji} + \alpha_i b_{ij} = -c_{ji} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik} c_{jk},$$

o que é equivalente a

$$b_{ij} = \frac{1}{\alpha_i} \left( -2c_{ji} + c_{j1} a_{i1} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^s a_{ik} c_{jk} + \sum_{k=s+1}^n a_{ik} c_{jk} \right).$$

Denotando

$$\delta_j = c_{j1} \quad \text{e} \quad \gamma_{jk} = c_{jk}$$

para  $j = s + 1, \dots, n$  e  $k = 2, \dots, s$ , e

$$\beta_{jk} = c_{jk},$$

para  $j, k = s + 1, \dots, n$ , completamos a caracterização da matriz  $H$  de acordo com (2.22). □

Podemos deduzir informações importantes do teorema anterior. Primeiro, fixados  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , com  $i \neq j$ , obtemos todas as  $s$ -uplas  $(\psi_{1_b}, \dots, \psi_{s_b})$  equivalentes a  $(\psi_{1_a}, \dots, \psi_{s_a})$ . E mais, obtemos uma ferramenta para a construção das  $s$ -uplas equivalentes com cada entrada na forma (2.18), bastando escolher  $\alpha_j \neq 0$ , para  $j = 2, \dots, s$ , escolher  $\beta$ 's de forma que a matriz  $(\beta_{ij})_{n-s \times n-s}$  seja inversível e escolher arbitrariamente  $\delta$ 's e  $\gamma$ 's.

**Observação 2.27.** Pela demonstração do teorema anterior, concluímos que podemos sempre considerar uma conjugação linear para as uplas lineares, se estas forem equivalentes.

Nas duas próximas subseções, utilizamos o Teorema 2.26 para deduzir as formas normais para os pares de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , com  $n \geq 2$ . Consequentemente, pelo Teorema 2.20, determinamos também as classes dos diagramas divergentes de dobras associados a esses pares de involuções.

Mais especificamente, sabendo que duas uplas de involuções são equivalentes se, e somente se, pertencem à mesma classe, a forma normal para uma dada classe é o seu representante “mais simples” segundo a relação de equivalência adotada.

Observamos que as formas normais para o caso em que  $G_2 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  é transversal e  $\Lambda_2 = [\varphi_1, \varphi_2]$  é um grupo abeliano já foram obtidas no Teorema 2.24, mesmo para  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  não lineares. Entretanto, nas duas próximas subseções reafirmamos tal resultado apenas para que a classificação esteja completa. Será possível perceber que o caso abeliano aparece naturalmente no procedimento adotado para deduzir as formas normais.

### 2.3.1 Caso $s = n = 2$

Nesta subseção, classificamos as  $s$ -uplas de involuções lineares e transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  no caso em que  $s = n = 2$ , com base na Seção 6 da referência [17].

Considere os pares de involuções  $(\psi_{1_a}, \psi_{2_a})$  e  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$ , onde

$$\psi_{1_a}(x, y) = (-x, a_{12}x + y) \quad \text{e} \quad \psi_{2_a}(x, y) = (x + a_{21}y, -y) \quad (2.25)$$

e

$$\psi_{1_b}(x, y) = (-x, b_{12}x + y) \quad \text{e} \quad \psi_{2_b}(x, y) = (x + b_{21}y, -y), \quad (2.26)$$

com  $a_{12}, a_{21}, b_{12}, b_{21} \in \mathbb{R}$ . Pelo Teorema 2.26,  $(\psi_{1_a}, \psi_{2_a})$  é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$  se, e somente se, existe uma matriz inversível

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

em que  $\alpha \neq 0$  satisfaz

$$b_{12} = \alpha a_{12} \quad \text{e} \quad b_{21} = \frac{1}{\alpha} a_{21}. \quad (2.28)$$

Observe que existe uma relação biunívoca entre os pares  $(\psi_{1_a}, \psi_{2_a})$  e  $(a_{12}, a_{21}) \in \mathbb{R}^2$ , analogamente entre  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$  e  $(b_{12}, b_{21}) \in \mathbb{R}^2$ . Para facilitar nossa notação, vamos trabalhar em  $\mathbb{R}^2$  segundo a seguinte relação de equivalência:  $(a_{12}, a_{21})$  é equivalente a  $(b_{12}, b_{21})$  se, e somente se,  $(\psi_{1_a}, \psi_{2_a})$  e  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$  são equivalentes. Denote por  $\mathcal{K}(a_{12}, a_{21})$  a classe de equivalência de  $(a_{12}, a_{21})$ . Vamos dividir a análise em quatro casos:

- i)  $a_{12} = a_{21} = 0$ ;
- ii)  $a_{12} = 0$  e  $a_{21} \neq 0$ ;
- iii)  $a_{12} \neq 0$  e  $a_{21} = 0$ ;
- iv)  $a_{12} \neq 0$  e  $a_{21} \neq 0$ .

Para o que segue, utilizamos as igualdades em (2.28).

(i) Se  $a_{12} = 0 = a_{21}$ , então  $b_{12} = 0 = b_{21}$  e, portanto,  $\mathcal{K}(a_{12}, a_{21}) = \{(0, 0)\}$ .

(ii) Se  $a_{12} = 0$  e  $a_{21} \neq 0$ , então  $b_{12} = 0$  e  $b_{21} = \frac{1}{\alpha} a_{21} \neq 0$ . Dada a arbitrariedade de  $\alpha$  temos

$$\mathcal{K}(a_{12}, a_{21}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0 \text{ e } y \neq 0\},$$

o que descreve o eixo  $Oy$  menos a origem.

(iii) De modo análogo ao caso anterior, se  $a_{12} \neq 0$  e  $a_{21} = 0$ , temos que  $b_{12} = \alpha a_{12} \neq 0$  e  $b_{21} = 0$ . Logo,

$$\mathcal{K}(a_{12}, a_{21}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0 \text{ e } y = 0\},$$

o que descreve o eixo  $Ox$  menos a origem.

(iv) Suponha que  $a_{12} \neq 0 \neq a_{21}$ . Neste caso,  $(b_{12}, b_{21}) = \left(\alpha a_{12}, \frac{1}{\alpha} a_{21}\right)$ , com  $b_{12}, b_{21} \neq 0$ . Tomando  $\beta = \alpha a_{12}$ , obtemos

$$\mathcal{K}(a_{12}, a_{21}) = \left\{ \left( \beta, \frac{a_{12}a_{21}}{\beta} \right), \beta \neq 0 \right\}, \quad (2.29)$$

o que descreve uma hipérbole em  $\mathbb{R}^2$ .

Com relação à base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , temos

$$\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -a_{21} \\ a_{12} & a_{12}a_{21} - 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Logo,

$$\text{tr}(\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a}) = a_{12}a_{21} - 2. \quad (2.31)$$

Assim, o conjunto (2.29) pode ser reescrito como

$$\mathcal{K}(a_{12}, a_{21}) = \left\{ \left( \beta, \frac{\text{tr}(\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a}) + 2}{\beta} \right); \beta \neq 0 \right\}.$$

As conclusões para cada caso estão ilustradas na Figura 2.1, onde podemos verificar uma partição do plano. Veja que cada órbita determina ou somente a origem, ou um eixo menos a origem ou uma hipérbole. Por essa razão, vamos considerar os seguintes representantes de cada órbita:

$$\begin{cases} (0, 0), & \text{se } a_{12} = a_{21} = 0 \\ (1, 0), & \text{se } a_{12} \neq 0 = a_{21} \\ (\text{tr}(\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a}) + 2, 1), & \text{se } a_{21} \neq 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Ressaltamos que é possível considerar  $(\text{tr}(\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a}) + 2, 1)$  como um representante do caso em que  $a_{12} = 0$  e  $a_{21} \neq 0$ , pois neste caso  $\text{tr}(\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a}) + 2 = a_{12}a_{21} = 0$ , o que está de acordo com o item (ii).

O próximo resultado nos mostra que a origem corresponde ao caso abeliano.

**Proposição 2.28.** *As involuções  $\psi_{1_a}$  e  $\psi_{2_a}$  comutam se, e somente se,  $a_{12} = 0 = a_{21}$ .*

*Demonstração.* Por (2.25) temos que se  $a_{12} = 0 = a_{21}$ , então  $\psi_{1_a}$  e  $\psi_{2_a}$  têm representações diagonais e, portanto, comutam. Suponha agora que o grupo  $[\psi_{1_a}, \psi_{2_a}]$  seja abeliano. Para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$(\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a})(x, y) = \psi_{1_a}(x + a_{21}y, -y) = (-x - a_{21}y, a_{12}(x + a_{21}y) - y)$$

e

$$(\psi_{2_a} \circ \psi_{1_a})(x, y) = \psi_{2_a}(-x, a_{12}x + y) = (-x + a_{21}(a_{12}x + y), -a_{12}x - y).$$

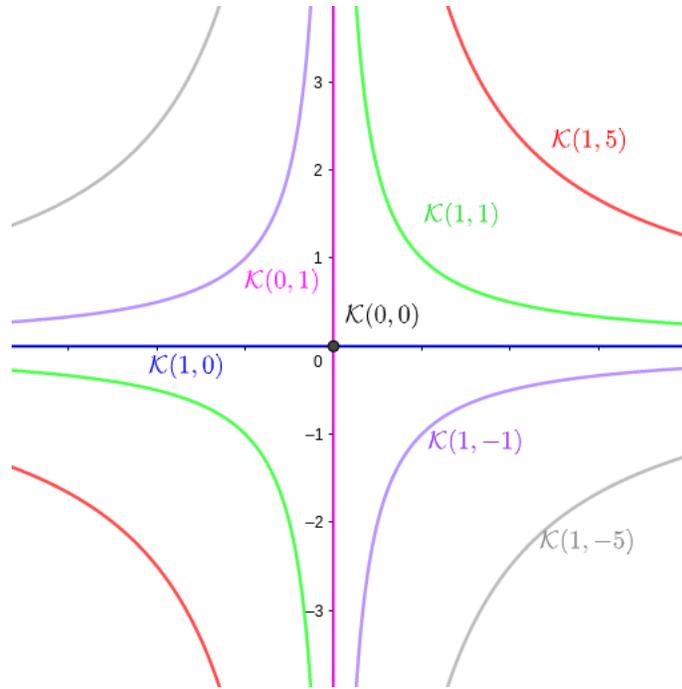


Figura 2.1: Decomposição do plano em classes de equivalência.

Da hipótese de comutatividade obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -x + a_{21}(a_{12}x + y) = -x - a_{21}y \\ a_{12}(x + a_{21}y) - y = -a_{12}x - y \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} a_{21}(a_{12}x + 2y) = 0 \\ a_{12}(2x + a_{21}y) = 0 \end{cases} ,$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Considerando  $x = 1$  e  $y = 0$  obtemos  $a_{12} = 0$ , e considerando  $x = 0$  e  $y = 1$  obtemos  $a_{21} = 0$ , donde segue o resultado. □

Assim, de acordo com a proposição anterior, podemos dividir a nossa análise em três partes: o caso abeliano, o caso não abeliano com  $a_{21} = 0$  e o caso não abeliano com  $a_{21} \neq 0$ . Vamos primeiramente determinar uma forma equivalente de dizer que  $a_{21} = 0$ . Veja que

$$(\psi_{2_a} - Id_2)(x, y) = (x + a_{21}y, -y) - (x, y) = (a_{21}y, -2y) = y(a_{21}, -2),$$

ou seja,  $\text{Im}(\psi_{2_a} - Id_2) = [(a_{21}, -2)]$ . Além disso,  $(x, y) \in \text{Fix}(\psi_{1_a})$  se, e somente se,  $(-x, a_{12}x + y) = (x, y)$ , o que ocorre se, e somente se,  $x = 0$ . Logo,  $\text{Fix}(\psi_{1_a}) = [(0, 1)]$ .

Portanto,

$$\text{Fix}(\psi_{1_a}) = \text{Im}(\psi_{2_a} - Id_2)$$

se, e somente se,  $a_{21} = 0$ .

Para dar continuidade à nossa discussão vamos caracterizar, de um modo mais geral, a imagem de  $\psi_{2_a} - Id_2$ .

**Proposição 2.29.** *Dada uma involução linear  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  temos que*

$$\text{Im}(\varphi - Id_n) = \mathcal{A}(\varphi),$$

onde  $\mathcal{A}(\varphi)$  é o subespaço antipodal de  $\varphi$ .

*Demonstração.* Se  $y \in \text{Im}(\varphi - Id)$ , então  $y = \varphi(x) - x$ , para algum  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ . Logo,

$$\varphi(y) = \varphi(\varphi(x) - x) = \varphi(\varphi(x)) - \varphi(x) = x - \varphi(x) = -y$$

e, assim,  $y \in \mathcal{A}(\varphi)$ . Reciprocamente, seja  $y \in \mathcal{A}(\varphi)$ . Seja  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$x = \varphi(y) = -y.$$

Então  $\varphi(x) = \varphi^2(y) = y$ . Além disso, para  $z = \frac{1}{2}x$  temos

$$(\varphi - Id_n)(z) = \varphi(z) - z = \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = y,$$

o que implica que  $y \in \text{Im}(\varphi - Id_n)$ . Portanto,  $\text{Im}(\varphi - Id_n) = \mathcal{A}(\varphi)$ . □

Assim, de acordo com a proposição anterior temos que

$$\text{Fix}(\psi_{1_a}) = \mathcal{A}(\psi_{2_a}) \tag{2.33}$$

se, e somente se,  $a_{21} = 0$ . Ainda com o intuito de substituir a condição  $a_{21} = 0$ , mostramos que a igualdade (2.33) é invariante por equivalência linear.

**Proposição 2.30.** *Sejam  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\phi_1, \phi_2)$  pares de involuções lineares linearmente equivalentes em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Então,  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$  se, e somente se,  $\text{Fix}(\phi_1) = \mathcal{A}(\phi_2)$ .*

*Demonstração.* Por definição, existe um germe de um difeomorfismo linear  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\phi_i = h \circ \varphi_i \circ h^{-1},$$

para  $i = 1, 2$ . Pela Proposição 1.15, temos que  $\text{Fix}(\phi_i) = h(\text{Fix}(\varphi_i))$ , para  $i = 1, 2$ . Suponha que  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$ . Para mostrar que  $\text{Fix}(\phi_1) = \mathcal{A}(\phi_2)$  é suficiente mostrar que  $h(\mathcal{A}(\varphi_2)) = \mathcal{A}(\phi_2)$ , pois neste caso

$$\text{Fix}(\phi_1) = h(\text{Fix}(\varphi_1)) = h(\mathcal{A}(\varphi_2)) = \mathcal{A}(\phi_2).$$

Considere então  $y \in \mathcal{A}(\varphi_2)$ . Segue que

$$\phi_2(h(y)) = h \circ \varphi_2 \circ h^{-1}(h(y)) = h \circ \varphi_2(y) = h(-y) = -h(y).$$

Assim,  $h(y) \in \mathcal{A}(\phi_2)$  e, portanto,  $h(\mathcal{A}(\varphi_2)) \subset \mathcal{A}(\phi_2)$ . Reciprocamente, se  $y \in \mathcal{A}(\phi_2)$ , temos

$$\varphi_2(h^{-1}(y)) = h^{-1}(\phi_2(y)) = h^{-1}(-y) = -h^{-1}(y).$$

Logo,  $h^{-1}(y) \in \mathcal{A}(\varphi_2)$ , ou seja,  $h^{-1}(\mathcal{A}(\phi_2)) \subset \mathcal{A}(\varphi_2)$ , donde concluímos que  $\mathcal{A}(\phi_2) \subset h(\mathcal{A}(\varphi_2))$ . Portanto,  $h(\mathcal{A}(\varphi_2)) = \mathcal{A}(\phi_2)$ . Reciprocamente, se  $\text{Fix}(\phi_1) = \mathcal{A}(\phi_2)$ , então

$$\text{Fix}(\varphi_1) = h^{-1}(\text{Fix}(\phi_1)) = h^{-1}(\mathcal{A}(\phi_2)) = \mathcal{A}(\varphi_2),$$

o que prova o resultado. □

Assim, a proposição anterior é fundamental para a classificação que apresentamos a seguir. De fato, pela Proposição 2.22 todo par  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de involuções lineares transversais é linearmente equivalente a  $(\psi_{1_a}, \psi_{2_a})$ , com  $\psi_{1_a}$  e  $\psi_{2_a}$  como em (2.25). Pela proposição anterior,  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$  se, e somente se,  $\text{Fix}(\psi_{1_a}) = \mathcal{A}(\psi_{2_a})$ , o que ocorre se, e somente se,  $a_{21} = 0$ . Portanto, a igualdade  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$  é um invariante equivalente a  $a_{21} = 0$ . Sendo assim, estamos aptos a enunciar um dos principais resultados deste capítulo.

**Teorema 2.31.** *Seja  $(\varphi_1, \varphi_2)$  um par de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  e considere o grupo  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$ .*

(i) *Se  $\Lambda$  for abeliano, então  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente ao par  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ ,*

$$\varphi_1^0(x, y) = (-x, y) \quad e \quad \varphi_2^0(x, y) = (x, -y). \quad (2.34)$$

(ii) *Se  $\Lambda$  não for abeliano e  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$ , então  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente ao par  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde*

$$\overline{\psi}_1(x, y) = (-x, x + y) \quad e \quad \overline{\psi}_2(x, y) = (x, -y). \quad (2.35)$$

(iii) Se  $\Lambda$  não for abeliano e  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$ , então  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente ao par  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde

$$\overline{\psi}_1(x, y) = (-x, (\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) + 2)x + y) \quad e \quad \overline{\psi}_2(x, y) = (x + y, -y). \quad (2.36)$$

*Demonstração.* O item (i) segue diretamente do Teorema 2.24 para o caso  $s = 2$ . Suponha que  $\Lambda$  não seja abeliano. Pela Proposição 2.22, temos que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\psi_{1_a}, \psi_{2_a})$  em que

$$\psi_{1_a}(x, y) = (-x, a_{12}x + y) \quad e \quad \psi_{2_a}(x, y) = (x + a_{21}y, -y),$$

com  $a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R}$ . Se  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$ , segue pela Proposição 2.30 que  $\text{Fix}(\psi_{1_a}) = \mathcal{A}(\psi_{2_a})$  o que equivale a  $a_{21} = 0$ . Pela Proposição 2.28, como  $\Lambda$  é não abeliano, segue que  $a_{12} \neq 0$ . De acordo com (2.32), temos  $(1, 0)$  como um representante da classe de equivalência de  $(a_{12}, a_{21})$ . Portanto,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde

$$\overline{\psi}_1(x, y) = (-x, x + y) \quad e \quad \overline{\psi}_2(x, y) = (x, -y),$$

o que prova o item (ii). Se  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$ , segue da Proposição 2.30 que  $\text{Fix}(\psi_{1_a}) \neq \mathcal{A}(\psi_{2_a})$ . Neste caso,  $a_{21} \neq 0$  e  $(\text{tr}(\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a}) + 2, 1)$  é um representante da classe de equivalência de  $(a_{12}, a_{21})$ , de acordo com (2.32). Como o traço é um invariante por equivalência, temos que

$$(\text{tr}(\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a}) + 2, 1) = (\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) + 2, 1),$$

donde segue que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , com

$$\overline{\psi}_1(x, y) = (-x, (\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) + 2)x + y) \quad e \quad \overline{\psi}_2(x, y) = (x + y, -y),$$

o que prova o item (iii). □

Observe que o Teorema 2.31 não garante que dois pares de involuções lineares  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\phi_1, \phi_2)$  são equivalentes se  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $\text{Fix}(\phi_1) \neq \mathcal{A}(\phi_2)$ . Para ver isso, basta considerar involuções tais que  $\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) \neq \text{tr}(\phi_1 \circ \phi_2)$ , visto que  $(\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) + 2, 1)$  e  $(\text{tr}(\phi_1 \circ \phi_2) + 2, 1)$  são representantes das classes de equivalência para cada par. Neste caso, o traço da composição identifica as classes de involuções, como vemos na demonstração do próximo corolário.

**Corolário 2.32.** *Sejam  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  pares de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  tais que  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $\text{Fix}(\tilde{\varphi}_1) \neq \mathcal{A}(\tilde{\varphi}_2)$ . Então,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  se, e somente se, as composições  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  e  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$  são conjugadas.*

*Demonstração.* Suponha que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  seja equivalente a  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ . Logo, existe um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\tilde{\varphi}_1 = h \circ \varphi_1 \circ h^{-1} \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi}_2 = h \circ \varphi_2 \circ h^{-1}.$$

Assim,

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2 = (h \circ \varphi_1 \circ h^{-1}) \circ (h \circ \varphi_2 \circ h^{-1}) = h \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ h^{-1},$$

donde segue que  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  e  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$  são conjugadas. Reciprocamente, suponha que  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  seja conjugada a  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$ . Logo,  $\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \text{tr}(\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2)$ . Como  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $\text{Fix}(\tilde{\varphi}_1) \neq \mathcal{A}(\tilde{\varphi}_2)$ , temos pelo teorema anterior que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  são equivalentes a, respectivamente,  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$  e  $(\overline{\psi}'_1, \overline{\psi}'_2)$  definidos por

$$\overline{\psi}_1(x, y) = (-x, (2 + \text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2))x + y) \quad \text{e} \quad \overline{\psi}_2(x, y) = (x + y, -y)$$

e

$$\overline{\psi}'_1(x, y) = (-x, (2 + \text{tr}(\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2))x + y) \quad \text{e} \quad \overline{\psi}'_2(x, y) = (x + y, -y).$$

Como  $\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \text{tr}(\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2)$ , segue que  $\overline{\psi}_i = \overline{\psi}'_i$ , para  $i = 1, 2$ . Portanto,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  são equivalentes. □

Mais geralmente, dadas duas  $s$ -uplas  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$  e  $(\psi_1, \dots, \psi_s)$  equivalentes, temos que  $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_s$  é conjugada a  $\tilde{\varphi}_1 \circ \dots \circ \tilde{\varphi}_s$ . A verificação desta afirmação segue de maneira similar ao feito no corolário anterior. Vejamos no próximo exemplo que o resultado não é válido se as hipóteses  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $\text{Fix}(\tilde{\varphi}_1) \neq \mathcal{A}(\tilde{\varphi}_2)$  não forem assumidas.

**Exemplo 2.33.** Considere as involuções  $\psi_{1_a}, \psi_{2_a}, \psi_{1_b}, \psi_{2_b} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  dadas em (2.25) e (2.26), onde  $a_{12} = 0$ ,  $a_{21} = -1$ ,  $b_{12} = 1$  e  $b_{21} = 0$ . Como  $\mathcal{K}(0, -1) \cap \mathcal{K}(1, 0) = \emptyset$ , segue que  $(\psi_{1_a}, \psi_{2_a})$  não é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$ . No entanto,  $\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a}$  e  $\psi_{1_b} \circ \psi_{2_b}$  são conjugadas. De fato, em termos matriciais

$$\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\psi_{1_b} \circ \psi_{2_b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considerando o difeomorfismo linear  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  tal que

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = h^{-1},$$

temos que

$$\begin{aligned}
 h \circ \psi_{1_a} \circ \psi_{2_a} \circ h^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \psi_{1_b} \circ \psi_{2_b},
 \end{aligned}$$

implicando que  $\psi_{1_a} \circ \psi_{2_a}$  e  $\psi_{1_b} \circ \psi_{2_b}$  são conjugadas. Observe que, neste exemplo,

$$\text{Fix}(\psi_{1_a}) = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\} \neq \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{A}(\psi_{2_a}),$$

porém

$$\text{Fix}(\psi_{1_b}) = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{A}(\psi_{2_b}).$$

Os dois próximos resultados nos mostram que no Corolário 2.32 as hipóteses  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $\text{Fix}(\tilde{\varphi}_1) \neq \mathcal{A}(\tilde{\varphi}_2)$  podem ser substituídas por  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $\text{Fix}(\tilde{\varphi}_1) = \mathcal{A}(\tilde{\varphi}_2)$ , ou ainda pela condição de que o grupo  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$  é abeliano.

**Corolário 2.34.** *Sejam  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  pares de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  tais que  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$  é abeliano. Então,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  se, e somente se,  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  e  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$  são conjugadas.*

*Demonstração.* A condição necessária para  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ser equivalente a  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  segue exatamente como na primeira parte da demonstração do Corolário 2.32. Resta então mostrar a condição suficiente. Suponha que

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 = h \circ \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2 \circ h^{-1},$$

para algum germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ . Assim,  $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ h = h \circ \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$ . Como  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são involuções, segue que  $h = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ h \circ \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$ . Logo, como  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  comutam e  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$  também são involuções, temos

$$\begin{aligned}
 h \circ \tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1 &= \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ h \circ \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1 \\
 &= \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ h \\
 &= \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ h \circ \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2 \\
 &= h \circ \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{\varphi}_1$ , donde segue que  $\tilde{\Lambda} = [\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2]$  também é abeliano. Pelo item (i) do Teorema 2.31,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  são ambos equivalentes a  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$  e, portanto,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  são equivalentes entre si.  $\square$

**Corolário 2.35.** *Sejam  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  pares de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  tais que  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$  não é abeliano. Se  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $\text{Fix}(\tilde{\varphi}_1) = \mathcal{A}(\tilde{\varphi}_2)$ , então  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  se, e somente se,  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  e  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$  são conjugadas.*

*Demonstração.* Novamente, nos resta mostrar apenas a recíproca. Pela demonstração do corolário anterior, como  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$  não é abeliano, então  $\tilde{\Lambda} = [\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2]$  também não é abeliano. Pelo item (ii) do Teorema 2.31, tanto  $(\varphi_1, \varphi_2)$  quanto  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  são equivalentes a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde  $\overline{\psi}_1$  e  $\overline{\psi}_2$  são definidas como em (2.35). Portanto,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ .  $\square$

Com a classificação dos pares de involuções apresentada no Teorema 2.31 podemos, via a relação entre as involuções e as dobras, obter uma classificação dos diagramas divergentes de dobras associados aos pares de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ .

**Teorema 2.36.** *Seja  $(f_1, f_2) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, 0)$  um diagrama divergente de dobras associado ao par  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ . Considere o grupo  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$ .*

(i) *Se  $\Lambda$  for abeliano, então  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(f_1^0, f_2^0)$ , onde*

$$f_1^0(x, y) = (x^2, y) \quad e \quad f_2^0(x, y) = (x, y^2).$$

(ii) *Se  $\Lambda$  não for abeliano e  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$ , então  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$ , onde*

$$g_1(x, y) = \left( x^2, \frac{1}{2}x + y \right) \quad e \quad g_2(x, y) = (x, y^2).$$

(iii) *Se  $\Lambda$  não for abeliano e  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$ , então  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$ , onde*

$$g_1(x, y) = \left( x^2, \left( 1 + \frac{1}{2}\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) \right) x + y \right) \quad e \quad g_2(x, y) = \left( x + \frac{1}{2}y, y^2 \right).$$

*Demonstração.* Pela Proposição 2.23 no caso  $s = 2$ , temos que todo diagrama divergente de dobras  $(f_1, f_2)$  associado a  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente ao diagrama divergente de dobras  $(g_1, g_2)$  associado a  $(\psi_1, \psi_2)$ , onde

$$g_1(x, y) = \left( x^2, \frac{a_{12}}{2}x + y \right) \quad e \quad g_2(x, y) = \left( x + \frac{a_{21}}{2}y, y^2 \right), \quad (2.37)$$

para  $a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R}$  dados de acordo com as involuções

$$\psi_1(x, y) = (-x, a_{12}x + y) \quad \text{e} \quad \psi_2(x, y) = (x + a_{21}y, -y). \quad (2.38)$$

Mais ainda, pela demonstração da Proposição 2.23, os pares  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\psi_1, \psi_2)$  devem estar na mesma classe de equivalência.

Suponha que  $\Lambda$  seja um grupo abeliano. Pelo item (i) do Teorema 2.31,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ , para  $\varphi_1^0$  e  $\varphi_2^0$  dadas em (2.34). Logo, podemos considerar  $a_{12} = a_{21} = 0$  em (2.38) e, conseqüentemente, em (2.37). Neste caso,  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(f_1^0, f_2^0)$ , onde

$$f_1^0(x, y) = (x^2, y) \quad \text{e} \quad f_2^0(x, y) = (x, y^2).$$

Suponha agora que  $\Lambda$  seja um grupo não abeliano. Se  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$ , segue pelo item (ii) de Teorema 2.31 que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$ , com  $\bar{\psi}_1$  e  $\bar{\psi}_2$  dadas em (2.35). Neste caso, podemos considerar  $a_{12} = 1$  e  $a_{21} = 0$  em (2.38) a fim de obter que  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$ , onde

$$g_1(x, y) = (x^2, \frac{1}{2}x + y) \quad \text{e} \quad g_2(x, y) = (x, y^2).$$

Se  $\text{Fix}(\varphi) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$ , utilizamos o item (iii) do Teorema 2.31, o que nos permite considerar  $a_{12} = \text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) + 2$  e  $a_{21} = 1$  em (2.38). Logo,  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$ , onde

$$g_1(x, y) = \left( x^2, \left( 1 + \frac{1}{2} \text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) \right) x + y \right) \quad \text{e} \quad g_2(x, y) = \left( x + \frac{1}{2}y, y^2 \right),$$

o que conclui a prova. □

**Corolário 2.37.** *Sejam  $(f_1, f_2)$  e  $(g_1, g_2)$  diagramas divergentes de dobras associados, respectivamente, aos pares de involuções lineares e transversais  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ . Suponha que qualquer uma das seguintes hipóteses seja satisfeita:*

(i)  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$  é abeliano;

(ii)  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$  não é abeliano,  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $\text{Fix}(\tilde{\varphi}_1) = \mathcal{A}(\tilde{\varphi}_2)$ ;

(iii)  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$  não é abeliano,  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $\text{Fix}(\tilde{\varphi}_1) \neq \mathcal{A}(\tilde{\varphi}_2)$ .

Então,  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$  se, e somente se,  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  e  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$  são conjugadas.

*Demonstração.* Segue do Teorema 2.20 que  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$  se, e somente se,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ . Agora, o resultado segue utilizando os Corolários 2.32, 2.34 e 2.35. □

### 2.3.2 Casos $s = 2$ e $n \geq 3$

Nesta subseção, generalizamos o Teorema 2.31 para o caso em que  $n \geq 3$ . Para isso, seguimos a mesma abordagem da subseção anterior, com base na Seção 7 da referência [17]. A saber, consideramos os pares de involuções lineares transversais  $(\psi_{1_a}, \psi_{2_a})$ , com  $\psi_{1_a}$  e  $\psi_{2_a}$  como no Teorema 2.26, e analisamos os possíveis valores dos coeficientes  $a_{ij}$ 's, para  $i = 1, 2$  e  $1 \leq j \leq n$ ,  $j \neq i$ . Em seguida, procuramos um invariante por equivalência que nos permita separar nossa análise em classes.

Por simplicidade, em toda esta subseção,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  denotam as involuções lineares  $\psi_{1_a}$  e  $\psi_{2_a}$ , respectivamente, definidas em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , ou seja,

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2 + a_{12}x_1, x_3 + a_{13}x_1, \dots, x_n + a_{1n}x_1) \quad (2.39)$$

e

$$\psi_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + a_{21}x_2, -x_2, x_3 + a_{23}x_2, \dots, x_n + a_{2n}x_2), \quad (2.40)$$

com  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , para  $i = 1, 2$  e  $1 \leq j \leq n$ ,  $j \neq i$ .

Iniciamos generalizando a igualdade (2.31) e a Proposição 2.28 para  $n \geq 3$ .

**Proposição 2.38.** *Considere o par  $(\psi_1, \psi_2)$  de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ ,  $n \geq 3$ . Então,*

$$a_{12}a_{21} = 4 - n + \text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2).$$

Além disso, o grupo  $\Lambda = [\psi_1, \psi_2]$  é abeliano se, e somente se,  $a_{12} = 0 = a_{21}$ .

*Demonstração.* Em termos matriciais,

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} A & 0_{2 \times n-2} \\ \hline X & I_{n-2} \end{array} \right),$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{14} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & 0 \end{pmatrix},$$

$0_{2 \times n-2}$  é a matriz nula de ordem  $2 \times n - 2$  e  $I_{n-2}$  representa a matriz identidade de ordem

$n - 2$ . De modo análogo,

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{23} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} B & 0_{2 \times n-2} \\ \hline Y & I_{n-2} \end{array} \right),$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{24} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\psi_1 \circ \psi_2 = \left( \begin{array}{c|c} A & 0_{2 \times n-2} \\ \hline X & I_{n-2} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} B & 0_{2 \times n-2} \\ \hline Y & I_{n-2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} AB & 0_{2 \times n-2} \\ \hline XB + Y & I_{n-2} \end{array} \right). \quad (2.41)$$

Logo,  $\text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(I_{n-2}) = \text{tr}(AB) + n - 2$ . Como

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -a_{21} \\ a_{12} & a_{12}a_{21} - 1 \end{pmatrix},$$

temos  $\text{tr}(AB) = -2 + a_{12}a_{21}$ . Portanto,

$$\text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2) = -2 + a_{12}a_{21} + n - 2,$$

donde segue que

$$a_{12}a_{21} = 4 - n + \text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2).$$

Para a segunda parte da demonstração observe que as matrizes  $A$  e  $B$  definidas anteriormente são exatamente as representações matriciais das involuções  $\psi_{1_a}$  e  $\psi_{2_a}$  definidas em (2.25) para o caso  $n = 2$ . Observe também que

$$\psi_2 \circ \psi_1 = \left( \begin{array}{c|c} B & 0_{2 \times n-2} \\ \hline Y & I_{n-2} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A & 0_{2 \times n-2} \\ \hline X & I_{n-2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} BA & 0_{2 \times n-2} \\ \hline X + YA & I_{n-2} \end{array} \right). \quad (2.42)$$

Se  $\Lambda = [\psi_1, \psi_2]$  for abeliano, então segue de (2.41) e (2.42) que  $AB = BA$ . Pela Proposição 2.28,  $a_{12} = 0 = a_{21}$ . Reciprocamente, se  $a_{12} = 0 = a_{21}$ , novamente pela Proposição 2.28 concluímos que  $AB = BA$ . Veja que

$$XB + Y = \begin{pmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{14} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{24} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{14} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{24} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \end{pmatrix}$$

e

$$YA + X = \begin{pmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{24} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{14} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{24} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{14} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Como  $AB = BA$ , obtemos de (2.41) e (2.42) que  $\psi_1 \circ \psi_2 = \psi_2 \circ \psi_1$  e, portanto,  $\Lambda = [\psi_1, \psi_2]$  é abeliano.

□

**Proposição 2.39.** *Considere o par  $(\psi_1, \psi_2)$  de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ ,  $n \geq 3$ , tal que  $\Lambda = [\psi_1, \psi_2]$  é não abeliano, isto é,  $a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$ .*

(i) *Suponha que  $a_{12}a_{21} \neq 4$ . Se  $a_{21} = 0$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde*

$$\overline{\psi}_1(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (2.43)$$

e

$$\overline{\psi}_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1, -x_2, x_3, \dots, x_n). \quad (2.44)$$

*Se  $a_{21} \neq 0$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde*

$$\overline{\psi}_1(x_1, \dots, \psi_2) = (-x_1, (4 - n + \text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2))x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (2.45)$$

e

$$\overline{\psi}_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, -x_2, x_3, \dots, x_n). \quad (2.46)$$

(ii) *Suponha que  $a_{12}a_{21} = 4$ . Se  $(a_{23}, \dots, a_{2n}) = \frac{-a_{21}}{2}(a_{13}, \dots, a_{1n})$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde*

$$\overline{\psi}_1(x_1, \dots, \psi_2) = (-x_1, 4x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (2.47)$$

e

$$\overline{\psi}_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, -x_2, x_3, \dots, x_n). \quad (2.48)$$

*Se  $(a_{23}, \dots, a_{2n}) \neq \frac{-a_{21}}{2}(a_{13}, \dots, a_{1n})$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde*

$$\overline{\psi}_1(x_1, \dots, \psi_2) = (-x_1, 4x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (2.49)$$

e

$$\overline{\psi}_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, -x_2, x_2 + x_3, x_4, \dots, x_n). \quad (2.50)$$

*Demonstração.* Considere  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$  o par de involuções transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  definidas por

$$\psi_{1_b}(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2 + b_{12}x_1, \dots, x_n + b_{1n}x_1) \quad (2.51)$$

e

$$\psi_{2_b}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + b_{21}x_2, -x_2, x_3 + b_{23}x_2, \dots, x_n + b_{2n}x_2), \quad (2.52)$$

com  $b_{ij} \in \mathbb{R}$ . Pelo Teorema 2.26,  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$  se, e somente se, existe uma matriz inversível com entradas reais

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_3 & \gamma_3 & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_n & \gamma_n & \beta_{n3} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

tal que

$$b_{12} = \alpha a_{12} \quad \text{e} \quad b_{21} = \frac{1}{\alpha} a_{21}, \quad (2.53)$$

com  $\alpha \neq 0$ . Além disso, para  $3 \leq j \leq n$ , temos

$$b_{1j} = -2\delta_j + \gamma_j a_{12} + \sum_{k=3}^n \beta_{jk} a_{1k} \quad \text{e} \quad b_{2j} = \frac{1}{\alpha} \left( \delta_j a_{21} + -2\gamma_j + \sum_{k=3}^n \beta_{jk} a_{2k} \right). \quad (2.54)$$

Para cada  $\alpha \neq 0$ , defina o operador linear  $L_\alpha : \mathbb{R}^{2n-4} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$  por

$$L_\alpha(x_3, \dots, x_n, y_3, \dots, y_n) = \left( -2x_3 + a_{12}y_3, \dots, -2x_n + a_{12}y_n, \frac{1}{\alpha}(a_{21}x_3 - 2y_3), \dots, \frac{1}{\alpha}(a_{21}x_n - 2y_n) \right),$$

para todo  $(x_3, \dots, x_n, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n-4}$ . Mostremos que  $L_\alpha$  é um isomorfismo linear se, e somente se,  $a_{12}a_{21} \neq 4$ . De fato, em termos matriciais

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 & 0 & \cdots & a_{12} \\ \frac{1}{\alpha} a_{21} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} a_{21} & \cdots & 0 & 0 & -\frac{2}{\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha} a_{21} & 0 & 0 & \cdots & -\frac{2}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

onde cada bloco diagonal tem ordem  $n - 2$ . Observe que as colunas de  $L_\alpha$  são linearmente dependentes se, e somente se, existe um  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tal que

$$\begin{cases} -2\lambda = a_{12} \\ \left(\frac{1}{\alpha}a_{21}\right)\lambda = -\frac{2}{\alpha} \end{cases} .$$

Tal sistema admite solução se, e somente se,

$$-\frac{2}{a_{21}} = \lambda = -\frac{a_{12}}{2},$$

isto é,  $a_{12}a_{21} = 4$ . Portanto,  $L_\alpha$  é um isomorfismo se, e somente se,  $a_{12}a_{21} \neq 4$ , como queríamos demonstrar. Agora observe que, sendo  $H$  uma matriz inversível, a matriz

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{33} & \cdots & \beta_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n3} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

também é inversível e, portanto,  $\beta$  define um isomorfismo linear em  $\mathbb{R}^{n-2}$ . Denote por  $v_{\alpha\beta}$  o vetor

$$v_{\alpha\beta} = \left( \beta(a_{13}, \dots, a_{1n}), \frac{1}{\alpha}\beta(a_{23}, \dots, a_{2n}) \right) \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2} \cong \mathbb{R}^{2n-4}$$

e considere

$$A_{\alpha\beta} = T_{v_{\alpha\beta}} \circ L_\alpha,$$

onde  $T_{v_{\alpha\beta}} : \mathbb{R}^{2n-4} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$  é a translação na direção  $v_{\alpha\beta}$ . Temos que

$$\begin{aligned} \text{Im}(A_{\alpha\beta}) &= \{z = A_{\alpha\beta}(x, y) \in \mathbb{R}^{2n-4}; (x, y) \in \mathbb{R}^{2n-4}\} \\ &= \{z = T_{v_{\alpha\beta}}(L_\alpha(x, y)) \in \mathbb{R}^{2n-4}; (x, y) \in \mathbb{R}^{2n-4}\} \\ &= \{z = L_\alpha(x, y) + v_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{2n-4}; (x, y) \in \mathbb{R}^{2n-4}\}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

para  $(x, y) = (x_3, \dots, x_n, y_3, \dots, y_n)$ . Denote por  $z_j$  a  $j$ -ésima coordenada de  $z = L_\alpha(x, y) + v_{\alpha\beta}$ , ou seja,

$$z_j = -2x_{j+2} + y_{j+2}a_{12} + \sum_{k=3}^n \beta_{j+2,k}a_{1k}$$

para todo  $j = 1, \dots, n - 2$  e

$$z_j = \frac{1}{\alpha} \left( x_{j-n+4}a_{21} + -2y_{j-n+4} + \sum_{k=3}^n \beta_{j-n+4,k}a_{2k} \right),$$

para todo  $j = n - 1, \dots, 2n - 4$ . Nesta notação, de acordo com (2.53) e (2.54), temos que  $(\psi_1, \psi_2)$  e  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$  são equivalentes se, e somente se,

$$(b_{12}, b_{21}) = \left( \alpha a_{12}, \frac{1}{\alpha} a_{21} \right) \quad \text{e} \quad (b_{13}, \dots, b_{1n}, b_{23}, \dots, b_{2n}) \in \text{Im}(A_{\alpha\beta}), \quad (2.57)$$

para algum  $\alpha \neq 0$ .

Vamos agora estudar todos os tipos de órbitas dos pares  $(\psi_1, \psi_2)$ , analisando primeiro o caso  $a_{12}a_{21} \neq 4$  e depois o caso  $a_{12}a_{21} = 4$ .

- (i) Suponha que  $a_{12}a_{21} \neq 4$ . Neste caso,  $\text{Im}(A_{\alpha\beta}) = \mathbb{R}^{2n-4}$ , pois as aplicações  $T_{v_{\alpha\beta}}$  e  $L_\alpha$  são bijeções. Logo, para todo  $\alpha \neq 0$  e qualquer isomorfismo  $\beta$ , temos  $(b_{13}, \dots, b_{1n}, b_{23}, \dots, b_{2n}) \in \text{Im}(A_{\alpha\beta})$ . Portanto,  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$  se, e somente se,  $(b_{12}, b_{21}) = \left(\alpha a_{12}, \frac{1}{\alpha} a_{21}\right)$ , de acordo com (2.57).

Se  $a_{21} = 0$ , como  $a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$ , podemos tomar  $\alpha = \frac{1}{a_{12}} \neq 0$  de modo que

$$\alpha a_{12} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\alpha} a_{21} = 0.$$

Logo, concluímos que  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$  se, e somente se,

$$(b_{12}, b_{21}) = (1, 0).$$

Sendo  $(b_{13}, \dots, b_{1n}, b_{23}, \dots, b_{2n})$  arbitrário, podemos considerá-lo como o vetor nulo de  $\mathbb{R}^{2n-4}$ . Neste caso, temos que as involuções  $\psi_{1_b}$  e  $\psi_{2_b}$  definidas em (2.51) e (2.52) são da forma

$$\overline{\psi_1}(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n)$$

e

$$\overline{\psi_2}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, -x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Portanto,  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2})$ , com  $\overline{\psi_1}$  e  $\overline{\psi_2}$  definidas como em (2.43) e (2.44), o que prova a primeira parte do item (i).

De maneira análoga, se  $a_{21} \neq 0$ , podemos tomar  $\alpha = a_{21} \neq 0$  de modo que

$$(b_{12}, b_{21}) = (a_{12}a_{21}, 1) = (4 - n + \text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2), 1),$$

onde a última igualdade segue da Proposição 2.38. Considerando novamente

$$(b_{13}, \dots, b_{1n}, b_{23}, \dots, b_{2n}) = (0, \dots, 0),$$

concluímos que  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$ , com  $\psi_{1_b} = \overline{\psi_1}$  e  $\psi_{2_b} = \overline{\psi_2}$  dadas como em (2.45) e (2.46), respectivamente.

- (ii) Suponha que  $a_{12}a_{21} = 4$ . Neste caso,  $L_\alpha$  não é uma bijeção e as  $n - 2$  últimas linhas da matriz de  $L_\alpha$  dada em (2.55) são múltiplas por  $-\frac{a_{21}}{2\alpha}$  das  $n - 2$  primeiras. Claramente,

as  $n - 2$  primeiras linhas de  $L_\alpha$  formam um conjunto linearmente independente. Logo,  $\dim(\text{Im}(L_\alpha)) = n - 2$  e  $\text{Im}(L_\alpha)$  é gerada por

$$\{(-2, 0, \dots, 0, a_{12}, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, -2, 0, 0, \dots, a_{12})\}. \quad (2.58)$$

Deste modo,  $(x_1, \dots, x_{2n-4}) \in \text{Im}(L_\alpha)$  se, e somente se,

$$-\frac{a_{21}}{2\alpha}(x_1, \dots, x_{n-2}) = (x_{n-1}, \dots, x_{2n-4}). \quad (2.59)$$

Assim,

$$v_{\alpha\beta} = \left( \beta(a_{13}, \dots, a_{1n}), \frac{1}{\alpha}\beta(a_{23}, \dots, a_{2n}) \right) \in \text{Im}(L_\alpha)$$

se, e somente se,

$$-\frac{a_{21}}{2\alpha}\beta(a_{13}, \dots, a_{1n}) = \frac{1}{\alpha}\beta(a_{23}, \dots, a_{2n}). \quad (2.60)$$

Como  $\beta$  é um isomorfismo linear e  $\alpha \neq 0$ , a igualdade (2.60) é equivalente a

$$-\frac{a_{21}}{2}(a_{13}, \dots, a_{1n}) = (a_{23}, \dots, a_{2n}). \quad (2.61)$$

Portanto,  $v_{\alpha\beta} \in \text{Im}(L_\alpha)$  se, e somente se, vale (2.61).

Suponha que  $-\frac{a_{21}}{2}(a_{13}, \dots, a_{1n}) = (a_{23}, \dots, a_{2n})$ . Então,  $v_{\alpha\beta} \in \text{Im}(L_\alpha)$  e, de acordo com (2.56), temos

$$\text{Im}(A_{\alpha\beta}) = \text{Im}(L_\alpha).$$

Assim,  $(0, \dots, 0) \in \text{Im}(A_{\alpha\beta})$  e, fazendo a mesma análise do caso anterior, podemos considerar  $\alpha = a_{21} \neq 0$  em (2.57) de modo que

$$(b_{12}, b_{21}) = (a_{12}a_{21}, 1) = (4, 1) \quad \text{e} \quad (b_{13}, \dots, b_{1n}, b_{23}, \dots, b_{2n}) = (0, \dots, 0).$$

Portanto,  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$ , com  $\psi_{1_b} = \overline{\psi_1}$  e  $\psi_{2_b} = \overline{\psi_2}$  definidas como em (2.47) e (2.48), respectivamente. Isto prova a primeira parte do item (ii).

Suponha agora que  $-\frac{a_{21}}{2}(a_{13}, \dots, a_{1n}) \neq (a_{23}, \dots, a_{2n})$ , ou seja,  $v_{\alpha\beta} \notin \text{Im}(L_\alpha)$ . Temos que

$$\bigcup_{\beta \in \mathbf{Gl}(n-2)} \text{Im}(A_{\alpha\beta}) = \mathbb{R}^{2n-4} \setminus \text{Im}(L_\alpha), \quad (2.62)$$

onde  $\mathbf{Gl}(n - 2)$  denota o grupo das matrizes inversíveis de ordem  $n - 2$ . De fato, seja  $z \in \text{Im}(A_{\alpha\beta})$ , para  $\beta \in \mathbf{Gl}(n - 2)$  arbitrário. Então,

$$z = L_\alpha(s) + v_{\alpha\beta},$$

para algum  $s \in \mathbb{R}^{2n-4}$ . Veja que  $z \notin \text{Im}(L_\alpha)$ , pois caso contrário,

$$v_{\alpha\beta} = L_\alpha(s) + v_{\alpha\beta} - L_\alpha(s) = z - L_\alpha(s) \in \text{Im}(L_\alpha).$$

Deste modo,  $\text{Im}(A_{\alpha\beta}) \subset \mathbb{R}^{2n-4} \setminus \text{Im}(L_\alpha)$ , para qualquer isomorfismo  $\beta$ , donde segue a primeira inclusão. Reciprocamente, seja  $u = (u_1, \dots, u_{2n-4}) \in \mathbb{R}^{2n-4} \setminus \text{Im}(L_\alpha)$ . Segue de (2.59) que

$$(u_{n-1}, \dots, u_{2n-4}) + \frac{a_{21}}{2\alpha}(u_1, \dots, u_{n-2}) \neq (0, \dots, 0).$$

Como  $(a_{23}, \dots, a_{2n}) + \frac{a_{21}}{2}(a_{13}, \dots, a_{1n}) \neq (0, \dots, 0)$ , podemos definir um isomorfismo  $\beta$  em  $\mathbb{R}^{n-2}$  tal que

$$\frac{1}{\alpha}\beta\left((a_{23}, \dots, a_{2n}) + \frac{a_{21}}{2}(a_{13}, \dots, a_{1n})\right) = (u_{n-1}, \dots, u_{2n-4}) + \frac{a_{21}}{2\alpha}(u_1, \dots, u_{n-2})$$

e, portanto,

$$(u_{n-1}, \dots, u_{2n-4}) - \frac{1}{\alpha}\beta(a_{23}, \dots, a_{2n}) = -\frac{a_{21}}{2\alpha}\left((u_1, \dots, u_{n-2}) - \beta(a_{13}, \dots, a_{1n})\right).$$

Nestas condições,  $u - v_{\alpha\beta} \in \text{Im}(L_\alpha)$ . Por (2.56) segue que  $u \in \text{Im}(A_{\alpha\beta})$ , o que prova (2.62). De (2.58), observamos que  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \notin \text{Im}(L_\alpha)$ , onde 1 está na posição  $n-1$ . Portanto,  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \text{Im}(A_{\alpha\beta})$  para algum isomorfismo  $\beta$ . Neste caso, tomando novamente  $\alpha = a_{21} \neq 0$ , podemos considerar em (2.57)

$$(b_{12}, b_{21}) = (a_{12}a_{21}, 1) = (4, 1) \quad \text{e} \quad (b_{13}, \dots, b_{1n}, b_{23}, \dots, b_{2n}) = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

de modo que  $b_{23} = 1$ . Portanto,  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\psi_{1_b}, \psi_{2_b})$ , com  $\psi_{1_b} = \overline{\psi_1}$  e  $\psi_{2_b} = \overline{\psi_2}$  definidas em (2.49) e (2.50), respectivamente.

□

Queremos agora fazer alguns ajustes para suprimir os  $a_{ij}$ 's na classificação dos pares da forma  $(\psi_1, \psi_2)$ . Veja que a condição  $a_{12}a_{21} = 4$  pode ser substituída por  $\text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2) = n$ , visto que

$$a_{12}a_{21} = 4 - n + \text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2).$$

Também vamos substituir no caso em que  $a_{12}a_{21} = 4$  a condição

$$-\frac{a_{21}}{2}(a_{13}, \dots, a_{1n}) = (a_{23}, \dots, a_{2n}) \tag{2.63}$$

por  $\mathcal{A}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$ . Com efeito, considere  $\psi_1$  e  $\psi_2$  definidos em (2.39) e (2.40), respectivamente. Veja que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\psi_1) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0); x_j + a_{1j}x_1 = -x_j, j = 2, \dots, n\} \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0); x_j = -\frac{a_{1j}}{2}x_1, j = 2, \dots, n \right\} \\ &= \left\{ \left( x_1, -\frac{a_{12}}{2}x_1, \dots, -\frac{a_{1n}}{2}x_1 \right); x_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[ \left( 1, -\frac{a_{12}}{2}, \dots, -\frac{a_{1n}}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\psi_2) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0); x_j + a_{2j}x_2 = -x_j, j = 1, \dots, n, j \neq 2\} \\
&= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0); x_j = -\frac{a_{2j}}{2}x_2, j = 1, \dots, n, j \neq 2 \right\} \\
&= \left\{ \left( -\frac{a_{21}}{2}x_2, x_2, \dots, -\frac{a_{2n}}{2}x_2 \right); x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left[ \left( -\frac{a_{21}}{2}, 1, \dots, -\frac{a_{2n}}{2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Assim,  $\mathcal{A}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$  se, e somente se, existe  $\alpha \neq 0$  tal que

$$\alpha \left( 1, -\frac{a_{12}}{2}, -\frac{a_{13}}{2}, \dots, -\frac{a_{1n}}{2} \right) = \left( -\frac{a_{21}}{2}, 1, -\frac{a_{23}}{2}, \dots, -\frac{a_{2n}}{2} \right).$$

O único  $\alpha$  que satisfaz a igualdade anterior é  $\alpha = -\frac{a_{21}}{2}$ , uma vez que  $a_{12}a_{21} = 4$ . Neste caso, obtemos

$$-\frac{a_{21}}{2} \left( -\frac{a_{13}}{2}, \dots, -\frac{a_{1n}}{2} \right) = \left( -\frac{a_{23}}{2}, \dots, -\frac{a_{2n}}{2} \right),$$

o que é equivalente a (2.63).

Resta apenas encontrar uma maneira equivalente de expressar  $a_{21} = 0$ . Mostremos que

$$\mathcal{A}(\psi_2) \subset \text{Fix}(\psi_1)$$

se, e somente se,  $a_{21} = 0$ . De fato, como

$$\text{Fix}(\psi_1) = \{x \in (\mathbb{R}^n, 0); x_1 = 0\},$$

segue de (2.64) que  $\mathcal{A}(\psi_2) \subset \text{Fix}(\psi_1)$  se, e somente se,  $a_{21} = 0$ .

Deste modo, podemos reescrever a Proposição 2.39 para pares arbitrários de involuções lineares transversais. Antes disso, é importante verificarmos que as condições encontradas não dependem da escolha do representante da classe. Assim, resta mostrar que a condição  $\mathcal{A}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$  para um par  $(\psi_1, \psi_2)$  de involuções lineares transversais é um invariante por conjugação linear simultânea. De fato, suponha que  $(\psi_1, \psi_2)$  seja linearmente equivalente a  $(\phi_1, \phi_2)$ . Logo, existe um germe de um difeomorfismo linear  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\psi_i = h \circ \phi_i \circ h^{-1},$$

para  $i = 1, 2$ . Seguindo os mesmos passos da demonstração da Proposição 1.15, temos que

$$h(\mathcal{A}(\phi_i)) = \mathcal{A}(\psi_i),$$

para  $i = 1, 2$ . Logo, se  $\mathcal{A}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$ , então

$$h(\mathcal{A}(\phi_1)) = \mathcal{A}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2) = h(\mathcal{A}(\phi_2)).$$

Como  $h$  é uma bijeção, segue que  $\mathcal{A}(\phi_1) = \mathcal{A}(\phi_2)$ . Reciprocamente, se  $\mathcal{A}(\phi_1) = \mathcal{A}(\phi_2)$ , então  $\mathcal{A}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$ , como queríamos demonstrar.

A demonstração do próximo resultado segue diretamente do Teorema 2.24, da Proposição 2.39 e dos invariantes que construímos.

**Teorema 2.40.** *Sejam  $(\psi_1, \psi_2)$  um par de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ ,  $n \geq 3$ , e  $\Lambda = [\psi_1, \psi_2]$ .*

(i) *Se  $\Lambda$  for abeliano, então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\psi_1^0, \psi_2^0)$ , onde*

$$\psi_1^0(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n) \quad e \quad \psi_2^0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, -x_2, x_3, \dots, x_n).$$

(ii) *Suponha que  $\Lambda$  não seja abeliano e que  $\text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2) \neq n$ . Se  $\mathcal{A}(\psi_2) \subset \text{Fix}(\psi_1)$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde  $\overline{\psi}_1$  e  $\overline{\psi}_2$  são dados em (2.43) e (2.44). Se  $\mathcal{A}(\psi_2) \not\subset \text{Fix}(\psi_1)$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde  $\overline{\psi}_1$  e  $\overline{\psi}_2$  são dados em (2.45) e (2.46).*

(iii) *Suponha que  $\Lambda$  não seja abeliano e que  $\text{tr}(\psi_1 \circ \psi_2) = n$ . Se  $\mathcal{A}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde  $\overline{\psi}_1$  e  $\overline{\psi}_2$  são dados em (2.47) e (2.48). Se  $\mathcal{A}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)$ , onde  $\overline{\psi}_1$  e  $\overline{\psi}_2$  são dados em (2.49) e (2.50).*

Para finalizar esta subseção, bem como o capítulo, usamos o teorema anterior para classificar os diagramas divergentes de dobras para  $s = 2$  e  $n \geq 3$ .

**Teorema 2.41.** *Seja  $(f_1, f_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, 0)$  um diagrama divergente de dobras associado a um par  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , com  $n \geq 3$ . Considere  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$ .*

(i) *Se  $\Lambda$  for abeliano, então  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(f_1^0, f_2^0)$ , onde*

$$f_1^0(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2, x_2, \dots, x_n) \quad e \quad f_2^0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2^2, x_3, \dots, x_n).$$

(ii) *Suponha que  $\Lambda$  não seja abeliano e que  $\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) \neq n$ . Se  $\mathcal{A}(\varphi_2) \subset \text{Fix}(\varphi_1)$ , então  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$ , onde*

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1^2, \frac{1}{2}x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n \right)$$

e

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1, x_2^2, x_3, \dots, x_n \right).$$

Se  $\mathcal{A}(\varphi_2) \not\subset \text{Fix}(\varphi_1)$ , então  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$ , onde

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1^2, \frac{1}{2}(4 - n + \text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2))x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n \right)$$

e

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1 + \frac{1}{2}x_2, x_2^2, x_3, \dots, x_n \right).$$

(iii) Suponha que  $\Lambda$  não seja abeliano e que  $\text{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = n$ . Se  $\mathcal{A}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$ , então  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$ , onde

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1^2, 2x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n \right)$$

e

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1 + \frac{1}{2}x_2, x_2^2, x_3, \dots, x_n \right).$$

Se  $\mathcal{A}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$ , então  $(f_1, f_2)$  é equivalente a  $(g_1, g_2)$ , onde  $g_1$  e  $g_2$  são dadas por

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1^2, 2x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n \right)$$

e

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1 + \frac{1}{2}x_2, x_2^2, \frac{1}{2}x_2 + x_3, x_4, \dots, x_n \right).$$

*Demonstração.* Segue de maneira similar ao Teorema 2.36 utilizando a Proposição 2.39 em vez do Teorema 2.31.

□

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# DIFEOMORFISMOS REVERSÍVEIS E RECONHECIMENTO DE SIMETRIAS

Neste capítulo, classificamos os difeomorfismos reversíveis a partir dos resultados sobre involuções que obtivemos no capítulo anterior. Determinamos também as simetrias e as simetrias reversíveis lineares para cada classe de germes de difeomorfismos. Para tanto, consideramos [3] como a referência principal do capítulo, com base nos Teoremas 2.31 e 2.40, os quais classificam pares de involuções no caso linear e transversal.

Como vimos na Seção 1.2, um germe de um difeomorfismo reversível  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  está associado a um par  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de involuções de forma que  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega$  são simetrias reversíveis de  $F$  e

$$F = \varphi_1 \circ \varphi_2. \quad (3.1)$$

Sabemos também que se os pares de involuções  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\psi_1, \psi_2)$  forem equivalentes por um difeomorfismo  $h$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , então  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$  e  $G = \psi_1 \circ \psi_2$  são conjugadas pelo mesmo  $h$  (veja o início do Capítulo 2).

Vamos supor, na maior parte deste capítulo, que os germes de difeomorfismos reversíveis são lineares e que as involuções têm subespaços de pontos fixos com codimensão 1, exceto menção do contrário. O capítulo está dividido em quatro seções. Na Seção 3.1, apresentamos propriedades sobre as involuções  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$  definidas em (1.5). Na Seção 3.2, fazemos a classificação dos difeomorfismos reversíveis e o reconhecimento de suas simetrias e simetrias reversíveis para o caso linear em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ . Na Seção 3.3, estendemos os resultados da Seção 3.2 para o caso  $n \geq 3$ . Na Seção 3.4, analisamos as órbitas dos pontos em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  com relação à dinâmica do sistema discreto gerado pelo difeomorfismo  $F$  dado em (3.1).

### 3.1 As simetrias reversíveis $\varphi_k$ e $\varphi'_k$

Nesta seção, consideramos o difeomorfismo reversível  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ , em que  $\varphi_1, \varphi_2 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  são involuções arbitrárias, e estudamos as principais propriedades das involuções

$$\varphi_k = \varphi_2 \circ F^{k-2} \quad \text{e} \quad \varphi'_k = F^{k-1} \circ \varphi_1, \quad (3.2)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Lembremos que  $\varphi'_1 = \varphi_1$ . A principal referência para o que segue é a Seção 2 de [3].

Sabemos das equações (1.7) e (1.8) que  $\varphi_k$  é, de fato, uma involução e uma simetria reversível de  $F$ . O mesmo é válido para  $\varphi'_k$ . Para facilitar a compreensão, vamos estabelecer uma notação a fim de diferenciar as aplicações definidas em (3.2) quando consideramos dois germes de difeomorfismos reversíveis  $F = \varphi_1^F \circ \varphi_2^F$  e  $G = \varphi_1^G \circ \varphi_2^G$ , com  $\varphi_i^F$  e  $\varphi_i^G$  simetrias reversíveis de  $F$  e  $G$ , respectivamente. Neste caso, denotamos

$$\varphi_k^F = \varphi_2^F \circ F^{k-2}, \quad \varphi'_k{}^F = F^{k-1} \circ \varphi_1^F, \quad (3.3)$$

$$\varphi_k^G = \varphi_2^G \circ G^{k-2}, \quad \varphi'_k{}^G = G^{k-1} \circ \varphi_1^G. \quad (3.4)$$

Na próxima proposição garantimos que se o par  $(\varphi_1^F, \varphi_2^F)$  for equivalente a  $(\varphi_1^G, \varphi_2^G)$ , então todas as involuções  $\varphi_k^F$  e  $\varphi'_k{}^F$  são conjugadas a  $\varphi_k^G$  e  $\varphi'_k{}^G$ , respectivamente.

**Proposição 3.1.** *Sejam  $F, G : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  germes de difeomorfismos reversíveis tais que  $F = \varphi_1^F \circ \varphi_2^F$  e  $G = \varphi_1^G \circ \varphi_2^G$ . Suponha que  $(\varphi_1^F, \varphi_2^F)$  e  $(\varphi_1^G, \varphi_2^G)$  sejam equivalentes. Então existe um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que*

$$\varphi_k^G = h \circ \varphi_k^F \circ h^{-1} \quad \text{e} \quad \varphi'_k{}^G = h \circ \varphi'_k{}^F \circ h^{-1},$$

para todo  $k \geq 1$ .

*Demonstração.* Como  $(\varphi_1^F, \varphi_2^F)$  é equivalente a  $(\varphi_1^G, \varphi_2^G)$ , existe um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\varphi_1^G = h \circ \varphi_1^F \circ h^{-1} \quad \text{e} \quad \varphi_2^G = h \circ \varphi_2^F \circ h^{-1}.$$

Assim,

$$G = \varphi_1^G \circ \varphi_2^G = h \circ \varphi_1^F \circ \varphi_2^F \circ h^{-1} = h \circ F \circ h^{-1}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \varphi_k^G &= \varphi_2^G \circ G^{k-2} \\ &= h \circ \varphi_2^F \circ h^{-1} \circ (h \circ F \circ h^{-1})^{k-2} \\ &= h \circ \varphi_2^F \circ h^{-1} \circ h \circ F^{k-2} \circ h^{-1} \\ &= h \circ \varphi_2^F \circ F^{k-2} \circ h^{-1} \\ &= h \circ \varphi_k^F \circ h^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi_k'^G &= G^{k-1} \circ \varphi_1^G \\
&= (h \circ F \circ h^{-1})^{k-1} \circ h \circ \varphi_1^F \circ h^{-1} \\
&= h \circ F^{k-1} \circ h^{-1} \circ h \circ \varphi_1^F \circ h^{-1} \\
&= h \circ F^{k-1} \circ \varphi_1^F \circ h^{-1} \\
&= h \circ \varphi_k'^F \circ h^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Nas Subseções 2.3.1 e 2.3.2, determinamos as formas normais dos pares de involuções lineares transversais  $(\varphi_1, \varphi_2)$  para  $n = 2$  e  $n \geq 3$ , respectivamente. Uma pergunta natural a se fazer é se é possível obter pares equivalentes a  $(\varphi_1, \varphi_2)$  a partir das involuções  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$  definidas (3.2). O seguinte lema vem no intuito de responder a essa pergunta.

**Lema 3.2.** *Seja  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um difeomorfismo reversível tal que  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ , onde  $\varphi_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  são involuções e simetrias reversíveis de  $F$ , para  $i = 1, 2$ . Então  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é equivalente a  $(\varphi_{2k+1}, \varphi_{2k+2})$  e a  $(\varphi'_{2k+1}, \varphi'_{2k+2})$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Lembremos que como  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são involuções, temos  $\varphi_1 \circ F = \varphi_2$  e  $F \circ \varphi_2 = \varphi_1$ . Dado  $k \geq 1$ , como  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são simetrias reversíveis de  $F$ , segue de (1.6) que

$$\begin{aligned}
F^{-k} \circ \varphi_1 \circ F^k &= \varphi_1 \circ F^k \circ F^k \\
&= \varphi_1 \circ F^{2k} \\
&= \varphi_1 \circ F \circ F^{2k-1} \\
&= \varphi_2 \circ F^{2k-1} \\
&= \varphi_2 \circ F^{(2k+1)-2} \\
&= \varphi_{2k+1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F^{-k} \circ \varphi_2 \circ F^k &= \varphi_2 \circ F^k \circ F^k \\
&= \varphi_2 \circ F^{2k} \\
&= \varphi_2 \circ F^{(2k+2)-2} \\
&= \varphi_{2k+2},
\end{aligned}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $F^{-k} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é um difeomorfismo que conjuga  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\varphi_{2k+1}, \varphi_{2k+2})$ . Analogamente, segue de (1.6) que

$$\begin{aligned}
F^k \circ \varphi_1 \circ F^{-k} &= F^k \circ F^k \circ \varphi_1 \\
&= F^{2k} \circ \varphi_1 \\
&= F^{(2k+1)-1} \circ \varphi_1 \\
&= \varphi'_{2k+1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F^k \circ \varphi_2 \circ F^{-k} &= F^k \circ F^k \circ \varphi_2 \\
&= F^{2k} \circ \varphi_2 \\
&= F^{2k-1} \circ F \circ \varphi_2 \\
&= F^{2k-1} \circ \varphi_1 \\
&= \varphi'_{2k}.
\end{aligned}$$

Assim,  $F^k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é um difeomorfismo que conjuga  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\varphi'_{2k+1}, \varphi'_{2k})$ . O resultado segue pela Definição 1.18. □

**Proposição 3.3.** *Nas condições do lema anterior,*

$$\varphi'_{k+2} = F \circ \varphi'_k \circ F^{-1} \quad e \quad \varphi_k = F \circ \varphi_{k+2} \circ F^{-1},$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Pela demonstração do Lema 3.2, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi'_{2k+1} &= F^k \circ \varphi_1 \circ F^{-k} \\
&= F \circ (F^{k-1} \circ \varphi_1 \circ F^{-(k-1)}) \circ F^{-1} \\
&= F \circ \varphi'_{2(k-1)+1} \circ F^{-1} \\
&= F \circ \varphi'_{(2k+1)-2} \circ F^{-1},
\end{aligned}$$

para todo  $k \geq 1$ . Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
\varphi'_{2k} &= F^k \circ \varphi_2 \circ F^{-k} \\
&= F \circ (F^{k-1} \circ \varphi_2 \circ F^{-(k-1)}) \circ F^{-1} \\
&= F \circ \varphi'_{2(k-1)} \circ F^{-1} \\
&= F \circ \varphi'_{2k-2} \circ F^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, dado  $k \in \mathbb{N}$ , seja ele par ou ímpar, temos que

$$\varphi'_{k+2} = F \circ \varphi'_k \circ F^{-1}.$$

De maneira análoga, utilizando que  $F^{-k}$  conjuga  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e  $(\varphi_{2k+1}, \varphi_{2k+2})$ , obtemos a outra igualdade da proposição. □

A proposição anterior juntamente com a Proposição 1.15 nos permite obter a dinâmica dos conjuntos de pontos fixos das involuções definidas em (3.2). Tal resultado encontra-se demonstrado em [3, Lemma 2.7] de um modo alternativo.

**Teorema 3.4.** *Seja  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um difeomorfismo reversível tal que  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ , onde  $\varphi_1, \varphi_2 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  são involuções e simetrias reversíveis de  $F$ . Considere as duas seqüências de simetrias reversíveis de  $F$  definidas em (3.2). Então*

$$F(\text{Fix}(\varphi_{k+2})) = \text{Fix}(\varphi_k) \quad e \quad F(\text{Fix}(\varphi'_k)) = \text{Fix}(\varphi'_{k+2}),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Pela proposição anterior, temos que

$$\varphi_k = F \circ \varphi_{k+2} \circ F^{-1} \quad e \quad \varphi'_{k+2} = F \circ \varphi'_k \circ F^{-1}.$$

Pela Proposição 1.15, segue que

$$F(\text{Fix}(\varphi_{k+2})) = \text{Fix}(\varphi_k) \quad e \quad F(\text{Fix}(\varphi'_k)) = \text{Fix}(\varphi'_{k+2}),$$

como queríamos demonstrar. □

Aplicando sucessivamente o teorema anterior obtemos duas cadeias de conjuntos de pontos fixos das involuções supracitadas.

**Corolário 3.5.** *Aplicando  $F$  às subvariedades de pontos fixos das involuções definidas em (3.2), obtemos as cadeias*

$$\cdots \rightarrow \text{Fix}(\varphi_{2k}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Fix}(\varphi_2) \rightarrow \text{Fix}(\varphi'_2) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Fix}(\varphi'_{2k}) \rightarrow \cdots \quad (3.5)$$

e

$$\cdots \rightarrow \text{Fix}(\varphi_{2k+1}) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Fix}(\varphi_1) \rightarrow \text{Fix}(\varphi'_3) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Fix}(\varphi'_{2k+1}) \rightarrow \cdots, \quad (3.6)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Como  $\varphi'_1 = \varphi_1$ , a cadeia (3.6) segue diretamente do Teorema 3.4. A única seqüência em (3.5) que não segue do Teorema 3.4 é

$$F(\text{Fix}(\varphi_2)) = \text{Fix}(\varphi'_2).$$

Neste caso, como  $\varphi_2$  é uma involução e  $F^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$ , temos de (3.2) que

$$\varphi'_2 = F \circ \varphi_1 = F \circ \varphi_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 = F \circ \varphi_2 \circ F^{-1}.$$

Novamente, pela Proposição 1.15, segue que  $F(\text{Fix}(\varphi_2)) = \text{Fix}(\varphi'_2)$ , como queríamos. □

Na Seção 3.4, daremos continuidade ao estudo das órbitas do sistema dinâmico discreto gerado por  $F$ . Por ora, apresentamos um corolário que será utilizado diversas vezes nas duas próximas seções.

**Corolário 3.6.** *Todas as subvariedades de pontos fixos das involuções em (3.2) com índice ímpar têm a mesma dimensão de  $\text{Fix}(\varphi_1)$ . Do mesmo modo, as subvariedades de pontos fixos das involuções em (3.2) com índice par têm a mesma dimensão de  $\text{Fix}(\varphi_2)$ .*

*Demonstração.* Segue do corolário anterior, visto que  $F$  é um difeomorfismo. □

Lembremos que no capítulo anterior a hipótese  $\text{codim Fix}(\varphi) = 1$  era recorrentemente assumida para as involuções  $\varphi$  consideradas. Neste caso, se  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$  com

$$\text{codim Fix}(\varphi_1) = \text{codim Fix}(\varphi_2) = 1,$$

segue do Corolário 3.6 que

$$\text{codim Fix}(\varphi_k) = \text{codim Fix}(\varphi'_k) = 1,$$

para todo  $k \geq 1$ . Isto será de grande valia quando estivermos calculando os conjuntos de pontos fixos das involuções lineares no plano, que neste caso são subespaços vetoriais (veja (1.10)) unidimensionais de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ .

Para finalizar a seção, vamos provar um resultado acerca dos conjuntos de simetrias e de simetrias reversíveis de um germe de um difeomorfismo.

**Proposição 3.7.** *Sejam  $F, G : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  germes de difeomorfismos reversíveis. Se  $F$  for conjugado a  $G$ , então toda simetria de  $G$  é conjugada a uma simetria de  $F$ , o mesmo valendo para as simetrias reversíveis. Mais geralmente, existe um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que*

$$\Gamma_+^G = h\Gamma_+^F h^{-1} = \{h \circ \varphi \circ h^{-1}, \text{ com } \varphi \in \Gamma_+^F\} \quad (3.7)$$

e

$$\Gamma_-^G = h\Gamma_-^F h^{-1} = \{h \circ \varphi \circ h^{-1}, \text{ com } \varphi \in \Gamma_-^F\}, \quad (3.8)$$

onde  $\Gamma_+^G$  e  $\Gamma_+^F$  representam o grupo de simetrias de  $G$  e  $F$ , respectivamente, e  $\Gamma_-^G$  e  $\Gamma_-^F$  representam o conjunto das simetrias reversíveis de  $G$  e  $F$ , respectivamente.

*Demonstração.* Como  $F$  é conjugado a  $G$ , existe um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$G = h \circ F \circ h^{-1}.$$

Veja que

$$G^{-1} = (h \circ F \circ h^{-1})^{-1} = h \circ F^{-1} \circ h^{-1}.$$

Seja  $\varphi \in \Gamma_-^F$ . Então  $F \circ \varphi = \varphi \circ F^{-1}$ , donde segue que

$$\begin{aligned} G \circ (h \circ \varphi \circ h^{-1}) &= (h \circ F \circ h^{-1}) \circ (h \circ \varphi \circ h^{-1}) \\ &= h \circ F \circ \varphi \circ h^{-1} \\ &= h \circ \varphi \circ F^{-1} \circ h^{-1} \\ &= h \circ \varphi \circ h^{-1} \circ h \circ F^{-1} \circ h^{-1} \\ &= (h \circ \varphi \circ h^{-1}) \circ G^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,  $h \circ \varphi \circ h^{-1} \in \Gamma_-^G$ . Como  $\varphi$  é arbitrário, temos  $h\Gamma_-^F h^{-1} \subset \Gamma_-^G$ . Reciprocamente, seja  $\varphi \in \Gamma_-^G$  e denote

$$\psi = h^{-1} \circ \varphi \circ h.$$

Como  $G \circ \varphi = \varphi \circ G^{-1}$ , temos

$$\begin{aligned} F \circ \psi &= F \circ h^{-1} \circ \varphi \circ h \\ &= h^{-1} \circ h \circ F \circ h^{-1} \circ \varphi \circ h \\ &= h^{-1} \circ (G \circ \varphi) \circ h \\ &= h^{-1} \circ (\varphi \circ G^{-1}) \circ h \\ &= h^{-1} \circ \varphi \circ (G^{-1} \circ h) \\ &= h^{-1} \circ \varphi \circ h \circ h^{-1} \circ (h \circ F^{-1}) \\ &= h^{-1} \circ \varphi \circ h \circ F^{-1} \\ &= \psi \circ F^{-1}, \end{aligned}$$

donde segue que  $\psi \in \Gamma_-^F$  e, portanto,  $\varphi = h \circ \psi \circ h^{-1} \in h\Gamma_-^F h^{-1}$ . Logo,  $\Gamma_-^G \subset h\Gamma_-^F h^{-1}$ , o que nos garante a igualdade (3.8). Para a igualdade (3.7) seguimos as mesmas linhas, com as devidas adaptações. □

O resultado anterior é útil no cálculo das simetrias e simetrias reversíveis de um dado difeomorfismo  $G = \psi_1 \circ \psi_2$ , na medida em que conhecemos a forma normal  $(\varphi_1, \varphi_2)$  do par de involuções  $(\psi_1, \psi_2)$  no caso linear e transversal (veja os Teoremas 2.31 e 2.40). Assim, como  $G$  é conjugado a  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ , que *a priori* admite uma forma mais simples, é possível obter o grupo  $\Gamma_+^G$  e o conjunto  $\Gamma_-^G$  a partir das simetrias e simetrias reversíveis de  $F$ , respectivamente. Por esse motivo, nas duas próximas seções nos restringimos ao cálculo do grupo  $\Gamma_+$  das simetrias e do conjunto  $\Gamma_-$  das simetrias reversíveis da forma normal  $F$  de um dado difeomorfismo.

## 3.2 Reconhecimento de simetrias para o caso $n = 2$

Nesta seção, utilizamos a classificação apresentada no Teorema 2.31 para reconhecer as simetrias e as simetrias reversíveis, bem como a geometria de seus subespaços de pontos fixos, de um germe de um difeomorfismo  $G = \psi_1 \circ \psi_2$  em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  no caso em que  $(\psi_1, \psi_2)$  é um par de involuções lineares e transversais no plano. Para isso, vamos seguir a abordagem e as notações apresentadas na Seção 3 de [3], trabalhando com a forma matricial das involuções e dos difeomorfismos reversíveis na base canônica de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ . Por esta razão, omitimos o símbolo de composição entre as aplicações, já que agora trabalhamos com o produto das matrizes associadas.

Como mencionamos, nossa abordagem consiste em usar a classificação dos pares de involuções do Teorema 2.31 para determinar um par de involuções  $(\varphi_1, \varphi_2)$  que é equivalente a  $(\psi_1, \psi_2)$  e, assim, obter um difeomorfismo reversível  $F = \varphi_1 \varphi_2$  que é conjugado a  $G = \psi_1 \psi_2$ . Como mostramos no início do Capítulo 2, sempre que os pares de involuções  $(\psi_1, \psi_2)$  e  $(\varphi_1, \varphi_2)$  forem equivalentes, temos  $G$  e  $F$  conjugados. Além disso, vamos determinar as simetrias e simetrias reversíveis lineares de  $F$ .

Denote por  $\Lambda = [\psi_1, \psi_2]$  o grupo gerado por  $\psi_1$  e  $\psi_2$ . Vamos dividir nossa análise em três casos:

- (i)  $\Lambda$  é abeliano;
- (ii)  $\Lambda$  é não abeliano e  $\text{Fix}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$ ;
- (iii)  $\Lambda$  é não abeliano e  $\text{Fix}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$ .

Para o que segue, denotamos por  $\Gamma_+$  e  $\Gamma_-$  os conjuntos de simetrias e simetrias reversíveis lineares de  $F = \varphi_1 \varphi_2$ , respectivamente. Posto isso, vamos à análise dos casos.

### 3.2.1 $\Lambda$ é abeliano

Pelo Teorema 2.31,  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , onde

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso,  $F = -I_2$  e, conseqüentemente,  $F^k = (-1)^k I_2$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , implicando que todo  $x \in (\mathbb{R}^2, 0)$  não nulo tem sua  $F$ -órbita periódica com período 2. Além disso, de (3.2) segue que

$$\varphi_{2k+1} = \varphi_2 F^{2k-1} = \varphi_2 (-1)^{2k-1} I_2 = -\varphi_2 = \varphi_1; \quad (3.9)$$

$$\varphi'_{2k+1} = F^{2k}\varphi_1 = (-1)^{2k}I_2\varphi_1 = \varphi_1; \quad (3.10)$$

$$\varphi_{2k} = \varphi_2 F^{2k-2} = \varphi_2 (-1)^{2(k-1)}I_2 = \varphi_2; \quad (3.11)$$

$$\varphi'_{2k} = F^{2k-1}\varphi_1 = (-1)^{2k-1}I_2\varphi_1 = -\varphi_1 = \varphi_2, \quad (3.12)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $F$  comuta com todas as matrizes, temos  $\Gamma_+ = \mathbf{GI}(2)$ . Portanto, pela equação (1.4), obtemos  $\Gamma_- = \varphi_1\Gamma_+ = \mathbf{GI}(2)$ . Além disso, é fácil ver que  $\text{Fix}(F^k) = \{(0, 0)\}$  se  $k$  for ímpar e  $\text{Fix}(F^k) = \mathbb{R}^2$  se  $k$  for par, para todo  $k \geq 1$ . Do mesmo modo, como  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são diagonais, podemos verificar facilmente que  $\text{Fix}(\varphi_1) = [(0, 1)]$  e  $\text{Fix}(\varphi_2) = [(1, 0)]$ . Pelas equações (3.9)-(3.12), concluímos que

$$\text{Fix}(\varphi_k) = \text{Fix}(\varphi'_k) = [(0, 1)] \quad \text{e} \quad \text{Fix}(\varphi_k) = \text{Fix}(\varphi'_k) = [(1, 0)],$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , ímpar e par, respectivamente.

Observe que  $\text{Fix}(\varphi_1)$  e  $\text{Fix}(\varphi_2)$  dividem o plano em quatro componentes conexas, as quais são permutadas pela ação de  $F$ , como veremos no Teorema 3.17. Resumimos as informações obtidas nesta subseção na Tabela 3.1.

$F^k$	$(-1)^k I_2$
$\varphi_k$	$\varphi_1$ se $k$ for ímpar e $\varphi_2$ se $k$ for par
$\varphi'_k$	$\varphi_1$ se $k$ for ímpar e $\varphi_2$ se $k$ for par
$\Gamma_-, \Gamma_+$	$\mathbf{GI}(2)$
$\text{Fix}(F^k)$	$\{(0, 0)\}$ se $k$ for ímpar e $\mathbb{R}^2$ se $k$ for par
$\text{Fix}(\varphi_k), \text{Fix}(\varphi'_k)$	$[(0, 1)]$ se $k$ for ímpar e $[(1, 0)]$ se $k$ for par

Tabela 3.1:  $\Lambda$  abeliano.

### 3.2.2 $\Lambda$ é não abeliano e $\text{Fix}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$

Pelo Teorema 2.31,  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , onde

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso,

$$F = \varphi_1\varphi_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ou seja,  $F = -I_2 + N$ , onde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz nilpotente de índice 2. Nestas condições,  $F^k = (-1)^k(I_2 - kN)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . De fato, para  $k = 1$  é imediato. Suponha que a igualdade seja válida para  $k \geq 1$ . Então

$$\begin{aligned} F^{k+1} &= F^k F \\ &= (-1)^k (I_2 - kN)(-I_2 + N) \\ &= (-1)^k (-I_2 + N + kN - kN^2) \\ &= (-1)^k (-I_2 + (k+1)N) \\ &= (-1)^{k+1} (I_2 - (k+1)N), \end{aligned}$$

donde segue o afirmado. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_2 F^{k-2} \\ &= \varphi_2 (-1)^{k-2} (I_2 - (k-2)N) \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-k & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k-2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi'_k &= F^{k-1} \varphi_1 \\ &= (-1)^{k-1} (I_2 - (k-1)N) \varphi_1 \\ &= (-1)^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{k-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\varphi_{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \end{pmatrix} = (-1)^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k-2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

e

$$\varphi'_{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} = (-1)^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2k & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix}.$$

Como  $\dim \text{Fix}(\varphi_k) = \dim \text{Fix}(\varphi'_k) = 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , segue que

$$\text{Fix}(\varphi_{2k}) = [(1, k-1)] \quad \text{e} \quad \text{Fix}(\varphi'_{2k}) = [(1, -k)].$$

Mostremos que  $\text{Fix}(F^{2k+1}) = \{(0, 0)\}$ , para todo  $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . De fato,  $(x, y) \in \text{Fix}(F^{2k+1})$  se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1)^{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2k-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ (2k+1)x - y \end{pmatrix},$$

o que é equivalente a  $(x, y) = (0, 0)$ . De modo análogo,  $(x, y) \in \text{Fix}(F^{2k})$  se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1)^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2kx + y \end{pmatrix},$$

o que ocorre se, e somente se,  $x = 0$ . Portanto,

$$\text{Fix}(F^{2k}) = [(0, 1)],$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Observe que

$$\varphi_{2k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (2k+1)-2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\varphi'_{2k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(2k+1) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $\dim \text{Fix}(\varphi_{2k+1}) = \dim \text{Fix}(\varphi'_{2k+1}) = 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , segue que

$$\text{Fix}(\varphi_{2k+1}) = \text{Fix}(\varphi'_{2k+1}) = [(0, 1)].$$

Resta agora reconhecer as simetrias e simetrias reversíveis lineares de  $F$ . Para isso, escreva  $A \in \Gamma_+$  como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a & -b \\ d-c & -d \end{pmatrix}$$

isto é,  $b = 0$  e  $d = a$ . Assim,

$$\Gamma_+ = \left\{ A \in \mathbf{GL}(2); A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, a \neq 0 \right\}.$$

Deste modo, por (1.4) temos

$$\Gamma_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Gamma_+ = \left\{ A \in \mathbf{GL}(2); A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix}, a \neq 0 \right\}.$$

As informações obtidas nesta subsecção estão dispostas na Tabela 3.2.

$F^k$	$(-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}, k \geq 1$
$\varphi_k$	$(-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k-2 & -1 \end{pmatrix}, k \geq 1$
$\varphi'_k$	$(-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & -1 \end{pmatrix}, k \geq 1$
$\Gamma_-$	$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$
$\Gamma_+$	$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$
$\text{Fix}(F^k)$	$\{(0, 0)\}$ se $k$ for ímpar e $[(0, 1)]$ se $k$ for par
$\text{Fix}(\varphi_k)$	$[(0, 1)]$ se $k$ for ímpar e $[(1, k-1)]$ se $k$ for par
$\text{Fix}(\varphi'_k)$	$[(0, 1)]$ se $k$ for ímpar e $[(1, -k)]$ se $k$ for par

Tabela 3.2:  $\Lambda$  não abeliano com  $\text{Fix}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$ .

### 3.2.3 $\Lambda$ é não abeliano e $\text{Fix}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$

Pelo Teorema 2.31,  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , onde

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 + \text{tr}(\psi_1\psi_2) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Deste modo, temos

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 + \text{tr}(\psi_1\psi_2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 + \text{tr}(\psi_1\psi_2) & 1 + \text{tr}(\psi_1\psi_2) \end{pmatrix},$$

com  $\text{tr}(F) = \text{tr}(\psi_1\psi_2)$ . Logo, denotando  $t = \text{tr}(F)$ , obtemos

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2+t & 1+t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ -2-t & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Observe que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_-$  se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2+t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ -2-t & -1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} -(a+c) & -(b+d) \\ a(2+t)+c(1+t) & b(2+t)+d(1+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1+t)-b(2+t) & a-b \\ c(1+t)-d(2+t) & c-d \end{pmatrix},$$

o que é equivalente a  $d = -a$  e  $c = (b-a)(t+2)$ . Logo,

$$\Gamma_- = \left\{ A \in \mathbf{GI}(2); A = \begin{pmatrix} a & b \\ (b-a)(t+2) & -a \end{pmatrix} \right\}.$$

Por (1.4), como  $\varphi_2$  é uma involução, temos

$$\Gamma_+ = \varphi_2 \Gamma_- = \left\{ A \in \mathbf{GI}(2); A = \begin{pmatrix} -a(t+1)+b(t+2) & b-a \\ (a-b)(t+2) & a \end{pmatrix} \right\}.$$

Para determinar  $F^k$  e as involuções  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$  definidas em (3.2), consideramos todas as possibilidades para  $t = \text{tr}(F)$ , que é um invariante por conjugação linear simultânea. Analisamos os casos:

(a)  $|t| = 2;$

(b)  $|t| < 2;$

(c)  $|t| > 2.$

Iniciamos com o caso (a). Suponha  $t = -2$ . Então

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 + N',$$

onde

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz nilpotente de índice 2. De maneira análoga ao feito na subseção anterior, obtemos

$$F^k = (-1)^k (I_2 - kN'),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo,

$$\varphi_k = \varphi_2 F^{k-2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (-1)^{k-2} \begin{pmatrix} 1 & (k-2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\varphi'_k = F^{k-1} \varphi_1 = (-1)^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & (k-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 1-k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Além disso,  $\text{Fix}(F^{2k+1}) = \{(0, 0)\}$ , para todo  $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . De fato,  $(x, y) \in \text{Fix}(F^{2k+1})$  se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1)^{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & 2k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - (2k+1)y \\ -y \end{pmatrix},$$

o que equivale a  $(x, y) = (0, 0)$ , donde segue que  $\text{Fix}(F^{2k+1}) = \{(0, 0)\}$ . De modo análogo,  $(x, y) \in \text{Fix}(F^{2k})$  se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1)^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2ky \\ y \end{pmatrix},$$

o que ocorre se, e somente se,  $y = 0$ . Logo,

$$\text{Fix}(F^{2k}) = [(1, 0)],$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Resta determinar os subespaços de pontos fixos de  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$ . Note que

$$(-1)^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 2k-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 1-2k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $\text{Fix}(\varphi_{2k}) = [(1, 0)] = \text{Fix}(\varphi'_{2k})$ , uma vez que tais subespaços são unidimensionais. Ainda,

$$(-1)^{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & 2k+1-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$(-1)^{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & 1-(2k+1) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix},$$

o que implica em

$$\text{Fix}(\varphi_{2k+1}) = [(-k, 1)] \quad \text{e} \quad \text{Fix}(\varphi'_{2k+1}) = [(k, 1)].$$

Podemos ver os resultados deste caso resumidos na Tabela 3.3.

$F^k$	$(-1)^k \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \geq 1$
$\varphi_k$	$(-1)^k \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, k \geq 1$
$\varphi'_k$	$(-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 1-k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, k \geq 1$
$\Gamma_-$	$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$
$\Gamma_+$	$\left\{ \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$
$\text{Fix}(F^k)$	$\{(0, 0)\}$ se $k$ for ímpar e $[(1, 0)]$ se $k$ for par
$\text{Fix}(\varphi_k)$	$[(-k, 1)]$ se $k$ for ímpar e $[(1, 0)]$ se $k$ for par
$\text{Fix}(\varphi'_k)$	$[(k, 1)]$ se $k$ for ímpar e $[(1, 0)]$ se $k$ for par

Tabela 3.3:  $\Lambda$  não abeliano com  $\text{Fix}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$  e  $t = -2$ .

Ainda no caso (a), suponha  $t = 2$ . Logo,

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = I_2 + N'',$$

onde

$$N'' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz nilpotente de índice 2. Assim,

$$F^k = I_2 + kN'' = \begin{pmatrix} 1 - 2k & -k \\ 4k & 2k + 1 \end{pmatrix},$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_2 F^{k-2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2(k-2) & -(k-2) \\ 4(k-2) & 2(k-2) + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2k-3 & k-1 \\ 4(2-k) & 3-2k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi'_k &= F^{k-1}\varphi_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2(k-1) & -(k-1) \\ 4(k-1) & 2(k-1) + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2k & 1 - k \\ 4k & 2k - 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Ainda,  $(x, y) \in \text{Fix}(F^k)$  se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2k & -k \\ 4k & 2k + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2k)x - ky \\ 4kx + (1 + 2k)y \end{pmatrix},$$

o que resulta em  $y = -2x$ . Assim,

$$\text{Fix}(F^k) = [(1, -2)],$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Resta analisar os subespaços de pontos fixos de  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$ , todos unidimensionais. Como

$$\begin{pmatrix} 2k - 3 & k - 1 \\ 4(2 - k) & 3 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - 1 \\ 4 - 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k - 1 \\ 4 - 2k \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 - 2k & 1 - k \\ 4k & 2k - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - 1 \\ -2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k - 1 \\ -2k \end{pmatrix},$$

concluimos que  $\text{Fix}(\varphi_k) = [(k - 1, 4 - 2k)]$  e  $\text{Fix}(\varphi'_k) = [(k - 1, -2k)]$ , para todo  $k \geq 1$ . Um resumo das informações obtidas para  $t = 2$  está na Tabela 3.4.

Resta analisar os casos em que  $|t| < 2$  e  $|t| > 2$ . Para isso, vamos utilizar o seguinte resultado.

**Proposição 3.8.** *Seja  $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  um difeomorfismo reversível da forma  $F = \varphi_1\varphi_2$ , onde  $\varphi_i : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  são involuções lineares com  $\text{codim } \varphi_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ . Então  $\det(F) = 1$ .*

*Demonstração.* Como vimos na demonstração da Proposição 1.17, todas as involuções lineares são diagonalizáveis com autovalores  $\pm 1$ . Como  $\dim \text{Fix}(\varphi_i) = 1$ , segue também da Proposição 1.17 que

$$\dim \mathcal{A}(\varphi_i) = 1,$$

para cada  $i = 1, 2$ . Portanto, sendo  $\text{Fix}(\varphi_i)$  e  $\mathcal{A}(\varphi_i)$  os autoespaços associados aos autovalores 1 e  $-1$  de  $\varphi_i$ , respectivamente,  $\varphi_i$  tem dois autovalores distintos 1 e  $-1$ . Logo,

$$\det(\varphi_i) = -1,$$

para cada  $i = 1, 2$ , implicando que

$$\det(F) = \det(\varphi_1) \det(\varphi_2) = 1.$$

□

$F^k$	$\begin{pmatrix} 1 - 2k & -k \\ 4k & 2k + 1 \end{pmatrix}, k \geq 1$
$\varphi_k$	$\begin{pmatrix} 2k - 3 & k - 1 \\ 8 - 4k & 3 - 2k \end{pmatrix}, k \geq 1$
$\varphi'_k$	$\begin{pmatrix} 1 - 2k & 1 - k \\ 4k & 2k - 1 \end{pmatrix}, k \geq 1$
$\Gamma_-$	$\left\{ A \in \mathbf{GL}(2); A = \begin{pmatrix} a & b \\ 4(b - a) & -a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
$\Gamma_+$	$\left\{ A \in \mathbf{GL}(2); A = \begin{pmatrix} 4b - 3a & b - a \\ 4(a - b) & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
$\text{Fix}(F^k)$	$[(1, -2)], k \geq 1$
$\text{Fix}(\varphi_k)$	$[(k - 1, 4 - 2k)], k \geq 1$
$\text{Fix}(\varphi'_k)$	$[(k - 1, -2k)], k \geq 1$

Tabela 3.4:  $\Lambda$  não abeliano com  $\text{Fix}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$  e  $t = 2$ .

Podemos facilmente generalizar o resultado anterior para o caso em que  $F$  é um difeomorfismo da forma  $F = \varphi_1 \dots \varphi_s$ , onde cada  $\varphi_i$  é uma involução linear em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ . Assim sendo, temos

$$\det(F) = \prod_{i=1}^s (-1)^{\text{codim } \varphi_i}.$$

Sabemos que o polinômio característico de uma matriz  $A$  de ordem 2 é dado por

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Assim, para um germe de um difeomorfismo linear  $F$  nas condições da proposição anterior, temos

$$p_F(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(F)\lambda + 1.$$

Como  $F = \varphi_1 \varphi_2$  em (3.14) satisfaz tais condições, seus autovalores são iguais a

$$\lambda_{\pm} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}, \quad (3.15)$$

com  $t = \text{tr}(F)$ .

Retornamos agora ao caso (b) em que  $|t| < 2$ . Pela equação (3.15),  $F$  não possui autovalores reais. De fato, os autovalores de  $F$  são dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{t \pm i\sqrt{4 - t^2}}{2}.$$

Observe que

$$|\lambda_{\pm}| = 1.$$

Assim, podemos escrever  $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$ , onde  $\theta = \arccos\left(\frac{t}{2}\right) \in (0, \pi)$ , e considerar a base  $\beta = \{I, R\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , onde

$$I = (0, -\text{sen}(\theta)) \quad \text{e} \quad R = (1, -(1 + \cos(\theta))).$$

De acordo com [9, Subseção 3.4.6], a matriz mudança de bases da base canônica  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^2$  para  $\beta$  é

$$[I]_{\beta, \gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\text{sen}(\theta) & -(1 + \cos(\theta)) \end{pmatrix},$$

com  $\cos \theta = \frac{t}{2}$  e  $\text{sen} \theta = \frac{\sqrt{4 - t^2}}{2}$ . Como  $[I]_{\gamma, \beta} = [I]_{\beta, \gamma}^{-1}$ , olhando agora para  $F$  em (3.14) como um operador linear em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , temos

$$\begin{aligned} [F]_{\beta} &= [I]_{\gamma, \beta} [F]_{\gamma} [I]_{\beta, \gamma} \\ &= \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \begin{pmatrix} -(1 + \cos(\theta)) & -1 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 + 2\cos(\theta) & 1 + 2\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\text{sen}(\theta) & -(1 + \cos(\theta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\cos(\theta) + 1}{\text{sen}(\theta)} & -\frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\text{sen}(\theta) & -(1 + \cos(\theta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De modo análogo, para a involução  $\varphi_1$  dada em (3.13), temos

$$\begin{aligned} [\varphi_1]_{\beta} &= [I]_{\gamma, \beta} [\varphi_1]_{\gamma} [I]_{\beta, \gamma} \\ &= \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \begin{pmatrix} -(1 + \cos(\theta)) & -1 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 + 2\cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\text{sen}(\theta) & -(1 + \cos(\theta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} [\varphi_2]_{\beta} &= [\varphi_1]_{\beta} [F]_{\beta} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainda, considerando  $\alpha = (k - 1)\theta$ , obtemos

$$\begin{aligned} [\varphi'_k]_\beta &= [F^{k-1}]_\beta [\varphi_1]_\beta \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [\varphi_k]_\beta &= [\varphi_2]_\beta [F^{k-2}]_\beta \\ &= [\varphi_2]_\beta [F^{-1}]_\beta [F^{k-1}]_\beta \\ &= [\varphi_1]_\beta [F^{k-1}]_\beta \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\text{sen}(\alpha) \\ 1 - \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\alpha) \\ 1 - \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ 1 - \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ 1 - \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

ou seja,  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$  fixam os vetores  $(-\text{sen}(\alpha), 1 - \cos(\alpha))$  e  $(\text{sen}(\alpha), 1 - \cos(\alpha))$  na base  $\beta$ , respectivamente. Como

$$[\varphi_k]_\beta = [I]_{\gamma,\beta} [\varphi_k]_\gamma [I]_{\beta,\gamma} \quad \text{e} \quad [\varphi'_k]_\beta = [I]_{\gamma,\beta} [\varphi'_k]_\gamma [I]_{\beta,\gamma},$$

segue da Proposição 1.15 que  $\dim \text{Fix}([\varphi_k]_\beta) = \dim \text{Fix}([\varphi'_k]_\beta) = 1$ , para todo  $k \geq 1$ .

Logo,

$$\text{Fix}([\varphi_k]_\beta) = [(-\text{sen}(\alpha), 1 - \cos(\alpha))|_\beta] \quad \text{e} \quad \text{Fix}([\varphi'_k]_\beta) = [(\text{sen}(\alpha), 1 - \cos(\alpha))|_\beta].$$

Voltando a analisar a dinâmica gerada por  $F$ , observe que como

$$[F]_\beta^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\text{sen}(k\theta) \\ \text{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$

é uma rotação para cada  $k \in \mathbb{N}$ , então  $[F]_\beta^k$  tem um ponto fixo não nulo se, e somente se,  $k\theta = 2\pi r$ , para algum  $r \in \mathbb{Z}$ . Isso ocorre se, e somente se,  $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ . Neste caso,  $[F]_\beta^k = I_2$  e,

$[F]_{\beta}^k$	$\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\text{sen}(k\theta) \\ \text{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$ , com $\theta = \arccos\left(\frac{t}{2}\right)$
$[\varphi_k]_{\beta}$	$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ , $\alpha = (k-1)\theta$ , $k \geq 1$
$[\varphi'_k]_{\beta}$	$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ , $\alpha = (k-1)\theta$ , $k \geq 1$
$\Gamma_-$	$\left\{ A \in \mathbf{GI}(2); A = \begin{pmatrix} a & b \\ (b-a)(t+2) & -a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
$\Gamma_+$	$\left\{ A \in \mathbf{GI}(2); A = \begin{pmatrix} -a(t+1) + b(t+2) & b-a \\ (a-b)(t+2) & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
$\text{Fix}([F]_{\beta}^k)$	$\{(0,0)\}$ se $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}^2$ caso contrário, $k \geq 1$
$\text{Fix}([\varphi_k]_{\beta})$	$[(-\text{sen}(\alpha), 1 - \cos(\alpha)) _{\beta}]$ , $k \geq 1$
$\text{Fix}([\varphi'_k]_{\beta})$	$[(\text{sen}(\alpha), 1 - \cos(\alpha)) _{\beta}]$ , $k \geq 1$

Tabela 3.5:  $\Lambda$  não abeliano com  $\text{Fix}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$  e  $|t| < 2$ .

consequentemente,  $\text{Fix}([F]_{\beta}^k) = \mathbb{R}^2$ . Todas as informações obtidas para o caso em que  $|t| < 2$  estão organizadas na Tabela 3.5.

Finalizamos esta subseção, analisando o caso (c) em que  $|t| > 2$ . Da equação (3.15) segue que  $F$  tem dois autovalores distintos  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$ . Note que  $(x, y)$  pertence ao autoespaço  $\text{Aut}(\lambda_{\pm})$  associado ao autovalor  $\lambda_{\pm}$  se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2+t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_{\pm} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Como  $\dim \text{Aut}(\lambda_{\pm}) = 1$ , então  $(x, y) \in \text{Aut}(\lambda_{\pm})$  se, e somente se,

$$-x - y = \lambda_{\pm} x,$$

isto é,

$$\text{Aut}(\lambda_{\pm}) = [(1, -1 - \lambda_{\pm})].$$

Logo, considerando a base

$$\beta' = \{(1, -1 - \lambda_+), (1, -1 - \lambda_-)\} \quad (3.17)$$

de  $\mathbb{R}^2$ , temos

$$[F]_{\beta'} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Veja que a matriz mudança de bases da base canônica  $\gamma$  para  $\beta'$  é dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 - \lambda_+ & -1 - \lambda_- \end{pmatrix}$$

cujos determinante é  $\det P = \lambda_+ - \lambda_-$ . Logo,

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} -1 - \lambda_- & -1 \\ 1 + \lambda_+ & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} [\varphi_2]_{\beta'} &= P^{-1}[\varphi_2]_{\gamma}P \\ &= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} -1 - \lambda_- & -1 \\ 1 + \lambda_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 - \lambda_+ & -1 - \lambda_- \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} \lambda_+\lambda_- - 1 & \lambda_-^2 - 1 \\ 1 - \lambda_+^2 & 1 - \lambda_+\lambda_- \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_-^2 - 1 \\ 1 - \lambda_+^2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

visto que pela Proposição 3.8,

$$\lambda_+\lambda_- = \det([F]_{\beta'}) = 1. \quad (3.18)$$

Neste caso, como  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  são não nulos, temos

$$\frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}(1 - \lambda_+^2) = \frac{1 - \lambda_+^2}{\lambda_+ - \lambda_-} = \lambda_+ \left( \frac{1 - \lambda_+^2}{\lambda_+^2 - \lambda_- \lambda_+} \right) = \lambda_+ \left( \frac{1 - \lambda_+^2}{\lambda_+^2 - 1} \right) = -\lambda_+$$

e

$$\frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}(\lambda_-^2 - 1) = \frac{\lambda_-^2 - 1}{\lambda_+ - \lambda_-} = \lambda_- \left( \frac{\lambda_-^2 - 1}{\lambda_+ \lambda_- - \lambda_-^2} \right) = \lambda_- \left( \frac{\lambda_-^2 - 1}{1 - \lambda_-^2} \right) = -\lambda_-.$$

Logo,

$$[\varphi_2]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_- \\ -\lambda_+ & 0 \end{pmatrix},$$

implicando que

$$[\varphi_1]_{\beta'} = [F]_{\beta'}[\varphi_2]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_+\lambda_- \\ -\lambda_+\lambda_- & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$[\varphi_k]_{\beta'} = [\varphi_2]_{\beta'}[F^{k-2}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_- \\ -\lambda_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^{k-2} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_-^{k-1} \\ -\lambda_+^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$[\varphi'_k]_{\beta'} = [F^{k-1}]_{\beta'}[\varphi_1]_{\beta'} = \begin{pmatrix} \lambda_+^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_+^{k-1} \\ -\lambda_-^{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando novamente (3.18), veja que

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_-^{k-1} \\ -\lambda_+^{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_+^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_+^{k-1} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_+^{k-1} \\ -\lambda_-^{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_-^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_-^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Como  $\dim \text{Fix}([\varphi_k]_{\beta'}) = \dim \text{Fix}([\varphi'_k]_{\beta'}) = 1$ , segue que

$$\text{Fix}([\varphi_k]_{\beta'}) = [(1, -\lambda_+^{k-1})_{|\beta'}] \quad \text{e} \quad \text{Fix}([\varphi'_k]_{\beta'}) = [(1, -\lambda_-^{k-1})_{|\beta'}].$$

Por fim,  $(x, y) \in \text{Fix}([F]_{\beta'}^k)$  se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} \lambda_+^k x \\ \lambda_-^k y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Se  $x \neq 0$ , temos que  $\lambda_+^k = 1$  e, portanto,  $\lambda_+ = \pm 1$ . Pela equação (3.18), segue que  $\lambda_- = \pm 1$ , o que resulta em  $\lambda_+ + \lambda_- = \pm 2$ . Mas isto é uma contradição, pois

$$2 < |\text{tr}([F]_{\gamma})| = |\text{tr}([F]_{\beta'})| = |\lambda_+ + \lambda_-| = 2.$$

Logo,  $x = 0$ . De maneira similar, obtemos que  $y = 0$ . Portanto,

$$\text{Fix}([F]_{\beta'}^k) = \{(0, 0)\}.$$

Os resultados obtidos para o caso  $|t| > 2$  estão resumidos na Tabela 3.6.

$[F]_{\beta'}^k$	$\begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix}$ , com $\lambda_+$ e $\lambda_-$ autovalores de $F$ .
$[\varphi_k]_{\beta'}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_-^{k-1} \\ -\lambda_+^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$ , $k \geq 1$
$[\varphi'_k]_{\beta'}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_+^{k-1} \\ -\lambda_-^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$ , $k \geq 1$
$\Gamma_-$	$\left\{ A \in \mathbf{GI}(2); A = \begin{pmatrix} a & b \\ (b-a)(t+2) & -a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
$\Gamma_+$	$\left\{ A \in \mathbf{GI}(2); A = \begin{pmatrix} -a(t+1) + b(t+2) & b-a \\ (a-b)(t+2) & a \end{pmatrix} \right\}$
$\text{Fix}([F]_{\beta'}^k)$	$\{(0,0)\}$ , $k \geq 1$
$\text{Fix}([\varphi_k]_{\beta'})$	$[(1, -\lambda_+^{k-1}) _{\beta'}]$ , $k \geq 1$
$\text{Fix}([\varphi'_k]_{\beta'})$	$[(1, -\lambda_-^{k-1}) _{\beta'}]$ , $k \geq 1$

Tabela 3.6:  $\Lambda$  não abeliano com  $\text{Fix}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$  e  $|t| > 2$ .

Observe nas Tabelas 3.1 a 3.6 que as matrizes em  $\Gamma_+$  e  $\Gamma_-$  estão em  $\mathbf{GI}(2)$ . A próxima proposição traz uma forma equivalente de exigir essa condição para os casos analisados nesta subseção (Tabelas 3.4, 3.5 e 3.6).

**Proposição 3.9.** *A matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ (b-a)(t+2) & -a \end{pmatrix}$$

*é inversível se, e somente se,  $a \neq b(1 + \lambda)$ , para todo autovalor  $\lambda \in \mathbb{C}$  do difeomorfismo  $F$ .*

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} \det A &= -a^2 + (ba - b^2)(t+2) \\ &= -a^2 + b(t+2)a - b^2(t+2). \end{aligned}$$

Logo,  $\det A = 0$  se, e somente se,

$$a^2 - (2+t)ba + b^2(2+t) = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(2+t)b \pm \sqrt{(2+t)^2 b^2 - 4b^2(2+t)}}{2} \\
 &= \frac{(2+t)b \pm |b|\sqrt{4+4t+t^2-4(2+t)}}{2} \\
 &= \frac{(2+t)b \pm |b|\sqrt{t^2-4}}{2} \\
 &= b \left( \frac{(2+t) \pm \operatorname{sgn}(b)\sqrt{t^2-4}}{2} \right) \\
 &= b \left( 1 + \frac{t \pm \sqrt{t^2-4}}{2} \right). \\
 &= b(1 + \lambda_{\pm}),
 \end{aligned}$$

onde  $\lambda_{\pm}$  são os autovalores de  $F$  dados em (3.15). Assim,  $\det A \neq 0$  se, e somente se,

$$a \neq b(1 + \lambda),$$

onde  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor qualquer de  $F$ .

□

### 3.3 Reconhecimento de simetrias para o caso $n \geq 3$

Nesta seção, repetimos o mesmo processo que foi feito na seção anterior, agora para o caso em que  $n \geq 3$ . Mais precisamente, utilizamos o Teorema 2.40 para reconhecer as simetrias (inclusive as reversíveis) e determinar a forma normal de um germe de um difeomorfismo  $G = \psi_1 \psi_2$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ , onde  $\psi_1, \psi_2 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  são involuções lineares e transversais, com  $n \geq 3$ . Determinada a forma normal  $F = \varphi_1 \varphi_2$  de  $G$ , encontramos as involuções  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$ ,  $k \geq 1$ , definidas como em (3.2), os seus respectivos subespaços de pontos fixos e as simetrias e simetrias reversíveis de  $F$ . Assim como na seção anterior, vamos considerar as transformações lineares em sua forma matricial e omitir o símbolo de composição entre elas. Nossa abordagem tem como principal referência a Seção 4 de [3].

Inicialmente, introduzimos o conceito de suspensões.

**Definição 3.10.** Um germe de uma aplicação  $\hat{f} : (\mathbb{R}^{n+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+l}, 0)$  é uma suspensão de  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  se

$$\hat{f}(x, y) = (f(x), y),$$

onde  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $y \in (\mathbb{R}^l, 0)$ . Mais geralmente, a  $s$ -upla  $(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_s)$ , com  $\hat{\varphi}_i : (\mathbb{R}^{n+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+l}, 0)$ , é uma suspensão de  $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ , com  $\varphi_i : (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^l, 0)$ , se  $\hat{\varphi}_i$  for uma suspensão de  $\varphi_i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ .

Segue diretamente da definição anterior que existe uma única suspensão  $\widehat{f} : (\mathbb{R}^{n+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+l}, 0)$  de um dado germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , para cada  $l \in \mathbb{N}$ . Além disso, obtemos o seguinte resultado.

**Lema 3.11.** *Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  germes de aplicações. Então,*

$$\widehat{f \circ g} = \widehat{f} \circ \widehat{g},$$

onde  $\widehat{f \circ g}$ ,  $\widehat{f}$  e  $\widehat{g}$  denotam as suspensões de  $f \circ g$ ,  $f$  e  $g$ , respectivamente, definidas em  $(\mathbb{R}^{n+l}, 0)$ .

*Demonstração.* Sejam  $\widehat{f}, \widehat{g} : (\mathbb{R}^{n+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+l}, 0)$  suspensões de  $f$  e  $g$ , respectivamente. Dados  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $y \in (\mathbb{R}^l, 0)$ , temos

$$\widehat{f} \circ \widehat{g}(x, y) = \widehat{f}(g(x), y) = (f \circ g(x), y) = \widehat{f \circ g}(x, y),$$

donde segue o resultado. □

Observe que o Lema 3.11 pode ser estendido para a composição de um número finito qualquer de germes de aplicações. Considere agora  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de um difeomorfismo tal que  $F = \varphi_1 \varphi_2$ , onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são germes de aplicações lineares. Neste caso, fixado  $l \in \mathbb{N}$ , se  $\widehat{F}$ ,  $\widehat{\varphi}_1$  e  $\widehat{\varphi}_2$  são as suspensões de  $F$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , respectivamente, então

$$\widehat{F} = \left( \begin{array}{c|c} F & 0_{n \times l} \\ \hline 0_{l \times n} & I_l \end{array} \right), \quad \widehat{\varphi}_1 = \left( \begin{array}{c|c} \varphi_1 & 0_{n \times l} \\ \hline 0_{l \times n} & I_l \end{array} \right) \quad \text{e} \quad \widehat{\varphi}_2 = \left( \begin{array}{c|c} \varphi_2 & 0_{n \times l} \\ \hline 0_{l \times n} & I_l \end{array} \right) \quad (3.19)$$

com relação à base canônica de  $(\mathbb{R}^{n+l}, 0)$ , onde  $I_l$  é a matriz identidade de ordem  $l$ .

Podemos observar no Teorema 2.40 o aparecimento de algumas suspensões das involuções apresentadas no Teorema 2.31. Por esta razão, seria útil encontrar um forma simplificada de reconhecer as simetrias e simetrias reversíveis de uma suspensão  $\widehat{F}$  a partir das de  $F$ . A próxima proposição cumpre este papel.

**Proposição 3.12.** *Sejam  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de um difeomorfismo linear e*

$$M = \left( \begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \in \mathbf{GL}(n+l) \quad (3.20)$$

uma matriz em blocos, onde  $X$  e  $W$  são matrizes quadradas de ordem  $n$  e  $l$ , respectivamente. Denote por  $\widehat{F} : (\mathbb{R}^{n+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+l}, 0)$  a suspensão de  $F$ , para  $l \in \mathbb{N}$  fixado. Então:

(i)  $M$  é uma simetria de  $\widehat{F}$  se, e somente se,  $X$  é uma simetria de  $F$  e

$$\begin{cases} FY = Y \\ ZF = Z \end{cases} . \quad (3.21)$$

(ii)  $M$  é uma simetria reversível de  $\widehat{F}$  se, e somente se,  $X$  é uma simetria reversível de  $F$  e vale (3.21).

*Demonstração.* Veja que

$$\widehat{F}M = \left( \begin{array}{c|c} F & 0_{l \times n-l} \\ \hline 0_{n-l \times l} & I_l \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} FX & FY \\ \hline Z & W \end{array} \right) \quad (3.22)$$

e

$$M\widehat{F} = \left( \begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} F & 0_{l \times n-l} \\ \hline 0_{n-l \times l} & I_l \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} XF & Y \\ \hline ZF & W \end{array} \right).$$

Assim,  $M$  é uma simetria de  $\widehat{F}$  se, e somente se,  $FX = XF$  e  $F$  satisfaz o sistema (3.21) o que prova o item (i). Como

$$\widehat{F}^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} F^{-1} & 0_{l \times n-l} \\ \hline 0_{n-l \times l} & I_l \end{array} \right)$$

e

$$M\widehat{F}^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} F^{-1} & 0_{l \times n-l} \\ \hline 0_{n-l \times l} & I_l \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} XF^{-1} & Y \\ \hline ZF^{-1} & W \end{array} \right),$$

segue de (3.22) que  $M$  é uma simetria reversível de  $\widehat{F}$  se, e somente se,  $FX = XF^{-1}$  e

$$\begin{cases} FY = Y \\ ZF^{-1} = Z \end{cases} ,$$

ou seja, se  $X$  é uma simetria reversível de  $F$  e vale (3.21), o que finaliza a prova. □

Também existe uma forma simples de reconhecer o conjunto de pontos fixos de uma suspensão  $\widehat{F}$  a partir do conjunto de pontos fixos de  $F$ .

**Proposição 3.13.** *Considere um germe de uma aplicação  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  e a suspensão  $\widehat{\varphi} : (\mathbb{R}^{n+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+l}, 0)$  de  $\varphi$ , para  $l \in \mathbb{N}$  fixado. Então*

$$\text{Fix}(\widehat{\varphi}) = \text{Fix}(\varphi) \times \mathbb{R}^l.$$

*Demonstração.* Da Definição 3.10, segue que  $(x, y) \in \text{Fix}(\widehat{\varphi})$  se, e somente se,

$$(x, y) = \widehat{\varphi}(x, y) = (\varphi(x), y),$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^l$ . Isto ocorre se, e somente se,  $x \in \text{Fix}(\varphi)$ , ou seja,  $(x, y) \in \text{Fix}(\varphi) \times \mathbb{R}^l$ . Portanto,

$$\text{Fix}(\widehat{\varphi}) = \text{Fix}(\varphi) \times \mathbb{R}^l.$$

□

Observe que se as matrizes  $Y$  e  $Z$  em (3.20) forem nulas, a condição (3.21) segue diretamente. Neste caso, teríamos que

$$M = \left( \begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$

é uma simetria (simetria reversível) de  $\widehat{F}$  se, e somente se,  $X$  é simetria (simetria reversível) de  $F$ . Contudo,  $Y$  e  $Z$  nulas podem não ser as únicas soluções de (3.21). Vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.14.** Seja  $\widehat{g} : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  definido por

$$\widehat{g}(x, y, z) = (-x - y, 4x + 3y, z).$$

Note que  $\widehat{g}$  é a suspensão de  $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  dado por  $g(x, y) = (-x - y, 4x + 3y)$ , para  $l = 1$ . Matricialmente temos

$$\widehat{g} = \left( \begin{array}{c|c} f & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Considere

$$M = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e observe que

$$\widehat{g}M = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e

$$M\widehat{g} = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Assim,  $M$  é um simetria de  $\widehat{g}$  da forma (3.20) em que  $Y$  é uma matriz não nula.

Com base na Definição 3.10, reescrevemos o Teorema 2.40.

**Teorema 3.15.** *Seja  $\widehat{G} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um difeomorfismo reversível da forma  $G = \psi_1\psi_2$ , onde  $(\psi_1, \psi_2)$  é um par de involuções lineares transversais em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ ,  $n \geq 3$ . Considere  $\Lambda = [\psi_1, \psi_2]$ . Então:*

- (i) *Se  $\Lambda$  for abeliano, então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente ao par  $(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2)$ , onde  $\widehat{\varphi}_1$  e  $\widehat{\varphi}_2$  são respectivamente as suspensões em  $(\mathbb{R}^{2+l}, 0)$  das involuções  $\varphi_1^0$  e  $\varphi_2^0$  definidas em (2.34), para  $l = n - 2$ .*
- (ii) *Se  $\Lambda$  for não abeliano,  $\text{tr}(\widehat{G}) \neq n$  e  $\mathcal{A}(\psi_2) \subset \text{Fix}(\psi_1)$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente ao par  $(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2)$ , onde  $\widehat{\varphi}_1$  e  $\widehat{\varphi}_2$  são respectivamente as suspensões em  $(\mathbb{R}^{2+l}, 0)$  das involuções  $\overline{\psi}_1$  e  $\overline{\psi}_2$  definidas em (2.35), para  $l = n - 2$ .*
- (iii) *Se  $\Lambda$  for não abeliano,  $\text{tr}(\widehat{G}) \neq n$  e  $\mathcal{A}(\psi_2) \not\subset \text{Fix}(\psi_1)$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente ao par  $(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2)$ , onde  $\widehat{\varphi}_1$  e  $\widehat{\varphi}_2$  são respectivamente as suspensões em  $(\mathbb{R}^{2+l}, 0)$  das involuções*

$$\varphi_1(x_1, x_2) = (-x_1, (4 - n + \text{tr}(\widehat{G}))x_1 + x_2) \quad e \quad \varphi_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_2), \quad (3.23)$$

para  $l = n - 2$ .

- (iv) *Se  $\Lambda$  for não abeliano,  $\text{tr}(\widehat{G}) = n$  e  $\mathcal{A}(\psi_1) = \mathcal{A}(\psi_2)$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente ao par  $(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2)$ , onde  $\widehat{\varphi}_1$  e  $\widehat{\varphi}_2$  são respectivamente as suspensões em  $(\mathbb{R}^{2+l}, 0)$  das involuções*

$$\varphi_1(x_1, x_2) = (-x_1, 4x_1 + x_2) \quad e \quad \varphi_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_2), \quad (3.24)$$

para  $l = n - 2$ .

- (v) *Se  $\Lambda$  for não abeliano,  $\text{tr}(\widehat{G}) = n$  e  $\mathcal{A}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$ , então  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente ao par  $(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2)$ , onde  $\widehat{\varphi}_1$  e  $\widehat{\varphi}_2$  são respectivamente as suspensões em  $(\mathbb{R}^{3+l}, 0)$  das involuções*

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, 4x_1 + x_2, x_3) \quad e \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, -x_2, x_2 + x_3), \quad (3.25)$$

para  $l = n - 3$ .

Observe que as involuções  $\widehat{\varphi}_1$  e  $\widehat{\varphi}_2$  descritas nos itens (iii) e (iv) do teorema anterior podem ser vistas como suspensões das involuções  $\overline{\psi}_1$  e  $\overline{\psi}_2$  definidas em (2.36), com as devidas adaptações (considerando  $n = 2$  e as variações do traço de  $F = \varphi_1\varphi_2$  em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ ).

### 3.3.1 A suspensão do caso (v)

Veja que os únicos casos de formas normais no Teorema 3.15 que não são suspensões de involuções no plano estão sob as hipóteses (v). Assim, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são como nos casos (i) – (iv) e  $\widehat{F} = \widehat{\varphi}_1 \widehat{\varphi}_2$ , então pelo Lema 3.11 temos

$$\widehat{\varphi}_k = \widehat{\varphi}_2 \widehat{F}^{k-2} \quad \text{e} \quad \widehat{\varphi}'_k = \widehat{F}^{k-1} \widehat{\varphi}_1, \quad (3.26)$$

onde  $\widehat{F}$ ,  $\widehat{\varphi}_k$  e  $\widehat{\varphi}'_k$  são as suspensões de  $F$ ,  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$  calculados na seção anterior para o caso planar. Além disso, pela Proposição 3.13 conseguimos determinar os conjuntos de pontos fixos de  $\widehat{F}$ ,  $\widehat{\varphi}'_k$  e  $\widehat{\varphi}_k$ , pois os cálculos em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  também já estão estabelecidos na seção anterior. Assim, nos casos (i) – (iv), resta apenas reconhecer as simetrias e simetrias reversíveis de  $\widehat{F}$ . Fazemos esse reconhecimento na Subseção 3.3.2. Vamos agora trabalhar com o caso (v).

Pelo Teorema 3.15,  $(\psi_1, \psi_2)$  é equivalente a  $(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2)$ , onde  $\widehat{\varphi}_1$  e  $\widehat{\varphi}_2$  são as suspensões em  $(\mathbb{R}^{3+l}, 0)$  de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  definidos em (3.25), para  $l = n - 3$ . Na forma matricial,

$$\widehat{\varphi}_1 = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0_{3 \times n-3} \\ 4 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} \end{array} \right) \quad \text{e} \quad \widehat{\varphi}_2 = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0_{3 \times n-3} \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} \end{array} \right)$$

cujos subespaços de pontos fixos são

$$\text{Fix}(\widehat{\varphi}_1) = \{(0, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0)\} \quad \text{e} \quad \text{Fix}(\widehat{\varphi}_2) = \{(x_1, 0, x_3, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0)\}.$$

Deste modo,

$$\widehat{F} = \widehat{\varphi}_1 \widehat{\varphi}_2 = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0_{3 \times n-3} \\ 4 & 3 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} \end{array} \right) = I_n + N', \quad (3.27)$$

onde

$$N' = \left( \begin{array}{ccc|c} N & & & 0_{3 \times n-3} \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & 0_{n-3} \end{array} \right) \quad \text{e} \quad N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veja que  $N$  é uma matriz nilpotente de índice 3. Logo,  $N'$  também é nilpotente de índice 3 e, portanto,

$$\widehat{F}^k = I_n + kN' + \frac{k(k-1)}{2}(N')^2, \quad (3.28)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . De fato, para  $k = 1$  obtemos (3.27). Suponha que a igualdade (3.28) seja válida para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Então

$$\begin{aligned}
\widehat{F}^{k+1} &= \widehat{F}^k \widehat{F} \\
&= \left( I_n + kN' + \frac{k(k-1)}{2} (N')^2 \right) (I_n + N') \\
&= I_n + kN' + \frac{k(k-1)}{2} (N')^2 + N' + k(N')^2 + \frac{k(k-1)}{2} (N')^3 \\
&= I_n + (k+1)N' + \left( \frac{k(k+1)}{2} \right) (N')^2 \\
&= I_n + (k+1)N' + \left( \frac{(k+1)((k+1)-1)}{2} \right) (N')^2,
\end{aligned}$$

donde segue o afirmado. Matricialmente,

$$\begin{aligned}
\widehat{F}^k &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} I_3 & & & 0_{3 \times n-3} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} & & \end{array} \right) + k \left( \begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 0 & & & \\ 4 & 2 & 0 & 0_{3 \times n-3} & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ 0_{n-3 \times 3} & & & 0_{n-3} & & \end{array} \right) + \frac{k(k-1)}{2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0_{3 \times n-3} & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ 4 & 2 & 0 & & & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & 0_{n-3} & & \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1-2k & -k & 0 & & & \\ 4k & 1+2k & 0 & 0_{3 \times n-3} & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ 2k(k-1) & k^2 & 1 & & & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} & & \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Seja  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{Fix}(\widehat{F}^k)$ . Assim,

$$\begin{cases} (1-2k)x_1 - kx_2 = x_1 \\ 4kx_1 + (1+2k)x_2 = x_2 \\ (2k^2 - 2k)x_1 + k^2x_2 + x_3 = x_3 \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} -2kx_1 - kx_2 = 0 \\ 4kx_1 + 2kx_2 = 0 \\ (2k^2 - 2k)x_1 + k^2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Como as duas primeiras linhas do sistema anterior são múltiplas, segue que  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Fix}(\widehat{F}^k)$  se, e somente se,

$$\begin{cases} 2kx_1 + kx_2 = 0 \\ (2k^2 - 2k)x_1 + k^2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Como

$$\det \begin{pmatrix} 2k & k \\ 2k^2 - 2k & k^2 \end{pmatrix} = 2k^2 \neq 0,$$

segue que  $x_1 = x_2 = 0$ . Portanto,

$$\text{Fix}(\widehat{F}^k) = \{(0, 0, x_3, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n, 0)\},$$

para todo  $k \geq 1$ . Assim,

$$\text{Fix}(\widehat{F}^k) = [e_3, \dots, e_n], \quad (3.29)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $e_i$  é  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Note que para  $i = 1, 2$  e  $j \geq 3$  temos

$$\widehat{\varphi}_i(e_j) = e_j.$$

Assim,  $[e_3, \dots, e_n] \subset \text{Fix}(\widehat{\varphi}_i)$ , para  $i = 1, 2$ , o que com a igualdade (3.29) prova que

$$[e_3, \dots, e_n] \subset \text{Fix}(\widehat{\varphi}_k) \quad \text{e} \quad [e_3, \dots, e_n] \subset \text{Fix}(\widehat{\varphi}'_k),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , visto que as definições de  $\widehat{\varphi}_k$  e  $\widehat{\varphi}'_k$  em (3.26) dependem apenas de potências de  $\widehat{F}$  e de  $\widehat{\varphi}_1$  e  $\widehat{\varphi}_2$ . Pelo Corolário 3.6, segue que

$$\dim \text{Fix}(\widehat{\varphi}_k) = \dim \text{Fix}(\widehat{\varphi}'_k) = n - 1,$$

pois  $\dim \text{Fix}(\widehat{\varphi}_i) = n - 1$ , para  $i = 1, 2$ . Com isso, basta encontrar mais um vetor em  $\text{Fix}(\widehat{\varphi}_k)$  e em  $\text{Fix}(\widehat{\varphi}'_k)$  linearmente independente com  $e_3, \dots, e_n$  para determinar tais subespaços. Cálculos diretos nos mostram que

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_k &= \widehat{\varphi}_2 \widehat{F}^{k-2} \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0_{3 \times n-3} \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 - 2(k-2) & -(k-2) & 0 & 0_{3 \times n-3} \\ 4(k-2) & 1 + 2(k-2) & 0 & \\ 2(k-2)(k-3) & (k-2)^2 & 1 & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} 2k-3 & k-1 & 0 & 0_{3 \times n-3} \\ 8-4k & 3-2k & 0 & \\ 2k^2-6k+4 & (k-1)^2 & 1 & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}'_k &= \widehat{F}^{k-1} \widehat{\varphi}_1 \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 - 2(k-1) & -(k-1) & 0 & 0_{3 \times n-3} \\ 4(k-1) & 1 + 2(k-1) & 0 & \\ 2(k-1)(k-2) & (k-1)^2 & 1 & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0_{3 \times n-3} \\ 4 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 - 2k & 1 - k & 0 & 0_{3 \times n-3} \\ 4k & 2k - 1 & 0 & \\ 2k^2 - 2k & (k-1)^2 & 1 & \\ \hline 0_{n-3 \times 3} & & & I_{n-3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Note que

$$\widehat{\varphi}_k(k-1, 4-2k, 0, \dots, 0) = (k-1, 4-2k, 0, \dots, 0)$$

e

$$\widehat{\varphi}'_k(k-1, -2k, 0, \dots, 0) = (k-1, -2k, 0, \dots, 0).$$

Logo,

$$\text{Fix}(\widehat{\varphi}_k) = [(k-1, 4-2k, 0, \dots, 0), e_3, \dots, e_n]$$

e

$$\text{Fix}(\widehat{\varphi}'_k) = [(k-1, -2k, 0, \dots, 0), e_3, \dots, e_n].$$

O grupo das simetrias e o conjunto das simetrias reversíveis de  $\widehat{F}$  em (3.27) são obtidas na próxima subseção.

### 3.3.2 Simetrias e simetrias reversíveis das suspensões

Nesta subseção, vamos utilizar a Proposição 3.12 para determinar as simetrias e as simetrias reversíveis da suspensão  $\widehat{F} = \widehat{\varphi}_1 \widehat{\varphi}_2$  em cada um dos casos (i) – (v) do Teorema 3.15. Veja que na equação (3.21) as matrizes  $Y$  e  $Z$  são caracterizadas a partir dos conjuntos de pontos fixos de  $F$  e de  $F^t$ , onde  $t$  denota a transposição de  $F$ . De fato,  $Y$  satisfaz o sistema (3.21) se, e somente se, suas colunas são pontos fixos de  $F$  e  $Z$  satisfaz o sistema (3.21) se, e somente se, suas linhas são pontos fixos de  $F^t$ . Inicialmente, apresentamos uma relação entre o conjunto de pontos fixos de  $F$  e de  $F^t$ .

**Proposição 3.16.** *Seja  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  uma transformação linear. Então  $\text{Fix}(F) = \{0\}$  se, e somente se,  $\text{Fix}(F^t) = \{0\}$ .*

*Demonstração.* Temos que  $x \in \text{Fix}(F)$  se, e somente se,  $(F - I_n)(x) = 0$ . Assim,  $\text{Fix}(F) = \{0\}$  se, e somente se,  $\det(F - I_n) \neq 0$ . Como

$$\det(F - I_n) = \det((F - I_n)^t) = \det(F^t - I_n),$$

segue que  $\det(F - I_n) \neq 0$  se, e somente se,  $\det(F^t - I_n) \neq 0$ , o que ocorre se, e somente se,  $\text{Fix}(F^t) = \{0\}$ . □

Para o que segue,  $\widehat{F}$  denota a suspensão de  $F$ . Veja que nos casos (i) e (ii) temos, respectivamente,  $F = \varphi_1^0 \varphi_2^0$  para  $\varphi_1^0$  e  $\varphi_2^0$  definidas em (2.34) e  $F = \overline{\psi}_1 \overline{\psi}_2$  para  $\overline{\psi}_1$  e  $\overline{\psi}_2$  definidas em (2.35). Em ambos os casos,  $\text{Fix}(F) = \{(0, 0)\}$  (veja Tabelas 3.1 e 3.2). No caso (iii), temos

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 - n + \text{tr}(\widehat{G}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 - n + \text{tr}(\widehat{G}) & 3 - n + \text{tr}(\widehat{G}) \end{pmatrix}.$$

Alguns cálculos nos mostram que  $\text{Fix}(F) = \{(0, 0)\}$ , uma vez que  $\text{tr}(\widehat{G}) \neq n$ . Nesses casos, pela Proposição 3.16,  $\text{Fix}(F^t) = \{(0, 0)\}$ . Logo, as únicas soluções  $Y$  e  $Z$  no sistema (3.21) são

$$Y = 0_{2 \times n-2} \quad \text{e} \quad Z = 0_{n-2 \times 2},$$

visto que as colunas de  $Y$  e as linhas de  $Z$  devem ser pontos fixos de  $F$  e de  $F^t$ , respectivamente. Pela Proposição 3.12, as simetrias de  $\widehat{F}$  são da forma

$$\left( \begin{array}{c|c} X & 0_{2 \times n-2} \\ \hline 0_{n-2 \times 2} & W \end{array} \right) \in \mathbf{GI}(n), \quad (3.30)$$

onde  $X$  é uma simetria de  $F$ . De modo análogo, as simetrias reversíveis de  $\widehat{F}$  são da forma (3.30), onde  $X$  é uma simetria reversível de  $F$ . Pela Proposição 1.1,

$$\det \left( \begin{array}{c|c} X & 0_{2 \times n-2} \\ \hline 0_{n-2 \times 2} & W \end{array} \right) = \det X \det W.$$

Assim, as matrizes em (3.30) são inversíveis se, e somente se,  $W \in \mathbf{GI}(n-2)$ , posto que toda simetria ou simetria reversível de  $F$  é inversível. Assim, para os casos (i) – (iii) o grupo  $\widehat{\Gamma}_+$  das simetrias de  $\widehat{F}$  consiste no conjunto

$$\widehat{\Gamma}_+ = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} X & 0_{2 \times n-2} \\ \hline 0_{n-2 \times 2} & W \end{array} \right); X \in \Gamma_+ \text{ e } W \in \mathbf{GI}(n-2) \right\},$$

onde  $\Gamma_+$  é o grupo de simetrias de  $F$ . Analogamente, o conjunto  $\widehat{\Gamma}_-$  das simetrias reversíveis de  $\widehat{F}$  é dado por

$$\widehat{\Gamma}_- = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} X & 0_{2 \times n-2} \\ \hline 0_{n-2 \times 2} & W \end{array} \right); X \in \Gamma_- \text{ e } W \in \mathbf{GI}(n-2) \right\},$$

onde  $\Gamma_-$  é o conjunto das simetrias reversíveis de  $F$ .

Analisamos agora o caso (iv). Neste caso, para  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  definidas em (3.24), temos

$$F = \varphi_1 \varphi_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

o qual corresponde ao difeomorfismo analisado na Subsecção 3.2.3 para  $t = 2$ . De acordo com a Tabela 3.4, temos  $\text{Fix}(F) = [(1, -2)]$ . Facilmente vemos que  $(x, y) \in \text{Fix}(F^t)$  se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}.$$

Portanto,  $\text{Fix}(F^t) = [(2, 1)]$ . Assim sendo, temos que

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ -2a_1 & \cdots & -2a_{n-2} \end{pmatrix}; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

é o conjunto das soluções  $Y$  para o sistema (3.21) e

$$L' = \left\{ \begin{pmatrix} 2b_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ 2b_{n-2} & b_{n-2} \end{pmatrix}; b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

é o conjunto das soluções  $Z$  para o sistema (3.21). Assim, pela Proposição 3.12,

$$\widehat{\Gamma}_+ = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \in \mathbf{Gl}(n); X \in \Gamma_+, Y \in L \text{ e } Z \in L' \right\}$$

e

$$\widehat{\Gamma}_- = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} X' & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \in \mathbf{Gl}(n); X' \in \Gamma_-, Y \in L \text{ e } Z \in L' \right\}$$

são, respectivamente, os conjuntos de simetrias e simetrias reversíveis de  $\widehat{F}$ , onde os conjuntos de simetrias  $\Gamma_+$  e de simetrias reversíveis  $\Gamma_-$  de  $F$  estão descritos na Tabela 3.4.

Resta analisarmos o caso (v), para  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  definidas em (3.25). Neste caso,

$$F = \varphi_1 \varphi_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos primeiramente determinar o grupo  $\Gamma_+$  de simetrias de  $F$ . Para isso, escreva

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbf{Gl}(3).$$

Cálculos diretos nos mostram que

$$FM = MF$$

se, e somente se,

$$c = f = 0, \quad d = -4b, \quad e = a - 4b \quad g = 2(b + h) \quad \text{e} \quad i = a - 2b.$$

Portanto,  $M \in \Gamma_+$  se, e somente se,

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -4b & a - 4b & 0 \\ 2(b+h) & h & a - 2b \end{pmatrix}.$$

Como  $\det M = (a - 2b)^3 \neq 0$ , devemos ter  $a \neq 2b$ . Portanto, o grupo das simetrias de  $F$  é dado por

$$\Gamma_+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -4b & a - 4b & 0 \\ 2(b+c) & c & a - 2b \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 2b \right\}. \quad (3.31)$$

Pela igualdade (1.4) e utilizando a involução  $\varphi_1$  dada em (3.25), obtemos o conjunto das simetrias reversíveis de  $F$  dado por

$$\Gamma_- = \varphi_1 \Gamma_+ = \left\{ \begin{pmatrix} -a & -b & 0 \\ 4(a-b) & a & 0 \\ 2(b+c) & c & a - 2b \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 2b \right\}. \quad (3.32)$$

Pela Proposição 3.12, as simetrias (simetrias reversíveis) de  $\widehat{F}$  são da forma

$$\left( \begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \in \mathbf{Gl}(n),$$

onde  $X \in \Gamma_+$  ( $X \in \Gamma_-$ ) e as matrizes  $Y$  e  $Z$  satisfazem o sistema (3.21). Lembremos que cada coluna de  $Y$  deve ser um ponto fixo de  $F$ . Pela equação (3.29), temos  $\text{Fix}(\widehat{F}) = [e_3, \dots, e_n]$  e pela Proposição 3.13,

$$\text{Fix}(\widehat{F}) = \text{Fix}(F) \times \mathbb{R}^{n-3}.$$

Assim,  $\text{Fix}(F) = [(0, 0, 1)]$  e, portanto,

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \cdots & a_{n-3} \end{pmatrix},$$

com  $a_1, \dots, a_{n-3} \in \mathbb{R}$ . Analogamente,  $Z$  satisfaz o sistema (3.21) se, e somente se, as linhas de  $Z$  são pontos fixos de  $F^t$ . Para que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  seja um ponto fixo de  $F^t$  devemos ter

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

o que ocorre se, e somente se,

$$x = 2y \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Logo,

$$Z = \begin{pmatrix} 2b_1 & b_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2b_{n-3} & b_{n-3} & 0 \end{pmatrix},$$

com  $b_1, \dots, b_{n-3} \in \mathbb{R}$ . Considerando

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \cdots & a_{n-3} \end{pmatrix}; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$L' = \left\{ \begin{pmatrix} 2b_1 & b_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2b_{n-3} & b_{n-3} & 0 \end{pmatrix}; b_i \in \mathbb{R} \right\},$$

temos que os conjuntos das simetrias e das simetrias reversíveis de  $\widehat{F}$  são dados, respectivamente, por

$$\widehat{\Gamma}_+ = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \in \mathbf{Gl}(n); X \in \Gamma_+, Y \in L \text{ e } Z \in L' \right\}$$

e

$$\widehat{\Gamma}_- = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \in \mathbf{Gl}(n); X \in \Gamma_-, Y \in L \text{ e } Z \in L' \right\},$$

com  $\Gamma_+$  e  $\Gamma_-$  dados em (3.31) e (3.32), respectivamente.

### 3.4 Dinâmica dos difeomorfismos reversíveis

Nesta última seção, vamos estudar as órbitas dos pontos  $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$  mediante a dinâmica do sistema dinâmico discreto gerado pelo difeomorfismo reversível  $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  da forma  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ , onde  $(\varphi_1, \varphi_2)$  é um par de involuções lineares transversais. A principal referência para este estudo são as Seções 2 e 3 de [3].

Para o que segue,  $\Gamma_-$  denota o conjunto das simetrias reversíveis de  $F$  e  $\varphi_k, \varphi'_k$  denotam as involuções em  $\Gamma_-$  definidas em (3.2), para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Também consideramos o conjunto

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^n - \bigcup_{k=1}^{\infty} (\text{Fix}(\varphi_k) \cup \text{Fix}(\varphi'_k)). \quad (3.33)$$

O motivo de considerar  $\mathcal{C}$  em nosso estudo é a sua invariância segundo a dinâmica de  $F$ , isto é,  $F$ -órbitas de elementos de  $\mathcal{C}$  estão totalmente contidas em  $\mathcal{C}$ , como mostramos no próximo resultado. Uma demonstração alternativa pode ser vista em [3, Theorem, 2.13].

**Teorema 3.17.** *Sejam  $\varphi_1, \varphi_2 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  duas involuções tais que  $\text{codim Fix}(\varphi_1) = \text{codim Fix}(\varphi_2) = 1$ . Considere  $\varphi_k, \varphi'_k \in \Gamma_-$  como em (3.2), para  $k \geq 1$ , e o conjunto  $\mathcal{C}$  em (3.33). Então  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$  permuta as componentes conexas do germe de  $\mathcal{C}$  na origem.*

*Demonstração.* Afiramos que  $F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ . De fato, seja  $y \in F(\mathcal{C})$ . Assim,  $y = F(x)$ , para algum  $x \in \mathcal{C}$ . Pelo Teorema 3.4,

$$F^{-1}(\text{Fix}(\varphi_k)) = \text{Fix}(\varphi_{k+2}) \quad \text{e} \quad F^{-1}(\text{Fix}(\varphi'_{k+2})) = \text{Fix}(\varphi'_k),$$

para todo  $k \geq 1$ . Suponha que  $y \notin \mathcal{C}$ . Logo,

$$y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (\text{Fix}(\varphi_k) \cup \text{Fix}(\varphi'_k))$$

e, portanto,  $y \in \text{Fix}(\varphi_k) \cup \text{Fix}(\varphi'_k)$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Se  $y \in \text{Fix}(\varphi_k)$ , então

$$x = F^{-1}(y) \in \text{Fix}(\varphi_{k+2}),$$

o que é um absurdo, pois  $x \in \mathcal{C}$ . Agora, se  $y \in \text{Fix}(\varphi'_k)$ , então

$$x = F^{-1}(y) \in \text{Fix}(\varphi'_{k-2}),$$

o que também é um absurdo. Logo,  $y \in \mathcal{C}$ , donde segue que  $F(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ . Analogamente, se  $x \in F^{-1}(\mathcal{C})$ , então  $x = F^{-1}(y)$ , para algum  $y \in \mathcal{C}$ . Suponha que  $x \notin \mathcal{C}$ , ou seja,

$$x \in \text{Fix}(\varphi_k) \cup \text{Fix}(\varphi'_k),$$

para algum  $k \geq 1$ . Se  $x \in \text{Fix}(\varphi_k)$ , então pelo Teorema 3.4 obtemos

$$y = F(x) \in \text{Fix}(\varphi_{k-2}),$$

o que é um absurdo, pois  $y \in \mathcal{C}$ . Se  $x \in \text{Fix}(\varphi'_k)$ , então novamente pelo Teorema 3.4 obtemos

$$y = F(x) \in \text{Fix}(\varphi'_{k+2}),$$

o que também contraria o fato de  $y$  pertencer a  $\mathcal{C}$ . Logo,  $x \in \mathcal{C}$ . Deste modo,  $F^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$  e, portanto,  $\mathcal{C} \subset F(\mathcal{C})$ , o que prova a igualdade. Neste caso,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  é um homeomorfismo, o que nos garante que se  $V \subset \mathcal{C}$  for uma componente conexa de  $\mathcal{C}$ , então  $F(V)$  também é uma componente conexa de  $\mathcal{C}$ .

□

Portanto, quando  $\text{codim Fix}(\varphi_1) = \text{codim Fix}(\varphi_2) = 1$ , as subvariedades de pontos fixos de  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$ ,  $k \geq 1$ , dividem  $(\mathbb{R}^n, 0)$  em regiões conexas as quais são permutadas por  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ .

Voltamos agora a utilizar a notação estabelecida em (3.3) e (3.4) para dois germes de difeomorfismos reversíveis  $F, G : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tais que  $F = \varphi_1^F \circ \varphi_2^F$  e  $G = \varphi_1^G \circ \varphi_2^G$ . Veremos que se  $(\varphi_1^F, \varphi_2^F)$  e  $(\varphi_1^G, \varphi_2^G)$  são pares de involuções equivalentes, então

$$\mathcal{C}^F = \mathbb{R}^n - \bigcup_{k=1}^{\infty} (\text{Fix}(\varphi_k^F) \cup \text{Fix}(\varphi'_k{}^F))$$

é difeomorfo a

$$\mathcal{C}^G = \mathbb{R}^n - \bigcup_{k=1}^{\infty} (\text{Fix}(\varphi_k^G) \cup \text{Fix}(\varphi'_k{}^G)).$$

Tal fato segue diretamente da próxima proposição.

**Proposição 3.18.** *Sejam  $F, G : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  germes de difeomorfismos reversíveis, onde  $F = \varphi_1^F \circ \varphi_2^F$  e  $G = \varphi_1^G \circ \varphi_2^G$ . Se  $(\varphi_1^F, \varphi_2^F)$  e  $(\varphi_1^G, \varphi_2^G)$  forem equivalentes, então existe um germe de um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $h(\mathcal{C}^F) = \mathcal{C}^G$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.1, como  $(\varphi_1^F, \varphi_2^F)$  e  $(\varphi_1^G, \varphi_2^G)$  são equivalentes, existe um difeomorfismo  $h$  em  $(\mathbb{R}^n, 0)$  tal que

$$\varphi_k^G = h \circ \varphi_k^F \circ h^{-1} \quad \text{e} \quad \varphi'_k{}^G = h \circ \varphi'_k{}^F \circ h^{-1},$$

para todo  $k \geq 1$ . Seja  $y \in h(\mathcal{C}^F)$ . Então, existe  $x \in \mathcal{C}^F$  tal que  $h(x) = y$ . Suponha, por absurdo, que  $y \notin \mathcal{C}^G$ . Então,  $y \in \text{Fix}(\varphi_k^G) \cup \text{Fix}(\varphi'_k{}^G)$ , para algum  $k \geq 1$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $y \in \text{Fix}(\varphi_k^G)$ . Pela Proposição 1.15, temos que

$$\text{Fix}(\varphi_k^G) = h(\text{Fix}(\varphi_k^F)).$$

Logo, existe  $x^* \in \text{Fix}(\varphi_k^F)$  tal que  $h(x^*) = y$ . Como  $h$  é injetora, obtemos  $x^* = x$ , o que é um absurdo, pois  $x \in \mathcal{C}^F$ . Portanto,  $h(\mathcal{C}^F) \subset \mathcal{C}^G$ . De maneira análoga, concluímos que  $h^{-1}(\mathcal{C}^G) \subset \mathcal{C}^F$  e, conseqüentemente,  $h(\mathcal{C}^F) = \mathcal{C}^G$ . □

Agora o nosso objetivo é estudar o comportamento dos subespaços  $\text{Fix}(\varphi_k)$  e  $\text{Fix}(\varphi'_k)$  no plano para o caso em que  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$  são involuções lineares, quando  $k$  fica arbitrariamente grande. Tal estudo tem relação com a dinâmica gerada por  $F$ , visto que pelo Teorema 3.4

$$F(\text{Fix}(\varphi_{k+2})) = \text{Fix}(\varphi_k) \quad \text{e} \quad F(\text{Fix}(\varphi'_k)) = \text{Fix}(\varphi'_{k+2}),$$

para todo  $k \geq 1$ . Assim, estudar o comportamento desses espaços para  $k$  crescente é estudar as iteradas de  $F$  e de  $F^{-1}$ . A análise que fazemos utiliza o cálculo dos conjuntos de pontos fixos apresentado na Seção 3.2 para  $n = 2$ . Por esta razão, vamos dividir a nossa análise nos mesmos casos da Seção 3.2, a saber, denotando  $F = \varphi_1\varphi_2$  e  $\Lambda = [\varphi_1, \varphi_2]$ , analisamos os seguintes casos:

- (i)  $\Lambda$  é abeliano;
- (ii)  $\Lambda$  é não abeliano e  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$ ;
- (iii)  $\Lambda$  é não abeliano e  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$ .

Iniciamos com o caso (i). De acordo com a Tabela 3.1,

$$\text{Fix}(\varphi_{2k+1}) = \text{Fix}(\varphi'_{2k+1}) = [(0, 1)] \text{ e } \text{Fix}(\varphi_{2k}) = \text{Fix}(\varphi'_{2k}) = [(1, 0)],$$

para todo  $k \geq 1$ . Assim, quando  $k$  tende ao infinito, os subespaços  $\text{Fix}(\varphi_k)$  e  $\text{Fix}(\varphi'_k)$  variam entre os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , ambos invariantes pela dinâmica gerada por  $F$ , pois  $F = -Id_2$ . Como vimos na Subseção 3.2.1, neste caso todas as  $F$ -órbitas (exceto da origem) tem período 2.

Seguimos para o caso (ii). De acordo com a Tabela 3.2, temos

$$\text{Fix}(\varphi_k) = [(0, 1)] = \text{Fix}(\varphi'_k),$$

para todo  $k \geq 1$  ímpar, e

$$\text{Fix}(\varphi_k) = [(1, k-1)] \text{ e } \text{Fix}(\varphi'_k) = [(-1, k)],$$

para todo  $k \geq 1$  par. Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1, k-1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k} \right) = (0, 1)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (-1, k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{k}, 1 \right) = (0, 1),$$

segue que os subespaços de pontos fixos  $\text{Fix}(\varphi_{2k})$  e  $\text{Fix}(\varphi'_{2k})$  se aproximam do eixo  $Oy$  quando  $k$  tende ao infinito, sendo este o subespaço de pontos fixos das involuções com índices ímpares (veja a Figura 3.1). Mais ainda, uma vez que

$$F^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

para todo  $k \geq 1$  (veja a Tabela 3.2), facilmente vemos que o eixo  $Oy$  é  $F$ -invariante e que as órbitas de todos os seus pontos não nulos tem período 2.

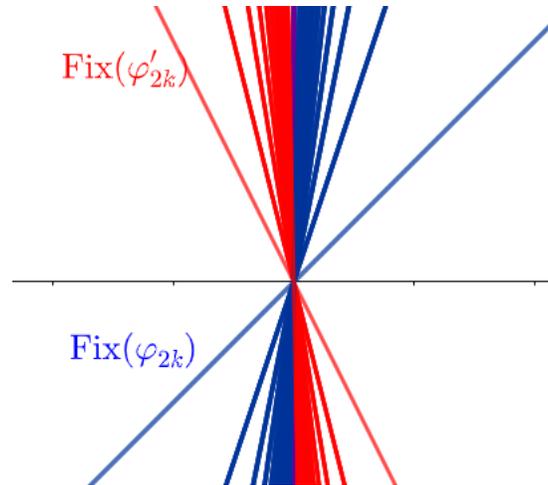


Figura 3.1:  $\Lambda$  não abeliano e  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$ .

Resta então analisarmos o comportamento dos pontos  $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é o conjunto definido em (3.33) para  $n = 2$ . Para isso, defina as retas  $r : x = x_1$  e  $s : x = -x_1$ . Por (3.34), obtemos

$$F^k(x_1, x_2) = (-1)^k(x_1, x_2 - kx_1) \in r \cup s.$$

Assim, a órbita de  $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}$  está contida no conjunto  $r \cup s$ , com alternância das retas  $r$  e  $s$  conforme fazemos  $k$  tender ao infinito. Uma ilustração dessa dinâmica é dada na Figura 3.2 para  $(x_1, x_2) = (3.1, 3.2)$ .

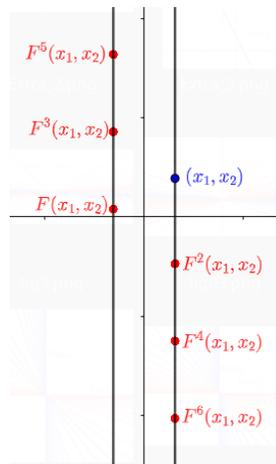


Figura 3.2: Dinâmica do caso  $\Lambda$  não abeliano e  $\text{Fix}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$ .

Agora vamos analisar o caso (iii). Para isso, consideramos novamente as possibilidades para o parâmetro  $t = \text{tr}(\varphi_1\varphi_2)$ .

1) Para  $t = -2$ , de acordo com a Tabela 3.3, temos

$$\text{Fix}(\varphi_{2k}) = [(1, 0)] = \text{Fix}(\varphi'_{2k})$$

e

$$\text{Fix}(\varphi_{2k+1}) = [(-2k - 1, 1)] \text{ e } \text{Fix}(\varphi'_{2k+1}) = [(2k + 1, 1)],$$

para todo  $k \geq 1$ . Assim, como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{2k} (-2k - 1, 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k}\right) = (1, 0)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} (2k + 1, 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right) = (1, 0),$$

segue que quando  $k$  tende ao infinito os subespaços  $\text{Fix}(\varphi_{2k+1})$  e  $\text{Fix}(\varphi'_{2k+1})$  se aproximam do eixo  $Ox$ , sendo este o subespaço de pontos fixos das involuções com índices pares (veja a Figura 3.3).

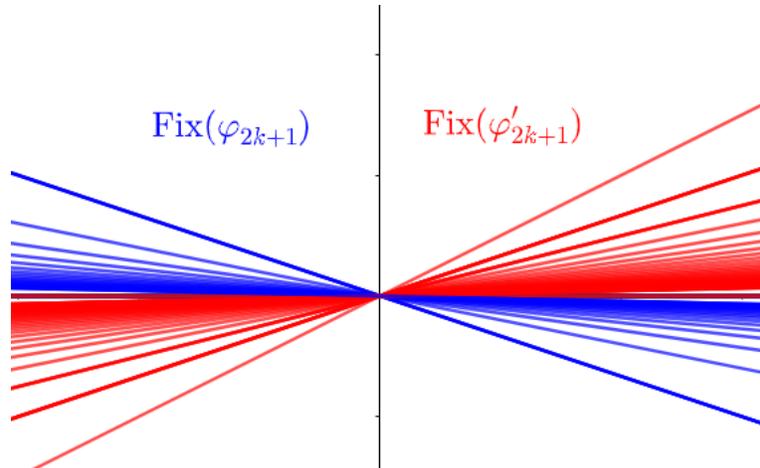


Figura 3.3:  $\Lambda$  não abeliano,  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $t = -2$ .

De modo análogo ao que fizemos no caso anterior, como

$$F^k(x_1, x_2) = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

concluimos que o eixo  $Ox$  é  $F$ -invariante e que as órbitas de todos os seus pontos não nulos tem período 2. Para a dinâmica dos pontos  $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}$ , com  $n = 2$ , considere as retas  $r : y = x_2$  e  $s : y = -x_2$ . Por (3.35), temos

$$F^k(x_1, x_2) = (-1)^k (x_1 + kx_2, x_2) \in r \cup s.$$

Portanto, a órbita de  $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}$  está contida em  $r \cup s$ , com alternância das retas  $r$  e  $s$ , para  $k$  tendendo ao infinito (veja a Figura 3.4).

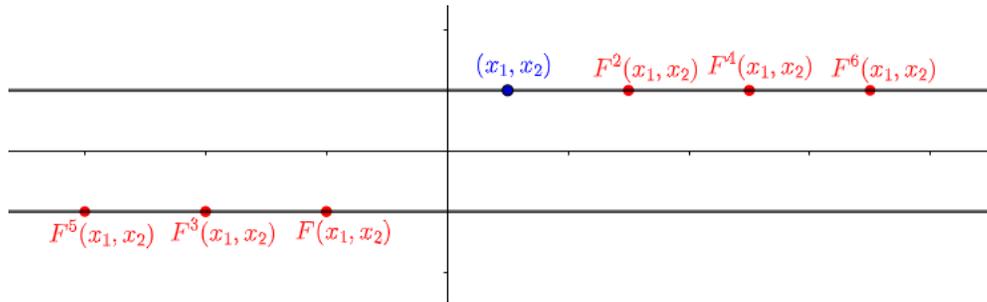


Figura 3.4: Dinâmica do caso  $\Lambda$  não abeliano,  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $t = -2$ .

2) Para  $t = 2$ , de acordo com a Tabela 3.4, temos

$$\text{Fix}(\varphi_k) = [(k - 1, 4 - 2k)] \text{ e } \text{Fix}(\varphi'_k) = [(k - 1, -2k)],$$

para todo  $k \geq 1$ . Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (k - 1, 4 - 2k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{k}, \frac{4}{k} - 2 \right) = (1, -2)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (k - 1, -2k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{k}, -2 \right) = (1, -2),$$

os subespaços de pontos fixos  $\text{Fix}(\varphi_k)$  e  $\text{Fix}(\varphi'_k)$  se aproximam da reta  $y = -2x$  conforme  $k$  tende ao infinito (veja a Figura 3.5). Novamente de acordo com a Tabela 3.4, tal

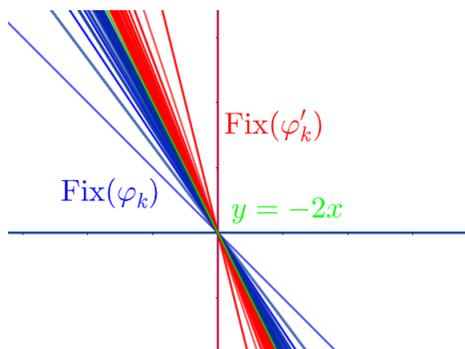


Figura 3.5:  $\Lambda$  não abeliano,  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $t = 2$ .

reta é  $F$ -invariante, pois coincide com  $\text{Fix}(F)$ .

Vamos agora analisar o comportamento dos pontos  $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}$  para este caso. Defina a reta  $r : 2x + y = 2x_1 + x_2$  e considere  $F^k$  como na Tabela 3.4. Neste caso, a órbita de  $(x_1, x_2)$  está contida em  $r$ , pois

$$F^k(x_1, x_2) = ((1 - 2k)x_1 - kx_2, 4kx_1 + (1 + 2k)x_2).$$

De fato, denotando  $z_k = (1 - 2k)x_1 - kx_2$  e  $w_k = 4kx_1 + (1 + 2k)x_2$ , temos que

$$2z_k + w_k = 2((1 - 2k)x_1 - kx_2) + 4kx_1 + (1 + 2k)x_2 = 2x_1 + x_2.$$

Logo,  $F^k(x_1, x_2) \in r$ , para todo  $k \geq 1$ .

3) Para  $|t| < 2$ , de acordo com a Tabela 3.5, temos

$$\text{Fix}([\varphi_k]_\beta) = [(-\text{sen}(\alpha_k), 1 - \cos(\alpha_k))]_{|\beta} \quad \text{e} \quad \text{Fix}([\varphi'_k]_\beta) = [(\text{sen}(\alpha_k), 1 - \cos(\alpha_k))]_{|\beta},$$

para todo  $k \geq 1$ , com  $\alpha_k = (k - 1)\theta$ , lembrando que  $\theta = \arccos\left(\frac{t}{2}\right) \in (0, \pi)$  e  $\beta = \{(0, -\text{sen}(\theta)), (1, -1 - \cos(\theta))\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Inicialmente, considere

$$u_k = (-\text{sen}(\alpha_k), 1 - \cos(\alpha_k)).$$

Note que  $u_k$  pertence à circunferência de raio 1 e centro  $(0, 1)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, a sequência  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  está contida em um subconjunto compacto de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ . Temos assim ao menos uma reta limite para  $\text{Fix}(\varphi_k)$ , conforme  $k$  tende ao infinito. Considerações similares podem ser feitas para  $\text{Fix}(\varphi'_k)$ , utilizando  $v_k = (\text{sen}(\alpha_k), 1 - \cos(\alpha_k))$  no lugar de  $u_k$ .

Ainda, podemos garantir que existe um número finito de retas para as quais  $\text{Fix}(\varphi_k)$  e  $\text{Fix}(\varphi'_k)$  convergem. Para isso, suponha que  $\theta = 2\pi r$ , com  $r \in \mathbb{Q}$ . Podemos escrever

$$r = \frac{p}{q},$$

com  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . Nestas condições, como  $[F]_\beta$  é a rotação de ângulo  $\theta$  (veja a Tabela 3.5), então  $q$  é o menor natural tal que  $[F]_\beta^q = I_2$ . Pelo Teorema 3.4,

$$\text{Fix}([\varphi_k]_\beta) = [F]_\beta^q(\text{Fix}([\varphi_{k+2q}]_\beta)) = \text{Fix}([\varphi_{k+2q}]_\beta)$$

e

$$\text{Fix}([\varphi'_k]_\beta) = [F]_\beta^q(\text{Fix}([\varphi'_{k+2q}]_\beta)) = \text{Fix}([\varphi'_{k+2q}]_\beta),$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, os conjuntos

$$\mathcal{K} = \{\text{Fix}([\varphi_k]_\beta); k \geq 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{K}' = \{\text{Fix}([\varphi'_k]_\beta); k \geq 1\}$$

são finitos com, no máximo,  $2q$  elementos. Além disso, observe que como  $[F]_{\beta}^q = I_2$ , todas as  $F$ -órbitas (exceto da origem) são periódicas de período  $q$ . De outro modo, se  $\theta \neq 2\pi r$ , para todo  $r \in \mathbb{Q}$ , os pontos da forma  $u_k$  e  $v_k$  formam um conjunto denso na circunferência de centro em  $(0, 1)$  e raio 1 e, portanto,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Fix}(\varphi_k) \cup \text{Fix}(\varphi'_k)$$

constitui um conjunto denso no plano com respeito à base  $\beta$ , como ilustrado na Figura 3.6. Para mais detalhes, veja [7, Section 1.2].

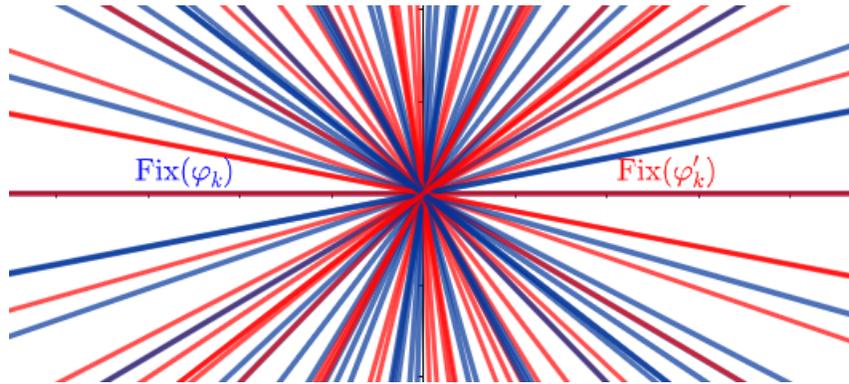


Figura 3.6:  $\Lambda$  não abeliano,  $\text{Fix}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$  e  $t = 0.18$ .

Para a dinâmica dos pontos  $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}$ , observe que como  $F$  é conjugada a uma rotação, existe uma mudança de coordenadas que faz com que a órbita de  $(x_1, x_2)$  esteja contida em uma circunferência de centro na origem e raio  $\|(x_1, x_2)\|$ .

4) Para  $|t| > 2$ , de acordo com a Tabela 3.6 temos

$$[F]_{\beta'} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix},$$

em que  $\beta'$  é base de  $\mathbb{R}^2$  dada em (3.17) e

$$\lambda_{\pm} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$$

são autovalores distintos de  $F$ . Neste caso,

$$\text{Fix}([\varphi_k]_{\beta'}) = [(1, -\lambda_+^{k-1})_{|\beta'}] \quad \text{e} \quad \text{Fix}([\varphi'_k]_{\beta'}) = [(1, -\lambda_-^{k-1})_{|\beta'}].$$

Pela invariância do traço, temos  $t = \text{tr}(F) = \lambda_+ + \lambda_-$ . Se  $t > 2$ , então  $0 < \lambda_- < 1 < \lambda_+$ . Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{\lambda_+^{k-1}}(1, -\lambda_+^{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\lambda_+^{k-1}}, 1 \right) = (0, 1)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1, -\lambda_-^{k-1}) = (1, 0).$$

Portanto, os subespaços de pontos fixos de  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$  tendem aos eixos coordenados com respeito à base  $\beta'$ . Nas coordenadas originais,  $\text{Fix}(\varphi_k)$  e  $\text{Fix}(\varphi'_k)$  tendem aos autoespaços associados a  $\lambda_-$  e  $\lambda_+$ , respectivamente. Se  $t < -2$ , então  $\lambda_- < -1 < \lambda_+ < 0$ . Deste modo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1, -\lambda_+^{k-1}) = (1, 0)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{\lambda_-^{k-1}}(1, -\lambda_-^{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\lambda_-^{k-1}}, 1 \right) = (0, 1),$$

implicando que  $\text{Fix}(\varphi_k)$  e  $\text{Fix}(\varphi'_k)$ , nas coordenadas originais, se aproximam dos autoespaços associados a  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$ , respectivamente. Na Figura 3.7, ilustramos para o caso em que  $t = 3$  a evolução dos subespaços de pontos fixos de  $\varphi_k$  e  $\varphi'_k$  conforme  $k$  cresce, segundo a base  $\beta'$  definida em (3.17).

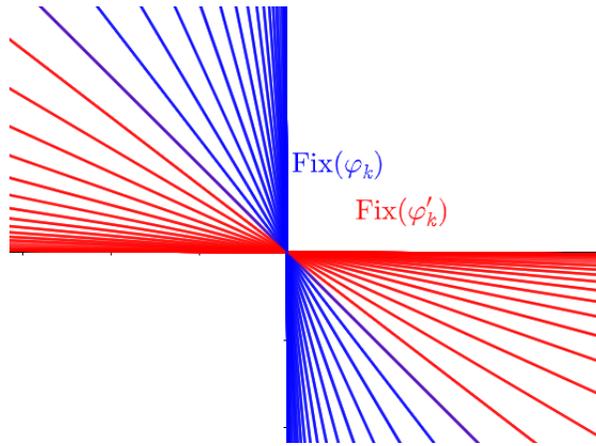


Figura 3.7:  $\Lambda$  não abeliano,  $\text{Fix}(\psi_1) \neq \mathcal{A}(\psi_2)$  e  $t = 3$ .

Para a análise da dinâmica dos pontos  $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}$ , com  $n = 2$ , observe que

$$[F]_{\beta'}^k(x_1, x_2) = (\lambda_+^k x_1, \lambda_-^k x_2).$$

Se  $t > 2$ , então  $0 < \lambda_- < 1 < \lambda_+$  e, conseqüentemente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_+^k} (\lambda_+^k x_1, \lambda_-^k x_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( x_1, \frac{\lambda_-^k}{\lambda_+^k} x_2 \right) = (x_1, 0).$$

Logo, quando  $k$  tende ao infinito a órbita de  $(x_1, x_2)$  se aproxima do eixo  $Ox$ . Se  $t < -2$ , então  $\lambda_- < -1 < \lambda_+ < 0$  e, assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_-^k} (\lambda_+^k x_1, \lambda_-^k x_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_+^k}{\lambda_-^k} x_1, x_2 \right) = (0, x_2),$$

donde segue que quando  $k$  tende ao infinito a órbita de  $(x_1, x_2)$  se aproxima do eixo  $Oy$ .

---

# CONCLUSÃO

Com este trabalho observamos a importância das involuções e das uplas de involuções nas suas aplicações, mais especificamente no estudo dos diagramas divergentes de dobras e dos difeomorfismos reversíveis. No primeiro caso, o Teorema 2.20 garante que existe uma relação biunívoca entre a classificação das uplas de involuções e a classificação dos diagramas divergentes de dobras associados. Já no segundo caso, tal biunivocidade não ocorre, como vimos no Exemplo 2.33. Contudo, utilizando os pares de involuções, podemos determinar as formas normais para os difeomorfismos reversíveis. Lembremos que nosso estudo está separado em casos, segundo a classificação dos pares de involuções apresentada em [17]. Porém, não analisamos se as formas normais obtidas em cada caso são ou não equivalentes entre si. A exemplo disso, outros resultados obtidos foram omitidos a fim de evitar nos alongarmos no texto.

Também é válido comentar algumas sugestões de continuidade para este trabalho. Inicialmente, com a Proposição 3.7 podemos obter as simetrias e as simetrias reversíveis de um difeomorfismo reversível  $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$  a partir de uma conjugação das simetrias e das simetrias reversíveis de sua forma normal. No caso linear e transversal, o germe de um difeomorfismo linear  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  responsável pela conjugação é obtido na demonstração da Proposição 2.21. Sendo assim, seria interessante construir um algoritmo que utilize de base a demonstração da Proposição 2.21 para, a partir do par  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , retornar  $h$ .

Ademais, nossa classificação tem suas raízes no Teorema 2.26, que dá origem aos Teoremas 2.31 e 2.40. Tais resultados possuem generalizações para pares de involuções cuja composição é normalmente hiperbólica, como podemos ver em [18]. Assim, é de se esperar que as formas normais para difeomorfismos reversíveis possam ser obtidas para este caso também, como uma generalização do estudo apresentado neste trabalho.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANTONELI, F., BAPTISTELLI, P. H., DIAS, A. P. S. E MANOEL, M. Invariant theory and reversible-equivariant vector fields. *Journal of Pure and Applied Algebra* **213**, 5 (2009), 649–663.
- [2] AXLER, S. *Linear algebra done right*. Springer Science & Business Media, 1997.
- [3] BAPTISTELLI, P. H., LABOURIAU, I. S. E MANOEL, M. Recognition of symmetries in reversible maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **491**, 2 (2020), 124348.
- [4] BAPTISTELLI, P. H. E MANOEL, M. The  $\sigma$ -isotypic decomposition and the  $\sigma$ -index of reversible-equivariant systems. *Topology and its Applications* **159**, 2 (2012), 389–396.
- [5] BAPTISTELLI, P. H., MANOEL, M. E ZELI, I. O. Normal form theory for reversible equivariant vector fields. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* **47**, 3 (2016), 935–954.
- [6] BROER, H. W., HOVEIJN, I. E VAN NOORT, M. A reversible bifurcation analysis of the inverted pendulum. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **112**, (1998) 50–63.
- [7] BRIN, M. E STUCK, G. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, 2002
- [8] BRÖCKER, T. E JÄNICH, K. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, 1982.
- [9] COELHO, F. U. E LOURENCO, M. L. *Curso de álgebra linear, Vol. 34*. Edusp, 2001.

- [10] DEVANEY, R. L. Reversible diffeomorphisms and flows. *Transactions of the American Mathematical Society* **218**, (1976), 89–113.
- [11] GOLUBITSKY, M. E. GUILLEMIN, V. *Stable mappings and their singularities, Vol. 14*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] GOLUBITSKY, M., STEWART, I. E. SCHAEFFER, D. G. *Singularities and groups in bifurcation theory: Volume II* Applied Mathematical Sciences, Springer, 2000.
- [13] HARTMAN, P. On the local linearization of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society* **14**, 4 (1963), 568–573.
- [14] HOLMGREN, R. A. *A first course in discrete dynamical systems*. Springer, 1996.
- [15] LAMB, J. S. W. Reversing symmetries in dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **25**, 4 (1992), 925–937.
- [16] LAMB, J. S. W. E. ROBERTS, J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **112**, (1998), 1–39 .
- [17] MANCINI, S., MANOEL, M. E. TEIXEIRA, M. A. Divergent diagrams of folds and simultaneous conjugacy of involutions. *Discrete & Continuous Dynamical Systems* **12**, 4 (2005), 657–674.
- [18] MANCINI, S., MANOEL, M. E. TEIXEIRA, M. A. Simultaneous linearization of a class of pairs of involutions with normally hyperbolic composition. *Bulletin des Sciences Mathématiques* **137**, 4 (2013), 418–433.
- [19] MARTINET, J. *Singularités des fonctions et applications différentiables*. Pontificia Universidade Católica, 1977.
- [20] MEDRADO, J. C. E. TEIXEIRA, M. A. Symmetric singularities of reversible vector fields in dimension three. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **112**, 1 (1998), 122–131.
- [21] MONTGOMERY D., Z. L. *Topological transformation groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 1. Interscience, 1955.
- [22] NACHBIN, L. *The haar integral*. University Series in Higher Mathematics. Princeton University Press, 1965.
- [23] SISTERNA, P. D. Time-reversal symmetry and time-dependent physics. *Foundations of Physics Letters* **13**, 3 (2000), 205–220.

- 
- [24] TEIXEIRA, M. A. On topological stability of divergent diagrams of folds. *Mathematische Zeitschrift* **180**, (1982), 361–371.
- [25] TEIXEIRA, M. A. Singularities of reversible vector fields. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **100**, 1 (1997), 101–118.
- [26] VORONIN, S. M. Analytic classification of pairs of involutions and its applications. *Functional Analysis and Its Applications* **16**, (1982), 94–100.

---

# ÍNDICE REMISSIVO

- Ação de um grupo de Lie, 25
- Conjunto
  - antipodal, 16
  - de pontos fixos, 15
  - de singularidades, 31
  - transversal, 22
- Diagrama divergente de dobras, 41
  - associado a uma  $s$ -upla, 42
  - equivalência, 42
- Difeomorfismo
  - Equivariante, 9
  - Reversível, 9
- Dobra, 29
  - associada a uma involução, 29
- Função  $\Gamma$ -invariante, 25
- Germe
  - $\mathcal{L}$ -equivalência, 35
  - de uma aplicação, 8
- Grupo de Lie linear, 24
- Involução, 11
- Simetria, 9
- Simetria reversível, 9
- Sistema dinâmico discreto, 13
- Subvariedades transversais, 22
- Suspensão de um germe, 99
- Uplas de involuções
  - equivalentes, 17
- Órbita, 14