

Universidade Estadual de Maringá  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Tese de Doutorado

**Métodos Variacionais e a Estabilidade de Ondas  
Viajantes Periódicas para Equações do tipo  
Korteweg de-Vries e Benjamin-Bona-Mahony**

Sabrina Suelen Amaral

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá - PR

2021

Sabrina Suelen Amaral

**Métodos Variacionais e a Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para Equações do tipo Korteweg de-Vries e Benjamin-Bona-Mahony**

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática, Área de Concentração em Análise.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá - PR

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

A485m      Amaral, Sabrina Suelen  
             Métodos variacionais e a estabilidade de ondas  
             viajantes periódicas para equações do tipo Korteweg  
             de-Vries e Benjamin-Bona-Mahony / Sabrina Suelen  
             Amaral. -- Maringá, 2021.  
             116 f. : il., color.

             Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin  
             Natali.  
             Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
             Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-  
             Graduação em Matemática - Área de Concentração:  
             Análise, 2021.

             1. Estabilidade espectral. 2. Ondas viajantes  
             periódicas. 3. Equações do tipo dispersivas. 4.  
             Estabilidade orbital. 5. Spectral stability. 6.  
             Periodic traveling wave. 7. Dispersive type  
             equations. 8. Orbital stability. I. Natali, Fábio  
             Matheus Amorin, orient. II. Universidade Estadual de  
             Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-  
             Graduação em Matemática - Área de Concentração:  
             Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353

Edilson Damasio CRB9-1.123

Sabrina Suelen Amaral

**Métodos Variacionais e a Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para Equações do tipo Korteweg de-Vries e Benjamin-Bona-Mahony**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutora em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali  
Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Ademir Pastor Ferreira  
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Luiz Gustavo Farah Dias  
Universidade Federal de Minas Gerais

Profa. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira  
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin  
Universidade Estadual de Maringá

Aprovado em: 25 de março de 2021.

Local de defesa: Videoconferência – Google meet.

*À minha mãe Neuza P. Thomaz.*

# Agradecimentos

---

Agradeço a DEUS pela vida e por me permitir realizar tantos sonhos como o de estar concluindo mais essa etapa. Obrigada por me amparar, dar forças em meio a tantas dificuldades e me mostrar sempre o melhor caminho a seguir.

Agradeço a minha família, em especial à minha mãe Neuza, a qual devo o total apoio, principalmente pelas orações, por ser a minha maior incentivadora na superação de todos os meus limites e por sempre acreditar em minha capacidade.

Agradeço ao meu noivo, Jefferson, a pessoa que Deus escolheu para ser meu companheiro nas horas boas e ruins. Obrigada por todo carinho e compreensão, por sempre me confortar com suas palavras, por acreditar em mim, estar sempre ao meu lado e me apoiar nos momentos mais difíceis dessa caminhada. Obrigada pela sua amizade, companheirismo, alegria e amor incondicional.

Agradeço de modo especial ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio Natali, não só pela condução desse trabalho, mas por todo conhecimento compartilhado, pelas valiosas críticas e contribuições, pelas palavras de estímulo e encorajamento. Aqui exprimo a minha imensa gratidão e admiração. Obrigada pela sua constante disponibilidade e tempo dedicado à minha orientação. Agradeço pela paciência e confiança em meu trabalho.

Agradeço a todos os meus professores que me acompanharam durante a minha vida, em especial, aos meus professores da Graduação na UNIOESTE, do Mestrado na UNESP/Júlio de Mesquita Filho e do Doutorado na UEM que contribuíram com a minha formação acadêmica. Obrigada por todo conhecimento transmitido.

Agradeço as minhas amigas Letícia e Naísa que me acompanham desde a Graduação e sempre estiveram ao meu lado me apoiando e acreditando sempre na minha capacidade de chegar até aqui. Obrigada por dividir comigo minhas alegrias e angústias.

Agradeço aos membros da Banca Examinadora, professores Dr. Ademir Pastor, Dr. Luiz Gustavo Farah, Dra. Juliana Precioso e Dr. Gleb Doronin, por aceitarem o convite, juntamente com o Prof. Dr Fábio Natali. Obrigada pela disponibilidade e contribuição para o aprimoramento desta tese.

Agradeço aos meus colegas da pós-graduação pelos bons momentos divididos no decorrer do curso e pelas inúmeras horas de estudo. Obrigada por todo auxílio em minhas dificuldades.

Agradeço, também, à CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

---

Nesta tese, tratamos a existência via métodos variacionais e estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas associadas à duas classes de equações dispersivas: equações do tipo Korteweg de-Vries e Benjamin-Bona-Mahony. Inicialmente, consideramos a equação massa-crítica Korteweg de-Vries no caso focusing e mostramos resultados de estabilidade espectral de ondas periódicas positivas e de média zero. No caso das ondas periódicas positivas, mostramos que as ondas são espectralmente estáveis. Em relação as ondas de média zero, construímos soluções explícitas até agora nunca estudadas e encontramos um valor limiar da velocidade da onda que nos fornece uma ruptura na estabilidade. Esse tipo de ruptura também é obtida no nosso estudo da estabilidade/instabilidade espectral de ondas periódicas com perfil cnoidal para a equação de Gardner. Para o caso defocusing da equação massa-crítica Korteweg de-Vries, estudamos a estabilidade orbital de ondas periódicas ímpares sem a necessidade de conhecê-las explicitamente. A estabilidade espectral para ondas periódicas de média zero associadas à equação de Benjamin-Bona-Mahony com não linearidade quártica também foi determinada. Todavia, nosso estudo não encontrou um valor limite para a velocidade da onda e, neste caso, todas as ondas periódicas são espectralmente instáveis. Finalmente, nós apresentamos um estudo completo em relação a estabilidade espectral de ondas periódicas para a equação fracionária Benjamin-Bona-Mahony. Em nossa abordagem, mostramos a unicidade da onda periódica obtida por um problema de minimização com vínculo e usamos essa informação para obter a estabilidade espectral em casos particulares. Numericamente, atestamos nossos resultados analíticos construindo ondas periódicas usando o método de Petviashvili e mostramos que as soluções numéricas são espectralmente estáveis. Nos casos onde temos a falta de unicidade, combinamos os métodos de Petviashvili e Newton para obter a existência de ondas periódicas e a correspondente estabilidade espectral.

**Palavras-chave:** Estabilidade espectral, ondas viajantes periódicas, equações do tipo dispersivas, estabilidade orbital.



# Abstract

---

---

In this thesis, we deal with the existence via variational methods and spectral stability of periodic traveling wave solutions associated to the two classes of dispersive equations, namely Korteweg-de Vries and Benjamin-Bona-Mahony type equations. First, we consider the focusing mass-critical Korteweg-de Vries to show spectral stability results for the positive and zero mean periodic waves. In the case of positive periodic waves, we see that they are spectrally stable. Concerning zero mean periodic waves, we build explicit periodic waves which are new in the current literature and detect the existence of a threshold value for the wave speed which gives us a rupture in the stability result. A threshold value and spectral stability/instability results have also been found for the cnoidal type waves associated with the Gardner equation. For the defocusing mass-critical Korteweg-de Vries, we determine the orbital stability without knowing an explicit profile for the periodic wave. The spectral stability for the zero mean periodic waves associated to the Benjamin-Bona-Mahony equation with quintic power nonlinearity has also been determined. However, we did not find a threshold value for the wave speed and, in this case, all periodic waves are spectrally unstable. Finally, we present a complete study concerning the spectral stability of periodic waves for the fractional Benjamin-Bona-Mahony type equations. In our approach, we show the uniqueness of the periodic wave obtained by a constrained minimization problem and we use this information to obtain the spectral stability in particular cases. Numerically, we attest our analytical results by constructing periodic waves using Petviashvili's method and we show that the numerical solutions are spectrally stable. In the cases where we have a lack of uniqueness, we combine Petviashvili and Newton's methods to obtain the existence of periodic minimizers and the corresponding spectral stability.

**Keywords:** Spectral stability, periodic traveling wave solutions, dispersive type equations, orbital stability.

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Estabilidade de Ondas Periódicas para as Equações do tipo KdV</b>	<b>24</b>
1.1 Estrutura Básica da Teoria de Floquet . . . . .	25
1.2 Condições Suficientes para a Estabilidade Espectral de Ondas Periódicas . . . . .	29
1.3 Equação Crítica KdV - Caso Focusing . . . . .	34
1.3.1 Ondas Periódicas com Média Zero . . . . .	35
1.3.2 Ondas Periódicas Positivas . . . . .	43
1.4 Equação Crítica KdV - Caso Defocusing . . . . .	48
1.5 Equação de Gardner . . . . .	55
<b>2 Estabilidade de Ondas periódicas para a Equação Quíntica BBM</b>	<b>58</b>
<b>3 Estabilidade de Ondas Periódicas para a Equação fBBM</b>	<b>67</b>
3.1 Resultados de Boa Colocação . . . . .	69
3.2 Existência e Unicidade de Minimizadores e Propriedades Espectrais . . . . .	75
3.2.1 Existência de soluções . . . . .	75
3.2.2 Unicidade de soluções . . . . .	80
3.3 Existência de Soluções de Pequena Amplitude . . . . .	89
3.4 Estabilidade Espectral . . . . .	96
3.5 Experimentos Numéricos - Trabalho Realizado em Parceria . . . . .	100
3.6 Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas . . . . .	108
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>111</b>

# Introdução

---

Ondas periódicas para equações de evolução dispersivas que possuem apenas a simetria de translação como invariante podem ser obtidas através da superposição de diversos perfis de ondas solitárias transladadas (caso as equações admitam a existência de ondas solitárias). Para este fim, se  $\phi$  designa a referida onda solitária regular que é considerada simétrica em relação ao eixo das ordenadas, possuindo seu único ponto de máximo em  $x = 0$  e que decai para zero no infinito juntamente com todas as suas derivadas, deve-se considerar, para a obtenção das ondas periódicas, translações especiais da forma  $\phi(\cdot - nL)$  para enfim fazer a superposição de ondas. Aqui,  $n$  é um inteiro arbitrário e  $L$  um valor real positivo. Este fenômeno foi observado primeiramente por J. Scott Russel [64] quando este conduzia experimentos que visavam a fabricação de embarcações que pudessem navegar em águas rasas.

As ondas obtidas considerando a equação de evolução tendo apenas a simetria de translação são comumente conhecidas como *ondas viajantes* e são da forma

$$u(x, t) = \phi(x - ct), \tag{1}$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  representa a velocidade da onda e  $\phi$  é uma função regular podendo assumir diferentes condições de fronteira. Destacamos aqui as ondas viajantes do tipo solitárias e periódicas. As ondas viajantes solitárias são soluções do tipo (1) satisfazendo a condição de fronteira  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi^{(n)}(x) = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $\phi^{(n)}$  denota a  $n$ -ésima derivada de  $\phi$ . Por outro lado, as ondas viajantes periódicas são soluções da forma (1), de modo que  $\phi$  é uma função periódica com período fixado  $L > 0$  e satisfazendo as condições

$$\phi(0) = \phi(L) \quad \text{e} \quad \phi'(0) = \phi'(L).$$

O estudo das equações dispersivas para modelagem de ondas viajantes através dos experimentos de J. Scott Russell observou o deslocamento de uma longa onda com velocidade constante e sem mudança de forma, a qual chamou de onda viajante solitária. Após esse fato, J. Boussinesq [20] e L.

Rayleigh [63] confirmaram a previsão de Russell e mostraram que a onda solitária observada possui um perfil de função hiberbólica do tipo secante, mais especificamente, da forma  $u(x, t) = a \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct))$ . Anos depois, D. Korteweg e G. de Vries em [45], estabeleceram a conhecida equação de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2)$$

onde  $u = u(x, t)$  é uma função de duas variáveis reais,  $x, t \in \mathbb{R}$ , como sendo o modelo que tem como solução a onda viajante solitária observada por Russell e confirmada por Boussinesq e Rayleigh. Mais ainda, Korteweg e de Vries em [45] determinaram a existência de ondas viajantes periódicas dadas pela função elíptica de Jacobi do tipo cnoidal, que solucionam a equação (2).

Em face da simetria de translação presente na equação dispersiva, podemos nos questionar sobre o seguinte fato: *se uma condição inicial  $u_0$  associada à equação está próxima de uma onda viajante (solitária ou periódica)  $\phi$ , o que acontece com a evolução temporal da solução  $u(\cdot, t)$  para qualquer tempo  $t$ ?* Para responder essa questão, vamos definir o conceito de estabilidade orbital de ondas viajantes. De fato, se  $u$  e  $v$  são funções em um espaço de Hilbert  $X$ , consideremos  $\rho$  a distância em relação a órbita das translações entre  $u$  e  $v$  dada por

$$\rho(u, v) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \|u - v(\cdot + y)\|_X.$$

Então, supondo que um modelo dispersivo qualquer admita soluções globais únicas, definimos estabilidade orbital da seguinte forma:

**Definição 1.** Uma onda viajante  $\phi$  do tipo (1) é orbitalmente estável em  $X$  se para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para cada dado inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$  em  $X$  satisfazendo  $\|u_0 - \phi\|_X < \delta$ , a solução  $u(x, t)$  existe para todo  $t \in \mathbb{R}$  e satisfaz

$$\rho(u(t), \phi) < \varepsilon,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Caso contrário, a onda é dita ser orbitalmente instável.

A teoria de estabilidade de ondas viajantes para equações do tipo (2) e suas diversas variantes foi iniciada por Benjamin em [16] e, também, por Bona em [18], onde os autores determinaram a estabilidade orbital (ou não linear) de soluções ondas solitárias para a equação KdV e, desde então, foi aperfeiçoada de várias maneiras (veja, por exemplo, [2], [3], [31], [32], [58], [66]). Também, foi Benjamin em [15] que estabeleceu os primeiros resultados de estabilidade (orbital) de soluções ondas periódicas do tipo cnoidal para a equação KdV que, mais tarde, foram complementados em [11] por

Angulo, Bona e Scialom. Em [11], a estabilidade foi obtida utilizando integrais elípticas e a teoria abstrata de estabilidade orbital de ondas solitárias estabelecida por Grillakis, Shatah e Strauss [31], a qual foi adaptada ao caso periódico.

Ao mesmo tempo que iniciava-se o estudo da estabilidade de ondas viajantes associadas aos modelos já conhecidos, outro modelo dispersivo foi estabelecido por Benjamin, Bona e Mahony em [17]. A equação de Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \quad (3)$$

surgiu como um aprimoramento da equação KdV para descrever a propagação unidirecional de ondas longas de pequena amplitude e, também, a propagação de ondas longas que incorpora efeitos não lineares e dissipativos. Além disso, o modelo que regulariza a equação KdV surge na análise de ondas de superfície de longo comprimento em líquidos, ondas hidromagnéticas em plasma frio, ondas acústicas gravitacionais compressíveis e ondas acústicas em cristais harmônicos.

Atualmente, uma grande classe de equações de evolução dispersivas unidimensionais que modelam ondas viajantes periódicas tem sido amplamente estudadas. Em particular, as equações que tratamos ao longo desta tese:

- (i) Equação Crítica Korteweg-de Vries (cKdV)

$$u_t + \beta u^4 u_x + u_{xxx} = 0,$$

onde  $\beta = -1, 1$  denota, respectivamente, os casos defocusing e focusing da equação.

- (ii) Equação de Gardner

$$u_t + (u^2)_x + (u^3)_x + u_{xxx} = 0.$$

- (iii) Equação Quíntica Benjamin-Bona-Mahony (quíntica BBM)

$$u_t + u_x + u^4 u_x - u_{xxt} = 0.$$

- (iv) Equação Benjamin-Bona-Mahony Fracionária (fBBM)

$$u_t + u_x + uu_x + (D^\alpha u)_t = 0,$$

onde  $0 < \alpha \leq 2$  e  $D = \sqrt{-\partial_x^2}$ .

As equações acima são exemplos de duas classes conhecidas de *equações do tipo dispersiva*, à saber, a equação generalizada de Korteweg-de Vries (gKdV)

$$u_t + (f(u))_x - (\mathcal{M}u)_x = 0, \quad (4)$$

que contempla as equações apresentadas em (i) e (ii) e a equação generalizada de Benjamin-Bona-Mahony (gBBM)

$$u_t + u_x + (f(u))_x + (\mathcal{M}u)_t = 0. \quad (5)$$

que abrange as equações em (iii) e (iv).

Em ambas equações (4) e (5),  $u = u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de valores reais e periódica na variável espacial  $x$ , a não linearidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real contínua e  $\mathcal{M}$  é o operador pseudodiferencial definido como um multiplicador de Fourier por

$$\widehat{\mathcal{M}g}(k) = \zeta(k)\widehat{g}(k), \quad z \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

onde o símbolo  $\zeta$  é considerado uma função par e contínua em  $\mathbb{R}$ , satisfazendo

$$\alpha_1|k|^m \leq \zeta(k) \leq \alpha_2|k|^m, \quad m > 0,$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$  e  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Com exceção da equação de Gardner, nas demais equações acima estamos considerando a não linearidade da forma  $f(u) = u^{p+1}$  ou  $f(u) = \frac{u^{p+1}}{p+1}$ , onde  $p \geq 1$  é um inteiro. Notemos que o operador  $\mathcal{M} = D^\alpha$  na equação fBBM apresentada em (iv), é o operador diferencial fracionário definido em (6) pelo multiplicador de Fourier cujo símbolo é dado proporcionalmente por  $\zeta(k) \sim |k|^\alpha$ , onde  $0 < \alpha \leq 2$ . Nas equações em (i), (ii) e (iii), notemos que  $\mathcal{M} = -\partial_x^2$ .

Além das equações que abordamos nesta tese, um número considerável de equações do tipo (4) e (5) aparecem na literatura. Um modelo especial da forma (4), com  $\mathcal{M} = \mathcal{H}\partial_x$  e  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ , é a equação de Benjamin-Ono (BO)

$$u_t + uu_x - \mathcal{H}u_{xx} = 0,$$

onde  $\mathcal{H}$  representa a transformada de Hilbert dada por  $\widehat{\mathcal{H}g}(k) = -i\text{sgn}(k)\widehat{g}(k)$ . A equação BO foi introduzida por Benjamin em [15] e, posteriormente, estudada por Ono em [58] como um modelo para a evolução em tempo de ondas de cristas longas na interface de dois fluidos imiscíveis. Algumas situações em que a equação é útil são o picnoclina no oceano profundo e o sistema de duas camadas criado pelo fluxo de água doce de um rio para o mar. A estabilidade orbital de soluções ondas periódicas para a equação BO foi determinada em [13] por Angulo e Natali.

Ao considerarmos  $\mathcal{M} = \mathcal{H}\partial_x$  e  $f(u) = \frac{u^2}{2}$  em (5), obtemos a equação regularizada Benjamin-Ono (rBO), uma versão regularizada da equação BO (veja [42]). Resultados de estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas positivas associadas à equação rBO (e também à equação BBM) foram obtidos em [10] utilizando argumentos em [13].

Além da estabilidade orbital, outra noção de estabilidade de soluções ondas viajantes tem conquistado importantes contribuições nos últimos anos. Trata-se da estabilidade espectral de soluções ondas viajantes, que consiste em localizar o espectro de um certo operador obtido através da linearização da equação em torno da onda. Em muitos casos, é possível obter a afirmação bem difundida entre pesquisadores da área que diz: *estabilidade espectral implica na estabilidade orbital* (veja [43] para mais detalhes sobre esse fato). Para este fim, é necessário assumir que o problema de Cauchy associado tenha ao menos soluções globais no espaço de Hilbert  $X$  (ver Definição 1). Como um dos trabalhos pioneiros no contexto periódico, o qual é de nosso interesse, podemos citar [34], onde a autora determinou a estabilidade espectral de ondas periódicas próximas da solução constante  $u = (c - 1)^{\frac{1}{p}}$  para a equação gBBM ( $\mathcal{M} = -\partial_x^2$  e  $f(u) = u^{p+1}$  em (5)).

Em [12], Angulo e Natali utilizando a teoria de perturbação analítica e assintótica, apresentaram resultados para o estudo da estabilidade espectral de ondas viajantes periódicas que solucionam as equações (4) e (5). Os autores deduziram a estabilidade espectral de ondas dnoidais para a equação KdV modificada (mKdV) e de ondas cnoidais para a equação BBM modificada (mBBM) dadas, respectivamente por (4) e (5), com  $\mathcal{M} = -\partial_x^2$  e  $f(u) = u^3$ .

A seguir, a fim de ilustrarmos de forma mais concisa a estrutura básica sobre estabilidade espectral consideremos, por exemplo, a equação gKdV dada em (4). Tal equação admite soluções ondas viajantes da forma (1) com perfil periódico  $\phi$  satisfazendo a equação diferencial ordinária

$$\mathcal{M}\phi + c\phi - f(\phi) + A = 0, \quad (7)$$

onde  $A$  é uma constante de integração.

Considerando a perturbação  $u(x, t) = \phi(x - ct) + w(x - ct, t)$  em (4) e usando (7), obtemos que  $w$  é uma solução da equação não linear

$$(\partial_t - c\partial_x)w + \partial_x(f'(\phi)w) - \mathcal{M}w + \mathcal{O}(w) = 0, \quad (8)$$

onde  $\mathcal{O}(w)$  denota os termos não lineares da equação.

Substituindo (8) pela sua linearização em torno de  $\phi$ , obtemos a equação linear

$$(\partial_t - c\partial_x)w + \partial_x(f'(\phi)w - \mathcal{M}w) = 0. \quad (9)$$

Como  $\phi$  depende apenas de  $x$  e não de  $t$ , a equação (9) possui tratamento por separação de variáveis da forma  $w(x, t) = e^{\lambda t}\eta(x)$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $\eta : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ . Esses argumentos nos permitem considerar o seguinte problema espectral

$$\partial_x \mathcal{L}\eta = \lambda\eta, \quad (10)$$

onde  $\mathcal{L}$  é o operador Hessiano em torno da onda  $\phi$ , o qual é chamado de operador linearizado em torno da onda  $\phi$  e dado por

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} + c - f'(\phi), \quad (11)$$

onde  $f'$  indica a derivada da função  $f$ .

Denotando o espectro de  $\partial_x \mathcal{L}$  por  $\sigma(\partial_x \mathcal{L})$  a estabilidade espectral da onda periódica  $\phi$  é definida como segue:

**Definição 2.** A onda periódica  $\phi$  é dita ser espectralmente estável se  $\sigma(\partial_x \mathcal{L}) \subset i\mathbb{R}$ . Por outro lado, se  $\sigma(\partial_x \mathcal{L})$  contém um ponto  $\lambda$  com  $Re(\lambda) > 0$ , a onda periódica  $\phi$  é dita ser espectralmente instável.

O problema espectral (10) pode ser reescrito na forma geral

$$J\mathcal{L}\eta = \lambda\eta, \quad (12)$$

onde  $J := \partial_x$ . Notemos que podemos proceder de modo similar ao que fizemos acima e obtermos o problema espectral associado à equação gBBM na forma (12) com  $J = (1 + \mathcal{M})^{-1}\partial_x$  e o operador linearizado dado por  $\mathcal{L} = c\mathcal{M} + c - 1 - f'(\phi)$ . Além disso, neste caso, a onda periódica  $\phi$  satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária

$$c\mathcal{M}\phi + (c - 1)\phi - f(\phi) + A = 0. \quad (13)$$

Ao considerarmos o problema de autovalores (12) no espaço das funções periódicas, temos que  $J = \partial_x$  não é um operador injetivo, uma vez que  $\ker(\partial_x) = [1]$ , onde  $\ker(\partial_x)$  denota o núcleo do operador  $\partial_x$ . Logo, resultados da teoria clássica de instabilidade espectral para o sistema Hamiltoniano abstrato como dados em [31] e [32], onde  $J$  é assumido ser invertível, não podem ser aplicados. No entanto, Deconinck e Kapitula em [27] (veja também [35]) desenvolveram uma abordagem considerando



o problema espectral restrito

$$J\mathcal{L}|_{X_0}\eta = \lambda\eta, \quad (14)$$

onde  $\mathcal{L}|_{X_0}$  é uma restrição de  $\mathcal{L}$  no subespaço fechado  $X_0$  de  $L^2_{per}([0, L])$  (para mais detalhes sobre os espaços de Sobolev periódicos veja [40]) das funções periódicas com média zero

$$X_0 = \left\{ f \in L^2_{per}([0, L]) : \int_0^L f(x)dx = 0 \right\}. \quad (15)$$

Aqui, usamos a notação  $\mathcal{L}|_{X_0} = \Pi_0\mathcal{L}\Pi_0$ , onde  $\Pi_0$  denota o operador projeção restrito ao subespaço  $X_0$  dado por  $\Pi_0 f := f - \frac{1}{L} \int_0^L f(x)dx$ . Nessa ocasião, utilizando resultados em [32], os autores deduziram e aplicaram uma fórmula do índice Hamiltoniano de Krein conveniente para obterem condições suficientes para a estabilidade/instabilidade espectral de ondas periódicas com a propriedade de média zero. Em particular, foi deduzida a estabilidade espectral de ondas periódicas associadas à equação (4) com  $\mathcal{M} = -\partial_x^2$  e  $f(u) = \pm u^{p+1}$ .

O índice Hamiltoniano de Krein desempenha um papel crucial no estudo de estabilidade espectral e orbital de ondas periódicas (veja [43, Capítulo 7] para mais detalhes). No caso periódico, a estabilidade espectral é determinada se o índice Hamiltoniano de Krein é nulo e a instabilidade espectral no caso em que índice Hamiltoniano de Krein é da forma  $2k - 1$ , com  $k \in \mathbb{N}$ . Para determinarmos os nossos resultados de estabilidade espectral seguimos essa abordagem, ou seja, investigamos quando o índice Hamiltoniano de Krein é igual a 0 ou 1 baseados em duas técnicas. De fato, para a estabilidade de ondas periódicas associadas as equações do tipo KdV, perante a hipótese  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$ , aplicamos a fórmula do índice Hamiltoniano de Krein conforme obtida e estudada em [27, Teorema 1]. Para obtermos a estabilidade de ondas periódicas relacionadas as equações do tipo BBM, nos baseamos numa teoria mais geral e utilizamos a fórmula do índice (veja [43, Teorema 5.3.2] e [61, Teorema 4.1]) para mais detalhes). No caso em que o núcleo do operador linearizado  $\mathcal{L}$  é simples e o produto interno  $\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$  não nulo, podemos utilizar as duas técnicas e obter o mesmo resultado de estabilidade espectral.

Na literatura existem diferentes técnicas para obtermos a existência e estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas. Para a existência destacamos o método variacional, o qual abordamos nesta tese e que consiste em minimizar um funcional conveniente sujeito à uma certa restrição. Mais especificamente, a existência de ondas periódicas é deduzida a partir da resolução de um problema de minimização utilizando ferramentas apropriadas. Com isso, é possível construirmos uma superfície ou curva de soluções ondas periódicas e determinarmos informações espectrais específicas acerca do operador linear obtido pela linearização da equação da onda periódica e, finalmente, estabelecermos o

nosso resultado de estabilidade.

Em [39], os autores estudaram a estabilidade e instabilidade (espectral e orbital) de ondas viajantes periódicas para as equações fBBM apresentada em (iv) e KdV fracionária, onde  $\mathcal{M} = D^\alpha$  e  $f(u) = u^2$  em (4), para cada  $\alpha \in (\frac{1}{3}, 2]$ . Neste trabalho, foi estabelecida a existência de minimizadores periódicos para o funcional energia com momento e massa fixados. A onda periódica obtida por esse problema de minimização foi assumida como sendo suave em termos dos parâmetros independentes  $A$  e  $c$  em (7) e foi determinado que ela é espectralmente estável. A estabilidade orbital dos minimizadores periódicos foi estabelecida assumindo que o determinante da matriz Jacobiana associada às quantidades conservadas do problema é não nulo combinado com resultados de boa colocação global no espaço energia. Além disso, um critério de instabilidade linear foi determinado pelos autores ao estenderem os argumentos contidos em [47] para o caso periódico. Contudo, a onda periódica não é considerada como sendo de média zero e, portanto, os resultados em [47] não se aplicam. Tal fato pode ser visto em [12], onde os autores estabeleceram propriedades para a instabilidade linear de ondas periódicas com perfil de média zero associadas aos modelos dispersivos gerais (4) e (5).

Uma abordagem diferente pode ser encontrada em [26], onde foi estabelecido um novo critério para a estabilidade orbital de ondas periódicas relacionadas a equação (5) com a não linearidade quadrática. Os autores apresentaram condições suficientes para a estabilidade sem usar a suavidade da onda em termos dos parâmetros  $(c, A)$  e sem a necessidade de conhecer a positividade da matriz Hessiana ou Jacobiana, conforme determinado em [39].

Para a equação fBBM considerada em domínios ilimitados Angulo em [9], combinando argumentos em [30] e [47], determinou que a onda solitária  $\phi$  obtida minimizando o funcional de Weinstein correspondente é espectralmente estável se  $c > 1$  e  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 2)$  e se  $c > c_0 := \frac{2 + \sqrt{2(3\alpha - 1)}}{6\alpha} > 1$  e  $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ . Para  $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  e  $c \in (1, c_0)$ , a onda solitária foi estabelecida espectralmente instável. Sua prova se baseia na invariância de escala para a onda solitária que fornece boas características a respeito da matriz Hessiana associada ao momento da onda  $\phi$ .

No que segue, apresentaremos a estrutura desta tese e descreveremos os nossos resultados. No Capítulo 1, nos dedicamos ao estudo da existência e estabilidade de soluções ondas viajantes com perfil periódico para as equações do tipo KdV apresentadas acima em (i), (ii) e (iii). Primeiramente, consideramos a equação cKdV no caso focusing e mostramos resultados de estabilidade/instabilidade espectral associados às soluções ondas periódicas de média zero e positiva. Essas ondas aparecem quando, na equação (13),  $f(\phi) = \phi^5$  e  $A = 0$ . Para cada  $L > 0$  e  $\gamma_1 > 0$  fixados e  $p \geq 1$  um inteiro par, mostramos que as soluções ondas periódicas de média zero são oriundas do problema de minimização

restrito

$$\inf_{u \in H_{per, odd}^1([0, L])} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L u'^2 + cu^2 dx; \int_0^L u^{p+2} dx = \gamma_1 \right\}. \quad (16)$$

De modo similar, para cada  $L > 0$  e  $\gamma_2 > 0$  fixados e  $p \geq 1$  um inteiro arbitrário, obtemos a existência de ondas periódicas de média positiva a partir da resolução do problema de minimização dado por

$$\inf_{u \in H_{per, even}^1([0, L])} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L u'^2 + cu^2 dx; \int_0^L u^{p+2} dx = \gamma_2 \right\}. \quad (17)$$

Os minimizadores periódicos de média zero e positiva associados aos problemas (16) e (17) são obtidos utilizando algumas ferramentas de compacidade. Além disso, utilizando a teoria de Floquet, estudamos a dependência desses minimizadores com relação aos parâmetros  $(c, A)$ , bem como a análise espectral do operador linearizado. Mais ainda, resolvemos alguns problemas de valores iniciais auxiliares numericamente, que nos dão informações precisas acerca da fórmula do índice Hamiltoniano de Krein, de acordo com [27], na intenção de obtermos os nossos resultados de estabilidade.

Com relação às ondas periódicas positivas, estabelecemos nossos resultados utilizando as soluções explícitas do tipo dnoidal determinadas em [14]. Já as ondas periódicas de média zero explícitas para a equação focusing cKdV eram desconhecidas na literatura atual até agora. Para preencher essa lacuna, apresentamos ondas que possuem um perfil cnoidal e vemos que essas soluções possuem um valor limiar do módulo  $\kappa \in (0, 1)$  que pode nos fornecer uma ruptura na estabilidade espectral. Vale mencionar que o problema de Cauchy associado a equação focusing cKdV é localmente bem posto no espaço energia  $H_{per}^1([0, L])$  (veja [65]). Devido a falta de soluções globais é possível obter ondas espectralmente estáveis que são orbitalmente instáveis. Em [14] os autores mostraram que as ondas dnoidas são orbitalmente instáveis e em nossos resultados mostramos que esse tipo de solução é espectralmente estável.

Em seguida, apresentamos resultados de existência e estabilidade orbital de ondas periódicas ímpares para a equação cKdV no caso defocusing. Obtemos a existência dessas ondas minimizando o funcional energia com momento fixado, utilizando argumentos de compacidade. Mais especificamente, para  $\gamma > 0$ , obtemos soluções ondas periódicas ímpares a partir da resolução do problema de minimização

$$\inf_{u \in H_{per}^1([0, L])} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L u'^2 + \frac{1}{15} u^6 dx; \int_0^L u^2 dx = \gamma \right\}. \quad (18)$$

Após isso, somos capazes de construir uma curva suave de soluções periódicas com período fixado  $L > 0$  dada por  $c \in I \mapsto \phi_c \in H_{per}^n([0, L])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Essa informação nos permite estabelecer que o núcleo do operador linearizado em torno da onda é simples e gerado por  $\phi'_c$ . A solução periódica ímpar  $\phi := \phi_c$  obtida pelo problema de minimização restrito nos fornece apenas um autovalor negativo para

o operador, o qual é simples. Adicionalmente, essa informação precisa acerca do espectro negativo do operador linearizado também nos permite conhecer a positividade da matriz hessiana formada pelo momento em  $\phi$ .

Combinando todas as informações acima, usamos o resultado apresentado recentemente em [4] para obtermos a estabilidade orbital das ondas periódicas de acordo com a Definição 1. Vale ressaltar que o problema de Cauchy associado a equação decofusing cKdV é globalmente bem posto no espaço energia  $H_{per}^1([0, L])$  utilizando a teoria em [65] combinada com a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. A existência de soluções globais é crucial para obtermos o nosso resultado de estabilidade orbital (veja [4, Teorema 4.2]). Resultados de estabilidade orbital considerando apenas a boa colocação local foram determinados por Grillakis, Shatah e Strauss [31]. Usando essa última abordagem e considerando o conjunto de velocidades da onda em um intervalo aberto e limitado, os autores em [14] estabeleceram a estabilidade orbital de ondas positivas e periódicas para o caso focusing da equação cKdV, onde a falta de soluções globais do problema de Cauchy associado com dados iniciais em  $H_{per}^1([0, L])$  é esperada. Além disso, a instabilidade orbital também foi tratada no mesmo trabalho usando uma adaptação do método em [19] no conjunto aberto complementar ilimitado de velocidades da onda.

Para a equação de Gardner, construímos ondas periódicas explícitas com perfil cnoidal utilizando uma transformação Galileana na equação modificada de Korteweg-de Vries (mKdV) e sua solução cnoidal correspondente. É conhecido que a equação mKdV admite soluções ondas periódicas com perfis dnoidal e cnoidal. A solução correspondente com perfil dnoidal para a equação de Gardner e sua respectiva estabilidade orbital foram obtidos em [8]. Nosso objetivo é determinar resultados de estabilidade espectral associados ao perfil cnoidal e, nesse caso, mostramos a presença de um valor limiar o qual é o mesmo para as duas equações. Esse fato nos permite obter que os operadores linearizados associados a ambas ondas periódicas são iguais. Conseqüentemente, obtemos as mesmas propriedades espectrais em relação a esses operadores.

No Capítulo 2, estudamos a existência e estabilidade espectral de ondas periódicas para a equação quártica BBM apresentada acima em (iii). Obtemos a existência de soluções para essa equação via métodos variacionais e imersões compactas. Vemos que as ondas periódicas obtidas pelo problema de minimização

$$\inf_{u \in H_{per, odd}^1([0, L])} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L cu'^2 + (c-1)u^2 dx; \int_0^L u^6 dx = \mu \right\}, \quad (19)$$

para  $L > 0$  e  $\mu > 0$  fixados, são dadas explicitamente por um perfil cnoidal com período  $L > 0$  e velocidade de onda  $c > \frac{L^2}{4\pi^2 + L^2}$ . Em seguida, utilizamos resultados propostos pela teoria de Floquet para determinarmos o comportamento dos três primeiros autovalores do operador linearizado em torno da onda. Mais exatamente, aplicamos o principal resultado em [55] e resolvemos alguns problemas de

valores iniciais auxiliares numericamente para determinarmos o índice inercial do operador linearizado, ou seja, o par de inteiros  $(n, z)$ , onde  $n$  é a dimensão do subespaço negativo do operador e  $z$  é a dimensão do núcleo do operador linearizado. Em relação a estabilidade espectral, mostramos que o operador linearizado restrito ao ortogonal do espaço tangente relacionado ao momento e a massa na onda periódica não possui autovalores negativos. Para isso, aplicamos a fórmula do índice dada em [43, Teorema 5.3.2] (veja também [61, Teorema 4.1]).

No último Capítulo, determinamos a existência e estabilidade espectral de soluções ondas periódicas de média zero associadas a equação fBBM apresentada em (iv). Inicialmente, estabelecemos nossos resultados de boa colocação local e global para o problema de Cauchy associado a equação fBBM para condições iniciais em  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ , com  $\alpha > 1$ . Em seguida, considerando  $\alpha \in (\frac{1}{3}, 2]$  e  $\tau > 0$  fixados, mostramos que as ondas periódicas solucionam o problema de minimização

$$\inf_{u \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} c(D^{\frac{\alpha}{2}}u)^2 + (c-1)u^2 dx; \int_{-\pi}^{\pi} u^3 dx = \tau, \int_{-\pi}^{\pi} u dx = 0 \right\}, \quad (20)$$

para todo  $c > \frac{1}{2}$ . Além disso, esses minimizadores periódicos são pares e possuem um perfil single-lobe, isto é, apenas um máximo (em  $x = 0$ ) e mínimo em  $\mathbb{T}$ . Combinando essas informações com as fórmulas do índice, obtemos uma contagem precisa dos autovalores negativos para o operador linearizado  $\mathcal{L}$  em torno da onda. Mais propriamente, assumindo  $\ker(\mathcal{L}|_{X_0}) = [\phi']$ , determinamos que  $n(\mathcal{L}) = 1$  se  $d < 0$  e  $n(\mathcal{L}) = 2$  se  $d \geq 0$ , onde  $n(\mathcal{L})$  denota o número de autovalores negativos do operador  $\mathcal{L}$  e a quantidade  $d$  é definida como  $d = 1 + 2A(c) - c - cA'(c)$ .

Para o caso especial  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ , estabelecemos condições suficientes para determinarmos um resultado de unicidade para a onda que resolve o problema de minimização (20). Na verdade, mostramos que o minimizador periódico é único desde que  $n(\mathcal{L}) = 1$ . Para isso, seguimos argumentos adaptados de [30, Seção 5] para o caso periódico e utilizamos ferramentas de compacidade convenientes.

Um aspecto importante do Capítulo 3 diz respeito à existência de ondas periódicas de pequena amplitude com média zero, também conhecidas como ondas de Stokes, associadas a equação fBBM para  $\alpha \in (0, 2]$ . A existência de ondas periódicas de pequena amplitude é útil para obtermos um melhor entendimento da estabilidade espectral de ondas periódicas gerais. Estabilidade orbital/espectral e tópicos relacionados a ondas periódicas de pequena amplitude associadas a vários modelos de evolução foram consideravelmente estudados (veja [36], [38], [41], [46], [53] e suas referências). Na maioria desses trabalhos, a constante de integração  $A := A(c)$  é considerada zero ou pequena, a fim de construir uma curva ou superfície suave de ondas periódicas de um ou dois parâmetros. Como resultado dessa restrição, o núcleo de  $\mathcal{L}$  é sempre simples e a quantidade de autovalores negativos é constante ao longo do regime dos parâmetros. Até onde sabemos, o estudo que aqui apresentamos é mais completo, uma

vez que as ondas periódicas de média zero estabelecem novos recursos que nunca foram explorados na literatura.

Utilizando argumentos contidos em [23, Capítulo 8.4] (veja também [22, Seção 5]), construímos ondas periódicas de pequena amplitude que bifurcam de  $c = \frac{1}{2}^+$ . No decorrer desta tese, a notação  $c = \frac{1}{2}^+$  significa  $c \rightarrow \frac{1}{2}^+$ . Com efeito, mostramos que as soluções de Stokes são únicas e localmente próximas de  $c = \frac{1}{2}^+$ . Portanto, coincidem com a família suave de minimizadores obtida pelo problema de minimização (20). A unicidade dos minimizadores e as propriedades espectrais obtidas pelas ondas periódicas de pequena amplitude estabelecem que o número de autovalores negativos de  $\mathcal{L}$  é sempre igual a um, contanto que o núcleo do operador seja simples para todo  $c > \frac{1}{2}$  e  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ . Como consequência, para  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$  fixado obtemos que as ondas de Stokes coincidem com os minimizadores periódicos e são únicas para todo  $c > \frac{1}{2}$ . Adicionalmente, o fato de  $n(\mathcal{L}) = 1$ , nos fornece que  $\ker(\mathcal{L}|_{X_0}) = [\phi']$  e, conseqüentemente, essas ondas periódicas determinam uma curva suave  $c \in (\frac{1}{2}, +\infty) \mapsto \phi \in H_{per}^\infty(\mathbb{T})$  com período fixado.

Além de permitir uma contagem precisa do número de autovalores negativos de  $\mathcal{L}$ , a quantidade  $d = 1 + 2A(c) - c - cA'(c)$ , juntamente com o Teorema da Oscilação em [39, Lema 3.2], nos possibilita determinar que  $\dim(\ker(\mathcal{L})) \in \{1, 2\}$ . De fato, essa quantidade é crucial em nossa análise, uma vez que determina a existência de pontos de dobra, isto é, valores de  $c$  (dependendo de  $\alpha$ ) tal que  $d = 0$ . Os pontos de dobra estão relacionados com a existência de elementos adicionais em  $\ker(\mathcal{L})$ , além da função  $\phi'$ , e nos fornece o valor exato de  $c$  onde o número de autovalores negativos muda. Vale ressaltar que eles foram estudados inicialmente em [53] para o caso da equação KdV fracionária. Em [53], os autores provaram resultados de estabilidade espectral de ondas periódicas de pequena amplitude para o caso  $\alpha \in (0, 2]$  e para uma solução com perfil single-lobe a qual soluciona um problema de minimização similar ao (20) para  $\alpha \in (\frac{1}{3}, 2]$ . Além disso, os autores determinaram a existência de um único ponto de dobra  $\alpha \approx 0.5849$ . Em nosso caso, mostramos que ondas de Stokes da equação fBBM possuem dois pontos de dobra;  $\alpha = \tilde{\alpha} \approx 0.2924$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Posteriormente, apresentamos o nosso resultado de estabilidade espectral para as ondas de Stokes associadas ao caso  $\alpha \in (0, 2]$ . Para isso, aplicamos a fórmula do índice dada em [61, Teorema 4.1] a fim de estabelecermos que a quantidade de autovalores negativos associados ao operador restrito  $\mathcal{L}|_{\{1, (D^{\alpha+1})\phi\}^\perp}$  é zero. Além disso, para  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$  e para cada  $c > \frac{1}{2}$ , estabelecemos um resultado de estabilidade espectral para as ondas periódicas gerais obtidas pelo problema de minimização (20). Adicionalmente, em parceria com H. Borluk, G.M. Muslu e G. Oruc (veja [5] para mais detalhes) construímos as soluções ondas periódicas da equação fBBM numericamente utilizando o método de iteração Petviashvili, que confirmam os resultados obtidos analiticamente. Também discutimos o caso

$\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$  numericamente, uma vez que não temos resultados de unicidade como determinados para o caso  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ .

Finalmente, além da estabilidade espectral, provamos a estabilidade orbital para  $\alpha \in (1, 2]$ , já que nesse intervalo temos um resultado de boa colocação global conveniente no espaço energia  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ . Para obtermos a estabilidade orbital, não nos baseamos no antigo método que consiste em minimizar a energia  $E$  com momento  $P$  e massa  $M$  fixados. Nesse processo, além da análise do espectro do operador  $\mathcal{L}$ , é preciso provar a positividade da matriz Hessiana  $\frac{d}{dc}P(\phi)$  (veja, por exemplo, [4], [10], [13], [26], [31] e suas referências). Contudo, estudos recentes têm mostrado que essa abordagem não é mais necessária, como em [26]. Nesta última parte da tese, aplicamos os resultados mais abrangentes recentemente estabelecidos em [26] acrescidos de novos argumentos. Com efeito, introduzimos uma nova lei de conservação  $V(u) = P(u) - E(u)$  como uma variedade restrita associada ao funcional de Lyapunov. Esta consideração estende uma nova perspectiva para a teoria de estabilidade, uma vez que obtemos os nossos resultados sem utilizar qualquer informação adicional da onda, apenas a estimativa  $A(c) > c - \frac{1}{2}$  determinada para provar a estabilidade espectral.

# Publicações Decorrentes desta Tese:

---

---

## Artigo publicado:

Amaral, S. and Natali, F., *Odd periodic waves and stability results for the defocusing mass-critical Korteweg-de Vries equation*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, p. 1-7, 2019.

## Artigos submetidos:

Amaral, S. and Natali, F., *On the instability of periodic waves for dispersive equations - revisited*, preprint (2020).

Amaral, S., Cardoso Jr., E. and Natali, F., *On the spectral stability of periodic traveling waves for the critical Korteweg-de Vries and Gardner equations*, preprint (2020).

Amaral, S., Borluk, H., Natali, F., Muslu, G. and Oruc, G., *On the existence, uniqueness and spectral stability of periodic waves for the fractional Benjamin-Bona-Mahony equation*, preprint (2020).

## Apresentações de trabalhos:

*Odd Periodic Waves and Stability Results for the Defocusing Mass-Critical Korteweg-de Vries Equation*, ICMC Summer Meeting on Differential Equations 2020 Chapter, ICMC-USP, São Carlos-SP, Brasil.

*On the existence and spectral stability for the fractional Benjamin-Bona-Mahony equation*, Seminário Latinoamericano de EDP's Dispersivas (evento online), UFMG, Belo Horizonte-MG, Brasil.



---

# Estabilidade de Ondas Periódicas para as Equações do tipo KdV

---

Neste capítulo, determinaremos resultados de estabilidade orbital e espectral de ondas viajantes periódicas para as equações crítica de Korteweg-de Vries (cKdV)

$$u_t + \beta u^4 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.1)$$

nos casos focusing, quando  $\beta = 1$  e defocusing, quando  $\beta = -1$  e para a equação de Gardner

$$u_t + (u^2)_x + (u^3)_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.2)$$

onde em ambas equações  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real do tipo  $u = u(x, t)$  e periódica de período  $L > 0$  na variável espacial  $x$ .

Além disso, tais equações são exemplos da equação gKdV em (4) com  $\mathcal{M} = -\partial_x^2$ , isto é,

$$u_t + (f(u))_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.3)$$

onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real suave.

A equação gKdV admite solução do tipo onda viajante da forma  $u(x, t) = \phi(x - ct)$ , onde  $c$  indica a velocidade da onda. Substituindo esse tipo de solução em (1.3) e integrando uma vez no intervalo  $[0, L]$ , obtemos

$$-c\phi + \phi'' + f(\phi) + A = 0, \quad (1.4)$$

onde  $A$  é uma constante de integração arbitrária e  $\phi$  é uma função  $L$ -periódica.

Seguindo os resultados contidos em [27], iremos considerar o subespaço fechado  $X_0$  de  $L^2_{per}([0, L])$  definido em (15) para estudarmos o problema de estabilidade espectral restrito para a equação gKdV dado por

$$J\mathcal{L}|_{X_0}u = \lambda u, \quad (1.5)$$

onde  $J = \partial_x$  e  $\mathcal{L}$  é o operador autoadjunto e linearizado em torno da onda periódica  $\phi$  definido em  $L^2_{per}([0, L])$  e dado por

$$\mathcal{L} = -\partial_x^2 + c - f'(\phi). \quad (1.6)$$

Antes de prosseguirmos com os nossos resultados, nas próximas seções discutiremos alguns conceitos básicos para o nosso estudo de estabilidade. De fato, utilizaremos resultados propostos pela teoria de Floquet para obtermos importantes propriedades acerca da quantidade e multiplicidade dos primeiros autovalores associados ao operador  $\mathcal{L}$ . Além disso, apresentaremos a estrutura básica estabelecida em [27] para estudarmos o problema espectral (1.5) relacionado a equação (1.3). A abordagem segundo [27] é baseada na fórmula do índice Hamiltoniano de Krein que nos fornece condições suficientes para determinarmos a estabilidade/instabilidade de ondas periódicas associadas as equações Hamiltonianas abstratas da forma

$$u_t = J\mathcal{E}'(u) \quad (1.7)$$

definidas em um espaço de Hilbert  $H$ , onde  $J : H \rightarrow \text{range}(H) \subset H$  é um operador antissimétrico (aqui  $\text{range}(H)$  denota a imagem do operador  $J$ ) e  $\mathcal{E} : H \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional de classe  $C^2$ . Nos restringiremos ao caso específico em que  $J = \partial_x$  e  $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 - 2W(u)dx$  onde  $W' = f$ . Nesse caso, a equação (1.7) torna-se a equação gKdV dada em (1.3).

## 1.1 Estrutura Básica da Teoria de Floquet

Em um cenário geral, consideremos a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$-\phi'' + g(c, A, \phi) = 0, \quad (1.8)$$

onde  $g : \mathcal{P} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dependendo de  $(c, A, \phi)$ , contínua em todas as variáveis e diferenciável na varável  $\phi$ ,  $(c, A)$  é um elemento do conjunto admissível  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  (ou  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ , em casos com apenas um parâmetro). Isto significa que  $\mathcal{P}$  contém todos os pares  $(c, A)$  onde  $\phi$  é uma solução periódica de (1.8).

Para cada  $(c, A) \in \mathcal{P}$ , seja  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(c,A)}$  o operador linearizado em torno da solução periódica  $\phi := \phi_{(c,A)}$  de período  $L := L_{(c,A)}$  da equação (1.8). O operador linearizado em torno de  $\phi$  dado por

$$\mathcal{L}h = -h'' + g'(c, A, \phi)h, \quad (c, A) \in \mathcal{P} \quad (1.9)$$

é o operador de Hill definido em  $L^2_{per}([0, L])$  com domínio em  $H^2_{per}([0, L])$  e, de acordo com o Teorema da Oscilação em [50, Teorema 2.1], o espectro de  $\mathcal{L}$  é formado por uma sequência ilimitada de números reais

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 \dots < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} \dots,$$

onde a igualdade indica que o autovalor  $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$  é duplo. Além disso, o espectro de  $\mathcal{L}$  é caracterizado pelo número de zeros das autofunções. De fato, se  $\chi$  é uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda_{2n-1}$  ou  $\lambda_{2n}$ , então  $\chi$  tem exatamente  $2n$  zeros no intervalo semi-aberto  $[0, L)$  (Veja [50, Teorema 2.14] para mais detalhes).

Seja  $\{p, y\}$  um conjunto fundamental de soluções da equação de Hill

$$\mathcal{L}(h) = -h'' + g'(c, A, \phi)h = 0 \quad (1.10)$$

Suponhamos  $p(x)$  uma solução  $L$ -periódica não trivial de (1.10). Então, de acordo com [50], existe uma constante real  $\theta = \theta_y$  (dependendo de  $y$ ) tal que

$$y(x + L) = y(x) + \theta p(x). \quad (1.11)$$

Consequentemente,  $\theta = 0$  é uma condição necessária e suficiente para todas as soluções de (1.8) serem  $L$ -periódicas. Em particular, se  $\theta_y \neq 0$ , então  $\theta_w \neq 0$  para toda solução  $w(x)$  linearmente independente a  $p(x)$ . Veremos que esse critério é muito útil para verificarmos quando o núcleo do operador  $\mathcal{L}$  é unidimensional. Adicionalmente, segundo [50], existe uma solução  $p(x)$   $L$ -periódica não trivial da equação (1.10) que é par ou ímpar.

Considerando a derivada com relação a  $x$  em (1.8), observamos que  $\phi' := \phi'_{(c,A)}$  pertence ao núcleo do operador (1.9), ou seja,  $\phi'(x) = p(x)$  é uma solução da equação de Hill (1.10) e, consequentemente, é uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda = 0$  para todo  $(c, A) \in \mathcal{P}$ . Além disso,  $\phi'$  tem exatamente dois zeros no intervalo semi-aberto  $[0, L)$ . Logo, o número zero é o segundo ou terceiro autovalor de  $\mathcal{L}$ .

O próximo resultado nos fornece uma condição necessária e suficiente para decidirmos sobre a periodicidade da solução  $y(x)$  de (1.10) e uma condição suficiente para sabermos a posição exata do

autovalor zero associado a  $\mathcal{L}$  quando  $\theta \neq 0$  em (1.11).

**Teorema 1.1.1.** Seja  $\phi'$  a autofunção de  $\mathcal{L}$  em (1.9) associada ao autovalor zero. Se  $\theta$  é a constante dada por (1.11), então zero é um autovalor simples se, e somente se,  $\theta \neq 0$ . Além disso, como  $\phi'$  tem exatamente dois zeros no intervalo semi-aberto  $[0, L)$ , então  $\lambda_1 = 0$  se  $\theta < 0$ , e  $\lambda_2 = 0$  se  $\theta > 0$ .

*Demonstração.* Veja [55, Teorema 3.1]. □

Com o propósito de determinarmos características acerca do espectro do operador  $\mathcal{L}$ , é necessário conhecermos o índice inercial de  $\mathcal{L}$ , denotado por  $in(\mathcal{L})$  e definido pelo par de inteiros  $(n, z)$ , onde  $n$  denota a dimensão do subespaço negativo de  $\mathcal{L}$  e  $z$  denota a dimensão do núcleo de  $\mathcal{L}$ . Adicionalmente, iremos dizer que a família de operadores  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(c,A)}$  é isonercial se o índice inercial  $in(\mathcal{L}_{(c,A)})$  é constante para todo  $(c, A) \in \mathcal{P}$ .

Notemos que o Teorema 1.1.1 nos permite decidir e calcular o índice  $in(\mathcal{L})$ . De fato, se  $\theta \neq 0$ , então zero é um autovalor simples, ou seja, a dimensão do núcleo de  $\mathcal{L}$ , dada por  $z$ , é igual a um. Portanto, se  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ , então  $in(\mathcal{L}) = (1, 1)$  e se  $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$ , então  $in(\mathcal{L}) = (2, 1)$ . Em particular, se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , temos  $in(\mathcal{L}) = (1, 2)$  e, nesse caso, o núcleo do operador  $\mathcal{L}$  é duplo e não gerado apenas por  $\phi'$ .

Em seguida, como a derivada  $\phi'$  é uma autofunção associada a  $\lambda = 0$  para todo  $(c, A) \in \mathcal{P}$ , podemos enunciar o seguinte resultado acerca da invariância do índice inercial com respeito aos parâmetros:

**Teorema 1.1.2.** Seja  $\phi$  uma solução  $L$ -periódica suave da equação (1.8). Então, a família de operadores  $\mathcal{L}(h) = -h'' + g'(c, A, \phi)h$  é isonercial com respeito a  $(c, A)$  no regime de parâmetros.

*Demonstração.* Veja [54, Teorema 3.1] e [56, Teorema 3.1]. □

De acordo com o Teorema 1.1.2, para calcularmos o índice inercial do operador  $\mathcal{L}$  é suficiente calcularmos para algum par  $(c_0, A_0) \in \mathcal{P}$  fixado. Agora, consideremos  $\phi := \phi_{(c_0, A_0)}$  uma solução  $L$ -periódica par da equação (1.8) e seja  $\bar{y}$  a única solução do problema de valor inicial auxiliar

$$\begin{cases} -\bar{y}'' + g'(c_0, A_0, \phi)\bar{y} = 0 \\ \bar{y}(0) = -\frac{1}{\phi''(0)} \\ \bar{y}'(0) = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Como  $\{\phi', \bar{y}\}$  determina um conjunto fundamental de soluções para a equação em (1.12), onde  $\phi'$  é uma solução  $L$ -periódica ímpar, existe uma constante  $\theta$ , tal que

$$\bar{y}(x + L) = \bar{y}(x) + \theta\phi'(x). \quad (1.13)$$

Derivando a relação (1.13) e aplicando em  $x = 0$ , obtemos que a constante  $\theta$  é dada por

$$\theta = \frac{\bar{y}'(L)}{\phi''(0)}. \quad (1.14)$$

Por outro lado, consideremos  $\phi = \phi_{(c_0, A_0)}$  uma solução  $L$ -periódica ímpar da equação (1.8) e  $\bar{y}$  a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} -\bar{y}'' + g'(c_0, A_0, \phi)\bar{y} = 0 \\ \bar{y}(0) = 0 \\ \bar{y}'(0) = \frac{1}{\phi'(0)}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Nesse caso,  $\{\phi', \bar{y}\}$  é um conjunto fundamental de soluções para a equação (1.8), onde  $\phi'$  uma função  $L$ -periódica par. Logo, aplicando a relação (1.13) em  $x = 0$ , obtemos que a constante  $\theta$  é dada por

$$\theta = \frac{\bar{y}(L)}{\phi'(0)}. \quad (1.16)$$

Seja  $L > 0$  fixado e denotemos por  $H_{per, even}^2([0, L])$  o espaço de todas as funções  $f \in H_{per}^2([0, L])$ , tal que  $f$  é uma função  $L$ -periódica par. A fim de obtermos os nossos resultados, veremos que a existência de uma família  $\phi$  de soluções  $L$ -periódicas para a equação (1.8) dependem suavemente dos parâmetros  $(c, A)$ , para  $(c, A)$  em um conjunto aberto  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$ .

**Teorema 1.1.3.** Seja  $\phi_{(c_0, A_0)}$  uma solução periódica par de (1.8) definida em  $(c_0, A_0)$  fixado no regime de parâmetros. Se  $\theta \neq 0$ , onde  $\theta$  é a constante dada pelo Teorema 1.1.1, e  $L$  é o período de  $\phi_{(c_0, A_0)}$ , então existe uma vizinhança aberta  $\mathcal{O}$  de  $(c_0, A_0)$  e uma família  $\phi_{(c, A)} \in H_{per, even}^2([0, L])$  de soluções  $L$ -periódicas de (1.8) que dependem suavemente de  $(c, A) \in \mathcal{O}$ .

*Demonstração.* Veja [54, Teorema 3.3]. □

**Observação 1.1.4.** O Teorema 1.1.3 nos fornece uma propriedade importante a respeito da quantidade e multiplicidades dos primeiros autovalores associados ao operador linearizado  $\mathcal{L}$  definido em (1.6). De fato, se  $\theta \neq 0$  em um certo ponto  $(c_0, A_0)$  no regime de parâmetros  $\mathcal{P}$ , podemos concluir que o núcleo de  $\mathcal{L}$  é simples e  $n(\mathcal{L})$  é constante para todo  $(c, A)$  no regime de parâmetros, ou seja, o valor  $\text{in}(\mathcal{L})$  é constante onde a equação (1.8) admite soluções periódicas.

**Observação 1.1.5.** Vale ressaltar ainda, que o Teorema 1.1.3 também é válido para uma solução periódica  $\phi_{c_0} := \phi_{(c_0, A_0)}$  ímpar de (1.6) com  $A_0 = 0$  e as devidas adaptações. De fato, se  $\theta \neq 0$  e  $L$  é o período de  $\phi_{c_0}$ , então existe um intervalo aberto  $I$  e uma curva suave  $c \in I \mapsto \phi_c \in H_{per}^2([0, L])$  de soluções  $L$ -periódicas satisfazendo a equação (1.6).

## 1.2 Condições Suficientes para a Estabilidade Espectral de Ondas Periódicas

Para um período fixado  $L > 0$ , assumiremos em toda esta seção as seguintes condições:

- (a1) Existe um par fixado  $(c_0, A_0)$  e  $\phi := \phi_{(c_0, A_0)}$  solução periódica par suave para a equação (1.4). Além disso, assumimos que  $\phi'$  possui dois zeros no intervalo  $[0, L)$ .
- (a2)  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$ .

Notemos que a condição (a1) implica, em vista da Teoria de Floquet apresentada na seção anterior, que  $n(\mathcal{L}) = 1$  ou  $n(\mathcal{L}) = 2$ , onde  $n(\mathcal{L})$  indica o número de autovalores negativos do operador linearizado  $\mathcal{L}$  definido em (1.6). Além disso, a condição (a2) nos permite deduzir a existência de uma solução par não periódica  $\bar{y}$  que satisfaz a equação de Hill

$$-\bar{y}'' + c\bar{y} - f'(\phi)\bar{y} = 0, \quad (1.17)$$

onde  $\{\phi', \bar{y}\}$  é o conjunto fundamental de soluções para a equação linear (1.17).

De acordo com o Teorema 1.1.3, podemos observar que a suposição (a2) nos fornece a existência de uma superfície suave de soluções ondas periódicas pares que solucionam (1.4), definida em um subconjunto aberto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$(c, A) \in \mathcal{O} \mapsto \phi_{(c, A)} \in H_{per}^s([0, L]), \quad s \gg 1,$$

todas as soluções com o mesmo período  $L > 0$ . No que segue, com a intenção de simplificarmos a notação, não distinguiremos a onda periódica  $\phi$  para um par fixo  $(c_0, A_0)$  e  $\phi$  para um par  $(c, A) \in \mathcal{O}$ , já que ambos possuem o mesmo período fixo  $L > 0$ .

A seguir, apresentaremos a teoria geral de estabilidade espectral seguindo as ideias de Deconinck e Kapitula contidas em [27]. Seja  $k_r$  a quantidade de autovalores reais estritamente positivos e  $k_c$  a quantidade de autovalores complexos com parte real estritamente positiva do operador  $J\mathcal{L}|_{X_0}$  (contando as possíveis multiplicidades) associado ao problema espectral restrito (1.5).

Consideremos a parte imaginária de um operador linear  $\mathcal{A}$  com domínio  $D(\mathcal{A})$  como o operador linear  $Im(\mathcal{A})u \equiv Im(\mathcal{A}u)$ ,  $u \in D(\mathcal{A})$ . Se  $\mathcal{A}$  é um operador autoadjunto, denotemos por  $n(\langle w, \mathcal{A}w \rangle)$  a dimensão do subespaço maximal para o qual  $\langle w, \mathcal{A}w \rangle < 0$ . Além disso, seja  $\lambda$  um autovalor não nulo puramente imaginário associado ao operador  $J\mathcal{L}|_{X_0}$  e considere  $E_\lambda$  o autoespaço correspondente. O

autovalor  $\lambda$  é dito ter assinatura de Krein negativa se

$$k_i^-(\lambda) := n(\langle w, (\mathcal{L}|_{X_0})|_{E_\lambda} w \rangle) \geq 1,$$

caso contrário, se  $k_i^-(\lambda) = 0$ , então o autovalor  $\lambda$  é dito ter assinatura de Krein positiva. Se o autovalor  $\lambda$  for geometricamente e algebricamente simples, com autofunção  $\psi_\lambda$ , então

$$k_i^-(\lambda) = \begin{cases} 0, & \langle \psi_\lambda, (\mathcal{L}|_{X_0})\psi_\lambda \rangle > 0 \\ 1, & \langle \psi_\lambda, (\mathcal{L}|_{X_0})\psi_\lambda \rangle < 0. \end{cases}$$

Adicionalmente, definimos a assinatura de Krein total pela quantidade  $k_i^- := \sum_{\lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}} k_i^-(\lambda)$ . Como  $\text{Im}(\mathcal{L}) = 0$ , segundo [27] obtemos que  $k_c$  é um inteiro par. Além disso, para cada  $\lambda \in i\mathbb{R}$  com conjugado  $\bar{\lambda}$ , temos que  $k_i^-(\lambda) = k_i^-(\bar{\lambda})$ , o que implica que  $k_i^-$  é necessariamente um inteiro par.

Em seguida, consideremos

$$\mathcal{J} = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle, \quad (1.18)$$

e se  $\mathcal{J} \neq 0$ , denotemos por  $\mathcal{D}$  a matriz  $2 \times 2$  dada por

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle} \begin{pmatrix} \langle \mathcal{L}^{-1}\phi, \phi \rangle & \langle \mathcal{L}^{-1}\phi, 1 \rangle \\ \langle \mathcal{L}^{-1}\phi, 1 \rangle & \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Com base nas definições acima, devido a [27] temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.1.** Suponhamos que as condições (a1)-(a2) ocorram. Se  $\mathcal{J} \neq 0$  e se a matriz  $\mathcal{D}$  for não-singular, temos para o problema de autovalor (1.5)

$$k_r + k_c + k_i^- = n(\mathcal{L}) - n(\mathcal{J}) - n(\mathcal{D}). \quad (1.20)$$

O inteiro não negativo  $K_{\text{Ham}} := k_r + k_c + k_i^-$  é chamado de *índice Hamiltoniano de Krein*.

*Demonstração.* Veja [27, Teorema 1]. □

O estudo do índice Hamiltoniano de Krein nos permite deduzir a estabilidade/instabilidade espectral de soluções ondas viajantes periódicas para a equação (1.4). Com efeito, uma consequência imediata do Teorema 1.2.1 é a seguinte:

**Corolário 1.2.2.** Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.2.1, se  $k_c = k_r = k_i^- = 0$  a solução de onda periódica  $\phi$  da equação (1.8) é espectralmente estável no espaço  $X_0$ . Adicionalmente, se  $K_{\text{Ham}} = 1$ , a

referida solução periódica é espectralmente instável no espaço  $X_0$ .

*Demonstração.* A primeira parte do Corolário é uma consequência imediata do Teorema 2 em [27]. Se  $K_{\text{Ham}} = 1$  resulta que  $k_r = 1$ , uma vez que  $k_c$  e  $k_i^-$  são inteiros pares não negativos. Logo, o operador  $J\mathcal{L}$  apresentado no problema espectral (1.5) tem um autovalor positivo o qual nos permite deduzir a instabilidade espectral da onda periódica.  $\square$

De acordo com a teoria geral para estabilidade espectral, determinar a estabilidade/instabilidade espectral de soluções ondas periódicas para a equação (1.4) consiste em analisar o número de autovalores negativos associados ao operador restrito  $\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}$ . Mais especificamente, temos o seguinte critério geral: a estabilidade espectral é determinada se  $n\left(\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}\right) = 0$  e, caso  $n\left(\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}\right) = 1$ , obtemos a instabilidade espectral.

Veremos a seguir que o índice Hamiltoniano de Krein está inteiramente relacionado com o número de autovalores negativos do operador restrito  $\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}$ . Com efeito, conforme o Teorema do Índice dado em [43, Teorema 5.3.2] (veja também [61, Teorema 4.1]) temos a seguinte identidade

$$n\left(\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}\right) = n(\mathcal{L}) - n(\tilde{\mathcal{D}}) - z(\tilde{\mathcal{D}}),$$

onde  $n(\tilde{\mathcal{D}})$  e  $z(\tilde{\mathcal{D}})$  denotam, respectivamente, a quantidade de autovalores negativos e a dimensão do núcleo da matriz simétrica  $2 \times 2$  dada por

$$\tilde{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{L}^{-1}\phi, \phi \rangle & \langle \mathcal{L}^{-1}\phi, 1 \rangle \\ \langle \mathcal{L}^{-1}\phi, 1 \rangle & \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Se a matriz  $\tilde{\mathcal{D}}$  for não-singular, então  $z(\tilde{\mathcal{D}}) = 0$  e a fórmula do índice resume-se em

$$n\left(\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}\right) = n(\mathcal{L}) - n(\tilde{\mathcal{D}}). \quad (1.22)$$

Levando em consideração a identidade (1.22), o seguinte resultado segundo [43] nos mostra a relação entre os índices  $n\left(\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}\right)$  e  $K_{\text{Ham}}$ .

**Teorema 1.2.3.** Consideremos o problema espectral (1.5). Se a matriz restrita simétrica  $\tilde{\mathcal{D}}$  definida em (1.21) é não-singular, então o índice Hamiltoniano de Krein satisfaz

$$K_{\text{Ham}} = n(\mathcal{L}) - n(\tilde{\mathcal{D}}) = n\left(\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}\right).$$



*Demonstração.* Veja [43, Teorema 7.1.5]. □

Como consequência dessa relação e do critério geral de estabilidade, analisar o índice Hamiltoniano de Krein nos permite deduzir a estabilidade/instabilidade espectral como foi estabelecido no Corolário 1.2.2, desde que o núcleo do operador  $\mathcal{L}$  seja simples e  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$  não nulo.

Em seguida, consideremos a equação (1.8) como

$$-\phi'' + c\phi - f(\phi) - A = 0 \quad (1.23)$$

e assumamos que a constante  $\theta$  dada por (1.14) satisfaça  $\theta \neq 0$  em um único ponto  $(c_0, A_0)$  no regime de parâmetros. Pelo Teorema 1.1.3, podemos definir

$$\psi = \frac{\partial \phi}{\partial c} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{\partial \phi}{\partial A}.$$

Novamente pelo Teorema 1.1.3, notamos que  $\psi$  acima é uma função periódica par suave a qual satisfaz

$$\mathcal{L}\psi = -\psi'' + c\psi - f'(\phi)\psi = -\phi. \quad (1.24)$$

Adicionalmente,  $\eta$  também é uma função periódica par satisfazendo

$$\mathcal{L}\eta = -\eta'' + c\eta - f'(\phi)\eta = 1. \quad (1.25)$$

No próximo resultado, veremos que a inversa do Teorema 1.1.3 é imediata para o caso particular  $f(s) = s^{p+1}$ , onde  $p \geq 1$  é um inteiro.

**Proposição 1.2.4.** Seja  $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto aberto. Suponhamos que  $(c, A) \in \tilde{\mathcal{O}} \mapsto \phi_{(c,A)}$  é uma superfície suave de soluções ondas viajantes pares que resolvem (1.23) com  $f(s) = s^{p+1}$ ,  $p \geq 1$ , todas com o mesmo período fixado  $L > 0$ . Então,  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  e o valor  $n(\mathcal{L})$  é constante para todo  $(c, A) \in \tilde{\mathcal{O}}$ .

*Demonstração.* A fim de simplificarmos a notação, denotemos  $\phi := \phi_{(c,A)}$  e consideremos  $\{\phi', \bar{y}\}$  o conjunto fundamental de soluções relacionado a equação  $\mathcal{L}\bar{y} = 0$ . Por contradição, assumamos que  $\bar{y}$  seja uma função  $L$ -periódica. Como  $\phi'$  é ímpar, argumentos em [50] nos permitem considerar  $\bar{y}$  par. O Wronskiano associado a  $\{\phi', \bar{y}\}$  e denotado por  $\mathcal{W}(\phi', \bar{y})(x)$  satisfaz,  $\mathcal{W}(\phi', \bar{y})(x) = \phi'(x)\bar{y}'(x) - \phi''(x)\bar{y}(x) = 1$ , para todo  $x \in [0, L]$ . De fato, pela Fórmula de Abel-Liouville, temos que

$$\mathcal{W}(\phi', \bar{y})(x) = \mathcal{W}(\phi', \bar{y})(0) = 1, \quad \forall x \in [0, L].$$

Além disso, como  $\bar{y}$  e  $\phi'$  são ambas funções  $L$ -periódicas, obtemos de (1.4) que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^L \mathcal{W}(\phi', \bar{y}) dx = -2 \int_0^L \bar{y} \phi'' dx = -2 \int_0^L \bar{y} (c\phi - \phi^{p+1} - A) dx \\ &= -2c \int_0^L \bar{y} \phi dx + 2 \int_0^L \bar{y} \phi^{p+1} dx + 2A \int_0^L \bar{y} dx. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Por outro lado, como  $\mathcal{L}$  é um operador autoadjunto, por (1.24), (1.25), o fato de  $\mathcal{L}\phi = A - p\phi^{p+1}$  e  $\mathcal{L}\bar{y} = 0$ , resulta que

$$0 = \langle \phi, \mathcal{L}\bar{y} \rangle = \langle A - p\phi^{p+1}, \bar{y} \rangle, \quad 0 = \langle \psi, \mathcal{L}\bar{y} \rangle = -\langle \phi, \bar{y} \rangle \quad \text{e} \quad 0 = \langle \eta, \mathcal{L}\bar{y} \rangle = \langle 1, \bar{y} \rangle. \quad (1.27)$$

Combinando os resultados em (1.26) e (1.27), obtemos uma contradição, já que  $L > 0$ . Portanto,  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  como queríamos.  $\square$

Suponhamos que  $\theta \neq 0$  em um único ponto  $(c_0, A_0)$  no regime de parâmetros. Pelo Teorema 1.1.3, somos capazes de determinar a condição inicial  $\psi(0)$  no ponto  $(c_0, A_0)$ . Para isso, multiplicamos a equação (1.24) por  $\bar{y}$ , onde  $\bar{y}$  é obtido por (1.12) e integramos por partes duas vezes. Logo, obtemos

$$-\int_0^L \phi_{(c_0, A_0)} \bar{y} dx = \psi(L)\bar{y}'(L) = \psi(0)\bar{y}'(L).$$

De modo análogo, de (1.25) temos que

$$\int_0^L \bar{y} dx = \eta(L)\bar{y}'(L) = \eta(0)\bar{y}'(L).$$

Como  $\theta \neq 0$ , obtemos que  $\bar{y}'(L) \neq 0$ . Assim,  $\psi(x)$  e  $\eta(x)$  são obtidos resolvendo, respectivamente, os seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{cases} -\psi'' + c_0\psi - f'(c_0, A_0, \phi_{(c_0, A_0)})\psi = -\phi_{(c_0, A_0)} \\ \psi(0) = -\frac{1}{\bar{y}'(L)} \int_0^L \phi_{(c_0, A_0)} \bar{y} dx \\ \psi'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -\eta'' + c_0\eta - f'(c_0, A_0, \phi_{(c_0, A_0)})\eta = 1 \\ \eta(0) = \frac{1}{\bar{y}'(L)} \int_0^L \bar{y} dx \\ \eta'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Em nossas aplicações, os problemas acima serão muito úteis para determinarmos a quantidade  $\mathcal{J}$  em (1.18) e o determinante da matriz  $\mathcal{D}$  em (1.19). De fato, assumamos que a condição (a2) ocorra. Assim, temos que o operador  $\mathcal{L} : [\phi']^\perp \cap D(\mathcal{L}) \rightarrow [\phi']^\perp$  é invertível e autoadjunto e pelas igualdades (1.24) e (1.25), vemos que  $1, \phi \in \text{range}(\mathcal{L}) = \ker(\mathcal{L})^\perp = [\phi']^\perp$ . Logo, obtida a solução  $\eta(x)$  no segundo

problema de valor inicial dado em (1.28), segue que

$$\mathcal{J} = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle = \int_0^L \eta dx = \frac{d}{dA} \int_0^L \phi dx. \quad (1.29)$$

Além disso, a solução  $\psi(x)$  obtida resolvendo o primeiro problema de valor inicial em (1.28) nos permite calcular

$$\langle \mathcal{L}^{-1}\phi, \phi \rangle = - \int_0^L \psi \phi dx = - \frac{1}{2} \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx$$

e

$$\langle \mathcal{L}^{-1}\phi, 1 \rangle = - \int_0^L \psi dx = - \frac{d}{dc} \int_0^L \phi dx.$$

Assim, se  $\mathcal{J} \neq 0$ , o determinante da matriz  $\mathcal{D}$  em (1.19) é dado por

$$\begin{aligned} \det \mathcal{D} &= \langle \mathcal{L}^{-1}\phi, \phi \rangle - \frac{\langle \mathcal{L}^{-1}\phi, 1 \rangle^2}{\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle} \\ &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx - \frac{\left( \frac{d}{dc} \int_0^L \phi dx \right)^2}{\frac{d}{dA} \int_0^L \phi dx}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Definida a quantidade  $\mathcal{J}$  em (1.29), entendemos que

$$n(\mathcal{J}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \frac{d}{dA} \int_0^L \phi dx \geq 0 \\ 1, & \text{se } \frac{d}{dA} \int_0^L \phi dx < 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Por outro lado, para determinarmos  $n(\mathcal{D})$ , precisamos analisar o sinal de  $\det \mathcal{D}$  dado em (1.30). Com efeito, se  $\det \mathcal{D} < 0$ , temos que a matriz  $\mathcal{D}$  possui um autovalor positivo e um autovalor negativo e, conseqüentemente,  $n(\mathcal{D}) = 1$ . No entanto, se  $\det \mathcal{D} > 0$ , não é possível decidir diretamente a respeito da quantidade  $n(\mathcal{D})$ , pois nesse caso poderíamos ter  $n(\mathcal{D}) = 0$  (dois autovalores positivos de  $\mathcal{D}$ ) ou  $n(\mathcal{D}) = 2$  (dois autovalores negativos).

### 1.3 Equação Crítica KdV - Caso Focusing

O nosso objetivo, nesta seção, é obter a existência de soluções ondas periódicas de média positiva e zero para a equação focusing cKdV ( $\beta = 1$  em (1.1)), onde  $f(s) = s^5$  e  $A = 0$  em (1.4), utilizando métodos variacionais. Mais especificamente, mostraremos a existência de ondas periódicas a partir da resolução de um problema de minimização com certas restrições para ambos os casos de ondas de média positiva e zero. Além disso, aplicaremos os argumentos desenvolvidos nas seções anteriores a

fim de obtermos a estabilidade/instabilidade espectral associada à estas ondas.

A principal vantagem da abordagem que apresentaremos aqui é que a quantidade de autovalores negativos de  $\mathcal{L}$  em (1.6) definido para ondas periódicas  $\phi$  em um único ponto  $(c_0, 0)$  é determinada com precisão. Assim, nesse caso específico, a Observação 1.1.4 pode ser utilizada para deduzirmos a quantidade e multiplicidade de autovalores negativos para todo  $(c, A)$ .

### 1.3.1 Ondas Periódicas com Média Zero

Começaremos as nossas aplicações estudando a existência e estabilidade de ondas periódicas para a equação focusing cKdV que possuem a propriedade de média zero.

Sejam  $L > 0$  e  $\gamma_1 > 0$  fixados. Para  $p \geq 1$  inteiro par, definamos o seguinte conjunto

$$Y_1 = \left\{ u \in H_{per,odd}^1([0, L]); \int_0^L u^{p+2} dx = \gamma_1 \right\},$$

onde  $H_{per,odd}^1([0, L])$  denota o espaço de todas as funções  $f \in H_{per}^1([0, L])$  tal que  $f$  é  $L$ -periódica ímpar.

Nossa intenção é encontrar um minimizador periódico para o problema de minimização restrito

$$q_{1,c} = \inf_{u \in Y_1} \mathcal{A}_c(u), \quad (1.32)$$

onde  $\mathcal{A}_c$  é o funcional definido por

$$\mathcal{A}_c(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u'^2 + cu^2 dx, \quad (1.33)$$

o qual é uma norma equivalente em  $H_{per,odd}^1([0, L])$  para cada  $c > -\frac{4\pi^2}{L^2}$ . De fato, para  $u \in H_{per,odd}^1([0, L])$ , temos que  $\int_0^L u(x) dx = 0$ . Além disso, podemos escrever a expansão em série de Fourier de  $u$  da seguinte forma

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$$

onde  $\widehat{u}(n) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx$  com  $\widehat{u}(0) = 0$ . Logo, como  $\widehat{u}''(n) = \frac{2\pi i n}{L} \widehat{u}'(n) = -\frac{4\pi^2}{L^2} n^2 \widehat{u}(n)$ , pela identidade de Parseval obtemos

$$\int_0^L u'^2 dx = \int_0^L -u'' u dx = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\widehat{u}''(n) \overline{\widehat{u}(n)} = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{4\pi^2}{L^2} \right) n^2 |\widehat{u}(n)|^2 = L \sum_{n \neq 0} \left( \frac{4\pi^2}{L^2} \right) n^2 |\widehat{u}(n)|^2.$$

Por outro lado, segue que

$$\int_0^L u^2 dx = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(n)|^2 = L \sum_{n \neq 0} |\widehat{u}(n)|^2.$$

Dessa forma, temos que  $u \in H_{per,odd}^1([0, L])$  satisfaz a desigualdade de Poincaré-Wirtinger

$$\int_0^L u^2 dx \geq \frac{4\pi^2}{L^2} \int_0^L u^2 dx. \quad (1.34)$$

Como consequência da desigualdade (1.34), temos

$$\mathcal{A}_c(u) \geq \left( \frac{2\pi^2}{L^2} + \frac{c}{2} \right) \int_0^L u^2 dx = \left( \frac{2\pi^2}{L^2} + \frac{c}{2} \right) \|u\|_{L_{per,odd}^2}^2,$$

desde que  $\left( \frac{2\pi^2}{L^2} + \frac{c}{2} \right) > 0$ , isto é,  $c > -\frac{4\pi^2}{L^2}$ . Logo, para cada  $c > -\frac{4\pi^2}{L^2}$  existe uma constante  $K_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{A}_c(u) \geq K_0 \|u\|_{H_{per,odd}^1}^2. \quad (1.35)$$

Além disso, utilizando novamente a relação (1.34), para cada  $c > -\frac{4\pi^2}{L^2}$  existe uma contante positiva  $K_1$  tal que

$$\mathcal{A}_c(u) \leq K_1 \|u\|_{H_{per,odd}^1}^2. \quad (1.36)$$

Portanto, pelas desigualdades em (1.35) e (1.36), obtemos que o funcional  $\mathcal{A}_c(u)$  é uma norma equivalente em  $H_{per,odd}^1([0, L])$  e, conseqüentemente,  $q_{1,c} \geq 0$  em (1.32).

**Lema 1.3.1.** Para cada  $L > 0$  fixado, seja  $c > -\frac{4\pi^2}{L^2}$ . Então, o problema de minimização (1.32) tem pelo menos uma solução não trivial, isto é, existe  $\phi \in Y_1$  satisfazendo

$$\mathcal{A}_c(\phi) = \inf_{u \in Y_1} \mathcal{A}_c(u). \quad (1.37)$$

*Demonstração.* Como  $q_{1,c} \geq 0$  e  $\mathcal{A}_c$  é um funcional suave e limitado em  $H_{per,odd}^1$ , podemos considerar  $\{u_n\}$  como uma seqüência minimizante para (1.32), ou seja, uma seqüência em  $Y_1$  satisfazendo

$$\mathcal{A}_c(u_n) \rightarrow \inf_{u \in Y_1} \mathcal{A}_c(u), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, o fato de  $c > -\frac{4\pi^2}{L^2}$  nos permite concluir que  $\{u_n\}$  é uma seqüência limitada em  $H_{per,odd}^1([0, L])$ . Assim, a menos de subsequência, existe  $\phi \in H_{per,odd}^1([0, L])$  tal que  $u_n \rightharpoonup \phi$  em  $H_{per,odd}^1([0, L])$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Em seguida, como o espaço energia  $H_{per,odd}^1([0, L])$  está compactamente imerso em

$L_{per,odd}^{p+2}([0, L]) \hookrightarrow L_{per,odd}^2([0, L])$ , existe uma constante positiva  $M$  tal que para todo  $\phi \in H_{per,odd}^1$  temos que  $\|\phi\|_{L_{per,odd}^{p+2}} \leq M\|\phi\|_{H_{per,odd}^1}$  e  $u_n \rightarrow \phi$  em  $L_{per,odd}^{p+2}([0, L])$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Adicionalmente, denotando a norma em  $L_{per,odd}^{p+2}$  simplesmente por  $\|\cdot\|$ , segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L (u_n^{p+2} - \phi^{p+2}) dx \right| &\leq \int_0^L |u_n^{p+2} - \phi^{p+2}| dx \\ &\leq (\|u_n\|^{p+1} + \|u_n\|^p \|\phi\| + \|u_n\|^{p-1} \|\phi\|^2 + \dots \\ &\quad + \|u_n\|^2 \|\phi\|^{p-1} + \|u_n\| \|\phi\|^p + \|\phi\|^{p+1}) \|u_n - \phi\|, \end{aligned}$$

donde,  $\int_0^L \phi^{p+2} dx = \gamma_1$ .

Além disso, pela semicontinuidade inferior fraca do funcional  $\mathcal{A}_c$  concluímos que

$$\mathcal{A}_c(\phi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_c(u_n) = q_{1,c}.$$

Como  $\phi$  satisfaz a restrição, isto é  $\phi \in Y_1$ , também temos que  $\mathcal{A}_c \geq q_{1,c}$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{A}_c = q_{1,c}$ . Portanto,  $\phi$  é o minimizador periódico desejado do problema de minimização (1.32).

□

Pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange, o minimizador periódico  $\phi \in H_{per,odd}^1([0, L])$  obtido pelo Lema 1.3.1 satisfaz a equação

$$-\phi'' + c\phi = C_1\phi^{p+1}, \quad (1.38)$$

para alguma constante  $C_1$ . Como  $\gamma_1 > 0$ , temos que  $\phi$  é não trivial e um simples argumento de escala nos permite escolher  $C_1 = 1$ . De fato, para todo  $s > 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c(s\phi) &= s^2 \mathcal{A}_c(\phi) \\ &= \inf \left\{ \mathcal{A}_c(su); u \in H_{per,odd}^1([0, L]), \int_0^L u^{p+2} dx = \gamma_1, \right\} \\ &= \inf \left\{ \mathcal{A}_c(u); u \in H_{per,odd}^1([0, L]), \int_0^L u^{p+2} dx = s^{p+2} \gamma_1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Logo,  $\phi$  satisfaz a equação

$$-\phi'' + c\phi - \phi^{p+1} = 0. \quad (1.40)$$

Além disso, argumentos de bootstrap garantem que  $\phi$  é uma função  $L$ -periódica suave em  $H_{per,odd}^n([0, L])$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

No próximo resultado, obteremos a quantidade exata de autovalores negativos do operador

linearizado  $\mathcal{L}$ .

**Lema 1.3.2.** Seja  $\phi \in H_{per,odd}^2([0, L])$  a solução obtida pelo Lema 1.3.1. Então,  $n(\mathcal{L}) = 2$ .

*Demonstração.* Como  $\phi \in H_{per,odd}^2([0, L])$  é um minimizador periódico para o problema de minimização (1.32) com apenas uma restrição, obtemos que  $n\left(\mathcal{L}|_{L_{per,odd}^2}\right) \leq 1$ . Por outro lado, utilizando a equação (1.40), para  $p \geq 1$  um inteiro par temos que

$$\langle \mathcal{L}\phi, \phi \rangle = -\frac{p}{p+1} \int_0^L \phi^{p+2} dx < 0,$$

com  $\phi$  ímpar e, conseqüentemente,  $n\left(\mathcal{L}|_{L_{per,odd}^2}\right) \geq 1$ . Portanto,  $n\left(\mathcal{L}|_{L_{per,odd}^2}\right) = 1$ .

Como  $\phi' \in \ker(\mathcal{L})$  e  $\phi'$  é uma função par com dois zeros no intervalo semi-aberto  $[0, L)$ , pelo Teorema da Oscilação em [37], zero não é o primeiro autovalor de  $\mathcal{L}|_{L_{per,even}^2}$ , logo obtemos  $n\left(\mathcal{L}|_{L_{per,even}^2}\right) \geq 1$ . Contudo, não é possível haver outro autovalor negativo de  $\mathcal{L}|_{L_{per,even}^2}$ , uma vez que pelo Teorema da Oscilação em [37], a autofunção para o segundo autovalor de  $\mathcal{L}|_{L_{per,even}^2}$  deve ter dois zeros em  $[0, L)$ . Portanto, zero é o segundo autovalor de  $\mathcal{L}|_{L_{per,even}^2}$  e, conseqüentemente,

$$n(\mathcal{L}) = n\left(\mathcal{L}|_{L_{per,odd}^2}\right) + n\left(\mathcal{L}|_{L_{per,even}^2}\right) = 2.$$

□

Notemos que o minimizador periódico  $\phi$  para o problema de minimização (1.32) é uma solução ímpar de (1.40). Como as equações do tipo KdV são invariantes por translações, podemos considerar  $\phi$  uma solução par ao fazer uma translação da forma  $\psi := \phi\left(\cdot - \frac{L}{4}\right)$ . Contudo, manteremos a notação  $\phi$  para essa solução.

No caso  $p = 4$ , temos que a solução obtida pelo Lema 1.3.1 (já transladada), possui a propriedade de média zero, isto é,  $\int_0^L \phi dx = 0$  e é dada explicitamente pelo perfil cnoidal

$$\phi(x) = \frac{a \operatorname{cn}\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right)}{\sqrt{1 - b \operatorname{sn}^2\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right)}}, \quad (1.41)$$

onde  $K(\kappa)$  denota a integral elíptica do primeiro tipo que depende do módulo da função elíptica de Jacobi  $\kappa \in (0, 1)$  (para mais detalhes sobre as funções elípticas de Jacobi veja [21] e [24]). Os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  dependem suavemente de  $\kappa \in (0, 1)$  e são dados por

$$a = \frac{2[(2 - \kappa^2 + 2\sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1})K(\kappa)^2 L^2]^{\frac{1}{4}}}{L}, \quad (1.42)$$

$$b = \kappa^2 - 1 - \sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1}, \quad (1.43)$$

e

$$c = \frac{16K(\kappa)^2 \sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1}}{L^2}. \quad (1.44)$$

Observemos que a função  $b := b(\kappa)$  em 1.43 assume apenas valores negativos para todo  $\kappa \in (0, 1)$  (veja a Figura 1.1), logo o denominador em (1.41) faz sentido para todos os valores de  $\kappa \in (0, 1)$ . Além disso, a velocidade  $c$  em (1.44) é obtida ao substituir a onda do tipo cnoidal (1.41) na equação cKdV.

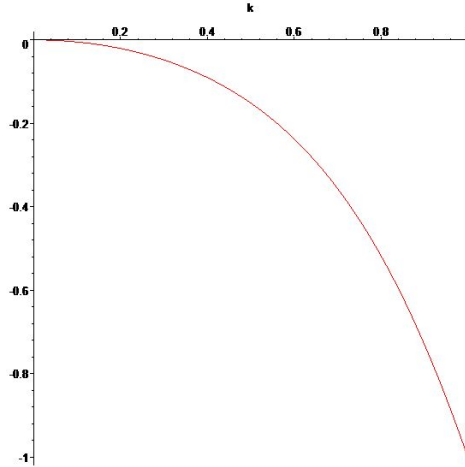


Figura 1.1: Gráfico de  $b$  em (1.43).

Adicionalmente, as soluções do tipo cnoidal (1.41) podem ser vistas através do plano de fase associado a equação (1.40). De fato, na Figura 1.2 apresentamos o plano de fase dado por  $(\phi, \phi')$  e as curvas em azul representam as soluções cnoidais (1.41) da equação (1.40) sujeitas à certas condições iniciais  $(\phi(0), \phi'(0))$ . Podemos ver que essas soluções estão no exterior da região delimitada pela onda solitária, isto é, a curva que passa pela origem.

Sabendo que  $\lim_{\kappa \rightarrow 0^+} K(\kappa) = \frac{\pi}{2}$ , notemos que em (1.44), temos  $c > \frac{4\pi^2}{L^2}$ . No entanto, vimos que a onda periódica não trivial  $\phi$ , obtida pela Lema 1.3.1, bifurca no ponto  $c_1 = -\frac{4\pi^2}{L^2}$ . Logo, as soluções obtidas pelo ansatz (1.41) não contemplam todas as soluções que minimizam o problema de minimização, mais exatamente, não contemplam as soluções cuja velocidade satisfaz  $c \in \left(-\frac{4\pi^2}{L^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}\right)$ . Notemos ainda, que mesmo não conhecendo as soluções nesse intervalo, sabemos que elas são não triviais e não constantes, uma vez que  $\phi$  satisfaz a restrição do problema. Todavia, mantemos o mesmo cenário, uma vez que a solução do problema de minimização é única e dada pelo perfil cnoidal (1.41) (veja a Observação 1.3.9).

Pelo Lema 1.3.2, o operador linearizado em torno da onda periódica  $\phi$  dada por (1.41) satisfaz  $n(\mathcal{L}_{(c_0, 0)}) = 2$ . Além disso, pela Proposição 1.2.4, obtemos que  $\ker(\mathcal{L}_{(c_0, 0)}) = [\phi']$ . Portanto, obtemos



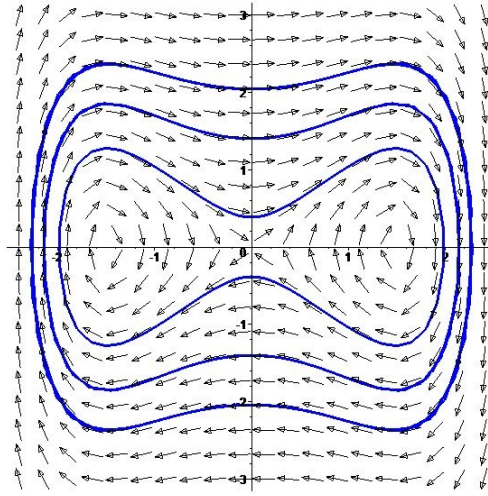


Figura 1.2: Plano de fase da equação (1.40) com  $c = 1$ .

as mesmas propriedades espectrais para todo  $(c, A)$  no regime de parâmetros (ou seja, para as ondas periódicas acima da homoclínica correspondente, também é possível usarmos o Teorema 1.1.2).

Pelo Teorema 1.1.3 garantimos a existência de uma superfície suave

$$(c, A) \in \mathcal{O} \mapsto \phi_{(c,A)} \in H_{per,even}^n([0, L]), \quad n \in \mathbb{N},$$

de ondas periódicas pares que solucionam a equação diferencial não linear (1.4) com  $p = 4$ , todas com o mesmo período  $L > 0$ . Desse modo, a nossa próxima etapa será calcular  $n(\mathcal{J})$  e  $n(\mathcal{D})$ .

As Tabelas 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 nos fornecem um valor limiar  $\kappa_0 \approx 0.745$  satisfazendo  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle = 0$  em  $\kappa = \kappa_0$  com  $\mathcal{J} < 0$  se  $\kappa \in (0, \kappa_0)$  e  $\mathcal{J} > 0$  se  $\kappa \in (\kappa_0, 1)$ . Portanto, obtemos  $n(\mathcal{J}) = 1$  se  $\kappa \in (0, \kappa_0)$  e  $n(\mathcal{J}) = 0$  se  $\kappa \in (\kappa_0, 1)$ . Além disso, utilizando o programa Maple 13, pelo método de aproximação de curvas por splines, na Figura 1.3 traçamos o gráfico de  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$  em termos de  $\kappa_0 \in (0, 1)$  para o caso  $L = 2\pi$ , com valores dados na Tabela 1.1.

$L = 2\pi$	
$\kappa_0$	$\mathcal{J}$
0.0001	-0.47290
0.1	-0.47296
0.3	-0.4643
0.5	-0.3886
0.7	-0.0985
0.739	-0.0024
0.74	0.0001
0.9	0.4919
0.9999	0.9958

Tabela 1.1: Valores de  $\mathcal{J}$  para  $L = 2\pi$ .

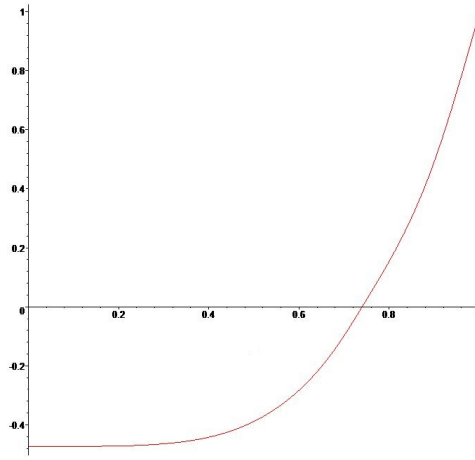
$L = 20$	
$\kappa_0$	$\mathcal{J}$
0.0001	-16.2331
0.1	-16.2298
0.3	-15.9064
0.5	-13.3279
0.7	-3.6809
0.744	-0.070
0.7449	0.0095
0.9	15.7314
0.9999	44.3814

Tabela 1.2: Valores de  $\mathcal{J}$  para  $L = 20$ .

$L = 50$	
$\kappa_0$	$\mathcal{J}$
0.0001	-255.07
0.1	-255.01
0.3	-249.89
0.5	-209.40
0.7	-58.24
0.74521	-0.0263
0.74523	0.0017
0.9	245.608
0.9999	71.1702

Tabela 1.3: Valores de  $\mathcal{J}$  para  $L = 50$ .

$L = 100$	
$\kappa_0$	$\mathcal{J}$
0.0001	-2042.21
0.1	-2041.74
0.3	-2000.67
0.5	-1676.52
0.7	-466.79
0.74528	-0.1066
0.74529	0.0045
0.9	1964.63
0.9999	813.37

Tabela 1.4: Valores de  $\mathcal{J}$  para  $L = 100$ .Figura 1.3: Gráfico de  $\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$  para  $L = 2\pi$ .

Finalmente, resta calcularmos o sinal de  $\det \mathcal{D}$ , a fim de obtermos o número de autovalores negativos da matriz  $\mathcal{D}$ . Para o caso  $(c, A) = (c, 0)$ , notamos que  $\langle \mathcal{L}^{-1}\phi, 1 \rangle = -\frac{d}{dc} \int_0^L \phi dx = 0$ . Se  $\mathcal{J} \neq 0$ , utilizando (1.30), obtemos

$$\det \mathcal{D} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx. \quad (1.45)$$

Usando a fórmula explícita de  $\phi$  em (1.41) e denotando a integral elíptica completa do primeiro tipo, de modo simplificado, por  $K := K(\kappa)$ , obtemos que

$$\int_0^L \phi^2 = \int_0^L \frac{a^2 \operatorname{cn}^2\left(\frac{4K}{L}x, \kappa\right)}{1 - b \operatorname{sn}^2\left(\frac{4K}{L}x, \kappa\right)} dx.$$

Considerando a mudança de variáveis  $u = \frac{4K}{L}x$ , segue que

$$\int_0^L \phi^2 = \frac{a^2 L}{4K} \int_0^{4K} \frac{\text{cn}^2\left(\frac{4K}{L}x, \kappa\right)}{1 - b \text{sn}^2\left(\frac{4K}{L}x, \kappa\right)} du = \frac{a^2 L}{K} \int_0^K \frac{\text{cn}^2\left(\frac{4K}{L}x, \kappa\right)}{1 - b \text{sn}^2\left(\frac{4K}{L}x, \kappa\right)} du. \quad (1.46)$$

Pela fórmula (411.03) em [24] temos que

$$\int_0^K \frac{\text{cn}^2(u, \kappa)}{1 - b \text{sn}^2(u, \kappa)} du = \frac{\pi(1-b) [1 - \Lambda_0(\beta, \kappa)]}{2\sqrt{b(1-b)}(b - \kappa^2)}, \quad (1.47)$$

onde

$$\Lambda_0(\beta, \kappa) = \frac{2}{\pi} [E(\kappa)F(\beta, \kappa') + K(\kappa)E(\beta, \kappa') - K(\kappa)F(\beta, \kappa')]$$

e

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-b}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2-k^2 + \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}}\right).$$

Aqui,  $F(\beta, \kappa')$  e  $E(\beta, \kappa')$  indicam a integral elíptica incompleta do primeiro e segundo tipo, respectivamente, e o parâmetro  $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$  define o módulo complementar elíptico. A função  $\Lambda_0(\beta, \kappa)$  é conhecida como função Lambda de Heumann.

Logo, substituindo (1.47) em (1.46), obtemos que

$$\int_0^L \phi^2 dx = \frac{2\pi\sqrt{(\kappa^2 - 2b)(1-b)} [1 - \Lambda_0(\beta, \kappa)]}{\sqrt{b(b - \kappa^2)}} := \tau(\kappa). \quad (1.48)$$

Em seguida, para todo  $\kappa \in (0, 1)$  temos que

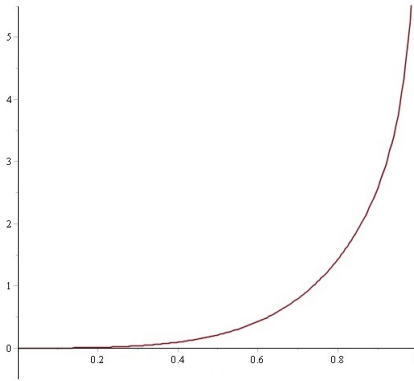
$$\frac{dc}{d\kappa} = -\frac{16K [K(\kappa^4 - 3\kappa^2 + 2) - 2E(\kappa^4 - \kappa^2 + 1)]}{L^2\kappa(1 - \kappa^2)\sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1}} > 0, \quad (1.49)$$

onde  $E := E(\kappa)$  denota a integral elíptica completa do segundo tipo. Logo,

$$\frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx = \frac{\frac{d}{d\kappa} \int_0^L \phi^2 dx}{\frac{dc}{d\kappa}} = \frac{\tau'(\kappa)}{\frac{dc}{d\kappa}}. \quad (1.50)$$

Usando o programa Maple 13, plotamos o gráfico da função  $\tau'$  em termos do módulo  $\kappa \in (0, 1)$  e vemos que  $\tau'$  é estritamente crescente nesse intervalo (veja a Figura 1.4). Sendo assim, de (1.49) e (1.50) concluímos que  $\frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 > 0$ .

Logo, para  $L > 0$  fixado e em vista de  $\frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 > 0$  e (1.45), obtemos  $\det \mathcal{D} < 0$  para todo  $c > \frac{4\pi^2}{L^2}$  e  $A \approx 0$ . Consequentemente,  $n(\mathcal{D}) = 1$ . Portanto, em vista das considerações acima acerca

Figura 1.4: Gráfico de  $\tau'(k)$ .

das quantidades  $n(\mathcal{L})$  e  $n(\mathcal{J})$  e pelo Corolário 1.2.2, se  $\kappa \in (0, \kappa_0)$  obtemos que

$$\mathcal{K}_{Ham} = n(\mathcal{L}) - n(\mathcal{J}) - n(\mathcal{D}) = 2 - 1 - 1 = 0$$

e a onda periódica  $\phi$  é espectralmente estável e, se  $\kappa \in (\kappa_0, 1)$ , resulta que

$$\mathcal{K}_{Ham} = n(\mathcal{L}) - n(\mathcal{J}) - n(\mathcal{D}) = 2 - 0 - 1 = 1$$

e, nesse caso, concluímos que a onda  $\phi$  é espectralmente instável.

Como consequência, podemos enunciar o seguinte resultado de estabilidade:

**Teorema 1.3.3.** Seja  $L > 0$  fixado e definamos  $\mathcal{J} := \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$ . Para cada  $c > \frac{4\pi^2}{L^2}$  a onda  $\phi$  em (1.41) é espectralmente estável se  $\mathcal{J} < 0$  e espectralmente instável se  $\mathcal{J} > 0$  no espaço energia  $H_{per}^1([0, L])$  pelo fluxo periódico da equação (1.1) para  $\beta = 1$ .

### 1.3.2 Ondas Periódicas Positivas

Agora, o nosso propósito é obter soluções ondas periódicas positivas para a equação focusing cKdV. Para isso, consideremos  $L > 0$  e  $\gamma_2 > 0$  fixados e  $p \geq 1$  um inteiro arbitrário. Definamos o seguinte conjunto

$$Y_2 = \left\{ u \in H_{per, even}^1([0, L]); \int_0^L u^{p+2} dx = \gamma_2 \right\}.$$

Nosso primeiro propósito é encontrar um minimizador periódico para o problema de minimização restrito

$$q_{2,c} = \inf_{u \in Y_2} \mathcal{A}_c(u), \tag{1.51}$$

onde para cada  $c > 0$ ,  $\mathcal{A}_c$  é definido em (1.33).

**Lema 1.3.4.** Para cada  $c > 0$ , o problema de minimização (1.51) tem pelo menos uma solução não trivial, isto é, existe  $\phi \in Y_2$  satisfazendo

$$\mathcal{A}_c(\phi) = \inf_{u \in Y_2} \mathcal{A}_c(u). \quad (1.52)$$

*Demonstração.* Como  $c > 0$ , temos que  $\mathcal{A}_c$  é um funcional suave e limitado em  $H_{per}^1([0, L])$  e, conseqüentemente,  $q_{2,c} \geq 0$ . A existência do minimizador periódico  $\phi \in H_{per}^1([0, L])$  para o problema de minimização restrito (1.51) é obtida exatamente como na prova do Lema 1.3.1.  $\square$

Pelo Lema 1.3.4 e pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange, resulta que existe uma constante  $C_2$  tal que

$$-\phi'' + c\phi = C_2\phi^{p+1}. \quad (1.53)$$

Notamos que  $\phi$  é não trivial, uma vez que  $\gamma_2 > 0$  e através de um simples argumento de escala podemos deduzir que o Multiplicador de Lagrange  $C_2$  pode ser escolhido como  $C_2 = 1$ . Adicionalmente, argumentos de bootstrap garantem que  $\phi$  é uma função  $L$ -periódica suave em  $H_{per,even}^n([0, L])$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , satisfazendo a equação

$$-\phi'' + c\phi - \phi^{p+1} = 0. \quad (1.54)$$

Nessas condições, pela Proposição 1.2.4 obtemos que  $\ker(\mathcal{L})$  é simples. Além disso, no próximo resultado mostramos que o operador linearizado  $\mathcal{L}$  em torno da onda  $\phi$  obtida pelo Lema 1.3.4 possui apenas um autovalor negativo.

**Lema 1.3.5.** Seja  $\phi \in H_{per,even}^2([0, L])$  a solução obtida pelo Lema 1.3.4. Então,  $n(\mathcal{L}) = 1$ .

*Demonstração.* Como  $\phi \in H_{per,even}^2([0, L])$  é um minimizador periódico para o problema de minimização (1.51) com apenas uma restrição, obtemos que  $n(\mathcal{L}|_{L^2_{per,even}}) \leq 1$ . Por outro lado, utilizando a equação (1.54), para  $p \geq 1$  um inteiro temos que

$$\langle \mathcal{L}\phi, \phi \rangle = -\frac{p}{p+1} \int_0^L \phi^{p+2} dx < 0,$$

com  $\phi$  par e, conseqüentemente,  $n(\mathcal{L}|_{L^2_{per,even}}) \geq 1$ . Portanto,  $n(\mathcal{L}|_{L^2_{per,even}}) = 1$ .

Agora, sabendo que  $\phi' \in \ker(\mathcal{L})$  é uma função ímpar com dois zeros no intervalo semi-aberto  $[0, L)$ , pelo Teorema da Oscilação em [37] temos que zero é o primeiro autovalor de  $\mathcal{L}|_{L^2_{per,odd}}$ , logo  $n(\mathcal{L}|_{L^2_{per,odd}}) = 0$ . Dessa forma, concluímos que  $n(\mathcal{L}) = n(\mathcal{L}|_{L^2_{per,even}}) + n(\mathcal{L}|_{L^2_{per,odd}}) = 1$ .  $\square$

A solução de onda periódica obtida pelo problema de minimização (1.52) no caso  $p = 4$  é uma solução positiva do tipo dnoidal e pode ser determinada explicitamente (veja [14]) como

$$\phi(x) = \frac{a \operatorname{dn}\left(\frac{2K(\kappa)}{L}x, \kappa\right)}{\sqrt{1 - b \operatorname{sn}^2\left(\frac{2K(\kappa)}{L}x, \kappa\right)}}, \quad (1.55)$$

onde os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  dependem suavemente do módulo  $\kappa \in (0, 1)$  e são dados por

$$a = \frac{[4(2\kappa^2 - 1 + 2(1 - \kappa^2 + \kappa^4)^{1/2})K(\kappa)^2L^2]^{1/4}}{L}, \quad (1.56)$$

$$b = 1 - \kappa^2 - \sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1} \quad (1.57)$$

e

$$c = \frac{4K(\kappa)^2\sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1}}{L^2}. \quad (1.58)$$

Além disso, na Figura 1.5 as soluções periódicas do tipo dnoidal (1.55) da equação (1.54) sujeitas à certas condições iniciais estão representadas pelas órbitas em vermelho ao lado direito do plano  $(\phi, \phi')$ . As órbitas em vermelho ao lado esquerdo representam as soluções dnoidais com sinal negativo.

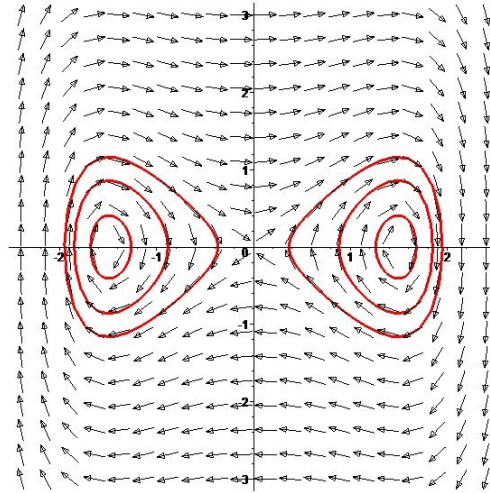


Figura 1.5: Plano de fase da equação (1.54) com  $c = 1$ .

Em vista das considerações acima, para  $\phi$  solução de (1.54) com  $c > 0$  e o único ponto correspondente  $(c_0, 0)$  no regime de parâmetros, temos que  $n(\mathcal{L}_{(c_0, 0)}) = 1$  e  $\ker(\mathcal{L}_{(c_0, 0)}) = [\phi']$ . Portanto, pelo Teorema 1.1.1 e Observação 1.1.4, obtemos que  $\theta \neq 0$  para todo  $(c, A) \in \mathcal{P}$ . Por consequência, a solução  $\phi$  de (1.23) satisfaz  $n(\mathcal{L}) = 1$  e  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  para todo  $(c, A)$  no regime de parâmetros e pelo Teorema 1.1.3, garantimos a existência de uma superfície suave  $(c, A) \in \mathcal{O} \mapsto$

$\phi_{(c,A)} \in H_{per,even}^n([0, L])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de ondas periódicas pares, todas com o mesmo período  $L > 0$ .

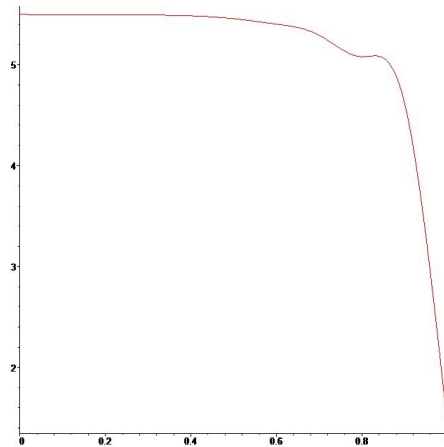
$L = 2\pi$		
$\kappa_0$	$\mathcal{J}$	$\det \mathcal{D}$
0.1	5.4972	-0.2692
0.3	5.4932	-0.2690
0.5	5.4568	-0.2669
0.7	5.2936	-0.2573
0.9	4.6183	-0.2148
0.9999	1.4287	-0.0269

$L = 20$		
$\kappa_0$	$\mathcal{J}$	$\det \mathcal{D}$
0.1	177.272	-2.7286
0.3	177.167	-2.7257
0.5	175.993	-2.7046
0.7	170.729	-2.6074
0.9	148.949	-2.1768
0.9999	46.0816	-0.2772

Tabela 1.5: Valores de  $\mathcal{J}$  e  $\det \mathcal{D}$  para  $L = 2\pi$ .Tabela 1.6: Valores de  $\mathcal{J}$  e  $\det \mathcal{D}$  para  $L = 20$ .

$L = 50$		
$\kappa_0$	$\mathcal{J}$	$\det \mathcal{D}$
0.1	2770.18	-17.0531
0.3	2768.24	-17.0361
0.5	2749.89	-16.9039
0.7	2667.64	-16.2963
0.9	2327.33	-13.6055
0.9999	720.16	-1.7242

$L = 100$		
$\kappa_0$	$\mathcal{J}$	$\det \mathcal{D}$
0.1	22159.9	-68.2148
0.3	22145.9	-68.1444
0.5	21999.1	-67.6155
0.7	21341.1	-65.1854
0.9	18618.7	-54.4218
0.9999	5761.48	-6.8758

Tabela 1.7: Valores de  $\mathcal{J}$  e  $\det \mathcal{D}$  para  $L = 50$ .Tabela 1.8: Valores de  $\mathcal{J}$  e  $\det \mathcal{D}$  para  $L = 100$ .Figura 1.6: Gráfico de  $\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$  para  $L = 2\pi$ .

Utilizando o programa matemático Maple 13 e o método de aproximação por splines, podemos plotar o comportamento de  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$  em termos do módulo  $\kappa_0 \in (0, 1)$  para o caso  $L = 2\pi$  (veja a Figura 1.6).

Consideremos  $L > 0$  fixado. De acordo com as Tabelas 1.5, 1.6, 1.7 e 1.8, obtemos  $\mathcal{J} > 0$  e

det  $\mathcal{D} < 0$  para todo  $\kappa \in (0, 1)$ . Dessa forma, para todo  $\kappa \in (0, 1)$  temos que

$$K_{Ham} = n(\mathcal{L}) - n(\mathcal{J}) - n(\mathcal{D}) = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Portanto, pelo Corolário 1.2.2, obtemos a estabilidade espectral da onda periódica  $\phi$  em uma vizinhança aberta de  $(c, 0)$  onde  $c > \frac{\pi^2}{L^2}$ . Mais especificamente, temos o seguinte resultado de estabilidade:

**Teorema 1.3.6.** Seja  $L > 0$  fixado. Para cada  $c > \frac{\pi^2}{L^2}$ , a onda  $\phi$  em (1.55) é espectralmente estável no espaço energia  $H_{per}^1([0, L])$  pelo fluxo periódico da equação (1.1) para  $\beta = 1$ .

**Observação 1.3.7.** Vale ressaltar que a estabilidade espectral não implica na estabilidade orbital conforme relatado em [27], uma vez que o problema de Cauchy associado à equação (1.1) não é globalmente bem colocado no espaço energia  $H_{per}^1([0, L])$ . De certa forma, estamos em conformidade com os argumentos contidos em [14], onde para valores específicos de  $\kappa$  em um intervalo aberto contido em  $(0, 1)$  (consequentemente de  $c$  por (1.58)), temos a instabilidade de  $\phi$  em (1.55) utilizando uma adaptação dos argumentos em [19].

**Observação 1.3.8.** Outro fato importante que notamos é que para  $L = 2\pi$ , det  $\mathcal{D}$  converge para 0 quando  $\kappa \rightarrow 1^-$  (em nossas tabelas, esse fato também ocorre para diferentes valores de  $L$  quando consideramos  $\kappa$  perto de 1). Assim, recuperamos a propriedade  $\frac{d}{dc} \int_{-\infty}^{\infty} Q^2 dx = 0$ , onde  $Q$  é o perfil secante hiperbólico para a equação crítica KdV com velocidade de onda  $c > 0$ .

**Observação 1.3.9.** As ondas do tipo do tipo cnoidal em (1.41) e dnoidal em (1.55) que são soluções da equação (1.1) são únicas para cada  $c$  (em seu respectivo intervalo de definição) e  $L > 0$  fixados. De fato, é sabido da teoria de EDO e uma análise através do plano de fase que a aplicação período

$$P(B) = 2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\phi^6}{15} + c\phi^2 + 2B}}$$

é estritamente monotônica, onde  $\eta_1$  e  $\eta_2$  denotam, respectivamente, os valores de mínimo e máximo da função  $\phi$  e  $B$  é uma constante de integração não nula oriunda da forma da quadratura de (1.55) dada por

$$-\frac{(\phi')^2}{2} + \frac{c\phi^2}{2} - \frac{\phi^6}{30} + B = 0. \quad (1.59)$$

Temos que  $P : (0, B_c) \rightarrow I_1$  para o caso da solução do tipo cnoidal e  $P : (\tilde{B}_c, 0) \rightarrow I_2$  para a solução do tipo dnoidal. Aqui,  $B_c$  e  $\tilde{B}_c$  são os respectivos valores maximais e minimais de  $B$  onde a equação (1.59) possui soluções periódicas e  $I_i$  são intervalos ilimitados contidos em  $(0, +\infty)$ . Como é sabido que  $P(B) \rightarrow \infty$  quando  $B \rightarrow 0$  em qualquer um dos casos, temos que  $P$  é uma aplicação bijetiva em



cada um de seus intervalos de definição e, portanto, para cada  $L > 0$  fixado existe um único  $B_0$  tal que  $P(B_0) = L$ . Considerando  $x = 0$  em (1.59), obtemos um único  $\phi(0) = a_{(c, B_0)} > 0$  para cada caso e cada  $c$  fixado. Como  $\phi'(0) = 0$ , temos pela teoria clássica de EDO que  $\phi$  do tipo cnoidal ou do tipo dnoidal é única. Desta forma, sendo as soluções do tipo cnoidal em (1.41) e dnoidal em (1.55) únicas, temos que cada uma delas resolve o respectivo problema de minimização no intervalo de  $c$  que cada uma está definida.

## 1.4 Equação Crítica KdV - Caso Defocusing

Nosso propósito agora é estudar a existência e estabilidade orbital de ondas periódicas ímpares para a equação defocusing crítica KdV, onde  $\beta = -1$  em (1.1). Nesse caso específico, consideraremos que a onda periódica  $\phi$  satisfaz (1.3) para  $f(s) = -\frac{s^5}{5}$ , ou seja,

$$-\phi'' + c\phi + \frac{1}{5}\phi^5 + A = 0. \quad (1.60)$$

Mais ainda, como estamos interessados em soluções ondas periódicas ímpares, obtemos de (1.60) que  $A = 0$  para todos os valores de  $c < 0$ .

A equação defocusing crítica KdV admite, formalmente, as seguintes quantidades conservadas

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( u'^2 + \frac{1}{15} u^6 \right) dx \quad (1.61)$$

e

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx. \quad (1.62)$$

As quantidades dadas em (1.61) e (1.62) nos permitem considerar o funcional de Lyapunov

$$G(u) = E(u) + cF(u) \quad (1.63)$$

e o operador linearizado em torno de  $\phi$  dado pela segunda derivada de Fréchet de  $G$  como

$$\mathcal{L} := G''(\phi) = -\partial_x^2 + c + \phi^4. \quad (1.64)$$

Consideremos  $L > 0$  fixado. Nossa estratégia será construir soluções que surgem como um minimizador periódico da energia  $E$  com momento  $F$  fixado, a fim de obtermos boas propriedades espectrais para o operador linearizado  $\mathcal{L}$ . De fato, soluções ondas periódicas ímpares obtidas pelo nosso problema de minimização nos fornece apenas um autovalor negativo associado ao operador o qual é simples.

Para  $\gamma > 0$ , definamos o seguinte conjunto

$$Y_\gamma = \left\{ u \in H_{per}^1([0, L]); \int_0^L u^2 dx = \gamma \right\}.$$

Procuraremos por um minimizador periódico para o problema de minimização restrito

$$m = \inf_{u \in Y_\gamma} E(u), \quad (1.65)$$

onde  $E$  é definido em (1.61). Observemos que  $E$  é um funcional suave em  $H_{per}^1([0, L])$  e como  $c < 0$  obtemos, utilizando a equação (1.60), que

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^L \phi'^2 + \frac{1}{15} \phi^6 dx = -\frac{c}{2} \int_0^L \phi^2 dx \geq 0$$

e, conseqüentemente,  $m \geq 0$ .

**Lema 1.4.1.** O problema de minimização (1.65) tem pelo menos uma solução não trivial, ou seja, existe  $\phi \in Y_\gamma$  satisfazendo

$$E(\phi) = \inf_{u \in Y_\gamma} E(u). \quad (1.66)$$

*Demonstração.* Como  $m \geq 0$  e  $E$  é um funcional suave, podemos considerar uma seqüência minimizante para (1.65), ou seja, uma seqüência em  $Y_\gamma$  satisfazendo

$$E(u_n) \rightarrow \inf_{u \in Y_\gamma} E(u) = m, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Agora, notemos que  $\{u_n\}$  é uma seqüência limitada em  $H_{per}^1([0, L])$ , pois

$$0 \leq \frac{1}{2} \|u_n'\|_{L_{per}^2}^2 + \frac{1}{2} \|u_n\|_{L_{per}^2}^2 \leq E(u_n) + \frac{\gamma}{2}. \quad (1.67)$$

Assim, a menos de subsequência, existe  $\psi \in H_{per}^1([0, L])$  tal que  $u_n \rightharpoonup \psi$  em  $H_{per}^1([0, L])$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Agora, como o espaço energia  $H_{per}^1([0, L])$  está compactamente imerso em  $L_{per}^2([0, L])$ , temos que

$$u_n \rightarrow \psi \quad \text{em } L_{per}^2([0, L]), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

donde,  $\int_0^L \psi^2 dx = \gamma$ .

Além disso, pela semicontinuidade inferior fraca de  $E$ , concluímos que

$$E(\psi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = m.$$

Portanto, obtemos que  $\phi$  é o minimizador periódico desejado.  $\square$

Pelo Lema 1.4.1 e pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange resulta que existe uma constante não nula  $C$  tal que

$$-\phi'' + \frac{1}{5}\phi^5 = C\phi. \quad (1.68)$$

Observemos que  $\phi$  é não trivial pois  $\gamma > 0$ . Multiplicando a equação (1.68) por  $\phi$  e integrando o resultado sobre  $[0, L]$ , podemos concluir que o multiplicador de Lagrange  $C$  satisfaz  $C := -c > 0$ . Dessa forma, pela equação (1.68) e utilizando argumentos de bootstrap, obtemos que  $\phi$  é uma função suave dependendo de  $x \in [0, L]$ . Agora, consideremos  $L > 0$  fixado como anteriormente. Como o problema de minimização (1.65) pode ser resolvido para qualquer que seja  $\gamma > 0$ , por [33, Capítulo I, Teorema 3.3] obtemos que  $\phi$  pode ser considerada uma função suave ímpar dependendo de  $c < c_0$ , para algum  $c_0 := c_0(L) \leq 0$ .

Em vista das considerações acima, garantimos a existência de uma vizinhança aberta conveniente do ponto  $c_1 < c_0$ , denotada por  $I$ , e uma curva suave  $c \in I \mapsto \phi_c \in H_{per}^n([0, L])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , satisfazendo a equação

$$-\phi_c'' + c\phi_c + \frac{1}{5}\phi_c^5 = 0. \quad (1.69)$$

Além disso, a Figura 1.7 apresenta o plano de fase relacionado a equação (1.69) e nos fornece que  $\phi_c$  é ímpar para todo  $c \in I$ . De fato, cada curva em azul, simétrica em relação a origem, representa uma solução periódica ímpar  $\phi_c$  de (1.69), sujeita a uma certa condição inicial  $(\phi(0), \phi'(0))$ .

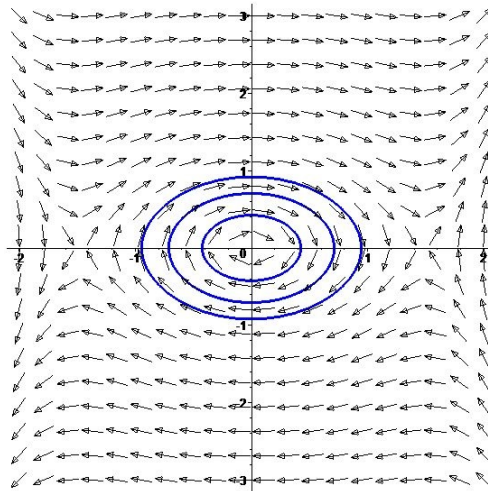


Figura 1.7: Plano de fase da equação (1.69) com  $c = -1$ .

**Observação 1.4.2.** soluções ondas periódicas explícitas para a equação (1.69) (e representadas pelas

órbitas em azul na Figura 1.7) dependem da função elíptica de Jacobi do tipo snoidal e são dadas por

$$\phi(x) = \frac{a \operatorname{sn}\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right)}{\sqrt{1 - b \operatorname{sn}^2\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right)}}, \quad (1.70)$$

onde  $a$  e  $b$  são funções dependendo apenas do módulo  $\kappa \in (0, 1)$ . A vantagem da nossa abordagem é que ela não requer esse conhecimento explícito da solução  $\phi$ . O fato da onda periódica ser obtida através do problema de minimização (1.65) será determinante para o nosso estudo de estabilidade.

No que segue, para simplificarmos a notação, denotemos  $\phi := \phi_c$ ,  $c \in I$ . Por (1.64) e (1.69), temos que

$$\mathcal{L}\phi = \frac{4}{5}\phi^5, \quad \mathcal{L}\left(\frac{d}{dc}\phi\right) = -\phi. \quad (1.71)$$

No próximo resultado mostramos que o núcleo do operador  $\mathcal{L}$  em (1.64) é simples e gerado por  $\phi'$ .

**Proposição 1.4.3.** Consideremos a curva suave de soluções periódicas ímpares  $c \in I \mapsto \phi \in H_{per}^n([0, L])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , para a equação (1.69), todas com período fixado  $L > 0$  e obtidas pelo Lema (1.4.1). Então,  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$ .

*Demonstração.* A demonstração segue as mesmas ideias da Proposição 1.2.4. Nesse caso, como  $\phi'$  é uma função par, argumentos em [50] nos permitem considerar  $\bar{y}$  uma função ímpar, onde  $\{\phi', \bar{y}\}$  é o conjunto fundamental de soluções associado a equação  $\mathcal{L}\bar{y} = 0$ .  $\square$

O próximo resultado nos traz o comportamento acerca do espectro negativo do operador linearizado  $\mathcal{L}$  e da positividade da matriz hessiana associada.

**Proposição 1.4.4.** Seja  $\phi$  a solução periódica obtida pelo Lema 1.4.1. O operador linearizador  $\mathcal{L} = -\partial_x^2 + c + \phi^4$  em torno de  $\phi$  possui um único autovalor negativo o qual é simples. Além disso, temos que  $\frac{d}{dc}\|\phi\|_{L_{per}^2}^2 > 0$  para todo  $c \in I$ .

*Demonstração.* Em vista de (1.65), como  $\phi$  minimiza localmente  $E$  e, conseqüentemente, o funcional  $G$  sujeito a  $Y_\gamma$ , temos que

$$\mathcal{L}|_{\{\phi\}^\perp} \geq 0. \quad (1.72)$$

Logo, obtemos que  $n\left(\mathcal{L}|_{\{\phi\}^\perp}\right) = 0$ .

Pela segunda igualdade em (1.71), podemos definir

$$P := \langle \mathcal{L}^{-1}\phi, \phi \rangle = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \|\phi\|_{L_{per}^2}^2.$$

Por [43, Teorema 5.3.2] (veja também [61, Teorema 4.1]), temos a seguinte identidade

$$n\left(\mathcal{L}|_{\{\phi\}^\perp}\right) = n(\mathcal{L}) - n(P) - z(P),$$

onde  $n(P)$  e  $z(P)$  denotam, respectivamente, o número de autovalores negativos e zeros de  $P$ . Assim, segue que

$$n(\mathcal{L}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 \geq 0 \\ 0, & \text{se } \frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 < 0, \end{cases} \quad (1.73)$$

No entanto, o caso  $\frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 < 0$  não pode ser considerado, pois  $\phi'$  não é uma autofunção com um único sinal no intervalo  $[0, L]$ .

Em seguida, mostraremos que  $\frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 > 0$ , para todo  $c \in I$ . Para esse fim, é suficiente provarmos que  $\frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 \neq 0$ , para todo  $c \in I$ . Com efeito, derivando a equação (1.69) com relação a  $c \in I$  e multiplicando o resultado por  $\phi$ , obtemos

$$-\phi \frac{d}{dc} \phi'' + c \frac{d}{dc} \phi + \phi + \phi^4 \frac{d}{dc} \phi = 0. \quad (1.74)$$

Integrando a expressão (1.74) sobre o intervalo  $[0, L]$  e utilizando integração por partes, segue que

$$-\frac{d}{dc} \int_0^L (\phi')^2 dx + \frac{c}{2} \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx + \frac{1}{6} \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^6 dx = 0. \quad (1.75)$$

Agora, multiplicando a equação (1.69) por  $\phi$ , integrando o resultado sobre o intervalo  $[0, L]$  e, novamente, utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_0^L \phi'^2 dx + c \int_0^L \phi^2 dx + \frac{1}{5} \int_0^L \phi^6 dx = 0. \quad (1.76)$$

Derivando (1.76) com relação a  $c$  e combinando o resultado com (1.75), resulta que

$$\frac{2}{15} \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^6 dx = - \int_0^L \phi^2 dx. \quad (1.77)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (1.69) por  $\phi'$  e integrando o resultado sobre  $[0, x]$ ,  $x \in [0, L]$  deduzimos a forma de quadratura

$$-\frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{c}{2} \phi^2 + \frac{1}{30} \phi^6 + B = 0, \quad (1.78)$$

onde  $B$  é uma constante de integração não nula. Integrando (1.78) sobre  $[0, L]$  e combinando o resultado final com (1.76), obtemos

$$c \int_0^L \phi^2 dx + \frac{2}{15} \int_0^L \phi^6 dx + BL = 0. \quad (1.79)$$

Derivando (1.79) com relação a  $c$  e usando (1.77), resulta que

$$c \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx = -L \frac{dB}{dc}. \quad (1.80)$$

Afirmamos que  $\frac{dB}{dc} \neq 0$  para todo  $c \in I$  e o resultado estará provado. De fato, deduziremos a seguir, uma fórmula mais conveniente para  $\frac{dB}{dc}$ . Utilizando a expressão (1.78) e o fato de  $\phi$  ser ímpar, temos que  $B = \frac{1}{2}\phi'^2(0)$ . Logo,

$$\frac{dB}{dc} = \phi'(0)\eta'(0), \quad (1.81)$$

onde  $\eta := \frac{d}{dc}\phi$  e  $\phi'(0) \neq 0$ .

A fim de estabelecermos uma expressão para  $\eta'(0)$ , seja  $\bar{y}$  uma solução não-periódica da equação de Hill

$$\mathcal{L}\bar{y} = -\bar{y}'' + c\bar{y} + \phi^4\bar{y} = 0. \quad (1.82)$$

Multiplicando a equação (1.82) por  $\eta$ , integrando o resultado sobre  $[0, L]$  e realizando uma integração por partes, resulta que

$$-\eta(L)\bar{y}'(L) + \eta(0)\bar{y}'(0) + \int_0^L [\eta'\bar{y}' + c\eta\bar{y} + \phi^4\eta\bar{y}] dx = 0.$$

Realizando, novamente, uma integração por partes e tendo em vista que  $\eta$  é uma função periódica ímpar, obtemos

$$\eta'(L)\bar{y}(L) - \eta'(0)\bar{y}(0) + \int_0^L [-\eta'' + c\eta + \phi^4\eta] \bar{y} dx = 0.$$

Dessa forma, o fato de  $\mathcal{L}\eta = -\phi$ ,  $\bar{y}$  ser uma função não-periódica ímpar e  $\eta'(0) = \eta'(L)$  implica que

$$\eta'(0)\bar{y}(L) = \int_0^L \phi\bar{y} dx. \quad (1.83)$$

Pela igualdade (1.11), obtemos de (1.83) que

$$\theta\eta'(0)\phi'(0) = \int_0^L \phi\bar{y} dx. \quad (1.84)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (1.82) por  $\phi$ , integrando o resultado sobre  $[0, L]$  e

utilizando a primeira igualdade em (1.71), concluímos, procedendo similarmente como acima, que

$$\theta\phi'(0)^2 = -\frac{4}{5} \int_0^L \phi^5 \bar{y} dx. \quad (1.85)$$

Suponhamos que  $\eta'(0) = 0$  em um certo ponto  $\tilde{c} \in I$ . Como  $\mathcal{W}(\phi', \bar{y}) = 1$  (veja a Proposição 1.4.3), temos que

$$L = -2\tilde{c} \int_0^L \phi \bar{y} dx - \frac{2}{5} \int_0^L \phi^5 \bar{y} dx. \quad (1.86)$$

Combinando os resultados em (1.84), (1.85) e (1.86), obtemos

$$L = \frac{\theta}{2} \phi'(0)^2. \quad (1.87)$$

A identidade (1.87) nos garante que  $\theta > 0$  e pelo Teorema 1.1.1 concluímos que o operador  $\mathcal{L}$  tem pelo menos dois autovalores negativos, contradizendo (1.73). Portanto,  $\eta'(0) \neq 0$  para todo  $c \in I$  e de (1.81) obtemos que  $\frac{d}{dc} B \neq 0$ . Conseqüentemente,  $\frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 > 0$  e de (1.73) resulta que  $n(\mathcal{L}) = 1$ , como queríamos.  $\square$

Finalmente, podemos provar o nosso resultado de estabilidade orbital.

**Teorema 1.4.5.** A solução periódica  $\phi$  obtida pelo Lema 1.4.1 é orbitalmente estável no espaço energia  $H^1_{per}([0, L])$  pelo fluxo periódico da equação defocusing cKdV em (1.1) para  $\beta = -1$ , no sentido da Definição 1.

*Demonstração.* Pela Proposição 1.4.3 obtemos  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  e pela Proposição 1.4.4 estabelecemos que  $\frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 > 0$  e  $n(\mathcal{L}) = 1$ . Portanto, aplicando diretamente o Teorema 4.2 contido em [4], obtemos a estabilidade orbital da onda periódica  $\phi$ .  $\square$

**Observação 1.4.6.** Notemos que de (1.21), obtemos

$$\det \tilde{\mathcal{D}} = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{L}^{-1} 1, 1 \rangle \frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2.$$

Como  $\frac{d}{dc} \|\phi\|_{L^2_{per}}^2 > 0$ , temos necessariamente  $\langle \mathcal{L}^{-1} 1, 1 \rangle > 0$ . De fato, suponhamos que  $\langle \mathcal{L}^{-1} 1, 1 \rangle \leq 0$ . Se  $\langle \mathcal{L}^{-1} 1, 1 \rangle < 0$ , então  $n(\tilde{\mathcal{D}}) = 2$ , uma vez que  $P = \langle \mathcal{L}^{-1} \phi, \phi \rangle < 0$ . Além disso,  $z(\tilde{\mathcal{D}}) = 0$  e como  $n(\mathcal{L}) = 1$ , pela fórmula do índice obtemos

$$n\left(\mathcal{L}|_{\{1, \phi\}^\perp}\right) = n(\mathcal{L}) - n(\tilde{\mathcal{D}}) - z(\tilde{\mathcal{D}}) = 1 - 2 - 0 = -1.$$

Vamos supor agora que  $\langle \mathcal{L}^{-1} 1, 1 \rangle = 0$ . Como  $\langle \mathcal{L}^{-1} \phi, \phi \rangle < 0$  e  $\langle \mathcal{L}^{-1} \phi, 1 \rangle = 0$ , temos que  $n(\tilde{\mathcal{D}}) = z(\tilde{\mathcal{D}}) =$

1 donde  $n\left(\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}\right) = 1 - 1 - 1 = -1$ . Em qualquer caso, obtemos uma contradição e portanto,  $\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle > 0$ .

Desta forma, obtemos  $n(\tilde{\mathcal{D}}) = 1$  e  $z(\tilde{\mathcal{D}}) = 0$ . Logo,  $n\left(\mathcal{L}|_{\{1,\phi\}^\perp}\right) = 1 - 1 - 0 = 0$  e a onda  $\phi$  dada por (1.70) e obtida pelo Lema 1.4.1 é espectralmente estável.

## 1.5 Equação de Gardner

Agora, apresentaremos um estudo da estabilidade espectral para a equação de Gardner na forma geral

$$u_t + \alpha_1(u^2)_x + \alpha_2(u^3)_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.88)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes não negativas satisfazendo  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ .

Quando  $\alpha_2 = 0$ , a equação (1.88) torna-se a bem conhecida equação KdV e quando  $\alpha_1 = 0$  a mesma equação nos fornece a equação modificada KdV. Resultados de estabilidade orbital/espectral de ondas periódicas em ambos os casos foram discutidos em [12], [14], [27] e em suas referências.

Seja  $L > 0$  fixado e consideremos  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . soluções ondas periódicas  $\phi$  para essa equação podem ser determinadas na forma explícita como

$$\phi(x) = -\frac{1}{3} + b \operatorname{cn}\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right), \quad (1.89)$$

onde  $b$ ,  $c$  e  $A$  são parâmetros dependendo suavemente de  $\kappa \in (0, 1)$  dados por

$$b = \frac{4\sqrt{2}\kappa K(\kappa)}{L}, \quad (1.90)$$

$$c = -\frac{1}{3} - \frac{16K(\kappa)^2(1-2\kappa^2)}{L^2}, \quad (1.91)$$

e

$$A = \frac{1}{27} + \frac{144K(\kappa)^2(1-2\kappa^2)}{27L^2}. \quad (1.92)$$

No que segue, definamos  $\varphi(x) = \frac{1}{3} + \phi(x) = b \operatorname{cn}\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right)$ . Notemos que  $\varphi$  soluciona a equação

$$-\varphi'' + \left(c + \frac{1}{3}\right)\varphi - \varphi^3 = 0, \quad (1.93)$$

ou seja,  $\varphi$  é uma onda periódica com perfil cnoidal para a equação modificada KdV, com  $f(s) = s^3$  e velocidade de onda correspondente  $\omega := c + \frac{1}{3}$  e  $A = 0$  em (1.4). Observemos que  $\varphi$  é única usando a mesma argumentação da Observação 1.3.9.

A solução de onda periódica  $\varphi$  da equação modificada KdV possui a propriedade de média zero



e é obtida a partir do problema de minimização restrito dado em (1.32), porém agora considerando a velocidade  $\omega$  definida acima. Mais especificamente,  $\varphi$  é um minimizador periódico de (1.32), para todo  $c > -\left(\frac{4\pi^2}{L^2} + \frac{1}{3}\right)$ .

Seja  $\mathcal{L}_\varphi$  o operador linearizado em torno da onda  $\varphi$  para a equação (1.93) com  $f(s) = s^3$ . De maneira relevante, temos que

$$\mathcal{L}_\varphi = -\partial_x^2 + c + \frac{1}{3} - 3\varphi^2 = -\partial_x^2 + c - 2\phi - 3\phi^2 = \mathcal{L},$$

onde  $\mathcal{L}$  é o operador linearizado em torno da onda  $\phi$  para a equação de Gardner (1.88). Como  $\varphi \in H_{per,odd}^1([0, L])$  minimiza o problema de minimização (1.32) e  $\langle \mathcal{L}_\varphi \varphi, \varphi \rangle = -2\|\varphi\|_{L_{per,odd}^4}^4 < 0$ , utilizando o Lema (1.3.2) obtemos que  $n(\mathcal{L}) = n(\mathcal{L}_\varphi) = 2$ . Além disso, pela Proposição 1.2.4, obtemos que  $\ker(\mathcal{L}) = \ker(\mathcal{L}_\varphi) = [\phi']$ .

Por outro lado, como  $\mathcal{L}_\varphi = \mathcal{L}$  observamos que  $\langle \mathcal{L}_\varphi^{-1}1, 1 \rangle = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$ . Adicionalmente, obtemos de modo similar ao que foi determinado em [12] e [27] que  $\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle < 0$  para  $\kappa \in (0, \kappa_0)$  e  $\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle > 0$  para  $\kappa \in (\kappa_0, 1)$ , onde  $\kappa_0 \approx 0.909$ .

Agora, resta calcularmos o determinante da matriz  $\mathcal{D}$  em (1.19) nesse caso específico. Primeiramente, notemos que

$$\int_0^L \phi^2 dx = \frac{L}{9} - \frac{2b}{3} \int_0^L \operatorname{cn}\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right) dx + b^2 \int_0^L \operatorname{cn}^2\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right) dx. \quad (1.94)$$

O termo do meio do lado direito de (1.94) possui média zero, pois

$$\int_0^L \operatorname{cn}\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right) dx = \frac{L}{2K(\kappa)} \int_0^{2K} \operatorname{cn}(u, \kappa) du = 0. \quad (1.95)$$

Ademais, o último termo em (1.94) contendo a potência quadrática pode ser simplificado como

$$\int_0^L \operatorname{cn}^2\left(\frac{4K(\kappa)}{L}x, \kappa\right) dx = \frac{L}{K(\kappa)} \int_0^K \operatorname{cn}^2(u, \kappa) du = \frac{L[E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)]}{\kappa^2 K(\kappa)}. \quad (1.96)$$

Combinando os argumentos contidos em (1.90), (1.94), (1.95) e (1.96), concluímos que

$$\int_0^L \phi^2 dx = \frac{L}{9} + \frac{32K(\kappa)[E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)]}{L}. \quad (1.97)$$

Com interesse em calcularmos  $\frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx$ , observamos primeiro que para todo  $\kappa \in (0, 1)$  vale que

$$\frac{dc}{d\kappa} = -\frac{32K(\kappa)[(1-2\kappa^2)E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa)]}{\kappa(1-\kappa^2)L^2} > 0. \quad (1.98)$$

Dessa maneira, podemos obter uma expressão conveniente para  $\frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx$  utilizando a regra da cadeia como

$$\frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx = \frac{\frac{d}{d\kappa} \int_0^L \phi^2 dx}{\frac{dc}{d\kappa}}. \quad (1.99)$$

Por (1.97), obtemos para todo  $\kappa \in (0, 1)$  que

$$\frac{d}{d\kappa} \int_0^L \phi^2 dx = -\frac{32[(1-\kappa^2)K(\kappa)(2E(\kappa) - K(\kappa)) - E(\kappa)^2]}{\kappa(1-\kappa^2)L} > 0. \quad (1.100)$$

Finalmente, por (1.100) e (1.98) deduzimos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx = \frac{\frac{d}{d\kappa} \int_0^L \phi^2 dx}{2 \frac{dc}{d\kappa}} > 0. \quad (1.101)$$

Agora estamos em posição de calcularmos  $\det \mathcal{D}$ . Já determinamos que  $\langle \mathcal{L}_\varphi^{-1} 1, 1 \rangle = \langle \mathcal{L}^{-1} 1, 1 \rangle$ . De modo análogo, como  $\varphi$  tem média zero, segue que  $\langle \mathcal{L}_\varphi^{-1} \varphi, 1 \rangle = \langle \mathcal{L}^{-1} \phi, 1 \rangle = -\frac{d}{dc} \int_0^L \phi dx = 0$ . Adicionalmente, um cálculo simples nos fornece  $\langle \mathcal{L}_\varphi^{-1} \varphi, \varphi \rangle = \langle \mathcal{L}^{-1} \phi, \phi \rangle = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx$ . Logo, para  $\kappa \neq \kappa_0 \approx 0.909$  obtemos de (1.101) que  $\det \mathcal{D}$  é dado por

$$\det \mathcal{D} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \int_0^L \phi^2 dx < 0.$$

Aplicando o Corolário 1.2.2 deduzimos a estabilidade espectral da onda periódica  $\phi$  quando  $\kappa \in (0, \kappa_0)$  e a instabilidade espectral quando  $\kappa \in (\kappa_0, 1)$ .

Portanto, temos o seguinte resultado de estabilidade:

**Teorema 1.5.1.** Seja  $L > 0$  fixado e definamos  $\mathcal{J} := \langle \mathcal{L}^{-1} 1, 1 \rangle$ . Para cada  $c > -\left(\frac{4\pi^2}{L^2} + \frac{1}{3}\right)$ , a onda  $\phi$  dada em (1.89) é espectralmente estável se  $\mathcal{J} < 0$  e espectralmente instável se  $\mathcal{J} > 0$  em  $H_{per}^1([0, L])$  pelo fluxo periódico da equação (1.88) com  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

# Estabilidade de Ondas periódicas para a Equação Quíntica BBM

Neste capítulo dedicaremos o nosso estudo à estabilidade espectral de soluções ondas viajantes periódicas para a equação focusing quíntica BBM

$$u_t + u_x + u^4 u_x - u_{xxt} = 0, \quad (2.1)$$

a qual surge como uma versão regularizada da equação focusing crítica KdV ( $\beta = 1$  na equação (1.1)).

Buscaremos por ondas periódicas que resolvem a equação

$$-c\phi'' + (c-1)\phi - \frac{1}{5}\phi^5 + A = 0. \quad (2.2)$$

e assumiremos a constante de integração  $A$  igual a zero para todo  $c$ , a fim de obtermos ondas periódicas simétricas com propriedade de média zero.

A equação (2.1) admite, formalmente, as seguintes quantidades conservadas que representam a energia

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( u'^2 - \frac{1}{15} u^6 \right) dx, \quad (2.3)$$

o momento

$$P(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u'^2 + u^2 dx \quad (2.4)$$

e a massa

$$M(u) = \int_0^L u dx. \quad (2.5)$$

Tais quantidades conservadas nos permitem definir e estudar o funcional conservado

$$G(u) = E(u) + (c - 1)P(u), \quad (2.6)$$

o qual satisfaz  $G'(\phi) = 0$ , ou seja,  $\phi$  é um ponto crítico do funcional  $G$ . Além disso, podemos definir a partir de (2.6), o operador linearizado em torno de  $\phi$  dado por

$$\mathcal{L} := G''(\phi) = -c\partial_x^2 + c - 1 - \phi^4. \quad (2.7)$$

Notemos que  $\mathcal{L}$  é um operador autoadjunto definido em  $L^2_{per}([0, L])$  com domínio denso  $H^2_{per}([0, L])$ .

**Observação 2.0.1.** Vale mencionar que o problema de Cauchy associado a equação quártica BBM possui boa colocação no espaço energia  $H^1_{per}([0, L])$ . Esse fato pode ser verificado utilizando argumentos similares aos utilizados em [1], onde um resultado de boa colocação para a equação gBBM, com  $\mathcal{M} = -\partial_x^2$  em (5), considerada em domínios ilimitados foi determinado.

Sejam  $L > 0$  e  $\mu > 0$  fixados. No próximo lema, para cada  $c > \frac{L^2}{4\pi^2 + L^2}$ , mostraremos que a onda periódica  $\phi$  para a equação quártica BBM é determinada a partir do seguinte problema de minimização:

$$q_c = \inf_{u \in Y_\mu} \mathcal{B}_c(u), \quad \mathcal{B}_c(u) = \frac{1}{2} \int_0^L cu'^2 + (c - 1)u^2 dx, \quad (2.8)$$

onde  $Y_\mu$  é o conjunto vínculo dado por

$$Y_\mu = \left\{ u \in H^1_{per, odd}([0, L]) : \int_0^L u^6 dx = \mu \right\}.$$

**Lema 2.0.2.** Para cada  $L > 0$  fixado, seja  $c > \frac{L^2}{4\pi^2 + L^2}$ . Então, o problema de minimização (2.8) tem pelo menos uma solução não trivial, isto é, existe  $\phi \in Y_\mu$  satisfazendo

$$\mathcal{B}_c(\phi) = \inf_{u \in Y_\mu} \mathcal{B}_c(u). \quad (2.9)$$

*Demonstração.* Notemos que  $\mathcal{B}_c$  é um funcional suave, limitado e equivalente a norma em  $H^1_{per, odd}([0, L])$ . De fato, pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger, como em (1.34), temos que

$$\mathcal{B}_c(u) \geq \left( \frac{4\pi^2 c}{2L^2} + \frac{(c - 1)}{2} \right) \|u\|_{L^2_{per, odd}}^2$$

e pela desigualdade de Garding, para cada  $c > \frac{L^2}{4\pi^2+L^2}$  existe uma constante positiva  $C_0$  tal que

$$\mathcal{B}_c(u) \geq C_0 \|u\|_{H_{per,odd}^1}^2. \quad (2.10)$$

Por outro lado, novamente utilizando a desigualdade de Poincaré-Wirtinger, segue que

$$\mathcal{B}_c(u) \leq \left( \frac{c}{2} + (c-1) \frac{L^2}{8\pi^2} \right) \|u'\|_{L_{per,odd}^2}^2 \leq C_1 \|u\|_{H_{per,odd}^1}^2, \quad (2.11)$$

para cada  $c > \frac{L^2}{4\pi^2+L^2}$ , onde  $C_1$  é uma constante positiva.

Consequentemente,  $q_c \geq 0$  e podemos considerar  $\{u_n\}$  como uma sequência minimizante para o problema de minimização, ou seja, uma sequência em  $Y_\mu$  satisfazendo

$$\mathcal{B}_c(u_n) \rightarrow \inf_{u \in Y_\mu} \mathcal{B}_c(u), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, pelas desigualdades (2.10) e (2.11), obtemos que  $\{u_n\}$  é uma sequência limitada em  $H_{per,odd}^1([0, L])$ . Logo, a menos de subsequência, existe  $\phi \in H_{per,odd}^1([0, L])$  tal que  $u_n \rightharpoonup \phi$  em  $H_{per,odd}^1([0, L])$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Adicionalmente, como o espaço energia  $H_{per,odd}^1([0, L])$  está compactamente imerso em  $L_{per,odd}^6([0, L])$ , existe uma constante positiva  $C$  tal que para todo  $\phi \in H_{per,odd}^1$  temos que

$$\|\phi\|_{L_{per,odd}^6} \leq C \|\phi\|_{H_{per,odd}^1} \quad (2.12)$$

e  $u_n \rightarrow \phi$  em  $L_{per,odd}^6([0, L])$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

A fim de simplificarmos a notação, denotemos por  $\|\cdot\|$  a norma em  $L_{per,odd}^6([0, L])$ . Usando a estimativa

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L (u_n^6 - \phi^6) dx \right| &\leq \int_0^L |u_n^6 - \phi^6| dx \\ &\leq (\|u_n\|^5 + \|u_n\|^4 \|\phi\| + \|u_n\|^3 \|\phi\|^2 + \\ &\quad + \|u_n\|^2 \|\phi\|^3 + \|u_n\| \|\phi\|^4 + \|\phi\|^6) \|u_n - \phi\|, \end{aligned}$$

obtemos que  $\phi$  satisfaz a restrição, isto é,  $\int_0^L \phi^6 dx = \mu$ . Além disso, em vista de (2.12), temos que  $q_c > 0$ .

Pela semicontinuidade inferior fraca do funcional  $\mathcal{B}_c$  concluímos que

$$\mathcal{B}_c(\phi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_c(u_n) = q_c.$$

Como  $\phi \in Y_\mu$ , também temos que  $\mathcal{B}_c \geq q_c$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{B}_c = q_c$ . Portanto,  $\phi$  é o minimizador periódico do problema de minimização (2.8).  $\square$

Pelo Lema (2.0.2) e pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange existe uma constante não nula  $\tilde{C}$  tal que

$$-c\phi'' + (c-1)\phi = \tilde{C}\phi^5. \quad (2.13)$$

Notemos que  $\phi$  é não trivial, uma vez que  $\phi \in Y_\mu$ . Além disso, um simples argumento de escala nos permite escolher  $\tilde{C} = \frac{1}{5}$ . Dessa forma,  $\phi$  satisfaz a equação

$$-c\phi'' + (c-1)\phi - \frac{1}{5}\phi^5 = 0. \quad (2.14)$$

Mais ainda, utilizando argumentos de bootstrap (veja [26, Proposição 3.1]) obtemos que  $\phi$  é uma função suave satisfazendo a equação (2.14).

Uma família explícita de soluções ondas viajantes de (2.1) com a propriedade de média zero, obtida pelo Lema 2.0.2, é dada unicamente (ver Observação 1.3.9) por

$$\phi(x) = \frac{a \operatorname{cn}\left(\frac{4K}{L}x, \kappa\right)}{\sqrt{1 - b \operatorname{sn}^2\left(\frac{4K}{L}x, \kappa\right)}}, \quad (2.15)$$

onde o período  $L > 0$  é fixado. Aqui, os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  dependem suavemente do módulo  $\kappa \in (0, 1)$  e são dados por

$$a = \frac{5^{\frac{1}{4}} 2\sqrt{K}(2 - \kappa^2 + 2\sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1})^{\frac{1}{4}}}{(-16K^2\sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1} + L^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad (2.16)$$

$$b = \kappa^2 - 1 - \sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1} \quad (2.17)$$

e

$$c = \frac{L^2}{-16K^2\sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1} + L^2} \quad (2.18)$$

para todo  $\kappa \in (0, 1)$ .

Para obtermos soluções reais  $\phi$ , precisamos assumir que a função  $q(k, L) := -16K^2(k^4 - k^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + L^2$  presente no denominador de  $a$  e  $c$  em (2.16) e (2.17) é uma função positiva em termos do par  $(\kappa, L)$ . Para  $L > 0$  fixado, como  $\kappa \in (0, 1) \mapsto 16K^2(k^4 - k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$  é uma função estritamente crescente em termos de  $\kappa \in (0, 1)$ , garantimos a existência de um único  $\kappa_L \in (0, 1)$ , tal que

$$L^2 > 16K^2(\kappa^4 - \kappa^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.19)$$

para todo  $\kappa \in (0, \kappa_L)$ .

Nas tabelas abaixo, calculamos alguns valores de  $\theta$  e  $\mathcal{J}$  em termos de  $\kappa_0 \in (0, \kappa_L)$  para períodos fixados. Para a quantidade  $\theta$ , inicialmente determinamos a solução associada ao problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} -c\bar{y}'' + (c - 1 - \phi^4)\bar{y} = 0 \\ \bar{y}(0) = -\frac{1}{\phi''(0)} \\ \bar{y}'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Logo, como  $\{\phi', \bar{y}\}$  é um conjunto fundamental de soluções da equação  $\mathcal{L}\bar{y} = -c\bar{y}'' + (c - 1)\bar{y} - \bar{y}\phi^4 = 0$ , podemos utilizar a relação (1.14) e obtermos  $\theta$  para cada  $\kappa_0 \in (0, \kappa_L)$ .

Em seguida, utilizando a solução  $\bar{y}$  obtida em (2.20) e o problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} -ch'' + (c - 1 - \phi^4)h = 1 \\ h(0) = \frac{1}{c\bar{y}'(L)} \int_0^L \bar{y}(x)dx \\ h'(0) = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

obtemos valores de  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$  em termos de  $\kappa_0 \in (0, \kappa_L)$ . A condição inicial  $h(0)$  é obtida multiplicando a equação em (2.21) por  $\bar{y}$  e realizando duas integrações por partes.

**Observação 2.0.3.** Observemos que a solução (2.15) obtida pelo Lema 2.0.2 é uma função ímpar e como a equação (2.2) é invariante por translações, podemos considerar a solução (2.15) como sendo par. Consequentemente, obtemos que  $\phi'$  é uma função ímpar, logo faz sentido obtermos a constante  $\theta$  pela relação (1.14). Notemos ainda que para obtermos numericamente valores de  $\mathcal{J}$  procedemos de modo similar como no caso da equação gKdV, onde consideramos o segundo problema de valor inicial dado em (1.28).

$L = 4\pi$		
$\kappa_0$	$\theta$	$\mathcal{J}$
0.0001	32.4462	6.2831
0.1	33.1635	6.2656
0.3	38.4699	6.1339
0.5	47.4396	5.9109
0.7	60.6126	5.5889
0.9	107.2917	4.1208
0.9999	$\theta \notin \mathbb{R}$	$\mathcal{J} \notin \mathbb{R}$

Tabela 2.1: Valores de  $\theta$  e  $\mathcal{J}$  para  $L = 4\pi$

$L = 12\pi$		
$\kappa_0$	$\theta$	$\mathcal{J}$
0.0001	2992.27	219.912
0.1	2997.96	219.861
0.3	3040.98	219.669
0.5	3119.07	220.584
0.7	3252.49	224.979
0.9	3817.49	219.297
0.9999	170176.95	49.4981

Tabela 2.2: Valores de  $\theta$  e  $\mathcal{J}$  para  $L = 12\pi$ .

Na Tabela 2.1, observemos que para  $\kappa_0 = 0.9999$  os valores de  $\theta$  e  $\mathcal{J}$  são números complexos, uma vez que a desigualdade (2.19) não é satisfeita para esse valor do módulo elíptico. Além disso,

utilizando o programa Maple 13, pelo método de aproximação de curvas por splines, na Figura 2.1 plotamos o gráfico de  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$  em termos de  $\kappa_0 \in (0, \kappa_L)$  para o caso  $L = 4\pi$ .

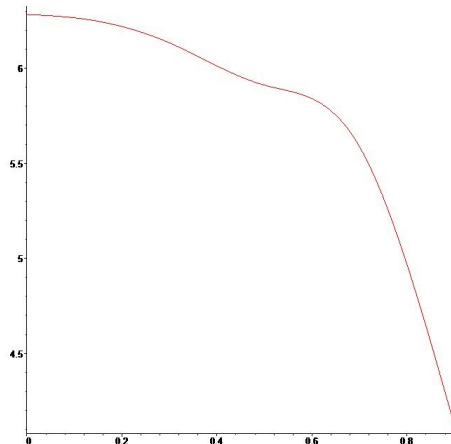


Figura 2.1: Gráfico de  $\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle$  para  $L = 4\pi$ .

Sabendo que  $\phi'$  é uma autofunção associada ao autovalor zero que possui exatamente dois zeros no intervalo semi-aberto  $[0, L)$ , pelo Teorema 1.1.1 e Tabelas 2.1 e 2.2, temos que o operador linearizado  $\mathcal{L}$  satisfaz  $in(\mathcal{L}) = (2, 1)$  para todo  $\kappa \in (0, \kappa_L)$ . Em outros termos, temos que o núcleo do operador  $\mathcal{L}$  é simples e gerado por  $\phi'$  e  $n(\mathcal{L}) = 2$ .

**Observação 2.0.4.** Notemos que  $n(\mathcal{L}) = 2$  pode ser obtido através de um resultado análogo ao Lema (1.3.2), em vista de  $\phi \in H_{per, odd}^1([0, L])$  ser uma solução obtida pelo Lema 2.0.2. Além disso, não é possível seguirmos argumentos similares aos da Proposição 1.2.4 (veja também Proposição 1.4.3) para concluirmos o núcleo do operador simples. Por esse motivo, obtemos numericamente alguns valores de  $\theta$  e aplicamos o Teorema 1.1.1. Como consequência do Teorema 1.1.1, também obtemos a quantidade de autovalores negativos do operador  $\mathcal{L}$ .

Notemos agora que, utilizando a equação (2.14), obtemos a seguinte igualdade

$$\mathcal{L} \left( -\frac{d}{dc} \phi \right) = \phi - \phi''. \quad (2.22)$$

Como  $\mathcal{L}$  é o operador Hessiano associado ao funcional de Lyapunov  $G$  dado em (2.6), a estabilidade espectral da onda periódica  $\phi$  ocorrerá se  $n \left( \mathcal{L}|_{\{1, \phi - \phi''\}^\perp} \right) = 0$ , ou seja, se

$$\mathcal{L}|_{\{1, \phi - \phi''\}^\perp} \geq 0. \quad (2.23)$$

Por outro lado, a onda periódica  $\phi$  será espectralmente instável se  $n \left( \mathcal{L}|_{\{1, \phi - \phi''\}^\perp} \right) = 1$ .



Por [43, Teorema 5.3.2], consideremos a seguinte matriz simétrica  $2 \times 2$  relacionada às restrições em (2.23)

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \langle \mathcal{L}^{-1}(\phi - \phi''), \phi - \phi'' \rangle & \langle \mathcal{L}^{-1}(\phi - \phi''), 1 \rangle \\ \langle \mathcal{L}^{-1}(\phi - \phi''), 1 \rangle & \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Em vista de (2.22), podemos calcular as seguintes entradas da matriz  $\mathcal{N}$ :

$$\langle \mathcal{L}^{-1}(\phi - \phi''), \phi - \phi'' \rangle = \left\langle -\frac{d}{dc}\phi, \phi - \phi'' \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \int_0^L (\phi')^2 + \phi^2 dx$$

e

$$\langle \mathcal{L}^{-1}(\phi - \phi''), 1 \rangle = \left\langle -\frac{d}{dc}\phi, 1 \right\rangle = -\frac{d}{dc} \int_0^L \phi dx = 0.$$

Consequentemente, o determinante de  $\mathcal{N}$  é dado por

$$\det \mathcal{N} = -\langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle \frac{d}{dc} P(c), \quad (2.25)$$

onde  $P(c) = \frac{1}{2} \|\phi\|_{H_{per}^1}^2 = \frac{1}{2} \int_0^L (\phi')^2 + \phi^2 dx$  representa o momento dado em (2.4) avaliado na onda periódica  $\phi$ .

Denotemos por  $n_0$  e  $z_0$  o número de autovalores negativos e zeros da matriz  $\mathcal{N}$ , respectivamente. Por [43, Teorema 5.3.2], temos a seguinte identidade

$$n \left( \mathcal{L}|_{\{1, \phi - \phi''\}^\perp} \right) = n(\mathcal{L}) - n_0 - z_0. \quad (2.26)$$

No que segue, mostraremos que  $\frac{d}{dc} P(c) > 0$  em (2.25). De fato, como a solução (2.15) difere apenas em relação aos parâmetros  $a$  e  $c$  da solução (1.41) no caso da equação focusing cKdV, podemos calcular  $\int_0^L \phi^2 dx$  de modo similar. De fato, utilizando (1.46), (1.47) e (2.16), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi^2 dx &= \frac{a^2 L \pi (1-b) [1 - \Lambda_0(\beta, \kappa)]}{K \sqrt{2b(1-b)(b - \kappa^2)}} \\ &= \frac{2\pi L (1-b) \sqrt{5} \sqrt{1-b + \sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1}} [1 - \Lambda_0(\beta, \kappa)]}{\sqrt{b(1-b)(b - \kappa^2)} \sqrt{-16K^2 \sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1} + L^2}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$:= q_L(\kappa). \quad (2.28)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (2.2) por  $\phi$  e integrando o resultado no intervalo  $[0, L]$ , obtemos

$$-c \int_0^L (\phi')^2 dx - (c-1) \int_0^L \phi^2 dx + \frac{1}{5} \int_0^L \phi^6 dx = 0. \quad (2.29)$$

Além disso, multiplicando (2.2) por  $\phi'$  e integrando o resultado sobre  $[0, L]$  obtemos a forma de quadratura

$$c \frac{(\phi')^2}{2} - (c-1) \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^6}{30} + B = 0, \quad (2.30)$$

onde  $B$  é uma constante de integração não nula

Integrando (2.30) em  $[0, L]$ , segue que

$$c \int_0^L (\phi')^2 dx - (c-1) \int_0^L \phi^2 dx + \frac{1}{15} \int_0^L \phi^6 dx + 2LB = 0. \quad (2.31)$$

Combinando as relações (2.29) e (2.31) resulta que

$$\int_0^L (\phi')^2 dx = \frac{(c-1)}{2c} \int_0^L \phi^2 dx - \frac{3LB}{2c}. \quad (2.32)$$

Como  $\phi'$  é uma função ímpar, considerando  $x = 0$  em (2.30) podemos expressar  $B$  como

$$B = (c-1) \frac{\phi^2(0)}{2} - \frac{\phi^6(0)}{2}.$$

Utilizando a forma explícita de  $\phi$  em (2.15), obtemos

$$B = \frac{32 \sqrt{5} K^3 \sqrt{2 - \kappa^2 + 2\sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1}} (\sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1} - 2 + \kappa^2)}{3 (-16K^2 \sqrt{\kappa^4 - \kappa^2 + 1} + L^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.33)$$

Portanto, as relações (2.18), (2.27), (2.32) e (2.33) nos permitem escrever

$$\int_0^L (\phi')^2 + \phi^2 dx = \frac{(3c-1)}{2c} q_L(\kappa) - \frac{3LB}{2c} := V_L(\kappa). \quad (2.34)$$

Utilizando o programa Maple 13, verificamos que para  $L > 4K(\kappa^4 - \kappa^2 + 1)^{\frac{1}{4}}$ , a função  $V_L(\kappa)$  é estritamente crescente em  $(0, \kappa_L)$  (veja as Figuras 2.2 e 2.3 abaixo). Portanto, obtemos que  $\frac{d}{d\kappa} V_L(\kappa) > 0$ .

Além disso, para todo  $\kappa \in (0, \kappa_L)$ , temos que  $c$  é uma função de  $\kappa$  estritamente crescente (Veja as Figuras 2.4 e 2.5). Logo,  $\frac{dc}{d\kappa} > 0$ .

Portanto, segue que

$$\frac{d}{dc} P(c) = \frac{d}{dc} \frac{1}{2} \int_0^L (\phi')^2 + \phi^2 dx = \frac{\frac{d}{d\kappa} V_L(\kappa)}{2 \frac{dc}{d\kappa}} > 0, \quad (2.35)$$

para todo  $\kappa \in (0, \kappa_L)$ .

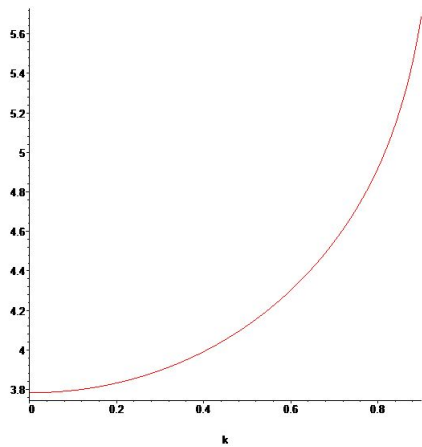


Figura 2.2: Gráfico de  $V_L(k)$  para  $L = 4\pi$ .

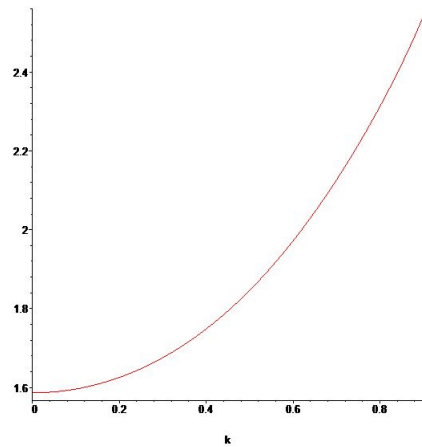


Figura 2.3: Gráfico de  $V_L(k)$  para  $L = 12\pi$ .

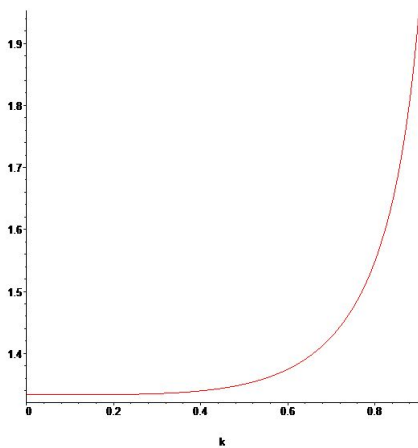


Figura 2.4: Gráfico de  $\kappa \in (0, \kappa_L) \mapsto c(\kappa)$  para  $L = 4\pi$ .

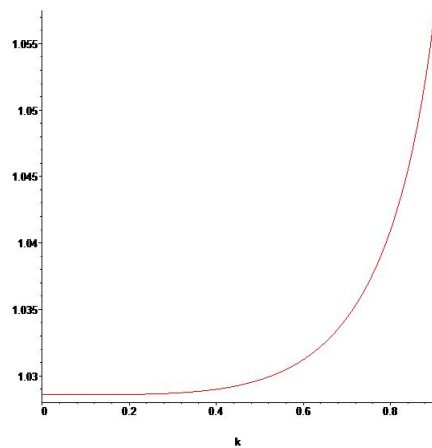


Figura 2.5: Gráfico de  $\kappa \in (0, \kappa_L) \mapsto c(\kappa)$  para  $L = 12\pi$ .

Adicionalmente, pelas Tabelas 2.1 e 2.2 acima, obtemos que  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{L}^{-1}1, 1 \rangle > 0$  para todo  $\kappa \in (0, \kappa_L)$ . Logo, de (2.25), obtemos que  $\det \mathcal{N} < 0$  e, conseqüentemente,  $n_0 = 1$ . Portanto, como  $n(\mathcal{L}) = 2$  e  $z_0 = 0$ , obtemos de (2.26) que  $n(\mathcal{L}|_{\{1, \phi - \phi''\}^\perp}) = 2 - 1 - 0 = 1$  e a onda periódica  $\phi$  para a equação quártica BBM é espectralmente instável.

Nessas condições, podemos enunciar o nosso resultado de estabilidade espectral.

**Teorema 2.0.5.** Seja  $L > 0$  fixado. Para cada  $c > \frac{L^2}{4\pi^2 + L^2}$ , a onda periódica dada em (2.15) é espectralmente instável pelo fluxo periódico da equação (2.2).

# Estabilidade de Ondas Periódicas para a Equação fBBM

Neste capítulo, mostraremos a existência e estabilidade espectral de soluções ondas periódicas viajantes de média zero, para a equação Benjamin-Bona-Mahony fracionária (fBBM)

$$u_t + u_x + uu_x + (D^\alpha u)_t = 0, \quad (3.1)$$

onde  $u = u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $2\pi$ -periódica na variável  $x$  e  $D^\alpha$  representa o operador diferencial fracionário definido como um multiplicador de Fourier por

$$\widehat{D^\alpha g}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

onde  $0 < \alpha \leq 2$ .

A equação fBBM admite, formalmente, as seguintes quantidades conservadas

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [(D^{\frac{\alpha}{2}} u)^2 - \frac{1}{3} u^3] dx, \quad (3.3)$$

$$P(u) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [(D^{\frac{\alpha}{2}} u)^2 + u^2] dx \quad (3.4)$$

e

$$M(u) = \int_{-\pi}^{\pi} u dx \quad (3.5)$$

que correspondem a energia, o momento e a massa, respectivamente.

Suponhamos que a equação (3.1) admite soluções do tipo onda viajante periódica da forma  $u(x, t) = \phi(x - ct)$ , onde  $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ , é uma função  $2\pi$ -periódica suave e  $c$  representa a velocidade da onda. Substituindo essa forma na equação fBBM (3.1), após uma integração, obtemos

$$cD^\alpha \phi + (c - 1)\phi - \frac{1}{2}\phi^2 + A = 0, \quad (3.6)$$

onde  $A$  é uma constante de integração. Se supormos que  $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função periódica com a propriedade de média zero, então  $A := A(c)$  é definida por

$$A(c) := \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi^2(x) dx. \quad (3.7)$$

Combinando (3.6) e (3.7), podemos expressar a equação (3.6) como o seguinte problema de valor de contorno

$$cD^\alpha \phi + (c - 1)\phi = \frac{1}{2}\Pi_0 \phi^2, \quad \phi \in H_{per}^\alpha(\mathbb{T}), \quad (3.8)$$

onde  $\Pi_0 f := f - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$  é o operador projetor restrito às funções  $2\pi$ -periódicas de média zero.

Para a nossa análise espectral as quantidades conservadas definidas em (3.3), (3.4) e (3.5) desempenham um papel importante na nossa análise de estabilidade espectral. De fato, elas nos permitem considerar o funcional de Lyapunov

$$G(u) = E(u) + (c - 1)P(u) + AM(u), \quad (3.9)$$

onde  $G'(\phi) = 0$ . Além disso, de (3.9) obtemos o operador linearizado em torno da onda  $\phi$ , o qual é um operador autoadjunto definido em  $L_{per}^2(\mathbb{T})$  com domínio denso  $H_{per}^\alpha(\mathbb{T})$ , dado por

$$\mathcal{L} := G''(\phi) = cD^\alpha + c - 1 - \phi. \quad (3.10)$$

O problema espectral linearizado associado a equação fBBM é dado por

$$\partial_x \mathcal{L} \eta = \lambda(1 + D^\alpha) \eta, \quad (3.11)$$

o qual atende a forma geral dada em (12), onde  $J := (1 + D^\alpha)^{-1} \partial_x$ . Como  $J = (1 + D^\alpha)^{-1} \partial_x$  não é um operador injetivo no contexto periódico, consideramos a Definição 2 para o problema espectral restrito ao subespaço periódico de média zero  $X_0$  definido em (15).

### 3.1 Resultados de Boa Colocação

Nesta seção, apresentaremos um breve estudo a respeito da boa colocação global para o problema de Cauchy associado a equação (3.1)

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + (D^\alpha u)_t = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.12)$$

no espaço energia  $H_{per}^{\alpha/2}(\mathbb{T})$ .

Para dados iniciais  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , com  $s > \frac{3}{2} - \alpha$  e  $\alpha \in (0, 1)$ , o melhor resultado de boa colocação local para o problema de Cauchy (3.12) foi determinado por [48]. Para dados iniciais  $u_0 \in H_{per}^{\alpha/2}(\mathbb{T})$  e  $\alpha > 1$ , usaremos argumentos de ponto fixo aplicados a fórmula de Duhamel associada a equação (3.12).

No que segue, utilizaremos argumentos similares aos contidos em [7]. Primeiramente, observemos que podemos escrever (3.12) na seguinte forma

$$(1 + D^\alpha)u_t = -\partial_x \left( u + \frac{u^2}{2} \right). \quad (3.13)$$

Aplicando a transformada de Fourier em (3.13) na variável  $x$ , obtemos

$$(1 + |k|^\alpha)\widehat{u}_t(k) = -ik \left( u + \frac{u^2}{2} \right)^\wedge(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dessa forma,

$$\widehat{u}_t(k) = \frac{-ik}{1 + k^2} \left( u + \frac{u^2}{2} \right)^\wedge(k) = \left( \mathcal{K} * \left( u + \frac{u^2}{2} \right) \right)^\wedge(k),$$

onde  $\mathcal{K}$  é definido por

$$\widehat{\mathcal{K}v}(k) = \frac{-ik}{1 + |k|^\alpha} \widehat{v}(k). \quad (3.14)$$

Logo,

$$u_t = \left( \mathcal{K} * \left( u + \frac{u^2}{2} \right) \right). \quad (3.15)$$

Portanto, integrando (3.15) de 0 a  $t$  e usando o fato de  $u(x, 0) = u_0(x)$ , obtemos a representação de (3.12) na forma integral (fórmula de Duhamel)

$$u(x, t) = u_0(x) + \int_0^t \left[ \mathcal{K} * \left( u + \frac{u^2}{2} \right) \right](x, s) ds, \quad (3.16)$$

**Proposição 3.1.1.** Seja  $\alpha > 1$  fixado. Para cada  $s \geq \frac{\alpha}{2}$  e  $u_0 \in H_{per}^s(\mathbb{T})$ , existe  $T > 0$  e uma única

solução  $u$  de (3.12) tal que  $u \in C([-T, T]; H_{per}^s(\mathbb{T}))$ . Mais ainda, para todo  $T^* < T$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $u_0$  em  $H_{per}^s(\mathbb{T})$  tal que a aplicação dado-solução

$$v_0 \in V \subset H_{per}^s(\mathbb{T}) \mapsto v \in C([-T^*, T^*]; H_{per}^s(\mathbb{T})), \quad (3.17)$$

é contínua.

*Demonstração.* Consideremos  $T > 0$  um tempo fixado e definamos o espaço  $Y = C([-T, T]; H_{per}^s(\mathbb{T}))$  munido da norma  $\|w\|_Y = \sup_{t \in [-T, T]} \|w(t)\|_{H_{per}^s}$ . Além disso, consideremos a aplicação  $\Upsilon : Y \rightarrow Y$  dada por

$$\Upsilon(u) = u_0(x) + \int_0^t \mathcal{K} * \left( u + \frac{u^2}{2} \right) ds. \quad (3.18)$$

Queremos mostrar que existem  $r > 0$  e  $T > 0$  de modo que  $\Upsilon(u) \in B_r$  para  $u \in B_r$ , onde  $B_r = \{w \in Y; \|w\|_Y \leq r\}$  e que  $\Upsilon : B_r \rightarrow B_r$  é uma contração, a fim de aplicarmos o Teorema do Ponto Fixo.

De fato, seja  $v \in H_{per}^s$ . Como  $\alpha > 1$ , temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K} * v\|_{H_{per}^s}^2 &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s |\widehat{\mathcal{K}}(k)|^2 |\widehat{v}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s \frac{k^2}{(1 + |k|^\alpha)^2} |\widehat{v}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s |\widehat{v}(k)|^2 = \|v\|_{H_{per}^s}^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por outro lado,  $\alpha > 1$  implica que  $H_{per}^s(\mathbb{T})$  é uma Álgebra de Banach para todo  $s \geq \frac{\alpha}{2}$ , e assim

$$\|u^2\|_{H_{per}^s} \leq C_2 \|u\|_{H_{per}^s}^2, \quad (3.20)$$

onde  $C_2 > 0$  não depende de  $u$ .

Desse modo, considerando  $u_0 \in H_{per}^s(\mathbb{T})$  fixado e combinando (3.19), (3.20) e a definição de  $\Upsilon$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|\Upsilon(u)\|_{H_{per}^s} &= \left\| u_0(x) + \int_0^t \mathcal{K} * \left( u + \frac{u^2}{2} \right) ds \right\|_{H_{per}^s} \\ &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s} + \int_0^t \left\| \mathcal{K} * \left( u + \frac{u^2}{2} \right) \right\|_{H_{per}^s} ds \\ &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s} + \int_0^t \left( \|u\|_{H_{per}^s} + C_3 \|u\|_{H_{per}^s}^2 \right) ds \\ &\leq \|u_0\|_{H_{per}^s} + T (\|u\|_Y + C_3 \|u\|_Y^2), \end{aligned} \quad (3.21)$$

para todo  $t \in [-T, T]$ , onde  $C_3 > 0$  é uma constante positiva dependendo de  $C_2 > 0$ .

Logo,

$$\|\Upsilon u\|_Y \leq \|u_0\|_{H_{per}^s} + T (\|u\|_Y + C_3 \|u\|_Y^2). \quad (3.22)$$

Agora, sejam  $u, v \in Y$  arbitrários. Então,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K} * (u^2 - v^2)\|_{H_{per}^s} &\leq \|u^2 - v^2\|_{H_{per}^s} = \|(u+v)(u-v)\|_{H_{per}^s} \\ &\leq (\|u\|_{H_{per}^s} + \|v\|_{H_{per}^s}) \|u-v\|_{H_{per}^s}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Portanto, de (3.19) e (3.23), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Upsilon u - \Upsilon v\|_{H_{per}^s} &\leq \int_0^t \|\mathcal{K} * (u-v)\|_{H_{per}^s} + \|\mathcal{K} * (u^2 - v^2)\|_{H_{per}^s} ds \\ &\leq \int_0^t \|u-v\|_{H_{per}^s} + (\|u\|_{H_{per}^s} + \|v\|_{H_{per}^s}) \|u-v\|_{H_{per}^s} ds \\ &\leq \int_0^t \|u-v\|_{H_{per}^s} (1 + \|u\|_Y + \|v\|_Y) ds \\ &\leq T (1 + \|u\|_Y + \|v\|_Y) \|u-v\|_Y, \end{aligned} \quad (3.24)$$

ou seja,

$$\|\Upsilon u - \Upsilon v\|_{H_{per}^s} \leq T (1 + \|u\|_Y + \|v\|_Y) \|u-v\|_Y. \quad (3.25)$$

Por (3.22), (3.25) e o fato de que  $u, v \in Y$ , temos que

$$\|\Upsilon u\|_Y \leq \|u_0\|_{H_{per}^s} + T (r + C_3 r^2) \text{ e } \|\Upsilon u - \Upsilon v\|_Y \leq T (1 + 2r) \|u-v\|_Y. \quad (3.26)$$

Escolhendo  $r = 2\|u_0\|_{H_{per}^s}$  e  $T = \frac{1}{2(1+C_4r)}$ , onde  $C_4 = \max\{2, C_3\} > 0$ , obtemos

$$\|\Upsilon u\|_Y \leq r \text{ e } \|\Upsilon u - \Upsilon v\|_Y \leq \frac{1}{2} \|u-v\|. \quad (3.27)$$

Dessa forma, as desigualdades em (3.27) nos permitem concluir que  $\Upsilon : B_r \rightarrow B_r$  está bem definida e é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, obtemos a existência de uma única função  $u \in B_r$  tal que  $\Upsilon u(t) = u(t)$  para todo  $t \in [-T, T]$ .

Suponhamos agora que  $u$  e  $v$  satisfaçam a forma integral (3.16) com dados iniciais  $u_0$  e  $v_0$ , respectivamente. Então, de (3.19) e (3.23), vem que



$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_{H_{per}^s} &\leq \|u_0 - v_0\|_{H_{per}^s} + \int_0^t \left( \|\mathcal{K} * (u - v)\|_{H_{per}^s} + \|\mathcal{K} * (u^2 - v^2)\|_{H_{per}^s} \right) ds \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_{H_{per}^s} + \int_0^t \|u - v\|_{H_{per}^s} (1 + \|u\|_Y + \|v\|_Y) ds \\
&= \|u_0 - v_0\|_{H_{per}^s} + (1 + \|u\|_Y + \|v\|_Y) \int_0^t \|u - v\|_{H_{per}^s} ds.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Assim, pela desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$\|u(t) - v(t)\|_{H_{per}^s} \leq \|u_0 - v_0\|_{H_{per}^s} e^{(1+\|u\|_Y+\|v\|_Y)t}, \quad \forall t \in [-T, T]. \tag{3.29}$$

Portanto, considerando os dados iniciais  $u_0$  e  $v_0$  iguais, obtemos que  $u = v$  em  $Y$ , ou seja, concluímos a unicidade da solução  $u$  do problema (3.12).

Finalmente, mostraremos que para todo  $T^* < T$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $u_0$  em  $H_{per}^s$  tal que a aplicação dado-solução (3.17) é contínua.

De fato, definamos o conjunto  $V$  por

$$V = \left\{ v_0 \in H_{per}^s; \|v_0 - u_0\| < \delta, \text{ onde } 0 < \delta < \frac{1}{4C_4} \left( \frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right) \right\}.$$

Notemos que se  $v_0 \in V$ , então

$$\|v_0\|_{H_{per}^s} \leq \|v_0 - u_0\|_{H_{per}^s} + \|u_0\|_{H_{per}^s} \leq \delta + \|u_0\|_{H_{per}^s}.$$

Logo, considerando  $r = 2\|v_0\|_{H_{per}^s}$  e  $T_{v_0}$  o tempo de existência de solução com dado inicial  $v_0$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T_{v_0}} &= 1 + C_4 r = 1 + 2C_4 \|v_0\|_{H_{per}^s} \leq 1 + 2C_4 \delta + 2C_4 \|u_0\|_{H_{per}^s} \\
&= 1 + 2C_4 \delta + C_4 r = \frac{1}{2T} + 2C_4 \delta < \frac{1}{2T} + 2C_4 \frac{1}{4C_4} \left( \frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right) \\
&= \frac{1}{2T^*}.
\end{aligned}$$

Dessa forma,  $T^* < T_{v_0}$  e a solução  $v \in V$  associada ao dado inicial  $v_0$  evolui até  $T_{v_0}$  que está acima de  $T^*$ . Portanto a aplicação dado-solução (3.17) está bem definida. Além disso, segue da desigualdade (3.29) a continuidade da aplicação.  $\square$

No próximo resultado, verificaremos que as quantidades conservadas da equação fBBM são de fato conservadas.

**Proposição 3.1.2.** Seja  $\alpha > 1$  fixado. As quantidades  $E$ ,  $P$  e  $M$  definidas em (3.3), (3.4) e (3.5), respectivamente são leis de conservação.

*Demonstração.* Definamos  $\Lambda = (1 + D^\alpha)^{\frac{1}{2}}$ . Como a solução  $u$  obtida na Proposição (3.1.1) pertence a  $C([-T, T]; H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}))$ , obtemos da fórmula (3.13) que

$$u_t = -\Lambda^{-2} \partial_x \left( u + \frac{u^2}{2} \right). \quad (3.30)$$

Observemos que  $\Lambda^{-2}$  é um operador linear limitado definido em  $L_{per}^2(\mathbb{T})$  com valores no mesmo espaço e então,  $\Lambda^{-2} \partial_x \left( u(t) + \frac{u(t)^2}{2} \right) \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  para todo  $t \in [-T, T]$ . Pela igualdade em (3.30) podemos concluir que  $u_t(t) \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  para todo  $t \in [-T, T]$ . Visto que  $\Lambda^{-2}$  comuta com  $\partial_x$ , um argumento direto nos dá a partir da equação (3.30) que  $M(u(t)) = M(u_0)$  para todo  $t \in [-T, T]$ .

Provemos que  $P(u(t)) = P(u_0)$  para todo  $t \in [-T, T]$ . De fato, primeiro notemos que  $u_t(t) \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  para todo  $t \in [-T, T]$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(u(t)) &= \int_{-\pi}^{\pi} (u(x, t) + D^\alpha u(x, t)) u_t(x, t) dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} (u(x, t) + D^\alpha u(x, t)) \Lambda^{-2} \partial_x \left( u(x, t) + \frac{u(x, t)^2}{2} \right) dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda^2 u(x, t) \Lambda^{-2} \partial_x \left( u(x, t) + \frac{u(x, t)^2}{2} \right) dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) \partial_x \left( u(x, t) + \frac{u(x, t)^2}{2} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Isso prova que  $P$  é uma quantidade conservada. Agora, definamos o funcional auxiliar

$$V(u) := \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( u(x, t)^2 + \frac{u(x, t)^3}{3} \right) dx \quad (3.31)$$

e notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(u(t)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( u(x, t) + \frac{u(x, t)^2}{2} \right) u_t(x, t) dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda^{-1} \left( u(x, t) + \frac{u(x, t)^2}{2} \right) \partial_x \Lambda^{-1} \left( u(x, t) + \frac{u(x, t)^2}{2} \right) dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x \left[ \Lambda^{-1} \left( u(x, t) + \frac{u(x, t)^2}{2} \right) \right]^2 dx = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $V$  é uma quantidade conservada. Portanto, como  $E = P - V$  e  $P$  é uma quantidade conservada, segue de (3.31) que  $E(u(t)) = E(u_0)$  para todo  $t \in [-T, T]$ .  $\square$

As proposições (3.1.1) e (3.1.2) nos permitem enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 3.1.3.** Seja  $\alpha > 1$  fixado. Para cada  $u_0 \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ , o problema de Cauchy (3.12) é globalmente bem colocado em  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  com  $u \in C(\mathbb{R}; H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}))$ .

*Demonstração.* Inicialmente, mostremos que a solução  $u$  de (3.16) pode ser estendida para  $\mathbb{R}$ . Com efeito, considerando  $v_0 = u(T)$  e a equação integral

$$v(x, t) = v_0(x) + \int_0^t \left[ \mathcal{K} * \left( v + \frac{v^2}{2} \right) \right] (x, \tau) d\tau, \quad (3.32)$$

obtemos pela Proposição 3.1.1 que existe  $T' > 0$  e uma única solução  $v$  de (3.32) de modo que  $v \in C([0, T']; H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}))$ . Definamos

$$w(x, t) := \begin{cases} u(x, t), & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ v(x, t - T), & \text{se } T \leq t \leq T + T'. \end{cases}$$

Assim, para  $0 < s \leq T'$ , obtemos que

$$\begin{aligned} w(x, T + s) &= v(x, T + s - T) \\ &= v(x, s) \\ &= v_0(x) + \int_0^s \left[ \mathcal{K} * \left( v + \frac{v^2}{2} \right) \right] (x, \tau) d\tau \\ &= u(x, T) + \int_0^s \left[ \mathcal{K} * \left( u + \frac{u^2}{2} \right) \right] (x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo a mudança de variável  $\xi - T = \tau$ , temos que

$$\begin{aligned} w(x, T + s) &= u(x, T) + \int_T^{T+s} \left[ \mathcal{K} * \left( v + \frac{v^2}{2} \right) \right] (x, \xi - T) d\xi \\ &= u_0(x) + \int_0^T \left[ \mathcal{K} * \left( u + \frac{u^2}{2} \right) \right] (x, \tau) d\tau + \int_T^{T+s} \left[ \mathcal{K} * \left( v + \frac{v^2}{2} \right) \right] (x, \xi - T) d\xi \\ &= u_0(x) + \int_0^{T+s} \left[ \mathcal{K} * \left( w + \frac{w^2}{2} \right) \right] (x, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

para todo  $0 < s \leq T'$ , ou seja,  $w$  é a extensão única da solução  $u$  de (3.16) ao intervalo  $[0, T + T']$ .

Pela Proposição 3.1.1 segue que

$$T' = \frac{1}{2} \left( 1 + 2C_4 \|u_0\|_{H_{per}^s} \right)^{-1}.$$

Além disso, como  $\|v_0\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}} = \|u(T)\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}} = \|u_0\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}}$ , resulta que  $T' = T$ .

Portanto, podemos concluir que a solução  $u$  de (3.16) pode ser estendida à  $C([0, 2T], H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}))$ . Repetindo esse processo, notamos que  $u$  pode ser estendida à  $C([0, \infty], H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}))$ . Ademais, como  $\mathcal{K}$  não depende de  $t$ , temos que a forma integral (3.16) é reversível no tempo e assim  $u$  pode ser estendida para  $\mathbb{R}$ , isto é,  $u \in C(\mathbb{R}, H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}))$ .

□

## 3.2 Existência e Unicidade de Minimizadores e Propriedades Espectrais

Nesta seção, inicialmente daremos uma condição suficiente para a existência de ondas periódicas da equação (3.6), mostrando a existência de minimizadores associados a um problema variacional conveniente. Em seguida, usaremos os minimizadores periódicos para obtermos boas propriedades espectrais para o operador linearizado  $\mathcal{L}$  definido em (3.10).

Antes disso, precisamos de uma importante definição que caracteriza as soluções da equação (3.8), como segue

**Definição 3.** Dizemos que uma solução de onda viajante periódica satisfazendo a equação (3.8) tem um perfil single-lobe  $\phi$  se existe apenas um máximo e um mínimo de  $\phi$  no intervalo semi-aberto  $[-\pi, \pi)$ . Sem perda de generalidade, o máximo de  $\phi$  é posto em  $x = 0$ .

### 3.2.1 Existência de soluções

Para  $\gamma > 0$  fixado, consideremos o conjunto

$$Y_0 = \left\{ u \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}); \int_{-\pi}^{\pi} u^3 = \tau, \int_{-\pi}^{\pi} u = 0 \right\}. \quad (3.33)$$

O nosso objetivo é encontrar um minimizador periódico para o problema de minimização restrito

$$q_c = \inf_{u \in Y_0} \mathcal{B}_c(u), \quad (3.34)$$

onde, para  $c > \frac{1}{2}$  fixado, definimos

$$\mathcal{B}_c(u) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} c(D^{\frac{\alpha}{2}} u)^2 + (c-1)u^2 dx. \quad (3.35)$$

**Lema 3.2.1.** Seja  $\alpha > 1/3$  e  $c > \frac{1}{2}$  fixado. O problema de minimização (3.34) tem pelo menos uma solução, isto é, existe  $\phi \in Y_0$  satisfazendo

$$\mathcal{B}_c(\phi) = \inf_{u \in Y_0} \mathcal{B}_c(u). \quad (3.36)$$

Se  $\alpha \in (\frac{1}{3}, 2]$ , o minimizador periódico de (3.36), tem um perfil par e single-lobe no sentido da Definição 3.

*Demonstração.* Pelas desigualdades de Poincaré-Wirtinger e Garding, obtemos que  $\mathcal{B}_c$  é equivalente a norma em  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ , resultando que  $q_c \geq 0$ . Com efeito, dado que  $\|u\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (D^{\frac{\alpha}{2}}u)^2 + u^2 dx$ , para todo  $c > \frac{1}{2}$  existem constantes positivas  $M_0$  e  $M_1$  dependendo de  $c$  tais que

$$M_0 \|u\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}}^2 \leq \frac{(2c-1)}{2} \|u\|_{L_{per}^2}^2 \leq \mathcal{B}_c(u) \leq \frac{c}{2} \|u\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}}^2 = M_1 \|u\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}}^2. \quad (3.37)$$

Como  $\mathcal{B}_c$  é um funcional suave em  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ , podemos considerar  $\{u_n\}$  uma sequência de minimizadores para 3.34, isto é, uma sequência em  $Y_0$  satisfazendo

$$\mathcal{B}_c(u_n) \rightarrow \inf_{u \in Y_0} \mathcal{B}_c(u), \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Além disso, de (3.37) obtemos

$$M_0 \|u_n\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}}^2 \leq \mathcal{B}_c(u_n) \leq M_1 \|u_n\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,  $\{u_n\}$  é limitada em  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ . Logo, existe  $\phi \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  e uma subsequência que denotaremos ainda por  $\{u_n\}$  tal que  $u_n \rightharpoonup \phi$  fraco em  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Por outro lado, como  $\alpha > 1/3$  temos que o espaço energia  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  está compactamente imerso em  $L_{per}^3(\mathbb{T})$  (veja [6, Teorema 4.2]), e  $u_n \rightarrow \phi$  em  $L_{per}^3(\mathbb{T})$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Adicionalmente, usando o fato de que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (u_n^3 - \phi^3) dx \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |u_n^3 - \phi^3| dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |u_n - \phi|^3 + 3|\phi u_n| |u_n - \phi| dx \\ &\leq \|u_n - \phi\|_{L_{per}^3}^3 + 3\|u_n - \phi\|_{L_{per}^3} \|\phi\|_{L_{per}^3} \|u_n\|_{L_{per}^3}, \end{aligned}$$

obtemos que  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi^3 dx = \tau$ . Com um argumento similar ao acima e usando o fato de que  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  está compactamente imerso em  $L_{per}^1(\mathbb{T})$ , obtemos que  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi dx = 0$ .

Além disso, pela semicontinuidade inferior fraca de  $\mathcal{B}_c$ , temos

$$\mathcal{B}_c(\phi) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{B}_c(u_n) = q_c.$$

Como  $\phi$  satisfaz a restrição temos que  $\mathcal{B}_c \geq q_c$  e, portanto,  $\mathcal{B}_c = q_c$ . Logo,  $\phi$  é o minimizador periódico

desejado.

Considerando os rearranjos decrescentes simétricos  $\phi^\# \in Y_0$  associados a solução  $\phi$  (os quais deixam as restrições em  $Y_0$  invariantes e por isso podem ser considerados), obtemos a norma em  $L^2_{per}(\mathbb{T})$  de  $\phi$  e  $\phi^\#$  invariantes e  $\int_{-\pi}^{\pi} (D^{\frac{\alpha}{2}} \phi^\#)^2 dx$  não aumenta em comparação com  $\int_{-\pi}^{\pi} (D^{\frac{\alpha}{2}} \phi)^2 dx$ , em virtude da desigualdade de Polya-Szegö (veja [60]). Portanto, para  $c > \frac{1}{2}$  obtemos  $\mathcal{B}_c(\phi^\#) = q_c$ , porém manteremos a notação  $\phi$  em vez de  $\phi^\#$ . Como decorrência, o minimizador periódico  $\phi \in Y_0$  de  $\mathcal{B}_c$  deve decrescer simetricamente a partir do ponto de máximo. Pela invariância translacional, o máximo pode ser posto em  $x = 0$ , o que resulta em um perfil single-lobe par para  $\phi$ .  $\square$

Pelo Lema 3.2.1 e pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange, resulta que existem  $C_1$  e  $C_2$  tais que

$$cD^\alpha \phi + (c - 1)\phi = C_1\phi^2 + C_2. \quad (3.38)$$

Notemos que  $\phi$  é não trivial com perfil single-lobe, uma vez que  $\phi \in Y_0$ . Como  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi dx = 0$ , deduzimos de (3.38) que  $C_2 = -\frac{C_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi^2 dx$ , ou seja, ambas constantes  $C_1$  e  $C_2$  são não nulas e possuem sinais opostos. Além disso, um simples argumento de escala nos permite escolher  $C_1 = \frac{1}{2}$  e  $-C_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi^2 dx = A(c)$ . Dessa forma,  $\phi$  satisfaz a equação

$$cD^\alpha \phi + (c - 1)\phi - \frac{1}{2}\phi^2 + A = 0. \quad (3.39)$$

Mais ainda, utilizando argumentos de bootstrap (veja [26, Proposição 3.1]) obtemos que o perfil single-lobe  $\phi$  é suave e satisfaz a equação (3.39).

Na sequência, denotemos por  $\tilde{\mathcal{L}} := \frac{1}{c}\mathcal{L} = D^\alpha + (1 - \frac{1}{c}) - \frac{1}{c}\phi$  o operador linearizado em torno da onda periódica  $\phi$  e suponhamos que  $\ker(\tilde{\mathcal{L}}|_{X_0}) = [\phi']$ . Usando argumentos similares contidos em [53, Lema 3.8], obtemos que  $c \in (\frac{1}{2}, +\infty) \rightarrow \phi \in H^\infty_{per}(\mathbb{T})$  define uma curva suave de ondas periódicas todas com o mesmo período  $2\pi$ . Logo, temos que  $\frac{d}{dc}\phi \in D(\tilde{\mathcal{L}}) = H^\alpha_{per}(\mathbb{T})$  e

$$\tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{d}{dc}\phi \right) = \frac{1}{c^2} \left( A(c) - \phi - \frac{1}{2}\phi^2 - cA'(c) \right), \quad \tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{c^2} (c - 1 - \phi) \quad (3.40)$$

e

$$\tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{1}{c}\phi \right) = -\frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{2}\phi^2 + A(c) \right). \quad (3.41)$$

As equações (3.40) e (3.41) nos fornecem uma importante relação

$$c^2 \tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{d}{dc}\phi - \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\phi \right) = (1 + 2A(c) - c - cA'(c)) =: d. \quad (3.42)$$

Como  $\tilde{\mathcal{L}}\phi = -\frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\phi^2 + A(c)\right)$ , temos que  $\langle \tilde{\mathcal{L}}\phi, \phi \rangle = -2\mathcal{B}_c(\phi) < 0$  e, conseqüentemente, deduzimos que  $\tilde{\mathcal{L}}$  tem pelo menos um autovalor negativo. O próximo resultado estabelece o comportamento exato dos primeiros autovalores associados ao operador linearizado  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

**Proposição 3.2.2.** Seja  $\alpha > \frac{1}{3}$  fixado e assumamos que  $\ker(\tilde{\mathcal{L}}|_{X_0}) = [\phi']$ . Para  $c > \frac{1}{2}$  consideremos  $d = 1 + 2A(c) - c - cA'(c)$ . O operador linearizado  $\tilde{\mathcal{L}} = D^\alpha + (1 - \frac{1}{c}) - \frac{1}{c}\phi$  em torno da solução periódica  $\phi$  satisfaz

$$n(\tilde{\mathcal{L}}) = \begin{cases} 1, & \text{se } d < 0 \\ 2, & \text{se } d \geq 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

e

$$z(\tilde{\mathcal{L}}) = \begin{cases} 1, & \text{se } d \neq 0 \\ 2, & \text{se } d = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

*Demonstração.* Em vista de (3.34), como  $\phi$  minimiza localmente  $\mathcal{B}_c$ , temos

$$\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, \phi^2\}^\perp} \geq 0, \quad (3.45)$$

ou seja,  $n(\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, \phi^2\}^\perp}) = 0$ . Pelo Princípio Mini-Max de Courant e sabendo que  $\langle \tilde{\mathcal{L}}\phi, \phi \rangle < 0$ , obtemos  $n(\tilde{\mathcal{L}}) \in \{1, 2\}$ .

Para  $\lambda \notin \sigma(\tilde{\mathcal{L}})$ , consideremos  $R(\lambda)$  a matriz dada por

$$R(\lambda) := \begin{bmatrix} \langle (\tilde{\mathcal{L}} - \lambda)^{-1}\phi^2, \phi^2 \rangle & \langle (\tilde{\mathcal{L}} - \lambda)^{-1}\phi^2, 1 \rangle \\ \langle (\tilde{\mathcal{L}} - \lambda)^{-1}\phi^2, 1 \rangle & \langle (\tilde{\mathcal{L}} - \lambda)^{-1}1, 1 \rangle \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Para  $d \neq 0$ , vamos calcular o determinante de  $R(\lambda)$  em  $\lambda = 0$ . De fato, notemos que combinando (3.40) e (3.41), obtemos

$$\tilde{\mathcal{L}} \left( d^{-1} \left( \frac{d}{dc}\phi - \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\phi \right) \right) = 1, \quad (3.47)$$

e

$$\tilde{\mathcal{L}} \left( -2A(c) \left( d^{-1} \left( \frac{d}{dc}\phi - \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\phi \right) \right) - 2c\phi \right) = \phi^2. \quad (3.48)$$

Dessa forma, lembrando que a solução periódica  $\phi$  possui a propriedade de média zero, segue que

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1}1, 1 \rangle = \frac{d}{dc} \int_{-\pi}^{\pi} d^{-1} \left( \frac{d}{dc}\phi - \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\phi \right) dx = -\frac{2\pi}{c}d^{-1},$$

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1}\phi^2, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left( -2A(c) \left( d^{-1} \left( \frac{d}{dc}\phi - \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\phi \right) \right) - 2c\phi \right) dx = \frac{4\pi A(c)}{c}d^{-1},$$

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1}1, \phi^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left( d^{-1} \left( \frac{d}{dc} \phi - \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \phi \right) \right) \phi^2 dx = \frac{4\pi A(c)}{c} d^{-1},$$

e

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1} \phi^2, \phi^2 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( -2A(c) \left( d^{-1} \left( \frac{d}{dc} \phi - \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \phi \right) \right) - 2c\phi \right) \phi^2 dx \\ &= -\frac{2A(c)}{c} d^{-1} \left[ \frac{c}{3} \gamma'(c) - \gamma(c) - 4\pi A(c) \right] - 2c\gamma(c). \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde  $\gamma(c) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi^3 dx$  e  $\gamma'(c) = \frac{d}{dc} \int_{-\pi}^{\pi} \phi^3 dx$ . Como  $\tilde{\mathcal{L}}$  é um operador autoadjunto, vale a seguinte relação

$$\left\langle \tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{d}{dc} \phi \right), \phi \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dc} \phi, \tilde{\mathcal{L}} \phi \right\rangle. \quad (3.50)$$

Logo, utilizando as igualdades em (3.40) e (3.41), obtemos de (3.50) que

$$\frac{c}{3} \gamma'(c) - \gamma(c) = 8\pi A(c). \quad (3.51)$$

Além disso, multiplicando a equação (3.6) por  $\phi$  e integrando no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , segue que

$$\gamma(c) = 2c \int_{-\pi}^{\pi} \phi D^\alpha \phi dx + 8\pi A(c)(c-1). \quad (3.52)$$

Substituindo (3.51) e (3.52) em (3.49), concluímos que

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1} \phi^2, \phi^2 \rangle = -4c^2 \int_{-\pi}^{\pi} (D^{\frac{\alpha}{2}} \phi)^2 dx - 8\pi A(c) \left( \frac{A(c)}{c} d^{-1} + 2(c^2 - c) \right). \quad (3.53)$$

Devido as relações acima, temos que o determinante de  $R(0)$  é dado por

$$\det R(0) = 8\pi d^{-1} \left( c \int_{-\pi}^{\pi} (D^{\frac{\alpha}{2}} \phi)^2 dx + (c-1) \int_{-\pi}^{\pi} \phi^2 dx \right) = 16\pi d^{-1} \mathcal{B}_c(\phi). \quad (3.54)$$

Como  $c > \frac{1}{2}$ , obtemos que  $\mathcal{B}_c(\phi) > 0$  e o sinal de  $\det R(0)$  é obtido apenas por  $d^{-1}$ .

Por outro lado, por [61, Teorema 4.1] temos as seguintes identidades

$$n(\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, \phi^2\}_\perp}) = n(\tilde{\mathcal{L}}) - n_0 - z_0, \quad (3.55)$$

e

$$z(\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, \phi^2\}_\perp}) = z(\tilde{\mathcal{L}}) + z_0 - z_\infty \quad (3.56)$$

onde  $n(\tilde{\mathcal{L}})$  denota o número de autovalores negativos do operador  $\tilde{\mathcal{L}}$ ,  $n_0$  representa o número de



autovalores negativos de  $R(0)$ ,  $z_0$  é a dimensão do núcleo de  $R(0)$  e  $z_\infty$  corresponde ao número de autovalores divergentes, isto é,  $z_\infty = 1$  se  $d = 0$ , e  $z_\infty = 0$  caso contrário. Em seguida, deduzimos o resultado (3.55) para a equação (3.43).

Como  $\phi$  é uma solução single-lobe, observamos que a função  $\phi' \in \ker(\tilde{\mathcal{L}})$  tem exatamente dois zeros no intervalo semi-aberto  $[-\pi, \pi)$  e, pelo Teorema da Oscilação em [39], isso significa que  $z(\tilde{\mathcal{L}}) \in \{1, 2\}$ . Se  $d \neq 0$ , obtemos pela segunda igualdade em (3.40), (3.47) e (3.48) que  $\{1, \phi, \phi^2\} \subset \text{range}(\tilde{\mathcal{L}})$  e, usando [39, Proposição 3.1], resulta que  $z(\tilde{\mathcal{L}}) = 1$ . Se  $d = 0$ , temos  $z_\infty = 1$  e como  $\phi' \in \{1, \phi^2\}^\perp$ , vem que  $z(\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, \phi^2\}^\perp}) \geq 1$ . Portanto,  $z(\tilde{\mathcal{L}}) = 2$  como queríamos.  $\square$

### 3.2.2 Unicidade de soluções

Nosso objetivo agora é fornecer condições suficientes para determinarmos um resultado de unicidade para o minimizador periódico obtido no Lema 3.2.1. Para esse fim, seguiremos argumentos similares aos contidos em [30, Seção 5].

Seja  $\mathcal{L}|_{X_0} = \mathcal{L} + \frac{1}{2\pi} \langle \phi, \cdot \rangle$ . Ao longo da abordagem que realizaremos agora, assumiremos que

$$n(\mathcal{L}) = 1, \quad (3.57)$$

para todo  $c > \frac{1}{2}$  e  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ . Por [61, Teorema 4.1], obtemos que

$$n(\mathcal{L}|_{X_0}) = n(\mathcal{L}) - n_0 - z_0 = 1, \quad (3.58)$$

onde usamos que  $\phi \in X_0$  e  $n(\mathcal{L}|_{X_0}) \geq 1$ , uma vez que  $\langle \mathcal{L}|_{X_0} \phi, \phi \rangle = \langle \mathcal{L} \phi, \phi \rangle = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \phi^3 dx = -2\mathcal{B}_c(\phi) < 0$ .

Agora, por [53, Corolário 4.5] temos de (3.57) que  $z(\mathcal{L}|_{X_0}) = 1$ . Essa igualdade nos permite concluir uma importante propriedade para  $\mathcal{L}|_{X_0}$ , a saber

$$\ker(\mathcal{L}|_{X_0}) = [\phi']. \quad (3.59)$$

Esse fato será muito útil nos argumentos seguintes.

A fim de simplificarmos a notação, definimos o espaço de Banach sobre o corpo dos números reais

$$V = \{f \in L_{per}^3(\mathbb{T}) \cap X_0; f \text{ é par e de valores reais}\} \quad (3.60)$$

cuja norma é dada por

$$\|f\|_V := \|f\|_{L_{per}^2(\mathbb{T})} + \|f\|_{L_{per}^3(\mathbb{T})}.$$

Para  $\alpha_0 \in (\frac{1}{2}, 2]$  fixado, nosso primeiro objetivo é construir um ramo local de soluções  $(\phi_\alpha, c_\alpha) \in V \times (\frac{1}{2}, +\infty)$  de (3.8) parametrizado pelo índice  $\alpha$  em algum intervalo  $[\alpha_0, \alpha_0 + \delta)$ , para algum  $\delta > 0$  suficientemente pequeno.

**Proposição 3.2.3.** Seja  $\alpha_0 \in (\frac{1}{2}, 2]$ . Suponhamos que  $(\phi_0, c_0) \in V \times (\frac{1}{2}, +\infty)$  com  $\phi_0$  uma solução não nula de (3.8) e satisfazendo (3.57) com  $\alpha = \alpha_0$  e  $c = c_0$ . Então, para algum  $\delta > 0$ , existe uma  $C^1$ -aplicação  $\alpha \in I \rightarrow (\phi_\alpha, c_\alpha) \in V \times (\frac{1}{2}, +\infty)$ , definida no intervalo  $I = [\alpha_0, \alpha_0 + \delta)$ , de modo que são válidas as seguintes condições:

- (i)  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$  soluciona a equação (3.8) com  $c = c_\alpha$ , para todo  $\alpha \in I$  e o par  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$  satisfaz (3.57).
- (ii) Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$  é a única solução de (3.8) para  $\alpha \in I$  em uma vizinhança  $\{(\phi, c) \in V \times (\frac{1}{2}, +\infty); \|\phi - \phi_0\|_V + |c - c_0| < \varepsilon\}$ .

(iii) Para todo  $\alpha \in I$ , temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_\alpha^3 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^3 dx.$$

*Demonstração.* Para mostrarmos esse resultado, utilizaremos o Teorema da Função Implícita. Com efeito, como  $c > \frac{1}{2}$ , obtemos que a expressão em (3.8) pode ser reescrita como

$$\phi = (cD^\alpha + (c - 1))^{-1} \frac{1}{2} \Pi_0 \phi^2.$$

Para algum  $\delta > 0$  a ser escolhido posteriormente, definamos a aplicação

$$\mathcal{F} : V \times \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \times I \rightarrow V \times \mathbb{R}, \quad (3.61)$$

dada por

$$\mathcal{F}(\phi, c, \alpha) = \begin{bmatrix} \phi - (cD^\alpha + (c - 1))^{-1} \frac{1}{2} \Pi_0 \phi^2 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \phi^3 dx - \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^3 dx \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Notemos que  $\mathcal{F}$  é uma aplicação de classe  $C^1$  sobre  $V \times (\frac{1}{2}, \infty) \times I$  (ver [30, Lema E.1]) e  $\mathcal{F}(\phi_0, c_0, \alpha_0) = 0$ . Nossa intenção é mostrar a invertibilidade da derivada de Fréchet de  $\mathcal{F}$  com relação a  $(\phi, c)$  em  $(\phi_0, c_0, \alpha_0)$  e denotada por  $D_{\phi, c} \mathcal{F}$ . De fato, observemos que

$$D_{\phi, c} \mathcal{F}(\phi_0, c_0, \alpha_0) = \begin{bmatrix} 1 - (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-1} \Pi_0 \phi_0 & (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-2} (D^{\alpha_0} + 1) \frac{1}{2} \Pi_0 \phi_0^2 \\ 3 \langle \phi_0^2, \cdot \rangle & 0 \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que  $D_{\phi,c}\mathcal{F}$  é invertível em  $(\phi_0, c_0, \alpha_0)$ . Para cada  $g \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  dados, precisamos mostrar a existência de um único par  $(f, \beta) \in V \times \mathbb{R}$  de modo que

$$\begin{bmatrix} f - (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-1} \Pi_0(\phi_0 f) + \frac{\beta}{2} (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-2} (D^{\alpha_0} + 1) \Pi_0 \phi_0^2 \\ 3 \langle \phi_0^2, f \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \lambda \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Para simplificarmos a notação, definamos

$$\mathcal{P} := -(c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-1} \Pi_0 \phi_0 \quad \text{e} \quad h_0 := \frac{1}{2} (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-2} (D^{\alpha_0} + 1) \Pi_0 \phi_0^2.$$

De (3.63) obtemos que

$$(1 + \mathcal{P})f + \beta h_0 = g \quad (3.64)$$

e

$$3 \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^2 f dx = \lambda. \quad (3.65)$$

Notemos que  $\mathcal{P}$  é um operador compacto em  $X_{0,e} = \{f \in X_0; f \text{ é par}\}$ . Além disso, de (3.57) obtemos que  $-1$  não é um elemento do espectro de  $\mathcal{P}$ . De fato, assumamos que  $-1$  pertença ao espectro de  $\mathcal{P}$ . Então, existiria uma autofunção par  $\psi \in X_{0,e}$  do operador autoadjunto  $\mathcal{L}|_{X_0} = \mathcal{L} + \frac{1}{2\pi} \langle \phi, \cdot \rangle$  de modo que  $\mathcal{L}|_{X_0} \psi = 0$ , o que contradiz a hipótese (3.57). Assim,  $1 + \mathcal{P}$  é um operador invertível em  $X_{0,e}$  e como  $\mathcal{P} : V \rightarrow V$  (esse fato segue similarmente de [30, Lema E.1]), obtemos que  $(1 + \mathcal{P})^{-1}$  existe em  $V$ . Logo, de (3.64) podemos expressar  $f \in V$  unicamente como

$$f = -\beta(1 + \mathcal{P})^{-1} h_0 + (1 + \mathcal{P})^{-1} g. \quad (3.66)$$

Dessa forma, substituindo (3.66) em (3.65), deduzimos que

$$3\beta \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^2 (1 + \mathcal{P})^{-1} h_0 dx = -\lambda + 3 \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^2 (1 + \mathcal{P})^{-1} g dx. \quad (3.67)$$

Para mostrarmos que  $\beta \in \mathbb{R}$  pode ser explicitamente expresso em termos de  $\phi_0$ ,  $\mathcal{P}$  e  $g$  de forma única, basta mostrarmos que o coeficiente  $\langle \phi_0^2, (1 + \mathcal{P})^{-1} h_0 \rangle$  é não nulo. Com efeito, de (3.59) vemos que  $(\mathcal{L}|_{X_0})^{-1}$  existe em  $X_{0,e}$  e pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}|_{X_0})^{-1} &= (1 - (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-1} \Pi_0 \phi_0)^{-1} (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-1} \\ &= (1 + \mathcal{P})^{-1} (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, em  $H_{per}^{\alpha_0}(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$  o operador

$$(1 + \mathcal{P})^{-1} = (\mathcal{L}|_{X_0})^{-1}(c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1)) \quad (3.68)$$

está bem definido. Logo, usando (3.68), o fato de  $\mathcal{L}|_{X_0}\phi_0 = -\frac{1}{2}\Pi_0\phi_0^2$  e  $h_0 \in V$ , por (3.67) obtemos

$$\begin{aligned} \langle \phi_0^2, (1 + \mathcal{P})^{-1}h_0 \rangle &= \langle A_0, (1 + \mathcal{P})^{-1}h_0 \rangle - 2\langle \mathcal{L}|_{X_0}\phi_0, (1 + \mathcal{P})^{-1}h_0 \rangle \\ &= -2\langle \mathcal{L}|_{X_0}\phi_0, (\mathcal{L}|_{X_0})^{-1}(c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))h_0 \rangle \\ &= -\langle (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))\phi_0, (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-2}(D^\alpha + 1)\Pi_0\phi_0^2 \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\langle \Pi_0\phi_0^2, (c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^{-2}(D^\alpha + 1)\Pi_0\phi_0^2 \rangle \\ &= -\pi \sum_{k \neq 0} \frac{|k|^{\alpha_0} + 1}{(c_0|k|^{\alpha_0} + (c_0 - 1))^2} |\widehat{\Pi_0\phi_0^2}(k)|^2 \neq 0, \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos o fato de  $(\mathcal{L}|_{X_0})^{-1}$  e  $c_0 D^{\alpha_0} + (c_0 - 1)$  serem operadores autoadjuntos.

Isso completa a prova de que  $D_{\phi,c}\mathcal{F}$  é invertível em  $(\phi_0, c_0, \alpha_0)$ . Portanto, aplicando o Teorema da Função Implícita na aplicação  $\mathcal{F}$  em  $(\phi_0, c_0, \alpha_0)$  obtemos as condições (i)-(iii), desde que  $\delta > 0$  seja suficientemente pequeno.  $\square$

A próxima etapa será seguir argumentos similares aos encontrados em [30, Subseção 5.2]. Com efeito, consideramos a extensão máxima correspondente do ramo  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$  para  $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_*)$ , onde  $\alpha_*$  é dado por

$$\alpha_* := \sup\{\alpha_0 < q < 2; (\phi_\alpha, c_\alpha) \in C^1([\alpha_0, q]; V \times (\frac{1}{2}, +\infty)) \text{ dado pela Proposição 3.2.3}$$

$$\text{e } (\phi_\alpha, c_\alpha) \text{ satisfaz (3.8) para } \alpha \in [\alpha_0, q)\}.$$

É claro que  $\alpha_* \leq 2$ , porém provaremos que  $\alpha_* = 2$ .

**Proposição 3.2.4.** Seja  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{n=+\infty} \subset (\frac{1}{2}, \alpha_*)$  uma sequência tal que  $\alpha_n \rightarrow \alpha_*$ . Além disso, assumamos que  $\phi_{\alpha_n} \in X_{0,e}$  são soluções correspondentes obtidas pela Proposição 3.2.3 com velocidade de onda  $c_{\alpha_n}$ . A menos de subsequência, segue que

$$\phi_{\alpha_n} \rightarrow \phi_* \text{ em } V \cap L_{per}^4(\mathbb{T}) \text{ e } c_{\alpha_n} \rightarrow c_*,$$

onde  $c_* \in (\frac{1}{2}, +\infty)$  e  $\phi_*$  satisfaz (3.8). Mais ainda, o ramo máximo correspondente  $(\phi_\alpha, c_\alpha) \in C^1([\alpha_0, \alpha_*]; V \times (\frac{1}{2}, +\infty))$  se estende para  $\alpha_* = 2$ .

*Demonstração.* Inicialmente, supomos que  $\{c_{\alpha_n}\}_{n=1}^{+\infty} \subset (\frac{1}{2}, +\infty)$  não é uma sequência limitada. Então, para todo  $M > 0$  suficientemente grande, existe um índice  $m := n_M \in \mathbb{N}$  tal que  $c_{\alpha_m} > M$ . Assim, de (3.8) e do fato de que  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_n}^3 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^3 dx > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (D^{\alpha_m/2} \phi_{\alpha_m})^2 dx \leq \frac{1}{2M} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_n}^3 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^3 dx. \quad (3.69)$$

Como  $\alpha_m \geq \alpha_0$ , a imersão de Sobolev  $H_{per}^{\alpha_m/2}(\mathbb{T}) \cap X_{0,e} \hookrightarrow H_{per}^{\alpha_0/2}(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$  para todo  $\alpha_0 > \frac{1}{2}$  ocorre. Agora,  $f \mapsto \|D^s f\|_{L_{per}^2(\mathbb{T})}$  é uma norma equivalente no espaço  $H_{per}^s(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$  para todo  $s > 0$  e, conseqüentemente,  $\{\phi_{\alpha_m}\}_n$  é uma sequência limitada em  $H_{per}^{\alpha_0/2}(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$ . Uma vez que  $H_{per}^{\alpha_0/2}(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$  está compactamente imerso em  $V \hookrightarrow X_{0,e}$  e em  $L_{per}^4(\mathbb{T})$ , existe  $\phi_0 \in V \cap L_{per}^4(\mathbb{T})$  tal que, a menos de subsequência  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_m}^3 dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^3 dx > 0$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_m}^4 dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^4 dx > 0$  e  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_m}^2 dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^2 dx > 0$ , quando  $m \rightarrow +\infty$ . Por (3.8) e pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger, resulta que

$$0 \leq (2M - 1) \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_m}^2 dx \leq (2c_{\alpha_m} - 1) \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_m}^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^3 dx. \quad (3.70)$$

Quando  $m \rightarrow +\infty$ , obtemos de (3.70) uma contradição, então concluímos que  $\{c_{\alpha_n}\}_{n=1}^{+\infty}$  é uma sequência limitada em  $\mathbb{R}$ . Portanto, existe um  $c_* \in [\frac{1}{2}, +\infty)$  tal que, a menos de subsequência

$$c_{\alpha_n} \rightarrow c_*. \quad (3.71)$$

Por outro lado, o fato de que  $c_{\alpha_n} \rightarrow c_* \geq \frac{1}{2}$  nos permite obter,

$$0 \leq (2c_{\alpha_n} - 1) \|\phi_{\alpha_n}\|_{L_{per}^2}^2 \leq 2\mathcal{B}_{c_{\alpha_n}}(\phi_{\alpha_n}) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_n}^3 dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^3 dx,$$

usando novamente a desigualdade de Poincaré-Wirtinger. Conforme determinado acima, garantimos a existência de  $\phi_* \in V \cap L_{per}^4(\mathbb{T})$  de maneira que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_n}^3 dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \phi_*^3 dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_n}^2 dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \phi_*^2 dx, \quad (3.72)$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\alpha_n}^4 dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \phi_*^4 dx. \quad (3.73)$$

Em seguida, pela equação (3.8), obtemos a relação

$$D^{\alpha_n} \phi_{\alpha_n} = - \left(1 - \frac{1}{c_{\alpha_n}}\right) \phi_{\alpha_n} + \frac{1}{2c_{\alpha_n}} \phi_{\alpha_n}^2 - \frac{A(c_{\alpha_n})}{c_{\alpha_n}},$$

e então a sequência  $\{\phi_{\alpha_n}\}_n$  é limitada em  $H_{per}^{\alpha_n}(\mathbb{T})$ . Como  $\alpha_n > \frac{1}{2}$ , segue que  $H_{per}^{\alpha_n}(\mathbb{T})$  é uma Álgebra de Banach e portanto  $\{\phi_{\alpha_n}^2\}_n$  é limitada em  $H_{per}^{\alpha_n}(\mathbb{T})$ . De

$$D^{2\alpha_n}\phi_{\alpha_n} = -\left(1 - \frac{1}{c_{\alpha_n}}\right)D^{\alpha_n}\phi_{\alpha_n} + \frac{1}{2c_{\alpha_n}}D^{\alpha_n}\phi_{\alpha_n}^2, \quad (3.74)$$

temos que  $\{\phi_{\alpha_n}\}_n$  é limitada em  $H_{per}^{2\alpha_n}(\mathbb{T})$ . Seguindo com esse processo indutivo, existe  $r \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de modo que  $r\alpha_n > \alpha_*$  e  $\{\phi_{\alpha_n}\}_n$  é limitada em  $H_{per}^{r\alpha_n}(\mathbb{T})$ . Pela imersão compacta  $H_{per}^{r\alpha_n}(\mathbb{T}) \hookrightarrow H_{per}^{\alpha_*}(\mathbb{T})$ , temos (a menos de subsequência)

$$\phi_{\alpha_n} \rightarrow \phi_* \text{ in } H_{per}^{\alpha_*}(\mathbb{T}), \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \quad (3.75)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|D^{\alpha_n}\phi_{\alpha_n} - D^{\alpha_*}\phi_*\|_{L_{per}^2} &\leq \|D^{\alpha_n}(\phi_{\alpha_n} - \phi_*)\|_{L_{per}^2} + \|D^{\alpha_n}\phi_* - D^{\alpha_*}\phi_*\|_{L_{per}^2} \\ &\leq \|D^{\alpha_*}(\phi_{\alpha_n} - \phi_*)\|_{L_{per}^2} + \|D^{\alpha_n}\phi_* - D^{\alpha_*}\phi_*\|_{L_{per}^2}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Obtemos de (3.75), (3.76) e do fato de que  $\alpha_n \rightarrow \alpha_*$ , a convergência

$$D^{\alpha_n}\phi_{\alpha_n} \rightarrow D^{\alpha_*}\phi_* \text{ em } L_{per}^2(\mathbb{T}), \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \quad (3.77)$$

Por (3.71), pela segunda convergência em (3.72) e (3.73), deduzimos de (3.77) que  $\phi_*$  satisfaz a equação

$$c_*D^{\alpha_*}\phi_* + (c_* - 1)\phi_* - \frac{1}{2}\phi_*^2 + A(c_*) = 0. \quad (3.78)$$

Como  $\phi_*$  satisfaz (3.78), pela Proposição 3.2.3, podemos estender o ramo  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$  além de  $\alpha_*$ , o que contradiz a propriedade de maximalidade de  $\alpha_*$ . Esse fato prova que  $\alpha_* = 2$ .

Finalmente, resta estabelecermos que  $c_* > \frac{1}{2}$ . Se  $c_* = \frac{1}{2}$ , a única possibilidade para a solução suave  $\phi_* \in H_{per}^\infty(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$  de (3.78) com  $\alpha_* = 2$  é que  $\phi_* \equiv 0$  (a suavidade é obtida utilizando argumentos de bootstrap). Esse fato gera uma contradição, uma vez que  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_*^3 dx > 0$ .  $\square$

**Observação 3.2.5.** Segue imediatamente da hipótese (3.57) a seguinte igualdade acerca do número de autovalores negativos

$$n(\mathcal{L}_{\alpha_n}) = n(\mathcal{L}_*) = 1,$$

onde  $\mathcal{L}_{\alpha_n} = c_{\alpha_n}D^{\alpha_n} + (c_{\alpha_n} - 1) - \phi_{\alpha_n}$  e  $\mathcal{L}_* = c_*D^{\alpha_*} + (c_* - 1) - \phi_*$  indica os operadores linearizados em torno das ondas periódicas  $\phi_{\alpha_n}$  e  $\phi_*$ , respectivamente.

**Observação 3.2.6.** A solução explícita para a equação (3.78) com  $\alpha_* = 2$  depende da função elíptica de Jacobi do tipo dnoidal e é dada por

$$\phi_*(x) = a_* \left( \operatorname{dn}^2 \left( \frac{K(\kappa)}{\pi} x, \kappa \right) - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \right), \quad (3.79)$$

onde

$$a_* = 12c_* \frac{K(\kappa)^2}{\pi^2}. \quad (3.80)$$

O valor de  $c_*$  pode ser expresso por

$$c_* = \frac{\pi^2}{(4\kappa^2 - 8)K(\kappa)^2 + 12K(\kappa)E(\kappa) + \pi^2}, \quad (3.81)$$

onde  $K$  e  $E$  são, respectivamente, a integral elíptica completa do primeiro e segundo tipo. Ambas funções dependem do módulo da função elíptica de Jacobi  $\kappa \in (0, 1)$ . Para essa solução, a constante de integração

$$A(c_*) = \frac{(384\kappa^2 - 384)K(\kappa)^4 + (1536 - 768\kappa^2)E(\kappa)K(\kappa)^3 - 1152E(\kappa)^2K(\kappa)^2}{[(-32 + 16\kappa^2)K(\kappa)^2 + 48E(\kappa)K(\kappa) + 4\pi^2]^2} \quad (3.82)$$

é obtida a partir de cálculos simbólicos usando o programa matemático Maple 13. Pelas expressões explícitas dadas em (3.81) e (3.82), respectivamente, é possível ver que  $c_*$  e  $A(c_*)$  são funções estritamente monótonas em termos de  $\kappa \in (0, \kappa_0)$ , onde  $\kappa_0 \approx 0.994$  é o único zero da função  $p(\kappa) = (4\kappa^2 - 8)K(\kappa)^2 + 12K(\kappa)E(\kappa) + \pi^2$ . Além disso, temos que

$$c_* \rightarrow \frac{1}{2}^+ \quad \text{e} \quad A(c_*) \rightarrow 0^+, \quad \text{quando} \quad \kappa \rightarrow 0^+.$$

Por (3.81), notamos que o limite  $c_* > \frac{1}{2}$  independe da sequência  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$  apresentada pela Proposição 3.2.4. Mais ainda, como  $\phi_*$  é única para cada  $c_*$  fixado e satisfaz  $c_* > \frac{1}{2}$ , concluímos que o limite  $\phi_*$  é também independente de  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .

Reunindo todos os resultados enunciados acima, podemos agora provar o resultado de unicidade.

**Teorema 3.2.7.** Seja  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$  fixado. Se (3.57) ocorre, então a solução obtida no Lema 3.2.1 é única.

*Demonstração.* Suponhamos que  $\phi_0$  e  $\tilde{\phi}_0$  sejam duas soluções distintas do problema de minimização (3.36) obtidas pelo Lema 3.2.1, ambas com velocidade de onda correspondente  $c_0$ . Por (3.33), obtemos que  $\phi_0$  e  $\tilde{\phi}_0$  satisfazem a igualdade

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^3 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_0^3 dx. \quad (3.83)$$

Conseqüentemente, pela Proposição 3.2.4, existem dois ramos globais de soluções  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$ ,  $(\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{c}_\alpha) \in C^1([\alpha_0, 2); V \times (\frac{1}{2}, +\infty))$  que satisfazem o problema (3.8) com  $c_\alpha, \tilde{c}_\alpha \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ . Mais ainda, temos  $(\phi_{\alpha_0}, c_{\alpha_0}) = (\phi_0, c_0)$  e  $(\tilde{\phi}_{\alpha_0}, \tilde{c}_{\alpha_0}) = (\tilde{\phi}_0, c_0)$ . Notemos que, pela unicidade local obtida na Proposição 3.2.3, os ramos  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$  e  $(\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{c}_\alpha)$  não se intersectam. Adicionalmente, pela Proposição 3.2.4 temos satisfeitas as seguintes condições

$$\phi_\alpha \rightarrow \phi_* \text{ em } V \cap L^4_{per}(\mathbb{T}) \text{ e } c_\alpha \rightarrow c_*, \text{ quando } \alpha \rightarrow 2 \quad (3.84)$$

e

$$\tilde{\phi}_\alpha \rightarrow \tilde{\phi}_* \text{ em } V \cap L^4_{per}(\mathbb{T}) \text{ e } \tilde{c}_\alpha \rightarrow \tilde{c}_* \text{ quando } \alpha \rightarrow 2. \quad (3.85)$$

Dessa forma, as funções  $\phi_*$  e  $\tilde{\phi}_*$  são soluções únicas em  $V \cap L^4_{per}(\mathbb{T})$  das equações

$$-c_*\phi_*'' + (c_* - 1)\phi_* - \frac{1}{2}\phi_*^2 + A(c_*) = 0 \quad (3.86)$$

e

$$-\tilde{c}_*\tilde{\phi}_*'' + (\tilde{c}_* - 1)\tilde{\phi}_* - \frac{1}{2}\tilde{\phi}_*^2 + A(\tilde{c}_*) = 0, \quad (3.87)$$

respectivamente. Além disso, como  $\phi_\alpha$  e  $\tilde{\phi}_\alpha$  satisfazem o item (iii) da Proposição 3.2.3 obtemos, utilizando (3.83), a seguinte relação

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_\alpha^3 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^3 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_0^3 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_\alpha^3 dx. \quad (3.88)$$

Pelas primeiras convergências dadas em (3.84) e (3.85), obtemos, respectivamente,  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_\alpha^3 dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \phi_*^3 dx$  e  $\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_\alpha^3 dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_*^3 dx$ . Logo, por (3.88) resulta que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_*^3 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_*^3 dx. \quad (3.89)$$

Mostremos que  $c_* = \tilde{c}_*$ . Com efeito, para  $\alpha_* = 2$ , consideremos  $\varphi := \varphi_\kappa$  uma solução da equação

$$-c\varphi'' + (c - 1)\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 + A(c) = 0, \quad (3.90)$$

dada por (3.79), com velocidade de onda correspondente  $\omega := \omega_\kappa > \frac{1}{2}$ . Derivando a equação (3.90) com relação ao parâmetro  $\omega$ , obtemos

$$-\omega \frac{d}{d\omega} \varphi'' - \omega \varphi'' + (\omega - 1) \frac{d}{d\omega} \varphi + \varphi - \varphi \frac{d}{d\omega} \varphi + \frac{d}{d\omega} A(\omega) = 0. \quad (3.91)$$



Multiplicando (3.91) por  $\varphi$ , integrando o resultado sobre o intervalo  $[-\pi, \pi]$  e fazendo uso de integração por partes, segue que

$$\frac{\omega}{2} \frac{d}{d\omega} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi')^2 + \varphi^2 dx \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi')^2 + \varphi^2 dx - \frac{1}{3} \frac{d}{d\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^3 dx = 0. \quad (3.92)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (3.90) por  $\varphi$  e integrando o resultado sobre o intervalo  $[-\pi, \pi]$ , obtemos

$$\omega \left( \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi')^2 + \varphi^2 dx \right) - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^3 dx = 0. \quad (3.93)$$

Derivando a expressão (3.93) com relação a  $\omega$ , resulta que

$$\frac{\omega}{2} \frac{d}{d\omega} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi')^2 + \varphi^2 dx \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi')^2 + \varphi^2 dx \right) - \frac{1}{4} \frac{d}{d\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^3 dx = 0. \quad (3.94)$$

Combinando as relações (3.92) e (3.94), obtemos que

$$\frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi')^2 + \varphi^2 dx \right) - \frac{1}{12} \frac{d}{d\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^3 dx = 0$$

e, equivalentemente,

$$\frac{d}{d\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^3 dx = 6 \left( \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi')^2 + \varphi^2 dx \right) > 0. \quad (3.95)$$

De acordo com a Observação 3.2.6, temos que  $\omega$  é dado explicitamente por

$$\omega = \frac{\pi^2}{(4\kappa^2 - 8)K(\kappa)^2 + 12K(\kappa)E(\kappa) + \pi^2}. \quad (3.96)$$

Além disso, segue de (3.96) que  $\omega$  é uma função positiva e estritamente crescente para todo  $\kappa \in (0, 1)$  (veja a Figura 3.1). Logo, temos que  $\frac{d}{d\kappa}\omega > 0$ .

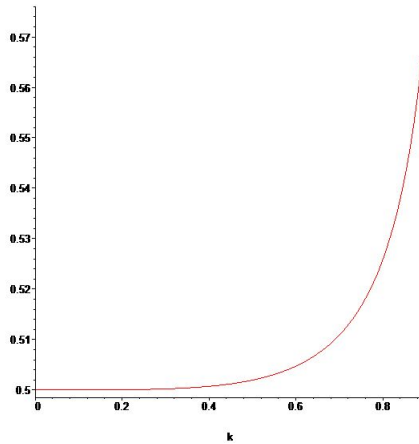


Figura 3.1: Gráfico de  $\omega$  dado em (3.96)

Dessa forma, como (3.95) ocorre, obtemos que

$$\frac{d}{d\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^3 dx = \frac{d}{d\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^3 dx \cdot \frac{d}{d\kappa} \omega > 0, \quad (3.97)$$

para todo  $\kappa \in (0, 1)$ , ou seja, a função  $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^3 dx$  é estritamente crescente nesse intervalo e, portanto, injetora. Assim, considerando  $\kappa_*$  e  $\tilde{\kappa}_*$  os módulos correspondentes a  $c_*$  e  $\tilde{c}_*$ , respectivamente, obtemos pela igualdade (3.89) e por (3.97) que  $\kappa_* = \tilde{\kappa}_*$ . Consequentemente, utilizando as formas explícitas para as soluções das equações (3.86) e (3.87) (veja a Observação 3.2.6), concluímos as igualdades  $c_* = \tilde{c}_*$  e  $\phi_* = \tilde{\phi}_*$ .

Conforme a Observação 3.2.5, o operador linearizado em torno da onda  $\phi_*$ , denotado por  $\mathcal{L}_*$ , satisfaz  $n(\mathcal{L}_*) = 1$ . Logo, pela Proposição 3.2.3 existe um ramo local  $(\phi_\alpha, c_\alpha) \in C^1((2 - \delta, 2], V \times (\frac{1}{2}, +\infty))$ , para algum  $\delta > 0$ , tal que

$$-c_\alpha \phi_\alpha'' + (c_\alpha - 1)\phi_\alpha - \frac{1}{2}\phi_\alpha^2 + A(c_\alpha) = 0.$$

Adicionalmente,  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$  é a única solução para  $\alpha \in (2 - \delta, 2]$  em uma vizinhança  $\{(\phi, c) \in V \times (\frac{1}{2}, +\infty); \|\phi - \phi_*\|_V + |c - c_*| < \varepsilon\}$ , onde  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno.

Em vista das convergências dadas em (3.84) e (3.85), observamos que  $\phi_\alpha \rightarrow \phi_*$  e  $\tilde{\phi}_\alpha \rightarrow \phi_*$  em  $V \cap L^4_{per}(\mathbb{T})$  e, também,  $c_\alpha \rightarrow c_*$  e  $\tilde{c}_\alpha \rightarrow c_*$  quando  $\alpha \rightarrow 2$ . Com isso, podemos concluir que os ramos  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$  e  $(\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{c}_\alpha)$  devem se intersectar em algum  $\alpha \in [\alpha_0, 2)$ . Porém, esse fato contradiz a unicidade local dos ramos  $(\phi_\alpha, c_\alpha)$  e  $(\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{c}_\alpha)$  dada pela Proposição 3.2.3. Portanto, a solução obtida pelo Lema 3.2.1 é única, como queríamos.  $\square$

**Observação 3.2.8.** Vale ressaltar que o Teorema 3.2.7 corresponde de certa forma com o resultado de unicidade para ondas positivas e periódicas associadas à equação Korteweg-de Vries fracionária como em [46]. Os autores utilizam o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii's e três fatos adicionais:

- i)  $n(\mathcal{L}) = 1$ .
- ii)  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$ .
- iii)  $\alpha \in (0.5849, 2]$ .

### 3.3 Existência de Soluções de Pequena Amplitude

Seja  $0 < \alpha \leq 2$ . Nesta seção, determinaremos a existência de soluções ondas periódicas pares de pequena amplitude para o problema de valor de contorno (3.8). Mostraremos que essas soluções são dadas pela expansão de Stokes correspondente da onda para  $c$  próximo de  $\frac{1}{2}$ .

Com o propósito de obtermos as ondas periódicas de pequena amplitude para o problema (3.8), usaremos argumentos contidos em [23, Capítulo 8.4] (veja também [22, Seção 5]). Nossa intenção é dar

uma prova rigorosa da existência deduzindo a forma exata da onda utilizando fórmulas de bifurcação e não aquelas obtidas por uma substituição direta do ansatz (o que é muito recorrente na literatura). Realizaremos esse tipo de substituição apenas para a velocidade da onda  $c$  e a constante  $A$ .

Para  $\alpha \in (0, 2]$ , seja  $F : H_{per}^\alpha(\mathbb{T}) \cap X_{0,e} \times (0, +\infty) \rightarrow X_{0,e}$  a aplicação definida por

$$F(g, \omega) := \omega D^\alpha g + (\omega - 1)g - \frac{1}{2}\Pi_0 g^2. \quad (3.98)$$

Observamos que  $F$  é suave em ambas variáveis  $g$  e  $\omega$ . Ademais,  $F(g, \omega) = 0$  se, e somente se,  $g$  é uma solução do problema (3.8) com velocidade de onda correspondente  $\omega \in (0, +\infty)$ . Em particular, é fácil vermos que  $F(0, \omega) = 0$  para todo  $\omega \in (0, +\infty)$ .

A derivada de Fréchet associada à função  $F$  com relação a  $g$  é dada por

$$D_g F(g, \omega) : H_{per}^\alpha(\mathbb{T}) \cap X_{0,e} \rightarrow X_{0,e}, \quad f \mapsto (\omega D^\alpha + \omega - 1 - \Pi_0 g)f. \quad (3.99)$$

Consideremos  $c_0 > 0$  fixado e seja o operador linearizado correspondente  $\mathcal{L}$  em torno da onda  $\phi$  definido como em (3.10). Notemos que a derivada (3.99) no ponto  $(\phi, c_0)$  torna-se exatamente o operador projetor autoadjunto  $\mathcal{L}|_{X_0} : H_{per}^\alpha(\mathbb{T}) \cap X_{0,e} \subset X_{0,e} \rightarrow X_{0,e}$  dado por  $\mathcal{L}|_{X_0} = \mathcal{L} + \frac{1}{2\pi}\langle \phi, \cdot \rangle$ . Além disso, no ponto  $(0, c_0)$  temos

$$D_g F(0, c_0) = c_0 D^\alpha + c_0 - 1. \quad (3.100)$$

Notemos que o núcleo não trivial de  $D_g F(0, c_0)$  é determinado pelas funções  $h \in H_{per}^\alpha(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$  que satisfazem

$$\widehat{h}(k)((c_0 - 1) + c_0 |k|^\alpha) = 0, \quad k \neq 0. \quad (3.101)$$

Assim,  $D_g F(0, c_0)$  possui núcleo unidimensional se, e somente se,  $c_0 = (1 + |k|^\alpha)^{-1}$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , que nesse caso é dado por

$$\ker D_g F(0, c_0) = [\tilde{\phi}_k(x)], \quad (3.102)$$

onde  $\tilde{\phi}_k(x) = \cos(xk)$ .

A teoria local de bifurcação contida em [23, Capítulo 8.4] (veja também [22, Seção 5]) nos permite garantir a existência de um intervalo aberto  $\mathcal{I}$  contendo  $c_0 = (1 + |k|^\alpha)^{-1}$ , uma bola aberta  $B_r \in H_{per}^\alpha(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$  centrada em  $g = 0$  com raio  $r > 0$  e uma única aplicação suave  $c \in \mathcal{I} \mapsto \phi(c) \in H_{per}^\alpha(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$ , tal que  $F(\phi(c), c) = 0$  para todo  $c \in \mathcal{I}$  e  $\phi(c_0) = 0$ . Em outras palavras, toda solução de  $F(g, \omega) = 0$  tem a forma  $(\phi(c), c)$ .

Para cada inteiro  $k \geq 1$  o ponto  $(0, \tilde{c}_k)$ , onde  $\tilde{c}_k := (1 + k^\alpha)^{-1}$ , é um ponto de bifurcação. Além

disso, existe  $a_0 > 0$  e uma curva local de bifurcação  $a \in (0, a_0) \mapsto (\phi_k(a), c_k(a))$  passando por  $(0, \tilde{c}_k)$  constituída por soluções  $\frac{2\pi}{k}$ -periódicas pares do problema de valor de contorno (3.8). Adicionalmente, temos que  $c_k(0) = \tilde{c}_k$ ,  $D_a \phi_k(0) = \tilde{\phi}_k(x) = \cos(xk)$  e todas as soluções de  $F(g, \omega) = 0$  em uma vizinhança de  $(0, \tilde{c}_k)$  pertencem à curva acima e dependem do parâmetro  $a$ .

No resultado seguinte, usaremos o Teorema 5.4 em [22] para obtermos que a curva local de bifurcação acima se estende a uma curva global suave  $s \in (0, +\infty) \mapsto (\phi_k(s), c_k(s))$  de soluções de  $F(g, \omega) = 0$ . Por fim, usaremos o método de redução de Lyapunov-Schmidt *com o intuito de obtermos a expansão de Stokes explícita da onda  $\phi$  para  $c$  próximo e a direita de  $\frac{1}{2}$* .

Seja  $k \in \mathbb{N}$  fixado e consideremos a decomposição  $H_{per}^\alpha(\mathbb{T}) \cap X_{0,e} = L \oplus K$ , onde

$$L := \text{span}\{\cos(xl); l \neq k\} \quad \text{e} \quad K := \ker D_g F(0, c_0) = [\tilde{\phi}_k].$$

A projeção no espaço  $K$  é dada por  $\Pi_K f = \tilde{\phi}_k \langle f, \tilde{\phi}_k \rangle$ .

**Proposição 3.3.1.** Para todo  $\alpha \in (0, 2]$ , existe  $a_0 > 0$  tal que para todo  $a \in (0, a_0)$  existe uma única solução periódica par  $\phi$  local para o problema de valor de contorno (3.8) dada pelas seguintes expansões de Stokes:

$$\phi(x) = a \cos(x) + \frac{a^2}{2(2^\alpha - 1)} \cos(2x) + O(a^3) \quad (3.103)$$

e

$$c = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{4(2^\alpha + 1)(2^\alpha - 1)} + O(a^4). \quad (3.104)$$

Além disso, a constante  $A$  é dada por

$$A(c) = \frac{a^2}{4} + O(a^4). \quad (3.105)$$

O par  $(\phi, c) \in H_{per}^\alpha(\mathbb{T}) \cap X_{0,e} \times (\frac{1}{2}, +\infty)$  é global em termos do parâmetro  $c > \frac{1}{2}$  e satisfaz a equação (3.8).

*Demonstração.* A segunda parte da proposição é dada exatamente pelo Teorema 5.4 em [22]. Para provarmos a primeira parte, faremos uso de uma ligeira modificação da prova contida em [22, Teorema 5.6]. Inicialmente, mostraremos a expansão de Stokes para  $\phi_k$  e, em seguida, obteremos a expansão de Stokes de  $c_k$  a fim de obtermos uma curva local de bifurcação  $a \in (0, a_0) \mapsto (\phi_k(a), c_k(a))$  passando por  $(0, \tilde{c}_k)$ , que pode ser estendida para uma curva global de bifurcação (veja [22, Teorema 5.4]).

A redução de Lyapunov-Schmidt reduz o problema  $F(g, \omega) = 0$  para  $(g, \omega) \in U \times V$ , onde  $U \times V \subset H_{per}^\alpha(\mathbb{T}) \cap X_{0,e} \times (0, +\infty)$  é uma vizinhança do ponto de bifurcação  $(0, \tilde{c}_k)$ , a um problema

unidimensional equivalente

$$\Phi(a\tilde{\phi}_k, \omega) := \Pi_K F(a\tilde{\phi}_k + \varphi(a\tilde{\phi}_k, \omega), \omega) = 0, \quad (3.106)$$

para funções suaves  $\varphi : \tilde{U} \times V \subset K \times (0, +\infty) \rightarrow L$ . Além disso, temos que  $\Phi(0, \tilde{c}_k) = \varphi(0, \tilde{c}_k) = D_g \varphi(0, \tilde{c}_k) = 0$ . Resolvendo o problema (3.106), obtemos uma solução  $g = a\tilde{\phi}_k + \varphi(a\tilde{\phi}_k, \omega)$  do problema  $F(g, \omega) = 0$ . Assim, temos que

$$\phi_k(a) = a\tilde{\phi}_k + \varphi(a\tilde{\phi}_k, c_k(a)). \quad (3.107)$$

Então,  $\phi_k(0) = 0$  e  $\dot{\phi}_k(0) = \tilde{\phi}_k$  ( $\cdot := \frac{d}{da}$ ), uma vez que

$$\dot{\phi}_k(a) = \tilde{\phi}_k + D_g \varphi(a\tilde{\phi}_k, c_k(a))\tilde{\phi}_k + D_\omega \varphi(a\tilde{\phi}_k, c_k(a))\dot{c}_k(a). \quad (3.108)$$

Em seguida, calculemos  $\ddot{\phi}_k$  com o propósito de estabelecermos (3.103). Derivando (3.108) e considerando  $a = 0$  obtemos que

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_k(0) &= D_{gg}^2 \varphi(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k] + 2D_{g\omega}^2 \varphi(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \dot{c}_k(0)] \\ &+ D_{\omega\omega}^2 \varphi(0, \tilde{c}_k)[\dot{c}_k(0), \dot{c}_k(0)] + D_\omega \varphi(0, \tilde{c}_k)\dot{c}_k(0). \end{aligned}$$

O valor de  $\dot{c}_k(0)$  pode ser obtido explicitamente utilizando a fórmula de bifurcação contida em [44, Seção 6], dada por

$$\dot{c}_k(0) = -\frac{1}{2} \frac{\langle D_{gg}^2 F(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k], \tilde{\phi}_k \rangle}{\langle D_{g\omega}^2 F(0, \tilde{c}_k)\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k \rangle}.$$

Com efeito, posto que a derivada de Fréchet de  $F$  aplicada no ponto  $(0, \tilde{c}_k)$  com relação a  $g$  é dada por  $D_g F(0, \tilde{c}_k)\tilde{\phi}_k = (\tilde{c}_k D^\alpha + \tilde{c}_k - 1 - \Pi_0 g)\tilde{\phi}_k$ , após uma segunda derivação com relação a  $g$  e com relação a  $\omega$  obtemos, respectivamente,

$$D_{gg}^2 F(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k] = -\Pi_0(\tilde{\phi}_k)^2$$

e

$$D_{g\omega}^2 F(0, \tilde{c}_k)\tilde{\phi}_k = (D^\alpha + 1)\tilde{\phi}_k.$$

Como  $\int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{\phi}_k)^3 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_k dx = 0$ , temos que

$$\langle D_{gg}^2 F(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k], \tilde{\phi}_k \rangle = \langle -\Pi_0(\tilde{\phi}_k)^2, \tilde{\phi}_k^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{\phi}_k)^3 dx + \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{\phi}_k)^2 dx \right) \left( \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_k dx \right) = 0$$

e, conseqüentemente,  $\dot{c}_k(0) = 0$ . Logo, sabendo que  $D_g\varphi(0, \tilde{c}_k) = 0$ , segue que

$$\ddot{\phi}_k(0) = D_{gg}^2\varphi(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k]. \quad (3.109)$$

Para determinarmos  $D_{gg}^2\varphi(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k]$ , usaremos a seguinte igualdade

$$(1 - \Pi_K)F(g + \varphi(g, \omega), \omega) = 0.$$

Derivando a igualdade acima com relação a  $g$ , obtemos

$$(1 - \Pi_K)D_gF(g + \varphi(g, \omega), \omega)[\tilde{\phi}_k + D_g\varphi(g, \omega)\tilde{\phi}_k] = 0. \quad (3.110)$$

Agora, derivando (3.110) em relação a  $g$  e aplicando o resultado no ponto  $(0, \tilde{c}_k)$ , segue que

$$(1 - \Pi_K)D_{gg}^2F(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k] + (1 - \Pi_K)D_gF(0, \tilde{c}_k)D_{gg}^2\varphi(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k] = 0.$$

Tendo em vista que  $D_gF(0, \tilde{c}_k)$  define um isomorfismo em  $L$  (veja Seção I.6 em [44]) e como  $(1 - \Pi_K) : L_{per}^2(\mathbb{T}) \rightarrow K^\perp$  implica em  $(1 - \Pi_K)D_gF(0, \tilde{c}_k) = D_gF(0, \tilde{c}_k)$ , obtemos que

$$\begin{aligned} D_{gg}^2\varphi(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k] &= -(D_gF(0, \tilde{c}_k))^{-1}(1 - \Pi_K)D_{gg}^2F(0, \tilde{c}_k)[\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k] \\ &= -(D_gF(0, \tilde{c}_k))^{-1}(1 - \Pi_K) \left( -(\tilde{\phi}_k)^2 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{c}_k)^{-1} \left( D^\alpha + \frac{\tilde{c}_k - 1}{\tilde{c}_k} \right)^{-1} \cos(2xk) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos(2xk)}{\tilde{c}_k - 1 + \tilde{c}_k(2k)^\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, segue de (3.109) que

$$\ddot{\phi}_k(0) = \frac{1}{2} \frac{\cos(2xk)}{\tilde{c}_k - 1 + \tilde{c}_k(2k)^\alpha}.$$

Como  $\tilde{c}_k = (1 + k^\alpha)^{-1}$ , para  $k \geq 1$  fixado obtemos que

$$\ddot{\phi}_k(0) = \frac{(1 + k^{-\alpha})}{2(2^\alpha - 1)} \cos(2xk)$$

e, conseqüentemente, podemos escrever a seguinte expansão em série de Maclaurin

$$\phi_k(a) = a \cos(xk) + a^2 \frac{(1 + k^{-\alpha})}{4(2^\alpha - 1)} \cos(2xk) + O(a^3).$$

Assumindo  $k = 1$  e definindo  $\phi_k := \phi$ , obtemos exatamente (3.103), ou seja, obtemos a expansão de Stokes associada a solução periódica  $\phi$ .

Finalmente, substituindo a solução (3.103) no problema de valor de contorno (3.8) e realizando alguns fatores de correções obtemos a expansão desejada (3.104) associada ao parâmetro  $c$ . Adicionalmente, uma vez que a constante de integração  $A(c)$  é definida por (3.7), a partir de (3.103) concluímos (3.105).  $\square$

**Observação 3.3.2.** Vale mencionar que na prova de [22, Teorema 5.6] encontramos alguns argumentos equivocados. De fato, os autores realizaram alguns cálculos sem considerar restrições convenientes no espaço periódico de média zero. Logo, acreditamos que a expansão de Stokes correta a ser considerada no caso deles é dada por (3.103).

Em seguida, mostraremos que  $q_c$  dado em (3.34) é contínuo em  $c$  para  $c > \frac{1}{2}$  e, também,  $q_c \rightarrow 0$  quando  $c \rightarrow \frac{1}{2}$ . Esse fato nos fornece que as ondas de Stokes obtidas pela Proposição 3.3.1 satisfazem o problema de minimização (3.36) para  $c \rightarrow \frac{1}{2}^+$ .

**Proposição 3.3.3.** Consideremos  $\phi \in Y_0$  uma solução do problema de minimização obtida no Lema 3.2.1 e  $q_c = \mathcal{B}_c(\phi)$ . Então,  $q_c$  é contínuo em  $c$  para  $c > \frac{1}{2}$  e  $q_c \rightarrow 0$  quando  $c \rightarrow \frac{1}{2}$ .

*Demonstração.* Para  $u \in Y_0$  fixado e para todo  $c' > c > \frac{1}{2}$ , temos a seguinte desigualdade

$$0 \leq \mathcal{B}_{c'}(u) - \mathcal{B}_c(u) \leq \frac{1}{2}(c' - c)D\|u\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}}^2,$$

onde  $D > 0$  é uma constante positiva a qual não depende de  $c$  e  $c'$ , e isso segue do fato de  $\int_{-\pi}^{\pi} (D^{\frac{\alpha}{2}}u)^2 + u^2 dx$  ser uma norma equivalente em  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ .

Sejam  $\mathcal{B}_c(\phi) = q_c$  e  $\mathcal{B}_{c'}(\phi') = q_{c'}$ . Logo,

$$q_{c'} - q_c = \mathcal{B}_{c'}(\phi') - \mathcal{B}_c(\phi') + \mathcal{B}_c(\phi') - \mathcal{B}_c(\phi) \geq \mathcal{B}_{c'}(\phi') - \mathcal{B}_c(\phi') \geq 0$$

e

$$q_{c'} - q_c = \mathcal{B}_{c'}(\phi') - \mathcal{B}_{c'}(\phi) + \mathcal{B}_{c'}(\phi) - \mathcal{B}_c(\phi) \leq \mathcal{B}_{c'}(\phi) - \mathcal{B}_c(\phi) \leq \frac{1}{2}(c' - c)D\|u\|_{H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}}^2.$$

Assim, resulta que  $q_{c'} \rightarrow q_c$  quando  $c' \rightarrow c$  e obtemos que  $q_c$  é contínuo em  $c$  para  $c > \frac{1}{2}$ . Desse modo, resta agora mostrarmos que  $q_c \rightarrow 0$  quando  $c \rightarrow \frac{1}{2}$ . Com efeito, para  $u \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ , consideremos o funcional

$$\tilde{\mathcal{B}}_c(u) = \frac{1}{c}\mathcal{B}_c(u) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (D^{\frac{\alpha}{2}}u)^2 + \left(1 - \frac{1}{c}\right) u^2 dx.$$

Notemos que  $\phi$  satisfaz  $\tilde{\mathcal{B}}_c(\phi) = \frac{qc}{c}$  e  $\frac{qc}{c}$  é contínuo em  $c$  para  $c > \frac{1}{2}$ . Definamos a seguinte família de funções auxiliares em  $Y_0$

$$u_\mu(x) = \mu \cos(x) + \frac{2}{3\pi\mu^2} \cos(2x), \quad \mu > 0.$$

Substituindo  $u_\mu$  em  $\tilde{\mathcal{B}}_c(u)$ , concluímos utilizando um procedimento similar ao realizado em [53, Lema 2.3] que

$$\tilde{\mathcal{B}}_c(u_\mu) = \frac{\pi}{2} \left[ \mu^2 \left( 2 - \frac{1}{c} \right) + \frac{4}{9\pi^2\mu^4} \left( 2^\alpha + 1 - \frac{1}{c} \right) \right] \geq \frac{3\pi \left( 2^\alpha + 1 - \frac{1}{c} \right)^{1/3} \left( 2 - \frac{1}{c} \right)^{2/3}}{2(3\pi)^{2/3}}.$$

Portanto, obtemos

$$0 \leq q_c \leq \frac{3\pi \left( 2^\alpha + 1 - \frac{1}{c} \right)^{1/3} \left( 2 - \frac{1}{c} \right)^{2/3}}{2(3\pi)^{2/3}},$$

mostrando que  $q_c \rightarrow 0$  quando  $c \rightarrow \frac{1}{2}^+$ .

□

No resultado que segue, estabeleceremos boas propriedades espectrais para o operador linearizado  $\mathcal{L}$  dado em (3.10) em torno da solução single-lobe  $\phi$  obtida no Lema 3.2.1, conhecendo informações espectrais para o mesmo operador em torno das ondas de Stokes obtidas pela Proposição 3.3.1.

**Proposição 3.3.4.** Para  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$  fixado, suponhamos que  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  para todo  $c > \frac{1}{2}$ . Então, o espectro do operador linearizado  $\mathcal{L}$  em (3.10) em torno do minimizador periódico  $\phi$  obtido pelo Lema 3.2.1, consiste em um autovalor negativo simples e uma sequência ilimitada de autovalores positivos longe de zero. Além disso, para essas ondas, temos  $\ker(\mathcal{L}|_{X_0}) = [\phi']$ .

*Demonstração.* De acordo com a Proposição 3.2.2, o número de autovalores negativos de  $\mathcal{L}$  pode mudar nas continuações do parâmetro  $c$  se, e somente se, os autovalores passarem pelo autovalor zero. Para as ondas de Stokes  $\phi$  obtidas pela Proposição 3.3.1, notemos que  $c \in (\frac{1}{2}, +\infty) \mapsto \phi \in H_{per}^\infty(\mathbb{T})$  é suave. Além disso, segue de (3.104) e (3.105) a seguinte expansão

$$d = 1 + 2A(c) - c - cA'(c) = \frac{1 - 16^\alpha + 14 \cdot 2^{-2+2\alpha} - 3}{4^\alpha - 1} + O(a^3). \quad (3.111)$$

Para  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ , temos  $d < 0$  e pela Proposição 3.2.2, isso significa que o operador  $\mathcal{L}$  em torno das ondas de Stokes  $\phi$  satisfaz  $n(\mathcal{L}) = z(\mathcal{L}) = 1$ . Como  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$ , pelos argumentos de continuidade e unicidade determinados no Teorema 3.2.7, o número de autovalores não muda nas continuações de  $c$ . Logo, obtemos um autovalor negativo simples para o operador linearizado  $\mathcal{L}$  em torno da solução single-lobe  $\phi$  determinada pelo Lema 3.2.1 para todo  $c > \frac{1}{2}$ . Como consequência desse fato, resulta



também que  $\ker(\mathcal{L}|_{X_0}) = [\phi']$ . Além disso, o restante do espectro de  $\mathcal{L}$  é formado por uma sequência ilimitada de autovalores positivos longe do autovalor zero para todo  $c > \frac{1}{2}$ .

□

Uma consequência imediata da Proposição 3.3.4 é a unicidade do minimizador periódico  $\phi$  obtido pela Lema 3.2.1. Mais precisamente, temos o seguinte resultado

**Corolário 3.3.5.** Para  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$  fixado, assumamos que  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  para todo  $c > \frac{1}{2}$ . O minimizador periódico  $\phi$  obtido pelo Lema 3.2.1 é único.

*Demonstração.* Pela Proposição 3.3.4, temos que  $n(\mathcal{L}) = 1$ , ou seja, a hipótese do Teorema 3.2.7 é satisfeita e, portanto, obtemos o desejado. □

**Observação 3.3.6.** Seja  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$  fixado. A Proposição 3.3.4 nos fornece um importante aspecto para o perfil single-lobe  $\phi$  obtido pelo Lema 3.2.1. De fato, como  $n(\mathcal{L}) = 1$ , segue de (3.59) que  $\ker(\mathcal{L}|_{X_0}) = [\phi']$ . Esse fato nos permite usar um resultado similar ao contido em [53, Lema 3.8] para obter a existência de uma curva suave  $\omega \in I \mapsto \varphi_\omega \in H_{per}^\infty(\mathbb{T}) \cap X_{0,e}$  de ondas periódicas para a equação (3.8), onde  $I \subset (\frac{1}{2}, +\infty)$  é um intervalo aberto contendo  $c$ . Vale ressaltar que não podemos garantir se  $\varphi_\omega$  resolve o problema de minimização (3.36), exceto em  $\omega = c$ , onde  $\varphi_\omega = \phi$ . Em contrapartida, os argumentos de continuidade nos permitem deduzir para essas ondas que se  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  para todo  $c > \frac{1}{2}$ , então  $n(\mathcal{L}) = 1$ .

### 3.4 Estabilidade Espectral

Nesta seção, apresentaremos resultados de estabilidade espectral para o problema (3.11). Inicialmente notemos que, utilizando argumentos similares aos contidos em [53, Proposição 2.4], a solução par para o problema de valor de contorno (3.8) obtida no Lema 3.2.1 é suave. Além disso,  $\phi$  tem um perfil single-lobe, isto é, existe apenas um máximo (em  $x = 0$ ) e um mínimo de  $\phi$  em  $\mathbb{T}$ . Desse modo, para decidirmos sobre a não-degenerescência de  $\ker(\tilde{\mathcal{L}})$ , seguiremos os argumentos contidos em [39].

Considerando  $\alpha \in (0, 2]$  e sendo  $\phi$  é uma solução single-lobe, obtemos pelo Teorema da Oscilação em [39] que o operador  $\tilde{\mathcal{L}}$  tem no máximo dois autovalores negativos, ou seja,  $n(\tilde{\mathcal{L}}) \in \{1, 2\}$ . Consequentemente, pode existir no máximo duas autofunções de  $\tilde{\mathcal{L}}$  para o autovalor zero, isto é,  $z(\tilde{\mathcal{L}}) \in \{1, 2\}$ . Lembremos que  $\ker(\tilde{\mathcal{L}}|_{X_0}) = [\phi']$  implica no fato da curva  $c \in (\frac{1}{2}, +\infty) \mapsto \phi$  ser suave e  $d$  dado em (3.42) pode ser usado para decidirmos a respeito da não-degenerescência de  $\ker(\tilde{\mathcal{L}})$  e a quantidade exata de  $n(\tilde{\mathcal{L}})$  de acordo com a Proposição 3.2.2. Com efeito, se  $d \neq 0$  resulta da primeira igualdade em (3.40), (3.41), e (3.42) que  $\{1, \phi, \phi^2\} \in \text{range}(\tilde{\mathcal{L}})$ . Pela Proposição 3.1 em [39] concluímos

que  $\ker(\tilde{\mathcal{L}}) = [\phi']$ . Por outro lado, se  $d = 0$ , temos  $\ker(\tilde{\mathcal{L}}) = [\phi', \frac{d}{dc}\phi - \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\phi]$ . Mais ainda,  $d < 0$  implica  $n(\tilde{\mathcal{L}}) = 1$  e  $d > 0$  nos fornece  $n(\tilde{\mathcal{L}}) = 2$ .

A seguir, provaremos a estabilidade espectral para as ondas de Stokes associadas ao caso  $\alpha \in (0, 2]$ .

**Teorema 3.4.1.** Seja  $\alpha \in (0, 2]$ . As ondas de Stokes  $\phi \in H_{per}^\infty(\mathbb{T})$  determinadas pela Proposição 3.3.1 são espectralmente estáveis no sentido da Definição (2).

*Demonstração.* Como  $\mathcal{L}$  é o operador Hessiano associado ao funcional  $G(u)$  em (3.10) e  $\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{c}\mathcal{L}$  para todo  $c > \frac{1}{2}$ , a estabilidade espectral ocorre se  $\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, (D^\alpha+1)\phi\}^\perp} \geq 0$ , isto é, se  $n(\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, (D^\alpha+1)\phi\}^\perp}) = 0$ . Por outro lado, a onda periódica  $\phi$  é espectralmente instável se  $n(\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, (D^\alpha+1)\phi\}}) = 1$ .

Para  $\lambda \notin \sigma(\tilde{\mathcal{L}})$ , onde  $\sigma(\tilde{\mathcal{L}})$  denota o espectro do operador  $\tilde{\mathcal{L}}$ , definamos a seguinte matriz simétrica de ordem  $2 \times 2$

$$S(\lambda) := \begin{bmatrix} \langle (\tilde{\mathcal{L}} - \lambda I)^{-1}(D^\alpha + 1)\phi, (D^\alpha + 1)\phi \rangle & \langle (\tilde{\mathcal{L}} - \lambda I)^{-1}(D^\alpha + 1)\phi, 1 \rangle \\ \langle (\tilde{\mathcal{L}} - \lambda I)^{-1}1, (D^\alpha + 1)\phi \rangle & \langle (\tilde{\mathcal{L}} - \lambda I)^{-1}1, 1 \rangle \end{bmatrix}.$$

Por (3.111), para  $\alpha \in (0, \tilde{\alpha}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$  obtemos  $d < 0$ , enquanto para  $\tilde{\alpha} < \alpha < \frac{1}{2}$ , temos  $d > 0$ . Para  $\alpha = \tilde{\alpha} \approx 0.2924$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$ , notamos a existência de pontos de dobra para os quais  $d = 0$ .

Assumamos que  $d \neq 0$ . Calcularemos o determinante da matriz  $S(\lambda)$  em  $\lambda = 0$ . De fato, utilizando a equação (3.6) temos pela primeira igualdade em (3.40) que

$$\tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{d}{dc}\phi \right) = -\frac{1}{c} ((D^\alpha + 1)\phi + A'(c)).$$

Aplicando o operador  $\tilde{\mathcal{L}}^{-1}$  em ambos os lados da igualdade acima, resulta que

$$\tilde{\mathcal{L}}^{-1}((D^\alpha + 1)\phi) = -c \left( \frac{d}{dc}\phi \right) - A'(c)\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(1),$$

o que implica

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1}((D^\alpha + 1)\phi), (D^\alpha + 1)\phi \rangle = \left\langle -c \left( \frac{d}{dc}\phi \right) - A'(c)\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(1), (D^\alpha + 1)\phi \right\rangle.$$

Utilizando novamente a equação (3.6) e (3.47), obtemos que

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1}((D^\alpha + 1)\phi), (D^\alpha + 1)\phi \rangle = \left\langle -c \left( \frac{d}{dc}\phi \right) - A'(c)d^{-1} \left( \frac{d}{dc}\phi - \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\phi \right), \frac{1}{2c}\phi^2 + \frac{1}{c}\phi - \frac{A(c)}{c} \right\rangle$$

$$= -\frac{2\pi d^{-1}}{c}(A'(c))^2 - 2\pi A'(c) - \frac{1}{6}\gamma'(c), \quad (3.112)$$

onde na última igualdade usamos (3.51). Além disso, temos que

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1}(D^\alpha + 1)\phi, 1 \rangle = \langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1}1, (D^\alpha + 1)\phi \rangle = \frac{2\pi d^{-1}}{c}A'(c) \quad (3.113)$$

e

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}^{-1}1, 1 \rangle = -2\pi \frac{d^{-1}}{c}. \quad (3.114)$$

Devido as relações em (3.112), (3.113) e (3.114), o determinante de  $S(0)$ , para  $d \neq 0$ , é dado por

$$\det S(0) = \frac{4\pi^2 d^{-1}}{c} \left( A'(c) + \frac{1}{\pi} \mathcal{B}_c(\phi) \right). \quad (3.115)$$

Notemos agora que combinando (3.104) e (3.105), obtemos

$$A(c) = (2^\alpha + 1)(2^\alpha - 1) \left( c - \frac{1}{2} \right) + O(a^4). \quad (3.116)$$

Dessa forma,  $A'(c)$  é dada pela seguinte expansão de Stokes

$$A'(c) = (2^\alpha + 1)(2^\alpha - 1) + O(a^3) \quad (3.117)$$

e, conseqüentemente,  $A'(c) > 0$  para todo  $\alpha \in (0, 2]$ . Como  $\mathcal{B}_c(\phi) > 0$ , observamos que o sinal de  $\det S(0)$  é determinado apenas por  $d^{-1}$ , uma vez que os termos entre parênteses em (3.115) são estritamente positivos.

Denotemos por  $n_0$  e  $z_0$  o número de autovalores negativos e autovalores zeros de  $S(0)$ , respectivamente. Se  $d = 0$ , então  $S(0)$  é singular e, nesse caso, denotamos o número de autovalores divergentes de  $S(\lambda)$  quando  $\lambda \rightarrow 0$  por  $z_\infty$ . Assim, [61, Teorema 4.1] nos fornece as seguintes relações

$$\begin{cases} n(\tilde{\mathcal{L}} |_{\{1, (D^{\alpha+1})\phi\}^\perp}) &= n(\tilde{\mathcal{L}}) - n_0 - z_0, \\ z(\tilde{\mathcal{L}} |_{\{1, (D^{\alpha+1})\phi\}^\perp}) &= z(\tilde{\mathcal{L}}) + z_0 - z_\infty \end{cases}.$$

Assumamos  $d \neq 0$ , então obtemos imediatamente que  $z_\infty = 0$ . Se  $0 < \alpha < \tilde{\alpha}$  ou  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ , temos  $z_0 = 0$  e  $\det S(0) < 0$  implicando que  $n_0 = 1$ . Por outro lado, pelo Corolário 3.3.3, observamos que as ondas de Stokes em (3.103) solucionam o problema de minimização (3.34) e pela Proposição 3.2.2 obtemos que  $n(\mathcal{L}) = 1$ . Portanto, nesse caso temos a estabilidade espectral uma vez que  $n(\tilde{\mathcal{L}} |_{\{1, (D^{\alpha+1})\phi\}^\perp}) = 1 - 1 - 0 = 0$ . Para o caso  $\tilde{\alpha} < \alpha < \frac{1}{2}$ , temos  $n_0 = 0$  ou

$n_0 = 2$ . Ademais, em vista das relações (3.112) e (3.114), o traço da matriz  $S(0)$  é estritamente negativo, logo  $n_0 = 2$ . Consequentemente, obtemos a estabilidade espectral de  $\phi$  já que  $n(\tilde{\mathcal{L}}) = 2$  e  $n(\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, (D^{\alpha+1})\phi\}^\perp}) = 2 - 2 - 0 = 0$ .

Finalmente, para o caso  $\alpha = \tilde{\alpha}$  ou  $\alpha = \frac{1}{2}$ , obtemos a partir das relações acima e pela Proposição 3.2.2 que  $z_\infty = 1$ ,  $n(\tilde{\mathcal{L}}) = 2$ , logo  $n(\tilde{\mathcal{L}}|_{\{1, (D^{\alpha+1})\phi\}^\perp}) = 2 - 2 = 0$ .

□

**Observação 3.4.2.** O resultado obtido no Teorema 3.4.1 pode ser estendido para o caso  $\alpha > 2$  sem mais problemas.

O próximo resultado garante a estabilidade espectral do minimizador periódico  $\phi$  para o caso  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$  e  $c > \frac{1}{2}$ .

**Teorema 3.4.3.** Seja  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ . Suponhamos que  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  para todo  $c > \frac{1}{2}$ . O minimizador periódico obtido pelo Lema 3.36 é espectralmente estável.

*Demonstração.* Nesta demonstração, usaremos os mesmos cálculos obtidos na prova do Teorema 3.4.1. Com efeito, como estamos considerando  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ , obtemos pela Proposição 3.3.4 que  $n(\mathcal{L}) = 1$  o que significa que  $z(\mathcal{L}|_{X_0}) = 1$  por [53, Corolário 4.5]. Pela Proposição 3.2.2, temos que  $d = 1 + 2A(c) - c - cA'(c) < 0$  para todo  $c > \frac{1}{2}$  e, após multiplicarmos essa desigualdade por  $\frac{1}{c^3}$ , obtemos que

$$\frac{d}{dc} \left( A(c) \frac{1}{c^2} \right) = -2A(c) \frac{1}{c^3} + A'(c) \frac{1}{c^2} > \frac{1}{c^3} - \frac{1}{c^2}. \quad (3.118)$$

Integrando (3.118) no intervalo  $(\frac{1}{2}, c]$  e observando que por (3.116) a convergência  $A(c) \rightarrow 0$  quando  $c \rightarrow \frac{1}{2}$  ocorre, obtemos a importante desigualdade

$$A(c) > c - \frac{1}{2}. \quad (3.119)$$

Logo, pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger, por (3.119) e pela desigualdade  $1 + 2A(c) - c - cA'(c) < 0$ , segue que

$$\begin{aligned} A'(c) + \frac{1}{\pi} \mathcal{B}_c(\phi) &\geq A'(c) + \frac{1}{2\pi} (2c - 1) \int_{-\pi}^{\pi} \phi^2 dx \\ &= A'(c) + 2(2c - 1)A(c) \\ &\geq 4c^2 - 4c + 2 > 2 \left( c - \frac{1}{2} \right)^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Portanto, se  $c > \frac{1}{2}$  obtemos por (3.120) que  $A'(c) + \frac{1}{\pi}\mathcal{B}_c(\phi) > 0$ . De (3.115), resulta que

$$\det S(0) = \frac{4\pi^2 d^{-1}}{c} \left( A'(c) + \frac{1}{\pi}\mathcal{B}_c(\phi) \right) < 0.$$

Ao mesmo tempo que  $n(\mathcal{L}) = 1$ , pela fórmula do índice contida no Teorema 3.4.1 concluímos a estabilidade espectral do perfil single-lobe  $\phi$ .  $\square$

**Observação 3.4.4.** De acordo com a expressão em (3.105), a estimativa correta dada por (3.119) deve ser  $A(c) > c - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{4} + O(a^4)$ . No entanto, uma vez que  $a$  corresponde ao parâmetro de pequena amplitude e obtivemos uma estimativa para  $A(c)$  por baixo, podemos omitir os fatores de correção sem nenhum problema. Outro fato importante é que  $n(\mathcal{L}) = 2$  para  $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ , na Proposição 3.2.2, ocorre apenas para  $c$  próximo ao ponto de bifurcação  $\frac{1}{2}$ . Em certo sentido, estamos recuperando os experimentos numéricos contidos em [53, Secção 5] para o caso da equação KdV fracionária onde o ponto de bifurcação é  $c = -1^+$ .

**Observação 3.4.5.** Podemos substituir a hipótese  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  no Teorema 3.4.3 por  $n(\mathcal{L}) = 1$ . Neste caso, obtemos automaticamente por [53, Corolário 4.5] que  $z(\mathcal{L}|_{X_0}) = 1$  e o resultado segue.

### 3.5 Experimentos Numéricos - Trabalho Realizado em Parceria

Visando um melhor entendimento da estabilidade espectral de soluções ondas viajantes periódicas para a equação (3.1), nesta seção apresentaremos experimentos numéricos que foram realizados em parceria com H. Borluk, G.M. Muslu e G. Oruc (veja [5] para mais detalhes). Na verdade, apresentaremos um método de iteração de Petviashvili, o qual é amplamente utilizado para a obtenção de soluções numéricas para equações não lineares, (veja, por exemplo, [28, 59]). O método de iteração para ondas periódicas, uma modificação do algoritmo de Petviashvili padrão (veja [29, 46]), é baseado nas seguintes etapas de solução. Inicialmente, consideramos a transformação

$$\psi = \frac{1}{2c} \left[ \phi - (c-1) + \sqrt{(c-1)^2 + 2A} \right] \quad (3.121)$$

para converter a equação (3.6) em

$$D^\alpha \psi + w\psi - \psi^2 = 0, \quad (3.122)$$

onde  $w = \frac{1}{c} \sqrt{(c-1)^2 + 2A}$ . Assim, obtemos a equação com uma constante de integração igual a zero. Integrando (3.121) no intervalo  $[-\pi, \pi]$  e usando o fato de que  $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função periódica com propriedade de média zero, obtemos que

$$c = \left( 1 - w + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi dx \right)^{-1}. \quad (3.123)$$

Em seguida, usamos o método usual de Petviashvili para obtermos a solução da equação (3.122). Aplicando a transformada de Fourier na equação (3.122) segue que

$$(|\xi|^\alpha + w) \widehat{\psi}(\xi) - \widehat{\psi^2}(\xi) = 0. \quad (3.124)$$

Um algoritmo iterativo simples para o cálculo numérico de  $\widehat{\psi}(\xi)$  para a equação acima pode ser proposto na forma

$$\widehat{\psi}_{n+1}(\xi) = \frac{\widehat{\psi_n^2}(\xi)}{|\xi|^\alpha + w}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.125)$$

onde  $\widehat{\psi}_n(\xi)$  denota a transformada de Fourier de  $\psi_n$  que é a  $n$ -ésima iteração da solução numérica. Aqui, as soluções são construídas a partir do pressuposto

$$|\xi|^\alpha + w \neq 0. \quad (3.126)$$

Como o algoritmo acima é geralmente divergente, finalmente apresentamos o método de Petviashvili como

$$\widehat{\psi}_{n+1}(\xi) = \frac{M_n^\nu}{|\xi|^\alpha + w} \widehat{\psi_n^2}(\xi) \quad (3.127)$$

introduzindo o fator de estabilização

$$M_n = \frac{\langle (D^\alpha + w)\psi_n, \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^2, \psi_n \rangle}, \quad \psi_n \in H_{per}^\alpha(\mathbb{T}). \quad (3.128)$$

Aqui, o parâmetro livre  $\nu$  é escolhido como sendo 2 para a convergência mais rápida (veja [62] para mais detalhes). O processo iterativo é controlado através do erro entre duas iterações consecutivas dadas por  $Erro(n) = \|\psi_n - \psi_{n-1}\|_{L_{per}^\infty}$  e o erro do fator de estabilização  $|1 - M_n|$ . O resíduo do processo de interação é determinado por  $RES(n) = \|\mathcal{S}\psi_n\|_{L_{per}^\infty}$ , onde  $\mathcal{S}\psi = D^\alpha\psi + w\psi - \psi^2$ .

A solução de onda periódica  $\phi$  para a equação BBM correspondente ao problema de valor de contorno (3.8) com  $\alpha = 2$  é dada pela equação (3.79).

Com o propósito de testarmos a precisão do nosso método, comparamos a solução exata (3.79) com a solução numérica obtida usando a expansão de Stokes correspondente a (3.122) como a estimativa inicial

$$\psi_0(x) = 1 + a \cos(x) + a^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^\alpha - 1)} + \frac{\cos(2x)}{2(2^\alpha - 1)} \right] + a^3 \frac{\cos(3x)}{2(2^\alpha - 1)(3^\alpha - 1)}, \quad (3.129)$$

onde  $a = 0.2$  e  $\alpha = 2$ . Nesse experimento, o intervalo de espaço é  $[-\pi, \pi]$  e o número de pontos da malha é escolhido como  $N = 2^{12}$ . No primeiro painel da Figura 3.2, representamos as soluções exatas

e numéricas para a velocidade de onda  $c = 1.2181$ . Como podemos ver na figura, as soluções exatas e numéricas coincidem. Nos demais painéis da Figura 3.2, apresentamos as variações de três erros diferentes com o número de iterações. Esses resultados nos mostram que o nosso esquema numérico alcança a solução notavelmente bem.

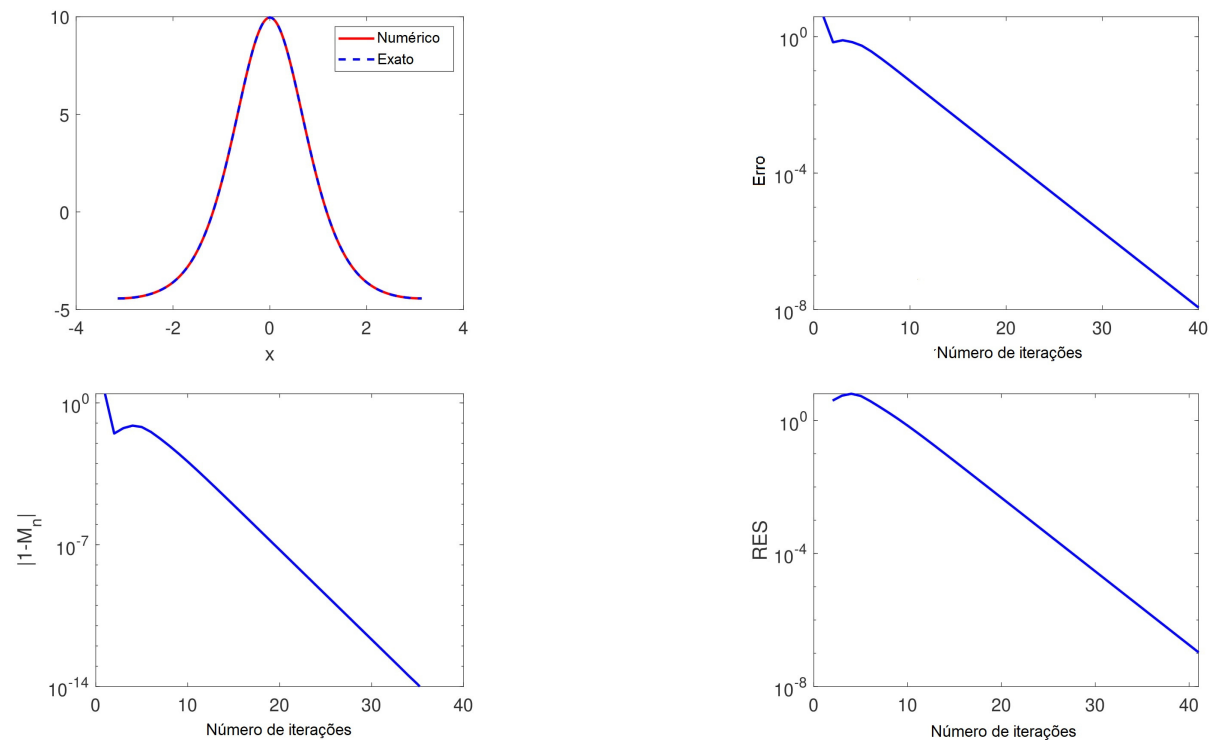


Figura 3.2: Soluções exatas e numéricas da equação BBM com velocidade de onda  $c = 1.2181$  e a variação de  $Erro(n)$ ,  $|1 - M_n|$  e  $RES$  com o número de iterações em escala semi-logarítmica.

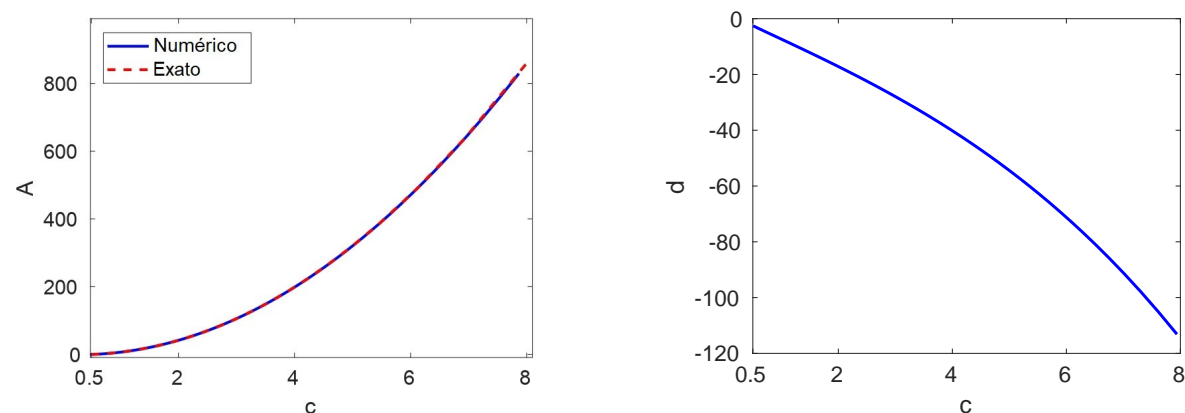


Figura 3.3: Variações dos valores exatos e numéricos da constante de integração  $A$  em relação a  $c$  (painel esquerdo) e variação do valor numérico de  $d$  em relação a  $c$  (painel direito) para  $\alpha = 2$ .

O painel esquerdo da Figura 3.3 nos mostra a variação exata e numérica da constante de integração  $A$  com relação a  $c$ . A relação exata entre  $A$  e  $c$  é ilustrada utilizando as equações (3.81) e (3.82). Do ponto de vista numérico, primeiro obtemos a solução numérica usando o método de Petviashvili (3.127) para cada  $w \in (1, +\infty)$ . Na sequência, encontramos a velocidade de onda correspondente  $c$  pela relação (3.123). Finalmente, o valor numérico da constante de integração  $A(c)$  é avaliado por

$$A(c) = \frac{1}{2} [c^2 w^2 - (c - 1)^2]. \quad (3.130)$$

Como pode ser visto na figura, os valores exatos e numéricos de  $A(c)$  coincidem. No painel direito da figura, apresentamos a variação de  $d$  com  $c$ . Observamos que  $d$  é sempre negativo.

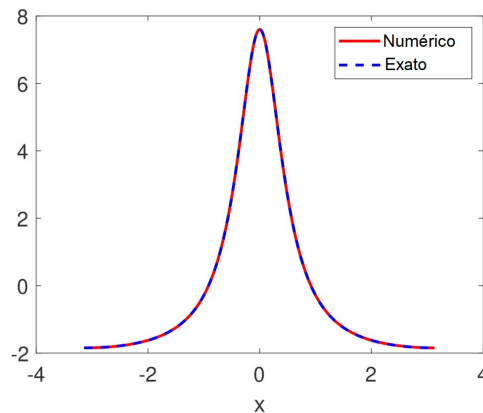


Figura 3.4: Solução exata e numérica da equação rBO com velocidade da onda  $c = 1.2192$ .

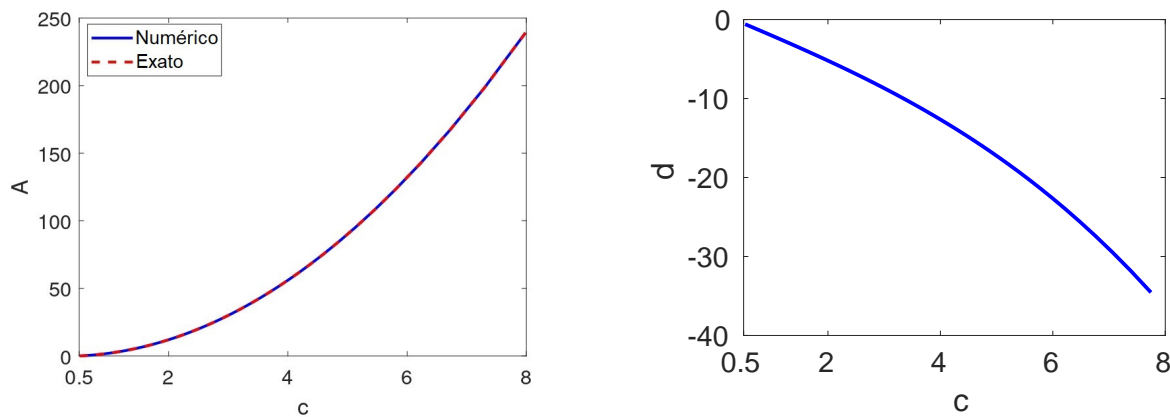


Figura 3.5: Variação dos valores exatos e numéricos da constante de integração  $A$  em relação a  $c$  (painel esquerdo) e a variação do valor numérico de  $d$  em relação a  $c$  (painel direito) para  $\alpha = 1$ .

A solução periódica single-lobe do problema de valor de contorno (3.122) para  $\alpha = 1$  é dada por

$$\psi(x) = \frac{\sinh \gamma}{\cosh \gamma - \cos x}, \quad (3.131)$$



onde o parâmetro  $\gamma \in (0, +\infty)$  é dado por  $\gamma = \coth^{-1}(w)$ . A transformação (3.121) nos permite obter a solução de onda periódica single-lobe para a equação rBO como

$$\phi(x) = 2c \left( \frac{\sinh \gamma}{\cosh \gamma - \cos x} - 1 \right). \quad (3.132)$$

Comparamos a solução exata (3.132) com a numérica obtida usando expansão de Stokes (3.129) com  $a = 0.2$  e  $\alpha = 1$  como a estimativa inicial. O intervalo de espaço é  $[-\pi, \pi]$  e o número de pontos da malha é escolhido como  $N = 2^9$ . Exibimos as soluções exatas e numéricas para a velocidade de onda  $c = 1.2192$  na Figura 3.4. Como temos  $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx = 2\pi$  de (3.131), obtemos  $c = (3 - w)^{-1}$  utilizando (3.123). Eliminando  $w$  em (3.130), calculamos a constante de integração  $A(c) = 4c^2 - 2c$  explicitamente. No painel esquerdo da Figura 3.5, comparamos a variação exata e numérica da constante de integração  $A$  em relação a  $c$  para  $\alpha = 1$ . No painel direito mostramos a variação de  $d$  com relação a  $c$  para  $\alpha = 1$ . As Figuras 3.3 e 3.5 nos mostram que  $A(c)$  é estritamente crescente para todos os valores de  $c$  e  $d$  é sempre negativo. Portanto, os resultados numéricos são compatíveis com o Teorema 3.4.3 que afirma a estabilidade espectral da solução single-lobe para  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ .

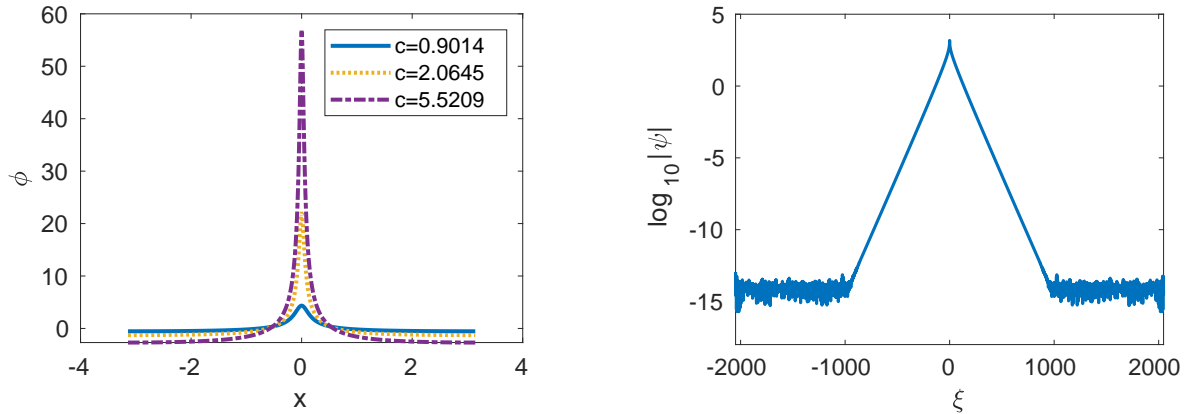


Figura 3.6: Vários perfis de ondas numéricos (painel esquerdo) e o módulo dos coeficientes de Fourier da solução numérica (painel direito) para  $\alpha = 0.55$ .

No próximo experimento numérico, escolhemos  $\alpha = 0.55 > \alpha_0$  desde o ponto de dobra  $\alpha_0 = 0.5$  para a equação fBBM. No painel esquerdo da Figura 3.6, ilustramos os perfis de ondas periódicas para vários valores de  $c$ . Podemos ver que a amplitude torna-se cada vez mais elevada com o crescimento da velocidade da onda  $c$ . O painel direito da Figura 3.6 nos mostra que o módulo dos coeficientes de Fourier calculados por meio de uma transformação discreta de Fourier diminuem a precisão da máquina para  $N = 2^{12}$  modos de Fourier. Na Figura 3.7, representamos a variação de  $A(c)$  e  $d$  com  $c$ . Os resultados numéricos são novamente compatíveis com o Teorema 3.4.3 para  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

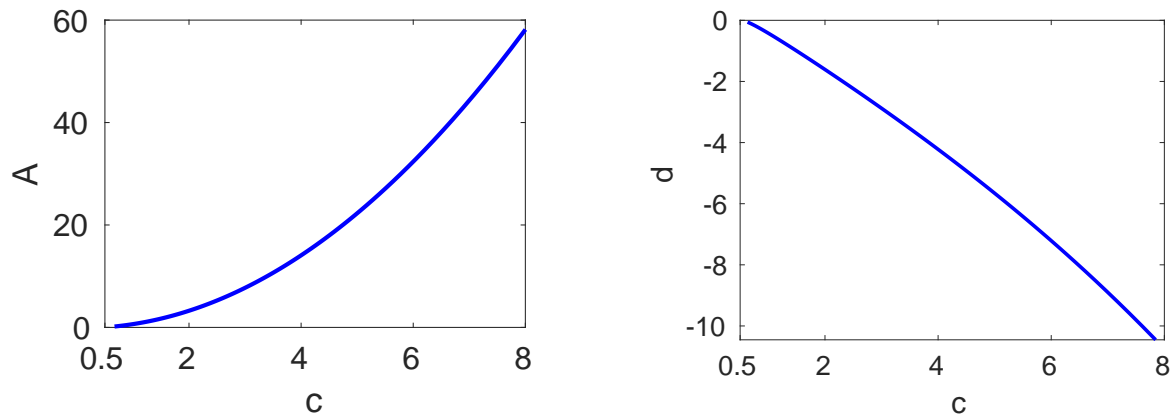


Figura 3.7: Variação de  $A$  com relação a  $c$  (painel esquerdo) e variação de  $d$  com relação a  $c$  (painel direito) ambos avaliados numericamente para  $\alpha = 0.55$ .

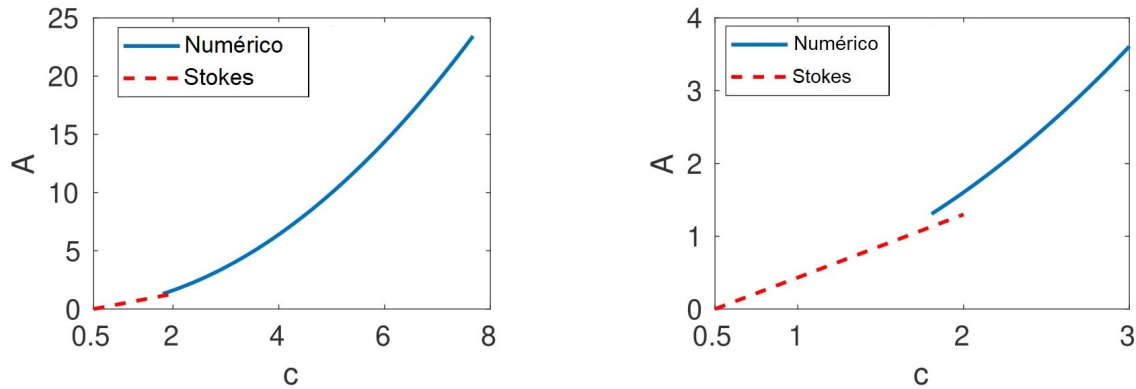


Figura 3.8: Variação numérica dos valores de  $A$  com relação a  $c$  (painel esquerdo) e uma evidência da lacuna entre o ramo de Stokes e a solução numérica (painel direito) ( $\alpha = 0.45$ ).

Na Figura 3.8, mostramos a variação de  $A(c)$  para  $\alpha = 0.45 < \alpha_0$ . A imagem mostra uma falta de convergência usando o método de Petviashvili no sentido de que a função  $A(c)$  não pode alcançar o ponto de bifurcação  $c = \frac{1}{2}^+$  como determinado para o caso  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$ . De acordo com o nosso melhor conhecimento, esse fenômeno nos dá (pelo menos numericamente) uma indicação de que o número de autovalores negativos para o operador linearizado é 2 e/ou a existência de um ponto de dobra, ou seja, um valor de  $c$  tal que  $\dim(\ker(\mathcal{L})) = 2$ . Em ambos os casos, é sabido que o método numérico não converge (veja [46, 53, 62]) e nos impede de mostrar a existência de um minimizador periódico que resolve (20). Devido a falta de dados numéricos para  $c \in (0.5, 1.8)$ , ilustramos a curva (linha pontilhada) usando a seguinte relação

$$A(c) \approx (c - \frac{1}{2})(2^\alpha + 1)(2^\alpha - 1)$$

obtida pela expansão de Stokes. O painel direito nos fornece uma visão mais detalhada da lacuna entre o ramo de Stokes e o resultado numérico. Para preenchermos esse vão, usamos o método de Newton para  $c \in (0.5, 1.8)$  na Figura 3.10.

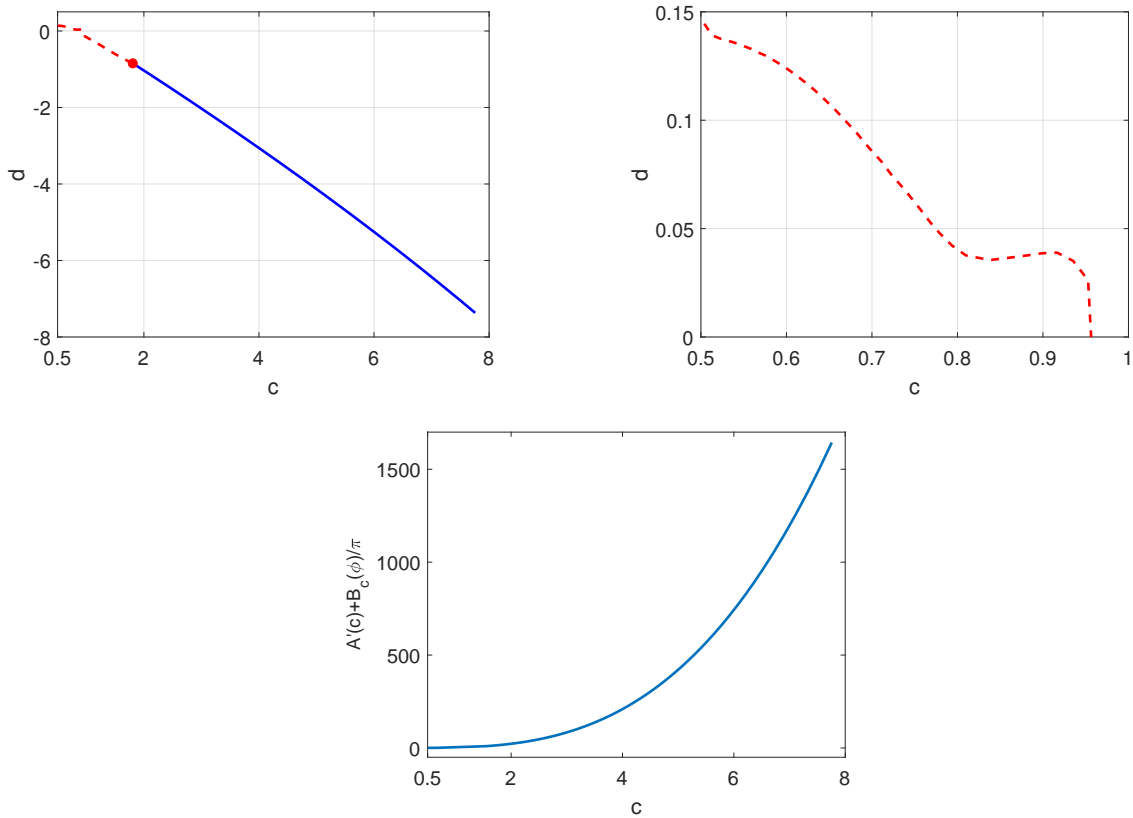


Figura 3.9: Variação de  $d$  com relação a  $c$  (superior esquerdo), evidência do valor crítico  $c^*$  (superior direito) e a variação de  $A'(c) + \frac{1}{\pi}B_c(\phi)$  com  $c$  (inferior) para  $\alpha = 0.45$ .

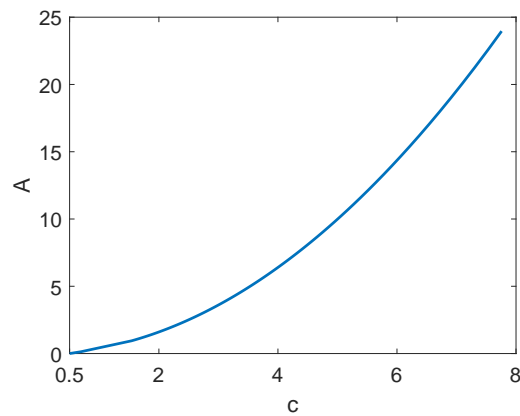


Figura 3.10: Variação dos valores numéricos de  $A$  com respeito a  $c$  com a combinação dos métodos de Newton e Petviashvili ( $\alpha = 0.45$ ).

Na Figura 3.9, apresentamos a variação de  $d$  e do termo  $A'(c) + \frac{1}{\pi}\mathcal{B}_c(\phi)$  com  $c$  para  $\alpha = 0.45$ . Observemos que  $A'(c) + \frac{1}{\pi}\mathcal{B}_c(\phi)$  é positivo para todos os valores de  $c$ . No entanto,  $d$  é positivo até uma velocidade crítica  $c^* \approx 0.953$  e, então, se torna negativo. Consequentemente,  $\det S(0)$  é positivo para  $c \in (\frac{1}{2}, c^*)$  e negativo para  $c \in (c^*, +\infty)$ . Além disso, ilustramos a variação de  $d$  e do termo  $A'(c) + \frac{1}{\pi}\mathcal{B}_c(\phi)$  com  $c$  na Figura 3.11 para o ponto de dobra  $\alpha_0 = 0.5$ . Os resultados numéricos são muito semelhantes aos de  $\alpha = 0.45$  com  $c^* \approx 0.67$ . Como pode ser visto nas figuras,  $\det S(0) < 0$  para  $c \in (c^*, +\infty)$  indicando a estabilidade espectral. Contudo,  $\det S(0) > 0$  para  $c \in (\frac{1}{2}, c^*)$  resultando que  $n_0 = 0$  ou  $n_0 = 2$ . Por essa razão, exibimos a variação de do traço  $\text{tr } S(0)$  com  $c$  para ambos casos  $\alpha = 0.45$  e  $\alpha = 0.5$  na Figura 3.12. Uma vez que  $\text{tr } S(0)$  é negativo, temos que  $n_0 = 2$  e, por consequência, concluímos que a onda periódica também é estável para  $c \in (\frac{1}{2}, c^*)$ .

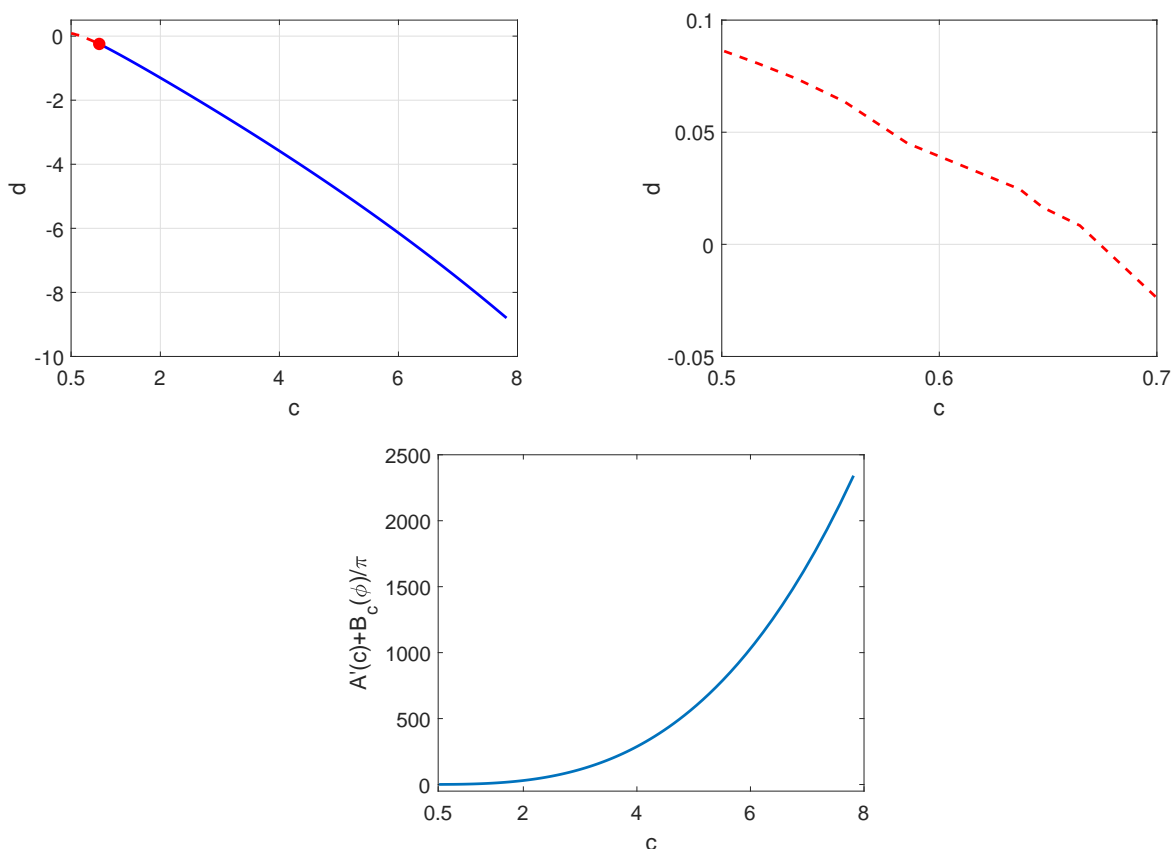


Figura 3.11: Variação de  $d$  com relação a  $c$  (superior esquerdo), evidência do valor crítico  $c^*$  (superior direito) e a variação de  $A'(c) + \frac{1}{\pi}\mathcal{B}_c(\phi)$  com  $c$  (inferior) para  $\alpha = 0.5$ .

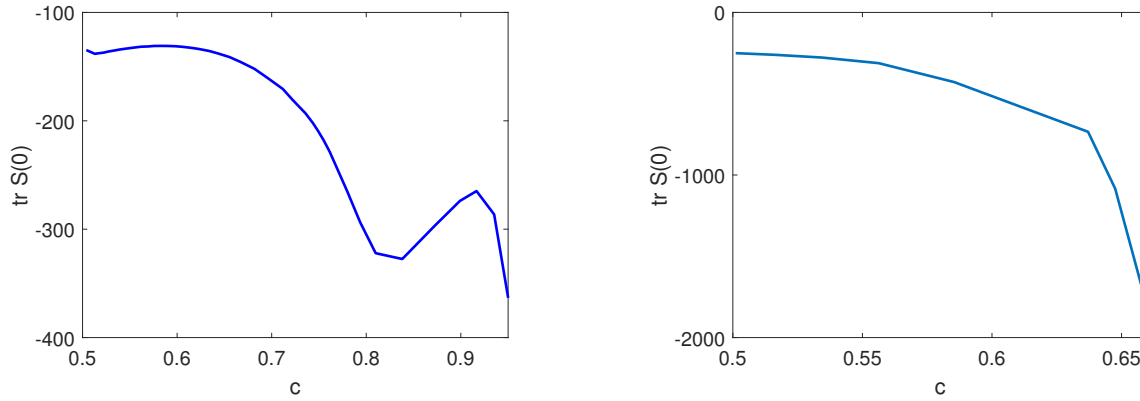


Figura 3.12: Variação de  $\text{tr } S(0)$  com respeito a  $c$  para  $\alpha = 0.45$  (painel esquerdo) e  $\alpha = 0.5$  (painel direito).

### 3.6 Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas

Apresentaremos, nesta seção, uma breve discussão a respeito da estabilidade orbital da onda periódica  $\phi$  obtida pelo Lema 3.2.1. A nossa noção de estabilidade orbital é dada segundo a Definição (1), a qual prescreve a existência de soluções globais. Portanto, de acordo com a Seção 3.1 e seu resultado de boa colocação global, precisamos assumir  $\alpha > 1$ .

Em seguida, consideremos a quantidade conservada  $V(u) = P(u) - E(u)$  definida em (3.31) e o funcional auxiliar

$$Q(u) := -V(u) + (c - 1 - A(c))M(u). \quad (3.133)$$

Além disso, definamos

$$\Upsilon_0 = \{u \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}); \langle Q'(\phi), u \rangle = 0\}.$$

Notemos que  $\Upsilon_0$  é o espaço tangente à variedade suave  $\{u \in H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T}); Q(u) = Q(\phi)\}$  em  $\phi$ . Posto isso, de acordo com [26, Teorema 2.1] (veja também [4]) temos o seguinte critério para a estabilidade orbital:

**Proposição 3.6.1.** Seja  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2]$  fixado. Suponhamos que  $n(\mathcal{L}) = 1$  e  $z(\mathcal{L}) = 1$  para todo  $c > \frac{1}{2}$ . Se existe  $\Phi \in H_{per}^{\alpha}(\mathbb{T})$  tal que  $\langle \mathcal{L}\Phi, \Psi \rangle = 0$  para todo  $\Psi \in \Upsilon_0$ , e  $\langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle < 0$ . Então  $\phi$  é orbitalmente estável em  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  pelo fluxo periódico de (3.1).

*Demonstração.* Veja Teorema 2.1 em [26]. □

No próximo resultado, exibiremos uma versão simplificada para o resultado de estabilidade orbital dado pela Proposição 3.6.1.

**Proposição 3.6.2.** Suponha que as hipóteses da Proposição 3.6.1 sejam verdadeiras. A onda periódica  $\phi$  é orbitalmente estável no espaço energia  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  desde que  $\langle \mathcal{L}(1 + \phi), 1 + \phi \rangle < 0$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $n(\mathcal{L}) = 1$  e  $z(\mathcal{L}) = 1$  ocorrem. Dado o funcional auxiliar  $Q$  em (3.133) obtemos que

$$Q'(\phi) = c - 1 - A(c) - \phi - \frac{1}{2}\phi^2 = \mathcal{L}(1 + \phi).$$

Como  $\mathcal{L}$  é um operador autoadjunto e  $\mathcal{L}\phi' = 0$ , resulta que  $\langle Q'(\phi), \phi' \rangle = 0$  e  $\langle \mathcal{L}(1 + \phi), \Psi \rangle = 0$ , para todo  $\Psi \in \Upsilon_0$ . Portanto, de acordo com a Proposição 3.6.1, se  $\langle \mathcal{L}(1 + \phi), 1 + \phi \rangle < 0$  obtemos a estabilidade orbital de  $\phi$  no espaço energia  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ . Além disso, é possível verificarmos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(1 + \phi), 1 + \phi \rangle &= \left\langle c - 1 - A(c) - \phi - \frac{1}{2}\phi^2, 1 + \phi \right\rangle \\ &= 2\pi(c - 1) - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \phi^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \phi^3 dx \\ &= 2\pi(c - 1) - \int_{-\pi}^{\pi} c(D^{\frac{\alpha}{2}}\phi)^2 + (c + 1)\phi^2 dx, \end{aligned} \quad (3.134)$$

onde na última igualdade utilizamos a equação (3.6).  $\square$

Finalmente, utilizando a estimativa (3.119) estabeleceremos, a seguir, o nosso resultado de estabilidade orbital da onda periódica  $\phi$ .

**Teorema 3.6.3.** Para  $\alpha \in (1, 2]$  fixado, assumamos  $\ker(\mathcal{L}) = [\phi']$  para todo  $c > \frac{1}{2}$ . A onda periódica  $\phi$  obtida pelo Lema 3.2.1 é orbitalmente estável no espaço energia  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$  no sentido da Definição 1

*Demonstração.* Como  $z(\mathcal{L}) = 1$ , pela Proposição 3.3.4 temos que  $n(\mathcal{L}) = 1$ . Logo, basta utilizarmos a desigualdade (3.119) e a Proposição 3.6.2 para obtermos o desejado. De fato, se  $c > \frac{1}{2}$ , por (3.134) e pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger resulta que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(1 + \phi), 1 + \phi \rangle &= 2\pi(c - 1) - \int_{-\pi}^{\pi} c(D^{\frac{\alpha}{2}}\phi)^2 + (c + 1)\phi^2 dx \\ &\leq 2\pi(c - 1) - (2c + 1) \int_{-\pi}^{\pi} \phi^2 dx \\ &= 2\pi(c - 1) - 4\pi(2c + 1)A(c) \\ &\leq 2\pi(c - 1) - 4\pi(2c + 1)\left(c - \frac{1}{2}\right) = -2\pi c(4c - 1) < 0. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Pela Proposição 3.6.2 concluímos a estabilidade orbital de  $\phi$  no espaço energia  $H_{per}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{T})$ .  $\square$

# Estudos Futuros

---

Para possíveis trabalhos futuros, acreditamos que as linhas de abordagens que apresentamos nesta tese podem ser seguidas e adaptadas para o estudo da estabilidade espectral e orbital de ondas viajantes periódicas de outras equações.

- Um dos pontos que nos desperta um maior interesse diz respeito a aplicação dos conceitos de estabilidade espectral de ondas viajantes periódicas aqui desenvolvidos. Nossa primeira proposta inclui verificar se tais conceitos podem ser aplicados às equações de alta ordem. Dentre elas, queremos considerar a equação de Kawahara dada por

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0,$$

onde  $\mathcal{M} = \partial_x^4 - \partial_x^2$  e  $f(u) = \frac{u^2}{2}$  em (4) e, também, a equação de quinta ordem regularizada dada por

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxxxt} = 0,$$

a qual é uma equação do tipo (5) com  $\mathcal{M} = -\partial_x^4$  e  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ .

- Também temos interesse em aplicar as mesmas ideias desenvolvidas nessa tese a outros tipos de equações regularizadas. Destacamos a equação de ondas longas intermediária regularizada (ILWR),

$$u_t + 2uu_x + \delta^{-1}u_x + (\mathcal{T}_\delta u)_{xt} = 0, \quad \delta > 0 \tag{3.136}$$

onde  $\mathcal{T}_\delta$  é o operador dado por  $\widehat{\mathcal{T}_\delta f}(n) = i \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) \widehat{f}(n)$ , o qual não é um operador fracionário.

- Nos propomos, também, em melhorar os resultados apresentados nos Capítulos 1 e 2 na intenção de obtê-los sem recorrermos aos métodos numéricos.

# Referências Bibliográficas

---

---

- [1] ALBERT, J. *Dispersion of low-energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation*, J. Differential Equations, 63 (1986), p. 117-134.
- [2] ALBERT, J. *Positivity properties and stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, Comm. PDE, 17 (1992), p. 1-22.
- [3] ALBERT, J. ;BONA, J.L., *Total positivity and the stability of internal waves in fluids of finite depth*. IMA J.Applied Math., 46 (1991), p. 1-19.
- [4] ALVES, G.; NATALI, F.; PASTOR, A., *Sufficient conditions for orbital stability of periodic traveling waves*, J. Diff. Equat., 267 (2019), p. 879-901.
- [5] AMARAL, S.; BORLUK, H.; MUSLU, G.M.; NATALI, F.; ORUC G., *On the existence and spectral stability of periodic waves for the fractional Benjamin-Bona-Mahony equations*, preprint (2020).
- [6] AMBROSIO, V., *On some convergence results for fractional periodic Sobolev spaces*, Opuscula Math., 40 (2020), p. 5-20.
- [7] ANDRADE, T. P.; PASTOR, A. *Orbital stability of periodic traveling-wave solutions for the regularized Schamel equation.*, Phys. D, 317 (2016), p. 43-58.
- [8] ANDRADE, T. P.; PASTOR, A., *Orbital stability of one-parameter periodic traveling waves for dispersive equations and applications*, J. Math. Anal. Appl., 475 (2019), p. 1242-1275.
- [9] ANGULO, J., *Stability properties of solitary waves for fractional KdV and BBM equations*, Nonlinearity, 31 (2018), p. 920-956.
- [10] ANGULO, J.; BANQUET, C.; SCIALOM, M. *The regularized Benjamin-Ono and BBM equations: Well-posedness and nonlinear stability*, J. Differential Equations, 250 (2011), p. 4011-4036.



- 
- [11] ANGULO, J.; BONA, J. L.; SCIALOM, M. *Stability of Cnoidal Waves*. Advances in Differential Equations, Volume 11, 12 (2006), p. 1321-1374.
- [12] ANGULO, J.; NATALI, F., *On the instability of periodic waves for dispersive equations*, Diff. Int. Equat., 29 (2016), p. 837-874.
- [13] ANGULO, J.; NATALI, F., *Positivity properties of the Fourier transform and the stability of periodic travelling-wave solutions*. SIAM, J. Math. Anal., 40 (2008), p. 1123-1151.
- [14] ANGULO, J.; NATALI, F., *Stability and instability of periodic travelling waves solutions for the critical Korteweg-de Vries and non-linear Schrödinger equations*, Physica D, 238 (2009), p. 603–621.
- [15] BENJAMIN, T. B., *Lectures on nonlinear wave motion*. Lectures in Appl. Math. Amer. Math. Soc. 15 (1974), p. 3-47.
- [16] BENJAMIN, T.B., *The stability of solitary waves*, Proc. Royal Soc. London. A 338 (1972), p. 153–183.
- [17] BENJAMIN, T.; BONA, J.; MAHONY, J., *Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems*, Phil. Trans. Royal Soc. London. Series A, Math. Phys. Sci., 272 (1972), p. 47–78.
- [18] BONA, J., *On the stability theory of solitary waves*. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 344 (1975), p. 363-374.
- [19] BONA, J. L.; SOUGANIDIS, P. E.; STRAUSS, W. A., *Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries Type*, Proc. R. Soc. Lond. A 411, (1987), p. 395-412.
- [20] BOUSSINESQ, J., *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire*. Comptes Rendus Acad. Sci 72 (1871), p. 755-759.
- [21] BOWMAN, F. *Introduction to Elliptic Functions with Applications*. Dover Publications, New York, 1961.
- [22] BRUELL, G.; DHARA, R.N., *Waves of maximal height for a class of nonlocal equations with homogeneous symbol*, Indiana Univ. Math. Journal, to appear, (2020).
- [23] BUFFONI, B.; TOLAND, J., *Analytic Theory of Global Bifurcation*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

- 
- [24] BYRD, P.F.; FRIEDMAN, M.D., *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Springer, NY, (1971).
- [25] CLAASEN, K.; JOHNSON, M. *Nondegeneracy and stability of antiperiodic bound states for fractional nonlinear Schrodinger equations*, J. Diff. Eqs. 266 (2019), p. 5664–5712.
- [26] CRISTÓFANI, F.; NATALI, F.; PASTOR, A., *Periodic Traveling-wave solutions for regularized dispersive equations: Sufficient conditions for orbital stability with applications*, Comm. Math. Sci., 18 (2020), p. 613-634.
- [27] DECONINCK, B.; KAPITULA, T. *On the spectral and orbital stability of spatially periodic stationary solutions of generalized Korteweg-de Vries equations*, in Hamiltonian Partial Diff. Eq. Appl., Vol 75, 285-322. Fields Institute Communications, Springer, New York, (2015).
- [28] DURAN, A., *An efficient method to compute solitary wave solutions of fractional Korteweg–de Vries equations*. Int J Comp Math., 95 (2018), p. 1362-1374.
- [29] DURAN, A., *Numerical generation of periodic traveling wave solutions of some nonlinear dispersive wave systems*. J. Comp. App. Math., 316 (2017), p. 29-39.
- [30] FRANK, R.L.; LENZMANN, E., *Uniqueness of non-linear ground states for fractional Laplacians in  $\mathbb{R}$* , Acta Math., 210 (2013), p. 261—318.
- [31] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Funct. Anal., 74 (1987), p.160-197.
- [32] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*, J. Funct. Anal., 74 (1990), p. 308-348.
- [33] HALE, J., *Ordinary differential equations*, Interscience, Wiley, New York, (1980).
- [34] HARAGUS, M. H. , *Stability of periodic waves for the generalized BBM equation*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 53 (2008), p. 445-463.
- [35] HARAGUS, M.; KAPITULA, T. *On the spectra of periodic waves for infinite-dimensional Hamiltonian systems*. Physica D, 237 (2008), p. 2649-2671.
- [36] HARAGUS, M.; WAHLÉN, E., *Transverse instability of periodic and generalized solitary waves for a fifth-order KP model*, J. Diff. Equat., 262 (2017), p. 3235-3249.
- [37] HAUPT, O., *Über eine methode zum beweis von oszillations theoremen*. Math. Ann., 76 (1914), p. 67-104.

- 
- [38] HUR, V.M.; PANDEY, A.K., *Modulational instability in nonlinear non local equations of regularized long wave type*, Phys. D, 325 (2016), p. 98-112
- [39] HUR, V.M.; JOHNSON, M., *Stability of periodic traveling waves for nonlinear dispersive equations*, SIAM J. Math. Anal., 47 (2015), p. 3528—3554.
- [40] IÓRIO JR., R. J.; IÓRIO, V. M. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [41] JOHNSON, M., *Stability of small periodic waves in fractional KdV-type equations*, SIAM J. Math. Anal., 45 (2013), p. 3168-3193.
- [42] KALISCH, H., *Error analysis of a spectral projection of the regularized Benjamin–Ono equation*, BIT Numer. Math., 45 (2005), p. 69–89.
- [43] KAPITULA, T.; PROMISLOW, K., *Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves*, Appl. Math. Sci., Springer, New York, 2013.
- [44] KIELHÖFER, H., *Bifurcation theory*, Appl. Math. Sci., Springer, New York, 2012. Anal., 74 (1987), p. 160-197.
- [45] KORTEWEG, D.J.; DE VRIES, G., *On the change of form of long wave advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. (5) 39, (1895), p. 422.
- [46] LE, U.; PELINOVSKY, D.E., *Convergence of Petviashvili’s method near periodic waves in the fractional Korteweg-de Vries equation*, SIAM J. Math. Anal., 51 (2019), p. 2850-2583.
- [47] LIN, Z., *Instability of nonlinear dispersive solitary waves*, J. Funct. Anal., 255 (2008), p. 1091-1124.
- [48] LINARES, F.; PILOD, D.; SAUT, J-C. *Dispersive perturbations of Burgers and hyperbolic equations I: local theory*, SIAM J. Math. Anal., 46 (2015), p. 1505–1537.
- [49] LOPES, O. *A linearized instability result for solitary waves*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 8 (2002), p. 115-119.
- [50] MAGNUS, W.; WINKLER, S. *Hill’s Equation*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Wiley, New York, 1966.
- [51] NATALI, F.; CRISTÓFANI, F.; ANDRADE, T. P. *Orbital Stability of Periodic Traveling Wave Solutions for the Kawahara Equation*. Journal of Mathematical Physics, 58 (2017), p. 051504.

- 
- [52] NATALI, F.; CRISTÓFANI, F.; PASTOR, A. *Orbital Stability of Periodic Traveling-wave Solution for the Log-KdV Equation*. J. Diff. Equat., 263 (2017), p. 2630-2660.
- [53] NATALI, F.; LE, U.; PELINOVSKY, D. E., *New variational characterization of periodic waves in the fractional Korteweg-de Vries equation*, Nonlinearity, 33 (2020), p. 1956-1986.
- [54] NATALI, F.; NEVES, A. *Orbital Stability of Periodic Waves*. IMA Journal of Applied Mathematics, 79 (2013), p. 1161-1179.
- [55] NEVES, A. *Floquet's Theorem and Stability of Periodic Solitary Waves*. J. Dyn. Diff. Equat., 21 (2009), p. 555-565.
- [56] NEVES, A., *Isoinertial family of operators and convergence of KdV cnoidal waves to solitons*, J. Diff. Equat., 244 (2008), p. 875-886
- [57] NEVES, A. *Isoinertial family of operators and convergence of KdV cnoidal waves to solitons*. J. Differ. Equat., 244 (2008), p. 875-886.
- [58] ONO, H., *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, J. Phys. Soc. Japan, 39 (1975), p. 1082-1091.
- [59] ORUC, G.; BORLUK, H.; MUSLU, G. M., *The generalized fractional Benjamin-Bona-Mahony equation: Analytical and numerical results*, Physica D: Nonlinear Phenomena, (2020), Article number:132499.
- [60] PARK, Y. J., *Fractional Polya-Szegő inequality*, Journal of the ChungCheong Mathematical Society 24 (2011), no. 2, p. 267-271.
- [61] PELINOVSKY, D.E., *Localization in periodic potentials: from Schrödinger operators to the Gross-Pitaevskii equation*, LMS Lecture Note Series, 390 Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [62] PELINOVSKY, D.E.; STEPANYANTS, Y.A., *Convergence of Petviashvili's iteration method for numerical approximation of stationary solution of nonlinear wave equations*. SIAM J. Numer. Anal., 42 (2004), p. 1110-1127.
- [63] RAYLEIGH, L., *On waves*. Phil. Mag 1, (1876), p. 257-279.
- [64] RUSSELL, J. S., *Report on waves*. Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., (1844), p. 311-390.
- [65] STAFFILANI, G. *On solutions for periodic generalized KdV equations*, Int. Math. Res. Notices, 18 (1997), p. 899-917.

- [66] WEINSTEIN, M.I., *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*. Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), p. 51-68.
- [67] YAGASAKI, K., *Monotonicity of the period function for  $u'' - u + u^p = 0$ , with  $p \in \mathbb{R}$  and  $p > 1$* . J. Differential Equations 255 (2013) p. 1988–2001.