

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia Química
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química

Gustavo Henrique Batista Cassiolato

Otimização de Redes de Distribuição de Água

Maringá-PR
2019

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia Química
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química

Otimização de Redes de Distribuição de Água

Gustavo Henrique Batista Cassiolato
Matemático, UEM, 2016
Orientador: Prof. Dr. Esdras Penêdo de Carvalho
Coorientador: Prof. Dr. Mauro A. da S. Sá Ravagnani

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Química, área de Desenvolvimento de Processos.

Maringá-PR
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

C345o Cassiolato, Gustavo Henrique Batista
Otimização de redes de distribuição de água /
Gustavo Henrique Batista Cassiolato. -- Maringá,
2019.
90 f. : il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Esdras Penêdo de Carvalho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de
Engenharia Química, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Química, 2019.

1. Redes de distribuição de água. 2. Otimização
não linear. 3. Programação disjuntiva generalizada.
I. Carvalho, Esdras Penêdo, orient. II. Universidade
Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Química. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Química. III. Título.

CDD 21.ed.628.1

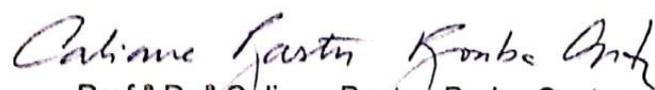
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

Esta é a versão final da Dissertação de Mestrado apresentada por Gustavo Henrique Batista Cassiolato perante a Comissão Julgadora do Curso de Mestrado em Engenharia Química em 25 de fevereiro de 2019.

COMISSÃO JULGADORA


Prof. Dr. Mauro Antônio da Silva Sá Ravagnani
Coorientador / Presidente


Prof. Dr. Esdras Penêdo de Carvalho
Orientador


Prof.^a Dr.^a Caliane Bastos Borba Costa
Membro


Dr. Leandro Vitor Pavão
Membro

Agradecimentos

Esta dissertação não é resultado do trabalho de apenas uma pessoa, mas sim de uma família inteira. Por isso quero manifestar minha sincera gratidão a todos que de alguma forma me ajudaram para que esse momento se tornasse realidade.

A Deus, que me cobriu com seu manto sagrado e, sempre me iluminou e me guiou no caminho certo para alcançar esse objetivo em minha vida.

Aos meus pais, Elinéia e Claudio, por sempre estarem ao meu lado e me incentivarem a continuar estudando, independentemente de qualquer dificuldade.

Ao meu irmão, Gabriel, pelas orações e por toda ajuda que me prestou.

A minha namorada, Caroline, pela paciência, compreensão, carinho, amor e, especialmente, por ser essa pessoa esplêndida que ela sempre foi comigo.

Aos meus orientadores, Prof. Esdras Penêdo de Carvalho e Prof. Mauro A. da S. Sá Ravagnani, pela confiança e oportunidade, sempre contribuindo com suas experiências e sabedorias.

Finalmente, quero agradecer a Universidade Estadual de Maringá e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da UEM pela oportunidade de realização deste curso.

Otimização de Redes de Distribuição de Água

Autor: Gustavo Henrique Batista Cassiolato

Orientador: Prof. Dr. Esdras Penêdo de Carvalho

Coorientador: Prof. Dr. Mauro A. da S. Sá Ravagnani

Dissertação de Mestrado; Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química; Universidade Estadual de Maringá; Av. Colombo, 5790, BL E46 – 09; CEP: 87020-900 – Maringá – PR, Brasil, defendida em 25 de Fevereiro de 2019.

Resumo

As redes de distribuição de água são sistemas utilizados para o transporte de água potável dos reservatórios até os consumidores de forma eficiente e contínua com quantidade, qualidade e pressões adequadas. Estas redes representam um alto impacto no custo total do sistema de abastecimento de água. Neste trabalho foi desenvolvido um modelo de otimização para o projeto de redes de distribuição de água visando encontrar os diâmetros das tubulações para que seu custo total seja minimizado, obedecendo algumas restrições hidráulicas. O problema é formulado como de programação não linear discreta mista e é reformulado como um problema de programação não linear inteira mista, por meio do uso de Programação Disjuntiva Generalizada. Enquanto o modelo de programação não linear discreta mista se baseia inteiramente em equações algébricas e desigualdades, o modelo de programação disjuntiva generalizada permite uma combinação de equações algébricas e lógicas, o que facilita a representação de decisões discretas. Ainda mais, os métodos de otimização mais comuns na literatura para resolver problemas de redes de distribuição de água são heurísticos, então o escolhido aqui foi um método determinístico. A grande vantagem deste trabalho é que não será necessário utilizar simuladores hidráulicos. A programação foi feita em ambiente GAMS e para validar o trabalho, realizaram-se alguns estudos de casos com quatro redes de distribuição de água: rede *Two-loop*, rede de *Hanoi*, rede R9 e rede *Two-source*. Para a rede *two-loop* encontra-se o ótimo global e, para as redes R9 e *two-source* obtiveram-se melhores soluções do que as existentes na literatura. Já para a rede de *Hanoi*, a solução encontrada não é a melhor existente na literatura, mas é aceitável, já que o modelo não depende de nenhum software adicional.

Palavras-chave: Redes de Distribuição de Água; Otimização Não Linear; Programação Disjuntiva Generalizada

Optimization of Water Distribution Networks

Author: Gustavo Henrique Batista Cassiolato

Supervisor: Prof. Dr. Esdras Penêdo de Carvalho

Cosupervisor: Prof. Dr. Mauro A. da S. Sá Ravagnani

Master Thesis; Chemical Engineering Graduate Program; State University of Maringá; Av. Colombo, 5790, BL E46 – 09; CEP: 87020-900 – Maringá – PR, Brazil, presented on 25th February 2019.

Abstract

Water distribution networks are systems used to transport drinking water from reservoirs to consumers in an efficient and continuous manner, with adequate quantity, quality and pressure. These networks represent a high impact on the total cost of the water supply system. In this work an optimization model was developed for the water distribution network design to find the pipe diameters so that its total cost is minimized, obeying some hydraulic constraints. The problem is formulated as mixed discrete nonlinear programming and is rephrased as a mixed integer nonlinear programming problem through the use of Generalized Disjunctive Programming. While the mixed discrete nonlinear programming model relies entirely on algebraic equations and inequalities, the generalized disjunctive programming model allows a combination of algebraic and logical equations, which facilitates the representation of discrete decisions. Further, the most common optimization methods in the literature for solving problems of water distribution networks are heuristics, so the choice here was a deterministic method. The great advantage of this work is that it will not be necessary to use hydraulic simulators. The programming was done in a GAMS environment and to validate the work, some case studies were carried out with four water distribution networks: Two-loop network, Hanoi network, R9 network and Two-source network. For the two-loop network, the global optimum is found, and for the R9 and two-source networks, better solutions than those in the literature were obtained. For the Hanoi network, the solution found is not the best available in the literature, but it is acceptable since the model does not rely on any additional software.

Keywords: Water Distribution Networks; Nonlinear Optimization; Generalized Disjunctive Programming

Lista de ilustrações

Figura 1 – Abordagens <i>Single</i> e <i>Split-pipe</i> para o dimensionamento de RDA	21
Figura 2 – Esboço gráfico de redes de distribuição de água	22
Figura 3 – Exemplo de balanço de massa	32
Figura 4 – Exemplo de balanço de energia	33
Figura 5 – Exemplo para o cálculo da pressão	37
Figura 6 – Regiões factíveis correspondes as disjunções	46
Figura 7 – Região factível por <i>Big – M</i>	47
Figura 8 – Região factível por envoltória convexa	50
Figura 9 – Gráfico entre as regiões	51
Figura 10 – Gráfico de comparação entre <i>Big – M</i> e envoltória convexa	51
Figura 11 – Rede <i>two-loop</i>	56
Figura 12 – Rede de <i>Hanoi</i>	61
Figura 13 – Rede R9	68
Figura 14 – Rede <i>two-source</i>	74

Lista de tabelas

Tabela 1 – Percentual de custo de um SAA	15
Tabela 2 – Diâmetros disponíveis para a RDA, com custos e rugosidades	30
Tabela 3 – Coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams	35
Tabela 4 – Correspondência entre variáveis booleanas e binárias	41
Tabela 5 – Representação algébrica dos operadores lógicos	42
Tabela 6 – Custos das tubulações disponíveis para a rede <i>two-loop</i>	57
Tabela 7 – Características dos nós para a rede <i>two-loop</i>	58
Tabela 8 – Características dos trechos para a rede <i>two-loop</i>	58
Tabela 9 – Resultado dos diâmetros, em polegadas, otimizados e comparação com outros trabalhos para a rede <i>two-loop</i>	59
Tabela 10 – Resultado das pressões, em mca, otimizadas e comparação com outros trabalhos para a rede <i>two-loop</i>	59
Tabela 11 – Métodos na otimização utilizados para solução da rede <i>two-loop</i>	60
Tabela 12 – Custos das tubulações disponíveis para a rede de <i>Hanoi</i>	61
Tabela 13 – Características dos nós para a rede de <i>Hanoi</i>	62
Tabela 14 – Características dos trechos para a rede de <i>Hanoi</i>	63
Tabela 15 – Resultado dos diâmetros, em polegadas, otimizados e comparação com outros trabalhos para a rede de <i>Hanoi</i>	64
Tabela 16 – Resultado das pressões, em mca, otimizadas e comparação com outros trabalhos para a rede de <i>Hanoi</i>	66
Tabela 17 – Métodos na otimização utilizados para solução da rede de <i>Hanoi</i>	67
Tabela 18 – Custos das tubulações disponíveis para a rede R9	68
Tabela 19 – Características dos nós para a rede R9	69
Tabela 20 – Características dos trechos para a rede R9	70
Tabela 21 – Resultado dos diâmetros, em <i>mm</i> , otimizados e comparação com outros trabalhos para a rede R9	71
Tabela 22 – Resultado das pressões, em mca, otimizadas e comparação com outros trabalhos para a rede R9	72
Tabela 23 – Métodos na otimização utilizados para solução da rede R9	73
Tabela 24 – Custos das tubulações disponíveis para a rede <i>two-source</i>	75
Tabela 25 – Características dos nós para a rede <i>two-source</i>	75
Tabela 26 – Características dos trechos para a rede <i>two-source</i>	76
Tabela 27 – Resultado dos diâmetros, em <i>mm</i> , otimizados e comparação com outros trabalhos para a rede <i>two-source</i>	78
Tabela 28 – Resultado das pressões, em mca, otimizadas e comparação com outros trabalhos para a rede <i>two-source</i>	79

Tabela 29 – Métodos na otimização utilizados para solução da rede *two-source* . . . 80

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACO	<i>Ant Colony Optimization</i>
CAGEPA	Companhia de Águas e Esgoto da Paraíba
DE	<i>Differential Evolution</i>
DENET	Modelo computacional para RDA
EPANET	Software de simulação hidráulica
GA	<i>Genetic Algorithms</i>
GAMS	<i>General Algebraic Modeling System</i>
GANET	Modelo computacional para RDA
GENOME	Modelo computacional para RDA
GLOBE	Método de otimização global
GPL	Gradiente de Programação Linear
GRG	Gradiente Reduzido Generalizado
GRG2	Gradiente Reduzido Generalizado 2
HBMO	<i>Honey Bee Mating Optimization</i>
KYPIPE	Software de simulação hidráulica
LENHSNET	Modelo computacional para RDA
PDG	Programação Disjuntiva Generalizada
PL	Programação Linear
PLIM	Programação Linear Inteira Mista
PNL	Programação Não Linear
PNL2000	Modelo de otimização
PNLDM	Programação Não Linear Discreta Mista
PNLIM	Programação Não Linear Inteira Mista

PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
RDA	Redes de Distribuição de Água
SAA	Sistemas de Abastecimento de Água
SBB	<i>Spatial Branch and Bound</i>

Lista de símbolos

\mathcal{D}	Conjunto de diâmetros disponíveis
C	Coefficiente de rugosidade de Hazen-Williams
C_T	Valor da função objetivo
$Custo(D)$	Custo por unidade de comprimento do trecho com diâmetro disponível D
$Custo(x)$	Custo por unidade de comprimento do trecho com diâmetro x
D	Diâmetro disponível
dmd	Demanda no nó
elv	Elevação do nó
$elv(re)$	Elevação do reservatório
E_P	Energia liberada pela bomba
h_f	Perda de carga no trecho
i	Variação dos diâmetros disponíveis
j	Trechos
k	Nós
L	Comprimento do trecho
n_c	Número de ciclos
n_d	Número de diâmetros disponíveis
n_f	Número de fontes de energia de impulsão
n_n	Número de nós
n_t	Número de trechos
PCN	Conjunto das tubulações correspondentes as perdas de carga negativas pertencentes ao ciclo
PCP	Conjunto das tubulações correspondentes as perdas de carga positivas pertencentes ao ciclo

pr	Pressão no nó
pr_{min}	Pressão mínima no nó
q	Vazão volumétrica
R	Rugosidade do trecho com diâmetro disponível
v	Velocidade do fluido no trecho
VE	Conjunto das tubulações correspondentes as vazões de entrada no nó
v_{max}	Velocidade máxima do fluido
v_{min}	Velocidade mínima do fluido
VS	Conjunto das tubulações correspondentes as vazões de saída no nó
x	Diâmetro do trecho
Y	Variável booleana
y	Variável binária

Letras gregas

α	Fonte de energia de impulsão
γ	Ciclo
λ	Custo do trecho
σ	Rugosidade do trecho
τ	Conjunto dos trechos correspondentes ao caminho percorrido pela vazão

Sumário

1	Introdução	15
2	Conceitos Preliminares	18
2.1	Formulação Matemática para um Problema de Otimização	18
2.2	Redes de Distribuição de Água	19
2.3	Métodos de Otimização de Redes de Distribuição Água	22
3	Modelo de Otimização	30
3.1	Função Objetivo	30
3.2	Restrições	31
3.3	Equações Hidráulicas	35
3.3.1	Equação para o Cálculo das Perdas de Carga	35
3.3.2	Equação para o Cálculo das Pressões	36
3.3.3	Equação para o Cálculo das Velocidades	37
4	Programação Disjuntiva Generalizada (PDG)	39
4.1	Introdução à PDG	39
4.2	Transformação de Expressões Lógicas em Algébricas	41
4.2.1	Transformação para a Forma Normal Conjuntiva	43
4.3	Formulação <i>Big-M</i>	44
4.4	Formulação Envoltória Convexa	47
5	Programação Disjuntiva Generalizada Aplicada a Redes de Distribuição de Água	52
5.1	Dimensionamento de RDA	52
5.2	Resultados	56
5.2.1	Rede <i>Two-loop</i>	56
5.2.2	Rede de <i>Hanoi</i>	60
5.2.3	Rede R9	67
5.2.4	Rede <i>Two-source</i>	74
6	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	81
	Referências	83

1 Introdução

A cada dia novas tecnologias são desenvolvidas em diversas áreas do conhecimento com o intuito de tornar as atividades mais eficientes e precisas, além de melhorar a qualidade de vida de uma população. Quão mais essenciais essas atividades, mais importantes se tornam essas descobertas. O setor de abastecimento de água é de fundamental importância para o desenvolvimento de qualquer região, seja ela de pequeno, médio ou grande porte. Os Sistemas de Abastecimento de Água (SAA) trabalham com dois insumos básicos e estratégicos, água e energia. Logo, sua utilização deve ser operacionalizada de maneira eficiente e econômica, reduzindo ao máximo os desperdícios ao longo da sua operação.

Um importante indicador de eficiência em um SAA é o índice de perdas de água. No Brasil, este índice varia em torno de 38 % (ABES, 2015). No entanto, em alguns estados alcança valores em torno de 75 %. É possível afirmar que um dos grandes desafios enfrentados pelas operadoras desses sistemas no Brasil é conseguir efetuar uma redução em seu índice de perdas de água em cada uma das etapas do seu processo de fornecimento.

As principais partes que compõem um sistema de abastecimento de água são o manancial, a captação, a estação elevatória, a adutora, a estação de tratamento de água, o reservatório e a rede de distribuição. Neste trabalho, o interesse de estudo é a rede de distribuição.

Os custos das adutoras e das redes de abastecimento são encontrados em função dos custos das tubulações, somados aos gastos com escavação, transporte, montagem e peças de conexão e controle. Os custos das tubulações dependem dos seus comprimentos, materiais, diâmetros e pressões dos trechos escolhidos. Em um SAA, os custos de implantação das redes de distribuição são os mais expressivos, como pode ser visto na Tabela 1, em que essa expressividade é função da população atendida pelo sistema de abastecimento.

Tabela 1 – Percentual de custo de um SAA

Partes constituintes do sistema	Custo (%)			
	$P \leq 10^4$	$10^4 < P \leq 4 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4 < P \leq 10^5$	$P > 10^5$
Captação	30	20	8	3
Adução	8	9	11	11
Bombeamento	6	5	5	1
Tratamento	12	9	9	5
Reservação	6	6	6	4
Distribuição	38	51	61	76

P = população

Fonte – Adaptada de [Tsutiya \(2006\)](#)

Entende-se como rede de distribuição a unidade do sistema encarregada de distribuir a água tratada, produzida nas estações de tratamento, para todos os pontos de consumo, por exemplo, casas, prédios, indústrias entre outros. Conforme [Netto e Fernández \(2018\)](#), as Redes de Distribuição de Água (RDA) são constituídas por um conjunto de tubulações e peças especiais, dispostas convenientemente, a fim de garantir o abastecimento das unidades, com diâmetros variados, podendo ser classificadas em condutos principais e condutos secundários. Os condutos principais são os de maiores diâmetros, responsáveis pela alimentação dos condutos secundários. Os secundários, por sua vez, alimentam os ramais dos prédios atendidos pelo sistema.

Nesse sentido, destaca-se que a unidade mínima de redes de distribuição é um setor. Ele é construído para ser atendido por águas oriundas de reservatórios de distribuição. Esses setores podem ser classificados por zona de pressão em zona de baixa pressão ou zona de alta pressão.

Os setores de alta pressão não apresentam problemas de abastecimento, pois sua topografia apresenta-se como uma zona baixa, o que deixa a pressão sempre positiva. Contudo, nos setores de baixa pressão, é muito comum haver problemas de abastecimento em virtude da falta de pressão, principalmente durante os horários de maior demanda de água, seja devido à superação dos dimensionamentos dos projetos, seja devido ao crescimento de novas áreas, o que normalmente requer a instalação de bombas elevadoras de pressão na rede, ou até a interligação de setores vizinhos para solucionar o problema do desabastecimento de determinados locais dentro do setor.

As redes de distribuição de água são os elementos mais importante no sistema de abastecimento de água, pois são as partes do sistema que encontram-se mais próximas dos consumidores, e devem merecer especial atenção, principalmente no que se refere à qualidade e perdas de água. Esses dois aspectos devem ser uma preocupação contínua dos responsáveis pelo sistema de abastecimento de água. Ainda mais, a entrega eficiente e contínua de água em quantidade e pressões adequadas deve ser garantida. Além disso, a velocidade do fluido deve respeitar os limites impostos.

O objetivo deste trabalho é formular um modelo matemático para encontrar o projeto ótimo de RDA, ou seja, encontrar o diâmetro de cada trecho para que seu custo total seja minimizado respeitando as restrições hidráulicas. Neste caso, os diâmetros de cada trecho são variáveis discretas e devem ser selecionados a partir de um conjunto de diâmetros disponíveis. Esses diâmetros são os disponíveis no mercado.

Há distintos modelos de otimização para o projeto de RDA. Em trabalho recente ([SURCO et al., 2017](#)) é apresentado um modelo para o projeto ótimo de RDA. O modelo apresenta equações não lineares, cujos diâmetros são variáveis discretas e, assim, apresenta

a formulação de um problema de Programação Não Linear Discreta Mista (PNLDM). Este problema é de difícil solução. Além disso, o resultado da otimização pode divergir da prática, ou seja, encontrar valores de diâmetros que não existem no mercado. No presente trabalho, baseado no modelo apresentado em [Surco *et al.* \(2017\)](#), fez-se a reformulação do problema PNLDM para um de Programação Não Linear Inteira Mista (PNLIM).

Por meio do uso de Programação Disjuntiva Generalizada (PDG) é possível obter uma formulação de PNLIM, em que as variáveis discretas desaparecem do problema e são criadas outras variáveis inteiras, para representar cada um dos conjuntos discretos. Esta abordagem envolve conceitos de lógica matemática, como proposições e conectivos lógicos. A ideia é transformar expressões lógicas em expressões algébricas equivalentes, de modo que as expressões algébricas estejam expressas apenas em termos de variáveis binárias. Assim, quando a expressão lógica for verdadeira, a expressão algébrica é viável e quando a expressão lógica for falsa, a expressão algébrica não é viável.

Os métodos mais utilizados na literatura para resolver um problema de otimização de redes de distribuição de água são heurísticos e, também a grande maioria utiliza-se simuladores hidráulicos auxiliares para o cálculo das pressões e das velocidades. Embora alguns destes simuladores sejam encontrados na forma de software livre, ainda assim existe a dependência deles para que o problema de otimização seja resolvido. Se o simulador não estiver disponível, por exemplo, torna-se inviável a solução do problema. Por este motivo, o interesse no presente trabalho foi utilizar um método determinístico e não usar nenhum simulador hidráulico para os cálculos. O ambiente GAMS foi utilizado para o desenvolvimento dos programas computacionais e a aplicabilidade desse estudo foi feita em alguns exemplos encontrados na literatura, sendo um deles um caso de RDA real.

2 Conceitos Preliminares

2.1 Formulação Matemática para um Problema de Otimização

Reduzir custos, aumentar lucros, melhorar a qualidade de um produto ou minimizar riscos ambientais são algumas das motivações para o desenvolvimento de ferramentas de otimização para os problemas complexos que envolvem o projeto e a operação de plantas industriais. Vários fatores têm contribuído para esse desenvolvimento e um dos principais é a disponibilidade, cada vez maior, de computadores e sua crescente capacidade de cálculos, que facilitam a aplicação de complexos modelos matemáticos.

Para resolver um problema deste tipo, é preciso considerar dois componentes. O primeiro é o espaço de busca, no qual são consideradas todas as possibilidades de solução de um determinado problema. O outro é a função objetivo, que é uma função matemática que associa cada ponto no espaço de soluções a um número real, possibilitando avaliar os membros do espaço de busca. Este número permite medir a qualidade de uma resposta: no problema de minimização, quanto menor o valor da função objetivo, melhor a resposta. No problema de maximização, o inverso ocorre. De forma geral, uma formulação matemática para um problema de otimização é descrita a seguir.

Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor de variáveis de otimização e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um critério de otimização (função objetivo). O problema de otimização pode ser expresso como $x^* = \text{minimiza } f(x)$. Esta é a formulação característica dos problemas de otimização irrestrita. Para expressar restrições associadas às limitações de natureza física ou tecnológica, definem-se regiões no espaço de variáveis por meio de igualdades ou de desigualdades:

$$\begin{cases} h_i(x) = 0, & \forall i = 1, \dots, m \\ g_j(x) \leq 0, & \forall j = 1, \dots, r \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

em que as funções h_i e g_j são restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente e $S = \{x \mid h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m \text{ e } g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, r\}$ é a região factível ou viável do problema.

Um problema de otimização combinado com um problema de factibilidade é a situação mais frequentemente encontrada na prática, sendo expresso por:

$$\text{minimizar } f(x)$$

$$\text{sujeita a } \begin{cases} h_i(x) = 0, & \forall i = 1, \dots, m \\ g_j(x) \leq 0, & \forall j = 1, \dots, r \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

em que x é a variável de decisão, f é a função objetivo a ser otimizada, h e g são restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, e S é a região de viabilidade.

O interesse está em encontrar a solução ótima, ou seja, $x^* \in S$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in S$. Mas, a questão fundamental está no fato de que nem sempre o ótimo é encontrado facilmente, num único cálculo. É necessário um processo sistemático de busca. Um procedimento iterativo de cálculos que, passo a passo, de candidato a candidato, seja possível ir melhorando até que o valor ótimo seja encontrado, ou até que um determinado critério esteja satisfeito, nada mais é do que um método de otimização descrito por um algoritmo.

2.2 Redes de Distribuição de Água

A água é um recurso natural de fundamental importância para a sobrevivência humana. Por isso, os serviços de abastecimento de água fazem parte das necessidades básicas de uma população. A água potável, ou seja, aquela que pode ser consumida sem riscos à saúde e sem causar rejeições ao consumo por ser um recurso natural, hoje já limitado em algumas regiões do Brasil e muito limitado em várias regiões do planeta, deve ser explorada e distribuída de forma eficiente.

Dificuldades de abastecimento de água abarcam a sociedade como um todo, não só por se tratar de um recurso escasso, mas pelo grau de relevância que tem na vida dos seres humanos. Estima-se, por conseguinte, que cerca de 40 % da população global viva hoje sob a situação de estresse hídrico. Essas pessoas habitam regiões onde a oferta anual é inferior a 1700 m^3 de água por habitante, limite mínimo considerado seguro pela Organização das Nações Unidas. Por esse motivo, decisões que englobam as redes de distribuição de água têm um caráter social. Entretanto, as companhias de abastecimento têm dificuldade de manter a qualidade do serviço, porque, além dos problemas, existem também o envelhecimento e o desgaste das estruturas, dos equipamentos e das tubulações que compõem o sistema de abastecimento e o crescimento populacional.

O abastecimento de água tratável dos centros urbanos envolve obras de engenharia que vão desde a captação, passando pelo tratamento, até distribuição e entrega ao usuário final. As estações de bombeamento são responsáveis pela pressurização da rede de distribuição de água de maneira direta ou indireta, com auxílio de reservatórios elevados. A complexidade enfrentada pelos sistemas de abastecimentos de água decorre, dentre outros fatores, da heterogeneidade da topologia das zonas a serem abastecidas. Desta forma, o

sistema é exigido a atender simultaneamente, com vazões, pressões e velocidade do fluido adequadas, a população localizada em zonas de topografia altas e baixas. Estas disparidades devem ser enfrentadas através do uso de estratégias que promovam a adequação entre os valores de pressão e vazão ao longo de toda a rede de distribuição.

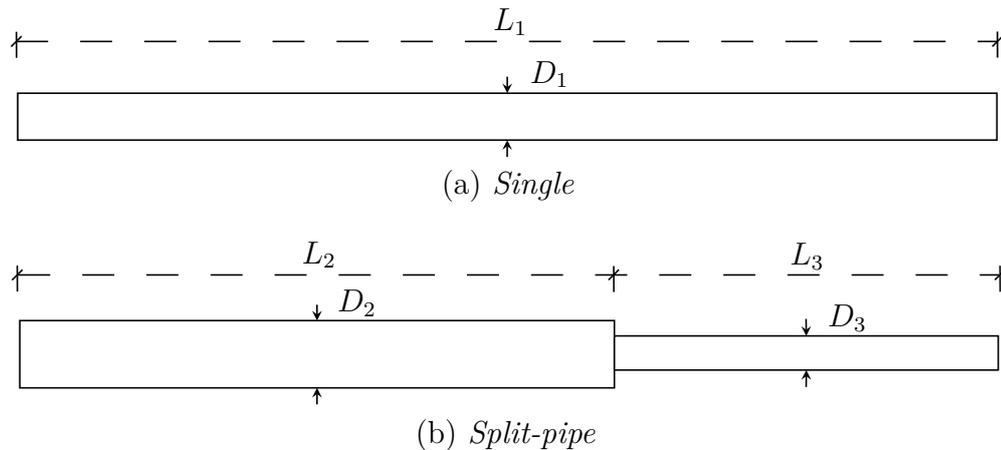
Atualmente, as companhias de saneamento têm-se preocupado com a distribuição de água e a conservação de energia elétrica, devido à sua ligação direta com questões econômicas e ambientais. São raros os sistemas de distribuição de água que operam exclusivamente por gravidade, sendo dotados, no mínimo, de um conjunto motor-bomba para concentrar água a diversos pontos, como reservatórios, redes hidráulicas e adutoras (BEZERRA, 2009).

Na busca por atender a população com um serviço eficiente de distribuição de água, as empresas do setor de saneamento passam por problemas de falta de recursos financeiros para investir nessas ações de setorização das redes como também na ampliação dos seus sistemas. Vale ressaltar que algumas empresas, mesmo diante da carência desses recursos financeiros, necessitam ampliar seus sistemas e, para tal, projetam e constroem novos sistemas de abastecimento mais econômicos. Nesse sentido, para alcançar essa economia, os projetistas suprimem os reservatórios de distribuição do novo projeto do sistema e passam a alimentar a rede com água diretamente do sistema de bombeamento.

Outro problema recorrente em sistemas de distribuição diz respeito à diminuição ou até mesmo à falta da pressão na rede de distribuição nos horários de maior demanda em locais que apresentam uma topografia elevada. Esses pontos normalmente não apresentam pressões suficientes para atender o consumidor.

Para determinar a concepção ótima de redes de distribuição de água, os componentes que podem ser dimensionados são as tubulações da rede de distribuição, as bombas, ou a estação de bombeamento e os reservatórios. Além disso, as configurações ótimas para controle e válvulas redutoras de pressão podem ser determinadas. Essa metodologia combina técnicas de programação não linear com modelos de simulação de distribuição de água existentes.

O dimensionamento de RDA pode ser formulado como um problema de otimização e duas abordagens podem ser utilizadas. A abordagem *Split-pipe* usa um ou mais diâmetros em cada trecho da rede e a abordagem *Single* usa um único diâmetro por trecho. A Figura 1 mostra as duas abordagens.

Figura 1 – Abordagens *Single* e *Split-pipe* para o dimensionamento de RDA

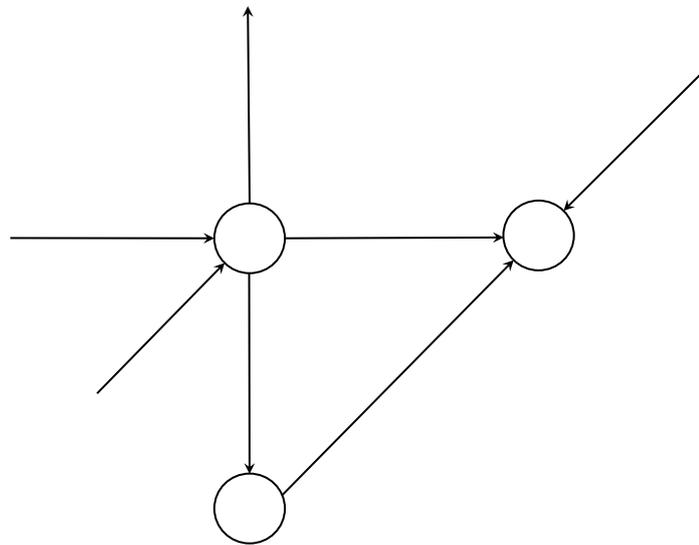
Fonte – Elaborada pelo autor

Segundo [Bragalli *et al.* \(2008\)](#), modelos que utilizam a abordagem *split-pipe* têm a desvantagem de permitir soluções com muitas mudanças no diâmetro ao longo do comprimento de um trecho. Além disso, pode haver perda de pressão adicional nas junções dos trechos, que podem se tornar significativas se houver muitos trechos diferentes ao longo de um trecho. Entretanto, tais perdas não ocorrem quando o tratamento *single* é usado.

A RDA é composta por um conjunto de peças especiais destinadas a conduzir a água até os pontos de tomada das instalações prediais ou a pontos de consumo público, sempre de forma contínua e segura. Alguns dos componentes desta rede são os trechos, bombas, válvulas, reservatórios, medidores, entre outros acessórios destinados a colocar água potável à disposição dos consumidores. Além disso, sua configuração é o componente que mais impacta no custo do sistema de abastecimento de água, compreendendo, cerca de 50 a 75 % do custo total do abastecimento, de acordo com [Tsutiya \(2006\)](#). Por isso, existe a necessidade de desenvolver projetos ótimos para a síntese de RDA.

Uma rede pode ser representada em um gráfico utilizando pontos (nós) e linhas (trechos) conectados nos nós. Os nós podem representar reservatórios ou pontos de demanda, enquanto que as linhas podem representar trechos, válvulas ou bombas.

Figura 2 – Esboço gráfico de redes de distribuição de água



Fonte – Elaborada pelo autor

As redes são consideradas pelo sentido de escoamento da água nas tubulações secundárias (ramificadas ou malhadas). Podem situar-se em níveis diferentes nas cidades de relevo acidentado, bem como possuir duas tubulações em ruas largas ou tráfego intenso. Na rede de distribuição distinguem-se dois tipos de condutos:

1. Condutos Principais: também chamados tronco ou mestres, são as canalizações de maior diâmetro, responsáveis pela alimentação dos condutos secundários. A eles interessa, portanto, o abastecimento de extensas áreas da cidade.
2. Condutos Secundários: de menor diâmetro, são os que estão intimamente em contato com os edifícios a abastecer e cuja alimentação depende diretamente deles. A área servida por um conduto desse tipo é restrita e está nas suas vizinhanças.

O fornecimento de água para a rede de distribuição pode ser feito por meio de reservatórios elevados, apoiados, semienterrados ou enterrados, ou feito pela estação elevatória com o uso de bombas de rotação constante ou variável.

2.3 Métodos de Otimização de Redes de Distribuição de Água

A otimização de redes de distribuição de água vem crescendo de forma gradativa e é uma linha de pesquisa que está se destacando mundialmente em virtude dos altos custos de instalação e de manutenção. De acordo com [Van Dijk *et al.* \(2008\)](#), a otimização de RDA relativamente pequena exigirá inúmeros cálculos repetitivos, devido às variáveis

discretas e ao enorme tamanho do espaço de soluções que tornam muito difícil aplicar qualquer uma das técnicas de otimização convencionais para encontrar um ótimo global. O desenvolvimento de modelos nas últimas décadas melhorou a capacidade de simular o comportamento hidráulico de grandes RDA.

Existem diversos trabalhos na literatura para o projeto ótimo de redes de distribuição de água, utilizando tanto métodos determinísticos como métodos estocásticos. No entanto, boa parte dos métodos de solução propostos dependem de simuladores hidráulicos para o cálculo das pressões e das velocidades da água na rede. Por isso, considerando essa questão, escolheu-se para este trabalho uma metodologia determinística, de modo que não haja dependência de simuladores externos.

O projeto da rede pode ser formulado, por exemplo, como um problema de programação não linear discreta mista, em que as variáveis discretas são os diâmetros de cada trecho. Uma alternativa é reformular este problema, de modo que as variáveis discretas sejam substituídas por variáveis inteiras. A seguir são apresentados alguns dos trabalhos encontrados na literatura que abordam o projeto ótimo de RDA.

A partir da década de 1970, aproximadamente, pesquisadores deram início a otimização de RDA utilizando técnicas de Programação Linear (PL), Programação Não Linear (PNL), Programação Linear Inteira Mista (PLIM), programação não linear inteira mista entre outras. A aplicação de técnicas de programação linear em problemas de redes de distribuição de água pressurizadas foi introduzida por [Karmeli et al. \(1968\)](#).

[Jacoby \(1968\)](#) e [Kally \(1972\)](#) utilizaram métodos de PL que requerem o uso de um *solver* de rede em cada iteração da otimização, isto é, primeiro encontra-se as perdas de carga e as vazões na rede e, assim, usa-se esta solução em alguns procedimentos para modificar o projeto. Em [Schaake e Lai \(1969\)](#) e [Kohlhass e Mattern \(1971\)](#) foram utilizados métodos de PL que não usam um *solver* de rede convencional, mas ambos os trabalhos trataram o caso em que a elevação do reservatório da rede é fixada. [Bhave \(1983b\)](#) e [Bhave \(1983a\)](#) também utilizaram técnicas de otimização com formulação de PL.

Um algoritmo usando programação linear sucessiva foi apresentado em [Hansen et al. \(1991\)](#). Em [Sarbu \(1997\)](#) um modelo de PL melhorado foi apresentado para o projeto ótimo de RDA novas ou parcialmente estendidas. O trabalho de [Paez et al. \(2014\)](#) apresenta uma abordagem de programação linear inteira para encontrar uma solução ótima de RDA.

O método para o dimensionamento de redes de distribuição de água pressurizadas através de programação não linear, caracteriza com mais clareza as propriedades físicas do problema, mas necessita de um tempo computacional maior dependendo dos valores das estimativas iniciais. Ainda mais, a solução pode não ser o ótimo global como no caso de PL. O trabalho de [Shamir e Howard \(1968\)](#) foi um dos primeiros que se aproveitou da PNL em RDA. Além disso, as condições para a convergência do esquema iterativo de

Newton-Raphson e a possibilidade de problemas insolúveis foram também discutidas neste trabalho.

Alguns trabalhos utilizando PNL foram desenvolvidos tendo como restrições de igualdade as equações da conservação de massa e da energia e restrições de desigualdade. Estas últimas restrições foram eliminadas pela transformação de *Box* e o problema foi resolvido a partir do método de *Haarhoff* e *Buys*, no trabalho de [Watanatada \(1973\)](#).

Em [Xu e Goulter \(1999b\)](#), o problema foi formulado como de PNL e a solução foi obtida usando uma aproximação da metodologia *split-pipe*. Um modelo hidráulico probabilístico foi usado para explicar a incerteza nas demandas nodais e na capacidade do trecho. Ainda mais, o uso de um algoritmo de primeira ordem baseado em método de confiabilidade para calcular valores aproximados da confiabilidade de capacidade das redes de distribuição de água foi também usado.

No trabalho de [Curi e Firmino \(2004\)](#) um modelo de dimensionamento de RDA pressurizadas foi apresentado, cuja solução é obtida em duas etapas. Na primeira, utiliza-se PNL para encontrar as vazões e os diâmetros das tubulações e, na segunda, PL é utilizada para determinar o comprimento de cada um dos trechos.

Em outro trabalho ([ALPEROVITS; SHAMIR, 1977](#)), os pesquisadores propuseram o método denominado Gradiente de Programação Linear (GPL) aplicado em RDA e, uma das redes mais utilizadas em trabalhos na área de RDA por muitos pesquisadores, chamada *Two-loop*, foi originalmente apresentada neste trabalho. Como uma extensão dessa técnica, [Goulter et al. \(1986\)](#), [Kessler e Shamir \(1989\)](#) e [Eiger et al. \(1994\)](#) trabalharam na otimização de RDA. Esse método é iterativo e na primeira etapa encontram-se as vazões das tubulações e na segunda calcula-se o comprimento dos trechos associados aos seus diâmetros ou alteram-se as perdas de carga usando a direção do gradiente.

[Quindry et al. \(1981\)](#) usaram uma técnica iterativa de otimização para o planejamento e o projeto de RDA, empregando o GPL, cuja solução é o ótimo global. Em [Fujiwara e Khang \(1990\)](#), o método usado é o de decomposição em duas fases como uma extensão do método GPL, utilizando a programação não linear com o critério de solução *split-pipe*, em que cada trecho é segmentado com comprimentos desconhecidos, de acordo com o número de diâmetros selecionados. Entretanto, usando este tipo de abordagem, [Fujiwara e Khang \(1990\)](#) empregaram uma otimização heurística, trabalhando com as restrições por simulação numérica e, uma das redes mais estudadas pelos pesquisadores nesta área, a da cidade de *Hanoi*, foi originalmente apresentada neste trabalho.

Os autores [Hamberg \(1974\)](#) e [Rasmusen \(1976\)](#) consideraram o problema da otimização dos custos de tubulação e custos de energia e, assim, o problema foi resolvido por meio de um procedimento iterativo no qual o diâmetro de cada trecho foi sequencialmente ajustado. Além disso, nenhum arredondamento de diâmetros foi necessário, pois as

dimensões disponíveis são usadas diretamente na otimização. Em [Gomes et al. \(2009\)](#) foi desenvolvido o modelo chamado LENHSNET, que inclui o cálculo iterativo e um modelo de simulação hidráulica usando o EPANET e, uma das redes utilizadas em trabalhos na área de RDA por pesquisadores, chamada R9, foi originalmente apresentada neste trabalho.

A metodologia desenvolvida em [Shamir \(1974\)](#) para o projeto de RDA utiliza o Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) e as penalidades, juntamente, com o método de Newton-Raphson modificado para encontrar as vazões. Nessa mesma modalidade, [Su et al. \(1987\)](#) em conjunto com GRG, usaram o simulador hidráulico KYPIPE.

Já o método de Gradiente Reduzido Generalizado 2 (GRG2), desenvolvido por [Lasdon et al. \(1984\)](#) e baseado no método GRG, foi utilizado por [Lansey e Mays \(1989\)](#) para resolver o problema PNL aplicado em RDA. Esse método tenta convergir para a solução ótima através de um procedimento de otimização em duas etapas usando os multiplicadores de Lagrange e pesos de penalidade corretos. Além disso, o simulador KYPIPE é utilizado. [Cullinane et al. \(1992\)](#) utilizaram uma extensão desse trabalho e, incorporaram um procedimento baseado em confiabilidade e disponibilidade em um procedimento de otimização.

O modelo PNL2000 empregada por [Gomes e Formiga \(2001\)](#) está baseada no método GRG2 e tem como objetivo encontrar os diâmetros dos trechos e a cota piezométrica de bombeamento, de modo que a soma dos custos de investimento e de operação seja minimizado. Além disso, este trabalho usou *Solver* do Excel da Microsoft.

Considerando abordagens envolvendo variáveis inteiras, a técnica determinística *Branch and Bound*, com a metodologia *split-pipe* foi empregada em [Sherali e Smith \(1997\)](#) para o problema do projeto ótimo de RDA. Já [Sherali et al. \(2001\)](#) efetuaram um melhoramento significativo nesse método. [Costa et al. \(2001\)](#) também usaram *branch and bound*, em que o ótimo global é encontrado através da geração de equações convergentes com limites superior e inferior.

O trabalho de [Morsi et al. \(2012\)](#) apresentou uma abordagem PLIM com base na linearização por partes de restrições não lineares. As vantagens desses métodos é que são rápidos, robustos, capazes de resolver problemas com um grande número de variáveis e garantem a qualidade da solução e, assim, o potencial de encontrar soluções otimizadas globalmente é maior.

No trabalho de [Bragalli et al. \(2008\)](#) resolveu-se um problema de PNLIM, aplicado em RDA, utilizando o *solver Bonmin* no ambiente de modelagem de sistemas AMPL. O método usado para encontrar a solução usa um relaxamento PNL contínuo e não convexo e uma busca com PNLIM. Segundo [D'Ambrosio et al. \(2014\)](#), o modelo matemático geral do projeto ótimo de RDA é um PNLIM que possui uma estrutura comum em relação à forma como a dinâmica da água em tubulações é descrita.

Até a década de 1980, aproximadamente, os problemas de RDA eram resolvidos utilizando apenas métodos determinísticos. Existem dificuldades na aplicação destes métodos, uma vez que o problema possui variáveis discretas com restrições e função objetivo não lineares. Portanto, devido a essas dificuldades, surgiram os métodos estocásticos aplicados em RDA, como apresentado a seguir.

Maier *et al.* (2003) utilizaram o algoritmo de otimização *Ant Colony Optimization* (ACO) com adaptações para o projeto de RDA. Esse modelo baseia-se na analogia do comportamento de forrageamento de uma colônia de formigas em busca e na capacidade de determinar a rota mais curta entre seu ninho e uma fonte de alimento (DORIGO *et al.*, 1996). Nos trabalhos de Zecchin *et al.* (2003) e Zecchin *et al.* (2006), a técnica de otimização ACO também foi utilizada para o projeto de RDA, em que o algoritmo foi implementado usando o *Max-Min Ant System*, o qual motiva a pesquisa local em torno da melhor solução encontrada em cada iteração, enquanto implementa métodos que reduzem a convergência e facilitam a exploração.

O algoritmo *Differential Evolution* (DE) foi proposto por Storn e Price (1997) e, é um método estocástico que não usa derivadas, mas utiliza vetores e visa solucionar problemas de otimização contínua. Em Vasani e Simonovic (2010) foi desenvolvido um modelo computacional, denominado DENET, que envolve a aplicação da técnica de otimização evolutiva ligada ao simulador EPANET, para o projeto ótimo de redes de distribuição de água. No trabalho de Zheng *et al.* (2011) a abordagem de otimização proposta combina a técnica de otimização PNL com o algoritmo DE através da decomposição de rede. Em Suribabu e Neelakantan (2014), utilizando DE, os autores trabalharam buscando a reabilitação de RDA, em que o modelo de otimização e o simulador hidráulico EPANET foram utilizados.

Os *Genetic Algorithms* (GA) aplicados a redes de distribuição de água tiveram como precursores os pesquisadores Goldberg e Kuo (1987). Esse algoritmo foi motivado pela Teoria da Evolução, proposta pelo cientista Charles Darwin, em 1859. Além disso, inicializa-se criando uma população de possíveis soluções em que cada indivíduo é considerado como um organismo em evolução. Mas são necessárias algumas penalizações para que as soluções respeitem as restrições do problema. Alguns dos autores que usufruíram dessas técnicas e a efetuaram em RDA foram Murphy *et al.* (1993), Simpson e Goldberg (1994) e Dandy *et al.* (1996) que desenvolveram um melhoramento nos GA.

Para o projeto ótimo de RDA, Savic e Walters (1997) desenvolveram um modelo matemático preciso e reproduziram os GA em um modelo computacional, chamado GANET. Abebe e Solomatine (1998), a partir dos GA, trabalharam com uma ferramenta de otimização global que incorpora vários algoritmos de busca, denominado GLOBE, somado ao simulador EPANET. Montesinos *et al.* (1999) propuseram um GA modificado, em que várias mudanças são introduzidas nos processos de seleção e mutação, em relação

ao GA original.

Reca e Martínez (2006) desenvolveram um modelo computacional, denominado GENOME, para a otimização de RDA. Além disso, esse modelo foi formulado a partir do GA com ligação ao simulador EPANET. Em Kadu *et al.* (2008) um algoritmo GA modificado com diminuição no espaço de busca foi utilizado em RDA e, uma das redes utilizadas em trabalhos na área de RDA por pesquisadores, chamada *Two-source*, foi originalmente apresentada neste trabalho. Haghghi *et al.* (2011) também usaram um GA modificado com uma programação linear inteira em RDA.

Bi *et al.* (2015) desenvolveram o procedimento conhecido como *Prescreened Heuristic Sampling Method*, utilizando um GA e acompanhado do simulador EPANET. Trabalhos como os de Gupta *et al.* (1999), Vairavamoorthy e Ali (2005), Van Dijk *et al.* (2008), Krapivka e Ostfeld (2009) e Zheng *et al.* (2013) também utilizaram GA em RDA. Em Marchiori *et al.* (2017) pode-se analisar a performance de diferentes funções de penalização no método de otimização GA aplicado em RDA.

No trabalho de Abbass (2001) o algoritmo *Honey Bee Mating Optimization* (HBMO) foi fundamentado seguindo o comportamento de acasalamento de abelhas e, por causa de algumas semelhanças com o algoritmo GA, pode-se afirmar que o HBMO é uma integração de SA e GA. Para RDA, o trabalho de Jahanshahi e Haddad (2008) utilizou esse algoritmo com o EPANET para a simulação hidráulica da rede. Em Mohan e Babu (2009) o problema de otimização de RDA também foi utilizando o HBMO.

Nomeia-se *Harmony Search* o algoritmo que foi elaborado por Geem *et al.* (2001), inspirado no processo de improvisação dos músicos de jazz. Essa metodologia aplicada em RDA foi usada por Geem *et al.* (2002) e Geem (2006) em companhia com o simulador EPANET e no trabalho de Geem (2009) a partir de uma otimização multiobjetivo.

O algoritmo *Iterated Local Search* alterna uma etapa de busca local com uma perturbação aleatória, isto é, a busca local é usada para a intensificação, enquanto a perturbação é usada para a diversificação. No trabalho de De Corte e Sörensen (2016) essa metodologia foi aproveitada em RDA.

Os pesquisadores Eberhart e Kennedy (1995) introduziram o algoritmo *Particle Swarm Optimization* (PSO), o qual é fundamentado no comportamento social e cognitivo dos bandos de pássaros quando migram a lugares desconhecidos em busca de alimentos. Entretanto, são necessárias algumas penalizações para que as soluções respeitem as restrições do problema. Em RDA, Suribabu e Neelakantan (2006) e Montalvo *et al.* (2008) desenvolveram um método de PSO para o projeto de RDA. Ezzeldin *et al.* (2013) e Surco *et al.* (2017) utilizaram um PSO discreto inteiro a partir do método de solução hidráulico de Newton-Raphson e do simulador EPANET, respectivamente, para o projeto de RDA.

No trabalho de Qi *et al.* (2015) também foi utilizado o algoritmo PSO. Porém, uma

estimativa mais aconselhável, usando as melhores posições históricas para construir um espaço amostral foi hibridizada para melhorar o controle da diversidade populacional e evitar a convergência prematura. Em [Marchiori et al. \(2017\)](#) pode-se analisar a performance de diferentes funções de penalização no método de otimização PSO aplicado em RDA.

O algoritmo *Simulated Annealing* foi desenvolvido por [Kirkpatrick et al. \(1983\)](#) e, é baseado em técnicas de recozimento simulado de metais. Pesquisadores que utilizaram este método de otimização em RDA são [Loganathan et al. \(1995\)](#) e [Cunha e Sousa \(1999\)](#) com um método de Newton para resolver as equações hidráulicas da rede.

Os pesquisadores [Duan et al. \(1992\)](#) desenvolveram o algoritmo *Shuffled Complex Evolution*, o qual tem conceitos de busca aleatória supervisionada, evolução competitiva e embaralhamento complexo. O trabalho de [Liong e Atiquzzaman \(2004\)](#) utilizou essa ferramenta somada ao simulador EPANET para resolver problemas de RDA. Outro trabalho que aplicou esse método em RDA foi o de [Moosavian e Jaefarzadeh \(2014\)](#).

Designa-se *Shuffled Frog Leaping Algorithm* uma ferramenta que é fundamentada para resolver problemas de otimização com variáveis discretas. Além disso, essa técnica é uma metáfora de busca cooperativa baseada na população e inspirada em memética natural, ou seja, usa uma estratégia de embaralhamento que permite a troca de informações entre buscas locais para se mover em direção ao ótimo global. [Eusuff e Lansey \(2003\)](#) utilizaram essa metodologia para o projeto ótimo de RDA e desenvolveram um modelo computacional, SFLANET, interceptado com o simulador EPANET.

O algoritmo de otimização denominado *State Transition Algorithm*, foi proposto originalmente por [Zhou et al. \(2011\)](#). Nele, se uma solução for descrita como um estado, a mudança para atualizar a solução se tornará uma transição de estado. Além disso, algumas manipulações são realizadas por operadores, os quais são chamados de inteligentes devido às suas propriedades geométricas, em que para diferentes representações esses operadores tem o mesmo recurso funcional. Em projeto de otimização de RDA, [Zhou et al. \(2016\)](#) utilizaram essa formulação discreta e demonstraram que o número de equações pode ser reduzido.

Uma abordagem heurística para o projeto de redes de distribuição de água envolvendo uma otimização de programação linear fuzzy robusta foi apresentada em [Xu e Goulter \(1999a\)](#). A interação entre programação linear difusa e um *solver* de rede foi usada para garantir a consistência hidráulica. No trabalho de [Bolognesi et al. \(2010\)](#) foi proposto um método denominado *Genetic Heritage Evolution by Stochastic Transmission*, o qual é um algoritmo de estratégia evolutiva aplicado em RDA. Essa metodologia procura a solução ótima em dois estágios. O primeiro sintetiza e transmite a herança genética das soluções base usando seus indicadores estatísticos. Já o segundo evita que a busca estagne em ótimos locais. Esse algoritmo faz uso do simulador EPANET. [Suribabu \(2012\)](#), a partir de um modelo não linear, propôs um processo estocástico com diferentes tipos de seleção

para resolução de problemas de RDA.

Denomina-se *Tabu Search* uma técnica heurística para resolver problemas em forma combinatória. Foi formulada tendo como base o processo de memória humana e usa um procedimento na tentativa de evitar ficar preso em ótimos locais. Em otimização de RDA, esse algoritmo pode ser visto nos trabalhos de Fanni *et al.* (2000) e Cunha e Ribeiro (2004), em que para resolver um problema de RDA requer adaptações particulares para produzir soluções de qualidade.

O algoritmo de otimização chamado *Water Cycle Algorithm*, foi apresentado originalmente por Eskandar *et al.* (2012). A ideia desse processo é motivada pela natureza e baseada na observação do processo do ciclo da água. Essa formulação é utilizada no trabalho de Sadollah *et al.* (2014) e foi acoplado ao simulador hidráulico EPANET para encontrar um projeto ótimo de RDA.

O trabalho de Reza *et al.* (2007) apresenta uma avaliação quanto ao desempenho de várias técnicas heurísticas, como *Genetic Algorithms*, *Simulated Annealing*, *Tabu Search* e *Iterated Local Search*. Os resultados foram obtidos a partir de redes de distribuição de água conhecidas da literatura. Ainda mais, o GA foi o mais eficaz com redes de tamanho médio, mas os outros métodos foram eficientemente superiores com redes mais complexas.

3 Modelo de Otimização

3.1 Função Objetivo

Um projeto de redes de distribuição de água consiste na determinação ótima dos diâmetros dos trechos para a transferência de água de um reservatório até o consumidor. O principal objetivo é determinar os diâmetros que apresentam um custo mínimo, considerando o custo referente ao comprimento de cada trecho. Esse dimensionamento deve seguir os diâmetros disponíveis e o projeto final da rede deve respeitar os limites de pressão e as velocidades do fluido impostas pelo processo.

A aplicação de métodos de otimização em sistemas de distribuição de água se torna complexa em virtude da dinâmica e da quantidade de parâmetros envolvidos em uma rede pressurizada. Na maioria dos casos, tais sistemas já se encontram implantados e em pleno funcionamento por anos, até mesmo décadas. Diante deste cenário, vários pesquisadores optam por desenvolver métodos de otimização para setores ou componentes específicos e isolados do sistema. Contudo, quando a rede ainda está em fase de projeto, há especialistas que optam por relacionar os componentes conjuntamente, tornando mais real e eficaz o processo de otimização.

De acordo com [Mays e Tung \(2002\)](#), os modelos de otimização em RDA são capazes de determinar o ótimo funcionamento ou os custos mínimos de operação, por meio da função objetivo e de suas restrições. O modelo de otimização desenvolvido para o projeto de RDA considera o conjunto de diâmetros disponíveis a serem utilizados na rede, de modo que cada elemento desse conjunto tenha suas propriedades correspondentes, como, por exemplo, o custo por unidade de comprimento e a rugosidade, como mostrados na Tabela 2.

A metodologia utilizada neste trabalho é *single*. Sejam n_d o número de diâmetros disponíveis, D_i o diâmetro disponível i , $Custo(D_i)$ o custo por unidade de comprimento do trecho com diâmetro D_i e R_i a rugosidade do trecho com diâmetro D_i , para todo $i = 1, \dots, n_d$. Considere-se \mathcal{D} o conjunto formado por todos os diâmetros disponíveis para a RDA, isto é,

$$\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_{n_d}\},$$

respeitando a ordem de desigualdade $D_{min} = D_1 < \dots < D_{n_d} = D_{max}$. A Tabela 2 apresenta a correspondência entre os diâmetros e suas propriedades.

Tabela 2 – Diâmetros disponíveis para a RDA, com custos e rugosidades

Diâmetro	Custo	Rugosidade
D_1	$Custo(D_1)$	R_1
D_2	$Custo(D_2)$	R_2
\vdots	\vdots	\vdots
D_{n_d}	$Custo(D_{n_d})$	R_{n_d}

Fonte – Elaborada pelo autor

Sejam n_t o número de trechos e $j = 1, \dots, n_t$ os trechos. A função objetivo a ser otimizada é o custo total da RDA, dada por:

$$C_T = \sum_{j=1}^{n_t} L_j \cdot Custo(x_j), \quad (3.1)$$

em que C_T é o custo total da instalação, L_j é o comprimento do trecho j , x_j é o diâmetro do trecho j e $Custo(x_j)$ é o custo por unidade de comprimento do trecho j com diâmetro x_j .

Dado $j = 1, \dots, n_t$, têm-se $x_j = D_i$ e $Custo(x_j) = Custo(D_i)$, para algum $i = 1, \dots, n_d$, ou seja, a escolha do diâmetro do trecho j automaticamente está interligada ao custo $Custo(D_i)$ e também a rugosidade R_i .

3.2 Restrições

A mecânica dos fluidos é uma ciência voltada para análise do comportamento físico dos fluidos, com base nas leis da mecânica e da termodinâmica. Para explorar a área científica referente ao dimensionamento de redes pressurizadas de distribuição de água, faz-se necessário o conhecimento dos fundamentos da hidráulica, que é uma subárea da mecânica dos fluidos e que trata apenas dos líquidos, particularmente da água.

O problema do dimensionamento de redes pressurizadas consiste em solucionar duas equações da hidráulica: a equação da continuidade (3.2) e a equação da perda de carga (3.4). O balanceamento hidráulico da rede é realizado durante o processo de dimensionamento, de forma a atender às condições impostas pelas referidas equações. Sejam n_n o número de nós e $k = 1, \dots, n_n$ os nós. As restrições do modelo estão listadas a seguir.

Restrição 1.

A primeira restrição leva em consideração a Lei de Conservação de Massa, ou seja, a soma algébrica das vazões de entrada e saída em cada nó deve ser igual à demanda em cada nó. Sejam VE_k e VS_k os conjuntos cujos elementos são as tubulações correspondentes às vazões de entrada e saída no nó k , respectivamente, levando em consideração o sentido

das vazões. Ou seja, dados os sentidos das vazões, tem-se:

$$\begin{aligned} VE_k &= \{j \mid \text{a vazão } q_j \text{ entra no nó } k\}, & \forall k = 1, \dots, n_n \\ VS_k &= \{j \mid \text{a vazão } q_j \text{ sai no nó } k\}, & \forall k = 1, \dots, n_n. \end{aligned}$$

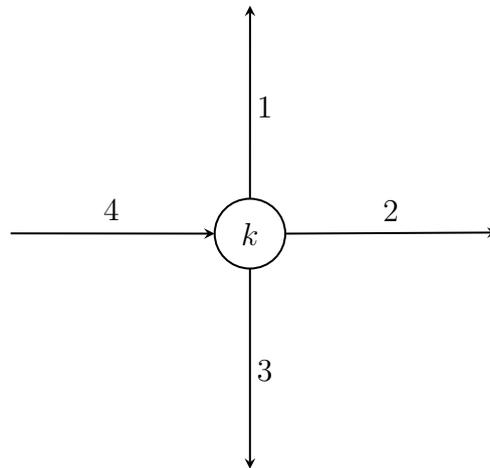
Portanto, a equação de balanço de massa é:

$$\sum_{j \in VE_k} q_j - \sum_{j \in VS_k} q_j = dmd(k), \quad \forall k = 1, \dots, n_n, \quad (3.2)$$

em que q_j representa a vazão volumétrica no trecho j e $dmd(k)$ é a demanda no nó k .

Exemplo 3.1. Considere o seguinte esboço gráfico:

Figura 3 – Exemplo de balanço de massa



Fonte – Elaborada pelo autor

Tem-se que, $VE_k = \{4\}$ e $VS_k = \{1, 2, 3\}$. Logo,

$$q_4 - q_1 - q_2 - q_3 = dmd(k) \quad (3.3)$$

é a equação encontrada a partir do balanço de massa feito no nó k .

Restrição 2.

As perdas de carga correspondem à parte da energia dissipada pelos fluidos e, ocorrem devido à sua velocidade, atrito entre as partículas do fluido e atrito do fluido contra as paredes internas da tubulação.

Uma outra restrição é a Lei de Conservação da Energia, isto é, a soma algébrica das perdas de carga dos trechos em um ciclo deve ser igual à energia liberada por uma bomba, caso exista. Sejam n_c o número de ciclos da rede, $\gamma = 1, \dots, n_c$ os ciclos da rede, n_f o número de fontes de energia de impulsão aplicadas em um ciclo e $\alpha = 1, \dots, n_f$ as

fontes de energia de impulsão aplicadas em um ciclo. Considere-se os conjuntos PCP_γ e PCN_γ , em que os elementos são os trechos correspondentes às perdas de carga positivas e negativas pertencentes ao ciclo γ , respectivamente, respeitando o sentido de cada ciclo. Isto é, dados os sentidos dos ciclos têm-se:

$$PCP_\gamma = \{j \mid \text{a perda de carga } h_f(j) \text{ pertencente ao ciclo } \gamma \text{ é positiva}\}, \quad \forall \gamma = 1, \dots, n_c$$

$$PCN_\gamma = \{j \mid \text{a perda de carga } h_f(j) \text{ pertencente ao ciclo } \gamma \text{ é negativa}\}, \quad \forall \gamma = 1, \dots, n_c.$$

Logo, a equação de balanço de energia é:

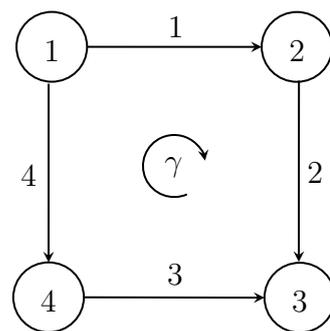
$$\sum_{j \in PCP_\gamma} h_f(j) - \sum_{j \in PCN_\gamma} h_f(j) = \sum_{\alpha=1}^{n_f} E_P^\alpha(\gamma), \quad \forall \gamma = 1, \dots, n_c, \quad (3.4)$$

em que $h_f(j)$ representa a perda de carga no trecho j e $E_P^\alpha(\gamma)$ é a energia liberada pela bomba α no ciclo γ . Caso essa restrição não seja respeitada, rachaduras nos trechos podem aparecer ou as junções dos trechos podem arrebentar ou o sistema não funciona, pois não há escoamento.

A nomenclatura positiva e negativa é a utilizada na literatura. Ela está relacionada ao sentido da vazão de cada trecho pertencente ao ciclo. Se o sentido da vazão do trecho estiver no sentido do ciclo, então diz-se perda de carga positiva. Caso contrário, chama-se perda de carga negativa.

Exemplo 3.2. Considere o seguinte esboço gráfico:

Figura 4 – Exemplo de balanço de energia



Fonte – Elaborada pelo autor

Tem-se que, $PCP_\gamma = \{1, 2\}$ e $PCN_\gamma = \{3, 4\}$. Logo,

$$h_f(1) + h_f(2) - h_f(3) - h_f(4) = 0 \quad (3.5)$$

é a equação encontrada a partir do balanço de energia feito no ciclo γ .

Restrição 3.

Para o dimensionamento da rede é importante conhecer a pressão dinâmica mínima, pois ela estabelece que a água alcance os reservatórios domiciliares. Para atender os limites de pressão, a rede de ser subdividida em zonas de pressão (alta, média e baixa), sendo que cada zona de pressão é abastecida por um reservatório de distribuição. Deve-se levar em conta que, com o aumento do diâmetro do trecho a pressão tende a diminuir e, com a diminuição do diâmetro a pressão tende a aumentar.

No Brasil, a norma da [ABNT, NBR12218 \(1994\)](#) estabelece que a pressão dinâmica mínima em qualquer ponto nas tubulações deve ser de aproximadamente 10 metros de coluna de água (*mca*) e a máxima de 50 *mca*.

A pressão em cada nó deve ser maior ou igual que um valor mínimo exigido para a RDA, ou seja,

$$pr_{min}(k) \leq pr(k), \quad \forall k = 1, \dots, n_n, \quad (3.6)$$

em que $pr_{min}(k)$ é a pressão mínima exigida no nó k e $pr(k)$ é a pressão no nó k .

A nomenclatura pressão é a utilizada na literatura, apesar da unidade de medida ser metros de coluna de água ou simplesmente metros.

Restrição 4.

As limitações de velocidades estão associadas tanto à segurança e durabilidade das tubulações como ao custo de implantação e operação. As baixas velocidades favorecem a durabilidade das tubulações, mas facilitam a deposição de materiais existentes na água. As velocidades altas podem ocorrer em tubulações com diâmetro pequeno e, assim, pode-se diminuir o custo de aquisição da tubulação. Entretanto, causam o aumento das perdas de carga como o aumento dos custos de energia elétrica nos bombeamentos.

No Brasil, a norma da [ABNT, NBR12218 \(1994\)](#) estabelece que a velocidade mínima nas tubulações deve ser de 0,6 *m/s* e a máxima de 3,5 *m/s*.

As velocidades mínimas e máximas do fluido são restrições do sistema. Assim,

$$v_{min} \leq v_j \leq v_{max}, \quad \forall j = 1, \dots, n_t, \quad (3.7)$$

em que v_{min} e v_{max} são as velocidades mínima e máxima do fluido impostas à RDA, respectivamente e v_j é a velocidade do fluido no trecho j . Se for necessário utilizar essa restrição.

Restrição 5.

No Brasil, a norma da [ABNT, NBR12218 \(1994\)](#) determina que o diâmetro mínimo nas tubulações deve ser de 50 *mm*.

Os diâmetros a serem utilizados devem pertencer ao conjunto de diâmetros disponíveis \mathcal{D} . Logo,

$$x_j \in \mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_{n_d}\}, \quad \forall j = 1, \dots, n_t, \quad (3.8)$$

ou ainda,

$$D_{min} \leq x_j \leq D_{max}, \quad \forall j = 1, \dots, n_t. \quad (3.9)$$

3.3 Equações Hidráulicas

As equações hidráulicas utilizadas dizem respeito ao cálculo das perdas de carga, das pressões e das velocidades para a água escoando nos trechos.

3.3.1 Equação para o Cálculo das Perdas de Carga

Uma das restrições do modelo para o projeto ótimo da rede é a Lei de Conservação da Energia, a qual está relacionada com os trechos pertencentes a um ciclo. As perdas de carga são determinadas por meio de equações empíricas, as quais foram desenvolvidas para condições experimentais distintas. Existem várias equações para calcular as perdas de carga, mas de acordo com [Gomes \(2009\)](#), uma das mais utilizadas por especialistas da área é a equação de Hazen-Williams (3.10).

A equação de Hazen-Williams foi desenvolvida pelo engenheiro civil Allen Hazen e pelo professor de hidráulica Garden Williams, no início do século XX, sendo bastante utilizada no cálculo de dimensionamento de tubulações. O uso desta equação é aconselhável para instalações de água com diâmetros superiores a 100 *mm*, normalmente utilizadas em projetos de adutoras. Essa equação é apresentada a seguir.

$$h_f(j) = \frac{10,674 \cdot q_j^{1,852} \cdot L_j}{C_j^{1,852} \cdot x_j^{4,871}}, \quad \forall j = 1, \dots, n_t, \quad (3.10)$$

em que o coeficiente de rugosidade C de Hazen-Williams é um valor adimensional e depende do material e do tempo de uso.

Se a equação (3.10) for utilizada, então para todo $j = 1, \dots, n_t$, têm-se que $C_j = R_i$, para algum $i = 1, \dots, n_d$. A Tabela 3 apresenta valores do coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams C em função dos diversos materiais das tubulações.

Tabela 3 – Coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams

Materiais	Novos	Usados	Usados
		± 10 anos	± 20 anos
Aço corrugado (chapa ondulada)	60	—	—
Aço galvanizado roscado	125	100	—

Aço rebitado	110	90	80
Aço soldado comum (revestimento betuminoso)	125	110	90
Aço soldado com revestimento epóxico	140	130	115
Chumbo	130	120	120
Cimento amianto	140	130	120
Cobre	140	135	130
Concreto com bom acabamento	130	—	—
Concreto com acabamento comum	130	120	110
Ferro fundido com revestimento epóxico	140	130	120
Ferro fundido com revestimento de argamassa	130	120	105
Grés cerâmico, vidrado (manilhas)	110	110	110
Latão	130	130	130
Tijolos, condutos bem executados	100	95	90
Plástico/PVC	140	135	130

Fonte – Adaptada de [Netto e Fernández \(2018\)](#)

3.3.2 Equação para o Cálculo das Pressões

Conforme a equação (3.6), devemos considerar a pressão existente em cada nó. Seja τ_k o conjunto dos trechos correspondentes ao caminho percorrido pela vazão, que se inicia no reservatório e termina no nó $k = 1, \dots, n_n$. Se o nó $k = k_r$ corresponder ao reservatório, então sua pressão é:

$$pr(k_r) = elv(k_r) = elv(re). \quad (3.11)$$

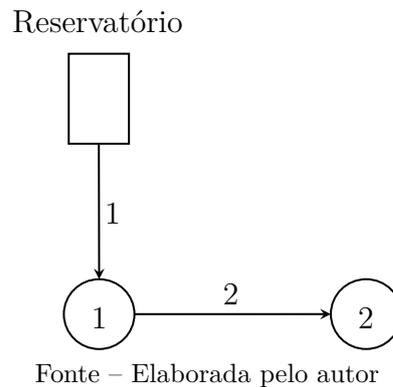
Para os demais nós, defina-se a pressão da seguinte maneira:

$$pr(k) = - \sum_{j \in \tau_k} h_f(j) + [elv(re) - elv(k)], \quad \forall k = 1, \dots, n_n, k \neq k_r \quad (3.12)$$

em que $elv(k)$ é a cota altimétrica relativa de cada nó k , ou seja, a elevação de cada nó e $elv(re)$ é a elevação do reservatório.

Exemplo 3.3. Considere o seguinte esboço gráfico:

Figura 5 – Exemplo para o cálculo da pressão



Tem-se que,

$$pr(2) = -h_f(1) - h_f(2) + [elv(re) - elv(2)] \quad (3.13)$$

é a pressão do nó 2.

3.3.3 Equação para o Cálculo das Velocidades

Muitos métodos clássicos voltados a solucionar problemas de dimensionamento de redes de distribuição de água empregam valores tabelados de velocidade para os trechos da rede (GOMES, 2009). Desta forma, o problema deixa de ser indeterminado, pois restam duas variáveis (x e h_f) para duas equações. Embora seja mais simples, esta não é a solução mais adequada e econômica de dimensionamento, pois os valores das velocidades dos trechos não devem ser tabelados, e sim determinados em função da solução que minimiza o custo total de investimento e operação do sistema de distribuição de água, e para isso é necessário a aplicação de técnicas de otimização.

Para satisfazer a desigualdade (3.7), deve-se considerar uma equação para as velocidades da rede, isto é, as velocidades do fluido em cada trecho. A velocidade da água (v) que passa por um conduto é proporcional à vazão (q) e inversamente proporcional a área do trecho (A), ou seja, $v = q/A$.

Como a área de um trecho é $A = \pi x^2/4$, segue que a velocidade de escoamento do fluido no trecho fica:

$$v_j = \frac{4q_j}{\pi \cdot x_j^2}, \quad \forall j = 1, \dots, n_t. \quad (3.14)$$

Desta forma, para todos $j = 1, \dots, n_t$, $k = 1, \dots, n_n$ e $\gamma = 1, \dots, n_c$, têm-se que o problema de otimização pode ser descrito como:

$$\min C_T = \sum_{j=1}^{n_t} L_j \cdot Custo(x_j)$$

$$\begin{aligned}
s.a \quad & \sum_{j \in VE_k} q_j - \sum_{j \in VS_k} q_j = dmd(k) \\
& \sum_{j \in PCP_\gamma} h_f(j) - \sum_{j \in PCN_\gamma} h_f(j) = \sum_{\alpha=1}^{n_f} E_P^\alpha(\gamma) \\
& pr_{min}(k) \leq pr(k) \\
& v_{min} \leq v_j \leq v_{max} \\
& x_j \in \mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_{n_d}\}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

As equações (3.10) e (3.14) são claramente não lineares e os diâmetros x_j são variáveis discretas. Portanto, o modelo de otimização tem a forma de um problema PNLDM. Para contornar as dificuldades relacionadas à solução de problemas desse tipo, no presente trabalho esse problema é reformulado, na forma de um problema do tipo PNLIM. A metodologia utilizada para fazer essa tarefa é a programação disjuntiva generalizada, que será apresentada no Capítulo 4.

4 Programação Disjuntiva Generalizada (PDG)

4.1 Introdução à PDG

Quando se fala em problemas de programação não linear inteira mista e considerando os avanços para a resolução destes problemas, três questões básicas permanecem nesta área. Como desenvolver o melhor modelo de otimização? Como melhorar o relaxamento nesses modelos? Como resolver problemas não convexos de PDG para a obtenção do ótimo global?

Os modelos de programação não linear inteira mista são amplamente utilizados. Os problemas de PNLIM surgem, por exemplo, na síntese de processos (redes de trocadores de calor e redes de reatores) e no projeto de processos (posicionamento ótimo do produto e localização da alimentação em colunas de destilação).

Os métodos de otimização mais comuns e utilizados em redes de distribuição de água são heurísticos. Entretanto, no presente trabalho, utiliza-se um método determinístico. Também, não será necessária a utilização de simuladores hidráulicos para os cálculos.

Técnicas que consistem em restrições algébricas, disjunções lógicas e proposições lógicas não só facilitam o desenvolvimento dos modelos de otimização, tornando o processo de formulação intuitivo, mas também mantêm no modelo a estrutura lógica subjacente do problema que pode ser explorado para encontrar a solução de maneira mais eficiente. Um caso particular destes modelos é a programação disjuntiva generalizada.

A programação disjuntiva generalizada é uma extensão do conceito de programação disjuntiva desenvolvida por [Balas \(1985\)](#). A formulação da PDG envolve variáveis booleanas e contínuas que são especificadas na forma de restrições algébricas, disjunções e proposições lógicas, as quais são uma representação alternativa para a formulação da programação tradicional.

Uma das tendências tem sido representar problemas de otimização discreta/contínua por modelos consistindo em restrições algébricas, disjunções lógicas e relações lógicas ([RAMAN; GROSSMANN, 1994](#); [HOOKER; OSORIO, 1999](#)). A motivação básica no uso dessas representações é facilitar a modelagem de problemas de otimização discreta/contínua, reter e explorar a estrutura lógica inerente de problemas para reduzir a complexidade combinatória e melhorar as relaxações e os limites do ótimo global em problemas não convencionais.

A PDG foi introduzida como um modelo alternativo para a solução de problemas do

tipo PNLIM e, sua ideia básica consiste em representar decisões discretas no espaço contínuo com disjunções e restrições no espaço discreto com proposições de lógica. Considere-se o problema de programação disjuntiva generalizada de [Raman e Grossmann \(1994\)](#), que é uma extensão do trabalho de [Balas \(1985\)](#). Em geral, o modelo de programação disjuntiva generalizada é dado por:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x) && \text{(Função Objetivo)} \\
\text{s.a} \quad & g(x) \leq 0 && \text{(Restrições Algébricas)} \\
& \bigvee_{i \in I_j} \left[\begin{array}{l} Y_i^j \\ r_i^j(x) \leq 0 \end{array} \right], \quad \forall j \in J && \text{(Disjunções) (4.1)} \\
& \Omega(Y) = \text{verdadeiro} && \text{(Proposições Lógicas)} \\
& x^L \leq x \leq x^U, \quad x \in \mathbb{R}^n && \text{(Variáveis Contínuas)} \\
& Y_i^j \in \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}, \quad \forall j \in J, i \in I_j, && \text{(Variáveis Booleanas)}
\end{aligned}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, x é um vetor de variáveis contínuas com limites x^L e x^U , $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ representa o conjunto de restrições globais. Cada disjunção $j \in J$ é composta por uma série de termos $i \in I_j$ que são conectados pelo operador booleano ou (\vee). Cada termo $i \in I_j$ consiste em uma variável booleana Y_i^j e um conjunto de desigualdades $r_i^j(x) \leq 0$, com $r_i^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se Y_i^j é verdadeiro, então $r_i^j(x) \leq 0$ é aplicada, caso contrário, essas restrições são ignoradas.

Ainda mais, $\Omega(Y) = \text{verdadeiro}$ representa proposições lógicas para as variáveis booleanas Y_i^j expresso na forma normal conjuntiva

$$\Omega(Y) = \bigwedge_{t=1, \dots, T} \left[\bigvee_{Y_i^j \in R_t} (Y_i^j) \bigvee_{Y_i^j \in Q_t} (\neg Y_i^j) \right]$$

, em que para cada cláusula $t = 1, \dots, T$, R_t é o subconjunto de variáveis booleanas que não são negadas e Q_t é o subconjunto de variáveis booleanas que são negadas.

Além disso, assume-se que cada disjunção é exclusiva, de modo que para cada j , exatamente uma variável Y_i^j seja verdadeira. Ou seja, as restrições de lógica $\bigvee_{i \in I_j} Y_i^j$ estão contidas em $\Omega(Y) = \text{verdadeiro}$.

De forma equivalente ao modelo de otimização (3.15) apresentado, tem-se que a função f é o custo total da rede C_T , g são as restrições do modelo (vazões, perdas de carga, pressões e velocidades) e r_i^j são as restrições que serão formuladas a partir do conjunto de diâmetros disponíveis \mathcal{D} .

De acordo com [Khurana et al. \(2005\)](#) e [Grossmann e Ruiz \(2012\)](#), existem duas maneiras de transformar uma expressão dada em forma disjuntiva em sua forma algébrica equivalente. As formulações utilizadas para estas transformações são a de *Big - M* ([NEMHAUSER; WOLSEY, 1988](#)) e a de *Envoltória Convexa* ([LEE; GROSSMANN, 2000](#)).

Ainda mais, [Grossmann e Lee \(2003\)](#) demonstraram que a região de busca utilizando a formulação de envoltória convexa é menor ou igual que a região de busca por *Big – M*. Entretanto, segundo [Caballero \(2017\)](#) se o problema de otimização for não linear, a formulação por envoltória convexa pode ser mais complexa de resolver.

4.2 Transformação de Expressões Lógicas em Algébricas

A programação disjuntiva é uma programação linear com restrições disjuntivas. Os programas inteiros e uma série de outros problemas de programação não convexos podem ser declarados como de programação linear com condições lógicas. Condições lógicas, no presente contexto, significam declarações sobre desigualdades lineares envolvendo as operações "e" (conjunção), "ou" (disjunção) e "oposto" (negação). Além disso, a operação "se ... então" (implicação) é conhecida por ser equivalente a uma disjunção. As operações de conjunção e negação aplicadas às desigualdades lineares dão origem a conjuntos convexos e, portanto, deixam o problema de otimização sujeito a tais restrições no âmbito da programação linear. É por isso que as disjunções são vistas como o elemento crucial em uma condição lógica, e essa área completa de programação matemática é conhecida como programação disjuntiva.

A formulação de programação disjuntiva parece ser particularmente útil para tirar proveito da estrutura do problema em que tal estrutura se origina na natureza lógica das condições físicas que as restrições do problema devem traduzir, como no caso de restrições de escolha múltipla, definição de particionamentos, entre outros.

Pode-se transformar uma expressão lógica em outra expressão algébrica equivalente. Para isso, deve ser estabelecida uma correspondência entre variáveis booleanas $Y \in \{\textit{verdadeiro}, \textit{falso}\}$ e variáveis binárias $y \in \{0, 1\}$, conforme apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 – Correspondência entre variáveis booleanas e binárias

Variável booleana		Variável binária
$Y = \textit{verdadeiro}$	\longrightarrow	$y = 1$
$Y = \textit{falso}$	\longrightarrow	$y = 0$
$\neg Y$	\longrightarrow	$1 - y$

Fonte – Elaborada pelo autor

O objetivo é encontrar uma expressão algébrica linear, expressa apenas em termos de variáveis binárias de modo que, se a expressão lógica for verdadeira, a expressão algébrica é viável e se a expressão lógica é falsa, a expressão algébrica não é viável.

Os operadores lógicos básicos utilizados na lógica proposicional e suas representações equivalentes em forma algébrica são apresentados na Tabela 5 a seguir:

Tabela 5 – Representação algébrica dos operadores lógicos

Relação lógica	Expressão booleana	Expressão algébrica linear
Disjunção (Ou)	$P_1 \vee \cdots \vee P_r$	$y_1 + \cdots + y_r \geq 1$
Conjunção (E)	$P_1 \wedge \cdots \wedge P_r$	$y_1 \geq 1, \dots, y_r \geq 1$
Implicação ($P_1 \Rightarrow P_2$)	$\neg P_1 \vee P_2$	$1 - y_1 + y_2 \geq 1$
Equivalência ($P_1 \Leftrightarrow P_2$)	$(\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_2 \vee P_1)$	$y_1 = y_2$
Ou exclusivo	$P_1 \underline{\vee} \cdots \underline{\vee} P_r$	$y_1 + \cdots + y_r = 1$
No máximo uma é verdadeira		$y_1 + \cdots + y_r \leq 1$

Fonte – Elaborada pelo autor

Utilizando estas equivalências, pode-se transformar qualquer operador lógico básico na sua forma algébrica. Entretanto, um procedimento sistemático ainda é necessário para transformar uma expressão lógica complicada usando diferentes operadores. Para isso, é necessário inserir o conceito de forma normal conjuntiva.

A Forma Normal Conjuntiva é um conjunto de cláusulas (cada cláusula é um conjunto de proposições), $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_Z$ conectados pelo operador lógico \wedge . Para que o resultado da forma conjuntiva normal seja verdadeiro, cada uma das cláusulas Q_Z deve ser verdadeira, independentemente das outras cláusulas.

Além disso, se são substituídas todas as implicações de modo que a expressão permaneça na sua forma booleana (apenas operadores e, operadores ou e negação), cada uma das cláusulas será formada por disjunções de proposições, $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_r$.

Quando o problema é expresso em sua forma normal conjuntiva, a transformação para uma forma algébrica é imediata, seguindo a Tabela 5. Para cada uma das conjunções, basta escrever uma desigualdade da forma:

$$y_1^z + \cdots + y_r^z \geq 1, \quad \forall z = 1, 2, \dots, Z \quad (4.2)$$

em que a variável binária y_i^z será o valor 1 se a disjunção i na cláusula z for verdadeira.

4.2.1 Transformação para a Forma Normal Conjuntiva

Para transformar uma expressão booleana em sua forma normal conjuntiva, é suficiente aplicar um procedimento de três passos para cada uma das proposições lógicas.

1. Substitua as implicações pela sua disjunção correspondente:

$$P_1 \Rightarrow P_2 \quad \Leftrightarrow \quad \neg P_1 \vee P_2 \quad (4.3)$$

2. Aplique as Leis de De Morgan:

$$\begin{aligned} \neg(P_1 \wedge P_2) &\Leftrightarrow \neg P_1 \vee \neg P_2 \\ \neg(P_1 \vee P_2) &\Leftrightarrow \neg P_1 \wedge \neg P_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

3. Distribua o operador \vee sobre o operador \wedge :

$$(P_1 \wedge P_2) \vee P_3 \quad \Leftrightarrow \quad (P_1 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_3) \quad (4.5)$$

Para ilustrar o procedimento, considere-se o exemplo visto em [Caballero \(2017\)](#):

Exemplo 4.1. Considere o caso em que, se uma coluna de absorção ou separação por membranas é selecionada, então a separação criogênica não é selecionada.

Fazendo

P_a = verdadeiro se a coluna de absorção for selecionada

P_m = verdadeiro se a separação da membrana for selecionada

P_c = verdadeiro se a separação criogênica for selecionada

Logo, a condição lógica é:

$$P_a \vee P_m \Rightarrow \neg P_c$$

De (4.3), ou seja, eliminando a implicação segue:

$$\neg(P_a \vee P_m) \vee \neg P_c$$

Por (4.4), isto é, pelas Leis de De Morgan temos:

$$(\neg P_a \wedge \neg P_m) \vee \neg P_c$$

De (4.5), ou seja, utilizando a operação distributiva segue:

$$(\neg P_a \vee \neg P_c) \wedge (\neg P_m \vee \neg P_c)$$

Tem-se um problema em sua forma normal conjuntiva. Cada uma das conjunções $((\neg P_a \vee \neg P_c)$ e $(\neg P_m \vee \neg P_c))$ deve ser verdadeira, independentemente da outra. Definindo

variáveis binárias y_a , y_m e y_c associadas a cada uma das proposições P_a , P_m e P_c , respectivamente, e aplicando a correspondência da Tabela 5 para as conjunções, tem-se:

$$\begin{aligned} 1 - y_a + 1 - y_c &\geq 1 \\ 1 - y_m + 1 - y_c &\geq 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

e, assim

$$\begin{aligned} y_a + y_c &\leq 1 \\ y_m + y_c &\leq 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

As equações (4.7) não são apenas equivalentes as equações (4.6), mas também são mais eficientes no sentido de que elas produzem um relaxamento (solução levando as variáveis binárias como contínuas e restringindo-as a ter um valor entre 0 e 1) cuja solução é mais próxima da solução ideal para o problema, porque restringe ainda mais a região viável.

4.3 Formulação *Big-M*

Considere-se a seguinte disjunção do modelo (4.1), respeitando suas propriedades:

$$\bigvee_{i \in I_j} \left[\begin{array}{c} Y_i^j \\ r_i^j(x) \leq 0 \end{array} \right], \quad \forall j \in J.$$

A representação mais simples das disjunções $j \in J$ na forma linear inteira mista são as restrições do tipo *Big - M*, dadas em (4.8). Observe-se que as variáveis binárias y_i^j têm uma correspondência com as variáveis booleanas Y_i^j e que a última expressão fornece o valor mais adequado para os parâmetros M_i^j , em que x^L e x^U são os limites inferior e superior da variável x , respectivamente. Segundo Lee e Grossmann (2000) e Trespalcios e Grossmann (2015), a formulação *Big - M* é:

$$\begin{aligned} r_i^j(x) &\leq M_i^j(1 - y_i^j), & \forall j \in J, i \in I_j \\ \sum_{i \in I_j} y_i^j &= 1, & \forall j \in J \\ y_i^j &\in \{0, 1\}, & \forall j \in J, i \in I_j \\ M_i^j &= \max \{r_i^j(x) \mid x^L \leq x \leq x^U\}, & \forall j \in J, i \in I_j. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Portanto, o modelo (4.1) fica:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g(x) \leq 0 \\ & r_i^j(x) \leq M_i^j(1 - y_i^j), & \forall j \in J, i \in I_j \\ & \sum_{i \in I_j} y_i^j = 1, & \forall j \in J \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
Hy &\geq h \\
x^L &\leq x \leq x^U, \quad x \in \mathbb{R}^n \\
y_i^j &\in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J, i \in I_j
\end{aligned}$$

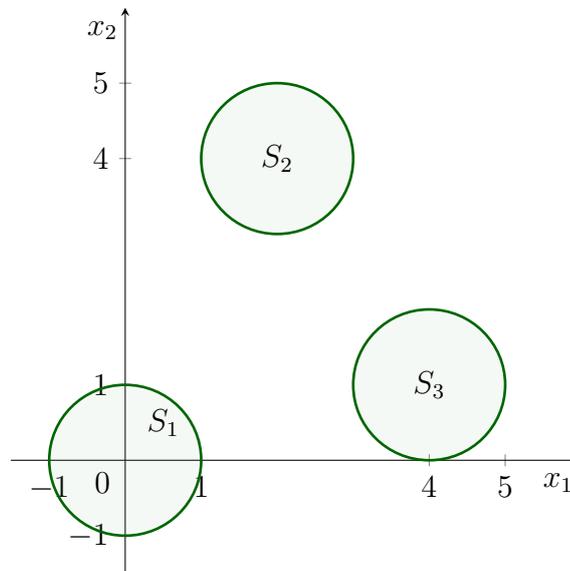
Para encontrar cada M_i^j são apresentadas em [Trespalacios e Grossmann \(2015\)](#) algumas ferramentas. Pode-se, também, utilizar um valor positivo suficientemente grande, $M_i^j = M$, para todos $j \in J$ e $i \in I_j$. Note-se que, quando $y_i^j = 0$ e o parâmetro M é grande o suficiente, os valores associados as restrições tornam-se redundantes. Caso contrário, devem ser aplicados. Além disso, $Hy \geq h$ é a formulação das restrições lógicas $\Omega(Y)$ no espaço discreto, o que pode ser facilmente realizado, como descrito em [Williams \(1985\)](#) e discutido em [Raman e Grossmann \(1991\)](#).

Exemplo 4.2. Este exemplo apareceu originalmente em [Lee e Grossmann \(2000\)](#) e, é apresentado aqui para ilustrar as formulações apresentadas. Considere-se o seguinte problema de PDG:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + c \\
s.a \quad & \left[\begin{array}{c} Y_1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ c = 2 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} Y_2 \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0 \\ c = 1 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} Y_3 \\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 - 1 \leq 0 \\ c = 3 \end{array} \right] \\
& 0 \leq x_1, x_2 \leq 8, \quad c \geq 0 \\
& Y_j \in \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}, \quad j = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Existem três termos na disjunção, mas apenas um único deles deve ser verdadeiro. A região viável do problema (4.10) é dada por três círculos sem interseção, como visto na [Figura 6](#). As regiões S_1 , S_2 e S_3 correspondem as equações $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$, $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0$ e $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 - 1 \leq 0$, respectivamente.

Figura 6 – Regiões factíveis correspondes as disjunções

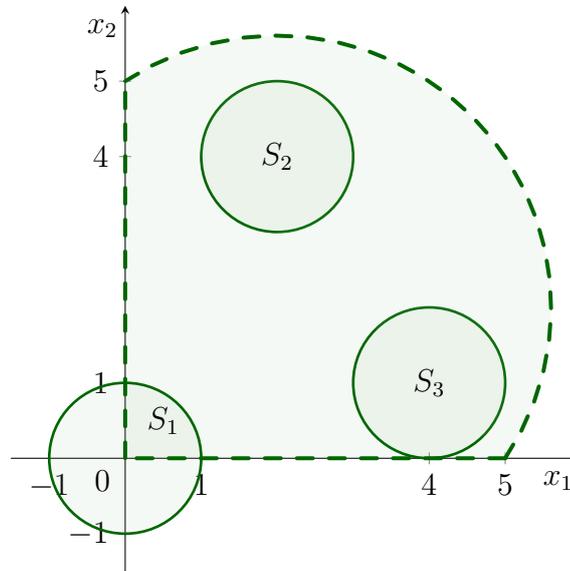


Fonte – Elaborada pelo autor

Usando variável binária y_j , as disjunções em (4.10) podem ser formuladas como um problema PNLIM com restrições *Big – M*:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2y_1 + y_2 + 3y_3 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq M(1 - y_1) \\
 & (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq M(1 - y_2) \\
 & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 - 1 \leq M(1 - y_3) \\
 & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
 & 0 \leq x_1, x_2 \leq 8, y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Um esboço da região de busca do problema (4.10) utilizando a formulação *Big – M* é apresentada a seguir. Tal região está entre o pontilhado.

Figura 7 – Região factível por *Big – M*

Fonte – Elaborada pelo autor

A escolha do parâmetro M é de suma importância para resolver os problemas com esta formulação. Em geral, deve ser grande para garantir que o relaxamento das variáveis no caso de restrições não ativas seja possível e deve ser pequeno o suficiente para que o espaço viável do problema relaxado seja tão pequeno quanto possível.

4.4 Formulação Envoltória Convexa

Uma formulação alternativa à *Big – M* é a envoltória convexa. Considere-se a seguinte disjunção do modelo (4.1), respeitando suas propriedades:

$$\bigvee_{i \in I_j} \left[\begin{array}{c} Y_i^j \\ r_i^j(x) \leq 0 \end{array} \right], \quad \forall j \in J$$

O relaxamento por envoltória convexa tem, no espaço de busca, a vantagem de ser menor ao espaço do relaxamento *Big – M*, ajudando, assim, a reduzir o esforço de busca. A desvantagem é que aumenta o número de variáveis contínuas e restrições do problema original, o que pode tornar um problema mais difícil de resolver, especialmente em problemas de maior tamanho.

Para a envoltória convexa é necessário definir as variáveis contínuas como uma soma de novas variáveis, em que o número de fatores desta soma é a quantidade de disjunções que aparecem no problema. De acordo com [Lee e Grossmann \(2000\)](#) e [Grossmann e Ruiz \(2012\)](#), o problema na forma algébrica fica sendo:

$$x = \sum_{i \in I_j} z_i^j, \quad \forall j \in J$$

$$\begin{aligned}
y_i^j \cdot r_i^j \left(\frac{z_i^j}{y_i^j} \right) &\leq 0, & \forall j \in J, i \in I_j \\
0 \leq z_i^j &\leq y_i^j \cdot U_i^j, & \forall j \in J, i \in I_j \\
\sum_{i \in I_j} y_i^j &= 1, & \forall j \in J \\
y_i^j &\in \{0, 1\}, & \forall j \in J, i \in I_j
\end{aligned} \tag{4.12}$$

A primeira das equações acima corresponde à decomposição das variáveis, em que $z_i^j \in \mathbb{R}$. A segunda limita as restrições r_i^j . A terceira corresponde às desigualdades escritas em termos das variáveis z_i^j e das variáveis binárias y_i^j , em que U_i^j é um limite superior para z_i^j , em que essa equação garante que as variáveis z_i^j associadas as disjunções não ativas tornam-se zero na solução. Finalmente, a quarta equação implica que apenas uma das variáveis binárias pode ser igual à 1.

Deste modo, o modelo (4.1) fica:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.a.} \quad & g(x) \leq 0 \\
& x = \sum_{i \in I_j} z_i^j, & \forall j \in J \\
& y_i^j \cdot r_i^j \left(\frac{z_i^j}{y_i^j} \right) \leq 0, & \forall j \in J, i \in I_j \\
& 0 \leq z_{ij} \leq y_i^j \cdot U_i^j, z_i^j \in \mathbb{R}, & \forall j \in J, i \in I_j \\
& \sum_{i \in I_j} y_i^j = 1, & \forall j \in J \\
& Hy \geq h \\
& x^L \leq x \leq x^U, x \in \mathbb{R}^n \\
& y_i^j \in \{0, 1\}, & \forall j \in J, i \in I_j
\end{aligned} \tag{4.13}$$

A soma das variáveis sobre o conjunto de disjunções I_j precisa ser igual às variáveis originais x . Entretanto, existe uma grande dificuldade em identificar o conjunto de variáveis z_i^j para empregar. Além disso, a formulação de envoltória convexa é menos intuitiva que a de *Big-M*.

Seja $j \in J$. Se $y_i^j = 1$, para algum $i \in I_j$, então $r_i^j(z_i^j) \leq 0$. Agora, suponha que $y_i^j = 0$, para qualquer $i \in I_j$. Logo, $y_i^j \cdot r_i^j(z_i^j/y_i^j) \leq 0$ é uma indeterminação. Para resolver isso, pode utilizar-se da seguinte aproximação:

$$y_i^j \cdot r_i^j \left(\frac{z_i^j}{y_i^j} \right) \cong (y_i^j + \delta) r_i^j \left(\frac{z_i^j}{y_i^j + \delta} \right) \tag{4.14}$$

em que δ pertence ao intervalo $(0, 1)$.

Uma outra aproximação é proposta por [Sawaya e Grossmann \(2007\)](#), como pode ser vista posteriormente:

$$y_i^j \cdot r_i^j \left(\frac{z_i^j}{y_i^j} \right) \cong ((1 - \delta)y_i^j + \delta)r_i^j \left(\frac{z_i^j}{(1 - \delta)y_i^j + \delta} \right) - \delta \cdot r_i^j(0)(1 - y_i^j) \quad (4.15)$$

em que, para valores de δ no intervalo $(0, 1)$, a viabilidade e convexidade do problema de aproximação são mantidas, conforme visto em [Sawaya e Grossmann \(2007\)](#).

Note-se que, para a aproximação (4.15), têm-se:

1. Se $\delta \rightarrow 0$, tem-se a restrição original.
2. Se $y_i^j = 0$, então $(\delta)(r_i^j(0)) - \delta \cdot r_i^j(0) = 0 \leq 0$, independentemente do valor de δ .
3. Se $y_i^j = 1$, então $(1)(r_i^j(z_i^j/(1))) - \delta \cdot r_i^j(0)(0) = r_i^j(z_i^j) \leq 0$, independentemente do valor de δ .

Observe-se que o tamanho do problema é aumentado pela introdução de um novo conjunto de variáveis e novas restrições. A vantagem da formulação envoltória convexa é que ela fornece um limite inferior mais estreito, o que resulta na redução do esforço de busca para o algoritmo. Essa redução na região viável é muito cara devido ao enorme aumento no número de variáveis e restrições no problema original. Dependendo do problema, a formulação *Big - M*, por outro lado, é mais conveniente de usar, uma vez que o tamanho do problema é menor em comparação com a formulação envoltória convexa. O limite inferior mais pobre do *Big - M*, no entanto, pode exigir mais tempo de CPU do que a envoltória convexa.

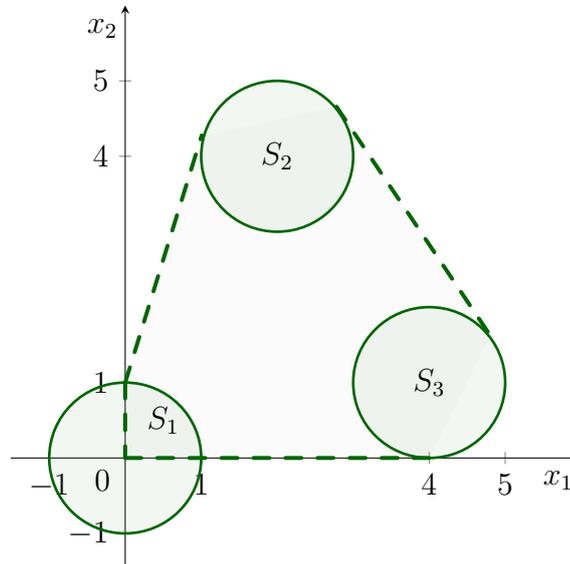
Exemplo 4.3. De acordo com o Exemplo 4.2, a formulação utilizando a envoltória convexa fica:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2y_1 + y_2 + 3y_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 = z_1^1 + z_1^2 + z_1^3 \\ & x_2 = z_2^1 + z_2^2 + z_2^3 \\ & 0 \leq z_i^j \leq 8y_j, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & (y_1 + \delta)[(z_1^1/(y_1 + \delta))^2 + (z_1^2/(y_1 + \delta))^2 - 1] \leq 0 \\ & (y_2 + \delta)[(z_1^2/(y_2 + \delta) - 4)^2 + (z_2^2/(y_2 + \delta) - 1)^2 - 1] \leq 0 \\ & (y_3 + \delta)[(z_1^3/(y_3 + \delta) - 2)^2 + (z_2^3/(y_3 + \delta) - 4)^2 - 1] \leq 0 \\ & 0 \leq x_1, x_2 \leq 8, \quad 0 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 1, \quad \delta = 0,0001 \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que y_j é variável contínua, para todo $j = 1, 2, 3$.

Um esboço da região de busca do problema (4.10) utilizando a formulação envoltória convexa é apresentada a seguir. Tal região está entre o pontilhado.

Figura 8 – Região factível por envoltória convexa



Fonte – Elaborada pelo autor

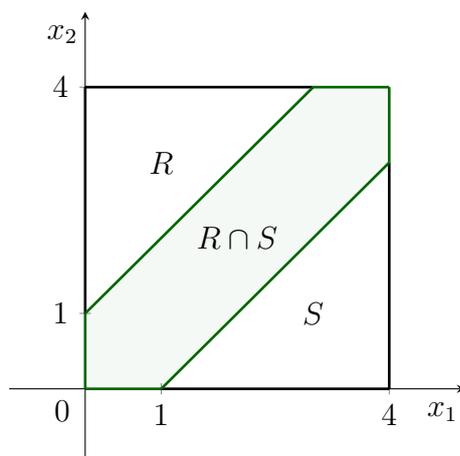
Considere-se o exemplo com equações lineares apresentado por Caballero (2017), para a comparação gráfica entre as formulações *Big – M* e envoltória convexa:

Exemplo 4.4. Considere-se o exemplo em \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} & [x_1 - x_2 \leq 1] \vee [-x_1 + x_2 \leq 1] \\ & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 0 \leq x_2 \leq 4 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Sejam R e S as regiões correspondentes as inequações $x_1 - x_2 \leq 1$ e $-x_1 + x_2 \leq 1$, respectivamente, para $0 \leq x_1, x_2 \leq 4$. O gráfico a seguir apresenta tais regiões.

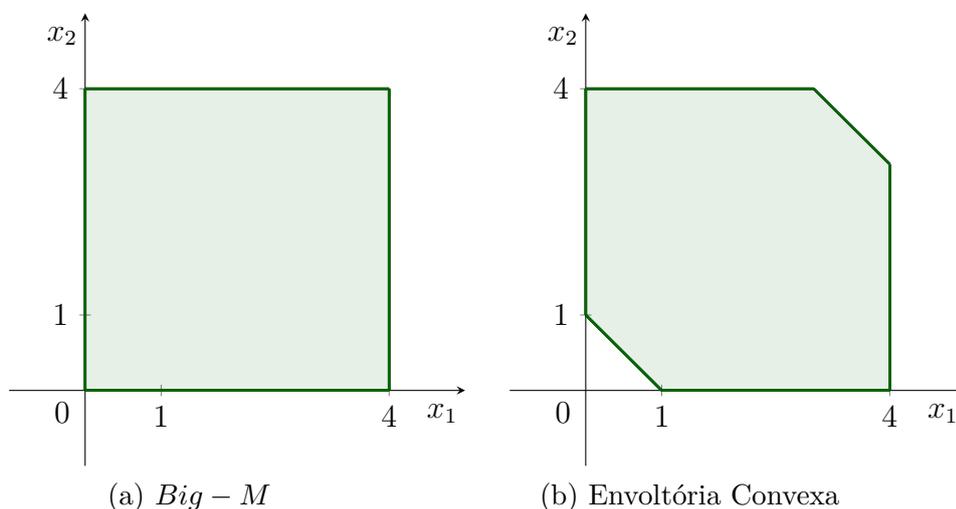
Figura 9 – Gráfico entre as regiões



Fonte – Elaborada pelo autor

Observe-se que as regiões R e S se interceptam em um conjunto infinito de pontos, $R \cap S$. Além disso, a disjunção (4.17) não é exclusiva, ou seja, a solução pode estar na região $R \cap S$. Caso a disjunção (4.17) seja exclusiva, isto é, o ou exclusivo (\vee), então a região de busca estaria no conjunto $(R \cup S) - (R \cap S)$. Para uma comparação, a figura a seguir ilustra o efeito das formulações *Big - M* e envoltória convexa.

Figura 10 – Gráfico de comparação entre *Big - M* e envoltória convexa



(a) *Big - M*

(b) Envoltória Convexa

Fonte – Elaborada pelo autor

Na Figura 10a tem-se a região de busca para a solução utilizando a formulação *Big - M*. Na Figura 10b tem-se a região de busca para a solução utilizando a formulação envoltória convexa. Claramente, a região correspondente à envoltória convexa é menor que a região de *Big - M*. Entretanto, apesar desta diferença gráfica, não pode-se esquecer que esse exemplo é linear.

5 Programação Disjuntiva Generalizada Aplicada a Redes de Distribuição de Água

5.1 Dimensionamento de RDA

Dado $j = 1, \dots, n_t$, sejam Y_i^j , λ_j e σ_j , a variável booleana associada ao trecho j em relação ao diâmetro D_i , o custo do trecho j e a rugosidade do trecho j , respectivamente, tais que:

$$\begin{aligned} Y_i^j &\in \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}, & \forall i = 1, \dots, n_d \\ \lambda_j &= L_j \cdot \text{Custo}(D_i), & \forall i = 1, \dots, n_d \\ \sigma_j &= R_i, & \forall i = 1, \dots, n_d. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Além disso, para obter-se as disjunções do problema tem-se que, para todo $j = 1, \dots, n_t$, segue $x_j = D_i$, para todo $i = 1, \dots, n_d$. Portanto, para todo $j \in \{1, \dots, n_t\}$, segue, a partir do conectivo lógico $\underline{\vee}$ (ou exclusivo), as seguintes disjunções:

$$\underline{\vee}_{i \in \{1, \dots, n_d\}} \left[\begin{array}{c} Y_i^j \\ x_j = D_i \\ \lambda_j = L_j \cdot \text{Custo}(D_i) \\ \sigma_j = R_i \end{array} \right] \quad (5.2)$$

Observe-se que, conforme ocorre a variação do índice j , têm-se uma sequência de disjunções corresponde a um único trecho, ou seja:

Trecho $j = 1$

$$\left[\begin{array}{c} Y_1^1 \\ x_1 = D_1 \\ \lambda_1 = L_1 \cdot \text{Custo}(D_1) \\ \sigma_1 = R_1 \end{array} \right] \underline{\vee} \left[\begin{array}{c} Y_2^1 \\ x_1 = D_2 \\ \lambda_1 = L_1 \cdot \text{Custo}(D_2) \\ \sigma_1 = R_2 \end{array} \right] \underline{\vee} \dots \underline{\vee} \left[\begin{array}{c} Y_{n_d}^1 \\ x_1 = D_{n_d} \\ \lambda_1 = L_1 \cdot \text{Custo}(D_{n_d}) \\ \sigma_1 = R_{n_d} \end{array} \right]$$

Trecho $j = 2$

$$\left[\begin{array}{c} Y_1^2 \\ x_2 = D_1 \\ \lambda_2 = L_2 \cdot \text{Custo}(D_1) \\ \sigma_2 = R_1 \end{array} \right] \underline{\vee} \left[\begin{array}{c} Y_2^2 \\ x_2 = D_2 \\ \lambda_2 = L_2 \cdot \text{Custo}(D_2) \\ \sigma_2 = R_2 \end{array} \right] \underline{\vee} \dots \underline{\vee} \left[\begin{array}{c} Y_{n_d}^2 \\ x_2 = D_{n_d} \\ \lambda_2 = L_2 \cdot \text{Custo}(D_{n_d}) \\ \sigma_2 = R_{n_d} \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{cccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \text{Trecho } j = n_t & & & \\
 \left[\begin{array}{c} Y_1^{n_t} \\ x_{n_t} = D_1 \\ \lambda_{n_t} = L_{n_t} \cdot \text{Custo}(D_1) \\ \sigma_{n_t} = R_1 \end{array} \right] \underline{\vee} & \left[\begin{array}{c} Y_2^{n_t} \\ x_{n_t} = D_2 \\ \lambda_{n_t} = L_{n_t} \cdot \text{Custo}(D_2) \\ \sigma_{n_t} = R_2 \end{array} \right] \underline{\vee} \cdots \underline{\vee} & \left[\begin{array}{c} Y_{n_d}^{n_t} \\ x_{n_t} = D_{n_d} \\ \lambda_{n_t} = L_{n_t} \cdot \text{Custo}(D_{n_d}) \\ \sigma_{n_t} = R_{n_d} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Considere-se y_i^j a variável binária associada ao trecho j em relação ao diâmetro D_i . As disjunções (5.2) devem satisfazer as seguintes equações:

$$\sum_{i=1}^{n_d} y_i^1 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n_d} y_i^2 = 1, \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{n_d} y_i^{n_t} = 1 \quad (5.3)$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n_d} D_i \cdot y_i^1, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{n_d} D_i \cdot y_i^2, \quad \dots \quad x_{n_t} = \sum_{i=1}^{n_d} D_i \cdot y_i^{n_t} \quad (5.4)$$

$$\lambda_1 = L_1 \sum_{i=1}^{n_d} \text{Custo}(D_i) \cdot y_i^1, \quad \lambda_2 = L_2 \sum_{i=1}^{n_d} \text{Custo}(D_i) \cdot y_i^2, \quad \dots \quad \lambda_{n_t} = L_{n_t} \sum_{i=1}^{n_d} \text{Custo}(D_i) \cdot y_i^{n_t} \quad (5.5)$$

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n_d} R_i \cdot y_i^1, \quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{n_d} R_i \cdot y_i^2, \quad \dots \quad \sigma_{n_t} = \sum_{i=1}^{n_d} R_i \cdot y_i^{n_t} \quad (5.6)$$

De forma geral, para todo $j = 1, \dots, n_t$, tem-se que estas equações ficam:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n_d} D_i \cdot y_i^j \quad (5.7)$$

$$\lambda_j = L_j \sum_{i=1}^{n_d} \text{Custo}(D_i) \cdot y_i^j \quad (5.8)$$

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{n_d} R_i \cdot y_i^j. \quad (5.9)$$

Considerando a formulação *Big - M* no equacionamento correspondente as disjunções (5.2) e, para todos $i = 1, \dots, n_d$ e $j = 1, \dots, n_t$, tem-se:

$$x_j - D_i \leq M(1 - y_i^j) \quad (5.10)$$

$$\lambda_j - L_j \cdot \text{Custo}(D_i) \leq M(1 - y_i^j) \quad (5.11)$$

$$\sigma_j - R_i \leq M(1 - y_i^j) \quad (5.12)$$

ou ainda,

Trecho $j = 1$

$$\begin{aligned}
x_1 - D_1 &\leq M(1 - y_1^1) \\
\lambda_1 - L_1 \cdot \text{Custo}(D_1) &\leq M(1 - y_1^1) \\
\sigma_1 - R_1 &\leq M(1 - y_1^1) \\
\\
x_1 - D_2 &\leq M(1 - y_2^1) \\
\lambda_1 - L_1 \cdot \text{Custo}(D_2) &\leq M(1 - y_2^1) \\
\sigma_1 - R_2 &\leq M(1 - y_2^1) \\
&\vdots \\
x_1 - D_{n_d} &\leq M(1 - y_{n_d}^1) \\
\lambda_1 - L_1 \cdot \text{Custo}(D_{n_d}) &\leq M(1 - y_{n_d}^1) \\
\sigma_1 - R_{n_d} &\leq M(1 - y_{n_d}^1)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Trecho $j = 2$

$$\begin{aligned}
x_2 - D_1 &\leq M(1 - y_1^2) \\
\lambda_2 - L_2 \cdot \text{Custo}(D_1) &\leq M(1 - y_1^2) \\
\sigma_2 - R_1 &\leq M(1 - y_1^2) \\
\\
x_2 - D_2 &\leq M(1 - y_2^2) \\
\lambda_2 - L_2 \cdot \text{Custo}(D_2) &\leq M(1 - y_2^2) \\
\sigma_2 - R_2 &\leq M(1 - y_2^2) \\
&\vdots \\
x_2 - D_{n_d} &\leq M(1 - y_{n_d}^2) \\
\lambda_2 - L_2 \cdot \text{Custo}(D_{n_d}) &\leq M(1 - y_{n_d}^2) \\
\sigma_2 - R_{n_d} &\leq M(1 - y_{n_d}^2)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

\vdots

\vdots

Trecho $j = n_t$

$$\begin{aligned}
x_{n_t} - D_1 &\leq M(1 - y_1^{n_t}) \\
\lambda_{n_t} - L_{n_t} \cdot \text{Custo}(D_1) &\leq M(1 - y_1^{n_t}) \\
\sigma_{n_t} - R_1 &\leq M(1 - y_1^{n_t}) \\
\\
x_{n_t} - D_2 &\leq M(1 - y_2^{n_t}) \\
\lambda_{n_t} - L_{n_t} \cdot \text{Custo}(D_2) &\leq M(1 - y_2^{n_t}) \\
\sigma_{n_t} - R_2 &\leq M(1 - y_2^{n_t}) \\
&\vdots \\
x_{n_t} - D_{n_d} &\leq M(1 - y_{n_d}^{n_t}) \\
\lambda_{n_t} - L_{n_t} \cdot \text{Custo}(D_{n_d}) &\leq M(1 - y_{n_d}^{n_t}) \\
\sigma_{n_t} - R_{n_d} &\leq M(1 - y_{n_d}^{n_t})
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Como o parâmetro M é suficientemente grande, considere-se $M = 1.000.000$. Sem perda de generalidade, supõe-se, para o trecho $j = 1$, que $y_1^1 = 1$. Então, $x_1 = D_1$, $\lambda_1 = L_1 \cdot \text{Custo}(D_1)$ e $\sigma_1 = R_1$. Como $y_i^1 = 0$, para todo $i = 2, \dots, n_d$, segue que $x_1 = 1.000.000 + D_i$, $\lambda_1 = 1.000.000 + L_1 \cdot \text{Custo}(D_i)$ e $\sigma_1 = 1.000.000 + R_i$. Note-se que, para estes valores de x_1 , λ_1 e σ_1 a tendência é aumentar, ou seja, não são os valores essenciais para a otimização, já que o problema de otimização é minimizar o custo total de RDA.

Dado $j = 1, \dots, n_t$, tem-se $x_j = D_i$ para algum $i = 1, \dots, n_d$. Como $\lambda_j = L_j \cdot \text{Custo}(D_i)$, então $\lambda_j = L_j \cdot \text{Custo}(x_j)$. Logo, para todo $i = 1, \dots, n_d$, $j = 1, \dots, n_t$, $k = 1, \dots, n_n$ e $\gamma = 1, \dots, n_c$, o modelo de otimização (3.15) fica:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & C_T = \sum_{j=1}^{n_t} \lambda_j \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{j \in VE_k} q_j - \sum_{j \in VS_k} q_j = dmd(k) \\
 & \sum_{j \in PCP_\gamma} h_f(j) - \sum_{j \in PCN_\gamma} h_f(j) = \sum_{\alpha=1}^{n_f} E_P^\alpha(\gamma) \\
 & pr_{min}(k) \leq pr(k) \\
 & v_{min} \leq v_j \leq v_{max} \\
 & x_j \in \mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_{n_d}\} \\
 & \sum_{i=1}^{n_d} y_i^j = 1 \\
 & x_j = \sum_{i=1}^{n_d} D_i \cdot y_i^j \\
 & \lambda_j = L_j \sum_{i=1}^{n_d} \text{Custo}(D_i) \cdot y_i^j \\
 & \sigma_j = \sum_{i=1}^{n_d} R_i \cdot y_i^j \\
 & x_j - D_i \leq M(1 - y_i^j) \\
 & \lambda_j - L_j \cdot \text{Custo}(D_i) \leq M(1 - y_i^j) \\
 & \sigma_j - R_i \leq M(1 - y_i^j)
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Observe-se que, o número de variáveis do modelo apresentado é:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\underbrace{n_t}_{x_j} + \underbrace{n_t}_{q_j} + \underbrace{n_t}_{h_f(j)} + \underbrace{n_t}_{v_j} + \underbrace{n_n}_{pr(k)} + \underbrace{n_t}_{\lambda_j} + \underbrace{n_t}_{\sigma_j}}_{6n_t+n_n} + \underbrace{\overbrace{n_d \cdot n_t}^{\text{var. inteiras}}}_{y_i^j} \\
 & = 6n_t + n_n + n_d \cdot n_t \\
 & = (6 + n_d)n_t + n_n
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

e o número de possíveis soluções para o problema é:

$$n_d^{n_t} \tag{5.18}$$

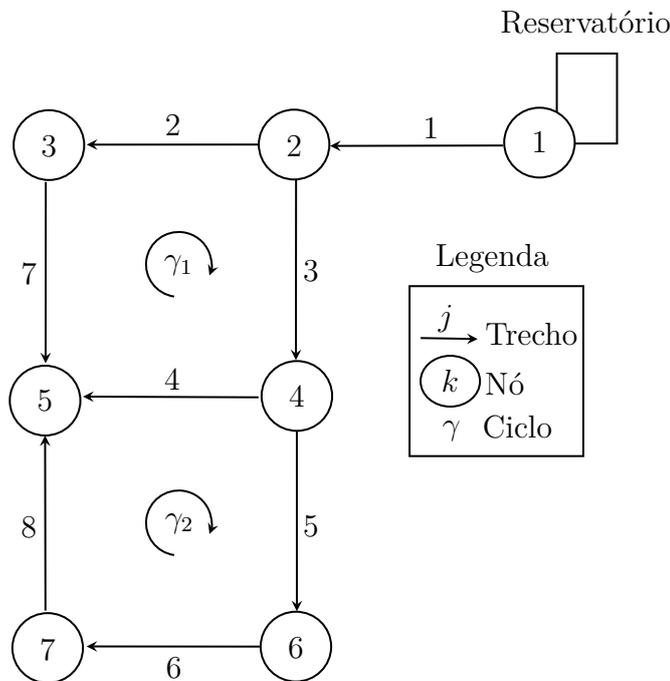
5.2 Resultados

Para demonstrar a aplicabilidade do modelo desenvolvido para a otimização de RDA, alguns estudos de casos utilizados como exemplo em inúmeros trabalhos publicados na área foram otimizados. O primeiro caso de estudo trata-se da rede *Two-loop*, que pode ser classificada como um problema de pequeno porte e foi originalmente proposta por Alperovits e Shamir (1977). O segundo caso de estudo envolve a rede principal da cidade de *Hanoi*, capital do Vietnã e classificada como um problema de porte médio, proposta originalmente por Fujiwara e Khang (1990). O terceiro estudo de caso é a rede R9, que pode ser classificada como um problema de porte intermediário. Esta rede está localizada na cidade de João Pessoa-PA, Brasil e foi proposta por Gomes *et al.* (2009). Por fim, tem-se a rede *Two-source* que foi originalmente proposta por Kadu *et al.* (2008) e é uma rede com dois reservatórios.

5.2.1 Rede *Two-loop*

O primeiro estudo de caso foi realizado utilizando uma rede conhecida como *Two-loop*, originalmente estudada por Alperovits e Shamir (1977). A Figura 11 representa a topologia desta rede, mostrando o sentido das vazões. Observe-se que a rede apresenta 2 ciclos, γ_1 e γ_2 , e para os cálculos foi considerado o sentido horário.

Figura 11 – Rede *two-loop*



Fonte – Elaborada pelo autor

A rede é formada por 1 reservatório e 8 trechos com 1000 m de comprimento cada,

interligados com 7 nós. A pressão mínima em cada nó é igual a 30 *mca*. Para o cálculo das perdas de carga a equação utilizada é a de Hazen-Williams e o coeficiente de rugosidade C é 130 para todas as tubulações. Além disso, o nó 1 é o reservatório.

A alimentação é feita por gravidade, cuja elevação do reservatório é de 210 *m*, o suficiente para fornecer pressões mínimas nos nós. O conjunto de diâmetros disponíveis \mathcal{D} é formado por 14 tipos de tamanhos de diâmetros, em *mm*, a saber, $\mathcal{D} = \{25,4, 50,8, 76,2, 101,6, 152,4, 203,2, 254, 304,8, 355,6, 406,4, 457,2, 508, 558,8, 609,6\}$. Este problema de otimização possui $14^8 = 1,475 \cdot 10^9$ soluções possíveis. A Tabela 6 apresenta o custo de cada elemento desse conjunto, sua rugosidade e a conversão desses diâmetros em polegadas (*in*).

Tabela 6 – Custos das tubulações disponíveis para a rede *two-loop*

Diâmetro (<i>mm</i>)	Custo (\$/ <i>m</i>)	Coeficiente de rugosidade (C)	Diâmetro nominal (<i>in</i>) ¹
25,4	2	130	1
50,8	5	130	2
76,2	8	130	3
101,6	11	130	4
152,4	16	130	6
203,2	23	130	8
254	32	130	10
304,8	50	130	12
355,6	60	130	14
406,4	90	130	16
457,2	130	130	18
508	170	130	20
558,8	300	130	22
609,6	550	130	24

¹ 25,4 *mm* = 1 *in*

Fonte – Elaborada pelo autor

Supondo que todos os trechos tenham um diâmetro de 25,4 *mm*, o custo mínimo para a rede *two-loop* é de 16.000,00 \$. Mas essa solução não é factível. Considerando que todos os trechos tenham um diâmetro de 609,6 *mm*, o custo máximo para a rede *two-loop* é de 4.400.000,00 \$.

Para o auxílio da identificação de dados para este problema, a seguir são apresentadas as Tabelas 7 e 8. A Tabela 7 apresenta os valores da elevação e da demanda para cada nó pertencente à rede.

Tabela 7 – Características dos nós para a rede *two-loop*

Nó	Elevação do nó (<i>m</i>)	Demanda no nó (m^3/h)	Pressão mínima (<i>mca</i>)
1	210	-1120	30
2	150	100	30
3	160	100	30
4	155	120	30
5	150	270	30
6	165	330	30
7	200	160	30

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 8 mostra o comprimento, o nó origem e o nó destino de cada trecho, ou seja, o sentido da vazão associado a cada trecho da rede.

Tabela 8 – Características dos trechos para a rede *two-loop*

Trecho	Origem (nó)	Destino (nó)	Comprimento (<i>m</i>)
1	1	2	1000
2	2	3	1000
3	2	4	1000
4	4	5	1000
5	4	6	1000
6	6	7	1000
7	3	5	1000
8	7	5	1000

Fonte – Elaborada pelo autor

Neste problema considerou-se $M = 1.000.000$. Para a solução do modelo o ambiente GAMS foi utilizado e o problema de PNLIM foi resolvido utilizando o *solver* SBB. O valor otimizado encontrado foi de 419.000,00 \$, o qual representa o ótimo global, de acordo com Ezzeldin *et al.* (2013). Além disso, este valor representa uma economia de aproximadamente 15,78 % em relação ao trabalho de Alperovits e Shamir (1977). A Tabela 9 apresenta os resultados dos diâmetros obtidos a partir da otimização usando PDG e uma comparação com outros resultados encontrados na literatura.

O SBB é um *solver* do GAMS para modelos de PNLIM. Ele é baseado em uma combinação do método *Branch and Bound* e alguns dos *solver* de PNL já suportados pelo GAMS. Para mais informações sobre o *solver* SBB, veja GAMS (2018).

Tabela 9 – Resultado dos diâmetros, em polegadas, otimizados e comparação com outros trabalhos para a rede *two-loop*

Trecho	Alperovits e Shamir (1977)	Goulter <i>et al.</i> (1986)	Zhou <i>et al.</i> (2016)	Surco <i>et al.</i> (2017)	Presente trabalho
1	20 18	20 18	18	18	18
2	8 6	10	10	10	10
3	18	16	16	16	16
4	8 6	6 4	4	4	4
5	16	16 14	16	16	16
6	12 10	12 10	10	10	10
7	6	10 8	10	10	10
8	6 4	2 1	1	1	1
Custo (\$)	497.525,00 ¹	435.015,00 ¹	419.000,00	419.000,00	419.000,00

¹ *Split-pipe*

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 9 mostra que os autores Alperovits e Shamir (1977) e Goulter *et al.* (1986), usaram a modelo *split-pipe*, com 2 segmentos por trecho. Por exemplo, no trecho 1 foi usado o diâmetro de 20 *in* no primeiro segmento e 18 *in* no segundo segmento, enquanto que em Zhou *et al.* (2016), Surco *et al.* (2017) e no presente trabalho foram utilizados o diâmetro de 18 *in* em todo o trecho, isto é, a abordagem *single* foi utilizado.

Na Tabela 10 são apresentadas as pressões de acordo com os diâmetros otimizados. Note-se que as pressões encontradas no presente trabalho e também em outros autores são maiores que a pressão mínima exigida para a rede.

Tabela 10 – Resultado das pressões, em mca, otimizadas e comparação com outros trabalhos para a rede *two-loop*

Nó	Alperovits e Shamir (1977)	Goulter <i>et al.</i> (1986)	Zhou <i>et al.</i> (2016)	Surco <i>et al.</i> (2017)	Presente trabalho
1	Reservatório				
2	53,96	54,3	53,24	53,25	53,24
3	32,32	33,19	30,49	30,46	30,45
4	44,97	44,19	43,44	43,45	43,44
5	32,31	32,32	33,78	33,8	33,79
6	31,19	31,19	30,43	30,44	30,44
7	31,57	31,57	30,54	30,55	30,54

Pressão mínima = 30 mca

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 11 apresenta os métodos que alguns autores utilizaram para resolver o problema de otimização da rede de distribuição de água *two-loop*.

Tabela 11 – Métodos na otimização utilizados para solução da rede *two-loop*

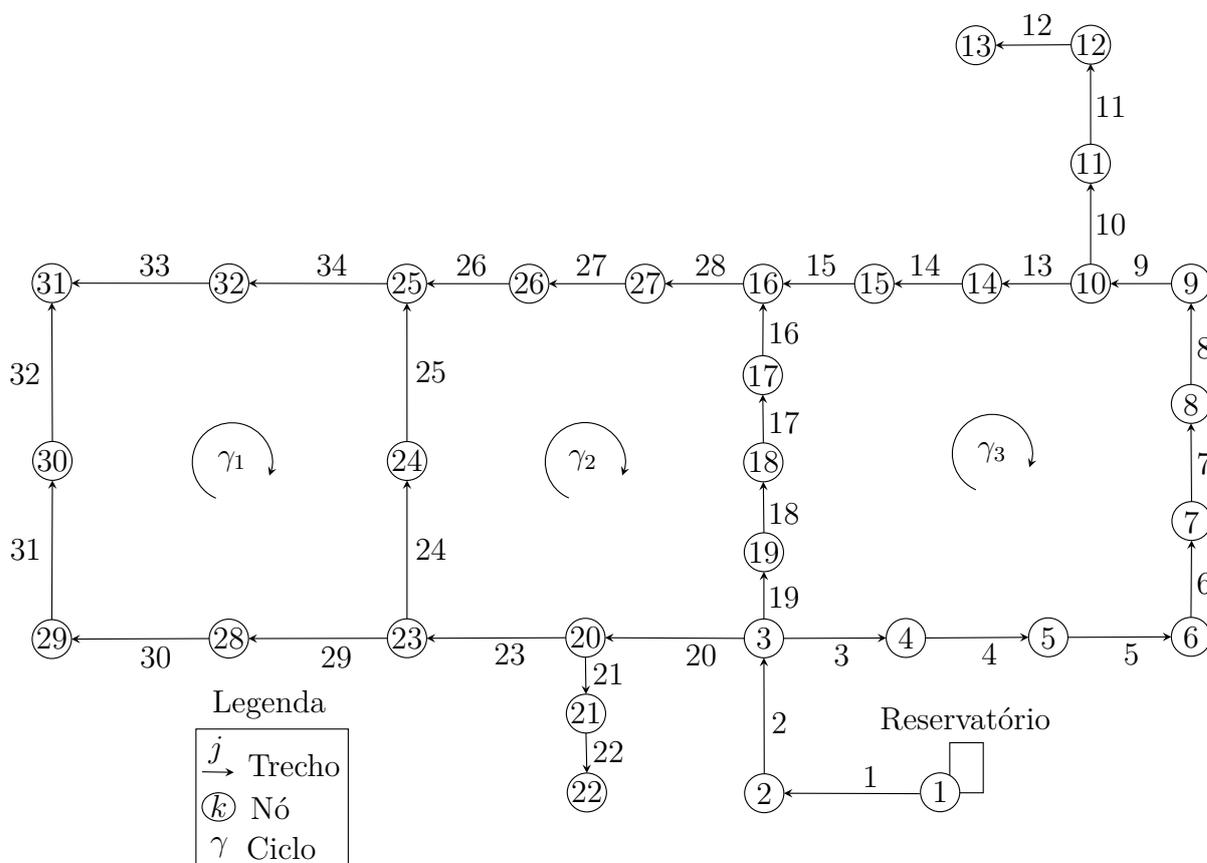
Autores	Método
Alperovits e Shamir (1977)	<i>Linear Programming Gradient</i>
Goulter <i>et al.</i> (1986)	<i>Linear Programming Gradient</i>
Zhou <i>et al.</i> (2016)	<i>State Transition Algorithm</i>
Surco <i>et al.</i> (2017)	<i>Particle Swarm Optimization</i>
Presente trabalho	<i>Spatial Branch and Bound</i>

Fonte – Elaborada pelo autor

5.2.2 Rede de *Hanoi*

O segundo estudo de caso foi realizado utilizando a rede principal na cidade de *Hanoi*, Vietnã, originalmente estudada por Fujiwara e Khang (1990). A Figura 12 representa a topologia desta rede, mostrando o sentido das vazões. Observe-se que a rede apresenta 3 ciclos, γ_1 , γ_2 e γ_3 , e para os cálculos foi considerado o sentido horário.

Figura 12 – Rede de Hanoi



Fonte – Elaborada pelo autor

A rede é formada por 1 reservatório e 34 trechos, em que os comprimentos variam de 100 a 3500 m , interligados com 32 nós. A pressão mínima em cada nó é igual a 30 mca . Para o cálculo das perdas de carga a equação utilizada é a de Hazen-Williams e o coeficiente de rugosidade C é 130 para todas as tubulações. Além disso, o nó 1 é o reservatório.

A alimentação principal é feita por gravidade, cuja elevação do reservatório é de 100 m , o suficiente para fornecer pressões mínimas nos nós. O conjunto de diâmetros disponíveis \mathcal{D} é formado por 6 tipos de tamanhos de diâmetros, em mm , a saber, $\mathcal{D} = \{304,8, 406,4, 508, 609,6, 762, 1016\}$. Este problema de otimização possui $6^{34} = 2,865 \cdot 10^{26}$ soluções possíveis. A Tabela 12 apresenta o custo de cada elemento desse conjunto e sua rugosidade.

Tabela 12 – Custos das tubulações disponíveis para a rede de Hanoi

Diâmetro (mm)	Custo (\$/ m)	Coefficiente de rugosidade (C)	Diâmetro nominal (in) ¹
304,8	45,73	130	12
406,4	70,40	130	16

508	98,39	130	20
609,6	129,33	130	24
762	180,75	130	30
1016	278,28	130	40

¹ 25,4 mm = 1 in

Fonte – Elaborada pelo autor

Supondo que que todos os trechos tenham um diâmetro de 304,8 mm, o custo mínimo para a rede de *Hanoi* é de 1.802.676,60 \$. Mas essa solução não é factível. Considerando que todos os trechos tenham um diâmetro de 1016 mm, o custo máximo para a rede de *Hanoi* é de 10.969.797,60 \$.

Para o auxílio da identificação de dados para este problema, a seguir são apresentadas as Tabelas 13 e 14. A Tabela 13 apresenta os valores da elevação e da demanda para cada nó pertencente à rede.

Tabela 13 – Características dos nós para a rede de *Hanoi*

Nó	Elevação do nó (m)	Demanda no nó (m ³ /h)	Pressão mínima (mca)
1	100	-19940	30
2	0	890	30
3	0	850	30
4	0	130	30
5	0	725	30
6	0	1005	30
7	0	1350	30
8	0	550	30
9	0	525	30
10	0	525	30
11	0	500	30
12	0	560	30
13	0	940	30
14	0	615	30
15	0	280	30
16	0	310	30
17	0	865	30
18	0	1345	30
19	0	60	30
20	0	1275	30
21	0	930	30

22	0	485	30
23	0	1045	30
24	0	820	30
25	0	170	30
26	0	900	30
27	0	370	30
28	0	290	30
29	0	360	30
30	0	360	30
31	0	105	30
32	0	805	30

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 14 mostra o comprimento, o nó origem, o nó destino de cada trecho, ou seja, o sentido da vazão correspondente para cada trecho da rede.

Tabela 14 – Características dos trechos para a rede de *Hanoi*

Trecho	Origem (nó)	Destino (nó)	Comprimento (m)
1	1	2	100
2	2	3	1350
3	3	4	900
4	4	5	1150
5	5	6	1450
6	6	7	450
7	7	8	850
8	8	9	850
9	9	10	800
10	10	11	950
11	11	12	1200
12	12	13	3500
13	10	14	800
14	14	15	500
15	15	16	550
16	17	16	2730
17	18	17	1750
18	19	18	800
19	3	19	400
20	3	20	2200
21	20	21	1500
22	21	22	500

23	20	23	2650
24	23	24	1230
25	24	25	1300
26	26	25	850
27	27	26	300
28	16	27	750
29	23	28	1500
30	28	29	2000
31	29	30	1600
32	30	31	150
33	32	31	860
34	25	32	950

Fonte – Elaborada pelo autor

Neste problema considerou-se $M = 1.000.000$. Para a solução do modelo o ambiente GAMS foi utilizado e o problema de PNLIM foi resolvido utilizando o *solver* SBB. O valor otimizado encontrado foi de 6.299.824,60 \$, o qual representa um aumento de aproximadamente 13,27 % em relação ao trabalho de Fujiwara e Khang (1990). Entretanto, em Fujiwara e Khang (1990) foi utilizado a metodologia *split-pipe*. Além disso, é necessário ressaltar que o modelo proposto neste trabalho é um modelo determinístico que não utiliza nenhum software adicional. A Tabela 15 apresenta os resultados dos diâmetros obtidos a partir da otimização usando PDG e uma comparação com outros resultados encontrados na literatura.

Tabela 15 – Resultado dos diâmetros, em polegadas, otimizados e comparação com outros trabalhos para a rede de Hanoi

Trecho	Fujiwara e Khang (1990)	Savic e Walters (1997)	Cunha e Sousa (1999)	Liong e Atiquzzaman (2004)	Suribabu e Neelakantan (2006)	Surco et al. (2017)	Presente trabalho
1	40	40	40	40	40	40	40
2	40	40	40	40	40	40	40
3	30 40	40	40	40	40	40	40
4	30 40	40	40	40	40	40	40
5	30 40	40	40	40	40	40	40
6	30 40	40	40	40	40	40	40
7	30 40	40	40	40	40	40	40
8	30 40	40	40	30	40	40	40
9	30 40	40	40	30	40	40	40
10	24 30	30	30	30	30	30	30
11	20 24	24	24	30	24	24	24

12	20	24	24	24	24	24	24	24
13	16	20	20	20	16	20	20	20
14	12	16	16	16	12	16	16	16
15	12	12	12	12	12	12	12	12
16	16	20	12	12	24	12	12	24
17	20	24	16	16	30	16	16	24
18	24	30	20	20	30	24	24	30
19	24	30	20	20	30	20	20	30
20	30	40	40	40	40	40	40	40
21	16	20	20	20	20	20	20	20
22	12	12	12	12	12	12	12	12
23	24	30	40	40	30	40	40	30
24	16	20	30	30	30	30	30	24
25	16	20	30	30	24	30	30	20
26	12	20	20	20	12	20	20	12
27	20	24	12	12	20	12	12	20
28	20	24	12	12	24	12	12	24
29	16	20	16	16	16	16	16	24
30	16	20	16	12	16	12	12	20
31	12	16	12	12	12	12	12	16
32	12	12	16	16	16	16	16	12
33	12	16	16	16	20	16	16	12
34	16	20	20	24	24	24	24	24
Custo (\$ 10 ⁶)	5,562 ¹	6,073 ²	6,056 ²	6,220	6,081	6,081	6,299	

¹ *Split-pipe*² Solução ineficaz

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 15 mostra que os autores Fujiwara e Khang (1990) utilizaram a abordagem *split-pipe*. Em algumas soluções de outros pesquisadores e no presente trabalho, a metodologia *single* foi aplicado. Note-se que, em Savic e Walters (1997) e Cunha e Sousa (1999), os autores obtiveram uma solução inviável. Já, em Liong e Atiquzzaman (2004), Surco *et al.* (2017) e no presente trabalho, conseguiu-se uma solução viável. Entretanto, existe uma variação nos valores dos parâmetros da equação de Hazen-Williams nestes autores.

Na Tabela 16 são apresentadas as pressões de acordo com os diâmetros otimizados. Em Savic e Walters (1997) e Cunha e Sousa (1999), observa-se que existem alguns nós com pressões inferiores ao limite mínimo imposto. Já, em Liong e Atiquzzaman (2004), Surco *et al.* (2017) e no presente trabalho nenhum nó desrespeitou o limite mínimo de pressão

exigida para a rede. As pressões em [Suribabu e Neelakantan \(2006\)](#) não foram reportadas.

Tabela 16 – Resultado das pressões, em mca, otimizadas e comparação com outros trabalhos para a rede de *Hanoi*

Nó	Fujiwara e Khang (1990)	Savic e Walters (1997)	Cunha e Sousa (1999)	Liong e Atiquzzaman (2004)	Surco <i>et al.</i> (2017)	Presente trabalho
1	Reservatório					
2	98,6	97,14	97,14	97,14	97,14	97,14
3	81,4	61,63	61,63	61,67	61,67	61,65
4	75,9	56,83	56,82	57,54	56,92	57,03
5	69	50,89	50,86	52,43	51,02	51,32
6	60,9	44,62	44,57	47,13	44,81	45,31
7	58,5	43,14	43,1	45,92	43,35	43,91
8	54,7	41,38	41,33	44,55	41,61	42,26
9	51	39,97	39,91	40,27	40,23	40,95
10	47,8	38,93	38,86	37,24	39,2	39,99
11	44	37,37	37,3	35,68	37,64	38,43
12	39,8	33,94	33,87	34,52	34,21	35
13	30	29,72 ¹	29,66 ¹	30,32	30,01	30,79
14	43,2	35,06	34,94	34,08	35,52	37,02
15	40,3	33,07	32,88	34,08	33,72	35,9
16	38	30,15	29,79 ¹	36,13	31,3	35,05
17	56,7	30,24	29,95 ¹	48,64	33,41	43,26
18	70,5	43,91	43,81	54	49,93	55,26
19	77,8	55,53	55,49	59,07	55,09	59,48
20	67	50,39	50,43	53,62	50,61	53,73
21	42,3	41,03	41,07	44,27	41,26	44,37
22	37,2	35,86	35,9	39,11	36,1	39,2
23	51,9	44,15	44,24	38,79	44,52	39,3
24	40,1	38,84	38,5	36,37	38,93	34,77
25	32,6	35,48	34,79	33,16	35,34	31,27
26	34,1	31,46	30,87	33,44	31,7	32,1
27	35,2	30,03	29,59 ¹	34,38	30,76	33,15
28	44,3	35,43	38,6	32,64	38,94	37,06
29	35,3	30,67	29,64 ¹	30,05	30,13	33,06
30	30	29,65 ¹	29,9 ¹	30,1	30,42	30,13
31	30	30,12	30,18	30,35	30,7	30,11
32	30,1	31,36	32,64	31,09	33,18	30,3

¹ Pressão mínima = 30 *mca*

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 17 apresenta os métodos que alguns autores, encontrados na literatura, utilizaram para resolver o problema de otimização da rede de distribuição de água da cidade de *Hanoi*.

Tabela 17 – Métodos na otimização utilizados para solução da rede de *Hanoi*

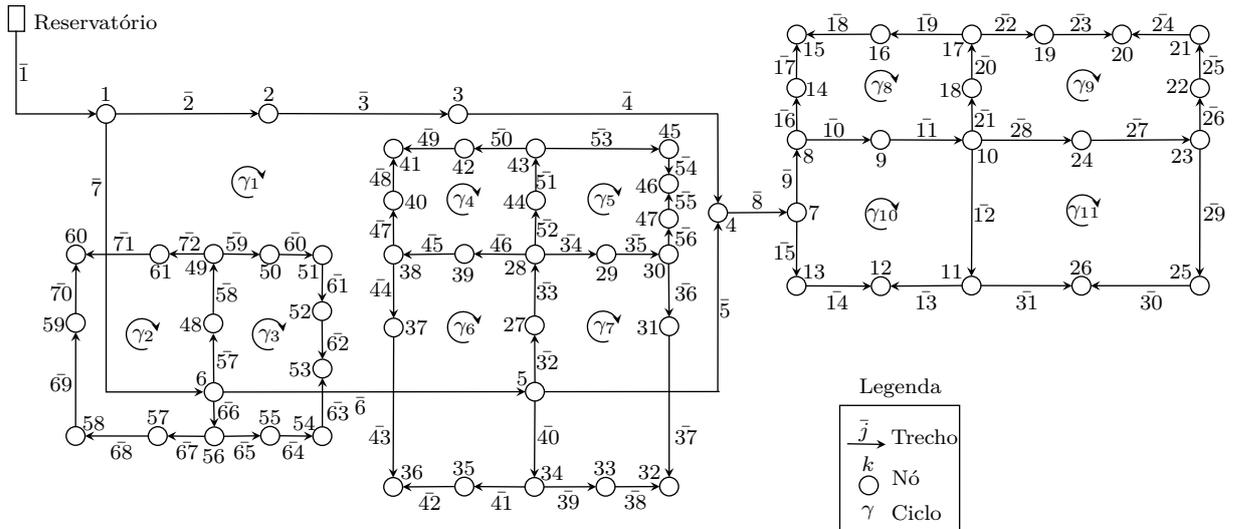
Autores	Método
Fujiwara e Khang (1990)	<i>Decomposition Method</i>
Savic e Walters (1997)	<i>Genetic Algorithm</i>
Cunha e Sousa (1999)	<i>Simulated Annealing</i>
Liong e Atiquzzaman (2004)	<i>Shuffled Complex Algorithm</i>
Suribabu e Neelakantan (2006)	<i>Particle Swarm Optimization</i>
Surco <i>et al.</i> (2017)	<i>Particle Swarm Optimization</i>
Presente trabalho	<i>Spatial Branch and Bound</i>

Fonte – Elaborada pelo autor

5.2.3 Rede R9

O terceiro estudo de caso foi realizado utilizando a rede do bairro do Bessa na cidade de João Pessoa, Paraíba. Essa rede foi projetada pela Companhia de Águas e Esgoto da Paraíba (CAGEPA) em 1982, sendo abastecida por um reservatório elevado (R9). A rede se estende por uma área de aproximadamente 600000 m^2 , tendo uma demanda projetada para abastecer cerca de 100 mil pessoas. A Figura 13 representa a topologia desta rede, mostrando o sentido das vazões. Observe-se que essa rede apresenta 11 ciclos, $\gamma_1, \dots, \gamma_{11}$, e para os cálculos foi considerado o sentido horário.

Figura 13 – Rede R9



Fonte – Elaborada pelo autor

A rede é formada por 1 reservatório e 72 trechos, em que os comprimentos variam de 110 a 2540 m, interligados com 61 nós. A pressão mínima para todo $k = 1, \dots, 6$ é 25 mca e, para todo $k = 7, \dots, 61$ é 15 mca. Para o cálculo das perdas de carga a equação utilizada é a de Hazen-Williams e o coeficiente de rugosidade C é 130 ou 145 para as tubulações. A elevação do reservatório é de 54 m.

A alimentação principal é feita por gravidade, cuja elevação do reservatório é de 54 m, o suficiente para fornecer pressões mínimas nos nós. O conjunto de diâmetros disponíveis \mathcal{D} é formado por 10 tipos de tamanhos de diâmetros, em mm, a saber, $\mathcal{D} = \{100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600\}$. Este problema de otimização possui 10^{72} soluções possíveis. A Tabela 18 apresenta o custo de cada elemento desse conjunto e sua rugosidade.

Tabela 18 – Custos das tubulações disponíveis para a rede R9

Diâmetro (mm)	Custo (US\$/m)	Coefficiente de rugosidade (C)
100	17,98	145
150	44,75	145
200	63,68	145
250	85,19	145
300	101,95	130
350	121,55	130
400	136,83	130
450	171,09	130

500	195,21	130
600	255,32	130

$US\$ = \text{Dólar americano}$

Fonte – Elaborada pelo autor

Supondo que todos os trechos tenham um diâmetro de 100 mm , o custo mínimo para a rede R9 é de 458.220,30 $US\$$. Mas essa solução não é factível. Considerando que todos os trechos tenham um diâmetro de 600 mm , o custo máximo para a rede R9 é de 6.506.830,20 $US\$$.

Para o auxílio da identificação de dados para este problema, a seguir são apresentadas as Tabelas 19 e 20. A Tabela 19 apresenta os valores da elevação e da demanda para cada nó pertencente à rede.

Tabela 19 – Características dos nós para a rede R9

Nó	Elevação do nó (m)	Demanda no nó (L/s)	Pressão mínima (mca)	Nó	Elevação do nó (m)	Demanda no nó (L/s)	Pressão mínima (mca)
1	5	2,51	25	32	4,5	4,09	15
2	5	44,07	25	33	5	3,68	15
3	4	41,24	25	34	5	4,04	15
4	4,5	1,04	25	35	6	3,22	15
5	4,5	0,86	25	36	4,5	2,53	15
6	4,5	1,32	25	37	4,5	2,31	15
7	4,5	1,35	15	38	4	2,5	15
8	5	8,59	15	39	4	2,89	15
9	4,5	6,4	15	40	4	2,48	15
10	5	6,07	15	41	4	4,61	15
11	3,5	4,95	15	42	4	3,47	15
12	3,5	8,38	15	43	4	3,61	15
13	3,5	11,7	15	44	4	5,17	15
14	5	5,63	15	45	4	6,48	15
15	6	5,57	15	46	4,5	4,91	15
16	6	6,3	15	47	4	6,5	15
17	6	3,26	15	48	4,5	4,97	15
18	6	3,6	15	49	3	2,97	15
19	6	4,83	15	50	5	1,8	15
20	6	4,5	15	51	4	2,96	15
21	5	2,8	15	52	3	4,66	15
22	3	5,46	15	53	4,5	4,54	15

23	3,5	62,45	15	54	4,5	8,8	15
24	6	8,19	15	55	4,5	4,26	15
25	3,5	58,87	15	56	5	2,98	15
26	3,5	3,26	15	57	5	3,91	15
27	4,3	4,36	15	58	4,7	3,7	15
28	4	4,25	15	59	5	1,86	15
29	2,5	4,56	15	60	5	3,12	15
30	2,5	8,32	15	61	4,5	3,52	15
31	3,5	4,94	15				

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 20 mostra o comprimento, o nó origem e o nó destino de cada trecho, ou seja, o sentido da vazão correspondente para cada trecho da rede.

Tabela 20 – Características dos trechos para a rede R9

Trecho	Origem (nó)	Destino (nó)	Comprimento (<i>m</i>)	Trecho	Origem (nó)	Destino (nó)	Comprimento (<i>m</i>)
1	—	1	2540	37	31	32	285
2	1	2	350	38	33	32	210
3	2	3	1140	39	34	33	240
4	3	4	1430	40	5	34	250
5	5	4	1020	41	34	35	340
6	6	5	1430	42	35	36	270
7	1	6	1710	43	37	36	240
8	4	7	220	44	38	37	160
9	7	8	190	45	39	38	260
10	8	9	295	46	28	39	250
11	9	10	390	47	38	40	330
12	10	11	370	48	40	41	230
13	11	12	190	49	42	41	385
14	13	12	310	50	43	42	160
15	7	13	205	51	44	43	330
16	8	14	305	52	28	44	210
17	14	15	295	53	43	45	150
18	16	15	300	54	45	46	255
19	17	16	290	55	47	46	260
20	18	17	180	56	30	47	230
21	10	18	315	57	6	48	115
22	17	19	300	58	48	49	180
23	19	20	295	59	49	50	140

24	21	20	215	60	50	51	215
25	22	21	140	61	51	52	175
26	23	22	220	62	52	53	180
27	24	23	220	63	54	53	260
28	10	24	285	64	55	54	205
29	23	25	300	65	56	55	255
30	25	26	315	66	6	56	260
31	11	26	170	67	56	57	275
32	5	27	110	68	57	58	315
33	27	28	280	69	58	59	200
34	28	29	225	70	59	60	175
35	29	30	200	71	61	60	300
36	30	31	190	72	49	61	250

Fonte – Elaborada pelo autor

Neste problema considerou-se $M = 9.000.000.000$. Para a solução do modelo o ambiente GAMS foi utilizado e o problema de PNLIM foi resolvido utilizando o *solver* SBB. O valor otimizado encontrado foi de 2.121.618,90 *US\$*, o qual representa uma economia de aproximadamente 3,6 % em relação ao trabalho de Gomes *et al.* (2009). A Tabela 21 apresenta os resultados dos diâmetros obtidos a partir da otimização usando PDG e uma comparação com outros resultados encontrados na literatura.

Tabela 21 – Resultado dos diâmetros, em *mm*, otimizados e comparação com outros trabalhos para a rede R9

Trecho	Gomes <i>et al.</i> (2009)	Surco <i>et al.</i> (2017)	Presente trabalho	Trecho	Gomes <i>et al.</i> (2009)	Surco <i>et al.</i> (2017)	Presente trabalho
1	600	600	600	37	100	100	100
2	600	500	500	38	100	100	100
3	600	450	500	39	100	100	100
4	500	450	400	40	150	100	100
5	350	100	100	41	100	100	100
6	100	300	300	42	100	100	100
7	250	400	400	43	100	100	100
8	400	400	500	44	100	100	100
9	200	400	400	45	100	100	100
10	100	400	400	46	100	100	100
11	100	400	400	47	100	100	100
12	100	100	100	48	100	100	100

13	400	100	100	49	100	100	100
14	400	100	100	50	100	100	100
15	400	100	100	51	150	150	150
16	150	100	100	52	150	150	150
17	150	100	100	53	100	100	100
18	100	100	100	54	100	100	100
19	100	100	100	55	100	100	100
20	100	150	150	56	150	100	100
21	100	200	200	57	150	150	100
22	100	100	100	58	150	100	100
23	100	100	100	59	100	100	100
24	150	100	100	60	100	100	150
25	150	100	100	61	100	100	100
26	150	150	150	62	100	100	100
27	100	350	350	63	100	100	100
28	100	350	400	64	100	100	100
29	300	200	200	65	150	100	100
30	350	100	100	66	150	150	150
31	350	100	100	67	100	100	100
32	250	250	250	68	100	100	100
33	250	250	250	69	100	100	100
34	150	150	150	70	100	100	100
35	150	150	150	71	100	100	100
36	100	100	100	72	100	100	100
Custo (US\$)	Gomes <i>et al.</i> (2009)			2.200.784,60			
	Surco <i>et al.</i> (2017)			2.123.238,50			
	Presente trabalho			2.121.618,90			

Fonte – Elaborada pelo autor

Note-se que, em Surco *et al.* (2017) e no presente trabalho os autores obtiveram uma solução viável. Na Tabela 22 são apresentadas as pressões de acordo com os diâmetros otimizados. Em Surco *et al.* (2017) e no presente trabalho nenhum nó desrespeitou o limite mínimo de pressão exigida para a rede. As pressões em Gomes *et al.* (2009) não foram reportadas.

Tabela 22 – Resultado das pressões, em mca, otimizadas e comparação com outros trabalhos para a rede R9

Nó	Surco <i>et al.</i> (2017)	Presente trabalho	Nó	Surco <i>et al.</i> (2017)	Presente trabalho
----	-------------------------------	----------------------	----	-------------------------------	----------------------

1	36,89	39,72	32	16,75	16,85
2	35,58	38,24	33	16,42	16,51
3	31,15	35,62	34	17,66	17,82
4	25,76	25,32	35	15,03	15,12
5	25,91	26,69	36	16,28	16,37
6	32,67	34,64	37	16,29	16,38
7	24,39	24,81	38	17,01	17,09
8	22,89	23,19	39	19,63	19,88
9	22,12	22,24	40	16,46	16,54
10	20,05	19,96	41	16,44	16,52
11	15,52	15,36	42	17,58	17,66
12	15,28	15,11	43	18,99	19,14
13	16,98	16,85	44	21,56	21,91
14	17,76	17,66	45	16,94	16,95
15	15,46	15,27	46	15,97	15,98
16	15,47	15,28	47	16,63	16,64
17	17,53	17,4	48	31,47	26,76
18	18,47	18,36	49	24,04	20,54
19	15,38	15,38	50	19,51	16,05
20	15,16	15,24	51	17,68	16,68
21	16,43	16,59	52	17,52	16,63
22	19,1	19,38	53	15,89	15,06
23	19,12	19,47	54	16,26	15,56
24	17,61	18,1	55	20,16	20,05
25	15,22	15,14	56	28,29	29,35
26	15,22	15,12	57	23,59	22,84
27	25,38	26,09	58	21,49	19,41
28	24,02	24,57	59	20,8	18,27
29	22,47	22,76	60	20,72	17,96
30	20,5	20,64	61	21,41	18,46
31	18,02	18,09			

Pressão mínima = 25 *mca* (nó 1 até 6)

Pressão mínima = 15 *mca* (nó 7 até 61)

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 23 apresenta os métodos que alguns autores, encontrados na literatura, utilizaram para resolver o problema de otimização da rede de distribuição de água R9.

Tabela 23 – Métodos na otimização utilizados para solução da rede R9

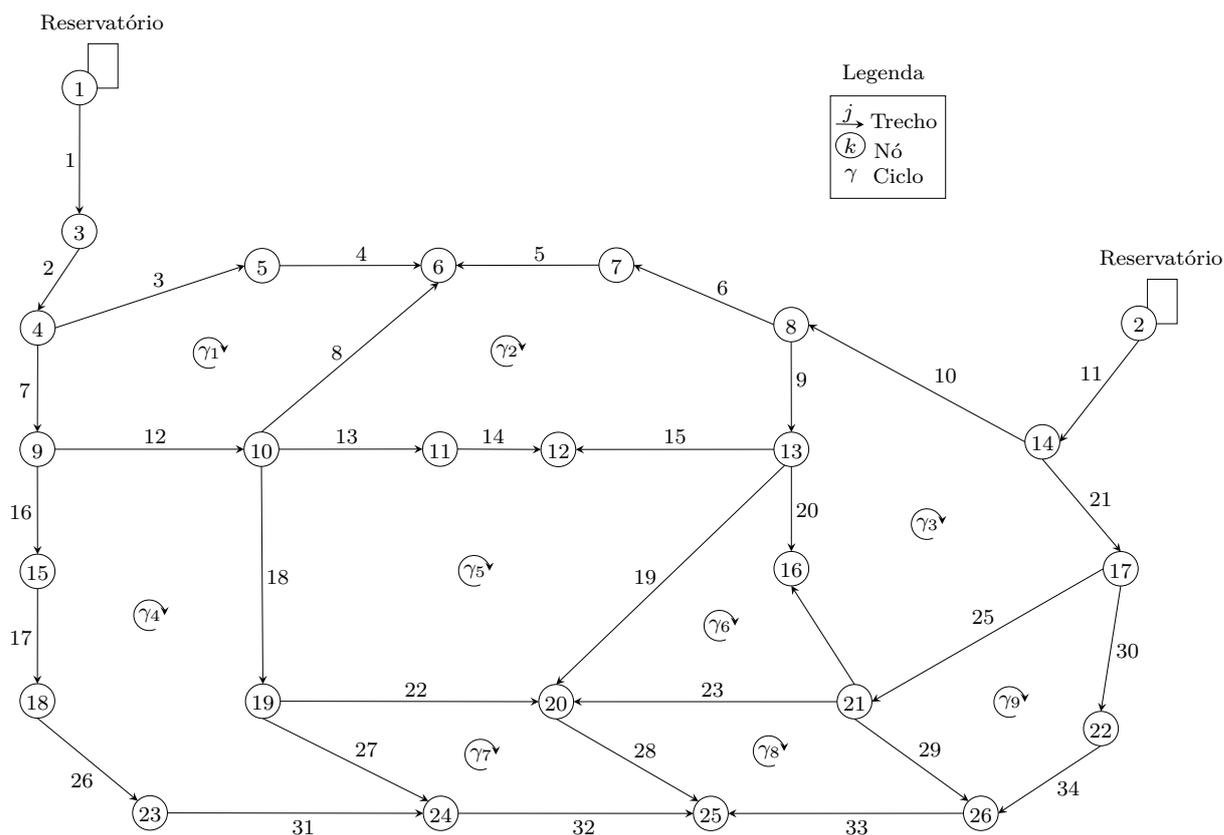
Autores	Método
Gomes <i>et al.</i> (2009)	LENHSNET
Surco <i>et al.</i> (2017)	Particle Swarm Optimization
Presente trabalho	Spatial Branch and Bound

Fonte – Elaborada pelo autor

5.2.4 Rede *Two-source*

Por fim, o quarto estudo de caso foi realizado utilizando uma rede conhecida como *Two-source*, originalmente estudada por Kadu *et al.* (2008). A Figura 14 representa a topologia desta rede, mostrando o sentido das vazões. Observe-se que a rede apresenta 9 ciclos, $\gamma_1, \dots, \gamma_9$, e para os cálculos foi considerado o sentido horário.

Figura 14 – Rede *two-source*



Fonte – Elaborada pelo autor

A rede é formada por 2 reservatórios e 34 trechos, em que os comprimentos variam de 210 a 3250 m, interligados com 26 nós. A pressão mínima em cada nó varia de 80 a 100 mca. Para o cálculo das perdas de carga a equação utilizada é a de Hazen-Williams e

o coeficiente de rugosidade C é 130 para todas as tubulações. Além disso, o nó 1 e o nó 2 são os reservatórios 1 e 2, respectivamente.

A alimentação é feita por gravidade cuja, elevação do reservatório 1 é de 100 m e do reservatório 2 é 95 m , o suficiente para fornecer pressões mínimas nos nós. O conjunto de diâmetros disponíveis \mathcal{D} é formado por 14 tipos de tamanhos de diâmetros, em mm , a saber, $\mathcal{D} = \{150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 750, 800, 900, 1000\}$. Este problema de otimização possui $14^{34} = 9,297 \cdot 10^{38}$ soluções possíveis. A Tabela 24 apresenta o custo de cada elemento desse conjunto e sua rugosidade.

Tabela 24 – Custos das tubulações disponíveis para a rede *two-source*

Diâmetro (mm)	Custo (Rúpias indianas/ m)	Coefficiente de rugosidade (C)
150	1115	130
200	1600	130
250	2154	130
300	2780	130
350	3475	130
400	4255	130
450	5172	130
500	6092	130
600	8189	130
700	10670	130
750	11874	130
800	13261	130
900	16151	130
1000	19395	130

Fonte – Elaborada pelo autor

Supondo que todos os trechos tenham um diâmetro de 150 mm , o custo mínimo para a rede *two-source* é de 37.458.425,00 rúpias indianas. Mas essa solução não é factível. Considerando que todos os trechos tenham um diâmetro de 1000 mm , o custo máximo para a rede *two-source* é de 651.575.025,00 rúpias indianas.

Para o auxílio da identificação de dados para este problema, a seguir são apresentadas as Tabelas 25 e 26. A Tabela 25 apresenta os valores da elevação e da demanda para cada nó pertencente à rede.

Tabela 25 – Características dos nós para a rede *two-source*

Nó	Elevação do nó	Demanda no nó	Pressão mínima
----	----------------	---------------	----------------

	(m)	(m^3/min)	(mca)
1	100	-100,4	100
2	95	-84,8	95
3	0	18,4	85
4	0	4,5	85
5	0	6,5	85
6	0	4,2	85
7	0	3,1	82
8	0	6,2	82
9	0	8,5	85
10	0	11,5	85
11	0	8,2	85
12	0	13,6	85
13	0	14,8	82
14	0	10,6	82
15	0	10,5	85
16	0	9	82
17	0	6,8	82
18	0	3,4	85
19	0	4,6	82
20	0	10,6	82
21	0	12,6	82
22	0	5,4	80
23	0	2	82
24	0	4,5	80
25	0	3,5	80
26	0	2,2	80

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 26 mostra o comprimento, o nó origem, o nó destino de cada trecho, ou seja, o sentido da vazão correspondente para cada trecho da rede.

Tabela 26 – Características dos trechos para a rede *two-source*

Trecho	Origem (nó)	Destino (nó)	Comprimento (m)
1	1	3	300
2	3	4	820
3	4	5	940
4	5	6	790
5	7	8	1620

6	8	7	600
7	4	9	800
8	10	6	1400
9	8	13	1175
10	14	8	750
11	2	14	210
12	9	10	700
13	10	11	310
14	11	12	500
15	13	12	1960
16	9	15	900
17	15	18	850
18	10	19	650
19	13	20	760
20	13	16	1100
21	14	17	660
22	19	20	1170
23	21	20	980
24	21	16	670
25	17	21	1080
26	18	23	750
27	19	24	900
28	20	25	650
29	21	26	1540
30	17	22	730
31	23	24	1170
32	24	25	1650
33	26	25	1320
34	22	26	3250

Fonte – Elaborada pelo autor

Neste problema obtiveram-se duas soluções para a comparação de resultados. A primeira considerou-se $M = 20.000.000$. Para a solução do modelo o ambiente GAMS foi utilizado e o problema de PNLIM foi resolvido utilizando o *solver* SBB. O valor otimizado encontrado foi de 125.136.870,00 rúpias indianas (Solução 1). No entanto, para encontrar essa solução, que está apresentada na coluna 6 da Tabela 27, e comparar com o trabalho de Ezzeldin *et al.* (2013), fez-se uma alteração em um parâmetro da equação de Hazen-Williams. Essa mudança permutou o valor de 10,674 para 10,667.

Na segunda solução considerou-se $M = 200.000.000$. Novamente, para a solução do

modelo o ambiente GAMS foi utilizado e o problema de PNLIM foi resolvido utilizando o *solver* SBB. O valor otimizado encontrado foi de 124.986.030,00 rúpias indianas (Solução 2), o qual representa um aumento de aproximadamente 1,39 % em relação ao trabalho de Kadu *et al.* (2008). Entretanto, o custo obtido em Kadu *et al.* (2008) é diferente do custo encontrado por Ezzeldin *et al.* (2013) e do presente trabalho, utilizando a solução obtida por Kadu *et al.* (2008). Este custo recalculado é de 126.368.865,00 rúpias indianas. A Tabela 27 apresenta os resultados dos diâmetros obtidos a partir da otimização usando PDG e uma comparação com outros resultados encontrados na literatura.

Tabela 27 – Resultado dos diâmetros, em *mm*, otimizados e comparação com outros trabalhos para a rede *two-source*

Trecho	Kadu <i>et al.</i> (2008)	Haghighi <i>et al.</i> (2011)	Suribabu (2012)	Ezzeldin <i>et al.</i> (2013)	Presente trabalho ³	Presente trabalho ⁴
1	1000	1000	1000	900	900	900
2	900	900	1000	900	900	900
3	350	400	400	350	350	350
4	250	350	200	300	300	300
5	150	150	150	150	150	150
6	250	250	250	250	250	250
7	800	800	1000	800	800	800
8	150	150	150	150	150	150
9	600	400	450	450	500	450
10	700	500	600	500	600	600
11	900	1000	1000	800	900	900
12	700	700	800	700	700	700
13	500	800	500	600	500	500
14	450	400	350	450	300	300
15	150	150	150	150	150	150
16	450	500	500	500	500	500
17	350	350	300	350	350	350
18	400	350	450	400	400	350
19	450	150	150	150	250	150
20	150	150	150	150	150	200
21	600	700	900	700	700	750
22	150	150	150	150	150	150
23	150	450	450	450	400	450
24	400	400	300	350	350	350
25	500	700	750	700	600	600
26	200	250	150	250	250	250
27	350	250	300	250	300	300

28	250	200	250	300	250	250
29	150	300	150	200	250	250
30	300	300	300	300	300	300
31	150	200	150	150	150	150
32	150	150	150	150	150	150
33	150	200	150	150	150	150
34	200	150	150	150	150	150
Custo ¹	123.268.864 ²	131.312.815	140.177.210	125.501.130	125.136.870	124.986.030

¹ Custo em rúpias indianas

² Recalculado no presente trabalho, 126.368.865

³ Solução 1

⁴ Solução 2

Fonte – Elaborada pelo autor

Note-se que, as duas soluções obtidas no presente trabalho são viáveis. Na Tabela 28 são apresentadas as pressões de acordo com os diâmetros otimizados. Em [Haghighi et al. \(2011\)](#) e no presente trabalho nenhum nó desrespeitou o limite mínimo de pressão exigida para a rede. As pressões apresentadas no trabalho de [Kadu et al. \(2008\)](#) também não violaram as pressões mínimas. Entretanto, [Suribabu \(2012\)](#) e [Ezzeldin et al. \(2013\)](#) dizem que em [Kadu et al. \(2008\)](#) existe uma violação na pressão do nó 26. Desta forma, o resultado obtido neste trabalho é o melhor da literatura. As pressões em [Suribabu \(2012\)](#) e em [Ezzeldin et al. \(2013\)](#) não foram reportadas.

Tabela 28 – Resultado das pressões, em mca, otimizadas e comparação com outros trabalhos para a rede *two-source*

Nó	Kadu et al. (2008)	Haghighi et al. (2011)	Presente trabalho ¹	Presente trabalho ²
1		Reservatório		
2		Reservatório		
3	98,98	98,97	98,31	98,31
4	95,76	95,7	95,14	95,14
5	88,79	90,96	87,88	87,8
6	85,28	89,54	86,2	86,07
7	88,01	87,87	87,84	88,4
8	91,64	90,06	91,09	91,52
9	91,84	91,86	91,31	91,31
10	88,89	89,18	88,55	88,58
11	87,11	88,99	86,88	86,89
12	85,15	85,17	85,21	85,16
13	86,81	82,21	85,58	84,18
14	94,13	94,5	94,14	94,14

15	87,12	88,58	88,26	88,2
16	82,1	84,68	82,08	82,26
17	90,26	90,94	91,26	91,88
18	85,25	85,65	85,85	85,67
19	85,97	85,29	85,95	83,9
20	83,89	82,29	82,22	82,49
21	84,03	87,49	85,81	85,7
22	84,23	86,58	86,8	87,38
23	82,2	82,32	83,74	83,27
24	83,7	80,21	82,41	80,69
25	80,64	80,2	80,1	80,23
26	80,16	83,06	82,05	82,07

Pressão mínima ver Tabela 25

¹ Solução 1

² Solução 2

Fonte – Elaborada pelo autor

A Tabela 29 apresenta os métodos que alguns autores, encontrados na literatura, utilizaram para resolver o problema de otimização da rede de distribuição de água *two-source*.

Tabela 29 – Métodos na otimização utilizados para solução da rede *two-source*

Autores	Método
Kadu <i>et al.</i> (2008)	<i>Genetic Algorithm</i>
Haghighi <i>et al.</i> (2011)	<i>Genetic Algorithm</i>
Suribabu (2012)	<i>Heuristic-based approach</i>
Ezzeldin <i>et al.</i> (2013)	<i>Particle Swarm Optimization</i>
Presente trabalho	<i>Spatial Branch and Bound</i>

Fonte – Elaborada pelo autor

6 Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo para o projeto ótimo de RDA. Tomou-se como base um modelo recentemente publicado na literatura, em que o problema é formulado como de PNLDM. Por meio do uso de programação disjuntiva generalizada, o problema foi reformulado e um problema de PNLIM foi obtido.

Para todos os exemplos, a aplicabilidade do modelo foi feita no ambiente GAMS, por meio do *solver* SBB. Para a rede *Two-loop*, o resultado encontrado corresponde ao ótimo global para este problema, de acordo com a literatura.

Na rede principal na cidade de *Hanoi*, Vietnã, a solução obtida não é a melhor já encontrada na literatura. Entretanto os parâmetros utilizados na equação de Hazen-Williams são diferentes para os diferentes autores.

Para a rede do bairro do Bessa na cidade de João Pessoa, Paraíba, denominada R9, foi encontrada uma solução melhor que as existentes na literatura.

Na rede *two-source*, a solução obtida é a melhor já encontrada na literatura, supondo o erro do autor original para este exemplo.

A grande vantagem da formulação apresentada neste trabalho é que não necessita de nenhum software adicional para o cálculo das pressões e das velocidades, uma vez que o modelo de otimização tem a equação de Hazen-Williams como restrição.

As sugestões para trabalhos futuros são listadas a seguir:

1. Utilizar no modelo de otimização desenvolvido outra equação para o cálculo das perdas de carga.
2. Refazer o modelo utilizando programação disjuntiva generalizada a partir da formulação por envoltória convexa.
3. Modificar o modelo proposto para resolver problemas de redes de distribuição de água com funções multiobjetivo, envolvendo o custo da tubulação e o consumo de energia.
4. Estender a metodologia desenvolvida para a resolução de problemas de reabilitação de redes de distribuição de água.
5. Desenvolver modelos lineares para a otimização global, visando a linearização das equações de velocidade e de perdas de carga, para a solução de problemas de redes

de distribuição de água.

6. Acrescentar no modelo o tempo de uso de redes de distribuição de água.
7. Considerar como variável de otimização o sentido da vazão de cada trecho.

Referências

- ABBASS, H. A. **A monogenous MBO approach to satisfiability**. In: UNIVERSITY OF CANBERRA. *Proceeding of the international conference on computational intelligence for modelling, control and automation, CIMCA*. Australia, 2001. Citado na página 27.
- ABEBE, A.; SOLOMATINE, D. **Application of global optimization to the design of pipe networks**. *Proc. 3rd International Conference on Hydroinformatics, Copenhagen*, p. 989–996, 1998. Citado na página 26.
- ABES. **Controle e redução de perdas nos sistemas públicos de abastecimento de água**. *Posicionamento e Contribuição Técnicas da ABES*, 2015. Citado na página 15.
- ABNT, NBR12218. **12218–Projeto de rede de distribuição de água para abastecimento público**. *Associação Brasileira de normas Técnicas–ABNT*. Rio de Janeiro, 1994. Citado na página 34.
- ALPEROVITS, E.; SHAMIR, U. **Design of optimal water distribution systems**. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 13, n. 6, p. 885–900, 1977. Citado 5 vezes nas páginas 24, 56, 58, 59 e 60.
- BALAS, E. **Disjunctive programming and a hierarchy of relaxations for discrete optimization problems**. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, SIAM, v. 6, n. 3, p. 466–486, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- BEZERRA, S. d. T. M. **Sistema fuzzy para controle piezométrico de sistemas de distribuição de água visando à economia de água e energia**. *UFPB, João Pessoa. Tese de Doutorado*, 2009. Citado na página 20.
- BHAVE, P. R. **Optimization of gravity-fed water distribution systems: Application**. *Journal of Environmental Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 109, n. 2, p. 383–395, 1983. Citado na página 23.
- BHAVE, P. R. **Optimization of gravity-fed water distribution systems: Theory**. *Journal of Environmental Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 109, n. 1, p. 189–205, 1983. Citado na página 23.
- BI, W.; DANDY, G. C.; MAIER, H. R. **Improved genetic algorithm optimization of water distribution system design by incorporating domain knowledge**. *Environmental Modelling & Software*, Elsevier, v. 69, p. 370–381, 2015. Citado na página 27.
- BOLOGNESI, A. *et al.* **Genetic heritage evolution by stochastic transmission in the optimal design of water distribution networks**. *Advances in Engineering Software*, Elsevier, v. 41, n. 5, p. 792–801, 2010. Citado na página 28.
- BRAGALLI, C. *et al.* **Water network design by MINLP**. *Rep. No. RC24495, IBM Research, Yorktown Heights, NY*, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 25.

- CABALLERO, J. A. **Simulación y Optimización de los Procesos Químicos, Parte II, Optimización**. *Universidad de Alicante*, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 41, 43 e 50.
- COSTA, A. L.; MEDEIROS, J. L. de; PESSOA, F. L. **Global optimization of water distribution networks through a reduced space branch-and-bound search**. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 37, n. 4, p. 1083–1090, 2001. Citado na página 25.
- CULLINANE, M. J.; LANSEY, K. E.; MAYS, L. W. **Optimization-availability-based design of water-distribution networks**. *Journal of Hydraulic Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 118, n. 3, p. 420–441, 1992. Citado na página 25.
- CUNHA, M. d. C.; RIBEIRO, L. **Tabu search algorithms for water network optimization**. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 157, n. 3, p. 746–758, 2004. Citado na página 29.
- CUNHA, M. d. C.; SOUSA, J. **Water distribution network design optimization: simulated annealing approach**. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 125, n. 4, p. 215–221, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 28, 64, 65, 66 e 67.
- CURI, W. F.; FIRMINO, M. B. M. **Um método de dimensionamento ótimo de redes pressurizadas malhadas via programações não lineares e linear**. UFPB, 2004. Citado na página 24.
- D'AMBROSIO, C. *et al.* **Mathematical programming techniques in water network optimization**. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 243, n. 3, p. 774–788, 2014. Citado na página 25.
- DANDY, G. C.; SIMPSON, A. R.; MURPHY, L. J. **An improved genetic algorithm for pipe network optimization**. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 32, n. 2, p. 449–458, 1996. Citado na página 26.
- DE CORTE, A.; SÖRENSEN, K. **An iterated local search algorithm for water distribution network design optimization**. *Networks*, Wiley Online Library, v. 67, n. 3, p. 187–198, 2016. Citado na página 27.
- DORIGO, M.; MANIEZZO, V.; COLORNI, A. **Ant system: optimization by a colony of cooperating agents**. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, IEEE, v. 26, n. 1, p. 29–41, 1996. Citado na página 26.
- DUAN, Q.; SOROOSHIAN, S.; GUPTA, V. **Effective and efficient global optimization for conceptual rainfall-runoff models**. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 28, n. 4, p. 1015–1031, 1992. Citado na página 28.
- EBERHART, R.; KENNEDY, J. **A new optimizer using particle swarm theory**. *Micro Machine and Human Science, 1995. MHS'95., Proceedings of the Sixth International Symposium on*, IEEE, p. 39–43, 1995. Citado na página 27.
- EIGER, G.; SHAMIR, U.; BEN-TAL, A. **Optimal design of water distribution networks**. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 30, n. 9, p. 2637–2646, 1994. Citado na página 24.

- ESKANDAR, H. *et al.* **Water cycle algorithm—A novel metaheuristic optimization method for solving constrained engineering optimization problems.** *Computers & Structures*, Elsevier, v. 110, p. 151–166, 2012. Citado na página 29.
- EUSUFF, M. M.; LANSEY, K. E. **Optimization of water distribution network design using the shuffled frog leaping algorithm.** *Journal of Water Resources planning and management*, American Society of Civil Engineers, v. 129, n. 3, p. 210–225, 2003. Citado na página 28.
- EZZELDIN, R.; DJEBEDJIAN, B.; SAAFAN, T. **Integer discrete particle swarm optimization of water distribution networks.** *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, American Society of Civil Engineers, v. 5, n. 1, p. 04013013, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 27, 58, 77, 78, 79 e 80.
- FANNI, A. *et al.* **Optimization of water distribution systems by a tabu search metaheuristic.** *Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation*, Springer, p. 279–298, 2000. Citado na página 29.
- FUJIWARA, O.; KHANG, D. B. **A two-phase decomposition method for optimal design of looped water distribution networks.** *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 26, n. 4, p. 539–549, 1990. Citado 7 vezes nas páginas 24, 56, 60, 64, 65, 66 e 67.
- GAMS. *SBB*. 2018. (acessado em 31 de dezembro de 2018). Disponível em: <https://www.gams.com/latest/docs/S_SBB.html>. Citado na página 58.
- GEEM, Z. W. **Optimal cost design of water distribution networks using harmony search.** *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 38, n. 03, p. 259–277, 2006. Citado na página 27.
- GEEM, Z. W. **Harmony search optimisation to the pump-included water distribution network design.** *Civil Engineering and Environmental Systems*, Taylor & Francis, v. 26, n. 3, p. 211–221, 2009. Citado na página 27.
- GEEM, Z. W.; KIM, J. H.; LOGANATHAN, G. **Harmony search optimization: application to pipe network design.** *International Journal of Modelling and Simulation*, Taylor & Francis, v. 22, n. 2, p. 125–133, 2002. Citado na página 27.
- GEEM, Z. W.; KIM, J. H.; LOGANATHAN, G. V. **A new heuristic optimization algorithm: harmony search.** *Simulation*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 76, n. 2, p. 60–68, 2001. Citado na página 27.
- GOLDBERG, D. E.; KUO, C. H. **Genetic algorithms in pipeline optimization.** *Journal of Computing in Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 1, n. 2, p. 128–141, 1987. Citado na página 26.
- GOMES, H. P. *Sistemas de abastecimento de água: dimensionamento econômico e operação de redes e elevatórias*. Paraíba: Editora Universitária-UFPB, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.
- GOMES, H. P. *et al.* **Optimal dimensioning model of water distribution systems.** *Water Sa*, Water Research Commission (WRC), v. 35, n. 4, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 25, 56, 71, 72 e 74.

- GOMES, H. P.; FORMIGA, K. T. M. **PNL2000—Método prático de dimensionamento econômico de redes malhadas de abastecimento de água.** *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 6, n. 4, p. 1–108, 2001. Citado na página [25](#).
- GOULTER, I. C.; LUSSIER, B. M.; MORGAN, D. R. **Implications of head loss path choice in the optimization of water distribution networks.** *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 22, n. 5, p. 819–822, 1986. Citado 3 vezes nas páginas [24](#), [59](#) e [60](#).
- GROSSMANN, I. E.; LEE, S. **Generalized convex disjunctive programming: Non-linear convex hull relaxation.** *Computational optimization and applications*, Springer, v. 26, n. 1, p. 83–100, 2003. Citado na página [41](#).
- GROSSMANN, I. E.; RUIZ, J. P. **Generalized disjunctive programming: A framework for formulation and alternative algorithms for MINLP optimization.** In: *Mixed Integer Nonlinear Programming*. New York: Springer, 2012. p. 93–115. Citado 2 vezes nas páginas [40](#) e [47](#).
- GUPTA, I.; GUPTA, A.; KHANNA, P. **Genetic algorithm for optimization of water distribution systems.** *Environmental Modelling & Software*, Elsevier, v. 14, n. 5, p. 437–446, 1999. Citado na página [27](#).
- HAGHIGHI, A.; SAMANI, H. M.; SAMANI, Z. M. **GA-ILP method for optimization of water distribution networks.** *Water resources management*, Springer, v. 25, n. 7, p. 1791–1808, 2011. Citado 4 vezes nas páginas [27](#), [78](#), [79](#) e [80](#).
- HAMBERG, D. **Optimal location of pumping stations in a branching network.** *M. Sc. Thesis, Faculty of Civil Engineering, Technion-Israel Inst. of Tech*, 1974. Citado na página [24](#).
- HANSEN, C. T.; MADSEN, K.; NIELSEN, H. B. **Optimization of pipe networks.** *Mathematical Programming*, Springer, v. 52, n. 1-3, p. 45–58, 1991. Citado na página [23](#).
- HOOKE, J. N.; OSORIO, M. A. **Mixed logical-linear programming.** *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 96, p. 395–442, 1999. Citado na página [39](#).
- JACOBY, S. L. **Design of optimal hydraulic networks.** *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, v. 94, n. 3, p. 641–662, 1968. Citado na página [23](#).
- JAHANSHAH, G.; HADDAD, O. B. **Honey-bee mating optimization (HBMO) algorithm for optimal design of water distribution systems.** *World Environmental and Water Resources Congress 2008: Ahupua’A*, p. 1–16, 2008. Citado na página [27](#).
- KADU, M. S.; GUPTA, R.; BHAVE, P. R. **Optimal design of water networks using a modified genetic algorithm with reduction in search space.** *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 134, n. 2, p. 147–160, 2008. Citado 6 vezes nas páginas [27](#), [56](#), [74](#), [78](#), [79](#) e [80](#).
- KALLY, E. **Computerized planning of the least cost water distribution network.** *Water and Sewage Works*, v. 119, p. R–121, 1972. Citado na página [23](#).
- KARMELI, D.; GADISH, Y.; MEYERS, S. **Design of optimal water distribution networks.** *Journal of the Pipeline Division*, ASCE, v. 94, n. 1, p. 1–10, 1968. Citado na página [23](#).

- KESSLER, A.; SHAMIR, U. **Analysis of the linear programming gradient method for optimal design of water supply networks**. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 25, n. 7, p. 1469–1480, 1989. Citado na página 24.
- KHURANA, A.; SUNDARAMOORTHY, A.; KARIMI, I. **Improving mixed integer linear programming formulations**. In: AICHE CINCINNATI, OH. *Proc. of the AIChE Annual Meeting*. Singapore, 2005. Citado na página 40.
- KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. **Optimization by simulated annealing**. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. Citado na página 28.
- KOHLHASS, C.; MATTERN, D. E. **An algorithm for obtaining optimal looped pipe distribution networks**. 1971. Citado na página 23.
- KRAPIVKA, A.; OSTFELD, A. **Coupled genetic algorithm—linear programming scheme for least-cost pipe sizing of water-distribution systems**. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 135, n. 4, p. 298–302, 2009. Citado na página 27.
- LANSEY, K. E.; MAYS, L. W. **Optimization model for water distribution system design**. *Journal of Hydraulic Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 115, n. 10, p. 1401–1418, 1989. Citado na página 25.
- LASDON, L. S.; WARREN, A. D.; RATNER, M. S. **GRG2 user’s guide**. *Technical Memorandum*, University of Texas, 1984. Citado na página 25.
- LEE, S.; GROSSMANN, I. E. **New algorithms for nonlinear generalized disjunctive programming**. *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier, v. 24, n. 9-10, p. 2125–2141, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 40, 44, 45 e 47.
- LIONG, S.-Y.; ATIQUZZAMAN, M. **Optimal design of water distribution network using shuffled complex evolution**. *Journal of the institution of engineers, Singapore*, v. 44, n. 1, p. 93–107, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 28, 64, 65, 66 e 67.
- LOGANATHAN, G.; GREENE, J.; AHN, T. **Design heuristic for globally minimum cost water-distribution systems**. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 121, n. 2, p. 182–192, 1995. Citado na página 28.
- MAIER, H. R. *et al.* **Ant colony optimization for design of water distribution systems**. *Journal of water resources planning and management*, American Society of Civil Engineers, v. 129, n. 3, p. 200–209, 2003. Citado na página 26.
- MARCHIORI, I. N. *et al.* **Avaliação de funções de penalização para dimensionamento otimizado de redes de distribuição de água**. In: SEMNI. *Proc., Congress on Numerical Methods in Engineering*. Valence, Spain, 2017. p. 1627–1640. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- MAYS, L. W.; TUNG, Y. K. **Hydrosystems engineering and management**. Colorado: Water Resources Publication, 2002. Citado na página 30.

- MOHAN, S. a.; BABU, K. J. **Optimal water distribution network design with honey-bee mating optimization**. *Journal of Computing in Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 24, n. 1, p. 117–126, 2009. Citado na página 27.
- MONTALVO, I. *et al.* **Particle swarm optimization applied to the design of water supply systems**. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 56, n. 3, p. 769–776, 2008. Citado na página 27.
- MONTESINOS, P.; GARCIA-GUZMAN, A.; AYUSO, J. L. **Water distribution network optimization using a modified genetic algorithm**. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 35, n. 11, p. 3467–3473, 1999. Citado na página 26.
- MOOSAVIAN, N.; JAEFARZADEH, M. R. **Hydraulic analysis of water distribution network using shuffled complex evolution**. *Journal of Fluids*, Hindawi, 2014. Citado na página 28.
- MORSI, A.; GEISSLER, B.; MARTIN, A. **Mixed integer optimization of water supply networks**. *Mathematical optimization of water networks*, Springer, p. 35–54, 2012. Citado na página 25.
- MURPHY, L. J.; SIMPSON, A. R.; DANDY, G. C. **Pipe network optimization using an improved genetic algorithm**. Australia: Department of Civil and Environmental Engineering, University of Adelaide, 1993. Citado na página 26.
- NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. **Integer and Combinatorial Optimization**. *Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization*. New York: John Wiley & Sons, 1988. Citado na página 40.
- NETTO, A.; FERNÁNDEZ, M. F. y. **Manual de hidráulica**. São Paulo: Editora Blucher, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 36.
- PAEZ, D. *et al.* **Optimal design of water distribution systems with pressure driven demands**. *Procedia Engineering*, Elsevier, v. 89, p. 839–847, 2014. Citado na página 23.
- QI, X.; LI, K.; POTTER, W. D. **Estimation of distribution algorithm enhanced particle swarm optimization for water distribution network optimization**. *Frontiers of Environmental Science & Engineering*, Springer, v. 10, n. 2, p. 341–351, 2015. Citado na página 27.
- QUINDRY, G. E.; LIEBMAN, J. C.; BRILL, E. D. **Optimization of looped water distribution systems**. *Journal of the Environmental Engineering Division*, ASCE, v. 107, n. 4, p. 665–679, 1981. Citado na página 24.
- RAMAN, R.; GROSSMANN, I. E. **Relation between MILP modelling and logical inference for chemical process synthesis**. *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier, v. 15, n. 2, p. 73–84, 1991. Citado na página 45.
- RAMAN, R.; GROSSMANN, I. E. **Modelling and computational techniques for logic based integer programming**. *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier, v. 18, n. 7, p. 563–578, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

- RASMUSEN, H. J. **Simplified optimization of water supply system**. *Journal of the Environmental Engineering Division*, ASCE, v. 102, n. 2, p. 313–327, 1976. Citado na página 24.
- RECA, J.; MARTÍNEZ, J. **Genetic algorithms for the design of looped irrigation water distribution networks**. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 42, n. 5, 2006. Citado na página 27.
- RECA, J. *et al.* **Application of several meta-heuristic techniques to the optimization of real looped water distribution networks**. *Water Resources Management*, Springer, v. 22, n. 10, p. 1367–1379, 2007. Citado na página 29.
- SADOLLAH, A. *et al.* **Application of water cycle algorithm for optimal cost design of water distribution systems**. 2014. Citado na página 29.
- SARBU, I. **Optimal design of water distribution networks**. *Journal of Hydraulic research*, Taylor & Francis Group, v. 35, n. 1, p. 63–79, 1997. Citado na página 23.
- SAVIC, D. A.; WALTERS, G. A. **Genetic algorithms for least-cost design of water distribution networks**. *Journal of water resources planning and management*, American Society of Civil Engineers, v. 123, n. 2, p. 67–77, 1997. Citado 5 vezes nas páginas 26, 64, 65, 66 e 67.
- SAWAYA, N. W.; GROSSMANN, I. E. **Computational implementation of non-linear convex hull reformulation**. *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier, v. 31, n. 7, p. 856–866, 2007. Citado na página 49.
- SCHAAKE, J. C.; LAI, F. H. *Linear programming and dynamic programming application to water distribution network design*. Cambridge: MIT Hydrodynamics Laboratory, 1969. Citado na página 23.
- SHAMIR, U. **Optimal design and operation of water distribution systems**. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 10, n. 1, p. 27–36, 1974. Citado na página 25.
- SHAMIR, U. Y.; HOWARD, C. D. **Water distribution systems analysis**. *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, v. 94, n. 1, p. 219–234, 1968. Citado na página 23.
- SHERALI, H. D.; SMITH, E. P. **A global optimization approach to a water distribution network design problem**. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 11, n. 2, p. 107–132, 1997. Citado na página 25.
- SHERALI, H. D.; SUBRAMANIAN, S.; LOGANATHAN, G. **Effective relaxations and partitioning schemes for solving water distribution network design problems to global optimality**. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 19, n. 1, p. 1–26, 2001. Citado na página 25.
- SIMPSON, A. R.; GOLDBERG, D. E. **Pipeline optimization via genetic algorithms: From theory to practice**. *Water pipeline systems*, Mechanical Engineering Publication, London, p. 309–320, 1994. Citado na página 26.
- STORN, R.; PRICE, K. **Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces**. *Journal of global optimization*, Springer, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997. Citado na página 26.

- SU, Y. C. *et al.* **Reliability-based optimization model for water distribution systems.** *Journal of Hydraulic Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 113, n. 12, p. 1539–1556, 1987. Citado na página 25.
- SURCO, D. F.; VECCHI, T. P.; RAVAGNANI, M. A. **Optimization of water distribution networks using a modified particle swarm optimization algorithm.** *Water Science and Technology: Water Supply*, IWA Publishing, v. 18, n. 2, p. 660–678, 2017. Citado 12 vezes nas páginas 16, 17, 27, 59, 60, 64, 65, 66, 67, 71, 72 e 74.
- SURIBABU, C. **Heuristic-based pipe dimensioning model for water distribution networks.** *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, American Society of Civil Engineers, v. 3, n. 4, p. 115–124, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 28, 78, 79 e 80.
- SURIBABU, C.; NEELAKANTAN, T. **Design of water distribution networks using particle swarm optimization.** *Urban Water Journal*, Taylor & Francis, v. 3, n. 2, p. 111–120, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 27, 64, 66 e 67.
- SURIBABU, C.; NEELAKANTAN, T. **Optimal upgradation and expansion of existing water distribution networks using differential evolution algorithm.** *Asian Journal of Applied Sciences*, v. 7, n. 6, p. 375–390, 2014. Citado na página 26.
- TRESPALACIOS, F.; GROSSMANN, I. E. **Improved Big-M reformulation for generalized disjunctive programs.** *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier, v. 76, p. 98–103, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- TSUTIYA, M. T. **Abastecimento de água.** São Paulo: Departamento de Engenharia Hidráulica e Sanitária da Escola Politécnica da USP, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 21.
- VAIRAVAMOORTHY, K.; ALI, M. **Pipe index vector: A method to improve genetic-algorithm-based pipe optimization.** *Journal of Hydraulic Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 131, n. 12, p. 1117–1125, 2005. Citado na página 27.
- VAN DIJK, M.; VUUREN, S. J. van; ZYL, J. E. V. **Optimising water distribution systems using a weighted penalty in a genetic algorithm.** *Water SA*, Water Research Commission (WRC), v. 34, n. 5, p. 537–548, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 27.
- VASAN, A.; SIMONOVIC, S. P. **Optimization of water distribution network design using differential evolution.** *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 136, n. 2, p. 279–287, 2010. Citado na página 26.
- WATANATADA, T. **Least-cost design of water distribution systems.** *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, v. 99, n. 9, p. 1497–1513, 1973. Citado na página 24.
- WILLIAMS, H. **Mathematical building in mathematical programming.** London: John Wiley, Chichester, 1985. Citado na página 45.
- XU, C.; GOULTER, I. C. **Optimal design of water distribution networks using fuzzy optimization.** *CIVIL ENGINEERING SYSTEMS*, Taylor & Francis, v. 16, n. 4, p. 243–266, 1999. Citado na página 28.

- XU, C.; GOULTER, I. C. **Reliability-based optimal design of water distribution networks.** *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 125, n. 6, p. 352–362, 1999. Citado na página 24.
- ZECCHIN, A. C. *et al.* **Max-min ant system applied to water distribution system optimization.** *Proc. Int. Congr. Modeling Simulation (MODSIM)*, v. 2, p. 795–800, 2003. Citado na página 26.
- ZECCHIN, A. C. *et al.* **Application of two ant colony optimization algorithms to water distribution system optimisation.** *Mathematical and computer modelling*, Elsevier, v. 44, n. 5-6, p. 451–468, 2006. Citado na página 26.
- ZHENG, F.; SIMPSON, A. R.; ZECCHIN, A. C. **A combined NLP-differential evolution algorithm approach for the optimization of looped water distribution systems.** *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 47, n. 8, 2011. Citado na página 26.
- ZHENG, F.; SIMPSON, A. R.; ZECCHIN, A. C. **A decomposition and multistage optimization approach applied to the optimization of water distribution systems with multiple supply sources.** *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 49, n. 1, p. 380–399, 2013. Citado na página 27.
- ZHOU, X.; GAO, D. Y.; SIMPSON, A. R. **Optimal design of water distribution networks by a discrete state transition algorithm.** *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 48, n. 4, p. 603–628, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 28, 59 e 60.
- ZHOU, X.; YANG, C.; GUI, W. **Initial version of state transition algorithm.** In: IEEE. *Digital Manufacturing and Automation (ICDMA), Second International Conference on*. Piscataway, NJ, 2011. p. 644–647. Citado na página 28.