

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Marisa Martinez Tarran

**O FECHO DE RATLIFF-RUSH DE IDEAIS
MONOMIAIS**

Maringá - PR

2020

Marisa Martinez Tarran

O FECHO DE RATLIFF-RUSH DE IDEAIS MONOMIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Escudeiro
Hernandes.

Maringá-PR

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

T192f	<p>Tarran, Marisa Martinez O fecho de Ratliff-Rush de ideais monomiais / Marisa Martinez Tarran. - Maringá, 2020. vi, 81 f. : il.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandez. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós- Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra, 2020.</p> <p>1. Anéis de polinômios. 2. Ideais monomiais. 3. Fecho de Ratliff-Rush. I. Hernandez, Marcelo Escudeiro, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós- Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra. III. Título.</p> <p>CDD 22.ed. 512.4</p>
-------	--

Edilson Damasio CRB9-1.123

MARISA MARTINEZ TARRAN

O FECHO DE RATLIFF-RUSH DE IDEAIS MONOMIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes - Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Profa. Dra. Marcela Duarte Ferrari - Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Perez - Universidade de São Paulo/ICMC – São Carlos/SP

Aprovada em 28 de agosto de 2020.

Local de defesa: Videoconferencia: <https://meet.google.com/ytc-hdzt-cwo>

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que contribuíram para a realização deste trabalho. Primeiramente, ao meu orientador, professor Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes, pela oportunidade e por toda a paciência e generosidade. Aos professores e servidores ligados ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UEM. Aos meus pais, que fazem parte de todas as minhas conquistas. Ao meu marido, pelo apoio incondicional. À minha irmã e ao meu cunhado por terem tornado os momentos difíceis mais leves. Aos meus colegas de turma, pela amizade e pelos bons momentos juntos. Aos meus professores da graduação, por terem me fornecido a base necessária para ingressar no mestrado. Aos familiares e amigos, pelo apoio e pelas palavras de incentivo. À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo principal, neste trabalho, é calcular o fecho de Ratliff-Rush de uma classe específica de ideais monomiais no anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, em que \mathbb{K} é um corpo, utilizando, para isso, um algoritmo definido por Gasanova em [G].

Palavras-chave: anéis de polinômios, ideais monomiais, fecho de Ratliff-Rush.

Abstract

The main goal, in this work, is to compute the Ratliff-Rush closure of a specific class of monomial ideals in the polynomial ring $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, where \mathbb{K} is a field, using an algorithm presented by Gasanova in [G].

Keywords: polynomial rings, monomial ideals, Ratliff-Rush closure.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Operações básicas com ideais	3
1.2 Fecho integral de um ideal	7
2 O anel dos polinômios e os ideais monomiais	15
2.1 Anéis noetherianos e o Teorema da base de Hilbert	16
2.2 Ideais monomiais e o Lema de Dickson	20
2.3 Ideais monomiais primos e maximais	25
3 Operações com ideais monomiais	28
3.1 Operações básicas com ideais monomiais	30
3.2 Fecho integral de um ideal monomial	41
4 O fecho de Ratliff-Rush	51
4.1 Bons ideais	54
4.2 O cálculo do fecho de Ratliff-Rush de bons ideais	72
Bibliografia	81

Introdução

Em 1978, Ratliff e Rush mostraram, em [RR], que o ideal

$$\tilde{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (I^{n+1} : I^n),$$

em que I é um ideal regular em um anel noetheriano R comutativo com unidade, é o maior ideal próprio de R (com respeito à inclusão) tal que $(\tilde{I})^n = I^n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande. Este ideal é conhecido como *fecho de Ratliff-Rush* de I e foi estudado por alguns autores desde então.

O nosso objetivo, neste trabalho, é estudar tal operação em um contexto mais específico: o dos ideais monomiais em anéis de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, em que \mathbb{K} é um corpo. Até este momento, não conhecemos um método sistemático para determinar o fecho de Ratliff-Rush para qualquer ideal monomial. Assim, vamos apresentar um algoritmo, definido em 2019 por Gasanova em [G], para calculá-lo em uma classe específica de ideais monomiais do anel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Tal algoritmo, por sua vez, é uma generalização do que foi apresentado em [A], em que o autor descreve um método para calcular o fecho de Ratliff-Rush de ideais monomiais em $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ da forma $I = \langle x_1^a, x_2^b, m_1, \dots, m_r \rangle$, em que todos os geradores m_i pertencem ao fecho integral do ideal $\langle x_1^a, x_2^b \rangle$.

O ideal \tilde{I} , por definição, envolve outras operações de ideais e, por este motivo, vamos apresentá-las ao longo do texto. Vale ressaltar que todos os anéis considerados neste trabalho são comutativos com unidade.

No capítulo 1, vamos considerar um anel qualquer comutativo com unidade e apresentar as operações de ideais: soma, produto, intersecção, quociente, radical, e fecho integral. Além disso, vamos apresentar algumas das principais propriedades dessas operações.

No capítulo 2, vamos especificar o anel com o qual trabalharemos, isto é, o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, bem como apresentar os ideais que serão o foco de todo o estudo: os ideais monomiais.

No capítulo 3, vamos retomar as operações apresentadas no capítulo 1, mas, desta vez, no contexto dos ideais monomiais e mostraremos como calcular cada uma delas, o que pode se tornar mais simples com a ajuda de representações geométricas. Vamos mostrar, também, que cada uma dessas operações aplicadas em ideais monomiais resultam em ideais monomiais.

O capítulo 4 é dedicado ao fecho de Ratliff-Rush dos ideais monomiais. Começaremos definindo o que foi chamado, em [G], de *bom ideal* e, no final, apresentaremos o algoritmo que nos permitirá calcular o fecho de Ratliff-Rush deste tipo de ideal.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar as notações e reunir resultados básicos sobre ideais que serão utilizados. Neste primeiro momento, não vamos particularizar o tipo de anel com o qual trabalharemos, pois os resultados apresentados são válidos para quaisquer anéis comutativos com unidade, bem como para quaisquer de seus ideais. O capítulo será inteiramente dedicado a explorar operações com ideais, bem como suas principais propriedades.

1.1 Operações básicas com ideais

No que segue, $(R, +, \cdot)$ denota um anel comutativo com elemento neutro 0 e com unidade 1.

Embora abordadas em cursos básicos de Teoria de anéis, optamos por apresentar as operações comuns realizadas com ideais e suas principais propriedades para que o trabalho se torne o mais autocontido possível e para maior comodidade do leitor.

Inicialmente, vamos apresentar algumas operações básicas que se pode efetuar com ideais quaisquer de um anel: soma, produto, intersecção, quociente e radical.

Proposição 1.1 *Sejam I, J ideais de um anel R . Então:*

$$(i) I + J = \{r \in R; r = i + j, i \in I, j \in J\};$$

$$(ii) I \cap J = \{r \in R; r \in I, r \in J\};$$

$$(iii) IJ = \{r \in R; r = \sum_{finita} ij, i \in I, j \in J\};$$

$$(iv) I : J = \{r \in R; rj \in I, \forall j \in J\},$$

são ideais de R .

Demonstração: Segue facilmente da definição de ideal e das operações dadas. \square

Observação 1.2 O produto de ideais se expressa de modo mais simples quando um dos ideais é principal. De fato, temos que $\langle r \rangle I = \{ri; i \in I\}$ e $\langle r \rangle \langle s \rangle = \langle rs \rangle$. Neste caso, o ideal $\langle r \rangle I$ será também denotado por rI .

As operações introduzidas anteriormente satisfazem várias propriedades imediatas, como, por exemplo,

$$\begin{aligned} I + (J + K) &= (I + J) + K, \quad I + 0 = I, \quad I + J = J + I, \\ I(JK) &= (IJ)K, \quad RI = I, \quad IJ = JI, \end{aligned} \tag{1.1}$$

para quaisquer ideais I, J e K de R , em que 0 denota o ideal nulo.

Além destas propriedades, reunimos algumas outras para futuras referências.

Proposição 1.3 *Sejam I, J, K ideais de um anel R . Então:*

$$(i) (I \cap K) + (J \cap K) \subseteq (I + J) \cap K;$$

$$(ii) (I : K) + (J : K) \subseteq (I + J) : K;$$

$$(iii) I : (J + K) = (I : J) \cap (I : K);$$

$$(iv) I(J + K) = IJ + IK.$$

Demonstração: (i) Seja $a \in (I \cap K) + (J \cap K)$. Então $a = r_1 + r_2$, com $r_1 \in I \cap K$ e $r_2 \in J \cap K$. Como $I \cap K \subseteq I, K$ e $J \cap K \subseteq J, K$, então $a = r_1 + r_2 \in (I + J) \cap K$.

(ii) Seja $a \in (I : K) + (J : K)$. Então $a = r_1 + r_2$, com $r_1 \in (I : K)$ e $r_2 \in (J : K)$. Logo, $r_1 k \in I$ e $r_2 k \in J$, para todo $k \in K$. Assim, $ak = (r_1 + r_2)k = r_1 k + r_2 k \in I + J$, para todo $k \in K$. Portanto, $a \in (I + J) : K$.

(iii) Seja $a \in I : (J + K)$. Então $a(j + k) \in I$, para todo $j \in J$ e para todo $k \in K$. Em particular, $aj \in I$, para todo $j \in J$, já que $0 \in K$. Da mesma forma, $ak \in I$, para todo $k \in K$. Assim, $a \in (I : J) \cap (I : K)$. Por outro lado, seja $a \in (I : J) \cap (I : K)$. Então $aj \in I$, para todo $j \in J$ e $ak \in I$, para todo $k \in K$. Logo, $a(j + k) = aj + ak \in I$, para todo $j \in J$ e para todo $k \in K$. Portanto, $a \in I : (J + K)$.

(iv) Seja $a \in I(J + K)$. Então $a = \sum_{l=1}^p i_l(j_l + k_l) = \sum_{l=1}^p i_l j_l + \sum_{l=1}^p i_l k_l$, em que $p \in \mathbb{N}, i_l \in I, j_l \in J, k_l \in K$, para todo $l \in \{1, \dots, p\}$. Logo, $a \in IJ + IK$. Por outro lado, seja $a \in IJ + IK$. Então, $a = \sum_{l=1}^m i_l j_l + \sum_{l=m+1}^n i_l k_l = \sum_{l=1}^n i_l(j_l + k_l)$, em que $m, n \in \mathbb{N}, i_l \in I, j_l \in J, k_l \in K$ para todo $1 \leq l \leq n$, de modo que $j_l = 0$ para $l > m$ e $k_l = 0$ para $l \leq m$. Portanto $a \in I(J + K)$. \square

Se $\mathcal{I}(R)$ denota o conjunto de todos os ideais de um anel R , então as propriedades em (1.1) e o item (iv) da proposição anterior nos dão que $(\mathcal{I}(R), +, \cdot)$ é um semianel.

O radical de um ideal I em um anel R é o conjunto

$$\sqrt{I} = \{r \in R; r^n \in I, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Observe que sempre temos a inclusão $I \subseteq \sqrt{I}$. De fato, se $a \in I$, então $a^m \in I$, para todo $m \in \mathbb{N}^*$, isto é, $a \in \sqrt{I}$.

Caso também ocorra a inclusão $\sqrt{I} \subseteq I$, então teremos $I = \sqrt{I}$ e, neste caso, I é chamado de *ideal radical*.

Proposição 1.4 *Seja I um ideal de um anel R . Então \sqrt{I} é um ideal radical.*

Demonstração: Primeiro, vamos mostrar que \sqrt{I} é um ideal.

Temos que $\sqrt{I} \neq \emptyset$, pois $\sqrt{I} \supseteq I$.

Agora, sejam $a, b \in \sqrt{I}$ e $r \in R$. Assim, $a^m, b^n \in I$, para certos $m, n \in \mathbb{N}^*$. Seja $t = m + n + 1$ e note que

$$(a + b)^t = a^t + c_1 a^{t-1} b + \cdots + c_{t-1} a b^{t-1} + b^t,$$

em que $c_i = \binom{t}{i}$.

Em cada termo da expansão acima aparece um produto da forma $a^i b^j$, em que $i > m$ ou $j > n$. De fato, suponha que $i \leq m$ e $j \leq n$. Então $t = i + j \leq m + n < m + n + 1 = t$, o que é um absurdo. Assim, nos termos em que $i > m$, temos que $a^i \in I$, pois $a^m \in I$, e nos termos em que $j > n$, temos que $b^j \in I$, pois $b^n \in I$. Dessa forma, todos os termos da expansão pertencem a I e, conseqüentemente, $(a + b)^t = (a + b)^{m+n+1} \in I$. Logo, $a + b \in \sqrt{I}$.

Além disso, $(ar)^m = a^m r^m \in I$. Logo $ar \in \sqrt{I}$.

Dessa forma, fica provado que \sqrt{I} é um ideal de R .

Finalmente, vamos mostrar que \sqrt{I} é um ideal radical. Para isso, basta mostrar que $\sqrt{\sqrt{I}} \subset \sqrt{I}$, uma vez que a inclusão contrária é óbvia.

Veja que se $a \in \sqrt{\sqrt{I}}$, então $a^m \in \sqrt{I}$, para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Assim, $(a^m)^n = a^{mn} \in I$, para certos $m, n \in \mathbb{N}^*$. Isto nos dá que $a \in \sqrt{I}$.

Assim, $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$ e, portanto, \sqrt{I} é um ideal radical. \square

Embora um conceito básico, lembremos que um ideal I é chamado de ideal primo se para todo produto de elementos de R que está em I , temos que ao menos um dos fatores está em I , ou seja, se $ab \in I$, então $a \in I$ ou $b \in I$.

Proposição 1.5 *Todo ideal primo é um ideal radical.*

Demonstração: Seja I um ideal primo. Como vimos, é suficiente mostrar que $\sqrt{I} \subseteq I$.

Tome $a \in \sqrt{I}$. Então $a^n \in I$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Se $n = 1$, então $a \in I$.

Se $n > 1$ e $a^n = aa^{n-1} \in I$, então, como I é ideal primo, segue que $a \in I$ ou $a^{n-1} \in I$.

Caso $a^{n-1} \in I$, procedemos indutivamente e concluímos que $a \in I$.

Assim, $I = \sqrt{I}$ e, portanto, I é um ideal radical. \square

Algumas propriedades do radical de um ideal são apresentadas na próxima proposição.

Proposição 1.6 *Sejam I, J ideais de um anel R . Temos:*

$$(i) I \subseteq J \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J};$$

$$(ii) \sqrt{I^m} = \sqrt{I};$$

$$(iii) \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{\sqrt{I} \cap \sqrt{J}}.$$

Demonstração: (i) Seja $a \in \sqrt{I}$. Temos que $a^n \in I \subseteq J$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Logo, $a \in \sqrt{J}$.

(ii) Como $I^m \subseteq I$, então, de (i) segue que $\sqrt{I^m} \subseteq \sqrt{I}$. Por outro lado, seja $a \in \sqrt{I}$. Segue que $a^n \in I$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Logo, $a^{nm} = (a^n)^m \in I^m$. Assim, $a \in \sqrt{I^m}$.

(iii) A primeira inclusão é óbvia. Para a segunda inclusão, tome $a \in \sqrt{\sqrt{I} \cap \sqrt{J}}$. Então $a^n \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Logo, $a^{nk} = (a^n)^k \in I$, para algum $k \in \mathbb{N}^*$ e $a^{nq} = (a^n)^q \in J$, para algum $q \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $a \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. \square

1.2 Fecho integral de um ideal

Além das operações apresentadas anteriormente, vamos considerar, neste trabalho, o conceito de fecho integral de um ideal.

Seja I um ideal de um anel R . Um elemento $r \in R$ é dito *integral sobre I* , se existirem $n \in \mathbb{N}^*$ e $a_i \in I^i$, em que $i \in \{1, \dots, n\}$, tais que

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

A equação acima é chamada *equação de dependência integral de r sobre I de grau n* .

O conjunto de todos os elementos do anel R que são integrais sobre I é chamado *fecho integral de I* e denotado por \bar{I} .

Exemplo 1.7 Sejam R um anel e $b, c \in R$. Tome o ideal $\langle b^2, c^2 \rangle$ e veja que $bc \in \overline{\langle b^2, c^2 \rangle}$. De fato, basta considerar $n = 2$, $a_1 = 0 \in \langle b^2, c^2 \rangle$ e $a_2 = -b^2 c^2 \in \langle b^2, c^2 \rangle^2$. Esses valores fornecem uma equação de dependência integral de bc sobre $\langle b^2, c^2 \rangle$.

Na seção anterior, vimos que um ideal está sempre contido em seu radical. O mesmo vale para o fecho integral, ou seja, $I \subseteq \bar{I}$. De fato, seja $r \in I$. Considere $n = 1$ e $a_1 = -r$. Isso nos dá uma equação de dependência integral de r sobre I e, portanto, $r \in \bar{I}$.

Quando também ocorrer a inclusão $\bar{I} \subseteq I$, teremos $I = \bar{I}$ e, então, I será chamado *integralmente fechado*.

Proposição 1.8 *Sejam I, J ideais de um anel R . Então:*

- (i) $I \subseteq J \Rightarrow \bar{I} \subseteq \bar{J}$;
- (ii) $\bar{I} \subseteq \sqrt{I}$;
- (iii) $\sqrt{0} \subseteq \bar{I}$;
- (iv) $I = \sqrt{I} \Rightarrow I = \bar{I}$ (todo ideal radical é integralmente fechado);
- (v) $I = \bar{I}$ e $J = \bar{J} \Rightarrow I \cap J = \overline{I \cap J}$ (a intersecção de ideais integralmente fechados é integralmente fechada).

Demonstração: (i) Seja $r \in \bar{I}$. Então $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$ e $a_i \in I^i$. Como $I \subseteq J$, segue que $I^i \subseteq J^i$. Assim, $a_i \in J^i$ e a equação acima é uma equação de dependência integral de r sobre J . Portanto, $r \in \bar{J}$.

(ii) Seja $r \in \bar{I}$. Então $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$ e $a_i \in I^i$. Logo, $r^n = -a_1 r^{n-1} - \dots - a_{n-1} r - a_n \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq I$. Portanto, $r \in \sqrt{I}$.

(iii) Seja $r \in \sqrt{0}$. Então $r^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Mas esta é uma equação de dependência integral de r sobre I , com $a_i = 0 \in I^i$. Portanto, $r \in \bar{I}$.

(iv) A inclusão $I \subseteq \bar{I}$ é óbvia e a outra inclusão segue diretamente de ii).

(v) A inclusão $I \cap J \subseteq \overline{I \cap J}$ é óbvia. Para a outra inclusão, tome $r \in \overline{I \cap J}$. Então, $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$ e $a_i \in (I \cap J)^i$. Mas, $I \cap J \subseteq I, J$, então $(I \cap J)^i \subseteq I^i, J^i$. Assim, $a_i \in I^i \cap J^i$ e, conseqüentemente, $r \in \bar{I} \cap \bar{J}$. Como, por hipótese, $I = \bar{I}$ e $J = \bar{J}$, segue que $r \in I \cap J$. \square

Até aqui, a única maneira que temos para verificar quando um elemento pertence ou não ao fecho integral de um determinado ideal é encontrando uma equação de dependência integral. Vamos, por meio do lema seguinte, expressar essa situação de outra forma.

Lema 1.9 *Sejam R um anel, I um ideal de R e $r \in R$. Temos que $r \in \bar{I}$ se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $(I + \langle r \rangle)^n = I(I + \langle r \rangle)^{n-1}$.*

Demonstração: Suponha que $r \in \bar{I}$. Mostremos que $(I + \langle r \rangle)^n = I(I + \langle r \rangle)^{n-1}$.

Veja que, por meio da expansão do binômio de Newton e utilizando o item (iv) da Proposição 1.3 generalizado para n parcelas, temos que

$$\begin{aligned} I(I + \langle r \rangle)^{n-1} &= I(\langle r \rangle^{n-1} + I\langle r \rangle^{n-2} + \dots + I^{i-1}\langle r \rangle^{n-i} + \dots + I^{n-1}) \\ &= I\langle r \rangle^{n-1} + I^2\langle r \rangle^{n-2} + \dots + I^i\langle r \rangle^{n-i} + \dots + I^n \end{aligned}$$

e

$$(I + \langle r \rangle)^n = \langle r \rangle^n + I\langle r \rangle^{n-1} + I^2\langle r \rangle^{n-2} + \dots + I^i\langle r \rangle^{n-i} + \dots + I^n. \quad (1.2)$$

Note que os coeficientes inteiros que aparecem nas parcelas das expansões acima são irrelevantes e, por isso, foram omitidos.

Observando as igualdades acima, fica evidente que $I(I + \langle r \rangle)^{n-1} \subseteq (I + \langle r \rangle)^n$.

Para a outra inclusão, basta mostrar que $\langle r \rangle^n \subseteq I(I + \langle r \rangle)^{n-1}$.

Por hipótese, $r \in \bar{I}$. Então, temos que existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $a^i \in I^i$, em que $i \in \{1, \dots, n\}$, tais que $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_i r^{n-i} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$. Dessa forma, segue que $r^n = -a_1 r^{n-1} - \dots - a_i r^{n-i} - \dots - a_{n-1} r - a_n \in I(I + \langle r \rangle)^{n-1}$ e, conseqüentemente, $\langle r \rangle^n = \langle r^n \rangle \subseteq I(I + \langle r \rangle)^{n-1}$.

Para mostrar a outra implicação, suponha que $(I + \langle r \rangle)^n = I(I + \langle r \rangle)^{n-1}$ e veja que, de (1.2), temos:

$$r^n \in (I + \langle r \rangle)^n = I(I + \langle r \rangle)^{n-1} = I\langle r \rangle^{n-1} + \dots + I^i\langle r \rangle^{n-i} + \dots + I^n.$$

A expressão acima garante a existência de $a_i \in I^i$ tais que

$$r^n = a_1 r^{n-1} + \dots + a_i r^{n-i} + \dots + a_n,$$

ou seja, $r \in \bar{I}$. □

Proposição 1.10 *Sejam R um anel, I um ideal de R e $r \in R$. Temos que $r \in \bar{I}$ se, e somente se, existe um ideal M finitamente gerado tal que $rM \subseteq IM$ e se $aM = 0$, para algum $a \in R$, então $ar \in \sqrt{0}$.*

Demonstração: Suponha que $r \in \bar{I}$. Então existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $a^i \in I^i$, em que $i \in \{1, \dots, n\}$, tais que

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_i r^{n-i} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Podemos afirmar que existe um ideal finitamente gerado $J \subseteq I$ tal que $a_i \in J^i$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. De fato, tome $a_j \in I^j$, em que $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Então $a_j = \sum_{\text{finita}} i_1 i_2 \dots i_j$, em que $i_1, i_2, \dots, i_j \in I$. Considere S como sendo o conjunto formado por todos os elementos de I que aparecem como fatores de parcelas da soma acima, para todos os valores de j , e veja que $J = \langle S \rangle$ é finitamente gerado, $J \subseteq I$ e $a_i \in J^i$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Dessa forma, $r \in \bar{J}$ e, pelo lema anterior, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $J(J + \langle r \rangle)^{n-1} = (J + \langle r \rangle)^n$.

Considere o ideal finitamente gerado $M = (J + \langle r \rangle)^{n-1}$. Temos que

$$rM = r(J + \langle r \rangle)^{n-1} \subseteq (J + \langle r \rangle)^n = J(J + \langle r \rangle)^{n-1} = JM \subseteq IM.$$

Agora, suponha que existe $a \in R$ tal que $aM = a(J + \langle r \rangle)^{n-1} = 0$. Se $n = 1$, então temos que $M = (J + \langle r \rangle)^0 = R$ e $0 = aM = aR$ nos dá que $ar = 0 \in \sqrt{0}$. Agora, suponha $n \geq 2$. Temos que $ar^{n-1} = 0$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por a^{n-2} , obtemos $(ar)^{n-1} = 0$ e, portanto, $ar \in \sqrt{0}$.

Reciprocamente, suponha que existam um ideal M finitamente gerado e $r \in R$ tais que $rM \subseteq IM$ e, se $aM = 0$, para algum $a \in R$, então $ar \in \sqrt{0}$.

Seja $M = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ tal ideal.

Agora, vejamos como se expressa um elemento arbitrário $g \in IM$.

Se $g \in IM$, então $g = \sum_{k=1}^c i_k m_k$, em que $i_k \in I$ e $m_k \in M$, para todo $k \in \{1, \dots, c\}$. Assim, $g = i_1(r_{1,1}b_1 + \dots + r_{1,m}b_m) + i_2(r_{2,1}b_1 + \dots + r_{2,m}b_m) + \dots + i_c(r_{c,1}b_1 + \dots + r_{c,m}b_m)$, em que $r_{p,q} \in R$, para todo $p \in \{1, \dots, c\}$ e para todo $q \in \{1, \dots, m\}$. Deste modo, $g = (i_1 r_{1,1} + i_2 r_{2,1} + \dots + i_c r_{c,1})b_1 + \dots + (i_1 r_{1,m} + i_2 r_{2,m} + \dots + i_c r_{c,m})b_m$.

Como, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $rb_i \in rM \subseteq IM$, então podemos escrever

$$rb_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} b_j,$$

para algum $\alpha_{ij} \in I$.

Sejam A a matriz $(\delta_{ij}r - \alpha_{ij})_{ij}$, em que δ_{ij} é o delta de Kronecker, e b o vetor $(b_1, \dots, b_m)^T$.

Então,

$$Ab = \begin{bmatrix} r - \alpha_{11} & \dots & -\alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{m1} & \dots & r - \alpha_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_1 - \alpha_{11}b_1 - \dots - \alpha_{1m}b_m \\ \vdots \\ -\alpha_{m1}b_1 - \dots + rb_m - \alpha_{mm}b_m \end{bmatrix}.$$

Como $rb_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}b_j$, então $rb_i - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}b_j = 0$, ou seja, $Ab = 0$.

Além disso, como R é comutativo e tem unidade, temos que $\det(A)b = \text{adj}(A)Ab$, o que pode ser encontrado na página 160 de [HK].

Dessa forma, temos que $\det(A)b = 0$ e, conseqüentemente, $\det(A)b_i = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Assim, $\det(A)M = 0$.

Como $\det(A)$ é um elemento do anel R , segue, por hipótese, que $\det(A)r \in \sqrt{0}$, ou seja, $(\det(A)r)^k = (\det(A))^k r^k = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Uma expansão de $\det(A)$ nos dá uma expressão do tipo $r^m + a_1r^{m-1} + \dots + a_m$, em que $a_i \in I^i$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Assim,

$$\begin{aligned} (\det(A))^k r^k = 0 &\Rightarrow (r^m + a_1r^{m-1} + \dots + a_m)^k r^k = 0 \\ &\Rightarrow r^n + c_1r^{n-1} + \dots + c_n = 0, \end{aligned}$$

em que $n = k(m+1) \in \mathbb{N}^*$ e $c_i \in I^i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

A igualdade acima define uma equação de dependência integral de r sobre I e, portanto, $r \in \bar{I}$. □

Observação 1.11 É relevante observar que o ideal M finitamente gerado mencionado na proposição anterior pode ser facilmente generalizado para um R -módulo finitamente gerado, caso o contexto exija. Para o nosso estudo, no entanto, basta trabalharmos com o ideal.

Definição 1.12 Sejam $J \subseteq I$ ideais. Dizemos que J é uma *redução* de I se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^{n+1} = JI^n$. Algumas vezes, vamos usar a expressão $J \subseteq I$ é uma *redução*.

Do Lema 1.9, decorre o seguinte:

Corolário 1.13 Sejam R um anel, I um ideal de R e $r \in R$. Temos que $r \in \bar{I}$ se, e somente se, I é uma redução de $I + \langle r \rangle$.

Com respeito ao conceito de redução de ideais, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.14 Se $JI^n = I^{n+1}$, então $I^{m+n} = JI^{m+n-1} = \dots = J^m I^n$, para todo $m \in \mathbb{N}^*$. Em particular, se $J \subseteq I$ é uma redução, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}^*$, temos que $I^{m+n} \subseteq J^m$.

Demonstração: Vamos justificar usando indução sobre m .

É óbvio que as igualdades valem para $m = 1$.

Suponha que as igualdades também são válidas para $m - 1$, ou seja, se $JI^n = I^{n+1}$, então

$$I^{m-1+n} = JI^{m-1+n-1} = \dots = J^{m-1} I^n. \quad (1.3)$$

Mostremos que as igualdades valem para m .

Se $JI^n = I^{n+1}$, então, multiplicando por I^{m-1} , obtemos que $JI^{n+m-1} = I^{n+m}$.

Agora, multiplicando as igualdades em (1.3) por J , obtemos

$$JI^{m-1+n} = J^2 I^{m-1+n-1} = \dots = J^m I^n.$$

Assim, se $JI^n = I^{n+1}$, então $I^{n+m} = JI^{n+m-1} = \dots = J^m I^n$.

Em particular, se $J \subseteq I$ é uma redução, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}^*$, temos que $I^{m+n} = J^m I^n \subseteq J^m$, uma vez que J^m é um ideal. \square

Finalmente, utilizando os resultados acima, apresentaremos, agora, a proposição essencial para mostrar que o fecho integral de um ideal é um ideal.

Proposição 1.15 Sejam $K \subseteq J \subseteq I$ ideais de R .

(i) Se K é uma redução de J e J é uma redução de I , então K é uma redução de I ;

(ii) Se K é uma redução de I , então J é uma redução de I ;

(iii) Se I é finitamente gerado, $J = K + \langle r_1, \dots, r_k \rangle$, em que $r_1, \dots, r_k \in R$ e K é uma redução de I , então K é uma redução de J .

Demonstração: (i) Se K é uma redução de J e J é uma redução de I , então existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $J^{n+1} = KJ^n$ e $I^{m+1} = JI^m$. Pela Proposição 1.14, segue que $I^{m+n+1} = J^{n+1}I^m = KJ^nI^m \subseteq KI^nI^m \subseteq II^nI^m = I^{m+n+1}$. Dessa forma, $KI^{m+n} = I^{m+n+1}$ e, portanto, K é uma redução de I .

(ii) Se K é uma redução de I , então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^{n+1} = KI^n$. Como $K \subseteq J \subseteq I$, então $I^{n+1} = KI^n \subseteq JI^n \subseteq II^n = I^{n+1}$. Assim, $JI^n = I^{n+1}$ e, portanto, J é uma redução de I .

(iii) Suponha I finitamente gerado, $J = K + \langle r_1, \dots, r_k \rangle$ e que K seja uma redução de I . Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $KI^n = I^{n+1}$. De (ii), segue que $K + \langle r_1, \dots, r_{i-1} \rangle$ é uma redução de I , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Quando $i = 1$, $\langle r_1, \dots, r_{i-1} \rangle$ é interpretado como o ideal nulo.

Como $r_i \in K + \langle r_1, \dots, r_k \rangle = J \subseteq I$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, temos

$$r_i I^n \subseteq I^{n+1} = KI^n \subseteq (K + \langle r_1, \dots, r_{i-1} \rangle) I^n.$$

Agora, suponha que $aI^n = 0$, para algum $a \in R$. Então, em particular, $ar_i^n = 0$ e, multiplicando os dois lados da igualdade por a^{n-1} , segue que $(ar_i)^n = 0$. Assim, pela Proposição 1.10, r_i é integral sobre $K + \langle r_1, \dots, r_{i-1} \rangle$ e segue do Corolário 1.13 que $K + \langle r_1, \dots, r_{i-1} \rangle$ é uma redução de $K + \langle r_1, \dots, r_{i-1} \rangle + \langle r_i \rangle = K + \langle r_1, \dots, r_i \rangle$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Por (i), segue que K é uma redução de $K + \langle r_1, \dots, r_k \rangle = J$. \square

Temos, agora, o seguinte resultado.

Teorema 1.16 *O fecho integral de um ideal é um ideal.*

Demonstração: Seja K um ideal de um anel R . Considere o seu fecho integral \overline{K} . Mostremos que \overline{K} é um ideal.

Primeiro, veja que $\overline{K} \neq \emptyset$, uma vez que $K \subseteq \overline{K}$.

Agora, sejam $r, s \in \overline{K}$. Então, existem $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $a_i \in K^i, b_j \in K^j$ em que $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, tais que

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

e

$$s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m = 0.$$

Pelo mesmo processo utilizado na Proposição 1.10, é possível mostrar que existem conjuntos finitos $S, T \subset K$ tais que, para os ideais finitamente gerados $G = \langle S \rangle, H = \langle T \rangle \subset K$, temos que $a_i \in G^i, b_j \in H^j$. Dessa forma, $K' = G + H \subset K$ é um ideal finitamente gerado tal que $a_i \in (K')^i$, para $1 \leq i \leq n$, e $b_j \in (K')^j$, para $1 \leq j \leq m$.

Assim, $r, s \in \overline{K'}$.

Sejam $J = K' + \langle r \rangle$ e $I = K' + \langle r, s \rangle$.

Pelo Corolário 1.13, K' é uma redução de J . Além disso, como $K' \subseteq K' + \langle r \rangle$, temos que $\overline{K'} \subseteq \overline{K' + \langle r \rangle}$. Do mesmo modo, como $s \in \overline{K'} \subseteq \overline{K' + \langle r \rangle}$, segue do mesmo corolário que $K' + \langle r \rangle$ é uma redução de $K' + \langle r \rangle + \langle s \rangle = K' + \langle r, s \rangle$, ou seja, J é uma redução de I . Dessa forma, a Proposição 1.15 garante que K' é uma redução de I .

Note que $K' \subseteq K' + \langle r + s \rangle \subseteq I$.

A primeira inclusão é óbvia.

Para a segunda inclusão, seja $c \in K' + \langle r + s \rangle$. Assim, existem $k' \in K', d \in R$ tais que $c = k' + (r + s)d = k' + rd + sd \in K' + \langle r \rangle + \langle s \rangle = I$.

Novamente pela Proposição 1.15, temos que K' é uma redução de $K' + \langle r + s \rangle$, uma vez que I é finitamente gerado e K' é uma redução de I . Assim, pelo Corolário 1.13, $r + s \in \overline{K'}$ e, conseqüentemente, $r + s \in \overline{K}$, pois $K' \subset K$.

Por fim, ainda considerando $r \in \overline{K}$, tome $b \in R$. Mostremos que $br \in \overline{K}$.

Observe que, se $r \in \overline{K}$, então existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $a_i \in K^i$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, tais que

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} \dots + a_n = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por b^n , temos

$$(br)^n + a_1 b (br)^{n-1} + a_2 b^2 (br)^{n-2} + \dots + a_n b^n = 0,$$

em que $a_i b^i \in K^i$. Assim, $br \in \overline{K}$ e, portanto, \overline{K} é um ideal. \square

Capítulo 2

O anel dos polinômios e os ideais monomiais

Até este momento, apresentamos algumas propriedades que são comuns a todos os tipos de anéis e seus ideais. Agora, vamos restringir o estudo ao anel dos polinômios.

Mesmo que do conhecimento do leitor, com o intuito de tornar o material mais completo e acessível a todos, vamos apresentar os conceitos que serão abordados a partir deste ponto.

Dado um anel $(R, +, \cdot)$, o conjunto de todos os polinômios $a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n$ em x_1 com coeficientes $a_i \in R$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, é um anel com adição e multiplicação usuais. Assim, faz sentido considerarmos o anel $R[x_1][x_2]$, isto é, o anel dos polinômios em x_2 com coeficientes em $R[x_1]$. Podemos, simplesmente, denotá-lo por $R[x_1, x_2]$. Indutivamente, definimos o anel de polinômios sobre R em n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , denotado por $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$. É importante ressaltar que, se R é um anel comutativo com unidade, então $R[x_1, \dots, x_n]$ também o é.

Dada uma parcela $a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ em um polinômio $\sum_{finita} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ em $R[x_1, \dots, x_n]$, dizemos que $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ é um *monômio* e o *grau* de um monômio $m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ é igual à soma dos expoentes de todas as variáveis e é denotado por $\deg(m)$, isto é, $\deg(m) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

À semelhança do que ocorre com os polinômios em $R[x_1]$, o grau de um polinômio $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ é o maior dos graus de seus monômios e será denotado por $\deg(f)$.

Por fim, chamaremos de *multigrau* do monômio $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in R[x_1, \dots, x_n]$, e denotaremos por $mdeg(m)$, a n -upla ordenada formada pelos expoentes de todas as variáveis do monômio, isto é, $mdeg(m) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Note que o coeficiente não nulo que aparece associado a cada monômio em um polinômio não interfere nas definições de grau e multigrau.

Exemplo 2.1 Considere o polinômio $f = xy^2z + 2xz^2 + x^2y^2 \in \mathbb{Z}[x, y, z]$. Temos que:

- $\deg(xy^2z) = 4$, $\deg(2xz^2) = 3$, $\deg(x^2y^2) = 4$;
- $\deg(f) = 4$;
- $mdeg(xy^2z) = (1, 2, 1)$.

O conjunto de todos os monômios de um polinômio $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ será denotado por $\mathbb{M}(f)$ e o conjunto de todos os monômios de $R[x_1, \dots, x_n]$ será denotado por \mathbb{M}_n .

Note que (\mathbb{M}_n, \cdot) é um semigrupo, em que o elemento neutro é o monômio $1 = x_1^0 \dots x_n^0$.

2.1 Anéis noetherianos e o Teorema da base de Hilbert

Antes de continuarmos o estudo do anel de polinômios, vamos apresentar um resultado no contexto de um anel R comutativo com unidade.

Proposição 2.2 *Seja R um anel comutativo e com unidade. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *Todo ideal $I \subset R$ é finitamente gerado, isto é, existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ tais que*
- $$I = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle.$$

(ii) Toda cadeia ascendente de ideais de R estabiliza, isto é, se $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$, então existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $I_n = I_m$, para todo $n \geq m$.

(iii) Toda família \mathcal{F} não vazia de ideais de R possui um elemento máximo, isto é, existe um ideal $M \in \mathcal{F}$ tal que, se $I \in \mathcal{F}$ e $I \supset M$, então $I = M$.

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii) Seja $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$ uma cadeia ascendente de ideais de R . Considere $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$ e note que I é um ideal, uma vez que os ideais que compõem essa união fazem parte de uma cadeia ascendente. Por hipótese, existem $a_1, \dots, a_k \in I$ tais que $I = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$. Dessa forma, para cada a_i , existe $n_i \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_i \in I_{n_i}$, com $i \in \{1, \dots, k\}$. Tome $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Temos que $a_1, \dots, a_k \in I_m$ e, portanto, $I = \langle a_1, \dots, a_k \rangle \subset I_m$. Mas, $I_m \subset I$. Logo, $I = I_m$ e, assim, $I_n = I_m$, para todo $n \geq m$.

(ii) \Rightarrow (iii) Seja \mathcal{F} uma família não vazia de ideais de R e tome $I_1 \in \mathcal{F}$. Se I_1 é um elemento máximo, nada resta mostrar. Caso contrário, existe $I_2 \in \mathcal{F}$ tal que $I_1 \subsetneq I_2$. Se I_2 é um elemento máximo, nada mais temos que mostrar. Caso contrário, existe $I_3 \in \mathcal{F}$ tal que $I_2 \subsetneq I_3$. Prosseguindo dessa maneira, encontraremos um elemento máximo ou essa cadeia nunca estabilizará. Devido à hipótese em (ii), a segunda possibilidade não pode ocorrer. Portanto, a família \mathcal{F} possui um elemento máximo.

(iii) \Rightarrow (i) Sejam I um ideal de R e $\mathcal{F} = \{I'; I' \text{ é um ideal de } R, I' \subset I \text{ e } I' \text{ é finitamente gerado}\}$. Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\langle 0 \rangle \in \mathcal{F}$. Pela hipótese em (iii), \mathcal{F} possui um elemento máximo J . Vamos mostrar que $J = I$.

A inclusão $J \subseteq I$ é imediata. Para mostrar a outra inclusão, suponhamos que $I \not\subseteq J$. Assim, existe $a \in I - J$. Note que o ideal $\langle J, a \rangle := \langle J \rangle + \langle a \rangle \in \mathcal{F}$. De fato, seja $r \in \langle J, a \rangle = \langle J \rangle + \langle a \rangle$. Então $r = j + a'$, em que $j \in \langle J \rangle \subset I$ e $a' \in \langle a \rangle \subset I$. Assim, $r \in I$. Além disso, $\langle J, a \rangle$ é finitamente gerado, uma vez que $\langle J, a \rangle = \langle J \rangle + \langle a \rangle = J + \langle a \rangle$, em que J e $\langle a \rangle$ são finitamente gerados.

Assim, temos que $\langle J, a \rangle \in \mathcal{F}$ e $J \subsetneq \langle J, a \rangle$, o que é um absurdo, pois J é elemento máximo de \mathcal{F} . Portanto, $I = J$ é finitamente gerado. \square

Definição 2.3 Um anel R é *noetheriano* se uma e, portanto, todas as condições equivalentes acima forem satisfeitas.

Exemplo 2.4

1. Os anéis $\mathbb{K}, \mathbb{Z}, \mathbb{K}[x]$, em que \mathbb{K} é um corpo, são noetherianos, já que, por serem domínios de ideais principais, todos os ideais são gerados por um único elemento.
2. O anel $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ não é noetheriano, pois a cadeia de ideais

$$\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle \subsetneq \dots$$

não estabiliza.

O teorema a seguir traz um importante resultado com respeito aos anéis noetherianos.

Teorema 2.5 (Teorema da base de Hilbert) *Se R é um anel noetheriano, então $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é um anel noetheriano.*

Demonstração: Seja R um anel noetheriano. Basta mostrar que $R[x]$ é noetheriano.

Seja I um ideal de $R[x]$. Mostremos que I é finitamente gerado. Se $I = \{0\}$, nada há que provar. Suponhamos, então, que $I \neq \{0\}$.

Dado $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ com $a_n \neq 0$, denotamos $cl(f) = a_n$ o coeficiente líder de f .

Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere o seguinte subconjunto de R :

$$J_k = \{0\} \cup \{a \in R; \text{ existe } f \in I \text{ com } cl(f) = a \text{ e } deg(f) = k\}.$$

Vamos mostrar que, para todo k , J_k é um ideal de R .

Primeiro, veja que $J_k \neq \emptyset$, pois $0 \in J_k$.

Agora, sejam $b, c \in J_k$ e $r \in R$. Então existem $f, g \in I$ tais que

$$f = bx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_0 \quad \text{e} \quad g = cx^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_0.$$

Se $b + c = 0$, então não há o que fazer, pois $0 \in J_k$. Caso contrário, note que $f + g = (b + c)x^k + (b_{k-1} + c_{k-1})x^{k-1} + \dots + (b_0 + c_0) \in I$, pois $f, g \in I$. Logo, $b + c \in J_k$.

Além disso, se $rb = 0$, então não há o que fazer. Caso contrário, note que $rf = rbx^k + rb_{k-1}x^{k-1} + \dots + rb_0 \in I$, pois $f \in I$. Assim, $rb \in J_k$ e, portanto, J_k é ideal de R , para todo $k \geq 0$.

Agora, observe que $J_k \subset J_{k+1}$.

De fato, seja $0 \neq a \in J_k$. Então existe $f \in I$ tal que $f = ax^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$. Como I é ideal, segue que $xf = ax^{k+1} + a_{k-1}x^k + \dots + a_0x \in I$. Logo, $a \in J_{k+1}$.

Como R é noetheriano, a cadeia ascendente $J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_k \subset \dots$ de ideais de R estabiliza, isto é, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $J_k = J_m$, para todo $k \geq m$. Além disso, como R é noetheriano, temos que J_0, J_1, \dots, J_m são finitamente gerados. Suponha que $J_k = \langle a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{n_k}} \rangle$, em que $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, e seja $f_{k_j} \in I$ tal que $\deg(f_{k_j}) = k$ e $cl(f_{k_j}) = a_{k_j}$ é algum gerador de J_k .

Considere $I' = \langle f_{k_j}; 0 \leq k \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n_k \rangle$. Mostremos que $I = I'$.

A inclusão $I' \subseteq I$ é imediata. Para a outra inclusão, tome $0 \neq f \in I$ com $\deg(f) = k$ e $cl(f) = a$. Vamos mostrar que $f \in I'$ utilizando indução sobre k .

Se $k = 0$, então $a \in J_0$. Assim,

$$f = a = b_1a_{0_1} + b_2a_{0_2} + \dots + b_{n_0}a_{0_{n_0}},$$

em que $b_1, b_2, \dots, b_{n_0} \in R$. Como $a_{0_j} = f_{0_j} \in I'$, temos que $f \in I'$.

Agora, suponha $k > 0$ e o resultado válido para todo número natural menor que k .

Para mostrar que o resultado vale para todo k , vamos considerar dois casos:

Caso 1: Seja $k \leq m$. Como $a \in J_k$, então $a = b_1a_{k_1} + b_2a_{k_2} + \dots + b_{n_k}a_{k_{n_k}}$, em que $b_1, b_2, \dots, b_{n_k} \in R$. Agora, considere

$$h = f - (b_1f_{k_1} + b_2f_{k_2} + \dots + b_{n_k}f_{k_{n_k}}).$$

É evidente que h tem grau menor do que k .

Além disso, como $f \in I$ e $b_1f_{k_1} + b_2f_{k_2} + \dots + b_{n_k}f_{k_{n_k}} \in I' \subset I$, segue que $h \in I$.

Assim, pela hipótese de indução, $h \in I'$ e, conseqüentemente, $f \in I'$.

Caso 2: Seja $k > m$. Como $a \in J_k = J_m$, então $a = b_1a_{m_1} + b_2a_{m_2} + \dots + b_{n_m}a_{m_{n_m}}$, em que $b_1, b_2, \dots, b_{n_m} \in R$. Agora, considere

$$h = f - x^{k-m}(b_1f_{m_1} + b_2f_{m_2} + \dots + b_{n_m}f_{m_{n_m}}).$$

Claramente, h tem grau menor do que k .

Como $h \in I$, novamente pela hipótese de indução, segue que $h \in I'$ e, portanto, $f \in I'$.

Dessa forma, $I \subseteq I'$, donde concluímos que $I' = I$, o que garante que I é finitamente gerado e, conseqüentemente, $R[x]$ é noetheriano.

Assim, por indução sobre o número de variáveis, temos que, se R é noetheriano, então $R[x_1, \dots, x_n]$ é noetheriano. \square

Deste momento em diante, nos limitaremos a trabalhar com o anel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, em que \mathbb{K} é um corpo. Como acabamos de ver, neste anel comutativo com unidade, todos os ideais são finitamente gerados.

2.2 Ideais monomiais e o Lema de Dickson

Nesta seção, vamos introduzir os principais objetos deste trabalho: os ideais monomiais em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Definição 2.6 Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Se existir um conjunto de monômios (finito ou não) que gera I , então I é chamado de *ideal monomial*.

Note que, dado um ideal monomial $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, o Teorema da base de Hilbert não garante que o conjunto de geradores monomiais de I seja finito. Ele garante, apenas, que existe um conjunto finito de geradores de I , que podem ser monômios ou não.

Observação 2.7 É evidente que, dado um ideal $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_r, \dots \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, monomial ou não, se $f_i | f_j$, para certos $i \neq j$, então f_j não é necessário como gerador e pode ser descartado do conjunto de geradores. Sob este aspecto, os monômios oferecem uma grande vantagem em relação aos polinômios, uma vez que é sempre fácil verificar se um monômio divide outro, tornando simples, então, a tarefa de reduzir um conjunto gerador de um ideal I a um *conjunto gerador minimal*, o qual denotaremos $G(I)$.

A seguir, vamos apresentar dois exemplos que mostram que nem sempre é evidente identificar quando um ideal é, ou não é, monomial.

Exemplo 2.8 O ideal $I = \langle x^3 + xy^4, y^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$ é um ideal monomial, uma vez que $\langle x^3 + xy^4, y^2 \rangle = \langle x^3, y^2 \rangle$.

De fato, se $a \in \langle x^3 + xy^4, y^2 \rangle$, então existem $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$ tais que $a = f(x^3 + xy^4) + gy^2 = fx^3 + fxy^2y^2 + gy^2 = fx^3 + (fxy^2 + g)y^2$. Logo, $a \in \langle x^3, y^2 \rangle$.

Por outro lado, como $x^3 = x^3 + xy^4 - xy^2y^2 \in I$, então $\langle x^3, y^2 \rangle \subseteq I$.

Exemplo 2.9 O ideal $I = \langle x + y, x^2y^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$ não é um ideal monomial.

Suponha, por absurdo, que I seja monomial. Como $I \neq \mathbb{K}[x, y]$, então todos os geradores monomiais de I têm grau maior ou igual a 1. Sejam $m_1, \dots, m_r \in I$ monômios geradores tais que $x + y = \sum_{i=1}^r f_i m_i$, em que $f_i \in \mathbb{K}[x, y]$. Se $\deg(m_i) > 1$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, então

$$\deg\left(\sum_{i=1}^r f_i m_i\right) > 1 = \deg(x + y),$$

o que é um absurdo. Dessa forma, existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $\deg(m_i) = 1$, ou seja, $m_i = x \in I$ ou $m_i = y \in I$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $x \in I$. Assim, existem $g_1, g_2 \in \mathbb{K}[x, y]$ tais que

$$x = g_1(x + y) + g_2x^2y^2. \quad (2.1)$$

Se $\deg(g_1) \geq 1$, então $\deg(g_1(x + y) + g_2x^2y^2) \geq 2 > \deg(x)$. Assim, $g_1 \in \mathbb{K}$, isto é, g_1 é constante.

Se $g_1 = 0$, então $x = g_2x^2y^2$, o que é um absurdo. Se $g_1 \neq 0$, então, usando $x = 0$ em (2.1), temos $0 = g_1y$, o que também é um absurdo.

Assim, segue que I não é um ideal monomial.

Uma condição para que um monômio pertença a um ideal monomial é apresentada na proposição a seguir.

Proposição 2.10 *Sejam I um ideal monomial, $\{m_j, j \in J\}$ um conjunto de geradores monomiais de I e $m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um monômio. Temos que $m \in I$ se, e somente se, m é múltiplo de m_i , para algum $i \in J$.*

Demonstração: Suponha que $m \in I$. Então, temos que $m = \sum_{i=1}^r f_i m_{\alpha_i}$, em que $r \in \mathbb{N}^*$ e $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Seja $\mathbb{M}(f_i m_{\alpha_i})$ o conjunto de todos os monômios que aparecem em $f_i m_{\alpha_i}$, então $m \in \bigcup_{i=1}^r \mathbb{M}(f_i m_{\alpha_i})$ e, conseqüentemente, $m \in \mathbb{M}(f_i m_{\alpha_i})$, para algum $i \in \{1, \dots, r\}$. Logo, $m = w m_{\alpha_i}$, para algum $w \in \mathbb{M}(f_i)$, donde segue a primeira implicação.

A recíproca é imediata. □

O teorema a seguir nos garante que sempre haverá um conjunto finito de monômios que gera um ideal monomial.

Teorema 2.11 (Lema de Dickson) *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial. Temos que existe um conjunto finito de monômios que gera I .*

Demonstração: Vamos considerar $I \neq \{0\}$ e provar o teorema usando indução sobre o número de variáveis.

Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1]$ um ideal monomial. Neste caso, como $\mathbb{K}[x_1]$ é um domínio de ideais principais, existe um polinômio $f \in \mathbb{K}[x_1]$ que gera I , isto é, $I = \langle f \rangle$. O fato de I ser monomial nos garante que existem monômios pertencentes a I . Então, tome um monômio $m \in I$. Assim, $m = gf$, em que $g \in \mathbb{K}[x_1]$. Pela igualdade de polinômios, temos que f (e g) são monômios.

Agora, consideremos o teorema válido para ideais monomiais em anéis de polinômios em $n - 1$ variáveis. Provemos que ele vale, também, para os anéis de polinômios em n variáveis.

Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial e considere $\mathbb{M}_{n-1} = \{m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]; m \text{ é monômio}\}$. Tome um monômio

$$f_1 = g_1 x_n^{\alpha_1} \in I,$$

em que $g_1 \in \mathbb{M}_{n-1}$ e $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ é o menor possível.

Se $I = \langle f_1 \rangle$, então nada mais resta mostrar. Caso contrário, tome um monômio

$$f_2 = g_2 x_n^{\alpha_2} \in I - \langle f_1 \rangle,$$

em que $g_2 \in \mathbb{M}_{n-1}$ e $\alpha_2 \in \mathbb{N}$ é o menor possível. Note que $\alpha_2 \geq \alpha_1$, devido à minimalidade de α_1 .

Se $I = \langle f_1, f_2 \rangle$, então o teorema está demonstrado. Caso contrário, continuamos com esse processo.

Suponhamos que este procedimento continue indefinidamente. Assim, obtemos uma sequência infinita de monômios $f_1, f_2, \dots \in I$ tais que

$$f_i = g_i x_n^{\alpha_i} \in I - \langle f_1, f_2, \dots, f_{i-1} \rangle,$$

em que $g_i \in \mathbb{M}_{n-1}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ é o menor possível e $\alpha_i \geq \alpha_{i-1}$, para todo $i > 1$.

Agora, considere o ideal $J = \langle g_1, g_2, \dots \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Por hipótese de indução, J é finitamente gerado por monômios, ou seja, existem $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{M}_{n-1}$ tais que $J = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$. Como $\langle g_1, g_2, \dots \rangle = J = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$, então, dado $g_i \in \{g_1, g_2, \dots\}$, segue que $g_i = pm_j$, em que $p \in \mathbb{M}_{n-1}$ e $j \in \{1, \dots, r\}$.

Por outro lado, $m_j \in J$. Logo, $m_j = qg_k$, em que $q \in \mathbb{M}_{n-1}$ e $g_k \in \{g_1, g_2, \dots\}$. Deste modo, temos que $g_i = pqg_k$.

Suponha que $i = k$. Assim, $pq = 1$ e, conseqüentemente, $p \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Desta forma, como $g_i = pm_j$ e g_i e m_j são mônicos, segue que $p = 1$ e, portanto, $g_i = m_j$, ou seja, $\{g_1, g_2, \dots\} \subset \{m_1, \dots, m_r\}$. Isso é um absurdo, uma vez que $\{g_1, g_2, \dots\}$ é um conjunto infinito e $\{m_1, \dots, m_r\}$ não. Portanto, devemos ter $i \neq k$ tais que $g_k | g_i$, ou seja, $g_i = mg_k$, em que $m \in \mathbb{M}_{n-1}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $i > k$. Assim,

$$f_i = g_i x_n^{\alpha_i} = mg_k x_n^{\alpha_i - \alpha_k} x_n^{\alpha_k} = m x_n^{\alpha_i - \alpha_k} f_k$$

e, portanto, $f_i \in \langle f_k \rangle \subseteq \langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$. Isso é uma contradição, já que $f_i \in I - \langle f_1, \dots, f_k, \dots, f_{i-1} \rangle$. Portanto, deve existir $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ e, assim, concluímos que I é finitamente gerado por monômios. \square

Como consequência desse teorema, sempre que um ideal monomial for mencionado, poderemos supor que o mesmo é gerado por um conjunto finito de monômios. Além disso, se tal conjunto for minimal, então ele é único, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.12 *Todo ideal monomial possui um único conjunto minimal de geradores monomiais.*

Demonstração: Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial e considere $G_1(I) = \{u_1, \dots, u_r\}$ e $G_2(I) = \{v_1, \dots, v_s\}$ dois conjuntos minimais de geradores monomiais de I . Seja $u_i \in G_1(I)$. Assim, existe um monômio $v_j \in G_2(I)$ tal que $u_i = w_1 v_j$, para algum monômio w_1 . Da mesma forma, existe $u_k \in G_1(I)$ e um monômio w_2 tais que $v_j = w_2 u_k$. Segue que $u_i = w_1 w_2 u_k$. Como $G_1(I)$ é um conjunto minimal, então $k = i$ e $w_1 w_2 = 1$. Em particular, $w_1 = 1$ e, conseqüentemente, $u_i = v_j \in G_2(I)$. Assim, $G_1(I) \subseteq G_2(I)$. Procedendo de maneira análoga, temos que $G_2(I) \subseteq G_1(I)$. Portanto, $G_1(I) = G_2(I)$. \square

Mais uma propriedade que será amplamente utilizada ao longo do texto é apresentada na proposição a seguir.

Proposição 2.13 *Sejam $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial e um polinômio $f = \sum_{i=1}^r c_i m_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, em que $r \in \mathbb{N}^*$, $c_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $m_i \in \mathbb{M}_n$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, e $m_k \neq m_l$, sempre que $k \neq l$. Temos que $f \in I$ se, e somente se, $m_i \in I$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.*

Demonstração: Sejam $I = \langle n_1, \dots, n_s \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial e $f = \sum_{i=1}^r c_i m_i \in I$. Assim, $f = g_1 n_1 + \dots + g_s n_s$, em que $g_k = \sum_{i=1}^{q_k} c_{ik} m_{ik} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $q_k \in \mathbb{N}^*$ e $m_{ik} \in \mathbb{M}_n$, para todo $k \in \{1, \dots, s\}$. Note que, eventualmente, dois ou mais monômios que aparecem em $f = g_1 n_1 + \dots + g_s n_s$ podem ter o mesmo multigrado. Seja $c_i m_i$ um termo qualquer de f . Temos que $c_i m_i$ é igual à soma de todos os elementos $c_{ik} m_{ik} n_k$ que têm o mesmo multigrado de $c_i m_i$. Portanto, $c_i m_i \in I$.

A recíproca é imediata. \square

Vale ressaltar que a proposição acima só tem validade caso, no polinômio f , não apareçam monômios repetidos. Isto ficará claro no próximo exemplo.

Exemplo 2.14 Seja $I = \langle x^2 \rangle$ um ideal de $\mathbb{K}[x, y]$.

Temos que $f = x^2 - xy + x^3 + xy = x^2 + x^3 = x^2(1 + x) \in I$. No entanto, $xy \notin I$.

Como consequência da Proposição 2.13, o processo, às vezes trabalhoso, de verificar se um polinômio pertence, ou não, a um ideal monomial se reduz a verificar se todos os seus monômios pertencem a este ideal, processo já apresentado na Proposição 2.10.

Agora, antes de encerrar esta seção, vamos relembrar de que maneira os monômios se comportam com relação a dois importantes conceitos da Álgebra que serão muito utilizados ao longo de todo o trabalho: o de mínimo múltiplo comum e o de máximo divisor comum.

Sejam $m_1 = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $m_2 = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ e $m = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ monômios de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Claramente, temos que m é múltiplo de m_1 e m_2 se, e somente se, $\gamma_i \geq \alpha_i, \beta_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. De maneira análoga, m é divisor de m_1 e m_2 se, e somente se, $\gamma_i \leq \alpha_i, \beta_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Deste raciocínio, segue a observação.

Observação 2.15 Sejam $m_1 = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $m_2 = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ monômios de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Denotaremos o *mínimo múltiplo comum* entre m_1 e m_2 por $mmc(m_1, m_2)$ e o *máximo divisor comum* entre m_1 e m_2 por $mdc(m_1, m_2)$. Além disso, temos:

$$mmc(m_1, m_2) = x_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}} \quad \text{e} \quad mdc(m_1, m_2) = x_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\min\{\alpha_n, \beta_n\}}.$$

2.3 Ideais monomiais primos e maximais

Na seção 1.1 do capítulo 1, relembramos a definição de ideal primo. Vamos explorar tal conceito no contexto de ideais monomiais.

Proposição 2.16 *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial tal que $G(I) = \{m_1, \dots, m_r\}$. Se $\deg(m_i) > 1$, para algum $i \in \{1, \dots, r\}$, então I não é um ideal primo.*

Demonstração: Seja $m_i = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in G(I)$ tal que $\deg(m_i) > 1$. Assim, uma das seguintes situações deve, necessariamente, acontecer:

1. $\alpha_i, \alpha_j > 0$, para certos $1 \leq i, j \leq n$.

Neste caso, podemos reescrever m_i da seguinte maneira:

$$m_i = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = (x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i} \dots x_k^{\alpha_k})(x_l^{\alpha_l} \dots x_j^{\alpha_j} \dots x_n^{\alpha_n}).$$

2. $\alpha_i > 1$, para algum $1 \leq i \leq n$.

Neste caso, m_i pode ser reescrito como:

$$m_i = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = (x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i-1} \dots x_n^{\alpha_n})(x_i).$$

O argumento acima nos garante que m_i pode ser escrito como um produto de dois fatores m_i' e m_i'' , ambos diferentes de 1.

Agora, veja que $m_i \in I$ e $m_i', m_i'' \notin I$.

Suponha que $m_i' \in I$. Então, existe um monômio m tal que $m_i' = mm_j$, para algum $j \in \{1, \dots, r\}$. Logo, $m_i = m_i' m_i'' = mm_j m_i''$ e, conseqüentemente, m_i é múltiplo de m_j . Isto é um absurdo, uma vez que $\{m_1, \dots, m_r\}$ é um conjunto gerador minimal.

Procedendo de maneira análoga para m_i'' , temos o resultado. \square

A proposição acima garante que, se $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ é um ideal monomial primo, então $\deg(m_i) \leq 1$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. No entanto, se $\deg(m_i) = 0$, para algum i , então $m_i = 1$. Assim, $I = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e, dessa forma, I não poderia ser primo. Então, temos que, se $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ é um ideal monomial primo, então $\deg(m_i) = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, isto é, se $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ é um ideal monomial primo, então $G(I) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$.

Note que nem todas as variáveis do anel aparecem, necessariamente, entre os monômios geradores. Podemos ter $r < n$.

Vamos provar que a recíproca do argumento anterior é válida.

Lema 2.17 *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial. Se $G(I) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$, então I é um ideal primo.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $G(I) = \{x_1, \dots, x_r\}$, em que $r \leq n$.

A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] &\rightarrow \mathbb{K}[x_{r+1}, \dots, x_n] \\ p(x_1, \dots, x_n) &\mapsto p(0, 0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

é, claramente, um epimorfismo de anéis com $\text{Ker}(\varphi) = I$.

Segue, pelo Teorema do Isomorfismo, que $\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I} \cong \mathbb{K}[x_{r+1}, \dots, x_n]$, que é um domínio. Assim, I é um ideal primo. \square

A Proposição 2.16 e o Lema 2.17 podem ser reunidos no seguinte resultado:

Teorema 2.18 *O ideal monomial $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é primo se, e somente se, $G(I) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$.*

Aqui, vale lembrar que um ideal próprio I de um anel R é maximal se, para qualquer ideal J tal que $I \subseteq J$, tivermos $J = I$ ou $J = R$. Como todo ideal maximal é primo, convém identificarmos quais, dentre os ideais primos, são maximais. A resposta segue como uma consequência direta do Lema 2.17 e do Teorema 2.18.

Corolário 2.19 *O ideal monomial $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é maximal se, e somente se, $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.*

Demonstração: Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial maximal. Então, I é primo e, assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $I = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$, em que $r \leq n$.

Pelo Lema 2.17, segue que $\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I} \cong \mathbb{K}[x_{r+1}, \dots, x_n]$. Se $r < n$, então temos que $\mathbb{K}[x_{r+1}, \dots, x_n]$ não é corpo e, dessa forma, I não seria maximal. Assim, segue que $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

A recíproca também segue do Lema 2.17. □

Capítulo 3

Operações com ideais monomiais

Neste capítulo, o nosso objetivo é estudar as operações já apresentadas no capítulo 1, mas, agora, aplicadas em ideais monomiais do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Para cada uma das operações, vamos apresentar um exemplo em $\mathbb{K}[x, y]$ acompanhado de uma representação geométrica que, em alguns casos, pode facilitar o processo de obtenção do resultado. Para que possamos representar geometricamente os monômios, é necessário definir uma aplicação.

Considere o conjunto $\mathbb{N}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n); \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}\}$. Note que podemos considerar este conjunto como um semigrupo com a operação de adição usual, coordenada a coordenada. Considere, também, o semigrupo \mathbb{M}_n , conforme definido no início do capítulo 2.

Agora, defina:

$$\begin{aligned}\xi : (\mathbb{M}_n, \cdot) &\rightarrow (\mathbb{N}^n, +) \\ x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} &\mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n).\end{aligned}$$

Claramente, a aplicação definida acima é um isomorfismo de semigrupos, ou seja, ξ é bijetora e $\xi(m_1 \cdot m_2) = \xi(m_1) + \xi(m_2)$, para todo $m_1, m_2 \in \mathbb{M}_n$. Desta forma, ao invés de trabalharmos com o monômio, podemos trabalhar com o seu multigráu, o que será

muito útil em alguns momentos.

Definição 3.1 Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial. Daremos ao conjunto dos multigrados de todos os monômios de I , isto é, $\xi(I) \subset \mathbb{N}^n$, o nome de *conjunto expoente* de I .

Note que a aplicação ξ pode ser utilizada para obtermos uma outra interpretação das operações e resultados envolvendo monômios. Por exemplo, como vimos na Observação 2.15 do capítulo 2, se $m_1 = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, m_2 = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \in \mathbb{M}_n$, então $mmc(m_1, m_2) = x_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}}$ e $mdc(m_1, m_2) = x_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\min\{\alpha_n, \beta_n\}}$. Assim,

$$\xi(mmc(m_1, m_2)) = \max(\xi(m_1), \xi(m_2)) \text{ e } \xi(mdc(m_1, m_2)) = \min(\xi(m_1), \xi(m_2)),$$

em que

$$\max((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)) = (\max\{\alpha_1, \beta_1\}, \dots, \max\{\alpha_n, \beta_n\}),$$

$$\min((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)) = (\min\{\alpha_1, \beta_1\}, \dots, \min\{\alpha_n, \beta_n\}),$$

para $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$.

Dados $m_1 = x^2y^4, m_2 = x^4y \in \mathbb{K}[x, y]$, temos que $mmc(m_1, m_2) = x^4y^4$ e $mdc(m_1, m_2) = x^2y$. Graficamente, temos:

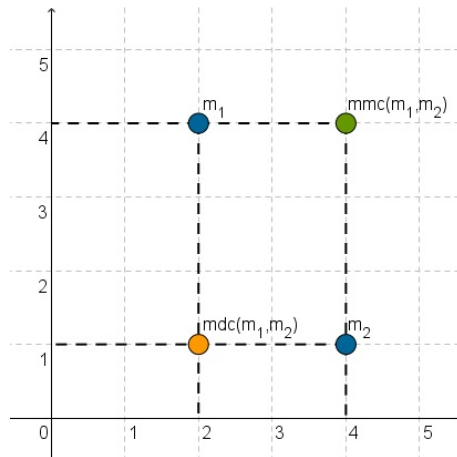


Figura 3.1: $mmc(m_1, m_2)$ e $mdc(m_1, m_2)$

3.1 Operações básicas com ideais monomiais

Retomemos as operações apresentadas no capítulo 1 no contexto de ideais monomiais e examinemos a que correspondem tais operações em seus conjuntos expoentes.

Vamos começar com a soma de ideais.

Sabemos que, dados dois ideais finitamente gerados $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ e $J = \langle n_1, \dots, n_s \rangle$ de um anel qualquer R , temos que:

$$\begin{aligned} I + J &= \{i + j; i \in I, j \in J\} \\ &= \{a_1 m_1 + \dots + a_r m_r + b_1 n_1 + \dots + b_s n_s; a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in R\} \\ &= \langle m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s \rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, é evidente que a soma de ideais monomiais é um ideal monomial.

Exemplo 3.2 Sejam $I = \langle x^3, xy, y^4 \rangle$, $J = \langle x^2, xy^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. Então:

$$\begin{aligned} I + J &= \langle x^3, xy, y^4 \rangle + \langle x^2, xy^2 \rangle \\ &= \langle x^3, xy, y^4, x^2, xy^2 \rangle \\ &= \langle xy, y^4, x^2 \rangle. \end{aligned}$$

Na Figura 3.2, os monômios geradores de I , J e $I + J$ aparecem representados por pontos em (a), (b) e (c), respectivamente. A região colorida contém o conjunto expoente de cada ideal. Note que tal região representa um conjunto de \mathbb{R}^n , mas vamos utilizar esse formato para facilitar a visualização. Observe que a região em verde, que aparece em (c), foi obtida por meio da união das regiões em azul e roxo, que aparecem em (a) e (b), respectivamente, o que já era esperado, devido ao algoritmo algébrico definido acima. Assim, a representação geométrica pode ser utilizada para a obtenção do resultado da soma, apesar de o processo algébrico ser bastante simples, como mostrado anteriormente.

Temos, assim, que, se I e J são ideais monomiais de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, então

$$\xi(I + J) = \xi(I) \cup \xi(J).$$

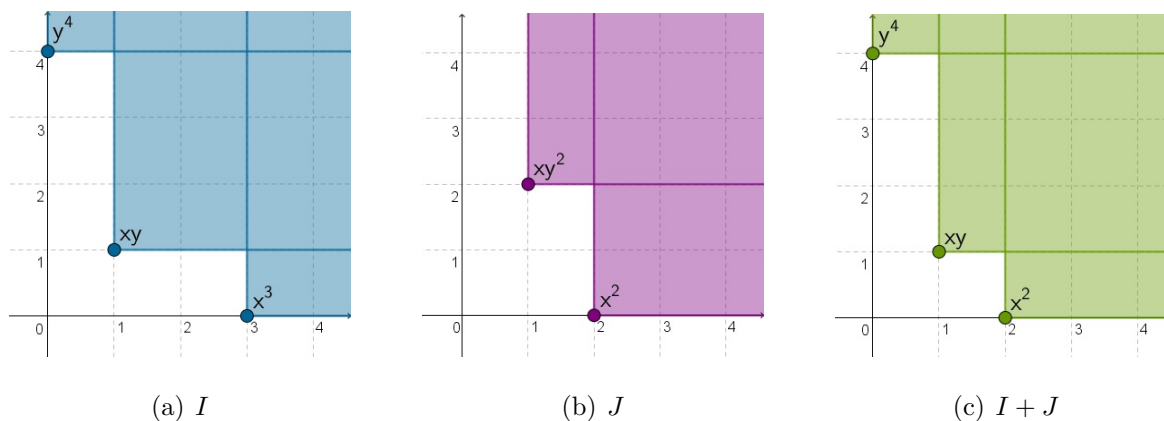


Figura 3.2: Soma de ideais monomiais

Para analisarmos o produto de dois ideais monomiais, utilizaremos processo semelhante ao da soma. Dados dois ideais finitamente gerados $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ e $J = \langle n_1, \dots, n_s \rangle$ de um anel qualquer R , temos que:

$$\begin{aligned}
 IJ &= \left\langle \sum_{finita} ij; i \in I, j \in J \right\rangle \\
 &= \langle \{ij; i \in I, j \in J\} \rangle \\
 &= \langle \{(a_1 m_1 + \dots + a_r m_r)(b_1 n_1 + \dots + b_s n_s); a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in R\} \rangle \\
 &= \langle m_1 n_1, \dots, m_1 n_s, \dots, m_r n_1, \dots, m_r n_s \rangle.
 \end{aligned}$$

Mais uma vez, fica claro que o produto de ideais monomiais é um ideal monomial.

Exemplo 3.3 Sejam $I = \langle x^2, xy, y^2 \rangle, J = \langle x, y \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. Então:

$$\begin{aligned}
 IJ &= \langle x^2, xy, y^2 \rangle \cdot \langle x, y \rangle \\
 &= \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle.
 \end{aligned}$$

Novamente, é possível utilizar a representação geométrica para encontrar o resultado da operação, efetuando a soma do multigráu de cada monômio gerador de I com o multigráu de cada monômio gerador de J . Dito de outro modo, $\xi(IJ)$ é obtido pela soma de cada elemento de $\xi(I)$ com cada elemento de $\xi(J)$. Tal operação é conhecida como *soma de Minkowski* de $\xi(I)$ e $\xi(J)$. Assim,

$$\xi(IJ) = \xi(I) + \xi(J).$$

Mais uma vez, este processo não revela grande benefício quando comparado ao processo algébrico, uma vez que devemos efetuar a soma dos multigráus em ambos os casos.

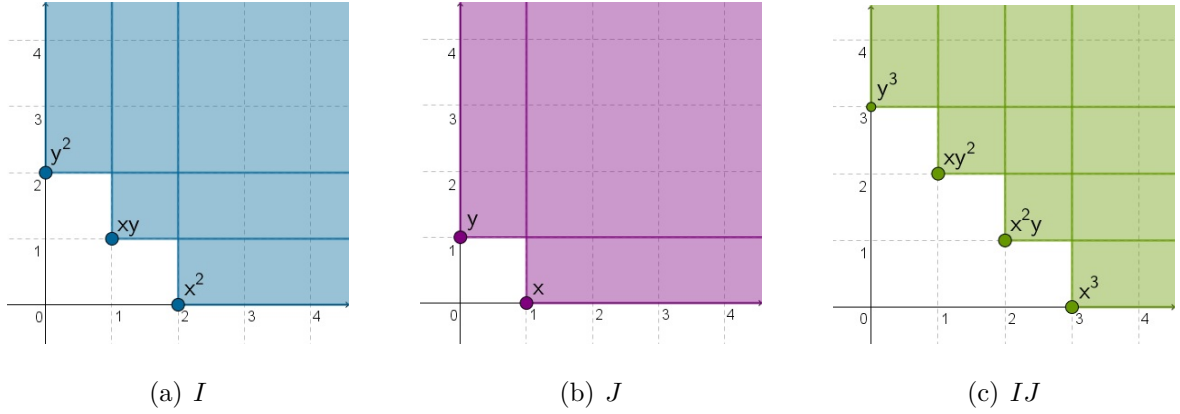


Figura 3.3: Produto de ideais monomiais

As próximas operações não são tão imediatas quanto a adição e a multiplicação e, por isso, vamos apresentar mais algumas propriedades.

Para a intersecção, utilizaremos as duas proposições a seguir.

Proposição 3.4 *Sejam $\langle w \rangle$ e $\langle v \rangle$ ideais de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, em que w e v são monômios. Então $\langle w \rangle \cap \langle v \rangle = \langle mmc(w, v) \rangle$.*

Demonstração: Dado p um polinômio de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $\mathbb{M}(p)$ o conjunto formado por todos os monômios que aparecem em p , temos as seguintes equivalências:

$$p \in \langle w \rangle \cap \langle v \rangle \Leftrightarrow \mathbb{M}(p) \subset \langle w \rangle \cap \langle v \rangle \quad \text{e} \quad p \in \langle mmc(w, v) \rangle \Leftrightarrow \mathbb{M}(p) \subset \langle mmc(w, v) \rangle.$$

As equivalências anteriores indicam que podemos realizar os argumentos utilizando apenas monômios.

Assim, considere $w = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $v = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ e seja $m = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ um monômio tal que $m \in \langle w \rangle \cap \langle v \rangle$. Logo, m é múltiplo de w e de v . Então, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $\gamma_i \geq \alpha_i, \beta_i$ e, conseqüentemente, $\gamma_i \geq \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, ou seja, $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\} + \varepsilon_i$, em que $\varepsilon_i \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
m &= x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} \\
&= x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} x_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}} \in \langle x_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}} \rangle = \langle mmc(w, v) \rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado, tome um monômio $m \in \langle mmc(w, v) \rangle$. Então, existe um monômio $q \in \mathbb{M}_n$ tal que

$$\begin{aligned}
m &= q \cdot mmc(w, v) \\
&= qx_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}} \\
&= qx_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\} - \alpha_1} \dots x_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\} - \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \langle w \rangle.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, mostramos que $m \in \langle v \rangle$.

Portanto, $\langle w \rangle \cap \langle v \rangle = \langle mmc(w, v) \rangle$. □

Proposição 3.5 *Sejam I, J, L ideais monomiais de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Então $(I + J) \cap L = (I \cap L) + (J \cap L)$.*

Demonstração: O item (i) da Proposição 1.3 nos garante que $(I \cap L) + (J \cap L) \subseteq (I + J) \cap L$.

Para a outra inclusão, seja $p \in (I + J) \cap L$. Então $p = p_1 + p_2 \in L$, em que $p_1 \in I$ e $p_2 \in J$.

Sejam $\mathbb{M}(p_1)$ o conjunto formado por todos os monômios que aparecem em p_1 e $\mathbb{M}(p_2)$ o conjunto formado por todos os monômios que aparecem em p_2 . Assim, como I e J são ideais monomiais, temos que $\mathbb{M}(p_1) \subset I$ e $\mathbb{M}(p_2) \subset J$.

Note que podem existir monômios que aparecem tanto em $\mathbb{M}(p_1)$ quanto em $\mathbb{M}(p_2)$, isto é, pode existir $m \in \mathbb{M}(p_1) \cap \mathbb{M}(p_2)$. Se isso acontecer, podemos escrever:

$$p = p_1 + p_2 = (p_1 - c_1 m) + (p_2 + c_1 m),$$

em que $p_1 - c_1 m \in I$ e $p_2 + c_1 m \in J$.

Utilizando este procedimento para todos os monômios que aparecerem em ambos os conjuntos $\mathbb{M}(p_1)$ e $\mathbb{M}(p_2)$, poderemos reescrever o polinômio p como

$$p = p'_1 + p'_2,$$

em que $p'_1 \in I, p'_2 \in J$, de maneira que todos os monômios de p são diferentes uns dos outros. Dessa forma, como $p \in L$, segue que $\mathbb{M}(p) \subset L$ e, conseqüentemente, $p'_1, p'_2 \in L$.

Portanto, $p = p'_1 + p'_2 \in (I \cap L) + (J \cap L)$. \square

Observação 3.6 Utilizando indução sobre o número de ideais envolvidos, o resultado anterior pode ser generalizado. Assim, temos

$$\left(\sum_{i=1}^k I_i \right) \cap L = \sum_{i=1}^k (I_i \cap L),$$

em que L e I_i são ideais monomiais, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Situações semelhantes aparecem no decorrer de todo o texto e utilizaremos livremente essa observação.

Com base nas Proposições 3.4, 3.5 e na Observação 3.6, dados dois ideais monomiais $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle, J = \langle n_1, \dots, n_s \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, a intersecção entre eles se expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I \cap J &= \langle m_1, \dots, m_r \rangle \cap \langle n_1, \dots, n_s \rangle \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \langle m_i \rangle \right) \cap \langle n_1, \dots, n_s \rangle \\ &= \sum_{i=1}^r (\langle m_i \rangle \cap \langle n_1, \dots, n_s \rangle) \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r \langle m_i \rangle \cap \langle n_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r \langle mmc(m_i, n_j) \rangle. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Exemplo 3.7 Sejam $I = \langle x^3, xy, y^4 \rangle, J = \langle x^2, xy^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. Então:

$$\begin{aligned} I \cap J &= \langle x^3, xy, y^4 \rangle \cap \langle x^2, xy^2 \rangle \\ &= \langle x^3, x^3y^2, x^2y, xy^2, x^2y^4, xy^4 \rangle \\ &= \langle x^3, x^2y, xy^2 \rangle. \end{aligned}$$

Abaixo, temos a representação geométrica referente à intersecção dos ideais monomiais I e J . Note que a região em verde, que aparece em (c), é a intersecção das regiões em azul e roxo, que aparecem em (a) e (b), respectivamente. Deste modo, temos que

$$\xi(I \cap J) = \xi(I) \cap \xi(J).$$

Neste caso, a obtenção do resultado por meio da análise geométrica pode representar um certo benefício em relação à obtenção deste mesmo resultado por meio do desenvolvimento do que foi apresentado acima, já que esse envolve o cálculo do mínimo múltiplo comum entre cada monômio gerador de I e cada monômio gerador de J .

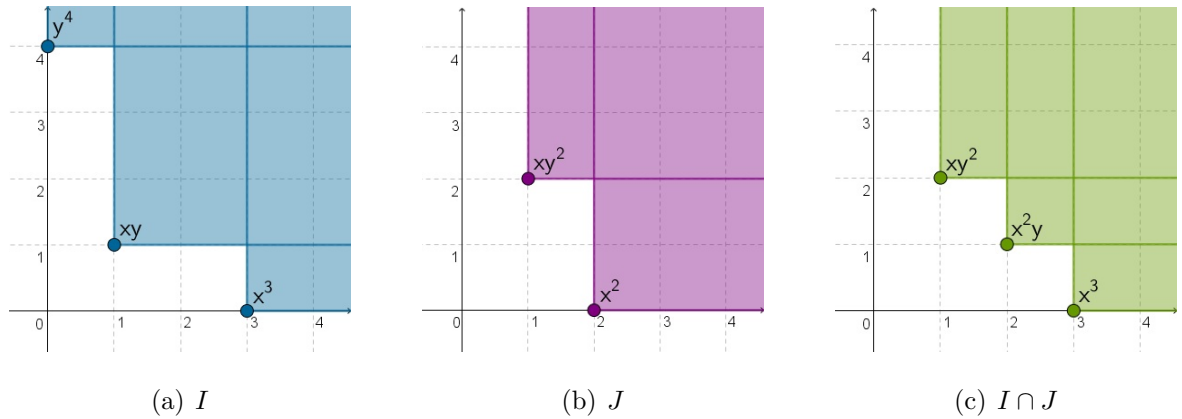


Figura 3.4: Intersecção de ideais monomiais

Para abordar o quociente de ideais monomiais, também apresentaremos mais dois resultados a seguir.

Proposição 3.8 *Sejam $\langle w \rangle$ e $\langle v \rangle$ ideais de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, em que w e v são monômios. Então, $\langle w \rangle : \langle v \rangle = \left\langle \frac{w}{\text{mdc}(w, v)} \right\rangle$.*

Demonstração: Por motivo já evidenciado anteriormente, faremos toda a demonstração para um monômio de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Considere $w = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $v = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \in \mathbb{M}_n$.

Note que

$$\begin{aligned}
v &= x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \\
&= x_1^{\beta_1 - \min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\beta_n - \min\{\alpha_n, \beta_n\}} x_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\min\{\alpha_n, \beta_n\}} \\
&= b \cdot \text{mdc}(w, v),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

em que $b = x_1^{\beta_1 - \min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\beta_n - \min\{\alpha_n, \beta_n\}} \in \mathbb{M}_n$.

Seja $m = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ um monômio tal que $m \in \langle w \rangle : \langle v \rangle$. Então, $mv \in \langle w \rangle$ e, assim, existe um monômio u tal que $mv = wu$.

Mostremos que b divide u .

Considere $u = x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}$. Como $mv = wu$, então

$$x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}.$$

Assim, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $\gamma_i + \beta_i = \alpha_i + \delta_i$. Logo, $\beta_i - \alpha_i = \delta_i - \gamma_i$ e, portanto,

$$\beta_i - \alpha_i \leq \delta_i.$$

Vamos analisar dois casos.

Se $\min\{\alpha_i, \beta_i\} = \beta_i$, então $\beta_i - \min\{\alpha_i, \beta_i\} = 0 \leq \delta_i$.

Se $\min\{\alpha_i, \beta_i\} = \alpha_i$, então $\beta_i - \min\{\alpha_i, \beta_i\} = \beta_i - \alpha_i \leq \delta_i$.

Assim, b divide u , isto é, $\frac{u}{b} \in \mathbb{M}_n$.

Dessa forma, temos que

$$m = \frac{uw}{v} = \frac{uw}{b \cdot \text{mdc}(w, v)} = \frac{u}{b} \cdot \frac{w}{\text{mdc}(w, v)},$$

o que mostra que $m \in \left\langle \frac{w}{\text{mdc}(w, v)} \right\rangle$.

Por outro lado, seja $m \in \left\langle \frac{w}{\text{mdc}(w, v)} \right\rangle$. Então, existe um monômio u tal que

$$m = u \cdot \frac{w}{\text{mdc}(w, v)}.$$

Logo, $m \cdot \text{mdc}(w, v) = uw$ e, conseqüentemente, por (3.2), temos que

$$mv = uw x_1^{\beta_1 - \min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\beta_n - \min\{\alpha_n, \beta_n\}}.$$

Assim, $mv \in \langle w \rangle$ e, portanto, $m \in \langle w \rangle : \langle v \rangle$.

Vale ressaltar que o último passo acontece porque, como $\langle w \rangle$ é ideal, então $mvq \in \langle w \rangle$, para qualquer polinômio q de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. \square

Proposição 3.9 *Sejam $\langle m_1, \dots, m_r \rangle, \langle w \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ideais monomiais. Então $\langle m_1, \dots, m_r \rangle : \langle w \rangle = \langle m_1 \rangle : \langle w \rangle + \dots + \langle m_r \rangle : \langle w \rangle$.*

Demonstração: O item (ii) da Proposição 1.3 nos garante que $\langle m_1 \rangle : \langle w \rangle + \dots + \langle m_r \rangle : \langle w \rangle \subseteq \langle m_1, \dots, m_r \rangle : \langle w \rangle$.

Para a outra inclusão, considere o monômio $m \in \langle m_1, \dots, m_r \rangle : \langle w \rangle$. Então, $mw \in \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ e, conseqüentemente, existe um monômio q tal que $mw = qm_i$, para algum $i \in \{1, \dots, r\}$. Logo, $mw \in \langle m_i \rangle$ e, assim, $m \in \langle m_i \rangle : \langle w \rangle$. Portanto, $m \in \langle m_1 \rangle : \langle w \rangle + \dots + \langle m_r \rangle : \langle w \rangle$. \square

Assim, de acordo com as Proposições 3.8, 3.9 e com o item (iii) da Proposição 1.3, dados os ideais monomiais $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle, J = \langle n_1, \dots, n_s \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, o quociente entre eles pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 I : J &= \langle m_1, \dots, m_r \rangle : \langle n_1, \dots, n_s \rangle \\
 &= \langle m_1, \dots, m_r \rangle : \sum_{j=1}^s \langle n_j \rangle \\
 &= \bigcap_{j=1}^s (\langle m_1, \dots, m_r \rangle : \langle n_j \rangle) \\
 &= \bigcap_{j=1}^s \sum_{i=1}^r (\langle m_i \rangle : \langle n_j \rangle) \\
 &= \bigcap_{j=1}^s \sum_{i=1}^r \left\langle \frac{m_i}{\text{mdc}(m_i, n_j)} \right\rangle. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.10 Sejam $I = \langle x^3, xy, y^4 \rangle, J = \langle x^2, xy^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. Então:

$$\begin{aligned}
I : J &= \langle x^3, xy, y^4 \rangle : \langle x^2, xy^2 \rangle \\
&= \left(\left\langle \frac{x^3}{\text{mdc}(x^3, x^2)} \right\rangle + \left\langle \frac{xy}{\text{mdc}(xy, x^2)} \right\rangle + \left\langle \frac{y^4}{\text{mdc}(y^4, x^2)} \right\rangle \right) \\
&\cap \left(\left\langle \frac{x^3}{\text{mdc}(x^3, xy^2)} \right\rangle + \left\langle \frac{xy}{\text{mdc}(xy, xy^2)} \right\rangle + \left\langle \frac{y^4}{\text{mdc}(y^4, xy^2)} \right\rangle \right) \\
&= \langle x, y, y^4 \rangle \cap \langle x^2, 1, y^2 \rangle \\
&= \langle x, y \rangle \cap \mathbb{K}[x, y] \\
&= \langle x, y \rangle.
\end{aligned}$$

Neste caso, a representação geométrica para obtenção dos monômios geradores de $I : J$ pode não oferecer benefício. Note que, utilizando as interpretações já realizadas das operações por meio da aplicação ξ e a relação (3.3), obtemos

$$\xi(I : J) = \bigcap_{j=1}^s \bigcup_{i=1}^r (\xi(m_i) - \min(\xi(m_i), \xi(n_j))),$$

em que $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ e $J = \langle n_1, \dots, n_s \rangle$.

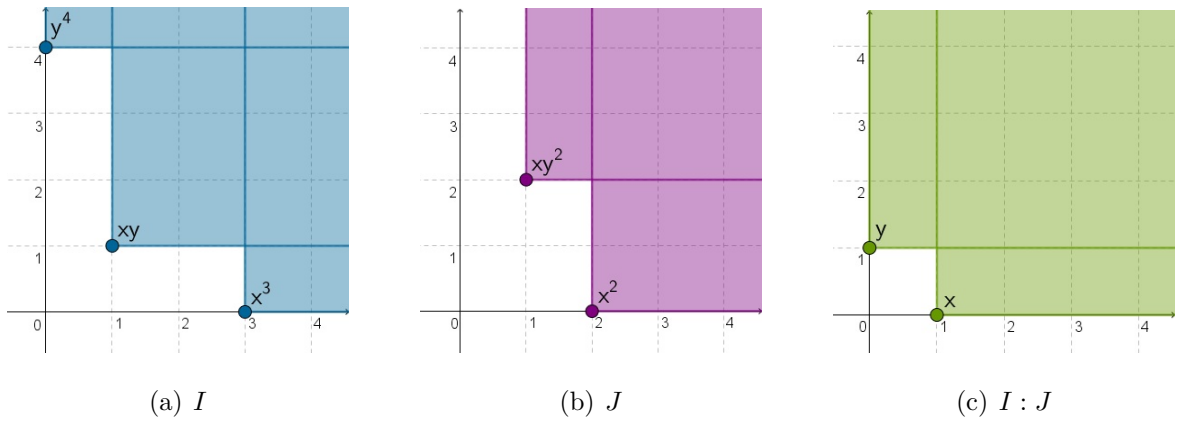


Figura 3.5: Quociente de ideais monomiais

Para finalizar esta seção, estudaremos o radical de um ideal monomial. Para tanto, vamos apresentar dois conceitos e uma proposição.

Definição 3.11 Um monômio $m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é chamado *livre de quadrados* se $m = x_{i_1} \dots x_{i_k}$, em que $i_1 < \dots < i_k$.

Definição 3.12 Um ideal monomial gerado por monômios livres de quadrados é chamado *ideal monomial livre de quadrados*.

Exemplo 3.13 O ideal $I = \langle x, yz, w \rangle \subset \mathbb{K}[x, y, z, w]$ é um ideal monomial livre de quadrados e o ideal $J = \langle x^2, yz, w \rangle \subset \mathbb{K}[x, y, z, w]$ não é um ideal monomial livre de quadrados.

Proposição 3.14 *Um ideal monomial livre de quadrados é um ideal radical.*

Demonstração: Seja $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial, em que m_1 é livre de quadrados, isto é, $m_1 = x_{i_1} \dots x_{i_k}$, com $i_1 < \dots < i_k$.

Por (3.1), temos que

$$\langle x_{i_1}, m_2, \dots, m_r \rangle \cap \dots \cap \langle x_{i_k}, m_2, \dots, m_r \rangle = \langle x_{i_1} \dots x_{i_k}, m_2, \dots, m_r \rangle = I.$$

Agora, suponha que m_2 também seja livre de quadrados, isto é, $m_2 = x_{j_1} \dots x_{j_l}$, com $j_1 < \dots < j_l$.

Então, dado $p \in \{1, \dots, k\}$, temos

$$\begin{aligned} \langle x_{i_p}, x_{j_1}, m_3, \dots, m_r \rangle \cap \dots \cap \langle x_{i_p}, x_{j_l}, m_3, \dots, m_r \rangle &= \langle x_{i_p}, x_{j_1} \dots x_{j_l}, m_3, \dots, m_r \rangle \\ &= \langle x_{i_p}, m_2, m_3, \dots, m_r \rangle. \end{aligned}$$

Procedemos com esse processo até o último monômio gerador de I . Assim, suponha que m_r também seja livre de quadrados, isto é, $m_r = x_{q_1} \dots x_{q_t}$, com $q_1 < \dots < q_t$. Então, dado $w \in \{1, \dots, t\}$, temos que $\bigcap_{w=1}^t \langle x_{i_p}, \dots, x_{q_w} \rangle = \langle x_{i_p}, \dots, m_r \rangle$. Dessa forma, I é uma intersecção de ideais do tipo $\langle x_{c_1}, x_{c_2}, \dots, x_{c_s} \rangle$, em que $c_1, c_2, \dots, c_s \in \{1, \dots, n\}$. Pelo Teorema 2.18, cada um desses ideais é um ideal primo. Assim, $I = P_1 \cap \dots \cap P_N$, em que P_1, \dots, P_N são ideais primos.

Utilizando a Proposição 1.5 e o item (iii) da Proposição 1.6, segue que

$$\sqrt{I} = \sqrt{P_1 \cap \dots \cap P_N} = \sqrt{\sqrt{P_1} \cap \dots \cap \sqrt{P_N}} = \sqrt{P_1} \cap \dots \cap \sqrt{P_N} = P_1 \cap \dots \cap P_N = I.$$

Portanto, I é um ideal radical. □

O resultado anterior nos permite obter facilmente o radical de um ideal monomial.

Proposição 3.15 *Seja $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial, em que $m_i = x_{i_1}^{c_{i_1}} \dots x_{i_{k_i}}^{c_{i_{k_i}}}$ e $c_{i_k} \neq 0$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ e para todo $k \in \{1, \dots, k_i\}$. Então $\sqrt{I} = \langle n_1, \dots, n_r \rangle$, em que $n_i = x_{i_1} \dots x_{i_{k_i}}$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.*

Demonstração: Seja $c_i = \max\{c_{i_k}; k = 1, \dots, k_i\}$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Assim, $n_i^{c_i} = (x_{i_1} \dots x_{i_{k_i}})^{c_i} = x_{i_1}^{c_i} \dots x_{i_{k_i}}^{c_i} \in I$, uma vez que, devido à escolha de c_i , $x_{i_1}^{c_i} \dots x_{i_{k_i}}^{c_i}$ é múltiplo de $x_{i_1}^{c_{i_1}} \dots x_{i_{k_i}}^{c_{i_{k_i}}} = m_i$.

Seja $N = c_1 + c_2 + \dots + c_r - r + 1$. Temos que

$$\langle n_1, \dots, n_r \rangle^N \subseteq I \subseteq \langle n_1, \dots, n_r \rangle.$$

Para a primeira inclusão, note que um elemento de $\langle n_1, \dots, n_r \rangle^N$ é uma soma finita de produtos da forma $\prod_{j=1}^N (f_{1j}n_1 + \dots + f_{rj}n_r)$, em que $f_{ij} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Tal produto, por sua vez, é igual a uma soma de termos $g_d n_1^{d_1} \dots n_r^{d_r}$, em que $d = (d_1, \dots, d_r)$, $d_1 + \dots + d_r = N$ e $g_d \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Temos que $d_i \geq c_i$, para pelo menos um valor de i , pois, caso contrário, teríamos $d_i \leq c_i - 1$, para todo i e, assim, $\sum_{i=1}^r d_i \leq \sum_{i=1}^r (c_i - 1)$. Logo,

$$N = \sum_{i=1}^r d_i \leq \sum_{i=1}^r c_i - r < \sum_{i=1}^r c_i - r + 1 = N,$$

o que é um absurdo. Dessa forma, suponha que $d_j \geq c_j$, em que $j \in \{1, \dots, r\}$. Então, $n_j^{d_j} \in I$, pois $n_i^{c_i} \in I$, para todo i . Assim, todos os termos $g_d n_1^{d_1} \dots n_r^{d_r}$ pertencem a I e, consequentemente, $\langle n_1, \dots, n_r \rangle^N \subseteq I$.

Para a segunda inclusão, seja $m \in I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$. Então, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, existe $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que:

$$\begin{aligned} m &= f_1 m_1 + \dots + f_r m_r \\ &= f_1 x_{1_1}^{c_{1_1}} \dots x_{1_{k_1}}^{c_{1_{k_1}}} + \dots + f_r x_{r_1}^{c_{r_1}} \dots x_{r_{k_r}}^{c_{r_{k_r}}} \\ &= f_1 x_{1_1}^{c_{1_1}-1} x_{1_1} \dots x_{1_{k_1}}^{c_{1_{k_1}}-1} x_{1_{k_1}} + \dots + f_r x_{r_1}^{c_{r_1}-1} x_{r_1} \dots x_{r_{k_r}}^{c_{r_{k_r}}-1} x_{r_{k_r}} \\ &= f_1 x_{1_1}^{c_{1_1}-1} \dots x_{1_{k_1}}^{c_{1_{k_1}}-1} n_1 + \dots + f_r x_{r_1}^{c_{r_1}-1} \dots x_{r_{k_r}}^{c_{r_{k_r}}-1} n_r \in \langle n_1, \dots, n_r \rangle. \end{aligned}$$

Assim, pelo item (i) da Proposição 1.6, temos que

$$\sqrt{\langle n_1, \dots, n_r \rangle^N} \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\langle n_1, \dots, n_r \rangle}$$

e, pelo item (ii) da Proposição 1.6 e pela Proposição 3.14, concluímos que

$$\langle n_1, \dots, n_r \rangle = \sqrt{\langle n_1, \dots, n_r \rangle} = \sqrt{\langle n_1, \dots, n_r \rangle^N} \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\langle n_1, \dots, n_r \rangle} = \langle n_1, \dots, n_r \rangle.$$

Portanto, $\sqrt{I} = \langle n_1, \dots, n_r \rangle$. □

Exemplo 3.16 Seja $I = \langle x^4, xy^2, y^3 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. Então:

$$\sqrt{I} = \langle x, xy, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Note que, neste caso, basta considerar 1 como expoente de cada variável que aparece nos monômios geradores de I para obter os monômios geradores de \sqrt{I} , tornando a operação muito simples.

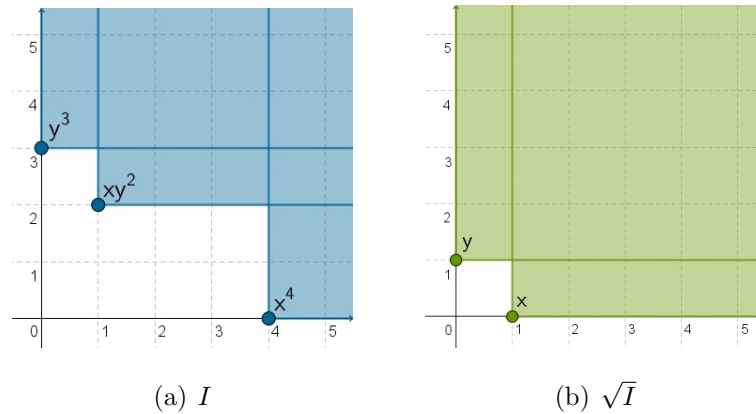


Figura 3.6: Radical de ideal monomial

3.2 Fecho integral de um ideal monomial

Na seção 1.2 do capítulo 1, tivemos um primeiro contato com a operação do fecho integral de um ideal e estudamos algumas de suas propriedades quando aplicadas a ideais quaisquer. Nesta seção, nosso objetivo é provar que o fecho integral de um ideal monomial

é um ideal monomial. Mas, antes, vamos observar uma peculiaridade que essa operação reserva para o caso em que o ideal é monomial.

Proposição 3.17 *Sejam $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial e m um monômio. Então $m \in \bar{I}$ se, e somente se, existirem $k \in \mathbb{N}^*$ e monômios $m_1, \dots, m_k \in I$ tais que $m^k - m_1 \dots m_k = 0$.*

Demonstração: Considere $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Temos que $m \in \bar{I}$ se, e somente se, existem $r \in \mathbb{N}^*$ e $p_i \in I^i$ tais que $m^r + p_1 m^{r-1} + \dots + p_{r-1} m + p_r = 0$. Como I^i é monomial, segue que $\mathbb{M}(p_i) \subset I^i$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Agora, note que $m^r = x_1^{r\alpha_1} \dots x_n^{r\alpha_n}$. Deste modo, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, devemos ter, no máximo, um elemento $q_i \in \mathbb{M}(p_i) \subset I^i$ tal que $q_i m^{r-i} = x_1^{r\alpha_1} \dots x_n^{r\alpha_n} = m^r$. Assim, temos $b_i \in \mathbb{K}$ tais que $m^r + b_1 q_1 m^{r-1} + \dots + b_{r-1} q_{r-1} m + b_r q_r = 0$.

Devemos ter, ao menos, um índice $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $b_i \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos $m^r = 0$, o que é um absurdo. Seja k um tal índice, ou seja, $q_k m^{r-k} = m^r$. Deste modo, temos que $0 = m^r - q_k m^{r-k} = m^{r-k}(m^k - q_k)$. Logo, $m^k - q_k = 0$, em que $q_k \in I^k$, isto é, $m^k - m_1 \dots m_k = 0$, em que m_1, \dots, m_k são monômios que pertencem a I .

A recíproca é imediata. □

Na Proposição 2.13 do capítulo 2, vimos que, se I é um ideal monomial, então, para todo $f \in I$, temos $\mathbb{M}(f) \subset I$. O lema a seguir mostra que a recíproca também é verdadeira.

Lema 3.18 *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Se, para todo $f \in I$, tivermos $\mathbb{M}(f) \subset I$, então I é monomial.*

Demonstração: Suponha que, para todo $f \in I$, tenhamos $\mathbb{M}(f) \subset I$ e considere

$$S = \{m; m \text{ é monômio de algum } f \in I\}.$$

Mostremos que $\langle S \rangle = I$.

Por hipótese, $S \subseteq I$ e, conseqüentemente, $\langle S \rangle \subseteq I$.

Por outro lado, dado $g \in I$, segue que $\mathbb{M}(g) \subset S$ e, portanto, $g \in \langle S \rangle$.

Portanto, I é um ideal monomial. □

A Proposição 3.17 e o Lema 3.18 nos permitem provar o seguinte teorema.

Teorema 3.19 *O fecho integral de um ideal monomial é um ideal monomial.*

Demonstração: Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial. Já mostramos, anteriormente, que \bar{I} é um ideal. Portanto, falta mostrar que \bar{I} é monomial.

Queremos mostrar que, para todo $g \in \bar{I}$, temos que $\mathbb{M}(g) \subset \bar{I}$ e, dessa forma, o Lema 3.18 garante o resultado.

Suponha que existe $g = \sum_{i=1}^r a_i m_i \in \bar{I}$ tal que $\mathbb{M}(g) = \{m_1, \dots, m_r\} \not\subset \bar{I}$. Então, considere $k \leq r$ tal que $\{m_{k+1}, \dots, m_r\} \subset \bar{I}$ e $m_i \notin \bar{I}$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Assim,

$$f = g - (a_{k+1}m_{k+1} + \dots + a_r m_r) = a_1 m_1 + \dots + a_k m_k \in \bar{I}.$$

Se $k = 1$, o argumento acima evidencia uma contradição e nada mais resta mostrar.

Se $k > 1$, então considere, inicialmente, que \mathbb{K} é um corpo infinito. Tome $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e defina a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_u : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] &\rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \\ x_i &\mapsto u_i x_i. \end{aligned}$$

Não é difícil mostrar que φ_u é um automorfismo de anéis.

Note que $\varphi_u(I^i) = I^i$ e $\varphi_u(m) \neq 0$, para todo monômio $m \in \mathbb{M}_n$.

Como $f \in \bar{I}$, então existem $r \in \mathbb{N}^*$ e $p_i \in I^i$ tais que $f^r + p_1 f^{r-1} + \dots + p_{r-1} f + p_r = 0$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_u(0) &= \varphi_u(f^r + p_1 f^{r-1} + \dots + p_{r-1} f + p_r) \\ &= \varphi_u(f^r) + \varphi_u(p_1) \varphi_u(f^{r-1}) + \dots + \varphi_u(p_{r-1}) \varphi_u(f) + \varphi_u(p_r) \\ &= (\varphi_u(f))^r + q_1 (\varphi_u(f))^{r-1} + \dots + q_{r-1} \varphi_u(f) + q_r, \end{aligned}$$

em que $q_i = \varphi_u(p_i) \in I^i$. Portanto, $\varphi_u(f) \in \bar{I}$.

Denotemos $m_i = x_1^{\alpha_{i1}} \dots x_n^{\alpha_{in}}$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Como \mathbb{K} é um corpo infinito, existem $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi_u(f) &= a_1 u_1^{\alpha_{11}} \dots u_n^{\alpha_{1n}} m_1 + \dots + a_k u_1^{\alpha_{k1}} \dots u_n^{\alpha_{kn}} m_k \\ &\neq a_1 u_1^{\alpha_{k1}} \dots u_n^{\alpha_{kn}} m_1 + \dots + a_k u_1^{\alpha_{k1}} \dots u_n^{\alpha_{kn}} m_k \\ &= u_1^{\alpha_{k1}} \dots u_n^{\alpha_{kn}} f. \end{aligned}$$

Agora, considere $h = u_1^{\alpha_{k1}} \dots u_n^{\alpha_{kn}} f - \varphi_u(f) \neq 0$. Como $f, \varphi_u(f) \in \bar{I}$, então temos que $h \in \bar{I}$. Note que cada um dos monômios de h (que aparecem em número menor do que k e pertencem a $\mathbb{M}(f)$) não pertencem a \bar{I} . Dessa forma, podemos repetir todo este processo para h e, assim por diante, até obtermos um polinômio constituído de apenas um monômio $m \in \mathbb{M}(f)$ em \bar{I} , o que é uma contradição.

Assim, quando \mathbb{K} é um corpo infinito, para todo $g \in \bar{I} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, temos que $\mathbb{M}(g) \subset \bar{I}$ e, portanto, \bar{I} é monomial.

Se \mathbb{K} não é infinito, consideramos o seu fecho algébrico $\bar{\mathbb{K}}$, que é infinito, e denotamos por $I\bar{\mathbb{K}}[x_1, \dots, x_n]$ o ideal gerado pelos geradores de I em $\bar{\mathbb{K}}[x_1, \dots, x_n]$.

Seja $g \in \bar{I} \subset \overline{I\bar{\mathbb{K}}[x_1, \dots, x_n]}$. Então, pelo que concluímos acima, segue que $\mathbb{M}(g) \subset \overline{I\bar{\mathbb{K}}[x_1, \dots, x_n]}$. Mostremos que $\mathbb{M}(g) \subset \bar{I}$.

Seja $m \in \mathbb{M}(g)$. Note que, pela Proposição 3.17, temos que existe $j \in \mathbb{N}^*$ e monômios $m_1, \dots, m_j \in I\bar{\mathbb{K}}[x_1, \dots, x_n]$ tais que $m^j - m_1 \dots m_j = 0$, isto é, $m^j = m_1 \dots m_j$. Uma vez que monômios de $I\bar{\mathbb{K}}[x_1, \dots, x_n]$ são monômios de I , temos que $m_i \in I$, para todo $i \in \{1, \dots, j\}$. Portanto, $m \in \bar{I}$. \square

Agora, já sabemos que o fecho integral de um ideal monomial I é um ideal monomial, mas ainda não temos uma maneira de calculá-lo, como fizemos com as outras operações. O exemplo a seguir mostra que, utilizando algumas propriedades já vistas, podemos, ao menos, reduzir o número de possíveis monômios geradores de \bar{I} a um conjunto bem determinado.

Exemplo 3.20 Seja $I = \langle x^4y, xy^3, y^4 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. A Figura 3.7 mostra os pontos que representam os monômios geradores de I em azul e o ponto que representa o monômio gerador de $\sqrt{I} = \langle y \rangle$ em amarelo. Como $I \subseteq \bar{I} \subseteq \sqrt{I}$, então os pontos que podem corresponder aos monômios geradores de \bar{I} , que aparecem identificados com uma cruz, só podem estar compreendidos entre as linhas azuis e as amarelas, ou sobre elas, isto é, a poligonal com vértices nos pontos que indicam os geradores de I e as semirretas com origem em $(0, 1)$.

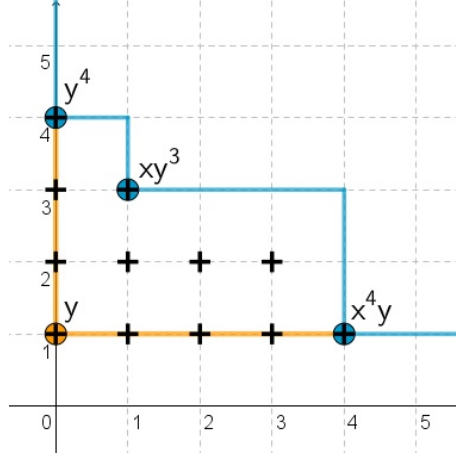


Figura 3.7

O exemplo acima ilustra que, quando é possível representar geometricamente os monômios, isto é, quando $n \leq 3$, conseguimos identificar com bastante clareza qual é o conjunto de monômios que contém os monômios geradores de \bar{I} .

Agora, vamos apresentar mais duas proposições. A primeira delas nos fornece outro critério para identificarmos quando um monômio pertence, ou não, a \bar{I} . A segunda reduz o conjunto de possíveis geradores de \bar{I} a um pequeno conjunto, resultado semelhante ao do Exemplo 3.20, mas, desta vez, de forma generalizada.

Proposição 3.21 *Sejam $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial em que $m_j = x_1^{\alpha_{j1}} \dots x_n^{\alpha_{jn}}$, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, e $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ um monômio. Temos que $m \in \bar{I}$ se, e somente se, existirem $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Q}^+$, com $\sum_{j=1}^r c_j = 1$, tais que*

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \sum_{j=1}^r c_j (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn}),$$

coordenada a coordenada.

Demonstração: Suponha que $m \in \bar{I}$. Pela Proposição 3.17, existem $k \in \mathbb{N}^*$ e um produto a_k de k monômios de I tais que $m^k - a_k = 0$. Um produto arbitrário de k monômios de I é da forma $bm_1^{i_1} \dots m_r^{i_r}$, em que b é um monômio e $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$, com $i_1 + \dots + i_r = k$. Assim, $m^k = bm_1^{i_1} \dots m_r^{i_r}$, isto é, $x_1^{k\alpha_1} \dots x_n^{k\alpha_n} = bx_1^{i_1\alpha_{11} + \dots + i_r\alpha_{r1}} \dots x_n^{i_1\alpha_{1n} + \dots + i_r\alpha_{rn}}$. Logo,

$k\alpha_l \geq \sum_{j=1}^r i_j \alpha_{j_l}$, para todo $l \in \{1, \dots, n\}$. Dessa forma, temos que

$$\alpha_l \geq \sum_{j=1}^r c_j \alpha_{j_l},$$

em que $c_j = \frac{i_j}{k} \in \mathbb{Q}^+$, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$ e $\sum_{j=1}^r c_j = \sum_{j=1}^r \frac{i_j}{k} = 1$.

Por outro lado, sejam $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Q}^+$ tais que

$$\sum_{j=1}^r c_j = 1 \text{ e } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \sum_{j=1}^r c_j (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n}).$$

Para cada j , escreva $c_j = \frac{i_j}{k}$, para algum $i_j \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}^*$. Como $\sum_{j=1}^r c_j = 1$, então

$$\sum_{j=1}^r i_j = k.$$

Assim, $k\alpha_l \geq \sum_{j=1}^r i_j \alpha_{j_l}$, para todo $l \in \{1, \dots, n\}$. Logo, m^k é múltiplo de $m_1^{i_1} \dots m_r^{i_r}$, isto é, $m^k = bm_1^{i_1} \dots m_r^{i_r}$, em que $i_1 + \dots + i_r = k$ e b é um monômio de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Portanto, $m \in \bar{I}$. \square

O próximo resultado nos apresenta uma limitação para o grau dos geradores de \bar{I} .

Proposição 3.22 *Sejam $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial e N o maior entre os graus dos seus monômios geradores minimais. Então os geradores minimais de \bar{I} têm grau menor ou igual a $N + n - 1$.*

Demonstração: Com as notações da proposição anterior, seja $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ um gerador minimal de \bar{I} . Então existem $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Q}^+$ tais que

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \sum_{j=1}^r c_j (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n}), \quad (3.4)$$

em que $(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n})$ é o multigrado do gerador minimal m_j de I e $\sum_{j=1}^r c_j = 1$.

Suponha que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_i \geq 1 + \sum_{j=1}^r c_j \alpha_{j_i}$. Então, o multigrado de $\frac{m}{x_i} = x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i - 1} \dots x_n^{\alpha_n}$ satisfaz a equação em (3.4). Logo, $\frac{m}{x_i} \in \bar{I}$ e, portanto, $\frac{m}{x_i}$ (e,

consequentemente, m) é múltiplo de algum gerador minimal de \bar{I} , o que é um absurdo.

Assim, $\alpha_i < 1 + \sum_{j=1}^r c_j \alpha_{j_i}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e, então, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i &< \sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{j=1}^r c_j \alpha_{j_i}\right) = n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r c_j \alpha_{j_i} \\ &= n + \sum_{j=1}^r c_j \sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \\ &= n + \sum_{j=1}^r c_j \cdot \deg(m_j) \leq n + \sum_{j=1}^r c_j \cdot N = n + N. \end{aligned}$$

Portanto, $\deg(m) \leq n + N - 1$. □

Assim, a Proposição 3.22 nos permite identificar um número finito de possíveis geradores minimais de \bar{I} . Então, bastaria checar quais desses monômios satisfazem a Proposição 3.21, tornando a tarefa de identificar o conjunto $G(\bar{I})$ factível, mesmo que, para isso, seja necessário utilizar programas computacionais.

A seguir, algumas propriedades e resultados geométricos vão mostrar que é possível encontrar $G(\bar{I})$ de um modo mais simples, nos casos em que pudermos representar os monômios geometricamente.

Definição 3.23 Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Se todos os segmentos de reta que unem quaisquer dois de seus pontos estiverem inteiramente contidos em S , então S é *convexo*. Equivalentemente, S é *convexo* se for a união de todos os segmentos de reta que unem quaisquer dois de seus pontos.

Definição 3.24 O *fecho convexo* de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é o menor conjunto convexo que contém S . Equivalentemente, o *fecho convexo* de S é a união de todos os segmentos de reta que unem quaisquer dois de seus pontos.

Denotamos o fecho convexo de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ por $\text{conv}(S)$ e, assim,

$$\text{conv}(S) = \{s(A, B); A, B \in S\},$$

em que $s(A, B)$ denota o segmento de reta que une A a B .

Note que, se $A, B \in S$, então o segmento de reta que une A a B pode ser descrito como o conjunto de pontos que são obtidos por

$$\lambda A + (1 - \lambda)B,$$

com $\lambda \in [0, 1]$.

Além disto, como $\text{conv}(S)$ é um conjunto convexo, segue que, se $A, B \in \text{conv}(S)$, então $s(A, B) \subset \text{conv}(S)$.

Dessa forma, $P \in \text{conv}(S)$ se, e somente se, $P \in s(A, B)$, para algum $A, B \in \text{conv}(S)$, isto é, $P = \lambda_P A + (1 - \lambda_P)B$, em que $\lambda_P \in [0, 1]$.

Como $A, B \in \text{conv}(S)$, devemos ter:

$$A = \lambda_A A_1 + (1 - \lambda_A)B_1$$

e

$$B = \lambda_B A_2 + (1 - \lambda_B)B_2,$$

em que $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \text{conv}(S)$ e $\lambda_A, \lambda_B \in [0, 1]$.

Assim,

$$\begin{aligned} P &= \lambda_P[\lambda_A A_1 + (1 - \lambda_A)B_1] + (1 - \lambda_P)[\lambda_B A_2 + (1 - \lambda_B)B_2] \\ &= \lambda_P \lambda_A A_1 + \lambda_P(1 - \lambda_A)B_1 + (1 - \lambda_P)\lambda_B A_2 + (1 - \lambda_P)(1 - \lambda_B)B_2. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \lambda_P \lambda_A + \lambda_P(1 - \lambda_A) + (1 - \lambda_P)\lambda_B + (1 - \lambda_P)(1 - \lambda_B) &= \\ \lambda_P(\lambda_A + 1 - \lambda_A) + (1 - \lambda_P)(\lambda_B + 1 - \lambda_B) &= \\ \lambda_P + 1 - \lambda_P &= 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos concluir que

$$P \in \text{conv}(S) \text{ se, e somente se, } P = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_k S_k,$$

em que $\alpha_i \geq 0$, $S_i \in \text{conv}(S)$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.

Os conceitos anteriores podem ser considerados em \mathbb{Q}^n . Neste caso, dados $A, B \in S \subseteq \mathbb{Q}^n$, consideramos $s(A, B) = \{\lambda A + (1 - \lambda)B; \lambda \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$.

Agora, vamos considerar, novamente, a aplicação:

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{M}_n &\rightarrow \mathbb{N}^n \\ x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} &\mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Como antes, se I é um ideal monomial, então denotaremos $\xi(I) = \{\xi(m) : m \text{ é monômio de } I\}$, ou seja, $\xi(I)$ é o conjunto expoente de I .

Proposição 3.25 *Seja $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ um ideal monomial em que $m_j = x_1^{\alpha_{j1}} \dots x_n^{\alpha_{jn}}$, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, e considere $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{M}_n$. Temos que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \text{conv}(\xi(I))$ se, e somente se, existirem $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Q}^+$ tais que $\sum_{j=1}^r c_j = 1$ e $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq$*

$$\sum_{j=1}^r c_j (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn}).$$

Demonstração: Vamos considerar o \mathbb{Q} -espaço vetorial \mathbb{Q}^n . Note que $\xi(I) \subseteq \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{Q}^n$. Denote $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn})$.

Pelo que foi dito anteriormente, temos que

$$\alpha \in \text{conv}(\xi(I)) \text{ se, e somente se, } \alpha = \sum_{i=1}^k \gamma_i S_i,$$

em que $S_i \in \text{conv}(\xi(I))$, $\gamma_i \in \mathbb{Q}^+$ e $\sum_{i=1}^k \gamma_i = 1$.

Além disso, como $S_i \in \text{conv}(\xi(I))$, então existem m_{i_1}, m_{i_2} geradores minimais de I tais que $S_i \in s(\xi(m_{i_1}) + \beta_i, \xi(m_{i_2}) + \delta_i)$, em que $\beta_i, \delta_i \in \mathbb{N}^n$. Assim,

$$S_i = \lambda_i (\xi(m_{i_1}) + \beta_i) + (1 - \lambda_i) (\xi(m_{i_2}) + \delta_i).$$

Logo, temos que $\alpha \in \text{conv}(\xi(I))$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^k \gamma_i S_i \\ &= \sum_{i=1}^k \gamma_i (\lambda_i (\xi(m_{i_1}) + \beta_i) + (1 - \lambda_i) (\xi(m_{i_2}) + \delta_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k \gamma_i \lambda_i \xi(m_{i_1}) + (\gamma_i - \gamma_i \lambda_i) \xi(m_{i_2}) + \gamma_i \lambda_i \beta_i + \gamma_i (1 - \lambda_i) \delta_i \\ &= \sum_{j=1}^r c_j \alpha_j + \varepsilon, \end{aligned}$$

em que $c_j \in \mathbb{Q}^+$, $\sum_{j=1}^r c_j = 1$ e $\varepsilon \in (\mathbb{Q}^+)^n$. Portanto, $\alpha \in \text{conv}(\xi(I))$ se, e somente se, $\alpha \geq \sum_{j=1}^r c_j \alpha_j$. □

Como consequência imediata das Proposições 3.21 e 3.25, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.26 *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal monomial e $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{M}_n$. Temos que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \text{conv}(\xi(I))$ se, e somente se, $m \in \bar{I}$.*

Do resultado anterior, temos que o conjunto expoente de \bar{I} é formado pelos pontos de \mathbb{N}^n que pertencem ao fecho convexo do conjunto expoente de I , ou seja,

$$\xi(\bar{I}) = \text{conv}(\xi(I)) \cap \mathbb{N}^n.$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 3.27 *Seja I um ideal monomial de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. O fecho convexo, em \mathbb{R}^n , do conjunto expoente de I é chamado de *poliedro de Newton* de I .*

Exemplo 3.28 *Seja $I = \langle x^4y, xy^3, y^4 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. A letra (a) da Figura 3.8 mostra o conjunto expoente de I . A letra (b) mostra o poliedro de Newton de I e, em destaque, o ponto em \mathbb{N}^2 que pertence a $\text{conv}(\xi(I))$ e que não pertence a $\xi(I)$. Por fim, a letra (c) mostra o conjunto expoente de \bar{I} . Assim, $\bar{I} = \langle x^4y, x^3y^2, xy^3, y^4 \rangle$.*

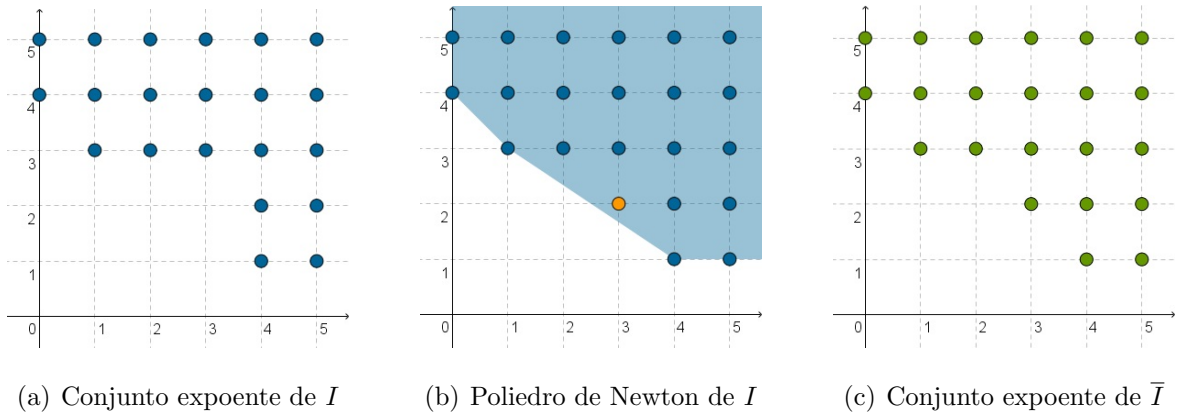


Figura 3.8: Fecho integral de ideal monomial

Capítulo 4

O fecho de Ratliff-Rush

Este capítulo é dedicado à última operação que estudaremos neste trabalho: o fecho de Ratliff-Rush. Para definirmos alguns pontos e apresentarmos algumas propriedades dessa operação, voltemos a considerar um anel noetheriano R comutativo e com unidade.

Considere um ideal $I \subset R$ e a família

$$\mathcal{F} = \{J; R \neq J \text{ é ideal de } R \text{ e existe } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } J^n = I^n, \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Como $\mathcal{F} \neq \emptyset$, uma vez que $I \in \mathcal{F}$, e R é noetheriano, segue que \mathcal{F} possui um elemento maximal \tilde{I} .

Ratliff e Rush provaram em [RR] que, se I for um ideal regular, isto é, se I contiver ao menos um elemento não divisor de zero, então \tilde{I} é único e, além disso,

$$\tilde{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (I^{n+1} : I^n). \quad (4.1)$$

Assim, temos que o ideal \tilde{I} descrito acima é o maior (com respeito à inclusão) ideal próprio de R tal que $(\tilde{I})^n = I^n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande. Chamaremos tal ideal de *fecho de Ratliff-Rush* de I e, sempre que tivermos $I = \tilde{I}$, então I será um ideal *Ratliff-Rush*.

Note que sempre temos a inclusão $I \subseteq \tilde{I}$, uma vez que o elemento maximal \tilde{I} é único em \mathcal{F} . Além disso, $\tilde{I} \subseteq \bar{I}$, pois, se $r \in \tilde{I}$, então $r^n \in (\tilde{I})^n = I^n$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Assim, existe $a_n \in I^n$ tal que $r^n - a_n = 0$ e, portanto, $r \in \bar{I}$. Como já vimos que $\bar{I} \subseteq \sqrt{I}$, então temos

$$I \subseteq \tilde{I} \subseteq \bar{I} \subseteq \sqrt{I}.$$

Dessa forma, segue que todo ideal radical é um ideal integralmente fechado, e este, por sua vez, é um ideal Ratliff-Rush.

É evidente que os ideais que compoem a união em (4.1) formam a seguinte cadeia ascendente:

$$(I^2 : I) \subseteq (I^3 : I^2) \subseteq \dots \subseteq (I^{n+1} : I^n) \subseteq \dots$$

Como R é noetheriano, então existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $I^{n+1} : I^n = I^{k+1} : I^k$, para todo $n \geq k$. Dessa forma, para calcular o fecho de Ratliff-Rush de I , bastaria encontrar o valor de k para o qual essa igualdade acontece.

Como nosso objetivo, neste capítulo, é calcular o fecho de Ratliff-Rush de certa classe de ideais monomiais do anel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, vamos voltar a considerar tais ideais nesse anel. Note que, como $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um domínio de integridade, então todo ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é regular. Além disso, se I é monomial, então, por definição, \tilde{I} é monomial, o que pode simplificar o processo.

Apesar de alguns autores já terem estudado o fecho de Ratliff-Rush de ideais monomiais, ainda não há uma maneira de calculá-lo para qualquer ideal monomial de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Por isso, neste capítulo, vamos apresentar o algoritmo dado em [G] para calcular tal operação em uma classe específica de ideais monomiais no anel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Tal processo é uma generalização do algoritmo definido em [A] para uma classe de ideais monomiais em $\mathbb{K}[x_1, x_2]$.

Agora, vamos definir a classe de ideais monomiais com a qual trabalharemos e apresentar algumas propriedades.

Aqui, vale lembrar que dado um ideal próprio I em um anel R e dados $a, b \in R$ tais que $ab \in I$, se tivermos $a \in I$ ou $b^m \in I$, para algum $m \in \mathbb{N}^*$, então I é um *ideal primário*.

Proposição 4.1 *Seja I um ideal primário de um anel R . Então $\mathfrak{m} = \sqrt{I}$ é um ideal primo.*

Demonstração: Sejam I um ideal primário e $a, b \in R$ tais que $ab \in \mathfrak{m} = \sqrt{I}$. Então existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $(ab)^n \in I$. Como I é primário, segue que $a^n \in I$ ou $(b^n)^m \in I$, para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Logo, $a \in \mathfrak{m}$ ou $b \in \mathfrak{m}$. \square

Se I é um ideal primário e $\mathfrak{m} = \sqrt{I}$, então chamaremos I de ideal \mathfrak{m} -primário.

A partir deste momento, trabalharemos com os ideais monomiais \mathfrak{m} -primários de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tais que \mathfrak{m} seja, além de primo, maximal, isto é, $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Assim, existem $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}^*$ tais que $\{x_1^{d_1}, \dots, x_n^{d_n}\} \subset G(I)$. Denotaremos $\mu_i = x_i^{d_i}$, para todo $1 \leq i \leq n$.

De agora em diante, sempre que mencionarmos o ideal I , estaremos nos referindo a um ideal nas condições acima.

Além disso, durante todo o texto, usaremos a notação $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$ quando tivermos $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$ tais que $a_i \leq b_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

A seguir, vamos apresentar um conceito que nos permitirá definir a classe de ideais monomiais \mathfrak{m} -primários com a qual trabalharemos.

Definição 4.2 Sejam $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Chamaremos de *caixa* associada a I com coordenadas a_1, \dots, a_n o seguinte conjunto:

$$B_{a_1, \dots, a_n} = ([a_1 d_1, (a_1 + 1)d_1] \times \dots \times [a_n d_n, (a_n + 1)d_n]) \cap \mathbb{N}^n.$$

Além disso, pontos da forma $(k_1 d_1, \dots, k_n d_n)$ e os monômios $\xi^{-1}(k_1 d_1, \dots, k_n d_n)$, em que $k_i \in \mathbb{N}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, e ξ é o isomorfismo de semigrupos definido no início do capítulo 3, serão chamados de *esquinas*.

No que segue, vamos identificar um monômio m com sua imagem $\xi(m)$. Usando tal identificação, note que todos os geradores minimais de I estão em $B_{0, \dots, 0}$. De fato, o conjunto dos geradores minimais de I é formado por $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ e, eventualmente, por monômios da forma $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, em que $\alpha_i < d_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

4.1 Bons ideais

Agora, vamos apresentar uma condição essencial que os ideais monomiais devem ter para o desenvolvimento do algoritmo.

Definição 4.3 Um ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ será chamado de *bom ideal* se, para todo $l \in \mathbb{N}^*$, todo gerador minimal de I^l pertencer a uma caixa B_{a_1, \dots, a_n} , em que $a_1 + \dots + a_n = l - 1$.

Vamos explorar a definição anterior por meio dos seguintes exemplos.

Exemplo 4.4 Seja $I = \langle x^3, y^3, z^3, xyz \rangle \subset \mathbb{K}[x, y, z]$. Note que $x^2y^2z^2$ é um gerador minimal de I^2 que pertence somente a $B_{0,0,0}$ e $0 + 0 + 0 \neq 1$. Portanto, I não é um bom ideal.

Claramente, verificar que um ideal é um bom ideal requer argumentos mais apurados, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 4.5 Seja $I = \langle x^3, y^3, z^3, x^2y^2z^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y, z]$. Tome $l = 2$ e note que

$$G(I^2) = \{x^6, y^6, z^6, x^3y^3, x^3z^3, y^3z^3, x^5y^2z^2, x^2y^5z^2, x^2y^2z^5\},$$

$$G(I^2) \cap B_{1,0,0} = \{x^6, x^3y^3, x^3z^3, x^5y^2z^2\},$$

$$G(I^2) \cap B_{0,1,0} = \{y^6, x^3y^3, y^3z^3, x^2y^5z^2\},$$

$$G(I^2) \cap B_{0,0,1} = \{z^6, x^3z^3, y^3z^3, x^2y^2z^5\}.$$

Assim, todos os geradores minimais de I^2 pertencem a, pelo menos, uma caixa B_{a_1, \dots, a_n} tal que $a_1 + \dots + a_n = 1$.

Temos que $G(I^2) \cap B_{1,0,0} = \mu_1 G(I)$, $G(I^2) \cap B_{0,1,0} = \mu_2 G(I)$ e $G(I^2) \cap B_{0,0,1} = \mu_3 G(I)$.

Assim, $I^2 = \langle \mu_1 G(I) \rangle + \langle \mu_2 G(I) \rangle + \langle \mu_3 G(I) \rangle = \mu_1 I + \mu_2 I + \mu_3 I$.

Agora, utilizando indução sobre l , vamos mostrar que $I^l = \sum_{l_1+l_2+l_3=l-1} \mu_1^{l_1} \mu_2^{l_2} \mu_3^{l_3} I$, para todo $l \geq 2$, ou seja, que temos o mesmo padrão anterior.

Temos que $I^2 = \mu_1 I + \mu_2 I + \mu_3 I$.

Suponha que

$$I^{l-1} = \sum_{k_1+k_2+k_3=l-2} \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \mu_3^{k_3} I.$$

Mostremos que

$$I^l = \sum_{l_1+l_2+l_3=l-1} \mu_1^{l_1} \mu_2^{l_2} \mu_3^{l_3} I.$$

Note que

$$\begin{aligned} I^l &= I^{l-1} I \\ &= \left(\sum_{k_1+k_2+k_3=l-2} \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \mu_3^{k_3} I \right) I \\ &= \sum_{k_1+k_2+k_3=l-2} \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \mu_3^{k_3} I^2 \\ &= \sum_{k_1+k_2+k_3=l-2} \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \mu_3^{k_3} (\mu_1 I + \mu_2 I + \mu_3 I) \\ &= \sum_{k_1+k_2+k_3=l-2} (\mu_1^{k_1+1} \mu_2^{k_2} \mu_3^{k_3} I + \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2+1} \mu_3^{k_3} I + \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \mu_3^{k_3+1} I) \\ &= \sum_{l_1+l_2+l_3=l-1} \mu_1^{l_1} \mu_2^{l_2} \mu_3^{l_3} I. \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que, se $I^l = \sum_{l_1+l_2+l_3=l-1} \mu_1^{l_1} \mu_2^{l_2} \mu_3^{l_3} I$, então I é um bom ideal.

Seja $m \in G(I^l)$. Temos que $m \in \mu_1^{l_1} \mu_2^{l_2} \mu_3^{l_3} I = \langle \mu_1^{l_1} \mu_2^{l_2} \mu_3^{l_3} g_j : j = 1, 2, 3, 4 \rangle$, em que $l_1 + l_2 + l_3 = l - 1$ e $g_j \in G(I)$, para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, existe $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $m = \mu_1^{l_1} \mu_2^{l_2} \mu_3^{l_3} g_k$, e digamos $g_k = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$. Logo, $m = x^{l_1 d_1 + \alpha_1} y^{l_2 d_2 + \alpha_2} z^{l_3 d_3 + \alpha_3}$, em que $0 \leq \alpha_i \leq d_i$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, uma vez que todo gerador de I pertence a $B_{0,0,0}$. Dessa forma, temos que $l_i d_i \leq l_i d_i + \alpha_i \leq l_i d_i + d_i = (l_i + 1) d_i$. Assim, $m \in B_{l_1, l_2, l_3}$, em que $l_1 + l_2 + l_3 = l - 1$. Portanto, I é um bom ideal.

Os Teoremas 4.6 e 4.7, a seguir, estabelecem uma condição necessária e outra suficiente, respectivamente, para que um ideal seja bom.

Teorema 4.6 (Uma condição necessária) *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um bom ideal. Então, para todo gerador minimal $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ de I , temos que*

$$\frac{\alpha_1}{d_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{d_n} \geq 1.$$

Demonstração: Suponha que exista $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in G(I)$ tal que $\frac{\alpha_1}{d_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{d_n} = 1 - \varepsilon$, em que $\varepsilon > 0$.

Mostremos que I não é um bom ideal.

Considere $l > \frac{1}{\varepsilon}$ e note que $m^l = x_1^{l\alpha_1} \dots x_n^{l\alpha_n}$ é um gerador de I^l . Suponha, sem perda de generalidade, que m^l é um gerador minimal de I^l e que $m^l \in B_{b_1, \dots, b_n}$ tal que $b_1 + \dots + b_n = l - 1$. Assim, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $b_i d_i \leq l\alpha_i$. Logo, $\sum_{i=1}^n b_i \leq l \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{d_i}$, o que nos garante que $l - 1 \leq l(1 - \varepsilon)$ e, conseqüentemente, $l \leq \frac{1}{\varepsilon}$, o que é um absurdo. Portanto, I não é um bom ideal. \square

Teorema 4.7 (Uma condição suficiente) *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Suponha que, para todo gerador minimal $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ de I que não seja uma esquina, tenhamos*

$$\frac{\alpha_1}{d_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{d_n} \geq \frac{n}{2}.$$

Então I é um bom ideal.

Demonstração: Observe que o conjunto de geradores minimais de I que são esquinas é exatamente $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, uma vez que todas as outras esquinas possíveis seriam múltiplos de algum μ_i . Note que o somatório do enunciado é sempre igual a 1 para as esquinas e, por esse motivo, as eliminamos da hipótese, pois, caso contrário, o ideal nunca seria bom para $n > 2$.

Primeiro, vamos mostrar que, dados dois monômios quaisquer $m_1 = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ e $m_2 = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ tais que $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{d_i} \geq \frac{n}{2}$ e $\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{d_i} \geq \frac{n}{2}$, temos que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$m_1 m_2 = \mu_j x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}, \quad (4.2)$$

em que $\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{d_i} \geq \frac{n}{2}$.

De fato, como $m_1 m_2 = x_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots x_n^{\alpha_n + \beta_n}$ é tal que $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i + \beta_i}{d_i} \geq n$, então existe $j \in \{1, \dots, n\}$ de modo que $\frac{\alpha_j + \beta_j}{d_j} \geq 1$, isto é, $\alpha_j + \beta_j \geq d_j$.

Considere $\gamma_j = \alpha_j + \beta_j - d_j$ e $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $i \neq j$. Assim, segue que

$$m_1 m_2 = \mu_j x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{d_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i + \beta_i}{d_i} - 1 \geq n - 1.$$

Como estamos trabalhando com o caso em que $n > 1$ e, para este caso, vale $n - 1 \geq \frac{n}{2}$, então temos o resultado.

Agora, seja $m \in G(I^l)$, com $l \geq 2$. Em particular, m é produto de l elementos de $G(I)$.

Se $m = \mu_1^{k_1} \dots \mu_n^{k_n}$, com $\sum_{i=1}^n k_i = l$, então $m \in B_{k_1, \dots, k_{i-1}, \dots, k_n}$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim, podemos supor que m contém, entre seus fatores, geradores minimais de I que não são esquinas.

Dessa forma, repetindo o processo em (4.2), após um número finito de vezes, podemos escrever

$$m = \mu_1^{k_1} \dots \mu_n^{k_n} x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}, \quad \text{em que} \quad \sum_{i=1}^n k_i = l - 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{d_i} \geq \frac{n}{2}.$$

Note que $\gamma_i < d_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, pois, se tivéssemos $\gamma_j \geq d_j$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, então m seria múltiplo do gerador $\mu_1^{k_1} \dots \mu_j^{k_j+1} \dots \mu_n^{k_n}$ de I^l , o que não é possível, uma vez que $m \in G(I^l)$. Assim, $x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} \in B_{0, \dots, 0}$ e, conseqüentemente, $m = \mu_1^{k_1} \dots \mu_n^{k_n} x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} \in B_{k_1, \dots, k_n}$.

Portanto, I é um bom ideal. □

Veja que, se $n = 2$, então os resultados anteriores nos dão uma outra caracterização de um bom ideal.

Além disto, os Teoremas 4.6 e 4.7 fornecem procedimentos rápidos para verificarmos se um ideal é bom ou não. Porém, há ideais que não satisfazem a condição suficiente, o que nos impede de afirmar que é um bom ideal, e, por outro lado, satisfazem a condição necessária, o que, por sua vez, nos impede de afirmar que não é um bom ideal. Para esses casos, é preciso encontrar estratégias para analisar cada caso, como mostram os dois exemplos a seguir.

Exemplo 4.8 Seja $I = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3, m \rangle = \langle x^5, y^5, z^5, xyz^4 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y, z]$. É evidente que I satisfaz a condição necessária e não satisfaz a condição suficiente. Então, vamos analisar o conjunto $G(I^l)$.

Primeiro, note que $m^5 = x^5 y^5 z^{20}$ é múltiplo de $x^5 y^5 z^{15} = \mu_1 \mu_2 \mu_3^3 \in I^5$ e, portanto, $m^5 \notin G(I^5)$. Assim, dado $l \in \mathbb{N}^*$ qualquer, os geradores minimais de I^l devem ser da forma $w = \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \mu_3^{k_3} m^k$, com $k_1 + k_2 + k_3 + k = l$ e $k \leq 4$, uma vez que m^5 é múltiplo de um gerador minimal de I^5 .

Veja que, se $k = 0$, então $w = \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \mu_3^{k_3} m^k = x^{5k_1} y^{5k_2} z^{5k_3}$. Além disso, podemos garantir que $k_i \neq 0$, para algum $i \in \{1, 2, 3\}$ pois, caso contrário, w seria igual a 1. Suponha, por exemplo, que $i = 1$ e note que $w \in B_{k_1-1, k_2, k_3}$, com $k_1 - 1 + k_2 + k_3 = l - 1$.

Agora, para analisar os casos em que $1 \leq k \leq 4$, mostraremos que w pertence a uma caixa cujas coordenadas somam $l - 1$ se, e somente se, m^k pertence a uma caixa cujas coordenadas somam $k - 1$.

Suponha que $w \in B_{a_1, a_2, a_3}$, em que $a_1 + a_2 + a_3 = l - 1$. Então,

$$5a_1 \leq 5k_1 + k \leq 5(a_1 + 1), \quad 5a_2 \leq 5k_2 + k \leq 5(a_2 + 1),$$

$$5a_3 \leq 5k_3 + 4k \leq 5(a_3 + 1).$$

Como $0 < k < 5$, devemos ter $a_1 = k_1$ e $a_2 = k_2$. Além disso, como $a_1 + a_2 + a_3 + 1 = l = k_1 + k_2 + k_3 + k$, então $a_3 = k_3 + k - 1$. Dessa forma, da terceira desigualdade segue que $5(k - 1) \leq 4k \leq 5k$. Assim, $(k, k, 4k) \in B_{0,0,k-1}$, isto é, m^k pertence a uma caixa cujas coordenadas somam $k - 1$.

Reciprocamente, suponha que $m^k \in B_{b_1, b_2, b_3}$, em que $b_1 + b_2 + b_3 = k - 1$. Como $0 < k < 5$, devemos ter $b_1 = b_2 = 0$ e, portanto, $b_3 = k - 1$. Assim, $5(k - 1) \leq 4k \leq 5k$ e, então,

$$5k_3 + 5(k - 1) \leq 5k_3 + 4k \leq 5k_3 + 5k.$$

Além disso,

$$5k_1 < 5k_1 + k < 5k_1 + 5 \quad \text{e} \quad 5k_2 < 5k_2 + k < 5k_2 + 5,$$

uma vez que $0 < k < 5$. Dessa forma, $w \in B_{k_1, k_2, k_3+k-1}$, em que $k_1 + k_2 + k_3 + k - 1 = l - 1$.

Agora, estamos aptos para checar se m^k pertence a uma caixa cuja soma de coordenadas é igual a $k - 1$, quando $1 \leq k \leq 4$. Para $k = 1$, é evidente que sim, pois todos os geradores minimais de I pertencem a $B_{0,0,0}$. Além disso, temos que $m^2 = x^2 y^2 z^8 \in B_{0,0,1}$, $m^3 = x^3 y^3 z^{12} \in B_{0,0,2}$ e $m^4 = x^4 y^4 z^{16} \in B_{0,0,3}$.

Portanto, I é um bom ideal.

Exemplo 4.9 Seja $I = \langle x^5, y^5, z^5, x^2y^2z^2 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y, z]$. Note que I satisfaz a condição necessária, porém não satisfaz a condição suficiente. Veja que $x^4y^4z^4$ é um gerador minimal de I^2 e pertence apenas a $B_{0,0,0}$. Como $0 + 0 + 0 \neq 1$, então I não é um bom ideal.

Proposição 4.10 *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um bom ideal. Então, toda esquina $\mu_1^{k_1} \dots \mu_n^{k_n}$ é um gerador minimal de $I^{k_1 + \dots + k_n}$.*

Demonstração: Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um bom ideal e $G(I) = \{\mu_1, \dots, \mu_n, m_1, \dots, m_r\}$, em que $m_j = x_1^{\alpha_{1j}} \dots x_n^{\alpha_{nj}}$, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. Note que

$$\{\mu_1^{\delta_1} \dots \mu_n^{\delta_n} m_1^{\beta_1} \dots m_r^{\beta_r}; \sum_{i=1}^n \delta_i + \sum_{j=1}^r \beta_j = l\}$$

é conjunto gerador (não, necessariamente, minimal) de I^l .

Suponha que existam $l' \geq 2$ e $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ tais que $\sum_{i=1}^n k_i = l'$ e $\mu_1^{k_1} \dots \mu_n^{k_n} \notin G(I^{l'})$. Então, existem $\delta_1, \dots, \delta_n, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{N}$ tais que

$$\mu_1^{k_1} \dots \mu_n^{k_n} = m \mu_1^{\delta_1} \dots \mu_n^{\delta_n} m_1^{\beta_1} \dots m_r^{\beta_r}, \quad (4.3)$$

em que m é um monômio e $\mu_1^{\delta_1} \dots \mu_n^{\delta_n} m_1^{\beta_1} \dots m_r^{\beta_r} \in G(I^{l'})$. Como $k_i \geq \delta_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, então a igualdade acima é equivalente a

$$\mu_1^{\gamma_1} \dots \mu_n^{\gamma_n} = m m_1^{\beta_1} \dots m_r^{\beta_r}, \quad (4.4)$$

em que m é um monômio, $\gamma_i = k_i - \delta_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $m_1^{\beta_1} \dots m_r^{\beta_r}$ é um gerador de I^l , em que $l = l' - \sum_{i=1}^n \delta_i$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m_1^{\beta_1} \dots m_r^{\beta_r} \in G(I^l)$, pois, caso contrário, poderíamos escrever

$$m_1^{\beta_1} \dots m_r^{\beta_r} = m' \mu_1^{\delta'_1} \dots \mu_n^{\delta'_n} m_1^{\beta'_1} \dots m_r^{\beta'_r},$$

em que m' é um monômio e $\mu_1^{\delta'_1} \dots \mu_n^{\delta'_n} m_1^{\beta'_1} \dots m_r^{\beta'_r} \in G(I^l)$. Logo, teríamos que

$$\mu_1^{\gamma_1} \dots \mu_n^{\gamma_n} = m m' \mu_1^{\delta'_1} \dots \mu_n^{\delta'_n} m_1^{\beta'_1} \dots m_r^{\beta'_r}$$

e, assim, poderíamos repetir o processo que nos levou de (4.3) para (4.4) um número finito de vezes.

De (4.4), segue que

$$\sum_{j=1}^r \alpha_{ij} \beta_j \leq \gamma_i d_i \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \sum_{j=1}^r \frac{\alpha_{ij}}{d_i} \beta_j \leq \gamma_i,$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como, por hipótese, $\mu_1^{\gamma_1} \dots \mu_n^{\gamma_n} \notin G(I^l)$, uma vez que é múltiplo de $m_1^{\beta_1} \dots m_r^{\beta_r} \in G(I^l)$, então devemos ter, ao menos, um índice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\sum_{j=1}^r \frac{\alpha_{i_0 j}}{d_{i_0}} \beta_j < \gamma_{i_0}$, pois, caso contrário, teríamos que $m = 1$ em (4.4) e, assim, $\mu_1^{\gamma_1} \dots \mu_n^{\gamma_n} = m_1^{\beta_1} \dots m_r^{\beta_r} \in G(I^l)$.

Assim, temos que

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^r \frac{\alpha_{ij}}{d_i} \beta_j \right) < \sum_{i=1}^n \gamma_i = l. \quad (4.5)$$

Como I é um bom ideal e $m_1, \dots, m_r \in G(I)$, então, pelo Teorema 4.6, segue que $1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{ij}}{d_i}$, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$ ou, equivalentemente,

$$\beta_j \leq \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{ij}}{d_i} \beta_j. \quad (4.6)$$

Por (4.5) e (4.6), segue que

$$l = \sum_{j=1}^r \beta_j \leq \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{ij}}{d_i} \beta_j \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^r \frac{\alpha_{ij}}{d_i} \beta_j \right) < \sum_{i=1}^n \gamma_i = l,$$

o que é um absurdo.

Portanto, temos que $\mu_1^{k_1} \dots \mu_n^{k_n} \in G(I^{l'})$, em que $l' = \sum_{i=1}^n k_i$. \square

A partir de um bom ideal I , vamos introduzir um outro ideal monomial que será crucial para o algoritmo do fecho de Ratliff-Rush \tilde{I} .

Definição 4.11 Sejam $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um bom ideal e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Então

$$I_{a_1, \dots, a_n} = \left\langle \frac{m}{\mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n}}; m \in G(I^l) \cap B_{a_1, \dots, a_n} \right\rangle,$$

em que $l = a_1 + \dots + a_n + 1$.

Note que o conjunto gerador acima é minimal, uma vez que $m \in G(I^l)$, e a proposição anterior e a seguinte nos indicam que tal conjunto nunca é vazio.

Proposição 4.12 *Seja $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um bom ideal. Então $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subseteq G(I_{a_1, \dots, a_n})$, para todo $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Note que, pela proposição anterior, temos

$$U = \left\{ \mu_j \prod_{i=1}^n \mu_i^{a_i}; 1 \leq j \leq n \right\} \subseteq G(I^l) \cap B_{a_1, \dots, a_n},$$

em que $l = a_1 + \dots + a_n + 1$.

Sem perda de generalidade, tome $m = \mu_1 \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} = x_1^{d_1(1+a_1)} \dots x_n^{d_n a_n} \in U$. Pela proposição anterior, temos que $m \in G(I^{1+a_1+\dots+a_n})$. Como $a_1 d_1 \leq d_1(1+a_1) \leq (a_1+1)d_1$ e $a_i d_i \leq d_i a_i \leq (a_i+1)d_i$, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$, então $m \in G(I^l) \cap B_{a_1, \dots, a_n}$, em que $l = a_1 + \dots + a_n + 1$.

Por fim, basta observar que, dividindo cada elemento de U por $\mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n}$, obteremos o conjunto $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. \square

Vamos ilustrar o conceito definido anteriormente por meio de um exemplo.

Exemplo 4.13 *Seja $I = \langle x^5, y^5, xy^4, x^4y \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. Pelo Teorema 4.7, segue que I é um bom ideal.*

Temos que

$$G(I^2) = \{x^{10}, y^{10}, x^5y^5, x^6y^4, x^9y, xy^9, x^4y^6, x^2y^8, x^8y^2\},$$

$$G(I^2) \cap B_{1,0} = \{x^{10}, x^5y^5, x^6y^4, x^9y, x^8y^2\} \quad \text{e} \quad G(I^2) \cap B_{0,1} = \{y^{10}, x^5y^5, xy^9, x^4y^6, x^2y^8\}.$$

Assim,

$$I_{0,0} = I,$$

$$I_{1,0} = \langle x^5, y^5, xy^4, x^4y, x^3y^2 \rangle = I + \langle x^3y^2 \rangle,$$

$$I_{0,1} = \langle y^5, x^5, xy^4, x^4y, x^2y^3 \rangle = I + \langle x^2y^3 \rangle \text{ e}$$

$$I_{a,b} = \langle y^5, xy^4, x^2y^3, x^3y^2, x^4y, x^5 \rangle = I + \langle x^2y^3, x^3y^2 \rangle, \text{ para todos outros valores de } a \text{ e } b.$$

Para mostrar a última igualdade, vamos, primeiro, identificar o conjunto $G(I^l)$, em que $l \geq 3$.

Como todos os geradores minimais de I têm grau igual a 5, então todos os geradores de I^l devem pertencer ao conjunto

$$A = \{x^r y^s; r + s = 5l\} = \{x^r y^{5l-r}; 0 \leq r \leq 5l\}.$$

Assim, $G(I^l) \subseteq A$. Vamos mostrar que $A \subseteq G(I^l)$.

Note que, em A , nenhum monômio é múltiplo de outro. Portanto, basta mostrar que todo elemento de A pode ser expresso como $(x^5)^a (x^4 y)^b (xy^4)^c (y^5)^d$, em que $a+b+c+d = l$.

Tome $x^r y^{5l-r} \in A$, em que $0 \leq r \leq 5l$. Temos os seguintes casos.

1. $r = 5m$.

Neste caso, $m \leq l$ e, assim, $x^r y^{5l-r} = (x^5)^m (x^4 y)^0 (xy^4)^0 (y^5)^{l-m}$.

2. $r = 5m + 1$.

Neste caso, $m + 1 \leq l$ e, então, $x^r y^{5l-r} = (x^5)^m (x^4 y)^0 (xy^4)^1 (y^5)^{l-m-1}$.

3. $r = 5m + 2$.

Neste caso, temos:

- $m \leq 1$.

Como $l \geq 3$, podemos escrever $x^r y^{5l-r} = (x^5)^m (x^4 y)^0 (xy^4)^2 (y^5)^{l-m-2}$.

- $m \geq 2$.

Uma vez que $l \geq m+1$, podemos escrever $x^r y^{5l-r} = (x^5)^{m-2} (x^4 y)^3 (xy^4)^0 (y^5)^{l-m-1}$.

4. $r = 5m + 3$.

Neste caso, temos:

- $m = 0$.

Como $l \geq 3$, podemos escrever $x^r y^{5l-r} = (x^5)^0 (x^4 y)^0 (xy^4)^3 (y^5)^{l-3}$.

- $m \geq 1$.

Como $l \geq m + 1$, podemos escrever $x^r y^{5l-r} = (x^5)^{m-1} (x^4 y)^2 (xy^4)^0 (y^5)^{l-m-1}$.

5. $r = 5m + 4$.

Neste caso, $m + 1 \leq l$ e, então, $x^r y^{5l-r} = (x^5)^m (x^4 y)^1 (xy^4)^0 (y^5)^{l-m-1}$.

Assim, $G(I^l) = A$, para $l \geq 3$.

Agora, vamos selecionar os monômios $x^r y^{5l-r} \in G(I^l)$ que pertencem a uma caixa $B_{a,b}$ tal que $a + b = l - 1$. Devemos ter $5a \leq r \leq 5(a + 1)$ e $5b \leq 5l - r \leq 5(b + 1)$, o que equivale às desigualdades

$$0 \leq r - 5a \leq 5 \quad \text{e} \quad 0 \leq 5l - r - 5b \leq 5.$$

Como $a + b = l - 1$, então, para $l \geq 3$, temos:

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \langle x^{r-5a} y^{5l-r-5b}; 0 \leq r - 5a \leq 5, 0 \leq 5l - r - 5b \leq 5 \rangle \\ &= \langle x^{r-5a} y^{5-r+5a}; 0 \leq r - 5a \leq 5 \rangle \\ &= \langle x^i y^{5-i}; 0 \leq i \leq 5 \rangle. \end{aligned}$$

A seguir, vamos apresentar mais algumas propriedades envolvendo o ideal I_{a_1, \dots, a_n} .

Proposição 4.14 *Seja I um bom ideal e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Temos que*

$$I_{a_1, \dots, a_n} = I^l : \langle \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} \rangle,$$

em que $l = a_1 + \dots + a_n + 1$.

Demonstração: Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ e considere um monômio $w \in I_{a_1, \dots, a_n}$. Então, w é múltiplo de $\frac{m}{\mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n}}$, em que $m \in G(I^l) \cap B_{a_1, \dots, a_n}$, com $l = a_1 + \dots + a_n + 1$. Logo, $w \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} = qm$, em que $q \in \mathbb{M}_n$. Assim, $w \in I^l : \langle \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} \rangle$, uma vez que $w \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} p = qmp \in I^l$, para qualquer polinômio $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Portanto, $I_{a_1, \dots, a_n} \subseteq I^l : \langle \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} \rangle$.

Para mostrar a outra inclusão, considere um monômio $w \in I^l : \langle \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} \rangle$, em que $a_1 + \dots + a_n = l - 1$. Então, $w \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} \in I^l$ e, conseqüentemente,

$$w \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} = mq, \tag{4.7}$$

em que $m \in G(I^l)$ e $q \in \mathbb{M}_n$.

Como $m \in G(I^l)$ e I é um bom ideal, então m pertence a uma caixa B_{b_1, \dots, b_n} , tal que $b_1 + \dots + b_n = l - 1 = a_1 + \dots + a_n$.

Temos dois casos para analisar:

Caso 1: $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$.

Neste caso, $m \in B_{a_1, \dots, a_n}$.

Suponha que $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Então $a_i d_i \leq \alpha_i \leq (a_i + 1)d_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim, $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ é múltiplo de $x_1^{d_1 a_1} \dots x_n^{d_n a_n} = \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n}$ e, de (4.7), segue que $w = \frac{m}{\mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n}} \cdot q$. Dessa forma, w é múltiplo de $\frac{m}{\mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n}}$, que é um gerador minimal de I_{a_1, \dots, a_n} e, portanto, $w \in I_{a_1, \dots, a_n}$.

Caso 2: $(a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n)$.

Neste caso, temos que $a_i < b_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, pois $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a_1 < b_1$.

Como $m = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in B_{b_1, \dots, b_n}$, então $b_i d_i \leq \alpha_i$, para todo i . Logo, $mq = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} q$ é múltiplo de $x_1^{d_1 b_1}$ e, de (4.7), segue que $w x_1^{d_1 a_1} \dots x_n^{d_n a_n}$ é múltiplo de $x_1^{d_1 b_1}$. Como $a_1 < b_1$, então x_1 deve aparecer na fatoração de w elevado a um certo β_1 , de maneira que $\beta_1 + d_1 a_1 \geq d_1 b_1$. Logo, $\beta_1 \geq d_1(b_1 - a_1)$. Como $b_1 - a_1 \geq 1$, então $\beta_1 \geq d_1$. Assim, como $x_1^{\beta_1}$ aparece na fatoração de w , com $\beta_1 \geq d_1$, então w é múltiplo de $x_1^{d_1} = \mu_1$. Pela Proposição 4.12, temos que $\mu_1 \in G(I_{a_1, \dots, a_n})$. Portanto, $w \in I_{a_1, \dots, a_n}$. \square

Em particular, a ordem que usamos para comparar elementos de \mathbb{N}^n é compatível com a inclusão entre ideais como dados na Definição 4.11.

Corolário 4.15 *Sejam $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um bom ideal e $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$ tais que $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$. Então $I_{a_1, \dots, a_n} \subseteq I_{b_1, \dots, b_n}$.*

Demonstração: Sejam $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$ tais que $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$. Então, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $c_i \in \mathbb{N}$ tal que $b_i = a_i + c_i$.

Dado $m \in I_{a_1, \dots, a_n}$, a Proposição 4.14 nos garante que $m \in I^l : \langle \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} \rangle$, em que $l = a_1 + \dots + a_n + 1$ e, conseqüentemente, $m \mu_1^{a_1} \dots \mu_n^{a_n} \in I^l$. Assim,

$$m \mu_1^{b_1} \dots \mu_n^{b_n} = m \mu_1^{a_1 + c_1} \dots \mu_n^{a_n + c_n} \in \langle \mu_1^{c_1} \dots \mu_n^{c_n} \rangle I^l \subseteq I^{l'},$$

em que $l' = l + c_1 + \dots + c_n = b_1 + \dots + b_n + 1$. Logo, $m \in I^{l'} : \langle \mu_1^{b_1} \dots \mu_n^{b_n} \rangle$ e, novamente pela Proposição 4.14, temos que $m \in I_{b_1, \dots, b_n}$.

Portanto, $I_{a_1, \dots, a_n} \subseteq I_{b_1, \dots, b_n}$. \square

O corolário acima nos dá indícios de que deve haver um padrão para potências elevadas de I , uma vez que o anel com o qual estamos trabalhando é noetheriano e, por este motivo, cadeias ascendentes de ideais estabilizam.

Agora, vamos apresentar algumas definições puramente geométricas que vão nos auxiliar na obtenção do resultado desejado.

Definição 4.16 Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Chamaremos de *cones* os conjuntos da forma

$$C_{\underline{a_1}, \dots, \underline{a_k}, \underline{a_{k+1}}, \dots, \underline{a_n}} = \{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n; b_1 = a_1, \dots, b_k = a_k, b_{k+1} \geq a_{k+1}, \dots, b_n \geq a_n\}.$$

Usaremos notação similar para qualquer configuração de coordenadas fixas e não fixas. Além disso, dado um cone $C_{\underline{a_1}, \dots, \underline{a_k}, \underline{a_{k+1}}, \dots, \underline{a_n}}$, o número de coordenadas não fixas, isto é, $n - k$, é chamado de *dimensão* e (a_1, \dots, a_n) é o seu *vértice*.

Exemplo 4.17 O cone $C_{\underline{2}, \underline{5}, \underline{1}} = \{(2, e, 1) \in \mathbb{N}^3; e \geq 5\}$ tem dimensão 1 e vértice $(2, 5, 1)$.

Definição 4.18 Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por A_{a_1, \dots, a_n} o conjunto formado por todos os cones que satisfazem as seguintes condições:

- (i) se (b_1, \dots, b_n) é o vértice do cone, então $b_i \leq a_i$, para todo $1 \leq i \leq n$;
- (ii) se $b_i = a_i$, então b_i não é coordenada fixa e se $b_i < a_i$, então b_i é coordenada fixa, para todo $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 4.19 Sejam $n = 2$, $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$. Temos que

$$A_{2,1} = \{C_{\underline{0}, \underline{0}}, C_{\underline{0}, \underline{1}}, C_{\underline{1}, \underline{0}}, C_{\underline{1}, \underline{1}}, C_{\underline{2}, \underline{0}}, C_{\underline{2}, \underline{1}}\}.$$

A Figura 4.1 representa os seis cones de $A_{2,1}$. Note que as linhas foram desenhadas, apenas, para facilitar a compreensão. O número de linhas é igual à dimensão de cada cone.

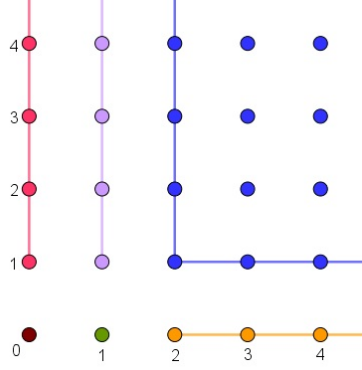


Figura 4.1: Cones de $A_{2,1}$

Além disso, observe que todos os pontos de \mathbb{N}^2 pertencem a algum dos seis cones de $A_{2,1}$. Tal propriedade é válida em geral, como mostra o lema a seguir.

Lema 4.20 *Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Temos que os cones de A_{a_1, \dots, a_n} formam uma cobertura disjunta de \mathbb{N}^n .*

Demonstração: Primeiro, vamos mostrar que os cones de A_{a_1, \dots, a_n} formam uma cobertura de \mathbb{N}^n , ou seja, que todo ponto $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ pertence a algum cone de A_{a_1, \dots, a_n} .

Defina o cone $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, em que

$$\alpha_i = \begin{cases} d_i, & \text{se } d_i < a_i \\ a_i, & \text{se } d_i \geq a_i, \end{cases}$$

com $i \in \{1, \dots, n\}$.

Note que $(d_1, \dots, d_n) \in C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ e $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in A_{a_1, \dots, a_n}$. Assim, os cones de A_{a_1, \dots, a_n} formam uma cobertura de \mathbb{N}^n .

Agora, considere $C_{\beta_1, \dots, \beta_n}, C_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \in A_{a_1, \dots, a_n}$, com

$$\beta_i = \begin{cases} \underline{b}_i, & \text{se } b_i < a_i \\ b_i, & \text{se } b_i = a_i, \end{cases} \quad \text{e } \gamma_i = \begin{cases} \underline{c}_i, & \text{se } c_i < a_i \\ c_i, & \text{se } c_i = a_i, \end{cases}$$

isto é, cones com vértices (b_1, \dots, b_n) e (c_1, \dots, c_n) , respectivamente. Além disso, considere os conjuntos $I = \{k; b_k = a_k\}$ e $J = \{k; c_k = a_k\}$.

Suponha que $C_{\beta_1, \dots, \beta_n} \neq C_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ e que exista $e = (e_1, \dots, e_n) \in C_{\beta_1, \dots, \beta_n} \cap C_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$. Assim, devemos ter

$$e_k = b_k < a_k, \text{ para todo } k \notin I \text{ e } e_k \geq b_k = a_k, \text{ para todo } k \in I,$$

$$e_k = c_k < a_k, \text{ para todo } k \notin J \text{ e } e_k \geq c_k = a_k, \text{ para todo } k \in J.$$

Conseqüentemente, $I = J$. Logo, $b_k = a_k = c_k$, para todo $k \in I = J$ e $b_k = e_k = c_k$, para todo $k \notin I = J$. Portanto, $C_{\beta_1, \dots, \beta_n} = C_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$, o que contradiz nossa suposição.

Dessa forma, concluímos que, se $C_{\beta_1, \dots, \beta_n} \neq C_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$, então $C_{\beta_1, \dots, \beta_n} \cap C_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} = \emptyset$.

Portanto, A_{a_1, \dots, a_n} é uma cobertura disjunta de \mathbb{N}^n . \square

O teorema a seguir fornece uma generalização do lema anterior.

Teorema 4.21 *Sejam um cone $C \subseteq \mathbb{N}^n$ de dimensão k e um ponto $a \in C$. É sempre possível decompor C na união disjunta de uma quantidade finita de cones, em que um cone tem dimensão k e vértice a e todos os outros cones têm dimensão estritamente menor.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos supor que $C = C_{v_1, \dots, v_k, \underline{v_{k+1}}, \dots, \underline{v_n}}$ e $a = (a_1, \dots, a_k, v_{k+1}, \dots, v_n) \in C$, em que $a_i \geq v_i$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Defina A'_a como sendo o conjunto formado por todos os cones $C_{*1, \dots, *k, \underline{v_{k+1}}, \dots, \underline{v_n}}$ com vértice $(b_1, \dots, b_k, v_{k+1}, \dots, v_n) \in C$ em que $v_i \leq b_i \leq a_i$ e

$$*_i = \begin{cases} \underline{b_i}, & \text{se } b_i < a_i \\ b_i, & \text{se } b_i = a_i, \end{cases}$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Note que $C' \subseteq C$, para todo $C' \in A'_a$. Além disso, temos que

$$C' \in A'_a \Leftrightarrow C' = (v_1, \dots, v_n) + C_{b_1 - v_1, \dots, b_k - v_k, \underline{0}, \dots, \underline{0}},$$

em que $C_{b_1 - v_1, \dots, b_k - v_k, \underline{0}, \dots, \underline{0}} = \{(e_1, \dots, e_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n : (e_1, \dots, e_k) \in C''\}$, para algum $C'' \in A_{a_1 - v_1, \dots, a_k - v_k}$. Como $C_{a_1 - v_1, \dots, a_k - v_k}$ é o único cone de dimensão k em $A_{a_1 - v_1, \dots, a_k - v_k}$, então $C_{a_1, \dots, a_k, \underline{v_{k+1}}, \dots, \underline{v_n}} = (v_1, \dots, v_n) + C_{a_1 - v_1, \dots, a_k - v_k, \underline{0}, \dots, \underline{0}}$ é o único cone de dimensão k em A'_a e tem vértice $a = (a_1, \dots, a_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$.

O Lema 4.20 nos garante que $C''_{m_1} \cap C''_{m_2} = \emptyset$, para quaisquer cones distintos de $A_{a_1 - v_1, \dots, a_k - v_k}$. Assim, temos que

$$C''_{m_1} \cap C''_{m_2} = \emptyset \Leftrightarrow C_{m_1, \underline{0}, \dots, \underline{0}} \cap C_{m_2, \underline{0}, \dots, \underline{0}} = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow C_{m_1 + (v_1, \dots, v_k), \underline{v_{k+1}}, \dots, \underline{v_n}} \cap C_{m_2 + (v_1, \dots, v_k), \underline{v_{k+1}}, \dots, \underline{v_n}} = \emptyset,$$

isto é, $C'_1 \cap C'_2 = \emptyset$, para quaisquer cones distintos de A'_a .

Além disso, novamente pelo Lema 4.20, temos que

$$\bigcup_{C'' \in A_{a_1-v_1, \dots, a_k-v_k}} C'' = \mathbb{N}^k.$$

Logo,

$$\bigcup_{C_{m, \underline{0}, \dots, \underline{0}} \in A_{a_1-v_1, \dots, a_k-v_k, \underline{0}, \dots, \underline{0}}} C_{m, \underline{0}, \dots, \underline{0}} = \{(n_1, \dots, n_k, 0, \dots, 0); (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k\},$$

o que é equivalente a afirmar que

$$\bigcup_{C_{b_1, \dots, b_k, \underline{v_{k+1}}, \dots, \underline{v_n}} \in A'_a} C_{b_1, \dots, b_k, \underline{v_{k+1}}, \dots, \underline{v_n}} = C.$$

Assim, temos o resultado. □

Exemplo 4.22 Seja $C_{\underline{5}, \underline{7}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{3}} \subset \mathbb{N}^5$ um cone de dimensão 2 e considere $(5, 9, 4, 3, 3) \in C_{\underline{5}, \underline{7}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{3}}$. Como a primeira, a terceira e a quinta coordenadas estão fixas, então todos os cones cuja união resulta em $C_{\underline{5}, \underline{7}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{3}}$ serão da forma $C_{\underline{5}, \underline{?}, \underline{4}, \underline{?}, \underline{3}}$. Assim, restam a segunda e a quarta coordenadas, que identificaremos como pontos de \mathbb{N}^2 , isto é, $(7, 2)$ para o cone e $(9, 3)$ para o ponto. Subtraindo $(7, 2)$ dessas coordenadas, temos $(0, 0)$ e $(2, 1)$, respectivamente. Dessa forma, é suficiente encontrar a decomposição de \mathbb{N}^2 considerando $A_{2,1}$, que, segundo o Exemplo 4.19, nos dá $\{C_{\underline{0}, \underline{0}}, C_{\underline{0}, \underline{1}}, C_{\underline{1}, \underline{0}}, C_{\underline{1}, \underline{1}}, C_{\underline{2}, \underline{0}}, C_{\underline{2}, \underline{1}}\}$. Agora, somando $(7, 2)$ aos vértices dos cones desse conjunto, obtemos $\{C_{\underline{7}, \underline{2}}, C_{\underline{7}, \underline{3}}, C_{\underline{8}, \underline{2}}, C_{\underline{8}, \underline{3}}, C_{\underline{9}, \underline{2}}, C_{\underline{9}, \underline{3}}\}$. Por fim, basta reinserir a primeira, a terceira e a quinta coordenadas, o que nos dá

$$\{C_{\underline{5}, \underline{7}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{3}}, C_{\underline{5}, \underline{7}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{3}}, C_{\underline{5}, \underline{8}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{3}}, C_{\underline{5}, \underline{8}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{3}}, C_{\underline{5}, \underline{9}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{3}}, C_{\underline{5}, \underline{9}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{3}}\}.$$

Portanto, $C_{\underline{5}, \underline{7}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{3}}$ é a união disjunta desses seis cones.

Agora, vamos conectar esses conceitos geométricos aos ideais monomiais.

Teorema 4.23 *Seja I um bom ideal. Temos que existe um número finito de cores com as quais se pode pintar todos os pontos do conjunto \mathbb{N}^n , de maneira que se (a_1, \dots, a_n) e $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$ têm a mesma cor, então $I_{a_1, \dots, a_n} = I_{b_1, \dots, b_n}$. Além disso, o conjunto de pontos pintados com uma mesma cor forma um cone.*

Demonstração: Seja I um bom ideal. O Corolário 4.15 nos garante que, se (a_1, \dots, a_n) e $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$ são tais que $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$, então $I_{a_1, \dots, a_n} \subseteq I_{b_1, \dots, b_n}$.

Agora, note que existe um ponto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que, se $(b_1, \dots, b_n) \geq (a_1, \dots, a_n)$, então $I_{a_1, \dots, a_n} = I_{b_1, \dots, b_n}$. De fato, suponha que, para cada ponto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, exista $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $(a_1, \dots, a_n) < (b_1, \dots, b_n)$ e $I_{a_1, \dots, a_n} \subsetneq I_{b_1, \dots, b_n}$. Assim, existe uma cadeia ascendente de ideais que nunca estabiliza, o que é impossível, uma vez que o anel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é noetheriano.

Considere o cone n -dimensional \mathbb{N}^n e um ponto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ nas condições acima. Pelo Teorema 4.21, podemos decompor \mathbb{N}^n na união finita e disjunta de cones de A_{a_1, \dots, a_n} , em que apenas um cone tem dimensão n e vértice (a_1, \dots, a_n) e todos os outros têm dimensão estritamente menor que n . O único cone n -dimensional de A_{a_1, \dots, a_n} é C_{a_1, \dots, a_n} e, como acabamos de ver, podemos pintar todos os pontos deste cone com a mesma cor. Dessa forma, resta uma quantidade finita de cones com dimensão máxima $n - 1$ para serem pintados.

Fazemos novamente esse processo, agora com os cones de dimensão $n - 1$, e assim por diante, baixando a dimensão máxima em uma unidade a cada etapa do procedimento. Como esse processo é finito, obteremos, no final, uma quantidade finita de cores com as quais pintamos todos os pontos de \mathbb{N}^n . \square

Assim, temos que, para cada bom ideal I , existe um esquema de cores conforme descrito no teorema acima, e cada esquema de cores representa uma união finita e disjunta de cones. Além disso, tal esquema de cores não é único, pois depende da escolha do ponto (a_1, \dots, a_n) em cada etapa do processo, o que ficará mais claro no exemplo a seguir.

Exemplo 4.24 Seja I o bom ideal descrito no Exemplo 4.13. Podemos escolher $(a_1, a_2) = (1, 1)$, já que $I_{b_1, b_2} = I_{1, 1}$, para todos $b_1, b_2 \geq 1$. Assim, \mathbb{N}^2 é a união disjunta dos cones $C_{1, 1}, C_{0, 1}, C_{1, 0}$ e $C_{0, 0}$. Agora, considere o cone $C_{0, 1}$. Sabemos que $I_{0, b} = I_{0, 2}$, para todo $b \geq 2$. Logo, podemos considerar a decomposição de $C_{0, 1}$ com relação a $(0, 2)$ e, então, $C_{0, 1}$ é a união disjunta dos cones $C_{0, 2}$ e $C_{0, 1}$. Procedendo de maneira análoga, temos que $C_{1, 0}$ é a união disjunta de $C_{2, 0}$ e $C_{1, 0}$. O resultado desse procedimento aparece na letra (a) da Figura 4.2.

Alternativamente, poderíamos escolher, para o mesmo ideal I , o ponto $(a_1, a_2) = (0, 2)$, o que forneceria que \mathbb{N}^2 é união disjunta de $C_{0,2}, C_{0,1}$ e $C_{0,0}$. Decompondo $C_{0,1}$ com relação a $(1, 1)$, temos que $C_{0,1}$ é a união disjunta de $C_{1,1}$ e $C_{0,1}$. Decompondo $C_{0,0}$ com relação a $(2, 0)$, temos que $C_{0,0}$ é a união disjunta de $C_{2,0}, C_{1,0}$ e $C_{0,0}$. Esse procedimento fornece o esquema de cores que aparece em (b) da Figura 4.2.

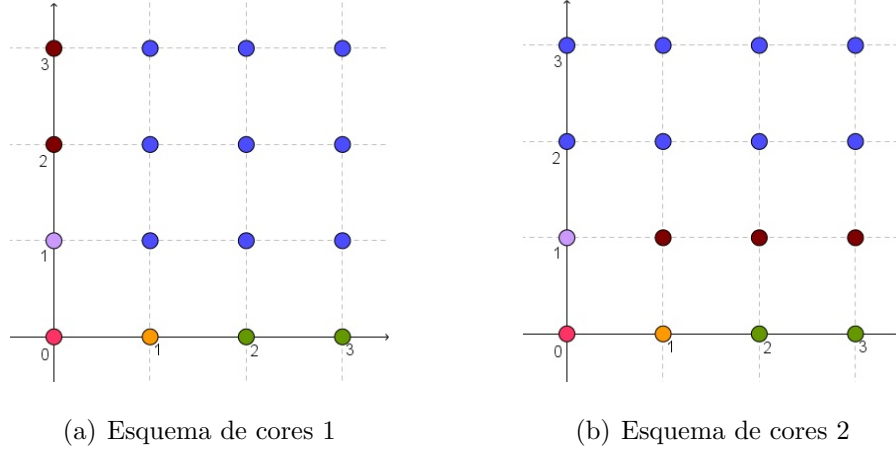


Figura 4.2: Esquemas de cores relacionados ao ideal $I = \langle x^5, y^5, xy^4, x^4y \rangle$

Definição 4.25 Sejam $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um bom ideal e considere E um esquema de cores, conforme descrito no Teorema 4.23. Denotaremos

$$L = \max\{a_1 + \dots + a_n; (a_1, \dots, a_n) \text{ é vértice de algum cone de } E\}.$$

Uma vez identificado L , sabemos exatamente como se comportam todas as potências de I a partir de I^{L+1} , uma vez que conhecemos o esquema de cores. Por exemplo, no esquema dado em (a) da Figura 4.2, temos que $L = 2$. Assim, todas as potências de I a partir de I^3 consistem em um ponto verde (ponto de $C_{2,0}$), um ponto vermelho (ponto de $C_{0,2}$) e vários pontos azuis (pontos de $C_{1,1}$), e sabemos onde cada um deles está localizado. Note, ainda, que L depende do esquema de cores considerado. No entanto, uma vez identificado um esquema de cores, podemos trabalhar com o valor de L fornecido por este esquema. O que importa é que existe um padrão para potências elevadas de I , e essa é a chave para calcularmos, por meio do Teorema 4.27, o fecho de Ratliff-Rush de I . Mas, para isso, vamos precisar do seguinte lema.

Lema 4.26 *Sejam $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um bom ideal e $\mathcal{Q} \in \mathbb{N}$. Então existe $L(\mathcal{Q}) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $l \geq L(\mathcal{Q})$ temos o seguinte: para cada gerador minimal m de I^l , existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $m = m' \mu_i^{\mathcal{Q}}$, em que m' é um gerador minimal de $I^{l-\mathcal{Q}}$.*

Demonstração: Para $\mathcal{Q} = 0$, nada há que fazer.

Sejam $\mathcal{Q} > 0$, L o número natural descrito na Definição 4.25, $L(\mathcal{Q}) = L + n\mathcal{Q} - n + 2$, $l \geq L(\mathcal{Q})$ e m um gerador minimal de I^l . Como I é um bom ideal, temos que $m \in B_{b_1, \dots, b_n}$, em que $b_1 + \dots + b_n = l - 1 \geq L(\mathcal{Q}) - 1 = L + n\mathcal{Q} - n + 1$. Então,

$$L < b_1 + \dots + b_n - n\mathcal{Q} + n.$$

Temos que (b_1, \dots, b_n) pertence a algum cone do esquema de cores. Vamos assumir que (a_1, \dots, a_n) seja o vértice desse cone. Desse modo, $b_i \geq a_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Note que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i - \mathcal{Q}, b_{i+1}, \dots, b_n)$ pertence ao mesmo cone que (b_1, \dots, b_n) , pois, caso contrário, teríamos $b_i - \mathcal{Q} \leq a_i - 1$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, o que nos levaria à seguinte contradição:

$$L < b_1 + \dots + b_n - n\mathcal{Q} + n \leq a_1 + \dots + a_n \leq L.$$

Assim, existe i tal que $b_i - \mathcal{Q} \geq a_i$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $i = 1$, o que significa que (b_1, \dots, b_n) e $(b_1 - \mathcal{Q}, b_2, \dots, b_n)$ estão no mesmo cone. Pelo Teorema 4.23, suas cores são iguais e, conseqüentemente, $I_{b_1, \dots, b_n} = I_{b_1 - \mathcal{Q}, b_2, \dots, b_n}$.

Temos que

$$G(I_{b_1, \dots, b_n}) = \left\{ \frac{m}{\mu_1^{b_1} \dots \mu_n^{b_n}}; m \in G(I^l) \cap B_{b_1, \dots, b_n} \right\}, \text{ em que } l = b_1 + \dots + b_n + 1 \text{ e}$$

$$G(I_{b_1 - \mathcal{Q}, b_2, \dots, b_n}) = \left\{ \frac{m'}{\mu_1^{b_1 - \mathcal{Q}} \dots \mu_n^{b_n}}; m' \in G(I^{l-\mathcal{Q}}) \cap B_{b_1 - \mathcal{Q}, b_2, \dots, b_n} \right\}, \text{ em que}$$

$$l - \mathcal{Q} = b_1 - \mathcal{Q} + b_2 + \dots + b_n + 1.$$

Como os dois conjuntos acima devem ser iguais, temos que

$$\frac{m}{\mu_1^{b_1} \dots \mu_n^{b_n}} = \frac{m'}{\mu_1^{b_1 - \mathcal{Q}} \dots \mu_n^{b_n}} = \frac{m' \mu_1^{\mathcal{Q}}}{\mu_1^{b_1} \dots \mu_n^{b_n}}.$$

Portanto, $m = m' \mu_1^{\mathcal{Q}}$, em que $m' \in G(I^{l-\mathcal{Q}})$. □

4.2 O cálculo do fecho de Ratliff-Rush de bons ideais

Considere a sequência de caixas $B_{0,0,\dots,0}, B_{1,0,\dots,0}, B_{2,0,\dots,0}, \dots$ e seja $B_{q_1,0,\dots,0}$ a caixa que estabiliza essa sequência, isto é, se $t \geq q_1$, então $I_{t,0,\dots,0} = I_{q_1,0,\dots,0}$. De maneira análoga, considerando sequências de caixas ao longo dos outros eixos de coordenadas, obtemos q_2, q_3, \dots, q_n . Seja $q = \max\{q_1, \dots, q_n\}$.

O teorema a seguir fornece uma maneira de calcularmos o fecho de Ratliff-Rush de bons ideais.

Teorema 4.27 *Seja I um bom ideal e $q_i \in \mathbb{N}$ o valor que estabiliza a cadeia de ideais $I_{0,\dots,0,\dots,0} \subseteq I_{0,\dots,1,\dots,0} \subseteq \dots \subseteq I_{0,\dots,q_i,\dots,0} \subseteq \dots$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Então $\tilde{I} = I_{q_1,0,\dots,0} \cap I_{0,q_2,\dots,0} \cap \dots \cap I_{0,\dots,0,q_n}$.*

Demonstração: Considere $q = \max\{q_1, \dots, q_n\}$ e seja $l \geq q$. Mostremos que

$$I^{l+1} : I^l = I_{q_1,0,\dots,0} \cap I_{0,q_2,\dots,0} \cap \dots \cap I_{0,\dots,0,q_n}.$$

Para mostrar que $I^{l+1} : I^l \subseteq I_{q_1,0,\dots,0} \cap I_{0,q_2,\dots,0} \cap \dots \cap I_{0,\dots,0,q_n}$, vamos mostrar que $I^{l+1} : I^l \subseteq I_{q_1,0,\dots,0}$. As outras inclusões seguem de maneira análoga.

Como $\mu_1 \in G(I)$, então $\langle \mu_1^l \rangle \subseteq I^l$. Logo, $I^{l+1} : I^l \subseteq I^{l+1} : \langle \mu_1^l \rangle$. Assim, é suficiente mostrar que $I^{l+1} : \langle \mu_1^l \rangle \subseteq I_{q_1,0,\dots,0}$.

Pela Proposição 4.14, $I^{l+1} : \langle \mu_1^l \rangle = I_{l,0,\dots,0}$. Mas, $I_{l,0,\dots,0} = I_{q_1,0,\dots,0}$, uma vez que $l \geq q \geq q_1$. Assim, temos que $I^{l+1} : I^l \subseteq I_{q_1,0,\dots,0}$.

Para a outra inclusão, considere L como descrito na Definição 4.25 e um monômio $m \in I_{q_1,0,\dots,0} \cap I_{0,q_2,\dots,0} \cap \dots \cap I_{0,\dots,0,q_n}$. À semelhança do processo utilizado no Lema 4.26, considere $l \geq L(q) = L + nq - n + 2$.

Mostremos que $mm_l \in I^{l+1}$, para todo $m_l \in I^l$.

Note que é suficiente tomar $m_l \in G(I^l)$. Assim, o mesmo Lema 4.26 garante que

$$m_l = m_{l-q} \mu_i^q,$$

em que $m_{l-q} \in G(I^{l-q})$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Além disso, $\mu_i^{q-q_i} \in I^{q-q_i}$, $m_{l-q} \in I^{l-q}$ e, como m pertence, em particular, a $I_{0,\dots,0,q_i,0,\dots,0} = I^{q_i+1} : \langle \mu_i^{q_i} \rangle$, então $m \mu_i^{q_i} \in I^{q_i+1}$. Assim,

$$mm_l = m \mu_i^{q_i} \mu_i^{q-q_i} m_{l-q} \in I^{q_i+1} I^{q-q_i} I^{l-q} = I^{l+1}.$$

Portanto, $I^{l+1} : I^l = I_{q_1,0,\dots,0} \cap I_{0,q_2,\dots,0} \cap \dots \cap I_{0,\dots,0,q_n}$. \square

O teorema acima nos fornece, finalmente, uma maneira de calcular o fecho de Ratliff-Rush de bons ideais. No entanto, ainda não sabemos como calcular os ideais $I_{0,\dots,0,q_i,0,\dots,0}$. Considerando $i = 1$, uma vez que os outros casos são análogos, o que temos, até o momento, é que $I_{t,0,\dots,0} = I^{t+1} : \langle \mu_1^t \rangle$, mas ainda não sabemos para qual valor de t a sequência de ideais estabiliza e, além disso, o cálculo deste ideal pode ser bem complicado, dependendo do valor de t .

As proposições a seguir nos permitirão mostrar que o processo não é tão complicado quanto parece.

Proposição 4.28 *Se I é um bom ideal, então $I_{t+1,0,\dots,0} = (I_{t,0,\dots,0} \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Considere um monômio $m \in I_{t+1,0,\dots,0}$. Então, existem $m_1 = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in G(I)$ e $m_2 = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \in G(I^{t+1})$ tais que

$$m = \frac{m_1 m_2}{\mu_1^{t+1}} = \frac{x_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots x_n^{\alpha_n + \beta_n}}{\mu_1^{t+1}}.$$

Como $m \in \mathbb{M}_n$, então $d_1(t+1) \leq \alpha_1 + \beta_1$. Além disso, $\alpha_1 \leq d_1$, uma vez que $m_1 \in G(I)$. Portanto, $d_1(t+1) \leq \alpha_1 + \beta_1 \leq d_1 + \beta_1$, ou seja, $d_1 t \leq \beta_1$ e, dessa forma, $\frac{m_2}{\mu_1^t} \in \mathbb{M}_n$. Como $\frac{m_2}{\mu_1^t} \cdot \mu_1^t = m_2 \in I^{t+1}$, então $\frac{m_2}{\mu_1^t} \in I^{t+1} : \langle \mu_1^t \rangle = I_{t,0,\dots,0}$. Logo, $m \in (I_{t,0,\dots,0} \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle$.

Por outro lado, seja $m \in (I_{t,0,\dots,0} \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle$. Então, $m \mu_1 \in I_{t,0,\dots,0} \cdot I$. Assim, existem monômios $m_1 \in G(I^{t+1})$ e $m_2 \in G(I)$ tais que $m = \frac{m_1 m_2}{\mu_1^{t+1}}$. Portanto, $m \in I^{t+2} : \langle \mu_1^{t+1} \rangle = I_{t+1,0,\dots,0}$. \square

Uma outra caracterização de $I_{t+1,0,\dots,0}$ é dada abaixo.

Proposição 4.29 *Se I é um bom ideal, então*

$$I_{t+1,0,\dots,0} = \left\langle \frac{fm}{\text{mdc}(fm, \mu_1)}; f \in G(I_{t,0,\dots,0}), m \in G(I) \right\rangle.$$

Demonstração: A proposição anterior e as propriedades das operações com ideais monomiais já vistas garantem que

$$\begin{aligned}
I_{t+1,0,\dots,0} &= (I_{t,0,\dots,0} \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle \\
&= \langle fm; f \in G(I_{t,0,\dots,0}), m \in G(I) \rangle : \langle \mu_1 \rangle \\
&= \left\langle \sum_{\substack{f \in G(I_{t,0,\dots,0}) \\ m \in G(I)}} \langle fm \rangle \right\rangle : \langle \mu_1 \rangle \\
&= \sum_{\substack{f \in G(I_{t,0,\dots,0}) \\ m \in G(I)}} (\langle fm \rangle : \langle \mu_1 \rangle) \\
&= \sum_{\substack{f \in G(I_{t,0,\dots,0}) \\ m \in G(I)}} \left\langle \frac{fm}{\text{mdc}(fm, \mu_1)} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{fm}{\text{mdc}(fm, \mu_1)}; f \in G(I_{t,0,\dots,0}), m \in G(I) \right\rangle.
\end{aligned}$$

□

Para a próxima proposição, dado $m \in \mathbb{M}_n$, denotaremos por $\deg_{x_i}(m)$ o expoente ao qual está elevada a variável x_i em m .

Proposição 4.30 *Se I é um bom ideal, então*

$$I_{t+1,0,\dots,0} = \left\langle \frac{fm}{\mu_1}; f \in G(I_{t,0,\dots,0}), m \in G(I), \deg_{x_i}(fm) < d_i, \forall i = 2, \dots, n \right\rangle.$$

Demonstração: Sejam $f \in G(I_{t,0,\dots,0})$ e $m \in G(I)$. Considere $fm = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Note que, se $\alpha_i \geq d_i$ para algum $2 \leq i \leq n$, então $\frac{fm}{\text{mdc}(fm, \mu_1)} = \frac{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}{x_1^{\min\{\alpha_1, d_1\}}}$ é múltiplo de μ_1 . A Proposição 4.12 nos dá que $\mu_i \in G(I_{t+1,0,\dots,0})$, então todos os monômios geradores de $I_{t+1,0,\dots,0}$ múltiplos de μ_i podem ser eliminados do conjunto gerador. Como consequência, podemos escrever

$$I_{t+1,0,\dots,0} = \left\langle \frac{fm}{\text{mdc}(fm, \mu_1)}; f \in G(I_{t,0,\dots,0}), m \in G(I), \deg_{x_i}(fm) < d_i, \forall i = 2, \dots, n \right\rangle.$$

Além disso, a Proposição 4.14 garante que $f\mu_1^t \in I^{t+1}$. Logo, $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mu_1^t = f\mu_1^t m \in I^{t+2}$. Como $\alpha_i < d_i$, para todo $2 \leq i \leq n$, então devemos ter $\alpha_1 \geq d_1$, pois, caso contrário, teríamos $td_1 \leq td_1 + \alpha_1 < td_1 + d_1$ e, assim, $f\mu_1^t m$ pertenceria a uma caixa

cujas coordenadas somam, no máximo, t . Isto é um absurdo, pois, como $f\mu_1^t m \in I^{t+2}$, então $f\mu_1^t m$ é múltiplo de algum gerador minimal g de I^{t+2} . Como I é um bom ideal, então $g \in B_{a_1, \dots, a_n}$, em que $a_1 + \dots + a_n = t + 1$. Dessa forma, $f\mu_1^t m$ pertence a uma caixa cujas coordenadas somam, no mínimo, $t + 1$.

Assim, $\text{mdc}(fm, \mu_1) = \text{mdc}(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, x_1^{d_1}) = x_1^{\min\{\alpha_1, d_1\}} x_2^{\min\{\alpha_2, 0\}} \cdots x_n^{\min\{\alpha_n, 0\}} = x_1^{d_1} x_2^0 \cdots x_n^0 = \mu_1$ e, portanto, temos o resultado. \square

Como consequência dos resultados anteriores, temos como reconhecer quando a sequência $I_{0, \dots, 0} \subseteq I_{1, 0, \dots, 0} \subseteq \dots \subseteq I_{t, 0, \dots, 0} \subseteq \dots$ estabiliza.

Corolário 4.31 *Se I é um bom ideal e $I_{t, 0, \dots, 0} = I_{t+1, 0, \dots, 0}$, então $I_{k, 0, \dots, 0} = I_{t, 0, \dots, 0}$, para todo $k \geq t$.*

Demonstração: Este corolário é uma consequência imediata da Proposição 4.28. Vamos prová-lo por indução sobre $k - t$.

Se $k - t = 1$, então o resultado é imediato.

Agora, suponha que $I_{t, 0, \dots, 0} = I_{k-1, 0, \dots, 0}$.

Pela Proposição 4.28, temos que $I_{k, 0, \dots, 0} = (I_{k-1, 0, \dots, 0} \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle$. Logo,

$$I_{k, 0, \dots, 0} = (I_{k-1, 0, \dots, 0} \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle = (I_{t, 0, \dots, 0} \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle = I_{t+1, 0, \dots, 0} = I_{t, 0, \dots, 0}.$$

\square

Assim, para determinar o fecho de Ratliff-Rush \tilde{I} de um bom ideal, nos resta identificar $I_{t, 0, \dots, 0} = I_{t+1, 0, \dots, 0}$, para algum t .

Suponha que já tenhamos calculado $I_{t, 0, \dots, 0}$ e $I_{t+1, 0, \dots, 0}$. Sejam $E_t := G(I_{t, 0, \dots, 0})$ e $F_{t+1} := G(I_{t+1, 0, \dots, 0}) \setminus I_{t, 0, \dots, 0}$. Temos que $E_{t+1} = E_t \cup F_{t+1}$.

A Proposição 4.28 e algumas propriedades relacionadas a operações com ideais monomiais já vistas nos garantem que

$$\begin{aligned} I_{t+2, 0, \dots, 0} &= (I_{t+1, 0, \dots, 0} \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle \\ &= (\langle E_t \cup F_{t+1} \rangle \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle \\ &= ((I_{t, 0, \dots, 0} + \langle F_{t+1} \rangle) \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle \\ &= (I_{t, 0, \dots, 0} \cdot I + \langle F_{t+1} \rangle \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (I_{t,0,\dots,0} \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle + (\langle F_{t+1} \rangle \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle \\
&= I_{t+1,0,\dots,0} + (\langle F_{t+1} \rangle \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $F_{t+2} \subseteq (\langle F_{t+1} \rangle \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle$. Portanto, para calcularmos F_{t+2} , precisamos calcular os geradores minimais de $(\langle F_{t+1} \rangle \cdot I) : \langle \mu_1 \rangle$ e descartar os monômios que estão em $I_{t+1,0,\dots,0}$.

Note que a Proposição 4.30 nos garante que, na hora de calcularmos $\langle F_{t+1} \rangle \cdot I$, podemos descartar os produtos cujo expoente de x_i for maior ou igual a d_i , para algum $i \in \{2, \dots, n\}$. Além disso, podemos excluir μ_i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, de todos os conjuntos, uma vez que isso não afeta o procedimento. Dessa forma, podemos substituir $G(I)$ por $P(I) := G(I) \setminus \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ em todas as etapas do processo e, por fim, incluir as esquinas novamente.

Assim, o algoritmo para encontrar $I_{0,\dots,q_i,\dots,0}$ para um bom ideal I é definido da seguinte forma:

Dado $G(I)$, defina

$$j = 0, \quad E_{-1} = \emptyset \quad \text{e} \quad F_0 = P(I).$$

Enquanto tivermos $F_j \neq \emptyset$, faça:

$$\begin{aligned}
E_j &= E_{j-1} \cup F_j; \\
H_j &= (\langle F_j \rangle \cdot \langle P(I) \rangle) : \langle \mu_i \rangle; \\
F_{j+1} &= G(H_j) \setminus \langle E_j \rangle.
\end{aligned}$$

Se $F_{j+1} \neq \emptyset$, repita o processo acima para encontrar F_{j+2} .

Se $F_{j+1} = \emptyset$, então temos

$$I_{0,\dots,q_i,\dots,0} = \langle \mu_1, \dots, \mu_n \rangle + \langle E_j \rangle.$$

Vamos ilustrar o algoritmo acima nos bons ideais apresentados neste capítulo.

Exemplo 4.32 Seja o bom ideal $I = \langle x^3, y^3, z^3, x^2y^2z^2 \rangle$ considerado no Exemplo 4.5.

Aplicando o algoritmo acima para $I_{q_1,0,0}$, começamos com $E_{-1} = \emptyset$ e $F_0 = P(I) = \{x^2y^2z^2\}$.

No primeiro passo do algoritmo, obtemos:

$$\begin{aligned} E_0 = P(I) &= \{x^2y^2z^2\}; \\ H_0 &= \emptyset; \\ F_1 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $q_1 = 0$ e $I_{0,0,0} = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle + \langle E_0 \rangle = \langle x^3, y^3, z^3 \rangle + \langle x^2y^2z^2 \rangle = I$.

Por simetria, obtemos que $q_2 = q_3 = 0$ e, pelo Teorema 4.27, temos

$$\tilde{I} = I_{0,0,0} \cap I_{0,0,0} \cap I_{0,0,0} = I.$$

Portanto, I é um ideal Ratliff-Rush.

Exemplo 4.33 Consideremos, agora, o bom ideal $I = \langle x^5, y^5, z^5, xyz^4 \rangle$ analisado no Exemplo 4.8.

O algoritmo anterior para $I_{q_1,0,0}$ nos dá, inicialmente, $E_{-1} = \emptyset$ e $F_0 = P(I) = \{xyz^4\}$.

Já no primeiro passo, obtemos

$$\begin{aligned} E_0 = P(I) &= \{xyz^4\}; \\ H_0 &= \emptyset; \\ F_1 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Assim, $q_1 = 0$ e $I_{0,0,0} = \langle x^5, y^5, z^5 \rangle + \langle xyz^4 \rangle = I$.

Por simetria, obtemos $q_2 = 0$.

Como $I \subset \tilde{I} = I_{q_1,0,0} \cap I_{0,q_2,0} \cap I_{0,0,q_3} = I \cap I \cap I_{0,0,q_3} \subset I$, segue que $\tilde{I} = I$, isto é, I é um ideal Ratliff-Rush.

Exemplo 4.34 Retomemos o ideal $I = \langle x^5, y^5, xy^4, x^4y \rangle$ considerado no Exemplo 4.13.

Vamos aplicar o algoritmo para determinar $I_{q_1,0}$.

Iniciamos com $E_{-1} = \emptyset$ e $F_0 = P(I) = \{xy^4, x^4y\}$.

Na primeira iteração do algoritmo, obtemos

$$\begin{aligned} E_0 = P(I) &= \{xy^4, x^4y\}; \\ H_0 &= \langle x^3y^2 \rangle; \\ F_1 &= \{x^3y^2\}. \end{aligned}$$

No segundo passo, encontramos

$$E_1 = \{xy^4, x^4y, x^3y^2\};$$

$$H_1 = \langle x^2y^3, x^3y^2 \rangle;$$

$$F_2 = \{x^2y^3\}.$$

Na etapa seguinte, obtemos

$$E_2 = \{xy^4, x^4y, x^3y^2, x^2y^3\};$$

$$H_2 = \langle xy^4 \rangle;$$

$$F_3 = \emptyset.$$

Por simetria, finalizamos o algoritmo com

$$q_1 = q_2 = 2 \text{ e}$$

$$I_{2,0} = I_{0,2} = \langle x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 \rangle = I + \langle x^3y^2, x^2y^3 \rangle.$$

Utilizando o isomorfismo de semigrupos ξ , temos a representação geométrica que aparece na Figura 4.3. Note que, pelo Corolário 3.26, temos que $\tilde{I} = \bar{I}$.

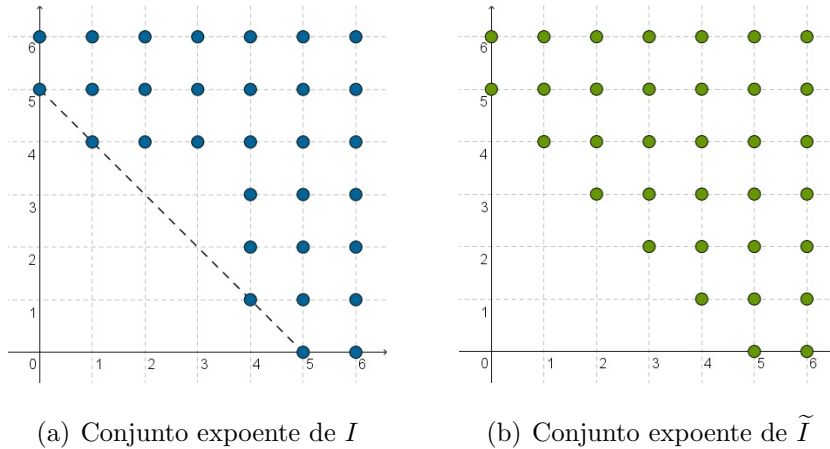


Figura 4.3: Fecho de Ratliff-Rush de um bom ideal

Exemplo 4.35 Para finalizar, vamos considerar o bom ideal $I = \langle x^7, y^7, x^5y^2, x^2y^5 \rangle$.

Aplicando o algoritmo para $I_{q_1,0}$, temos $E_{-1} = \emptyset$ e $F_0 = P(I) = \{x^5y^2, x^2y^5\}$.

No primeiro passo do algoritmo, temos

$$\begin{aligned} E_0 = P(I) &= \{x^5y^2, x^2y^5\}; \\ H_0 &= \langle x^3y^4 \rangle; \\ F_1 &= \{x^3y^4\}. \end{aligned}$$

Na segunda etapa, obtemos

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x^5y^2, x^2y^5, x^3y^4\}; \\ H_1 &= \langle xy^6 \rangle; \\ F_2 &= \{xy^6\}. \end{aligned}$$

Na terceira etapa, temos

$$\begin{aligned} E_2 &= \{x^5y^2, x^2y^5, x^3y^4, xy^6\}; \\ H_2 &= \emptyset; \\ F_3 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$q_1 = 2 \text{ e } I_{2,0} = \langle x^7, y^7 \rangle + \langle x^5y^2, x^2y^5, x^3y^4, xy^6 \rangle = I + \langle x^3y^4, xy^6 \rangle.$$

Por simetria, segue que

$$q_2 = 2 \text{ e } I_{0,2} = \langle x^7, y^7 \rangle + \langle x^5y^2, x^2y^5, x^4y^3, x^6y \rangle = I + \langle x^4y^3, x^6y \rangle.$$

Assim, temos que

$$\tilde{I} = (I + \langle x^3y^4, xy^6 \rangle) \cap (I + \langle x^4y^3, x^6y \rangle) = I + \langle x^4y^4 \rangle.$$

Observando a Figura 4.4, temos:

$$\begin{aligned} I &= \langle x^7, y^7, x^5y^2, x^2y^5 \rangle; \\ \tilde{I} &= \langle x^7, y^7, x^5y^2, x^2y^5, x^4y^4 \rangle; \\ \bar{I} &= \langle x^7, y^7, x^5y^2, x^2y^5, xy^6, x^3y^4, x^4y^3, x^6y \rangle; \\ \sqrt{I} &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

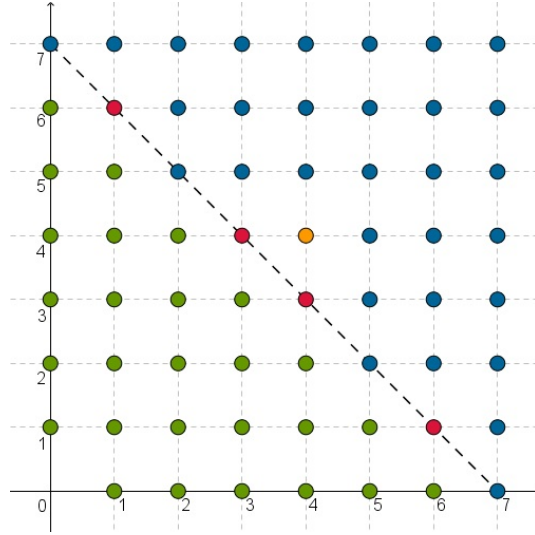


Figura 4.4: $I \subset \tilde{I} \subset \bar{I} \subset \sqrt{I}$

Assim, neste caso, obtemos

$$I \subset \tilde{I} \subset \bar{I} \subset \sqrt{I}.$$

Bibliografia

- [A] AL-AYYOUB, I.; *An algorithm for computing the Ratliff-Rush closure*. Journal of Algebra and its Applications, v. 8, n. 4 (2009) 521-532.
- [AN] ANDRADE, J. F. S.; *Tópicos especiais em Álgebra*. SBM (2013).
- [F] FRÖBERG, R.; *An introduction to Gröbner bases*. Wiley (1997).
- [G] GASANOVA, O.; *Powers of monomial ideals and the Ratliff-Rush operation*. Proceedings of the 31st Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (2019).
- [HH] HERZOG, J.; HIBI, T.; *Monomial ideals*. Graduate Texts in Mathematics. Springer (2010).
- [HK] HOFFMAN, K., KUNZE, R.; *Linear Algebra*. Second edition. Prentice-Hall (1971).
- [HS] HUNEKE, C.; SWANSON, I.; *Integral closure of ideals, rings and modules*. London Mathematical Society Lecture Note Series 336. Cambridge University Press (2006).
- [RR] RATLIFF, L. J.; RUSH, D. E.; *Two notes on reductions of ideals*. Indiana University Mathematics Journal, v. 27, n. 6 (1978) 929-934.
- [RS] ROSSI, M. E.; SWANSON, I.; *Notes on the behavior of the Ratliff-Rush filtration*. Commutative Algebra: Interactions with Algebraic Geometry. Contemporary Mathematics 331. American Mathematical Society (2003) 313-328.