

Luciane Grazielli Lopes Vercezi

# **Número $\pi$ , Funções Trigonométricas e Aplicações.**

Maringá-PR, Brasil

24/08/2021

Luciane Grazielli Lopes Vercezi

## **Número $\pi$ , Funções Trigonométricas e Aplicações.**

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Maringá - UEM, como requisito parcial para a obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Universidade Estadual de Maringá – UEM

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani

Maringá-PR, Brasil

24/08/2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)**

V481n Vercezi, Luciane Grazielli Lopes  
Número  $\pi$ , funções trigonométricas e aplicações /  
Luciane Grazielli Lopes Vercezi. -- Maringá, 2021.  
91 f. : il., fotos color.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática, 2021.

1. Número  $\pi$ . 2. Trigonometria. 3. Funções  
trigonométricas. I. Castelani, Emerson Vitor, orient.  
II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de  
Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 516.24

Edilson Damasio CRB9-1.123

**LUCIANE GRAZIELLI LOPES VERCEZI**

**NÚMERO II, FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

**COMISSÃO JULGADORA:**



Prof. Dr. Emerson Vitor Casteiani  
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Prof. Dr. Valter Soares de Camargo  
UNESPAR - Universidade Estadual do Paraná (Paranavaí)



Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi  
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 24 de agosto de 2021

Local de defesa: Videoconferência pelo link <https://meet.google.com/nso-ntaz-hgd>

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,  
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

*Às minhas filhas Analu e Aila.*

# Agradecimentos

Primeiramente à Deus por proporcionar a minha vida, me presentear com a minha família que tanto amo, e que em tantas horas foi o acalento de minhas angústias.

À minha família que sempre de uma forma ou de outra estiveram do meu lado, minhas filhas Analu Lopes Vercezi e Aila Lopes Vercezi, pelo apoio e “compreensão” nas minhas ausências de sexta e sábado no período que elas tanto precisavam, meu esposo Varlei Vercezi que sempre esteve do meu lado, apoiando, auxiliando nos cuidados com nossas filhas e acima de tudo me incentivou. E também aos meus pais Vera Lúcia Raimundo Lopes e Raimundo Pimenta Lopes e minha sogra Esmilde Dala Pola Vercezi que sempre estavam prestativos em colaborar e cooperar conosco durante estes últimos anos.

Aos meus colegas de turma, em especial, Renata Burgueti e Cléder Marinho, pelos momentos vividos juntos, nosso companheirismo nos estudos intensivos nos sábados e a força de um para o outro.

Aos professores do Programa de mestrado Profmat- UEM que fizeram parte desta jornada de estudos, por estarem sempre prontos em nos ajudar e pelo incentivo em muitas horas, em especial ao meu professor e orientador Emerson Vitor Castelani, por estar sempre comprometido em me auxiliar e em meio a estes últimos anos, estava a medida do possível através das reuniões online mantendo o vínculo professor-aluno que tanto me fez bem.

À todas as outras pessoas que contribuíram de uma forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

*“Comece fazendo o necessário,  
depois o que é possível,  
em breve estarás fazendo o impossível”.*  
*(São Francisco de Assis)*

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos um material auto contido que apresenta uma revisão sobre o número  $\pi$  e funções correlatas. Buscamos envolver o leitor de uma forma que traga a ele a clareza do conhecimento do número  $\pi$  e a relação deste número com a trigonometria e com as funções trigonométricas.

Essencialmente, abordamos o número  $\pi$  do ponto de vista histórico, no qual relatamos a evolução do conhecimento nas civilizações desde a antiguidade até hoje. Fazemos uma “ponte” entre a trigonometria e as funções trigonométricas. Também tratamos de aplicações com o intuito de esclarecer a utilização do número  $\pi$  de diversas formas, podendo ser estas relacionadas ao ambiente escolar ou em outras áreas, tais como, processamento de imagem digital, compressão JPG, reconhecimento facial e outras.

Por fim, expomos algumas atividades didáticas que podem contribuir para a elaboração de planos de aula, sendo estas, ferramentas para esclarecer/apresentar o conteúdo relacionado a  $\pi$  de forma que faça sentido ao aluno o que aprendeu.

**Palavras-chave:** Número  $\pi$ ; Trigonometria; Funções Trigonométricas.

# Abstract

In this work, we present a self-contained text that presents a review of the number  $\pi$  and related functions. We intent to involve the reader in a way that brings to it the clarity of knowledge about the number  $\pi$  and the relation of this number with trigonometry and with trigonometric functions.

Essentially, our approach starts with a historical point of view related to number  $\pi$ , in which we report the evolution of knowledge in civilizations from antiquity to today. We make a “bridge” between trigonometry and trigonometric functions. We also deal with applications in order to clarify the use of the number  $\pi$  in different ways, which may be related to the school environment or in other areas, such as digital image processing, JPG compression, facial recognition and others.

Finally, we expose some didactic activities that can contribute to the elaboration of lesson plans, which are tools to clarify/present the content related to  $\pi$  in a way that makes sense to the student about the content learned.

**Keywords:** Number  $\pi$ ; Trigonometry; Trigonometric Functions.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Uma parte do Papiro de Rhind (Museum Britânico). <i>Fonte:(EVES, 2004),pg.74</i> . . . . .	24
Figura 2 – Área do círculo delimitado pelo octógono. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	24
Figura 3 – Tableta de Plimpton 322. <i>Fonte:(EVES, 2004), pg. 65.</i> . . . . .	26
Figura 4 – Imagem de Leonhard Euler. <i>Fonte:(EVES, 2004), pg.472.</i> . . . . .	27
Figura 5 – Imagem de Johann H. Lambert. <i>Fonte:(EVES, 2004), pg. 479.</i> . . . . .	27
Figura 6 – Triângulo Retângulo ABC. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	52
Figura 7 – Altura de um triângulo ABC qualquer. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	53
Figura 8 – Função $E(\pi + t) = (-x, -y)$ . <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	54
Figura 9 – Função $E(\pi - t) = (-x, y)$ . <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	55
Figura 10 – Função $E(-t) = (x, -y)$ . <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	55
Figura 11 – Função $E(\frac{\pi}{2} + t) = (-y, x)$ . <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	56
Figura 12 – Função $E(\frac{\pi}{2} - t) = (y, x)$ . <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	56
Figura 13 – Arcos Notáveis. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	58
Figura 14 – Operações sobre arcos. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	59
Figura 15 – Paisagem usada para ilustrar o funcionamento da compressão JPEG. <i>Fonte: (GALIAN, 2020)</i> . . . . .	67
Figura 16 – Tabela dos resultados após aplicação da Figura 15. <i>Fonte:(GALIAN, 2020)</i> . . . . .	67
Figura 17 – Imagem do resultado da matriz de quantização 1. <i>Fonte: (GALIAN, 2020).</i> . . . . .	68
Figura 18 – Imagem do resultado da matriz de quantização 2. <i>Fonte: (GALIAN, 2020).</i> . . . . .	68
Figura 19 – Imagem do resultado da matriz de quantização 3. <i>Fonte: (GALIAN, 2020).</i> . . . . .	69
Figura 20 – Imagem do resultado da matriz de quantização 4. <i>Fonte: (GALIAN, 2020).</i> . . . . .	69
Figura 21 – Passo 1- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	76
Figura 22 – Passo 2- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	77
Figura 23 – Passo 3- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	77
Figura 24 – Passo 4- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	78

Figura 25 – Passo 5- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	78
Figura 26 – Passo 6- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	79
Figura 27 – Passo 7- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	79
Figura 28 – Passo 8- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	80
Figura 29 – Passo 9- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	80
Figura 30 – Passo 10- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	81
Figura 31 – Passo 11- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	81
Figura 32 – Passo 12- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	82
Figura 33 – Passo 13- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	82
Figura 34 – Passo 14- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	83
Figura 35 – Passo 15- Captura de tela da página < <a href="https://www.geogebra.org/">https://www.geogebra.org/</a> >.	
<i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	83
Figura 36 – Construção do material. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	84
Figura 37 – Construção do material. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	85
Figura 38 – Construção do material. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	85
Figura 39 – Construção do material. <i>Fonte: Própria autoria.</i> . . . . .	86

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>HISTÓRIA DO NÚMERO <math>\pi</math></b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2.1</b>	<b>Uma breve descrição do número <math>\pi</math> na antiguidade.</b> . . . . .	<b>23</b>
2.1.1	Papiro de Rhind e as Tábuas Babilônicas . . . . .	23
2.1.2	Quadratura do Círculo e o Método de Exaustão . . . . .	25
2.1.3	Cronologia do estudo do número $\pi$ . . . . .	26
<b>2.2</b>	<b>Propriedades do número <math>\pi</math></b> . . . . .	<b>29</b>
2.2.1	A irracionalidade do número $\pi$ . . . . .	29
2.2.2	A transcendência do número $\pi$ . . . . .	33
<b>3</b>	<b>FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>3.1</b>	<b>Da origem da trigonometria às funções trigonométricas.</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>Operações e propriedades das funções trigonométricas.</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES DO NÚMERO <math>\pi</math></b> . . . . .	<b>63</b>
<b>4.1</b>	<b>Avançadas</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>4.2</b>	<b>Elementares</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>87</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>89</b>

# 1 Introdução

Quando nos deparamos com algo relacionado ao número  $\pi$ , logo o pensamento relaciona com a trigonometria e, por consequência, com situações difíceis de serem resolvidas. É deste modo que certos conteúdos e até mesmo a disciplina de matemática são vistos pela maioria das pessoas.

Enquanto objeto de aprendizagem, a matemática é comumente considerada como a mais abstrata, racional e descontextualizada das disciplinas. Como consequência, a ela é atribuída a responsabilidade pela exclusão escolar, ilustrada nos índices de evasão e repetência, contrapondo-se ao seu sentido mais amplo, no qual é entendida como atividade humana, considerada um corpo de conhecimentos que responde a problemas práticos e teóricos propostos pela humanidade ao longo da história, com diversas ferramentas conceituais e operacionais criadas para tal fim. ((CARVALHO; EFMP; FERNANDES, 2011), pg 2).

O pré julgamento da matemática e de certas situações relacionadas ao número  $\pi$  e a trigonometria, pode estar associado a pouca ênfase que a geometria (plana e espacial) tem ganho no ensino escolar ao longo dos anos. Alguns autores relatam a relação dos professores com esta disciplina, como (CALDATTO; PAVANELLO, 2015) cita que as causas que levam o baixo ensino da geometria não deve-se somente a postura do professor diante este conteúdo, deve-se também ao fato que as escolas possuíam certa liberdade para escolher os próprios programas de ensino, e muitas vezes a geometria poderia ser abandonada ou até mesmo adiada para o final do ano letivo. Já para (GAZIRE et al., 2000) apud (CALDATTO; PAVANELLO, 2015), existem motivos que impedem o resgate da geometria no ensino, sendo alguns deles: os professores são vítimas de um ciclo vicioso, onde não aprenderam geometria, logo não ensinarão geometria; possuem dificuldades em romper com os métodos tradicionais da aula expositiva; de certo modo relacionam a geometria com a álgebra e cálculos; entre outros.

Assim como a matemática, a geometria tem desenvolvido papel importante ao longo da história da humanidade. Desde séculos antes de Cristo até os dias de hoje, buscando soluções para vários problemas importantes no contexto prático. Segundo (EVES, 2004), desde o ano 1650 a.C já encontrava-se vestígios que o homem possuía intuitivamente o conceito do número  $\pi$  em problemas no Papiro de Rhind.

Analisando a obra de (CALDATTO; PAVANELLO, 2015), podemos perceber como o ensino da matemática foi tratado no Brasil desde a colonização. As autoras relatam a forma como os jesuítas trabalhavam restringindo a matemática somente ao ensino da aritmética, posteriormente, surgiram as chamadas aulas régias, as quais introduziram o ensino da álgebra e da geometria. Quando houve interesse em criar uma formação militar,

a geometria passa a ser usada como base desta formação, onde era dividida em: geometria especulativa e prática. As obras utilizadas nesta época não traziam as noções de área e volume.

A matemática escolar começa a ganhar uma organização no momento histórico em que a família real de Portugal chega ao Brasil. Neste período são criadas a Academia Real Militar e a Academia Real dos Guardas Militares, onde a trigonometria ganha lugar no ensino da matemática em ambas as academias. Após, este período movimentos em prol do ensino da matemática são formados, sendo estes nacionais e internacionais. Estes movimentos recomendavam que a metodologia utilizada para abordar o conteúdo de geometria fosse de caráter intuitivo e experimental.

os professores em geral já possuíam dificuldades em trabalhar geometria a partir de uma abordagem tradicional, a situação ficou mais crítica quando foram solicitados a trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, um assunto que não dominavam por não ter sido tratado em seus cursos de formação. Assim, o ensino de geometria não se concretizou sob o enfoque das transformações e passou a não ser realizado em sala de aula nem a partir de sua abordagem tradicional. ((CALDATTO; PAVANELLO, 2015), pg.120).

Ao longo deste trabalho, buscamos resgatar a história do número  $\pi$  e também o desenvolvimento da trigonometria até às funções trigonométricas, através de autores que estudaram a história da matemática, tais como: (EVES, 2004), (COSTA, 2003), (BOYER, 1974), (STRUIK, 1992). Também, apresentamos aplicações do uso das funções trigonométricas e do número  $\pi$ , utilizando obras consagradas, como por exemplo, (LIMA, 2013), (LIMA et al., 1997), (NASCIMENTO, 2001), (PUPIN; SILVA, 2011), (GALIAN, 2020) e documentos oficiais como (MEC, 2018).

Este trabalho tem por finalidade preencher algumas lacunas, tais como, o apanhado histórico e a contextualização de definições existentes na tríade: número  $\pi$ , funções trigonométricas e aplicações. Desta forma, tornando o material em mãos um produto auto contido, onde o leitor possa ter em seu alcance um material único que abrange estes quesitos.

Destacamos que existem outros trabalhos que tratam da história da trigonometria, dentre eles, (SILVA, 2019), (OLIVEIRA, 2010) e (REIS, 2016). Outros que tratam das funções trigonométricas são: (SOUSA, 2017), (CARVALHO et al., 2020) e das aplicações do número  $\pi$  são: (ROVERAN, 2017) e (PERES, 2003).

O presente trabalho foi organizado da seguinte maneira. O Capítulo 1 foi subdividido em duas seções: na 1ª seção, resgatamos a história do número  $\pi$ , onde destacamos o Papiro de Rhind, as tábuas de argila dos povos babilônicos, o problema da quadratura do círculo, o método de exaustão de Arquimedes e apresentamos a cronologia de estudos do número  $\pi$ . Na 2ª seção, são destacadas as propriedades do número  $\pi$  e realizamos a demonstração de sua irracionalidade e transcendência.

No Capítulo 2, fazemos o estudo da origem da trigonometria até as funções

trigonométricas, onde são destacados os trabalhos dos matemáticos que foram relevantes na história e evolução da trigonometria, entre eles: Thales, Pitágoras, Euclides, Eratóstenes, Fibonacci, Viète, Euler e outros.

Ainda destacamos as operações e propriedades das funções trigonométricas, detalhando a relação com a circunferência e mostrando suas propriedades, com a intencionalidade de justificar as fórmulas de tais funções.

No Capítulo 3, apresentamos as aplicações do número  $\pi$ , sendo divididas em: avançadas e elementares. As avançadas são aplicações destinadas à professores e/ou estudantes universitários, que queiram aprofundar seus estudos. Por outro lado, as elementares destinam-se a professores que buscam por atividades para auxiliá-los na aplicação do conteúdo, ou até mesmo, à alunos dos anos finais do ensino fundamental que buscam por atividades extras.

## 2 História do número $\pi$

### 2.1 Uma breve descrição do número $\pi$ na antiguidade.

Compreender o surgimento e as aplicações do número  $\pi$ , é algo que instiga o pensamento das pessoas em compreender a evolução da mente humana em busca de novos conhecimentos. Segundo (EVES, 2004), aproximadamente desde o ano de 1650 a.C encontram-se vestígios que o homem já possuía intuitivamente o conceito do número  $\pi$ , encontrado em problemas no Papiro de Rhind. Posteriormente no ano 300 a.C, os gregos também buscam a solução do problema Quadratura do Círculo, que só consegue uma solução precisa séculos mais tarde.

#### 2.1.1 Papiro de Rhind e as Tábuas Babilônicas

Com a crescente evolução da espécie humana, era necessário os registros de seus conhecimentos e de suas conquistas, com esta finalidade cada povo desenvolvia seu próprio material de registro. Dentre os materiais podemos destacar segundo (EVES, 2004) o pergaminho, o tabuleiro de areia, a tábua de argila, o papiro e etc. O papiro foi um material utilizado pelos egípcios, sua confecção era feita a partir de juncos onde realizavam vários processos manuais até chegar ao produto final, que apresentava a aparência de papel. Para (BOYER, 1974, p.9) “Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios”. Muitos destes papiros eram de natureza matemática, que continham problemas e descrição de métodos utilizados por ele. O mais conhecido por conter 85 problemas, é o Papiro de Rhind. Ver Figura. 1

Segundo (STRUIK, 1992), o Papiro de Rhind recebeu este nome pelo fato de um banqueiro e antiquário escocês A. Henry Rhind ter adquirido o papiro por volta de 1858 em Luxor, no Nilo. Anos depois o Museu Britânico o adquiriu, “O Papiro de Rhind foi publicado em 1927. Tem cerca de 18 pés de comprimento por cerca de treze polegadas de altura. Porém, quando o papiro chegou ao Museu Britânico ele era menor, formado de duas partes e faltava-lhe a porção central” ((EVES, 2004), pg 70). O Papiro de Rhind também é conhecido como Papiro de Ahmes, pelo fato do escriba Ahmes ter copiado ele de outro documento de cerca de 200 anos mais antigo, diante disso é estimado que os problemas contidos nele sejam de mais ou menos 1800 a.C.

Segundo (VIEIRA, 2017), um dos problemas que estão no Papiro consiste em aproximar a área de um círculo por um octógono inscrito em um quadrado de lado de medida 9 unidades de comprimento. Assim, cada lado do quadrado é dividido em três partes iguais e os triângulos formados nos cantos são retirados, onde por sua vez é formado

um octógono regular de 3 unidades de medida em seus lados. Ver Figura. 2



Figura 1 – Uma parte do Papiro de Rhind (Museum Britânico). Fonte: (EVES, 2004), pg. 74

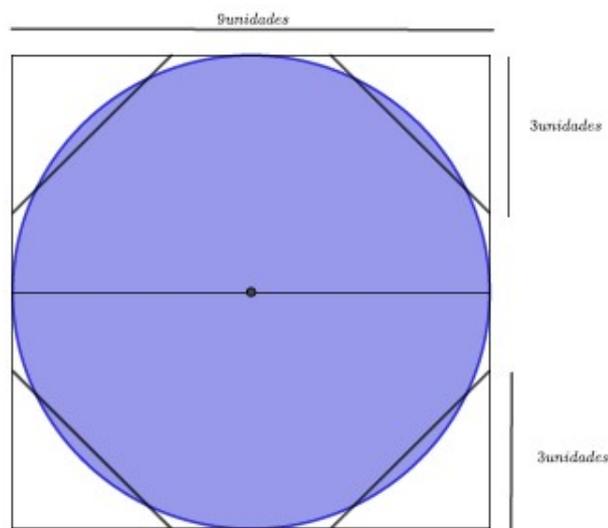


Figura 2 – Área do círculo delimitado pelo octógono. Fonte: Própria autoria.

Fazendo uso de nosso conhecimento, podemos determinar a área do octógono como:

$$A_o = A_q - 4A_t, \tag{2.1}$$

$$A_o = 9^2 - 4 \left( \frac{3 \cdot 3}{2} \right), \tag{2.2}$$

$$A_o = 81 - 18, \tag{2.3}$$

$$A_o = 63. \tag{2.4}$$

Consideremos então a área do octógono como sendo de aproximadamente 64 unidades e assim como a área do círculo. E a partir deste valor podemos fazer uma aproximação para

$\pi$ , isto é:

$$Ac = \pi \cdot r^2, \quad (2.5)$$

$$64 \approx \pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2, \quad (2.6)$$

$$64 \approx \frac{81}{4}\pi, \quad (2.7)$$

$$\pi \approx \frac{256}{81}, \quad (2.8)$$

$$\pi \approx 3.16049383. \quad (2.9)$$

Há ainda outro problema contido no Papiro que está relacionado com a área de círculo. Segundo (BOYER, 1974), consiste em mostrar que a área de um campo circular de 9 unidades de diâmetro seja igual a área de um quadrado de 8 unidades de lado. O conhecimento que os egípcios detinham, infelizmente não foi registrado de maneira formal, talvez por não conhecerem a maneira de formalizar ou até mesmo por agirem de modo intuitivo.

Não se conhece teorema ou demonstração formal na matemática egípcia, mas algumas comparações geométricas feitas no vale do Nilo, como essas sobre perímetros e áreas de círculos e quadrados, estão entre as primeiras afirmações precisas da história, referentes a figuras curvilíneas (BOYER, 1974),pg 13)

Os babilônios, povos que detinham de um conhecimento matemático de destaque por volta de 1800 a.C, faziam seus registros em tábuas de argila, conhecidas como tabletas Figura. 3. A geometria que eles conheciam não tinha este sentido matemático que existe nos dias de hoje. Para eles era uma aplicação de álgebra ou aritmética em figuras. Assim como os papiros estas tabletas foram descobertas anos depois, mostrando importantes resultados matemáticos conforme destacado em (BOYER, 1974):

Em 1936 um grupo de tabletas matemáticas foi desenterrado em Susa, a uns trezentos quilômetros da Babilônia, e essas incluem resultados geométricos significativos, o escriba dá 0;57,36 como razão entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito; e disso podemos concluir imediatamente que o escriba babilônio tinha tomado  $3;7,30$  ou  $3\frac{1}{8}$  como aproximação para  $\pi$ .

### 2.1.2 Quadratura do Círculo e o Método de Exaustão

De acordo com (STRUICK, 1992), por volta de 430 a.C formava em Atenas na Grécia, uma nova e fascinante civilização, no qual filósofos e professores apresentavam em suas teorias uma nova matemática, onde abordavam os problemas matemáticos como sendo parte de uma investigação filosófica do mundo natural e moral, onde a matemática desenvolvida atribuía mais destaque no âmbito da compreensão do que da utilidade.



Figura 3 – Tableta de Plimpton 322. Fonte:(EVES, 2004), pg. 65.

Foi o filósofo jônico Hipócrates de Quios que apresentou em documentos um assunto curioso sobre o estudo das chamadas *lunulae* (pequenas luas), no qual buscava determinar áreas delimitadas por dois arcos circulares, e assim fazendo uma ligação com um dos famosos problemas de matemática da antiguidade: A quadratura do círculo. Em seu estudo Hipócrates investigou áreas de figuras planas que eram delimitadas por arcos circulares ou por linhas retas.

Para (VIEIRA, 2017), a matemática que os gregos possuíam naqueles tempos não era suficiente para resolver o problema da quadratura do círculo, que consistia em: dado um círculo, seria possível construir um quadrado com área igual à desse círculo? Segundo (EVES, 2004), em 240 a.C Arquimedes, matemático renomado, buscava a resolução do problema da quadratura do círculo, ele queria limitar o comprimento da circunferência do círculo de raio unitário que estava situado entre os perímetros de dois polígonos regulares (inscrito e circunscrito). E assim fazendo aplicações sucessivas deste processo para polígonos de doze, vinte e quatro, quarenta e oito e noventa e seis lados, conhecido como Método de Exaustão, ele pôde concluir que  $\pi$  encontrava-se entre  $\frac{223}{71}$  e  $\frac{22}{7}$ , isto é,  $3,1408 < \pi < 3,1428$  sendo considerado o valor de 3,14.

### 2.1.3 Cronologia do estudo do número $\pi$

Como podemos perceber a determinação para o valor do número  $\pi$  foi desde os séculos XVIII antes de Cristo, motivo de estudos para alguns povos. O registro de estudo de modo científico só ocorreu a partir de Arquimedes de Siracusa. Assim será feita uma cronologia dos estudos do número  $\pi$  desde Arquimedes até os resultados recentes, com

base nos dados contidos em (EVES, 2004) e (VIEIRA, 2017). Há ainda estudos sobre o número  $\pi$  que não determinaram valores para ele, porém determinaram a aceitação do símbolo  $\pi$  e algumas propriedades, ver Tabela 1.



Figura 4 – Imagem de Leonhard Euler. Fonte:(EVES, 2004), pg.472.



Figura 5 – Imagem de Johann H. Lambert. Fonte:(EVES, 2004), pg. 479.

Quem determinou	Ano	Método utilizado	Valor de $\pi$
Arquimedes de Siracusa	240 a.C	método de exaustão	3,14
Claudio Ptolomeu	150 d.C	tábua de cordas	3,1416
Tsu Ch'ung-Chin	480		3,1415929
Aryabhata	530	cálculo do perímetro do polígono regular de 384 lados	3,1416
Al-Kashi	1429	método clássico	até a 16ª casa decimal
François Viete	1579	método clássico usando polígonos de 393 216 lados	até a 9ª casa decimal
Adriaen Van Roomen	1593	método clássico polígonos de $2^{30}$ lados	até a 15ª casa decimal
Ludolph Van Ceulen	1610	método clássico polígonos de $2^{62}$ lados	até a 35ª casa decimal
Willebrord Snell	1621	aperfeiçoamento trigonométrico do método clássico de polígonos de $2^{30}$ lados	até a 35ª casa decimal
Grienberger	1630	usando o refinamento de Snell	até a 39ª casa decimal
Abraham Sharp	1699	usando séries de Gregory para $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$	até a 71ª casa decimal
John Machin	1706	usando a série de Gregory juntamente com $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$	até a 100ª casa decimal
De Lagnhy	1719	usando a série de Gregory para $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$	até a 112ª casa decimal
Leonhard Euler (Fig.4)	1737	o reconhecimento do símbolo $\pi$	
Johann Heinrich Lambert (Fig.5)	1767	prova que $\pi$ é irracional	
Adrien Marie Legendre	1794	mostra que $\pi^2$ é irracional	
William Rutherford	1841	usando a série de Gregory juntamente com $\frac{\pi}{4} = 4\arctg(\frac{1}{5}) - \arctg(\frac{1}{70}) + \arctg(\frac{1}{99})$	até a 152ª casa decimal
Zacharias Dase	1844	série de Gregory juntamente com $\frac{\pi}{4} = \arctg(\frac{1}{2}) + \arctg(\frac{1}{5}) + \arctg(\frac{1}{8})$	até 200ª casa decimal
William Rutherford	1853	usando o mesmo problema	até 400ª casa decimal
...	...	...	...

William Shanks	1873	usando fórmula de Machin	até 707 <sup>a</sup> casa decimal
Lindemann	1882	provou que $\pi$ é transcendente, isto é não é raiz de nenhum polinômio não-nulo de coeficientes racionais	
Ferguson e Wrench	1948	fórmula de Machin juntamente com $\frac{\pi}{4} = 3\arctg(\frac{1}{4}) + \arctg(\frac{1}{20}) + \arctg(\frac{1}{1985})$	até 808 <sup>a</sup> casa decimal
ENIAC (computador eletrônico)	1949		com 2 037 casas
François Genuys	1959	usando um IBM 704	com 16 167 casas
Wrench e Daniel Shanks	1961	usando um IBM 7090	com 100 625 casas
Jean Guilloud e seus colaboradores	1966	usando um computador STRETCH	com 250 000 casas
Jean Guilloud e seus colaboradores	1967	usando CDC 6600	com 500 000 casas
Jean Guilloud e seus colaboradores	1973	usando CDC 7600	com 1 000 000 casas
Miyoshi e Nakayama	1981	usando Facom M-200	com 2 000 038 algarismos
D.H.Bailey	1986	usando o computador Cray-2	com 29 360 000 algarismos
Yasumasa Kanada	1986	usando Nec SX-2	com 137 217 700 algarismos
Gregory e David Chudnovsky	1989	usando IBM-3090	1 bilhão de casas
Yasumasa Kanada	2002	usando Hitachi SR-8000	1 trilhão de casas
Daisuke Takahashi	2009		2,5 trilhões de casas
Shigeru Kondo	2010		5 trilhões de casas
Peter Trueb	2016		22 trilhões de casas

Tabela 1 – Cronologia do número  $\pi$ . *Fonte: Própria autoria.*

## 2.2 Propriedades do número $\pi$

### 2.2.1 A irracionalidade do número $\pi$

Um número é considerado irracional, quando não conseguimos representá-lo por meio de uma divisão de dois números inteiros  $\frac{a}{b}$ , onde  $b \neq 0$ . Segundo (EVES, 2004), Johann Heinrich Lambert Figura. 5, foi o primeiro a provar que  $\pi$  é irracional em 1767.

Para darmos início a demonstração da irracionalidade de  $\pi$  é preciso considerar os seguintes lemas.

**Lema 1.** *Seja  $f$  dada por  $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ , então  $D^k f(0)$  é um número inteiro para qualquer  $k=0,1,2,\dots$ , onde  $D^k f$  representa a  $k$ -ésima derivada de  $f$  e  $D^0 f = f$ .*

*Demonstração.* Para darmos início a demonstração é necessário usar a fórmula para derivada do produto de duas funções  $f$  e  $g$ . Assim:

$$D^k (f \cdot g) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j f \cdot D^{k-j} g. \quad (2.10)$$

A demonstração da fórmula (2.10) segundo (OLIVEIRA, 2015) pode ser realizada pelo método de indução sobre  $k$ , pois nesta fórmula  $\binom{k}{j}$  representa um coeficiente do Binômio de Newton, isto é,

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)!j!}.$$

Quando fazemos a aplicação de (2.10) à função  $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ , temos:

$$D^k (f) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^j x^n \cdot D^{k-j} (1-x)^n. \quad (2.11)$$

E quando calculamos  $D^j x^n$  no ponto  $x = 0$ , podemos observar que:

$$D^j x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } j < n. \\ n! & \text{se } j = n. \\ 0 & \text{se } j > n. \end{cases}$$

Assim,

$$D^k f(0) = 0 \text{ se } k < n, \quad (2.12)$$

e

$$D^k (f(0)) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! D^{k-n} (1-x)^n, \text{ se } k \geq n. \quad (2.13)$$

Como os coeficientes binomiais são inteiros, temos que o segundo membro da igualdade (2.13) é um número inteiro. Deste modo, de (2.12) e (2.13), demonstramos o resultado.  $\square$

**Lema 2.** *Seja  $f$  dada por  $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ , então  $D^k f(1)$  é um número inteiro para qualquer  $k=0,1,2,\dots$ , onde  $D^k f$  representa a  $k$ -ésima derivada de  $f$  e  $D^0 f = f$ .*

*Demonstração.* A demonstração deste lema segue do Lema 1. Observe que:

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!},$$

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^n(x)^n}{n!}.$$

Assim,

$$f(1-x) = f(x),$$

e para  $x = 0$ , temos

$$f(1-0) = f(0),$$

$$f(1) = f(0).$$

Como  $f(1) = f(0)$  e pelo Lema 1  $D^k f(0)$  é um número inteiro, temos o resultado.  $\square$

**Teorema 3.** *O número  $\pi$  é irracional.*

*Demonstração.* Esta demonstração será feita por contradição. Assim, suponhamos que  $\pi^2$  seja racional, ou seja,  $\pi^2 = \frac{a}{b}$ , com  $b \neq 0$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ .

Consideremos a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$F(x) = b^n[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + \pi^{2n-4} D^4 f(x) - \dots + (-1)^n D^{2n} f(x)], \quad (2.14)$$

onde

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Como consequência dos Lemas 1 e 2 e da hipótese  $\pi^2 = \frac{a}{b}$ , afirmamos que  $F(0)$  e  $F(1)$  são números inteiros. Ainda, usando propriedades de derivação podemos provar que:

$$\begin{aligned} (F'(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x) \cos(\pi x))' &= F''(x) \operatorname{sen}(\pi x) + \pi^2 F(x) \operatorname{sen}(\pi x), \\ &= a^n \pi^2 f(x) \operatorname{sen}(\pi x), \end{aligned}$$

logo,

$$(F'(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x) \cos(\pi x))' = a^n \pi^2 f(x) \operatorname{sen}(\pi x). \quad (2.15)$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo integral, segundo (FIGUEIREDO, 1980)“Se  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua derivável em  $[0, 1]$ , então

$$\int_0^1 g'(x) dx = g(1) - g(0).”$$

E considerando  $g(x) = (F'(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x) \cos(\pi x))$ , obtemos em relação à (2.15):

$$\begin{aligned}\int_0^1 g'(x) dx &= \int_0^1 a^n \pi^2 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx, \\ \int_0^1 g'(x) dx &= a^n \pi^2 \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^1 g'(x) dx &= g(1) - g(0), \\ &= \{(F'(1) \operatorname{sen}(\pi \cdot 1) - \pi F(1) \cos(\pi \cdot 1) - (F'(0) \operatorname{sen}(\pi \cdot 0) - \pi F(0) \cos(\pi \cdot 0))\}, \\ &= \{[0 - \pi \cdot F(1) \cdot (-1)] - [0 - \pi \cdot F(0) \cdot 1]\}, \\ &= \pi \cdot F(1) + \pi \cdot F(0).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\pi \cdot F(1) + \pi \cdot F(0) &= a^n \pi^2 \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx, \\ \pi(f(1) + F(0)) &= \pi \left( a^n \pi \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx \right).\end{aligned}$$

Então,

$$a^n \pi \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx = F(1) + F(0).\tag{2.17}$$

Temos que  $F(0)$  e  $F(1)$  são inteiros, logo o lado direito de (2.17) é inteiro, para concluirmos a prova devemos mostrar que para um  $n \in \mathbb{N}$  o lado esquerdo é um número menor que 1, logo, para  $0 < x < 1$  temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}.\tag{2.18}$$

Aplicando (2.18) em (2.17) obtemos:

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \pi \frac{a^n}{n!} \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx,$$

e,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}.$$

Assim,

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \frac{2a^n}{n!}.$$

Considerando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ , então podemos tomar um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{2a^n}{n!} < 1$ . Deste modo o lado esquerdo de (2.17) é menor que 1, resultando em contradição. Portanto,  $\pi$  é irracional.  $\square$

## 2.2.2 A transcendência do número $\pi$

Quando é encontrada a solução de uma equação polinomial da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (2.19)$$

onde os coeficientes  $a_i$ 's são inteiros, podemos dizer que esta solução é um número algébrico. Segundo (FIGUEIREDO, 1980) página 21, “um número que não seja algébrico é chamado de transcendente”. Outros autores ainda dizem:

A demonstração da transcendência de um número é, em geral muito complicada e técnica (...) Geralmente, essas demonstrações são feitas por redução ao absurdo (...) Mas esta não é uma tarefa simples, tanto que até hoje não se sabe mostrar se muitos números são algébricos ou transcendentos. ((OLIVEIRA, 2015) pág. 65).

A demonstração da transcendência do número  $\pi$ , será baseada nas obras de (FIGUEIREDO, 2002) e (OLIVEIRA, 2015), na qual ambas referem-se ao autor R. Moritz. Devemos ainda considerar as propriedades dos números algébricos destacadas na página 17 da obra de (FIGUEIREDO, 2002).

**Propriedades 4.** I) A soma de dois números algébricos é algébrico.

II) O produto de dois números algébricos é algébrico.

III) O simétrico  $-\alpha$  de um número algébrico  $\alpha$  é algébrico.

IV) O inverso  $\alpha^{-1}$  de um número algébrico  $\alpha \neq 0$  é algébrico.

Para dar suporte a demonstração colocaremos afirmações que podem ser encontradas no livro (FIGUEIREDO, 2002).

**Afirmção 5.** Seja  $P(x)$  um polinômio de grau  $r$ . Defina a função  $F(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P^r(x)$  onde  $P^r$  representa a derivada de ordem  $r$  de  $P$ . Tem-se que  $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}P(x)$ .

**Afirmção 6.** Teorema(7.1): Seja  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica e sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Então  $|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1| \sup\{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| : 0 \leq \lambda \leq 1\}$  onde  $|z|$  representa o módulo do complexo  $z = x + iy$ , isto é,  $|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Afirmção 7.** Considere o polinômio  $P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p \cdots (n-x)^p$ . Então  $P(x)$  é da forma

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!}x^p + \cdots$$

Também  $P^{(i)}(k) = 0, k = 1, \dots, n; i < p$ ,  
e  $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$  e  $P^{(i)}(0) = 0, i < p - 1$ .

**Afirmção 8.** Seja  $Q(x) = \sum_{j=0}^r a_j x^j$  um polinômio com coeficientes inteiros, e seja  $p < r$ . Então  $Q^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^r \frac{j!}{(j-1)!} a_j x^{i-j}$  com  $i \leq r$ .

Utilizando a igualdade acima tem-se que  $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$  para  $i \geq p$ , é um polinômio de coeficientes inteiros divisíveis por  $p$ .

**Afirmção 9.** Teorema A. Seja  $f(t_1, \dots, t_n)$  um polinômio simétrico de grau  $d$  com coeficientes em  $A$ . Então, existe um polinômio  $g(s_1, \dots, s_n)$  de peso menor ou igual a  $d$  com coeficientes em  $A$ , onde  $s_1, \dots, s_n$  são os polinômios simétricos elementares definidos por,

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{j=1}^n t_j, \\ s_2 &= \sum_{i < j} t_i t_j, \\ s_3 &= \sum_{i < j < k} t_i t_j t_k, \\ &\vdots \\ s_n &= t_1 t_2 \cdots t_n, \end{aligned}$$

tal que

$$f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_n).$$

**Teorema 10.** O número  $\pi$  é transcendente.

*Demonstração.* Esta demonstração será feita por contradição. Assim, suponhamos que  $\pi$  seja um número algébrico. Consideremos  $i = \sqrt{-1}$ , sabemos que este é um número algébrico, pois é solução da equação  $x^2 + 1 = 0$ . Então  $\pi.i$  é um número algébrico pelo item II da Propriedade 4, isto é,  $\pi.i$  é raiz de uma expressão polinomial com coeficientes inteiros. Digamos,

$$P_1(x) = 0, \tag{2.20}$$

onde suas raízes serão representadas por  $\alpha_1 = \pi.i, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Pela identidade de Euler  $e^{i.\pi} = -1$ , temos:

$$\prod_{j=1}^n (1 + e^{\alpha_j}) = 0. \quad (2.21)$$

Quando desenvolvemos o produto indicado em (2.21) obtemos uma expressão que apresenta-se na forma de  $1 + \sum e^l$ , onde o expoente  $l$  poderá ser:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \quad (2.22)$$

$$\alpha_i + \alpha_j, \quad i < j, \text{ para } i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (2.23)$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \quad i < j < k, \text{ para } i, j, k \in \{1, \dots, n\} \quad (2.24)$$

⋮

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \quad (2.25)$$

Quando atentamos aos números de termos destas  $n$  expressões, é possível especificar que: em (2.22) o número de termos é igual a  $n$ , em (2.23) é igual a  $\binom{n}{2}$ , em (2.24) é  $\binom{n}{3}$  e em (2.25) é igual a  $\binom{n}{n} = 1$ , no qual  $\binom{n}{m}$  são coeficientes binomiais que podem ser representados por:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

para  $0 \leq m \leq n$ .

Como  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  satisfazem uma equação polinomial de grau  $n$  com coeficientes inteiros, é mostrado no apêndice de ((FIGUEIREDO, 2002), págs. 42-49), que:

- i) O número de termos em (2.23) satisfazem uma equação polinomial cujo grau é dado por  $\binom{n}{2}$  com coeficientes inteiros

$$P_2(x) = 0. \quad (2.26)$$

- ii) O número de termos em (2.24) satisfazem uma equação polinomial cujo grau é dado por  $\binom{n}{3}$  com coeficientes inteiros

$$P_3(x) = 0. \quad (2.27)$$

Deste modo discorre até (2.25). Assim, podemos dizer que os números de termos em (2.22),..., (2.25) satisfazem a seguinte equação polinomial com coeficientes inteiros

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdots P_n(x) = 0. \quad (2.28)$$

Temos que o grau do polinômio formado em (2.28) é dado por

$$n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

Então, podemos considerar que ao realizar os produtos das equações (2.22)-(2.25), alguns números podem se anular, então podemos supor que  $m$  deles sejam diferentes de zero e assim representar estes números por  $\beta_1, \dots, \beta_m$ . Quando simplificamos os fatores de (2.28) que apresentam a forma  $x^q$ , para  $q > 0$ , temos que se  $2^n - 1 > m$  haverá raízes em uma equação polinomial com coeficientes inteiros, dessa forma tais raízes serão denotadas por  $\beta_1, \dots, \beta_m$ .

$$R(x) \equiv Cx^m + C_{m-1}x^{m-1} + \cdots + C_1x + C_0 = 0.$$

Ao efetuarmos o produto de (2.21) teremos,

$$k + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_m} = 0. \quad (2.29)$$

Consideremos o polinômio

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} (R(x))^p, \quad (2.30)$$

onde  $s = mp - 1$  e  $p$  é um número primo que será escolhido posteriormente. O grau do polinômio  $P(x)$  é dado por  $r = s + p$ . Assim, podemos definir uma função  $F(x)$  definida por:

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(r)}(x), \quad (2.31)$$

onde  $P^{(r)}$  representa a derivada de ordem  $r$  de  $P$ . Assim pela Afirmação 5, temos:

$$\frac{d}{dx} (e^{-x} F(x)) = -e^{-x} P(x). \quad (2.32)$$

Fazendo uso da Afirmação 6 aplicada à função  $f(z) = e^{-z} F(z)$ , teremos

$$|e^{-\beta_j} F(\beta_j) - F(0)| \leq 2|\beta_j| \sup_{\lambda} |e^{-\lambda\beta_j} P(\lambda\beta_j)|, \quad (2.33)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$  para  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ . Definindo,

$$\varepsilon_j = 2|\beta_j| \sup_{\lambda} |e^{(1-\lambda)\beta_j} P(\lambda\beta_j)|,$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$ . E utilizando (2.31) temos,

$$|F(\beta_j) - e^{\beta_j} F(0)| \leq \varepsilon_j. \quad (2.34)$$

Considerando (2.29) e as expressões (2.34) para  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  temos

$$|kF(0) + \sum_{j=1}^m F(\beta_j)| \leq \sum_{j=1}^m \varepsilon_j. \quad (2.35)$$

A partir deste ponto o objetivo desta demonstração é obter que o lado esquerdo de (2.34) é um inteiro não nulo e o lado direito é menor que 1. Para este feito iremos calcular as várias derivadas de  $P(x)$  nos pontos  $0, \beta_1, \dots, \beta_m$ . Assim, para derivadas de ordem  $i < p$ , procederemos como na Afirmação 7 e assim o polinômio definido em (2.28) apresentará a seguinte forma:

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} \{c_0^p x^{p-1} + bx^p + \dots\},$$

assim na derivada de ordem  $i$ , temos

$$P^{(i)}(0) = 0 \text{ para } i < p - 1,$$

e

$$P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p. \quad (2.36)$$

Ainda, de (2.30) temos que,

$$P^{(i)}(\beta_j) = 0, \quad (2.37)$$

onde  $i < p$  e  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Se  $i < p$  nas derivadas  $P^{(i)}(x)$  temos que a expressão  $R(x)$  é fator comum e  $R(\beta_j) = 0$ .

Agora, para as derivadas de ordem  $i \geq p$ , e considerando a Afirmação 8, temos que

$$\text{os coeficientes de } P^{(i)}(x), \quad i \geq p \text{ são inteiros divisíveis por } pc^s. \quad (2.38)$$

De (2.36) e (2.38) temos que

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0, \quad (2.39)$$

no qual  $k_0$  é um número inteiro.

Para os outros  $F(\beta_j)$  observaremos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m F(\beta_j) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i \geq p} P^{(i)}(\beta_j), \\ &= \sum_{i \geq p} \sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Agora, voltemos nossa atenção a expressão

$$\sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j), \quad (2.41)$$

onde  $i$  é fixado no intervalo  $p \leq i \leq s + p$ . Já vimos em (2.38) que o polinômio possui coeficientes inteiros divisíveis por  $pc^s$ . Além disso, o grau de  $P$  é dado por  $r = s + p$ . Assim,  $P^{(i)}$  tem grau  $s + p - i \leq s$ , pois  $p \leq i$ . Então a expressão (2.41) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j) = pc^s Q(\beta_1, \dots, \beta_m), \quad (2.42)$$

onde  $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $s$ , com coeficientes inteiros e também é um polinômio simétrico nos  $\beta_i$ 's com coeficientes inteiros. Então, pela Afirmação 9, existe um polinômio  $G(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$  de grau menor ou igual a  $s$  com coeficientes inteiros e  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  são polinômios simétricos elementares em  $\beta_1, \dots, \beta_m$  tais que

$$Q(\beta_1, \dots, \beta_m) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_m). \quad (2.43)$$

Por outro lado, observe que

$$\sigma_1 = c^{-1}c_{m-1}, \quad \sigma_2 = c^{-1}c_{m-2}, \quad \sigma_3 = c^{-1}c_{m-3}, \dots, \sigma_m = c^{-1}c_0. \quad (2.44)$$

Então de (2.42), (2.43), (2.44) podemos concluir que a expressão (2.41) é um inteiro divisível por  $p$ . Retomando a expressão (2.40) podemos concluir que

$$\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = pK_1, \quad (2.45)$$

onde  $K_1$  é um número inteiro. Então usando (2.39) e (2.45) temos que o lado direito de (2.31) é um inteiro dado por

$$|kc^s c_0^p + pK|, \quad (2.46)$$

onde  $K = c^s k_0 + K_1$ .

Agora seja  $p$  um número primo tal que  $p > k, c$  e  $c_0$ . Deste modo, o inteiro (2.46) não é divisível por  $p$ , e conseqüentemente é um inteiro não nulo.

Por fim, é necessário que façamos a estimativa do termo do lado direito de (2.31). Assim consideremos

$$M = \text{máx} \{|\beta_1|, \dots, |\beta_m|\}.$$

Logo,

$$\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} \text{sup} \{|\lambda\beta_j|^{p-1} |R(\lambda\beta_j)|^p\}, \quad (2.47)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Seja

$$N = \text{máx} \{|R(z)|\}, \quad (2.48)$$

onde  $|z| < m$ .

Quando (2.48) é usada em (2.47) temos

$$\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1} N^p.$$

Ainda,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0$ , para qualquer  $A$ . Então, para  $p$  suficientemente grande, podemos fazer  $\varepsilon_j < \frac{1}{m+1}$ , assim

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j \leq \frac{m}{m+1} < 1.N'. \quad (2.49)$$

Desta última expressão e o fato que o lado esquerdo de (2.31) é um número inteiro não nulo, chegamos a um absurdo. Logo,  $\pi$  é um número transcendente.

□

## 3 Funções trigonométricas

### 3.1 Da origem da trigonometria às funções trigonométricas.

Com as leituras feitas até o momento para a realização deste trabalho, é perceptível o modo de como a humanidade ao longo do tempo formou o pensamento matemático, evoluindo gradualmente e de maneiras diferentes entre povos. Almejavam descobrir, compreender e exemplificar o mundo e as situações que viviam. Assim.

A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido. ((LIMA, 2013)pág. 186).

Para alguns autores a trigonometria e a geometria possuem uma estreita relação. Para (COSTA, 2003) o desenvolvimento da trigonometria está muito ligado ao desenvolvimento da geometria e os principais estudiosos eram gregos, dentre eles destacaram Thales com o estudo de semelhança, segundo (EVES, 2004) “Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra”.

Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a seqüências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). Poderíamos dizer então que essas ideias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das funções tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias.((COSTA, 2003)pág. 2 e 3)

Pitágoras, segundo (EVES, 2004) nasceu por volta de 572 a.C e possivelmente foi discípulo de Thales, fundou a famosa Escola Pitagórica, que era um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências naturais e, ao mesmo tempo, realizavam ritos e cerimônias secretas, formando uma irmandade. O programa de estudos da Escola Pitagórica era voltado ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (teoria dos números), geometria, música e astronomia. Em relação ao famoso Teorema de Pitágoras, (EVES, 2004) em seu livro na página 103 afirma que: “esse teorema era conhecido pelo babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras”. A demonstração feita por Pitágoras foi realizada por decomposição de figuras. Essa demonstração foi a mais convincente e portanto o resultado ficou conhecido como “Teorema de Pitágoras”.

Além dos egípcios os babilônios do período 2000 a.C a 1600 a.C, detinham de um vasto conhecimento matemático em relação à geometria, como por exemplo: as regras gerais

da área de retângulo, triângulo retângulo, triângulo isósceles, trapézio retângulo, volumes de alguns sólidos, dentre outros. Para (COSTA, 2003), os babilônios foram excelentes astrônomos e influenciaram gerações posteriores. Eles usavam da astronomia para explicar suas razões religiosas, elaborar a construção dos calendários e definir épocas de plantio. Com seus estudos e aplicações práticas, os babilônios contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria. Segundo (EVES, 2004), foram eles que dividiram a circunferência de um círculo em 360 partes iguais, como destacado a seguir.

Nos remotos tempos dos sumérios, existia uma unidade de medida grande, uma espécie de *milha babilônica*, igual a sete milhas atuais. Como a milha babilônica era usada para medir distâncias mais longas, era natural que viesse a se transformar numa unidade de tempo, a saber, o tempo necessário para se percorrer uma milha babilônica. Mais tarde, talvez no primeiro milênio a.C, quando a astronomia babilônica atingiu o estágio de manter registros sistemáticos de fenômenos celestes, a milha-tempo babilônica foi adotada para a mensuração de espaços de tempo. Como se determinou que um dia era formado de 12 milhas-tempo, e um dia completo equivale a uma revolução do céu, dividiu-se um ciclo completo em 12 partes iguais. Mas, por conveniência, a milha-tempo babilônica fora dividida em 30 partes iguais. Dessa forma chegamos a  $(12)(30) = 360$  partes iguais num ciclo completo. ((EVES, 2004) pág.61)

Ainda podemos considerar as contribuições que Euclides trouxe para o conhecimento da geometria. Euclides foi o criador da famosa escola de matemática de Alexandria por volta de 300 a.C, onde também foi professor. Eles escreveu muitos trabalhos, e o mais famoso foi “ Os Elementos”, cuja fama ocorreu devido ao seu uso no ensino da geometria, pois alguns autores o consideram como a obra de estudo mais importante depois da Bíblia. A obra Os Elementos é dividida em 13 livros, onde estão as 465 proposições organizadas, abrangendo diversos assuntos de geometria, teoria dos números e álgebra elementar. Segundo ((EVES, 2004) pág.169 à 176) a obra está organizada da seguinte maneira:

- Livro I, aborda as propriedades do triângulo, os três teoremas de congruência, teoria das paralelas, a soma de ângulos de um triângulo é igual a soma de dois ângulos retos, relaciona as áreas dos paralelogramos, triângulos e quadrados e o Teorema de Pitágoras.
- Livro II, aborda as transformações de área e a álgebra geométrica da escola pitagórica.
- Livro III, aborda os teoremas dos círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos.
- Livro IV, retrata construções com régua e compasso de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 15 lados e a inscrição e circunscrição destes polígonos.
- Livro V, aborda a teoria das proporções de Eudoxo.

- Livro VI, aborda a aplicação da teoria das proporções eudoxianas à geometria plana; teoremas de semelhança de triângulos; construções de terceira, quarta e médias proporcionais; resolução geométrica de equações quadráticas; a bissetriz do ângulo de um triângulo e uma generalização do teorema de Pitágoras.
- Livros VII, VIII, IX, tratam da teoria elementar dos números.
- Livro X, trata dos irracionais, para alguns estudiosos este é o livro mais notável da obra.
- Livros XI, XII, XIII, tratam de geometria sólida, destacando a esfera, retas e planos no espaço e paralelepípedos.

Pelo fato da geometria ser tratada na maioria dos livros da obra de Euclides, este trabalho foi usado por muito tempo como sendo a base do ensino da geometria.

Por volta do ano 200 a.C, o interesse dos estudos era voltado para calcular a distância entre dois pontos da terra e o raio da mesma. Os astrônomos gregos Eratóstenes de Cirene e Aristarco determinaram a medida mais conhecida da antiguidade, eles usaram as razões trigonométricas e a semelhança de triângulos para chegarem ao resultado apresentado.

Eratóstenes havia mencionado uma estimativa de 60000 quilômetros para a circunferência da Terra, chegando a tais resultados de forma empírica.

Eratóstenes observou que ao meio-dia no dia do solstício de verão o Sol brilhava diretamente para dentro de um poço profundo em Siene. Ao mesmo tempo em Alexandria, tomada como estando no mesmo meridiano e 5000 estádios ao norte de Siene, verificou-se que o Sol lançava uma sombra indicando que a distância angular do Sol ao zênite era um cinqüentavo de um círculo. Da igualdade dos ângulos correspondentes ... é claro que a circunferência da Terra deve ter cinquenta vezes a distância entre Siene e Alexandria.” ((BOYER; MERZBACH, 2010) pág. 110)

Já Aristarco destacava em seus estudos a relação entre Sol, Lua e Terra, onde buscava relacionar os tamanhos do Sol e da Lua com o planeta. Em seu tratado, ele usa a Lua quando está meio cheia para anotar suas observações em relação ao Sol, onde registra que o ângulo entre as linhas de vista ao Sol e a Lua se diferem para menos de um ângulo reto por um trintavos de um quadrante. Segundo (BOYER; MERZBACH, 2010) na linguagem atual é o mesmo que dizer que a razão da distância da Lua para a distância do Sol é  $\text{sen}3^\circ$ .

Segundo (EVES, 2004), o mais eminente dos astrônomos da antiguidade teria sido Hiparco de Nicéia, que contribuiu com trabalhos que relatavam a determinação da duração do mês lunar médio, a descoberta e a estimativa da precisão anual dos equinócios, entre outros. Hiparco ainda teve um papel fundamental para o desenvolvimento da trigonometria.

Hiparco construiu o que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica como os valores das cordas de uma série de ângulos de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , em cuja montagem utilizou interpolação linear. Ele observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de  $180^\circ$  para  $0^\circ$ . Resolveu então associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Astronomia e por isso ele recebeu o título de “Pai da Trigonometria”. (([COSTA, 2003](#)) pág.6)

O estudo dos trabalhos de Hiparco realizado por Claudio Ptolomeu, por volta do ano 150 d.C., resultou em um trabalho científico famoso, conhecido como o *Almagesto*. Segundo ([KENNEDY, 1994](#)) apud ([COSTA, 2003](#)) “Para os matemáticos o *Almagesto* tem interesse devido às identidades trigonométricas que Ptolomeu diviso para auxiliá-lo a reunir dados para sua tabela de cordas”. Para ([BOYER; MERZBACH, 2010](#)) a fórmula para seno da diferença, ou corda da diferença como era chamada na época, foi a mais utilizada por Ptolomeu para construir suas tabelas.

Os estudiosos da Índia, conhecidos como os hindus não eram considerados os proficientes em geometria, ao contrário dos gregos. Segundo ([EVES, 2004](#)), “A matemática hindu era grandemente empírica, raramente oferecendo uma demonstração”. Mesmo com esta característica, foram com os hindus que as principais funções trigonométricas começaram a ser usadas, para ([COSTA, 2003](#)) foi devido o aperfeiçoamento da tabulação, de modo particular a interpolação quadrática e linear.

Foram os hindus que introduziram a função seno na trigonometria para substituir as tabelas de cordas criadas pelos gregos. Segundo ([BOYER; MERZBACH, 2010](#)) “As mais antigas tabelas da função seno que se preservam são as do *Siddhantas* e do *Aryabhatiya*”. Estas obras foram muito importantes para os hindus, a primeira era tida por eles uma obra que fora escrita por Surya, o deus do Sol, na qual tratava sobre astronomia em forma de versos. A segunda foi escrita por um famoso matemático chamado Aryabhata e tratava de astronomia e matemática e também apresentava em versos, esta última obra ganhou tanto destaque na Índia assim como Os Elementos de Euclides ganhou na Grécia.

Após os hindus, os árabes ganharam destaque na história da matemática, estes por sinal, segundo ([BOYER; MERZBACH, 2010](#)), na área da geometria desenvolveram o papel maior de preservacionistas do que de descobridores, os árabes esforçavam em traduzir os materiais gregos existentes.

O conhecimento árabe difundiu pelo mundo quando a língua árabe ganhou a condição de língua internacional substituindo o grego. Para ([COSTA, 2003](#)) o reconhecimento árabe iniciou com a fundação da Escola de Bagdad, no século IX, onde um dos principais fundadores foi Al Battani, chamado de Ptolomeu de Bagdad. Em seus estudos Al Battani, baseou-se em o *Almagesto* (grego) e *Siddhanta* (hindus). Ele introduziu a trigonometria hindu aos árabes e foi através dele que a trigonometria do seno chegou à Europa.

Outro matemático e astrônomo árabe que ganhou destaque foi Al- Khowarizmi. Ele escreveu obras sobre astronomia e matemática onde destacavam as tabelas astronômicas, tratados de astrolábios e relógio de sol. Usava como base as obras hindus, devido a sua exposição tão precisa sobre os numerais hindus é que alguns autores atribuem a origem ao sistema de numeração aos árabes. Suas obras influenciaram outros matemáticos árabes como Abul’L-Wefa, este por sua vez com seus estudos fez com que a trigonometria ganhasse uma forma sistemática onde eram provados teoremas.

Abu’L-Wefa também fez uma nova tabela para senos para ângulos diferentes, diferindo por  $(\frac{1}{4})^\circ$ , usando o equivalente de oito casas decimais. Forneceu também tabela de tangentes e usou todas as seis funções trigonométricas comuns, bem como relações entre elas,...((BOYER; MERZBACH, 2010)pág.162)

Nasir Eddin também contribuiu para a trigonometria e a astronomia, ele deu continuidade a obra de Abu’L-Wefa e elaborou o primeiro tratado sistemático sobre trigonometria plana e esférica. Outra figura importante que teve destaque foi Al-Kashi, um cientista que usava frações sexagesimais e foi o primeiro a considerar que as frações decimais também poderiam ser usadas nos cálculos, ele dedicava-se a cálculos longos, “e se orgulhava com razão de sua aproximação para  $\pi$ , que era melhor que qualquer das aproximações fornecidas por seus predecessores” ((BOYER; MERZBACH, 2010), pág 167).

Para (BOYER; MERZBACH, 2010) a matemática árabe pode ser dividida em quatro partes: a primeira baseava-se na matemática hindu e no princípio posicional; a segunda era voltada para álgebra, na qual baseava nos conhecimentos gregos, hindus e babilônicos, e os árabes atribuíram a ela uma característica nova e sistemática; a terceira era a trigonometria onde fundamentava no conhecimento grego e nas aplicações hindu, porém os árabes acrescentaram funções e fórmulas; a quarta era a geometria baseada na geometria grega onde os árabes contribuíram com generalizações.

Após Al-Kashi, a matemática árabe começou a declinar e muitos estudiosos árabes começaram a migrar para a Europa afim de trabalhar e difundir o saber. No entanto a matemática européia a partir deste momento começa se desenvolver graças as traduções realizadas das obras árabes. “O mais atuante dos tradutores do período foi Gerardo de Cremona (1114-1187), que traduziu para o latim mais de noventa trabalhos árabes, entre eles o Almagesto de Ptolomeu, Os Elementos de Euclides e a álgebra de Al-Khowarizmi.”((EVES, 2004),pág.291)

Para (COSTA, 2003), o matemático europeu mais habilidoso foi Leonardo Fibonacci (1170-1250). Ele estudou no norte da África e viajou pelo Oriente exercendo o papel de mercador, adquirindo o conhecimento e influência dos árabes. Em 1220 ele escreveu uma obra onde tratava da aplicação da trigonometria árabe à agrimensura.

No século XV com o início do Renascimento Europeu tanto na arte quanto no

saber, as atividades matemáticas concentraram na Europa Central e em cidades mercantis. Os principais ramos de estudo foram a aritmética, álgebra e trigonometria. Dentre tantos matemáticos, alguns destacaram-se mais, é o caso de Regiomontanus, homem que dedicou-se em adquirir, traduzir e publicar o legado científico da antiguidade, tais obras como as de Arquimedes, Apolônio, Heron, Ptolomeu e outros mais. Porém, sua morte repentina aos quarenta anos fez com que este projeto não fosse finalizado, fazendo pensar que a matemática teria ganho uma aceleração em seu desenvolvimento caso Regiomontanus tivesse vivido por mais tempo.

Entre suas obras a de maior importância na área da trigonometria segundo (BOYER; MERZBACH, 2010) “foi seu *De Triangulis Omnimodis*, uma exposição sistemática dos métodos para resolver triângulos que marcou o renascimento da trigonometria”. Para (COSTA, 2003) Regiomontanus estabeleceu a trigonometria como uma ciência independente da astronomia, na qual em sua obra ele calculou novas tábuas trigonométricas, onde aperfeiçou as tábuas de senos feitas por Peurbach, e introduziu na trigonometria européia o uso das tangentes. E ainda, para ela, foi Regiomontanus que fundamentou os futuros trabalhos na trigonometria plana e esférica.

Durante o século XVI, um notável astrônomo revolucionou a visão do mundo em relação ao movimento da Terra, foi Nicolau Copérnico que além de astrônomo era trigonometra também. Ele escreveu tratados onde destacava a trigonometria, e podia-se notar traços da obra de Regiomontanus, isso tudo é devido o fato do trabalho em parceria com Georg Joachim Rheticus. Rheticus, assim como era conhecido, era um matemático que antes mesmo de trabalhar com Copérnico já havia tido contato com as obras de Regiomontanus. O interessante é que Rheticus combinou suas ideias, as informações das obras de Regiomontanus e Copérnico e disso tudo resultou o tratado mais elaborado até aquela época: *Opus Palatinum de Triangulis*, onde os estudos eram concentrados nos triângulos retângulos. “Além disso, as seis funções trigonométricas agora foram completamente utilizadas, pois Rheticus calculou elaboradas tabelas de todas” ((BOYER; MERZBACH, 2010) pág.200). E ainda, segundo (COSTA, 2003) o cálculo do seno, cosseno, tangente e secante foram feitos por ele de minuto em minuto para os arcos do 1º quadrante e de dez em dez segundos para o arco de 1º.

A tábua de senos de Rheticus foi aperfeiçoada por Bartholomaus Pitiscus em 1593, em seu livro intitulado Trigonometria, onde foi a primeira vez que a palavra foi usada como título de uma obra.

Outro nome importante para o desenvolvimento da matemática, no caso da trigonometria, foi François Viète. Ele introduziu a prática de usar letras para representar coeficientes gerais e adicionou um tratamento analítico para a trigonometria, onde muitas vezes ele referia-se como goniometria. Ele também decompôs triângulos oblíquos em triângulos retângulos para determinar as medidas dos lados e ângulos, deixando registrado em

sua obra *Canon Mathematicus*. Em outra obra ele enunciou algo equivalente às leis das tangentes que conhecemos hoje, porém a publicação da fórmula foi feita por outro matemático posteriormente. Quando Viète aplicava a trigonometria aos problemas algébricos e aritméticos ele ampliava o conhecimento do assunto, porém o que impediu-o de prosperar ainda mais foi sua reticência quanto aos números negativos.

Viète observou também uma conexão importante entre suas fórmulas e a resolução de equações cúbicas. A trigonometria podia servir de auxiliar para a álgebra onde esta tinha esbarrado contra um muro que não podia transpor, isto é, no caso irreduzível da cúbica. ((BOYER; MERZBACH, 2010) pág.212)

Outra importante contribuição de Viète, foi segundo (BOYER; MERZBACH, 2010) fazer a primeira expressão numérica para  $\pi$  que na época eles chamavam de  $p$ , de modo analítico, chegando a um resultado significativo até então, uma vez que as noções de aritmética, álgebra e trigonometria ganhavam destaque no modo de pensar infinitamente grande e pequeno, algo que somente na geometria era compreendido. A expressão apresentada por Viète como produto infinito era dada por:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

Jonh Napier também destacou em seus estudos a trigonometria quando elaborou fórmulas para a resolução de triângulos esféricos, porém seu destaque na matemática ocorre nos estudos dos logaritmos. Outro autor matemático que contribuiu com a trigonometria foi William Oughtred, no ano de 1657 ele publicou um trabalho intitulado *Trigonometrie*, segundo (EVES, 2004) este trabalho tem importância histórica pois foi o primeiro a tentar introduzir abreviações para os nomes das funções trigonométricas e (COSTA, 2003) complementa ao dizer “como o simbolismo algébrico estava pouco avançado para tornar isto possível, a ideia não foi aceita até que Euler exercesse sua influência neste sentido no século XVIII.”

A palavra seno já estava sendo usada pelos matemáticos europeus, a partir das traduções dos materiais árabes, segundo (OLIVEIRA, 2010) foi Edmund Gunter (ministro inglês e professor de astronomia), que abreviou pela primeira vez a palavra seno para *sen*. Ele também foi o primeiro a usar a palavra cotangente no ano de 1620.

É retratado também em (OLIVEIRA, 2010) que a função cosseno surgiu da necessidade em calcular o seno do ângulo complementar, sendo primeiramente denotada como “complemento do seno”, e foi Edmund Gunter que atribuiu o nome *cosinus*, e a primeira abreviatura como *cos* foi usada pelo matemático Jonas Moore.

Em 1658, segundo (COSTA, 2003), John Newton publicou o tratado *Trigonometria Britannica*, onde baseou em trabalhos de outros autores para elaborar o livro que era

considerado o mais completo sobre trigonometria na época, ele antecedeu em sua obra as ideias sobre introdução de divisões centesimais nas tábuas trigonométricas.

Outro matemático importante para o desenvolvimento da matemática com seus estudos foi John Wallis. Segundo (EVES, 2004), além de ter sido o primeiro a explicar satisfatoriamente o significado dos expoentes (zero, fracionário e negativo) e introduzir o atual símbolo do infinito ( $\infty$ ), ele dedicou os estudos para determinar o valor de  $\pi$ .

Wallis empenhou-se em determinar  $\pi$  buscando uma expressão para a área,  $\frac{\pi}{4}$ , de um quadrante do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . Isso equivale a calcular  $\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ , o que ele não tinha condições de fazer diretamente, uma vez que desconhecia o teorema geral do binômio. Consequentemente ele calculou  $\int_0^1 (1 - x^2)^0 dx$ ,  $\int_0^1 (1 - x^2)^1 dx$ ,  $\int_0^1 (1 - x^2)^2 dx$ ,  $\dots$ , obtendo assim a sequência  $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{16}{35}, \dots$ . Isso levou-o a considerar o problema da determinação da lei que para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , forneceria a sequência precedente. O que ele procurava era o valor interpolado dessa lei para  $n = \frac{1}{2}$ . Por um longo e complicado processo, finalmente chegou à sua expressão de  $\frac{\pi}{2}$  como produto infinito. Os matemáticos da época com frequência recorriam a processos de interpolação para calcular quantidades que não conseguiam obter diretamente. ((EVES, 2004), pág.432)

Para (BOYER; MERZBACH, 2010) o teorema binomial para potências inteiras já era conhecido na Europa, mas Wallis não conseguiu aplicar o seu método de interpolação. Porém James Gregory, um predecessor de Newton, já conhecia este resultado, pois seu conhecimento matemático era enriquecido por conteúdos estudados em outros países. Segundo (EVES, 2004), em 1667 Gregory fez a expansão em série infinita de  $\arctg(x)$ ,  $tg(x)$  e  $\text{arcsec}(x)$ , sendo um dos primeiros a distinguir séries convergentes e divergentes. Ele desenvolveu a série que foi importante no cálculo do valor de  $\pi$ , levando seu nome e era expressa por:

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Isaac Newton, foi outra importante figura científica que contribuiu com a trigonometria, pois segundo (COSTA, 2003) “paralelamente aos estudos de cálculo infinitesimal apoiados fortemente na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido  $\text{arcsen}(x)$  em séries e, por reversão, deduzido a série para  $\text{sen}(x)$ ”. Em uma das cartas de Newton destinadas a Leibniz, ele transmite a fórmula geral para  $\text{sen}(nx)$  e  $\text{cos}(nx)$  para (OLIVEIRA, 2010) com estas ideias surgiram perspectivas para que o  $\text{sen}(x)$  e  $\text{cos}(x)$  fossem considerados números em vez de grandezas como até então.

Abraham De Moivre era um matemático francês que ficou conhecido pelos seus trabalhos no ramo da teoria das probabilidades, séries recorrentes e trigonometria analítica. Ele foi o primeiro a usar a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

A fórmula que é conhecida como a chave da trigonometria analítica e leva o nome de Moivre, foi dada por ele em 1707 sendo apresentada por,

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx.$$

Segundo (COSTA, 2003), foi Thomas-Fanten de Lagny o primeiro matemático que evidenciou a periodicidade das funções trigonométricas em 1710.

Entre todas as importantes figuras matemáticas tratadas até o presente momento, alguns autores julgam que nenhuma seja comparada a de Leonhard Euler, (Fig. 4), que foi um notável matemático de sua época, nascido na Suíça (terra dos principais matemáticos do século XVIII). O pai de Euler esperava que seu filho fosse ministro religioso assim como ele, mas Euler descobriu sua vocação para a área da matemática ao estudar com o clã Bernoulli. Além da matemática Euler estudou teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais.

De 1727 a 1783 a pena de Euler esteve ocupada aumentando os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, dos mais elementares aos mais avançados. Além disso, em quase tudo, Euler escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum indivíduo foi tão grandemente responsável pela forma da matemática de nível superior de hoje quanto Euler. ((BOYER; MERZBACH, 2010)pág.305)

Euler publicou mais de quinhentos trabalhos ao longo de sua vida e deixou ao morrer manuscritos que foram publicados pela Academia de São Petersburgo postumamente. Segundo (EVES, 2004), as contribuições de Euler à matemática são numerosas, onde o autor apontou as principais notações, sendo,

- $f(x)$  para funções;
- $e$  para a base dos logaritmos naturais;
- $a, b, c$  para os lados de um triângulo ABC;
- $s$  para o semiperímetro do triângulo ABC;
- $r$  para o inraio do triângulo ABC;
- $R$  para o circunraio do triângulo ABC;
- $\Sigma$  para somatório;
- $i$  para a unidade imaginária  $\sqrt{-1}$ .

E não deixou de destacar a fórmula

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Para (BOYER; MERZBACH, 2010), a partir de 1748 quando Euler publicou *Introductio in Analysin Infinitorum* surge um novo ramo da matemática chamado *análise*, onde as funções trigonométricas ganham um tratamento estritamente analítico, “o seno, por exemplo, já não era um segmento de reta; era simplesmente um número ou uma razão - a ordenada de um ponto sobre um círculo unitário, ou o número definido pela série  $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$  para um valor de  $z$ ” ((BOYER; MERZBACH, 2010), pág.306). Determinando as seguintes identidades,

$$\text{sen } x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}.$$

$$\text{cos } x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}.$$

$$e^{\sqrt{-1}x} = \text{cos } x + \sqrt{-1} \text{sen } x.$$

Johann Heinrich Lambert (Fig.5), foi colega de Euler por curto período na Academia de Berlim e também fez importantes contribuições à matemática, dentre os tópicos estudados por ele destacava a geometria descritiva, teoria de projeções usadas na confecção de mapas, determinação da órbita dos planetas e a de maior relevância para este trabalho, a prova da irracionalidade de  $\pi$ . “Ele mostrou que se  $x$  é irracional,  $x \neq 0$ , então  $tg x$  não pode ser racional; e como  $tg \frac{\pi}{4} = 1$ , segue-se que  $\frac{\pi}{4}$  não pode ser racional; logo, o mesmo acontece também com  $\pi$ .” ((EVES, 2004), pág.478).

Com o passar dos anos são muitos os matemáticos que emergiram por suas competências e produtividade. No início do século XIX, dentre tantos, vale destacar para este trabalho a notável figura do matemático francês Jean-Baptist Joseph Fourier, que foi professor da Escola Politécnica da França e trabalhou com a matemática aplicada. Fourier em 1807 fez a apresentação de um artigo à Academia de Ciências da França, onde marcou pontualmente a história da matemática. “No desenvolvimento do artigo Fourier fez a surpreendente afirmação de que toda função definida num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e co-seno.” ((EVES, 2004),pág. 526). A consideração de Fourier, aplica-se a qualquer função definida no intervalo  $(-\pi, \pi)$  e que pode ser representada neste intervalo por uma série trigonométrica, dada como,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx),$$

onde  $a$  e  $b$  são coeficientes que representam números reais convenientes. Atualmente esta série trigonométrica é conhecida como *Série de Fourier* (que será detalhada na seção (4.1)), e é utilizada em vários campos de estudos, tais como: acústica, óptica, eletrodinâmica,

termodinâmica, equações diferenciais e outros. As séries de Fourier desempenharam um papel importante no conceito de função, pois segundo ((EVES, 2004), pág.661) “essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente.” Uma vez que, o conceito de função considerado até aquele momento era o de Euler, onde este referia à uma função, como sendo uma equação ou fórmula qualquer que envolvesse variáveis e constantes.

A evolução do pensamento humano, fez evoluir as diversas áreas do saber, sendo a matemática a mais relevante, pois a sua evolução alavancou o avanço de outras áreas também. A trigonometria, um dos campos da matemática, foi elencado para ser estudado neste trabalho, e assim como (LIMA, 2013) diz que o objeto inicial de estudo da trigonometria era o tradicional problema em determinar os seis elementos que o triângulo contém (três lados e três ângulos) quando apenas se conhece três destes elementos, sendo pelo menos um deles um lado. Com o passar do tempo e com a criação de outros ramos da matemática, como o cálculo infinitesimal e a análise matemática, surge as noções de seno, cosseno e as associações tangente, cotangente, secante e cossecante, formando um rol das funções trigonométricas. Diante estas considerações de (LIMA, 2013), registro aqui o fascínio em ter estudado e elaborado este capítulo, onde as leituras e reflexões realizadas, proporcionaram o enriquecimento científico do saber.

## 3.2 Operações e propriedades das funções trigonométricas.

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, são apresentadas aos alunos nos anos finais do ensino fundamental, baseando-se nos conceitos que os alunos têm de triângulo retângulo. Exemplificaremos uma maneira de como é abordado o conteúdo. Considere um triângulo retângulo  $ABC$  expresso na Figura 6, com ângulo  $\hat{A}$  reto e os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  agudos. O lado oposto ao ângulo  $\hat{A}$  é chamado de hipotenusa  $a$ , o lado oposto ao ângulo  $\hat{C}$  é chamado de cateto  $c$  e o lado oposto ao ângulo  $\hat{B}$  é chamado de cateto  $b$ . As funções trigonométricas são definidas como:

- Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.
- Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.
- Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente a este ângulo.

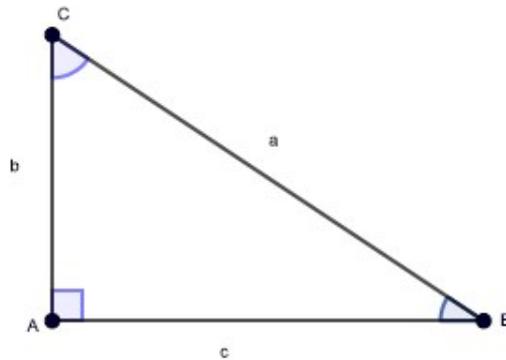


Figura 6 – Triângulo Retângulo ABC. Fonte: *Própria autoria*.

Todavia, como o triângulo retângulo  $ABC$  possui dois ângulos agudos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , podemos escrever,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\hat{B}) &= \frac{b}{a}, \\ \operatorname{cos}(\hat{B}) &= \frac{c}{a}, \\ \operatorname{tg}(\hat{B}) &= \frac{b}{c}, \\ \operatorname{sen}(\hat{C}) &= \frac{c}{a}, \\ \operatorname{cos}(\hat{C}) &= \frac{b}{a}, \\ \operatorname{tg}(\hat{C}) &= \frac{c}{b}.\end{aligned}$$

Quando aplicamos o Teorema de Pitágoras  $a^2 = b^2 + c^2$ , em um triângulo retângulo como da Figura 6, temos que

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}(\hat{B}))^2 + (\operatorname{cos}(\hat{B}))^2 &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2, \\ &= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}, \\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2}, \\ &= \frac{a^2}{a^2}, \\ &= 1.\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$(\operatorname{sen}(\hat{B}))^2 + (\operatorname{cos}(\hat{B}))^2 = 1. \quad (3.1)$$

A equação (3.1) é conhecida como Relação Fundamental da Trigonometria. “É evidente que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa” ((LIMA

et al., 1997) pág.216). Assim, os valores do seno e cosseno de um ângulo agudo são números situados entre 0 e 1.

Segundo (LIMA et al., 1997), a trigonometria pode ser usada como instrumento de cálculo na geometria, no qual é possível relacionar ângulos com comprimento de segmentos. Exemplificaremos por: considere um triângulo  $ABC$  qualquer, para determinar a sua altura em relação ao lado  $AB$ , ver Figura 7, podemos usar a seguinte relação:

$$\frac{h}{\overline{BC}} = \text{sen}(\hat{B}),$$

$$h = \text{sen}(\hat{B})\overline{BC}.$$

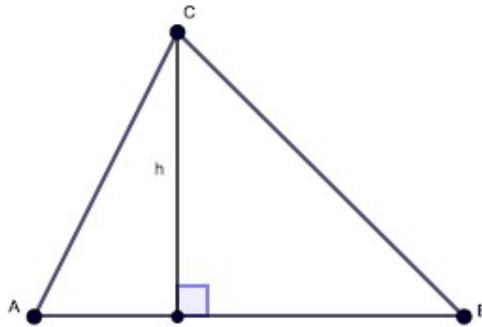


Figura 7 – Altura de um triângulo  $ABC$  qualquer. *Fonte: Própria autoria.*

Ao atentarmos à Relação Fundamental da Trigonometria equação (3.1), a informação que podemos extrair é que para todo ângulo  $\alpha$ , os valores  $\cos(\alpha)$  e  $\text{sen}(\alpha)$  são as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem do plano  $\mathbb{R}^2$ . Assim, podemos denotar a circunferência unitária por,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\},$$

onde  $-1 \leq x \leq 1$  e  $-1 \leq y \leq 1$ . Segundo (LIMA et al., 1997), a maneira natural de definir funções trigonométricas é a partir da função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$ , que relaciona cada número real  $t$  a um ponto  $E(t)$  da circunferência unitária de modo que:

$$E(t) = (x, y), \tag{3.2}$$

e mais estas considerações:

- $E(0) = (1, 0)$ .
- Se  $t > 0$ , percorremos a circunferência  $C$ , a partir do ponto  $(1, 0)$  no sentido anti-horário um caminho de comprimento  $t$ , e o ponto final deste caminho é chamado de  $E(t)$ .

- Se  $t < 0$ , percorremos a circunferência  $C$ , a partir do ponto  $(1, 0)$  no sentido horário um caminho de comprimento  $|t|$  e  $E(t)$  é a extremidade final deste caminho.

Para exemplificar, ((LIMA et al., 1997),pág.218) diz: “A função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$  pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência  $C$  (pensada como um carretel) de modo que o ponto  $0 \in \mathbb{R}$  caia sobre o ponto  $(1, 0) \in C$ ”. Observemos que o ponto  $t \in \mathbb{R}$  corresponde a um intervalo de comprimento  $l$  na reta, assim como a sua imagem  $E(t)$  percorre sobre a circunferência  $C$  um arco de mesma medida  $l$ . Desta forma, como o comprimento da circunferência é igual a  $2\pi$ , quando o ponto  $t$  corresponder a  $2\pi$  a sua imagem voltará ao ponto de partida, isto é, terá dado uma volta completa, sendo denotado por  $E(t + 2\pi) = E(t)$  ou ainda, para todo  $k \in \mathbb{Z}$  temos  $E(t + 2k\pi) = E(t)$ . É importante destacar que o valor de  $t$  aplicado a função de Euler corresponde a medida de um ângulo, e as duas medidas mais utilizadas são o grau e o radiano.

Ilustraremos através de figuras o comportamento da função  $E(t) = (x, y)$ . Serão considerados os valores para  $t$  no intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

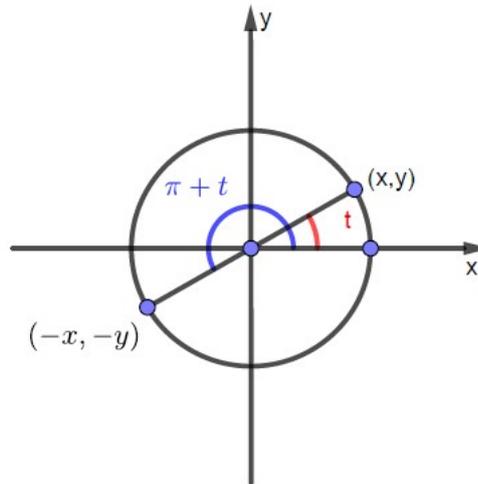


Figura 8 – Função  $E(\pi + t) = (-x, -y)$ . Fonte: Própria autoria.

Para (LIMA, 2013), as funções  $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\text{cos} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ , são definidas por:

$$E(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t)). \tag{3.3}$$

Fazendo uma analogia com a Equação (3.2), temos que  $x = \text{cos}(t)$  e  $y = \text{sen}(t)$ , e estes correspondem a abcissa e a ordenada do ponto  $E(t)$  da circunferência, respectivamente.

Vimos anteriormente que  $E(t)$  sempre voltará ao ponto de partida quando  $T = t + 2k\pi$ , desta forma,

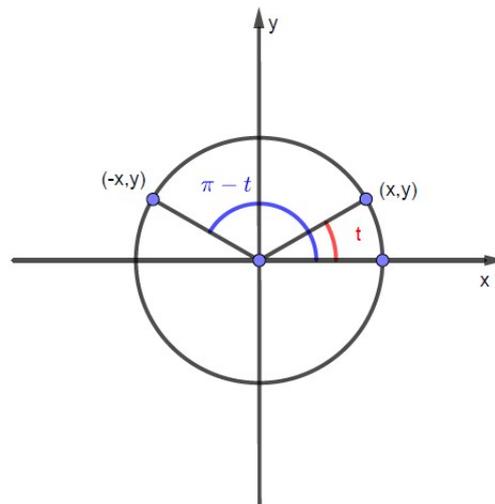


Figura 9 – Função  $E(\pi - t) = (-x, y)$ . Fonte: Própria autoria.

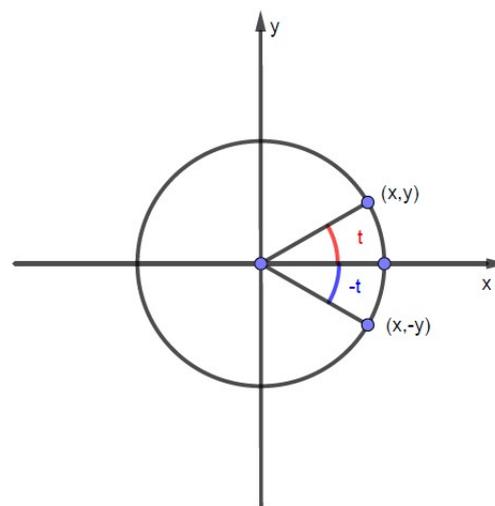


Figura 10 – Função  $E(-t) = (x, -y)$ . Fonte: Própria autoria.

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se periódica quando existe um número  $T \neq 0$  tal que  $f(t + T) = f(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se isto ocorre, então  $f(t + kT) = f(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $k \in \mathbb{Z}$ . O menor número  $T > 0$  [...] chama-se período da função  $f$ . As funções seno e cosseno são periódicas, de período  $2\pi$ .”((LIMA, 2013),pág.195)

Como as funções seno e cosseno são periódicas elas podem classificar-se em: par ou ímpar. Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é par quando  $f(-t) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e é considerada ímpar quando  $f(-t) = -f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Vamos destacar algumas propriedades da função  $E(t)$  utilizando interpretações geométricas, mas antes é válido ressaltar que o leitor deve dar atenção as coordenadas  $x$  e  $y$  do ponto final que determina os arcos, pois elas são equivalentes ao valores das funções  $\cos$  e  $\sin$

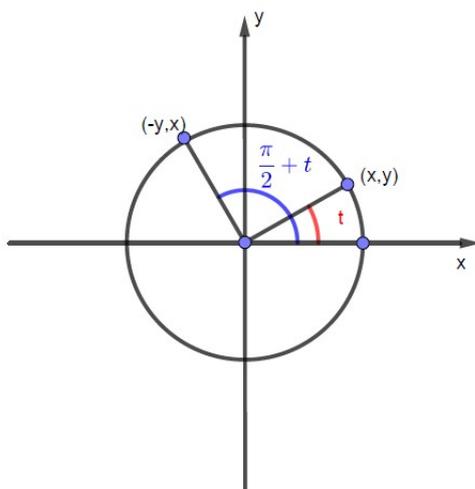


Figura 11 – Função  $E(\frac{\pi}{2} + t) = (-y, x)$ . Fonte: Própria autoria.

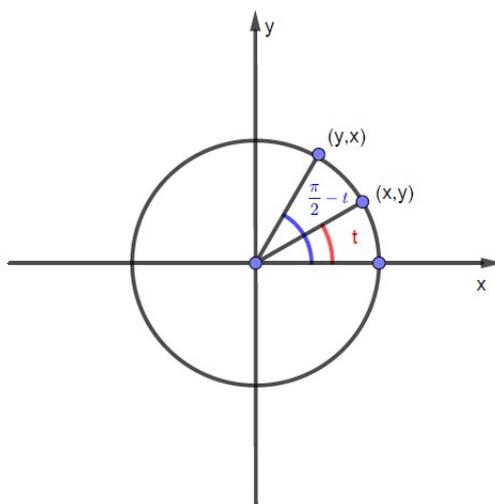


Figura 12 – Função  $E(\frac{\pi}{2} - t) = (y, x)$ . Fonte: Própria autoria.

do ponto, respectivamente. Isto é, os valores associados ao eixo  $OX$  são correspondentes a função  $\cos$  e os associados ao eixo  $OY$  correspondem a função  $\sin$ . Considerando a equação (3.3) e a Figura 10, teremos:

$$E(-t) = (\cos(-t), \sin(-t))$$

e

$$E(-t) = (x, -y).$$

Logo

$$\cos(-t) = \cos(t) \quad \text{e} \quad \sin(-t) = -\sin(t). \quad (3.4)$$

Portanto, a função cosseno é par e a função seno é ímpar.

Trabalhando com a interpretação geométrica da função  $E(t)$  podemos motivar mais relações envolvendo as funções seno e cosseno para determinados arcos.

Consideremos o arco de medida  $t$ , tal que  $E(t) = (x, y)$  como sendo o mesmo em todas as figuras, assim descreveremos os outros arcos em cada situação.

Na Figura 8, temos o arco  $\pi + t$ , as coordenadas de seu ponto final são  $(-x, -y)$ , estas por sua vez, são opostas as coordenadas de  $t$ . Logo podemos escrever,

$$\cos(\pi + t) = -\cos(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(\pi + t) = -\text{sen}(t). \quad (3.5)$$

Na Figura 9, temos o arco  $\pi - t$ , onde as coordenadas do ponto final são  $(-x, y)$ , neste caso a primeira coordenada é oposta a primeira coordenada de  $t$ , e a segunda de ambos é a mesma. Logo,

$$\cos(\pi - t) = -\cos(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(\pi - t) = \text{sen}(t). \quad (3.6)$$

Na Figura 11, temos o arco  $\frac{\pi}{2} + t$ , as coordenadas do ponto final deste arco possuem valores invertidos em relação ao arco  $t$ , isto é, a primeira coordenada tem a mesma medida que a segunda coordenada de  $t$ , e é negativa. A segunda coordenada tem a mesma medida da primeira coordenada de  $t$  e permanece positiva. Deste modo,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\text{sen}(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos(t). \quad (3.7)$$

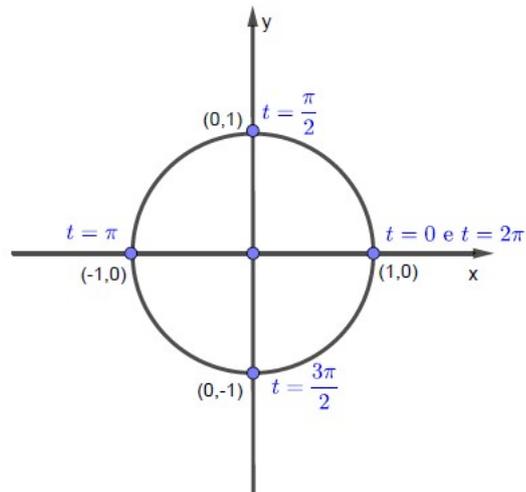
Na Figura 12, temos o arco  $\frac{\pi}{2} - t$ , as coordenadas do ponto final deste arco também possuem valores invertidos em relação ao arco  $t$ , trocando as posições. Logo,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \text{sen}(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t). \quad (3.8)$$

É importante destacar ao leitor que até o momento as considerações dadas às funções seno e cosseno atendiam a arcos quaisquer de valor  $t$ . As próximas considerações servirão para determinar: os valores de seno e cosseno dos arcos notáveis, as funções quocientes do seno e cosseno e as operações com arcos das três funções, seno, cosseno e tangente.

### Seno e cosseno dos arcos notáveis .

Quando  $t$  assume valores iguais a  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$ , dizemos que estes valores são os arcos notáveis, assim podemos determinar o seno e o cosseno destes arcos utilizando simples interpretações da Figura 13.

Figura 13 – Arcos Notáveis. *Fonte: Própria autoria.*

$$\cos(0) = 1 \quad \text{e} \quad \text{sen}(0) = 0, \quad (3.9)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad (3.10)$$

$$\cos(\pi) = -1 \quad \text{e} \quad \text{sen}(\pi) = 0, \quad (3.11)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad (3.12)$$

$$\cos(2\pi) = 1 \quad \text{e} \quad \text{sen}(2\pi) = 0. \quad (3.13)$$

### Funções quocientes do seno e cosseno.

A partir das funções seno e cosseno, derivam outras funções: tangente, cotangente, secante e cossecante. Tais funções são definidas através de quocientes e devido a isto, seus domínios possuem restrições no conjunto dos números reais, para os quais os denominadores sejam diferentes de zero. Vejamos cada função:

$$\text{tg}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}, \text{ se } \cos(t) \neq 0,$$

$$\begin{aligned}\cotg(t) &= \frac{\cos(t)}{\sin(t)}, \text{ se } \sin(t) \neq 0, \\ \sec(t) &= \frac{1}{\cos(t)}, \text{ se } \cos(t) \neq 0, \\ \operatorname{cosec}(t) &= \frac{1}{\sin(t)}, \text{ se } \sin(t) \neq 0.\end{aligned}$$

A função tangente possui uma restrição quando o valor da função cosseno é igual a zero, deste modo, quando o arco coincide com o eixo  $OY$  ou com valores iguais a  $\frac{\pi}{2}$  e seus múltiplos, a função tangente não pode ser definida. Assim podemos escrever o domínio da função tangente como:  $t \in \mathbb{R}; t \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$ , com  $K \in \mathbb{Z}$ .

Deixamos a cargo do leitor a busca por mais detalhes das outras funções quocientes em obras tais como: (BRANCO, 2013), (CARVALHO et al., 2020) e (SOUSA, 2017).

### Operações sobre arcos das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Consideremos a Figura 14 para determinar as operações de soma e diferença de dois arcos. Primeiramente, com as coordenadas dos pontos  $B(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$  e  $C(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$  iremos calcular a distância entre estes dois pontos, utilizando a fórmula:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

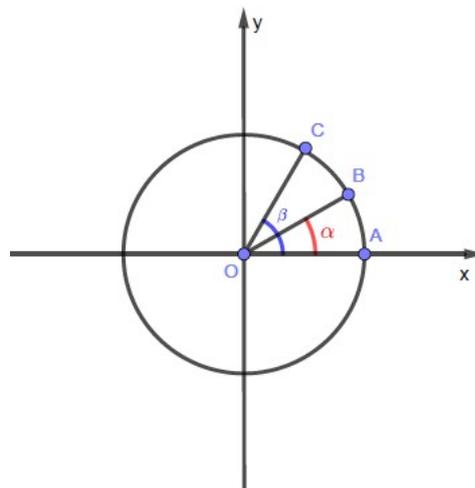


Figura 14 – Operações sobre arcos. *Fonte: Própria autoria.*

Assim,

$$\begin{aligned}d_{BC}^2 &= (\cos(\beta) - \cos(\alpha))^2 + (\operatorname{sen}(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha))^2, \\ &= \cos^2(\beta) - 2\cos(\beta)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\beta) - 2\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha), \\ &= 1 + 1 - 2(\cos(\beta)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)), \\ &= 2 - 2(\cos(\beta)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Agora, fazendo uma rotação nos eixos  $OX$  e  $OY$  (de um arco de medida  $\alpha$ ) da Figura 14, obteremos um novo eixo  $OX'$  que contenha  $B$ , e as novas coordenadas de  $B$  serão  $(1, 0)$  e de  $C$  serão  $(\cos(\beta - \alpha), \text{sen}(\beta - \alpha))$ . Assim, calcularemos novamente a distância entre estes dois pontos,

$$\begin{aligned} d_{BC}^2 &= (\cos(\beta - \alpha) - 1)^2 + (\text{sen}(\beta - \alpha) - 0)^2, \\ &= \cos^2(\beta - \alpha) - 2\cos(\beta - \alpha) \cdot 1 + 1 + \text{sen}^2(\beta - \alpha), \\ &= 1 + 1 - 2\cos(\beta - \alpha), \\ &= 2 - 2\cos(\beta - \alpha). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Igualando (3.14) e (3.15), teremos:

$$\begin{aligned} 2 - 2(\cos(\beta)\cos(\alpha) + \text{sen}(\beta)\text{sen}(\alpha)) &= 2 - 2\cos(\beta - \alpha), \\ \cos(\beta - \alpha) &= \cos(\beta)\cos(\alpha) + \text{sen}(\beta)\text{sen}(\alpha). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Quando fazemos a substituição de  $\alpha$  por  $-\alpha$  em (3.16) temos:  $\cos(\beta - (-\alpha)) = \cos(\beta)\cos(-\alpha) + \text{sen}(\beta)\text{sen}(-\alpha)$ . Como a função cosseno é par e a função seno é ímpar, podemos escrever:

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) - \text{sen}(\beta)\text{sen}(\alpha). \quad (3.17)$$

Para definirmos  $\text{sen}(\beta + \alpha)$ , primeiramente usaremos (3.8), onde

$$\text{sen}(\beta + \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\beta + \alpha)\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{sen}(\beta + \alpha) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \alpha\right), \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos(\alpha) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\text{sen}(\alpha), \\ &= \text{sen}(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\text{sen}(\alpha). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Quando fazemos a substituição de  $\alpha$  por  $-\alpha$  em (3.18) temos:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\beta - \alpha) &= \text{sen}(\beta + (-\alpha)), \\ &= \text{sen}(\beta)\cos(-\alpha) + \cos(\beta)\text{sen}(-\alpha), \\ &= \text{sen}(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\text{sen}(\alpha). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para a função tangente, como esta é quociente das funções seno e cosseno, usaremos (3.17), (3.18) para determinar  $\text{tg}(\beta + \alpha)$ , assim

$$\begin{aligned} \text{tg}(\beta + \alpha) &= \frac{\text{sen}(\beta + \alpha)}{\cos(\beta + \alpha)}, \\ &= \frac{\text{sen}(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\text{sen}(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha) - \text{sen}(\beta)\text{sen}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dividindo o numerador e o denominador da equação (3.20) por  $\cos(\beta)\cos(\alpha)$ , teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\beta + \alpha) &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}}{\frac{\cos(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)} - \frac{\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}}, \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\beta) + \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}(\beta)\operatorname{tg}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substituindo  $\alpha$  por  $-\alpha$  em (3.21), teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\beta - \alpha) &= \operatorname{tg}(\beta + (-\alpha)), \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\beta) + \operatorname{tg}(-\alpha)}{1 - \operatorname{tg}(\beta)\operatorname{tg}(-\alpha)}, \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\alpha)}{1 + \operatorname{tg}(\beta)\operatorname{tg}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Segundo ((BRANCO, 2013),pág.54),“muitas vezes é conveniente que se tenha expressões para  $\operatorname{sen}(2a)$ ,  $\cos(2a)$  e  $\operatorname{tg}(2a)$ , quando são conhecidas as funções em  $a$ ”. Deste modo, iremos considerar  $\alpha = \beta$ , em (3.17, 3.18 e 3.21). Logo,

$$\begin{aligned} \cos(2\beta) &= \cos(\beta + \beta), \\ &= \cos(\beta)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\beta), \\ &= \cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\beta). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Agora, pela Relação Fundamental (3.1) aplicada à equação (3.23), temos:

$$\cos(2\beta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\beta). \quad (3.24)$$

Para a função seno, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\beta) &= \operatorname{sen}(\beta + \beta), \\ &= \operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta) + \cos(\beta)\operatorname{sen}(\beta), \\ &= 2\operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para a função tangente, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\beta) &= \operatorname{tg}(\beta + \beta), \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\beta) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\beta)\operatorname{tg}(\beta)}, \\ &= \frac{2\operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}^2(\beta)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

As relações (3.24, 3.25 e 3.26) são conhecidas como fórmulas de arco duplo.

## 4 Aplicações do número $\pi$

Iremos abordar algumas aplicações atribuídas ao número  $\pi$ , sendo estas avançadas e elementares. As avançadas são encontradas na literatura de nível superior, podendo servir de propostas para a elaboração e execução de projetos de pesquisa relevantes para que acadêmicos possam desenvolver ao longo de sua graduação. Já as elementares são encontradas na literatura de ensino fundamental anos finais e ensino médio, servindo estas como sugestão de exercícios e atividades para serem trabalhados em sala.

### 4.1 Avançadas

Nos dias de hoje é difícil encontrar uma pessoa que não tenha acesso a uma tecnologia, que nunca tenha visto uma imagem digital. Agora, mais do que nunca, com este cenário de pandemia que estamos vivenciando, o mundo todo “despertou um novo olhar para estas tecnologias”, é visível como pessoas tiveram que se reinventar e ainda buscam enquadrar neste meio tecnológico, o que antes era encarado como hobby, hoje é necessário para a própria sobrevivência. Mas diante isto, o que temos para mostrar de matemática, ou do emprego dela nestas situações? Ora a imagem que recebemos em nossos celulares, tablets, computadores e televisores, para chegar até nós houve muita matemática estudada e aplicada desde anos atrás.

Segundo (PUPIN; SILVA, 2011) a ideia de representar funções através de séries surgiu na Índia por volta do século XIV, na qual foram desenvolvidas técnicas que hoje conhecemos como série de potências, são exemplos as séries de Taylor e de Maclaurin, que surgem como limite das séries polinomiais. Existem outros tipos de séries que são utilizadas para representar funções periódicas definidas na reta em termos de senos e cossenos, que foram estudadas sistematicamente por Jean-Baptiste Joseph Fourier e por isso são conhecidas como séries de Fourier.

**Definição 11.** Se uma função  $f$  tem período  $P$ , então os coeficientes de Fourier  $c_n$  de  $f$  são definidos por

$$c_n = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) e^{-\frac{i2\pi nt}{P}} dt,$$

para todo  $n$  inteiro. Assim, usando os coeficientes  $c_n$  podemos definir a série

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{i2\pi nt}{P}},$$

chamada Série de Fourier de  $f$ .

Em (NASCIMENTO, 2001), é destacado que a aplicação da transformada discreta de Fourier (DFT) em processamento digital de sinais teve um aumento no ano de

1965, quando (Cooley e Turkey) apud (NASCIMENTO, 2001) desenvolveram o primeiro algoritmo rápido que implementava a DFT eficientemente. E com o crescimento rápido da tecnologia em dispositivos digitais houve várias modificações, melhorias e ajustes ao algoritmo criado. Posteriormente em 1974, foi criado o algoritmo que provocou um impacto significativo na mesma área de processamentos digitais de sinais, chamado transformada cosseno discreta (DCT).

A transformada cosseno discreta tem como principal característica a decomposição de um sinal em suas componentes de frequência, agrupando os maiores valores nas componentes de baixa frequência, e diminuindo de valor mais rapidamente com o crescimento da frequência. Essa característica foi, primeiramente, usada de forma eficiente em projetos de filtros e posteriormente, pode também ser usada na compressão de imagens. ((NASCIMENTO, 2001) pág. 15)

A transformada cosseno discreta é muito utilizada em processamento de imagens tais como: JPEG e MPEG, pois ela apresenta uma grande eficiência computacional, além de suas áreas de atuação específica, como: em análise espectral de sequências reais, em solução de alguns problemas de valores de limites e em processamento de sinais no domínio da transformada. No processamento de imagens a transformada é aplicada a pequenos blocos de pixels, como:  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ , ..., do que na imagem como um todo, devido ao fato que a computação da transformada em pequenos blocos é mais fácil e a correlação entre pixels vizinhos é maior.

Neste momento, sinto a necessidade de abordar algo mais sobre imagem para proporcionar ao leitor um melhor entendimento do trabalho. E assim, segundo (GONZALEZ; WOODS, 2000) o processamento de imagens digitais ganha destaque em duas áreas de aplicação: melhoria de informação visual para a interpretação humana e processamentos de dados de cena para percepção automática através de máquinas.

A primeira área foi desenvolvida desde os meados de 1920, buscando sempre melhorar a qualidade visual das figuras, seu emprego ocorre em várias áreas de estudo, destacando na medicina, geografia, arqueologia, física, astronomia e outros. A segunda, baseia-se em desenvolver procedimentos para extrair de uma imagem as informações adequadas para o processamento computacional. Os exemplos de informações são: os momentos estatísticos, os coeficientes da transformada de Fourier e medidas de distância multidimensionais. A aplicação desta área pode ser percebida em: reconhecimento automático de caracteres, visão computacional industrial para a montagem e inspeção de produtos, processamento automático de impressões digitais, processamento de imagens aéreas e de satélites para previsão do tempo e monitoramento de plantio, entre outros.

O processamento das imagens digitais começou a ganhar destaque a partir do momento que surgiram os computadores digitais de grande porte.

O emprego de técnicas de computação para o melhoramento de imagens produzidas por uma sonda espacial iniciou-se no Jet Propulsion

Laboratory (Pasadena, California) em 1964, quando imagens da Lua, transmitidas pelo Ranger 7, foram processadas por um computador para corrigir vários tipos de distorção de imagem inerentes à câmera de televisão a bordo. ((GONZALEZ; WOODS, 2000)pág.1)

O processamento digital de imagem vem ganhando destaque em estudos pelo mundo, despertando grande interesse comercial devido aos campos de aplicação que abrange, segundo (NASCIMENTO, 2001) as áreas de aplicação que mais destacam são: reconhecimento de padrão, enriquecimento de imagens, tratamento de sinais em estúdio, transmissão comercial de tv digital, sensoriamento remoto através de análise e interpretação de imagens recebidas via satélite, digitalização de arquivos históricos, redes de comunicação de computadores, robótica, inspeção industrial automatizada, processamento de imagens médicas, radar e sonar, etc.

Este destaque não ocorre por acaso, pois é devido ao desenvolvimento de novos algoritmos de processamento que estão contemplando as diversas áreas de interesse. Os algoritmos de maior destaque, abrangem as áreas de modelamento e representação de imagens, restauração, interpolação, análise de textura, codificação e compressão.

... o processamento digital de imagens para transmissão ou armazenamento será vantajoso caso se tenha uma técnica eficiente de codificação, que de alguma forma, remova as informações redundantes e irrelevantes contidas na imagem para minimizar a taxa de bits de representação da mesma. Portanto, a taxa de compressão da imagem codificada está relacionada tanto ao objetivo quanto à área de aplicação. ((NASCIMENTO, 2001), págs 2-3)

Para alcançar o melhor desempenho possível, muitas técnicas estão sendo propostas e desenvolvidas com o objetivo de reduzir a taxa de bits na codificação de sinais de imagens. Entre as técnicas, o presente trabalho irá considerar as chamadas “transformadas”, com maior ênfase a Transformada Cosseno Discreta (DCT).

Quando as imagens são codificadas através da transformada elas sofrem primeiramente uma transformação de domínio para um espaço mais apropriado para a aplicação, onde possibilite a exploração de modo eficiente das características da imagem resultante transformada. Segundo (NASCIMENTO, 2001), a DCT é a transformada mais utilizada em aplicações de processamento digital de imagens, devido a sua maior eficiência no descorrelacionamento das amostras vizinhas, assim como pela existência de algoritmos rápidos e econômicos na implementação em circuitos integrados.

O objetivo em fazer a aplicação da DCT em processamentos de imagem baseia na extração de redundância existente entre pixels vizinhos, isto é, descartar o que há de excesso, através da descorrelação entre os mesmos. O problema em fazer em toda imagem é que a medida que os pixels distanciam-se, o descorrelacionamento torna-se mais difícil e há a necessidade de aplicar a DCT em blocos de tamanhos pré-definidos, onde por sua vez, gerará blocos de coeficientes transformados, sendo que alguns coeficientes concentram maior energia do que outros, assim como, cada coeficiente apresenta sua própria variância. A estes coeficientes são aplicadas diversas operações que possam apresentar diferentes objetivos, como: decimação, interpolação, filtragem, compressão e etc. Ao processamento de

imagens que tem como objetivo a compressão é aplicado sobre os coeficientes transformados operações de quantização, podendo estas serem: escalar, vetorial ou diferencial.

Na quantização escalar, cada coeficiente transformado é representado por um número de bits de acordo com uma tabela de alocações de bits para aquele coeficiente. Na quantização vetorial, dois ou mais coeficientes são conjuntamente representados por um escalar, que representa um conjunto de sequências previamente estabelecidas denominado dicionário (codebook). Na quantização diferencial, cada coeficiente é quantizado segundo uma lei de quantização previamente estabelecida, de acordo com a importância da informação contida em cada coeficiente. Como nem todos os coeficientes possuem informações imprescindíveis, os coeficientes que possuem informações irrelevantes podem ser descartados sem prejuízo significativo da qualidade da imagem recuperada. ((NASCIMENTO, 2001), pág. 5)

Assim, quando a imagem passa por uma compressão, o número de coeficientes passa a ser reduzido, não comprometendo a recuperação da imagem codificada de modo que esta será de boa qualidade. Para que ocorra a recuperação, a imagem codificada passa pelo processo inverso, no qual, os coeficientes quantizados são recuperados a partir das palavras códigos, estas palavras são determinadas através de um processo de mapeamento de equivalência, baseado na estatística do coeficiente quantizado onde é usado o código de Huffman<sup>1</sup>.

E os coeficientes transformados são recuperados através da quantização inversa, de modo que as amostras aproximadas dos blocos originais são recuperadas pela transformada inversa.

Quando ocorre erros na codificação são produzidas descontinuidades entre os blocos da imagem recuperada, tais descontinuidades surgem pelo fato das amostras de fronteira de um bloco não ajustar perfeitamente às amostras de fronteira dos blocos adjacentes à ele. Ocasionalmente uma sensação desagradável na imagem recuperada. Este efeito é denominado como efeito de bloco, e com a finalidade de reduzir este efeito, muitos algoritmos são desenvolvidos buscando a máxima compressão da imagem possível.

Na computação segundo (GALIAN, 2020) as compressões visam diminuir a quantidade de bits necessários para armazenar um arquivo e ao longo dos anos muitos métodos foram desenvolvidos para otimizar o armazenamento dos dispositivos eletrônicos.

Nos dias atuais um dos métodos mais utilizados é o JPEG, (FILHO; NETO, 1999) relata que o JPEG foi projetado para comprimir imagens naturais e coloridas ou monocromáticas com até  $65536 \times 65536$  pixels. A técnica é utilizada na otimização de fotografias, figuras e imagens naturais, que possuem tons contínuos de cores ou níveis de cinza, não devendo ser utilizado em imagens que possuem um valor menor que 16 níveis de cinza. Ela baseia-se na DCT, podendo ocorrer perdas, cujo grau pode ser variado devido aos ajustes dos parâmetros de compressão. O algoritmo explora as limitações do olho humano, onde este

<sup>1</sup> Trata-se de uma codificação de caracteres que permite compactar arquivos de texto, ou seja, representar um arquivo de texto  $A$  por um arquivo de bits  $B$  bem menor. <[https://www.ime.usp.br/~pf/analise\\_de\\_algoritmos/aulas/huffman.html](https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/huffman.html)>

por sua vez é mais sensível a variação de brilho do que a variação de cor. Esta técnica possui quatro modos de operação: sequencial (a imagem é codificada em uma única varredura, da esquerda para a direita e do alto para baixo), progressiva (a imagem é codificada em várias varreduras, onde aumenta a qualidade e a resolução a cada nova varredura), hierárquica (a imagem é codificada em múltiplas resoluções) e sem perda.

Para ilustrar a compressão JPG, utilizaremos as imagens e a tabela de (GALIAN, 2020).



Figura 15 – Paisagem usada para ilustrar o funcionamento da compressão JPEG. *Fonte:* (GALIAN, 2020)

Matriz de quantização	% de dados salvos	Ruído $\times 10^5$
1	16	3,19
2	19	1,33
3	11	8,96
4	28	1,14

Figura 16 – Tabela dos resultados após aplicação da Figura 15. *Fonte:*(GALIAN, 2020)

Quando a compressão JPEG é realizada, (GALIAN, 2020) apresenta a tabela na Figura 16, que mostra a porcentagem aproximada dos dados salvos e os ruídos de qualidades comparados com a imagem original, Figura 15.

Ao observarmos a tabela Figura 16, é possível notar que os valores das colunas (2 e 3 no sentido esquerda para a direita) relacionam-se de tal forma que a medida que o número da coluna 2 aumenta o seu correspondente na coluna 3 diminui. Deste modo é necessário pré-estabelecer a forma que será adotada para obter o resultado desejado.

A seguir colocaremos as Figuras 17, 18, 19 e 20, que (GALIAN, 2020) apresentou como sendo o resultado da compressão JPEG, quanto a matriz de quantização da imagem original.



Figura 17 – Imagem do resultado da matriz de quantização 1. Fonte: (GALIAN, 2020).



Figura 18 – Imagem do resultado da matriz de quantização 2. Fonte: (GALIAN, 2020).

Para ter o entendimento da DCT é necessário determinar a Transformada de Fourier (FT). Basearemos em (NASCIMENTO, 2001), consideremos uma função contínua  $x(t)$  definida no intervalo  $-\infty < t < \infty$ , a FT desta função é dada por

$$X(\omega) \equiv F[x(t)] = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (4.1)$$

com  $\omega = 2\pi f$  e  $j = \sqrt{-1}$ , onde  $\omega$  é a frequência em radianos e  $f$  é a frequência em hertz. A transformada inversa é definida como:

$$x(t) \equiv F^{-1}[X(\omega)] = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.2)$$



Figura 19 – Imagem do resultado da matriz de quantização 3. *Fonte: (GALIAN, 2020).*



Figura 20 – Imagem do resultado da matriz de quantização 4. *Fonte: (GALIAN, 2020).*

As equações (4.1) e (4.2) formam o par de transformada de Fourier direta e inversa. Agora consideremos  $x(t)$  somente a parte positiva com  $t \geq 0$  e tomemos uma função  $y(t)$  que seja a extensão par de  $x(t)$ , tal que

$$y(t) = x(|t|), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

isto é,

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } t \geq 0, \\ x(-t) & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Assim, a FT de  $y(t)$  é escrita como

$$Y(\omega) = F[y(t)] = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.5)$$

A integral da equação (4.5) pode ser estudada em dois intervalos  $(-\infty, 0]$  e  $[0, \infty)$ . Assim de (4.4) e (4.5), temos:

$$Y(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^0 x(-t)e^{-j\omega t} dt + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4.6)$$

Fazendo a troca de variável de integração no intervalo  $(-\infty, 0)$  de  $t$  para  $-t$ , teremos:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \\ Y(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[ \int_0^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right], \\ Y(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[ \int_0^{\infty} x(t) (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) dt \right], \end{aligned}$$

onde

$$\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \text{Re}[e^{j\omega t}],$$

e pela fórmula de Euler, temos:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t),$$

assim,

$$\text{Re}[e^{j\omega t}] = \cos(\omega t), \quad (4.7)$$

logo,

$$Y(\omega) = 2\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\infty} x(t)\cos(\omega t) dt. \quad (4.8)$$

A equação (4.8) determina a Transformada Cosseno de Fourier (FCT) de  $x(t)$  sendo representada por

$$X_c(\omega) = F_c[x(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x(t)\cos(\omega t) dt. \quad (4.9)$$

Como  $X_c(\omega)$  é uma função par de  $\omega$ , podemos aplicar a Transformada inversa de Fourier na equação (4.9) para  $t \geq 0$ , obtemos

$$y(t) = x(t) \equiv F_c^{-1}[X_c(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} X_c(\omega)\cos(\omega t) d\omega. \quad (4.10)$$

As equações (4.9) e (4.10) definem o par de transformada cosseno de Fourier de  $x(t)$ .

Em ((NASCIMENTO, 2001) pág. 14), encontramos duas interpretações para a Transformada Discreta de Fourier, a primeira é que a DFT é uma representação de uma sequência  $x[n]$  como sendo uma combinação linear de exponenciais complexas relacionadas harmonicamente, e a segunda é que a DFT corresponde a discretização da Transformada

de Fourier de uma sequência discreta  $x[n]$ . Consideremos uma sequência  $x[n]$  finita de comprimento  $N$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , sendo a representação do domínio da frequência, a DFT desta sequência é definida em (NASCIMENTO, 2001) como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi k}{N} n}, \quad (4.11)$$

com  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , e a transformada inversa de (4.11) é definida como:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi n}{N} k},$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

O algoritmo original da DCT tem como base a Transformada Rápida de Fourier (FFT), segundo (FILHO; NETO, 1999), é um algoritmo cujo principal objetivo é de reduzir o custo computacional do cálculo da FT de  $N$  pontos, de modo que substitui o processo convencional de cálculo (onde é realizado uma quantia proporcional a  $N^2$  de multiplicações e adições), por um engenhoso arranjo que combina transformadas parciais e cujas quantias de operações realizadas são proporcionais a  $N \log_2 N$ .

Consideremos a equação (4.9), e chamaremos o núcleo da FCT de:

$$K_c(\omega, t) = \cos(\omega t). \quad (4.12)$$

Deste modo as equações (4.9) e (4.10) podem ser reescritas como:

$$X_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x(t) K_c(\omega, t) dt, \quad (4.13)$$

e

$$y(t) = x(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} X_c(\omega) K_c(\omega, t) d\omega, \quad (4.14)$$

com  $t \geq 0$ .

Consideremos,

$$\omega_m = 2\pi m \Delta f,$$

$$t_n = n \Delta t,$$

onde  $\Delta f$  representa uma unidade de amostra da frequência  $f$  e  $\Delta t$  uma unidade de intervalo de amostra no tempo  $t$ . Deste modo  $\omega_m$  e  $t_n$  representam as amostras angulares da frequência e do tempo respectivamente, com  $m$  e  $n$  inteiros. Assim, podemos reescrever a equação (4.12) como:

$$K_c(\omega_m, t_n) = K_c(m, n) = \cos(2\pi \cdot m \cdot \Delta f \cdot n \cdot \Delta t). \quad (4.15)$$

Nas aplicações práticas, os dados utilizados na transformada cosseno são amostras de duração finita, neste caso  $\Delta f \cdot \Delta t = \frac{1}{2N}$ , onde  $N$  é um número inteiro. Portanto, a equação (4.15) pode ser representada por:

$$K_c(m, n) = \cos\left(2\pi \cdot m \cdot n \cdot \frac{1}{2N}\right),$$

$$K_c(m, n) = \cos\left(\frac{\pi \cdot m \cdot n}{N}\right), \quad (4.16)$$

com  $m, n = 0, 1, \dots, N$ . A equação (4.16) representa o núcleo da transformada cosseno de Fourier discretizada. A discretização de tempo de duração finita é obtida quando divide-se os  $N$  intervalos de tempo em partes  $\Delta t$  de duração cada. Assim, incluindo os extremos existem  $N + 1$  pontos de amostras para serem analisados.

Consideremos o núcleo discreto da equação (4.16) como sendo os elementos de uma matriz de transformação de tamanho  $(N + 1) \times (N + 1)$  elementos, denotaremos esta matriz por  $[M]$  e os  $mn$ ésimos desta matriz serão obtidos através de:

$$[M]_{m \times n} = \cos\left(\frac{\pi \cdot m \cdot n}{N}\right), \quad (4.17)$$

com  $m, n = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Agora, consideremos que os  $N + 1$ , pontos de amostras discretas pudessem ser representados por um vetor coluna  $x = [x(0), x(1), \dots, x(N)]^T$  e quando aplicamos a equação (4.17) nesse vetor, obteremos um vetor coluna  $X = [X(0), X(1), \dots, X(N)]^T$ , tal que :

$$X = [M]_{m \times n} \cdot x,$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N) \end{bmatrix} = [M]_{m \times n} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Assim, na forma de elemento a elemento é representado por:

$$X(m) = \sum_{n=0}^N \cos\left(\frac{\pi mn}{N}\right) x(n), \quad (4.19)$$

com  $m = 0, 1, \dots, N$ . O vetor  $x$  sofre uma transformação discreta, deste modo a equação (4.19) é considerada uma transformada cosseno discreta.

A utilização da transformada DCT pode ser observada em muitas áreas relacionadas com a compressão de imagens, é o caso do reconhecimento facial. O reconhecimento facial, vêm sendo muito usado, tanto na autenticação quanto na identificação de um indivíduo, de modo que são analisados os traços físicos e identificadas as características naturais de cada ser. “Assim, é possível estabelecer a identidade de um usuário baseado em que ele é

ao invés de em o que ele possui ou de que ele lembra. A face é um dos traços biométricos físicos menos intrusivos.” ((MARINHO, 2012), pág. 19).

O processo de reconhecimento facial consiste em identificar o indivíduo através da análise de sua face, onde é realizada uma comparação com outras faces pré-cadastradas em um banco de dados.

O leitor poderá utilizar as obras de (MARINHO, 2012) e (MATOS, 2008), para maiores detalhes sobre o reconhecimento facial.

Outra utilização atribuída a DCT, é em comprimir os sinais do eletrocardiograma (ECG). O ECG é o registro das atividades elétricas produzidas pelo coração, captadas e medidas através de eletrodos que são colocados na superfície do corpo.

O ECG é um dos sinais fisiológicos mais utilizados para diagnóstico e monitorização. A enorme quantidade de eletrocardiogramas coletados diariamente em todo o mundo confere especial interesse à compressão deste tipo de sinal. ((BATISTA, 2002), pág. 4).

Assim, é importante destacar que o processo de redução de dados deste exame deve preservar as características relevantes do exame original, onde alterações neste caso, podem levar a diagnósticos errados.

Para (DIAS, 2017) o ECG pode ser utilizado com outras finalidades que não sejam de diagnósticos clínicos. O autor destaca que o sinal tem a possibilidade de ser utilizado como marcador biométrico, empregado na identificação de pessoas. Deixaremos algumas referências que o leitor possa buscar maiores detalhes do assunto: (BATISTA; MELCHER; CARVALHO, 2011) e (TEODORO, 2016).

## 4.2 Elementares

O ensino da geometria no ensino fundamental da rede pública até pouco tempo era tratado como algo não essencial. Já hoje, diante das mudanças que os currículos estão passando, inclusive a forma de como é passado para as escolas, o ensino deve-se basear na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e assim a tendência é que os conteúdos sejam comuns a todos os estudantes.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).((MEC, 2018) , pág.7).

Ao observarmos o documento (MEC, 2018), na parte destinada à matemática do ensino fundamental - anos finais, compreendido entre as páginas 298 à 319, podemos perceber que o ensino da geometria com ênfase na trigonometria aparece nos objetos de

conhecimento da seguinte maneira: para o 7º ano é proposto o estudo da circunferência como lugar geométrico; as relações entre ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal; triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos. Para o 8º ano é proposto o estudo da congruência de triângulos; construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30°. Para o 9º ano é proposto o estudo das relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo; semelhança de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo.

Segundo (MEC, 2018), a área da matemática do ensino fundamental, é centrada na compreensão de conceitos e procedimentos em diferentes campos e também no desenvolvimento computacional, no qual visa a resolução e a formulação de problemas em diversos contextos. Já para o ensino médio, a área agora é denominada matemática e suas tecnologias, e tem por objetivo que os estudantes consolidem os conhecimentos desenvolvidos no ensino fundamental e agreguem novos, ampliando os recursos para a resolução de problemas mais complexos, os quais necessitam de mais reflexão e abstração, também possibilite aos estudantes a construir uma visão mais integrada da matemática, em suas aplicações à realidade e o relacionamento com outras áreas do conhecimento.

No ensino fundamental é esperado que seja desenvolvido as competências específicas da matemática, (MEC, 2018), atribui oito competências específicas para esta etapa, dentre elas, destacamos duas que apresentam maior afinidade com o ensino da trigonometria, sendo elas:

**Competência 3-** Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

**Competência 5-** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Todas as competências possuem habilidades associadas a elas com o propósito de serem desenvolvidas com os alunos, “As habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares.” ((MEC, 2018), pág. 29) . Analisando (MEC, 2018), das habilidades relacionadas para serem desenvolvidas com os alunos nos anos finais do ensino fundamental, destacaremos as mais próximas do ensino da trigonometria nos referentes anos escolares:

Habilidades 7º ano

**(EF07MA24)** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF07MA33) Estabelecer o número  $\pi$  como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

Habilidades 8º ano

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $30^\circ$  e polígonos regulares.

Habilidades 9º ano

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso inclusive de softwares de geometria dinâmica.

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

A estrutura do currículo de matemática do ensino médio segundo a **BNCC**, é dividido em cinco competências específicas e estas por sua vez possuem habilidades associadas. A orientação é que tais competências não precisam seguir um cronograma rígido para serem trabalhadas. “As competências não tem uma ordem preestabelecida. Elas formam um todo conectado, de modo que o desenvolvimento de uma requer em determinadas situações, a mobilização de outras”.((MEC, 2018),pág.530)

Quando fazemos uma análise das competências específicas, percebemos que a competência que agrega mais conteúdos de trigonometria é a seguinte:

**Competência Específica 3-** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Para o desenvolvimento desta competência as habilidades indicadas estão relacionadas à “interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros”. ((MEC, 2018), pág.535)

Destacaremos as habilidades relacionadas a esta competência que abrange a trigonometria, sendo elas:

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluído as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Vamos propor atividades que possam ser trabalhadas em sala de aula atendendo algumas habilidades que foram citadas anteriormente. Escolhemos o 7º ano para formu-

larmos as atividades, uma vez que, é neste ano escolar que o conceito de medida da circunferência é introduzido e acreditamos na necessidade da formação de uma base sólida deste conteúdo para proporcionar uma aprendizagem de qualidade e significativa dos próximos conteúdos relacionados. Deste modo, serão propostas atividades para atender a habilidade **(EF07MA33)**. Inicialmente, o professor irá instigar os alunos a definirem circunferência, a argumentarem do uso da forma circular no dia a dia, e até mesmo buscar textos ou vídeos explicativos em páginas da internet, deixaremos a sugestão de uma delas <<http://www.ime.unicamp.br/~apmat/numero-pi/>>, posteriormente o professor poderá usar a ferramenta de geometria dinâmica GeoGebra, que pode ser instalada no computador como também pode ser acessada online na página <<https://www.geogebra.org/>>

### DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Primeiramente, iremos acessar a página do GeoGebra pelo link <<https://www.geogebra.org/>>, então aparecerá uma tela como a Figura 21. Para dar continuidade na navegação da página devemos clicar no canto superior direito em *Entrar no sistema*. Como já possuímos uma conta cadastrada, será solicitado nome de usuário e senha, caso o leitor não possua uma conta basta clicar em *Criar uma conta*.

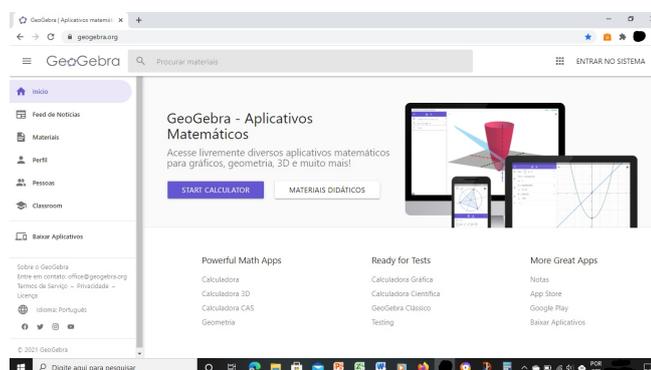


Figura 21 – Passo 1- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: *Própria autoria*.

Uma vez que tenha acessado a conta do GeoGebra, aparecerá uma tela como a Figura 22 e selecionaremos *start calculator*.

A tela que irá aparecer é como a Figura 23, e clicaremos no ícone de nove pontos no canto superior direito e depois selecionamos *GeoGebra Classic*.

Agora iremos selecionar o comando *Segmento com comprimento fixo* e traçaremos três segmentos de medidas diferentes, na Figura 24 temos  $\overline{AB} = 2cm$ ,  $\overline{CD} = 3cm$  e  $\overline{EF} = 4cm$ .

Realizados os comandos anteriores, selecionaremos o comando *Reflexão em relação*

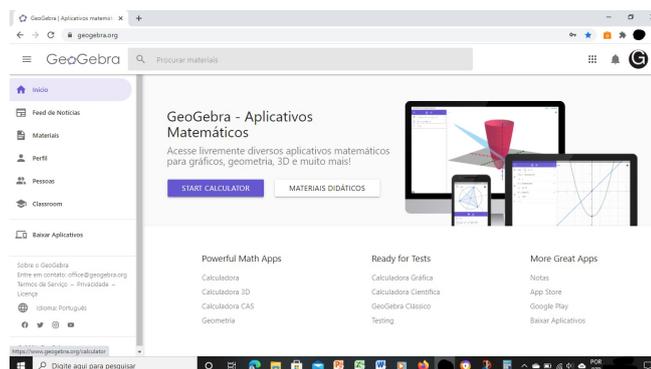


Figura 22 – Passo 2- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

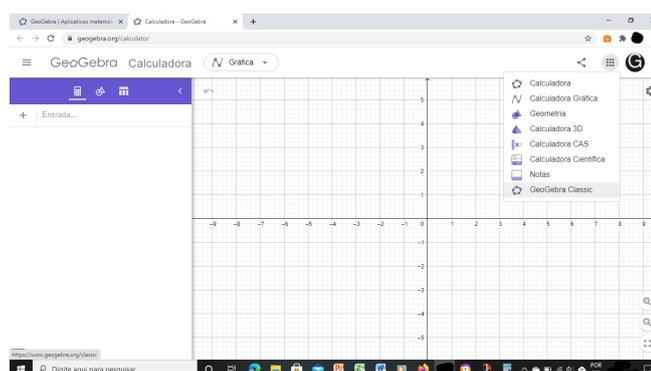


Figura 23 – Passo 3- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

a um ponto como a Figura 25. Assim, iremos selecionar o ponto  $B$  para refletir em torno do ponto  $A$ , o ponto  $F$  refletirá em torno do ponto  $E$  e o ponto  $D$  refletirá em torno do ponto  $C$ , como ilustra a Figura 26.

Selecionaremos o comando *Segmento*, ver Figura 27 e determinaremos os segmentos  $\overline{B'B}$ ,  $\overline{F'F}$  e  $\overline{D'D}$ , como ilustra a Figura 28.

Em seguida, selecionaremos o comando *Círculo dados centro e um de seus pontos*, ver Figura 29 e então iremos selecionar o ponto  $A$  (centro) e o ponto  $B$ , o ponto  $C$  (centro) e o ponto  $D$ , o ponto  $E$  (centro) e o ponto  $F$ , deste modo determinaremos as três circunferências.

Agora, selecionaremos o comando *Distância, comprimento ou perímetro* como na Figura 30 e iremos determinar as medidas dos diâmetros das circunferências da seguinte

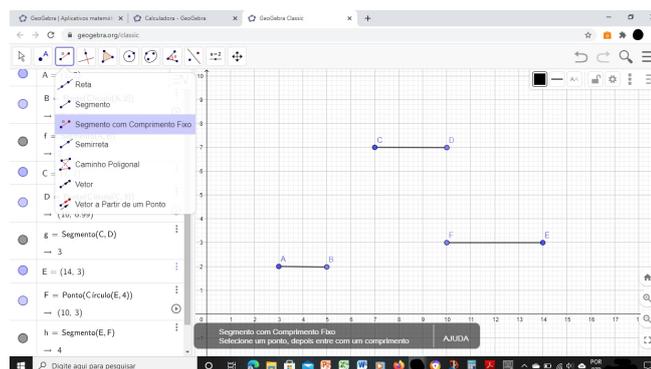


Figura 24 – Passo 4- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

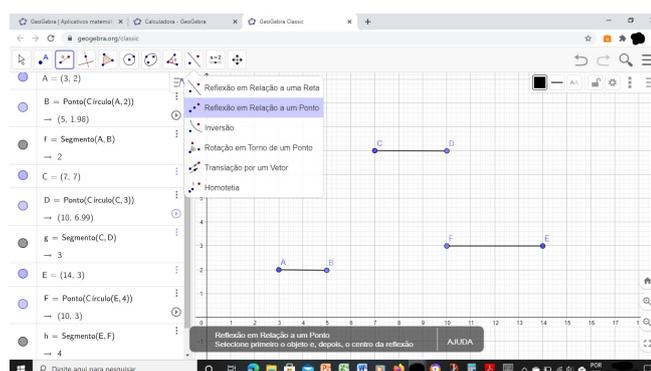


Figura 25 – Passo 5- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

maneira: clicaremos nos pontos opostos de cada circunferência, como na Figura 31 e teremos as medidas como na Figura 33. Quando clicamos em cada circunferência teremos a medida do respectivo comprimento, ver Figura 34.

Para uma melhor visualização, iremos ocultar a malha de fundo, clicando no lado superior direito da tela, onde está um quadradinho quadriculado e ao lado para ocultar o eixo também, como podemos perceber na Figura 35.

Ao término da construção, podemos explorar com os alunos a razão das medidas  $\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}}$  de modo que possam perceber a semelhança nos resultados. O leitor poderá criar outras medidas de circunferência, ressaltamos que estas medidas foram consideradas para exemplificar o passo a passo.

Agora, iremos propor algumas atividades que o professor possa utilizá-las para complementar sua metodologia.

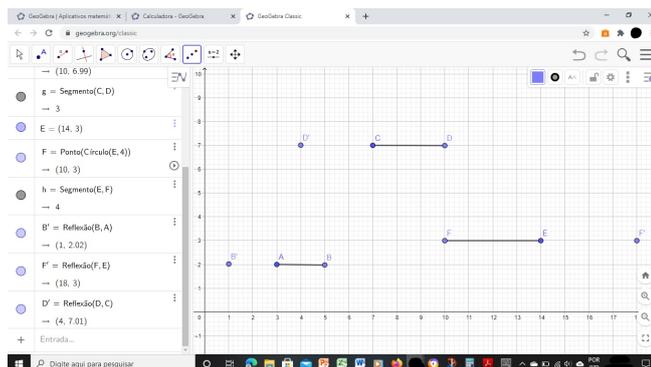


Figura 26 – Passo 6- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

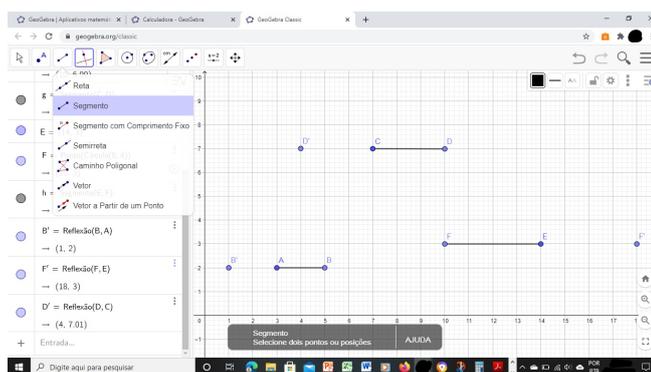


Figura 27 – Passo 7- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

### Atividade I

Para esta atividade iremos usar como tema de estudo, um objeto de formato circular muito comum: a roda. O professor poderá sugerir aos alunos que realizem uma pesquisa sobre a invenção da roda, os primeiros usos feitos pelo homem, a importância da roda para o desenvolvimento da humanidade, entre outras. O leitor poderá consultar as páginas <<https://gtzero.com.br/historia-das-rodas-automotivas/>> e <<https://www.portalsaofrancisco.com.br/curiosidades/roda-curiosidades>> que trazem mais informações à respeito da história da roda e a evolução de seu uso ao longo do tempo.

Ao pedalar uma bicicleta, pilotar uma motocicleta ou até mesmo dirigir um veículo, usamos o conceito de medida de circunferência, talvez o aluno jovem em seus 12, 13 anos, não possa estar atento a estes fatos. As bicicletas são classificadas quanto ao tamanho de seu aro, mas o que é isso afinal? A denominação do aro é referente ao tamanho do diâmetro

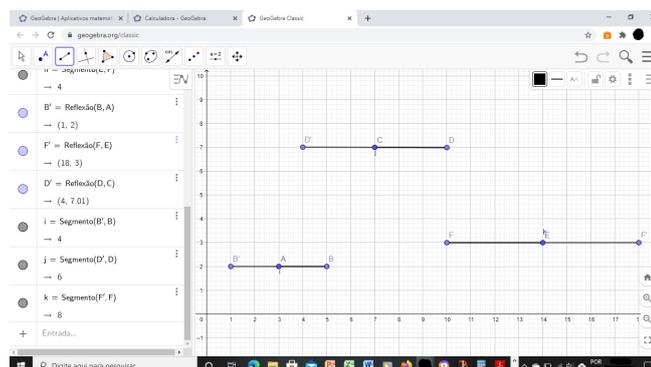


Figura 28 – Passo 8- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

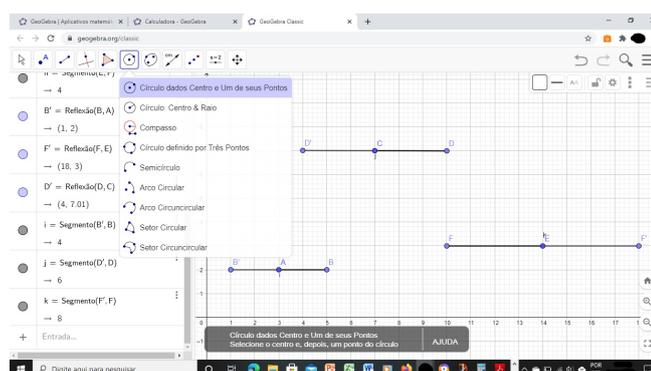


Figura 29 – Passo 9- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

interno da roda da bicicleta, e a unidade de medida é a polegada. Assim, quando a bicicleta é classificada como de aro 20 isto quer dizer que o diâmetro de sua roda mede 20', e considerando que 1 polegada é igual à 25,4 mm então a medida deste diâmetro é de 508 mm. Podemos propor aos alunos que estes façam pesquisas das principais denominações de aros das bicicletas, ainda podemos explorar este conceito para os pneus dos automóveis, que de modo semelhante está relacionado à polegada.

## Atividade II

A partir dos estudos sobre a roda e os aros dos pneus, o professor poderá propor uma atividade de caráter experimental aos seus alunos. Para a realização da atividade serão necessários: uma bicicleta (podendo ser de um aluno que more próximo a escola) e um espaço amplo (a quadra esportiva da escola) e uma trena (de 20 m ou mais). A atividade será realizada em duas etapas:

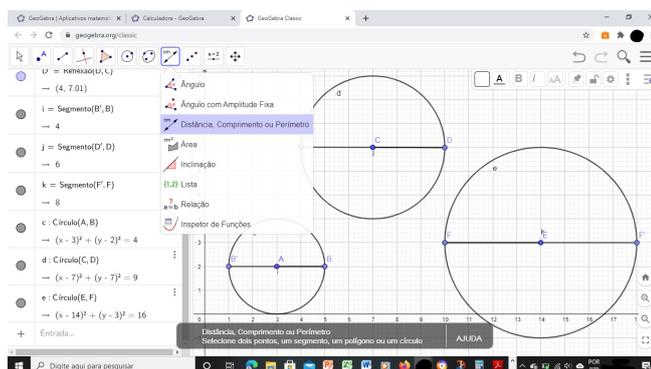


Figura 30 – Passo 10- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

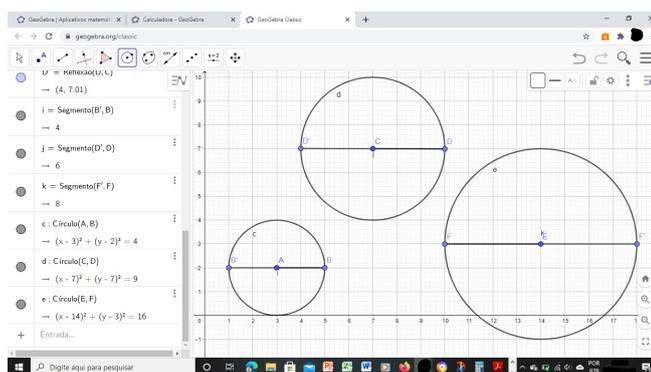


Figura 31 – Passo 11- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

1<sup>a</sup> *A estimativa da distância percorrida quando conhece o raio da roda da bicicleta.*

O professor demarcará um trecho e solicitará aos alunos que façam uma marcação no pneu coincidindo com o início do trecho, então os alunos organizados em equipes irão coletar a quantidade de voltas completas que a roda da bicicleta dará enquanto percorre o trecho demarcado. E assim, conhecendo somente a medida do raio da roda da bicicleta a equipe deverá estimar a distância percorrida naquele trecho.

2<sup>a</sup> *Estimando a quantidade de voltas que as rodas da bicicleta fazem para percorrer certa distância.*

Após realizar a primeira etapa, o professor irá propor aos alunos que eles façam a estimativa inversa, isto é, o professor solicitará o número aproximado de voltas que a roda da bicicleta dará para percorrer trechos de diversos tamanhos. Para isto, o professor irá demarcar alguns trechos distintos e as equipes de alunos fazendo uso

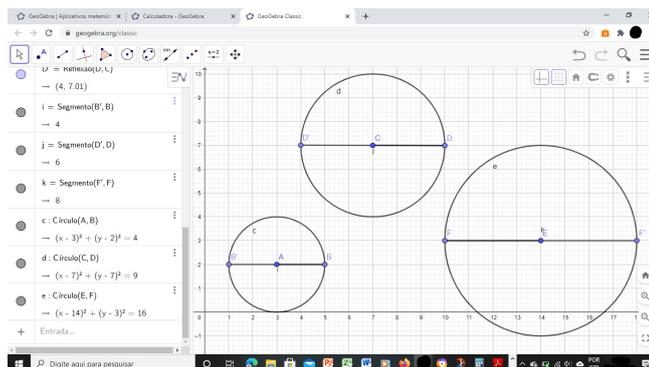


Figura 32 – Passo 12- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

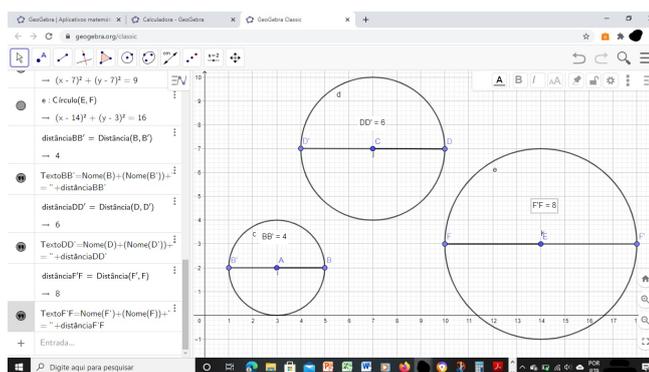


Figura 33 – Passo 13- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

da trena irão medi-los para realizar a atividade.

Esta atividade proporcionará aos alunos a compreender e assimilar o conteúdo estudado com situações cotidianas.

### Atividade III

Traremos aqui uma outra proposta de atividade para ser trabalhada com os alunos, porém de uma maneira extracurricular. De fato, alguns alunos do 7º ano talvez não despertem interesse para atividades deste tipo, pois são atividades que necessitam de uma dedicação a mais para os estudos, todavia é relevante para o aprendizado futuro. O professor poderá apresentar uma situação problema e baseada em sua resolução, apresentar atividades que levem os alunos a adquirir novos conceitos.

Situação problema: O prefeito de uma cidade decidiu construir uma praça no formato

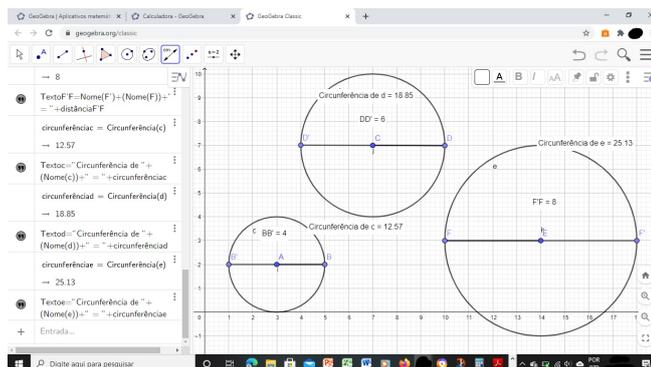


Figura 34 – Passo 14- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

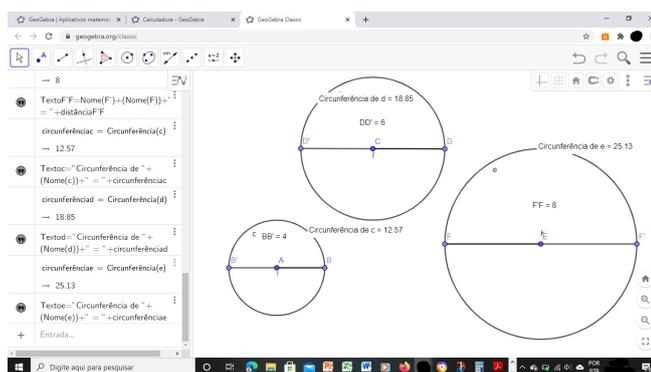


Figura 35 – Passo 15- Captura de tela da página <<https://www.geogebra.org/>>. Fonte: Própria autoria.

circular no novo conjunto habitacional. A praça terá grama em todo seu interior e a medida do seu diâmetro será de 30m. Sabendo que a grama é comprada na unidade  $m^2$ , quantos  $m^2$  serão necessários para colocar nesta praça?

De imediato, o professor poderá questionar os alunos sobre as estratégias que eles possuem para resolver tal situação. A medida que sejam relatadas as estratégias, o professor poderá deixar anotadas e até mesmo solicitar que eles façam estimativas da quantidade necessária. Então o professor poderá retomar a definição de perímetro ou contorno de uma circunferência e questioná-los quanto ao conhecimento que detêm é suficiente para a resolução do problema.

Após as respostas, o professor então retomará a definição de área de figuras planas já conhecidas (quadriláteros e triângulos). A intencionalidade neste momento é despertar nos alunos a noção que é preciso um conhecimento novo para a resolução do problema.

### Atividade III-A

Materiais: Sulfite, papelão, cartolina, compasso, barbante, lápis e tesoura.

A partir deste momento o professor poderá propor aos alunos que usem do material que julgarem melhor (sulfite, papelão, cartolina) para a construção de uma circunferência de raio arbitrário maior ou igual a 8cm (é interessante este tamanho para que o aluno possa manipular o material).



Figura 36 – Construção do material. *Fonte: Própria autoria.*

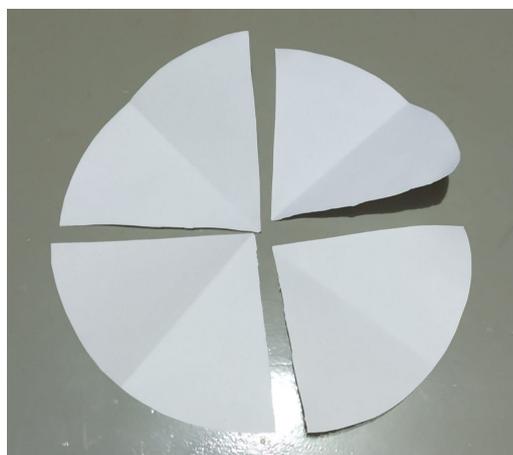
Com a circunferência feita e recortada ver Figura 36, os alunos terão em mãos o círculo, e assim o professor poderá explorar o conceito de circunferência e círculo, enfatizando que o preenchimento da circunferência é o mesmo que o cálculo da área do círculo.

Neste momento é interessante que os alunos são levados a comparar a situação apresentada a eles e o material que possuem em mãos.

O professor poderá conceituar *setor circular* para os alunos, de forma lúdica comparando com uma fatia retirada da pizza. (Este conceito fará parte da definição de área do círculo). Então o professor solicitará que os alunos manipulem o círculo que possuem de forma que este só poderá ser dividido em setores circulares de mesmo tamanho, ver Figura 37 e Figura 38, e assim com estes setores, eles possam formar uma figura já conhecida.

Quando alunos formarem uma figura semelhante a um paralelogramo, ver Figura 39, o professor poderá levá-los a calcular a área da nova figura formada com os dados do círculo, isto é,

$$\begin{aligned}A &= \frac{2\pi r}{2} \cdot r, \\A &= \pi r \cdot r, \\A &= \pi r^2.\end{aligned}$$

Figura 37 – Construção do material. *Fonte: Própria autoria.*Figura 38 – Construção do material. *Fonte: Própria autoria.*

Quando o aluno assimilar este conceito de área, então ele poderá resolver a situação apresentada no início, com  $\pi = 3,14$ .

$$A = \pi \cdot 15^2,$$

$$A = 225\pi,$$

$$A = 706,5m^2.$$

Uma vez conceituada a área de uma região circular, o professor poderá propor ao aluno outras situações que envolvam área.

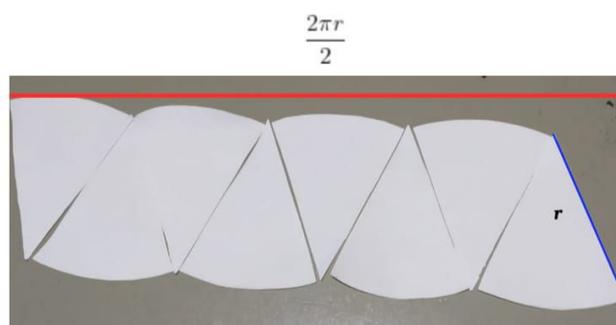


Figura 39 – Construção do material. *Fonte: Própria autoria.*

## 5 Considerações Finais

A grande dificuldade em ensinar nos dias atuais está sendo associada a falta de vínculo professor x aluno, principalmente nestes últimos dois anos, onde o mundo inteiro passa por uma pandemia e nós como um todo sobrevivemos sob uma grande tensão. Talvez as considerações finais teriam sido outras se não estivéssemos passando por este momento.

O trabalho teve como objetivo tratar da tríade existente: número  $\pi$ , funções trigonométricas e aplicações, de forma que o professor/aluno quando recorresse a ele tivesse em mãos um material que resgata o desenvolvimento histórico e as propriedades e descreva algumas aplicações que justifiquem tais conteúdos. Sugerimos algumas atividades para que os professores possam ter um auxílio quando trabalhar com estes conteúdos em sala de aula, sendo estas atividades práticas e também que fazem o uso de ferramentas digitais.

Este material pode ser porta de entrada de aplicações em diversas direções, a saber, reconhecimento facial, sinais de eletrocardiograma e no âmbito educacional poderiam ser exploradas as ferramentas de geometria dinâmica, e trabalhos relacionados a aplicação do conceito de volume para objetos de formato circular.

Por fim, gostaria de registrar o meu carinho e apreço pelo ensino da matemática. Julgo que a matemática é capaz de trazer ao ser humano um olhar diferente sobre a vida. É importante sempre buscar a desmistificação que “é uma matéria difícil”, “é ruim de estudar”, é preciso levar o aluno a enxergá-la de modo diferente. Espero que este trabalho venha contribuir para o entendimento de muitas pessoas em relação a este número tão instigante que é o número  $\pi$ .

## Referências

- BATISTA, L.; MELCHER, E.; CARVALHO, L. C. Um esquema de compressão de ecg utilizando seleção de picos e transformada cosseno discreta. *Research on Biomedical Engineering*, v. 16, n. 1, p. 39–48, 2011. Citado na página 73.
- BATISTA, L. V. *Compressão de sinais eletrocardiográficos baseada na transformada cosseno discreta*. Tese (Doutorado), 2002. Citado na página 73.
- BOYER, C.; MERZBACH, U. *História da Matemática, 3 edição*. [S.l.: s.n.], 2010. Citado 8 vezes nas páginas 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49 e 50.
- BOYER, C. B. *História da matemática; tradução: Elza F.* [S.l.]: Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974. Citado 3 vezes nas páginas 20, 23 e 25.
- BRANCO, E. C. C. *A Importância das Deduções das Fórmulas Trigonométricas para a Construção de uma Aprendizagem Significativa*. Dissertação (Mestrado), 2013. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 61.
- CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no brasil: de 1500 até os dias atuais. *Quadrante*, v. 24, n. 1, p. 103–128, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- CARVALHO, J. N. P. d. et al. *Funções trigonométricas e aplicações: uma proposta didática para o ensino médio usando o geogebra*. Dissertação (Mestrado), 2020. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 59.
- CARVALHO, M. A. d. S. de; EFMP, C. E. V. R.; FERNANDES, A. M. O ensino de geometria não euclidiana na educação básica. 2011. Citado na página 19.
- COSTA, N. M. L. da. A história da trigonometria. *Educação Matemática em Revista-Revista da SBEM*, (10), p. 60–68, 2003. Citado 9 vezes nas páginas 20, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48 e 49.
- DIAS, V. H. C. Uso do eletrocardiograma como ferramenta para a identificação humana. *Acta de Ciências e Saúde*, v. 1, n. 1, p. 1–6, 2017. Citado na página 73.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H. Domingues*. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2004. Citado 18 vezes nas páginas 15, 19, 20, 23, 24, 26, 27, 29, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50 e 51.
- FIGUEIREDO, D. G. *Números irracionais e transcendentos. 3a edição*. [S.l.: s.n.], 2002. 9–20 p. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Números irracionais e transcendentos*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.
- FILHO, O. M.; NETO, H. V. *Processamento digital de imagens*. [S.l.]: Brasport, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 71.

- GALIAN, E. S. *SVD aspectos teóricos e práticos*. [S.l.]: Departamento de Matemática, UEM, 2020. Citado 6 vezes nas páginas 15, 20, 66, 67, 68 e 69.
- GAZIRE, E. S. et al. *O não resgate das geometrias*. Tese (Doutorado), 2000. Citado na página 19.
- GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Processamento de imagens digitais*. [S.l.]: Editora Blucher, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 65.
- KENNEDY, E. S. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Trigonometria tradução: Hygino H. Domingues*. [S.l.]: Atual Editora, 1994. Citado na página 44.
- LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 20, 41, 51, 54 e 55.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM, 1997. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 20, 53 e 54.
- MARINHO, A. d. S. *Uma nova versao de um sistema de deteccao e reconhecimento de face utilizando a transformada cosseno discreta*. Dissertação (Mestrado), 2012. Citado na página 73.
- MATOS, F. M. d. S. *Reconhecimento de faces utilizando a transformada cosseno discreta*. Dissertação (Mestrado), 2008. Citado na página 73.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.], 2018. Citado 4 vezes nas páginas 20, 73, 74 e 75.
- NASCIMENTO, A. M. A. d. *Um esquema de codificação adaptativa de imagens usando transformada cosseno discreta*. Tese (Doutorado), 2001. Citado 8 vezes nas páginas 20, 63, 64, 65, 66, 68, 70 e 71.
- OLIVEIRA, G. A. d. *Número Irracionais e transcendententes*. Dissertação (Mestrado), 2015. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 33.
- OLIVEIRA, J. de. *Tópicos selecionados de Trigonometria e sua História*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 20, 47 e 48.
- PERES, G. R. O número pi. *Trabalho (Conclusao de Curso)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis*, 2003. Citado na página 20.
- PUPIN, J. R.; SILVA. Introdução às séries e transformadas de fourier e aplicações no processamento de sinais e imagens. *Trabalho (Conclusao de Curso)-Universidade Federal de Sao Carlos, Sao Carlos*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 63.
- REIS, F. d. *Uma visão geral da trigonometria: História, Conceitos e Aplicações*. Dissertação (Mestrado), 2016. Citado na página 20.
- ROVERAN, A. P. *Viagem ao Número Pi: Quadraturas e Arquimedes*. [S.l.]: Appris Editora e Livraria Eireli-ME, 2017. Citado na página 20.
- SILVA, R. C. T. Z. *Trigonometria: história e aplicações no contexto escolar*. Dissertação (Mestrado), 2019. Citado na página 20.

SOUSA, J. M. d. *Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 59.

STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas*. Tradução: João Cosme Santos Guerreiro. [S.l.]: Gradiva publicações ltda, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 20, 23 e 25.

TEODORO, F. G. S. *Seleção de características para reconhecimento biométrico baseado em sinais de eletrocardiograma*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado na página 73.

VIEIRA, J. A. R. *O número  $\pi$ : Seus encantamentos e aplicações ao longo do tempo*. Dissertação (Mestrado), 2017. Citado 3 vezes nas páginas 23, 26 e 27.