UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

PEDRO FLÁVIO SILVA OTHECHAR

Atratores Direcionais de Cociclos Topológicos: Caracterização via Compactificação de Stone-Čech e $\mathcal{L}$-pré-ordem de Green. [1]

Maringá-PR

2021

[1] O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATRATORES DIRECIONAIS DE COCICLOS TOPOLÓGICOS: CARACTERIZAÇÃO VIA COMPACTIFICAÇÃO DE STONE-ČECH E $\mathcal{L}$-PRÉ-ORDEM DE GREEN.

TESE DE DOUTORADO

PEDRO FLÁVIO SILVA OTHECHAR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.

Maringá-PR
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Othechar, Pedro Flávio Silva
O977a Atratores direcionais de cociclos topológicos : caracterização via compactificação de Stone-Check e Ω-pré-ordem de Green / Pedro Flávio Silva Othechar. -- Maringá, 2021.
93 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2021.

1. Cociclos topológicos. 2. Comportamento assintótico. 3. Compactificação de Stone-Cech. 4. Extensão de cociclos. 5. Decomposições de Morse. 6. Topological cocycles. 7. Asymptotic behavior. 8. Stone-Cech compactification. 9. Cocycles extensions. 10. Morse decomposition. I. Souza, Josiney Alves de, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 514.323

Edilson Damasio CRB9-1.123

PEDRO FLÁVIO SILVA OTHECHAR

ATRATORES DIRECIONAIS DE COCICLOS TOPOLÓGICOS: CARACTERIZAÇÃO VIA COMPACTIFICAÇÃO DE STONE-CECH E *L*-PREORDEM DE GREEN

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto - ICMC-USP/São Carlos
Prof. Dr. Adriano João da Silva - IMECC/UNICAMP
Prof. Dr. Hélio Vinicius Moreno Tozatti - UTFPR/Campo Mourão
Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo - UEM

Aprovada em: 01 de junho de 2021.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus. Agradeço pela sabedoria e pela força que me concedeu para que eu fosse capaz de realizar o sonho de me tornar doutor em matemática. Olhando para trás, vejo sua mão e seus cuidados em todos os momentos. Às vezes, é muito difícil crer na existência de Deus. E, às vezes, me percebo quase desacreditando. Mas continuo crendo, quase não crendo, mas crendo. E, por crer, vejo que os seus cuidados me trouxeram até aqui e que nunca estive desamparado.

Agradeço aos meus pais. Sem o apoio e o cuidado deles no início da minha vida, nada disso teria sido possível. Agradeço-lhes por me fazerem acreditar nos estudos e no meu potencial para seguir uma carreira acadêmica.

Agradeço também a todos os meus familiares e amigos que direta ou indiretamente contribuiram para que eu pudesse chegar até esse momento. Em especial agradeço à minha tia Maria Aparecida Santana Othechar, por ter me acolhido em sua casa durante o período do mestrado e por ter compartilhado comigo sua experiência e sabedoria de vida.

Agradeço à minha esposa. Agradeço-a pelo amor, pelo companheirismo, pela paciência, por acreditar no meu potencial e por sempre estar ao meu lado, fossem os momentos bons ou ruins.

Gostaria também de expressar meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Josiney Alves de Souza que me orientou neste trabalho, por ser sempre atencioso e paciente. Agradeço-lhe também pelo exemplo de ser humano e profissional que é.

Agradeço à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul por permitir me afastar para aperfeiçoamento.

Agradeço à CAPES, que através do programa PICME-OBMEP, me concedeu auxílio financeiro.

Resumo

Essa tese trata-se do estudo do comportamento assintótico de cociclos topológicos, os quais generalizam sistemas dinâmicos não-autônomos, pois possuem uma ação condutora por um semigrupo abstrato. Um dos principais objetos estudados é o atrator direcional do cociclo topológico. Esse atrator depende de uma direção no semigrupo condutor, o que generaliza os conceitos de atrator do passado e do futuro.

Para um cociclo topológico conduzido por um semigrupo reversível munido da $\mathcal{L}$-pré-ordem de Green inversa, o atrator do passado pode ser descrito através do conjunto limite prolongacional do cociclo estendido na compactificação de Stone-Čech. Antes, porém, obtivemos esse resultado para os processos de evolução, a partir do ponto de vista dos sistemas dinâmicos não-autônomos.

Por fim, apresentamos um estudo sobre o conceito de atratividade local, introduzimos as ideias de par atrator-repulsor e, consequentemente, uma teoria de decomposições de Morse não-autônoma para cociclos topológicos.

Palavras-chave: Cociclos topológicos, comportamento assintótico, compactificação de Stone-Čech, extensão de cociclos e decomposições de Morse.

Abstract

This thesis is about the study of the asymptotic behavior of topological cocycles, the which generalize non-autonomous dynamical systems, as they have a conductive action by an abstract semigroup. One of the main objects studied is the directional attractor of the topological cocycle. This attractor depends on a direction in the conducting semigroup, which generalizes the past and future attractor concepts.

For a topological cocycle conducted by a reversible semigroup equipped with the Inverse Green's $\mathcal{L}$-pre-order, the attractor of the past can be described through the limit set prolongation of the extended cocycle in Stone-Čech compactification. Before, however, we obtained this result for the evolution processes, from the point of view of the systems non-autonomous dynamics.

Finally, we present a study on the concept of local attractiveness, we introduce the attractor-repulsor pair ideas and, consequently, a non-autonomous Morse decompositions theory for topological cocycles.

Key-words: Topological cocycles, asymptotic behavior, Stone-Čech compactification, cocycles extensions and Morse decomposition.

Sumário

Introdução

Comportamento assintótico de semigrupos de transformações tem sido amplamente estudado, desde meados dos anos 2000, com aplicações na teoria de sistemas de controle, conforme pode ser visto nas referências [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [33], [27], [28], [30], [35], [36], [37] e [38]. Nessas referências, foram estudados vários conceitos da teoria dos sistemas autônomos, entre eles, o conceito de par atrator-repulsor da teoria de Conley [16] e, consequentemente, as decomposições de Morse. Mais recentemente, em [5] e [6], esses estudos foram levados para o ambiente dos espaços admissíveis. Isso foi possível, graças à introdução de um conceito topológico, em espaços admissíveis, que extende a noção de métrica dos espaços métricos. Tal conceito, apresentado na referência [4], foi chamado de função admissível. A função admissível permitiu a introdução, nos espaços admissíveis, das ideias de diâmetro e de limitação de conjuntos, além dos conceitos de semidistância e distância de Hausdorff. Por sua vez, a introdução desses conceitos permitiu estender, para espaços admissíveis, noções de objetos dinâmicos que dependiam deles. Dessa forma, puderam ser desenvolvidos conceitos como os de ações de semigrupo assintotiticamente compactas e de atrator global para ações de semigrupos em espaços admissíveis.

Seguindo essa linha de generalizar conceitos de sistemas dinâmicos para objetos mais gerais, o presente trabalho traz a extensão do conceito de sistemas dinâmicos não-autônomos, o qual chamamos de **cociclo topológico**. Grosso modo, um sistema dinâmico não-autônomo com espaço base P e espaço de fase X, é um par de aplicações (θ, φ), onde $\theta : \mathbb{R} \times P \to P$ é um sistema dinâmico autônomo e $\varphi : \mathbb{R} \times P \times X \to X$ é chamada de **aplicação cociclo**. Além disso, a aplicação cociclo satisfaz a **propriedade de cociclo**, isto é, $\varphi(t + s, p, x) = \varphi(t, \theta_s(p), \varphi(s, p, x))$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $p \in P$ e $x \in X$. O fluxo θ é chamado de fluxo de condução, pois as trajetórias do cociclo estão sobre as trajetórias do fluxo. No artigo [26], é feita uma primeira generalização do conceito de sistemas dinâmicos não-autônomos para um espaço de fase topológico, mas mantendo a ação se condução como fluxos. Em [23], uma das referências mais recentes envolvendo assuntos relacionados a essa tese, são estudados os G-processos, mas com foco direcionado ao estudo de sombreamento e expansividade. Aqui, desenvolvemos a teoria para uma ação de semigrupo como condutor do cociclo no espaço base, além de considerar o espaço de fase como sendo um espaço topológico geral.

Vários dos objetos, presentes na teoria dos sistemas dinâmicos autônomos, possuem análogos (no sentido backward) na teoria dos sistemas dinâmicos não-autônomos. Nesse contexto não-autônomo, os objetos a serem analisados quanto ao comportamento assintótico são famílias de subconjuntos do espaço de fase X, indexadas no espaço base P. Grosso modo, dada uma família $\mathbf{B} = \{B(p)\}_{p \in P}$, definir um objeto no sentido pullback é realizar as operações com as imagens, através de φ, das fibras de $\mathbf{B}$ com índice $\theta_{-t}(p)$, para cada p fixo e $t \to +\infty$. Por exemplo, o conjunto ω-limite (no sentido backward), para a família $\mathbf{B}$, é dado por

$$\omega^{\mathbf{B}}(p) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \varphi(s, \theta_{-s}(p), B(\theta_{-s}(p)))},$$

para todo $p \in P$. De maneira análoga, também é possível definir objetos em um sentido forward.

Na referência [31], atratores e repulsores, tanto no sentido pullback quanto forward, são utilizados para construir uma teoria não-autônoma das decomposições de Morse. Nessa referência os termos backward e forward são simplesmente chamados de passado e futuro, uma vez que, não é necessário indexar os conjuntos não-autônomos sobre todo o espaço P; basta considerarmos subconjuntos de P que contenham as órbitas negativas (para o sentido backward) ou as óbitas positivas (para o sentido forward) de cada ponto seu.

Em [34], foi estudado o comportamento limite na compactificação de Stone-Čech βG, de um grupo topológico G. A compactificação de Stone-Čech considerada nesse estudo é o conjunto de todos os ultrafiltros de subconjuntos fechados de G. Considerando a ação $\tilde{\zeta} : G \times \beta G \to \beta G$, que é a extensão do produto $\zeta : G \times G \to G$ de G, foi provado que a propriedade de semitotalidade é equivalente à existência de apenas um par atrator-repulsor não-trivial em βG, sempre que o semigrupo que dá a direção, é cêntrico. Esse par atrator-repulsor é dado por $(\omega(u_e), \omega^*(u_e))$, onde u_e é o ultrafiltro gerado pelo elemento neutro de G. Com esses elementos surgem os problemas de estender cociclos, de obter atratores na extensão e de como esses atratores na extensão se relacionam com o par atrator-repulsor $(\omega(u_e), \omega^*(u_e))$. Na presente tese, encontramos condições para estender o cociclo e para obter um atrator do passado para o cociclo $(\tilde{\zeta}, \tilde{\varphi})$, onde $\tilde{\zeta} : G \times \beta G \to \beta G$ é a extensão do produto $\zeta : G \times G \to G$ em G e $\tilde{\varphi} : G \times \beta G \times X \to X$ é a extensão de um cociclo $\varphi : G \times G \times X \to X$. Além disso, caracterizamos este atrator, a partir do conjunto limite prolongacional de um subconjunto $W \subset \omega^*(u_e) \times X$. O conjunto limite prolongacional em questão é calculado no fluxo produto cruzado, que é uma versão autônoma sobre o espaço de fase extendido $P \times X$ do cociclo.

A seguir, damos mais detalhes da organização do trabalho, e do que é feito em cada capítulo.

Organização do Trabalho

No capítulo 1, são apresentados os principais pré-requisitos topológicos que serão utilizados ao longo desse trabalho. Enquanto a seção 1.1 apresenta, brevemente, os espaços admissíveis, a seção 1.2 traz os espaços uniformizáveis. Os espaços admissíveis foram introduzidos mais recentemente e, conforme provado em [3], são também espaços uniformizáveis. No entanto, os espaços uniformizáveis são mais conhecidos, uma vez que foram introduzidos ainda em meados do século XX. Nesse trabalho, será utilizada a estrutura admissível e vários dos conceitos desenvolvidos em [4]. A seção 1.3, traz as definições e os principais resultados sobre redes, os quais serão utilizados ao longo dos capítulos 3 e 4. A seção 1.4 apresenta a função admissível e a seção 1.5 apresenta as semidistância e distância de Hausdorff generalizadas, ambas amplamente utilizadas no capítulo 4 para desenvolver a teoria dos cociclos topológicos em espaços completamente regulares.

No capítulo 2, resolvemos o problema de encontrar um atrator na extensão de um sistema dinâmico não-autônomo clássico. O sistema em questão, tem como fluxo de condução, a adição de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, ou seja, estudamos sistemas dinâmicos não-autônomos com espaço base $P = \mathbb{Z}$ ou $P = \mathbb{R}$ e, espaço de fase métrico compacto X. Na seção 2.1, apresentamos definições e resultados preliminares sobre sistemas dinâmicos autônomos e não-autônomos, baseados, principalmente, nas referências [7], [24] e [31]. Na seção 2.2, discorremos um pouco sobre a compactificação de Stone-Čech, interpretada via ultrafiltros, e sobre o problema de estender os sistemas dinâmicos não-autônomos em questão. Utilizando resultados de [21] e [8], encontramos uma condição suficiente para estender alguns sistemas dinâmicos não-autônomos (ver corolário 2.2.2). A partir disso, fomos capazes de dar alguns exemplos de cociclos que são possíveis de estender. Finalmente, na seção 2.3 obtivemos um $\mathcal{M}$-atrator do passado na extensão e conseguimos caracterizá-lo, relacionando-o com o repulsor $\omega^-(0) \subset \beta\mathbb{T}$, com $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

No capítulo 3, apresentamos o conceito de cociclo topológico sobre a ação de um semigrupo. Este conceito generaliza os sistemas dinâmicos não-autônomos. Na seção 3.1, apresentamos as definições e propriedades mais básicas do conceito de cociclo topológico, tais como:

invariância e órbita. A seção 3.2 estuda o comportamento assintótico dos cociclo topológicos. Sendo assim, são introduzidos os conceitos de conjuntos limites e atratores, além de serem demonstradas várias das propriedades básicas desses objetos. A seção 3.3 traz a ideia de cociclos topológicos conjugados e, na seção 3.4, são dados exemplos de cociclos topológicos. Na seção 3.5, os conceitos de cociclo topológico e de cociclo sobre grupos topológicos são relacionados. Na seção 3.6 são dadas as definições de conjuntos de absorção do passado e de rejeição do futuro, os quais, por sua vez, foram fundamentais para estabelecer o teorema 3.5.1, que garante a existência de $\mathcal{M}$-atratores do passado e $\mathcal{M}$-repulsores do futuro.

Finalmente, no capítulo 4, são estudados os cociclos topológicos cujo espaço de fase X é um espaço topológico completamente regular. Sabe-se que espaços topológicos são completamente regulares se, e somente se, admitem uma estrutura admissível. Na seção 4.1, estudamos a $\mathcal{M}$-atratividade em espaços admissíveis. Além da caracterização dos $\mathcal{M}$-atratores, utilizando a semidistância de Hausdorff generalizada, a seção inclui o estudo de cociclos assintoticamente compactos e a generalização dos resultados do capítulo 2 para cociclos topológicos mais gerais. A seção 4.3 apresenta o conceito de atratividade local para cociclos topológicos e demonstra várias propriedades e caracterizações básicas para esses objetos. Uma dessas propriedades, a proposição 4.3.3, mostra que o atrator do passado, é uma versão não-autônoma (no sentido backward) do atrator de Conley. Finalmente, na seção 4.4 as decomposições de Morse são definidas e estudadas, porém, antes, são introduzidos o conceito de par atrator-repulsor, que permite construir as decomposições de Morse para os cociclos topológicos.

Capítulo 1

Preliminares topológicos

Neste capítulo, introduziremos os conceitos preliminares necessários para os capítulos 3 e 4, pois o capítulo 2 é autocontido. O principal conceito apresentado, e que foi recentemente introduzido em [4], é a função admissível. A função admissível generaliza o conceito de distância em espaços admissíveis.

1.1 Espaços admissíveis

Seja X um espaço topológico e $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ coberturas de X. Dizemos que $\mathcal{U}$ refina $\mathcal{V}$ ou que $\mathcal{U}$ é um refinamento de $\mathcal{V}$ e nesse caso escrevemos $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ se, e somente se, cada $U \in \mathcal{U}$ está contido em algum $V \in \mathcal{V}$. Dizemos ainda que $\mathcal{U}$ é um refinamento duplo de $\mathcal{V}$ e escrevemos $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$ se, $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ são tais que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ então $U_1 \cup U_2 \subset V$ para algum $V \in \mathcal{V}$. Escrevemos $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^2}\mathcal{U}$ se existir uma cobertura $\mathcal{W}$ de X tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Dessa forma, indutivamente dizemos que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$ se existir $\mathcal{W}$ com $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\mathcal{U}$.

Para cada cobertura $\mathcal{U}$ de X e $Y \subset X$, definimos a estrela de Y com respeito à cobertura $\mathcal{U}$ como

$$St[Y,\mathcal{U}] = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : Y \cap U \neq \emptyset\}.$$

Se $Y = \{x\}$, usualmente escrevemos $\mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}]$ em vez de $\mathrm{St}\,[\{x\}\,,\mathcal{U}]$ e além disso vale que $\mathrm{St}\,[Y,\mathcal{U}] = \bigcup\limits_{x\in Y} \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}]$ para todo subconjunto $Y \subset X$. Dizemos que $\mathcal{V}$ é um refinamento estrela de $\mathcal{U}$, e escreve-se $\mathcal{V}* \leq \mathcal{U}$, se para cada $V \in \mathcal{V}$, $\mathrm{St}[V,\mathcal{V}] \subset U$ para algum $U \in \mathcal{U}$.

Estabelecidas as devidas notações, estamos em condições de apresentar o conceito de espaço topológico admissível.

Definição 1.1.1. *Uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X é dita admissível se satisfaz as* *seguintes propriedades:*

1. *Para* $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, *existe* $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ *tal que* $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ *e* $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

2. *As estrelas* $St[x,\mathcal{U}]$ *para* $x \in X$ *e* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *formam uma base para a topologia de* X.

Um espaço topológico X *é dito admissível se admitir uma família admissível de coberturas abertas.*

Vejamos alguns exemplos os quais podem ser encontrados em [35].

Exemplo 1.1.1. *Se* X *é um espaço topológico Hausdorff paracompacto então a família de todas coberturas abertas de* X *é admissível. Além disso, se* X *é um espaço topológico Hausdorff compacto então a família* $\mathcal{O}_f$ *de todas coberturas abertas finitas de* X *é admissível.*

Exemplo 1.1.2. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Assim a família* $\mathcal{O}_d$ *de todas coberturas* $\mathcal{U}_\epsilon = \{B_d(x, \epsilon) : x \in X\}$ *com* $\epsilon > 0$ *é admissível. Além do mais, para* $\varepsilon > 0$ *e* $Y \subset X$ *temos que* $\mathcal{U}_{\varepsilon/2} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$ *e*

$$\mathrm{St}\left[Y,\mathcal{U}_{\varepsilon/2}\right] \subset \mathrm{B_d}\left(Y, \varepsilon\right) \subset \mathrm{St}\left[Y,\mathcal{U}_\varepsilon\right].$$

Exemplo 1.1.3. *Seja* G *um grupo topológico e* $\mathcal{B}$ *um sistema de vizinhanças simétricas abertas da identidade de* G. *Para cada* $V \in \mathcal{B}$, *defina a cobertura aberta* $\mathcal{R}_V$ *de* G *por* $\mathcal{R}_V = \{Vg : g \in G\}$ *de* G *e a cobertura aberta* $\mathcal{L}_V = \{gV : g \in G\}$. *Então* $\mathcal{O}_R = \{\mathcal{R}_V : V \in \mathcal{B}\}$ *e* $\mathcal{O}_L = \{\mathcal{L}_V : V \in \mathcal{B}\}$ *são famílias admissíveis de coberturas abertas de* G.

Exemplo 1.1.4. *Nas condições do exemplo anterior, considere* $H \subset G$ *um subgrupo de* G *e* π *a projeção canônica de* G *em* G/H. *Para cada* $V \in \mathcal{B}$, *defina a cobertura aberta* $\mathcal{P}_V$ *de* G/H *por* $\mathcal{P}_V = \{\pi(Vg) : g \in G\}$ *de* G. *Então* $\mathcal{O}_\pi = \{\mathcal{P}_V : V \in \mathcal{B}\}$ *é uma família admissível de coberturas abertas de* G/H.

Exemplo 1.1.5. *Seja* $(X, \mathcal{O})$ *um espaço admissível. Para cada* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, *defina* $\mathcal{B}_\mathcal{U} = \{St[x,\mathcal{U}] : x \in X\}$. *Então a família* $\mathcal{B}_\mathcal{O} = \{B_\mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ *é admissível.*

Observação 1.1.1. *Para cada* $Y \subset X$ *temos* $\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \mathrm{St}\left[Y,\mathcal{U}\right] = \overline{Y}$. *Em especial, se* X *for Hausdorff então* $\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \mathrm{St}\left[x,\mathcal{U}\right] = \{x\}$ *para todo* $x \in X$.

Observação 1.1.2. *Se* $Y \subset X$ *é um aberto qualquer de* X *e* K *é um compacto em* X *tal que* $K \subset Y$ *então existe* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *cobertura aberta de* X *de modo que* $St[K,\mathcal{U}] \subset Y$.

Lema 1.1.1. *Sejam* $\mathcal{U}$ *e* $\mathcal{V}$ *duas coberturas de* X *pertencentes a uma família admissível de coberturas abertas* $\mathcal{O}$. *Se* $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ *e* $x \in X$, *então* $\overline{St[x,\mathcal{V}]} \subset St[x,\mathcal{U}]$.

Demonstração. Ver [32], Lema 2.4, página 42. □

Para mais detalhes sobre espaços admissíveis indicamos a leitura de [1] e [35].

Definição 1.1.2. *Uma família admissível $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X é dita Full se satisfaz as seguintes condições:*

1. $X = \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}]$ *para todo* $x \in X$.
2. *Para cada* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *existe* $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ *tal que* $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

A condição 1. da Definição 1.1.2 garante que para cada par de pontos $x, y \in X$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $y \in \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}]$ enquanto que a condição 2. implica que para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{V}$. Além disso, não é difícil ver que as famílias admissíveis dos Exemplos 1.1.1 e 1.1.2 são full.

1.2 Espaços uniformizáveis

Nesta seção veremos algumas definições relativas a espaços uniformes. Em resumo, vamos desenvolver um estudo introdutório do assunto com base em [39].

Dado $V \subseteq X \times X$ definimos inicialmente

$$V^{-1} := \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in V\}.$$

Além disso, para quaisquer $U, V \subseteq X \times X$ temos

$$U \circ V := \{(x, y) \in X \times X : (\exists z \in X)(x, z) \in U, (z, y) \in V\}.$$

Para cada $V \subseteq X \times X$ e $x \in X$, definimos a *V-vizinhança* de x dada pelo conjunto

$$V[x] := \{y \in X : (x, y) \in V\}.$$

Posteriormente, definimos a *diagonal* de X por

$$\Delta := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X.$$

Estabelecidas as devidas notações, vejamos a definição de espaço uniforme via família de vizinhanças diagonais.

Definição 1.2.1. *Um espaço uniforme é um par* $(X, \mathcal{D})$ *formado por um conjunto* X *e uma família* $\mathcal{D} \subseteq X \times X$ *chamada estrutura uniforme ou família de vizinhanças diagonais, que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $D \in \mathcal{D} \Rightarrow \Delta \subset D$.

2. $D1, D2 \in \mathcal{D} \Rightarrow D1 \cap D2 \in \mathcal{D}$.

3. $D \in \mathcal{D} \Rightarrow E \circ E \subset D$ *para algum* $E \in \mathcal{D}$.

4. $D \in \mathcal{D} \Rightarrow E^{-1} \subset D$ *para algum* $E \in \mathcal{D}$.

5. $D \in \mathcal{D}$, $D \subset E \Rightarrow E \in \mathcal{D}$.

Dado um conjunto qualquer X, podemos muni-lo com diferentes estruturas uniformes. A princípio, destacamos as estruturas *discreta* e *indiscreta* definidas sobre um conjunto X respectivamente por $\mathcal{D}_X := \{V \subseteq X \times X : \Delta \subseteq V\}$ e $\mathcal{D}_i \equiv \{X \times X\}$. Observe que, se $X = \emptyset$ então $\mathcal{D}_i$ é a estrutura uniforme vazia.

Além disso, dizemos que uma coleção $\mathcal{E} \subset X \times X$ é uma base para uma estrutura uniforme se, e somente se, satisfaz os itens 1., 3., 4. e

$D_1, D_2 \in \mathcal{E}$ *então* $D_3 \subset D_1 \cap D_2$ *para algum* $D_3 \in \mathcal{E}$.

Dado um espaço uniforme $(X, \mathcal{D})$, a coleção $Sym(\mathcal{D}) = \{V \in \mathcal{D} : V = V^{-1}\}$ forma uma base para $\mathcal{D}$. Em geral, qualquer métrica d sobre um espaço X gera uma estrutura uniforme $\mathcal{U}_d$ que tem como base a coleção $U_\epsilon^d = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}$.

Vejamos dois exemplos de estruturas uniformes clássicas.

Exemplo 1.2.1. *Para cada* $a \in \mathbb{R}$, *seja* $D_a = \Delta \cup \{(x, y) | x > a, y > a\}$. *Dessa forma, a coleção* $\{D_a \subset \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ *é base para uma estrutura uniforme em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2.2. *Para cada* $\epsilon > 0$, *seja* $D_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - y| < \epsilon\}$. *A coleção* $\mathcal{E}$ *de todos conjuntos* D_ϵ, *com* $\epsilon > 0$ *é base para uma estrutura uniforme em* $\mathbb{R}$.

Para cada $x \in X$ e $D \in \mathcal{D}$ temos que $x \in D[x]$ pois $(x, x) \in \Delta \subseteq D$ e $D[A] = \bigcup_{x \in A} D[x]$ se $A \subseteq X$. Além disso, para cada $x \in X$, a coleção $\mathcal{D}_x = \{D[x] : D \in \mathcal{D}\}$ forma uma vizinhança básica em x. A topologia associada com a família de vizinhanças diagonais $\mathcal{D}$ é chamada de *topologia uniforme* gerada por $\mathcal{D}$, denotada por $\tau_{\mathcal{D}}$ e definida como: $\tau_{\mathcal{D}} = \{U \subset X : \forall x \in U \; \exists D \in \mathcal{D}; D[x] \subset U\}$. Toda vez que a topologia do espaço puder ser obtida através de uma família de vizinhanças diagonais $\mathcal{D}$ dizemos que X é um espaço topológico *uniformizável*.

Uma estrutura uniforme $\mathcal{D}$ é dita *separada* se, e somente se, $\bigcap_{D\in\mathcal{D}} D = \Delta$. Nesse sentido, repare que uma estrutura uniforme num espaço induzida por uma métrica d é sempre separada pois

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}_d} U = \bigcap_{\epsilon>0} U_\epsilon^d = \bigcap_{\epsilon>0} \{(x,y)\in X\times X; d(x,y)<\epsilon\} = \Delta.$$

De modo geral, temos que a topologia induzida por $\mathcal{D}$ é Hausdorff se, e somente se, $\mathcal{D}$ é separada (ver Teorema 35.6, página 240, item b, [39]). As estruturas uniformes $\mathcal{U}_d$ geradas por uma métrica d são ditas metrizáveis. Um espaço topológico é uniformizável se, e somente se, é completamente regular (ver [39], Teorema 38.2, página 256). Por fim, uma estrutura uniforme é metrizável se, e somente se, é separável e possui base enumerável (ver [39], Corolário 38.4, página 258).

Além da axiomatização da noção de uniformidade via família de vizinhanças diagonais, existe uma outra que lhe é equivalente e na qual os elementos básicos são coberturas de X. Nesse sentido, uma cobertura $\mathcal{U}$ de $(X,\mathcal{D})$ se diz uma *uniforme*, se e somente, se pode ser refinada por uma cobertura da forma $\mathcal{U}_D = \{D[x] : x\in X\}$ para algum $D\in\mathcal{D}$. No entanto, pode ser visto em [39], Teorema 36.2, página 244, que a coleção $\mathcal{O}$ de todas coberturas uniformes de um espaço $(X,\mathcal{D})$ possui as seguintes propriedades:

1. se $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$, então para algum $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{O}$,temos $\mathcal{U}_3* \leqslant \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_3* \leqslant \mathcal{U}_2$,

2. se $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{U}'$ e $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$ então $\mathcal{U}'\in\mathcal{O}$.

Em contrapartida, tomando $\mathcal{O}$ uma família de coberturas satisfazendo os itens 1. e 2. temos que coleção de todos conjuntos da forma $D_{\mathcal{U}} = \bigcup\{U\times U : U\in\mathcal{U}\}$ com $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$ gera uma estrutura uniforme em X cujas coberturas uniformes são precisamente os elementos de $\mathcal{O}$. Com isso, é possível estabelecer uma correspondência entre os conceitos de família de vizinhanças diagonais e família de coberturas uniformes. Ou seja, apesar das uniformidades via família de vizinhanças diagonais e coberturas possuírem linguagens diferentes podemos substituir uma estrutura por outra sem problema nenhum.

Atentamos para o fato de que uma uniformidade num conjunto X pode ser ainda descrita através de uma família de *pseudométricas* ou uma *uniformidade de calibre*. Para uma construção detalhada de um esquema de equivalência entre todas as estruturas descritas nesta seção indicamos a leitura de [25], Capítulo 2.

Por fim, o teorema seguinte estabelece uma equivalência entre espaços admissíveis e uniformizáveis. Sua prova pode ser encontrada em [3] e [35].

Teorema 1.2.1. *Um espaço X é uniformizável se, e somente se, é admissível.*

Desde que X é uniformizável se, e somente se, é completamente regular (Ver [39], Teorema 38.2), unindo os resultados temos o teorema abaixo.

Teorema 1.2.2. *Um espaço topológico X é admissível se, e somente se, é completamente regular.*

1.3 Redes

Aqui vamos apresentar resultados básicos da teoria de *redes*, visto que este conceito será amplamente utilizado ao longo do trabalho. O leitor que já estiver familiarizado com o tema pode ir direto à Seção 1.4.

Definição 1.3.1. *Um subconjunto não vazio Λ é* dirigido *pela relação binária $\leq$ se:*

1. *$\lambda \leq \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ (reflexividade),*
2. *se $\lambda \leq \mu$ e $\mu \leq \nu$ então $\lambda \leq \nu$ (transitividade),*
3. *dados $\lambda, \mu \in \Lambda$ existe $\nu \in \Lambda$ tal que $\lambda \leq \nu$ e $\mu \leq \nu$.*

Exemplo 1.3.1. *O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ munido com a relação de ordem usual $\leq$ é um conjunto dirigido.*

Exemplo 1.3.2. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{U}_x$ a família de todas vizinhanças do ponto $x \in X$. Considere a seguinte relação em $\mathcal{U}_x$: $U \leq V$ se, e somente se, $V \subset U$. Então a coleção $\mathcal{U}_x$ é um conjunto dirigido.*

Exemplo 1.3.3. *Dados $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ em uma família admissível, a relação $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ fornece uma direção sobre $\mathcal{O}$.*

Exemplo 1.3.4. *Dados Λ_1, Λ_2 conjuntos dirigidos então $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ é um conjunto dirigido pela seguinte relação $(\lambda_1, \lambda_2) \leq (\lambda_1', \lambda_2')$ se, e somente se, $\lambda_1 \leq \lambda_1'$ e $\lambda_2 \leq \lambda_2'$.*

Definição 1.3.2. *Seja Λ um conjunto dirigido. Uma aplicação $x : \Lambda \to X$ definida por $x(\lambda) = x_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$ é denominada uma rede em X e denotada por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

Definição 1.3.3. *Uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge para um ponto $x \in X$ se para qualquer vizinhança U de x existir $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$.*

Observação 1.3.1. *Note que toda sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma rede. Então a convergência de redes generaliza convergência de sequências.*

Proposição 1.3.1. *Dado* $A \subset X$ *um subconjunto de* X *temos que* $x \in \overline{A}$ *se, e somente se, existe uma rede* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *tal que* $x_\lambda \to x$.

Demonstração. Ver [22], Proposição 4.2. □

Proposição 1.3.2. *Um espaço* X *é Hausdorff se, e somente se, toda rede em* X *converge para no máximo um único ponto.*

Demonstração. Ver [22], Proposição 4.4. □

Definição 1.3.4. *Se* $x : \Lambda \to X$ *é uma rede em* X*, dizemos que* $y : \Lambda' \to X$ *é uma sub-rede de* $x : \Lambda \to X$*, onde* Λ' *é um conjunto dirigido, se a aplicação* $\phi : \Lambda' \to \Lambda$ *satisfaz:*

1. *Se* $\mu_1 \leq \mu_2$ *então* $\phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$*; (*$\phi$ *é crescente);*

2. *Dado* $\lambda \in \Lambda$ *existe* $\mu \in \Lambda'$ *tal que* $\phi(\mu) \geq \lambda$*. (*ϕ *é cofinal)*

Denotamos a sub-rede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ por $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$.

Observação 1.3.2. *Não é difícil ver que se uma rede* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ *em* X *converge para um ponto* $x \in X$*, então cada sub-rede também converge para* x.

Proposição 1.3.3. *Um espaço é compacto se, e somente se, cada rede possui sub-rede convergente.*

Demonstração. Ver [22], Proposição 4.7. □

Definição 1.3.5. *Uma rede* (x_λ) *em* X *se diz universal se para cada* $A \subset X$ *a rede está eventualmente em* A *ou eventualmente em* $X \setminus A$*, isto é, se existir* λ_0 *tal que* $x_\lambda \in A$ *ou* $x_\lambda \in X \setminus A$ *se* $\lambda > \lambda_0$.

Proposição 1.3.4. *Toda rede admite sub-rede universal.*

Demonstração. Ver [22], Proposição 4.9. □

1.4 Função Admissível

Seja $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas sobre X. O objetivo dessa seção, é introduzir a noção abstrata de distância com valores em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ (o conjunto das partes de $\mathcal{O}$) que capture a ideia de proximidade, via coberturas, presente na teoria dos espaços uniformes. No entanto, precisamos apresentar inicialmente, algumas observações sobre $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, munido com uma relação de ordem parcial dada pela inclusão inversa, ou seja, dados $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$,

$$\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{E}_2 \text{ se, e somente se, } \mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2.$$

Observe que $\mathcal{O}$ é o menor elemento em $(\mathcal{P}(\mathcal{O}), \prec)$. Em outras palavras, $\mathcal{O}$ é um limitante inferior para $\mathcal{P}(\mathcal{O})$. Além do que, a coleção vazia $\emptyset$ é o maior elemento em $(\mathcal{P}(\mathcal{O}), \prec)$ e portanto um limitante superior para $\mathcal{P}(\mathcal{O})$. Por fim, as operações binárias de união e interseção são compatíveis com a ordem, ou seja, se $\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{D}_1$ e $\mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_2$ então $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ e $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

Para cada $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ e $n \in \mathbb{N}^*$ definimos os elementos $n\mathcal{E}$ e $-n\mathcal{E}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ por:

$$\begin{aligned} -n\mathcal{E} &= \left\{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : \text{existe } \mathcal{V} \in \mathcal{E} \text{ tal que } \mathcal{U} \leqslant \tfrac{1}{2^n}\mathcal{V}\right\}, \\ n\mathcal{E} &= \left\{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : \text{existe } \mathcal{V} \in \mathcal{E} \text{ tal que } \mathcal{V} \leqslant \tfrac{1}{2^n}\mathcal{U}\right\} \end{aligned}$$

Lema 1.4.1. *Sejam $\mathcal{E}, \mathcal{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$. As seguintes propriedades são válidas:*

1. *Se $\mathcal{E} \prec \mathcal{D}$ então $n\mathcal{E} \prec n\mathcal{D}$ e $-n\mathcal{E} \prec -n\mathcal{D}$.*
2. *$m\mathcal{E} \prec n\mathcal{E}$ e $-m\mathcal{E} \prec -n\mathcal{E}$ toda vez que $m \leq n$.*
3. *$m(n\mathcal{E}) = (m+n)\mathcal{E}$ e $-m(-n\mathcal{E}) = -(m+n)\mathcal{E}$.*
4. *$n(-m\mathcal{E}) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $m \leq n$.*
5. *$-m(n\mathcal{E}) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $m \leq n$ e $\mathcal{O}$ é full.*
6. *$n\mathcal{O} = \mathcal{O}$ e $-n\mathcal{O} = \mathcal{O}$ se $\mathcal{O}$ é full.*

Demonstração: Ver [2], Lema 2.1.1. □

A próxima definição recupera sobre o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ a ideia de convergência a zero presente em espaços normados.

Definição 1.4.1. *Uma rede* $(\mathcal{E}_\lambda)$ *em* $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ *converge para* $\mathcal{O}$, *e escrevemos* $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$, *se para cada* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *existir* λ_0 *tal que* $\mathcal{U} \in \mathcal{E}_\lambda$ *toda vez que* $\lambda \geq \lambda_0$.

Observação 1.4.1. *Não é difícil ver que se* $\mathcal{D}_\lambda \prec \mathcal{E}_\lambda$ *e* $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ *então* $\mathcal{D}_\lambda \to \mathcal{O}$. *Em particular, se* $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ *então* $\mathcal{E}_\lambda \cup \mathcal{D} \to \mathcal{O}$ *para todo* $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$, *visto que* $\mathcal{E}_\lambda \cup \mathcal{D} \prec \mathcal{E}_\lambda$. *Além disso, se* $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ *então* $n\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$. *Com efeito, tome* $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ *tais que* $\mathcal{U} \in n\{\mathcal{V}\}$. *Como* $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ *existe* λ_0 *de modo que* $\mathcal{V} \in \mathcal{E}_\lambda$ *sempre que* $\lambda \geq \lambda_0$. *Então* $n\mathcal{E}_\lambda \prec n\{\mathcal{V}\} \prec \{\mathcal{U}\}$ *para todo* $\lambda \geq \lambda_0$. *Portanto* $n\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$.

Também podemos definir:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{Z} \times \mathcal{P}(\mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{O}) \\ & (k, \mathcal{E}) & \longmapsto & \Phi(k, \mathcal{E}) = k\mathcal{E}. \end{array}$$

Para estudar as propriedades da aplicação Φ consideramos $\Phi^+ = \Phi|_{\mathbb{Z}^+ \times \mathcal{P}(\mathcal{O})}$, $\Phi^- = \Phi|_{\mathbb{Z}^- \times \mathcal{P}(\mathcal{O})}$ e $\Phi_n = \Phi|_{\{n\} \times \mathcal{P}(\mathcal{O})}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Teorema 1.4.1. *Com relação a aplicação* Φ *temos:*

1. *As aplicações parciais* Φ^+ *and* Φ^- *são ações de semigrupos em* $\mathcal{P}(\mathcal{O})$.
2. Φ^+ *preserva a ordem e possui ponto fixo* $\mathcal{O}$.
3. Φ_n *preserva a ordem para todo* $n \in \mathbb{Z}$.
4. Φ_n *possui ponto fixo* $\mathcal{O}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
5. *Se* $\mathcal{O}$ *é full,* Φ_n *possui ponto fixo* $\mathcal{O}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Ver [2], Teorema 1.2.1. □

Finalmente, podemos introduzir a função admissível. Para tanto, observe que cada cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ satisfazendo $y \in St[x, \mathcal{U}]$ atribui uma relação de proximidade topológica ao par $(x, y) \in X \times X$ o que nos motiva a definir a seguinte função.

Definição 1.4.2. *A função admissível de* X *associada à família de coberturas* $\mathcal{O}$ *é definida por*

$$\rho : X \times X \to \mathcal{P}(\mathcal{O})$$

$$\rho(x, y) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]\}.$$

A aplicação ρ toma valores no monóide comutativo parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(\mathcal{O}), \cap, \prec)$. Com efeito, o elemento neutro de $(\mathcal{P}(\mathcal{O}), \cap)$ é $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O} \prec \mathcal{E}$ para todo $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$. Além do mais, $\cap$ e $\prec$ são compatíveis pois se $\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{D}_1$ e $\mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_2$ então $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

Observação 1.4.2. *Se $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ com $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ então $\mathcal{V} \in \rho(x, y)$. Assim $\rho(x, y) \prec n\rho(x, y)$ e $r\rho(x, y) \prec n\rho(x, y)$ se $r < n$ para todo $x, y \in X$ e $r, n \in \mathbb{N}$.*

Proposição 1.4.1. *A função admissível satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para todo $x, y \in X$.*

2. *$\mathcal{O} \prec \rho(x, y)$, para todo $x, y \in X$, e $\mathcal{O} = \rho(x, x)$.*

3. *Se X é Hausdorff, $\mathcal{O} = \rho(x, y)$ se, e somente se, $x = y$.*

4. *$\rho(x, y) \prec 1(\rho(x, z) \cap \rho(z, y))$ para todo $x, y, z \in X$.*

5. *$\rho(x, y) \prec n(\rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \ldots \cap \rho(x_n, y))$ para todo $x, y, x_1, ..., x_n \in X$.*

Demonstração: Ver [2], Proposição 1.3.1. □

Na Definição 1.4.2 assumimos a possibilidade de $\rho(x, y)$ ser o conjunto vazio de $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, o que em certo sentido recupera a ideia de espaço métrico estendido onde a distância entre dois pontos pode assumir valor infinito. Em contrapartida, se $\mathcal{O}$ for uma família de coberturas full então $\rho(x, y) \neq \emptyset$ para todo $x, y \in X$, posto que $X = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ para todo $x \in X$.

Proposição 1.4.2. *Sejam $x, y, z \in X$ e $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$. Se $\rho(x, z) \prec -1\mathcal{E}$ e $\rho(z, y) \prec -1\mathcal{E}$ então $\rho(x, y) \prec \mathcal{E}$.*

Demonstração: Ver [2], Proposição 1.3.2. □

Exemplo 1.4.1. *Considere G um grupo topológico cujo elemento neutro denotamos por 1 e $\mathcal{B}$ um sistema de vizinhanças simétricas abertas da identidade de G. Para cada $V \in \mathcal{B}$, defina a cobertura aberta $\mathcal{R}_V$ de G por $\mathcal{R}_V = \{Vg : g \in G\}$ e a cobertura aberta $\mathcal{L}_V = \{gV : g \in G\}$. Assim, para todo $g \in G$ e $V \in \mathcal{B}$ temos que*

1. *$St[g, \mathcal{R}_V] = St[1, \mathcal{R}_V]g = V^2 g$.*

2. *$St[g, \mathcal{L}_V] = gSt[1, \mathcal{R}_V] = gV^2$.*

3. $St[1, \mathcal{R}_V] = St[1, \mathcal{L}_V] = V^2$.

No entanto, dado que $\mathcal{O}_{\mathcal{R}} = \{\mathcal{R}_V : V \in \mathcal{B}\}$ *e* $\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \{\mathcal{L}_V : V \in \mathcal{B}\}$ *são famílias admissíveis de coberturas abertas de* G *(Ver [25], página 113) dados* $g, h \in G$ *obtemos:*

$$\rho_{\mathcal{O}_{\mathcal{R}}}(g,h) = \{\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_{\mathcal{R}} : gh^{-1} \in V^2\}$$

$$\rho_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}}(g,h) = \{\mathcal{L}_V \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}} : hg^{-1} \in V^2\}.$$

Para cada $x \in X$ e $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ a $\mathcal{E}$-bola de x é definida por $\mathrm{B}(x, \mathcal{E}) = \{y \in X : \rho(x,y) \prec \mathcal{E}\}$.

Observação 1.4.3. *Temos* $\mathrm{B}(x, \emptyset) = X$, *visto que* $\rho(x,y) \prec \emptyset$ *para todo* $x, y \in X$.

Lema 1.4.2. *As bolas com respeito a aplicação* ρ *satisfazem os itens abaixo:*

1. $\mathrm{B}(x, \{\mathcal{U}\}) = \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ *para todo* $x \in X$ *e* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$.

2. $\mathrm{B}(x, \mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{V} \in \mathcal{E}} \mathrm{St}[x, \mathcal{V}]$ *para todo* $x \in X$ *e* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$.

3. $x \in int(\mathrm{B}(x, \mathcal{E}))$ *para todo* $x \in X$ *e* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$.

4. *Se* X *é Hausdorff então* $\mathrm{B}(x, \mathcal{O}) = \{x\}$ *para todo* $x \in X$.

Demonstração. A prova segue pela Proposição 1.4.1. □

Se $\mathcal{E}$ contém uma cobertura minimal $\mathcal{U}$ então $\mathrm{B}(x, \mathcal{E}) = \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ para todo $x \in X$. De modo geral $\mathrm{B}(x, \mathcal{E} \cup \{\mathcal{U}\}) = \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ para todo $x \in X$ sempre que $\mathcal{U} \in \min(\mathcal{E})$.

Proposição 1.4.3. *Considere* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_d)$ *e denote por* $\delta_0 := \inf\{\epsilon > 0 : \mathcal{U}_\epsilon \in \mathcal{E}\}$. *Então temos as seguintes inclusões*

$$B_d(x, \delta_0) \subset \mathrm{B}(x, \mathcal{E}) \subset B_d(x, 4\delta_0).$$

Demonstração: Ver [2], Proposição 1.3.3. □

As proposições a seguir serão usadas em resultados futuros.

Proposição 1.4.4. *Seja* (x_λ) *uma rede em* X. *Então* $x_\lambda \to x$ *se, e somente se,* $\rho(x_\lambda, x) \to \mathcal{O}$.

Demonstração. Segue pelas Definições 1.4.1 e 1.4.2. □

Diâmetro estendido e conjuntos limitados

Estamos prontos para introduzir o conceito de diâmetro e de limitação em nosso ambiente de estudo.

Definição 1.4.3. *O diâmetro de $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$, é o conjunto $\mathrm{D}(Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ definido como*

$$\mathrm{D}(Y) = \bigcap_{x,y \in Y} \rho(x, y).$$

Definição 1.4.4. *Um subconjunto Y de X é limitado com respeito à $\mathcal{O}$ se existir $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ para todo $x, y \in Y$.*

Observação 1.4.4. *Se $Y \subset X$ é limitado então $\mathrm{D}(Y) \neq \emptyset$. Além disso, $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(Y)$ se, e somente se, Y é limitado por $\mathcal{U}$.*

Proposição 1.4.5. *Dados $A, B \subset X$ não vazios, as seguintes propriedades são válidas:*

1. $\rho(x, y) \prec \mathrm{D}(A)$ *para todo* $x, y \in A$.
2. $\mathrm{D}(A) \prec \mathrm{D}(B)$ *se* $A \subset B$.
3. $\mathrm{D}(A) \prec \mathrm{D}(\overline{A}) \prec 2\mathrm{D}(A)$.

Demonstração: Ver [2], Proposição 1.3.8. □

1.5 Métrica de Hausdorff generalizada

A seguir, apresentamos a semidistância de Hausdorff generalizada e a distância de Hausdorff generalizada, uma vez que tais conceitos serão utilizados no capítulo 4. Antes, porém, definimos o que vem a ser a noção abstrata de distância de um ponto a um conjunto.

Definição 1.5.1. *Dados $x \in X$ e $A \subset X$ com $A \neq \emptyset$ definimos $\rho(x, A) \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ por*

$$\rho(x, A) = \bigcup_{a \in A} \rho(x, a).$$

A proposição abaixo traz propriedades relevantes de $\rho(x, A)$ e é importante para a obtenção de alguns resultados apresentados no prosseguimento do trabalho.

Proposição 1.5.1. *Dados $x \in X$ e $A, B \subset X$, as seguintes propriedades são válidas:*

1. $\rho(x, A) \prec \rho(x, a)$ *para todo* $a \in A$.

2. *Se* $B \supset A$ *então* $\rho(x, B) \prec \rho(x, A)$.

3. $\rho(x, A) = \mathcal{O}$ *se, e somente se,* $x \in \overline{A}$.

4. $\rho(x, \overline{A}) = \rho(x, A)$.

Demonstração: Ver [2], Proposição 2.1.1. $\square$

Definição 1.5.2. *Para* $A, B \subset X$*, definimos o excesso de* B *sobre* A *denotado por* $\rho_A(B)$ *como*

$$\rho_A(B) = \bigcap_{b \in B} \rho(b, A) = \bigcap_{b \in B} \bigcup_{a \in A} \rho(b, a)$$

e além disso a coleção $\rho_H(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ *dada por*

$$\rho_H(A, B) = \rho_A(B) \cap \rho_B(A) = \left\{ \bigcap_{b \in B} \bigcup_{a \in A} \rho(a, b) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{a \in A} \bigcup_{b \in B} \rho(a, b) \right\}.$$

A coleção $\rho_H(A, B)$ é uma relação simétrica, enquanto $\rho_A(B)$ não é simétrica. Além disso, pelo item 4. da Proposição 1.5.1 temos $\rho_H(A, B) = \rho_H(\overline{A}, \overline{B})$ para $A, B \subset X$ e com isso consideramos somente subconjuntos fechados ao fazer uso da aplicação ρ_H.

Observação 1.5.1. *Pelo que foi visto, podemos escrever:*

1. $\rho(x, A) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : St[x, \mathcal{U}] \cap A \neq \emptyset\}$.

2. $\rho_A(B) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : B \subset St[A, \mathcal{U}]\}$.

3. $\rho_H(A, B) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : B \subset St[A, \mathcal{U}]$ *e* $A \subset St[B, \mathcal{U}]\}$.

Proposição 1.5.2. *A aplicação* ρ_H *de* $\mathcal{H}(X)$ *associada a* $\mathcal{O}$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\rho_H(A, B) = \rho_H(B, A)$ *para todo* $A, B \in \mathcal{H}(X)$.

2. $\rho_H(\{x\}, \{y\}) = \rho(x, y)$ *para todo* $x, y \in X$.

3. $\rho_H(A, B) = \mathcal{O}$ *se, e somente se,* $A = B$.

4. $\rho_H(A, C) \prec 1(\rho_H(A, B) \cap \rho_H(B, C))$ *para todo* $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$.

5. $\rho_H(A \cup B, C \cup D) \prec \rho_H(A, C) \cap \rho_H(B, D)$ *para todo* $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$.

6. $\rho_H(A,B) \prec \mathcal{E}$ *se, e somente se,* $A \subset \mathrm{B}(B,\mathcal{E})$ *e* $B \subset \mathrm{B}(A,\mathcal{E})$*.*

Demonstração: Ver [2], Proposição 2.1.2. □

O próximo resultado será útil mais adiante.

Proposição 1.5.3. *Seja* $A \subset X$ *um subconjunto não vazio e tome uma rede convergente* $x_\lambda \to x$ *em* X*. Assim,* $x \in \overline{A}$ *se, e somente se,* $\rho_A(x_\lambda) \to \mathcal{O}$*.*

Demonstração: Ver [2], Proposição 2.1.4. □

Pelo item 3. da Proposição 1.5.1 temos que

$$\overline{A} = \{x \in X : \rho(x,A) = \mathcal{O}\}.$$

Com isso, nosso critério de aproximação mínima dado pela igualdade $\rho(x,A) = \mathcal{O}$ é compatível com a axiomatização clássica de proximidade topológica entre um ponto x e um conjunto A expressa pela relação $x \in \overline{A}$. Além do mais, pelo mesmo item da referida proposição, dados (X,d) um espaço métrico e $\mathcal{O}_d$ a família admissível de coberturas abertas $\mathcal{U}_\epsilon = \{B(x,\epsilon) : x \in X\}$ por ϵ-bolas, $\epsilon > 0$, temos que $\rho(x,A) = \mathcal{O}_d$ se, e somente se, $d(x,A) = 0$.

Proposição 1.5.4. *Seja* K *um subconjunto compacto de* X *e* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *uma rede em* X*. Se* $\rho(x_\lambda, K) \to \mathcal{O}$ *então* x_λ *admite sub-rede convergente* $x_{\lambda_\mu} \to y$*, com* $y \in \overline{K}$*.*

Demonstração: Ver [2], Proposição 2.1.5. □

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos Não-Autônomos e a Compactificação de Stone-Čech

Neste capítulo trabalharemos com a noção de atratores e repulsores do passado para sistemas dinâmicos não-autômomos com conjunto base $P = \mathbb{T}$, onde $\mathbb{T}$ é o tempo $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. O propósito é caracterizar o atrator do passado por meio da compactificação de Stone-Čech $\beta\mathbb{T}$. Considerando um sistema dinâmico não-autônomo (θ, φ) com fluxo base θ sendo a adição, sua extensão $\tilde{\theta}$ a $\beta\mathbb{T}$ admite um único par atrator-repulsor não-trivial, $(\omega^+(0), \omega^-(0))$, onde $\omega^+(0)$ e $\omega^-(0)$ são os conjuntos limites de 0. Esses conjuntos limites representam respectivamente o futuro e o passado do sistema.

2.1 Definições e resultados preliminares

Esta seção contém as definições básicas e resultados em sistemas dinâmicos autônomos e não-autônomos que serão utilizados ao longo do capítulo.

2.1.1 Sistemas dinâmicos autônomos

As noções e resultados em sistemas dinâmicos autônomos que consideramos nesse capítulo são baseadas nas referências [7].

Seja X um espaço topológico, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, e $\theta : \mathbb{T} \times X \to X$ um sistema dinâmico autônomo em X, isto é, θ é uma aplicação satisfazendo

$$\theta(0, x) = x \quad \text{e} \quad \theta(t + s, x) = \theta(t, \theta(s, x))$$

para todo $x \in X$ e $t, s \in \mathbb{T}$. Para cada $t \in \mathbb{T}$, a aplicação transição $\theta_t : X \to X$ é definida por $\theta_t(x) = \theta(t, x)$. Para um conjunto $Y \subset X$ dado, o **conjunto limite positivo** $\omega^+(Y)$ e o **conjunto limite negativo** $\omega^-(Y)$ de Y são respectivamente definidos por

$$\omega^+(Y) = \{x \in X; \text{existem redes } (x_\lambda) \text{ em } Y \text{ e } t_\lambda \to +\infty \text{ tais que } \theta(t_\lambda, x_\lambda) \to x\}$$

$$\omega^-(Y) = \{x \in X; \text{existem redes } (x_\lambda) \text{ em } Y \text{ e } t_\lambda \to -\infty \text{ tais que } \theta(t_\lambda, x_\lambda) \to x\}.$$

Ambos os conjuntos limites são invariantes e fechados. Para cada $x \in X$, definimos $\omega^+(x) = \omega^+(\{x\})$ e $\omega^-(x) = \omega^-(\{x\})$. O **conjunto limite prolongacional positivo** $J^+(x)$ e o **conjunto limite prolongacional negativo** $J^-(x)$ de x são respectivamente dados por

$$J^+(x) = \{y \in X; \text{existem redes } x_\lambda \to x \text{ e } t_\lambda \to +\infty \text{ tais que } \theta(t_\lambda, x_\lambda) \to y\}$$

$$J^-(x) = \{y \in X; \text{existem redes } x_\lambda \to x \text{ e } t_\lambda \to -\infty \text{ tais que } \theta(t_\lambda, x_\lambda) \to y\}$$

Para um conjunto $Y \subset X$ dado, definimos $J^+(Y) = \bigcup_{x \in Y} J^+(x)$ e $J^-(Y) = \bigcup_{x \in Y} J^-(x)$. Ambos os conjuntos limites prolongacionais são invariantes. Se Y é compacto então ambos $J^+(Y)$ e $J^-(Y)$ são fechados ([7]). Para qualquer par de pontos $x, y \in X$, temos $y \in J^+(x)$ se, e somente se, $x \in J^-(y)$.

Um conjunto $A \subset X$ é dito ser um atrator de Conley se existe uma vizinhança U de A tal que $\omega^+(U) = A$. Um conjunto $R \subset X$ é chamado de repulsor de Conley se existe uma vizinhança V de R tal que $\omega^-(U) = R$. Se X é um espaço compacto e $A \subset X$ é um atrator de Conley então o conjunto $A^* = \{x \in X; \omega^+(x) \cap A = \emptyset\}$ é um repulsor de Conley. Esse repulsor A^* é chamado o repulsor complementar de A e coincide com o conjunto de todos os pontos $x \in X$ tais que $\omega^+(x) \not\subset A$. Então $x \in X - (A \cup A^*)$ implica que $\omega^+(x) \subset A$ e $\omega^-(x) \subset A^*$. Esse resultado de Conley admite a seguinte versão com conjuntos limites prolongacionais ao invés de conjuntos limites.

Teorema 2.1.1. *Seja X um espaço compacto Hausdorff e $A \subset X$ um atrator de Conley para o sistema dinâmico $\theta : \mathbb{T} \times X \to X$. Se $x \in X - (A \cup A^*)$ então $J^+(x) \subset A$ e $J^-(x) \subset A^*$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{O}$ uma cobertura de uniformidade de X. Seja U uma vizinhança de A tal que $\omega^+(U) = A$. Considere uma cobertura $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{O}$ tal que a estrela $U_{\mathcal{U}_0} = St[A, \mathcal{U}_0]$ está contida em U. Para qualquer refinamento $\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}_0$, temos $U_{\mathcal{U}} = St[A, \mathcal{U}] \subset U$, e então $\omega^+(U_{\mathcal{U}}) = A$. Existe $\tau_{\mathcal{U}} > 0$ tal que $\overline{\theta([\tau_{\mathcal{U}}, +\infty) \times U_{\mathcal{U}}} \subset U_{\mathcal{U}}$. Tomando $U^*_{\mathcal{U}} = X - (\overline{\theta([\tau_{\mathcal{U}}, +\infty) \times U_{\mathcal{U}})}$, temos que $A^* = \omega^-(U^*_{\mathcal{U}})$. Afirmamos que $J^+(U_{\mathcal{U}}) \subset A$ e $J^-(U^*_{\mathcal{U}}) \subset A^*$. Com efeito, se $x \in J^+(U_{\mathcal{U}})$ então $x \in J^+(u)$ para algum $u \in U_{\mathcal{U}}$. Isto significa que existe redes $x_\lambda \to u$ e $t_\lambda \to +\infty$ tais que $\theta(t_\lambda, x_\lambda) \to x$. Como $U_{\mathcal{U}}$ é uma vizinhança de u, podemos assumir $x_\lambda \in U_{\mathcal{U}}$ para todo λ, e então $x \in \omega^+(U_\mathcal{U}) = A$. Assim $J^+(U_\mathcal{U}) \subset A$. A inclusão $J^-(U^*_\mathcal{U}) \subset A^*$ é provada por um caminho similar. Agora suponha que $x \in X - (A \cup A^*)$ e tome qualquer $y \in J^+(x)$. Então $x \in J^-(y)$. Como $x \notin A^*$ temos que $x \notin J^-(U^*_\mathcal{U})$ e, portanto, $y \notin U^*_\mathcal{U}$. Isso significa que $y \in \overline{(\theta([\tau_\mathcal{U}, +\infty) \times U_\mathcal{U})} \subset U_\mathcal{U}$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ que refina $\mathcal{U}_0$. Assim, $y \in \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} St[A, \mathcal{U}] = A$ e, portanto, $J^+(x) \subset A$. Uma vez que $x \notin A$, podemos encontrar uma cobertura $\mathcal{U}$ tal que $x \notin U_\mathcal{U}$, e então $x \notin \overline{\theta([\tau_\mathcal{U}, +\infty) \times U_\mathcal{U})}$. Isso significa que $x \in U^*_\mathcal{U}$ e assim $J^-(x) \subset J^-(U^*_\mathcal{U}) \subset A^*$, completando a prova. □

2.1.2 Sistemas dinâmicos não-autônomos

Os conceitos e resultados em sistemas dinâmicos não-autonomos considerados nesse capítulo e que serão generalizados nos capítulos seguintes estão baseados em [24] e [31].

Definição 2.1.1. *Um **sistema dinâmico não-autônomo** com conjunto base P, um espaço métrico (X, d), e um tempo $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ consiste dos seguintes dois ingredientes:*

*(i) Um sistema dinâmico autônomo $\theta : \mathbb{T} \times P \to P$ chamado **fluxo base** ou **sistema de condução**.*

*(ii) Uma **aplicação cociclo** $\varphi : \mathbb{T} \times P \times X \to X$ sobre θ, isto é, para todo $t, s \in \mathbb{T}$, $p \in P$ e $x \in X$, temos*

$$\varphi(0, p, x) = x \quad e \quad \varphi(t + s, p, x) = \varphi(t, \theta_s(p), \varphi(s, p, x)),$$

*e a aplicação $\varphi(., p, .) : \mathbb{T} \times X \to X$ é contínua para todo $p \in P$. O espaço métrico X é chamado **espaço de fase** e o espaço produto $P \times X$ é chamado de **espaço de fase estendido**.*

Qualquer subconjunto $\mathbf{M} \subset P \times X$ é chamado um **conjunto não-autônomo**. Para cada $p \in P$, a p-fibra de $\mathbf{M}$ é dada por $M(p) := \{x \in X; (p, x) \in \mathbf{M}\}$. Denotaremos por $P^*(\mathbf{A})$ o conjuntos dos pontos $p \in P$ tais as fibras A_p do conjunto não-autônomo $\mathbf{A}$ são não-vazias. Definimos por $O^+(p) := \{\theta_t(p) : t \geq 0\}$ e $O^-(p) := \{\theta_t(p) : t \leq 0\}$; a **órbita** de p é dada pela união $O(p) = O^+(p) \cup O^-(p)$. O conjunto não-autônomo $\mathbf{M}$ é um **conjunto não-autônomo do passado** se $O^-(p) \subset P^*(\mathbf{M})$ para cada $p \in P^*(\mathbf{M})$. Chamamos $\mathbf{M}$ de **invariante** se $\varphi(t, p, M(p)) = M(\theta_t(p))$ para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$ e $t \in \mathbb{T}$ com $\theta_t(p) \in P^*(\mathbf{M})$; $\mathbf{M}$ é fechado ou compacto se, respectivamente, $M(p)$ é fechado ou compacto para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$.

A aplicação $\psi : \mathbb{T} \times P \times X \to P \times X$ definida como

$$\psi(t, (p, x)) = (\theta_t(p), \varphi(t, p, x)) \quad t \in \mathbb{T}, (p, x) \in P \times X$$

é um sistema dinâmico autônomo em $P \times X$ e é chamado de **fluxo produto cruzado**.

Para um dado sistema dinâmico não-autônomo (θ, φ) podemos considerar o sistema dinâmico não-autônomo de tempo reverso (θ^*, φ^*), onde $\theta^*(t,p) = \theta(-t,p)$ e $\varphi^*(t,p,x) = \varphi(-t,p,x)$.

Definição 2.1.2. *Para um conjunto não-autônomo $\boldsymbol{M}$, o conjunto ω-limite de $\boldsymbol{M}$ (no sentido backward) é o conjunto não-autônomo $\omega^{\boldsymbol{M}}$ cujas fibras são definidas por*

$$\omega^{\boldsymbol{M}}(p) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq T} \varphi(s, \theta_{-s}(p), M(\theta_{-s}(p)))}$$

para todo $p \in P$.

Para o que vem a seguir, $h(A,B)$ denota a semidistância de Hausdorff dos conjuntos $A, B \subset X$

$$h(A,B) := \sup_{a \in A} d(a,B) = sup_{a \in A} \left\{ \inf_{b \in B} d_X(a,b) \right\}.$$

Definição 2.1.3. *Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{R}$ conjuntos não-autônomos do passado compactos e invariantes e $\mathcal{M}$ uma coleção de conjuntos não-autônomos do passado de (θ, φ).*

*(i) $\boldsymbol{A}$ é chamado um **$\mathcal{M}$-atrator do passado** se para cada $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{A})$ e*

$$\lim_{t \to +\infty} h\left(\varphi(t, \theta_{-t}(p), M(\theta_{-t}(p))), A(p)\right) = 0$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$.

*(ii) $\boldsymbol{A}$ é chamado um **atrator do passado** se $\boldsymbol{A}$ é um $\{\boldsymbol{M}\}$-atrator do passado para algum conjunto não-autônomo $\boldsymbol{M}$ satisfazendo a seguinte propriedade: existe um $\epsilon > 0$ tal que para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$, existe um $\tau > 0$ com*

$$B(A(\theta_{-t}(p), \epsilon)) \subset M(\theta_{-t}(p)) \text{ para todo } t \geq \tau.$$

*(iii) $\boldsymbol{R}$ é chamado um **$\mathcal{M}$-repulsor** do passado se para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{R})$ e*

$$\lim_{t \to +\infty} h\left(\varphi(-t, p, M(p)), R(\theta_{-t}(p))\right) = 0$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$.

*(iv) $\boldsymbol{R}$ é chamado um **repulsor do passado** se $\boldsymbol{R}$ é um $\{\boldsymbol{M}\}$-repulsor do passado para algum conjunto não-autônomo $\boldsymbol{M}$ satisfazendo a seguinte propriedade: existe um $\epsilon > 0$ tal que para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$, existe um $\tau > 0$ com*

$$B(A(\theta_{-t}(p), \epsilon)) \subset M(\theta_{-t}(p)) \text{ para todo } t \geq \tau.$$

Ao longo desse capítulo estudaremos atratores e repulsores não-autônomos somente para o caso de atratividade e repulsividade no passado. Resultados similares para o caso do futuro podem ser obtidos usando o sistema dinâmico não-autônomo reverso.

A seguinte conceito de conjunto de absorção do passado dá uma contribuição fundamental para a existência de atratores do passado.

Definição 2.1.4. *Seja $\boldsymbol{B}$ um conjunto não-autônomo do passado e $\mathcal{M}$ uma coleção de conjuntos não-autônomos do passado. Então $\boldsymbol{B}$ é dito ser um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado se para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{B})$ e existe $t^* > 0$ tal que*

$$\varphi(t, \theta_{-t}(p), M(\theta_{-t}(p))) \subset B(p)$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ e $t \geq t^*$.

O teorema a seguir estabelece que o conjunto ω-limite $\omega^{\mathbf{B}}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado se $\mathbf{B}$ é um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado e compacto.

Teorema 2.1.2. *Seja (θ, φ) um sistema dinâmico não-autônomo com conjunto base P e espaço métrico compacto X. Se $\mathcal{M}$ é uma coleção de conjuntos não-autônomos do passado e $\boldsymbol{B}$ é um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado e compacto então existe um $\mathcal{M}$-atrator do passado $\boldsymbol{A}$ satisfazendo*

$$A(p) = \omega^{\boldsymbol{B}}(p) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq \tau} \varphi(s, \theta_{-s}(p), B(\theta_{-s}(p))}$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{B})$, que é minimal no seguinte sentido: se $\boldsymbol{C}$ é um conjunto não-autônomo do passado tal que $P^*(\boldsymbol{C}) \subset P^*(\boldsymbol{B})$, $C(p)$ é fechado, para todo $p \in P^*(\boldsymbol{C})$, e

$$\lim_{t \to +\infty} h\left(\varphi(t, \theta_{-t}(p), B(\theta_{-t}(p)), C(p)\right) = 0$$

então $A(p) \subset C(p)$. Além disso, $\boldsymbol{A}$ é o único $\mathcal{M}$-atrator do passado sempre que $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}$.

Demonstração: [20] □

A compacidade em X nesse teorema pode ser omitida sempre que $\mathbf{B} \in \mathcal{M}$. Além disso, $\mathbf{B} \in \mathcal{M}$ implica $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ e então uma condição adicional em $\mathcal{M}$ assegura que $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$. De fato, é suficiente assumir que se $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ e $\mathbf{M}'$ é um conjunto não-autônomo com $P^*(\mathbf{M}') \subset P^*(\mathbf{M})$ e $M'(p) \subset M(p)$, $p \in P^*(\mathbf{M}')$, então $\mathbf{M}' \in \mathcal{M}$.

Agora escolhemos um subconjunto $P^* \subset P$ tal que $P^* \cap O(p)$ é um conjunto unitário para todo $p \in P$. Escrevemos $P^* = P^*_p \cup P^*_n$ com P^*_p contendo todos os pontos periódicos em

P^* e $P_n^* := P^* - P_p^*$. Seja $\mathbf{R}$ um repulsor do passado. Então existe um $\eta > 0$ tal que para todo $p \in P^*$, existe um $t_p > 0$ com

$$\lim_{t \to +\infty} h\left(\varphi(-t, \theta_{-\tau}(p), B(R(\theta_{-\tau}(p)), \eta)), R(\theta_{-\tau-t}(p))\right) = 0$$

para todo $\tau \geq t_p$. Para $\delta \in (0, \eta]$, definimos o conjunto não-autônomo compacto $\mathbf{B}_\delta$ pondo

$$B_\delta(\theta_{-t}(p)) := \begin{cases} X - B(R(\theta_{-t}(p)), \delta) \text{ se } t \geq t_p \\ X \text{ se } t < t_p \end{cases}$$

para todo $p \in P_n^*$ e $t \in \mathbb{T}$ e

$$B_\delta(\theta_{-t}(p)) := X - B(R(\theta_{-t}(p)), \delta)$$

para todo $p \in P_p^*$ e $t \in \mathbb{T}$. Então definimos $\mathcal{M} := \{B_\delta : \delta \in (0, \eta]\}$. O teorema a seguir, provado em [31], teorema 4.3, estabelece a noção de par atrator-repulsor do passado.

Teorema 2.1.3. *Seja $\boldsymbol{R}$ um repulsor do passado e $\mathcal{M} := \{\boldsymbol{B}_\delta : \delta \in (0, \eta]\}$ definida acima. Então existe um único $\mathcal{M}$-atrator do passado $\boldsymbol{R}_* \subset \boldsymbol{B}_\eta$ que é também um atrator do passado. Além disso, $\boldsymbol{R}_*$ é o atrator do passado maximal fora de $\boldsymbol{R}$ no seguinte sentido: se $\boldsymbol{A}$ é um atrator do passado tal que $\boldsymbol{R}_* \subsetneq \boldsymbol{A}$ então $\boldsymbol{A}$ intercepta $\boldsymbol{R}$.*

2.2 A β-compactificação e extensões

Nesta seção consideramos o conceito da compactificação de Stone-Čech com a finalidade de estudar extensões de sistemas dinâmicos não-autônomos.

2.2.1 A compactificação de Stone-Čech

Referimos a [17] e [18] para a interpretação de Stone-Čech via ultrafiltros. Ao longo da seção, $\mathbb{T}$ denota os conjuntos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

Seja $\beta\mathbb{T}$ a compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{T}$ interpretada como o conjunto de todos os ultrafiltros dos conjuntos fechados de $\mathbb{T}$. Para cada $t \in \mathbb{T}$, temos o ultrafiltro $u_t = \{A \subset \mathbb{T} : t \in A\}$ e o mergulho $t \in \mathbb{T} \longmapsto u_t \in \beta\mathbb{T}$. Assim, assumimos que $\mathbb{T} \subset \beta\mathbb{T}$ e $\overline{\mathbb{T}} = \beta\mathbb{T}$. Mais ainda, $\beta\mathbb{T}$ admite a estrutura de semigrupo tal que o mergulho $t \longmapsto u_t$ é um monomorfismo, isto é, é injetivo e $u_{t+s} = u_t u_s$ (veja [17], [18] e [19]).

Considere o sistema dinâmico $\theta : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ definido pela adição $\theta(t, s) = t + s$. Esse se extende a um sistema $\tilde{\theta} : \mathbb{T} \times \beta\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ dado por $\tilde{\theta}(t, u) = u_t u$, onde $u_t u = \{t + A : A \in u\}$. O teorema a seguir foi provado em [34], teorema 3.9.

Teorema 2.2.1. *O conjunto limite positivo $\omega^+(0)$ em $\beta\mathbb{T}$ é um atrator de Conley de $\tilde{\theta}$ e seu repulsor complementar é $\omega^+(0)^* = \omega^-(0)$.*

Então $(\omega^+(0), \omega^-(0))$ é um par atrator-repulsor do sistema estendido $\tilde{\theta}$ em $\beta\mathbb{T}$. Pelos teoremas 2.1.1 e 2.2.1, obtemos a seguinte propriedade dos conjuntos limites em $\beta\mathbb{T}$.

Corolário 2.2.1. *Para todo $p \in \mathbb{T}$ temos que $J^+(p) \subset \omega^+(0)$ e $J^-(p) \subset \omega^-(0)$.*

Demonstração: Uma vez que $\mathbb{T}$ é denso em $\beta\mathbb{T}$ e ambos os conjuntos $\omega^+(0)$ e $\omega^-(0)$ são invariantes, segue que $\mathbb{T} \subset \beta\mathbb{T} - (\omega^+(0) \cup \omega^-(0))$. O resultado segue pelos teoremas 2.1.1 e 2.2.1. □

Este resultado é crucial para o teorema principal desse capítulo. O seguinte resultado técnico também será usado posteriormente.

Proposição 2.2.1. *Sejam (t_λ) uma rede em $\mathbb{T}$ e (u_λ) uma rede em $\beta\mathbb{T}$ tais que $t_\lambda \to +\infty$, $u_\lambda \to u \in \beta\mathbb{T}$, e $\tilde{\theta}_{t_\lambda}(u_\lambda) \to p \in \mathbb{T}$. Então $u \in \omega^-(0)$.*

Demonstração: Note que $p \in J^+(u)$ o que implica que $u \in J^-(p)$. Como $p \in \mathbb{T}$ temos que $J^-(p) \subset \omega^-(0)$ pelo corolário 2.2.1 e, assim, $u \in \omega^-(0)$. □

2.2.2 Extensões de Sistemas Dinâmicos Não-Autônomos

Agora discutiremos condições suficientes para estender um sistema dinâmico não-autônomo. Seja (θ, φ) um sistema dinâmico não-autônomo com conjunto base $P = \mathbb{T}$ e espaço compacto X, onde $\theta : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ é a adição. Para cada $t \in \mathbb{T}$ definimos a aplicação parcial $\varphi_t : \mathbb{T} \times X \to X$ por $\varphi_t(s, x) = \varphi(t, s, x)$. Assumimos que φ_t é contínua para todo $t \in \mathbb{T}$. No que vem a seguir descrevemos uma condição geral para estender a aplicação cociclo φ sobre θ para uma aplicação cociclo $\tilde{\varphi}$ sobre $\tilde{\theta}$, onde $\tilde{\theta} : \mathbb{T} \times \beta\mathbb{T} \to \beta\mathbb{T}$ é a extensão de θ.

Proposição 2.2.2. *Assuma que $\tilde{\varphi}_t : \beta\mathbb{T} \times X \to X$ é uma extensão contínua da aplicação parcial $\varphi_t : \mathbb{T} \times X \to X$ para cada $t \in \mathbb{T}$. Então a aplicação $\tilde{\varphi} : \mathbb{T} \times \beta\mathbb{T} \times X \to X$ definida por $\tilde{\varphi}(t, u, x) = \tilde{\varphi}_t(u, x)$ é uma aplicação cociclo sobre $\tilde{\theta}$.*

Demonstração: Para um dado $u \in \beta\mathbb{T}$ existe uma rede (t_λ) em $\mathbb{T}$ tal que $t_\lambda \to u$. Pela continuidade temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(t+s,u,x) &= \lim_{\lambda} \varphi(t+s,t_\lambda,x)\\
&= \lim_{\lambda} \varphi(t,\theta_s(t_\lambda),\varphi(s,t_\lambda,x))\\
&= \tilde{\varphi}(t,\lim_{\lambda}\theta_s(t_\lambda),\lim_{\lambda}\varphi(s,t_\lambda,x))\\
&= \tilde{\varphi}(t,\theta_s(\lim_{\lambda} t_\lambda),\varphi(s,\lim_{\lambda} t_\lambda,x))\\
&= \tilde{\varphi}(t,\tilde{\theta}_s(u),\tilde{\varphi}(s,u,x)),
\end{aligned}$$

e, portanto, $\tilde{\varphi}$ define um cociclo em $\tilde{\theta}$. □

Assim, temos que investigar as possibilidades de extensão para as aplicação parciais $\varphi_t : \mathbb{T} \times X \to X$. A continuidade uniforme é uma condição geral para estender φ_t. Com efeito, uma vez que tanto X quanto $\beta\mathbb{T}$ são espaços compactos Hausdorff também são espaços uniformizáveis com uma cobertura de uniformidades gerada pelas coberturas abertas finitas. Seja $\beta\mathbb{T} \times X$ munido com a uniformidade produto e considere $\mathbb{T} \times X \subset \beta\mathbb{T} \times X$ munido com a uniformidade relativa. Notando que $\overline{\mathbb{T} \times X} = \beta\mathbb{T} \times X$ na topologia produto, se cada aplicação parcial $\varphi_t : \mathbb{T} \times X \to X$ é uniformemente contínua então existe uma extensão uniformemente contínua $\tilde{\varphi}_t : \beta\mathbb{T} \times X \to X$.

A fim de fornecer condições alternativas para estender as aplicações φ_t, recorremos a alguns resultados topológicos. Para dois espaços topológicos Y, M, $\mathfrak{F}_u(Y;M)$ denotará o conjunto de todas as funções $Y \to M$ munido com a topologia da convergência uniforme, e $\mathfrak{C}_u(Y;M)$ denota o subconjunto de $\mathfrak{F}_u(Y;M)$ formado por todas as funções contínuas. O seguinte resultado foi provado em [8], proposição 1, pg 259.

Teorema 2.2.2. *Sejam P, M espaços uniformes, X um espaço topológico, e $f : P \times X \to M$ uma função do espaço produto $P \times X$ em M. Defina as aplicações parciais $f_p : X \to M$ e $f_x : P \to M$ por $f_p(x) = f(p,x) = f_x(p)$. A função $\hat{f} : X \to \mathfrak{F}_u(P;M)$ definida por $\hat{f}(x) = f_x$ é contínua se, e somente se, a família $E = \{f_p : p \in P\}$ é equicontínua.*

O teorema a seguir está provado em [21].

Teorema 2.2.3. *Seja P, X dois espaços de Tychonoff e $f : P \times X \to \mathbb{R}$ uma função contínua limitada. Se a função $\hat{f} : X \to \mathfrak{C}_u(Y;M)$ definida por $\hat{f}(x) = f_x$ é contínua então f admite uma extensão contínua a $\beta P \times X$.*

Os dois teoremas anteriores fornecem o seguinte critério para estender um cociclo.

Corolário 2.2.2. *Seja X um produto $\prod_{\lambda\in\Lambda}[a_\lambda, b_\lambda]$ de intervalos compactos $[a_\lambda, b_\lambda] \subset \mathbb{R}$ e $\pi_\lambda : X \to [a_\lambda, b_\lambda]$ a λ-ésima aplicação projeção. Então cada aplicação $\varphi_t : \mathbb{T}\times X \to X$ admite uma extensão contínua $\tilde{\varphi}_t : \beta\mathbb{T}\times X \to X$ se a família $E_t^\lambda = \{(\pi_\lambda \circ \varphi_t)_s : X \to [a_\lambda, b_\lambda]\}_{s\in\mathbb{T}}$ é equicontínua para todo $t \in \mathbb{T}$ e $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstração: Defina $\varphi_t^\lambda := \pi_\lambda \circ \varphi_t : \mathbb{T}\times X \to [a_\lambda, b_\lambda]$. Como a família E_t^λ é equicontínua segue que a função $\hat{\varphi_t^\lambda} : X \to \mathfrak{C}_u(\mathbb{T}; [a_\lambda, b_\lambda])$ definida por $\hat{\varphi_t^\lambda}(x) = (\varphi_t^\lambda)_x$ é contínua pelo teorema 2.2.2. Então φ_t^λ admite uma extensão contínua $\tilde{\varphi_t^\lambda}$ a $\beta\mathbb{T}\times X$ pelo teorema 2.2.3. Finalmente, tome $\tilde{\varphi}_t : \beta\mathbb{T}\times X \to X$ tal que $\pi_\lambda \circ \tilde{\varphi}_t = \tilde{\varphi_t^\lambda}$. Então $\tilde{\varphi}_t$ é contínua e extende φ_t. □

Exemplo 2.2.1. *Seja $X = [a, b]$ um intervalo compacto da reta e $E = \{f_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{T}}$ uma família de homeomorfismos de X tais que $f_t^{-1} = f_{-t}$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Defina $\varphi : \mathbb{T}\times\mathbb{T}\times X \to X$ por*

$$\varphi(t, s, x) = f_{t+s} \circ f_{-s}(x).$$

Esta aplicação é um cociclo sobre a adição $\theta : \mathbb{T}\times\mathbb{T} \to \mathbb{T}$. Tome em particular a família $E = \{f_t : [0, 1] \to [0, 1]\}_{t\in\mathbb{T}}$ onde

$$f_t(x) = \begin{cases} x^{\frac{2+\sin t^2}{2}} & se\ t \geq 0, \\ x^{\frac{2}{2+\sin t^2}} & se\ t \leq 0. \end{cases}$$

É fácil ver que $f_t^{-1} = f_{-t}$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Além disso, a aplicação cociclo $\varphi : \mathbb{T}\times\mathbb{T}\times X \to X$ determinada por E é dada por

$$\varphi(t, s, x) = \begin{cases} x^{\frac{2+\sin t^2}{2+\sin (t+s)^2}} & se\ s \leq -t, \\ x^{\frac{(2+\sin t^2)(2+\sin (t+s)^2)}{4}} & se\ -t \leq s \leq 0, \\ x^{\frac{2+\sin (t+s)^2}{2+\sin t^2}} & se\ 0 \leq s. \end{cases} \quad para\ \ t > 0$$

$$\varphi(t, s, x) = \begin{cases} x^{\frac{2+\sin t^2}{2+\sin (t+s)^2}} & se\ s \leq 0, \\ x^{\frac{4}{(2+\sin t^2)(2+\sin (t+s)^2)}} & se\ 0 \leq s \leq -t, \\ x^{\frac{2+\sin (t+s)^2}{2+\sin t^2}} & se\ -t \leq s. \end{cases} \quad para\ \ t < 0$$

$$\varphi(0, s, x) = x \text{ para todo } s \in \mathbb{T} \text{ e } x \in X.$$

Para um $t \in \mathbb{T}$ fixado, podemos ver que a aplicação parcial $(\varphi_t)_s : [0, 1] \to [0, 1]$, $s \in \mathbb{T}$, tem uma constante de Lipschitz em comum, e então a família $E_t = \{(\varphi_t)_s : [0, 1] \to [0, 1]\}_{s\in\mathbb{T}}$ é *equicontínua para todo $t \in \mathbb{T}$. Pelo corolário 2.2.2, cada aplicação parcial $\varphi_t : \mathbb{T} \times [0,1] \to [0,1]$ admite uma extensão contínua $\tilde{\varphi}_t : \beta\mathbb{T} \times [0,1] \to [0,1]$.*

Exemplo 2.2.2. *Uma equação diferencial não-autônoma $x^{'} = f(t,x)$ gera um sistema dinâmico não-autônomo (θ, φ) com conjunto base $P = \mathbb{R}$, $\varphi(t,s,x) = \sigma(t+s,s,x)$ com σ a solução satisfazendo a condição inicial $\sigma(s,s,x) = x$. Assuma que $X = [a,b]$ e existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,s,x)\right| \leq K$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in [a,b]$. Então K é uma constante de Lipschitz comum para as aplicações parciais $(\varphi_t)_s, t, s \in \mathbb{R}$. Portanto, a família $E_t = \{(\varphi_t)_s : [a,b] \to [a,b]\}_{s\in\mathbb{R}}$ é equicontínua e, portanto, cada aplicação parcial $\varphi_t : \mathbb{R} \times [a,b] \to [a,b]$ admite uma extensão contínua $\tilde{\varphi}_t : \beta\mathbb{R} \times [a,b] \to [a,b]$.

Exemplo 2.2.3. *Considere uma equação homogênea $x^{'} = a(t)x, x \in [a,b]$, com $\left|\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right| \leq K$ para todo $t, t_0 \in \mathbb{R}$ e alguma constante $K > 0$. As soluções são da forma*

$$\sigma(t,s,x) = xe^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

e então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,s,x) &= e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \\ &\leq e^{K}. \end{aligned}$$

Este é um caso particular do exemplo anterior.

Exemplo 2.2.4. *Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função limitada $\psi(t) = \frac{t|t|}{1+t^2} - 1$. Considere a equação*

$$x^{'} = \cos(t) - \psi(t)\sin(t) + \psi(t)x$$

que, para todo $(s,x) \in \mathbb{R} \times [-2,2]$, tem como solução

$$\sigma(t,s,x) = e^{\Psi(t)-\Psi(s)}(x - \sin(s)) + \sin(t),$$

onde $\Psi(t) = |t| - |\arctan(t)| - t$ é uma primitiva de ψ. Note que

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,s,x) = e^{\Psi(t)-\Psi(s)},$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,s,x)\right| = e^{\Psi(t)-\Psi(s)} \leq 1,$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$, pois $\Psi(t) - \Psi(s) \leq 0$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Este é outro caso particular do Exemplo 2.2.2.

2.3 Um $\mathcal{M}$-atrator do passado na extensão

Nesta seção aplicamos a metodologia da extensão de funções a fim de descrever um $\mathcal{M}$-atrator do passado de um sistema dinâmico não-autônomo.

Assumimos que $\theta : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ é a adição e (θ, φ) é um sistema dinâmico não-autônomo com conjunto base $P = \mathbb{T}$ e espaço métrico compacto X. Requeremos que a aplicação cociclo φ seja extensível a uma aplicação cociclo $\tilde{\varphi} : \mathbb{T} \times \beta\mathbb{T} \times X \to X$ sobre $\tilde{\theta} : \mathbb{T} \times \beta\mathbb{T} \to \beta\mathbb{T}$, onde $\tilde{\theta}_t(u) = u_t u$, como na seção 2.1. Ao longo dessa seção, $\tilde{\psi} : \mathbb{T} \times \beta\mathbb{T} \times X \to \beta\mathbb{T} \times X$ significa o fluxo produto cruzado

$$\tilde{\psi}(t, (u, x)) = (\tilde{\theta}_t(u), \tilde{\varphi}(t, u, x)), t \in \mathbb{T}, (u, x) \in \beta\mathbb{T} \times X.$$

A seguir apresentamos os principais resultados do capítulo.

Teorema 2.3.1. *Seja $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado e $\boldsymbol{B}$ um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado. Seja $\overline{\boldsymbol{B}} \subset \beta\mathbb{T} \times X$ o fecho de $\boldsymbol{B}$ em $\beta\mathbb{T} \times X$ e tome o conjunto não-autônomo $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{T} \times X$ com fibras $A(p) = \tilde{J}^+(\overline{\boldsymbol{B}})(p)$, $p \in P^*(\tilde{J}^+(\overline{\boldsymbol{B}}))$, onde $\tilde{J}^+(\overline{\boldsymbol{B}})$ é o limite prolongacional positivo do fluxo produto cruzado $\tilde{\psi}$. Então $\boldsymbol{A}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado de (θ, φ) que é minimal no seguinte sentido: se $\boldsymbol{C}$ é um conjunto não-autônomo do passado tal que $P^*(\boldsymbol{C}) \subset P^*(\boldsymbol{B})$, $C(p)$ é fechado para todo $p \in P^*(\boldsymbol{C})$, e*

$$\lim_{t \to +\infty} h(\varphi(t, \theta_{-t}(p), B(\theta_{-t}(p))), C(p)) = 0$$

então $A(p) \subset C(p)$.

Demonstração: Devemos provar que $\mathbf{A}$ é um conjunto não-autônomo do passado, compacto e invariante tal que para todo $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ tem-se $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{A})$ e

$$\lim_{t \to +\infty} h(\varphi(t, \theta_{-t}(p), M(\theta_{-t}(p))), \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})(p)) = 0$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$. Primeiro, observe que $P^*(\mathbf{A}) = P^*(\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}}))$. Uma vez que $\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ é compacto em $\beta\mathbb{T} \times X$ é claro que $A(p) = \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})(p)$ é compacto em X para todo $p \in P^*(\mathbf{A})$ e, portanto, $\mathbf{A}$ é compacto. Se $x \in A(p)$ então $(p, x) \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$. Como $\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ é invariante pelo fluxo produto cruzado $\tilde{\psi}$ segue que $\tilde{\psi}(t, (p, x)) \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Portanto, $(\theta_t(p), \varphi(t, p, x)) \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ e, desse modo, $\varphi(t, p, x) \in A(\theta_t(p))$. Uma vez que (θ, φ) é invertível, isso é suficiente para concluir que $\mathbf{A}$ é invariante. Para provar que $\mathbf{A}$ é um conjunto não-autônomo do passado, note que $A(p) \neq \emptyset$ implica $\emptyset \neq \varphi(t, p, A(p)) \subset A(\theta_t(p))$ para todo $t \leq 0$, pois $\mathbf{A}$ é invariante. Segue que $O^-(p) \subset P^*(\mathbf{A})$ e, portanto, $\mathbf{A}$ é um conjunto não-autônomo do passado. Agora mostraremos que $\mathbf{A}$ é $\{\mathbf{B}\}$-atrativo, isto é, $P^*(\mathbf{B}) \subset P^*(\mathbf{A})$ e

$$\lim_{t\to+\infty} h(\varphi(t,\theta_{-t}(p), B(\theta_{-t}(p))), A(p)) = 0 \tag{3.1}$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{B})$. Se $p \in P^*(\mathbf{B})$ então $B(\theta_{-t}(p)) \neq \emptyset$ para todo $t \geq 0$. Então podemos encontrar sequências $t_n \to +\infty$ e (x_n) em X tais que $(\theta_{-t_n}(p), x_n) \in \mathbf{B}$. Pela compacidade, podemos assumir que $\theta_{-t_n}(p) \to u$ em $\beta\mathbb{T}$, $x_n \to x$, e $\varphi(t_n, \theta_{-t_n}(p), x_n) \to y$ em X.

Isto implica que $(u, x) \in \overline{\mathbf{B}}$ e

$$\tilde{\psi}(t_n, (\theta_{-t_n}(p), x_n)) = (p, \varphi(t_n, \theta_{-t_n}(p), x_n)) \to (p, y)$$

com $t_n \to +\infty$ e $(\theta_{-t_n}(p), x_n) \to (u, x)$. Portanto $(p, y) \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ implicando que $p \in P^*(\mathbf{A})$. Isto prova a inclusão $P^*(\mathbf{B}) \subset P^*(\mathbf{A})$. Agora suponha que (3.1) não vale. Então existe uma sequência crescente $t_n \to +\infty$, uma sequência (x_n) em X com $x_n \in \varphi(t_n, \theta_{-t_n}(p), B(\theta_{-t_n}(p)))$, e um número $\epsilon > 0$ tais que $d(x_n, \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})(p)) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que X é compacto podemos assumir que (x_n) converge a um ponto $x \in X$. Podemos também assumir que a sequência $(\theta_{-t_n}(p))$ converge a um ponto u em $\beta\mathbb{T}$. Para cada n tome $y_n \in B(\theta_{-t_n}(p))$ tal que $x_n = \varphi(t_n, \theta_{-t_n}(p), y_n)$ e assuma que $y_n \to y$ em X. Como $(\theta_{-t_n}(p), y_n) \in \mathbf{B}$ e $(\theta_{-t_n}(p), y_n) \to (u, y)$, temos $(u, y) \in \overline{\mathbf{B}}$. Além disso,

$$\tilde{\psi}(t_n, (\theta_{-t_n}(p), y_n)) = (p, \tilde{\varphi}(t_n, \theta_{-t_n}(p), y_n)) \to (p, x)$$

com $t_n \to +\infty$ e, portanto, $(p, x) \in \tilde{J}^+((u, y)) \subset \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$. Isto significa que $x \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})(p)$, o que contradiz $d(x_n, \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})(p)) > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente mostraremos que para todo $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ tem-se $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{A})$ e

$$\lim_{t\to+\infty} h(\varphi(t,\theta_{-t}(p), M(\theta_{-t}(p))), A(p)) = 0 \tag{3.2}$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$. Com efeito, para todo $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{B}) \subset P^*(\mathbf{A})$. Para um $\epsilon > 0$ dado, existe $t_2 > 0$ tal que

$$h(\varphi(t,\theta_{-t}(p), B(\theta_{-t}(p))), A(p)) < \epsilon$$

para todo $t \geq t_2$, pois $\mathbf{A}$ é $\{\mathbf{B}\}$-atrativo. Por outro lado, uma vez que $\mathbf{B}$ é um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado, existe $t^* > 0$ tal que

$$\varphi(t, \theta_{-t}(p), M(\theta_{-t}(p))) \subset B(p),$$

para todo $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$, $p \in P^*(\mathbf{M})$ e $t \geq t^*$. Para qualquer $t_1 \geq t^*$ e $p \in P^*(\mathbf{M})$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(t_1 + t_2, \theta_{-t_1-t_2}(p), M(\theta_{-t_1-t_2}(p))) &= \varphi(t_2, \theta_{-t_2}(p), \varphi(t_1, \theta_{-t_1-t_2}(p), M(\theta_{-t_1-t_2}(p)))) \\
&\subset \varphi(t_2, \theta_{-t_2}(p), B(\theta_{-t_2}(p)))
\end{aligned}$$

e então

$$h(\varphi(t_1 + t_2, \theta_{-t_1-t_2}(p), M(\theta_{-t_1-t_2}(p))), A(p)) < \epsilon.$$

Isto prova a validade de (3.2) e, portanto, $\mathbf{A}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado. Para mostrar a minimalidade de $\mathbf{A}$; seja $\mathbf{C}$ um conjunto não-autônomo do passado tal que $P^*(\mathbf{C}) \subset P^*(\mathbf{B})$, $C(p)$ é fechado para todo $p \in P^*(\mathbf{C})$, e

$$\lim_{t \to +\infty} h(\varphi(t, \theta_{-t}(p), B(\theta_{-t}(p))), C(p)) = 0 \tag{3.3}$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{C})$. Se $y \in A(p)$, com $p \in P^*(\mathbf{C})$, então $y = \lim_{t_n \to +\infty} \varphi(t_n, \theta_{-t_n}(p), x_n)$ com $x_n \in B(\theta_{-t_n}(p))$ por (3.1). Por (3.3), isto implica que $y \in \overline{C(p)} = C(p)$, e então $A(p) \subset C(p)$ para todo $p \in P^*(\mathbf{C})$. □

Teorema 2.3.2. *Seja $\mathcal{M}$ uma família de subconjuntos não-autônomos do passado e $\boldsymbol{B}$ um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado. Seja $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{T} \times X$ um $\mathcal{M}$-atrator do passado de (θ, φ), dado pelo teorema 2.1, cujas fibras são $A(p) = \tilde{J}^+(\overline{B})(p)$. Então para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$ tem-se $A(p) = \tilde{J}^+(\boldsymbol{W})(p)$, onde $\boldsymbol{W} = \overline{\boldsymbol{B}} \cap (\omega^-(0) \times X)$.*

Demonstração: A inclusão $\tilde{J}^+(\mathbf{W})(p) \subset A(p)$ é clara. Por outro lado, para $p \in P^*(\mathbf{A})$ e $x \in A(p)$, existem redes $t_\lambda \to +\infty$ em $\mathbb{T}$ e (u_λ, x_λ) em $\beta\mathbb{T} \times X$ tais que $(u_\lambda, x_\lambda) \to (u, x) \in \overline{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\psi}(t_\lambda, (u_\lambda, x_\lambda)) \to (p, x)$. Isto significa que $\tilde{\theta}_{-t_\lambda}(u_\lambda) \to p$ e $\tilde{\varphi}(t_\lambda, u_\lambda, x_\lambda) \to x$. Pela proposição 2.1, temos que $u \in \omega^-(0)$ e, portanto, $(u_\lambda, x_\lambda) \to (u, x) \in (\omega^-(0) \times X) \cap \overline{\mathbf{B}}$. Daí segue que $(p, x) \in \tilde{J}^+(\mathbf{W})$ e, portanto, $x \in \tilde{J}^+(\mathbf{W})(p)$ concluindo a prova. □

Nesta descrição do $\mathcal{M}$-atrator do passado a aplicação $\tilde{J}^+$ impôs a propriedade de atração enquanto $\omega^-(0)$ representa o passado do sistema. Este teorema difere do teorema 2.3.2 pois o conjunto de absorção $\mathbf{B}$ não precisa ser compacto. No caso $\mathbf{B}$ compacto, temos a seguinte consequência.

Corolário 2.3.1. *Seja $\mathcal{M}$ uma família de subconjuntos não-autônomos do passado e $\boldsymbol{B}$ um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado e compacto. Então existe um conjunto $\boldsymbol{W} \subset \omega^-(0) \times X$ tal* *que o conjunto não-autônomo $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{T} \times X$ com fibras $A(p) = \tilde{J}^{+}(\boldsymbol{W})(p)$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado de (θ, φ) satisfazendo $A(p) = \omega^{\boldsymbol{B}}(p)$ para todo $p \in P^{*}(\boldsymbol{B})$.*

Demonstração: Como na prova do teorema 2.3.1, podemos ver que $\omega^{\mathbf{B}}(p) \subset \tilde{J}^{+}(\overline{\mathbf{B}})(p)$ sempre que $p \in P^{*}(\mathbf{B})$. Por outro lado, pela minimalidade de $\mathbf{A}$, temos $A(p) \subset \omega^{\mathbf{B}}(p)$ para todo $p \in P^{*}(\mathbf{B})$. A prova segue pelo teorema 2.3.2. $\square$

Como uma ilustração para a descrição do atrator do passado dada acima, considere a equação diferencial homogênea $x' = -\frac{1}{1+t^2}x$ com $x \in X = [0,1]$. Considere o conjunto não-autônomo $\mathbf{M} = \mathbb{R} \times [0, \frac{1}{2}]$. É claro que $\mathbf{M}$ é um conjunto $\{\mathbf{M}\}$-absorvente do passado. Tomando o fecho $\overline{\mathbf{M}} \subset \beta\mathbb{R} \times [0,1]$, o $\{\mathbf{M}\}$-atrator $\mathbf{A}$ é descrito como

$$A(p) = \tilde{J}^{+}\left(\omega^{-}(0) \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)(p).$$

Para $y \in A(p)$ qualquer, existem sequências $t_n \to +\infty$ e $x_n \to x$, com $\lim_{n\to\infty}(p - t_n) = u \in \omega^{-}(0)$ e $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tais que $y \in \tilde{J}^{+}(u, x)(p)$. Isso significa que

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, p - t_n, x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma(p, p - t_n, x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\arctan(p - t_n) - \arctan p} x_n \\ &= e^{-\frac{\pi}{2} - \arctan p} x. \end{aligned}$$

Assim, o atrator do passado é $A(p) = \left[0, e^{-\frac{\pi}{2} - \arctan p}\right]$. A figura abaixo dá uma visualização geométrica para o atrator $\mathbf{A}$.

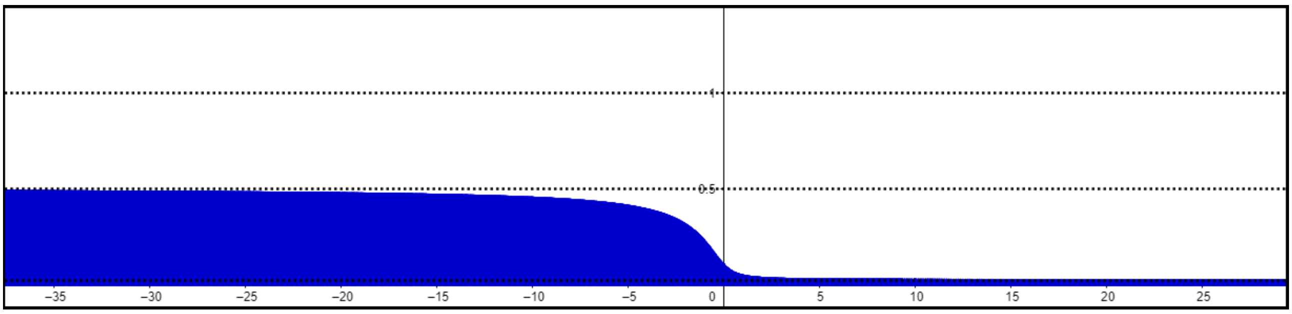

Figura 2.1: O $\{\mathbf{M}\}$-atrator $\mathbf{A}$ para a equação $x' = -\frac{1}{1+t^2}x$.

De maneira geral, temos o seguinte exemplo

Exemplo 2.3.1. *Considere uma equação homogênea $x' = a(t)x$, com $x \in X = [0,1]$, e $-K \leq \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \leq 0$ para uma constante $K > 0$. Tome $\boldsymbol{M} = \mathbb{R} \times \left[0, \frac{1}{n}\right]$ com $n \in \mathbb{N}$ fixo. É* *claro que* $\boldsymbol{M}$ *é um conjunto* $\{\boldsymbol{M}\}$*-absorvente do passado. Tomando o fecho* $\overline{\boldsymbol{M}} \subset \beta\mathbb{R} \times [0,1]$*, o* $\{\boldsymbol{M}\}$*-atrator do passado* $\boldsymbol{A}$ *é descrito como*

$$A(p) = \tilde{J}^{+}\left(\omega^{-}(0) \times \left[0, \frac{1}{n}\right]\right)(p).$$

Exemplo 2.3.2. *Considere a equação diferencial linear não-homogênea do Exemplo 2.2.4. Tome* $\boldsymbol{M} = \mathbb{R} \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$*. É claro que* $\boldsymbol{M}$ *é um conjunto* $\{\boldsymbol{M}\}$*-absorvente do passado. Tomando* $\overline{\boldsymbol{M}} \subset \beta\mathbb{R} \times [-2,2]$*, o* $\{\boldsymbol{M}\}$*-atrator do passado* $\boldsymbol{A}$ *é descrito como*

$$A(p) = \tilde{J}^{+}\left(\omega^{-}(0) \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)(p).$$

Para $y \in A(p)$ *qualquer, existem sequências* $t_n \to +\infty$ *e* $x_n \to x$*, com* $\lim_{n\to\infty}(p - t_n) = u \in \omega^{-}(0)$ *e* $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ *tais que* $y \in \tilde{J}^{+}(u,x)(p)$*. Isso significa que*

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, p - t_n, x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma(p, p - t_n, x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{|p| - |\arctan p| - |p - t_n| + |\arctan(p - t_n)| - t_n}\left(x - \sin(p - t_n)\right) + \sin(p) \\ &= \sin(p). \end{aligned}$$

Assim, o atrator do passado $\boldsymbol{A}$ *é dado, fibra a fibra, por* $A(p) = \sin(p)$*.*

Para finalizar os resultados do capítulo, suponhamos que $\mathbf{R}$ é um repulsor do passado de (θ, φ) e tome a família $\mathcal{M} = \{\mathbf{B}_\delta; \delta \in (0,\eta]\}$ como definido na seção 2.3.2. Pelo teorema 2.3.2, este atrator do passado é descrito por

$$R_*(p) = \tilde{J}^{+}(\mathbf{W})(p), \quad \text{onde } \mathbf{W} = (\omega^{-}(0) \times X) \cap \overline{\mathbf{B}}_\eta.$$

Capítulo 3

Cociclos topológicos sobre a Ação de um Semigrupo

O objetivo desse capítulo é construir uma teoria abstrata dos sistemas dinâmicos não-autônomos sobre ações de semigrupos em espaços topológicos. Apresentaremos assim a generalização dos conceitos básicos sobre sistemas não-autônomos e sobre o comportamento limite de tais sistemas como: órbitas, conjuntos limites, atratores, etc. Relacionaremos essa generalização do conceito de sistema dinâmico não-autônomo com o conceito de cociclo topológico mostrando que a generalização aqui apresentada dos sistemas dinâmicos não-autônomos pode também ser vista como um cociclo sobre um grupo de homeomorfismos no sentido da teoria de cohomologia dinâmica.

3.1 Definições e propriedades básicas

Seja T um grupo topológico. Considere um subsemigrupo $S \subset T$ de T e seja $G = \langle S \rangle$ o subgrupo de T gerado por S. Seja P um conjunto sobre o qual exista uma ação de G sobre P, e uma família de espaços topológicos $\mathfrak{X} = \{X_p\}_{p \in P}$ indexada em P. Definimos um sistema dinâmico não-autônomo como sendo o par (ζ, Φ_S^P) onde ζ é a ação de G sobre P e $\Phi_S^P = \{\varphi_s^p\}_{(s,p) \in S \times P}$ é uma família de aplicações $\varphi_s^p : X_p \to X_{sp}$ satisfazendo a propriedade de **cociclo**:

$$\varphi_{st}^p(x) = \varphi_s^{tp} \circ \varphi_t^p(x),$$

para todo $s, t \in S$, $p \in P$ e $x \in X_p$.

Diremos que o sistema não-autônomo é contínuo se $\varphi_s^p : X_p \to X_{sp}$ é contínua para todo

$s \in S$ e $p \in P$. Diremos também que o sistema é invertível se a família de aplicações está definida sobre G. Note que nesse caso cada aplicação $\varphi_s^p \in \Phi_G^P$ é invertível com inversa $\varphi_{s^{-1}}^{sp}$. De fato,

$$\varphi_{s^{-1}}^{sp} \circ \varphi_s^p = \varphi_{s^{-1}s}^p = id_{X_p} \quad \text{e} \quad \varphi_s^p \circ \varphi_{s^{-1}}^{sp} = \varphi_{ss^{-1}}^{sp} = id_{X_{sp}},$$

para todo $s \in S$ e $p \in P$.

Apesar da definição generalizar cociclos onde as fibras $X_p \in \mathfrak{X}$ podem ser espaços topológicos diferentes para cada $p \in P$, os casos mais comuns de são cociclos são aqueles em se tem os X_p todos iguais a um mesmo espaço topológico X. Nesse caso particular, podemos definir uma ação de semigrupo sobre $P \times X$ associada ao cociclo (ζ, Φ_S^P) chamada de **ação produto cruzado** e dada pela expressão

$$\pi(t, (p, x)) = (\zeta(t, p), \varphi_t^p(x)),$$

para todo $t \in S$ e $(p, x) \in P \times X$. Note que π é de fato uma ação de S sobre $P \times X$, pois

$$\begin{aligned} \pi(st, (p, x)) &= ((st)p, \varphi_{st}^p(x)) \\ &= (s(tp), \varphi_s^{tp} \circ \varphi_t^p(x)) \\ &= \pi(s, (tp, \varphi_t^p(x))) \\ &= \pi(s, \pi(t, (p, x))) \end{aligned}$$

para todo $s, t \in S$ e $(p, x) \in P \times X$.

Definição 3.1.1. *(i) Chamaremos de* ***conjunto não-autônomo*** *a família de subconjuntos* $\boldsymbol{M} = \{M_p\}_{p \in P^*(\boldsymbol{M})}$, *onde* $M_p \subset X_p$ *e o conjunto* $P^*(\boldsymbol{M})$ *é formado pelos elementos de* $p \in P$ *tais que* $M_p \notin \emptyset$.

(a) Um conjunto não-autônomo é dito ***do passado*** *se* $S^{-1}p \subset P^*(\boldsymbol{M})$, *para todo* $p \in P^*(\boldsymbol{M})$.

(b) Um conjunto não-autônomo é dito ***do futuro*** *se* $Sp \subset P^*(\boldsymbol{M})$, *para todo* $p \in P^*(\boldsymbol{M})$.

(c) Um conjunto não-autônomo é dito ***completo*** *se* $P^*(\boldsymbol{M}) = P$.

(ii) Um conjunto não-autônomo é aberto (respect. fechado, compacto) se M_p *é aberto (respect. fechado, compacto) em* X_p *para todo* $p \in P^*(\boldsymbol{M})$.

Definição 3.1.2. *Dizemos que um conjunto não-autônomo do passado (futuro, completo) é (i)* ***Progressivamente*** $\mathbb{S}$***-invariante*** *se* $\varphi_s^p(M_p) \subset M_{sp}$ *para todo* $s \in S$, $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ *com* $sp \in P^*(\boldsymbol{M})$;

(ii) ***Regressivamente*** $\mathbb{S}$***-invariante*** *se* $M_{sp} \subset \varphi_s^p(M_p)$ *para todo* $s \in S$ *e* $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ *com* $sp \in P^*(\boldsymbol{M})$*;*

(iii) $\mathbb{S}$***-invariante*** *se* $\varphi_s^p(M_p) = M_{sp}$ *para todo* $s \in S$ *e* $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ *com* $sp \in P^*(\boldsymbol{M})$*.*

A seguir provamos algumas propriedades básicas dos conjuntos invariantes.

Proposição 3.1.1. *Seja* $\{\boldsymbol{M}^i\}_{i=1}^n$ *uma coleção de conjuntos não-autônomos. Se cada* $\boldsymbol{M}^i$*,* $i = 1, \cdots, n$*, é progressivamente (regressivamente) invariante então os conjuntos* $\bigcap_{i=1}^n \boldsymbol{M}^i$ *e* $\bigcup_{i=1}^n \boldsymbol{M}^i$ *são progressivamente (regressivamente) invariantes.*

Demonstração: Note que $\varphi_s^p(M_p^i) \subset M_{sp}^i$, para todo $s \in S$, $p \in P$ com $sp \in P^*(\mathbf{M})$ e $i = 1, \cdots, n$. Portanto,

$$\varphi_s^p\left(\bigcap_{i=1}^n M_p^i\right) \subset \bigcap_{i=1}^n \varphi_s^p(M_p^i) \subset \bigcap_{i=1}^n M_{sp}^i$$

Também temos que

$$\varphi_s^p\left(\bigcup_{i=1}^n M_p^i\right) \subset \bigcup_{i=1}^n \varphi_s^p(M_p^i) \subset \bigcup_{i=1}^n M_{sp}^i$$

□

Proposição 3.1.2. *Sejam* $\boldsymbol{M}^1$ *e* $\boldsymbol{M}^2$ *conjuntos não-autônomos do passado (futuro, completo).*

(i) Se $\boldsymbol{M}^1$ *é progressivamente invariante e* $\boldsymbol{M}^2$ *é regressivamente invariante, então* $\boldsymbol{M}^2 - \boldsymbol{M}^1$ *é regressivamente invariante.*

(ii) Se $\boldsymbol{M}^1$ *e* $\boldsymbol{M}^2$ *são invariantes e* $\varphi_s^p : X_p \to X_{sp}$ *é injetiva para todo* $s \in \mathbb{S}$ *e* $p \in P^*(\boldsymbol{M}^1) \cap P^*(\boldsymbol{M}^2)$ *com* $sp \in P^*(\boldsymbol{M}^1) \cap P^*(\boldsymbol{M}^2)$*, então* $\boldsymbol{M}^2 - \boldsymbol{M}^1$ *é invariante.*

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} M_{sp}^2 - M_{sp}^1 \subset M_{sp}^2 - \varphi_s^p(M_p^1) &\subset \varphi_s^p(M_p^2) - \varphi_s^p(M_p^1) \\ &\subset \varphi_s^p\left(M_p^2 - M_p^1\right). \end{aligned}$$

para todo $s \in S$ e $p \in P^*(\mathbf{M}^1) \cap P^*(\mathbf{M}^2)$ com $sp \in P^*(\mathbf{M}^1) \cap P^*(\mathbf{M}^2)$. Note ainda que se φ_s^p é injetiva podemos substituir por igualdades as inclusões acima.

□

Definição 3.1.3 (Trajetória de um cociclo)**.** *Assuma que o cociclo* (ζ, Φ_S^P) *é inversível. Dizemos que uma aplicação* $\xi : G \to X$ *é uma trajetória para o cociclo passando pelo par* $(p, x) \in \{p\} \times X_p$ *se satisfazer as seguintes propriedades:*

(i) $\xi(e) = x$;

(ii) $\xi(st) = \varphi(s, tp, \xi(t))$, *para todo* $t, s \in G$.

O próximo resultado estabelece que conjuntos invariantes em cociclos inversíveis consistem de trajetórias (ou parte delas), e isso basicamente se deve ao fato que cociclos são sobrejetores sobre as fibras de um conjunto S-invariante.

Proposição 3.1.3. *Assuma que o cociclo* (ζ, Φ_S^P) *é invertível. As afirmações a seguir são equivalentes:*

- *Um conjunto não-autônomo (passado, futuro, completo)* $\boldsymbol{A}$ *é* S*-invariante.*
- $\boldsymbol{A}$ *é* S*-progressivamente invariante e* S*-regressivamente invariante.*
- *Para todo par* $(p, x) \in \boldsymbol{A}$ *existe uma trajetória* $\xi : G \to X$ *tal que* $\xi(e) = x$ *e* $\xi(s) \in A_{sp}$ *para todo* $s \in G$ *tal que* $sp \in P^*(\boldsymbol{A})$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Segue imediatamente da definição.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Seja $\mathbf{A}$ e escolha $(p, x) \in \mathbf{A}$. Para todo $t \in G$ definimos $\xi(t) := \varphi_t^p(x)$. Note que

$$\xi(st) = \varphi_{st}^p(x) = \varphi_s^{tp} \circ \varphi_t^p(x) = \varphi_s^{tp}(\xi(t))$$

para todo $s, t \in G$. Além disso, $\xi(e) = x$ e uma vez que $x \in A_p$ e $\mathbf{A}$ é invariante, segue que $\xi(s) \in A_{sp}$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Dado um par $(p, x) \in \mathbf{A}$, existe uma trajetória (ou pelo menos parte de uma) $\xi : G \to X$ com $\xi(e) = x$ e $\xi(s) \in A_{sp}$, para $s \in G$, tal que $sp \in P^*(\mathbf{A})$. Portanto, $\varphi_t^p(x) = \xi(t) \in A_{tp}$, para todo $t \in G$ com $tp \in P^*(\mathbf{A})$. Portanto, $\mathbf{A}$ é S-progressivamente invariante. Por outro, dado $(tp, x) \in \mathbf{A}$, segue que

$$x = \varphi_t^p \circ \varphi_{t^{-1}}^{tp}(x) = \varphi_t^p(\xi(t^{-1})) \in \varphi_t^p(A_p).$$

□

Na situação específica em que é possível definir a ação produto cruzado, também podemos associar a cada conjunto não-autônomo um subconjunto de $P \times X$. Assim, dado um conjunto não-autônomo $\mathbf{M} = \{M_p; p \in P^*(\mathbf{M})\}$ basta considerar o subconjunto $\tilde{\mathbf{M}} = \bigcup_{p \in P^*(\mathbf{M})} \{p\} \times M_p \subset P \times X$. A seguinte proposição mostra que a invariância de um conjunto não-autônomo com relação ao cociclo está diretamente relacionada com a invariância do cojunto correspondente em $P \times X$ com relação à ação produto cruzado.

Proposição 3.1.4. *Um conjunto não-autônomo $\boldsymbol{M}$ é S- invariante (S-progressivamente invariante, S-regressivamente invariante) cim respeito ao cociclo (ζ, Φ_S^P) se, e somente se, o conjunto associado $\boldsymbol{M} \subset \tilde{P} \times X$ é S-invariante (S-progressivamente invariante, S-regressivamente invariante) com respeito à ação produto cruzado.*

Demonstração: Seja $\mathbf{M}$ um conjunto não-autônomo invariante de (ζ, Φ_S^P). Então, o $\tilde{\mathbf{M}}$ associado pode ser escrito como $\tilde{\mathbf{M}} = \bigcup_{p \in P^*(\mathbf{M})} \{p\} \times M_p$. Seja $s \in S$ e $(p, x) \in \tilde{\mathbf{M}}$. Então $x \in M_p$ e $\pi(s, (p, x)) = (sp, \varphi_s^p(x))$. Uma vez que $\mathbf{M}$ é invariante, segue que $\varphi_s^p(x) = y$ e, portanto, $(sp, y) \in \tilde{\mathbf{M}}$ e $\pi_s\left(\tilde{\mathbf{M}}\right) \subset \tilde{M}$. Agora, escolha um par $(p, x) \in \tilde{M}$, onde $x \in M_p$. Uma vez que $\mathbf{M}$ é invariante, $x = \varphi_t^{t^{-1}}(y)$, para $y \in M_{t^{-1}p}$. Logo, $(p, x) = \pi(s, (q, y)) \in \pi_s\left(\tilde{\mathbf{M}}\right)$ e, então, $\tilde{\mathbf{M}} \subset \pi\left(\tilde{\mathbf{M}}\right)$.

Reciprocamente, suponhamos que $\tilde{\mathbf{M}} = \bigcup_{p \in P^*(\mathbf{M})} \{p\} \times M_p$ é invariante. Tome $x \in M_p$ para algum $p \in P^*(\mathbf{M})$ e $s \in S$. Sabemos que $\pi_s((p, x)) \in \tilde{\mathbf{M}}$ e, além disso, $\pi_s((p, x)) = (sp, \varphi_s^p(x))$. Então, $\varphi_s^p(x) \in M_{sp}$ e, portanto, $\varphi_s^p(M_p) \subset M_{sp}$. Por outro lado, escolhendo $x \in M_{sp}$, por definição temos que $(sp, x) \in \tilde{\mathbf{M}}$. Além disso, $(sp, x) = \pi(s, (p, y))$ para algum $y \in M_p$. Então, $x = \varphi_s^p(y) \in \varphi_s^p(M_p)$ e, consequentemente, $M_{sp} \subset \varphi_s^p(M_p)$. □

Agora iremos definir alguns conceitos topológicos, obtendo uma noção geral de divergência e que serão fundamentais para o estudo do comportamento assintótico dos cociclos topológicos.

Definição 3.1.4. *Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S é uma base de filtro em $\mathbb{S}$ se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(ii) dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ existe $F_3 \in \mathcal{F}$ com $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

Definição 3.1.5. *Uma rede de valores $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em S diverge na direção de $\mathcal{F}$ (ou é dita $\mathcal{F}$-divergente) se para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $\lambda_F \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in F$ para todo $\lambda \geq \lambda_F$. Denotamos $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$.*

Definição 3.1.6. *Seja $\mathcal{F}$ uma base de filtro para S e tome $F \in \mathcal{F}$. Se $\boldsymbol{A}$ é um conjunto não-autônomo do passado definimos a **órbita F-truncada de $\boldsymbol{A}$ no sentido regressivo** como sendo o conjunto não-autônomo do passado $\gamma^{\boldsymbol{A},F}$ cujas fibras são dadas por*

$$\gamma_p^{\boldsymbol{A},F} := \bigcup_{s \in F} \varphi_s^{s^{-1}}(A_{s^{-1}})$$

*para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$. A S-**órbita** de $\boldsymbol{A}$ é o conjunto $\gamma^{\boldsymbol{A},S}$.*

*Se $\boldsymbol{R}$ é um conjunto não-autônomo do futuro definimos a **órbita F-truncada de $\boldsymbol{R}$ no sentido progressivo** como sendo o conjunto não-autônomo do futuro $\delta^{\boldsymbol{R},F}$ cujas fibras são dadas por*

$$\delta_p^{\boldsymbol{R},F} := \bigcup_{s \in F} \varphi_{s^{-1}}^{sp}(A_{sp})$$

*para todo $p \in P^*(\boldsymbol{R})$. A S-**órbita** de $\boldsymbol{R}$ é o conjunto $\gamma^{\boldsymbol{R},S}$.*

Note que $\gamma^{\mathbf{A},F} \subset \gamma^{\mathbf{A},F'}$ se $F \supset F'$ e se S é um monóide então $\mathbf{A} \subset \gamma^{\mathbf{A},S}$.

A seguir, em diversos momentos, estaremos interessados em provar propriedades de invariância para os objetos que forem sendo definidos como os conjuntos limites e atratores, e para conseguir provar algumas das invariâncias, em boa parte dos casos será necessário recorrer a algumas hipóteses de translação sobre a base de filtro $\mathcal{F}$, as quais são dadas a seguir.

Definição 3.1.7. *Dizemos que $\mathcal{F} \subset S$ satisfaz:*

1. *Hipótese H_1 se para todo $s \in S$ e $F \in \mathcal{F}$ existir $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $sF^* \subset F$.*

2. *Hipótese H_2 se para todo $s \in S$ e $F \in \mathcal{F}$ existir $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $F^*s \subset F$.*

3. *Hipótese H_3 se para todo $s \in S$ e $F \in \mathcal{F}$ existir $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $F^* \subset Fs$.*

4. *Hipótese H_4 se para todo $s \in S$ e $F \in \mathcal{F}$ existir $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $F^* \subset sF$.*

3.2 Comportamento assintótico dos cociclos topológicos

Nessa seção estudaremos o comportamento assintótico dos cociclos topológicos. Iniciaremos apresentando os conceitos de conjuntos limites e algumas das suas principais propriedades e caracterizações. Provaremos as propriedades para o conjunto limite do passado, mas a maioria delas podem ser reproduzidas, de modo análogo, para o conjunto limite do futuro.

Definição 3.2.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma base de filtro para S e $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado. O **conjunto limite do passado** $\omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}}$ de $\boldsymbol{A}$ é o conjunto não-autônomo do passado dado pelas fibras*

$$\omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{s \in F} \varphi_s^{s^{-1}p}(A_{s^{-1}p})} \right)$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$.

*Se o sistema Φ_S^P é invertível $\boldsymbol{A}$ é um conjunto não-autônomo do futuro podemos definir o **conjunto limite do futuro** $\alpha_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}}$ de $\boldsymbol{A}$ como sendo o conjunto não-autônomo do futuro dados* *pelas fibras*

$$\alpha_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}} := \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{s\in F} \varphi_{s^{-1}}^{sp}(A_{sp})} \right)$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$.

Proposição 3.2.1. *Dados X_p um espaço regular para todo $p \in P$ e $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado. Se um conjunto não-autônomo do passado $\boldsymbol{K}$ é tal que para toda vizinhança V_p de K_p existe $F \in \mathcal{F}$ com*

$$\varphi_s^{s^{-1}p}(A_{s^{-1}p}) \subset V_p,$$

para todo $s \in F$ e $p \in P^*(\boldsymbol{A})$. Então

$$\omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}} \subset \overline{K}_p,$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$.

Demonstração: Se $y \notin \overline{K}_p$ então existe uma vizinhança V_p de K_p tal que $y \notin \overline{V}_p$. Como V_p é uma vizinhança de K_p, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$\omega^{\mathbf{A},\mathcal{F}} \subset \overline{\bigcup_{s\in F} \varphi_s^{s^{-1}p}(A_{s^{-1}p})} \subset \overline{V}_p.$$

Portanto, $y \notin \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$. □

Proposição 3.2.2. *Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ conjuntos não-autônomos do passado e $\mathcal{F}$ uma base de filtro em S. Então o conjuntos limites do passado possui as seguintes propriedades:*

(i) Se $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$ então $\omega_p^{\boldsymbol{B},\mathcal{F}} \subset \omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}}$ para todo $p \in P^*(\boldsymbol{B})$.

(ii) $\omega_p^{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B},\mathcal{F}} \subset \omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}} \cap \omega_p^{\boldsymbol{B},\mathcal{F}}$ para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A}) \cap P^*(\boldsymbol{B})$.

(iii) $\omega_p^{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\mathcal{F}} = \omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}} \cup \omega_p^{\boldsymbol{B},\mathcal{F}}$ para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A}) \cup P^*(\boldsymbol{B})$.

Demonstração: (i) Como $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, então $B_p \subset A_p$ para todo $p \in P^*(\mathbf{B})$. Daí é claro que

$$\omega_p^{\mathbf{B},\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{\bigcup_{s\in F} \varphi_s^{s^{-1}p}(B_{s^{-1}p})} \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{\bigcup_{s\in F} \varphi_s^{s^{-1}p}(A_{s^{-1}p})} = \omega_p^{\mathbb{A},\mathcal{F}},$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{B})$.

(ii) É claro $(A \cap B)_p \subset A_p$ e $(A \cap B)_p \subset B_p$ para todo $p \in P^*(\mathbf{A}) \cap P^*(\mathbf{B})$. Então pelo item (i) temos $\omega_p^{\mathbf{A}\cap\mathbf{B},\mathcal{F}} \subset \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ e $\omega_p^{\mathbf{A}\cap\mathbf{B},\mathcal{F}} \subset \omega_p^{\mathbf{B},\mathcal{F}}$, para todo $p \in P^*(\mathbf{A}) \cap P^*(\mathbf{B})$. Portanto,

$$\omega_p^{\mathbf{A}\cap\mathbf{B},\mathcal{F}} \subset \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} \cap \omega_p^{\mathbf{B},\mathcal{F}}$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{A}) \cap P^*(\mathbf{B})$.

(iii) Se $A_p \subset (A \cup B)_p$ e $B_p \subset (A \cup B)_p$ para todo $p \in P^*(\mathbf{A}) \cup P^*(\mathbf{B})$, então pelo item (i) temos que $\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} \subset \omega_p^{\mathbf{A}\cup\mathbf{B},\mathcal{F}}$ e $\omega_p^{\mathbf{B},\mathcal{F}} \subset \omega_p^{\mathbf{A}\cup\mathbf{B},\mathcal{F}}$, para todo $p \in P^*(\mathbf{A}) \cup P^*(\mathbf{B})$. Portanto,

$$\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} \cup \omega_p^{\mathbf{B},\mathcal{F}} \subset \omega_p^{\mathbf{A}\cup\mathbf{B},\mathcal{F}}$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{A}) \cup P^*(\mathbf{B})$. Seja $x \notin \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} \cup \omega_p^{\mathbf{B},\mathcal{F}}$. Uma vez que $x \notin \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{\gamma_p^{\mathbf{A},F}}$, existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin \gamma_p^{\mathbf{A},F_1}$. Além disso, existe uma vizinhança U de x tal que para todo $y \in U$ tem-se que $y \notin \gamma_p^{\mathbf{A},F_1}$. Do mesmo modo, como $x \notin \omega_p^{\mathbf{B},\mathcal{F}}$, existe $F_2 \in \mathcal{F}$ tal que para todo $y \in V$, onde V é uma vizinhança de x, tem-se $y \notin \gamma_p^{\mathbf{B},F_2}$. Dado $F \subset F_1 \cap F_2$, $\gamma_p^{\mathbf{A},F} \subset \gamma_p^{\mathbf{A},F_1}$ e $\gamma_p^{\mathbf{B},F} \subset \gamma_p^{\mathbf{B},F_2}$. Obtemos que $U \cap \gamma_p^{\mathbf{A},F} = \emptyset$ e $V \cap \gamma_p^{\mathbf{B},F} = \emptyset$. Como $U \cap V$ é uma vizinhança de x e $\gamma_p^{\mathbf{A},F} \cup \gamma_p^{\mathbf{B},F} = \gamma_p^{\mathbf{A}\cup\mathbf{B},F}$, segue que $(U \cap V) \cap \gamma_p^{\mathbf{A}\cup\mathbf{B},F} = \emptyset$. Portanto, $x \notin \omega_p^{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}}$ concluindo a inclusão contrária. □

Proposição 3.2.3. *Se* $\boldsymbol{A}$ *é um conjunto não-autônomo do passado S-progressivamente invariante (S-regressivamente invariante, S-invariante), então* $\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} \subset \overline{A}_p$ $(\overline{A}_p \subset \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$, $\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} = \overline{A}_p)$

Demonstração: A proposição segue da seguinte igualdade

$$\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{\bigcup_{s\in F} \varphi_s^{s^{-1}(A_{s^{-1}p})}} \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{\bigcup_{s\in F} A_p}$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{A})$. □

Proposição 3.2.4. *Seja* $\boldsymbol{A}$ *um conjunto não-autônomo do passado e* $\mathcal{F}$ *uma base de filtro em* S.

(i) $\omega^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}}$ *é um conjunto fechado.*

(ii) Se o cociclo é contínuo e $\mathcal{F}$ *satisfaz a hipótese de translação* H_1 *então* $\omega^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}}$ *é S-progressivamente invariante.*

(iii) Se o cociclo é contínuo, inversível e $\mathcal{F}$ *satisfaz a hipótese de translação* H_4 *então* $\omega^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}}$ *é S-regressivamente invariante.*

Demonstração:

(i) Seja $p \in P^*(\mathbf{A})$. É claro que $\omega^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ é fechado, pois é a interseção de conjuntos fechados.

(ii) Sejam $z \in \omega^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$, $s \in S$ e $F \in \mathcal{F}$. Uma vez que $\mathcal{F}$ satisfaz H_1, existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $sF^* \subset F$. Pela definição do conjunto limite do passado, $z \in \overline{\bigcup_{t^* \in F^*} \varphi_{t^*}^{t^{*-1}p}\left(A_{t^{*-1}p}\right)}$. Pela continuidade do cociclo segue que

$$
\begin{aligned}
\varphi_s^p(z) \in \overline{\bigcup_{t^* \in F^*} \varphi_s^p\left(\varphi_{t^*}^{t^{*-1}p}\left(A_{t^{*-1}p}\right)\right)} &= \overline{\bigcup_{t^* \in F^*} \varphi_{st^*}^{t^{*-1}p}\left(A_{t^{*-1}p}\right)} \\
&= \overline{\bigcup_{t^* \in F^*} \varphi_{st^*}^{t^{*-1}s^{-1}sp}\left(A_{t^{*-1}s^{-1}sp}\right)} \\
&\subset \overline{\gamma_{sp}^{\mathbf{A},F}}.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $F \in \mathcal{F}$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $\varphi_s^p(z) \in \overline{\gamma_{sp}^{\mathbf{A},F}}$ para todo $F \in \mathcal{F}$, ou seja, $\varphi_s^p(z) \in \omega_{sp}^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$

(iii) Sejam $p \in P^*(\mathbf{A})$, $s \in S$, $z \in \omega_{sp}^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ e $F \in \mathcal{F}$. Uma vez que $\mathcal{F}$ satisfaz H_4, existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $s^{-1}F^* \subset F$. Pela definição do conjunto limite do passado, $z \in \overline{\bigcup_{t^* \in F^*} \varphi_{t^*}^{t^{*-1}(sp)}\left(A_{t^{*-1}(sp)}\right)}$. Pela continuidade do cociclo segue que

$$
\begin{aligned}
z \in \overline{\bigcup_{t^* \in F^*} \varphi_s^p\left(\varphi_{t^*}^{t^{*-1}(sp)}\left(A_{t^{*-1}(sp)}\right)\right)} &= \overline{\bigcup_{t^* \in F^*} \varphi_{s(s^{-1}t^*)}^{t^{*-1}sp}\left(A_{t^{*-1}p}\right)} \\
&= \overline{\bigcup_{t^* \in F^*} \varphi_s^p\left(\varphi_{s^{-1}t^*}^{(t^{*-1}s)p}\left(A_{(t^{*-1}s)p}\right)\right)} \\
&= \varphi_s^p\left(\overline{\bigcup_{t^* \in F^*} \varphi_{s^{-1}t^*}^{(t^{*-1}s)p}\left(A_{(t^{*-1}s)p}\right)}\right) \\
&\subset \varphi_s^p\left(\overline{\gamma_p^{\mathbf{A},F}}\right).
\end{aligned}
$$

Uma vez que $F \in \mathcal{F}$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $z \in \varphi_s^p\left(\overline{\gamma_p^{\mathbf{A},F}}\right)$ para todo $F \in \mathcal{F}$, ou seja, $z \in \varphi_s^p\left(\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}\right)$.

□

Proposição 3.2.5. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado e $\mathcal{F}$ uma base de filtro para S. Para cada $p \in P^*(\boldsymbol{A})$ o conjunto limite do passado admite a seguinte caracterização*

$$
\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} = \left\{ \begin{array}{c} y \in X_p; \quad \textit{existem redes} \quad (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset S, \quad \textit{com} \quad t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty, \\ e \quad x_\lambda \in A_{t_\lambda^{-1}p} \quad \textit{tais que} \quad \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda) \to y. \end{array} \right\}
$$

Demonstração: Dado $y \in \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$, temos que $y \in \overline{\bigcup_{s \in F} \varphi_s^{s^{-1}p}(A_{s^{-1}p})}$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Assim para cada $F \in \mathcal{F}$ existe uma rede $(z_{\lambda_F}) \subset X_p$ onde $z_{\lambda_F} = \varphi_{t_{\lambda_F}}^{t_{\lambda_F}^{-1}p}(x_{\lambda_F})$, com $t_{\lambda_F} \in F$, $x_{\lambda_F} \in A_{t_{\lambda_F}^{-1}p}$ e $z_{\lambda_F} \to y$.

Seja $\mathcal{U}_y$ o conjunto de todas as vizinhanças de y. Então para cada $U \in \mathcal{U}_y$ e $F \in \mathcal{F}$, tome λ_F tal que $z_{\lambda_F} \in U$. Assim, podemos construir uma rede $(t_{\lambda_{F,U}})$, onde a condição acima é satisfeita e cuja direção é dada por $\lambda_{F,U} \prec \lambda_{F_1,V}$, se $F_1 \subset F$ e $V \subset U$. Esta direção está bem definida, pois $\lambda_{F,U} \prec \lambda_{F,U}$ e; se $\lambda_{F,U} \prec \lambda_{F_1,V}$ e $\lambda_{F_1,V} \prec \lambda_{F_2,W}$ então $F_2 \subset F_1 \subset F$ e $W \subset V \subset U$ logo $\lambda_{F,U} \prec \lambda_{F_2,W}$. Além disso, para $\lambda_{F,U}$ e $\lambda_{F_1,V}$, existem $F_2 \subset F \cap F_1$ e $W \subset U \cap V$, o que implica que $\lambda_{F,U} \prec \lambda_{F_2,W}$ e $\lambda_{F_1,V} \prec \lambda_{F_2,W}$.

Note que $z_{\lambda_{F,U}} \to y$. De fato, dado $U \in \mathcal{U}_y$, por construção, $z_{\lambda_{F,U} \in U}$. Logo, se $\lambda_{F,U} \prec \lambda_{F_1,V}$ então $z_{\lambda_{F_1,V}} \in V \subset U$. Também, $t_{\lambda_{F,U}} \to_{\mathcal{F}} \infty$, pois para cada $F \in \mathcal{F}$, $t_{\lambda_{F,U}} \in F$ para todo $U \in \mathcal{U}_y$. Assim, se $\lambda_{F,U} \prec \lambda_{F_1,V}$ então $F_1 \subset F$ e $t_{F_1,V} \in F$, mostrando a primeira inclusão.

Para provarmos a inclusão contrária, dado $p \in P^*(\mathbf{A})$, tome $y \in X_p$ tal que existem redes $(t_\lambda) \subset S$, $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$, e $x_\lambda \in A_{t_\lambda^{-1}p}$ tais que $z_\lambda = \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda) \to y$. Então, para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in F$ e $z_\lambda \to y$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto, para cada $\in \mathcal{F}$ existem redes $(t_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0} \subset F$, $(x_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ com $x_\lambda \in A_{t_\lambda^{-1}p}$ tais que $(z_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ converge a y, isto é, $y \in \overline{\bigcup_{s \in F} \varphi_s^{s^{-1}p}(A_{s^{-1}p})}$, concluindo que $y \in \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$. □

O seguinte resultado para o conjunto limite do futuro pode ser provado de maneira similar.

Proposição 3.2.6. *Assuma que o cociclo topológico $\left(\zeta, \Phi_S^P\right)$ é inversível. Sejam $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do futuro e $\mathcal{F}$ uma base de filtro para S. Para cada $p \in P^*(\boldsymbol{A})$ o conjunto limite do futuro admite a seguinte caracterização*

$$\omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}} = \left\{ \begin{array}{c} y \in X_p; \quad \textit{existem redes} \quad (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset S, \quad \textit{com} \quad t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty, \\ e \quad x_\lambda \in A_{t_\lambda p} \quad \textit{tais que} \quad \varphi_{t_\lambda^{-1}}^{t_\lambda p}(x_\lambda) \to y. \end{array} \right\}$$

Agora, definiremos os conceitos de atratividade e repulsividade em subconjuntos do espaço de fase. O atrator é definido no sentido backward enquanto o repulsor é definido no sentido forward. No capítulo 4, com a estrutura admissível, também será possível definir um repulsor no sentido backward e um atrator no sentido forward.

Definição 3.2.2. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado e $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado com $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{A})$ para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$.*

*(i) Dizemos que $\boldsymbol{A}$ é **$\mathcal{M}$-atrativo** , se para cada aberto U_p contendo A_p existe $F \in \mathcal{F}$ tal que*

$$\varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset U_p,$$

*para todo $s \in F$, $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\boldsymbol{M})$. Dizemos que $\boldsymbol{A}$ é um **$\mathcal{M}$-atrator do passado** se $\boldsymbol{A}$ é compacto, invariante e $\mathcal{M}$-atrativo.*

Sejam $\boldsymbol{R}$ um conjunto não-autônomo do futuro e $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do futuro com $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{R})$ para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$.

*(ii) Dizemos que $\boldsymbol{R}$ é $\mathcal{M}$-**repulsivo** , se para cada aberto U_p contendo R_p existe $F \in \mathcal{F}$ tal que*

$$\varphi_s^p(U_p) \supset M_{sp},$$

*para todo $s \in F$, $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\boldsymbol{M})$. Dizemos que $\boldsymbol{R}$ é um $\mathcal{M}$-**repulsor do passado** se $\boldsymbol{A}$ é compacto, invariante e $\mathcal{M}$-repulsivo.*

Nas proposições a seguir provaremos propriedades básicas dos $\mathcal{M}$-atratores.

Teorema 3.2.1. *Seja (ζ, Φ_S^P) um cociclo topológico, onde X_p é um espaço topológico regular para todo $p \in P$. Seja $\boldsymbol{K}$ um conjunto não-autônomo do passado, compacto e $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado tal que $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{K})$ para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$. Então $\boldsymbol{K}$ é $\mathcal{M}$-atrativo se, e somente se, $\omega_p^{\boldsymbol{M},\mathcal{F}} \subset K_p$ para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in \boldsymbol{M}$.*

Demonstração: Sejam $\mathbf{M}$, $p \in P^*(\mathbf{M})$ e V_p uma vizinhança fechada de K_p. Então $K_p \subset \operatorname{int}(V_p)$. Uma vez que $\mathbf{K}$ é $\mathcal{M}$-atrativo e $\operatorname{int}(V_p)$ é um conjunto aberto contendo K_p, então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\bigcup_{s \in F} \varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset \operatorname{int}(V_p) \subset V_p$. Portanto,

$$\omega_p^{\mathbf{M},\mathcal{F}} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{s \in F} \varphi_s^{s^{-1}p}\left(M_{s^{-1}p}\right)} \right) \subset \overline{K}_p = K_p.$$

Reciprocamente, se $\mathbf{K}$ não for $\mathcal{M}$-atrativo, então existem $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P$ tais que, para algum aberto $V_p \supset K_p$ e todo $F \in \mathcal{F}$, tem-se

$$\varphi_s^{s^{-1}p}\left(M_{s^{-1}p}\right) \not\subset V_p,$$

para algum $s \in F$, concluindo que, $\omega_p^{\mathbf{K},\mathcal{M}} \not\subset K_p$. □

Proposição 3.2.7. *Sejam (ζ, Φ_S^P) um cociclo topológico e $\boldsymbol{K}$ um conjunto não-autônomo do passado. Sejam $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ e $\overline{\mathcal{M}}$ famílias não-autônomas do passado, onde $\overline{\mathcal{M}}$ é de tal forma que $\overline{\boldsymbol{M}} \in \overline{\mathcal{M}}$ é dado por $\overline{\boldsymbol{M}} = \{\overline{M}_p\}_{p \in P^*(\boldsymbol{M})}$ e $\overline{M}_p$ é o fecho de M_p em X_p. Então temos as seguintes propriedades:*

(i) Se $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ e $\boldsymbol{K}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado então $\boldsymbol{K}$ é um $\mathcal{L}$-atrator do passado;

(ii) Se $\boldsymbol{K}$ é um $\mathcal{L}$-atrator do passado e um $\mathcal{M}$-atrator do passado então $\boldsymbol{K}$ é um $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$-atrator do passado;

(iii) Se $\boldsymbol{K}$ é um $\mathcal{L}$-atrator do passado e um $\mathcal{M}$-atrator do passado então $\boldsymbol{K}$ é um $\mathcal{L}\cup\mathcal{M}$-atrator do passado;

(iv) Se para todo $p \in P$ o espaço topológico X_p é regular e $\boldsymbol{K}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado então $\boldsymbol{K}$ é um $\overline{\mathcal{M}}$-atrator do passado.

Demonstração: (i) Como $\mathbf{K}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado então é compacto e invariante. Resta mostrarmos que é $\mathcal{L}$-atrativo. Para cada $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\mathbf{M})$ dada uma vizinhança aberta V_p de K_p existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset V_p$, para todo $s \in F$. Por hipótese $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$, logo para cada $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ temos que $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}$ para algum $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$. Portanto, para cada $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ e $p \in P^*(\mathbf{L})$ para a mesma vizinhança V_p e o mesmo $F \in \mathcal{F}$ anteriores temos

$$\varphi_s^{s^{-1}p}\left(L_{s^{-1}p}\right) \subset \varphi_s^{s^{-1}p}\left(M_{s^{-1}p}\right) \subset V_p,$$

para todo $s \in F$ e, portanto, $\mathbf{K}$ é um $\mathcal{L}$-atrator do passado.

(ii) Uma vez que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ e $\mathbf{K}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado então o item (i) garante que $\mathbf{K}$ é um $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$-atrator do passado.

(iii) Uma vez que $\mathbf{K}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado então é compacto, invariante e $\mathcal{M}$-atrativo, isto é, dada uma vizinhança aberta V_p de K_p existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}\left(M_{s^{-1}p}\right) \subset V_p$, para todo $s \in F_1$. Da $\mathcal{L}$-atração, segue que para a mesma vizinhança V_p existe $F_2 \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}\left(L_{s^{-1}p}\right) \subset V_p$, para todo $s \in F_2$. Tome $F = F_1 \cap F_2$. Sabemos que

$$\varphi_s^{s^{-1}p}\left((M \cup L)_{s^{-1}p}\right) = \varphi_s^{s^{-1}p}\left(M_{s^{-1}p}\right) \cup \varphi_s^{s^{-1}p}\left(L_{s^{-1}p}\right)$$

para todo $s \in S$ e $p \in P$ tais que $s^{-1}p \in P^*(\mathbf{M} \cup \mathbf{L})$. Segue daí que

$$\varphi_s^{s^{-1}p}\left((M \cup L)_{s^{-1}p}\right) \subset V_p,$$

para todo $s \in F$ e, portanto, $\mathbf{K}$ é $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$-atraído.

(iv) O conjunto $\mathbf{K}$ é compacto e invariante por ser um $\mathcal{M}$-atrator. Resta mostrarmos que é $\overline{\mathcal{M}}$-atrativo. Fixado $p \in P^*(\mathbf{K})$, tome uma vizinhança fechada V_p de K_p. Então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset V_p$, para todo $s \in F$. Para quaisquer $s \in F$ temos que $M_{s^{-1}p} \subset (\varphi_s^{s^{-1}p})^{-1}(V_p)$ e $(\varphi_s^{s^{-1}p})^{-1}(V_p)$ é fechado, pois é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua. Portanto, $\overline{M}_{s^{-1}p} \subset \varphi_s^{s^{-1}p}(V_p)$ obtendo que $\varphi_s^{s^{-1}p}(\overline{M}_{s^{-1}p}) \subset V_p$. Assim, temos que $\bigcup_{s\in F} \varphi_s^{s^{-1}p}(\overline{M}_{s^{-1}p}) \subset V_p$. Uma vez que X_p é um espaço regular, o Teorema 3.2.1 garante que $\mathbf{K}$ é $\overline{\mathcal{M}}$-atrativo. $\square$

Na seguinte proposição apresentamos uma caracterização de conjuntos não-autônomos $\mathcal{M}$-atrativos via redes $\mathcal{F}$-divergentes.

Proposição 3.2.8. *Seja $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado e $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado. Então $\boldsymbol{A}$ é $\mathcal{M}$-atrativo se, e somente se, para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{A})$ e, para toda vizinhança aberta V_p de A_p e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que*

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}p}\right) \subset V_p,$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\boldsymbol{M})$.

Demonstração: Se $\mathbf{A}$ é $\mathcal{M}$-atrativo, então para todo $M \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{A})$. Além disso, para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$ e toda vizinhança V_p de A_p existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset V_p$, para todo $s \in F$. Fixando $p \in P^*(\mathbf{M})$, uma vizinhança V_p de A_p e uma rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, pela definição de rede $\mathcal{F}$-divergente, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in F$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Em particular, concluímos que $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}p}\right) \subset V_p$, para todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Agora, suponha que existe $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ tal que $P^*(\mathbf{M}) \not\subset P^*(\mathbf{A})$ ou existe $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$, $p \in P^*(\mathbf{M})$ e uma vizinhança V_p de A_p tais que para todo $F \in \mathcal{F}$ tem-se $\varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \not\subset V_p$, para algum $s \in F$. Então, para cada $F \in \mathcal{F}$, tome $t_F \in F$ tal que $\varphi_{t_F}^{t_F^{-1}p}(m) \notin V_p$ para algum $m \in M_{t_F^{-1}p}$. Desse modo, temos uma rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_F)_{F\in\mathcal{F}}$ para a qual $\varphi_{t_F}^{t_F^{-1}p}\left(M_{t_F^{-1}p}\right) \not\subset V_p$, para todo $F \in \mathcal{F}$. □

Proposição 3.2.9. *Seja $\boldsymbol{A}$ um conjunto $\mathcal{M}$-atrativo.*

(i) Se $\boldsymbol{A}$ é fechado então $\omega_p^{\boldsymbol{M},\mathcal{F}} \subset A_p$ para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\boldsymbol{M})$.

(ii) Se $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ é regressivamente invariante, então $\overline{A}_p \subset \overline{M}_p$ para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$.

Demonstração: Fixe $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\mathbf{M})$.

(i) Para todo ponto $x \in \omega_p^{\mathbf{M},\mathcal{M}}$ existem redes $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $x_\lambda \in M_{t_\lambda^{-1}p}$ tais que $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda) \to x$. Se tivéssemos $x \notin A_p$ então existiria uma vizinhança aberta V_p de A_p tal que $x \notin V_p$, pois $\mathbf{A}$ é fechado. Portanto, teríamos que para cada $F \in \mathcal{F}$ existiria λ_F tal que $t_\lambda \in F$ para todo $\lambda \geq \lambda_F$ e $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda) \notin V_p$, contradizendo a $\mathcal{M}$-atratividade de $\mathbf{A}$.

(ii) Uma vez que $\mathbf{A}$ é $\mathcal{M}$-atrativo, para toda vizinhança V_p de A_p existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset V_p$, para todo $s \in F$. Pela invariância regressiva de $\mathbf{M}$, segue que $M_{sp} \subset \varphi_s^p(M_p)$, para todo $s \in S$. Portanto, $M_p \subset \varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset V_p$. Da arbitrariedade de $F \in \mathcal{F}$ e da vizinhança V_p, concluímos que $\overline{A}_p \subset \overline{M}_p$. □

3.3 Cociclos topológicos conjugados

Nessa seção estudaremos conjugação e semi-conjugação entre cociclos topológicos, e a partir daí, estudar como os objetos dinâmicos definidos estão relacionados com cociclos topológicos conjugados e semi-conjugados.

Definição 3.3.1. *Sejam (ζ, Φ_S^P) e (ζ, Ψ_S^P) dois cociclos topológicos definidos respectivamente sobre as famílias de espaços topológicos $\{X_p\}_{p\in P}$ e $\{Y_p\}_{p\in P}$, e $\{h_p\}_{p\in P}$ uma família de aplicações contínuas $h_p : X_p \to Y_p$ satisfazendo a seguinte propriedade:*

$$\psi_s^p(h_p(x)) = h_{sp}(\varphi_s^p(x))$$

para todo $s \in S$, $p \in P$ e $x \in X_p$.

(i) Se $h_p : X_p \to Y_p$ é sobrejetiva para todo $p \in P$ então dizemos que (ζ, Φ_S^P) e (ζ, Ψ_S^P) são ***topologicamente semi-conjugados****.*

(ii) Se $h_p : X_p \to Y_p$ é um homeomorfismo para todo $p \in P$ então dizemos que (ζ, Φ_S^P) e (ζ, Ψ_S^P) são ***topologicamente conjugados****.*

Teorema 3.3.1. *Sejam (ζ, Φ_S^P) e (ζ, Ψ_S^P) cociclos topológicos semi-conjugados, $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado e $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado com $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{A})$ para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$. Se $\boldsymbol{A}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado, então $\boldsymbol{B} = \{h_p(A_p)\}_{p\in P}$ é um $\mathcal{N}$-atrator do passado, onde cada $\boldsymbol{N} \in \mathcal{N}$ é dado por $\boldsymbol{N} = \{h_p(M_p)\}_{p\in P}$.*

Demonstração: Se os cociclos (ζ, Φ_S^P) e (ζ, Ψ_S^P) são semi-conjugados, então existe uma família de aplicações contínuas $h_p : X_p \to Y_p$ sobrejetoras tal que, para cada $p \in P$, a seguinte propriedade é satisfeita $\psi_s^p(h_p(x)) = h_{sp}(\varphi_s^p(x))$. É claro que $\mathbf{B}$ é compacto, pois para todo $p \in P^*(\mathbf{A})$, A_p é compacto e h_p é contínua. A invariância do $\mathbf{B}$ segue do fato que

$$\psi_s^p(B_p) = \psi_s^p(h_p(A_p)) = h_{sp}(\varphi_s^p(A_p)) = h_{sp}(A_{sp}) = B_{sp}.$$

Note que, para cada $p \in P^*(\mathbf{B})$, tomando um aberto V_p tal que $h(A_p) \subset V_p$, tem-se que $U_p = h_p^{-1}(V_p)$ é um aberto contendo A_p. Como $\mathbf{A}$ é $\mathcal{M}$-atrativo, então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset U_p$, para todo $s \in F$, $M \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\mathbf{M})$. Assim,

$$\psi_s^{s^{-1}p}(h_{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p})) = h_p(\varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset h_p(U_p) = V_p$$

para todo $s \in F$, $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$ e $p \in P^*(\mathbf{N})$, concluindo que $\mathbf{B}$ é $\mathcal{N}$-atrativo. $\square$

Corolário 3.3.1. *Sejam (ζ, Φ_S^P) e (ζ, Ψ_S^P) dois sistemas dinâmicos não-autônomos conjugados, $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado e $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado com $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{A})$ para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$. Então existe um $\mathcal{M}$-atrator do passado $\boldsymbol{A}$ para (ζ, Φ_S^P) se, e somente se, existe um conjunto não-autônomo do passado $\boldsymbol{B}$ e uma família de conjuntos não-autônomos do passado $\mathcal{N}$ tais que $\boldsymbol{B}$ é um $\mathcal{N}$-atrator do passado para (ζ, Ψ_S^P).*

3.4 Cociclos sobre grupos topológicos

Nessa seção, relacionaremos os cociclos topológicos com o conceito de cociclo sobre grupos topológicos. Veremos que, quando o espaço de fase do cociclo topológico $\mathfrak{X} = \{X_p; p \in P\}$ é tal que $X_p = X$ para todo $p \in P$ o mesmo pode ser visto como um cociclo da ação ζ sobre o grupo de homeomorfismos de X em X, denotado por $\hom(X)$. Antes de prosseguirmos, daremos algumas definições básicas da teoria de cohomologia em sistemas dinâmicos, a qual contempla o conceito mais geral de cociclo em dinâmica topológica.

Definição 3.4.1. *Seja ζ uma ação de um grupo topológico G em um espaço topológico X e H um grupo topológico. Um **cociclo** da ação ζ sobre o grupo H é uma aplicação $\sigma : G \times X \to H$ satisfazendo a seguinte propriedade*

$$\sigma(g_1.g_2, x) = \sigma(g_1, \zeta(g_2, x))\sigma(g_2, x),$$

para todo $g_1, g_2 \in G$ e $x \in X$.

Assim como anteriormente, por simplicidade, adotaremos a seguinte notação para a ação ζ: $\zeta(g, x) = gx$.

Definição 3.4.2. *Seja $\sigma, \varsigma : G \times X \to H$ dois cociclos da ação $\zeta : G \times X \to X$ sobre o grupo H. Dizemos que σ e ς são **cohomólogos** se existe uma aplicação $\kappa : X \to H$ tal que*

$$\varsigma(g, x) = \kappa(gx).\sigma(g, x).(\kappa(x))^{-1}. \tag{4.1}$$

Observação 3.4.1. *Note que para qualquer cociclo $\sigma : G \times X \times H$ e qualquer aplicação $\kappa : X \to H$ a aplicação $\varsigma : G \times X \to H$ definida por (4.1) é um cociclo. De fato,*

$$\begin{aligned}
\varsigma(g_1 g_2, x) &= \kappa(g_1 g_2 x).\sigma(g_1 g_1, x).(\kappa(x))^{-1} \\
&= \kappa(g_1 g_2 x).\sigma(g_1, g_2 x).\sigma(g_2, x).(\kappa(x))^{-1} \\
&= [\kappa(g_1(g_2 x)).\sigma(g_1, g_2 x).(\kappa(g_2 x))^{-1}][\kappa(g_2 x).\sigma(g_2, x).(\kappa(x))^{-1}] \\
&= \varsigma(g_1, g_2 x).\varsigma(g_2, x).
\end{aligned}$$

Definição 3.4.3. *Um cociclo $\sigma : G \times X \to H$ é chamado de* **cobordo** *se é cohomólogo ao cociclo trivial, isto é, se existe uma função $\kappa : X \to H$ tal que*

$$\sigma(g, x) = \kappa(gx).(\kappa(x))^{-1},$$

para todo $g \in G$ e $x \in X$.

De posse das definições gerais estamos em condições de relacionar os conceitos de sistemas não-autônomos e de cociclo. Considere uma ação contínua $\zeta : G \times P \to P$, onde $G = \langle S \rangle$ e S um subsemigrupo de um grupo W. Então considere um cociclo $\sigma : G \times P \to \hom(X)$, onde $\hom(X)$ é o grupo de homeomorfismos de X em X (munido com a composição de funções) sendo X um espaço topológico qualquer. Defina uma família de aplicações pondo para cada $s \in G$ e $p \in P$

$$\varphi_s^p(x) = \sigma(s, p)(x),$$

para todo $x \in X$.

Então

$$\begin{aligned} \varphi_{ts}^p(x) &= \sigma(ts, p)(x) \\ &= \sigma(t, sp) \circ \sigma(s, p)(x) \\ &= \sigma(t, sp) \circ \varphi_s^p(x) \\ &= \varphi_t^{sp} \circ \varphi_s^p(x). \end{aligned}$$

Desse modo, temos definido um cociclo topológico associado ao cociclo σ. Reciprocamente, estamos interessados em associar um sistema dinâmico não-autônomo à um cociclo $\sigma : G \times P \to \hom(X)$. É natural definirmos para cada $(s, p) \in G \times P$ tal cociclo como sendo

$$\alpha(s, p) := \varphi_s^p. \tag{4.2}$$

Observação 3.4.2. *O cociclo não precisa estar definido, necessariamente, sobre o grupo hom(X) para se obter um cociclo topológico. Com efeito, sendo $\sigma : G \times P \to H$ um cociclo sobre um grupo topológico $(H, .)$, basta definir*

$$\varphi_s^p(x) = \sigma(s, p).x,$$

para todo $s \in G$, $P \in P$ e $x \in H$.

Proposição 3.4.1. *Sejam $\sigma, \varsigma : G \times P \to$ hom(X) dois cociclos cohomólogos. Então, os cociclos topológicos (ζ, Φ) e (ζ, Ψ), associados respectivamente a σ e a ς, são conjugados.*

Demonstração: Se os cociclos σ e ς são cohomólogos, então existe uma função contínua $\kappa : P \to \hom(X)$ tal que

$$\sigma(g,p) = \kappa(gp) \circ \varsigma(g,p) \circ (\kappa(x))^{-1}.$$

Isto significa que para cada $p \in P$ temos um homeomorfismo $h_p = \kappa(p) : X \to X$ tal que

$$\varphi_g^p = h_{gp} \circ \psi_g^p \circ h_p^{-1},$$

para todo $g \in G$ e onde $\varphi_g^p := \alpha(g,p)$ e $\psi_g^p := \beta(g,p)$. Logo, os cociclos topológicos (ζ, Φ) e (ζ, Ψ) são conjugados. $\square$

3.5 Exemplos

Nesta seção, apresentaremos exemplos de cociclos topológicos e estudaremos seu comportamento assintótico mostrando quais são os atratores e repulsores correspondentes.

Exemplo 3.5.1. *Seja E um espaço vetorial normado munido com a família admissível $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}$. Para sequências finitas $\alpha = \{x_1, ..., x_k\}$ em E e $\epsilon = \{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}, ..., \mathcal{U}_{\varepsilon_k}\}$ em $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}$, seja $\mathcal{U}_\alpha^\epsilon$ uma cobertura de E^E dadas pelos conjuntos da forma $\prod_{x \in \mathbb{R}^n} U_x$ onde $U_{x_i} = \mathrm{B}(a_i, \varepsilon_i) \in \mathcal{U}_{\varepsilon_i}$, para $i = 1, ..., k$, e $U_x = E$ caso contrário. A família $\mathcal{O}_{\mathrm{p}} = \{\mathcal{U}_\alpha^\epsilon\}$ é uma base para a uniformidade da convergência pontual em E^E (veja [39, Corolário 37.13]). É bem conhecido que E^E não é metrizável com a topologia da convergência uniforme.*

Considerando E^E munido com a topologia da convergência pontual, a aplicação inclusão $i : E \hookrightarrow E^E$, onde $i(x)$ é a função constante $i(x) \equiv x$, é uma aplicação contínua.

Seja $P = \mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos e $S = \mathbb{N}$ o semigrupo dos inteiros positivos com a multiplicação. Considere a ação $\xi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada pela multiplicação $\xi(n,p) = np$ e a família de funções $\varphi_n^p : E^E \to E^E$ dada por $\varphi_n^p(f) = f^n$. É claro que essa família de funções define um cociclo topológico A fim de direcionar a ação condutora, tomamos a base de filtro $\mathcal{F} = \{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Então temos $n_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ se, e somente se, $n_\lambda \to +\infty$.

Seja $K \subset E$ um conjunto compacto fixado. Definimos um conjunto não-autônomo $\mathbf{M}$ como segue:

$$\begin{aligned} M_p &= \left\{ f \text{ é contração com ponto fixo em } K \text{ e constante Lipschtz } L = \frac{p}{2} \right\}, \qquad \text{para } p \in [0,1), \\ M_p &= \emptyset, \qquad \text{para } p \in [1, +\infty). \end{aligned}$$

Para um dado $p \in P^*(\mathbf{M}) = [0,1)$, tome $q \in S^{-1}p$. Isso significa que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nq = p$. Uma vez que $n \geq 1$ and $0 \leq p < 1$, segue que $q \in [0,1)$. Portanto, $S^{-1}p \subset P^*(\mathbf{M})$, e, portanto, $\mathbf{M}$ é um conjunto não-autônomo do passado.

Afirmamos que o conjunto não-autônomo completo $\mathbf{A}$ com fibras $A_p = i(K)$ é um $\{\mathbf{M}\}$-atrator do passado.

De fato, é claro que $\mathbf{A}$ é compacto, fechado, invariante, e $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{A})$. Considere uma cobertura aberta arbitrária $\mathcal{U}_\alpha^\epsilon \in \mathcal{O}_\mathrm{p}$, com $\alpha = \{z_1, ..., z_m\}$ e $\epsilon = \{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}, ..., \mathcal{U}_{\varepsilon_m}\}$. Para cada $p \in [0,1)$ e $f \in M_p$, denotamos por x_f o ponto fixo de f, e definimos

$$\delta = \sup\{\|z_j - x_f\| : f \in M_p, p \in [0,1), j = 1, ..., m\}.$$

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\delta}{2^{n_0}} < \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$. Para qualquer $f \in M_p$, $p \in [0,1)$, e $n \geq n_0$, então temos

$$\|f^n(z_j) - x_f\| < \frac{p^n}{2^n}\|z_j - x_f\| < \frac{\delta}{2^{n_0}} < \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$$

para todo $j = 1, ..., m$. Portanto, $f^n, i(x_f) \in \prod_{x \in E} U_x$, onde $U_{z_j} = \mathrm{B}(x_f, \varepsilon_j)$, para $j = 1, ..., m$, e $U_x = E$ caso contrário, isto é, $f^n \in \mathrm{St}[i(x_f), \mathcal{U}_\alpha^\epsilon]$. Segue que

$$\varphi_n^q(M_q) = \{f^n : f \in M_q\} \subset \mathrm{St}[i(K), \mathcal{U}_\alpha^\epsilon],$$

para todo $n \geq n_0$, $q \in \xi_n^{-1}(p)$, e $p \in P^*(\mathbf{M})$. Portanto, $\mathbf{A}$ é $\{\mathbf{M}\}$-atrativo do passado, e portanto um $\{\mathbf{M}\}$-atrator do passado.

Exemplo 3.5.2. *Como um caso especial do Exemplo 3.5.1, seja M_p o conjunto de todos os operadores contração com constante Lipschitz $< \dfrac{p}{2}$ para $p \in [0,1)$ e $M_p = \emptyset$ para $p \in [1, +\infty)$. A origem 0 é o ponto fixo em comum para as funções em M_p. O conjunto $\mathbf{A}$ dado por $A_p = \{i(0)\}$ é um $\{\mathbf{M}\}$-atrator do passado.*

Exemplo 3.5.3. *Seja E um espaço normado. Para $0 < L < 1$ fixado, seja $S \subset E^E$ o semigrupo de operadores contração*

$$S = \{T \in \mathcal{L}(E) : \|T\| \leq L < 1\}$$

e considere a ação natural $\xi : S \times E \to E$ dada por $\xi(T, x) = T(x)$. Tome a família de funções $\varphi_T^p : E^E \to E^E$ dada pela composição $\varphi_T^p(f) = T \circ f$. É claro que essa família define um cociclo topológico.

Para números fixados $c, K > 0$, definimos um conjunto não-autônomo $\mathbf{M}$ como o seguinte:

$$\begin{aligned} M_p &= \left\{ f \text{ com constante Lipschitz } \frac{\|p\|+1}{\|p\|} \text{ e } f^{-1}(0) \subset \mathrm{B}[0, K] \right\}, \qquad \text{se } \|p\| > c, \\ M_p &= \emptyset, \qquad \text{caso contrário.} \end{aligned}$$

Escolha $R \in \mathcal{L}(E)$, *com* $\|R\| \geq \dfrac{1}{L}$, *e tome* $T = R^{-1} \in S$. *Para um dado* $p \in P^{*}(\mathbf{M})$, *tome* $q = R(p)$. *Então temos* $q \in S^{-1}p$, *portanto* $S^{-1}p \neq \emptyset$. *Agora, se* $q \in S^{-1}p$ *é arbitrário, temos* $\|q\| \geq \dfrac{c}{L} > c$, *e assim* $S^{-1}p \subset P^{*}(\mathbf{M})$. *Portanto,* $\mathbf{M}$ *é um conjunto não-autônomo do passado.*

Para um dado $n \in \mathbb{N}$, *fixe* $S_n = \left\{T^k : T \in S, k \geq n\right\}$. *Para* $p, q \in \mathbb{N}$, *temos* $S_m = S_p \cap S_q$, *onde* $m = \max\{p, q\}$. *Portanto, a família* $\mathcal{F} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ *é uma base de filtro de subconjunto de* S. *Afirmamos que o conjunto não-autônomo completo* $\mathbf{A}$ *dado por* $A_p = \{i(0)\}$ *é um* $\{\mathbf{M}\}$-*atrator do passado.*

De fato, é claro que $\mathbf{A}$ *é compacto, fechado, e* $P^{*}(\mathbf{M}) \subset P^{*}(\mathbf{A})$. *Uma vez que* $T \circ i(0)(x) = T(0) = 0$ *para todo* $T \in S$ *e* $x \in E$, *segue que* $\mathbf{A}$ *é invariante.*

Agora, para uma dada cobertura aberta $\mathcal{U}_{\alpha}^{\epsilon} \in \mathcal{O}_{\mathrm{p}}$, *com* $\alpha = \{z_1, ..., z_m\}$ *e* $\epsilon = \{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}, ..., \mathcal{U}_{\varepsilon_m}\}$, *tome* $\delta = \max\{\|z_i\| : i = 1, ..., m\}$. *Considere* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$L^n < \frac{c}{c+1}\frac{1}{\delta + K}\min\{\varepsilon_i : i = 1, ..., m\}.$$

Se $T \in S_n$ *e* $f \in M_p$, *escolhemos* $x_0 \in f^{-1}(0)$ *e obtemos*

$$\begin{aligned}\|\varphi_T^p(f)(z_j)\| &= \|T(f(z_j))\| \leq L^n \|f(z_j) - f(x_0)\| \leq L^n \frac{\|p\|+1}{\|p\|}\|z_j - x_0\| \\ &\leq \frac{c}{c+1}\frac{1}{\delta+K}\min\{\varepsilon_i : i = 1, ..., m\}\frac{c+1}{c}(\delta + K) \\ &= \min\{\varepsilon_i : i = 1, ..., m\}\end{aligned}$$

portanto $\varphi_T^p(f)(z_j) \in \mathrm{B}(0, \varepsilon_j)$. *Isso significa que* $\varphi_T^p(f), i(0) \in \prod_{x \in E} U_x$, *onde* $U_{z_j} = \mathrm{B}(0, \varepsilon_j)$, *para* $j = 1, ..., m$, *e* $U_x = E$ *caso contrário. Portanto,* $\varphi_T^p(M_p) \subset \mathrm{St}\left[i(0), \mathcal{U}_{\alpha}^{\epsilon}\right]$ *para todo* $T \in S_n$ *e* $p \in P^{*}(\mathbf{M})$, *e portanto* A *é um* $\{\mathbf{M}\}$-*atrator do passado.*

Exemplo 3.5.4. *Seja* $S = \mathbb{R}^{+}$ *o grupo multiplicativo dos números reais positivos e* X *o conjunto*

$$X = \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a \leq 1\right\} \cup \left\{(a, 1) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 1\right\}$$

munido com a topologia gerada pela base $\mathcal{B}$ *dada pelos conjuntos*

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{1}{a}, 1\right] \times \{0\}\right) \cup ([1, a) \times 1), \qquad a &> 1, \\ (a, b) \times \{0\}, \qquad a &< b < 1, \\ (a, b) \times \{1\}, \qquad 1 &< a < b.\end{aligned}$$

Note que esse espaço topológico X *não é metrizável.*

Seja P *o conjunto das funções*

$$P = \left\{p : \mathbb{R}^{+} \times X \to X : p \text{ contínuas com } p(t, x) = p(s, x) \text{ para todo } t, s \in \mathbb{R}^{+}, x \in X\right\}$$

munido com a topologia compacto aberta. Considere a ação trivial $\zeta : \mathbb{R}^+ \times P \to P$ *dada por* $\zeta(t,p) = p$. *Tome a família de funções* $\varphi_t^p : X \to X$ *dada por*

$$\varphi_t^p(r,x) = \left(r^{t^{b+2}}, x\right)$$

onde b *é determinado por* $p(1,(1,1)) = (b,\cdot)$. *Então temos*

$$\varphi_{st}^p(r,x) = \left(r^{(st)^{b+2}}, x\right) = \left(\left(r^{t^{b+2}}\right)^{s^{b+2}}, x\right) = \varphi_s^p\left(r^{t^{b+2}}, x\right) = \varphi_s^p\varphi_t^p(r,x)$$

para todo $s,t \in \mathbb{R}^+$, $p \in P$, *e* $(r,x) \in X$. *Portanto essa família define um cociclo topológico.*

Considere o filtro $\mathcal{F} = \{(0,t) : t > 0\}$ *nos subconjuntos de* $\mathbb{R}^+$. *Para essa direção, temos* $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ *se, e somente se,* $t_\lambda \to 0$. *Para cada* $a > 0$, *defina o conjunto* $B_a \subset X$ *por*

$$B_a = \begin{cases} \left(\left(\frac{1}{a}, 1\right] \times \{0\}\right) \cup ([1,a) \times 1), & se\ a > 1 \\ ((a,1] \times \{0\}) \cup \left(\left[1, \frac{1}{a}\right) \times 1\right), & se\ a < 1 \end{cases}.$$

Seja $I \subset [1,+\infty)$ *qualquer conjunto de índices e tome uma coleção* $\mathcal{M}$ *de conjuntos não-autônomos* $\mathbf{M}^i$ *definidos por* $M_p^i = B_i$. *Afirmamos que o conjunto não-autônomo* $\mathbf{A}$ *dado por* $A_p = \{(1,0),(1,1)\}$ *é um* $\mathcal{M}$*-atrator do passado. De fato, para* $t_\lambda \to 0$ *e* $(r,x) \in M_p^i$, *temos*

$$\varphi_{t_\lambda}^p(r,x) = \left(r^{t_\lambda^{b+2}}, x\right) \longrightarrow (1,x).$$

Portanto, para qualquer vizinhança $U_p = \left(\left(\frac{1}{a}, 1\right] \times \{0\}\right) \cup ([1,a) \times 1)$ *de* A_p, *existe* λ_0 *tal que* $\varphi_{t_\lambda}^p\left(M_p^i\right) \subset U_p$ *para todo* $\lambda \geq \lambda_0$. *Assim,* $\mathbf{A}$ *é um* $\mathcal{M}$*-atrator do passado.*

Exemplo 3.5.5. *Seja* $P = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *o espaço de todas as transformações lineares de* $\mathbb{R}^n$ *e* S *o semigrupo de todas as matrizes diagonais reais* $n \times n$ *da forma*

$$\mathrm{diag}(s_1,...,s_n) = \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n \end{pmatrix}, \qquad 0 < s_i < 1.$$

Denote $1 = \mathrm{diag}(1,...,1)$. *Considere a ação natural* $\xi : S \times P \to P$ *dada pelo produto* $\xi(s,p) = sp$.

Tome a família de funções $\varphi_s^p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dada por*

$$\varphi_s^p(x) = e^{\mathrm{tr}(sp-p)} s(x)$$

onde $\mathrm{tr}(q)$ *significa o traço das transformações lineares* q. *Não é difícil verificar que essa família define um cociclo topológico.*

Para cada $\delta > 0$, nós definimos o conjunto $\mathbf{M}^{\delta}$ por

$$\begin{aligned} M_p^{\delta} &= \mathrm{B}\left[0, \frac{1}{1+\delta}\right], \qquad \textit{se } \mathrm{tr}\,(p) \geq 1+\delta, \\ M_p^{\delta} &= \emptyset, \qquad \textit{caso contrário.} \end{aligned}$$

Afirmamos que $\mathbf{M}^{\delta}$ é um conjunto não-autônomo do passado. De fato, para $p \in P^*\left(\mathbf{M}^{\delta}\right)$ e $s \in S$, temos $\mathrm{tr}\,(p) \geq 1+\delta$, e então

$$\mathrm{tr}\left(s^{-1}p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{ii}}{s_i} > \sum_{i=1}^{n} p_{ii} \geq 1+\delta.$$

Portanto, $S^{-1}p \subset P^*\left(\mathbf{M}^{\delta}\right)$.

Para cada $0 < a < 1$, defina o conjunto $F_a \subset S$ por

$$F_a = \left\{\mathrm{diag}\,(s_1, ..., s_n) : 0 < s_i < a\right\}.$$

É fácil ver que a família $\mathcal{F} = \{F_a : a < 1\}$ é uma base de filtro de subconjuntos de S.

Agora, tome $\mathcal{M} = \left\{\mathbf{M}^{\delta} : \delta > 0\right\}$ e $\mathbf{A} = \{0\} \times P$. Mostraremos que $\mathbf{A}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado. De fato, para $\varepsilon > 0$, tome $n > 0$ tal que $e^{-n} < \varepsilon$. Para toda $s \in F_{n+1}$, $\mathbf{M}^{\delta} \in \mathcal{M}$, $p \in P^*\left(\mathbf{M}^{\delta}\right)$, e $x \in M_p^{\delta}$, temos

$$\mathrm{tr}\left(p - s^{-1}p\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{s^i}\right) p_{ii} < \sum_{i=1}^{n} -np_{ii} = -n\mathrm{tr}\,(p) < -n$$

e então

$$\left\|\varphi_s^{s^{-1}p}\,(x)\right\| = e^{\mathrm{tr}\left(p - s^{-1}p\right)} \left\|s\,(x)\right\| < e^{-n} \left\|x\right\| < \varepsilon.$$

Isso significa que $\varphi_s^{s^{-1}p}\left(M_p^{\delta}\right) \subset \mathrm{B}\,(0, \varepsilon)$ para todo $s \in F_{n+1}$, $\mathbf{M}^{\delta} \in \mathcal{M}$, e $p \in P^*\left(\mathbf{M}^{\delta}\right)$. Assim, $\mathbf{A}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado.

3.6 Existência de atratores do passado e repulsores do futuro

Nesta seção, mostraremos a existência de atratores do passado e repulsores condicionada à existência dos conjuntos de absorção do passado e de rejeição do futuro, os quais são definidos a seguir.

Definição 3.6.1. *(i) Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro, $\boldsymbol{B}$ um conjunto não-autônomo do passado e $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado. Então, $\boldsymbol{B}$ é chamado de **$\mathcal{M}$-conjunto de absorção do passado** se para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$, temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{B})$, e para*

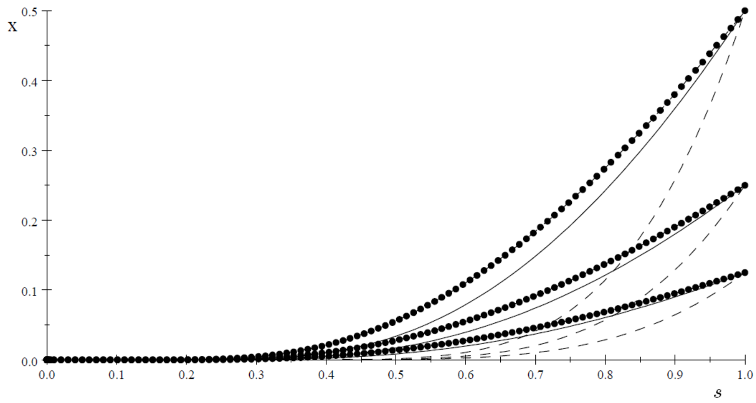

Figura 3.1: Gráfico do cociclo $\varphi_s^{s^{-1}p}(x) = e^{\mathrm{tr}(p-s^{-1}p)}s(x)$: para $p = \frac{3}{2}$ (Ponto); para $p = 2$ (Sólido); para $p = 5$ (Traço).

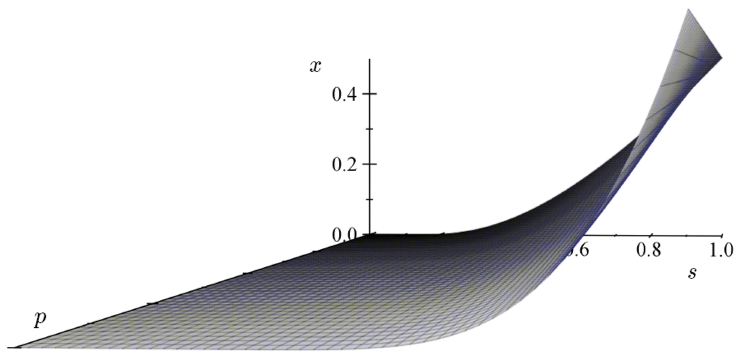

Figura 3.2: Gráfico do cociclo $\varphi_s^{s^{-1}p}(x) = e^{\mathrm{tr}(p-s^{-1}p)}s(x)$ no caso $n = 1$.

todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$\varphi_s^{s^{-1}p}(M_{s^{-1}p}) \subset B_p, \tag{6.3}$$

para todo $s \in F$.

*(ii) Suponha que (ζ, Φ_S^P) é inversível. Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro, $\boldsymbol{B}$ um conjunto não-autônomo do futuro e $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do futuro. Então, $\boldsymbol{B}$ é chamado **M-conjunto de rejeição do futuro** se para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$, temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{B})$, e para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que*

$$\varphi_{s^{-1}}^{sp}(M_{sp}) \subset B_p, \tag{6.4}$$

para todo $s \in F$.

Teorema 3.6.1 (Existência de $\mathcal{M}$-atratores do passado e $\mathcal{M}$-repulsores do futuro)**.** *Suponha que a família $\mathfrak{X} = \{X_p; p \in P\}$ tal que X_p é regular para todo $p \in P$ e que o cociclo topológico (ζ, Φ_S^P) seja inversível. Então as seguintes afirmações são satisfeitas:*

(i) Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro satisfazendo H_1 e H_3, $\mathcal{M}$ uma coleção de conjuntos não-autônomos do passado e $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}$ um $\mathcal{M}$-conjunto de absorção do passado, compacto e fechado. Então existe um $\mathcal{M}$-atrator do passado $\boldsymbol{A}$ satisfazendo

$$A_p = \omega_p^{\boldsymbol{B},\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{s\in F} \varphi_s^{s^{-1}p}\left(B_{s^{-1}p}\right)} \right),$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{B})$. Além disso, se $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}$ então $\boldsymbol{A}$ está unicamente determinado.

(ii) Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro satisfazendo H_2 e H_4, $\mathcal{M}$ uma coleção de conjuntos não-autônomos do futuro e $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}$ um conjunto de rejeição do futuro, compacto e fechado. Então existe um $\mathcal{M}$-repulsor do futuro $\boldsymbol{R}$ satisfazendo

$$R_p = \alpha_p^{\boldsymbol{B},\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{s\in F} \varphi_{s^{-1}}^{sp}\left(B_{sp}\right)} \right),$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{B})$. Além disso, se $\boldsymbol{R} \in \mathcal{M}$ então $\boldsymbol{R}$ está unicamente determinado.

Demonstração: (i) Mostraremos inicialmente que $A_p \subset B_p$ para todo $p \in P^*(\mathbf{B})$. Com efeito, se $x \in A_p$ então

$$x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{s\in F} \varphi_s^{s^{-1}p}\left(B_{s^{-1}p}\right)} \right).$$

Assim, dado $F \in \mathcal{F}$ tem-se que

$$x \in \overline{\bigcup_{s\in F} \varphi_s^{s^{-1}p}\left(B_{s^{-1}p}\right)}$$

Uma vez que $\mathbf{B} \in \mathcal{M}$, existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}\left(B_{s^{-1}p}\right) \subset B_p$, para todo $s \in F^*$. Logo, concluímos que

$$x \in \overline{\bigcup_{s\in F^*} \varphi_s^{s^{-1}p}\left(B_{s^{-1}p}\right)} \subset \overline{B_p} = B_p,$$

obtendo a inclusão desejada.

Note que, para $p \in P^*(\mathbf{B})$ os conjuntos $\gamma_p^{\mathbf{B},F} := \bigcup_{s\in F} \varphi_s^{s^{-1}p}\left(B_{s^{-1}p}\right)$ formam uma sequência decrescente de subconjuntos de B_p a partir de algum $F^* \in \mathcal{F}$. Segue daí, que para todo $F \geq F^*$ os conjuntos $\overline{\gamma_p^{\mathbf{B},F}}$ formam uma sequência decrescente de subconjuntos compactos de B_p e, portanto, A_p é não-vazio e compacto, pois X_p é um espaço regular. Dessa forma, ficam garantidas duas das condições para que $\mathbf{A}$ seja um $\mathcal{M}$-atrator: $\mathbf{A}$ é compacto e não-autônomo do passado, pois $P^*(\mathbf{A}) = P^*(\mathbf{B})$.

Da Proposição 3.2.4, segue que $\mathbf{A}$ é S-invariante, pois S satisfaz a hipótese H_1 e o cociclo é inversível.

Note que $\mathbf{A}$ é $\{\mathbf{B}\}$-atrativo, ou seja, $P^*(\mathbf{B}) \subset P^*(\mathbf{A})$ e para todo $p \in P^*(\mathbf{B})$ e toda vizinhança V_p de A_p, existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}(B_{s^{-1}p}) \subset V_p$, para todo $s \in F_1$.

Como $P^*(\mathbf{B}) = P^*(\mathbf{A})$, se a afirmação acima não fosse verdadeira, existiriam redes $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $x_\lambda \in \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(B_{t_\lambda^{-1}p}\right)$, e uma vizinhança V_p de A_p tais que para todo $\lambda \in \Lambda$ teríamos

$$x_\lambda \notin V_p. \tag{6.5}$$

A rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ possui uma subrede $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in M}$ que converge para um ponto $x_0 \in B_p$, pois B_p é compacto e existe λ_0 tal que $x_\lambda \in B_p$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Uma vez que, $x_\lambda \in \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(B_{t_\lambda^{-1}p}\right)$, concluímos que os termos da rede são da forma $x_\lambda = \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(y_\lambda)$ para algum $y_\lambda \in B_{t_\lambda^{-1}p}$. Em particular os elementos da subrede $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in M}$ são da forma

$$x_{\phi(\mu)} = \varphi_{t_{\phi(\mu)}}^{t_{\phi(\mu)}^{-1}p}\left(y_{\phi(\mu)}\right),$$

para algum $y_{\phi(\mu)} \in B_{t_{\phi(\mu)}^{-1}p}$.

A subrede $t_{\phi(\mu)} \to_{\mathcal{F}} \infty$, pois uma vez que $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é $\mathcal{F}$-divergente, para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $\lambda_F \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in F$ para todo $\lambda \geq \lambda_F$ e a cofinalidade de ϕ garante a existência de um $\mu_F \in M$ tal que $\phi(\mu_F) \geq \lambda_F$. Assim, $t_{\phi(\mu)} \in F$ para todo $\mu \geq \mu_F$ pois ϕ é crescente. Assim temos as redes $t_{\phi(\mu)} \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $\varphi_{t_{\phi(\mu)}}^{t_{\phi(\mu)}^{-1}p}\left(y_{\phi(\mu)}\right) \to x_0$, ou seja, $x_0 \in \omega_p^{\mathbf{B},\mathcal{F}}$ contradizendo 6.5.

Finalmente, mostraremos que dados $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\mathbf{M})$ para qualquer rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ e qualquer vizinhança V_p de A_p existe λ_0 tal que

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}p}\right) \subset V_p, \tag{6.6}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Fixe $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\mathbf{M})$. Uma vez que $\mathbf{A}$ é $\{\mathbf{B}\}$-atrativo, dada uma vizinhança V_p de A_p, segue que dada uma rede $\mathcal{F}$-divergente $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\varphi_{u_\lambda}^{u_\lambda^{-1}p}\left(B_{u_\lambda^{-1}p}\right) \subset V_p$, para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Por outro lado, existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}p}\right) &= \varphi_{(t_\lambda s^{-1})s}^{s^{-1}(st_\lambda^{-1}p)}\left(M_{s^{-1}(st_\lambda^{-1}p)}\right) \\ &= \varphi_{t_\lambda s^{-1}}^{(st_\lambda^{-1})p}\left(B_{(st_\lambda^{-1})p}\right), \end{aligned}$$

para todo $s \in F_1$.

Como $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3, então $u_\lambda = t_\lambda s^{-1} \to_{\mathcal{F}} \infty$, pois dado $F \in \mathcal{F}$, para quaisquer $s \in F_1$ existe $F_2 \in \mathcal{F}$ tal que $F_2 \subset Fs$ e da hipótese que $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $u_\lambda = t_\lambda s^{-1} \subset F$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Desse modo, concluímos que

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}p}\right) \subset \varphi_{u_\lambda}^{u_\lambda^{-1}p}\left(B_{u_\lambda^{-1}p}\right),$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$, provando o desejado.

Mostraremos minimalidade no sentido estabelecido no enunciado. Seja $\mathbf{C}$ um conjunto não-autônomo do passado satisfazendo $P^*(\mathbf{C}) \subset P^*(\mathbf{B})$ e tal que $C_p, p \in P^*(\mathbf{C})$, é fechado e para qualquer vizinhança V_p de C_p e qualquer rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ satisfazendo

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(B_{t_\lambda^{-1}p}\right) \subset V_p, \tag{6.7}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Se $y \in A_p$, então $y = \lim_\lambda \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda)$ para alguma rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $x_\lambda \in B_{t_\lambda^{-1}p}$. Portando, $y \in \overline{C}_p = C_p$.

Agora, suponha que exista um outro atrator $\mathbf{A}^* \in \mathcal{M}$. Se para algum $p \in P^*(\mathbf{A}^*)$ tivéssemos $A_p^* \not\subset A_p$ então existiria $x \in A_p^*$ tal que $x \notin A_p$. Por sua vez, isto implicaria a existência de uma vizinhança V_p de A_p tal que $A_p^* \not\subset V_p$. Uma vez que $A_p^* \in \mathcal{M}$ existe uma rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}}$ tal que $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(A^*_{t_\lambda^{-1}p}\right) \subset A_p^*$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e isso implicaria que $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(A^*_{t_\lambda^{-1}p}\right) \not\subset V_p$, provando a unicidade de $\mathbf{A}$. A inclusão contrária segue de forma análoga.

(ii) Analogamente demonstra-se a existência de um repulsor do futuro. □

Exemplo 3.6.1. *Considere o cociclo topológico do Exemplo 3.5.4 e o filtro* $\mathcal{F} = \{(0,t) : t > 0\}$. *Considere o conjunto não-autônomo* $\boldsymbol{B}$ *cujas fibras são dadas por* $B_p = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left[1, \frac{3}{2}\right] \times \{1\}$. $\boldsymbol{B}$ *é um conjunto de absorção, compacto e fechado para a família* $\mathcal{M}$ *formada por conjuntos não-autônomos da forma*

$$\beta_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right] \times \{0\} \cup \left[1, \frac{n+1}{n}\right) \times \{1\},$$

onde $n \in \{2, \cdots, 10\}$. *Portanto, pelo Teorema 3.6.1 o conjunto limite do passado* $\omega^{\boldsymbol{B},\mathcal{F}}$ *é um* $\mathcal{M}$*-atrator do passado para esse cociclo. A seguir, vamos calcular* $\omega^{\boldsymbol{B},\mathcal{F}}$. *Se* $y \in \omega^{\boldsymbol{B},\mathcal{F}}$ *então existem redes* $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ *e* $(r_\lambda, x_\lambda) \in B_{t_\lambda^{-1}p}$ *tais que*

$$\begin{aligned} y &= \lim_{t_\lambda \to 0} \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}((r_\lambda, x_\lambda)) \\ &= \left(r_\lambda^{t_\lambda^{b+2}}, x_\lambda\right) \\ &= (1, x_\lambda) \end{aligned}$$

Portanto, se $x_\lambda = 0$ *ou* $x_\lambda = 1$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$, *temos que* $y = (1,0)$ *ou* $y = (1,1)$. *Concluimos, então, que* $\omega_p^{\boldsymbol{B},\mathcal{F}} = \{(1,0),(1,1)\}$.

Exemplo 3.6.2. *Seja* $\mathbb{S}^n$ *a* n*-esfera unitária interpretada como a compactificação de Alexandrov de* $\mathbb{R}^n$. *Isso significa que* $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, *onde as vizinhanças básicas de* ∞ *são os* *conjuntos da forma* $\{\infty\} \cup (\mathbb{R}^n \backslash K)$, *onde* K *é um conjunto compacto em* $\mathbb{R}^n$, *e vizinhanças de pontos em* $\mathbb{R}^n$ *são inalteradas em* $\mathbb{S}^n$.

Seja S *o semigrupo de todas as matrizes diagonais* $n \times n$ *da forma*

$$diag(s_1, \cdots, s_n) = \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s^n \end{pmatrix}, \quad 0 < s_i < 1.$$

Note que $S^{-1} = \{diag(t_1, \cdots, t_n) : 1 < t_i\}$. *Considere o grupo* $G = S^{-1}S$ *e o cociclo* $\varphi : G \times G \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *definido por*

$$\varphi_t^g(x) = \begin{cases} e^{tr(tg-g)t(x)}, \ se \ x \neq \infty \\ \infty, \ se \ x = \infty \end{cases}$$

onde $tr(p)$ *significa o traço de* p. *Note que* $t_\lambda \to \infty$ *em* S *significa* $tr(t_\lambda) \to 0$ *e* $tr\left(t_\lambda^{-1}\right) \to +\infty$ *na reta real* $\mathbb{R}$.

Um atrator do passado. *Considere a família de conjuntos não-autônomos* $\mathcal{M} = \left\{\boldsymbol{M}^\delta : \delta \geq 0\right\}$, *onde* $\boldsymbol{M}^\delta$ *é definido pelas fibras*

$$\begin{aligned} M_g^\delta &= B\left[0, \frac{1}{1+\delta}\right], \ se \ tr(g) \geq 1+\delta, \\ M_g^\delta &= \emptyset, \quad caso \ contrário. \end{aligned}$$

Para $g \in G^*(\boldsymbol{M}^\delta)$ *e* $s \in S$, *é fácil ver que* $tr(s^{-1}g) > tr(g) \geq 1+\delta$. *Portanto,* $S^{-1}g \subset G^*(\boldsymbol{M}^\delta)$, *e portanto* $\boldsymbol{M}^\delta$ *é um conjunto não-autônomo do passado.*

Agora, tome $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}^0$. *Afirmamos que* $\boldsymbol{B}$ *é um conjunto* $\mathcal{M}$*-absorvente do passado. De fato, é fácil ver que* $G^*(\boldsymbol{M}^\delta) \subset G^*(\boldsymbol{B})$, *para todo* $\boldsymbol{M}^\delta \in \mathcal{M}$. *Para* $s \geq diag\left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$, $g \in G^*(\boldsymbol{M}^\delta)$, *e* $x \in M_{s^{-1}g}^\delta$, *temos* $tr(g - s^{-1}g) < 0$ *e*

$$\left\|\varphi_s^{s^{-1}g}(x)\right\| = e^{tr(g-s^{-1}g)} \left\|s(x)\right\| < \|x\| \geq \frac{1}{1+\delta} < 1.$$

Portanto,

$$\varphi_s^{s^{-1}g}\left(M_{s^{-1}g}\right) \subset B_g, \quad para \ todo \ s \geq diag\left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right), g \in G^*(\boldsymbol{M}^\delta),$$

provando a afirmação.

Pelo Teorema 3.6.1, $\boldsymbol{A} = \omega^{\boldsymbol{B}}$ *é um* $\mathcal{M}$*-atrator do passado. Tome* $t_\lambda \to \infty$ *em* S *e* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *com* $x_\lambda \in B_{t_\lambda^{-1}g}$ *tais que* $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}g}(x_\lambda) \to x$. *Temos* $tr\left(t_\lambda^{-1}g\right) \to +\infty$ *e* $\|x_\lambda\| \leq 1$, *portanto*

$$\left\|\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}g}(x_\lambda)\right\| = e^{tr(g-t_\lambda^{-1}g)} \left\|t_{\lambda(x_\lambda)}\right\| < e^{tr(g-t_\lambda^{-1}g)} \|x_\lambda\| \to 0.$$

Pela Proposição 3.2.5, $A_g = \{0\}$, sempre que $tr(g) \geq 1$, e $A_g = \emptyset$ caso contrário.

O conjunto limite do passado $\omega^{\boldsymbol{B}}$ não é o único $\mathcal{M}$-atrator do passado. De fato, não é difícil ver que $\boldsymbol{C} = \{0\} \times G$ é também um $\mathcal{M}$-atrator do passado. Veja ilustrações para o caso $n = 1$ nas Figuras 3.3 e 3.4.

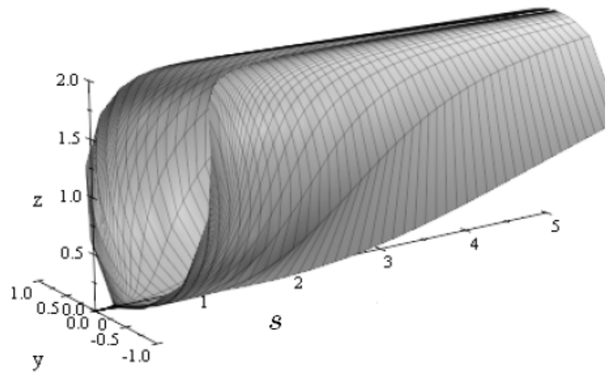

Figura 3.3: Gráfico do cociclo $\varphi_s^{s^{-1}g}(x) = e^{\mathrm{tr}(g - s^{-1}g)} s(x)$
em $\mathbb{S}^1$ para $g = 1$.

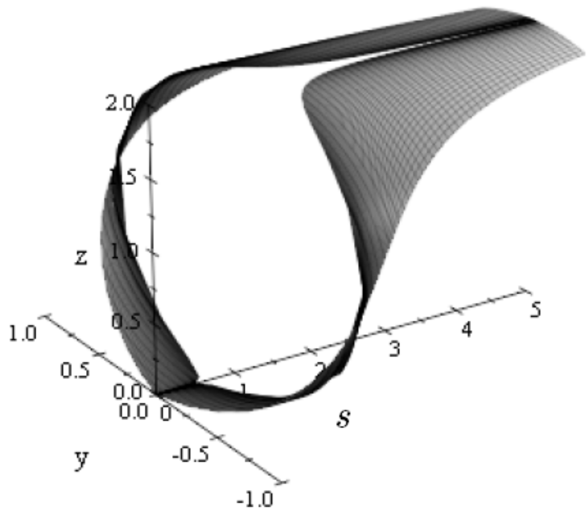

Figura 3.4: Gráfico do cociclo $\varphi_s^{s^{-1}g}(x) = e^{\mathrm{tr}(g - s^{-1}g)} s(x)$
em $\mathbb{S}^1$ para $x = 1$.

Um repulsor do futuro. *Considere a família de conjuntos não-autônomos $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{N}^{\epsilon} : \epsilon > 0\}$, onde $\boldsymbol{N}^{\epsilon}$ é dado por*

$$
\begin{aligned}
N_g^{\epsilon} &= \{\infty\} \cup (\mathbb{R}^n \backslash B[0, \epsilon]), \quad \textit{se } tr(g) \leq \frac{1}{\epsilon} \\
N_g^{\epsilon} &= \emptyset, \quad \textit{caso contrário.}
\end{aligned}
$$

Para $g \in G^*(\boldsymbol{N}^\epsilon)$ *e* $s \in S$, *é fácil ver que* $tr(sg) < tr(g) \leq \frac{1}{\epsilon}$. *Portanto,* $Sg \subset G^*(\boldsymbol{N}^\epsilon)$ *e, portanto,* $\boldsymbol{N}^\epsilon$ *é um conjunto não-autônomo do passado.*

Tome $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}^1$. *Afirmamos que* $\boldsymbol{B}$ *é um conjunto* $\mathcal{N}$*-repulsivo do futuro. De fato,* $G^*(\boldsymbol{N}^\epsilon) \subset G^*(\boldsymbol{B})$ *é óbvio. Para* $s \in S$, $g \in G^*(\boldsymbol{N}^\epsilon)$, *e* $x \in N^\epsilon_{sg}$, *temos* $tr(g - s^{-1}g) > 0$ *e*

$$\left\|\varphi^{sg}_{s^{-1}}(x)\right\| = e^{tr(g-sg)} \left\|s^{-1}(x)\right\| > \|x\| > \epsilon \geq 1$$

sempre que $x \neq \infty$, *e* $\varphi^{sg}_{s^{-1}}(\infty) = \infty$. *Portanto*

$$\varphi^{sg}_{s^{-1}}(N^\epsilon_{sg}) \subset B_g, \quad \textit{para todo } s \in S, g \in G^*(\boldsymbol{N}^\epsilon),$$

mostrando a afirmação. Pelo teorema 3.6.1, $\boldsymbol{R} = \alpha^{\boldsymbol{B}}$ *é um* $\mathcal{N}$*-repulsor do futuro. Para* $t_\lambda \to \infty$ *em* S *e* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *com* $x_\lambda \in B_{t_\lambda g}$, *temos* $tr(t_\lambda g) \to 0$ *e* $\left\|t_\lambda^{-1}(x_\lambda)\right\| \to +\infty$, *portanto*

$$\varphi^{sg}_{s^{-1}}(x_\lambda) = e^{tr(g-t_\lambda g)} \left\|t_\lambda^{-1(}x_\lambda)\right\|.$$

Pela Proposição 3.2.6, $R_g = \{\infty\}$, *sempre que* $tr(g) \leq 1$, *e* $R_g = \emptyset$ *caso contrário. Note que* $\boldsymbol{C} = \{\infty\} \times G$ *também é um* $\mathcal{N}$*-repulsor do futuro.*

Capítulo 4

Cociclos topológicos em espaços completamente regulares

O objetivo desse capítulo é desenvolvermos a teoria de cociclos topológicos em espaços completamente regulares fazendo uso da estrutura admissível. Nesse ambiente, estabeleceremos uma generalização dos resultados do capítulo 2 para os cociclos topológicos em espaços compactos Hausdorff (e, portanto, admissíveis) sobre a ação de um semigrupo.

Com uma estrutura admissível em mãos temos a possibilidade de tra/balharmos com vizinhanças de um conjunto não-autônomo, fibra a fibra, parametrizadas por uma cobertura do espaço e dessa forma somos capazes de desenvolvermos um conceito local de atratores e repulsores resultando em uma teoria de decomposições de morse baseadas no conceito de par atrator-repulsor local. A estrutura admissível é um ambiente apropriado para trabalhar os cociclos topológicos herdados da teoria de cociclos sobre grupos topológicos, uma vez que grupos topológicos são espaços admissíveis, o que nos fornece uma gama variada de exemplos abstratos.

Neste capítulo fixaremos X um espaço completamente regular e os $X_p \in \mathfrak{X}$ são todos iguais a X, e portanto as aplicações $\varphi_s^p \in \Phi_S^P$ são todas aplicações de X em X.

4.1 $\mathcal{M}$-atratividade em espaços admissíveis

Nessa seção, introduziremos as definições de repulsores do passado e atratores do futuro. Além disso, daremos as caracterizações de todos os $\mathcal{M}$-atratores e $\mathcal{M}$-repulsores estudados, usando a estrutura admissível e a função admissível. Também introduziremos os conceito de cociclos assintoticamente compactos, além de apresentarmos generalizações dos resultados apresentados no capítulo 2. Denotaremos por $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas em X.

Definição 4.1.1. *(i) Seja $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado, $\mathcal{F}$ uma base de filtro e $\boldsymbol{R}$ um conjunto não-autônomo do passado, compacto e invariante. Dizemos que $\boldsymbol{R}$ é um **$\mathcal{M}$-repulsor do passado**, se para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$, $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que*

$$\varphi_s^{s^{-1}p}\left(St\left[R_{s^{-1}p}, \mathcal{U}\right]\right) \supset M_p,$$

para todo $s \in F$.

*(ii) Seja $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do futuro, $\mathcal{F}$ uma base de filtro e $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do futuro, compacto e invariante. Dizemos que $\boldsymbol{A}$ é um **$\mathcal{M}$-atrator do futuro**, se para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$, $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que*

$$\varphi_s^p\left(M_p\right) \subset St\left[A_{sp}, \mathcal{U}\right],$$

para todo $s \in F$.

A proposição a seguir traz caracterizações para os $\mathcal{M}$-atratores e $\mathcal{M}$-repulsores, fazendo uso da função admissível. Demonstramos apenas os itens (i) e (ii), pois a demonstração dos outros dois itens são análogas às desses dois.

Proposição 4.1.1. *Sejam $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado, $\mathcal{F}$ uma base de filtro, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{R}$ conjuntos não-autônomos do passado, compactos e invariantes.*

(i) O conjunto $\boldsymbol{A}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado se, e somente se, para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{A})$ e, para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ temos

$$\rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})\right) \to \mathcal{O}, \tag{1.1}$$

para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

(ii) Suponha que (ζ, Φ_G^P) é inversível. O conjunto $\boldsymbol{R}$ é um $\mathcal{M}$-repulsor do passado se, e somente se, para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{A})$ e, para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ temos

$$\rho_{R_{t_\lambda^{-1}p}}\left(\varphi_{t_\lambda^{-1}}^p\left(M_p\right)\right) \to \mathcal{O}, \tag{1.2}$$

para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Sejam $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do futuro, $\mathcal{F}$ uma base de filtro, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{R}$ conjuntos não-autônomos do futuro, compactos e invariantes.

(iii) O conjunto $\boldsymbol{A}$ é um $\mathcal{M}$-atrator do futuro se, e somente se, para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{A})$ e, para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ temos

$$\rho_{A_{t_\lambda p}}\left(\varphi_{t_\lambda}^{p}\left(M_p\right)\right) \to \mathcal{O}, \tag{1.3}$$

para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

(iv) Suponha que (ζ, Φ_G^P) é inversível. O conjunto $\boldsymbol{R}$ é um $\mathcal{M}$-repulsor do futuro se, e somente se, para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\boldsymbol{M}) \subset P^*(\boldsymbol{A})$ e, para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$ temos

$$\rho_{R_p}\left(\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{t_\lambda p}\left(M_{t_\lambda p}\right)\right) \to \mathcal{O}, \tag{1.4}$$

para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Demonstração: (i) Sem perda de generalidade podemos supor que $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}\}$. Seja $\mathbf{A}$ um $\{\mathbf{M}\}$-atrator do passado. Então, para todo $\lambda \geq \lambda_0$ dado, temos que $x \in St[A_p,\mathcal{U}]$ para todo $x \in \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})$, ou seja,

$$\mathcal{U} \in \rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})\right) = \bigcap_{x \in B} \rho(x, A_p),$$

onde $B = \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})$. Portanto, $\rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})\right) \to \mathcal{O}$.

Reciprocamente, temos que para cada $p \in P^*(M)$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{U} \in \rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})\right)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Por definição,

$$\rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})\right) = \bigcap_{x \in B} \rho(x, A_p),$$

onde $B = \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})$. Assim, para cada $\lambda \geq \lambda_0$ tem-se que $\mathcal{U} \in \rho(x, A_p)$ para todo $x \in \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})$. Também, temos que $\rho(x, A_p) = \bigcup_{y \in A_p} \rho(x, y)$. Desse modo, existe $y \in A_p$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. Pela definição de ρ, segue que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $x \in St[A_p,\mathcal{U}]$ para todo $x \in \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})$, isto é, $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p}) \subset St[A_p,\mathcal{U}]$, para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Concluindo que A é um $\{\mathbf{M}\}$-atrator do passado.

(ii) Suponha que $\mathbf{R}$ é um $\mathcal{M}$ repulsor do passado. Então, para todo $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ temos $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{R})$, e para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e toda rede $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ que $\mathcal{F}$-diverge, existe λ_0 tal que

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(St\left[R_{t_\lambda^{-1}},\mathcal{U}\right]\right) \supset M_p,$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Uma vez que, φ é contínua e o cociclo (ζ, Φ_S^P) é invertível, segue que

$$\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{p}\left(M_p\right) \subset St\left[R_{t_\lambda^{-1}},\mathcal{U}\right]$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto, para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ a convergência em (1.2) é verdadeira.

Reciprocamente, suponha que para todo $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$, temos $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{R})$ e para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ vale (1.2). Assim, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que $\mathcal{F}$-diverge, existe λ_0 tal que

$$\varphi^{p}_{t_\lambda^{-1}}(M_p) \subset St\left[R_{t_\lambda^{-1}}, \mathcal{U}\right]$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Segue daí, que para todo $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$, temos $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{R})$ e, para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\varphi^{t_\lambda^{-1}p}_{t_\lambda}\left(St\left[R_{t_\lambda^{-1}}, \mathcal{U}\right]\right) \supset M_p,$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$, isto é, $\mathbf{R}$ é um $\mathcal{M}$-repulsor do passado. □

4.1.1 Cociclos assintoticamente compactos

A teoria geral de dinâmica topológica lida com semigrupos em espaços topológicos e muitos dos resultados estão baseados apenas em propriedades básicas dos cociclos, como a continuidade. Em espaços uniformizáveis é possivel estender a discussão e obtermos mais resultados assumindo algum grau de compacidade. Por exemplo, cociclos com órbitas relativamente compactas fornecem conjuntos limites não-vazios.

No que vem a seguir, analisaremos três conceitos chave relacionados à compacidade e que desempenham um papel central na teoria de atratores.

Definição 4.1.2. *Um cociclo topológico (ζ, Φ_S^P) é chamado:*

*(i) $\mathcal{M}$-**compacto**, se existe $F \in \mathcal{F}$ tal que para todo $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$, a órbita F-truncada $\gamma^{\boldsymbol{M},F}$ é relativamente compacta.*

*(ii) $\mathcal{M}$-**eventualmente compacto**, se para $p \in P$ e $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que o conjunto $\gamma_p^{\boldsymbol{M},F}$ é relativamente compacto.*

*(iii) $\mathcal{M}$-**assintoticamente compacto** se para todo $p \in P$, $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ e toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ em S, $x_\lambda \in M_{t_\lambda^{-1}p}$ limitada, a rede $\varphi^{t_\lambda^{-1}p}_{t_\lambda}(x_\lambda)$ em M_p possui uma subrede convergente.*

Proposição 4.1.2. *Todo cociclo topológico $\mathcal{M}$-compacto é $\mathcal{M}$-eventualmente compacto e todo cociclo $\mathcal{M}$-eventualmente compacto é $\mathcal{M}$-assintoticamente compacto.*

Demonstração: A primeira afirmação segue imediatamente da definição. Para a segunda afirmação, seja $p \in P$ e $M \in \mathcal{M}$. Sabemos que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\gamma_p^{\mathbf{M},F}$ é relativamente compacto. Agora, sem perda de generalidade, escolhemos redes $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$, $x_\lambda \in M_{t_\lambda^{-1}p}$ onde podemos assumir que $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset F$. Então, $u_\lambda = \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda)$ define uma rede na fibra relativamente compacta $\gamma_p^{\mathbf{M},F}$ e, consequentemente, existe uma subrede convergente de $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$; assim, o cociclo é $\mathcal{M}$-assintoticamente compacto. $\square$

Teorema 4.1.1. *Dado $A \in \mathcal{M}$. Se o cociclo (ζ, Φ_S^P) é $\mathcal{M}$-assintoticamente compacto, então*

(i) $\omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}}$ é não-vazio para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$.

(ii) $\omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}}$ é compacto para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$.

(iii) $\omega^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}}$ é $\{\boldsymbol{A}\}$-atrativo.

Demonstração: Sejam $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\mathbf{A})$.

(i) Dado $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset S$ com $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $x_\lambda \in M_{t_\lambda^{-1}p}$. Como (ζ, Φ_S^P) é $\mathcal{M}$-assintoticamente compacto, $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda)$ possui uma subrede convergente $\varphi_{t_{\lambda_\mu}}^{t_{\lambda_\mu}^{-1}p}(x_{\lambda_\mu})$ para algum $x \in A_p$. Uma vez que $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ segue que $t_{\lambda_\mu} \to_{\mathcal{F}} \infty$. Com isso, existem redes $x_{\lambda_\mu} \in M_{t_{\lambda_\mu}^{-1}p}$ e $t_{\lambda_\mu} \to_{\mathcal{F}} \infty$ tais que $\varphi_{t_{\lambda_\mu}}^{t_{\lambda_\mu}^{-1}p}(x_{\lambda_\mu}) \to x$. Portanto, pelo teorema 3.2.1 obtemos que $x \in \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$.

(ii) Sejam $p \in P^*(\mathbf{A})$ e uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ e $F \in \mathcal{F}$ temos que $x_\lambda \in \overline{\gamma_p^{\mathbf{A},F}}$. Com isso, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $\varphi_{t_{(\lambda,F,\mathcal{U})}}^{t_{(\lambda,F,\mathcal{U})}^{-1}p}\left(y_{(\lambda,F,\mathcal{U})}\right) \in \gamma_p^{\mathbf{A},F}$ com $t_{(\lambda,F,\mathcal{U})} \in F$ e $y_{(\lambda,F,\mathcal{U})} \in A_{t_{(\lambda,F,\mathcal{U})}^{-1}p}$ tal que $\varphi_{t_{(\lambda,F,\mathcal{U})}}^{t_{(\lambda,F,\mathcal{U})}^{-1}p}\left(y_{(\lambda,F,\mathcal{U})}\right) \in St[x_\lambda, \mathcal{U}]$, ou seja, $\mathcal{U} \in \rho\left(\varphi_{t_{(\lambda,F,\mathcal{U})}}^{t_{(\lambda,F,\mathcal{U})}^{-1}p}\left(y_{(\lambda,F,\mathcal{U})}\right), x_\lambda\right)$. Considerando a rede $u_{(\lambda,F,\mathcal{U})} = \varphi_{t_{(\lambda,F,\mathcal{U})}}^{t_{(\lambda,F,\mathcal{U})}^{-1}p}\left(y_{(\lambda,F,\mathcal{U})}\right)$ dirigida pela relação $(\lambda, F, \mathcal{U}) \leq (\lambda', F', \mathcal{V})$ se $\lambda' \geq \lambda$, $F' \subset F$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Note que $t_{(\lambda,F,\mathcal{U})} \to_{\mathcal{F}} \infty$. Com efeito, para cada $F \in \mathcal{F}$ temos temos $t_{(\lambda,F,\mathcal{U})} \in F$, daí se $(\lambda, F, \mathcal{U}) \leq (\lambda', F', \mathcal{V})$ então $t_{(\lambda',F',\mathcal{V})} \in F' \subset F$, concluindo o desejado. Uma vez que (ζ, Φ_S^P) é $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$-assintoticamente compacto, a rede $u_{(\lambda,F,\mathcal{U})}$ admite uma subrede convergente $u_{\phi(\mu)}$ onde $\phi(\mu) = (\lambda_\mu, F_\mu, \mathcal{U}_\mu)$. Digamos que $u_{(\lambda_\mu,F_\mu,\mathcal{U}_\mu)} \to x$ para algum $x \in X$. Agora, sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Uma vez que, $u_{(\lambda_\mu,F_\mu,\mathcal{U}_\mu)} \to x$, existe μ_0 tal que $\mathcal{V} \in \rho\left(u_{(\lambda_\mu,F_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x\right)$ para todo $\mu \geq \mu_0$. Fixado $(\lambda', F, \mathcal{V})$, pela cofinalidade da aplicação ϕ, tome μ_1 tal que $\phi(\mu_1) = (\lambda_{\mu_1}, A_{\mu_1}, \mathcal{U}_{\mu_1}) \geq (\lambda', F, \mathcal{V})$. Nesse caso temos que $\mathcal{U}_{\nu_1} \leq \mathcal{V}$. Note que se $\mu \geq \mu_1$ temos $\phi(\mu) \geq \phi(\mu_1)$, pois ϕ é crescente e então $\mathcal{U}_\mu \leq \mathcal{U}_{\mu_1}$. Portanto, $\mathcal{U}_\mu \geq \mathcal{V}$ se $\mu \geq \mu_1$. Por outro lado, da definição que $\mathcal{U}_\mu \in \rho\left(u_{(\lambda_\mu,F_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu}\right)$ e assim $\mathcal{V} \in \rho\left(u_{(\lambda_\mu,F_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu}\right)$ se $\mu \geq \mu_1$. Por último, tomando $\mu \geq \mu_0, \mu_1$ temos que

$$\mathcal{V} \in \rho\left(u_{(\lambda_\mu,F_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x\right) \cap \rho\left(u_{(\lambda_\mu,F_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu}\right)$$

e dessa forma

$$\mathcal{U} \in 1.\left(\rho\left(u_{(\lambda_\mu,F_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x\right) \cap \rho\left(u_{(\lambda_\mu,F_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu}\right)\right).$$

Através da desigualdade triangular abstrata

$$\rho\left(x_{\lambda_\mu}, x\right) \prec 1.\left(\rho\left(u_{(\lambda_\mu, F_\mu, \mathcal{U}_\mu)}, x\right) \cap \rho\left(u_{(\lambda_\mu, F_\mu, \mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu}\right)\right),$$

vale que $\mathcal{U} \in \rho\left(x_{\lambda_\mu}, x\right)$ se $\mu \geq \mu_0, \mu_1$. Desse modo, $\rho\left(x_{\lambda_\mu}, x\right) \to \mathcal{O}$ e $x_{\lambda_\mu} \to x$. Portanto, toda rede em $\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ admite subrede convergente e assim $\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ é compacto para todo $p \in P^*(\mathbf{A})$.

(iii) Suponha que $\omega^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ não é $\{\mathbf{A}\}$-atrativo. Então, existe $p \in P$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ de modo que $\gamma_p^{\mathbf{A},F} \not\subset St[\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}]$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Assim, para cada $F \in \mathcal{F}$ tome $t_F \in F$ e $y_F \in A_{t_F^{-1}p}$ tais que $\varphi_{t_F}^{t_F^{-1}p}(y_F) \notin St[\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}]$. Com isso, $t_F \to_{\mathcal{F}} \infty$, logo por hipótese $\varphi_{t_F}^{t_F^{-1}p}(y_F)$ admite subrede tal que $\varphi_{t_{F_\mu}}^{t_{F_\mu}^{-1}p}\left(y_{F_\mu}\right) \to x$ para algum $x \in X$. Em vista disso, $x \in \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ e pelo Teorema 3.2.1 segue que $\rho_{\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}}\left(\varphi_{t_{F_\mu}}^{t_{F_\mu}^{-1}p}\left(y_{F_\mu}\right)\right) \to \mathcal{O}$. Em seguida, tome μ_0 tal que se $\mu \geq \mu_0$ então $\mathcal{U} \in \rho_{\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}}\left(\varphi_{t_{F_\mu}}^{t_{F_\mu}^{-1}p}\left(y_{F_\mu}\right)\right)$. Nessas condições, temos $\varphi_{t_{F_\mu}}^{t_{F_\mu}^{-1}p}\left(y_{F_\mu}\right) \in St[\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}, \mathcal{U}]$ para todo $\mu \geq \mu_0$ o que é um absurdo. Portanto, $\omega^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ é $\{\mathbf{A}\}$-atrativo. □

Proposição 4.1.3. *Seja X Hausdorff admissível e $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado limitado. Assuma que o cociclo (ζ, Φ_S^P) é contínuo e $\mathcal{M}$-assintoticamente compacto e que a família $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_4. Se $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}$ e $\omega^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}} \subset \boldsymbol{A}$ então*

$$\omega_p^{\boldsymbol{A},\mathcal{F}} = \bigcap_{s \in S} \varphi_s^{s^{-1}p}\left(A_{s^{-1}p}\right)$$

para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$ e $s \in S$.

Demonstração: A inclusão $\bigcap_{s\in S} \varphi_s^{s^{-1}p}\left(A_{s^{-1}p}\right) \subset \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ é imediata. Agora, sejam $x \in \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}}$ e $s \in S$. Pela hipótese H_4, dado $F \in \mathcal{F}$ existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $F^* \subset sF$. Como $x \in \overline{\gamma_p^{\mathbf{A},F^*}}$ então para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ temos que

$$\emptyset \neq \gamma_p^{\mathbf{A},F^*} \cap St[x,\mathcal{U}] \subset \gamma_p^{\mathbf{A},sF} \cap St[x,\mathcal{U}].$$

Em vista disso, para cada $F \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ assuma $u_{(F,\mathcal{U})} = \varphi_{st_{(F,\mathcal{U})}}^{t_{(F,\mathcal{U})}^{-1}s^{-1}p}\left(x_{(F,\mathcal{U})}\right) \in \gamma_p^{\mathbf{A},sF} \cap St[x,\mathcal{U}]$ uma rede dirigida pela relação: $(F,\mathcal{U}) \leq (F', \mathcal{V})$ se $F' \subset F$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Com isso $t_{(F,\mathcal{U})} \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $x_{(F,\mathcal{U})} \in A_{t_{(F,\mathcal{U})}^{-1}p}$. Uma vez que $\mathbf{A}$ é limitado, podemos admitir $\varphi_{t_{(F,\mathcal{U})}}^{t_{(F,\mathcal{U})}^{-1}p}\left(x_{(F,\mathcal{U})}\right) \to y$ para algum $y \in X$. Portanto, $y \in \omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{U}}$. Agora mostraremos que $u_{(F,\mathcal{U})} \to x$. Com efeito, fixe $St[x,\mathcal{U}]$. Se $(F', \mathcal{V}) \geq (F,\mathcal{U})$ então $u_{F',\mathcal{V}} \in St[x,\mathcal{V}] \subset St[x,\mathcal{U}]$, logo $u_{(F,\mathcal{U})} \to x$. Finalmente, pela continuidade do cociclo e pela unicidade do limite de redes concluímos que $\varphi_s^{s^{-1}p}(y) = x$, ou seja, vale que $\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} \subset \varphi_s^{s^{-1}p}\left(\omega_{s^{-1}p}^{\mathbf{A},\mathcal{F}}\right) \subset \varphi_s^{s^{-1}p}\left(A_{s^{-1}p}\right)$ para todo $s \in S$. Portanto, $\omega_p^{\mathbf{A},\mathcal{F}} \subset \bigcap_{s\in S} \varphi_s^{s^{-1}p}\left(A_{s^{-1}p}\right)$. □

4.1.2 A compactificação βG e extensões de cociclos

Agora passamos a apresentar as generalizações dos resultados do capítulo 2, iniciando com observações à respeito da extensão de cociclos. No capítulo 2, tratamos as extensões para quando $G = \mathbb{Z}$ ou $G = \mathbb{R}$, mas nessa seção estaremos interessados em obter resultados para qualquer grupo topológico não-compacto G. Todos os resultados presentes no capítulo 2 podem ser generalizados para grupos topólogicos, assumindo-se algumas hipóteses sobre G sempre que necessário.

Seja βG a compactificação de Stone-Cech de G interpretada como o conjunto de todos os ultrafiltros dos conjuntos fechados de G. Para cada $g \in G$, temos o ultrafiltro $u_g = \{A \subset G : g \in A\}$ e o mergulho $g \in G \longmapsto u_g \in \beta G$. Assim, assumimos que $G \subset \beta G$ e $\overline{G} = \beta G$. Mais ainda, βG admite uma estrutura de semigrupo tal que o mergulho $g \longmapsto u_g$ é um monomorfismo, isto é, é injetivo e $u_{gh} = u_g u_h$.

Seja $S \subset G$ um subsemigrupo gerador de G. A fim de direcionar a ação de G, assumimos que S é reversível à direita, o que significa $Ss \cap St \neq \emptyset$ para todo $s, t \in S$. Então consideramos o reverso da $\mathcal{L}$-pré-ordem de Green da teoria de semigrupos:

$$\text{Dados } t, s \in S,\ t \geqslant s \text{ se, e somente se, } t = s \text{ ou } t \in Ss.$$

Uma vez que S é reversível à direita, a pré-ordem $\geqslant$ está direcionada. Essa direção é representada pelas famílias de translações à direita $\mathcal{F} = \{St : t \in S\}$.

Relembramos que o semigrupo S é **cêntrico** se $sS = Ss$ para todo $s \in S$; S é **semitotal** se existe um elemento $s \in S$ tal que $s^{-1}S \cup sS^{-1} = G$ ([34, Definição 3.4]).

Observação 4.1.1. *Se S é cêntrico, a família $\mathcal{F}$ satisfaz todas as hipóteses* $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3, \mathrm{H}_4$.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [34, Teorema 3.9].

Teorema 4.1.2. *Assuma que S é cêntrico. Dessa forma, S é semitotal se, e somente se, $(\omega(u_e), \omega^*(u_e))$ é o único para atrator-repulsor não-trivial em βG.*

Então, pelo teorema acima e o teorema 2.1.1, obtemos a seguinte propriedade sobre conjuntos limites em βG.

Corolário 4.1.1. *Para todo $p \in G$ temos que $J^+(p) \subset \omega(u_e)$ e $J^-(p) \subset \omega^*(u_e)$.*

Demonstração: Uma vez que G é denso em βG e ambos os conjuntos $\omega(u_e)$ e $\omega^*(u_e)$ são invariantes, segue que $G \subset \beta G \backslash (\omega(u_e) \cup \omega^*(u_e))$. E pelos teoremas 2.1.1 e 4.2.1 obtemos o resultado. $\square$

A Proposição 2.2.1 também possui uma versão mais geral aqui nesse contexto.

Proposição 4.1.4. *Sejam (t_λ) uma rede em G e (u_λ) uma rede em βG tais que $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$, $u_\lambda \to u \in \beta G$, e $t_\lambda u_\lambda \to p \in G$. Então $u \in \omega^*(u_e)$.*

Demonstração: Note que se $p \in J^+(u)$ então $u \in J^-(p)$. Como $p \in G$ temos que $J^-(p) \subset \omega^*(u_e)$ pelo Corolário 4.1.1 e, assim, $u \in \omega^*(u_e)$. $\square$

Agora faremos algumas considerações sobre a extensão de cociclos. Seja $\sigma : G \times G \to K$ um cociclo sobre um grupo topológico compacto K e fixe $t \in G$. Suponha que a função $p \longmapsto \sigma(t,p) : G \to K$ é contínua. Então podemos estendê-la continuamente a βG uma vez que K é compacto. Denotaremos a extensão por $\tilde{\sigma}_t$.

Agora, sejam $s, t \in G$ e $u \in \beta G$. Então existe uma rede $(u_\lambda) \subset G$ com $u_\lambda \to u$. Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(ts, u) &= \lim \sigma(ts, u_\lambda) \\ &= \lim \sigma(t, su_\lambda)\sigma(s, u_\lambda) \\ &= \tilde{\sigma}(t, su)\tilde{\sigma}(s, u). \end{aligned}$$

Definamos um cociclo topológico $\varphi : G \times G \times K \to K$ por $\varphi(t,p,x) = \sigma(t,u)x$. Pelas considerações anteriores $\tilde{\varphi} : G \times \beta G \times K \to K$ dado por

$$\tilde{\varphi}(t,u,x) = \tilde{\sigma}(t,u)x$$

é uma extensão do cociclo topológico φ. A proposição 2.2.2 admite uma versão mais geral, dada pela proposição a seguir, onde G é um grupo topológico qualquer e não apenas $(\mathbb{Z}, +)$ ou $(\mathbb{R}, +)$.

Proposição 4.1.5. *Assuma que $\tilde{\varphi}_t : \beta G \times X \to X$ é uma extensão contínua da aplicação parcial $\varphi_t : G \times X \to X$ para cada $t \in G$. Então a aplicação $\tilde{\varphi} : G \times \beta G \times X \to X$ definida por $\tilde{\varphi}(t,u,x) = \tilde{\varphi}_t(u,x)$ é um cociclo topológico sobre $\tilde{\zeta}$.*

Demonstração: Para um dado $u \in \beta G$ existe uma rede (t_λ) em G tal que $t_\lambda \to u$. Pela continuidade temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(ts,u,x) &= \lim_{\lambda} \varphi(ts,t_\lambda,x) \\
&= \lim_{\lambda} \varphi(t,\zeta_s(t_\lambda),\varphi(s,t_\lambda,x)) \\
&= \tilde{\varphi}(t,\lim_{\lambda} \zeta_s(t_\lambda),\lim_{\lambda} \varphi(s,t_\lambda,x)) \\
&= \tilde{\varphi}(t,\zeta_s(\lim_{\lambda} t_\lambda),\varphi(s,\lim_{\lambda} t_\lambda,x)) \\
&= \tilde{\varphi}(t,\tilde{\zeta}_s(u),\tilde{\varphi}(s,u,x)),
\end{aligned}$$

e, portanto, $\tilde{\varphi}$ define um cociclo em $\tilde{\zeta}$. □

Do mesmo modo que no capítulo 2 a continuidade uniforme é uma condição geral para estender φ_t e o mesmo argumento daquele capítulo para $G = \mathbb{T}$ vale para qualquer outro grupo topológico G. De forma semelhante, os Teoremas 2.2.2 e 2.2.3 fornecem um corolário mais geral que o Corolário 2.2.2.

Corolário 4.1.2. *Seja X um produto $\prod_\lambda [a_\lambda, b_\lambda]$ de intervalos compactos $[a_\lambda, b_\lambda] \subset \mathbb{R}$ e $\pi_\lambda : X \to [a_\lambda, b_\lambda]$ a λ-ésima aplicação projeção. Então cada aplicação $\varphi_t : G \times X \to X$ admite uma extensão contínua $\tilde{\varphi}_t : \beta G \times X \to X$ se a família $E_t^\lambda = \{(\pi_\lambda \circ \varphi_t)_s : X \to [a_\lambda, b_\lambda]\}_{p\in G}$ é equicontínua para todo $p \in G$ e $\lambda \in \Lambda$.*

Podemos adaptar o exemplo 2.2.1 para $G = (\mathbb{Q}^+, .)$ ou $G = (\mathbb{R}^+, .)$ e obtermos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1.1. *Seja $X = [a, b]$ um intervalo compacto da reta e $E = \{f_p : X \to X\}_{p\in G}$ uma família de homeomorfismos de X tais que $f_p^{-1} = f_{p^{-1}}$ para todo $p \in G$. Defina $\varphi : G\times G\times X \to X$ por*

$$\varphi(t,p,x) = f_{tp} \circ f_{p^{-1}}(x).$$

Essa aplicação é um cociclo topológico sobre o produto de G. Tome em particular a família $E = \{f_p : [0, 1] \to [0, 1]\}_{p\in G}$ onde

$$f_p(x) = \begin{cases} x^{\frac{2+\sin p^2}{2}} & se\ p \geq 1, \\ x^{\frac{2}{2+\sin p^2}} & se\ p \leq 1. \end{cases}$$

De modo semelhante ao exemplo 2.2.1, obtemos um cociclo $\varphi : G\times G\times X \to X$ que se estende a um cociclo $\tilde{\varphi} : G \times \beta G \times X \to X$.

4.1.3 Um $\mathcal{M}$-atrator do passado na extensão

Aqui assumimos que $\zeta : G \times G \to G$ é a multiplicação em G e (ζ, Φ_G^G) é um cociclo topológico com conjunto base $P = G$ e espaço compacto Hausdorff X. Requeremos que a aplicação φ seja extensível a uma aplicação cociclo $\tilde{\varphi} : G \times \beta G \times X \to X$ sobre $\tilde{\zeta} : G \times \beta G \to \beta G$, onde $\tilde{\zeta}_t(u) = u_t u$ conforme definido na seção anterior. Ao longo dessa seção, $\tilde{\psi} : G \times \beta G \times X \to \beta G \times X$ significa o fluxo produto cruzado

$$\tilde{\psi}(t,(u,x)) = \left(\tilde{\zeta}_t(u), \tilde{\varphi}_t^u(x)\right), t \in G, (u,x) \in \beta G \times X.$$

A seguir apresentamos os principais resultados dessa seção.

Teorema 4.1.3. *Seja X um espaço topológico compacto Hausdorff, $\mathcal{F}$ uma base de filtro em S satisfazendo as hipóteses H_1 e H_3, $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado e $\boldsymbol{B}$ um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado. Seja $\boldsymbol{B} \subset \beta G \times X$ tome $\overline{\boldsymbol{B}}$ e tome o conjunto $\boldsymbol{A}$ cujas fibras $p \in P^*(\boldsymbol{B})$ são dadas por $A_p = \tilde{J}^+(\overline{\boldsymbol{B}})_p$, onde $\tilde{J}^+(\overline{\boldsymbol{B}})$ é o conjunto limite prolongacional positivo do fluxo produto cruzado $\tilde{\psi}$. Então $\boldsymbol{A}$ é um $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$-atrator do passado de $(\zeta, \Phi_G^G) = (\tilde{\zeta}, \Phi_G^{\tilde{\beta G}})|_G$ que é minimal no seguinte sentido: se $\boldsymbol{C}$ é um conjunto não-autônomo do passado tal que $P^*(\boldsymbol{C}) \subset P^*(\boldsymbol{B})$, C_p é fechado para todo $p \in P^*(\boldsymbol{C})$ e para toda rede $\mathcal{F}$-divergente (t_λ) tal que*

$$\rho_{C_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(B_{t_\lambda^{-1}p})\right) \to \mathcal{O},$$

tem-se $A_p \subset C_p$.

Demonstração: Devemos provar que $\mathbf{A}$ é não-autônomo do passado, compacto, invariante tal que para todo $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ tem-se $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{A})$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tem-se

$$\rho_{\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})\right) \to \mathcal{O},$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$. Uma vez que $\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ é compacto em $\beta G \times X$, $A_p = \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})_p$ é compacto em X para todo $p \in P^*(\mathbf{A})$ e, portanto, $\mathbf{A}$ é compacto. Se $x \in A_p$ então $(p,x) \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$. Como $\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ é invariante, pelo fluxo produto cruzado $\tilde{\psi}$ segue que $\tilde{\psi}(t,(p,x)) \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ para todo $t \in G$. Portanto, $(tp, \varphi_t^p(x)) \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ e, desse modo, $\varphi_t^p(x) \in A_{tp}$. Uma vez que (θ, φ) é invertível, isso é suficiente para concluir que $\mathbf{A}$ é invariante. Para provarmos que $\mathbf{A}$ é um conjunto não-autônomo do passado, note que $A_p \neq \emptyset$ implica $\emptyset \neq \varphi_t^p(A_p) \subset A_{tp}$ para todo $t \in S^{-1}$, pois $\mathbf{A}$ é invariante. Assim $O^-(p) \subset P^*(\mathbf{A})$ e, $\mathbf{A}$ é um conjunto não-autônomo do passado. Agora, mostraremos que $\mathbf{A}$ é $\{\mathbf{B}\}$-atrativo, isto é, $P^*(\mathbf{B}) \subset P^*(\mathbf{A})$ e, para toda rede

$t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ tem-se

$$\rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(B_{t_\lambda^{-1}p})\right) \to \mathcal{O} \tag{1.5}$$

para todo $p \in P^*(\mathbf{B})$. Se $p \in P^*(\mathbf{B})$ então $B_{t_\lambda^{-1}p} \neq \emptyset$ para todo $t \in S$. Então podemos encontrar redes $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e (x_λ) em X tais que $(t_\lambda^{-1}p, x_\lambda) \in B$. Pela compacidade, podemos assumir que $t_\lambda^{-1}p \to u$ em βG, $x_\lambda \to x$, $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda) \to y$ em X. Isto implica que $(u,x) \in \overline{\mathbf{B}}$ e

$$\tilde{\psi}\left(t_\lambda, (t_\lambda^{-1}p, x_\lambda)\right) = \left(p, \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda)\right) \to (p,y),$$

com $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $\left(t_\lambda^{-1}p, x_\lambda\right) \to (u,x)$. Portanto, $(p,y) \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})$ implicando que $p \in P^*(A)$ e mostrando a inclusão $P^*(B) \subset P^*(A)$. Agora, suponha que (1.5) não vale. Então existem redes $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$, $x_\lambda \in \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(B_{t_\lambda^{-1}p}\right)$ e uma cobertura $\mathcal{U}$ de X tais que para todo $\lambda \in \Lambda$ tem-se

$$x_\lambda \notin St[\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}}), \mathcal{U}]. \tag{1.6}$$

A rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ possui uma subrede $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in M}$ que converge para um ponto $x_0 \in X$, pois X é compacto. Uma vez que $x_\lambda \in \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(B_{t_\lambda^{-1}p})$ os elementos da rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ podem ser escritos na forma $x_\lambda = \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(y_\lambda)$ para algum $y_\lambda = B_{t_\lambda^{-1}p}$. Em particular, os elementos da subrede $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in M}$ são escritos como

$$x_{\phi(\mu)} = \varphi_{t_{\phi(\mu)}}^{t_{\phi(\mu)}^{-1}p}(y_{\phi(\mu)}),$$

com $y_{\phi(\mu)} \in B_{t_{\phi(\mu)}^{-1}p}$.

Portanto, temos $t_{\phi(\mu)} \to_{\mathcal{F}} \infty$, $r_{\phi(\mu)} = t_{\phi(\mu)}^{-1}p \to r \in \beta G$, $t_{\phi(\mu)}r_{\phi(\mu)} = p$ e $\varphi_{t_{\phi(\mu)}}^{r_{\phi(\mu)}}\left(y_{\phi(\mu)}\right) \to x_0$. Isso significa que $x_0 \in \tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})_p$ o que contradiz (1.6).

Finalmente, mostraremos que dado $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\mathbf{M})$, qualquer rede $\mathcal{F}$-divergente (t_λ) tem-se

$$\rho_{\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(M_{t_\lambda^{-1}p})\right) \to \mathcal{O} \tag{1.7}$$

Fixe $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ e $p \in P^*(\mathbf{M})$. Uma vez que $\mathbf{A}$ é $\{\mathbf{B}\}$-atrativo, dada uma cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, para qualquer rede $\mathcal{F}$-divergente u_λ dada, existe λ_0 tal que

$$\varphi_{u_\lambda}^{u_\lambda^{-1}p}\left(B_{u_\lambda^{-1}p}\right) \subset St[\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})_p, \mathcal{U}],$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Por outro lado, existe $F_2 \in \mathcal{F}$ tal que

$$\begin{aligned}
\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}p}\right) &= \varphi_{(t_\lambda s^{-1})s}^{s^{-1}(st_\lambda^{-1}p)}\left(M_{s^{-1}(st_\lambda^{-1}p)}\right) \\
&= \varphi_{t_\lambda s^{-1}}^{(st_\lambda^{-1})p} \circ \varphi_s^{s^{-1}(st_\lambda^{-1}p)}\left(M_{s^{-1}(st_\lambda^{-1}p)}\right) \\
&\subset \varphi_{t_\lambda s^{-1}}^{(st_\lambda^{-1})p}\left(B_{(st_\lambda^{-1})p}\right),
\end{aligned}$$

para todo $s \in F_2$.

Além disso, uma vez que $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3 então $u_\lambda = t_\lambda s^{-1} \to_{\mathcal{F}} \infty$, pois dado $F \in \mathcal{F}$, para todo $s \in S$ existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $F_1 \subset Fs$ e pelo fato de (t_λ) ser $\mathcal{F}$-divergente, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $u_\lambda = t_\lambda s^{-1} \in F_1 s^{-1} \subset F$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Assim, concluímos que

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}p}\right) \subset \varphi_{u_\lambda}^{u_\lambda^{-1}p}\left(B_{u_\lambda^{-1}p}\right) \subset St[\tilde{J}^+(\overline{\mathbf{B}})_p, \mathcal{U}],$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$, provando o desejado.

Mostraremos a minimalidade no sentido estabelecido no enunciado. Seja $\mathbf{C}$ um conjunto não-autônomo do passado tal que $P^*(\mathbf{C}) \subset P^*(\mathbf{B})$, C_p é fechado para todo $p \in P^*(\mathbf{C})$ e para toda rede $\mathcal{F}$-divergente (t_λ) tem-se

$$\rho_{C_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(B_{t_\lambda^{-1}p})\right) \to \mathcal{O}. \tag{1.8}$$

Se $y \in A_p$ então $y = \lim \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda)$, para alguma rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$, $t_\lambda^{-1}p \to r \in \beta G$ e $x_\lambda \to x \in B_p$, com $x_\lambda \in B_{t_\lambda^{-1}p}$. Portanto, por (1.8) concluímos que $y \in \overline{C}_p = C_p$. □

Agora, estabeleceremos o resultado que descreve o atrator $\mathbf{A}$ do teorema anterior, através de um subconjunto de $\omega^-(u_e) \times X$. Para isso, assumiremos que o semigrupo S é cêntrico, semi-total e fechado. Nestas condições, a família $\mathcal{F} = \{St; t \in S\}$ é uma base de filtro, satisfazendo todas as hipóteses de translação e, portanto, o Teorema 4.1.2 é verdadeiro sob essas hipóteses.

Teorema 4.1.4. *Seja $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado e $\boldsymbol{B}$ um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado. Seja $\boldsymbol{A} \subset G \times X$ o $\mathcal{M}$-atrator do passado de (θ, φ), dado pelo Teorema 4.1.2, cujas fibras são $A_p = \tilde{J}^+(\overline{\boldsymbol{B}})_p$. Então para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$ tem-se $A_p = \tilde{J}^+(\boldsymbol{W})_p$, onde $\boldsymbol{W} = \overline{\boldsymbol{B}} \cap (\omega^-(u_e) \times X)$.*

Demonstração: A inclusão $\tilde{J}^+(\mathbf{W})_p \subset A_p$ é clara. Por outro lado, para $p \in P^*(\mathbf{A})$ e $x \in A_p$, existem redes $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ em G e (u_λ, x_λ) em $\beta G \times X$ tais que $(u_\lambda, x_\lambda) \to (u, x) \in \overline{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\psi}\,(t_\lambda, (u_\lambda, x_\lambda)) \to (p, x)$. Isto significa que $t_\lambda^{-1}u_\lambda \to p$ e $\tilde{\varphi}_{t_\lambda}^{u_\lambda}(x_\lambda) \to x$. Pela Proposição 4.1.4, temos que $u \in \omega^-(u_e)$ e, portanto, $(u_{\lambda, x_\lambda}) \to (u, x) \in (\omega^-(u_e) \times X) \cap \overline{\mathbf{B}}$. Daí segue que $(p, x) \in \tilde{J}^+(\mathbf{W})$ e, portanto, $x \in \tilde{J}^+(\mathbf{W})_p$ concluindo a prova. □

4.2 Atratividade local

Conforme comentado na introdução do capítulo, os espaços admissíveis fornecem um ambiente adequado para tratar localmente os conceitos de atrator e repulsor. Nesta seção definiremos conceitos de atrator e repulsor locais e daremos algumas caracterizações desses objetos para que posteriormente possamos dar início ao estudo dos pares atratores-repulsores culminando na teoria de decomposições de Morse para cociclos topológicos.

Definição 4.2.1 (Atrator e repulsor do passado). *Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro do semigrupo S, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{R}$ conjuntos não-autônomos do passado, invariantes e compactos.*

(i) $\boldsymbol{A}$ é chamado ***atrator do passado*** *se $\boldsymbol{A}$ é um $\{\boldsymbol{M}\}$-atrator do passado para algum conjunto não-autônomo $\boldsymbol{M}$ satifazendo à seguinte propriedade: existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que*

$$St\,[A_{s^{-1}p}, \mathcal{W}] \subset M_{s^{-1}p},$$

para todo $s \in F$.

(ii) $\boldsymbol{R}$ é chamado ***repulsor do passado*** *se $\boldsymbol{R}$ é um $\{\boldsymbol{M}\}$-repulsor do passado para algum conjunto não-autônomo $\boldsymbol{M}$ satifazendo à seguinte propriedade: existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que*

$$St\,[R_{s^{-1}p}, \mathcal{W}] \subset M_{s^{-1}p},$$

para todo $s \in F$.

Segue diretamente da definição que o conjunto vazio é tanto um atrator do passado quanto um repulsor do passado. O mesmo acontece para $P \times X$ se X for compacto.

Definição 4.2.2 (Atrator e repulsor do futuro). *Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro do semigrupo S, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{R}$ conjuntos não-autônomos do futuro, invariantes e compactos.*

(i) $\boldsymbol{A}$ é chamado ***atrator do futuro*** *se $\boldsymbol{A}$ é um $\{\boldsymbol{M}\}$-atrator do futuro para algum conjunto não-autônomo $\boldsymbol{M}$ satifazendo à seguinte propriedade: existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que*

$$St\,[A_{sp}, \mathcal{W}] \subset M_{sp},$$

para todo $s \in F$.

(ii) $\boldsymbol{R}$ é chamado ***repulsor do futuro*** *se $\boldsymbol{R}$ é um $\{\boldsymbol{M}\}$-repulsor do futuro para algum conjunto não-autônomo $\boldsymbol{M}$ satifazendo à seguinte propriedade: existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo*

$p \in P^*(\boldsymbol{A})$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$St\,[R_{sp}, \mathcal{W}] \subset M_{sp},$$

para todo $s \in F$.

É imediato da definição que os conjuntos, $\emptyset$ e $P \times X$, com X compacto, são tanto atratores do futuro quanto repulsores do futuro.

O Teorema 3.6.1 garante o seguinte teorema de existência de atratores do passado.

Teorema 4.2.1. *Seja (ζ, Φ_S^P) um cociclo topológico inversível. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Seja $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do passado, $\boldsymbol{B}$ um conjunto $\mathcal{M}$-absorvente do passado e $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ uma cobertura tal que o conjunto não-autônomo $\boldsymbol{D}$, definido por

$$D_p = St[B_p, \mathcal{W}], \forall p \in P^*(\boldsymbol{B})$$

está em $\mathcal{M}$. Então, o $\mathcal{M}$-atrator do passado do teorema 3.6.1 (i) também é um atrator do passado.

(ii) Seja $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do futuro, $\boldsymbol{B}$ um conjunto $\mathcal{M}$-repulsivo do futuro e $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ uma cobertura tal que o conjunto não-autônomo $\boldsymbol{D}$, definido por

$$D_p = St[B_p, \mathcal{W}], \forall p \in P^*(\boldsymbol{B})$$

está em $\mathcal{M}$. Então, o $\mathcal{M}$-repulsor do futuro do Teorema 3.6.1 (ii) também é um atrator do passado.

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 3.6.1 e das definições 4.2.1 (i) e 4.2.2 (ii). □

Exemplo 4.2.1 (Atrator do passado). *Considere o cociclo do exemplo 3.4.1 e a base de filtro $\mathcal{F} = \{(0,t]; t \in \mathbb{R}^+\}$. Considere em X a família admissível $\mathcal{O}$ de todas as coberturas abertas e tome a cobertura*

$$\mathcal{W} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left[1, \frac{3}{2}\right) \times \{1\}, \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \times \{0\}, \left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \times \{1\} \right\}.$$

Considere também a família de conjuntos não-autônomos do passado $\mathcal{M}$, onde cada $\boldsymbol{M}^a \in \mathcal{M}$, com $a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, é dado por

$$M_p^a = (a, 1] \times \{0\} \cup [1, 1+a) \times \{1\},$$

para todo $p \in P$.

Seja $\boldsymbol{A}$ o conjunto não-autônomo do passado tal que $A_p = \{(1,0),(1,1)\}$ para todo $p \in P$. Então, $St[A_p, \mathcal{W}] = \left(\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left[1, \frac{3}{2}\right) \times \{1\} \in \mathcal{M}$. Portanto, o Teorema 4.2.1 garante que o $\mathcal{M}$-atrator do passado $\boldsymbol{A}$ é também um atrator do passado.

A partir de agora, daremos caracterizações equivalentes para os atratores e repulsores do passado. Essas caracterizações simplificam a apresentação de tais objetos, e serão úteis futuramente. Caracterizações análogas podem ser obtidas para os atratores e repulsores do futuro. Mas, antes das caracterizações, precisamos de um resultado auxiliar, o qual é apresentado na proposição a seguir.

Proposição 4.2.1. *Seja (ζ, Φ_S^P) um cociclo topológico com espaço de fase X e $\boldsymbol{M}$ um conjunto não-autônomo do passado (futuro), compacto e invariante. Então para todo $p \in P^*(\boldsymbol{M})$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $s \in G$ com $sp \in P^*(\boldsymbol{M})$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ com*

$$\varphi_s^p \left(St\left[M_p, \mathcal{V}\right]\right) \subset St\left[M_{sp}, \mathcal{U}\right].$$

Demonstração: Sabemos que $\varphi_s^p : X \to X$ é contínua. Além disso, $\varphi_s^p (M_p) = M_{sp} \subset St\left[M_{sp}, \mathcal{U}\right]$, pois $\mathbf{M}$ é invariante. Disso, segue que $M_p \subset (\varphi_s^p)^{-1} \left(St\left[M_{sp}, \mathcal{U}\right]\right)$. Da compacidade de $\mathbf{M}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $St\left[M_p, \mathcal{V}\right] \subset (\varphi_s^p)^{-1} \left(St\left[M_{sp}, \mathcal{U}\right]\right)$. Finalmente, obtemos que $\varphi_s^p \left(St\left[M_p, \mathcal{V}\right]\right) \subset St\left[M_{sp}, \mathcal{U}\right]$. □

Na seguinte proposição, apresentamos a primeira caracterização para o atrator do passado.

Proposição 4.2.2. *Seja $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado, compacto e invariante. Então $\boldsymbol{A}$ é um atrator do passado se, e somente se, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\boldsymbol{A})$ e toda rede $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ $\mathcal{F}$-divergente tem-se*

$$\rho_{A_p} \left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1} p} \left(St\left[A_{t_\lambda^{-1} p}, \mathcal{W}\right]\right)\right) \to \mathcal{O}. \tag{2.9}$$

Demonstração: Suponha que $\mathbf{A}$ é um atrator do passado. Então, por definição, existe um conjunto não-autônomo do passado $\mathbf{M}$, com $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{A})$ e tal que para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tem-se

$$\rho_{A_p} \left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1} p} \left(M_{t_\lambda^{-1} p}\right)\right) \to \mathcal{O}. \tag{2.10}$$

Além disso, $\mathbf{M}$ satisfaz a seguinte propriedade: existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$, existe $F \in \mathcal{F}$ com $St\left[A_{s^{-1}p}, \mathcal{W}\right] \subset M_{s^{-1}p}$, para todo $s \in F$. Agora, note que para cada rede

$\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ teremos $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(St\left[A_{t_\lambda^{-1}p},\mathcal{W}\right]\right)\subset\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}p}\right)$ e, portanto, por (2.10) podemos concluir que (2.9) é verdadeira.

Reciprocamente, suponha que exista $\mathcal{W}$ tal que para todo $p\in P^*(\mathbf{A})$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente vale (2.10). Defina $M_p=St\left[A_p,\mathcal{W}\right]$, para todo $p\in P^*(\mathbf{A})$. É claro que $\mathbf{M}$ satisfaz (2.9) e, além disso, como $\mathbf{A}$ é um conjunto não-autônomo do passado e $P^*(\mathbf{A})=P^*(\mathbf{M})$, segue que $\mathbf{M}$ é um conjunto não-autônomo do passado. Também é claro que dado $F\in\mathcal{F}$ qualquer, a inclusão $St\left[A_{s^{-1}p},\mathcal{W}\right]\subset M_{s^{-1}p}$ é válida para todo $s\in F$. Portanto, $\mathbf{A}$ é um atrator do passado. □

A proposição a seguir, nos dá uma outra caracterização para o $\mathcal{F}$-atrator do passado e mostra que o atrator do passado é uma versão não-autônoma do atrator de Conley.

Proposição 4.2.3. *Assuma X compacto Hausdorff. Seja (ζ,Φ_S^P) um cociclo topológico e $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado compacto e invariante. Dessa forma, $\boldsymbol{A}$ é um atrator do passado se, e somente se, existe $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$ tal que $\omega_p^{St[\mathbf{A},\mathcal{U}],\mathcal{F}}=A_p$ para todo $p\in P^*(\boldsymbol{A})$.*

Demonstração: Se $\mathbf{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator do passado, então pela proposição anterior existe $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$ tal que para cada $p\in P^*(\mathbf{A})$, tem-se $\rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(St[A_{t_\lambda^{-1}p},\mathcal{U}]\right)\right)\to\mathcal{O}$ para toda rede $t_\lambda\to_{\mathcal{F}}\infty$. Suponha que $\omega_p^{St[\mathbf{A},\mathcal{U}]}\neq A_p$. Como A_p é fechado e invariante, temos que $\omega_p^{St[\mathbf{A},\mathcal{U}]}\backslash A_p\neq\emptyset$. Com isso, tome $y\in\omega_p^{St[\mathbf{A},\mathcal{U}]}\backslash A_p$. Assim, existem redes $(x_\lambda)\subset St[A_{t_\lambda^{-1}p},\mathcal{U}]$ e $t_\lambda\to_{\mathcal{F}}\infty$ tais que $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda)\to y$. Uma vez que $\rho\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(x_\lambda),A_p\right)\prec\rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(St[A_p,\mathcal{U}])\right)$. Logo, a proposição 3.2.1 garante que $y\in A_p$, o que é impossível. Reciprocamente, suponha que $\mathbf{A}$ não é $\{St[\mathbf{A},\mathcal{U}]\}$-atrativo para todo $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$. Fixe $p\in P^*(\mathbf{A})$ e $\mathcal{U}\in\mathcal{O}$. Nesse caso existe $\mathcal{U}_0\in\mathcal{O}$ tal que $\gamma_p^{St[\mathbf{A},\mathcal{U}],F}\subsetneq St[A_p,\mathcal{U}_0]$ para todo $F\in\mathcal{F}$. Seja $\varphi_{t_F}^{t_F^{-1}p}(x_F)\in\gamma_p^{St[\mathbf{A},\mathcal{U}],F}$ com $\varphi_{t_F}^{t_F^{-1}p}(x_F)\notin St[A_p,\mathcal{U}_0]$ para cada $F\in\mathcal{F}$. Considerando a rede $u_F=\left(\varphi_{t_F}^{t_F^{-1}p}(x_F)\right)_{F\in\mathcal{F}}$, em virtude da compacidade de X podemos admitir que $u_F\to y$ para algum $y\in X$. Por último, como $t_F\to_{\mathcal{F}}\infty$ então $y\in\omega_p^{St[\mathbf{A},\mathcal{U}],\mathcal{F}}=A_p$, o que é um absurdo. Portanto $\mathbf{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator do passado. □

Proposição 4.2.4. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um conjunto não-autônomo do passado, compacto e invariante, e $\mathcal{F}$ uma base de filtro em S satisfazendo a hipótese H_4. $\boldsymbol{A}$ é um atrator do passado se, e somente se, existe $\mathcal{W}\in\mathcal{O}$ tal que para todo $p\in P^*(\boldsymbol{A})$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, existe um $E\in\mathcal{F}$ tal que*

$$\rho_{A_{\tau^{-1}p}}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}\left(St\left[A_{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p},\mathcal{W}\right]\right)\right)\to\mathcal{O},\tag{2.11}$$

para todo $\tau \in E$.

Demonstração: Suponha que $\mathbf{A}$ é um atrator do passado. Então existe um conjunto não-autônomo do passado $\mathbf{M}$ tal que $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{A})$ e para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tem-se

$$\rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}p}\right)\right) \to \mathcal{O}. \tag{2.12}$$

Além disso, $\mathbf{M}$ satisfaz a seguinte propriedade: existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\mathbf{A})$, existe $E \in \mathcal{F}$ onde $St\left[A_{s^{-1}p}, \mathcal{W}\right] \subset M_{s^{-1}p}$, para todo $s \in E$. Logo, para esse $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ e todo $p \in P^*(\mathbf{A})$ temos

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}\left(St\left[A_{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}, \mathcal{W}\right]\right) \subset \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}\left(M_{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}\right),$$

para todo $\tau \in E$. Daí, uma vez que $\tau^{-1}p \in P^*(\mathbf{M})$, toda rede $\mathcal{F}$-divergente, a convergência (2.11) vale para todo $\tau \in E$.

Reciprocamente, suponha que existe um $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\mathbf{A})$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, existe $E \in \mathcal{F}$ onde (2.12) é válida para todo $\tau \in E$. Uma vez que $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_4, dado $F_1 \in \mathcal{F}$, temos que para todo $s \in S$ existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $F^* \subset sF_1$. Além disso, a rede (t_λ) é $\mathcal{F}$-divergente e, portanto, existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in F^*$ para todo $\lambda \geq \lambda_1$. Assim, a rede $u_\lambda = \tau^{-1}t_\lambda^{-1}$, com $\tau \in E$ também é $\mathcal{F}$-divergente. Pela Proposição 4.2.1, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\varphi_\tau^{\tau^{-1}p}\left(St\left[A_{\tau^{-1}p}, \mathcal{V}\right]\right) \subset St\left[A_p, \mathcal{U}\right]$, para todo $\tau \in E$. Uma vez que (2.12) é verdadeira, para esse $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ existe um λ_2 tal que

$$\varphi_{u_\lambda}^{u_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}\left(St\left[A_{u_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}, \mathcal{V}\right]\right) \subset St\left[A_{\tau^{-1}p}, \mathcal{U}\right]$$

para todo $\lambda \geq \lambda_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}}\left(St\left[A_{t_\lambda^{-1}}, \mathcal{W}\right]\right) &= \varphi_\tau^{\tau^{-1}p} \circ \varphi_{u_\lambda}^{u_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}\left(St\left[A_{u_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}, \mathcal{W}\right]\right) \\
&\subset \varphi_\tau^{\tau^{-1}p}\left(St\left[A_{\tau^{-1}p}, \mathcal{V}\right]\right) \\
&\subset St\left[A_p, \mathcal{U}\right]
\end{aligned}$$

para todo λ tal que $\lambda \geq \lambda_1, \lambda \geq \lambda_2$ e $\tau \in E$. Portanto, $\mathbf{A}$ é um atrator do passado. □

Supondo que o cociclo topológico (ζ, Φ_S^P) seja invertível, é possível obter algumas caracterizações adicionais para o repulsor do futuro.

Proposição 4.2.5. *Suponha que (ζ, Φ_S^P) é invertível e que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro satisfazendo a hipótese H_4. Um conjunto não autônomo do passado $\boldsymbol{R}$, compacto e invariante é um repulsor* *do passado se, e somente se, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\boldsymbol{R})$, existe $E \in \mathcal{F}$ tal que*

$$\rho_{R_{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}}\left(\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{\tau^{-1}p}\left(St\left[R_{\tau^{-1}p}, \mathcal{W}\right]\right)\right) \to \mathcal{O}, \tag{2.13}$$

para todo $\tau \in E$.

Demonstração: Suponha que $\mathbf{R}$ é um repulsor do passado. Então, por definição, existe um conjunto não-autônomo do passado $\mathbf{M}$ tal que $P^*(\mathbf{M}) \subset P^*(\mathbf{R})$ e para todo $p \in P^*(\mathbf{M}), \mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ com

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(St\left[R_{t_\lambda^{-1}p}, \mathcal{U}\right]\right) \supset M_p,$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Além disso, $\mathbf{M}$ satisfaz à seguinte propriedade: existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\mathbf{R})$, existe $E \in \mathcal{F}$ com $St[R_{\tau^{-1}p}, \mathcal{W}]$, para todo $\tau \in E$.

Portanto, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\mathbf{M}), \mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente (t_λ), existe $E \in \mathcal{F}$ e $\lambda_0 \in \Lambda$ com

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}\left(St\left[R_{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}, \mathcal{U}\right]\right) \supset M_{\tau^{-1}p} \supset St\left[R_{\tau^{-1}, \mathcal{W}}\right],$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e $\tau \in F$. Mas a invertibilidade de (ζ, Φ_S^P) garante que (2.13) é verdadeira para todo $\tau \in E$.

Reciprocamente, suponha que exista um $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P^*(\mathbf{R})$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente, existe $E \in \mathcal{F}$ tal que (2.13) é satisfeita para todo $\tau \in E$. Então, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e uma rede $u_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ qualquer, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\varphi_{u_\lambda^{-1}}^{\tau^{-1}p}\left(St\left[R_{\tau^{-1}p}, \mathcal{W}\right]\right) \subset St\left[R_{u_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}, \mathcal{U}\right]$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Note que, dada uma rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ qualquer, a rede $u_\lambda = \tau^{-1}t_\lambda$ também é $\mathcal{F}$-divergente, pois a base de filtro $\mathcal{F}$ satisfaz à hipótese H_4. Assim, temos que

$$\varphi_{u_\lambda}^{u_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}\left(St\left[R_{u_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}, \mathcal{U}\right]\right) \subset St\left[R_{\tau^{-1}p}, \mathcal{W}\right],$$

para todo $\tau \in E$ e $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto, existe $\tilde{\mathcal{W}} \in \mathcal{O}$ e $F \in \mathcal{F}$ tais que

$$\varphi_{u_\lambda}^{u_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}\left(St\left[R_{u_\lambda^{-1}\tau^{-1}p}, \mathcal{U}\right]\right) \subset \varphi_{\tau^{-1}}^{p}\left(St\left[R_p, \tilde{\mathcal{W}}\right]\right),$$

para todo $\tau \in F$ e $\lambda \geq \lambda_0$. Finalmente, pela invertibilidade do cociclo (ζ, Φ_S^P), temos

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(St\left[R_{t_\lambda^{-1}p}, \mathcal{U}\right]\right) \supset St\left[R_p, \tilde{\mathcal{W}}\right].$$

Logo, para todo $p \in P^*(\mathbf{M})$ fazendo $M_p = St\left[R_p, \tilde{\mathcal{W}}\right]$ segue que $\mathbf{R}$ é um repulsor do passado. $\square$

Para os atratores e repulsores do futuro temos caracterizações análogas a essas obtidas para o passado. Apresentamos todas elas reunidas na proposição a seguir, sem demonstração.

Proposição 4.2.6. *Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{R}$ conjuntos não-autônomos do futuro, compactos e invariantes, e $\mathcal{M}$ uma família de conjuntos não-autônomos do futuro. Então, as seguintes afirmações são satisfeitas:*

(i) Suponha que a base de filtro $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1. O conjunto $\boldsymbol{A}$ é um atrator do futuro se, e somente se, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que, para cada $p \in P^*(\boldsymbol{A})$ existe um $E \in \mathcal{F}$ tal que

$$\rho_{A_{\tau t_\lambda p}}\left(\varphi_{t_\lambda}^{\tau p}\left(St\left[R_{\tau p}, \mathcal{W}\right]\right)\right) \to \mathcal{O},$$

para todo $\tau \in E$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

(ii) Suponha que (ζ, Φ_G^P) é inversível e a base de filtro $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1. O conjunto $\boldsymbol{R}$ é um repulsor do futuro se, e somente se, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que, para cada $p \in P^*(\boldsymbol{A})$ existe um $E \in \mathcal{F}$ tal que

$$\rho_{R_{\tau p}}\left(\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{\tau t_\lambda p}\left(St\left[R_{\tau t_\lambda p}, \mathcal{W}\right]\right)\right) \to \mathcal{O},$$

para todo $\tau \in E$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

(iii) Suponha que (ζ, Φ_G^P) é inversível. O conjunto $\boldsymbol{R}$ é um repulsor do futuro se, e somente se, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que, para cada $p \in P^*(\boldsymbol{A})$ temos

$$\rho_{R_p}\left(\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{t_\lambda p}\left(St\left[R_{t_\lambda p}, \mathcal{W}\right]\right)\right) \to \mathcal{O},$$

para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

4.3 Decomposições de Morse não-autônomas

O comportamento assintótico de sistemas dinâmicos pode ser descrito via decomposição de Morse. Suas componentes, os conjuntos de Morse, são obtidos como interseção de atratores e repulsores. Nesta seção estabeleceremos generalizações, para cociclos topológicos, da decomposição de Morse com respeito às noções de atratividade e repulsividade no passado e no futuro.

Para realizar essa tarefa, vamos supor que (ζ, Φ_S^P) é um cociclo topológico com um espaço base admissível P e um espaço topológico compacto X. Além disso, assumimos que todos os atratores e repulsores (do passado e do futuro) $\mathbf{M}$ satisfazem $P^*(\mathbf{M}) = P$ ou $\mathbf{M} = \emptyset$.

4.3.1 Pares atrator-repulsor não-autônomos

Nesta seção analizaremos se para um dado atrator não-autônomo existe um repulsor não-autônomo correspondente e vice-versa.

Devido ao axioma da escolha, existe um conjunto $P^* \subset P$ tal que $O(p) \cap P^*$ é um conjunto unitário para todo $p \in P$. Escrevemos $P^* = P_p^* \cup P_n^*$ com P_p^* contendo os pontos em P^* cujas órbitas estejam inteiramente contidas em um conjunto limitado e $P_n^* = P^* \backslash P_p^*$.

Seja $\mathbf{R}$ um repulsor do passado. Então existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p^* \in P^*$ e toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, existe $F^* \in \mathcal{F}$ com

$$\rho_{R_{t_\lambda^{-1}\tau^{-1}p^*}} \left(\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{\tau^{-1}p^*} \left(St\left[R_{\tau^{-1}p^*}, \mathcal{W} \right] \right) \right) \to \mathcal{O}, \tag{3.14}$$

para todo $\tau \in F^*$.

Para $\mathcal{Z} \in \mathcal{O}$ com $\mathcal{Z} \leq \mathcal{W}$, definimos o conjunto não-autônomo compacto $\mathbf{B}^{\mathcal{Z}}$ por

$$B_{s^{-1}p^*}^{\mathcal{Z}} := \begin{cases} X \backslash St\left[R_{s^{-1}p^*}, \mathcal{Z} \right]; \ s \in F^* \\ X; \ s \in G \backslash F^* \end{cases} \quad \forall p^* \in P_n^* \ \text{ e } \ s \in G,$$

e

$$B_{s^{-1}p^*}^{\mathcal{Z}} := X \backslash St\left[R_{s^{-1}p^*}, \mathcal{Z} \right], \quad \forall p^* \in P_p^* \ \text{ e } \ s \in G.$$

Teorema 4.3.1 (Existência de um par atrator-repulsor do passado). *Seja $\boldsymbol{R}$ um repulsor do passado e o conjunto $\mathcal{M} := \left\{ \boldsymbol{B}^{\mathcal{Z}}; \mathcal{Z} \leq \mathcal{W} \right\}$ onde $\boldsymbol{B}^{\mathcal{Z}}$ é definido como anteriormente. Então existe um único $\mathcal{M}$-atrator $\boldsymbol{R}^* \subset \boldsymbol{B}^{\mathcal{W}}$, que é também um atrator do passado. Mais ainda, $\boldsymbol{R}^*$ é o atrator do passado maximal fora de $\boldsymbol{R}$ no seguinte sentido: qualquer outro atrator do passado $\boldsymbol{A} \supsetneq \boldsymbol{R}^*$ tem interseção não-vazia com $\boldsymbol{R}$. Chamamos $(\boldsymbol{R}^*, \boldsymbol{R})$ um **par atrator-repulsor do passado**.*

Demonstração: Mostraremos que o conjunto $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathcal{W}}$ é um conjunto de absorção com respeito a $\mathcal{M}$. Para isso, seja $\mathcal{Z} \leq \mathcal{W}$ e $p \in P$. No caso em que $B_p = X$ certamente a condição da definição de conjunto de absorção é satisfeita, por outro lado, existe $p^* \in P^*$ e $\tau \in F^*$ com $\tau^{-1}p^* = p$. Devido ao limite (3.14), existe $F_1 \in \mathcal{F}$ com

$$\varphi_{s^{-1}}^{p} \left(St\left[R_p, \mathcal{W} \right] \right) \subset St\left[R_{s^{-1}}, \mathcal{Z} \right],$$

para todo $s \in F_1$. Assim, temos

$$\varphi_{s^{-1}}^{p} \left(B_p^{\mathcal{W}} \right) = X \backslash \varphi_{s^{-1}}^{p} \left(St\left[R_p, \mathcal{W} \right] \right) \supset B_{s^{-1}p}^{\mathcal{Z}},$$

para todo $s \in F_1$.

Daí, obtemos $\varphi_s^{s^{-1}p}\left(B_p^{\mathcal{W}}\right) \subset B_p$ para todo $s \in F_1$ e garantimos a existência de um $\mathcal{M}$-atrator do passado $\mathbf{R}^* \subset \mathbf{B}^{\mathcal{W}}$, que é também um atrator do passado.

Agora, seja $\mathbf{A} \supsetneq \mathbf{R}^*$ outro atrator do passado. Então existe um $p \in P$ com $A_p \supsetneq R_p^*$. Escolhemos um $x \in A_p \backslash R_p^*$. Uma vez que $(p, x) \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$ é um atrator do passado, então para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, existe $\tilde{\mathcal{W}} \in \mathcal{O}$ com

$$\rho_{A_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(St\left[\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{p}(x), \tilde{\mathcal{W}}\right]\right)\right) \to \mathcal{O}.$$

Uma vez que $\mathbf{R}^*$ é um atrator do passado, em particular $\mathbf{R}^*$ é um $\{\mathbf{B}^{\mathcal{Z}}\}$-atrator para cada $\mathcal{Z} \leq \mathcal{W}$. Isto implica que, dado $\mathcal{Z} \in \mathcal{O}$ com $\mathcal{Z} \leq \mathcal{W}$ tem-se

$$\rho_{R_p^*}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(B_{t_\lambda^{-1}p}^{\mathcal{Z}}\right)\right) \to \mathcal{O}.$$

Portanto, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ qualquer, existe $\lambda_0 \in \lambda$ tal que

$$\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(B_{t_\lambda^{-1}p}^{\mathcal{Z}}\right) \subset St\left[R_p^*, \mathcal{U}\right],$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Então, tome $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ de tal modo que $x \notin St\left[R_p^*, \mathcal{U}\right]$. Assim, em particular, para $\mathcal{O} \prec \mathcal{Z} \leq \mathcal{W}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$x \notin \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(B_{t_\lambda^{-1}p}^{\mathcal{Z}}\right) \Rightarrow \varphi_{t_\lambda^{-1}}^{p}(x) \notin B_{t_\lambda^{-1}p}^{\mathcal{Z}},$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Uma vez que, $B_{t_\lambda^{-1}p}^{\mathcal{Z}} = X \backslash St\left[R_{t_\lambda^{-1}p}, \mathcal{Z}\right]$, segue que

$$\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{p}(x) \in St\left[B_{t_\lambda^{-1}p}^{\mathcal{Z}}, \mathcal{Z}\right], \tag{3.15}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Como estamos direcionando as coberturas pondo $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ quando $U \supset V$, para todo $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{V}$, então para cada $\lambda \geq \lambda_0$ e $\mathcal{U} \leq \mathcal{W}$ tome $x_{(\lambda,\mathcal{U})} \in St\left[\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{p}(x), \mathcal{U}\right]$ de tal forma que $x_{(\lambda,\mathcal{U})} \in \partial R_{t_\lambda^{-1}p} \subset R_{t_\lambda^{-1}p}$. Além disso, para todo $\mathcal{U} \leq \tilde{\mathcal{W}}$ temos que $x_{(\lambda,\mathcal{U})} \in St\left[\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{p}(x), \mathcal{U}\right] \subset St\left[\varphi_{t_\lambda^{-1}}^{p}(x), \tilde{\mathcal{W}}\right]$. Dessa forma, a sequência $y_{(\lambda,\mathcal{U})} = \varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(x_{(\lambda,\mathcal{U})}\right) \in R_p$ é tal que $\rho\left(y_{(\lambda,\mathcal{U})}, A_p\right) \to \mathcal{O}$. Do fato que R_p e A_p são compactos, temos que sua interseção é não-vazia. □

Exemplo 4.3.1. *Seja* X *o conjunto* $\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq a \leq 1\} \cup \{(1, 1) \in \mathbb{R}^2\}$ *com a topologia gerada pela base*

$$\mathcal{B} = A \cup B \cup C.$$

onde $A = \{[0,a) \times \{0\}, 0 < a < 1\}$, $B = \{(a,1] \times \{0\}, 0 < a < 1\} \cup \{(1,1)\}$ *e* $C = \{(a,b) \times \{0\};$ $0 < a < b < 1\}$. *Então* X *é um espaço topológico não-metrizável e compacto. Seja* P *o seguinte espaço de funções*

$$P = \left\{ \begin{array}{c} p : \mathbb{R}^+ \times X \to X; p \text{ é contínua e } p(t,x) = p(s,x) \\ \text{para todo } t, s \in \mathbb{R}^+, x \in X \end{array} \right\}.$$

munido com a topologia compacto-aberta. Definamos $\zeta^t : P \to P$ *e* $\varphi_t^p : X \to X$ *como no exemplo 3.4.1. Considere em* X *a família admissível* $\mathcal{O}$ *de todas as coberturas abertas finitas. O conjunto não-autônomo do passado* $\boldsymbol{R}$ *cujas fibras são* $R_p = \{(0,0)\}$ *é um repulsor do passado. Primeiro, é claro que* $\boldsymbol{R}$ *é compacto e invariante. Resta mostrar que é* $\{\boldsymbol{M}\}$*-repulsivo, onde* $M_p = St[R_p, \mathcal{W}]$ *para algum* $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ *e todo* $p \in P^*(\boldsymbol{R})$*. Considere a cobertura*

$$\mathcal{W} = \left\{ \left[0, \frac{1}{3}\right) \times \{0\}, \left(\frac{2}{3}, 1\right] \times \{0\} \cup \{(1,1)\}, \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \times \{0\} \right\}. \tag{3.16}$$

Então $St[R_p, \mathcal{W}] = \left[0, \frac{1}{3}\right) \times \{0\}$*. Note que dada uma cobertura* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *para todo* $s \in \mathbb{R}^+$ *e* $p \in P$ *tem-se que* $St[R_{s^{-1}p}, \mathcal{U}] = [0,a) \times \{0\}$ *para algum* $0 < a < 1$*. Então, para a mesma base de filtro* $\mathcal{F}$ *do exemplo 3.4.1, existe* $F \in \mathcal{F}$ *tal que*

$$\varphi_s^{s^{-1}p}([0,a) \times \{0\}) \supset \left[0, \frac{1}{3}\right) \times \{0\},$$

para todo $s \in F$*.*

Tomando a cobertura (3.16), o Teorema 4.3.1 garante a existência de um $\mathcal{M}$*-atrator do passado, onde os* $\boldsymbol{M}^a \in \mathcal{M}$ *são dados, fibra a fibra, por*

$$M_p^a = \{[a,1] \times \{0\}\} \cup \{(1,1)\},$$

com $0 < a < \frac{1}{3}$*. Com base no exemplo 4.2.1 não é difícil ver que o atrator complementar* $\boldsymbol{R}^*$ *é dado por* $R_p^* = \{(1,0),(1,1)\}$ *para todo* $p \in P$*.*

Teorema 4.3.2 (Existência de um par atrator-repulsor do futuro). *Seja* $\boldsymbol{A}$ *um atrator do futuro. Então, existe um repulsor do futuro unicamente determinado* $\boldsymbol{A}^* \subset (P \times X) \backslash \boldsymbol{A}$ *que é o repulsor maximal fora de* $\boldsymbol{A}$ *no seguinte sentido: qualquer outro repulsor do futuro* $\boldsymbol{R} \supsetneq \boldsymbol{A}^*$ *tem interseção não-vazia com* $\boldsymbol{A}$*. Chamamos* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^*)$ *um* ***par atrator repulsor do futuro****.*

Demonstração: Análogo ao teorema anterior. □

Teorema 4.3.3 (Propriedades dos pares atrator-repulsor não-autônomos). *Seja* $(\boldsymbol{R}^*, \boldsymbol{R})$ *um para atrator-repulsor do passado. Então as seguintes afirmações são satisfeitas:*

(i) ***Isolamento no passado:*** *Existe um $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P$, existe um $F \in \mathcal{F}$ com*

$$St\left[R^*_{s^{-1}p}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[R_{s^{-1}p}, \mathcal{V}\right] = \emptyset,$$

para todo $s \in F$.

(ii) ***Convergência pullback:*** *Seja $p \in P$ e $C \subset X \backslash R^*_p$ um conjunto compacto. Então para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ temos*

$$\rho_{R_{t_\lambda^{-1}p}}\left(\varphi^{p}_{t_\lambda^{-1}}(C)\right) \to \mathcal{O}.$$

(iii) ***Convergência backward:*** *Se para todo $p \in P$ e toda função $\gamma : S \to X$ tal que existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $F \in \mathcal{F}$ com*

$$\gamma(s) \notin St\left[R_{s^{-1}p}, \mathcal{U}\right],$$

para todo $s \in F$, então

$$\rho\left(\varphi^{t_\lambda^{-1}p}_{t_\lambda}(\gamma(t_\lambda)), R^*_p\right) \to \mathcal{O},$$

para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$.

Seja $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^*)$ um par atrator-repulsor do futuro. Então as seguintes afirmações são satisfeitas:

(iv) ***Isolamento no futuro:*** *Existe um $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que para todo $p \in P$, existe um $F \in \mathcal{F}$ onde*

$$St\left[A_{sp}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[A^*_{sp}, \mathcal{V}\right] = \emptyset,$$

para todo $s \in F$.

(v) ***Convergência forward:*** *Sejam $p \in P$ e $C \subset X \backslash A^*_p$ um conjunto compacto. Então para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ temos*

$$\rho_{A_{t_\lambda p}}\left(\varphi^{p}_{t_\lambda}(C)\right) \to \mathcal{O}.$$

(vi) ***Convergência pushforward:*** *Se para todo $p \in P$ e toda função $\gamma : S \to X$ tal que existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $F \in \mathcal{F}$ com*

$$\gamma(s) \notin St\left[A_{sp}, \mathcal{U}\right],$$

para todo $s \in F$, então

$$\rho\left(\varphi^{t_\lambda p}_{t_\lambda^{-1}}(\gamma(t_\lambda)), A^*_p\right) \to \mathcal{O},$$

para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$.

Demonstração: Seja $(\mathbf{R}^*, \mathbf{R})$ um par atrator-repulsor do passado, $\mathcal{W}$ e $\mathcal{M}$ definidos como no início dessa seção.

(i) O teorema de existência do par atrator-repulsor garante que $\mathbf{R}^* \subset \mathbf{B}^{\mathcal{W}}$. Uma vez que $\mathbf{R}$ está no complementar de $\mathbf{B}^{\mathcal{W}}$ e este é compacto, então tomando $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{W}$ obtemos que para todo $p \in P$ existe $F \in \mathcal{F}$ com

$$St\left[R^*_{s^{-1}p}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[R_{s^{-1}p}, \mathcal{V}\right] = \emptyset,$$

para todo $s \in F$.

(ii) Seja $p \in P$ e $C \subset X \backslash R^*_p$ um conjunto compacto. Uma vez que $\mathbf{R}^*$ é um atrator do passado, em particular, $\mathbf{R}^*_p$ é uma $\{\mathbf{B}^{\mathcal{Z}}\}$-atrator para cada $\mathcal{Z} \leq \mathcal{W}$. Isto implica que dado $\mathcal{Z} \leq \mathcal{W}$ e uma rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, tem-se que

$$\rho_{R^*_p}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(B^{\mathcal{Z}}_{t_\lambda^{-1}p}\right)\right) \to \mathcal{O}.$$

Desse modo, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ qualquer, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_s^{s^{-1}p}\left(B^{\mathcal{Z}}_{s^{-1}p}\right) \subset St\left[R^*_p, \mathcal{U}\right]$ para todo $s \in F$. Então, tome $\mathcal{U}$ de tal modo que $C \subset X \backslash \left(St\left[R^*_p, \mathcal{U}\right]\right)$. Isto significa que para $\mathcal{Z} \leq \mathcal{W}$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \cap \varphi_s^{s^{-1}p}\left(B^{\mathcal{Z}}_{s^{-1}p}\right) = \emptyset$ para todo $s \in F$ e, assim, teremos $\varphi^p_{s^{-1}}(C) \cap B^{\mathcal{Z}}_{s^{-1}p} = \emptyset$ para todo $s \in F$. Uma vez que, $B^{\mathcal{Z}}_{s^{-1}p} = X \backslash \left(St\left[R_{s^{-1}p}, \mathcal{Z}\right]\right)$, segue que $\varphi^p_{s^{-1}}(C) \subset St\left[R_{s^{-1}p}, \mathcal{Z}\right]$ para todo $s \in F$. Portanto, para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ tem-se que

$$\rho_{R_{t_\lambda^{-1}p}}\left(\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(C)\right) \to \mathcal{O}.$$

(iii) Tome $\mathcal{Z} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$ e $\mathcal{Z} \leq \frac{1}{2}\mathcal{W}$. Note que existe um $F \in \mathcal{F}$ com $\gamma(s) \in B^{\mathcal{Z}}_{s^{-1}p}$ para todo $s \in F$. Uma vez que $\mathbf{B}^{\mathcal{Z}} \in \mathcal{M}$ e $\mathbf{R}^*$ é um $\mathcal{M}$-atrator do passado podemos concluir que

$$\rho\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(\gamma(t_\lambda)\right), R^*_p\right) \to \mathcal{O},$$

para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$.

De maneira análoga prova-se as afirmações para o par atrator-repulsor do futuro $(\mathbf{A}, \mathbf{A}^*)$.

□

Observação 4.3.1. *O teorema 4.3.1, implica que dado um repulsor do passado* $\boldsymbol{R}$*, o conjunto* $\boldsymbol{R}^*$ *é o atrator unicamente determinado fora de* $\boldsymbol{R}$ *com a propriedade de convergência backward* *como descrita no item (iii) do teorema anterior. É fácil ver que um resultado de unicidade semelhante a este não é válido para repulsores do passado, isto é, é possível que $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}^1)$ e $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}^2)$ sejam pares atrator-repulsor do passado com $\boldsymbol{R}^1 \neq \boldsymbol{R}^2$. O próximo corolário mostra que neste caso, $\boldsymbol{R}^1$ e $\boldsymbol{R}^2$ estão convergindo um para o outro quando o tempo tende para o passado.*

Corolário 4.3.1 (Forma da não-unicidade dos pares atrator-repulsor não-autônomos). *Sejam $\boldsymbol{R}^1$ e $\boldsymbol{R}^2$ repulsores do passado com $\boldsymbol{R}^{1^*} = \boldsymbol{R}^{2^*}$. Então para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$, temos*

$$\rho_H\left(R^1_{t_\lambda^{-1}p}, R^2_{t_\lambda^{-1}p}\right) \to \mathcal{O},$$

para todo $p \in P$.

Sejam $\boldsymbol{A}^1$ e $\boldsymbol{A}^2$ repulsores do passado com $\boldsymbol{A}^{1^*} = \boldsymbol{A}^{2^*}$. Então para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$, temos

$$\rho_H\left(A^1_{t_\lambda p}, A^2_{t_\lambda p}\right) \to \mathcal{O},$$

para todo $p \in P$.

Demonstração: Suponha que existam $p \in P$ e redes $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em S e $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em X, com $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $\gamma_\lambda \in R^1_{t_\lambda^{-1}p}$, e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tais que $\gamma_\lambda \notin St[R^2_{t_\lambda^{-1}p}, \mathcal{U}]$, para todo λ. Portanto, o item (iii) do teorema anterior, aplicado ao par atrator-repulsor $(\mathbf{R}^{2^*}, \mathbf{R}^2)$, implica que

$$\rho\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(\gamma_\lambda), R_p^{2^*}\right) \to \mathcal{O}.$$

Uma vez que, $\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}(\gamma_\lambda) \in R_p^1$ e, $\mathbf{R}^1$ e $\mathbf{R}^{1^*} = \mathbf{R}^{2^*}$ são conjuntos não-autônomos compactos temos $R_p^1 \cap R_p^{1^*} \neq \emptyset$, o que é uma contradição. □

4.3.2 Decomposição de Morse não-autônoma

Nesta seção, a noção de par atrator-repulsor é generalizada considerando-se decomposições de Morse.

Definição 4.3.1 (Decomposições de Morse não-autônomas). *Uma família $\{\boldsymbol{M}^1, \boldsymbol{M}^2, \cdots, \boldsymbol{M}^n\}$ de conjuntos não-autônomos do passado, chamados de **conjuntos de Morse**, é chamada uma **decomposição de Morse do passado** se a representação*

$$\boldsymbol{M}^i = \boldsymbol{R}^{i^*} \cap \boldsymbol{R}^{i-1}, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

vale com repulsores do passado $P \times X = \boldsymbol{R}^0 \supsetneq \boldsymbol{R}^1 \supsetneq \cdots \supsetneq \boldsymbol{R}^n = \emptyset$, *satisfazendo* $\emptyset = \boldsymbol{R}^{0^*} \subsetneq \boldsymbol{R}^{1^*} \subsetneq \cdots \subsetneq \boldsymbol{R}^{n^*} = P \times X$.

Uma família $\{\boldsymbol{M}^1, \boldsymbol{M}^2, \cdots, \boldsymbol{M}^n\}$ *de conjuntos não-autônomos do futuro, chamados de* ***conjuntos de Morse****, é chamada uma* ***decomposição de Morse do futuro*** *se a representação*

$$\boldsymbol{M}^i = \boldsymbol{A}^i \cap \boldsymbol{A}^{i-1^*}, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

vale com repulsores do futuro $P \times \emptyset = \boldsymbol{A}^0 \subsetneq \boldsymbol{A}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \boldsymbol{A}^n = X$, *satisfazendo* $P \times X = \boldsymbol{A}^{0^*} \supsetneq \boldsymbol{A}^{1^*} \supsetneq \cdots \supsetneq \boldsymbol{A}^{n^*} = \emptyset$.

Exemplo 4.3.2. *No Exemplo 4.3.1, a família* $\{\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2\}$, *onde* $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{R}^*$ *e* $\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{R}$, *é uma decomposição de Morse do passado para o cociclo* $\left(\zeta, \Phi_S^P\right)$.

Proposição 4.3.1 (Propriedades básicas das decomposições de Morse não-autônomas). *Os conjuntos de Morse de uma decomposição de Morse do passado* $\{\boldsymbol{M}^1, \cdots, \boldsymbol{M}^n\}$ *são não-vazios, invariantes, dois a dois disjuntos e isolados no passado, isto é, existe um* $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ *tal que para todo* $1 \leq i < j \leq n$ *e* $p \in P$ *existe* $F \in \mathcal{F}$ *com*

$$St\left[M^i_{s^{-1}p}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[M^j_{s^{-1}p}, \mathcal{V}\right],$$

para todo $s \in F$.

Os conjuntos de Morse de uma decomposição de Morse do futuro $\{\boldsymbol{M}^1, \cdots, \boldsymbol{M}^n\}$ *são não-vazios, invariantes, dois a dois disjuntos e isolados no futuro, isto é, existe um* $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ *tal que para todo* $1 \leq i < j \leq n$ *e* $p \in P$ *existe* $F \in \mathcal{F}$ *com*

$$St\left[M^i_{sp}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[M^j_{sp}, \mathcal{V}\right],$$

para todo $s \in F$.

Demonstração: Seja $\mathbf{M}^i = \mathbf{R}^{i^*} \cap \mathbf{R}^{i-1}$ um conjunto de Morse. Uma vez que $\mathbf{R}^{i-1^*} \subsetneq \mathbf{R}^{i^*}$ podemos escolher um $p \in P$ e um $x \in R_p^{i^*} \backslash R_p^{i-1^*}$. Como $\mathbf{R}^{i^*} \ni (p, x)$ é um atrator do passado, para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em S, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ satisfazendo

$$\rho_{R_p^{i^*}}\left(\varphi_{t_\lambda}^{t_\lambda^{-1}p}\left(St\left[\varphi_{t_\lambda^{-1}}^p(x), \mathcal{W}\right]\right)\right) \to \mathcal{O}.$$

Além disso, para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em S, tem-se

$$\rho\left(\varphi_{t_\lambda^{-1}}^p(x), R^{i-1^*}_{t_\lambda^{-1}p}\right) \to \mathcal{O}.$$

Por sua vez, isso implica na existência de uma rede $\left(y_{(\lambda,\mathcal{U})}\right)_{(\lambda,\mathcal{U})\in\Lambda\times\mathcal{O}}$ em R_p^{i-1} com

$$\rho\left(y_{(\lambda,\mathcal{U})}, R_p^i\right) \to \mathcal{O}.$$

Uma vez que R_p^{i-1} e $R_p^{i^*}$ são compactos, segue que $\mathbf{M}^i = \mathbf{R}^{i^*} \cap \mathbf{R}^{i-1} \neq \emptyset$. Também $\mathbf{M}^i$ é invariante, pois é a interseção de conjuntos não-autônomos invariantes. De fato, temos

$$\varphi_s^p\left(R_p^{i^*}\right) = R_{sp}^{i^*} \text{ e } \varphi_s^p\left(R_p^{i-1}\right) = R_{sp}^{i-1}$$

para todo $s \in G$. Daí,

$$\begin{aligned} \varphi_s^p\left((R^{i^*} \cap R^{i-1})_p\right) &= \varphi_s^p\left(R_p^{i^*} \cap R_p^{i-1}\right) \\ &= \varphi_s^p\left(R_p^{i^*}\right) \cap \varphi_s^p\left(R_p^{i-1}\right) \\ &= R_{sp}^{i^*} \cap R_{sp}^{i-1} = (R^{i^*} \cap R^{i-1})_{sp} \end{aligned}$$

para todo $s \in G$.

Agora, escolha outro conjunto de Morse $\mathbf{M}^j = \mathbf{R}^{j^*} \cap \mathbf{R}^{j-1}$. Sem perda de generalidade, assuma que $j > i$. Então, uma vez que $\mathbf{R}^{i-1} \cap \mathbf{R}^j \subset \mathbf{R}^j$ e $\mathbf{R}^{j^*} \supsetneq \mathbf{R}^{i^*}$ temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^i \cap \mathbf{M}^j &= \mathbf{R}^{i^*} \cap \mathbf{R}^{i-1} \cap \mathbf{R}^{j^*} \cap \mathbf{R}^{j-1} \\ &= \mathbf{R}^{i^*} \cap \mathbf{R}^{j-1} \\ &\subset \mathbf{R}^{j-1^*} \cap \mathbf{R}^{j-1} = \emptyset. \end{aligned}$$

Portanto, pelo item (i) do Teorema 4.3.3, existe $\mathcal{V}$ tal que para todo $p \in P$, existe um $F \in \mathcal{F}$ onde

$$St\left[R_{s^{-1}p}^{j-1^*}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[R_{s^{-1}p}^{j-1}, \mathcal{V}\right] = \emptyset,$$

para todo $s \in F$.

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} \emptyset &= St\left[R_{s^{-1}p}^{j-1^*}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[R_{s^{-1}p}^{j-1}, \mathcal{V}\right] \\ &\supset St\left[R_{s^{-1}p}^{i^*}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[R_{s^{-1}p}^{j-1}, \mathcal{V}\right] \\ &= St\left[(R^{i^*} \cap R^{i-1} \cap R^{j^*})_{s^{-1}p}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[R_{s^{-1}p}^{j-1}, \mathcal{V}\right] \\ &= St\left[(R^{i^*} \cap R^{i-1})_{s^{-1}p}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[R^{j^*}, \mathcal{V}\right] \cap St\left[R_{s^{-1}p}^{j-1}, \mathcal{V}\right] \\ &= St\left[M_{s^{-1}p}^i, \mathcal{V}\right] \cap St\left[M_{s^{-1}p}^j, \mathcal{V}\right] \end{aligned}$$

para todo $s \in F$.

Analogamente, demonstra-se os resultados para a decomposição de Morse do futuro. □

Definição 4.3.2. *(i) Dizemos que a decomposição de Morse do passado* $\{\boldsymbol{M}^1, \cdots, \boldsymbol{M}^n\}$ *é mais fina que a decomposição de Morse do passado* $\{\tilde{\boldsymbol{M}}^1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{M}}^m\}$ *se para todo* $p \in P$ *e toda rede* $\mathcal{F}$*-divergente* $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *tem-se*

$$\rho_{\left(\bigcup_{i=1}^m \tilde{M}^i_{t_\lambda^{-1}p}\right)}\left(\bigcup_{j=1}^n M^j_{t_\lambda^{-1}p}\right) \to \mathcal{O}.$$

(ii) Dizemos que a decomposição de Morse do futuro $\{\boldsymbol{M}^1, \cdots, \boldsymbol{M}^n\}$ *é mais fina que a decomposição de Morse do futuro* $\{\tilde{\boldsymbol{M}}^1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{M}}^m\}$ *se para todo* $p \in P$ *e toda rede* $\mathcal{F}$*-divergente* $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *tem-se*

$$\rho_{\left(\bigcup_{i=1}^m \tilde{M}^i_{t_\lambda p}\right)}\left(\bigcup_{j=1}^n M^j_{t_\lambda p}\right) \to \mathcal{O}.$$

Se vale a convergência backward (no caso de decomposição de Morse do passado) ou a convergência forward (no caso de decomposição de Morse do futuro) o seguinte resultado de unicidade à respeito dos repulsores do passado e do futuro, respectivamente é válido.

Proposição 4.3.2. ***(a)*** *Seja* $\{\boldsymbol{M}^1, \cdots, \boldsymbol{M}^n\}$ *uma decomposição de Morse do passado obtida pela sequência finita de repulsores do passado* $\boldsymbol{R}^0 \supset \cdots \supset \boldsymbol{R}^n$*. Assumimos que a convergência backward vale, isto é, para todo* $(p, x) \in P \times X$*, existe um* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *com*

$$\rho\left(\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(x), M^i_{t_\lambda^{-1}p}\right) \to \mathcal{O}$$

para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$*. Então, a representação*

$$\boldsymbol{R}^{i^*} = \left\{(p, x); \rho\left(\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(x), \bigcup_{j=1}^{i} M^j_{t_\lambda^{-1}p}\right) \to \mathcal{O} \;\; \text{para toda} \;\; t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty\right\}$$

vale para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$*, isto é, os atratores do passado da decomposição de Morse do passado estão unicamente determinados.*

(b) *Seja* $\{\boldsymbol{M}^1, \cdots, \boldsymbol{M}^n\}$ *uma decomposição de Morse do futuro obtida pela sequência finita de atratores do futuro* $\boldsymbol{A}^0 \subset \cdots \subset \boldsymbol{A}^n$*. Assumimos que a convergência forward vale, isto é, para todo* $(p, x) \in P \times X$*, existe um* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *com*

$$\rho\left(\varphi^p_{t_\lambda}(x), M^i_{t_\lambda p}\right) \to \mathcal{O}$$

para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$*. Então, a representação*

$$\boldsymbol{A}^{i^*} = \left\{(p, x); \rho\left(\varphi^p_{t_\lambda}(x), \bigcup_{j=i+1}^{n} M^j_{t_\lambda p}\right) \to \mathcal{O} \;\; \text{para toda} \;\; t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty\right\}$$

vale para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, isto é, os atratores do passado da decomposição de Morse do passado estão unicamente determinados.

Demonstração:

($\subseteq$) Seja $(p, x) \in \mathbf{R}^{i^*}$. Escolhemos $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que para $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ tem-se

$$\mathcal{O} \leftarrow \rho\left(\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(x), M^j_{t_\lambda^{-1}p}\right) = \rho\left(\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(x), R^{j-1}_{t_\lambda^{-1}p}\right).$$

Se supomos $j > i$ então temos que $\mathbf{R}^j \subseteq \mathbf{R}^i$ e, assim,

$$\rho\left(\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(x), R^i_{t_\lambda^{-1}p}\right) \to \mathcal{O}$$

para todo $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$. Mas isso contradiz o item (i) do teorema 4.3.3, uma vez que $\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(x) \in R^{i^*}_{t_\lambda^{-1}p}$ para toda $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$.

($\supseteq$) Seja $(p, x) \in (P \times X)\backslash\mathbf{R}^{i^*}$. Então o item (ii) do teorema 4.3.3 implica que

$$\rho\left(\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(x), R^i_{t_\lambda^{-1}p}\right) \to \mathcal{O} \tag{3.17}$$

A hipótese que para cada $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ tem-se

$$\rho\left(\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(x), \bigcup_{j=1}^{i} M^j_{t_\lambda^{-1}p}\right) \to \mathcal{O}$$

implica que

$$\rho\left(\varphi^p_{t_\lambda^{-1}}(x), R^{i^*}_{t_\lambda^{-1}p}\right) \to \mathcal{O},$$

uma vez que $\mathbf{M}^j \subset \mathbf{R}^{i^*}$ para $j \in \{1, \cdots, i\}$. Porém, isso contradiz (3.17) devido ao item (i) do teorema 4.3.3.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Alves, R.W.M.: Aspectos de uniformidade em espaços topológicos admissíveis. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, (2014).

[2] Alves, R.W.M.: Função admissível e dinâmica topológica. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Maringá, (2018).

[3] Alves, R.W.M., Rocha, V.H.L. e Souza, J.A.: A characterization of completely regular spaces. *International Journal of Mathematics*, 26, no. 3, 1550032, (2015).

[4] Alves, R.W.M. e Souza, J.A.: Cantor-Kuratowski theorem in uniformizable spaces. *Topology and its Applications*, vol. 252, p. 158-168, (2019).

[5] Alves, R.W.M. e Souza, J.A.: Global attractors for semigroup actions on uniformizable spaces. *Dynamical Systems*, vol. 35, p 140-155, (2020).

[6] Alves, R.W.M. e Souza, J.A.: Hyperconvergence in topological dynamics. *Monatshefte für Mathematik*, (2021). (Aceito)

[7] Bhatia, N.P., Szego, G.P.: *Stability Theory of Dynamical Systems.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1970).

[8] Bourbaki, N.: *Éléments de mathématique: Topologie générale, chap. 5 à 10.* Springer, (2007).

[9] Braga Barros, C.J. e Souza, J.A.: Attractors and chain recurrence of semigroup actions. *J. Dyn. Diff. Equations*, 22, 723-740, (2010).

[10] Braga Barros, C.J. e Souza, J.A.: Finest Morse decompositions for semigroup of fiber bundles. *J. Dyn. Diff. Equations*, 22, 741-760, (2010).

[11] Braga Barros, C.J. e Souza, J.A.: On the number of maximal chain transitive sets in fiber bundles. *Forum Math.* 25, 363-381, (2013).

[12] Braga Barros, C.J. Rocha, V.H.L. e Souza, J.A: Lyapunov stability for semigroup actions. *Semigroup Forum*, 88, 227-249, (2014).

[13] Braga Barros, C. J. Rocha, V.H.L. e Souza, J.A.: Lyapunov stability and attraction under equivariant maps, *Canad. J.Math.*, 67, p. 1247-1269, (2015).

[14] Braga Barros, C. J., Rocha, V.H.L. e Souza, J.A.: Lyapunov stability on fiber bundles. *Bulletin of Brazilian Mathematical Society*, vol. 46, p. 181-204, (2015).

[15] Braga Barros, C.J., Souza, J.A. e Rocha, V.H.L.: On attractors and stability for semigroup actions and control systems, *Math. Nachr.*, vol. 289, p. 272-287, (2016).

[16] Conley, C.: Isolated invariant sets and the Morse index. *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* 38, American Mathematical Society, (1978).

[17] Ellis, R.: *Lectures on topological dynamics.* W. A. Benjamin, Inc., New York, (1969).

[18] Ellis, D. B., Ellis, R. and Nerurkar, M. The Topological Dynamics of Semigroup Actions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 353, n. 14, 1279-1320, (2000).

[19] Ellis, R. and Johnson, R.A.: Topological dynamics and linear differential equations. *J. Differential Equations* **44**, 21-39, (1982).

[20] Flandoli, F. and Schmalfuss, B.: Random Attractors for the 3-D Stochastic Navier-Stokes Equation with Multiplicative White Noise, *Stochastics and Stochastic Reports* **59**, n. 1-2, 21-45, (1996).

[21] Glicksberg, I.: *Stone-Cech Compactifications of Products.* In: Katetov M., Simon P. (eds) The Mathematical Legacy of Eduard Cech. Birkhauser Basel, (1993).

[22] Howes, N.R.: Modern Analysis and Topology, Universitext, Springer, New York, (1995).

[23] Jung, W., Lee, K. and Morales, C. A.: Dynamics of G-processes. *Stochastic and Dynamics*, vol. 20, n. 1,2050037 , (2020).

[24] Kloeden, P.E., Rasmussen, M.: *Nonautonomous dynamical systems.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, (2011).

[25] Marques, A.L.: Espaços uniformizáveis: teoria, equivalências e atualização. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, (2016).

[26] Molaei, M.R.: Topological cocycles. *Bol. Soc. Mat. Mex.* 24, 257–267, (2018).

[27] Patrão, M. e San Martin, L.A.B.: Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups. *J. Dyn. Diff. Equation*, vol. 19, p. 155-180, (2007).

[28] Patrão, M. e San Martin, L.A.B. Morse decompositions of semiflows on fiber bundles. *Discrete, Contin. Dyn. Syst. Ser. A*, vol. 17, p. 113-139, (2007).

[29] Raminelli, S.A.: Atratores globais para ações de semigrupos. Tese de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, (2013).

[30] Raminelli, S.A. e Souza, J.A: Global attractors for semigroup actions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 407, n.2, p. 316-327, (2013).

[31] Rasmussen, M.: Morse decompositions of nonautonomous dynamical systems *Transactions of the american math. soc.*, vol. 359, n. 10, 5091-5115, (2007).

[32] Rocha, H. V.: Estabilidade e ações de semigrupos. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, (2012).

[33] Rocha, V.H.L., Souza, J.A. e Tozatti, H.V.M.: On stability and controllability for semigroup actions. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, vol. 48, p. 1-29, (2016).

[34] Souza, J. A.: Chain recurrence in β-compactifications of topological groups. *Groups Geom. Dyn.* **5**, 475-493, (2011).

[35] Souza, J.A.: Lebesgue covering lemma on nonmetric spaces. *International Journal of Mathematics*, 24, 1350018, 1-12, (2013).

[36] Souza, J.A.: On limit behavior of semigroup actions on noncompact spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140, 3959-3972, (2012).

[37] Souza, J.A., Tozatti, H.V.M.: Some aspects of stability for semigroup actions and control systems. *J. Dyn. Diff. Equations*, 26, 631-654, (2014).

[38] Souza, J.A.: Recurrence for semigroup actions. *Semigroup Forum*, 83, 351-370, (2011).

[39] Willard, S.: *General topology.* Dover Publications, New York, (2004).