

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

FELIPE COELHO SIQUEIRA

AÇÃO DO PRODUTO COROA EM SISTEMAS DE CÉLULAS
IDÊNTICAS ACOPLADAS

Maringá-PR
2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

AÇÃO DO PRODUTO COROA EM SISTEMAS DE CÉLULAS IDÊNTICAS ACOPLADAS

FELIPE COELHO SIQUEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Área de Concentração: Geometria e Topologia.

Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli.

Maringá-PR
2020

FELIPE COELHO SIQUEIRA

AÇÃO DO PRODUTO COROA EM SISTEMAS DE CÉLULAS IDÊNTICAS ACOPLADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Professora Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli - Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Professor Dr. Josiney Alves de Souza - Universidade Estadual de Maringá

Professora Dra. Thaís Maria Dalbelo - Universidade Federal de São Carlos

Aprovado em: 06 de maio de 2020
Local de defesa: Vídeo-conferência

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

S618a	<p>Siqueira, Felipe Coelho Ação do produto coroa em sistemas de células idênticas acopladas / Felipe Coelho Siqueira. - Maringá, 2020. 101 f. : il.</p> <p>Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2020.</p> <p>1. Células acopladas. 2. Simetrias. 3. Produto coroa. 4. Subgrupos axiais. 5. Soluções de equilíbrio. I. Baptistelli, Patrícia Hernandes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.</p> <p>CDD 22.ed. 516.1</p>
-------	---

Edilson Damasio CRB9-1.123

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me capacitado e me fortalecido, para que assim eu conseguisse lidar com todos os obstáculos desta jornada.

Aos meus pais, Raimunda Coelho e Antônio José, por todo carinho, além do grande incentivo em prol da minha educação.

Agradeço ao excelente corpo docente desta universidade, em especial à minha orientadora Profa. Dra. Patrícia Hernandes Bapstitelli, pela paciência, confiança, oportunidade e por todos os ensinamentos que contribuíram para o meu crescimento acadêmico. Obrigado por toda dedicação e amparo fornecido para a conclusão desta etapa na minha história.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que se dispuseram a ajudar, de forma direta ou indireta, para a conclusão desta dissertação.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as simetrias de sistemas de N células idênticas acopladas idênticamente. Em tais sistemas podem surgir um grupo \mathcal{L} de simetrias internas e um grupo \mathcal{G} de simetrias globais cujas propriedades de acoplamento geram um grupo de simetrias total dado pelo produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Mais precisamente, $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ denota o produto semidireto $\mathcal{L}^N \rtimes \mathcal{G}$, onde \mathcal{L} é um grupo de Lie compacto e \mathcal{G} é um grupo finito de permutações. Por meio de uma abordagem algébrica, caracterizamos todos os subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, a menos de conjugação, em função dos subgrupos axiais de \mathcal{L} e dos chamados blocos do conjunto $\{1, \dots, N\}$. Também descrevemos a forma geral das matrizes que comutam com esses subgrupos. Com base nesses resultados e juntamente com o Lema dos Ramos Equivariantes, mostramos a existência de soluções de equilíbrio para um sistema de células idênticas acopladas idênticamente, admitindo como o grupo de simetrias um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$.

Palavras-Chave: células acopladas, simetrias, produto coroa, subgrupos axiais, soluções de equilíbrio.

Abstract

In this work, we study the symmetries of systems of N identical cells with identical coupling. In such systems, a group \mathcal{L} of internal symmetries and a group \mathcal{G} of global symmetries can arise whose coupling properties generate a total symmetry group given by the wreath product $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. More precisely, $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ denotes the semidirect product $\mathcal{L}^N \rtimes \mathcal{G}$, where \mathcal{L} is a compact Lie group and \mathcal{G} is a finite group of permutations. Using an algebraic approach, we characterize all axial subgroups of $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, up to conjugation, depending on the axial subgroups of \mathcal{L} and the so-called blocks of the set $\{1, \dots, N\}$. We also describe the general form of the matrices commuting with these subgroups. Based on these results and together with the Equivariant Branching Lemma, we show the existence of equilibrium solutions for a system of identical cells with identical coupling, having as the group of symmetries an axial subgroup of $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$.

Key words: coupled cells, symmetries, wreath product, axial subgroups, equilibrium solutions.

Índice

1	Preliminares	13
1.1	Grupos de Lie Lineares	13
1.1.1	Ações e Representações de Grupos de Lie Lineares	17
1.1.2	Integral de Haar	22
1.2	Irreduzibilidade	25
1.3	Subgrupos de Isotropia e Subespaços de Ponto Fixo	33
1.4	Ação do Produto Coroa	37
2	Sistemas de Células Acopladas com Simetria Produto Coroa	42
2.1	Sistemas de Células Acopladas	42
2.2	Teoria Linear e Algébrica do Produto Coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$	53
2.2.1	Teoria Linear	53
2.2.2	Subgrupos Axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$	58
2.2.3	Matrizes $\Sigma(A, J)$ -equivariantes	69
3	Bifurcação de Pontos de Equilíbrio com Simetria do Tipo Produto Coroa	82
3.1	O Lema dos Ramos Equivariantes	82
3.2	O Lema dos Ramos Equivariantes em Sistemas com Simetria Produto Coroa . .	87

Introdução

Em diversas áreas da matemática, da física e da biologia, as simetrias surgem de forma natural, uma vez que as configurações geométricas podem ser simétricas. As simetrias presentes nas equações de um modelo matemático simplificam sua análise e justificam fenômenos dinâmicos que não seriam esperados se elas não fossem levadas em consideração. Por essa razão, o estudo de sistemas dinâmicos com simetrias tem se estabelecido um ramo importante da teoria de sistemas dinâmicos não lineares. Esse estudo é descrito formalmente por meio da teoria de representação de grupos, pois as equações diferenciais que regem tais sistemas são equivariantes e suas soluções são invariantes sob a ação de um grupo de simetrias.

Paralelamente, sistemas de células acopladas tem sido o foco de atenção de vários autores em diversas áreas, uma vez que muitos modelos e processos físicos podem ser formulados por meio desses sistemas. O termo “célula” é usado para indicar um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Um sistema de células acopladas é, portanto, um conjunto de células com interações entre suas variáveis de estado. Mais especificamente, um sistema de N células acopladas é da forma

$$\dot{x} = F(x),$$

com $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^k)^N$ e $F : (\mathbb{R}^k)^N \rightarrow (\mathbb{R}^k)^N$ um campo de vetores, em que $k, N \in \mathbb{N}$ e x_j é a variável de estado da j -ésima célula representada pela equação diferencial

$$\dot{x}_j = f_j(x_j) + h_j(x).$$

A aplicação $f_j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ governa a dinâmica interna de cada célula e $h_j : (\mathbb{R}^k)^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ representa o acoplamento da célula j com as demais células.

De um modo geral, cada célula pode ser pensada como tendo um número de saídas e de entradas provenientes de outras células do sistema. Assim, tais sistemas apresentam uma

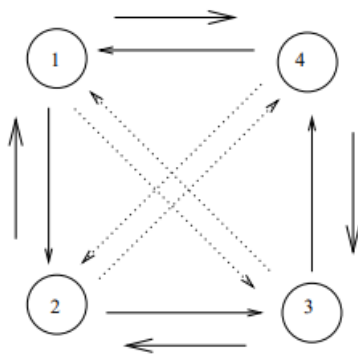


Figura 1: Representação gráfica de um sistema de quatro células acopladas.

“arquitetura de rede” que pode ser representada esquematicamente por um grafo orientado cujos vértices correspondem às células e cada aresta direcionada corresponde a uma conexão específica de entrada-saída.

As especificidades dos sistemas de células acopladas despertaram o interesse de diversos autores, como em [1, 4, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 26, 28], entre outros. Alexander [2] foi um dos primeiros a notar que a forma do acoplamento poderia afetar a dinâmica do sistema ao analisar uma coleção de osciladores¹ idênticos acoplados entre si por meio de canais de comunicação unidirecionais e bidirecionais. Sistemas de células acopladas são largamente utilizados com o intuito de gerar padrões de oscilação, muitas vezes observados em fenômenos naturais. O reconhecimento e a classificação de padrões tem importantes implicações em diversos campos da ciência, abrangendo outros domínios científicos além da matemática. Em sistemas físicos e biológicos, por exemplo, os padrões de oscilação podem ser previstos, como mostrado por Buono e Golubitsky [8, 9] em um estudo de locomoção animal. Mais especificamente, o Gerador Central de Padrões de Locomoção (CPG) é um sistema distribuído na rede neural, localizado na medula espinhal dos vertebrados, capaz de gerar sinais para o controle de movimentos periódicos coordenados. Em [8, 9], os autores classificam as simetrias espaço-temporais das soluções periódicas de sistemas de células idênticas acopladas, que modelam CPGs no estudo da locomoção de quadrúpedes (marchas e galopes).

Neste trabalho, nossa atenção está voltada a sistemas de células idênticas com acoplamento idêntico, ou seja, a dinâmica interna f_j de cada célula é governada por uma única aplicação e o acoplamento h_j entre as células tem a forma

$$h_j(x) = \sum_{i=1}^N C(i, j)h(x_i, x_j),$$

para alguma aplicação $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde $C(i, j)$ são as entradas de uma matriz de conexão C . Para esse tipo de acoplamento, surgem naturalmente dois conjuntos de simetrias: o grupo \mathcal{L} das simetrias internas, formado segundo as propriedades simétricas de f , e o grupo \mathcal{G} das simetrias globais induzido pela matriz C . O modo como \mathcal{L} e \mathcal{G} se combinam pode gerar um grupo de simetrias total dado pelo produto direto $\mathcal{L} \times \mathcal{G}$ ou pelo produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Baseado em [17], concentramos nosso estudo no acoplamento do tipo produto coroa, que ocorre quando a aplicação de acoplamento h é invariante na coordenada x_i e equivariante na coordenada x_j segundo uma ação de \mathcal{L} em \mathbb{R}^k . Na mesma direção, Dionne, Golubitsky e Stewart [18] desenvolvem uma teoria análoga para o acoplamento produto direto e, embora os resultados se apliquem a qualquer sistema com simetria do tipo produto direto, seus estudos são feitos em termos de uma rede de osciladores simétricos acoplados.

Uma segunda abordagem desse trabalho é utilizar a teoria de bifurcação equivariante no estudo de sistemas de células acopladas. O termo “bifurcação” se refere ao fenômeno de aparecimento de novas soluções de equilíbrio em um sistema, além da solução trivial, conforme o parâmetro de bifurcação varia. No contexto equivariante, as novas soluções podem admitir menos simetrias do que a solução trivial, originando uma “quebra espontânea de simetria”. Implicações dessa abordagem em sistemas de células acopladas estão presentes, por exemplo, no estudo de redes de junções Josephson [3], dispositivos supercondutores com importantes aplicações tanto em tecnologia (chips de computadores) quanto em ciência básica. Cada célula

¹Um oscilador é um sistema de EDOs com um ciclo limite periódico.

é uma matriz de Josephson com k junções modelada por um sistema de EDOs com grupo de simetrias internas S_k e cada rede forma um sistema de N células acopladas cujo acoplamento ocorre de maneira idêntica com todas as células. Nesse caso, o grupo de simetrias globais é dado pelo grupo de permutações S_N , de modo que $S_k \wr S_N$ torna-se o grupo de simetrias do sistema. Outros trabalhos em teoria de bifurcação para sistemas de células acopladas são apresentados em [1, 2, 4, 13, 14, 15, 16, 28].

O texto está organizado como segue. No Capítulo 1, apresentamos os conceitos básicos da teoria de representação de grupos de Lie lineares. Na Seção 1.1, introduzimos a integral de Haar, uma operação que nos permite identificar todo grupo de Lie compacto com um subgrupo do grupo ortogonal (Proposição 1.1.18). Na Seção 1.2, descrevemos a decomposição de um espaço vetorial de dimensão finita sob a ação de um grupo Γ como uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis (Corolário 1.2.3 e Teorema 1.2.8). Na Seção 1.3, introduzimos os conceitos de subgrupo de isotropia e subespaço de ponto fixo, os quais nos dão informações sobre as propriedades de uma aplicação equivariante não linear segundo a ação de um grupo. Finalizamos o capítulo com a Seção 1.4, onde descrevemos a ação do produto coroa em um espaço vetorial de dimensão finita.

No Capítulo 2, apresentamos a parte central do projeto no estudo de sistemas de células acopladas com simetria produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Na Seção 2.1, definimos um sistema de N células idênticas acopladas identicamente por meio de uma matriz de conexão C e mostramos a relação entre as simetrias globais de um tal sistema e as entradas de C . Na Seção 2.2 desenvolvemos a teoria linear e algébrica da ação do produto coroa em um espaço vetorial de dimensão finita V^N , dividida em três partes: na Subseção 2.2.1 descrevemos os subespaços $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -irredutíveis de V^N (Lema 2.2.1), na Subseção 2.2.2 caracterizamos os subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em função dos subgrupos axiais de \mathcal{L} (Teorema 2.2.10) e na Subseção 2.2.3 determinamos a estrutura das matrizes que comutam com os subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ (Teorema 2.2.16).

No Capítulo 3, discutimos os conceitos básicos da teoria de bifurcação equivariante a fim de aplicar no estudo de sistemas de células acopladas com simetrias. Na Seção 3.1, apresentamos o clássico Lema dos Ramos Equivariantes (Teorema 3.1.6), que garante, sob certas condições, a existência de soluções de equilíbrio simétricas para problemas de bifurcação com simetrias. Na Seção 3.2, utilizamos o Teorema 3.1.6 para mostrar a existência de um único ramo de soluções de equilíbrio para sistemas de células acopladas com simetria $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, correspondendo a cada um de seus subgrupos axiais (Teorema 3.2.3). Finalizamos essa seção com dois exemplos que esclarecem as implicações do Teorema 3.2.3.

Capítulo 1

Preliminares

A noção de simetria (ou equivariância) de um sistema de equações diferenciais ordinárias consiste em uma transformação que preserva alguma estrutura particular. No contexto de sistemas de células acopladas, as simetrias são transformações lineares que preservam, em especial, a disposição das células que compõem o sistema. O conjunto de todas essas transformações tem uma estrutura de grupo e sua descrição formal é feita por meio da teoria de ação e representação de grupos.

Neste primeiro capítulo, apresentamos os conceitos básicos sobre grupos de Lie lineares e a respectiva teoria de representação em um espaço vetorial de dimensão finita. Para isso, assumimos familiaridade com os conceitos elementares de teoria de grupos, como o de subgrupo e homomorfismo de grupos, bem como com os conceitos topológicos em \mathbb{R}^n , como conjuntos abertos, fechados e compacidade.

De maneira geral, dividimos o capítulo como segue: na Seção 1.1, destacamos a existência de uma integral invariante pela ação de um grupo, a qual nos permite mostrar (Proposição 1.1.18) que todo grupo de Lie linear compacto pode ser identificado como um subgrupo fechado do grupo ortogonal. Na Seção 1.2, descrevemos uma decomposição de um espaço vetorial de dimensão finita sob a ação de um grupo Γ como uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis cuja existência e unicidade são garantidas no Corolário 1.2.3 e no Teorema 1.2.8, respectivamente. Na Seção 1.3, exploramos os conceitos de subgrupo de isotropia e subespaço de ponto fixo, os quais nos dão informações sobre as especificidades de uma aplicação equivariante não linear segundo a ação de um grupo Γ . Na Seção 1.4, descrevemos a ação do produto coroa em um espaço vetorial de dimensão finita, com base em um produto semidireto. Tal ação desempenhará um papel importante no estudo das simetrias de um sistema de células acopladas desenvolvido nos Capítulos 2 e 3.

Citamos os capítulos XII e XIII de [20] como a principal referência para o que apresentamos a seguir, exceto para a Seção 1.4 cujo texto foi baseado em [6, Section 3].

1.1 Grupos de Lie Lineares

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável que admite uma estrutura de grupo em que as operações de multiplicação e inversão são diferenciáveis. Para nossos propósitos é suficiente considerar apenas os grupos de Lie lineares cuja definição é menos geral, como veremos adiante.

Sejam $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais e $GL(n)$ o subconjunto de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de todas as matrizes inversíveis. Para definir uma topologia em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,

utilizamos o isomorfismo $\Psi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ dado por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Dizemos que um subconjunto U de matrizes é um aberto em $M_n(\mathbb{R})$ se, e somente se, $\Psi(U)$ é um aberto em \mathbb{R}^{n^2} . Assim, podemos considerar em $GL(n)$ a topologia do subespaço induzida por $M_n(\mathbb{R})$. Note que $GL(n)$ é um subconjunto aberto de $M_n(\mathbb{R})$, pois se considerarmos a função contínua

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto |A| \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde $|A|$ denota o determinante da matriz A , então $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$.

Definição 1.1.1. Um grupo de Lie linear é um subgrupo fechado de $GL(n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que um grupo de Lie linear é compacto se ele for compacto como um subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} .

Vejamos alguns exemplos de grupos de Lie lineares. Em todo o texto, A^t denota a transposta de uma matriz A , A^{-1} denota a inversa de A e I_n denota a matriz identidade em $GL(n)$.

Exemplo 1.1.2. O grupo n -dimensional ortogonal $O(n)$ formado pelas matrizes $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$AA^t = A^tA = I_n,$$

munido com a operação de multiplicação de matrizes, é um grupo de Lie linear compacto. De fato, considerando a função contínua

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto AA^t \end{aligned} \quad ,$$

temos que $O(n) = f^{-1}(\{I_n\})$. Como $\{I_n\}$ é fechado em $M_n(\mathbb{R})$, segue pela continuidade de f que $f^{-1}(\{I_n\})$ é um subconjunto fechado de $M_n(\mathbb{R})$ e, portanto, $O(n)$ é fechado em $M_n(\mathbb{R})$. Ainda, se $A \in O(n)$, então

$$\det(A)^2 = \det(A) \det(A^t) = \det(AA^t) = \det(I_n) = 1,$$

ou seja, $\det(A) = \pm 1$. Assim, $O(n) \subset GL(n)$, implicando que $O(n)$ é um subconjunto fechado de $GL(n)$. Portanto, $O(n)$ é um grupo de Lie linear. Como $O(n)$ é um subgrupo fechado de $M_n(\mathbb{R})$, segue que ele é compacto se as entradas das matrizes que o definem forem limitadas. E isso de fato ocorre, pois se $A = (a_{ij}) \in O(n)$, para cada $i = 1, \dots, n$ temos $\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2} = 1$ e, assim, $|a_{ij}| \leq 1$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Portanto, $O(n)$ é um grupo de Lie linear compacto.

Exemplo 1.1.3. O grupo ortogonal especial $SO(n)$ de todas as matrizes $A \in O(n)$ tais que $\det(A) = 1$ é um grupo de Lie linear compacto. De fato, Considere a função

$$\begin{aligned} f : GL(n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto |A| \end{aligned} \quad .$$

Note que f é uma função contínua, pois é a restrição da função contínua \det definida em (1.1) ao subconjunto $GL(n)$ de $M_n(\mathbb{R})$. Então, $f^{-1}(\{1\}) = SO(n)$ é um subconjunto fechado de $GL(n)$. Portanto, $SO(n)$ é um grupo de Lie linear. Como $SO(n) \subset O(n)$, as entradas das matrizes que o definem são limitadas, implicando que $SO(n)$ é compacto.

No caso particular de $n = 2$, temos que $SO(2)$ é gerado pelas matrizes de rotações definidas por

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

onde $\theta \in [0, 2\pi)$. De fato, escreva $A \in SO(2)$ como

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Como $AA^t = I_2$ segue que $A^t = A^{-1}$. Calculando a inversa de A e igualando-a à sua transposta obtemos que

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

onde $\det(A) = a^2 + b^2 = 1$. Assim, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos(\theta)$ e $b = \text{sen}(\theta)$ e, portanto, $A = R_\theta$. Dessa forma, podemos identificar $SO(2)$ com o grupo do círculo

$$S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}; \theta \in [0, 2\pi)\}$$

pela aplicação $R_\theta \mapsto e^{i\theta}$. Como S^1 pode ser identificado com o intervalo $[0, 2\pi)$ pela aplicação $e^{i\theta} \mapsto \theta$, podemos identificar o grupo especial ortogonal $SO(2)$ com o intervalo $[0, 2\pi)$ por meio da composição $R_\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto \theta$. Analogamente, podemos mostrar que $O(2)$ é gerado por $SO(2)$ e pela matriz de reflexão κ , onde

$$\kappa = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

pois se $A \in O(2) \setminus SO(2)$, então existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $A = \kappa R_\theta$.

Exemplo 1.1.4. Todo grupo finito é isomorfo a um grupo de Lie linear compacto. De fato, seja $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um grupo finito. Pelo Teorema de Cayley, G é isomorfo a um subgrupo H do grupo S_G das permutações dos elementos de G . Provemos agora que H é isomorfo a um subgrupo de $GL(n)$. Considere a função

$$\varphi: \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & GL(n) \\ \sigma & \longmapsto & A^\sigma \end{array},$$

onde cada entrada A_{ij}^σ de A^σ é da forma

$$A_{ij}^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{se } a_i = \sigma(a_j) \\ 0, & \text{se } a_i \neq \sigma(a_j). \end{cases}$$

Note que como cada σ é uma bijeção de G em G , temos que se $\sigma(a_j) = a_i$, então $\sigma(a_i) \neq a_i$ para todo $l \in \{1, \dots, n\}$ com $l \neq j$ e $\sigma(a_j) \neq a_t$ para todo $t \in \{1, \dots, n\}$ com $t \neq i$. Logo, A^σ é uma matriz resultante da permutação das linhas ou colunas da matriz identidade I_n e, portanto, $\det(A^\sigma) = \pm 1$ para toda $\sigma \in H$, o que mostra que φ está bem definida. Vamos

mostrar primeiramente que φ é um homomorfismo de grupos. Sejam $\sigma, \eta \in H$. Então

$$\varphi(\sigma \circ \eta) = A^{\sigma \circ \eta} = (A_{ij}^{\sigma \circ \eta}),$$

onde $A_{ij}^{\sigma \circ \eta} = 1$ se $\sigma(\eta(a_j)) = a_i$ e $A_{ij}^{\sigma \circ \eta} = 0$ se $\sigma(\eta(a_j)) \neq a_i$. Pela definição de multiplicação de matrizes, temos que $\varphi(\sigma)\varphi(\eta) = B$ em que B é uma matriz cujas entradas B_{ij} satisfazem

$$B_{ij} = \sum_{t=1}^n A_{it}^{\sigma} A_{tj}^{\eta}.$$

Assim, $B_{ij} = 1$ se, e somente se, $A_{it}^{\sigma} = A_{tj}^{\eta} = 1$, o que ocorre se, e somente se, $\sigma(a_t) = a_i$ e $\eta(a_j) = a_t$. Portanto, $B_{ij} = 1$ se $\sigma(\eta(a_j)) = a_i$ e $B_{ij} = 0$ se $\sigma(\eta(a_j)) \neq a_i$, isto é, $B_{ij} = A_{ij}^{\sigma \circ \eta}$. Logo,

$$\varphi(\sigma \circ \eta) = (A_{ij}^{\sigma \circ \eta}) = (B_{ij}) = B = \varphi(\sigma)\varphi(\eta),$$

mostrando que φ é um homomorfismo de grupos. Agora, se $\sigma, \eta \in H$ são tais que $\varphi(\sigma) = \varphi(\eta)$, então

$$A_{ij}^{\sigma} = A_{ij}^{\eta},$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Se existir $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\sigma(a_j) \neq \eta(a_j)$, então existe $t \in \{1, \dots, n\}$ de modo que $\sigma(a_j) = a_t \neq \eta(a_j)$, de onde resulta que

$$1 = A_{tj}^{\sigma} \neq A_{tj}^{\eta} = 0,$$

o que é um absurdo. Logo $\sigma = \eta$, implicando que φ é um homomorfismo injetor. Podemos então concluir que H é isomorfo a $\varphi(H)$ e, assim, G é isomorfo a $\varphi(H)$. Como o conjunto gerado pelas permutações das linhas ou colunas da matriz identidade é um subconjunto finito de $GL(n)$, que é um espaço de Hausdorff, segue que $\varphi(H)$ é fechado em $GL(n)$. Portanto, $\varphi(H)$ é um grupo de Lie linear. A compacidade de $\varphi(H)$ segue do fato de que cada matriz A^{σ} possui apenas as entradas 1 e 0. Portanto, identificando G com $\varphi(H)$, segue que G é um grupo de Lie linear compacto.

Exemplo 1.1.5. O grupo S_n das permutações do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, com $n \geq 1$, é um grupo de Lie linear compacto. De fato, como S_n é um grupo finito, segue pelo exemplo anterior que S_n é um grupo de Lie linear compacto via a identificação por meio do homomorfismo injetor

$$\begin{aligned} \mu : S_n &\longrightarrow GL(n) \\ \sigma &\longmapsto A^{\sigma} \end{aligned}, \tag{1.4}$$

onde A^{σ} é a matriz com entradas

$$A_{ij}^{\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0, & \text{se } i \neq \sigma(j). \end{cases}$$

A matriz A^{σ} é chamada de matriz de permutação de $\sigma \in S_n$.

Exemplo 1.1.6. O grupo cíclico \mathbb{Z}_n de ordem $n \geq 2$, que pode ser identificado com o grupo das matrizes de ordem 2 gerado pela rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$, é um grupo de Lie linear compacto.

Exemplo 1.1.7. O grupo diedral \mathbf{D}_n de ordem $2n$ é o grupo gerado por dois elementos r e s de ordens n e 2 , respectivamente, tais que $s \circ r = r^{-1} \circ s$. Tal grupo pode ser identificado

com o subgrupo de $GL(2)$ gerado pela rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$ e pela reflexão κ dada em (1.3). Via tal identificação D_n é um grupo de Lie linear compacto, uma vez que é um grupo finito.

Exemplo 1.1.8. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n pode ser visto como um grupo de Lie linear quando identificado com o grupo das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Note que \mathbb{R}^n não é um grupo de Lie linear compacto, pois as entradas das matrizes em (1.5) não são limitadas.

1.1.1 Ações e Representações de Grupos de Lie Lineares

Estamos agora interessados em determinar como um grupo de Lie linear transforma os elementos de um espaço vetorial real de dimensão finita. Formalizamos essa ideia com os conceitos de ação e representação de grupos.

Definição 1.1.9. *Sejam Γ um grupo de Lie linear e V um espaço vetorial real de dimensão finita. Dizemos que Γ age linearmente em V se existir uma aplicação contínua, chamada de ação,*

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (\gamma, v) &\longmapsto \gamma \cdot v \end{aligned}$$

tal que

- (i) $\phi(1_\Gamma, v) = v$, onde 1_Γ é o elemento neutro de Γ .
- (ii) Para cada $\gamma \in \Gamma$, a aplicação $\rho_\gamma : V \rightarrow V$ definida por $\rho_\gamma(v) = \gamma \cdot v$ é linear.
- (iii) Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, então $\phi(\gamma_1, \phi(\gamma_2, v)) = \phi(\gamma_1 * \gamma_2, v)$ para todo $v \in V$, ou seja,

$$\rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\gamma_2} = \rho_{\gamma_1 * \gamma_2},$$

onde $*$ é a operação em Γ .

Note que o operador ρ_γ definido em (ii) é inversível para todo $\gamma \in \Gamma$. De fato, pelo item (i) da Definição 1.1.9 temos que $\rho_{1_\Gamma} = Id$, onde $Id : V \rightarrow V$ é o operador identidade. Dado $\gamma \in \Gamma$, como Γ é um grupo temos $\gamma^{-1} \in \Gamma$. Pelo item (iii),

$$\rho_\gamma \circ \rho_{\gamma^{-1}} = \rho_{\gamma * \gamma^{-1}} = \rho_{1_\Gamma} = Id,$$

ou seja, ρ_γ é inversível e $(\rho_\gamma)^{-1} = \rho_{\gamma^{-1}}$. Portanto, $\rho_\gamma \in GL(V)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, onde $GL(V)$ denota o grupo dos operadores lineares inversíveis em V .

Definição 1.1.10. *Sejam Γ um grupo de Lie linear e V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma representação de Γ em V é um homomorfismo de grupos $\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$.*

Assim, dada uma ação $\phi : \Gamma \times V \rightarrow V$, a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma &\longrightarrow GL(V) \\ \gamma &\longmapsto \rho_\gamma \end{aligned} \tag{1.6}$$

é uma representação de Γ em V . De fato, pelo item (iii) da Definição 1.1.9 temos que

$$\rho(\gamma_1 * \gamma_2) = \rho_{\gamma_1 * \gamma_2} = \rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\gamma_2} = \rho(\gamma_1) \circ \rho(\gamma_2),$$

para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, implicando que ρ é um homomorfismo de grupos. Portanto, toda ação está associada a uma representação, a qual nos diz como Γ transforma todo o espaço V . Um cálculo simples prova que dada uma representação $\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (\gamma, v) &\longmapsto \rho(\gamma)(v) \end{aligned}$$

é uma ação de Γ em V . Portanto, toda representação também está associada a uma ação.

Observação 1.1.11. Se Γ é um grupo de Lie linear agindo linearmente em um espaço vetorial real de dimensão finita V , então Γ pode ser identificado com um subgrupo de $GL(m)$, onde m é a dimensão de V . De fato, todo $\gamma \in \Gamma$ está associado ao operador linear inversível $\rho_\gamma : V \rightarrow V$ definido como no item (ii) da Definição 1.1.9. Considerando a matriz $[\rho_\gamma]$ de ρ_γ com relação a uma base fixada de V , podemos identificar cada $\gamma \in \Gamma$ com a matriz $[\rho_\gamma] \in GL(m)$, que é chamada de matriz de representação de γ em V .

Daqui em diante, V é um \mathbb{R} -espaço vetorial de dimensão finita. Todos os exemplos apresentados a seguir serão utilizados no Capítulo 2.

Exemplo 1.1.12. Como todo grupo de Lie linear Γ é um subgrupo de $GL(n)$, para algum $n \geq 1$, então existe uma ação natural de Γ em V dada por

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (A, v) &\longmapsto Av \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde Av representa a multiplicação da matriz $A \in \Gamma$ pelas coordenadas do vetor $v \in V$ em relação a uma base fixada de V . De fato, primeiramente observe que ϕ é uma aplicação contínua. Se $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\phi(I_n, v) = v$ e a aplicação $\rho_A : V \rightarrow V$ definida por $\rho_A(v) = Av$ satisfaz

$$\rho_A(u + \alpha v) = A(u + \alpha v) = Au + \alpha Av = \rho_A(u) + \alpha \rho_A(v), \tag{1.8}$$

para cada $A \in \Gamma$, de onde segue que ρ_A é linear para todo $A \in \Gamma$. Ainda, dados $A, B \in \Gamma$,

$$\phi(A, \phi(B, v)) = \phi(A, Bv) = A(Bv) = (AB)v = \phi(AB, v),$$

para todo $v \in V$. Portanto, ϕ define uma ação de Γ em V .

Observe que a matriz $[\rho_A]$ do operador linear $\rho_A : V \rightarrow V$, com relação à base canônica de V , coincide com A . Portanto, a ação ϕ de Γ em V definida em (1.7) nos garante que a matriz de representação de $A \in \Gamma$ é dada por A .

Exemplo 1.1.13. Neste exemplo, vamos identificar S^1 com o intervalo $[0, 2\pi)$ por meio do

isomorfismo $e^{i\theta} \mapsto \theta$. A aplicação definida por

$$\begin{aligned} \phi : S^1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\longmapsto e^{i\theta} z \end{aligned} \quad (1.9)$$

é uma ação de S^1 em \mathbb{C} . De fato, claramente ϕ é uma aplicação contínua e $\phi(0, z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Ainda, dados $z, w \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, a aplicação $\rho_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\rho_\theta(z) = e^{i\theta} z$ satisfaz

$$\rho_\theta(z + \lambda w) = e^{i\theta}(z + \lambda w) = e^{i\theta} z + \lambda e^{i\theta} w = \rho_\theta(z) + \lambda \rho_\theta(w),$$

para todo $\theta \in S^1$, implicando que ρ_θ é linear para todo $\theta \in S^1$. Se $\theta_1, \theta_2 \in S^1$, então

$$\phi(\theta_1, \phi(\theta_2, z)) = \phi(\theta_1, e^{i\theta_2} z) = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} z = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} z = \phi((\theta_1 + \theta_2), z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto, ϕ dada em (1.9) define uma ação de S^1 em \mathbb{C} .

Observe que, para cada $\theta \in S^1$,

$$\rho_\theta(1) = \cos(\theta) + \text{sen}(\theta)i \quad \text{e} \quad \rho_\theta(i) = e^{i\theta} i = -\text{sen}(\theta) + \cos(\theta)i.$$

Logo, a matriz de ρ_θ com relação à base $\beta = \{1, i\}$ de \mathbb{C} como um espaço vetorial real é dada por

$$[\rho_\theta] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz de representação de θ em \mathbb{C} é a matriz de rotação R_θ definida em (1.2).

Exemplo 1.1.14. Seja S_N o grupo das permutações do conjunto $\{1, \dots, N\}$. A aplicação ϕ definida por

$$\begin{aligned} \phi : S_N \times V^N &\longrightarrow V^N \\ (\sigma, (v_1, \dots, v_n)) &\longmapsto (v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(N)}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

é uma ação de S_N em V^N . De fato, ϕ é uma aplicação contínua, pois ϕ é linear. Ainda, se id for a identidade de S_N e $(v_1, \dots, v_N) \in V^N$, então $\phi(id, (v_1, \dots, v_N)) = (v_1, \dots, v_N)$. Afirmamos que, para cada $\sigma \in S_N$, a aplicação $\rho_\sigma : V^N \rightarrow V^N$ definida por $\rho_\sigma(v_1, \dots, v_N) = (v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(N)})$ é linear. Com efeito, sejam $v = (v_1, \dots, v_N), w = (w_1, \dots, w_N) \in V^N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(v + \lambda w) &= \rho_\sigma((v_1 + \lambda w_1, \dots, v_N + \lambda w_N)) \\ &= \rho_\sigma(x_1, \dots, x_N) \\ &= (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)}), \end{aligned}$$

onde $x_i = v_i + \lambda w_i$ para todo $i = 1, \dots, N$. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(v + \lambda w) &= (v_{\sigma^{-1}(1)} + \lambda w_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(N)} + \lambda w_{\sigma^{-1}(N)}) \\ &= (v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(N)}) + \lambda (w_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, w_{\sigma^{-1}(N)}) \\ &= \rho_\sigma(v) + \lambda \rho_\sigma(w), \end{aligned}$$

implicando que ρ_σ é linear para todo $\sigma \in S_N$. Agora, sejam $\sigma, \eta \in S_N$ e $v = (v_1, \dots, v_N) \in V^N$. Então

$$\begin{aligned} \phi(\sigma, \phi(\eta, v)) &= \phi(\sigma, (v_{\eta^{-1}(1)}, \dots, v_{\eta^{-1}(N)})) \\ &= \phi(\sigma, (y_1, \dots, y_N)) \\ &= (y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(N)}), \end{aligned}$$

onde $y_i = v_{\eta^{-1}(i)}$ para todo $i = 1, \dots, N$. Assim, $y_{\sigma^{-1}(i)} = v_{\eta^{-1}(\sigma^{-1}(i))} = v_{(\sigma\eta)^{-1}(i)}$, de onde segue que

$$\phi(\sigma, \phi(\eta, v)) = (v_{(\sigma\eta)^{-1}(1)}, \dots, v_{(\sigma\eta)^{-1}(N)}) = \phi((\sigma\eta), v).$$

Portanto, ϕ é uma ação de S_N em V^N .

Observação 1.1.15. Sejam Γ um grupo de Lie linear agindo nos espaços vetoriais reais de dimensão finita V e W por meio das ações $\phi_1 : \Gamma \times V \rightarrow V$ e $\phi_2 : \Gamma \times W \rightarrow W$, respectivamente. Podemos definir uma ação natural de Γ em $V \times W$ dada pela ação diagonal

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma \times V \times W &\longrightarrow V \times W \\ (\gamma, (v, w)) &\longmapsto (\phi_1(\gamma, v), \phi_2(\gamma, w)) \end{aligned}$$

Sabemos que se $\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$ e $\alpha = \{c_1, \dots, c_m\}$ são bases de V e W , respectivamente, então

$$\Omega = \{(b_1, 0_w), \dots, (b_n, 0_w), (0_v, c_1), \dots, (0_v, c_m)\}$$

é uma base de $V \times W$, em que 0_v é o vetor nulo de V e 0_w é o vetor nulo de W . Considerando a base Ω e as respectivas representações

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma &\longrightarrow GL(V) & \omega : \Gamma &\longrightarrow GL(W) \\ \gamma &\longmapsto \rho_\gamma & \gamma &\longmapsto \omega_\gamma \end{aligned} \quad \text{e}$$

de Γ em V e em W , é possível mostrar que a matriz de representação de $\gamma \in \Gamma$ em $V \times W$ é da forma

$$[\Psi_\gamma] = \begin{bmatrix} [\rho_\gamma] & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & [\omega_\gamma] \end{bmatrix},$$

onde $[\rho_\gamma]$ e $[\omega_\gamma]$ são as matrizes de representação de γ em V e em W , respectivamente, e $0_{n \times m}$ e $0_{m \times n}$ denotam matrizes nulas. Evidentemente, essa observação se estende ao caso em que Γ age em um número finito arbitrário de espaços vetoriais.

Exemplo 1.1.16. Seja $O(k)$ o grupo ortogonal k -dimensional agindo em V por meio da ação dada em (1.7). A aplicação definida por

$$\begin{aligned} \varphi : O(k)^N \times V^N &\longrightarrow V^N \\ ((\ell_1, \dots, \ell_N), v) &\longmapsto (\ell_1 v_1, \dots, \ell_N v_N) \end{aligned}$$

é uma ação de $O(k)^N$ em V^N , onde $v = (v_1, \dots, v_N)$. De fato, como cada função coordenada de φ corresponde à ação de $O(k)$ em V dada em (1.7), segue que cada uma delas é contínua. Logo, φ é contínua. Denotando por $I_k \in O(k)$ a matriz identidade, temos que

$$\varphi((I_k, \dots, I_k), v) = (I_k v_1, \dots, I_k v_N) = (v_1, \dots, v_N) = v,$$

para todo $v = (v_1, \dots, v_N) \in V^N$. Agora, dado $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N) \in O(k)^N$, a linearidade da aplicação

$$\begin{aligned} \eta_\ell : V^N &\longrightarrow V^N \\ (v_1, \dots, v_N) &\longmapsto (\ell_1 v_1, \dots, \ell_N v_N) \end{aligned}$$

segue da linearidade da representação $\rho_{\ell_i} : V \rightarrow V$ de $\ell_i \in O(k)$, como mostrado em (1.8). Ainda, dados $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N), \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in O(k)^N$ e $v = (v_1, \dots, v_N) \in V^N$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(\ell, \varphi(\xi, v)) &= \varphi(\ell, (\xi_1 v_1, \dots, \xi_N v_N)) \\
&= (\ell_1 \xi_1 v_1, \dots, \ell_N \xi_N v_N) \\
&= (\ell \xi, v),
\end{aligned}$$

onde $\ell \xi = (\ell_1 \xi_1, \dots, \ell_N \xi_N)$ e $\ell_i \xi_i$ denota o produto de matrizes em $O(k)$, para cada $i = 1, \dots, N$. Portanto, φ é uma ação de $O(k)^N$ em V^N . Pelo Exemplo 1.1.12 temos que a matriz de representação de $\ell_i \in O(k)$ coincide com ℓ_i , para todo i . Logo, pela observação anterior, a matriz de representação de $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N)$ em V^N é dada por

$$[\eta \ell] = \begin{bmatrix} \ell_1 & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & \ell_2 & \cdots & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & \ell_N \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Antes de finalizarmos essa subseção, vamos descrever em termos matriciais a representação $\rho_\sigma : V^N \rightarrow V^N$ de cada $\sigma \in S_N$ segundo a ação dada em (1.10). Começemos com o caso particular em que $N = 3$ e $V = \mathbb{R}^2$, ou seja, o grupo S_3 das permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$ age em $(\mathbb{R}^2)^3$ por meio da ação (1.10).

Considere $\sigma = (123) \in S_3$ a permutação tal que $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ e $\sigma(3) = 1$. Pelo homomorfismo definido em (1.4), podemos identificar σ com a matriz de permutação

$$A^\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Seja $C = \{e_1, e_2\}$ a base canônica de V e considere a base ordenada $\beta = \{b_1^1, b_1^2, b_2^1, b_2^2, b_3^1, b_3^2\}$ de V^3 em que $b_1^1 = (e_1, 0, 0)$, $b_1^2 = (e_2, 0, 0)$, $b_2^1 = (0, e_1, 0)$, $b_2^2 = (0, e_2, 0)$, $b_3^1 = (0, 0, e_1)$ e $b_3^2 = (0, 0, e_2)$, onde a coordenada nula denota o vetor nulo $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Como a representação $\rho_\sigma : V^3 \rightarrow V^3$ definida por

$$\rho_\sigma(v_1, v_2, v_3) = (v_{\sigma^{-1}(1)}, v_{\sigma^{-1}(2)}, v_{\sigma^{-1}(3)})$$

é linear, podemos determinar sua matriz $[\rho_\sigma]$ com relação à base β . Assim, temos:

$$\rho_\sigma(b_1^1) = (0, e_1, 0) = b_2^1; \quad \rho_\sigma(b_1^2) = (0, e_2, 0) = b_2^2;$$

$$\rho_\sigma(b_2^1) = (0, 0, e_1) = b_3^1; \quad \rho_\sigma(b_2^2) = (0, 0, e_2) = b_3^2;$$

$$\rho_\sigma(b_3^1) = (e_1, 0, 0) = b_1^1; \quad \rho_\sigma(b_3^2) = (e_2, 0, 0) = b_1^2,$$

uma vez que $\sigma^{-1}(1) = 3$, $\sigma^{-1}(2) = 1$ e $\sigma^{-1}(3) = 2$. Portanto, a matriz de ρ_σ com relação à base β é

$$[\rho_\sigma] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Denotando por $0_{2 \times 2}$ a matriz nula de ordem 2 e por I_2 a matriz identidade de ordem 2, concluímos que

$$[\rho_\sigma] = (B_{ij}),$$

onde cada entrada B_{ij} é uma matriz de ordem 2 tal que

$$B_{ij} = \begin{cases} I_2, & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0_{2 \times 2}, & \text{se } i \neq \sigma(j) \end{cases},$$

para todo $i, j = 1, 2, 3$. Em outras palavras, a matriz de representação de $\sigma = (123)$ segue o mesmo padrão de formação de sua matriz associada A^σ dada em (1.12), onde a entrada nula é substituída pela matriz nula $0_{2 \times 2}$ e a entrada 1 é substituída pela matriz identidade I_2 .

De um modo geral, seja $V = \mathbb{R}^k$ para algum inteiro $k \geq 1$ e considere sua base canônica $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_k\}$. Construa a base ordenada

$$\beta = \{b_1^1, \dots, b_1^k, b_2^1, \dots, b_2^k, \dots, b_N^1, \dots, b_N^k\}$$

de V^N em que

$$b_r^t = (\underbrace{0_k, \dots, 0_k}_{r-1 \text{ vezes}}, e_t, 0_k, \dots, 0_k),$$

com cada coordenada nula representando o vetor nulo de \mathbb{R}^k . Assim, se S_N age em V^N por meio da ação (1.10), então a matriz de representação $[\rho_\sigma]$ de $\sigma \in S_N$ com relação à base β é uma matriz de ordem kN dada por

$$[\rho_\sigma] = (B_{ij}), \tag{1.13}$$

onde cada entrada B_{ij} é uma matriz de ordem k tal que

$$B_{ij} = \begin{cases} I_k, & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0_{k \times k}, & \text{se } i \neq \sigma(j) \end{cases}.$$

Tal descrição de ρ_σ será utilizada no Capítulo 2.

1.1.2 Integral de Haar

Nesta subseção, mostramos que todo grupo de Lie linear compacto $\Gamma \subset GL(n)$ pode ser identificado com um subgrupo fechado do grupo ortogonal $O(n)$. Tal identificação é feita na Proposição 1.1.18 usando a integral de Haar, uma forma de integração invariante sob translações por elementos de Γ .

Definição 1.1.17. *Seja $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um grupo de Lie linear Γ . A operação $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \in \mathbb{R}$ é uma integral de Haar se satisfaz as seguintes três propriedades:*

(i) *Linearidade: Para $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} (\lambda f(\gamma) + g(\gamma)) = \lambda \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) + \int_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma);$$

(ii) *Positividade: Se $f(\gamma) \geq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \geq 0;$$

(iii) *Invariância por translação: Para cada $\delta \in \Gamma$ fixado,*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma).$$

Em [23], o autor mostra que se Γ for compacto e $f(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$ é finita, sendo a integral chamada normalizada se $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = 1$. Neste caso, a integral de Haar é única. A compacidade de Γ também assegura que a integral de Haar é invariante por translações à direita, ou seja, para cada $\delta \in \Gamma$ fixado temos que

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma).$$

Para mais detalhes sobre a integral de Haar, sugerimos [25].

O seguinte resultado mostra que a existência da integral de Haar para grupos de Lie compactos conduz a uma ação por meio de transformações lineares ortogonais.

Proposição 1.1.18. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial V e seja $[\rho_\gamma]$ a matriz de representação de $\gamma \in \Gamma$ em V com relação a uma base ortonormal de V . Então existe um produto interno em V tal que, para todo $\gamma \in \Gamma$, $[\rho_\gamma]$ é uma matriz ortogonal.*

Demonstração: Sejam $\phi : \Gamma \times V \rightarrow V$ uma ação de Γ em V e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em V . Para cada $v, w \in V$, considere a função

$$f_{v,w} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma \longmapsto \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle,$$

onde $\rho_\gamma : V \rightarrow V$ é o operador linear definido por $\rho_\gamma(v) = \phi(\gamma, v)$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Note que $f_{v,w}(\gamma) = \langle g_v(\gamma), g_w(\gamma) \rangle$, em que $g_v, g_w : \Gamma \rightarrow V$ são as aplicações definidas por $g_v(\gamma) = \rho_\gamma(v)$ e $g_w(\gamma) = \rho_\gamma(w)$. Sabemos que ϕ é contínua, bem como sua restrição ao conjunto $\Gamma \times \{v\}$. A aplicação $h_v : \Gamma \rightarrow \Gamma \times \{v\}$ definida por $h_v(\gamma) = (\gamma, v)$ é contínua, pois a primeira função coordenada é a identidade e a segunda função coordenada é constante. Logo, $g_v = \phi \circ h_v$ é contínua, pois é a composição de aplicações contínuas. Como $v \in V$ é arbitrário, $g_w = \phi \circ h_w$ também é contínua. Sendo o produto interno uma função contínua, segue que $f_{v,w}$ é contínua. Assim, fica bem definida a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle v, w \rangle_\Gamma = \int_{\gamma \in \Gamma} f_{v,w}(\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle. \quad (1.14)$$

Provemos agora que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ define um produto interno em V . De fato, sejam $v, u, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
\langle \lambda v + u, w \rangle_\Gamma &= \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_\gamma(\lambda v + u), \rho_\gamma(w) \rangle \\
&= \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_\gamma(\lambda v) + \rho_\gamma(u), \rho_\gamma(w) \rangle \\
&= \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \lambda \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle + \langle \rho_\gamma(u), \rho_\gamma(w) \rangle \\
&= \lambda \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle + \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_\gamma(u), \rho_\gamma(w) \rangle \\
&= \lambda \langle v, w \rangle_\Gamma + \langle u, w \rangle_\Gamma.
\end{aligned}$$

Como $\langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle = \langle \rho_\gamma(w), \rho_\gamma(v) \rangle$, segue também que $\langle v, w \rangle_\Gamma = \langle w, v \rangle_\Gamma$. Por fim, se $v \neq 0$, então $\rho_\gamma(v) \neq 0$, uma vez que ρ_γ é inversível. Da positividade da integral, obtemos

$$\langle v, v \rangle_\Gamma = \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(v) \rangle > 0.$$

Agora, como Γ é compacto, a integral de Haar é invariante por translações à direita. Assim, para cada $\delta \in \Gamma$ fixado temos

$$\begin{aligned}
\langle v, w \rangle_\Gamma &= \int_{\gamma \in \Gamma} f_{v,w}(\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f_{v,w}(\gamma\delta) = \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_{\gamma\delta}(v), \rho_{\gamma\delta}(w) \rangle \\
&= \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_\gamma(\rho_\delta(v)), \rho_\gamma(\rho_\delta(w)) \rangle = \langle \rho_\delta(v), \rho_\delta(w) \rangle_\Gamma.
\end{aligned}$$

Como δ é arbitrário, $\langle v, w \rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle_\Gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Como V é um espaço vetorial de dimensão finita, temos que

$$\langle v, w \rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle_\Gamma = \langle v, \rho_\gamma^* \circ \rho_\gamma(w) \rangle_\Gamma,$$

para todo $v, w \in V$, onde ρ_γ^* é o operador adjunto de ρ_γ . Logo $\rho_\gamma^* \circ \rho_\gamma$ é o operador identidade, implicando que $[\rho_\gamma^*][\rho_\gamma] = I_n$. Pelo fato de V ser um espaço vetorial real, segue que $[\rho_\gamma^*] = [\rho_\gamma]^t$, onde t representa a transposta da matriz. Portanto, $[\rho_\gamma]^t[\rho_\gamma] = I_n$, ou seja, $[\rho_\gamma]$ é uma matriz ortogonal, para todo $\gamma \in \Gamma$. ■

Lembremos que em todo o texto, V denota um espaço vetorial real de dimensão finita e Γ denota um grupo de Lie linear, que por um abuso de terminologia vamos chamar apenas de grupo de Lie. Também vamos usar a notação $\gamma \cdot v$ para representar a ação linear $\phi : \Gamma \times V \rightarrow V$ de Γ em V da Definição 1.1.9.

1.2 Irredutibilidade

O estudo da ação de um grupo de Lie compacto Γ em um espaço vetorial V pode ser feito por meio de uma decomposição de V em uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis. Nesta seção, descrevemos as propriedades básicas dessa decomposição e mostramos que ela sempre existe. Em geral, tal decomposição não é única, mas existem condições que garantem a unicidade.

Definição 1.2.1. *Seja Γ um grupo de Lie agindo em V .*

- (i) *Um subespaço $W \subseteq V$ é Γ -invariante se $\gamma \cdot w \in W$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $w \in W$.*
- (ii) *Um subespaço vetorial $W \subseteq V$ é Γ -irredutível se ele for Γ -invariante e os seus únicos subespaços Γ -invariantes forem $\{0\}$ e W .*

Um exemplo simples para a definição anterior pode ser visto considerando $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ agindo em $V = \mathbb{R}^2$ como $1 \cdot (x, y) = (x, y)$ e $-1 \cdot (x, y) = (-x, -y)$. Vejamos que o subespaço vetorial

$$W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$$

é \mathbb{Z}_2 -irredutível. De fato, se $(x, 0) \in W$, então $-1 \cdot (x, 0) = (-x, 0) \in W$ e, assim, W é \mathbb{Z}_2 -invariante. Como W é unidimensional, segue que não existe subespaço \mathbb{Z}_2 -invariante de W distinto de $\{0\}$ ou W . Portanto, W é \mathbb{Z}_2 -irredutível.

Uma das principais características das ações de um grupo de Lie compacto Γ é que subespaços Γ -invariantes sempre admitem um complementar Γ -invariante.

Proposição 1.2.2. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e $W \subseteq V$ um subespaço Γ -invariante. Então existe um subespaço Γ -invariante $\mathcal{Z} \subseteq V$ tal que*

$$V = W \oplus \mathcal{Z}.$$

Demonstração: Para cada $\gamma \in \Gamma$, considere $\rho_\gamma : V \rightarrow V$ o operador linear definido por $\rho_\gamma(v) = \gamma \cdot v$. Como Γ é compacto, segue da demonstração da Proposição 1.1.18 que existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\langle v, w \rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(w) \rangle_\Gamma,$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v, w \in V$. Seja $W \subseteq V$ um subespaço Γ -invariante. Por [4, Proposição 6.3.4] segue que $V = W \oplus W^\perp$, onde

$$W^\perp = \{v \in V; \langle v, w \rangle_\Gamma = 0, \forall w \in W\}.$$

Tomando $\mathcal{Z} = W^\perp$, precisamos provar que W^\perp é Γ -invariante. De fato, sejam $v \in W^\perp$, $w \in W$ e $\gamma \in \Gamma$. Então,

$$\langle \rho_\gamma(v), w \rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma(\rho_{\gamma^{-1}}(w)) \rangle_\Gamma = \langle v, \rho_{\gamma^{-1}}(w) \rangle_\Gamma = 0,$$

pois como W é Γ -invariante segue que $\rho_{\gamma^{-1}}(w) = \gamma^{-1} \cdot w \in W$. Logo, $\langle \rho_\gamma(v), w \rangle_\Gamma = 0$ para todo $w \in W$, de onde concluímos que $\gamma \cdot v = \rho_\gamma(v) \in W^\perp$. Portanto, W^\perp é Γ -invariante. ■

Segue do resultado anterior que V pode ser escrito como uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis. Mais especificamente, temos:

Corolário 1.2.3. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existem subespaços Γ -irredutíveis V_1, \dots, V_s de V tais que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$.*

Demonstração: Podemos assumir V um espaço vetorial não nulo. Se V for Γ -irredutível, então $V_1 = V$ e o resultado está provado. Se não, tome $V_1 \subset V$ um subespaço não nulo Γ -invariante de menor dimensão entre todos os subespaços Γ -invariantes de V não nulos. Obviamente, V_1 é Γ -irredutível. Pela Proposição 1.2.2, existe um subespaço Γ -invariante \mathcal{Z} de V tal que

$$V = V_1 \oplus \mathcal{Z}.$$

Se \mathcal{Z} for Γ -irredutível, então o resultado está provado. Se não, tome $V_2 \subset \mathcal{Z}$ um subespaço não nulo Γ -invariante de menor dimensão entre todos os subespaços Γ -invariantes de \mathcal{Z} não nulos. Como $\mathcal{Z} \subset V$ é Γ -invariante, então V_2 é um subespaço Γ -invariante de V , que é claramente Γ -irredutível. Pela Proposição 1.2.2, existe um subespaço Γ -invariante $\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}$ tal que

$$V = V_1 \oplus \mathcal{Z} = V_1 \oplus V_2 \oplus \mathcal{Z}_1.$$

Se \mathcal{Z}_1 for Γ -irredutível, então provamos o resultado. Se não, repetimos o processo. Como V é um espaço vetorial de dimensão finita, tal processo deve terminar em um número finito de passos, produzindo a decomposição desejada de V em subespaços Γ -irredutíveis. ■

Em geral, a decomposição de V como no corolário anterior não é única. Isso pode ser visto na própria demonstração, uma vez que a escolha do complementar Γ -invariante na Proposição 1.2.2 não é única. O próximo exemplo também ilustra esse fato.

Exemplo 1.2.4. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$. Consideramos a ação de $SO(2)$ em V definida pela multiplicação de matrizes

$$R_\theta \cdot A = R_\theta A,$$

para todo $R_\theta \in SO(2)$ e $A \in V$, com $\theta \in [0, 2\pi)$. Os subespaços vetoriais

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

são $SO(2)$ -irredutíveis. De fato, dados $R_\theta \in SO(2)$, $A \in V_1$ e $B \in V_2$, temos

$$R_\theta \cdot A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) & 0 \\ a \sin(\theta) + b \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \in V_1$$

e

$$R_\theta \cdot B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \cos(\theta) - d \sin(\theta) \\ 0 & c \sin(\theta) + d \cos(\theta) \end{bmatrix} \in V_2.$$

Assim, V_1 e V_2 são subespaços $O(2)$ -invariantes. Agora note que os únicos subespaços de V_1 são os triviais e os da forma

$$W_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ \lambda a & 0 \end{bmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad V_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}; b \in \mathbb{R} \right\},$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado. Dados $R_\theta \in SO(2)$ e $A \in W_\lambda$ não nulo, temos

$$R_\theta \cdot A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ \lambda a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos(\theta) - \lambda \text{sen}(\theta)) & 0 \\ a(\text{sen}(\theta) + \lambda \cos(\theta)) & 0 \end{bmatrix},$$

que não pertence a W_λ se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$. De fato, como $a \neq 0$, $a(\text{sen}(\theta) + \lambda \cos(\theta)) = \lambda a(\cos(\theta) - \lambda \text{sen}(\theta))$ se, e somente se, $(1 + \lambda^2)\text{sen}(\theta) = 0$, ou seja, $\text{sen}(\theta) = 0$. De modo análogo, dado $B \in W$ não nula,

$$R_\theta \cdot B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \text{sen}(\theta) & 0 \\ b \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \notin W$$

para $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$. Logo, W_λ e W não são subespaços $SO(2)$ -invariantes de V_1 . Portanto, V_1 é $SO(2)$ -irreduzível. De forma análoga, podemos mostrar que V_2 é $SO(2)$ -irreduzível. Como $V = V_1 \oplus V_2$, temos uma decomposição de $M_2(\mathbb{R})$ como no Corolário 1.2.3.

Agora, o subespaço de V dado por

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 8c & c \\ 8d & d \end{bmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

é também $SO(2)$ -irreduzível e $V = V_1 \oplus V_3$. Portanto, a decomposição de V em subespaços $SO(2)$ -irreduzíveis não é única.

Nosso próximo objetivo é encontrar condições sob as quais a decomposição de V como no Corolário 1.2.3 é única. Para tanto, precisamos de dois conceitos prévios:

Definição 1.2.5. *Sejam V e W espaços vetoriais reais e Γ um grupo de Lie agindo em V e W por meio das ações $\phi(\gamma, v) = \gamma \cdot v$ e $\psi(\gamma, w) = \gamma \odot w$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $v \in V$ e $w \in W$.*

(i) *Dizemos que uma aplicação $G : V \rightarrow W$ é Γ -equivariante, ou comuta com Γ , se*

$$G(\gamma \cdot v) = \gamma \odot G(v),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in V$. Nesse caso, $\gamma \in \Gamma$ é chamado de simetria de G .

(ii) *Dizemos que V e W são Γ -isomorfos se existir um isomorfismo linear $A : V \rightarrow W$ que é Γ -equivariante. Tal aplicação A é chamada de Γ -isomorfismo.*

O ponto crucial da não unicidade da decomposição de V é a existência de subespaços Γ -irreduzíveis que são Γ -isomorfos. Veja no exemplo anterior que V_2 e V_3 são subespaços $SO(2)$ -isomorfos via o isomorfismo linear $T : V_2 \rightarrow V_3$ dado por

$$T \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8c & c \\ 8d & d \end{pmatrix},$$

para $c, d \in \mathbb{R}$. Cálculos diretos mostram que

$$T(R_\theta \cdot A) = R_\theta \cdot T(A)$$

para todo $R_\theta \in SO(2)$ e $A \in V_2$.

No entanto, podemos contornar essa “repetição” de subespaços irredutíveis combinando todos os subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos entre si. Para isso, dependemos dos dois próximos lemas.

Lema 1.2.6. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em um \mathbb{R} -espaço vetorial W . Suponha que*

$$W = \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha},$$

onde cada \mathcal{U}_{α} é um subespaço Γ -invariante e Γ -isomorfo a algum subespaço Γ -irredutível fixado \mathcal{U} de W . Então todo subespaço Γ -irredutível de W é Γ -isomorfo a \mathcal{U} .

Demonstração: Mostremos primeiramente que α percorre um conjunto finito de índices, ou seja,

$$W = \mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\alpha_s} \quad (1.15)$$

é uma soma direta finita de subespaços \mathcal{U}_{α} nas condições do lema, com $\mathcal{U} \subseteq W$ um subespaço Γ -irredutível fixado. De fato, seja $r = \dim_{\mathbb{R}} W$. Suponha que temos encontrado um subespaço

$$W_1 = \mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\alpha_{t-1}} \subseteq W.$$

Se $W_1 = W$, então segue o resultado. Se não, existe $\mathcal{U}_{\alpha_t} \subset W$ tal que $\mathcal{U}_{\alpha_t} \not\subseteq W_1$. Como $\mathcal{U}_{\alpha_t} \cap W_1 \subset \mathcal{U}_{\alpha_t}$ é Γ -invariante e \mathcal{U}_{α_t} é Γ -irredutível, então $\mathcal{U}_{\alpha_t} \cap W_1 = \{0\}$. Portanto, a soma $W_1 + \mathcal{U}_{\alpha_t}$ é uma soma direta e temos um subespaço

$$W_2 = \mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\alpha_t} \subseteq W.$$

Se $W_2 = W$, segue o resultado. Caso contrário, repetimos o processo. Como W é um espaço vetorial de dimensão finita r , concluímos que o processo tem um número finito de etapas e que podemos decompor W como em (1.15), com $s \leq r$.

Agora mostramos que se X é um subespaço Γ -irredutível de W , então X é Γ -isomorfo a \mathcal{U} . Se $X = \mathcal{U}_{\alpha_i}$ para algum $i \in \{1, \dots, s\}$, então claramente X é Γ -isomorfo a \mathcal{U} . Caso contrário, existe $t \leq s$ tal que

$$X \not\subseteq \mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\alpha_{t-1}} \quad \text{e} \quad X \subset \mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\alpha_t} \quad (1.16)$$

e, além disso, este t é único. De fato, como $X \neq \mathcal{U}_{\alpha_1}$ e \mathcal{U}_{α_1} é Γ -irredutível (pois é Γ -isomorfo a \mathcal{U}), temos que $X \not\subseteq \mathcal{U}_{\alpha_1}$. Se $X \subset \mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2}$, então a condição em (1.16) é válida. Se não, verificamos se $X \subset \mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_3}$. Se tal inclusão for válida, a prova da afirmação está terminada. Caso contrário, repetimos o processo até obter (1.16), pois por (1.15) esse procedimento tem fim.

A partir disso e da Γ -irredutibilidade de X , como $X \cap (\mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\alpha_{t-1}}) \subset X$ é Γ -invariante, segue que

$$X \cap (\mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\alpha_{t-1}}) = \{0\}. \quad (1.17)$$

Considere a projeção

$$\pi : \mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\alpha_t} \rightarrow \mathcal{U}_{\alpha_t}$$

definida por $\pi(x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_t}) = x_{\alpha_t}$ e $\pi_X = \pi|_X : X \rightarrow \pi(X)$ a restrição de π ao subespaço X . A aplicação π_X é injetora, pois se $\pi_X(x) = 0$ para $x = x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_t} \in X$, então $x_{\alpha_t} = 0$ e, assim,

$$x = x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_{t-1}} \in X \cap (\mathcal{U}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{U}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\alpha_{t-1}}).$$

Por (1.17), segue que $x = 0$. Logo, π_X é um isomorfismo linear. Como a ação de Γ em W é linear, temos para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in X$ que

$$\begin{aligned}\pi_X(\gamma \cdot x) &= \pi_X(\gamma \cdot (x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_t})) \\ &= \pi_X(\gamma \cdot x_{\alpha_1} + \cdots + \gamma \cdot x_{\alpha_t}) \\ &= \gamma \cdot x_{\alpha_t} \\ &= \gamma \cdot \pi_X(x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_t}) \\ &= \gamma \cdot \pi_X(x),\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue pois cada subespaço \mathcal{U}_{α_i} é Γ -invariante, $i = 1, \dots, t$. Portanto, π_X é Γ -equivariante, ou seja, π_X é um Γ -isomorfismo de X sobre $\pi(X)$. Assim, $\pi_X(X)$ é um subespaço Γ -irredutível de W . Por (1.16), temos que X é não nulo. Logo, $\pi_X(X) \subset \mathcal{U}_{\alpha_t}$ é não nulo e pela Γ -irredutibilidade de \mathcal{U}_{α_t} segue que $\pi_X(X) = \mathcal{U}_{\alpha_t}$. Portanto, X é Γ -isomorfo a \mathcal{U}_{α_t} e, conseqüentemente, a \mathcal{U} . ■

Lema 1.2.7. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Sejam X e Y subespaços Γ -invariantes de V tais que não existem dois subespaços Γ -irredutíveis não nulos $W \subseteq X$ e $Z \subseteq Y$ que são Γ -isomorfos. Então*

(a) $X \cap Y = \{0\}$;

(b) Se $W \subseteq X \oplus Y$ é Γ -irredutível, então $W \subseteq X$ ou $W \subseteq Y$.

Demonstração: (a) Como X e Y são Γ -invariantes, então $X \cap Y$ é um subespaço Γ -invariante de V e, portanto, a ação de Γ restrita a $X \cap Y$ está bem definida. Pelo Corolário 1.2.3, $X \cap Y$ pode ser escrito como uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis. No entanto, qualquer subespaço não nulo Γ -irredutível Z de $X \cap Y$ estaria contido em X e em Y , o que contradiz a hipótese inicial pois Z é Γ -isomorfo a Z . Portanto, $X \cap Y = \{0\}$.

(b) Seja $W \subseteq X \oplus Y$ um subespaço Γ -irredutível. Como X , Y e W são Γ -invariantes, então $X \cap W$ e $Y \cap W$ são subespaços Γ -invariantes de W e a irredutibilidade de W implica que $W \cap X = \{0\}$ ou $W \subseteq X$, e $W \cap Y = \{0\}$ ou $W \subseteq Y$. Suponhamos que $W \not\subseteq X$ e $W \not\subseteq Y$. Então $W \cap X = W \cap Y = \{0\}$. Considere

$$\pi_X : X \oplus Y \rightarrow X \quad \text{e} \quad \pi_Y : X \oplus Y \rightarrow Y$$

as projeções canônicas sobre X e sobre Y , respectivamente, e tome $w = x + y \in W$ tal que $\pi_X(w) = 0$. Então $x = 0$, implicando que $w = y \in W \cap Y = \{0\}$, ou seja, $w = 0$. Portanto, $\pi_{X|_W} : W \rightarrow \pi(W)$ é um isomorfismo linear. Ainda,

$$\pi_{X|_W}(\gamma \cdot w) = \pi_X(\gamma \cdot (x + y)) = \pi_X(\gamma \cdot x + \gamma \cdot y) = \gamma \cdot x = \gamma \cdot \pi_X(x + y) = \gamma \cdot \pi_{X|_W}(w), \quad (1.18)$$

para todo $w \in W$ e $\gamma \in \Gamma$. Assim, W é Γ -isomorfo a $\pi_X(W) \subseteq X$. De modo análogo, podemos mostrar que W é Γ -isomorfo a $\pi_Y(W) \subseteq Y$, ou seja, X e Y possuem subespaços não nulos Γ -irredutíveis que são Γ -isomorfos entre si, o que é um absurdo. Portanto, $W \subseteq X$ ou $W \subseteq Y$. ■

O próximo resultado garante a existência das componentes isotópicas cujo nome reflete o fato de que todos os subespaços Γ -irredutíveis de cada componente têm o mesmo tipo de isomorfismo.

Teorema 1.2.8. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V .*

- (a) *A menos de Γ -isomorfismos, existe um número finito de subespaços distintos Γ -irredutíveis de V , denotados por $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_s$.*
- (b) *Defina W_k como a soma de todos os subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos a \mathcal{U}_k . Então*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s. \quad (1.19)$$

Demonstração: Se V é Γ -irredutível, o teorema está provado. Suponha então que V não é Γ -irredutível e tome um subespaço Γ -irredutível $\mathcal{U}_1 \subset V$ cuja existência é garantida pelo Corolário 1.2.3. Seja W'_1 a soma de todos os subespaços Γ -invariantes de V que são Γ -isomorfos a \mathcal{U}_1 . Se $W'_1 = V$, provamos o resultado. Se $W'_1 \neq V$, como W'_1 é Γ -invariante, existe um complemento Γ -invariante \mathcal{Z} de W'_1 (Proposição 1.2.2). Logo, $V = W'_1 \oplus \mathcal{Z}$. Repetimos o processo em \mathcal{Z} , ou seja, consideramos $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{Z}$ um subespaço Γ -irredutível e tomamos W'_2 como a soma de todos os subespaços de \mathcal{Z} que são Γ -isomorfos a \mathcal{U}_2 . Se $W'_2 = \mathcal{Z}$ temos $V = W'_1 \oplus W'_2$. Caso contrário, tomamos um complemento Γ -invariante \mathcal{Z}_1 de W'_2 tal que $\mathcal{Z} = W'_2 \oplus \mathcal{Z}_1$ e repetimos o processo em \mathcal{Z}_1 . Como a dimensão de V é finita, esse processo termina com

$$V = W'_1 \oplus \dots \oplus W'_t, \quad (1.20)$$

para um determinado $t \in \mathbb{N}$, onde cada W'_k é a soma de um conjunto de subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos a um subespaço Γ -irredutível \mathcal{U}_k de V tal que se $k \neq j$, então \mathcal{U}_k não é Γ -isomorfo a \mathcal{U}_j .

Ainda não sabemos se W'_k é a soma W_k de todos os subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos a \mathcal{U}_k , pois definimos W'_k em \mathcal{Z} . Claramente, $W'_k \subset W_k$. Para mostrar que $W'_k = W_k$, afirmamos primeiramente que todo subespaço Γ -irredutível $\mathcal{U} \subset V$ é Γ -isomorfo a \mathcal{U}_j , para algum $j \in \{1, \dots, t\}$. Com efeito, se $\mathcal{U} \subset V$ é Γ -irredutível, pelo item (b) do Lema 1.2.7 segue que

$$\mathcal{U} \subseteq W'_k$$

para algum $k = 1, \dots, t$. Pelo Lema 1.2.6, \mathcal{U} é Γ -isomorfo a \mathcal{U}_k , o que prova o item (a) do teorema. Além disso, como todo subespaço Γ -irredutível de V está contido em W'_k para algum k , segue que $W_k \subset W'_k$, comprovando a igualdade. Portanto, $t = s$ e a decomposição de V dada em (1.20) implica na decomposição (1.19), provando o item (b) do teorema. ■

Os subespaços W_k do teorema anterior são chamados de componentes isotópicas de V do tipo \mathcal{U}_k segundo a ação de Γ , e a decomposição (1.19) é chamada de decomposição isotópica de V , a qual é única por construção.

Observação 1.2.9. Pela primeira parte da demonstração do Lema 1.2.6 segue que cada componente isotópica W_k pode ser escrita como uma soma direta finita

$$W_k = V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_r},$$

onde os V_{k_j} são subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos a \mathcal{U}_k , com $k \in \{1, \dots, s\}$.

Para nossos propósitos, faz-se necessário entender a estrutura das transformações lineares que são Γ -equivariantes. Em termos matriciais, a decomposição (1.19) juntamente com o Teorema 1.2.14 nos permitem escrever tais aplicações em uma forma diagonal em blocos. Antes, definimos o seguinte tipo de ação:

Definição 1.2.10. *Uma ação de um grupo Γ em um espaço vetorial V é absolutamente irredutível se os únicos operadores lineares em V Γ -equivariantes são os múltiplos escalares do operador identidade.*

Exemplo 1.2.11. Considere a ação de $\Gamma = O(2)$ em $V = \mathbb{R}^2$ definida como

$$R_\theta \cdot (x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \kappa \cdot (x, y) = (x, -y),$$

em que $R_\theta \in SO(2)$ e κ é a matriz de reflexão dada em (1.3). Afirmamos que essa ação é absolutamente irredutível. De fato, seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz com relação a uma base fixada de \mathbb{R}^2 é da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se A é $O(2)$ -equivariante, então a matriz A comuta com R_θ , ou seja,

$$R_\theta \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} R_\theta \tag{1.21}$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Realizando o produto, obtemos $c = -b$ e $d = a$. Segue então que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \tag{1.22}$$

Como A é $O(2)$ -equivariante, a matriz (1.22) também comuta com κ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

implicando que $b = 0$. Logo, $A = aI_2$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Portanto, A é um múltiplo escalar do operador identidade e, assim, a ação de $O(2)$ em \mathbb{R}^2 é absolutamente irredutível.

Lema 1.2.12. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Se a ação de Γ em V é absolutamente irredutível, então V é Γ -irredutível.*

Demonstração: Suponha que V não seja Γ -irredutível. Então existe um subespaço W de V que é Γ -invariante tal que $W \neq \{0\}$ e $W \neq V$. Seja W^\perp o complemento Γ -invariante de W , que existe pela Proposição 1.2.2. Considere a projeção canônica $\pi : W \oplus W^\perp \rightarrow W$ definida por $\pi(x + y) = x$, onde $x \in W$ e $y \in W^\perp$. Temos que π é linear e, da mesma forma que fizemos em relação à projeção π_X em (1.18), concluímos que π é Γ -equivariante. Além disso, π não é um múltiplo da identidade, pois π é não nula e $\ker(\pi) = W^\perp \neq 0$, uma vez que $W \neq V$. Portanto, a ação de Γ em V não é absolutamente irredutível, o que prova o resultado por contraposição.

■

Lema 1.2.13. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo nos \mathbb{R} -espaços vetoriais U e V e considere $A : U \rightarrow V$ uma transformação linear Γ -equivariante. Se $W \subseteq U$ é um subespaço Γ -irredutível, então $A(W)$ é um subespaço Γ -invariante de V que ou é nulo ou é Γ -isomorfo a W .*

Demonstração: Suponha que Γ aja em U e em V por meio das ações $\phi(\gamma, u) = \gamma \cdot u$ e $\psi(\gamma, v) = \gamma \odot v$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $u \in U$ e $v \in V$. Sejam $z \in A(W)$ e $\gamma \in \Gamma$. Como A é Γ -equivariante,

$$\gamma \odot z = \gamma \odot A(w) = A(\gamma \cdot w),$$

com $w \in W$. Sendo W um subespaço Γ -invariante de U , temos que $\gamma \cdot w \in W$, de onde segue que

$$\gamma \odot z = A(\gamma \cdot w) \in A(W).$$

Portanto, $A(W)$ é um subespaço Γ -invariante de V . Agora note que $\ker(A)$ é um subespaço Γ -invariante de U , pois se $v \in \ker(A)$ e $\gamma \in \Gamma$, então

$$A(\gamma \cdot v) = \gamma \odot A(v) = 0,$$

implicando que $\gamma \cdot v \in \ker(A)$. Assim, $\ker(A) \cap W$ é um subespaço Γ -invariante de W . Como W é Γ -irredutível, segue que $\ker(A) \cap W = W$ ou $\ker(A) \cap W = \{0\}$. No primeiro caso, temos $W \subseteq \ker(A)$, ou seja, $A(W) = \{0\}$. No segundo caso, temos que $A|_W : W \rightarrow V$ é uma transformação linear injetora, pois $\ker(A|_W) = \ker(A) \cap W = \{0\}$. Logo, $A|_W : W \rightarrow A(W)$ é um isomorfismo tal que

$$A|_W(\gamma \cdot w) = A(\gamma \cdot w) = \gamma \odot A(w) = \gamma \odot A|_W(w)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $w \in W$. Portanto, $A(W)$ e W são Γ -isomorfos.

■

O próximo resultado é válido inclusive para as ações que não são absolutamente irredutíveis. No caso em que são, a demonstração é trivial.

Teorema 1.2.14. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e considere a decomposição isotópica de V dada em (1.19). Seja $A : V \rightarrow V$ um operador linear Γ -equivariante. Então $A(W_k) \subseteq W_k$ para todo $k = 1, \dots, s$.*

Demonstração: Fixe $k \in \{1, \dots, s\}$. Pela Observação 1.2.9, temos que $W_k = V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_r}$ onde os V_{k_j} são subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos a um subespaço $\mathcal{U}_k \subset V$ fixado. Pelo Lema 1.2.13 temos que ou $A(V_{k_j}) = \{0\}$ ou $A(V_{k_j})$ é Γ -isomorfo a V_{k_j} . Então ou $A(V_{k_j}) = \{0\}$ ou $A(V_{k_j})$ é Γ -isomorfo a \mathcal{U}_k . Se $A(V_{k_j}) = \{0\}$, então $A(V_{k_j}) \subseteq W_k$. Se $A(V_{k_j})$ é Γ -isomorfo a \mathcal{U}_k , temos que $A(V_{k_j}) \subseteq W_k$, pois $A(V_{k_j})$ é Γ -irredutível. Em ambos os casos, $A(V_{k_j}) \subseteq W_k$ para todo $j = 1, \dots, r$. Pela linearidade de A , segue que

$$A(W_k) = A(V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_r}) = A(V_{k_1}) \oplus \dots \oplus A(V_{k_r}) \subseteq W_k$$

para todo $k = 1, \dots, s$.

■

1.3 Subgrupos de Isotropia e Subespaços de Ponto Fixo

Nesta seção, vamos apresentar duas noções simples usadas para descrever a ação de um grupo em um espaço vetorial: as órbitas e os subgrupos de isotropia. Esses conceitos ajudam a descrever a estrutura das soluções de um sistema de equações diferenciais em presença de simetrias, como veremos nos Capítulos 2 e 3. Vamos mostrar também a existência de subespaços vetoriais invariantes por aplicações Γ -equivariantes, os quais estão naturalmente relacionados aos subgrupos de isotropia de Γ .

Definição 1.3.1. *Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . A órbita da ação de Γ em $x \in V$ é o conjunto*

$$\Gamma_x = \{\gamma \cdot x; \gamma \in \Gamma\}.$$

O subgrupo de isotropia de $x \in V$ é o conjunto

$$\Sigma_x = \{\gamma \in \Gamma; \gamma \cdot x = x\}.$$

Exemplo 1.3.2. Considere a ação padrão de $\Gamma = O(2)$ em $V = \mathbb{R}^2$ definida no Exemplo 1.2.11. Afirmamos que o subgrupo de isotropia de $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto

$$\Sigma_{(1,1)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

De fato, como vimos no Exemplo 1.1.3, uma matriz em $O(2)$ tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a^2 + b^2 = 1$. Por definição, $A \in \Sigma_{(1,1)}$ se

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de onde obtemos $a = 1$ e $b = 0$. De modo análogo, $B \in \Sigma_{(1,1)}$ se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de onde obtemos $a = 0$ e $b = 1$. Assim, as matrizes que fixam o vetor $(1, 1)$ pela ação de $O(2)$ são as matrizes identidade e

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O próximo lema relaciona os subgrupos de isotropia de pontos em uma mesma órbita. Se $\Sigma \subseteq \Gamma$ é um subgrupo e $\gamma \in \Gamma$, então o conjunto

$$\gamma \Sigma \gamma^{-1} = \{\gamma \sigma \gamma^{-1}; \sigma \in \Sigma\}$$

é chamado de subgrupo conjugado a Σ .

Lema 1.3.3. *Pontos na mesma órbita pela ação de Γ possuem subgrupos de isotropia conjugados, ou seja, $\Sigma_{\gamma \cdot x} = \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$.*

Demonstração: Dado $x \in V$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $\sigma \in \Sigma_x$ temos que

$$(\gamma \sigma \gamma^{-1}) \cdot (\gamma \cdot x) = (\gamma \sigma \gamma^{-1} \gamma) \cdot x = (\gamma \sigma) \cdot x = \gamma \cdot (\sigma \cdot x) = \gamma \cdot x.$$

Logo, $\gamma \sigma \gamma^{-1} \in \Sigma_{\gamma \cdot x}$ e, portanto, $\gamma \Sigma_x \gamma^{-1} \subset \Sigma_{\gamma \cdot x}$. Por outro lado, seja $\sigma \in \Sigma_{\gamma \cdot x}$, ou seja, $(\sigma \gamma) \cdot x = \sigma \cdot (\gamma \cdot x) = \gamma \cdot x$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Então

$$(\gamma^{-1} \sigma \gamma) \cdot x = \gamma^{-1} \cdot ((\sigma \gamma) \cdot x) = \gamma^{-1} \cdot (\gamma \cdot x) = (\gamma^{-1} \gamma) \cdot x = x.$$

Logo, $\gamma^{-1} \sigma \gamma \in \Sigma_x$ e, assim, $\gamma^{-1} \Sigma_{\gamma \cdot x} \gamma \subset \Sigma_x$. Portanto, $\Sigma_{\gamma \cdot x} = \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}$. ■

Definição 1.3.4. *Sejam Γ um grupo de Lie agindo em V e $\Sigma \subseteq \Gamma$ um subgrupo. O subespaço de ponto fixo de Σ é o conjunto*

$$\text{Fix}_V(\Sigma) = \{x \in V; \sigma \cdot x = x, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Observe que $\text{Fix}_V(\Sigma)$ é um subespaço vetorial de V , pois

$$\text{Fix}_V(\Sigma) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \ker(\rho_\sigma - Id),$$

onde ρ_σ é a representação de σ definida por $\rho_\sigma(x) = \sigma \cdot x$, para todo $x \in V$. Além disso, $\text{Fix}_V(\Sigma)$ é Σ -invariante. De fato, dados $\sigma \in \Sigma$ e $v \in \text{Fix}_V(\Sigma)$, então

$$\xi \cdot (\sigma \cdot v) = \xi \cdot v = v = \sigma \cdot v,$$

para todo $\xi \in \Sigma$, o que implica que $\sigma \cdot v \in \text{Fix}_V(\Sigma)$.

Exemplo 1.3.5. Considere novamente a ação padrão de $\Gamma = O(2)$ em $V = \mathbb{R}^2$ como no Exemplo 1.2.11. Pelo Exemplo 1.3.2 segue que o subgrupo de isotropia de $(1, 1)$ é o conjunto

$$\Sigma_{(1,1)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Claramente, a identidade fixa todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Agora,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

se, e somente se, $x = y$. Logo,

$$\text{Fix}_V(\Sigma_{(1,1)}) = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Subgrupos de isotropia conjugados possuem subespaços de ponto fixo isomorfos, como mostramos a seguir.

Lema 1.3.6. *Seja Σ_x o subgrupo de isotropia de $x \in V$. Então, para todo $\gamma \in \Gamma$, $\text{Fix}_V(\Sigma_{\gamma \cdot x})$ é isomorfo a $\text{Fix}_V(\Sigma_x)$. Em particular,*

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(\Sigma_{\gamma \cdot x}) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(\Sigma_x).$$

Demonstração: Fixado $\gamma \in \Gamma$, considere a aplicação $f : \text{Fix}_V(\Sigma_x) \rightarrow \text{Fix}_V(\Sigma_{\gamma \cdot x})$ definida por $f(v) = \gamma \cdot v$ para todo $v \in \text{Fix}_V(\Sigma_x)$. Note que f está bem definida, pois dados $v \in \text{Fix}_V(\Sigma_x)$ e $\sigma \in \Sigma_x$ temos

$$(\gamma \sigma \gamma^{-1}) \cdot f(v) = (\gamma \sigma \gamma^{-1}) \cdot (\gamma \cdot v) = (\gamma \sigma) \cdot v = \gamma \cdot (\sigma \cdot v) = \gamma \cdot v = f(v),$$

o que implica que $f(v) \in \text{Fix}_V(\Sigma_{\gamma \cdot x})$. Veja que $f = \rho_\gamma|_{\text{Fix}_V(\Sigma_x)}$, onde $\rho_\gamma : V \rightarrow V$ é a representação de γ em V . Como ρ_γ é um isomorfismo linear segue que f é linear e injetora. Resta mostrar que f é sobrejetora. Seja $w \in \text{Fix}_V(\Sigma_{\gamma \cdot x})$. Então $(\gamma \sigma \gamma^{-1}) \cdot w = w$ para todo $\sigma \in \Sigma_x$, ou seja, $\sigma \cdot (\gamma^{-1} \cdot w) = \gamma^{-1} \cdot w$ para todo $\sigma \in \Sigma_x$, implicando que $\gamma^{-1} \cdot w \in \text{Fix}_V(\Sigma_x)$. Ainda temos que $f(\gamma^{-1} \cdot w) = w$. Portanto, f é sobrejetora e concluímos que

$$\text{Fix}_V(\Sigma_x) \cong \text{Fix}_V(\Sigma_{\gamma \cdot x}).$$

Como $\gamma \in \Gamma$ é arbitrário, segue do Lema 1.3.3 que $\text{Fix}_V(\Sigma_{\gamma \cdot x})$ é isomorfo a $\text{Fix}_V(\Sigma_x)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. ■

O próximo lema nos mostra uma característica clássica de toda aplicação Γ -equivariante, que é deixar invariante os subespaços de ponto fixo.

Lema 1.3.7. *Sejam $f : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante e $\Sigma \subseteq \Gamma$ um subgrupo. Então $f(\text{Fix}_V(\Sigma)) \subseteq \text{Fix}_V(\Sigma)$.*

Demonstração: Dado $x \in \text{Fix}_V(\Sigma)$, então $\sigma \cdot x = x$ para todo $\sigma \in \Sigma$. Como $\Sigma \subseteq \Gamma$, então f é Σ -equivariante e, conseqüentemente, $f(x) = f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x)$ para todo $\sigma \in \Sigma$. Portanto, $f(x) \in \text{Fix}_V(\Sigma)$, o que conclui a prova. ■

Observação 1.3.8. Para qualquer subgrupo $\Sigma \subseteq \Gamma$ temos que $\text{Fix}_V(\Sigma) = W$, onde W é a soma de todos os subespaços $\text{Fix}_V(\Delta)$ em que $\Delta \supseteq \Sigma$ é um subgrupo de isotropia. De fato, seja $v \in \text{Fix}_V(\Sigma)$ e Σ_v o subgrupo de isotropia de v . Então $\Sigma \subseteq \Sigma_v$ e, portanto, $\text{Fix}_V(\Sigma_v) \subseteq W$. Como $v \in \text{Fix}_V(\Sigma_v)$, temos que $v \in W$, de onde segue que $\text{Fix}_V(\Sigma) \subseteq W$, uma vez que v é arbitrário. Por outro lado, se $w \in W$, então $w = w_1 + \dots + w_k$, onde $w_j \in \text{Fix}_V(\Delta_j)$ para algum subgrupo de isotropia $\Delta_j \supseteq \Sigma$. Neste caso, $\sigma \cdot w_j = w_j$ para todo $\sigma \in \Sigma$, ou seja, $w_j \in \text{Fix}_V(\Sigma)$ para todo $1 \leq j \leq k$. Logo, $w \in \text{Fix}_V(\Sigma)$ e, assim, $W \subseteq \text{Fix}_V(\Sigma)$. Portanto, $\text{Fix}_V(\Sigma) = W$.

Uma consequência imediata do Lema 1.3.7 é a existência de soluções triviais para aplicações Γ -equivariantes. Antes de provar esse resultado, definimos o seguinte:

Definição 1.3.9. *Se Γ é um grupo de Lie agindo em V , dizemos que uma função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é Γ -invariante se*

$$f(\gamma \cdot v) = f(v),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in V$.

Proposição 1.3.10. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\text{Fix}_V(\Gamma) = \{0\}$.
- (b) *Toda aplicação Γ -equivariante $f : V \rightarrow V$ satisfaz $f(0) = 0$ (sempre admite a solução trivial).*
- (c) *A única função linear Γ -invariante é a função nula.*

Demonstração: (a) \Rightarrow (b) Suponha que $\text{Fix}_V(\Gamma) = \{0\}$ e seja $f : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante. Pelo Lema 1.3.7, $f(\text{Fix}_V(\Gamma)) \subseteq \text{Fix}_V(\Gamma)$, ou seja, $f(0) = 0$.

(b) \Rightarrow (a) Seja $v \in \text{Fix}_V(\Gamma)$ e considere $f : V \rightarrow V$ a aplicação definida por $f(x) = v$ para todo $x \in V$. Note que f é Γ -equivariante, pois $f(\gamma \cdot x) = v = \gamma \cdot v = \gamma \cdot f(x)$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$. Por hipótese $f(0) = 0$, implicando que $v = 0$. Portanto, $\text{Fix}_V(\Gamma) = \{0\}$.

(a) \Rightarrow (c) Suponha que $\text{Fix}_V(\Gamma) = \{0\}$. Sejam $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear Γ -invariante e $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ o produto interno Γ -invariante em V definido em (1.14). Pelo Teorema da Representação de Riesz (veja [12, Proposição 7.1.2]), existe um único $v \in V$ tal que $L(x) = \langle v, x \rangle_\Gamma$ para todo $x \in V$. Afirmamos que $v \in \text{Fix}_V(\Gamma)$. De fato, pela Γ -invariância de L temos que $L(x) = L(\gamma^{-1} \cdot x)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Logo,

$$\langle v, x \rangle_\Gamma = \langle v, \gamma^{-1} \cdot x \rangle_\Gamma = \langle v, \gamma^t \cdot x \rangle_\Gamma = \langle \gamma \cdot v, x \rangle_\Gamma,$$

onde a segunda igualdade segue pois $\Gamma \subseteq O(n)$ (Proposição 1.1.18). Como $x \in V$ é arbitrário, $\gamma \cdot v = v$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e, assim, $v \in \text{Fix}_V(\Gamma)$. Por hipótese, temos $v = 0$, de onde segue que L é a função nula.

(c) \Rightarrow (b) Seja $f : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante. Considere $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $L(x) = \langle f(0), x \rangle_\Gamma$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ é o produto interno Γ -invariante em V dado em (1.14). Note que L é linear, pela linearidade do produto interno, e ainda é Γ -invariante, pois

$$L(\gamma \cdot x) = \langle f(0), \gamma \cdot x \rangle_\Gamma = \langle \gamma^{-1} \cdot f(0), x \rangle_\Gamma = \langle f(\gamma^{-1} \cdot 0), x \rangle_\Gamma = \langle f(0), x \rangle_\Gamma = L(x)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$. Por hipótese, $L(x) = 0$ para todo $x \in V$, ou seja, $\langle f(0), x \rangle_\Gamma = 0$ para todo $x \in V$, implicando que $f(0) = 0$. ■

Consideramos agora uma classe especial de subgrupos de isotropia para a qual obtemos resultados interessantes. É conhecido da teoria de bifurcação de pontos de equilíbrio que se Σ é um subgrupo de isotropia axial, então genericamente temos garantida a existência de soluções que são Σ -equivariantes. Trataremos desse assunto no Capítulo 3. Para tanto definimos:

Definição 1.3.11. *Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Um subgrupo de isotropia $\Sigma \subseteq \Gamma$ é axial se $\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(\Sigma) = 1$ e é maximal se não existir um subgrupo de isotropia Δ de Γ satisfazendo $\Sigma \subsetneq \Delta \subsetneq \Gamma$.*

Lema 1.3.12. *Seja Γ agindo em V . Se Σ é um subgrupo axial de Γ , então Σ é maximal.*

Demonstração: Seja Δ um subgrupo de isotropia de Γ tal que $\Sigma \subset \Delta \subsetneq \Gamma$. Como $\Delta \neq \Gamma = \Sigma_0$, existe $y \in V$ não nulo tal que $\Delta = \Sigma_y$. Ademais, como $\Sigma \subset \Delta$, então $\text{Fix}_V(\Delta) \subseteq \text{Fix}_V(\Sigma)$, o que implica que

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(\Delta) \leq \dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(\Sigma). \quad (1.23)$$

Pelo fato de Σ ser um subgrupo de isotropia axial segue que $\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(\Sigma) = 1$, ou seja, existe $x \in V$ não nulo tal que $\Sigma = \Sigma_x$ e $\text{Fix}_V(\Sigma) = [x]$ é o subespaço gerado por x . Além disso, segue de (1.23) que $\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(\Delta) \leq 1$. Como $0 \neq y \in \text{Fix}_V(\Delta)$, temos que $\text{Fix}_V(\Delta) \neq \{0\}$ e, portanto, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(\Delta) = 1$. Assim, $y \in \text{Fix}_V(\Delta) = \text{Fix}_V(\Sigma) = [x]$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ não nulo tal que $y = \lambda x$. Como a ação de Γ em V é linear, então $\Sigma_{\lambda x} = \Sigma_x$, ou seja, $\Delta = \Sigma_y = \Sigma_x = \Sigma$. Portanto, Σ é um subgrupo de isotropia maximal de Γ . ■

1.4 Ação do Produto Coroa

Nesta seção, introduzimos um caso particular do produto semidireto de dois grupos, chamado de produto coroa. Esse conceito surge naturalmente no estudo de sistemas de células acopladas com acoplamento idêntico que apresentamos no Capítulo 2.

Começamos lembrando que um automorfismo de um grupo G é um isomorfismo de G em G . O conjunto de todos os automorfismos de G é denotado por $\text{Aut}(G)$ e tem estrutura de grupo com a operação de composição.

Definição 1.4.1. *Sejam G e H grupos munidos das operações \star e \bullet , respectivamente, e considere $\mu : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ um homomorfismo de grupos, com $\mu(h) = \mu_h : G \rightarrow G$ para todo $h \in H$. O conjunto dos pares ordenados $(g, h) \in G \times H$ munido com a operação*

$$\begin{aligned} \times_{\mu} : (G \times H) \times (G \times H) &\longrightarrow G \times H \\ ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) &\longmapsto (g_1 \star \mu_{h_1}(g_2), h_1 \bullet h_2) \end{aligned} \quad (1.24)$$

tem estrutura de grupo, chamado de produto semidireto de G por H via o homomorfismo μ e denotado por $G \dot{+} H$.

Para comprovar que $G \dot{+} H$ é um grupo, veja [27, Theorem 7.22]. Quando o homomorfismo $\mu : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ é trivial, o produto semidireto $G \dot{+} H$ coincide com o produto direto $G \times H$.

Exemplo 1.4.2. Sejam $G = \{id, (123), (132)\}$ e $H = \{id, (12)\}$ subgrupos de S_3 . Considere as aplicações $\mu_{id} : G \rightarrow G$ e $\mu_{(12)} : G \rightarrow G$ definidas, respectivamente, por $\mu_{id}(\eta) = \eta$ e $\mu_{(12)}(\eta) = (12)\eta(12)$ para todo $\eta \in G$. Claramente, μ_{id} e $\mu_{(12)}$ são automorfismos, ou seja, $\mu_{id}, \mu_{(12)} \in \text{Aut}(G)$. Assim, podemos definir o homomorfismo $\mu : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ por $\mu(id) = \mu_{id}$ e $\mu((12)) = \mu_{(12)}$. Portanto, o produto semidireto $G \dot{+} H$ é o produto cartesiano $G \times H$ munido com a operação de grupo dada em (1.24), ou seja,

$$(\xi, id) \times_{\mu} (\beta, \delta) := (\xi \mu_{id}(\beta), id \delta) = (\xi \beta, \delta)$$

e

$$(\xi, (12)) \times_{\mu} (\beta, \delta) := (\xi \mu_{(12)}(\beta), (12)\delta) = (\xi(12)\beta(12), (12)\delta),$$

para todo $\xi, \beta \in G$ e $\delta \in H$.

Dados dois grupos de Lie Γ_1 e Γ_2 , sejam

$$\begin{array}{ccc} \rho : \Gamma_1 & \longrightarrow & GL(V) \\ \gamma_1 & \longmapsto & \rho_{\gamma_1} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \omega : \Gamma_2 & \longrightarrow & GL(V) \\ \gamma_2 & \longmapsto & \omega_{\gamma_2} \end{array}$$

as representações de Γ_1 e Γ_2 no \mathbb{R} -espaço vetorial V , respectivamente, dadas por $\rho_{\gamma_1}(v) = \gamma_1 \cdot v$ e $\omega_{\gamma_2}(v) = \gamma_2 \odot v$, para todo $v \in V$. Considere a aplicação $\phi : (\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2) \times V \rightarrow V$ definida por

$$\phi((\gamma_1, \gamma_2), v) = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \odot v) \quad (1.25)$$

para todo $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ e $v \in V$, onde $\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ é o produto simidireto de Γ_1 por Γ_2 via um automorfismo

$$\mu : \Gamma_2 \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_1).$$

Claramente a aplicação ϕ é contínua, pois as ações Γ_1 e Γ_2 em V são contínuas. Além disso, para cada $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$, a aplicação $\eta_{(\gamma_1, \gamma_2)} : V \rightarrow V$ definida por

$$\eta_{(\gamma_1, \gamma_2)}(v) = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \odot v) = (\rho_{\gamma_1} \circ \omega_{\gamma_2})(v) \quad (1.26)$$

é linear, pois ρ_{γ_1} e ω_{γ_2} são lineares para cada $\gamma_1 \in \Gamma_1$ e $\gamma_2 \in \Gamma_2$. Portanto, fixada uma base de V , a matriz de $\eta_{(\gamma_1, \gamma_2)}$, denotada por $[\eta_{(\gamma_1, \gamma_2)}]$, é dada pelo produto das matrizes de ρ_{γ_1} e ω_{γ_2} com respeito à base fixada, ou seja,

$$[\eta_{(\gamma_1, \gamma_2)}] = [\rho_{\gamma_1}][\omega_{\gamma_2}], \quad (1.27)$$

para todo $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$. Baseado nisso, a próxima proposição fornece uma condição necessária e suficiente para que a aplicação ϕ em (1.25) defina uma ação do produto semidireto $\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ em V .

Proposição 1.4.3. *A aplicação ϕ definida em (1.25) é uma ação de $\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ em V se, e somente se, a representação de $\mu_{\gamma_2}(\gamma_1)$ em V é uma conjugação escrita como*

$$\rho_{\mu_{\gamma_2}(\gamma_1)} = \omega_{\gamma_2} \circ \rho_{\gamma_1} \circ \omega_{\gamma_2}^{-1},$$

para todo $\gamma_1 \in \Gamma_1$ e $\gamma_2 \in \Gamma_2$.

Demonstração: Já vimos que ϕ é uma aplicação contínua e que $\eta_{(\gamma_1, \gamma_2)} : V \rightarrow V$ definida em (1.26) é linear. Portanto, pela Definição 1.1.9, ϕ define uma ação de $\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ em V se, e somente se,

$$\eta_{(\gamma_1, \gamma_2)} \circ \eta_{(\tau_1, \tau_2)} = \eta_{(\gamma_1, \gamma_2) \times_{\mu} (\tau_1, \tau_2)}$$

para todo $(\gamma_1, \gamma_2), (\tau_1, \tau_2) \in \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$, onde \times_{μ} é a operação definida em (1.24). Por (1.26) segue que

$$\eta_{(\gamma_1, \gamma_2)} \circ \eta_{(\tau_1, \tau_2)} = \rho_{\gamma_1} \circ \omega_{\gamma_2} \circ \rho_{\tau_1} \circ \omega_{\tau_2}. \quad (1.28)$$

Por outro lado, por (1.24) temos que

$$\eta_{(\gamma_1, \gamma_2) \times_{\mu} (\tau_1, \tau_2)} = \rho_{\gamma_1 \star \mu_{\gamma_2}(\tau_1)} \circ \omega_{\gamma_2 \bullet \tau_2}, \quad (1.29)$$

onde \star e \bullet são as operações de Γ_1 e de Γ_2 como grupos, respectivamente. Como ρ e ω são

representações de Γ_1 e de Γ_2 em V , respectivamente, segue pelo item (iii) da Definição 1.1.9 que $\rho_{\gamma_1 \star \mu_{\gamma_2}(\tau_1)} = \rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\mu_{\gamma_2}(\tau_1)}$ e $\omega_{\gamma_2 \bullet \tau_2} = \omega_{\gamma_2} \circ \omega_{\tau_2}$. Portanto, (1.29) pode ser reescrito como

$$\eta_{(\gamma_1, \gamma_2) \star \mu(\tau_1, \tau_2)} = \rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\mu_{\gamma_2}(\tau_1)} \circ \omega_{\gamma_2} \circ \omega_{\tau_2}.$$

Comparando com (1.28) segue que ϕ é uma ação se, e somente se,

$$\rho_{\gamma_1} \circ \omega_{\gamma_2} \circ \rho_{\tau_1} \circ \omega_{\tau_2} = \rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\mu_{\gamma_2}(\tau_1)} \circ \omega_{\gamma_2} \circ \omega_{\tau_2}.$$

Como ρ_{γ_1} , ω_{γ_2} e ω_{τ_2} são inversíveis, concluímos que a última igualdade ocorre se, e somente se,

$$\rho_{\mu_{\gamma_2}(\tau_1)} = \omega_{\gamma_2} \circ \rho_{\tau_1} \circ \omega_{\gamma_2}^{-1},$$

para todo $\tau_1 \in \Gamma_1$ e $\gamma_2 \in \Gamma_2$, como desejado. ■

Um caso particular do produto semidireto é o produto coroa, definido considerando Γ_1 como um subgrupo de $O(k)^N$ e Γ_2 como um subgrupo do grupo das permutações S_N , para $k, N \in \mathbb{N}$. Mais especificamente, temos:

Definição 1.4.4. *Sejam \mathcal{L} um subgrupo do grupo ortogonal $O(k)$ e \mathcal{G} um subgrupo de S_N . O produto coroa de \mathcal{L} por \mathcal{G} , denotado por $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, é o produto semidireto $\mathcal{L}^N \rtimes \mathcal{G}$ via o homomorfismo $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{L}^N)$ definido por $\mu(\sigma) = \mu_\sigma : \mathcal{L}^N \rightarrow \mathcal{L}^N$ tal que*

$$\mu_\sigma(\ell_1, \dots, \ell_N) = (\ell_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_{\sigma^{-1}(N)})$$

para todo $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ e $\sigma \in \mathcal{G}$.

Nas condições da definição anterior e considerando $V = \mathbb{R}^k$, definimos uma ação do produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em V^N por

$$\begin{aligned} \psi : (\mathcal{L} \wr \mathcal{G}) \times V^N &\longrightarrow V^N \\ ((\ell, \sigma), v) &\longmapsto (\ell_1 v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_N v_{\sigma^{-1}(N)}) \end{aligned} \quad (1.30)$$

para todo $v = (v_1, \dots, v_N) \in V^N$ e $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$. Veja que $\psi((\ell, \sigma), v) = \bar{\varphi}(\ell, \bar{\phi}(\sigma, v))$ onde $\bar{\phi} : \mathcal{G} \times V^N \rightarrow V^N$ é a restrição a \mathcal{G} da ação $\phi : S^N \times V^N \rightarrow V^N$ definida no Exemplo 1.1.14 e $\bar{\varphi} : \mathcal{L}^N \times V^N \rightarrow V^N$ é a restrição a \mathcal{L}^N da ação $\varphi : O(k)^N \times V^N \rightarrow V^N$ definida no Exemplo 1.1.16. Portanto, ψ é uma aplicação contínua. Seja $(1_{\mathcal{L}^N}, id)$ o elemento neutro de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Então

$$\psi((1_{\mathcal{L}^N}, id), v) = (1_{\mathcal{L}} v_{id^{-1}(1)}, \dots, 1_{\mathcal{L}} v_{id^{-1}(N)}) = (v_1, \dots, v_N) = v,$$

para todo $v = (v_1, \dots, v_N) \in V^N$. Agora, dado $(\ell, \sigma) \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \omega_{(\ell, \sigma)} : V^N &\longrightarrow V^N \\ (v_1, \dots, v_N) &\longmapsto (\ell_1 v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_N v_{\sigma^{-1}(N)}) \end{aligned}$$

é linear. Com efeito, $\omega_{(\ell, \sigma)} = \eta_\ell \circ \rho_\sigma$, onde $\eta_\ell : V^N \rightarrow V^N$ é a representação de ℓ em V^N definida no Exemplo 1.1.16 e $\rho_\sigma : V^N \rightarrow V^N$ é a representação de σ em V^N definida no Exemplo

1.1.14. Como ρ_σ e η_ℓ são lineares, $\omega_{(\ell, \sigma)}$ também é linear para todo $(\ell, \sigma) \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Utilizando a Proposição 1.4.3, a aplicação ψ definida em (1.30) é uma ação de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em V^N se, e somente se,

$$\eta_{\mu_\sigma(\ell)} = \rho_\sigma \circ \eta_\ell \circ \rho_\sigma^{-1}$$

para todo $(\ell, \sigma) \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, onde o homomorfismo $\mu_\sigma : \mathcal{L}^N \rightarrow \mathcal{L}^N$ é dado na Definição 1.4.4. Em termos matriciais, devemos mostrar que $[\eta_{\mu_\sigma(\ell)}][\rho_\sigma] = [\rho_\sigma][\eta_\ell]$, onde o símbolo $[\]$ denota a matriz do operador em relação a uma base fixada de V^N . Para ver que essa última igualdade é válida, lembre de (1.13) que

$$[\rho_\sigma] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NN} \end{bmatrix},$$

em que

$$B_{ij} = \begin{cases} I_k, & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0_{k \times k}, & \text{se } i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

para todo $1 \leq i, j \leq N$. Também, por (1.11) temos que

$$[\eta_\ell] = \begin{bmatrix} \ell_1 & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & \ell_2 & \cdots & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & \ell_N \end{bmatrix}$$

e

$$[\eta_{\mu_\sigma(\ell)}] = \begin{bmatrix} \ell_{\sigma^{-1}(1)} & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & \ell_{\sigma^{-1}(2)} & \cdots & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & \ell_{\sigma^{-1}(N)} \end{bmatrix},$$

com $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$. Portanto,

$$[\eta_{\mu_\sigma(\ell)}][\rho_\sigma] = \begin{bmatrix} \ell_{\sigma^{-1}(1)}B_{11} & \ell_{\sigma^{-1}(1)}B_{12} & \cdots & \ell_{\sigma^{-1}(1)}B_{1N} \\ \ell_{\sigma^{-1}(2)}B_{21} & \ell_{\sigma^{-1}(2)}B_{22} & \cdots & \ell_{\sigma^{-1}(2)}B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{\sigma^{-1}(N)}B_{N1} & \ell_{\sigma^{-1}(N)}B_{N2} & \cdots & \ell_{\sigma^{-1}(N)}B_{NN} \end{bmatrix}$$

e

$$[\rho_\sigma][\eta_\ell] = \begin{bmatrix} B_{11}\ell_1 & B_{12}\ell_2 & \cdots & B_{1N}\ell_N \\ B_{21}\ell_1 & B_{22}\ell_2 & \cdots & B_{2N}\ell_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1}\ell_1 & B_{N2}\ell_2 & \cdots & B_{NN}\ell_N \end{bmatrix}.$$

Para cada $i = 1, \dots, N$ fixado, existe um único $r_i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $B_{ir_i} = I_k$, com $\sigma(r_i) = i$. Logo, $B_{iq} = 0_{k \times k}$ para todo $q \neq r_i$ e, assim,

$$B_{ir_i}\ell_{r_i} = \ell_{r_i} = \ell_{\sigma^{-1}(i)} = \ell_{\sigma^{-1}(i)}B_{ir_i} \quad \text{e} \quad B_{iq}\ell_q = 0_{k \times k} = \ell_{\sigma^{-1}(q)}B_{iq},$$

para todo $i, q \in \{1, \dots, N\}$ tal que $q \neq r_i$. Portanto, $[\eta_{\mu_\sigma(\ell)}][\rho_\sigma] = [\rho_\sigma][\eta_\ell]$, de onde segue que a aplicação ψ definida em (1.30) é uma ação de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em V^N .

Finalizamos este capítulo formalizando um resultado que exhibe uma condição necessária e suficiente para que um operador linear definido em V comute com a ação de $\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ definida em (1.25).

Lema 1.4.5. *Sejam Γ_1 e Γ_2 grupos de Lie agindo em V e denote por $\mathcal{D}_{\Gamma_1 + \Gamma_2}$, \mathcal{D}_{Γ_1} e \mathcal{D}_{Γ_2} os conjuntos dos operadores lineares em V que comutam com as ações de $\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$, Γ_1 e Γ_2 , respectivamente. Então*

$$\mathcal{D}_{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \mathcal{D}_{\Gamma_1} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_2}.$$

Demonstração: Denote a ação de $\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ em V definida em (1.25) como

$$(\gamma_1, \gamma_2)v = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \odot v).$$

Então $A \in \mathcal{D}_{\Gamma_1 + \Gamma_2}$ se, e somente se, para todo $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ e $v \in V$,

$$A((\gamma_1, \gamma_2)v) = (\gamma_1, \gamma_2)A(v).$$

Em particular, para $\gamma_1 = 1_{\Gamma_1}$ obtemos

$$A(\gamma_2 \odot v) = A((1_{\Gamma_1}, \gamma_2)v) = (1_{\Gamma_1}, \gamma_2)A(v) = \gamma_2 \odot A(v),$$

para todo $\gamma_2 \in \Gamma_2$. Logo, $A \in \mathcal{D}_{\Gamma_2}$. Analogamente, para $\gamma_2 = 1_{\Gamma_2}$ segue que $A(\gamma_1 \cdot v) = \gamma_1 \cdot A(v)$ para todo $\gamma_1 \in \Gamma_1$, o que implica que $A \in \mathcal{D}_{\Gamma_1}$. Assim, $\mathcal{D}_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \subseteq \mathcal{D}_{\Gamma_1} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_2}$.

Reciprocamente, se $A \in \mathcal{D}_{\Gamma_1} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_2}$, então para todo $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ e $v \in V$, temos

$$A((\gamma_1, \gamma_2)v) = A(\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \odot v)) = \gamma_1 \cdot A(\gamma_2 \odot v) = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \odot A(v)) = (\gamma_1, \gamma_2)A(v).$$

Portanto, $\mathcal{D}_{\Gamma_1} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_2} \subseteq \mathcal{D}_{\Gamma_1 + \Gamma_2}$, valendo a igualdade. ■

Pelo lema anterior temos que $\mathcal{D}_{\mathcal{L} \wr \mathcal{G}} = \mathcal{D}_{\mathcal{L}^N} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, para as ações de \mathcal{L}^N e \mathcal{G} em V^N definidas como nos Exemplos 1.1.16 e 1.1.14, respectivamente. Como mencionamos, a abordagem algébrica apresentada nesta seção é utilizada no Capítulo 2 no estudo de sistemas de células acopladas com acoplamento do tipo produto coroa.

Capítulo 2

Sistemas de Células Acopladas com Simetria Produto Coroa

Neste capítulo, abordaremos a parte central do projeto no estudo de sistemas de células acopladas com simetrias, cada qual formado por subsistemas de equações diferenciais, denominados células, que se relacionam entre si por meio de um acoplamento. Tais sistemas possuem naturalmente dois tipos de simetrias, as globais e as internas, que podem ser combinadas dependendo de como as simetrias internas afetam o acoplamento.

De um modo geral, em um acoplamento com N células idênticas, as simetrias globais são induzidas pela maneira como as células estão associadas, o que força o aparecimento de um grupo $\mathcal{G} \subseteq S_N$ de permutação. As simetrias internas, por sua vez, modelam a dinâmica de cada célula e constituem um subgrupo de Lie \mathcal{L} do grupo ortogonal $O(k)$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Como veremos, nesse contexto podem surgir dois tipos de acoplamentos, um gerado pela ação do produto direto $\mathcal{L} \times \mathcal{G}$ em $(\mathbb{R}^k)^N$ e outro gerado pela ação do produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em $(\mathbb{R}^k)^N$.

Focamos nossa atenção no estudo das simetrias globais e internas de sistemas de células acopladas com acoplamento do tipo produto coroa, com base nas referências [17] e [13]. Por essa razão, nossa abordagem é algébrica na maior parte do texto.

O presente capítulo é dividido da seguinte maneira: na Seção 2.1 definimos um sistema de células idênticas acopladas identicamente por meio de uma matriz de conexão C . O Lema 2.1.4 destaca a relação entre as simetrias globais de um tal sistema e as entradas de C . Na Seção 2.2 desenvolvemos a teoria linear e algébrica para o produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Mais especificamente, na Subseção 2.2.1 caracterizamos, sob certas condições, os subespaços $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -irredutíveis de V^N (Lema 2.2.1). Nas Subseções 2.2.2 e 2.2.3 demonstramos dois resultados principais, o Teorema 2.2.10 e o Teorema 2.2.16, que caracterizam respectivamente os subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ e as matrizes em $\mathbb{M}_{kN}(\mathbb{R})$ que comutam com tais subgrupos.

2.1 Sistemas de Células Acopladas

Um sistema de N células acopladas pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) da forma

$$\dot{x} = F(x), \tag{2.1}$$

com $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^k)^N$ e $F : (\mathbb{R}^k)^N \rightarrow (\mathbb{R}^k)^N$ um campo de vetores, em que $k \in \mathbb{N}$ e x_j é a variável de estado da j -ésima célula representada pela equação diferencial

$$\dot{x}_j = f_j(x_j) + h_j(x), \quad (2.2)$$

para cada $j = 1, \dots, N$. A aplicação $f_j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ governa a dinâmica interna da célula j e a aplicação $h_j : (\mathbb{R}^k)^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ representa o acoplamento da célula j com as demais $N - 1$ células do sistema. Assumindo que as células do acoplamento sejam todas idênticas, podemos considerar $f_j = f$ para todo $j = 1, \dots, N$. Vamos então formular as hipóteses do acoplamento entre as células por meio de uma matriz quadrada de ordem N como segue:

Definição 2.1.1. *Definimos a matriz de conexão do sistema (2.1) como a matriz $C = (C(i, j))$ de ordem N tal que*

$$C(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{se a célula } i \text{ está acoplada à célula } j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com base na matriz C , o acoplamento h_j tem a forma

$$h_j(x) = \sum_{i=1}^N C(i, j) h_{ij}(x_i, x_j),$$

onde $h_{ij} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação que modela o acoplamento da célula i com a j . Em outras palavras, h_j é determinado somando-se as influências de todas as células que estão acopladas à célula j . Supondo que as células estão idênticamente acopladas, segue que $h_{ij} = h$, para todo $i, j = 1, \dots, N$. Logo, a equação (2.2) pode ser reescrita como

$$\dot{x}_j = f(x_j) + \sum_{i=1}^N C(i, j) h(x_i, x_j), \quad (2.3)$$

em que $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ modela a dinâmica interna da j -ésima célula e $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ modela o seu acoplamento com as demais células, para todo $j = 1, \dots, N$. Portanto, o sistema de EDOs (2.1) escrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N C(i, 1) h(x_i, x_1) \\ \sum_{i=1}^N C(i, 2) h(x_i, x_2) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N C(i, N) h(x_i, x_N) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

define um sistema de N células idênticas acopladas idênticamente.

Podemos representar a estrutura geral de um sistema de N células acopladas por um grafo com N vértices, um para cada célula, conectando o vértice i ao vértice j se a célula i estiver acoplada à célula j , ou seja, se $C(i, j) = 1$. A conexão entre as células é feita por meio de setas cujo sentido depende da aplicação h_j , para cada $1 \leq j \leq N$.

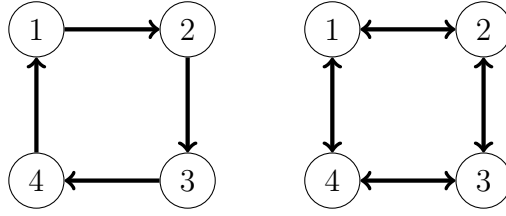


Figura 2.1: Acoplamento unidirecional e bidirecional.

Veamos por exemplo a Figura 2.1. No grafo da esquerda temos a representação de um sistema de quatro células idênticas acopladas governadas por equações diferenciais da forma

$$\dot{x}_j = f(x_j) + h(x_{j-1}, x_j),$$

em que j é tomado módulo 4, com $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Nesse grafo, a seta da célula 1 para a célula 2 indica que 1 está acoplada a 2 e analogamente para as outras células. Além disso, $C(j-1, j) = 1$ e $C(i, j) = 0$ para $i \neq j-1$, com $1 \leq j \leq 4$. Ou seja, a matriz de conexão do sistema é da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esse tipo de acoplamento é chamado unidirecional.

No grafo da direita, as equações que governam as quatro células é da forma

$$\dot{x}_j = f(x_j) + h(x_{j-1}, x_j) + h(x_{j+1}, x_j),$$

para j tomado módulo 4. Nesse caso, $C(j-1, j) = C(j+1, j) = 1$ e $C(i, j) = 0$ para todo $i \neq j-1$ e $i \neq j+1$, sendo a matriz de conexão do sistema da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esse tipo de acoplamento é chamado bidirecional. Mais especificamente, analisamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.2. Considere o sistema constituído por quatro células representadas pelas equações diferenciais

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = x + y + |(p, q)|^2 x \\ \dot{y} = x + y + |(p, q)|^2 y \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \dot{w} = w + z + |(x, y)|^2 w \\ \dot{z} = w + z + |(x, y)|^2 z \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \dot{p} = p + q + |(w, z)|^2 p \\ \dot{q} = p + q + |(w, z)|^2 q \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \dot{m} = m + n \\ \dot{n} = m + n. \end{cases}$$

onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em \mathbb{R}^2 . Sejam $x_1 = (x, y)$, $x_2 = (w, z)$, $x_3 = (p, q)$ e $x_4 = (m, n)$ as variáveis de estado dos subsistemas (1), (2), (3) e (4), respectivamente. Considere as aplicações $h_1, h_2, h_3, h_4 : (\mathbb{R}^2)^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$h_1(x) = |x_3|^2 x_1, \quad h_2(x) = |x_1|^2 x_2, \quad h_3(x) = |x_2|^2 x_3, \quad h_4(x) = (0, 0),$$

$$f(w_1, w_2) = (w_1 + w_2, w_1 + w_2),$$

para todo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{R}^2)^4$ e $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Assim, podemos reescrever os subsistemas (1) – (4) como

$$\dot{x}_j = f(x_j) + h_j(x),$$

para $j = 1, 2, 3, 4$, constituindo um sistema de quatro células idênticas acopladas. Considerando a matriz $C = (C(i, j))$ dada por

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

e a aplicação $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(x_i, x_j) = |x_i|^2 x_j$, para todo $i, j = 1, 2, 3, 4$, temos que cada célula é governada pela equação

$$\dot{x}_j = f(x_j) + \sum_{i=1}^4 C(i, j) h(x_i, x_j).$$

Logo, a matriz C em (2.5) é a matriz de conexão do sistema. Observe que a célula (1) está acoplada à célula (2), pois $C(1, 2) = 1$, e a célula (2) está acoplada à célula (3), pois $C(2, 3) = 1$. De maneira análoga, temos que a célula (3) está acoplada à (1) e a célula (4) não está acoplada a nenhuma outra célula, pois a aplicação h_4 é nula. A representação gráfica de tal acoplamento é dada na Figura 2.2.

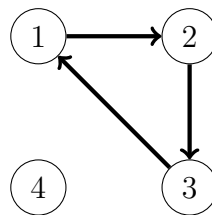


Figura 2.2: Sistema de quatro células acopladas identicamente.

Muitos aspectos da formação de padrões em sistemas de células acopladas são consequências das simetrias presentes no sistema. Dessa maneira, a abordagem de nosso estudo é baseada no conhecimento e na análise dessas simetrias. No que segue, vamos construir os grupos de simetrias globais e internas de um sistema de N células acopladas da forma (2.4). O espaço de todas as variáveis de estado de um tal sistema é denotado por V^N , em que $V = \mathbb{R}^k$. Iniciamos com a definição das simetrias globais utilizando a matriz de conexão C .

Definição 2.1.3. Definimos o grupo de simetrias globais do sistema (2.4) como o conjunto \mathcal{G} de todas as permutações $\sigma \in S_N$ tais que

$$\sigma C \sigma^{-1} = C,$$

em que σ está identificada com a sua matriz de permutação A^σ via o homomorfismo μ definido em (1.4).

Observe que \mathcal{G} é um subgrupo de S_N . É de se esperar que a condição de simetria global $\sigma C \sigma^{-1} = C$ imponha alguma restrição sobre as entradas $C(i, j)$ da matriz de conexão C . Isso de fato ocorre, como mostramos a seguir.

Lema 2.1.4. Uma permutação $\sigma \in S_N$ é uma simetria global do sistema (2.4) se, e somente se,

$$C(\sigma(i), \sigma(j)) = C(i, j),$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$.

Demonstração: Sejam $\sigma \in S_N$ e $C = (C(i, j))$ a matriz de conexão do sistema de células acopladas. Pelo homomorfismo definido em (1.4), temos que a matriz de permutação de σ é dada por $A^\sigma = (A_{ij}^\sigma)$, onde

$$A_{ij}^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0, & \text{se } i \neq \sigma(j). \end{cases}$$

Observe que

$$(A^\sigma C)_{ij} = \sum_{l=1}^N A_{il}^\sigma C(l, j) = C(\sigma^{-1}(i), j),$$

uma vez que $A_{il}^\sigma = 1$ se, e somente se, $\sigma(l) = i$, ou seja, $l = \sigma^{-1}(i)$. Analogamente,

$$(C A^\sigma)_{ij} = \sum_{l=1}^N C(i, l) A_{lj}^\sigma = C(i, \sigma(j)),$$

uma vez que $A_{lj}^\sigma = 1$ se, e somente se, $l = \sigma(j)$. Portanto, $\sigma C \sigma^{-1} = C$ se, e somente se, $A^\sigma C = C A^\sigma$, ou seja,

$$C(\sigma^{-1}(i), j) = C(i, \sigma(j)),$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$. Como σ é uma bijeção, segue que σ é uma simetria global de (2.4) se, e somente se,

$$C(\sigma(i), \sigma(j)) = C(i, j),$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$. ■

Uma consequência natural do Lema 2.1.4 é que \mathcal{G} é um grupo de simetrias do campo de vetores F em (2.1), isto é,

$$F(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot F(x), \tag{2.6}$$

para todo $\sigma \in \mathcal{G}$ e $x = (x_1, \dots, x_N) \in V^N$, onde

$$\sigma \cdot x = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)}). \tag{2.7}$$

Pelo Exemplo 1.1.14, a aplicação $\Psi : \mathcal{G} \times V^N \rightarrow V^N$ definida por

$$\Psi(\sigma, x) = \sigma \cdot x = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)})$$

define uma ação de \mathcal{G} em V^N que permuta as variáveis de estado x_j . Para $F = (F_1, \dots, F_N)$, em que $F_j : V^N \rightarrow V$ são as aplicações coordenadas de F , temos que

$$F_j(x) = \dot{x}_j = f(x_j) + \sum_{i=1}^N C(i, j)h(x_i, x_j) \quad (2.8)$$

para todo $1 \leq j \leq N$. Dado $\sigma \in \mathcal{G}$,

$$F(\sigma \cdot x) = F(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)}) = (F_1(y), \dots, F_N(y)), \quad (2.9)$$

com $y = \sigma \cdot x = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)})$. Por (2.8), denotando $y_j = x_{\sigma^{-1}(j)}$ para todo $j = 1, \dots, N$, temos que

$$F_j(y) = f(y_j) + \sum_{i=1}^N C(i, j)h(y_i, y_j) = f(x_{\sigma^{-1}(j)}) + \sum_{i=1}^N C(i, j)h(x_{\sigma^{-1}(i)}, x_{\sigma^{-1}(j)}).$$

Pelo Lema 2.1.4,

$$C(\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)) = C(i, j)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$. Logo,

$$\begin{aligned} F_j(y) &= f(x_{\sigma^{-1}(j)}) + \sum_{i=1}^N C(\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j))h(x_{\sigma^{-1}(i)}, x_{\sigma^{-1}(j)}) \\ &= f(x_{\sigma^{-1}(j)}) + \sum_{l=1}^N C(l, \sigma^{-1}(j))h(x_l, x_{\sigma^{-1}(j)}) \\ &= F_{\sigma^{-1}(j)}(x) \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \dots, N$. Por (2.9),

$$F(\sigma \cdot x) = (F_{\sigma^{-1}(1)}(x), \dots, F_{\sigma^{-1}(N)}(x)) = \sigma \cdot F(x),$$

para todo $\sigma \in \mathcal{G}$ e $x \in V^N$. Pelo item (i) da Definição 1.2.5, a aplicação F em (2.1) é \mathcal{G} -equivariante e, nesse caso, dizemos que \mathcal{G} é um grupo de simetrias do sistema (2.4).

Observe que a igualdade

$$F_j(\sigma \cdot x) = F_{\sigma^{-1}(j)}(x) \quad (2.10)$$

obtida acima implica que o acoplamento do sistema (2.1) é simétrico, ou seja, h_j em (2.2) satisfaz

$$h_j(\sigma \cdot x) = h_{\sigma^{-1}(j)}(x),$$

para todo $\sigma \in \mathcal{G}$, $x \in V^N$ e $j = 1, \dots, N$. Para ver isso, basta escrever $F_j(x) = f(x_j) + h_j(x)$ e utilizar (2.10). Geometricamente, isso significa que toda simetria global $\sigma \in \mathcal{G}$ permuta as células do sistema enquanto preserva o acoplamento (as setas).

Vamos agora construir o grupo de simetrias internas para o sistema (2.4), considerando a

ação do grupo ortogonal $O(k)$ em $V = \mathbb{R}^k$ como a multiplicação de matrizes, ou seja, ℓx_j denota o produto da matriz $\ell \in O(k)$ pelas coordenadas do vetor $x_j \in V$ com relação a uma base de V .

Definição 2.1.5. *Seja $\ell \in O(k)$ uma matriz ortogonal. Dizemos que ℓ é uma simetria interna de cada célula do sistema (2.4) se*

$$f(\ell x) = \ell f(x)$$

para todo $x \in V$. O subgrupo \mathcal{L} de $O(k)$ constituído por todas as simetrias internas de cada célula é chamado de grupo de simetrias internas.

Portanto, para construir o grupo \mathcal{L} exigimos que a aplicação $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ do sistema (2.4) seja \mathcal{L} -equivariante. Em outras palavras, $\ell \in \mathcal{L}$ age como uma simetria da dinâmica interna f de cada célula. Esses elementos podem ser simetrias do sistema (2.4) dependendo do acoplamento h . Exploraremos esse assunto mais adiante.

Exemplo 2.1.6. Considere o sistema de quatro células acopladas do Exemplo 2.1.2. As matrizes em $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ que comutam com a matriz C em (2.5) são da forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ c & a & b & 0 \\ b & c & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Como toda matriz de permutação tem a propriedade de que em cada linha e em cada coluna a entrada 1 aparece uma única vez e as outras entradas são nulas, as únicas matrizes de permutação que comutam com C são da forma

$$I_4, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por identificação, essas matrizes correspondem respectivamente às permutações

$$id, \quad \sigma_1 = (1\ 2\ 3) \quad \text{e} \quad \sigma_2 = (1\ 3\ 2)$$

em S_4 . Logo, o grupo de simetrias globais \mathcal{G} do sistema em questão é $\mathcal{G} = \{id, \sigma_1, \sigma_2\}$, o qual é isomorfo a \mathbb{Z}_3 .

Vimos que a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(w_1, w_2) = (w_1 + w_2, w_1 + w_2)$ governa a dinâmica interna de cada célula do sistema. Por definição, $\ell \in O(2)$ é uma simetria interna de cada célula se $f(\ell(w_1, w_2)) = \ell f(w_1, w_2)$ para todo $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Denotando

$$\ell = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

temos que

$$((a+c)w_1 + (b+d)w_2, (a+c)w_1 + (b+d)w_2) = ((a+b)w_1 + (a+b)w_2, (c+d)w_1 + (c+d)w_2)$$

para todo $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, o que implica em $a = d$ e $b = c$. Como $\ell \in O(2)$, então $\ell \ell^t = I_2$, o que ocorre se, e somente se, $a^2 + b^2 = 1$ e $ab = 0$. Logo, $a = 0$ e $b = \pm 1$ ou $b = 0$ e $a = \pm 1$. Assim, as simetrias internas de cada célula são dadas por $I_2, -I_2, \ell$ e $-\ell$, onde

$$\ell = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Portanto, os possíveis grupos de simetrias internas \mathcal{L} são

$$\{I_2\}, \quad \mathbb{Z}_2^\ell = \langle \ell \rangle, \quad \mathbb{Z}_2^{-\ell} = \langle -\ell \rangle \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell} \cong \langle \ell, -\ell \rangle,$$

em que o símbolo $\langle \quad \rangle$ denota o subgrupo gerado.

Como já mencionamos, as simetrias internas também podem ser simetrias do sistema de células acopladas (2.4) dependendo do tipo de acoplamento. No presente trabalho, focamos nossa atenção em um tipo especial de acoplamento, porém a teoria desenvolvida para tais sistemas aborda dois tipos:

- 1) Quando todo $\ell \in \mathcal{L}$ age simultaneamente em cada célula, o que se resume à condição

$$h(\ell x_i, \ell x_j) = \ell h(x_i, x_j) \quad (2.12)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$, ou seja, o acoplamento h é \mathcal{L} -equivariante.

- 2) Quando todo $\ell \in \mathcal{L}$ agindo em cada célula individualmente é uma simetria da equação (2.3), o que se resume às condições

$$h(x_i, \ell x_j) = \ell h(x_i, x_j) \quad (2.13)$$

e

$$h(\ell x_i, x_j) = h(x_i, x_j), \quad (2.14)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$, ou seja, o acoplamento h é \mathcal{L} -equivariante com relação à célula j e é \mathcal{L} -invariante com relação à célula i .

Observe que quaisquer duas equações dentre (2.12), (2.13) e (2.14) implicam na terceira. Em ambos os casos 1) e 2) existe a possibilidade de combinar os grupos \mathcal{L} e \mathcal{G} de simetrias internas e globais, gerando respectivamente dois tipos de acoplamentos conhecidos como produto direto $\mathcal{L} \times \mathcal{G}$ e produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Para uma abordagem algébrica do primeiro caso sugerimos [18].

No que segue, concentramos a teoria no acoplamento do tipo produto coroa. Para isso, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \psi: \quad \mathcal{L}^N \times V^N &\rightarrow V^N \\ (\tilde{\ell}, x) &\rightarrow (\ell_1 x_1, \dots, \ell_N x_N) \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\tilde{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ e $x = (x_1, \dots, x_N) \in V^N$. Pelo Exemplo 1.1.16, ψ define uma ação de \mathcal{L}^N em V^N denotada por

$$\tilde{\ell} \odot x = (\ell_1 x_1, \dots, \ell_N x_N).$$

Vamos mostrar que se (2.13) e (2.14) são válidas, então a aplicação F do sistema (2.1) é \mathcal{L}^N -equivariante, ou seja,

$$F(\tilde{\ell} \odot x) = \tilde{\ell} \odot F(x), \quad (2.16)$$

para todo $\tilde{\ell} \in \mathcal{L}^N$ e $x \in V^N$. De fato, dados $\tilde{\ell} \in \mathcal{L}$ e $x \in V^N$, temos

$$\begin{aligned} F(\tilde{\ell} \odot x) &= F(\ell_1 x_1, \dots, \ell_N x_N) \\ &= (F_1(y), \dots, F_N(y)), \end{aligned}$$

onde $y = (\ell_1 x_1, \dots, \ell_N x_N)$ e $F_j : V^N \rightarrow V$ são as aplicações coordenadas de F , para todo $j = 1, \dots, N$. Denotando $y_j = \ell_j x_j$, segue de (2.8) que

$$\begin{aligned} F_j(y) &= f(y_j) + \sum_{i=1}^N C(i, j) h(y_i, y_j) \\ &= f(\ell_j x_j) + \sum_{i=1}^N C(i, j) h(\ell_i x_i, \ell_j x_j) \\ &= \ell_j f(x_j) + \sum_{i=1}^N C(i, j) \ell_j h(\ell_i x_i, x_j) \\ &= \ell_j f(x_j) + \sum_{i=1}^N C(i, j) \ell_j h(x_i, x_j) \\ &= \ell_j \left(f(x_j) + \sum_{i=1}^N C(i, j) h(x_i, x_j) \right) \\ &= \ell_j F_j(x), \end{aligned}$$

em que a terceira igualdade segue de (2.13) e do fato de ℓ_j ser uma simetria interna, a quarta igualdade segue de (2.14) e a quinta igualdade é válida pois a ação de \mathcal{L} em V é linear. Portanto,

$$\begin{aligned} F(\tilde{\ell} \odot x) &= (F_1(y), \dots, F_N(y)) \\ &= (\ell_1 F_1(x), \dots, \ell_N F_N(x)) \\ &= \tilde{\ell} \odot F(x), \end{aligned}$$

para todo $\tilde{\ell} \in \mathcal{L}^N$ e $x \in V^N$, implicando que \mathcal{L}^N é um grupo de simetrias de F e, conseqüentemente, do sistema (2.4).

Já vimos anteriormente que se \mathcal{G} é um grupo de simetrias globais de (2.4), então F em (2.1) é \mathcal{G} -equivariante, ou seja

$$F(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot F(x),$$

para todo $\sigma \in \mathcal{G}$ e $x \in V^N$, em que a ação de \mathcal{G} em V^N é dada em (2.7). Considerando $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ o produto coroa de \mathcal{L} por \mathcal{G} (veja Definição 1.4.4) cuja ação em V^N é definida em (1.30), segue que

$$\begin{aligned} F((\tilde{\ell}, \sigma)x) &= F(\tilde{\ell} \odot (\sigma \cdot x)) \\ &= \tilde{\ell} \odot F(\sigma \cdot x) \\ &= \tilde{\ell} \odot (\sigma \cdot F(x)) \\ &= (\tilde{\ell}, \sigma) F(x), \end{aligned}$$

para todo $(\tilde{\ell}, \sigma) \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ e $x \in V^N$. Portanto, F é uma aplicação $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante, o que mostra que o produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ é um grupo de simetrias de F e, assim, do sistema (2.4).

Exemplo 2.1.7. Considere o sistema de células acopladas do Exemplo 2.1.2. O acoplamento entre as células é modelado pela aplicação $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$h(x_i, x_j) = |x_i|^2 x_j,$$

para cada $1 \leq i, j \leq 4$. Vimos no Exemplo 2.1.6 que $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_3$ é o grupo de simetrias globais de tal sistema e que os possíveis grupos de simetrias internas de cada célula são $\mathcal{L} = \{I_2\}, \mathbb{Z}_2^\ell, \mathbb{Z}_2^{-\ell}, \mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell}$, em que a matriz ℓ é dada em (2.11). Para qualquer $\bar{\ell} \in \mathcal{L}$, temos que

$$h(\bar{\ell}x_i, x_j) = |\bar{\ell}x_i|^2 x_j = |x_i|^2 x_j = h(x_i, x_j)$$

e

$$h(x_i, \bar{\ell}x_j) = |x_i|^2 \bar{\ell}x_j = \bar{\ell}|x_i|^2 x_j = \bar{\ell}h(x_i, x_j)$$

uma vez que, como $\mathcal{L} \subset O(2)$,

$$|\bar{\ell}x_i|^2 = \langle \bar{\ell}x_i, \bar{\ell}x_i \rangle = \langle x_i, \bar{\ell}^t \bar{\ell}x_i \rangle = \langle x_i, x_i \rangle = |x_i|^2,$$

para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Portanto, h é \mathcal{L} -invariante na variável x_i e \mathcal{L} -equivariante na variável x_j , implicando que o sistema apresentado no Exemplo 2.1.2 admite um acoplamento do tipo produto coroa, em que $I_2 \wr \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2^\ell \wr \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2^{-\ell} \wr \mathbb{Z}_3$ e $(\mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell}) \wr \mathbb{Z}_3$ são seus possíveis grupos de simetrias.

Exemplo 2.1.8. O modelo de Busse e Heikes [10] em convecção rotativa é um exemplo particularmente simples no qual existe uma correspondência com as soluções de um sistema de células acopladas. A convecção rotativa é um processo de transferência de calor por meio de um fluido, que ocorre devido ao movimento rotacional do próprio fluido. Esse processo tem grande relevância na área industrial.

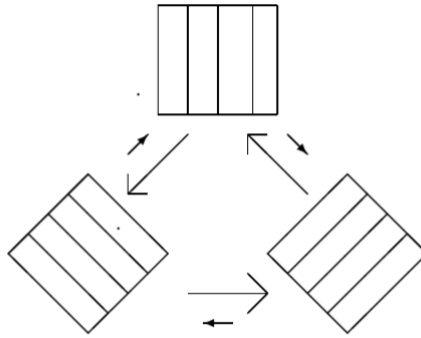


Figura 2.3: Rotação de 120° e 240° com acoplamento bidirecional.

No modelo de Busse e Heikes, a dinâmica do sistema está na forma de três rolos, cada um rotacionado 120° a partir do anterior. Isso consiste basicamente na rotação de uma camada do fluido aquecido em torno de um eixo (veja Figura 2.3). Tal modelagem é representada pelo sistema de três equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - x_1 - \beta x_2 - \gamma x_3)x_1 \\ \dot{x}_2 = (1 - x_2 - \beta x_3 - \gamma x_1)x_2 \\ \dot{x}_3 = (1 - x_3 - \beta x_1 - \gamma x_2)x_3 \end{cases},$$

com $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, visto como um sistema de três células acopladas para $k = 1$. A partir desse exemplo, foi proposto por Guckenheimer e Holmes [22] um outro modelo que pode ser visto como um sistema de três células acopladas da forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\lambda + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = (\lambda + \gamma x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2)x_2 \\ \dot{x}_3 = (\lambda + \beta x_1^2 + \gamma x_2^2 + \alpha x_3^2)x_3 \end{cases}, \quad (2.17)$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$. Para obter um sistema com acoplamento idêntico tal como aparece na Figura 2.4, tomamos $\gamma = 0$. Logo, (2.17) torna-se

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\lambda + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = (\lambda + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2)x_2 \\ \dot{x}_3 = (\lambda + \beta x_1^2 + \alpha x_3^2)x_3 \end{cases}, \quad (2.18)$$

onde a dinâmica interna de cada célula é governada pela aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_j) = (\lambda + \alpha x_j^2)x_j$$

e o acoplamento entre as células é dado pela aplicação $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x_i, x_j) = \beta x_i^2 x_j,$$

de modo que

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz de conexão do sistema (2.18). Nesse caso, pela Definição 2.1.1, a célula 1 está acoplada à célula 3, a qual está acoplada à célula 2, que está acoplada à célula 1 (veja Figura 2.4).

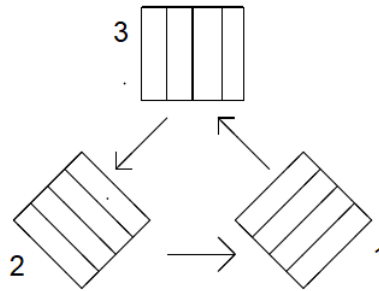


Figura 2.4: Rotação de 120° e 240° com acoplamento unidirecional.

Vamos mostrar primeiramente que o grupo de simetrias internas de cada célula é o grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ e que o grupo de simetrias globais de (2.18) é isomorfo a \mathbb{Z}_3 . Para isso, considere a ação de \mathbb{Z}_2 em \mathbb{R} dada por $1 \cdot x = x$ e $-1 \cdot x = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Facilmente vemos que

$$f(-1 \cdot x_j) = f(-x_j) = -f(x_j) = -1 \cdot f(x_j),$$

o que implica que \mathbb{Z}_2 é o grupo de simetrias internas. Ainda, por um cálculo simples obtemos que as matrizes de permutação que comutam com C são

$$I_3, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, o grupo de simetrias globais de (2.18) é

$$\mathcal{G} = \{id, (132), (123)\} \cong \mathbb{Z}_3.$$

Note ainda que o acoplamento h é \mathbb{Z}_2 -invariante com relação à primeira coordenada e \mathbb{Z}_2 -equivariante com relação à segunda coordenada. De fato,

$$h(-1 \cdot x_i, x_j) = h(-x_i, x_j) = \beta(-x_i)^2 x_j = \beta x_i^2 x_j = h(x_i, x_j)$$

e

$$h(x_i, -1 \cdot x_j) = h(x_i, -x_j) = \beta x_i^2 (-x_j) = -\beta x_i^2 x_j = -1 \cdot h(x_i, x_j).$$

Portanto, o sistema (2.18) admite um acoplamento do tipo produto coroa $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$, ou seja, $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ é o grupo de simetrias do sistema (2.18).

2.2 Teoria Linear e Algébrica do Produto Coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$

Nesta seção, estudamos sistemas de células acopladas com acoplamento do tipo produto coroa do ponto de vista algébrico. Para isso, consideramos a ação de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em V^N , com $V = \mathbb{R}^k$, como definida em (1.30), ou seja,

$$(\ell, \sigma)(x_1, \dots, x_N) = (\ell_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_N x_{\sigma^{-1}(N)}) \quad (2.19)$$

para todo $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$, $\sigma \in \mathcal{G}$ e $(x_1, \dots, x_N) \in V^N$.

2.2.1 Teoria Linear

Nesta subseção, vamos caracterizar os subespaços vetoriais $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -irredutíveis de V^N (veja Definição 1.2.1), para então determinar uma condição necessária e suficiente sob a qual a ação (2.19) é absolutamente irredutível (veja Definição 1.2.10). De agora em diante, $1_{\mathcal{L}}$ e $1_{\mathcal{G}}$ denotam os elementos neutros dos grupos \mathcal{L} e \mathcal{G} , respectivamente.

Seja $W \subseteq V^N$ um subespaço $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -irredutível. Em particular, W é um subespaço \mathcal{L}^N -invariante e \mathcal{G} -invariante de V^N . Com efeito, dados $w = (w_1, \dots, w_N) \in W$, $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ e $\sigma \in \mathcal{G}$, temos

$$(\ell_1, \dots, \ell_N) \odot (w_1, \dots, w_N) = (\ell_1 w_1, \dots, \ell_N w_N) = ((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})w \in W$$

e

$$\sigma \cdot (w_1, \dots, w_N) = (w_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, w_{\sigma^{-1}(N)}) = ((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), \sigma)w \in W.$$

Para cada $j = 1, \dots, N$, considere

$$U_j = \{v \in V; (0, \dots, v, \dots, 0) \in W\} \quad \text{e} \quad \tilde{U}_j = \{(0, \dots, v, \dots, 0) \in W; v \in V\} \quad (2.20)$$

subespaços vetoriais de V e de V^N , respectivamente, em que v está na j -ésima coordenada do vetor $(0, \dots, v, \dots, 0) \in V^N$. Assim, as projeções $\pi_j : \tilde{U}_j \rightarrow U_j$ definidas por

$$\pi_j(0, \dots, v, \dots, 0) = v$$

são isomorfismos lineares, de onde segue que os subespaços \tilde{U}_j e U_j são isomorfos, para cada $j = 1, \dots, N$. Afirmamos que a soma $\tilde{U}_1 + \dots + \tilde{U}_N$ é uma soma direta, ou seja,

$$\tilde{U}_j \cap (\tilde{U}_1 + \dots + \tilde{U}_{j-1} + \tilde{U}_{j+1} + \dots + \tilde{U}_N) = \{(0, \dots, 0)\}$$

para cada $1 \leq j \leq N$. De fato, se

$$v = (v_1, \dots, v_N) \in \tilde{U}_j \cap (\tilde{U}_1 + \dots + \tilde{U}_{j-1} + \tilde{U}_{j+1} + \dots + \tilde{U}_N),$$

então $v_i = 0$ para todo $i \neq j$ e, portanto,

$$v = (0, \dots, v_j, \dots, 0) \in \tilde{U}_1 + \dots + \tilde{U}_{j-1} + \tilde{U}_{j+1} + \dots + \tilde{U}_N.$$

Assim,

$$\begin{aligned} v &= (u_1, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, u_{j-1}, \dots, 0) + (0, \dots, u_{j+1}, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, u_N) \\ &= (u_1, \dots, u_{j-1}, 0, u_{j+1}, \dots, u_N), \end{aligned}$$

com $u_k \in V$, para todo $k \neq j$. Segue que $v_j = 0$ e, portanto, $v = (0, \dots, 0)$.

O próximo resultado descreve os subespaços $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -irredutíveis de V^N por meio de uma decomposição particular, utilizando os subespaços U_j definidos em (2.20). Para tanto, assumimos que \mathcal{G} é um subgrupo transitivo de S_N , ou seja, para quaisquer dois índices $i, j \in \{1, \dots, N\}$ existe $\sigma \in \mathcal{G}$ tal que $\sigma(i) = j$.

Lema 2.2.1. *Seja W um subespaço $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -irredutível de V^N . Suponhamos que \mathcal{G} seja um subgrupo transitivo de S_N e que \mathcal{L}^N aja não trivialmente em W . Então*

- (i) U_j é \mathcal{L} -irredutível.
- (ii) Todos os U_j são \mathcal{L} -isomorfos a um único subespaço \mathcal{L} -irredutível U .
- (iii) $W = U^N$.

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que $W = \tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$. Por construção temos que $\tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N \subseteq W$. Vejamos que $\tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$ é um subespaço \mathcal{G} -invariante de W . Com efeito, dados $\sigma \in \mathcal{G}$ e $w = w_1 + \dots + w_N \in \tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$, temos que

$$\sigma \cdot w = \sigma \cdot w_1 + \dots + \sigma \cdot w_N, \tag{2.21}$$

pela linearidade da ação de \mathcal{G} em W . Como W é \mathcal{G} -invariante, segue que $\sigma \cdot w_i \in W$ para todo $i = 1, \dots, N$. Observe que $w_i = (0, \dots, v, \dots, 0)$, com $v \in V$ na i -ésima coordenada de w_i . Assim, $\sigma \cdot w_i \in \tilde{U}_k$ para $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\sigma^{-1}(k) = i$, pois σ age em w_i permutando suas coordenadas. Pelo fato de σ ser bijetora segue que para cada i fixado, $\sigma \cdot w_i \in \tilde{U}_k$ para um único k . Logo, reordenando a soma em (2.21) se necessário, obtemos que $\sigma \cdot w \in \tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$, ou seja, $\tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$ é \mathcal{G} -invariante.

Agora, dados $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ e $w = w_1 + \dots + w_N \in \tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$, temos

$$\ell \odot w = \ell \odot w_1 + \dots + \ell \odot w_N,$$

pela linearidade da ação de \mathcal{L}^N em W . Escrevendo novamente $w_i = (0, \dots, v, \dots, 0) \in \tilde{U}_i$, com $v \in V$, e usando o fato de W ser \mathcal{L}^N -invariante, decorre que

$$\ell \odot w_i = (0, \dots, \ell_i v, \dots, 0) \in W,$$

o que implica que $\ell \odot w_i \in \tilde{U}_i$ para todo $i = 1, \dots, N$. Logo, $\ell \odot w \in \tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$ para todo $\ell \in \mathcal{L}^N$, implicando que $\tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$ é \mathcal{L}^N -invariante. Portanto, $\tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$ é um subespaço $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -invariante de W . Por hipótese, W é $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -irredutível e, portanto,

$$\tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N = \{(0, \dots, 0)\} \quad \text{ou} \quad \tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N = W.$$

Como \mathcal{L}^N age não trivialmente em W , existem $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ e $(w_1, \dots, w_N) \in W$ tais que

$$(\ell_1, \dots, \ell_N) \odot (w_1, \dots, w_N) \neq (w_1, \dots, w_N),$$

ou seja, existe $\ell_j \in \mathcal{L}$ tal que $\ell_j w_j \neq w_j$. Sem perda de generalidade suponha que $\ell_1 w_1 \neq w_1$ e tome $(\ell_1, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}^N$. Então $(\ell_1 w_1, \dots, w_N) = ((\ell_1, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})(w_1, \dots, w_N) \in W$, pela $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -invariância de W . Logo,

$$(\ell_1 w_1 - w_1, 0, \dots, 0) = (\ell_1 w_1, w_2, \dots, w_N) - (w_1, w_2, \dots, w_N) \in W.$$

Assim, $(\ell_1 w_1 - w_1, 0, \dots, 0) \in \tilde{U}_1$, com $\ell_1 w_1 - w_1 \neq 0$, ou seja, $\tilde{U}_1 \neq \{(0, \dots, 0)\}$. Portanto, o subespaço $\tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$ é não nulo, garantindo que

$$W = \tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N,$$

como desejado.

Vamos mostrar agora que todos os U_j são iguais, ou seja, $U_j = U_1$ para todo $j = 2, \dots, N$. De fato, fixe $j \in \{2, \dots, N\}$ e tome $v \in U_1$. Por definição, $(v, \dots, 0) \in W$. Como \mathcal{G} é um subgrupo transitivo de S_N , existe $\sigma \in \mathcal{G}$ tal que $\sigma^{-1}(j) = 1$. Pelo fato de W ser \mathcal{G} -invariante, temos que

$$\sigma \cdot (v, 0, \dots, 0) = (y_1, \dots, y_N) \in W,$$

onde $y_i = 0$ para todo $i \neq j$ e $y_j = v$. Portanto, $(0, \dots, v, \dots, 0) \in W$, em que v está na j -ésima coordenada do vetor, ou seja, $v \in U_j$, o que mostra que $U_1 \subseteq U_j$. Por outro lado, seja $v \in U_j$. Por definição, $(0, \dots, v, \dots, 0) \in W$, com v na j -ésima posição. Como \mathcal{G} é um subgrupo transitivo de S_N , existe $\eta \in \mathcal{G}$ tal que $\eta^{-1}(1) = j$. Pelo fato de W ser \mathcal{G} -invariante, temos que

$$\eta \cdot (0, \dots, v, \dots, 0) = (y_1, \dots, y_N) \in W,$$

onde $y_1 = v$ e $y_i = 0$ para todo $i = 2, \dots, N$. Logo, $(v, 0, \dots, 0) \in W$ e, assim, $v \in U_1$. Portanto, $U_j \subseteq U_1$ para todo $2 \leq j \leq N$, valendo a igualdade.

Mostramos então que os subespaços U_j são \mathcal{L} -invariantes para todo $j = 1, \dots, N$. Com efeito, sejam $\ell \in \mathcal{L}$ e $v \in U_j$. Por definição, $(0, \dots, v, \dots, 0) \in W$ e v aparece na j -ésima posição. Considere $(1_{\mathcal{L}}, \dots, \ell, \dots, 1_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}^N$, onde $\ell \in \mathcal{L}$ está na j -ésima coordenada do vetor.

Como W é \mathcal{L}^N -invariante, então

$$(0, \dots, \ell v, \dots, 0) = (1_{\mathcal{L}}, \dots, \ell, \dots, 1_{\mathcal{L}}) \odot (0, \dots, v, \dots, 0) \in W,$$

ou seja, $\ell v \in U_j$. Portanto, U_j é \mathcal{L} -invariante.

O próximo passo é mostrar que $W = U_1 \times \dots \times U_N$. Claramente, $U_1 \times \dots \times U_N \subseteq W$. Por outro lado, dado $w \in W = \tilde{U}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{U}_N$, podemos escrever

$$w = (u_1, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, u_N) = (u_1, \dots, u_N),$$

com $(0, \dots, u_i, \dots, 0) \in \tilde{U}_i \subseteq W$ para todo $i = 1, \dots, N$. Logo, $u_i \in U_i$, de onde segue que

$$w = (u_1, \dots, u_N) \in U_1 \times \dots \times U_N.$$

Portanto, $W = U_1 \times \dots \times U_N$. Como $U_j = U$ para todo $j = 1, \dots, N$ e para algum subespaço \mathcal{L} -invariante U de V , temos

$$W = U \times \dots \times U = U^N,$$

o que prova o item (iii). Para provar (i) e (ii), resta mostrar que U é \mathcal{L} -irredutível. Para isso, tome $U_0 \subseteq U$ um subespaço \mathcal{L} -invariante. Assim, dados $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ e $(v_1, \dots, v_N) \in U_0^N$,

$$(\ell_1, \dots, \ell_N) \odot (v_1, \dots, v_N) = (\ell_1 v_1, \dots, \ell_N v_N) \in U_0^N.$$

Isso mostra que U_0^N é um subespaço \mathcal{L}^N -invariante de W . Como W é \mathcal{L}^N -irredutível, segue que $U_0^N = \{(0, \dots, 0)\}$ ou $U_0^N = W$, ou seja, $U_0 = \{0\}$ ou $U_0 = U$. Portanto, U é \mathcal{L} -irredutível. ■

O próximo lema mostra que, sob certas condições, $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ age absolutamente irredutivelmente em U^N se, e somente se, \mathcal{L} age absolutamente irredutivelmente em U , onde U é um subespaço vetorial \mathcal{L} -invariante¹ de V . Veja que para tal resultado não precisamos da \mathcal{L} -irredutibilidade de U . Para o que segue, denotamos por $\mathcal{D}_{\mathcal{L} \wr \mathcal{G}}(U^N)$ o conjunto dos operadores lineares em U^N que são $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariantes. De modo análogo para $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(U)$.

Lema 2.2.2. *Seja U um subespaço vetorial \mathcal{L} -invariante de V , onde $\mathcal{L} \subseteq O(k)$ é tal que $\text{Fix}_U(\mathcal{L}) = \{0\}$. Considere \mathcal{G} um subgrupo transitivo de S_N . Então*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L} \wr \mathcal{G}}(U^N) \cong \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(U).$$

Demonstração: Considere $f : \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(U) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{L} \wr \mathcal{G}}(U^N)$ a aplicação tal que $f(A) = A^N$, onde $A : U \rightarrow U$ é um operador linear \mathcal{L} -equivariante e $A^N : U^N \rightarrow U^N$ é o operador linear definido por $A^N(u_1, \dots, u_N) = (A(u_1), \dots, A(u_N))$. Afirmamos que A^N é $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante. De fato, se $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ e $(u_1, \dots, u_N) \in U^N$, então

$$\begin{aligned} (\ell_1, \dots, \ell_N) \odot A^N(u_1, \dots, u_N) &= (\ell_1, \dots, \ell_N) \odot (A(u_1), \dots, A(u_N)) \\ &= (\ell_1 A(u_1), \dots, \ell_N A(u_N)) \\ &= (A(\ell_1 u_1), \dots, A(\ell_N u_N)) \\ &= A^N((\ell_1, \dots, \ell_N) \odot (u_1, \dots, u_N)), \end{aligned}$$

¹A \mathcal{L} -invariância de U nos permite restringir a ação de \mathcal{L} a U .

onde a terceira igualdade segue da \mathcal{L} -equivariância de A . Logo, A^N é \mathcal{L}^N -equivariante. Agora, dado $\sigma \in \mathcal{G}$ temos que

$$\begin{aligned}\sigma \cdot A^N(u_1, \dots, u_N) &= \sigma \cdot (A(u_1), \dots, A(u_N)) \\ &= (A(u_{\sigma^{-1}(1)}), \dots, A(u_{\sigma^{-1}(N)})) \\ &= A^N(u_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, u_{\sigma^{-1}(N)}) \\ &= A^N(\sigma \cdot (u_1, \dots, u_N)),\end{aligned}$$

mostrando que A^N é também \mathcal{G} -equivariante. Pelo Lema 1.4.5, segue que A^N é um operador $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante, ou seja, $A^N \in \mathcal{D}_{\mathcal{L} \wr \mathcal{G}}(U^N)$, o que prova que f está bem definida. Por construção, f é linear e injetora. Mostremos que f é sobrejetora. Com efeito, seja $B : U^N \rightarrow U^N$ um operador linear $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante. Escrevendo B em coordenadas como $B = (C_1, \dots, C_N)$, onde cada $C_j : U^N \rightarrow U$ é linear, temos

$$\begin{aligned}(\ell_1 C_1(u_1, \dots, u_N), \dots, \ell_N C_N(u_1, \dots, u_N)) &= ((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})B(u_1, \dots, u_N) \\ &= B((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})(u_1, \dots, u_N) \\ &= B(\ell_1 u_1, \dots, \ell_N u_N) \\ &= (C_1(\ell_1 u_1, \dots, \ell_N u_N), \dots, C_N(\ell_1 u_1, \dots, \ell_N u_N)),\end{aligned}$$

para todo $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ e $(u_1, \dots, u_N) \in U^N$, onde a segunda igualdade segue da $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariância de B . Portanto,

$$C_j(\ell_1 u_1, \dots, \ell_N u_N) = \ell_j C_j(u_1, \dots, u_N), \quad (2.22)$$

para cada $j = 1, \dots, N$. Pela linearidade de C_j , podemos escrever

$$C_j(u_1, \dots, u_N) = C_j(u_1, 0, \dots, 0) + \dots + C_j(0, \dots, 0, u_N),$$

para cada j fixado. Considere a aplicação $D_j^i : U \rightarrow U$ definida por $D_j^i(u) = C_j(0, \dots, u, \dots, 0)$, onde u é a i -ésima coordenada do vetor $(0, \dots, u, \dots, 0)$. Note que a linearidade de C_j implica na linearidade de D_j^i para todo $1 \leq i \leq N$. Logo,

$$C_j(u_1, \dots, u_N) = D_j^1(u_1) + \dots + D_j^N(u_N). \quad (2.23)$$

Por (2.22), obtemos que

$$D_j^1(\ell_1 u_1) + \dots + D_j^j(\ell_j u_j) + \dots + D_j^N(\ell_N u_N) = \ell_j D_j^1(u_1) + \dots + \ell_j D_j^j(u_j) + \dots + \ell_j D_j^N(u_N),$$

para todo $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ e $(u_1, \dots, u_N) \in U^N$. Em particular, considerando os vetores da forma $(0, \dots, u, \dots, 0) \in U^N$ em que u é a i -ésima coordenada do vetor, com $1 \leq i \leq N$, segue que

$$D_j^j(\ell_j u) = \ell_j D_j^j(u) \quad \text{e} \quad D_j^i(\ell_i u) = \ell_j D_j^i(u)$$

para todo $i \neq j$, $\ell_i, \ell_j \in \mathcal{L}$ e $u \in U$. Portanto, D_j^j é \mathcal{L} -equivariante e, tomando $\ell_j = 1_{\mathcal{L}}$, temos que $D_j^j(\ell_i u) = D_j^j(u)$ para todo $\ell_i \in \mathcal{L}$ e $u \in U$, ou seja, D_j^j é uma transformação linear \mathcal{L} -invariante para todo $i \neq j$. Provemos que $D_j^i \equiv 0$ se $i \neq j$. Para isso, suponha que $\dim_{\mathbb{R}} U = m$ e considere $D_j^{ir} : U \rightarrow \mathbb{R}$ as m aplicações coordenadas de D_j^i , com $1 \leq r \leq m$. Como D_j^i é \mathcal{L} -invariante, então cada aplicação coordenada D_j^{ir} é também \mathcal{L} -invariante. Como $\text{Fix}_U(\mathcal{L}) = \{0\}$, segue pela

Proposição 1.3.10 que $D_j^{ir} \equiv 0$ para todo $r = 1, \dots, m$. Logo, $D_j^i \equiv 0$ para todo $i \neq j$ e, por (2.23), temos $C_j(u_1, \dots, u_N) = D_j^j(u_j)$ para todo $j = 1, \dots, N$. Portanto,

$$B(u_1, \dots, u_N) = (D_1^1(u_1), \dots, D_N^N(u_N)),$$

para todo $(u_1, \dots, u_N) \in U^N$. Pela \mathcal{G} -equivariância de B , segue que

$$\sigma \cdot B(u_1, \dots, u_N) = B(\sigma \cdot (u_1, \dots, u_N)) = B(u_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, u_{\sigma^{-1}(N)})$$

para todo $\sigma \in \mathcal{G}$, ou seja,

$$(D_{\sigma^{-1}(1)}^{\sigma^{-1}(1)}(u_{\sigma^{-1}(1)}), \dots, D_{\sigma^{-1}(N)}^{\sigma^{-1}(N)}(u_{\sigma^{-1}(N)})) = (D_1^1(u_{\sigma^{-1}(1)}), \dots, D_N^N(u_{\sigma^{-1}(N)})).$$

Em particular, $D_{\sigma^{-1}(1)}^{\sigma^{-1}(1)}(u_{\sigma^{-1}(1)}) = D_1^1(u_{\sigma^{-1}(1)})$ para todo $\sigma \in \mathcal{G}$. Assim, pela arbitrariedade de $u_{\sigma^{-1}(1)} \in U$, temos que $D_{\sigma^{-1}(1)}^{\sigma^{-1}(1)} = D_1^1$. Como \mathcal{G} é um subgrupo transitivo de S_N , para cada $j \in \{2, \dots, N\}$ existe $\sigma_j \in \mathcal{G}$ tal que $\sigma_j^{-1}(1) = j$. Assim,

$$D_j^j = D_{\sigma_j^{-1}(1)}^{\sigma_j^{-1}(1)} = D_1^1$$

para todo $j = 2, \dots, N$, implicando que

$$B(u_1, \dots, u_N) = (D_1^1(u_1), \dots, D_1^1(u_N)) := (D_1^1)^N(u_1, \dots, u_N)$$

para todo $(u_1, \dots, u_N) \in U^N$. Lembrando que $D_1^1 : U \rightarrow U$ é uma aplicação \mathcal{L} -equivariante, segue que $f(D_1^1) = B$ com $D_1^1 \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(U)$, o que mostra que f é sobrejetora. Portanto, f é um isomorfismo linear, de onde segue que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L} \wr \mathcal{G}}(U^N) \cong \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(U).$$

Mais especificamente, via o isomorfismo f temos que $\mathcal{D}_{\mathcal{L} \wr \mathcal{G}}(U^N)$ é gerado pelo operador identidade $Id_{U^N} : U^N \rightarrow U^N$ se, e somente se, $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(U)$ é gerado pelo operador identidade $Id_U : U \rightarrow U$. ■

2.2.2 Subgrupos Axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$

Nesta subseção, vamos caracterizar, a menos de conjugação, os subgrupos axiais do produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ a partir de determinados subgrupos axiais de \mathcal{L} (Teorema 2.2.10). Tais subgrupos são de extrema importância na teoria de bifurcação de pontos de equilíbrio apresentada no Capítulo 3. Começamos com a seguinte definição:

Definição 2.2.3. *Seja $J \subseteq \{1, \dots, N\}$ um subconjunto de índices. Dizemos que J é um bloco se:*

- (i) *Existe um subgrupo \mathcal{H} de \mathcal{G} que age transitivamente em J , ou seja, para todo par de índices $i, j \in J$ existe $\sigma \in \mathcal{H}$ tal que $\sigma(i) = j$.*
- (ii) *$\sigma(J) = J$ para todo $\sigma \in \mathcal{H}$.*

Note que todos os conjuntos unitários são blocos, pois podemos considerar $\mathcal{H} = \{1_{\mathcal{G}}\}$. A cada bloco J associamos o subconjunto

$$\mathcal{Q}_J = \{\sigma \in \mathcal{G}; \sigma(J) = J\}, \quad (2.24)$$

que é naturalmente um subgrupo de \mathcal{G} . Observe que \mathcal{Q}_J age transitivamente em J , pois como J é um bloco existe um subgrupo \mathcal{H} de \mathcal{G} que deixa J invariante. Assim, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Q}_J$. Como \mathcal{H} age transitivamente em J , \mathcal{Q}_J também age transitivamente em J .

Observação 2.2.4. Se $J \subseteq \{1, \dots, N\}$ é um subconjunto de índices, então uma permutação $\sigma \in S_N$ satisfaz $\sigma(J) = J$ se, e somente se, $\sigma(J) \subset J$. De fato, como σ é uma bijeção, se $\sigma(J) \subset J$, então $\sigma(J)$ é um subconjunto de J com o mesmo número de elementos de J , de onde segue a afirmação.

O próximo resultado utiliza o grupo \mathcal{Q}_J para nos fornecer uma condição necessária e suficiente para que um complementar de um bloco no conjunto $\{1, \dots, N\}$ seja também um bloco.

Proposição 2.2.5. *Seja \mathcal{G} um subgrupo de S_N . Suponha que $\{1, \dots, N\} = J \cup \bar{J}$, onde J é um bloco e \bar{J} é o seu complementar. Então \mathcal{Q}_J age transitivamente em \bar{J} se, e somente se, \bar{J} é um bloco.*

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente que se um subgrupo \mathcal{H} de \mathcal{G} deixa J invariante, então \mathcal{H} deixa \bar{J} invariante. De fato, seja $\eta \in \mathcal{H}$. Então $\eta^{-1}(J) = J$. Note que se $i \in \bar{J}$, então $\eta(i) \in \bar{J}$, pois caso contrário

$$i = \eta^{-1}(\eta(i)) \in J,$$

o que é uma contradição. Logo, $\eta(\bar{J}) \subseteq \bar{J}$ e pela Observação 2.2.4 temos que $\eta(\bar{J}) = \bar{J}$. Portanto, \mathcal{H} deixa \bar{J} invariante. Em particular, como \mathcal{Q}_J deixa J invariante, então ele deixa \bar{J} invariante. Assim, se \mathcal{Q}_J age transitivamente em \bar{J} , segue por definição que \bar{J} é um bloco. Reciprocamente, se \bar{J} é um bloco, mostramos que $\mathcal{Q}_J \subseteq \mathcal{Q}_{\bar{J}}$. De fato, seja $\sigma \in \mathcal{Q}_J$. Note que se $j \in \bar{J}$, então $\sigma(j) \in \bar{J}$, pois caso contrário, como $\sigma^{-1} \in \mathcal{Q}_J$, temos

$$j = \sigma^{-1}(\sigma(j)) \in J,$$

o que é uma contradição. Logo, $\sigma(\bar{J}) \subseteq \bar{J}$ e pela Observação 2.2.4 temos que $\sigma(\bar{J}) = \bar{J}$. Portanto, $\sigma \in \mathcal{Q}_{\bar{J}}$, o que implica que $\mathcal{Q}_J \subseteq \mathcal{Q}_{\bar{J}}$. De modo análogo, é possível mostrar que $\mathcal{Q}_{\bar{J}} \subseteq \mathcal{Q}_J$. Assim, $\mathcal{Q}_J = \mathcal{Q}_{\bar{J}}$ e, como $\mathcal{Q}_{\bar{J}}$ age transitivamente em \bar{J} , segue que \mathcal{Q}_J age transitivamente em \bar{J} . ■

Exemplo 2.2.6. Seja $\mathcal{G} = \{id, (1234), (13)(24), (1432)\}$ o subgrupo de S_4 gerado pela permutação (1234) . Note que $J = \{1, 3\}$ é um bloco, pois $\mathcal{H} = \{id, (13)(24)\}$ é um subgrupo de \mathcal{G} que deixa J invariante e age transitivamente em J . Observe que $\mathcal{Q}_J = \mathcal{H}$ e \mathcal{Q}_J age transitivamente em $\bar{J} = \{2, 4\}$. Pela Proposição anterior, segue que \bar{J} é um bloco.

Como já mencionamos no Capítulo 1, os subgrupos de isotropia axiais (Definição 1.3.11) consiste em uma classe de particular interesse no contexto de bifurcação de pontos de equilíbrio.

Consideramos agora um subconjunto importante de subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, que será útil tanto na caracterização de todos os subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ quanto no estudo apresentado no Capítulo 3 no contexto de sistemas de células acopladas.

Dados $A \subseteq \mathcal{L}$ um subgrupo e J um bloco, defina

$$\Sigma(A, J) = B_1 \times \cdots \times B_N \dot{+} \mathcal{Q}_J, \quad (2.25)$$

em que \mathcal{Q}_J é dado em (2.24) e

$$B_j = \begin{cases} A, & \text{se } j \in J \\ \mathcal{L}, & \text{se } j \notin J. \end{cases} \quad (2.26)$$

Afirmamos que $\Sigma(A, J)$ é um subgrupo de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. De fato, note que $((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}}) \in \Sigma(A, J)$ e, assim, $\Sigma(A, J)$ é um subconjunto não vazio. Agora, dados $(\ell, \sigma), (\xi, \eta) \in \Sigma(A, J)$, onde $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N)$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, temos que $\ell_j, \xi_j \in A$ se $j \in J$ e $\ell_j, \xi_j \in \mathcal{L}$ se $j \notin J$. Pela operação de grupo em $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ definida em (1.24), segue que

$$(\ell, \sigma) \rtimes_{\mu} (\xi, \eta) = (\ell\mu_{\sigma}(\xi), \sigma\eta) = ((\ell_1\xi_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_N\xi_{\sigma^{-1}(N)}), \sigma\eta).$$

Se $j \in J$, então $\sigma^{-1}(j) \in J$, implicando que $\xi_{\sigma^{-1}(j)} \in A$, de onde segue que $\ell_j\xi_{\sigma^{-1}(j)} \in A$. Por outro lado, se $j \notin J$, então $\ell_j\xi_{\sigma^{-1}(j)} \in \mathcal{L}$. Como \mathcal{Q}_J é um subgrupo de \mathcal{G} , temos que $\sigma\eta \in \mathcal{Q}_J$. Portanto, $(\ell, \sigma) \rtimes_{\mu} (\xi, \eta) \in \Sigma(A, J)$. Seja $((\ell_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, \ell_{\sigma(N)}^{-1}), \sigma^{-1})$ o inverso de (ℓ, σ) em $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Se $j \in J$, então $\ell_{\sigma(j)} \in A$, implicando que $\ell_{\sigma(j)}^{-1} \in A$, pois A é um subgrupo de \mathcal{L} . Agora, se $j \notin J$, então $\ell_{\sigma(j)}^{-1} \in \mathcal{L}$, ou seja,

$$((\ell_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, \ell_{\sigma(N)}^{-1}), \sigma^{-1}) \in \Sigma(A, J).$$

Portanto, $\Sigma(A, J)$ é um subgrupo de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$.

No que segue, apresentamos uma condição suficiente para $\Sigma(A, J)$ ser axial.

Proposição 2.2.7. *Sejam J um bloco e $A \subset \mathcal{L}$ um subgrupo axial agindo em um subespaço vetorial U . Suponha que $\text{Fix}_U(\mathcal{L}) = \{0\}$. Então $\Sigma(A, J)$ é um subgrupo de isotropia axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$.*

Demonstração: Sejam J um bloco e $A \subset \mathcal{L}$ um subgrupo axial. Então existe $z \in U$ tal que $A = \Sigma_z$, onde Σ_z denota o subgrupo de isotropia de z com $\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_U(\Sigma_z) = 1$. Note que $z \neq 0$, pois caso contrário $\Sigma_0 = \mathcal{L}$, o que é uma contradição uma vez que $\text{Fix}_U(\mathcal{L}) = \{0\}$. Seja $x = (x_1, \dots, x_N) \in U^N$, onde

$$x_j = \begin{cases} z, & \text{se } j \in J \\ 0, & \text{se } j \notin J \end{cases}. \quad (2.27)$$

Vamos mostrar inicialmente que $x \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J))$. De fato, seja $((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma) \in \Sigma(A, J)$. Então

$$((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma)x = (\ell_1x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_Nx_{\sigma^{-1}(N)}).$$

Como $\sigma \in \mathcal{Q}_J$, se $j \notin J$, então $\sigma^{-1}(j) \notin J$, implicando que $\ell_jx_{\sigma^{-1}(j)} = 0$. Por outro lado, se $j \in J$, então

$$\ell_jx_{\sigma^{-1}(j)} = \ell_jz,$$

pois $\sigma^{-1}(j) \in J$. Como z é fixado por A e $\ell_j \in A$ temos $\ell_jz = z$. Logo, $((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma)x = x$, como queríamos mostrar.

Agora, vejamos que $\Sigma(A, J)$ é o subgrupo de isotropia do vetor x definido em (2.27). Com efeito, como x é fixado por $\Sigma(A, J)$, segue que $\Sigma(A, J) \subseteq \Sigma_x$. Considere $((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma) \in \Sigma_x$. Então

$$(\ell_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_N x_{\sigma^{-1}(N)}) = ((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma)x = x = (x_1, \dots, x_N).$$

Observe que se $j \in J$, temos que $\sigma^{-1}(j) \in J$, pois caso contrário

$$z = x_j = \ell_j x_{\sigma^{-1}(j)} = 0,$$

o que é uma contradição. Logo, $\sigma^{-1}(j) \in J$ para todo $j \in J$, ou seja, $\sigma^{-1}(J) \subseteq J$. Pela Observação 2.2.4, segue que $\sigma^{-1}(J) = J$ e, assim, $\sigma \in \mathcal{Q}_J$. Nesse caso, $((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), \sigma^{-1}) \in \Sigma(A, J)$ e, como $\Sigma(A, J) \subseteq \Sigma_x$, temos

$$((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}}) = ((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma) \rtimes_{\mu} ((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), \sigma^{-1}) \in \Sigma_x.$$

Portanto, x é fixado por $((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})$, ou seja, $(\ell_1 x_1, \dots, \ell_N x_N) = (x_1, \dots, x_N)$. Logo, se $j \in J$, temos que $\ell_j z = \ell_j x_j = x_j = z$, implicando que $\ell_j \in \Sigma_z = A$. Para $j \notin J$, claramente $\ell_j \in \mathcal{L}$ e, conseqüentemente, $((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}}) \in \Sigma(A, J)$. Como $\sigma \in \mathcal{Q}_J$, então $((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), \sigma) \in \Sigma(A, J)$, de onde segue que

$$((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma) = ((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}}) \rtimes_{\mu} ((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), \sigma) \in \Sigma(A, J).$$

Portanto, $\Sigma_x \subseteq \Sigma(A, J)$, ou seja, $\Sigma(A, J) = \Sigma_x$.

Resta mostrar que $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J))$ é unidimensional. Para tanto, mostremos que

$$\text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J)) = [x],$$

onde $[x]$ é o subespaço de U^N gerado por x dado em (2.27). De fato, como $\Sigma(A, J) = \Sigma_x$, temos que $[x] \subseteq \text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J))$. Por outro lado, seja $(y_1, \dots, y_N) \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J))$. Então $((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma)(y_1, \dots, y_N) = (y_1, \dots, y_N)$, para todo $((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma) \in \Sigma(A, J)$. Em particular, para $\sigma = 1_{\mathcal{G}}$, temos

$$(\ell_1 y_1, \dots, \ell_N y_N) = (y_1, \dots, y_N), \quad (2.28)$$

para todo $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in B_1 \times \dots \times B_N$, com B_j dado em (2.26). Assim, dado $j \in J$ temos que $\ell_j y_j = y_j$, para todo $\ell_j \in A$, implicando que $y_j \in \text{Fix}_U(A)$. Como $A = \Sigma_z$ é axial, temos que $\text{Fix}_U(A) = [z]$. Logo,

$$y_j = \alpha_j z \quad (2.29)$$

para algum $\alpha_j \in \mathbb{R}$ e todo $j \in J$. Ainda por (2.28), dado $j \notin J$ temos $\ell_j y_j = y_j$ para todo $\ell_j \in \mathcal{L}$, o que mostra que $y_j \in \text{Fix}_U(\mathcal{L}) = \{0\}$. Portanto, $y_j = 0$ para todo $j \notin J$. Em resumo, se $(y_1, \dots, y_N) \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J))$, então $y_j = \alpha_j z$ para todo $j \in J$ e $y_j = 0$ para todo $j \notin J$. Mostremos que todos os α_j são iguais. Observe que como $((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), \sigma) \in \Sigma(A, J)$ se $\sigma \in \mathcal{Q}_J$, então

$$(y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(N)}) = ((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), \sigma)(y_1, \dots, y_N) = (y_1, \dots, y_N),$$

implicando que $y_{\sigma^{-1}(j)} = y_j$ para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ e $j \in J$. Considere agora $i \in J$ um índice fixado. Como \mathcal{Q}_J age transitivamente em J , para cada $j \in J$ existe $\eta_j \in \mathcal{Q}_J$ tal que $\eta_j^{-1}(i) = j$. Por (2.29),

$$\alpha_i z = y_i = y_{\eta_j^{-1}(i)} = \alpha_{\eta_j^{-1}(i)} z = \alpha_j z.$$

Como $z \neq 0$, segue que $\alpha_j = \alpha_i$ para todo $j \in J$, de onde concluímos que $(y_1, \dots, y_N) = \alpha_i x \in [x]$. Logo, $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J)) \subseteq [x]$ e, portanto, $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J)) = [x]$. Como $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J))$ é um subespaço vetorial unidimensional, $\Sigma(A, J) \subseteq \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ é um subgrupo de isotropia axial. ■

Como vimos na demonstração da proposição anterior, se $x = (x_1, \dots, x_N) \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J))$, então $x_j = 0$ para todo $j \notin J$. Nesse caso, a célula j é chamada de célula inativa e as demais células são chamadas de ativas.

Exemplo 2.2.8. Considere o sistema de células acopladas do Exemplo 2.1.2. Pelo Exemplo 2.1.7, o produto coroa $(\mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell}) \wr \mathbb{Z}_3$ é um grupo de simetrias de um tal sistema, em que $\mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell} \cong \langle \ell, -\ell \rangle$ e ℓ é dada em (2.11). Note que $\mathbb{Z}_2^\ell = \langle \ell \rangle$ é um subgrupo axial de $\mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell}$, pois

$$\mathbb{Z}_2^\ell = \Sigma_{(1,1)} \quad \text{e} \quad \text{Fix}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2^\ell) = [(1, 1)],$$

com $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Como o grupo de simetrias globais do sistema em questão é

$$\mathbb{Z}_3 = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\},$$

o conjunto de índices $J = \{1, 2, 3\}$ é um bloco, pois \mathbb{Z}_3 mantém J invariante e age transitivamente em J . Nesse caso, $\mathcal{Q}_J = \mathbb{Z}_3$. Observe ainda que $\text{Fix}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell}) = \{(0, 0)\}$, pois $-I_2 \in \mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell}$. Pela Proposição 2.2.7, como $J = \{1, 2, 3\}$ é um bloco e $A = \mathbb{Z}_2^\ell$ é axial, temos que

$$\Sigma(\mathbb{Z}_2^\ell, J) = \mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^\ell \times (\mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell}) \dot{+} \mathbb{Z}_3$$

é um subgrupo axial de $(\mathbb{Z}_2^\ell \times \mathbb{Z}_2^{-\ell}) \wr \mathbb{Z}_3$. Veja que nesse exemplo as células (1), (2) e (3) são ativas e a célula (4) é inativa, em concordância com a Figura 2.2.

Seja $\pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{L} \wr \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ a aplicação projeção definida por $\pi_{\mathcal{G}}(\ell, \sigma) = \sigma$ para todo $(\ell, \sigma) \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ e considere o subespaço vetorial de U^N definido por

$$U_J = \{ (x_1, \dots, x_N) \in U^N; x_j = 0 \text{ se } j \notin J \}. \quad (2.30)$$

O próximo lema mostra que para qualquer subgrupo axial Σ de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ é sempre possível encontrar um bloco no qual $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ age transitivamente.

Lema 2.2.9. *Suponhamos que Σ seja um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Então $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ age transitivamente em algum bloco J para o qual $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma) \subseteq U_J$.*

Demonstração: Seja Σ um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Então existe um vetor não nulo

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$$

tal que $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma) = [x]$. Considere $J = \{j \in \{1, \dots, N\}; x_j \neq 0\}$. Vamos mostrar primeiramente que $\sigma(J) = J$ para todo $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$. De fato, se $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$, então existe $(\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$ tal que $\pi_{\mathcal{G}}((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma) = \sigma$. Como $x \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$, temos que

$$(\ell_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_N x_{\sigma^{-1}(N)}) = ((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma)x = x = (x_1, \dots, x_N),$$

ou seja, $\ell_j x_{\sigma^{-1}(j)} = x_j$ para todo $j \in J$. Desse modo, $\ell_j x_{\sigma^{-1}(j)} \neq 0$, o que implica em $x_{\sigma^{-1}(j)} \neq 0$. Logo, $\sigma^{-1}(j) \in J$ para todo $j \in J$ e, portanto, $\sigma^{-1}(J) \subseteq J$. Pela Observação 2.2.4, temos que $\sigma(J) = J$. Portanto, $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)(J) = J$. Suponhamos, por absurdo, que $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ não aja transitivamente em J . Então existem $i_1, i_2 \in J$ tais que $\sigma(i_1) \neq i_2$ para todo $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$. Defina o conjunto

$$J_1 = \{j \in J ; \sigma(j) \neq i_2, \forall \sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)\}.$$

Note que J_1 é um conjunto não vazio, pois $i_1 \in J_1$. Além disso, $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)(J_1) \subseteq J_1$. De fato, suponha que existem $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ e $j \in J_1$ tais que $\sigma(j) \notin J_1$. Pela definição de J_1 , existe $\eta \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ tal que $\eta(\sigma(j)) = i_2$, o que é uma contradição com o fato de $j \in J_1$. Logo, para todo $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ temos $\sigma(J_1) \subseteq J_1$ e, portanto, $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)(J_1) \subseteq J_1$. Considere agora $J_2 = J - J_1$, ou seja,

$$J_2 = \{j \in J ; \sigma(j) = i_2, \text{ para algum } \sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)\}.$$

O conjunto J_2 também é não vazio, pois $i_2 \in J_2$. Verifiquemos que $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)(J_2) \subseteq J_2$. Para isso, suponha que existem $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ e $j \in J_2$ tais que $\sigma(j) \notin J_2$. Então $\sigma(j) \in J_1$ e, como $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)(J_1) \subseteq J_1$, temos $j = \sigma^{-1}(\sigma(j)) \in J_1$, o que é uma contradição, pois $J_1 \cap J_2$ é vazio. Logo, $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)(J_2) \subseteq J_2$.

Agora defina $y = (y_1, \dots, y_N) \in U^N$ e $z = (z_1, \dots, z_N) \in U^N$ como

$$y_j = \begin{cases} x_j, & \text{se } j \in J_1 \\ 0, & \text{se } j \notin J_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad z_j = \begin{cases} x_j, & \text{se } j \in J_2 \\ 0, & \text{se } j \notin J_2 \end{cases}.$$

Veja que $y, z \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$. Com efeito, seja $((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma) \in \Sigma$. Então $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$. Se $j \in J_1$, então $\sigma^{-1}(j) \in J_1$, pois $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)(J_1) \subseteq J_1$, implicando que $\ell_j y_{\sigma^{-1}(j)} = \ell_j x_j$. Como $x \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$, então $((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})x = x$, de onde segue que $\ell_j x_j = x_j$. Logo, $\ell_j y_{\sigma^{-1}(j)} = x_j$ para todo $j \in J_1$. Se $j \notin J_1$, então $\sigma^{-1}(j) \notin J_1$ e, assim, $\ell_j y_{\sigma^{-1}(j)} = 0$. Portanto,

$$((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma)y = (\ell_1 y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_N y_{\sigma^{-1}(N)}) = (y_1, \dots, y_N) = y,$$

ou seja, $y \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$. Analogamente, é possível provar que $z \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$.

Claramente, y e z são vetores linearmente independentes, uma vez que $J_2 = J - J_1$. Logo, $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$ possui dois vetores linearmente independentes, o que é impossível pois $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$ é unidimensional. Portanto, $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ age transitivamente em J e, como $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)(J) = J$, temos que J é um bloco. Pela construção de J e pela definição de U_J dada em (2.30), temos que $x \in U_J$, o que implica que $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma) = [x] \subseteq U_J$. ■

O próximo teorema caracteriza, a menos de conjugação, os subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em função dos subgrupos axiais de \mathcal{L} . Mais precisamente, vamos mostrar que todo subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ é conjugado a $\Sigma(A, J)$, para algum subgrupo axial A de \mathcal{L} e algum bloco J . Para simplificar a notação, vamos supor, renomeando as células se necessário, que o bloco J cuja existência é garantida pelo Lema 2.2.9 é da forma $J = \{1, \dots, s\}$, com $1 \leq s \leq N$.

Teorema 2.2.10. *Seja Σ um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Considere $x \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$ não nulo tal que $x = (x_1, x_2, \dots, x_s, 0, \dots, 0)$, com $x_j \neq 0$ para todo $1 \leq j \leq s$. Seja $A \subseteq \mathcal{L}$ o subgrupo de isotropia de x_1 e suponha que $\text{Fix}_U(\mathcal{L}) = \{0\}$. Então*

(i) Σ é conjugado a $\Sigma(A, J)$.

(ii) A é axial.

Demonstração: Sejam Σ um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ e $x \in \text{Fix}_{UN}(\Sigma)$ não nulo tal que $x = (x_1, x_2, \dots, x_s, 0, \dots, 0)$. Como x é fixado por Σ , temos que $\Sigma \subseteq \Sigma_x$, onde Σ_x denota o subgrupo de isotropia de x . Pelo Lema 1.3.12, Σ é um subgrupo de isotropia maximal e, como x é não nulo, podemos assumir $\Sigma_x \neq \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Logo, $\Sigma = \Sigma_x$.

Vamos mostrar que Σ é conjugado a $\Sigma(A, J)$, onde $A \subset \mathcal{L}$ é o subgrupo de isotropia de x_1 e $\Sigma(A, J)$ é como em (2.25), ou seja,

$$\Sigma(A, J) = (A^s \times \mathcal{L}^{N-s}) \dot{+} \mathcal{Q}_J,$$

para $\mathcal{Q}_J = \{\sigma \in \mathcal{G}; \sigma(J) = J\}$. Pelo Lema 2.2.9 temos que $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ age transitivamente no bloco $J = \{1, \dots, s\}$. Logo, para cada $j \in J$, existe $(\ell^j, \sigma_j) \in \Sigma$ tal que $\sigma_j^{-1}(j) = 1$, com $\ell^j = (\ell_1^j, \dots, \ell_N^j) \in \mathcal{L}^N$ e $\sigma_j \in \mathcal{G}$. Como $x \in \text{Fix}_{UN}(\Sigma)$, temos $(\ell^j, \sigma_j)x = x$, implicando que

$$x_j = \ell_1^j x_{\sigma_j^{-1}(j)} = \ell_1^j x_1,$$

para todo $1 \leq j \leq s$. Assim, obtemos $\ell_1^1, \dots, \ell_s^s \in \mathcal{L}$ tais que $\ell_1^j x_1 = x_j$. Por simplicidade, escrevemos $\ell_j^j = \ell_j$. Defina $(h, 1_{\mathcal{G}}) = ((\ell_1^{-1}, \dots, \ell_s^{-1}, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}}) \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Pelos Lemas 1.3.3 e 1.3.6, segue que

$$(h, 1_{\mathcal{G}})\Sigma_x(h, 1_{\mathcal{G}})^{-1} = \Sigma_{(h, 1_{\mathcal{G}})x} \quad (2.31)$$

e

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_{UN}((h, 1_{\mathcal{G}})\Sigma_x(h, 1_{\mathcal{G}})^{-1}) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_{UN}(\Sigma) = 1, \quad (2.32)$$

onde $(h, 1_{\mathcal{G}})x = (\ell_1^{-1}x_1, \dots, \ell_s^{-1}x_s, 0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_1, 0, \dots, 0)$. Portanto, $(h, 1_{\mathcal{G}})\Sigma_x(h, 1_{\mathcal{G}})^{-1}$ é um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ e, pelo Lema 1.3.12, é maximal. Denote $z = (h, 1_{\mathcal{G}})x = (x_1, \dots, x_1, 0, \dots, 0)$ e considere

$$(h, 1_{\mathcal{G}}) \rtimes_{\mu} (k, \eta) \rtimes_{\mu} (h, 1_{\mathcal{G}})^{-1} \in (h, 1_{\mathcal{G}})\Sigma_x(h, 1_{\mathcal{G}})^{-1},$$

onde $(k, \eta) \in \Sigma_x$, com $k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathcal{L}^N$ e $\eta \in \mathcal{G}$. Por (2.31),

$$(h, 1_{\mathcal{G}}) \rtimes_{\mu} (k, \eta) \rtimes_{\mu} (h, 1_{\mathcal{G}})^{-1} z = z,$$

implicando que $\ell_j^{-1} k_j \ell_{\eta^{-1}(j)} x_1 = x_1$ para todo $j \in J$. Como A é o subgrupo de isotropia de x_1 , segue que $\ell_j^{-1} k_j \ell_{\eta^{-1}(j)} \in A$. Claramente, $\ell_j^{-1} k_j \ell_{\eta^{-1}(j)} \in \mathcal{L}$ para todo $j \notin J$. Além disso, $\eta \in \mathcal{Q}_J$, pois como $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ deixa J invariante, temos $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma) \subseteq \mathcal{Q}_J$. Logo, $(h, 1_{\mathcal{G}}) \rtimes_{\mu} (k, \eta) \rtimes_{\mu} (h, 1_{\mathcal{G}})^{-1} \in \Sigma(A, J)$, mostrando que

$$(h, 1_{\mathcal{G}})\Sigma_x(h, 1_{\mathcal{G}})^{-1} \subseteq \Sigma(A, J).$$

Como $(h, 1_{\mathcal{G}})\Sigma_x(h, 1_{\mathcal{G}})^{-1}$ é maximal e $\Sigma_x = \Sigma$, temos que $\Sigma(A, J) = (h, 1_{\mathcal{G}})\Sigma(h, 1_{\mathcal{G}})^{-1}$, provando o item (i) do teorema.

Resta mostrar que A é um subgrupo axial de \mathcal{L} . Como A é um subgrupo de isotropia, basta provarmos que $\text{Fix}_U(A)$ é unidimensional. Afirmamos que

$$\text{Fix}_{UN}(\Sigma(A, J)) = Z = \{(\underbrace{w, \dots, w}_{s \text{ vezes}}, 0, \dots, 0); w \in \text{Fix}_U(A)\}.$$

Com efeito, seja $y = (y_1, \dots, y_N) \in \text{Fix}_{UN}(\Sigma(A, J))$. Então $((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_G)y = y$ para todo $((\ell_1, \dots, \ell_N), 1_G) \in \Sigma(A, J)$. Se $j \in J$, então $\ell_j y_j = y_j$ para todo $\ell_j \in A$, implicando que $y_j \in \text{Fix}_U(A)$. Por outro lado, se $j \notin J$ temos $\ell_j y_j = y_j$ para todo $\ell_j \in \mathcal{L}$, ou seja, $y_j \in \text{Fix}_U(\mathcal{L})$. Como $\text{Fix}_U(\mathcal{L}) = \{0\}$, por hipótese, segue que $y_j = 0$ se $j \notin J$. Queremos mostrar agora que $y_j = y_1$ para todo $j \in J$. Note que $((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), \sigma) \in \Sigma(A, J)$ para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$, de modo que

$$((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), \sigma)y = y,$$

ou seja, $y_j = y_{\sigma^{-1}(j)}$ para todo $j \in J$ e $\sigma \in \mathcal{Q}_J$. Como \mathcal{Q}_J age transitivamente em J , para cada $j \in J$ existe $\eta_j \in \mathcal{Q}_J$ tal que $\eta_j^{-1}(j) = 1$. Logo, $y_j = y_{\eta_j^{-1}(j)} = y_1$ para todo $j \in J$, de onde obtemos que

$$y = (\underbrace{y_1, \dots, y_1}_s \text{ vezes}, 0, \dots, 0) \in Z,$$

pois $y_1 \in \text{Fix}_U(A)$. Portanto, $\text{Fix}_{UN}(\Sigma(A, J)) \subseteq Z$.

Reciprocamente, se $y = (w, \dots, w, 0, \dots, 0) \in Z$, onde $w \in \text{Fix}_U(A)$, então

$$((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma)y = (\ell_1 w, \dots, \ell_s w, 0, \dots, 0) = (w, \dots, w, 0, \dots, 0) = y$$

para todo $((\ell_1, \dots, \ell_N), \sigma) \in \Sigma(A, J)$, pois $\ell_j \in A$ para todo $j \in J$ e $\sigma(J) = J$. Logo, $y \in \text{Fix}_{UN}(\Sigma(A, J))$, ou seja, $Z \subseteq \text{Fix}_{UN}(\Sigma(A, J))$ e, portanto, $\text{Fix}_{UN}(\Sigma(A, J)) = Z$. Por (2.32), $\text{Fix}_{UN}(\Sigma(A, J))$ é um subespaço unidimensional. Como $(x_1, \dots, x_1, 0, \dots, 0) \in Z$, pois $A = \Sigma_{x_1}$, então

$$\text{Fix}_{UN}(\Sigma(A, J)) = Z = [(x_1, \dots, x_1, 0, \dots, 0)],$$

implicando que

$$\text{Fix}_U(A) = [x_1],$$

o que prova que $\text{Fix}_U(A)$ é unidimensional. Desse modo, $A \subset \mathcal{L}$ é axial. ■

O próximo exemplo mostra a importância do Teorema 2.2.10 para a caracterização de todos os subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em função apenas dos subgrupos axiais de \mathcal{L} e dos blocos de $\{1, \dots, N\}$. Com esse exemplo mostramos uma consequência natural em sistemas de células acopladas com acoplamento do tipo produto coroa, que é a existência simultânea de células com dinâmica não trivial, enquanto outras permanecem inativas. Para isso, utilizamos o seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [11].

Lema 2.2.11. *Todo subgrupo de D_n é cíclico ou diedral. Mais especificamente, todo subgrupo \mathcal{H} de D_n satisfaz um e, somente um, dos itens a seguir:*

$$(i) \mathcal{H} = \langle R_{\frac{2\pi}{n}}^d \rangle, \text{ onde } d|n;$$

$$(ii) \mathcal{H} = \langle R_{\frac{2\pi}{n}}^d, R_{\frac{2\pi}{n}}^i \kappa \rangle, \text{ onde } d|n \text{ e } 0 \leq i \leq d-1.$$

Demonstração: Veja [11, Theorem 3.1]. ■

Exemplo 2.2.12. Considere $\dot{x} = F(x)$ um sistema de 15 células acopladas, onde $x \in V = \mathbb{C}$ e $F : V^{15} \rightarrow V^{15}$ é um campo de vetores. Suponha que $\mathcal{L} = O(2)$ seja um grupo de simetrias internas de cada célula e que $\mathcal{G} = \mathbf{D}_{15}$ seja um grupo de simetrias globais desse sistema. As ações de $O(2)$ e \mathbf{D}_{15} em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ são definidas por

$$\begin{aligned} \phi : O(2) \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & \psi : \mathbf{D}_{15} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (R_\theta, z) &\mapsto e^{i\theta} z & (R_{\frac{2\pi}{15}}, z) &\mapsto e^{i\frac{2\pi}{15}} z, \\ (\kappa, z) &\mapsto \bar{z} & (\kappa, z) &\mapsto \bar{z} \end{aligned} \quad e$$

onde $\theta \in [0, 2\pi)$, R_θ é a matriz definida em (1.2), κ é a matriz definida em (1.3) e \bar{z} denota o conjugado de $z \in \mathbb{C}$. Observe que $\text{Fix}_{\mathbb{C}}(O(2)) = \{0\}$ e que \mathbf{D}_{15} pode ser visto como um subgrupo de permutações de S_{15} , uma vez que seus movimentos de rotação e de reflexão representam bijeções de \mathbf{D}_{15} em \mathbf{D}_{15} . De fato, renomeamos o conjunto $\{1, \dots, 15\}$ por $X = \{0, \dots, 14\}$ e identificamos os geradores $R_{\frac{2\pi}{15}}$ e κ , respectivamente, com as permutações

$$\sigma = (0 \ 1 \ 2 \ \dots \ 13 \ 14)$$

e

$$\beta = (1 \ 14)(2 \ 13)(3 \ 12)(4 \ 11)(5 \ 10)(6 \ 9)(7 \ 8)$$

de S_{15} . O homomorfismo de grupos injetor $\varphi : \mathbf{D}_{15} \rightarrow S_{15}$ definido por $\varphi(R_{\frac{2\pi}{15}}) = \sigma$ e $\varphi(\kappa) = \beta$ identifica cada elemento de \mathbf{D}_{15} com uma permutação em S_{15} , como mostramos na Tabela 2.1. Em todo o exemplo, vamos confundir as permutações do subgrupo $\varphi(\mathbf{D}_{15})$ com os elementos de \mathbf{D}_{15} .

Pelo Lema 2.2.11, como os divisores de 15 são 1, 3, 5 e 15, os subgrupos de \mathbf{D}_{15} são:

$$\langle R_{\frac{2\pi}{15}}^i \rangle, \quad \langle R_{\frac{2\pi}{15}}^i, \kappa \rangle \quad e \quad \langle R_{\frac{2\pi}{15}}^i, R_{\frac{2\pi}{15}}^j \kappa \rangle,$$

com $i = 1, 3, 5, 15$ e $j = 1, \dots, i-1$. Esses subgrupos são caracterizados, a menos de conjugação, como $\{I_2\}$, \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_{15} , \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_3 , \mathbf{D}_5 e \mathbf{D}_{15} .

Daqui em diante, denotamos a rotação $R_{\frac{2\pi}{15}}$ simplesmente por R . Vamos agora determinar todos os possíveis blocos J de X e os respectivos subgrupos \mathcal{Q}_J associados. Como já mencionamos, os conjuntos unitários $J = \{j\}$, com $0 \leq j \leq 14$, são blocos. De fato, o subgrupo $\mathcal{H} = \{I_2\}$ age transitivamente e mantém cada um desses conjuntos invariantes. Observe na Tabela 2.1 que as únicas permutações que deixam $J = \{0\}$ invariante são I_2 e κ , ou seja, para $J = \{0\}$ temos

$$\mathcal{Q}_J = \langle \kappa \rangle = \mathbf{D}_1.$$

Para o bloco $J = \{1\}$, as únicas permutações que o mantém invariante são I_2 e κR^{13} . Logo, $\mathcal{Q}_J = \langle \kappa R^{13} \rangle \cong \mathbf{D}_1$. De modo análogo, é possível verificar que para cada bloco unitário $J = \{j\}$, com $2 \leq j \leq 14$, temos $\mathcal{Q}_J = \langle \kappa R^i \rangle \cong \mathbf{D}_1$ para um único $i \in \{1, \dots, 12, 14\}$.

Vamos mostrar agora que $\{0, 5, 10\}$, $\{1, 6, 11\}$, $\{2, 7, 12\}$, $\{3, 8, 13\}$ e $\{4, 9, 14\}$ também são blocos. De fato, observe na Tabela 2.1 que dados dois índices $i, j \in \{0, 5, 10\}$, existe uma permutação $\sigma \in \mathbb{Z}_3 = \{I_2, R^5, R^{10}\}$ tal que $\sigma(i) = j$, o que mostra que \mathbb{Z}_3 age transitivamente em $\{0, 5, 10\}$. Além disso, \mathbb{Z}_3 deixa $\{0, 5, 10\}$ invariante. Logo, $J = \{0, 5, 10\}$ é um bloco. Como

Tabela 2.1: Identificação de \mathbf{D}_{15} com um subgrupo de S_{15} .

\mathbf{D}_{15}	Permutação
I_2	id
R	(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14)
R^2	(0 2 4 6 8 10 12 14 1 3 5 7 9 11 13)
R^3	(0 3 6 9 12)(1 4 7 10 13)(2 5 8 11 14)
R^4	(0 4 8 12 1 5 9 13 2 6 10 14 3 7 11)
R^5	(0 5 10)(1 6 11)(2 7 12)(3 8 13)(4 9 14)
R^6	(0 6 12 3 9)(1 7 13 4 10)(2 8 14 5 11)
R^7	(0 7 14 6 13 5 12 4 11 3 10 2 9 1 8)
R^8	(0 8 1 9 2 10 3 11 4 12 5 13 6 14 7)
R^9	(0 9 3 12 6)(1 10 4 13 7)(2 11 5 14 8)
R^{10}	(0 10 5)(1 11 6)(2 12 7)(3 13 8)(4 14 9)
R^{11}	(0 11 7 3 14 10 6 2 13 9 5 1 12 8 4)
R^{12}	(0 12 9 6 3)(1 13 10 7 4)(2 14 11 8 5)
R^{13}	(0 13 11 9 7 5 3 1 14 12 10 8 6 4 2)
R^{14}	(0 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1)
κ	(1 14)(2 13)(3 12)(4 11)(5 10)(6 9)(7 8)
κR	(0 14)(1 13)(2 12)(3 11)(4 10)(5 9)(6 8)
κR^2	(0 13)(1 12)(2 11)(3 10)(4 9)(5 8)(6 7)
κR^3	(0 12)(1 11)(2 10)(3 9)(4 8)(5 7)(13 14)
κR^4	(0 11)(1 10)(2 9)(3 8)(4 7)(5 6)(12 14)
κR^5	(0 10)(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(11 14)(12 13)
κR^6	(0 9)(1 8)(2 7)(3 6)(4 5)(10 14)(11 13)
κR^7	(0 8)(1 7)(2 6)(3 5)(9 14)(10 13)(11 12)
κR^8	(0 7)(1 6)(2 5)(3 4)(8 14)(9 13)(10 12)
κR^9	(0 6)(1 5)(2 4)(7 14)(8 13)(9 12)(10 11)
κR^{10}	(0 5)(1 4)(2 3)(6 14)(7 13)(8 12)(9 11)
κR^{11}	(0 4)(1 3)(5 14)(6 13)(7 12)(8 11)(9 10)
κR^{12}	(0 3)(1 2)(4 14)(5 13)(6 12)(7 11)(8 10)
κR^{13}	(0 2)(3 14)(4 13)(5 12)(6 11)(7 10)(8 9)
κR^{14}	(0 1)(2 14)(3 13)(4 12)(5 11)(6 10)(7 9)

as permutações κ , κR^5 e κR^{10} também deixam $J = \{0, 5, 10\}$ invariante,

$$\mathcal{Q}_J = \langle R^5, \kappa \rangle = \mathbf{D}_3.$$

Do mesmo modo, dados $i, j \in \{1, 6, 11\}$, existe $\sigma \in \mathbb{Z}_3$ tal que $\sigma(i) = j$ e, portanto, \mathbb{Z}_3 age transitivamente em $J = \{1, 6, 11\}$. Como $\mathbb{Z}_3(J) = J$, então J é um bloco. As permutações κR^3 , κR^8 e κR^{13} também deixam $J = \{1, 6, 11\}$ invariante e, assim,

$$\mathcal{Q}_J = \{I_2, R^5, R^{10}, \kappa R^3, \kappa R^8, \kappa R^{13}\}$$

é conjugado a \mathbf{D}_3 . Analogamente, é possível mostrar que \mathbb{Z}_3 age transitivamente e mantém invariante os subconjuntos de índices $\{2, 7, 12\}$, $\{3, 8, 13\}$ e $\{4, 9, 14\}$, os quais são blocos associados a $\mathcal{Q}_J = \mathbf{D}_3$ via conjugação. Observe que como \mathbb{Z}_3 deixa invariante apenas esses subconjuntos

de índices de três elementos, eles são os únicos blocos nos quais \mathbb{Z}_3 age transitivamente.

Afirmamos que $\{0, 3, 6, 9, 12\}$, $\{1, 4, 7, 10, 13\}$ e $\{2, 5, 8, 11, 14\}$ também são blocos. Com efeito, segue da Tabela 2.1 que dados dois índices $i, j \in \{0, 3, 6, 9, 12\}$, existe uma permutação $\sigma \in \mathbb{Z}_5 = \langle R^3 \rangle$ tal que $\sigma(i) = j$, ou seja, \mathbb{Z}_5 age transitivamente em $J = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, o qual é um bloco uma vez que $\mathbb{Z}_5(J) = J$. As permutações $\kappa, \kappa R^3, \kappa R^6, \kappa R^9$ e κR^{12} também mantêm tal J invariante. Logo,

$$\mathcal{Q}_J = \langle R^3, \kappa \rangle = \mathbf{D}_5.$$

Argumentos semelhantes mostram que \mathbb{Z}_5 age transitivamente e mantém invariante os subconjuntos de índices $\{1, 4, 7, 10, 13\}$ e $\{2, 5, 8, 11, 14\}$. Portanto, $J = \{1, 4, 7, 10, 13\}$ e $J = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ são blocos tais que $\mathcal{Q}_J = \mathbf{D}_5$ via conjugação. Como \mathbb{Z}_5 deixa invariante apenas esses subconjuntos de índices, eles são os únicos blocos nos quais \mathbb{Z}_5 age transitivamente. De modo análogo, pela Tabela 2.1 temos o seguinte:

- Os únicos blocos nos quais $\mathbf{D}_1 = \langle \kappa \rangle$ age transitivamente são $J = \{1, 14\}, \{2, 13\}, \{3, 12\}, \{4, 11\}, \{5, 10\}, \{6, 9\}$ e $\{7, 8\}$. Como κ e I_2 são as únicas permutações que deixam cada J invariante, segue que $\mathcal{Q}_J = \mathbf{D}_1$.
- Os únicos blocos nos quais $\mathbf{D}_3 = \langle R^5, \kappa \rangle$ age transitivamente são $J = \{1, 4, 6, 9, 11, 14\}, \{2, 3, 7, 8, 12, 13\}$ e $\{0, 3, 6, 9, 12\}$, com $\mathbf{D}_3(J) = J$. As únicas permutações que mantêm os dois primeiros blocos invariantes são $I_2, R^5, R^{10}, \kappa, \kappa R^5$ e κR^{10} . Nesse caso, $\mathcal{Q}_J = \mathbf{D}_3$. Para $J = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, obtemos $\mathcal{Q}_J = \mathbf{D}_5 = \langle R^3, \kappa \rangle$.
- O único bloco no qual \mathbf{D}_5 age transitivamente é $J = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$, com $\mathbf{D}_5(J) = J$. Além disso, as únicas permutações que mantêm J invariante são $I_2, R^3, R^6, R^9, R^{12}, \kappa, \kappa R^3, \kappa R^6, \kappa R^9$ e κR^{12} . Portanto, $\mathcal{Q}_J = \mathbf{D}_5$.
- O único bloco no qual $\mathbb{Z}_{15} = \langle R \rangle$ age transitivamente é $J = \{0, 1, \dots, 14\}$, com $\mathbb{Z}_{15}(J) = J$. Claramente temos $\mathcal{Q}_J = \mathbf{D}_{15}$.

Na Tabela 2.2 exibimos todos os blocos J de X para o acoplamento do tipo $O(2) \wr \mathbf{D}_{15}$, com os respectivos subgrupos \mathcal{Q}_J associados, a menos de conjugação (segunda e terceira colunas). Na primeira coluna da tabela apresentamos os possíveis subgrupos \mathcal{H} de $\mathcal{G} = \mathbf{D}_{15}$ obtidos utilizando o Lema 2.2.11. Observe que os blocos na segunda coluna são as órbitas de \mathcal{H} em X quando representamos a ação de \mathbf{D}_{15} em \mathbb{C} como

$$\begin{array}{ccc} R_{\frac{2\pi}{15}} : X & \longrightarrow & X \\ i & \longmapsto & i + 1 \pmod{15} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \kappa : X & \longrightarrow & X \\ i & \longmapsto & -i \pmod{15} \end{array} .$$

A fim de utilizarmos o Teorema 2.2.10, precisamos agora determinar, a menos de conjugação, todos os subgrupos axiais de $\mathcal{L} = O(2)$. Para isso, seja $A \subset O(2)$ um subgrupo axial. Obviamente, $I_2 \in A$. Suponhamos que exista $R_\theta \in SO(2) \setminus \{I_2\}$ de modo que $R_\theta \in A$. Tome $z \in \text{Fix}_{\mathbb{C}}(A)$ não nulo e escreva $z = re^{i\alpha}$, com $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $r > 0$. Como $R_\theta \in A$, temos

$$e^{i\theta} z = z,$$

isto é, $re^{i(\theta+\alpha)} = re^{i\alpha}$, o que ocorre se, somente se, $\theta = 0$. Mas isso é uma contradição, pois $R_\theta \neq I_2$. Assim, a menos de conjugação, o único subgrupo axial de $O(2)$ é $\mathbb{Z}_2^\kappa = \langle \kappa \rangle$, uma vez

Tabela 2.2: Classificação dos blocos de X .

\mathcal{H}	Bloco J	\mathcal{Q}_J
I_2	$\{j\}, 0 \leq j \leq 14$	\mathbf{D}_1
\mathbb{Z}_3	$\{0, 5, 10\}, \{1, 6, 11\}, \{2, 7, 12\}, \{3, 8, 13\}, \{4, 9, 14\}$	\mathbf{D}_3
\mathbb{Z}_5	$\{0, 3, 6, 9, 12\}, \{1, 4, 7, 10, 13\}, \{2, 5, 8, 11, 14\}$	\mathbf{D}_5
\mathbb{Z}_{15}	$\{0, 1, \dots, 14\}$	\mathbf{D}_{15}
\mathbf{D}_1	$\{1, 14\}, \{2, 13\}, \{3, 12\}, \{4, 11\}, \{5, 10\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}$	\mathbf{D}_1
\mathbf{D}_3	$\{1, 4, 6, 9, 11, 14\}, \{2, 3, 7, 8, 12, 13\}$	\mathbf{D}_3
	$\{0, 3, 6, 9, 12\}$	\mathbf{D}_5
\mathbf{D}_5	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$	\mathbf{D}_5

que

$$\text{Fix}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_2^{\kappa}) \cong \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema 2.2.10, os subgrupos axiais de $O(2) \wr \mathbf{D}_{15}$ são todos conjugados a

$$\Sigma(\mathbb{Z}_2^{\kappa}, J) = B_1 \times \dots \times B_{15} \dot{+} \mathcal{Q}_J,$$

com $B_j = \mathbb{Z}_2^{\kappa}$ se $j \in J$ e $B_j = O(2)$ se $j \notin J$ para cada bloco J listado na Tabela 2.2. Além disso, segue da demonstração da Proposição 2.2.7 que $\Sigma(\mathbb{Z}_2^{\kappa}, J)$ é o subgrupo de isotropia de $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{14}) \in \mathbb{C}^{15}$, onde $x_j = 0$ se $j \notin J$ e todos os x_j são não nulos e iguais se $j \in J$ (veja (2.27)).

O resultado de nossa classificação pode ser visto na Figura 2.5, onde apresentamos os 14 padrões de células ativas e inativas em um anel de 15 células idênticas acopladas identicamente, com simetria interna $O(2)$ e simetria global \mathbf{D}_{15} . As células ativas estão destacadas em negrito, de acordo com os blocos exibidos na Tabela 2.2.

2.2.3 Matrizes $\Sigma(A, J)$ -equivariantes

Nesta subseção, apresentamos a forma geral das matrizes em $\mathbb{M}_{kN}(\mathbb{R})$ que comutam com os subgrupos axiais $\Sigma(A, J)$ de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, onde A é um subgrupo axial de \mathcal{L} e J é um bloco. Tal caracterização é obtida no Teorema 2.2.16, onde mostramos que essa forma geral depende de ambos os grupos \mathcal{L} e \mathcal{G} , cada um impondo restrições de um modo sistemático.

Dizemos que uma matriz $G \in \mathbb{M}_{kN}(\mathbb{R})$ comuta com $\Sigma(A, J)$ se G comuta com a matriz de representação de cada $(\ell, \sigma) \in \Sigma(A, J)$. Para a demonstração do Teorema 2.2.16 utilizamos os três seguintes lemas. Por simplicidade, vamos denotar igualmente um operador linear e sua matriz com relação a uma base fixada.

Lema 2.2.13. *Seja H um grupo de Lie agindo linearmente em um \mathbb{R} -espaço vetorial $U_1 \oplus U_2$, onde U_1 e U_2 são subespaços H -invariantes. Suponha que U_1 não tenha uma componente H -irreduzível que seja H -isomorfa a uma componente H -irreduzível de U_2 . Seja $P : U_1 \oplus U_2 \rightarrow$*

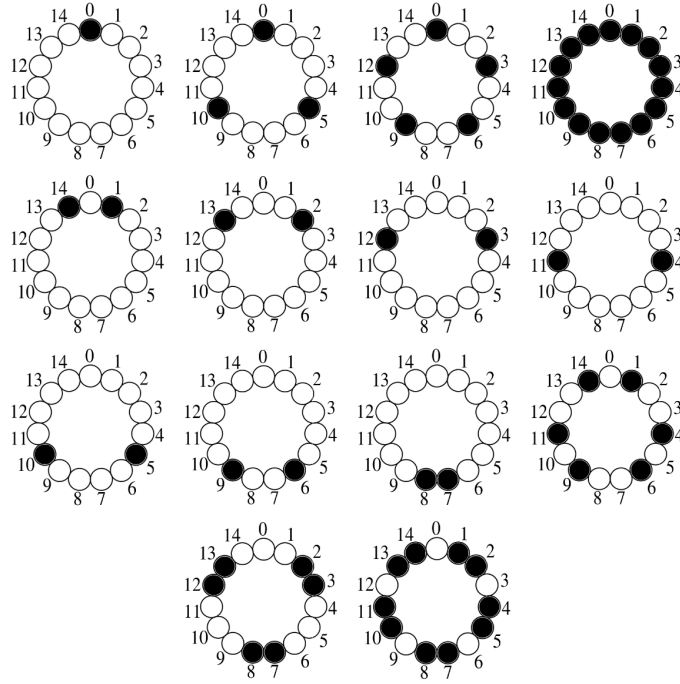


Figura 2.5: Padrões para o acoplamento do tipo $O(2) \wr \mathbf{D}_{15}$.

$U_1 \oplus U_2$ um operador linear H -equivariante. Então

$$P = \text{Diag}(P_1, P_2),$$

onde $P_1 : U_1 \rightarrow U_1$ e $P_2 : U_2 \rightarrow U_2$ são operadores lineares H -equivariantes.

Demonstração: Sejam $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\tilde{\beta} = \{u_{n+1}, \dots, u_m\}$ bases para os subespaços vetoriais U_1 e U_2 , respectivamente. Então $\mathcal{C} = \{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_m\}$ é uma base de $U_1 \oplus U_2$. Denote por $P = (a_{ij})_{m \times m}$ a matriz do operador linear P com relação à base \mathcal{C} . Então

$$P(u_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j + \sum_{l=n+1}^m a_{li} u_l,$$

para todo $i = 1, \dots, m$. Considere agora as transformações lineares definidas por

$$P_1 : U_1 \rightarrow U_1 \quad Q_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

$$u_i \mapsto \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j, \quad u_i \mapsto \sum_{l=n+1}^m a_{li} u_l,$$

$$P_2 : U_2 \rightarrow U_2 \quad Q_2 : U_2 \rightarrow U_1$$

$$u_k \mapsto \sum_{l=n+1}^m a_{lk} u_l \quad \text{e} \quad u_k \mapsto \sum_{j=1}^n a_{jk} u_j$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e $k = n+1, \dots, m$. Logo,

$$P|_{U_1} = P_1 + Q_1 \quad \text{e} \quad P|_{U_2} = P_2 + Q_2,$$

de modo que a matriz de P com relação à base \mathcal{C} é dada por

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & Q_2 \\ Q_1 & P_2 \end{bmatrix}.$$

Como P é H -equivariante, então $P(h \cdot u_j) = h \cdot P(u_j)$ para todo $h \in H$ e $j = 1, \dots, m$. Como a ação de H em $U_1 \oplus U_2$ é linear, segue que

$$P_1(h \cdot u_i) - h \cdot P_1(u_i) = h \cdot Q_1(u_i) - Q_1(h \cdot u_i)$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e

$$P_2(h \cdot u_k) - h \cdot P_2(u_k) = h \cdot Q_2(u_k) - Q_2(h \cdot u_k)$$

para cada $k = n + 1, \dots, m$. Observe que $h \cdot u_i \in U_1$ e $h \cdot u_k \in U_2$, pois U_1 e U_2 são subespaços H -invariantes. Portanto, $P_1(h \cdot u_i)$ e $Q_2(h \cdot u_k)$ pertencem a U_1 , enquanto que $P_2(h \cdot u_k)$ e $Q_1(h \cdot u_i)$ pertencem a U_2 . Pela mesma razão, $h \cdot P_1(u_i)$ e $h \cdot Q_2(u_k)$ pertencem a U_1 , enquanto que $h \cdot P_2(u_k)$ e $h \cdot Q_1(u_i)$ pertencem a U_2 , implicando que

$$P_1(h \cdot u_i) - h \cdot P_1(u_i), \quad h \cdot Q_2(u_k) - Q_2(h \cdot u_k) \in U_1$$

e

$$h \cdot Q_1(u_i) - Q_1(h \cdot u_i), \quad P_2(h \cdot u_k) - h \cdot P_2(u_k) \in U_2$$

para todo $h \in H$. Logo,

$$P_1(h \cdot u_i) - h \cdot P_1(u_i) \in U_1 \cap U_2 = \{0\} \quad \text{e} \quad h \cdot Q_1(u_i) - Q_1(h \cdot u_i) \in U_1 \cap U_2 = \{0\},$$

o que nos mostra que

$$P_1(h \cdot u_i) = h \cdot P_1(u_i) \quad \text{e} \quad Q_1(h \cdot u_i) = h \cdot Q_1(u_i)$$

para todo $h \in H$ e $i = 1, \dots, n$. Portanto, P_1 e Q_1 são H -equivariantes. Analogamente,

$$P_2(h \cdot u_k) - h \cdot P_2(u_k) \in U_1 \cap U_2 = \{0\} \quad \text{e} \quad h \cdot Q_2(u_k) - Q_2(h \cdot u_k) \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

para todo $h \in H$ e $k = n + 1, \dots, m$, implicando que P_2 e Q_2 são H -equivariantes.

Considere uma decomposição de $U_1 = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ em uma soma direta de componentes H -irredutíveis cuja existência é garantida pelo Corolário 1.2.3. Como Q_1 é H -equivariante, segue pelo Lema 1.2.13 que

$$Q_1(W_j) = \{0\} \quad \text{ou} \quad Q_1(W_j) \text{ é } H\text{-isomorfo a } W_j$$

para todo $j = 1, \dots, s$. Em ambos os casos, $Q_1(W_j)$ é um subespaço H -irredutível de U_2 . Pela sobrejetividade e linearidade de Q_1 , temos

$$U_2 = Q_1(W_1) \oplus \dots \oplus Q_1(W_s)$$

uma decomposição de U_2 em componentes H -irredutíveis. Se $Q_j(W_j)$ for H -isomorfo a W_j para algum j , então U_1 terá uma componente H -irredutível que é H -isomorfa a uma componente H -irredutível de U_2 , o que contradiz a hipótese do lema. Assim, $Q_1(W_j) = \{0\}$ para todo

$j = 1, \dots, s$, implicando que $Q_1 \equiv 0$. Analogamente, decompondo U_2 em uma soma direta de componentes H -irredutíveis e utilizando novamente o Lema 1.2.13, podemos concluir que $Q_2 \equiv 0$. Portanto,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

como queríamos demonstrar. ■

Observamos que o lema anterior pode ser estendido a um operador

$$P : U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow U_1 \oplus \dots \oplus U_n,$$

com $n > 2$, em que cada subespaço H -invariante U_i não admite uma componente H -irredutível que seja H -isomorfa a uma componente H -irredutível de U_j , para $i \neq j$.

Para o próximo resultado, lembremos que $1 \leq s \leq N$.

Lema 2.2.14. *Sejam $J = \{1, \dots, s\}$ um bloco e A um subgrupo axial de $\mathcal{L} \subseteq O(k)$. Considere $G \in \mathbb{M}_{kN}(\mathbb{R})$ uma matriz que comuta com $\Sigma(A, J)$ da forma*

$$G = \text{Diag}(G_1, G_2),$$

onde $G_1 = (g_{ij}) \in \mathbb{M}_{sk}(\mathbb{R})$, com $g_{ij} \in \mathbb{M}_k(\mathbb{R})$ para todo $i, j = 1, \dots, s$, e $G_2 \in \mathbb{M}_{k(N-s)}(\mathbb{R})$. Então

$$g_{ij}a = ag_{ij}, \quad g_{ii} = g_{11} \quad e \quad g_{ij} = g_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

para todo $a \in A$, $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ e $i, j = 1, \dots, s$. Além disso, $ag_{ij} = g_{ij}$ para todo $a \in A$ e $i \neq j$.

Demonstração: Como $J = \{1, \dots, s\}$ é um bloco, temos por (2.25) que $\Sigma(A, J) = (A^s \times \mathcal{L}^{N-s}) \dot{+} \mathcal{Q}_J$. Considere o subgrupo $\mathcal{H} = (A^s \times \mathcal{L}^{N-s}) \dot{+} \{1_{\mathcal{G}}\} \subset \Sigma(A, J)$. Dado $a \in A$, como $1_{\mathcal{G}}$ é representado pela matriz identidade, temos por (1.27) que $((\underbrace{a, \dots, a}_{s \text{ vezes}}, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}}) \in \mathcal{H}$

admite a representação matricial dada por

$$B = \begin{bmatrix} X_{ks} & 0 \\ 0 & I_{k(N-s)} \end{bmatrix},$$

onde

$$X_{ks} = \begin{bmatrix} a & 0_{k \times k} & \cdots & a_{0 \times k} \\ 0_{k \times k} & a & \cdots & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & a \end{bmatrix}.$$

Como G comuta com $\Sigma(A, J)$, segue que G comuta com \mathcal{H} . Em particular, $GB = BG$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ks} & 0 \\ 0 & I_{(N-s)k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ks} & 0 \\ 0 & I_{(N-s)k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix},$$

implicando que $G_1 X_{ks} = X_{ks} G_1$. Assim,

$$\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & \cdots & g_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{s1} & \cdots & g_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & a & \cdots & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & a & \cdots & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & \cdots & g_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{s1} & \cdots & g_{ss} \end{bmatrix},$$

de onde segue que

$$g_{ij}a = ag_{ij}$$

para todo $a \in A$ e $i, j = 1, \dots, s$. Novamente por (1.27), identificamos o elemento

$$((\underbrace{a, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}}_{s \text{ vezes}}, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}}) \in \mathcal{H}$$

com a matriz

$$D = \begin{bmatrix} Y_{ks} & 0 \\ 0 & I_{k(N-s)} \end{bmatrix},$$

onde

$$Y_{ks} = \begin{bmatrix} a & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & I_k & \cdots & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & I_k \end{bmatrix}.$$

Como $GD = DG$, por um cálculo simples obtemos $G_1 Y_{sk} = Y_{sk} G_1$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & \cdots & g_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{s1} & \cdots & g_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & I_k & \cdots & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0_{k \times k} & \cdots & 0_{k \times k} \\ 0_{k \times k} & I_k & \cdots & 0_{k \times k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k \times k} & 0_{k \times k} & \cdots & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & \cdots & g_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{s1} & \cdots & g_{ss} \end{bmatrix},$$

o que implica em $ag_{1j} = g_{1j}$ para todo $a \in A$ e $j = 2, \dots, s$. De um modo geral, considerando

$$((\underbrace{1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}}_{l \text{ vezes}}, a, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}}) \in \mathcal{H},$$

para todo $l = 2, \dots, s$, segue pelo mesmo argumento que $ag_{lj} = g_{lj}$ para todo $j = 1, \dots, s$, com $j \neq l$. Portanto, $ag_{ij} = g_{ij}$ para todo $a \in A$ e $i \neq j$.

Usando novamente o fato de G comutar com $\Sigma(A, J)$, temos que G comuta o grupo \mathcal{Q}_J definido em (2.24), ou seja, G comuta com a matriz de representação $[\rho_\sigma]$ definida em (1.13) para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$. Lembremos que $[\rho_\sigma] = (B_{ij})$, em que cada entrada B_{ij} é uma matriz de ordem k tal que

$$B_{ij} = \begin{cases} I_k, & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0_{k \times k}, & \text{se } i \neq \sigma(j) \end{cases},$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$. Denotando as entradas da matriz G_2 também por g_{ij} , temos que

$$(G[\rho_\sigma])_{ij} = \sum_{l=1}^N g_{il} B_{lj} = g_{ir} B_{rj} = g_{ir}$$

com $r = \sigma(j)$ e

$$([\rho_\sigma]G)_{ij} = \sum_{l=1}^N B_{il}g_{lj} = B_{ir}g_{rj} = g_{rj}$$

com $r = \sigma^{-1}(i)$. Como $G[\rho_\sigma] = [\rho_\sigma]G$ para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$, segue que

$$g_{i\sigma(j)} = g_{\sigma^{-1}(i)j}$$

para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ e $i, j = 1, \dots, N$. Em particular, como $\sigma(J) = J$ temos

$$g_{ij} = g_{\sigma(i)\sigma(j)} \quad (2.33)$$

para todo $i, j = 1, \dots, s$. Resta mostrar que $g_{ii} = g_{11}$ para todo $i \in J$. Sabemos que \mathcal{Q}_J age transitivamente em $J = \{1, \dots, s\}$, ou seja, para cada $i = 2, \dots, s$ existe $\sigma_i \in \mathcal{Q}_J$ tal que $\sigma_i(1) = i$. Por (2.33),

$$g_{11} = g_{\sigma_i(1)\sigma_i(1)} = g_{ii}$$

para todo $i = 2, \dots, s$, o que conclui a prova. ■

Para o próximo lema lembremos que, segundo uma determinada ação, todo espaço vetorial V admite uma decomposição da forma (1.19), em que cada W_k é uma componente isotópica de V do tipo U_k , com $U_k \subseteq V$ um subespaço irredutível sob a ação considerada (veja Teorema 1.2.8).

Lema 2.2.15. *Seja A um subgrupo axial de \mathcal{L} agindo em $V = \mathbb{R}^k$. Então $\text{Fix}_V(A)$ é uma componente isotópica de V .*

Demonstração: Como $\text{Fix}_V(A)$ é um subespaço A -invariante unidimensional, então $\text{Fix}_V(A)$ é um subespaço A -irredutível de V . Seja W_1 a soma de todos os subespaços A -invariantes de V que são A -isomorfos a $\text{Fix}_V(A)$. Claramente, $\text{Fix}_V(A) \subseteq W_1$. Mostremos que $W_1 = \text{Fix}_V(A)$.

Seja \mathcal{Z} um subespaço A -invariante de V que é A -isomorfo a $\text{Fix}_V(A)$. Então existe um isomorfismo linear A -equivariante $\varphi : \text{Fix}_V(A) \rightarrow \mathcal{Z}$, de modo que \mathcal{Z} é um subespaço unidimensional de V . Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{z\}$ bases de $\text{Fix}_V(A)$ e \mathcal{Z} , respectivamente. Como φ é uma bijeção, existe um único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\lambda v) = z$. Dado $\ell \in A$,

$$\ell z = \ell \varphi(\lambda v) = \varphi(\ell(\lambda v)) = \varphi(\lambda(\ell v)) = \varphi(\lambda v) = z$$

implicando que $z \in \text{Fix}_V(A)$. Portanto, $\mathcal{Z} = \text{Fix}_V(A)$, o que mostra que

$$W_1 = \text{Fix}_V(A).$$

Portanto, $\text{Fix}_V(A)$ é uma componente isotópica de V . ■

O próximo teorema determina uma caracterização das matrizes em $\mathbb{M}_{kN}(\mathbb{R})$ que comutam com o subgrupo axial $\Sigma(A, J)$ como definido em (2.25). Para compreendê-lo, vamos introduzir duas novas notações com base no grupo $\mathcal{Q}_J = \{\sigma \in \mathcal{G}; \sigma(J) = J\}$, onde $J = \{1, \dots, s\}$, como

segue: dado $\sigma \in \mathcal{Q}_J$, a restrição $\sigma|_J : J \rightarrow J$ é uma bijeção, de modo que $\sigma|_J$ pertence ao grupo S_s das permutações de J . Denotamos por

$$\mathcal{Q}_J|_J = \{\sigma|_J; \sigma \in \mathcal{Q}_J\} \quad (2.34)$$

o subgrupo de S_s formado por tais bijeções. De modo análogo, como provamos na demonstração da Proposição 2.2.5, se $\bar{J} = \{s+1, \dots, N\}$ é o complementar de J em $\{1, \dots, N\}$, então $\sigma(\bar{J}) = \bar{J}$ para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$. Logo, a restrição $\sigma|_{\bar{J}} : \bar{J} \rightarrow \bar{J}$ é uma bijeção e, portanto, $\sigma|_{\bar{J}}$ pertence ao grupo $S_{\bar{J}}$ das permutações de \bar{J} . Denotamos por

$$\mathcal{Q}_J|_{\bar{J}} = \{\sigma|_{\bar{J}}; \sigma \in \mathcal{Q}_J\} \quad (2.35)$$

o subgrupo de $S_{\bar{J}}$ formado por essas bijeções.

Teorema 2.2.16. *Seja \mathcal{G} um subgrupo transitivo de S_N e suponha que $\mathcal{L} \subseteq O(k)$ aja não trivialmente e absolutamente irredutivelmente em $V = \mathbb{R}^k$. Seja $G \in \mathbb{M}_{kN}(\mathbb{R})$ uma matriz que comuta com $\Sigma(A, J)$, onde $A \subseteq \mathcal{L}$ é axial e $J = \{1, \dots, s\}$ é um bloco. Então existe uma base de V^N tal que*

$$G = \text{Diag}(G_1, G_2),$$

com

$$G_1 = \text{Diag}(C, \underbrace{C_1, \dots, C_1}_{s \text{ vezes}}) \quad e \quad G_2 = \text{Diag}(\lambda_{s+1}I_k, \dots, \lambda_N I_k), \quad (2.36)$$

onde

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{11} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{11} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_s(\mathbb{R}),$$

$C_1 \in \mathbb{M}_{(k-1)}(\mathbb{R})$ e $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$. Além disso, C comuta com $\mathcal{Q}_J|_J$ e G_2 comuta com $\mathcal{Q}_J|_{\{s+1, \dots, N\}}$.

Demonstração: Primeiramente observe que $\text{Fix}_V(\mathcal{L}) = \{0\}$. De fato, pelo Lema 1.2.12, como a ação de \mathcal{L} em V é absolutamente irredutível, então V é \mathcal{L} -irredutível. Sendo $\text{Fix}_V(\mathcal{L})$ um subespaço \mathcal{L} -invariante de V , segue que $\text{Fix}_V(\mathcal{L}) = \{0\}$ ou $\text{Fix}_V(\mathcal{L}) = V$. A última igualdade não pode ocorrer pois a ação de \mathcal{L} em V é não trivial. Logo, $\text{Fix}_V(\mathcal{L}) = \{0\}$. Vamos mostrar inicialmente que se $G \in \mathbb{M}_{kN}(\mathbb{R})$ comuta com $\Sigma(A, J)$, então $G = \text{Diag}(G_1, G_2)$, com $G_1 \in \mathbb{M}_{ks}(\mathbb{R})$ e $G_2 \in \mathbb{M}_{k(N-s)}(\mathbb{R})$. Considere

$$\mathcal{H} = (\{1_{\mathcal{L}}\}^s \times \mathcal{L}^{N-s}) \dot{+} \{1_{\mathcal{G}}\}$$

um subgrupo de $\Sigma(A, J) = (A^s \times \mathcal{L}^{N-s}) \dot{+} \mathcal{Q}_J$ e escreva

$$V^N = V^s \times \{0\}^{N-s} \oplus \{0\}^s \times V^{N-s}.$$

Dados $((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell_{s+1}, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}}) \in \mathcal{H}$ e $w_1 = (v_1, \dots, v_s, 0, \dots, 0) \in V^s \times \{0\}^{N-s}$, temos

$$((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell_{s+1}, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})w_1 = (v_1, \dots, v_s, 0, \dots, 0) = w_1 \in V^s \times \{0\}^{N-s}.$$

Além disso, dado $w_2 = (0, \dots, 0, v_{s+1}, \dots, v_N) \in \{0\}^s \times V^{N-s}$, temos

$$((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell_{s+1}, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})w_2 = (0, \dots, 0, \ell_{s+1}v_{s+1}, \dots, \ell_N v_N) \in \{0\}^s \times V^{N-s}.$$

Portanto, $V^s \times \{0\}^{N-s}$ e $\{0\}^s \times V^{N-s}$ são subespaços vetoriais \mathcal{H} -invariantes de V^N . Note que \mathcal{H} age trivialmente em $V^s \times \{0\}^{N-s}$ e não trivialmente em $\{0\}^s \times V^{N-s}$.

Afirmamos agora que nenhuma componente \mathcal{H} -irredutível de $V^s \times \{0\}^{N-s}$ é \mathcal{H} -isomorfa a uma componente \mathcal{H} -irredutível de $\{0\}^s \times V^{N-s}$. Com efeito, suponhamos que exista uma componente \mathcal{H} -irredutível \mathcal{Z}_1 de $V^s \times \{0\}^{N-s}$ \mathcal{H} -isomorfa a uma componente \mathcal{H} -irredutível \mathcal{Z}_2 de $\{0\}^s \times V^{N-s}$. Então existe um isomorfismo linear \mathcal{H} -equivariante $\phi : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$, ou seja, $\phi(hw_1) = h\phi(w_1)$ para todo $h \in \mathcal{H}$ e $w_1 \in \mathcal{Z}_1$. Em particular,

$$((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell_{s+1}, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})\phi(w_1) = \phi(((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell_{s+1}, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})w_1) = \phi(w_1)$$

para todo $((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell_{s+1}, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}}) \in \mathcal{H}$ e $w_1 \in \mathcal{Z}_1$. Portanto, $\phi(w_1) \in \text{Fix}_{\mathcal{Z}_2}(\mathcal{H})$ para todo $w_1 \in \mathcal{Z}_1$. Como \mathcal{Z}_2 é \mathcal{H} -irredutível e \mathcal{H} age não trivialmente em $\{0\}^s \times V^{N-s}$, segue que $\text{Fix}_{\mathcal{Z}_2}(\mathcal{H}) = \{0\}$, pois $\text{Fix}_{\mathcal{Z}_2}(\mathcal{H})$ é um subespaço \mathcal{H} -invariante de \mathcal{Z}_2 . Logo, $\phi \equiv 0$, o que é uma contradição. Portanto, segue a afirmação. Como G comuta com $\Sigma(A, J)$, em particular G comuta com \mathcal{H} . Pelo Lema 2.2.13,

$$G = \text{Diag}(G_1, G_2),$$

onde $G_1 : V^s \times \{0\}^{N-s} \rightarrow V^s \times \{0\}^{N-s}$ e $G_2 : \{0\}^s \times V^{N-s} \rightarrow \{0\}^s \times V^{N-s}$ são operadores lineares \mathcal{H} -equivariantes, ou seja, $G_1 \in \mathbb{M}_{k_s}(\mathbb{R})$ e $G_2 \in \mathbb{M}_{k(N-s)}(\mathbb{R})$ comutam com \mathcal{H} .

Considere os subespaços vetoriais de $\{0\}^s \times V^{N-s}$ definidos por

$$B_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, V, \underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}) = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, v, \underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}); v \in V\}$$

para cada $i \in \bar{J} = \{s+1, \dots, N\}$. Observe que $\{0\}^s \times V^{N-s} = B_{s+1} \oplus \dots \oplus B_N$. Mostremos que $G_2 = \text{Diag}(P_{s+1}, \dots, P_N)$, onde $P_i : B_i \rightarrow B_i$ é um operador linear \mathcal{H} -equivariante, para todo $i \in \bar{J}$. Dados $((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell_{s+1}, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}}) \in \mathcal{H}$ e $w = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, v, \underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}) \in B_i$, temos

$$((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell_{s+1}, \dots, \ell_N), 1_{\mathcal{G}})w = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, \ell_i v, \underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}) \in B_i,$$

o que mostra que B_i é \mathcal{H} -invariante, para todo $i \in \bar{J}$. Para concluirmos que B_i é um subespaço \mathcal{H} -irredutível de $\{0\}^s \times V^{N-s}$, tome W um subespaço \mathcal{H} -invariante de B_i . Então $W = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, v, \underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}); v \in Z\}$ para algum subespaço Z de V . Dados $\ell \in \mathcal{L}$ e $w \in W$, temos que

$$((\underbrace{1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}}_{(i-1) \text{ vezes}}, \ell, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})w = (0, \dots, 0, \ell v, 0, \dots, 0) \in W.$$

Assim, $\ell v \in Z$ para todo $\ell \in \mathcal{L}$ e $v \in Z$, ou seja, Z é um subespaço \mathcal{L} -invariante de V . Como V é \mathcal{L} -irredutível, $Z = \{0\}$ ou $Z = V$. Portanto, $W = \{(0, \dots, 0)\}$ ou $W = B_i$ e, assim, B_i é \mathcal{H} -irredutível, para todo $i \in \bar{J}$.

Afirmamos que B_i e B_j não são \mathcal{H} -isomorfos se $i \neq j$, com $i, j \in \bar{J}$. De fato, suponhamos que exista um isomorfismo linear \mathcal{H} -equivariante $\psi : B_i \rightarrow B_j$ para um par de índices $i, j \in \bar{J}$, com $j \neq i$. Então

$$\psi(\underbrace{((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell, 1_{\mathcal{L}} \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})u}_{(j-1) \text{ vezes}}) = \underbrace{((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell, 1_{\mathcal{L}} \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})\psi(u)}_{(j-1) \text{ vezes}}, \quad (2.37)$$

para todo $\ell \in \mathcal{L}$ e $u \in B_i$. Como ψ é linear, podemos escrever

$$\psi(u) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(j-1) \text{ vezes}}, \psi_j(u), 0, \dots, 0),$$

onde $\psi_j : B_i \rightarrow V$ é uma transformação linear. Para todo $u = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, v, 0, \dots, 0) \in B_i$, como $j \neq i$, temos que

$$(\underbrace{(1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell, 1_{\mathcal{L}} \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})u}_{(j-1) \text{ vezes}}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, v, 0, \dots, 0) = u$$

e, portanto, segue de (2.37) que

$$(0, \dots, 0, \psi_j(u), 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, \ell\psi_j(u), 0, \dots, 0),$$

ou seja, $\ell\psi_j(u) = \psi_j(u)$ para todo $\ell \in \mathcal{L}$ e $u \in B_i$. Logo, $\psi_j(u) \in \text{Fix}_V(\mathcal{L})$ para todo $u \in B_i$. Como $\text{Fix}_V(\mathcal{L}) = \{0\}$, então $\psi_j \equiv 0$ e, assim, $\psi \equiv 0$, o que é uma contradição. Portanto, se $i \neq j$, então B_i e B_j não são \mathcal{H} -isomorfos. Pelo Lema 2.2.13 (mais precisamente, por sua extensão a $\{0\}^s \times V^{N-s} = B_{s+1} \oplus \dots \oplus B_N$), concluímos que

$$G_2 = \text{Diag}(P_{s+1}, \dots, P_N),$$

onde $P_i : B_i \rightarrow B_i$ é um operador linear \mathcal{H} -equivariante, para todo $i \in \bar{J}$, como queríamos demonstrar.

Vamos agora caracterizar cada operador P_i . Observe que dado $u \in B_i$ podemos escrever

$$P_i(u) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, \xi(u), 0, \dots, 0),$$

onde $\xi : B_i \rightarrow V$ é uma transformação linear. Como P_i é \mathcal{H} -equivariante,

$$P_i(\underbrace{((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell, 1_{\mathcal{L}} \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})u}_{(i-1) \text{ vezes}}) = \underbrace{((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell, 1_{\mathcal{L}} \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})P_i(u)}_{(i-1) \text{ vezes}},$$

de onde segue que

$$(0, \dots, 0, \xi(\underbrace{((1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}, \ell, 1_{\mathcal{L}} \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})u}_{(i-1) \text{ vezes}}), 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, \ell\xi(u), 0, \dots, 0),$$

para todo $\ell \in \mathcal{L}$. Portanto, se $u = (0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0) \in B_i$, então

$$\xi(\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, \ell v, 0, \dots, 0) = \ell \xi(\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, v, 0, \dots, 0) \quad (2.38)$$

para todo $\ell \in \mathcal{L}$ e $v \in V$. Para cada $i \in \bar{J}$, seja $\chi_i : V \rightarrow V$ o operador linear definido por

$$\chi_i(v) = \xi(\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, v, 0, \dots, 0)$$

para todo $v \in V$. Segue de (2.38) que $\chi_i(\ell v) = \ell \chi_i(v)$ para todo $\ell \in \mathcal{L}$ e $v \in V$. Portanto, χ_i é \mathcal{L} -equivariante. Como \mathcal{L} age absolutamente irredutivelmente em V , existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que $\chi_i = \lambda_i Id_V$, onde $Id_V : V \rightarrow V$ é operador identidade. Assim,

$$\xi(u) = \xi(\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ vezes}}, v, 0, \dots, 0) = \lambda_i v$$

para todo $u = (0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0) \in B_i$, o que implica que $P_i = \lambda_i Id_{B_i}$ para cada $i \in \bar{J}$. Portanto,

$$G_2 = \text{Diag}(\lambda_{s+1} I_k, \dots, \lambda_N I_k), \quad (2.39)$$

onde I_k denota a matriz identidade de ordem k . Observe que $G_2 = G|_{\{0\}^s \times V^{N-s}}$. Como G comuta com $\Sigma(A, J) = (A^s \times \mathcal{L}^{N-s}) \dot{+} \mathcal{Q}_J$, por hipótese, segue pelo Lema 1.4.5 que G comuta com \mathcal{Q}_J . Assim, dados $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ e $\bar{v} \in \{0\}^s \times V^{N-s}$,

$$\begin{aligned} G_2(\sigma \cdot \bar{v}) &= G|_{\{0\}^s \times V^{N-s}}(\sigma \cdot \bar{v}) = G(\sigma \cdot \bar{v}) \\ &= \sigma \cdot G(\bar{v}) = \sigma \cdot G|_{\{0\}^s \times V^{N-s}}(\bar{v}) = \sigma \cdot G_2(\bar{v}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

mostrando que G_2 comuta com \mathcal{Q}_J . Em outras palavras, G_2 é \mathcal{Q}_J -equivariante.

O próximo objetivo é mostrar que $G_1 = \text{Diag}(C, \underbrace{C_1, \dots, C_1}_{s \text{ vezes}})$, onde $C_1 \in \mathbb{M}_{(k-1)}(\mathbb{R})$ e

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{11} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{11} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

para $c_{ij} \in \mathbb{R}$. De fato, pelo Teorema 1.2.8 e pelo Lema 2.2.15,

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r,$$

onde $W_1 = \text{Fix}_V(A)$ e cada W_l é uma componente isotópica de V para a ação de A . Seja \mathcal{B} uma base ordenada de V constituída pela união das bases de W_1, \dots, W_r . Como $A \subset \mathcal{L}$ é axial, então $\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(A) = 1$. Desse modo, podemos assumir $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ tal que $\text{Fix}_V(A) = [b_1]$. Escreva

$$G_1 = (g_{ij})$$

tal que $g_{ij} \in \mathbb{M}_k(\mathbb{R})$ para todo $i, j \in J = \{1, \dots, s\}$. Pelo Lema 2.2.14, g_{11} comuta com A , implicando que o operador linear associado $g_{11} : V \rightarrow V$ é A -equivariante. Pelo Teorema

1.2.14,

$$g_{11}(W_l) \subseteq W_l$$

para todo $l = 1, \dots, r$. Logo, existem $c_{11} \in \mathbb{R}$ e $C_1 \in \mathbb{M}_{(k-1)}(\mathbb{R})$ tais que

$$g_{11} = \text{Diag}(c_{11}, C_1)$$

com relação à base \mathcal{B} . Do mesmo modo, pelo Lema 2.2.14, g_{ij} comuta com A para todo $i, j \in J$. No caso em que $i = j$, temos $g_{ii} = g_{11}$. No caso em que $i \neq j$, utilizamos o mesmo argumento descrito anteriormente para concluir, com relação à base \mathcal{B} , que

$$g_{ij} = \text{Diag}(c_{ij}, C_{ij}), \quad (2.42)$$

onde $c_{ij} \in \mathbb{R}$ e $C_{ij} \in \mathbb{M}_{(k-1)}(\mathbb{R})$.

Nosso próximo passo é mostrar que $C_{ij} = 0_{(k-1) \times (k-1)}$ para todo $i \neq j$. Para isso, considere a matriz

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times 1} & C_{ij} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_k(\mathbb{R}),$$

para i e j fixados tais que $i \neq j$. Seja

$$a = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \in A,$$

onde $Y_1 \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$, $Y_2 \in \mathbb{M}_{1 \times (k-1)}(\mathbb{R})$, $Y_3 \in \mathbb{M}_{(k-1) \times 1}(\mathbb{R})$ e $Y_4 \in \mathbb{M}_{(k-1)}(\mathbb{R})$. Novamente pelo Lema 2.2.14, temos que $ag_{ij} = g_{ij}$ para todo $a \in A$ e $i \neq j$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{ij} & 0_{1 \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times 1} & C_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ij} & 0_{1 \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times 1} & C_{ij} \end{bmatrix},$$

o que implica em $Y_2 C_{ij} = 0_{1 \times (k-1)}$ e $Y_4 C_{ij} = C_{ij}$. Disso decorre que

$$a D_{ij} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times 1} & C_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times 1} & C_{ij} \end{bmatrix} = D_{ij}.$$

Logo, $a D_{ij}(v) = D_{ij}(v)$ para todo $a \in A$ e $v \in V$, o que mostra que $D_{ij}(v) \in \text{Fix}_V(A) = W_1$. Além disso, as coordenadas de $D_{ij}(v)$ com relação à base \mathcal{B} é da forma $[0 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_k]^t$, com $\beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$, de modo que $D_{ij}(v) \in W_2 \oplus \dots \oplus W_r$. Logo,

$$D_{ij}(v) \in W_1 \cap (W_2 + \dots + W_r) = \{0\}$$

para todo $v \in V$, implicando que $D_{ij} = 0_{k \times k}$. Portanto, $C_{ij} = 0_{(k-1) \times (k-1)}$ para todo $i, j \in J$

distintos e, conseqüentemente,

$$G_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & 0_{1 \times (k-1)} & c_{12} & 0_{1 \times (k-1)} & \cdots & c_{1s} & 0_{1 \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times 1} & C_1 & 0_{(k-1) \times 1} & 0_{(k-1) \times (k-1)} & \cdots & 0_{(k-1) \times 1} & 0_{(k-1) \times (k-1)} \\ c_{21} & 0_{1 \times (k-1)} & c_{11} & 0_{1 \times (k-1)} & \cdots & c_{2s} & 0_{1 \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times 1} & 0_{(k-1) \times (k-1)} & 0_{(k-1) \times 1} & C_1 & \cdots & 0_{(k-1) \times 1} & 0_{(k-1) \times (k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{s1} & 0_{1 \times (k-1)} & c_{s2} & 0_{1 \times (k-1)} & \cdots & c_{11} & 0_{1 \times (k-1)} \\ 0_{(k-1) \times 1} & 0_{(k-1) \times (k-1)} & 0_{(k-1) \times 1} & 0_{(k-1) \times (k-1)} & \cdots & 0_{(k-1) \times 1} & C_1 \end{bmatrix}$$

com relação à base \mathcal{B} . Reordenando \mathcal{B} , se necessário, segue que

$$G_1 = \text{Diag}(C, \underbrace{C_1, \dots, C_1}_{s \text{ vezes}}),$$

onde C é da forma (2.41).

Vamos mostrar agora que a matriz C comuta com $\mathcal{Q}_J|_J$ dado em (2.34), ou seja, C comuta com a matriz de representação de toda permutação $\eta \in \mathcal{Q}_J|_J$. De fato, se $\eta \in \mathcal{Q}_J|_J$, então existe uma permutação $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ tal que $\eta = \sigma|_J$. Pelo Lema 2.2.14, $g_{i\sigma(j)} = g_{\sigma^{-1}(i)j}$ para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ e $i, j \in J$. Por (2.42), temos $c_{i\sigma(j)} = c_{\sigma^{-1}(i)j}$, de onde segue que

$$c_{i\eta(j)} = c_{\eta^{-1}(i)j} \quad (2.43)$$

para todo $\eta \in \mathcal{Q}_J|_J$ e $i, j \in J$. Pelo Exemplo 1.1.5, a matriz de representação A^η de η possui entradas A_{ij}^η tais que

$$A_{ij}^\eta = \begin{cases} 1, & \text{se } i = \eta(j) \\ 0, & \text{se } i \neq \eta(j). \end{cases}$$

Logo,

$$(CA^\eta)_{ij} = \sum_{l=1}^s c_{il} A_{lj}^\eta = c_{i\eta(j)} \quad \text{e} \quad (A^\eta C)_{ij} = \sum_{l=1}^s A_{il}^\eta c_{lj} = c_{\eta^{-1}(i)j}.$$

Utilizando (2.43), obtemos que $(CA^\eta)_{ij} = (A^\eta C)_{ij}$ para todo $i, j \in J$, ou seja, $CA^\eta = A^\eta C$ para todo $\eta \in \mathcal{Q}_J|_J$. Portanto, C comuta com $\mathcal{Q}_J|_J$.

Resta mostrar que G_2 comuta com $\mathcal{Q}_J|_{\bar{J}}$ dado em (2.35), o que significa provar que $G_2|_{V^{N-s}}$ é $\mathcal{Q}_J|_{\bar{J}}$ -equivariante para $\bar{J} = \{s+1, \dots, N\}$. Por (2.39), podemos escrever o operador linear $G_2 : \{0\}^s \times V^{N-s} \rightarrow \{0\}^s \times V^{N-s}$ como

$$G_2(0, \dots, 0, v_{s+1}, \dots, v_N) = (0, \dots, 0, \lambda_{s+1}v_{s+1}, \dots, \lambda_N v_N),$$

para todo $v_{s+1}, \dots, v_N \in V$. Como G_2 é \mathcal{Q}_J -equivariante (veja (2.40)), temos que

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0, \lambda_{s+1}v_{\sigma^{-1}(s+1)}, \dots, \lambda_N v_{\sigma^{-1}(N)}) &= G_2(0, \dots, 0, v_{\sigma^{-1}(s+1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(N)}) \\ &= G_2(\sigma \cdot (0, \dots, 0, v_{s+1}, \dots, v_N)) \\ &= \sigma \cdot G_2(0, \dots, 0, v_{s+1}, \dots, v_N) \\ &= \sigma \cdot (0, \dots, 0, \lambda_{s+1}v_{s+1}, \dots, \lambda_N v_N) \\ &= (0, \dots, 0, \lambda_{\sigma^{-1}(s+1)}v_{\sigma^{-1}(s+1)}, \dots, \lambda_{\sigma^{-1}(N)}v_{\sigma^{-1}(N)}) \end{aligned}$$

para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$. Portanto,

$$\lambda_i = \lambda_{\sigma^{-1}(i)} \quad (2.44)$$

para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ e $i \in \bar{J}$. Assim, dados $\tau \in \mathcal{Q}_J|_{\bar{J}}$ e $(v_{s+1}, \dots, v_N) \in V^{N-s}$, temos que

$$\begin{aligned} G_2|_{V^{N-s}}(\tau \cdot (v_{s+1}, \dots, v_N)) &= G_2|_{V^{N-s}}(v_{\tau^{-1}(s+1)}, \dots, v_{\tau^{-1}(N)}) \\ &= (\lambda_{s+1}v_{\tau^{-1}(s+1)}, \dots, \lambda_Nv_{\tau^{-1}(N)}) \\ &= (\lambda_{\tau^{-1}(s+1)}v_{\tau^{-1}(s+1)}, \dots, \lambda_{\tau^{-1}(N)}v_{\tau^{-1}(N)}) \\ &= \tau \cdot G_2|_{V^{N-s}}(v_{s+1}, \dots, v_N), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Os dois próximos corolários impõem, sob certas condições, restrições no formato das matrizes C e G_2 obtidas no teorema anterior.

Corolário 2.2.17. *Nas condições do Teorema 2.2.16, se \mathcal{Q}_J age transitivamente em $\bar{J} = \{s+1, \dots, N\}$, então $\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_N$. Consequentemente, $G_2 = \lambda_{s+1}I_{k(N-s)}$.*

Demonstração: Lembremos de (2.44) que $\lambda_{\sigma(i)} = \lambda_i$ para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ e $i \in \bar{J}$. Como \mathcal{Q}_J age transitivamente em \bar{J} , para cada $j \in \bar{J}$ existe $\sigma_j \in \mathcal{Q}_J$ tal que $\sigma_j(s+1) = j$. Portanto,

$$\lambda_j = \lambda_{\sigma_j(s+1)} = \lambda_{s+1}$$

para todo $j \in \bar{J}$. Por (2.39), obtemos $G_2 = \text{Diag}(\lambda_{s+1}I_k, \dots, \lambda_{s+1}I_k) = \lambda_{s+1}I_{k(N-s)}$. ■

Corolário 2.2.18. *Nas condições do Teorema 2.2.16, se $\mathcal{G} = S_N$, então $G_2 = \lambda_{s+1}I_{k(N-s)}$ e C em (2.41) é uma matriz simétrica.*

Demonstração: Começamos mostrando que \mathcal{Q}_J age transitivamente em $\bar{J} = \{s+1, \dots, N\}$. De fato, dados dois índices $i, j \in \bar{J}$, temos que $\eta = (i j) \in \mathcal{G} = S_N$. Como $\eta(l) = l$ para todo $l \in J = \{1, \dots, s\}$, então $\eta \in \mathcal{Q}_J$. Portanto, \mathcal{Q}_J age transitivamente em \bar{J} . Pelo Corolário 2.2.17, segue que

$$G_2 = \lambda_{s+1}I_{k(N-s)}.$$

Ainda, pelo Lema 2.2.14 temos $g_{ij} = g_{\sigma(i)\sigma(j)}$ para todo $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ e $i, j \in J$, de onde segue por (2.42) que $c_{ij} = c_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Em particular, como $\sigma = (i j) \in \mathcal{Q}_J$ para todo $i, j \in J$, temos

$$c_{ij} = c_{\sigma(i)\sigma(j)} = c_{ji}$$

para todo $i, j \in J$. Portanto, C é uma matriz simétrica. ■

Capítulo 3

Bifurcação de Pontos de Equilíbrio com Simetria do Tipo Produto Coroa

Nosso interesse no presente capítulo é mostrar a existência de soluções de pontos de equilíbrio para um sistema de N células idênticas acopladas identicamente da forma

$$\dot{x} = F(x, \lambda),$$

onde $F : V^N \times \mathbb{R} \rightarrow V^N$ é uma aplicação suave $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante, com $\mathcal{L} \subseteq O(k)$ o grupo de simetrias internas de cada célula e $\mathcal{G} \subseteq S_N$ o grupo de simetrias globais do sistema. Para isso, vamos utilizar a teoria algébrica desenvolvida no Capítulo 2 juntamente com a teoria de bifurcação equivariante apresentada em [20, XIII]. O ponto chave para a obtenção dos resultados é a existência de um subgrupo de isotropia axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$.

Este capítulo é dividido como segue: na Seção 3.1, apresentamos o Lema dos Ramos Equivariantes (Teorema 3.1.6), um resultado útil no estudo de problemas de bifurcação de pontos de equilíbrio com simetrias. Na Seção 3.2, utilizamos o Lema dos Ramos Equivariantes para provar a existência e a unicidade de um ramo de soluções simétricas para $F(x, \lambda) = 0$ (Teorema 3.2.3). Finalizamos essa seção com dois exemplos, onde elucidamos o Teorema 3.2.3 e descrevemos a forma geral das matrizes jacobianas de F que comutam com os subgrupos axiais de $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_2 \wr S_3$, respectivamente.

Daqui em diante, Γ denota um grupo de Lie (linear) agindo linearmente em \mathbb{R}^n segundo a ação $(\gamma, x) \mapsto \gamma x$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, Γ age trivialmente em \mathbb{R} , de modo que sua ação em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é dada por

$$\gamma(x, \lambda) = (\gamma x, \lambda).$$

Em toda parte, vamos confundir $\gamma \in \Gamma$ com o operador linear inversível $\rho_\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido como $\rho_\gamma(x) = \gamma x$. As principais referências neste capítulo são [13] e [20].

3.1 O Lema dos Ramos Equivariantes

Nesta seção, vamos mostrar como as simetrias de um problema de bifurcação podem impor restrições na forma de suas soluções e no comportamento do sistema em torno de seu ponto de bifurcação. O principal resultado desta seção é o Teorema 3.1.6, que garante a existência de soluções com subgrupo de isotropia $\Sigma \subseteq \Gamma$ para um problema de bifurcação Γ -equivariante,

desde que Σ seja axial.

Definição 3.1.1. *Sejam $v_0 \in \mathbb{R}^n$ e $F : U_1 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave (de classe C^∞) definida em uma vizinhança U_1 de v_0 . O germe de F em v_0 , denotado por $F : (\mathbb{R}^n, v_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$, é o conjunto de todas as aplicações suaves $G : U_2 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que existe uma vizinhança $U \subseteq U_1 \cap U_2$ de v_0 em que $F|_U = G|_U$.*

Dado Γ um grupo de Lie agindo em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, considere um sistema autônomo de EDOs da forma

$$\dot{x} = F(x, \lambda), \quad (3.1)$$

onde $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um germe de uma aplicação suave Γ -equivariante, $x = x(t)$ é a variável de estado e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro auxiliar, chamado de parâmetro de bifurcação.

Observe que como F é Γ -equivariante, então x é uma solução de (3.1) se, e somente se, γx é uma solução de (3.1), para todo $\gamma \in \Gamma$. De fato, se $\dot{x} = F(x, \lambda)$, então

$$(\dot{\gamma}x) = \gamma \dot{x} = \gamma F(x, \lambda) = F(\gamma x, \lambda),$$

para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, onde a última igualdade segue da Γ -equivariância de F . A recíproca é trivial. Em outras palavras, o sistema (3.1) não distingue soluções na mesma órbita.

Dizemos que $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é um ponto de equilíbrio de (3.1) se

$$F(x, \lambda) = 0. \quad (3.2)$$

A Γ -equivariância de F nos garante que o conjunto dos pontos de equilíbrio de (3.1) constitui um subespaço Γ -invariante de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, pois se $F(x, \lambda) = 0$, então

$$F(\gamma(x, \lambda)) = F(\gamma x, \lambda) = \gamma F(x, \lambda) = 0.$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, seja $n(\lambda)$ o número de x 's para os quais (x, λ) é uma solução de $F(x, \lambda) = 0$. Estamos interessados em analisar como variam as soluções de F em uma vizinhança de uma solução (x_0, λ_0) . Para esse estudo local, suponhamos que F esteja definido em alguma vizinhança de (x_0, λ_0) e que $n(\lambda)$ denote apenas o número de soluções nessa vizinhança. Temos então o seguinte:

Definição 3.1.2. *Seja $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que $F(x_0, \lambda_0) = 0$. Dizemos que (x_0, λ_0) é um ponto de bifurcação da equação (3.2) se, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, o número de soluções $n(\lambda)$ mudar conforme λ varia em uma vizinhança de λ_0 .*

Note que se (x_0, λ_0) é um ponto de bifurcação, então $\det(dF)_{(x_0, \lambda_0)} = 0$, onde $(dF)_{(x_0, \lambda_0)}$ denota a matriz jacobiana de $F = (F_1, \dots, F_n)$ com relação a $x = (x_1, \dots, x_n)$, ou seja,

$$(dF)_{(x_0, \lambda_0)} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0, \lambda_0) \right)_{n \times n}.$$

De fato, pelo Teorema da Função Implícita (veja [24, Cap. 6, Teorema 6]), se $\det(dF)_{(x_0, \lambda_0)} \neq 0$, então $F(x, \lambda) = 0$ pode ser resolvida unicamente para x como uma função de λ , ou seja, para cada λ próximo de λ_0 , existe uma única solução de $F(x, \lambda) = 0$ próxima de x_0 . Neste caso, $n(\lambda) = 1$ para todo λ próximo de λ_0 , o que implica que (x_0, λ_0) não é um ponto de bifurcação.

Mais ainda, vamos assumir que se (x_0, λ_0) é um ponto de bifurcação, então

$$(dF)_{(x_0, \lambda_0)} = 0_{n \times n}.$$

Isso é válido pois se $(dF)_{(x_0, \lambda_0)}$ for não nula, podemos usar o método de redução de Liapunov-Schmidt com simetrias (para mais detalhes, veja [19, VII, §3]) para reduzir F a uma aplicação associada cuja matriz jacobiana se anula. Assim sendo, introduzimos a seguinte definição:

Definição 3.1.3. *Um problema de bifurcação com grupo de simetrias Γ é um germe Γ -equivariante $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (x_0, \lambda_0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo $F(x_0, \lambda_0) = 0$ e $(dF)_{(x_0, \lambda_0)} = 0_{n \times n}$.*

Daqui em diante, assumimos sem perda de generalidade que $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$. O próximo resultado, cuja prova será omitida, identifica uma classe “genérica” de problemas de bifurcação com simetrias.

Proposição 3.1.4. *Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma família a um parâmetro de aplicações Γ -equivariantes tais que $F(0, 0) = 0$. Seja $W = \ker(dF)_{(0,0)}$. Então, genericamente, a ação de Γ em W é absolutamente irredutível.*

Demonstração: Veja [10, XIII, Proposition 3.2] para um esboço da prova. ■

Se F em (3.1) é um problema de bifurcação Γ -equivariante, então $F(0, 0) = 0$ e $(dF)_{(0,0)} = 0_{n \times n}$. Neste caso, pela Proposição 3.1.4, podemos assumir que genericamente a ação de Γ em \mathbb{R}^n é absolutamente irredutível, o que nos garante que

$$(dF)_{(0,\lambda)} = c(\lambda)I_n \tag{3.3}$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $c(\lambda) \in \mathbb{R}$ e I_n denota a matriz identidade de ordem n . De fato, segue da Γ -equivariância de F que

$$F(\rho_\gamma(x), \lambda) = \rho_\gamma(F(x, \lambda))$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Pela regra da cadeia, como $\rho_\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear, temos

$$(dF)_{(\rho_\gamma(x), \lambda)} \rho_\gamma = \rho_\gamma(dF)_{(x, \lambda)},$$

onde ρ_γ na última igualdade está denotando a matriz do operador ρ_γ com relação a uma base de \mathbb{R}^n fixada. Tomando $x = 0$ temos

$$(dF)_{(0,\lambda)} \rho_\gamma = \rho_\gamma(dF)_{(0,\lambda)}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Isso significa que a matriz jacobiana $(dF)_{(0,\lambda)}$ comuta com Γ , para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Como Γ age absolutamente irredutivelmente em \mathbb{R}^n , as únicas matrizes que comutam com Γ são as múltiplas escalares da identidade. Logo,

$$(dF)_{(0,\lambda)} = c(\lambda)I_n \tag{3.4}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave. Como $(dF)_{(0,0)} = 0_{n \times n}$, temos $c(0) = 0$.

A próxima proposição nos fornece um modo de determinar soluções para (3.2) correspondentes a uma classe especial de subgrupos de isotropia de Γ , os subgrupos axiais. Para o que segue, $F_\lambda : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota a aplicação derivada de $F = (F_1, \dots, F_n)$ com relação a λ cujas funções coordenadas são as derivadas parciais de $F_i : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ com relação a λ , para $i = 1, \dots, n$.

Proposição 3.1.5. *Seja Γ um grupo de Lie agindo em \mathbb{R}^n tal que*

$$(i) \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Gamma) = \{0\};$$

(ii) $\Sigma \subset \Gamma$ é um subgrupo axial;

(iii) $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um problema de bifurcação Γ -equivariante satisfazendo

$$(dF_\lambda)_{(0,0)}(x_0) \neq 0, \quad (3.5)$$

para todo $x_0 \in \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$ não nulo.

Então existe um único ramo de soluções suaves da forma $(tx_0, \lambda(t))$ para a equação $F(x, \lambda) = 0$.

Demonstração: Seja $(x, \lambda) \in \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma) \times \mathbb{R}$. Como F é um problema de bifurcação Γ -equivariante, então

$$\gamma F(x, \lambda) = F(\gamma x, \lambda) = F(x, \lambda)$$

para todo $\gamma \in \Sigma$, onde a última igualdade segue pois $x \in \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$. Assim, $F(x, \lambda) \in \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$, o que mostra que $F(\text{Fix}_{\mathbb{R}^n} \times \mathbb{R}) \subseteq \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$. Logo,

$$F|_{\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma) \times \mathbb{R}} : \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma) \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$$

está bem definida. Como $\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma) = 1$, podemos escrever

$$F(tx_0, \lambda) = h(t, \lambda)x_0$$

para $x_0 \in \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$ não nulo e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Como $\gamma F(0, \lambda) = F(0, \lambda)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $F(0, \lambda) \in \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Gamma) = \{0\}$, ou seja, $F(0, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, $h(0, \lambda) = 0$. Em termos da expansão de Taylor de h , podemos reescrever

$$F(tx_0, \lambda) = k(t, \lambda)tx_0, \quad (3.6)$$

para alguma função $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Derivando (3.6) com relação a t , obtemos

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t, \lambda)tx_0 + k(t, \lambda)x_0 = (dF)_{(tx_0, \lambda)}(x_0).$$

Calculando em $t = \lambda = 0$ e lembrando que $(dF)_{(0,0)} = 0_{n \times n}$, temos que

$$k(0, 0)x_0 = (dF)_{(0,0)}(x_0) = 0.$$

Como x_0 é não nulo, então $k(0, 0) = 0$. Além disso, derivando (3.6) com relação a λ e depois com relação a t , obtemos

$$\frac{\partial^2 k}{\partial t \partial \lambda}(t, \lambda)tx_0 + \frac{\partial k}{\partial \lambda}(t, \lambda)x_0 = (dF_\lambda)_{(tx_0, \lambda)}(x_0).$$

Calculando em $t = \lambda = 0$ temos

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda}(0, 0)x_0 = (dF_\lambda)_{(0,0)}(x_0) \neq 0,$$

por hipótese. Logo, $\frac{\partial k}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única função $\lambda : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $\lambda(0) = 0$ e $k(t, \lambda(t)) = 0$ para todo $t \in U$. Portanto,

$$F(tx_0, \lambda(t)) = k(t, \lambda(t))tx_0 = 0$$

e, conseqüentemente, $(tx_0, \lambda(t))$ é um ramo de soluções suaves de $F(x, \lambda) = 0$, com $t \in U$. ■

O próximo teorema é um caso particular da Proposição 3.1.5 e fornece a base de muitos resultados em teoria de bifurcação para problemas com simetria.

Teorema 3.1.6. (*Lema dos Ramos Equivariantes*) *Suponha que Γ aja absolutamente irredutivelmente e não trivialmente em \mathbb{R}^n e seja $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ um problema de bifurcação Γ -equivariante¹ satisfazendo $c'(0) \neq 0$. Se Σ é um subgrupo axial de Γ , então existe um único ramo de soluções suaves para $F(x, \lambda) = 0$ tal que o subgrupo de isotropia de cada solução é Σ .*

Demonstração: Pelo Lema 1.2.12, o espaço \mathbb{R}^n é Γ -irredutível. Como $\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Gamma)$ é um subespaço vetorial Γ -invariante de \mathbb{R}^n e a ação de Γ em \mathbb{R}^n é não trivial, segue que

$$\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Gamma) = \{0\}.$$

Agora, derivando (3.4) com relação λ e calculando em $\lambda = 0$, obtemos que

$$\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \lambda \partial x_j}(0, 0) \right)_{n \times n} = c'(0)I_n,$$

onde $F_i : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ denotam as funções coordenadas de F , para $i = 1, \dots, n$. Como F é de classe C^∞ , pelo Teorema de Schwarz ([24, Cap. 3, Teorema 4]) segue que

$$(dF_\lambda)_{(0,0)} = \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial \lambda}(0, 0) \right)_{n \times n} = \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \lambda \partial x_j}(0, 0) \right)_{n \times n},$$

o que implica em $(dF_\lambda)_{(0,0)} = c'(0)I_n$. Por hipótese, $c'(0) \neq 0$ e, assim,

$$(dF_\lambda)_{(0,0)}(x_0) \neq 0$$

para todo $x_0 \in \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$ não nulo. Portanto, pela Proposição 3.1.5, existe um único ramo de soluções suaves $(tx_0, \lambda(t))$ para $F(x, \lambda) = 0$. Claramente, o subgrupo de isotropia de cada solução para $t \neq 0$ é Σ , pois como a ação de Γ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é linear e $x_0 \in \text{Fix}_{\mathbb{R}}(\Sigma)$, temos que

$$\gamma(tx_0, \lambda(t)) = (\gamma(tx_0), \lambda(t)) = (t(\gamma x_0), \lambda(t)) = (tx_0, \lambda(t))$$

¹Lembremos que se a ação de Γ em \mathbb{R}^n é absolutamente irredutível e F é um problema de bifurcação Γ -equivariante, então $(dF)_{(0,\lambda)} = c(\lambda)I_n$ para alguma função suave $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $c(0) = 0$.

para todo $\gamma \in \Sigma$. Logo, $\Sigma \subseteq \Sigma_{(tx_0, \lambda(t))}$. Pelo Lema 1.3.12, segue que Σ é maximal e, portanto, $\Sigma = \Sigma_{(tx_0, \lambda(t))}$. ■

Observe que a vantagem da Proposição 3.1.5 sobre o Teorema 3.1.6 e que ela não exige que a ação de Γ em \mathbb{R}^n seja absolutamente irreduzível. Entretanto, ela impõe uma condição de não degenerescência, a saber a exigência (3.5), para cada subgrupo axial de Γ . Como vimos na demonstração do Teorema 3.1.6, quando Γ age absolutamente irreduzivelmente em \mathbb{R}^n ,

$$(dF_\lambda)_{(0,0)}(x_0) = c'(0)x_0$$

para todo $x_0 \in \text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma)$ não nulo. Consequentemente, $(dF_\lambda)_{(0,0)}(x_0) \neq 0$ se, e somente se, $c'(0) \neq 0$. No entanto, a vantagem da hipótese $c'(0) \neq 0$ sobre (3.5) é que ela vale simultaneamente para todos os subgrupos de Γ .

Portanto, genericamente, problemas de bifurcação com grupo de simetrias Γ têm soluções correspondendo a todos os subgrupos axiais de Γ , os quais são maximais (Lema 1.3.12). Esse processo é chamado “quebra de simetria”. Mais especificamente, como F é Γ -equivariante e $\text{Fix}_{\mathbb{R}^n}(\Gamma) = \{0\}$, então F admite a solução $(0, \lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (Proposição 1.3.10), a qual obviamente tem Γ como subgrupo de isotropia. Pelo Lema dos Ramos Equivariantes, obtemos um conjunto de soluções não triviais (x, λ) , com $x \neq 0$, que possui um subgrupo de isotropia $\Sigma \subsetneq \Gamma$. Portanto, o ramo de pontos de equilíbrio cuja existência é garantida pelo Teorema 3.1.6 “quebra” a simetria de Γ para Σ .

Exemplo 3.1.7. Considere a ação de \mathbf{D}_n em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{D}_n \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (R_{\frac{2\pi}{n}}, z) &\mapsto e^{i\frac{2\pi}{n}} z, \\ (\kappa, z) &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

onde $R_{\frac{2\pi}{n}}$ é a matriz de rotação de ângulo $\frac{2\pi}{n}$ e κ é a reflexão (1.3). O subgrupo de isotropia de todo $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ é o subgrupo \mathbb{Z}_2^κ gerado por κ . Claramente, $\text{Fix}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2^\kappa) = \mathbb{R} \times \{0\}$ é unidimensional. Portanto, usando o Lema dos Ramos Equivariantes concluímos que, genericamente, problemas de bifurcação \mathbf{D}_n -equivariantes possuem soluções com simetria \mathbb{Z}_2^κ .

3.2 O Lema dos Ramos Equivariantes em Sistemas com Simetria Produto Coroa

Nesta seção, vamos utilizar o Teorema 3.1.6 para provar a existência e a unicidade de um ramo de soluções de pontos de equilíbrio para um sistema de N células idênticas acopladas identicamente da forma

$$\dot{x} = F(x, \lambda), \tag{3.7}$$

onde $F : (V^N \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V^N$ é um germe de um campo de vetores suave $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante, com $V = \mathbb{R}^k$, $x = (x_1, \dots, x_N)$ a variável de estado e λ o parâmetro de bifurcação. Lembremos

que $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ age trivialmente em \mathbb{R} , ou seja,

$$(\tilde{\ell}, \sigma)(x, \lambda) = ((\tilde{\ell}, \sigma)x, \lambda) = (\ell_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \ell_N x_{\sigma^{-1}(N)}, \lambda) \quad (3.8)$$

para todo $\tilde{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathcal{L}^N$, $\sigma \in \mathcal{G}$ e $(x, \lambda) \in V^N \times \mathbb{R}$.

Denotando $F = (F_1, \dots, F_N)$, segue de (2.2) que

$$F_j(x, \lambda) = f_j(x_j, \lambda) + h_j(x, \lambda)$$

para cada $1 \leq j \leq N$, onde $f_j : (V \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V$ governa a dinâmica interna da célula j e $h_j : (V^N \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V$ descreve o acoplamento da célula j com as demais células. Como as células são idênticas, temos que $f_j = f$ para todo $1 \leq j \leq N$. Portanto,

$$F_j(x, \lambda) = f(x_j, \lambda) + h_j(x, \lambda). \quad (3.9)$$

Assumindo que \mathcal{G} aja transitivamente em $\{1, \dots, N\}$, então para cada $j = 2, \dots, N$ fixado existe uma permutação $\sigma_j \in \mathcal{G}$ tal que $\sigma_j^{-1}(1) = j$. Como F é \mathcal{G} -equivariante,

$$(F_1(\sigma \cdot x, \lambda), \dots, F_N(\sigma \cdot x, \lambda)) = F(\sigma \cdot x, \lambda) = \sigma \cdot F(x, \lambda) = (F_{\sigma^{-1}(1)}(x, \lambda), \dots, F_{\sigma^{-1}(N)}(x, \lambda))$$

para todo $\sigma \in \mathcal{G}$ e $x \in V^N$. Em particular, para $\sigma_j \in \mathcal{G}$ tal que $\sigma_j^{-1}(1) = j$, temos

$$F_j(x, \lambda) = F_{\sigma_j^{-1}(1)}(x, \lambda) = F_1(\sigma_j \cdot x, \lambda) = F_1((x_j, x_{\sigma_j^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma_j^{-1}(N)}), \lambda), \quad (3.10)$$

para todo $j = 2, \dots, N$. Logo, as aplicações coordenadas $F_j : (V^N \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V$ dependem apenas de F_1 .

A partir de agora, vamos distinguir uma parte de F_1 que depende apenas da variável x_1 e possivelmente do parâmetro λ . Em outras palavras, assumimos

$$F_1(x, \lambda) = f(x_1, \lambda) + h_1(x, \lambda) \quad (3.11)$$

para todo $(x, \lambda) \in V^N \times \mathbb{R}$, onde

$$f(0, \lambda) = h_1((x_1, 0, \dots, 0), \lambda) = 0 \quad (3.12)$$

para todo $x_1 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Segue de (3.10) e de (3.11) que

$$F_j(x, \lambda) = f(x_j, \lambda) + h_1(\sigma_j \cdot x, \lambda), \quad (3.13)$$

para todo $(x, \lambda) \in V^N \times \mathbb{R}$ e $j = 2, \dots, N$, onde $\sigma_j \cdot x = (x_j, x_{\sigma_j^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma_j^{-1}(N)})$. Em outras palavras, a aplicação h_j em (3.9) satisfaz $h_j(x, \lambda) = h_1(\sigma_j \cdot x, \lambda)$ para algum $\sigma_j \in \mathcal{G}$.

Observação 3.2.1. Se $\text{Fix}_V(\mathcal{L}) = \{0\}$, então a \mathcal{L}^N -equivariância de F com respeito à variável $x \in V^N$ garante a não existência de termos constantes não nulos em cada função coordenada F_1, \dots, F_N . De fato, se $\text{Fix}_V(\mathcal{L}) = \{0\}$, então $\text{Fix}_{V^N}(\mathcal{L}^N) = \{0\}$. Segue da Proposição 1.3.10 que $F(0, \lambda) = 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto, $F_j(0, \lambda) = 0$ para cada $1 \leq j \leq N$, implicando que F_j não possui termos constantes não nulos, ou seja, F_j não admite monômios que dependam somente de λ . Assim, não há perda de generalidade em assumirmos que f e h_1 definidas em

(3.11) satisfaçam $f(0, \lambda) = h_1((x_1, 0, \dots, 0), \lambda) = 0$ para todo $x_1 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Destacamos a seguir algumas propriedades de simetrias que os germes das aplicações f e h_1 definidas em (3.11) satisfazem com relação à ação de \mathcal{L} em V .

Proposição 3.2.2. *Seja $F = (F_1, \dots, F_N) : (V^N \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V^N$ um germe de uma aplicação $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante, onde $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ age em V^N como em (2.19) e em $V^N \times \mathbb{R}$ como em (3.8). Suponha que F_1 seja escrito como em (3.11). Então f é \mathcal{L} -equivariante e h_1 é \mathcal{L} -equivariante em x_1 e \mathcal{L} -invariante em x_2, \dots, x_N .*

Demonstração: Por hipótese, como F é $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante, temos

$$F((\tilde{\ell}, \sigma)(x, \lambda)) = F((\tilde{\ell}, \sigma)x, \lambda) = (\tilde{\ell}, \sigma)F(x, \lambda) \quad (3.14)$$

para todo $(\tilde{\ell}, \sigma) \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ e $(x, \lambda) \in V^N \times \mathbb{R}$. Em particular, para $(\tilde{\ell}, \sigma) = ((\ell, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, segue que

$$F((\ell x_1, x_2, \dots, x_N), \lambda) = (\ell F_1((x_1, \dots, x_N), \lambda), \dots, F_N((x_1, \dots, x_N), \lambda)),$$

e, portanto, $F_1((\ell x_1, \dots, x_N), \lambda) = \ell F_1((x_1, \dots, x_N), \lambda)$. Por (3.11), temos que

$$f(\ell x_1, \lambda) + h_1((\ell x_1, \dots, x_N), \lambda) = \ell f(x_1, \lambda) + \ell h_1((x_1, \dots, x_N), \lambda) \quad (3.15)$$

para todo $\ell \in \mathcal{L}$, $(x_1, \dots, x_N) \in V^N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $x_2 = \dots = x_N = 0$, então

$$f(\ell x_1, \lambda) + h_1((\ell x_1, 0, \dots, 0), \lambda) = \ell f(x_1, \lambda) + \ell h_1((x_1, 0, \dots, 0), \lambda)$$

e, por (3.12), vale que

$$f(\ell x_1, \lambda) = \ell f(x_1, \lambda) \quad (3.16)$$

para todo $\ell \in \mathcal{L}$ e $(x_1, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$. Portanto, f é uma aplicação \mathcal{L} -equivariante, de modo que (3.15) torna-se

$$h_1((\ell x_1, \dots, x_N), \lambda) = \ell h_1((x_1, \dots, x_N), \lambda)$$

para todo $\ell \in \mathcal{L}$ e $((x_1, x_2, \dots, x_N), \lambda) \in V^N \times \mathbb{R}$. Logo, h_1 é \mathcal{L} -equivariante na coordenada x_1 .

Resta mostrar que h_1 é \mathcal{L} -invariante nas coordenadas x_2, \dots, x_N . Para isso, tome

$$((1_{\mathcal{L}}, \dots, \ell_j, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}}) \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$$

tal que $\ell_j \in \mathcal{L}$ esteja na j -ésima coordenada do vetor $(1_{\mathcal{L}}, \dots, \ell_j, \dots, 1_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}^N$, para $j \in \{2, \dots, N\}$ fixado. Segue de (3.14) que

$$F((x_1, \dots, \ell_j x_j, \dots, x_N), \lambda) = (F_1(x, \lambda), \dots, \ell_j F_j(x, \lambda), \dots, F_N(x, \lambda))$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_N) \in V^N$, ou seja,

$$F_1((x_1, \dots, \ell_j x_j, \dots, x_N), \lambda) = F_1(x, \lambda).$$

Por (3.11), obtemos

$$h_1((x_1, \dots, \ell_j x_j, \dots, x_N), \lambda) = h_1((x_1, \dots, x_j, \dots, x_N), \lambda)$$

para todo $\ell_j \in \mathcal{L}$, com $j \in \{2, \dots, N\}$. A arbitrariedade de j implica na \mathcal{L} -invariância de h_1 com relação às coordenadas x_2, \dots, x_N .

■

Segue da proposição anterior que se a ação de \mathcal{L} em V for absolutamente irredutível, então $(df)_{(0,\lambda)} = C(\lambda)I_k$ para alguma função suave $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De fato, aplicando a regra da cadeia em (3.16), temos que

$$(df)_{(\ell x_1, \lambda)} \ell = \ell (df)_{(x_1, \lambda)}$$

para todo $\ell \in \mathcal{L}$ e $(x_1, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$. Tomando $x_1 = 0$, obtemos que $(df)_{(0,\lambda)}$ comuta com a ação de \mathcal{L} em V , o que garante que $(df)_{(0,\lambda)}$ é uma múltipla escalar da matriz identidade I_k , para cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$(df)_{(0,\lambda)} = C(\lambda)I_k, \quad (3.17)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

No próximo resultado, relacionamos as condições do Lema dos Ramos Equivariantes entre o sistema de N células acopladas $\dot{x} = F(x, \lambda)$ dado em (3.7) e o sistema de uma única célula

$$\dot{u} = f(u, \lambda), \quad (3.18)$$

em que $f : (V \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V$ satisfaz (3.9), ou seja, f é o germe da aplicação que governa a dinâmica interna de cada célula do sistema (3.7). A ideia é impor as hipóteses do Lema dos Ramos Equivariantes para f a fim de que F também esteja nas hipóteses de tal resultado, garantindo assim a existência de soluções para $F(x, \lambda) = 0$ com subgrupo de isotropia menor do que $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Para tanto, exigimos uma condição sobre a aplicação h_1 e assumimos que a função $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (3.17) satisfaça $C'(0) \neq 0$.

Teorema 3.2.3. *Suponha que $\mathcal{L} \subseteq O(k)$ aja não trivialmente e absolutamente irredutivelmente em $V = \mathbb{R}^k$ e que $\mathcal{G} \subseteq S_N$ aja transitivamente em $\{1, \dots, N\}$. Considere o sistema (3.7) tal que:*

(i) $F : (V^N \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V^N$ seja $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante;

(ii) $F = (F_1, \dots, F_N)$, onde F_1 é da forma (3.11) e F_j é da forma (3.13), para $2 \leq j \leq N$, em que $f : (V \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V$ é um problema de bifurcação com grupo de simetrias \mathcal{L} tal que $C'(0) \neq 0$ e $h_1 : (V^N \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V$ satisfaz

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right)_{(0,\lambda)} = 0_{k \times k}.$$

Se $J \subseteq \{1, \dots, N\}$ é um bloco e $A \subset \mathcal{L}$ é um subgrupo axial, então existe um único ramo de soluções suaves para $F(x, \lambda) = 0$ com subgrupo de isotropia $\Sigma(A, J)$.

Demonstração: Como \mathcal{L} age absolutamente irredutivelmente em V , temos pelo Lema 1.2.12 que V é \mathcal{L} -irredutível. Sendo $\text{Fix}_V(\mathcal{L}) \subseteq V$ um subespaço \mathcal{L} -invariante e a ação de \mathcal{L} em V não trivial, então

$$\text{Fix}_V(\mathcal{L}) = \{0\}.$$

Pela proposição anterior, f é \mathcal{L} -equivariante e, portanto, $f(0, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (Proposição 1.3.10). Ainda, como $\text{Fix}_V(\mathcal{L}) = \{0\}$, então $\text{Fix}_{V^N}(\mathcal{L} \wr \mathcal{G}) = \{0\}$, uma vez que todo vetor $(x_1, \dots, x_N) \in V^N$ fixado pela ação de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ é, em particular, fixado por \mathcal{L}^N . Segue novamente pela Proposição 1.3.10 que $F(0, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Em particular, $F(0, 0) = 0$.

Pelo Lema 2.2.2, como \mathcal{L} age absolutamente irredutivelmente em V , temos que $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ age absolutamente irredutivelmente em V^N . Neste caso, como F é $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante, segue que a matriz jacobiana $(dF)_{(0,\lambda)}$ é como em (3.3), ou seja, $(dF)_{(0,\lambda)}$ é múltipla da matriz identidade I_{kN} . Por hipótese, $F_1(x, \lambda) = f(x_1, \lambda) + h_1(x, \lambda)$, onde

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right)_{(0,\lambda)} = 0_{k \times k}.$$

Logo, utilizando (3.17) concluímos que a derivada parcial de F_1 com relação a x_1 calculada no ponto $(0, \lambda)$ é dada por

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)_{(0,\lambda)} = (df)_{(0,\lambda)} + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right)_{(0,\lambda)} = C(\lambda)I_k$$

Como $(dF)_{(0,\lambda)}$ é múltipla da identidade e suas entradas são matrizes de ordem k , segue da igualdade anterior que $(dF)_{(0,\lambda)} = C(\lambda)I_{kN}$. Como f é um problema de bifurcação satisfazendo (3.17), temos que $C(0) = 0$. Logo, $(dF)_{(0,0)} = 0_{kN \times kN}$, garantindo que F é um problema de bifurcação com grupo de simetrias $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, uma vez que $F(0, 0) = 0$.

Por hipótese, A é um subgrupo axial de \mathcal{L} e J é um bloco. Pela Proposição 2.2.7, $\Sigma(A, J)$ definido em (2.25) é um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Portanto, F satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1.6 para $\Gamma = \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, $n = kN$ e $C'(0) \neq 0$, ou seja, existe um único ramo de soluções suaves para $F(x, \lambda) = 0$ tal que o subgrupo de isotropia de cada solução é $\Sigma(A, J)$. ■

Observe que se (u_0, λ_0) é uma solução de $f(u, \lambda) = 0$, então $(x_0, \lambda_0) = ((u_0, 0, \dots, 0), \lambda_0)$ é uma solução de $F(x, \lambda) = 0$. De fato, por (3.12) temos que $h_1((u_0, 0, \dots, 0), \lambda_0) = 0$ e, portanto,

$$F_1(x_0, \lambda_0) = f(u_0, \lambda_0) + h_1((u_0, 0, \dots, 0), \lambda_0) = 0.$$

De modo análogo, fixado $2 \leq j \leq N$, segue por (3.12) e por (3.13) que

$$F_j(x_0, \lambda_0) = f(0, \lambda_0) + h_1((0, u_2, \dots, u_N), \lambda_0) = h_1((0, u_2, \dots, u_N), \lambda_0), \quad (3.19)$$

onde $u_i = u_0$ para algum $2 \leq i \leq N$ e $u_j = 0$ para todo $j \neq i$, com $j = 2, \dots, N$. Como F é $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante, segue de (3.14) para $(\ell, \sigma) = ((\ell, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}), 1_{\mathcal{G}})$ e $x = (0, x_2, \dots, x_N)$ que

$$F((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0) = (\ell F_1((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0), \dots, F_N((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0)),$$

implicando que $F_1((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0) = \ell F_1((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0)$ para todo $\ell \in \mathcal{L}$. Logo, por (3.11),

$$f(0, \lambda_0) + h_1((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0) = \ell f(0, \lambda_0) + \ell h_1((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0).$$

Como $f(0, \lambda_0) = 0$, temos que $\ell h_1((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0) = h_1((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0)$ para todo $\ell \in \mathcal{L}$

e, assim, $h_1((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0) \in \text{Fix}_V(\mathcal{L}) = \{0\}$. Logo,

$$h_1((0, x_2, \dots, x_N), \lambda_0) = 0$$

para todo $(0, x_2, \dots, x_N) \in V^N$. Voltando a (3.19) obtemos que $F_j(x_0, \lambda_0) = 0$ para todo $2 \leq j \leq N$. Portanto, $F(x_0, \lambda_0) = 0$.

Concluimos, assim, que se $(u_0, \lambda_0) = (0, 0)$ é um ponto de bifurcação de $f(u, \lambda) = 0$, então $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$ é um ponto de bifurcação de $F(x, \lambda) = 0$. Isso é válido, pois se $(u_0, \lambda_0) = (0, 0)$ é um ponto de bifurcação, o número $n(\lambda)$ de u 's para os quais (u, λ) é solução de $f(u, \lambda) = 0$ varia para λ em uma vizinhança de $\lambda_0 = 0$. Como para cada solução (u, λ) de $f(u, \lambda) = 0$ é possível construir uma solução $((u, 0, \dots, 0), \lambda)$ para $F(x, \lambda) = 0$, segue que o número $N(\lambda)$ de x 's para os quais (x, λ) é solução de $F(x, \lambda) = 0$ varia para λ em uma vizinhança de $\lambda_0 = 0$. Portanto, $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$ é um ponto de bifurcação de $F(x, \lambda) = 0$.

Para o próximo resultado, lembremos que se J é um bloco e $A \subset \mathcal{L}$ é o subgrupo de isotropia de um elemento $z \in V$ tal que $\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}_V(A) = 1$, então $\Sigma(A, J)$ é o subgrupo de isotropia de $x_0 = (x_1, \dots, x_N) \in V^N$ tal que

$$x_j = \begin{cases} z, & \text{se } j \in J \\ 0, & \text{se } j \notin J \end{cases}. \quad (3.20)$$

Mais ainda, $\text{Fix}_{V^N}(\Sigma(A, J))$ é gerado por x_0 (veja a demonstração da Proposição 2.2.7). Com isso em mente, segue da $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariância de F que

$$(dF)_{((\tilde{\ell}, \sigma)x, \lambda)}(\tilde{\ell}, \sigma) = (\tilde{\ell}, \sigma)(dF)_{(x, \lambda)} \quad (3.21)$$

para todo $(\tilde{\ell}, \sigma) \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ e $(x, \lambda) \in V^N \times \mathbb{R}$, onde $(\tilde{\ell}, \sigma)$ denota tanto o elemento de $\mathcal{L}^N \wr \mathcal{G}$ quanto sua matriz de representação. Tomando $x = x_0 \in \text{Fix}_{V^N}(\Sigma(A, J))$, segue de (3.21) que

$$(dF)_{(x_0, \lambda)}(\tilde{\ell}, \sigma) = (\tilde{\ell}, \sigma)(dF)_{(x_0, \lambda)}$$

para todo $(\tilde{\ell}, \sigma) \in \Sigma(A, J)$, o que mostra que $(dF)_{(x_0, \lambda)}$ comuta com $\Sigma(A, J)$. Concluimos então o seguinte:

Proposição 3.2.4. *Seja $F : (V^N \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow V^N$ um germe de uma aplicação $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante e considere $\Sigma(A, J)$ o subgrupo de isotropia de x_0 , onde $A \subset \mathcal{L}$ é um subgrupo de isotropia axial, J é um bloco e $x_0 = (x_1, \dots, x_N)$ é dado em (3.20). Então existe uma base de V^N tal que*

$$(dF)_{(x_0, \lambda)} = \text{Diag}(G_1, G_2),$$

onde G_1 e G_2 são matrizes em $\mathbb{M}_{ks}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{M}_{k(N-s)}(\mathbb{R})$ satisfazendo (2.36).

Demonstração: O resultado segue diretamente do Teorema 2.2.16, uma vez que $(dF)_{(x_0, \lambda)}$ comuta com $\Sigma(A, J)$. ■

Finalizamos essa seção com dois exemplos que ilustram o Teorema 3.2.3 para os casos em que $\mathcal{L} \wr \mathcal{G} = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ e $\mathcal{L} \wr \mathcal{G} = \mathbb{Z}_2 \wr S_3$. Também utilizamos a Proposição 3.2.4 para descrever

a forma geral das matrizes jacobianas $(dF)_{(x_0, \lambda)}$ que comutam com os respectivos subgrupos axiais de $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_2 \wr S_3$.

Exemplo 3.2.5. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\lambda + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = (\lambda + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2)x_2 \\ \dot{x}_3 = (\lambda + \beta x_1^2 + \alpha x_3^2)x_3 \end{cases}, \quad (3.22)$$

que configura um sistema de três células idênticas acopladas identicamente. Como mostramos no Exemplo 2.1.8, tal sistema foi proposto por Guckenheimer e Holmes [22] a partir de um modelo de convecção rotativa e admite $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ como seu grupo de simetrias, em que $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ é o grupo de simetrias internas de cada célula e $\mathbb{Z}_3 = \{id, (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3)\}$ é o grupo de simetrias globais. Neste caso, $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ age em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ como

$$(\pm 1, \sigma)((x_1, x_2, x_3), \lambda) = ((\pm x_{\sigma^{-1}(1)}, \pm x_{\sigma^{-1}(2)}, \pm x_{\sigma^{-1}(3)}), \lambda) \quad (3.23)$$

para todo $\sigma \in \mathbb{Z}_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que $\mathcal{L} = \mathbb{Z}_2$ age absolutamente irreduzivelmente em $V = \mathbb{R}$. De fato, se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um operador linear \mathbb{Z}_2 -equivariante, então

$$g(-x) = -g(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, g é uma função ímpar. Como g é linear, $g(x) = cx$ para algum $c \in \mathbb{R}$, ou seja, g é um múltiplo escalar do operador identidade, o que prova a afirmação. Como $\text{Fix}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2) = \{0\}$ e $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_3$ é um subgrupo transitivo de S_3 , segue pelo Lema 2.2.2 que $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ age absolutamente irreduzivelmente em $V^3 = \mathbb{R}^3$.

Observe que o único subgrupo axial de \mathbb{Z}_2 é $A = \{1\}$. Pela Definição 2.2.3, os únicos blocos do conjunto $\{1, 2, 3\}$ são $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ e $\{1, 2, 3\}$, pois todo subconjunto unitário é bloco e \mathbb{Z}_3 age transitivamente em $\{1, 2, 3\}$, sendo esse o único deixado invariante por \mathbb{Z}_3 . Por (2.25) e pela Proposição 2.2.7, como $A = \{1\}$ é axial, temos que

$$\Sigma(A, J) = \begin{cases} (\{1\} \times (\mathbb{Z}_2)^2) \dot{+} \{id\}, & \text{se } J = J_1 = \{1\} \\ (\mathbb{Z}_2 \times \{1\} \times \mathbb{Z}_2) \dot{+} \{id\}, & \text{se } J = J_2 = \{2\} \\ ((\mathbb{Z}_2)^2 \times \{1\}) \dot{+} \{id\}, & \text{se } J = J_3 = \{3\} \end{cases},$$

são subgrupos axiais de $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$, uma vez que para tais blocos $\mathcal{Q}_J = \{\sigma \in \mathbb{Z}_3; \sigma(J) = J\} = \{id\}$. Analogamente, para $J_4 = \{1, 2, 3\}$ temos que

$$\Sigma(A, J_4) = (\{1\})^3 \dot{+} \mathbb{Z}_3$$

é um subgrupo axial de $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$, uma vez que $\mathcal{Q}_{J_4} = \mathbb{Z}_3$. Como A é o subgrupo de isotropia de $x \in \mathbb{R}^*$, considerando $z = x$ no vetor x_0 definido em (3.20), concluímos² que $\Sigma(A, J_1) = \Sigma_{(x, 0, 0)}$, $\Sigma(A, J_2) = \Sigma_{(0, x, 0)}$, $\Sigma(A, J_3) = \Sigma_{(0, 0, x)}$ e $\Sigma(A, J_4) = \Sigma_{(x, x, x)}$, para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Resumimos essas informações na Tabela 3.1, onde na primeira coluna listamos o elemento x_0 para o qual $\Sigma(A, J_i) = \Sigma_{x_0}$, para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

²Lembremos que Σ_{x_0} denota o subgrupo de isotropia de $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

Tabela 3.1: Subgrupos axiais de $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$.

Representante	Subgrupo axial
$(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_1 = \Sigma(A, \{1\}) = (\{1\} \times (\mathbb{Z}_2)^2) \dot{+} \{id\}$
$(0, x, 0); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_2 = \Sigma(A, \{2\}) = (\mathbb{Z}_2 \times \{1\} \times \mathbb{Z}_2) \dot{+} \{id\}$
$(0, 0, x); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_3 = \Sigma(A, \{3\}) = ((\mathbb{Z}_2)^2 \times \{1\}) \dot{+} \{id\}$
$(x, x, x); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_4 = \Sigma(A, \{1, 2, 3\}) = (\{1\})^3 \dot{+} \mathbb{Z}_3$

Portanto, como $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ é o grupo de simetrias do sistema (3.22), o germe da aplicação $F : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F((x_1, x_2, x_3), \lambda) = ((\lambda + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2)x_1, (\lambda + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2)x_2, (\lambda + \beta x_1^2 + \alpha x_3^2)x_3)$$

é $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ -equivariante. Escrevendo $F = (F_1, F_2, F_3)$, temos que F_1 satisfaz (3.11) e F_2, F_3 satisfazem (3.13) para

$$f(x_1, \lambda) = (\lambda + \alpha x_1^2)x_1, \quad h_1((x_1, x_2, x_3), \lambda) = \beta x_2^2 x_1, \quad \sigma_2 = (132) \quad \text{e} \quad \sigma_3 = (123).$$

Observe que f é \mathbb{Z}_2 -equivariante, ou seja, $f(-x_1, \lambda) = -f(x_1, \lambda)$ para todo $(x_1, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Além disso,

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1}((0, 0, 0), \lambda) = \beta x_2^2|_{x_2=0} = 0.$$

Sendo a ação de $\mathcal{L} = \mathbb{Z}_2$ em \mathbb{R} não trivial e absolutamente irreduzível e sendo $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_3$ um subgrupo transitivo de S_3 , temos pelo Teorema 3.2.3 que existe um único ramo de soluções suaves para $F((x_1, x_2, x_3), \lambda) = 0$ com subgrupo de isotropia Σ_i , para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, como listado na Tabela 3.1.

Queremos agora utilizar a Proposição 3.2.4 para descrever a matriz jacobiana $(dF)_{(x_0, \lambda)}$ de F , para cada $x_0 \in \mathbb{R}^3$ listado na primeira coluna da Tabela 3.1. Para tanto, precisamos primeiramente determinar as matrizes em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ que comutam com os subgrupos axiais Σ_i listados na segunda coluna da tabela.

Considere o subgrupo axial $\Sigma_1 = (\{1\} \times (\mathbb{Z}_2)^2) \dot{+} \{id\}$ associado ao bloco $J_1 = \{1\}$. Pelo Teorema 2.2.16, as matrizes $G \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ que comutam com Σ_1 são da forma $G = \text{Diag}(G_1, G_2)$ tal que

$$G_1 = (c) \quad \text{e} \quad G_2 = \text{Diag}(\lambda_2 I_1, \lambda_3 I_1),$$

pois nesse caso $k = s = 1$. Portanto,

$$G = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

onde $c, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Logo, c, λ_2 e λ_3 são os autovalores de G e os vetores da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 são seus autovetores associados. Em outras palavras, todo operador linear $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Σ_1 -equivariante admite a forma matricial (3.24) com relação à base canônica de \mathbb{R}^3 . Para os subgrupos axiais $\Sigma_2 = (\mathbb{Z}_2 \times \{1\} \times \mathbb{Z}_2) \dot{+} \{id\}$ e $\Sigma_3 = ((\mathbb{Z}_2)^2 \times \{1\}) \dot{+} \{id\}$ obtemos o

mesmo resultado, uma vez que renumerando as células podemos assumir que os blocos unitários são da forma $J_1 = \{1\}$.

Considere agora o subgrupo axial $\Sigma_4 = (\{1\})^3 \dot{+} \mathbb{Z}_3$ associado ao bloco $J_4 = \{1, 2, 3\}$. Nesse caso, $k = 1$ e $s = 3$. Pelo Teorema 2.2.16, as matrizes em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ que comutam com Σ_4 são da forma $G = C$, onde

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & a & e \\ f & g & a \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

comuta com $\mathcal{Q}_{J_4}|_{J_4}$, como definido em (2.34). No presente caso, como $\mathcal{Q}_{J_4} = \mathbb{Z}_3$, temos $\mathcal{Q}_{J_4}|_{J_4} = \mathbb{Z}_3$ cujos elementos admitem as seguintes matrizes de representação:

$$I_3, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, G comuta com cada uma dessas matrizes, resultando em

$$G = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Desse modo, o polinômio característico de G é dado por

$$p_G(x) = (a - x)^3 - 3bc(a - x) + b^3 + c^3 = (a + b + c - x)p_2(x),$$

onde p_2 é um polinômio de grau 2. Logo, os autovalores de G são $a + b + c$ e mais dois autovalores reais ou complexos. No caso em que $a + b + c \neq 0$, seu autoespaço associado é gerado pelo vetor $(1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3$. Dessa forma, mostramos que todo operador linear $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Σ_4 -equivariante admite a forma geral (3.26) com relação a uma base de \mathbb{R}^3 que contenha o vetor $(1, 1, 1)$. Uma lista de todas as matrizes que comutam com os subgrupos axiais Σ_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, é apresentada na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Forma geral das matrizes que comutam com os subgrupos axiais de $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ e seus respectivos autovalores e autovetores.

Subgrupo axial	Forma geral	Autovalor	Autovetor
$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$	$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$	c λ_2 λ_3	e_1 e_2 e_3
Σ_4	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$	$a + b + c$ Dois autovalores reais ou complexos	$e_1 + e_2 + e_3$

Considerando, portanto, cada $x_0 \in \mathbb{R}^3$ listado na primeira coluna da Tabela 3.1, como a

matriz jacobiana $(dF)_{(x_0, \lambda)}$ comuta com o subgrupo axial $\Sigma_i = \Sigma_{x_0}$, segue pela Proposição 3.2.4 que $(dF)_{(x_0, \lambda)}$ corresponde a uma das matrizes listadas na segunda coluna da Tabela 3.2.

Exemplo 3.2.6. Considere o produto coroa $\mathbb{Z}_2 \wr S_3$ agindo em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ como em (3.23) para todo $\sigma \in S_3$. Considere um sistema de três células idênticas acopladas identicamente da forma

$$\dot{y} = F(y, \lambda), \quad (3.27)$$

em que $(y, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ e F satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.3 para $\mathcal{L} = \mathbb{Z}_2$ e $\mathcal{G} = S_3$. Como mostramos no exemplo anterior, \mathbb{Z}_2 age absolutamente irreduzivelmente em $V = \mathbb{R}$. Logo, pelo Lema 2.2.2, $\mathbb{Z}_2 \wr S_3$ age absolutamente irreduzivelmente em V^3 . Os possíveis blocos do conjunto $\{1, 2, 3\}$ são $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ e $\{1, 2, 3\}$, pois os subgrupos $\{id, (12)\}$, $\{id, (13)\}$ e $\{id, (23)\}$ de S_3 agem transitivamente e deixam invariantes $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$, respectivamente. Além disso, S_3 age transitivamente em $\{1, 2, 3\}$.

Como $A = \{1\}$ é o único subgrupo axial de \mathbb{Z}_2 , temos por (2.25) e pela Proposição 2.2.7 que

$$\Sigma(A, J) = \begin{cases} (\{1\} \times (\mathbb{Z}_2)^2) \dot{+} \mathbb{Z}_2, & \text{se } J = J_1 = \{1\} \\ (\mathbb{Z}_2 \times \{1\} \times \mathbb{Z}_2) \dot{+} \mathbb{Z}_2, & \text{se } J = J_2 = \{2\} \\ ((\mathbb{Z}_2)^2 \times \{1\}) \dot{+} \mathbb{Z}_2, & \text{se } J = J_3 = \{3\} \end{cases}$$

são subgrupos axiais de $\mathbb{Z}_2 \wr S_3$, uma vez que $\mathcal{Q}_{J_1} = \{id, (23)\} \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{Q}_{J_2} = \{id, (13)\} \cong \mathbb{Z}_2$ e $\mathcal{Q}_{J_3} = \{id, (12)\} \cong \mathbb{Z}_2$. Ainda,

$$\Sigma(A, J) = \begin{cases} ((\{1\})^2 \times \mathbb{Z}_2) \dot{+} \mathbb{Z}_2, & \text{se } J = J_4 = \{1, 2\} \\ (\{1\} \times \mathbb{Z}_2 \times \{1\}) \dot{+} \mathbb{Z}_2, & \text{se } J = J_5 = \{1, 3\} \\ (\mathbb{Z}_2 \times (\{1\})^2) \dot{+} \mathbb{Z}_2, & \text{se } J = J_6 = \{2, 3\} \end{cases}$$

são subgrupos axiais de $\mathbb{Z}_2 \wr S_3$, com $\mathcal{Q}_{J_4} = \{id, (12)\}$, $\mathcal{Q}_{J_5} = \{id, (13)\}$ e $\mathcal{Q}_{J_6} = \{id, (23)\}$, todos isomorfos a \mathbb{Z}_2 . Analogamente, para $J_7 = \{1, 2, 3\}$ temos

$$\Sigma(A, J_7) = (\{1\})^3 \dot{+} S_3$$

um subgrupo axial de $\mathbb{Z}_2 \wr S_3$, pois $\mathcal{Q}_{J_7} = S_3$. Como $A = \Sigma_x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, considerando $z = x$ no vetor x_0 definido em (3.20), obtemos:

$$\Sigma(A, J_1) = \Sigma_{(x,0,0)}, \quad \Sigma(A, J_2) = \Sigma_{(0,x,0)}, \quad \Sigma(A, J_3) = \Sigma_{(0,0,x)}, \quad \Sigma(A, J_4) = \Sigma_{(x,x,0)},$$

$$\Sigma(A, J_5) = \Sigma_{(x,0,x)}, \quad \Sigma(A, J_6) = \Sigma_{(0,x,x)} \quad \text{e} \quad \Sigma(A, J_7) = \Sigma_{(x,x,x)}.$$

Na Tabela 3.3 exibimos todos esses subgrupos axiais com o respectivo elemento x_0 para o qual $\Sigma(A, J_i) = \Sigma_{x_0}$, para $i = 1, \dots, 7$.

Pelo Teorema 3.2.3, existe um único ramo de soluções suaves para $F(y, \lambda) = 0$ com grupo de simetrias $\Sigma(A, J_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, 7\}$. Como a matriz jacobiana $(dF)_{(x_0, \lambda)}$ comuta com os subgrupos axiais $\Sigma(A, J_i) = \Sigma_{x_0}$, para descrevê-la vamos determinar a forma geral das matrizes em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ que comutam com tais subgrupos.

Considere $\Sigma_1 = (\{1\} \times (\mathbb{Z}_2)^2) \dot{+} \mathbb{Z}_2$ associado ao bloco $J_1 = \{1\}$. Pelo Teorema 2.2.16, as

Tabela 3.3: Subgrupos axiais de $\mathbb{Z}_2 \wr S_3$.

Representante	Subgrupo axial
$(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_1 = \Sigma(A, \{1\}) = (\{1\} \times (\mathbb{Z}_2)^2) \dot{+} \mathbb{Z}_2$
$(0, x, 0); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_2 = \Sigma(A, \{2\}) = (\mathbb{Z}_2 \times \{1\} \times \mathbb{Z}_2) \dot{+} \mathbb{Z}_2$
$(0, 0, x); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_3 = \Sigma(A, \{3\}) = ((\mathbb{Z}_2)^2 \times \{1\}) \dot{+} \mathbb{Z}_2$
$(x, x, 0); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_4 = \Sigma(A, \{1, 2\}) = ((\{1\})^2 \times \mathbb{Z}_2) \dot{+} \mathbb{Z}_2$
$(x, 0, x); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_5 = \Sigma(A, \{1, 3\}) = (\{1\} \times \mathbb{Z}_2 \times \{1\}) \dot{+} \mathbb{Z}_2$
$(0, x, x); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_6 = \Sigma(A, \{2, 3\}) = (\mathbb{Z}_2 \times (\{1\})^2) \dot{+} \mathbb{Z}_2$
$(x, x, x); x \in \mathbb{R}^*$	$\Sigma_7 = \Sigma(A, \{1, 2, 3\}) = (\{1\})^3 \dot{+} S_3$

matrizes que comutam com Σ_1 são da forma $G = \text{Diag}(G_1, G_2)$, onde

$$G_1 = (c) \quad \text{e} \quad G_2 = \text{Diag}(\lambda_2 I_1, \lambda_3 I_1)$$

para $c, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, pois nesse caso $k = s = 1$. Observe que $\mathcal{Q}_{J_1} = \{id, (2, 3)\}$ age transitivamente em $\bar{J}_1 = \{2, 3\}$. Pelo Corolário 2.2.17, segue que $G_2 = \lambda I_2$. Portanto, temos

$$G = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

onde $c, \lambda \in \mathbb{R}$. Os autovalores associados a G são c e λ cujos autoespaços associados são $\text{Aut}(c) = [e_1]$ e $\text{Aut}(\lambda) = [e_2, e_3]$, para $c, \lambda \neq 0$. Portanto, todo operador linear Σ_1 -equivariante em \mathbb{R}^3 tem a forma matricial dada em (3.28) com relação à base canônica de \mathbb{R}^3 . De modo análogo, renumerando as células do sistema (3.27), obtemos que existe uma base de \mathbb{R}^3 tal que as matrizes que comutam com Σ_2 e Σ_3 são da forma (3.28).

Considere agora o subgrupo axial $\Sigma_4 = ((\{1\})^2 \times \mathbb{Z}_2) \dot{+} \mathbb{Z}_2$ associado ao bloco $J_4 = \{1, 2\}$. Pelo Teorema 2.2.16, as matrizes que comutam com Σ_4 são da forma $G = \text{Diag}(G_1, G_2)$, onde

$$G_1 = C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G_2 = (\lambda),$$

pois nesse caso $k = 1$ e $s = 2$. Como $\mathcal{G} = S_3$, temos pelo Corolário 2.2.18 que C é uma matriz simétrica. Portanto,

$$G = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$. O polinômio característico de G é dado por

$$p_G(x) = (\lambda - x)((a - x)^2 - b^2).$$

Logo, os autovalores de G são $a + b, a - b$ e λ cujos autoespaços associados são $\text{Aut}(a + b) =$

$[e_1 + e_2]$, $\text{Aut}(a - b) = [e_1 - e_2]$ e $\text{Aut}(\lambda) = [e_3]$, para $a \pm b \neq 0$. Portanto, todo operador linear em \mathbb{R}^3 que é Σ_4 -equivariante admite a forma matricial (3.29) com relação à base $\{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 . Analogamente, renumerando as células do sistema (3.27), existe uma base de \mathbb{R}^3 segundo a qual as matrizes que comutam com Σ_5 e Σ_6 são da forma (3.29).

Para o subgrupo axial $\Sigma_7 = (\{1\})^3 \dot{+} S_3$ associado ao bloco $J_7 = \{1, 2, 3\}$, como $k = 1$ e $s = 3$, temos pelo Teorema 2.2.16 que as matrizes em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ que comutam com Σ_7 são da forma $G = C$, onde C é dada em (3.25) e comuta com $\mathcal{Q}_{J_7}|_{J_7} = S_3$. As matrizes de representação de cada elemento de S_3 segundo a ação (3.23) são:

$$I_3, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cálculo diretos nos mostram que se C em (3.25) comuta com tais matrizes de representação, então

$$G = C = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. O polinômio característico de G é dado por

$$p_G(x) = (a - x)^3 - 2b^2(a - x) + 2b^3 = (a + 2b - x)((a - b) - x)^2.$$

Logo, os autovalores da matriz G em (3.30) são $a + 2b$ e $a - b$ cujos autoespaços associados são $\text{Aut}(a + 2b) = [e_1 + e_2 + e_3]$ e $\text{Aut}(a - b) = [e_2 - e_1, e_3 - e_2]$, para $a + 2b, a - b \neq 0$.

Tabela 3.4: Forma geral das matrizes que comutam com os subgrupos axiais de $\mathbb{Z}_2 \wr S_3$ e seus respectivos autovalores e autovetores.

Subgrupo axial	Forma geral	Autovalor	Autovetor
$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$	$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$	c λ	e_1 e_2, e_3
$\Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6$	$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$	$a + b$ $a - b$ λ	$e_1 + e_2$ $e_1 - e_2$ e_3
Σ_7	$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & b \end{bmatrix}$	$a + 2b$ $a - b$	$e_1 + e_2 + e_3$ $e_2 - e_1, e_3 - e_2$

Portanto, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^3$ listado na primeira coluna da Tabela 3.3, como $(dF)_{(x_0, \lambda)}$ comuta com o subgrupo axial $\Sigma_i = \Sigma_{x_0}$, segue pela Proposição 3.2.4 que $(dF)_{(x_0, \lambda)}$ corresponde a uma das matrizes listadas na segunda coluna da Tabela 3.4.

Considerações Finais

Sistemas de células acopladas são estudados com o intuito de analisar os padrões dinâmicos muitas vezes observados em fenômenos físicos e naturais. Cada célula é descrita por meio de um sistema de equações diferenciais ordinárias e o acoplamento entre as células é determinado por meio de uma matriz de conexão.

Neste trabalho estudamos o caso em que as células são idênticas e acopladas identicamente, gerando sistemas de equações que apresentam simetrias inerentes à sua configuração geométrica. As simetrias induzidas pela forma do acoplamento entre as células são chamadas de simetrias globais e formam um subgrupo \mathcal{G} de permutações. Um outro grupo \mathcal{L} de simetrias ocorre quando as equações diferenciais que governam a dinâmica de cada célula têm suas próprias simetrias internas. Focamos atenção ao caso em que o grupo total de simetrias do sistema é dado pelo produto coroa de \mathcal{L} por \mathcal{G} , denotado por $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$.

Nas últimas décadas, o estudo da ação de grupos de simetrias também tem se mostrado eficiente para a descrição e modelagem de muitos sistemas físicos. Por essa razão, em um primeiro momento utilizamos uma abordagem puramente algébrica, com base nas ferramentas da teoria de representação de grupos em conjunto com a teoria de álgebra linear. Denotamos por V^N o espaço de todas as variáveis de estado de um sistema de N células idênticas acopladas identicamente, onde $V = \mathbb{R}^k$ para algum natural k . Iniciamos nosso estudo caracterizando os subespaços vetoriais de V^N que são irredutíveis pela ação do produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Tal caracterização é dada apenas em função de um subespaço \mathcal{L} -irredutível de V .

Ainda sob o ponto de vista algébrico, caracterizamos via conjugação todos os subgrupos axiais do produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em função dos subgrupos axiais de \mathcal{L} e descrevemos a forma geral das matrizes que comutam com tais subgrupos, utilizando as restrições impostas por ambos \mathcal{L} e \mathcal{G} . Ressaltamos que a existência dos subgrupos axiais do produto coroa foram o ponto chave para a obtenção dos resultados locais em teoria de bifurcação equivariante apresentados no último capítulo da dissertação.

De um modo geral, a teoria de bifurcação de pontos de equilíbrio descreve como as soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias podem se ramificar conforme o parâmetro de bifurcação varia. No contexto com simetrias, essa teoria utiliza ferramentas de diversas áreas da matemática, como o cálculo com múltiplas variáveis e a teoria de representação de grupos. Utilizamos essa abordagem no contexto de sistemas de células idênticas acopladas com grupo de simetrias $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, com o intuito de mostrar a existência de soluções de equilíbrio para tais sistemas. Nessa direção, o clássico Lema dos Ramos Equivariantes nos garante a existência e a unicidade de um ramo de soluções que admitem como subgrupo de isotropia um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$.

Referências Bibliográficas

- [1] AGUIAR, M. A. D., DIAS, A. P. S. *Heteroclinic network dynamics on joining coupled cell networks*, Dyn. Syst. Int. J. **32** (1), 4-22, 2017.
- [2] ALEXANDER, J. C. *Patterns at primary Hopf bifurcations of a plexus of identical oscillators*, SIAM J. Appl. Math. **46** (2), 199-221, 1986.
- [3] ARONSON, D. G., GOLUBITSKY, M., KRUPA, M. *Coupled arrays of Josephson junctions and bifurcation of maps with S_N symmetry*, Nonlinearity **4**, 861-902, 1991.
- [4] ANTONELI, F., STEWART, I. *Symmetry and synchrony in coupled cell networks 1: fixed-point spaces*, Int. J. Bifur. Chaos **16**, 559-577, 2006.
- [5] ASHWIN, P., FIELD, M. *Heteroclinic Networks in Coupled Cell Systems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **148**, 107-143, 1999.
- [6] BAPTISTELLI, P. H., MANOEL, M., ZELI, I. O. *Normal form theory for reversible equivariant vector fields*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **47**, 935-954, 2016.
- [7] BUONO, P. L., GOLUBITSKY, M., PALACIOS, A. *Heteroclinic cycles in rings of coupled cells*, Physica D **143**, 74-108, 2000.
- [8] BUONO, P. L., GOLUBITSKY, M. *Models of central pattern generators for quadruped locomotion: I. Primary gaits*, J. Math. Biol. **42**, 291-326, 2001.
- [9] BUONO, P. L., GOLUBITSKY, M. *Models of central pattern generators for quadruped locomotion: II. Secondary gaits*, J. Math. Biol. **42**, 327-346, 2001.
- [10] BUSSE, F. H., HEIKES, K. E. *Convection in a rotating layer: a simple case of turbulence*, Science **208**, 173-175, 1980.
- [11] CONRAD, K. *Dihedral groups II*, Internet Online Book, disponível em: <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/dihedral.pdf>, 2009.
- [12] COELHO, F. U., LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*, 2. ed, Edusp, São Paulo, 2013.
- [13] DIAS, A. P. S., STEWART, I. *Symmetry-breaking Bifurcations of Wreath Product Systems*, Int. J. Nonlinear Sci **9**, 671-695, 1999.
- [14] DIAS, A. P. S., LAMB, J. W. S. *Local bifurcation in symmetric coupled cell networks: linear theory*, Physica D **223**, 93-108, 2006.

- [15] DIAS, A. P. S., MOREIRA, C. S. *Spectrum of the elimination of loops and multiple arrows in coupled cell networks*, Nonlinearity **25**, 3139-3154, 2012.
- [16] DIAS, A. P. S., MOREIRA, C. S. *Directs lifts of coupled cell networks*, Nonlinearity **31**, 1299-1312, 2018.
- [17] DIONNE, B., GOLUBITSKY, M., STEWART, I. *Coupled cells with internal symmetry: I. Wreath products*, Nonlinearity **9**, 559-574, 1996.
- [18] DIONNE, B., GOLUBITSKY, M., STEWART, I. *Coupled cells with internal symmetry: II. Direct products*, Nonlinearity **9**, 575-599, 1996.
- [19] GOLUBITSKY, M., SCHAEFFER, D. G. *Singularities and groups in Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences **51**, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [20] GOLUBITSKY, M., STEWART, I., SCHAEFFER, D. G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences **69**, vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [21] GOLUBITSKY, M., STEWART, I. *Symmetry and Pattern Formation in Coupled Cell Networks*, Springer, **115**, 65-82, 1999.
- [22] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P. P. *Structurally stable heteroclinic cycles*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **103**, 189-192, 1988.
- [23] HOCHSCHILD, G. *The Structure of Lie Groups*, Holden Day, San Francisco, 1965.
- [24] LIMA, E. L. *Análise Real volume 2: Funções de n variáveis*, 6. ed, IMPA, Rio de Janeiro, 2013.
- [25] NACHBIN, L. *The Haar Integral*, Van Nostrand, 1965.
- [26] PALACIOS, A. *Heteroclinic Cycles in Coupled Systems of Difference Equations*, J. Differ. Equ. Appl. **9** (7), 671-686, 2003.
- [27] ROTMAN, J. J. *An Introduction to the Theory of Groups*, 4.ed, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [28] STEWART, I., GOLUBITSKY, M., PIVATO, M. *Symmetry Groupoids and Patterns of Synchrony in Coupled Cell Networks*, SIAM J.Appl.Dyn.Syst., **2**:4, 609-646, 2003.

Índice Remissivo

- Aplicação equivariante, 27
- Ação, 17
 - ortogonal, 23
 - transitiva, 58
 - absolutamente irreduzível, 31
- Bloco, 58
- Componentes isotópicas, 30
- Função invariante, 35
- Germe, 83
- Grupo
 - cíclico \mathbb{Z}_n , 16
 - de permutações S_n , 16
 - de simetrias globais, 46
 - de simetrias internas, 48
 - diedral \mathbf{D}_n , 16
 - ortogonal $O(n)$, 14
 - ortogonal especial $SO(n)$, 14
 - de Lie linear, 14
 - de Lie linear compacto, 14
- Integral de Haar, 23
- Lema dos Ramos Equivariantes, 86
- Matriz
 - de conexão, 43
 - de representação, 18
- Ponto
 - de bifurcação, 83
 - de equilíbrio, 83
- Problema de bifurcação, 84
- Produto
 - coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, 39
 - semidireto, 37
- Representação, 17
- Simetria
 - de uma aplicação, 27
 - global, 45
 - interna, 48
- Sistema de células acopladas, 42
- Subespaço
 - Γ -invariante, 25
 - Γ -irreduzível, 25
 - de ponto fixo, 34
- Subgrupo
 - $\Sigma(A, J)$, 60
 - \mathcal{Q}_J , 59
 - axial, 36
 - de \mathbf{D}_n , 65
 - maximal, 36
 - transitivo, 54
 - de isotropia, 33
- Órbita, 33