UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

Sistema de Bresse com Dissipação não-linear na fronteira

PATRICIA VILAR VITOR SALINAS

Orientador: Dr. Juan Amadeo Palomino Soriano

Maringá - PR
2021

Sistema de Bresse com Dissipação não-linear na fronteira

PATRICIA VILAR VITOR SALINAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.
Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Palomino Soriano

Maringá - PR

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Salinas, Patricia Vilar Vitor
S165s Sistema de Bresse com dissipação não-linear na fronteira / Patricia Vilar Vitor Salinas. -- Maringá, 2021.
xii, 86 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Palomino Soriano
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2021.

1. Sistema de Bresse. 2. Dissipação não-linear. 3. Existência e unicidade. 4. Estabilização. 5. Bresse system. 6. Non-linear dissipation. 7. Existence and uniqueness. 8. Stabilization. I. Soriano Palomino, Juan Amadeo, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353

Edilson Damasio CRB9-1.123

PATRICIA VILAR VITOR SALINAS

SISTEMA DE BRESSE COM DISSIPAÇÃO NÃO-LINEAR NA FRONTEIRA

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de DOUTORA em Matemática Pura tendo a Comissão julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Juan Amadeo Palomino Soriano - UEM (Presidente)
Prof. Dr. André Vicente - UNIOSTE
Prof. Dr. Wellington José Corrêa - UTFPR
Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti - UEM
Prof. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria - UEM

Aprovada em: 17 de dezembro de 2021.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (https://meet.google.com/syi-asji-ask)

Dedico este trabalho a minha amada avó Aparecida Vilar de Souza (in memorian).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela força e coragem nos momentos difíceis para que conseguisse alcançar meu sonho.

À minha família pelo carinho e incentivo, sem os quais nada disso seria possível.

Ao meu orientador Prof. Dr. Juan Amadeo Palomino Soriano pela paciência inabalável e dedicação durante o decorrer de todo o trabalho.

Gostaria de agradecer duas pessoas que são fundamentais para a minha vida. Primeiramente, meu querido irmão, Adriano Vitor, minha maior fonte de inspiração, meu conselheiro, meu herói, cujo exemplo carrego comigo. Também agradeço aquele com quem amo dividir todos os momentos da minha vida, que luta comigo desde os tempos do ensino médio, que nunca me deixou parar de sonhar; obrigada meu amor Walmir Ruis Salinas Júnior.

Aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado, em especial ao meu "amigo irmão" Eiji Renan Takahashi, Jonathan Prass, Priscila costa e Laerte Bemm.

A minha orientadora de mestrado Prof Drª. Irene Naomi Nakaoka que mesmo com a minha decisão de mudança de área, dentro da matemática, continuou comigo, sempre com os seus conselhos assertivos.

Finalmente agradeço à Universidade Estadual de Maringá pelo ensino gratuito e de qualidade; à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil) pelo apoio financeiro e a todas as pessoas que estiveram e/ ou estão comigo na caminhada, fazendo com que a vida tenha mais sentido a cada dia. Muito obrigada.

"Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre os ombros de gigantes."
Isaac Newton

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar o sistema de Bresse com mecanismos de dissipação não-linear na fronteira. Utilizando conceitos e resultados da Teoria de Semigrupos não-lineares, provaremos a existência e unicidade de solução para o sistema de Bresse e mostraremos a estabilidade exponencial do sistema de Bresse sem qualquer condição sobre as velocidades de propagação das ondas.

Palavras-chave: Sistema de Bresse. dissipação não-linear. fronteira. Existência e unicidade. Estabilização.

ABSTRACT

The aim of this work is to study Bresse System with non-linear boundary dissipation mechanisms. Using concepts and results from Nonlinear Semigroup Theory, we will prove existence and uniqueness of the solution for the Bresse System and will show exponential stability of Bresse System without any condition on wave propagation velocity.

Keywords: Bresse System. Non-linear dissipation. Boundary. Existence and uniqueness. Stabilization.

Índice de Notações

$D(A)$ domínio do operador A;

$\rho(A)$ conjunto resolvente do operador A;

$R(A)$ conjunto imagem do operador A.

$\hookrightarrow$ inclusão contínua;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ dualidade;

$C(\Omega) = \big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \;\big|\; u \text{ é contínua}\big\}$;

$C^1(\Omega) = \big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \;\big|\; u \text{ é diferenciável e sua derivada é contínua}\big\}$;

$\mathcal{D}(\Omega) :=$ espaço das funções teste;

$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; u \text{ é mensurável} \;\text{ e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\right\}$;

$L^\infty(\Omega) = \big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \big| \; u \text{ é mensurável} \;\text{ e }\; |u(x)| \leq K \text{ q.s. em } \Omega\big\}$;

$H^m(\Omega) = \big\{u \in L^2(\Omega) \;\big|\; D^\alpha u \in L^2(\Omega), \;\; 0 \leq |\alpha| \leq m\big\}$;

$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$;

$L^p(0, T; X) = \left\{u : (0, T) \to X \;\middle|\; u \text{ é mensurável} \;\text{ e } \int_0^T ||u(t)||_X^p dt < \infty\right\}$;

$L^\infty(0, T; X) = \big\{u : (0, T) \to X \;\big|\; u \text{ é mensurável} \;\text{ e }\; ||u(t)||_X \leq K \;\text{ q.s. em } (0, T)\big\}$;

$C\left([0, T], X\right) = \big\{u : [0, T] \to X \;\big|\; u \text{ é contínua de } [0, T] \text{ em } X\big\}$;

$\mathcal{L}(X, Y) = \big\{T : X \to Y \;\big|\; T \text{ é linear e contínua } \big\}$;

$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ dual de X;

$[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega), \;\; 1 \leq p < \infty, \;\; \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$;

$[H_0^m(\Omega)]' \cong H^{-m}(\Omega), \;\; m \in \mathbb{N}$;

$[L^p(0,T,X)]' \cong L^q\left(0,T,X'\right), \quad 1 \leq p < \infty;$

$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R});$

$\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T), X);$

$\rightarrow$ convergência forte;

$\rightharpoonup$ convergência fraca;

$\overset{*}{\rightharpoonup}$ convergência fraca estrela;

$||u||_{L^p}$ norma usual em $L^p(\Omega)$;

$W^{m,p}(\Omega)$ espaço Sobolev usual.

Sumário

Introdução

O objeto de estudo neste trabalho é o sistema de Bresse, chamado assim devido ao engenheiro civil Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1883), no qual consiste de um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas que descreve as vibrações de uma viga arqueada fina. Mais especificamente, o sistema de Bresse linear é dado por três equações da forma

$$\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty),\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty),\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty),
\end{aligned}$$

onde as funções φ, ψ e w descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de cisalhamento e a oscilação longitudinal. Os coeficientes $\rho_1, \rho_2, k, k_0, b$ e l são constantes positivas relacionados com a composição do material, $k(\varphi_x + \psi + lw)$, $k_0(w_x - l\varphi)$ e $b\psi_x$ representam respectivamente a força de cisalhamento, força axial e momento bending.

O sistema de Bresse é conservativo, de modo que, para estudar questões relacionadas a estabilidade são necessários adicionar termos dissipativos. Existem vários trabalhos dedicados a análise matemática para o sistema de Bresse dissipativo. Destacamos, por exemplo, os seguintes termos dissipativos: dissipações friccionais, viscosas, viscoelásticas, térmicas e efeito de memória.

Nos últimos anos, as propriedades assistóticas dos sistemas de Bresse têm sido amplamente pesquisado, nesta direção podemos citar, por exemplo, [7], [17], [19], [42], [43]. Também nesta direção o trabalho de Fatori e Rivera [20] aprimorou o de Liu e Rao [31] e, mais recentemente, Nadji em [32] obteve uma melhor taxa de decaimento polinomial $t^{-\frac{1}{2}}$ para a energia comparado com a de Fatori e Rivera [20] $t^{-\frac{1}{3}}$.

Um problema delicado no estudo do sistema de Bresse consiste em mostrar a estabilidade exponencial com mecanismo de dissipação na fronteira. Poucos trabalhos abordam esse tema. Para o sistema de Timoshenko com dissipação na fronteira, podemos citar [22], [3] e [6].

Alves e colaboradores [1] obtiveram a estabilidade do sistema de Bresse com mecanismos de dissipação linear na fronteira agindo simultaneamente nas forças axial, de cisalhamento e no momento bending.

Rivera e Naso [39] mostraram que um mecanismo de dissipação linear na fronteira em apenas uma das equações é suficiente para estabilizar o sistema de Bresse. Quando a dissipação linear na fronteira é sobre o momento bending, as velocidades de propagação devem ser iguais e uma condição adicional deve ocorrer, a saber,

$$\left(\frac{2j+1}{2L}\right)^2 \pi^2 \neq l^2, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Agora, se a dissipação na fronteira linear age sobre a força de cisalhamento, foi assumido que

$$\left(\frac{2j+1}{2L}\right)^2 \pi^2 \neq \frac{l^2}{1-l}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

para obter a estabilidade exponencial do sistema de Bresse. Finalmente, quando o mecanismo de dissipação linear na fronteira é sobre a força axial, não foi necessária nenhuma condição adicional.

Nosso objetivo é novo no estudo de sistema de Bresse. Além de trabalharmos com mecanismos de dissipação na fronteira, esses são não lineares, o que é de grande relevância na literatura. Primeiramente, foi obtida a existência e unicidade de solução forte e fraca do sistema de Bresse sem forças externas com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned} \varphi(0,t) = \psi(0,t) = w(0,t) &= 0, \quad \forall\, t \geq 0, \\ k(\varphi_x + \psi + lw)(L,t) &= -g_1(\varphi_t(L,t)), \quad \forall\, t \geq 0 \\ b\psi_x(L,t) &= -g_2(\psi_t(L,t)), \quad \forall\, t \geq 0 \\ k_0(w_x - l\varphi)(L,t) &= -g_3(w_t(L,t)), \quad \forall\, t \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, 3$ são termos dissipativos não-lineares e condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot,0) &= \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1(\cdot) \\ \psi(\cdot,0) &= \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot,0) = \psi_1(\cdot) \\ w(\cdot,0) &= w_0(\cdot), \quad w_t(\cdot,0) = w_1(\cdot). \end{aligned} \tag{2}$$

O escopo do nosso trabalho está direcionado à estabilidade exponencial do sistema de Bresse sem forças externas com mecanismos de dissipação não-linear na fronteira, agindo simultaneamente nas forças axial, de cisalhamento e no momento bending, sem a necessidade de velocidades iguais de propagação de ondas e sem condições adicionais. O trabalho que nos inspirou foi o de Lasiecka e Tataru [25], juntamente com a teoria de existência para semigrupos não-lineares abordada nos trabalhos de [5] e [10].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo enunciaremos brevemente os resultados necessários para o nosso trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

1.1 Distribuições

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência é denominado espaço das funções testes e será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Define-se distribuição sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço vetorial diz-se que uma sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_\nu, \phi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \phi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, é a forma linear $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quando $\alpha \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $D^\alpha T$ como $\dfrac{d^\alpha T}{dx^\alpha}$. Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, e que a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.2 Os espaços $L^p(\Omega)$

Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω, e por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que existe uma constante c com $|u(x)| \leq c$ quase sempre em Ω. Os espaços $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |u(x)| \leq c \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

são espaços de Banach. Em particular, o espaço $L^2(\Omega)$, cuja norma provém do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) \, dx,$$

é um espaço de Hilbert.

1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} := \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |D^\alpha u(x)|,$$

é um espaço de Banach e é denominado espaço de Sobolev. Para o caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, representado por $H^m(\Omega)$, com o produto interno dado por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \; \forall \; u, \; v, \in H^m(\Omega),$$

e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Quando $m=0$, $H^m(\Omega)$ identifica-se com $L^2(\Omega)$.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{W_0^{m,p}} := \|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

1.4 Topologia Fraca $\sigma(E,E')$ e Topologia Fraco Estrela $\sigma(E',E)$

Definição 1.1. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e considere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão sobre E. Dizemos que x_n converge fraco para x e denotamos $x_n \rightharpoonup x$ em E, quando $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $f \in E'$.*

Proposição 1.2. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então se verifica:*

i) $x_n \rightharpoonup x$ em E, se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\ f \in E'$.

ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E.

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $||x_n||_E$ é limitada e $||x||_E \leq \liminf ||x_n||_E$.

iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração. Ver [8]. □

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} J_x : E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \end{array}$$

que é linear e contínua, portanto

$$J_x \in E'', \quad \forall x \in E.$$

Com isso, definimos a aplicação $J : E \to E''$, a qual é chamada de injeção canônica de E em E''.

A $topologia fraca^*$, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia mais fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x.

Sejam $\{f_n\}$ uma sucessão convergente para f na $topologia fraca^*$, ou seja, na topologia $\sigma(E', E)$. Para simplificar as notações escreveremos apenas que $\{f_n\}$ $converge fraco^*$ para f, ou simbolicamente,

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{em} \quad E'.$$

Proposição 1.3. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E'. Então se verifica:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E', se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\, x \in E$.

ii) Se $f_n \to f$ em E', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.

iii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E', então $||f_n||_{E'}$ é limitada e $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$.

iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' e $x_n \to x$ em E, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração. Ver [8]. □

1.5 Espaços Reflevixos e Espaços Separáveis

Dizemos que um espaço de Banach é reflexivo quando a injeção canônica $J : E \to E''$ é sobrejetora.

Teorema 1.4. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então existem uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$.*

Demonstração. Ver [8]. □

Um espaço métrico E é dito separável quando existe um subconjunto $M \subset E$ enumerável e denso em E.

Teorema 1.5. *Seja E um espaço de Banach tal que E' é separável. Então, E é separável.*

Demonstração. Ver [8]. □

Teorema 1.6. *Seja E um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existem uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$ tais que $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

Demonstração. Ver [8]. □

Teorema 1.7. *Seja E um espaço de Banach Reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada em E. Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca $\sigma(E, E')$*

Demonstração. Ver [8]. □

1.6 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Dados X um espaço de Banach, $T \in \mathbb{R}$ com $T > 0$. O espaço $L^p(0,T;X)$, $1 \le p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0,T]$ com imagem em X, ou seja as funções $u : (0,T) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(0,T;X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0,T]$ com imagem em X, as funções $u : (a,b) \to X$ limitadas quase sempre em $(0,T)$. A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup\left\{c \ge 0; \|u(t)\|_X \le c, q.s.\right\}.$$

O espaço $C^m([a,b];X)$, com $m = 0,1,\ldots,$ consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[0,T]$. A norma é dada por

$$\|u\|_{C^m([a,b],X)} := \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |u^{(i)}(t)|_X.$$

Proposição 1.8. *Sejam $m = 0,1,\ldots,$ $1 \le p < \infty$, X e Y espaços de Banach.*

(a) $C^m([a,b];X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(b) $L^p(a,b;X)$, $1 \le p < \infty$, e $L^\infty(a,b;X)$ são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(c) $C([a,b];X)$ *é denso em* $L^p(a,b;X)$ *e a imersão* $C([a,b];X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ *é contínua.*

(d) Se X *é um espaço de Hirbert com produto interno* $(\cdot,\cdot)_X$ *então* $L^2(a,b;X)$ *é também um espaço de Hibert com produto interno:*

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_\omega (u(t),v(t))_X dt.$$

(e) $L^p(a,b;X)$ *é separável se* X *for separável e* $1 \leq p < \infty$*.*

(f) O espaço $L^p(a,b;X)$ *é reflexivo se* $1 < p < \infty$*.*

(g) Se $X \hookrightarrow Y$*, então* $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^p(a,b;Y)$*,* $1 \leq q \leq r \leq \infty$*.*

Demonstração. Ver [45] □

Teorema 1.9. *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e separável e* $1 < p < \infty$ *com* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*. Então, cada função* $v \in L^q(a,b;X^{'})$ *corresponde a um único funcional* $\overline{v} \in Y^{'}$ *dado por*

$$< \overline{v}, u >= \int_a^b < v((t), u(t) >_X dt, \quad \forall u \in Y. \tag{1.1}$$

Reciprocamente, para cada $\overline{v} \in Y^{'}$ *corresponde exatamente uma função* $v \in L^q(a,b;X^{'})$ *dada por (1.1). Além disso,*

$$\| \overline{v} \|_{Y'} = \| v \|_{L^q(a,b;X')} .$$

Demonstração. Ver [45] □

Como consequência do teorema anterior temos que, se considerarmos $Y = L^p(a,b;X)$, então $Y^{'} = L^q(a,b;X^{'})$, com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

O espaço das distribuições sobre $(0,T)$ com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(0,T;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X.

Para $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, sua derivada de ordem n no sentido das distribuições vetoriais é definida por

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T). \tag{1.2}$$

Além disso, se f é derivável no sentido das distribuições vetoriais, então podemos enxergar $\frac{df}{dt}$ como um elemento de $\mathcal{D}'(0,T;X)$, valendo a relação (1.2).

Agora se $f \in L^p(0,T;X)$, então pode-se identificar f com uma distribuição vetorial (que aqui denotaremos por f), de modo que

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt, \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Seja X um espaço de Hilbert. Denotaremos por $H_0^1(a,b;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a,b;X) := \{v \in L^2(a,b;X); v' \in L^2(a,b;X); v(a) = v(b) = 0\}$$

munido com o seguinte produto interno

$$((w,v)) = \int_a^b (w(t),v(t))_X + \int_a^b (w'(t),v'(t))_X dt.$$

Via Teorema de Riez se identificarmos $L^2(a,b;X)$ com o seu dual $[L^2(a,b;X)]'$, obtemos a cadeia de imersões:

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b;X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X),$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$.

Proposição 1.10. *Seja $u \in L^2(a,b;X)$. Então, existe um único elemento $f \in H^{-1}(a,b;X)$ tal que*

$$< f, \theta\xi >= (< u', \theta >, \xi)_X, \ \forall \theta \in \mathcal{D}(a,b); \ \forall \xi \in X.$$

Demonstração. Ver [35]. □

Via proposição anterior, podemos identificar f com u', dessa forma, diremos que se $u \in L^2(a,b;X)$ então, $u' \in H^{-1}(a,b;X)$.

1.7 Resultados auxiliares

Teorema 1.11 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $(u_v)_{v\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis a Lebesgue num aberto Ω, convergente quase sempre para uma função*

u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_v| \leq u_0$ quase sempre em $\Omega, \forall\ v \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se

$$\int_\Omega u = \lim_{v \to \infty} \int_\Omega u_v.$$

Demonstração. Ver [33]. □

Definição 1.12 (Imersão Contínua)**.** *Sejam X e Y espaços de Hilbert, sendo X um subespaço de Y. Dizemos que X está continuamente imerso em Y, e denotaremos $X \hookrightarrow Y$, se existe uma constante positiva C tal que*

$$||u||_Y \leq C||u||_X, \quad \forall\ u \in X.$$

Além dos resultados acima, temos que

i) $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < +\infty$;

ii) Se Ω é limitado e $1 \leq p < q \leq +\infty$, então $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Proposição 1.13 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [8]. □

Proposição 1.14. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $u \in L^p(\omega)$ e $v \in L^{p'}(\omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então, $uv \in L^1(\omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv| \leq \| u \|_{L^p(\omega)} \| v \|_{L^{p'}(\omega)} .$$

Demonstração. Ver [9]. □

Quando $p = 2$ a desigualdade Hölder é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz, que representamos como

$$|(u, v)| \leq \|\| u \|_{L^2(\omega)} \| v \|_{L^2(\omega)} .$$

Proposição 1.15. *(Desigualdade de Hölder generalizada) Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\omega)$, $1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Então, o produto $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\omega)$ e*

$$\| f \|_{L^p(\omega)} \leq \| f_1 \|_{L^{p^1}(\omega)} \| f_2 \|_{L^{p^2}(\omega)} \ldots \| f_k \|_{L^{p^k}(\omega)} .$$

Demonstração. Ver [9]. □

Proposição 1.16. *(Desigualdade de Minkowski) Sejam $u, v \in L^p(\omega)$ e $1 \leq p < \infty$, então*

$$\| u + v \|_{L^p(\omega)} \leq \| u \|_{L^p(\omega)} \| v \|_{L^p(\omega)} .$$

Demonstração. Ver [9]. □

Proposição 1.17. *(Desigualdade de Jensen) Sejam B um hipercubo do $\mathbb{R}^n$, então para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$ temos*

$$F\left(\frac{1}{med(B)} \int_B g(x)dx\right) \geqslant \frac{1}{med(B)} \int_B F(g(x))dx.$$

Demonstração. Ver [38]. □

Proposição 1.18 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então, para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante c_p, tal que*

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c_p ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [8] □

Lema 1.19. *(Lema de Gronwall) Sejam $m \in L^1(a, b)$ tal que $m \geq 0$ q.s em (a, b) e seja $c \geq 0$. Consideremos $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua verificando*

$$\varphi(t) \leq c + \int_a^t m(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Então

$$\varphi(t) \leq c e^{\int_a^t m(\xi)\, d\xi}, \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Demonstração. Ver [38]. □

Teorema 1.20. *(Teorema da Representação de Riesz-Fréchet) Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $(.,.)$ e norma $\| \cdot \|$. Dado $\varphi \in H'$, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle_{H',H} = (f, v), \ \forall\, v \in H.$$

Além disso,

$$\|f\| = \|\varphi\|_{H'}.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Seja H um espaço de Hilbert. Uma forma bilinear $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ é

(i) contínua se existe uma constante C tal que

$$|a(u,v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u,v \in H \tag{1.3}$$

(ii) coerciva se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq K|v|^2, \quad \forall v \in H. \tag{1.4}$$

Teorema 1.21. *(Teorema de Lax-Milgran) Sejam $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para toda $\varphi \in H'$ existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \;\; e \;\; \frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, v \rangle = v \overset{min}{\in} H \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração. Ver [8]. □

Se chama base um espaço de Hilbert, ou simplesmente, base hilbertiana, a toda sucessão $\{e_n\}$ de elementos de H que satisfaz as seguintes condições

(i) $\| E_n \|_H = 1, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $(e_m, e_n)_H = 0, \quad \forall m,n$ com $\; m \neq n$;

(iii) o espaço vetorial gerado pelos $\{e_n\}$ é denso em H.

Teorema 1.22. *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base hilbertiana.*

Demonstração. Ver [8]. □

Proposição 1.23. *Existe uma constante positiva C (que depende somente de $|I| \leq +\infty$) tal que*

$$||u||_{L^\infty(I)} \leq C||W^{1,p}(I)||, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Em outras palavras, $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ com a imersão contínua para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Além disso, se I é um intervalo limitado então

A imersão $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ é compacta para todo $1 < p \leq \infty$.

A imersão $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I)$ é compacta para todo $1 \leq q < \infty$.

Demonstração. Ver [8]. □

Proposição 1.24. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_n \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [34]. □

Teorema 1.25. *(Teorema de Aubin-Lions) Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \overset{comp}{\hookrightarrow} B \overset{cont}{\hookrightarrow} B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos $W = \{u \in L^{p_0}(0,T,B_0) : u_t \in L^{p_1}(0,T,B_1)\}$, onde $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$. Consideremos W munido da norma*

$$\| u \|_W = \| u \|_{L^{p_0}(0,T,B_0)} + \| u \|_{L^{p_1}(0,T,B_1)},$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T,B)$ é compacta.

Demonstração. Ver [27]. □

Teorema 1.26. *Teorema de Simon Assuma que $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$, onde X, B e Y são espaços de Banach. Seja F limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ limitado em $L^r(0,T;Y)$, com $r > 1$. Então, F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.*

Demonstração. Ver Corolário 4 em [41]. □

Proposição 1.27. *(Lema de Lions) Seja $\{u_\nu\}$ uma sucessão de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

(i) $u_\nu \to u$ quase sempre em Q e

(ii) $||u_\nu||_{L^q(Q)} \leq c$, *para todo* $\nu \in \mathbb{N}$,

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ *fraco em* $L^q(Q)$.

Demonstração. Ver [27]. □

1.8 Operador Definido por uma terna

Esta seção é baseada em [14]. Sejam V e H espaços de Hilbert complexos, cujos produtos internos e normas denotaremos, respectivamente, por $((\cdot,\cdot)), \|\cdot\|$ e $(\cdot,\cdot), |\cdot|$, com V tendo imersão contínua e densa em H.

Seja

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot) : V \times V &\to \mathbb{C} \\ (u,v) &\mapsto a(u,v) \end{aligned}$$

uma forma sesquilinear contínua.

Definamos

$$D(A) = \{u \in V : \text{a forma antilinear } v \in V \mapsto a(u,v) \text{ é contínua com a topologia induzida por } H\}. \tag{1.5}$$

Em outras palavras, $D(A)$ é o conjunto dos elementos $u \in V$ tais que a forma antilinear

$$g_u : V \to \mathbb{C} \tag{1.6}$$
$$v \mapsto g_u(v) = a(u,v) \tag{1.7}$$

é contínua quando induzimos em V a topologia de H. Note que $D(A) \neq \emptyset$, pois $0 \in D(A)$. Sendo V denso em H, podemos estender a aplicação (1.6) a uma aplicação $\widetilde{g_u} : H \to \mathbb{C}$ antilinear e contínua tal que $\widetilde{g_u}(v) = g_u(v)$, para todo $v \in V$. Pelo Teorema (1.20), existe único $f_u \in H$ tal que

$$\widetilde{g_u}(v) = (f_u, v), \quad \forall v \in H.$$

Em particular,

$$a(u,v) = (f_u, v), \quad \forall v \in V.$$

Com isso, temos definida a aplicação

$$A : D(A) \rightarrow H \tag{1.8}$$

$$u \mapsto Au = f_u \tag{1.9}$$

e, então, temos uma nova caracterização para $D(A)$, a saber,

$$D(A) = \{u \in V : \text{existe } f \in H \text{ que verifica } a(u,v) = (f,v), \text{ para todo } v \in V\}. \tag{1.10}$$

Neste contexto, diremos que o operador A é definido pela terma $\{V, H, a(u,v)\}$ cuja notação será:

$$A \leftrightarrow \{V, H, a(u,v)\}.$$

Teorema 1.28. *Sejam V e H espaços de Hilbert com $V \hookrightarrow H$ sendo V denso em H. Se $a(u,v)$ é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva em V e A é o operador definido pela terna $\{V, H, a(u,v)\}$, então para cada $f \in H$, existe um único $u \in D(A)$ tal que $Au = f$.*

Demonstração. Ver Teorema 5.126 em [14]. □

Proposição 1.29. *Seja A um operador definido pela terna $\{V, H, a(u,v)\}$, nas condições acima. Suponhamos também que $a(u,v)$ verifica a condição de coercividade dada em (1.4). Então, $D(A)$ é denso em H e A é um operador fechado de H*

Demonstração. Ver Proposição 5.129 em [14]. □

Denotaremos por $a^*(u,v)$ a forma sesquilinear adjunta de $a(u,v)$, isto é,

$$a^*(u,v) = \overline{a(v,u)}.$$

Temos que $a^*(u,v)$ é uma forma sesquilinear contínua de $V \times V$ e é também coerciva desde que $a(u,v)$ também o seja. Agora, denotaremos por A^* o operador definido pela terna $\{V, H, a^*(u,v)\}$, ou seja,

$$A^* \leftrightarrow \{V, H, a^*(u,v)\}.$$

Uma fato importante a observar é que caso $a(u,v)$ for coerciva, então A^* possuirá todas as propriedades que foram obtidas por A no Teorema (1.28) e na Proposição (1.29). Na verdade temos o resultado abaixo:

Proposição 1.30. *O operador* A^* *definido pela terna* $\{V, H, a^*(u,v)\}$, *com* $a(u,v)$ *coerciva, é o adjunto de* A *definido pela terna* $\{V, H, a(u,v)\}$.

Demonstração. Ver Proposição 5.130 em [14]. □

Como consequência da Proposição anterior temos que A é auto-adjunto, isto é, $A = A^*$, se $a(u,v)$ é hermitiana.

Nos próximo capítulos trabalharemos com a extensão de um operador definido por uma terna, desta forma veremos o que compreendemos por uma extensão. Sejam V' e H' os duais de V e H, respectivamente. Definamos

$$\begin{aligned} B : V &\to V' \qquad (1.11) \\ u &\mapsto Bu, \qquad (1.12) \end{aligned}$$

onde $Bu : V \to \mathbb{C}$ é definido por $(Bu)(v) = \langle Bu, v\rangle_{V',V} = a(u,v)$. Observe que a aplicação B está bem definida e é linear. Da continuidade de $a(\cdot,\cdot)$ segue que B é contínua, pois

$$\begin{aligned} \| Bu \|_{V'} &= \sup_{v\in V; \|v\|\leq 1} |\langle Bu, v\rangle| = \sup_{v\in V;\|v\|\leq 1}|a(u,v)| \leq \sup_{v\in V;\|v\|\leq 1} C \| u \| \| v \| \\ &\leq C \| u \|, \end{aligned}$$

ou seja, $B \in \mathcal{L}(V, V')$. Além disso, observe que $Bu = Au$,para todo $u \in D(A)$, isto é, B é uma extensão de A para todo o espaço V. No caso particular em que $a(u,v) = ((u,v))$, onde $((\cdot,\cdot))$ é o produto interno de V, a extensão B do operador A dada acima é uma bijeção isométrica, onde a injetividade é concluída do fato de B ser uma isometria e a sua sobretividade é uma consequência do Teorema de Lax-Milgram.

1.9 Semigrupos não Lineares

Seja X um espaço de Banach e X' o seu espaço dual. Denominamos por operador dualidade o operador $F : X \to X'$ definido por

$$D(F) = X \quad \text{e} \quad F(x) = \{x' \in X' : \langle x', x\rangle = \| x \|^2 = \| x' \|^2\},$$

para todo $x \in X$.

Chama-se aplicação dualidade de X, à toda aplicação $f : X \to X'$ tal que $f(x) \in F(x)$, para todo $x \in X$.

Seja $f : X \to (-\infty, +\infty]$ uma função. Definimos o domínio efetivo de f como sendo o conjunto

$$D_e(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

Se $D_e(f) \neq \emptyset$ dizemos que f é uma função própria.

Um outro tipo de função que usaremos neste texto será definida abaixo.

Definição 1.31. *Sejam X um espaço vetorial real, $K \subset X$ um subconjunto convexo de X e $f : K \to (-\infty, +\infty]$ uma função real estendida. Dizemos que f é convexa se*

$$f((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)f(u) + \lambda f(v), \quad \forall u, v \in K; \forall \lambda \in [0, 1].$$

Um outro conceito importante é o de subdiferencial de uma função.

Definição 1.32. *Seja X um espaço vetorial normado e $f : X \to (-\infty, +\infty]$ uma aplicação. Para cada $x \in D_e(f)$ indicaremos por $\partial f(x)$ o conjunto*

$$\partial f(x) = \{x' \in X' : f(y) - f(x) \geq \langle x', y - x\rangle, \ \forall \in D_e(f)\}.$$

Dizemos que f é subdiferenciável no ponto $x \in D_e(f)$ se $\partial f(x) \neq \emptyset$. No caso em que $f : X \to (-\infty, +\infty]$ é subdiferenciável no ponto $x \in D_e(f)$, $\partial f(x)$ é dito o subdiferencial de f no ponto $D_e(f)$.

O operador

$$\begin{aligned} \partial : X &\longrightarrow X' \\ x &\longmapsto \partial f(x) \end{aligned}$$

é denominado subdiferencial da aplicação f.

Teorema 1.33. *Sejam $\varphi : W \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e $\Lambda : V \to W$ uma função contínua e linear. Assuma que φ é contínua em algum ponto de $Im(\Lambda)$. Então, $\partial(\varphi \circ \Lambda) = \Lambda^* \circ \partial\varphi \circ \Lambda$.*

Demonstração. Ver [9]. □

Definição 1.34. *Sejam X e Y espaços vetoriais. Uma aplicação $\varphi : X \to Y$ é subdiferenciável a Gateaux no ponto x se existir uma aplicação linear e contínua $\varphi'(x) : X \to Y$ tal que*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda} = \varphi'(x)y, \quad \forall y \in X.$$

A aplicação $\varphi'(x)$ é denominada a derivada à Gauteux de φ no ponto x.

Teorema 1.35. *(Teorema de Kachurovskii) Seja K um subconjunto convexo em um espaço normado V e consideremos $\varphi : K \subset V \to (-\infty, +\infty]$ uma função diferenciável à Gauteaux em cada ponto de $u \in K$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) φ *é convexa;*

(ii) $\varphi'(u)(v - u) \leq \varphi(v) - \varphi(u)$, *para todo* $u, v \in K$;

(iii) $(\varphi'(u) - \varphi'(v))(u - v) \geq 0$, *para todo* $u, v \in K$.

Teorema 1.36. *Seja $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria. Se φ é Gauteaux-diferenciável em $u \in int(D(\varphi))$, então $\partial\varphi(u) = \varphi^{'}(u)$.*

Demonstração. Ver [9]. □

Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{C} \subset X$. Dizemos que uma função S de $[0, \infty)$ na família das aplicações de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$ é um semigrupo sobre $\mathcal{C}$ se:

(i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade;

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, para todo $S \geq 0$.

Além disso, o semigrupo S é dito ser contínuo se:

(iii) $\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x$, para todo $x \in \mathcal{C}$.

E diz-se que S é contínuo do tipo ω, com $\omega \in \mathbb{R}$ se

(iv) $\| S(t)x - S(t)y \| \leq e^{\omega t} \| x - y \|$.

Quando $\omega \leq 0$, dizemos que S é um semigrupo de contrações.

1.10 Operadores Monótonos e Maximais Monótonos

Nesta seção estudaremos uma classe fundamental de operadores para a existência e unicidade do problema proposto, esta classe é a dos operadores monótonos que são uma generalização das funções monótonas. As demonstrações dos resultados desta seção podem ser encontradas em [5] e [10].

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona não decrescente, ou seja,

$$(x-y)(f(x)-f(y)) \geq 0, \ \forall x, y \in D(f).$$

Um operador linear T de um espaço de Hilbert H é dito positivo se

$$(x, Tx)_H \geq 0, \ \forall x \in H$$

e um operador A de H é dito monótono se

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)_H \geq 0, \ \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A.$$

Com isso, a definição de operador monótono em um espaço de Hilbert é uma generalização natural da definição de função monótono não decrescente.

Diremos que um operador monótono A é maximal monótono se não admitir extensão monótona própria, em outras palavras, se ele não está propriamente contido em algum outro subconjunto monótono.

Será necessário o seguinte conceito. Seja X um espaço de Banach. Um operador $B : X \to X'$ é dito hemicontínuo se for unívoco, e além disso,

$$B(x+ty) \rightharpoonup Bx, \quad \forall x, y \in X,$$

em X quando $t \to 0$.

Corolário 1.37. *Seja A, e seja B um operador monótono, hemicontínuo e limitado de X em X', com X Banach. Seja A um operador maximal monótono em $X \times X'$. Então, $A + B$ é maximal monótono.*

Demonstração. Ver [5]. □

Teorema 1.38. *Sejam X e X' reflexivos e estritamentes convexos. Seja $F : X \to X'$ a aplicação dualidade de X. Seja A um subconjunto monótono de $X \times X'$. Então, A é maximal monótono em $X \times X'$ se, e somente se, para algum $\lambda > 0$, $Im(A + \lambda F) = X'$.*

Demonstração. Ver [5]. □

Teorema 1.39. *Seja X um espaço de Banach real. Se φ é uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente em X, então $\partial\varphi$ é um operador maximal monótono de X em X'.*

Demonstração. Ver [5]. □

A equivalência entre os itens (i) e (ii) do teorema abaixo é essencial para o próximo capítulo.

Teorema 1.40. *Sejam H um espaço de Hilbert e A um operador monótono de H. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *A é maximal monótono;*

(ii) *A é monótono e $Im(I + A) = H$;*

(iii) *Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1} : H \to H$ é uma contração.*

Demonstração. Ver Proposição 2.2 em [10]. □

Consideremos o seguinte problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.13}$$

No caso em que o operador A é linear o teorema a seguir é conhecido como Teorema de Hille-Yosida.

Teorema 1.41. *Sejam H um espaço de Hilbert e A um operador maximal monótono de H. Para todo $u_0 \in D(A)$, existe uma única função $u(t) : [0, \infty) \to H$ tal que*

(i) *$u(t) \in D(A)$, para todo $t > 0$;*

(ii) $u(t)$ *é lipschitziana em* $[0, \infty)$, *ou seja,* $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, \infty, H)$;

(iii) $u(t)$ *satisfaz o problema de Cauchy (1.13)*

Demonstração. Ver Teorema 3.1 em [10]. □

Definamos $S(t)(x) := u_x(t)$, para todo $t \geq 0$ e denotemos $S(t)$ a extensão de $S(t)$ sobre $\overline{D(A)}$. Pelo teorema anterior, temos que $S(t)$ é um semigrupo de contrações não lineares sobre $\overline{D(A)}$. Donde concluimos que $S(t)$ é o semigrupo gerado por $-A$.

Definição 1.42. *A função* u *dada pelo teorema anterior é denominada de solução forte do problema (1.13). Agora, dizemos que* $u \in C([0, \infty], H)$ *é solução fraca da equação* $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ *se existir uma sequência* $u_n \in C([0, \infty], H)$ *de soluções fortes de* $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ *tal que* $u_n \to u$ *uniformemente em* $[0, \infty]$.

Teorema 1.43. *Seja* A *um operador maximal monótono de um espaço de Hilbert* H. *Para todo* $u_0 \in \overline{D(A)}$ *existe uma única solução fraca de (1.13).*

Demonstração. Ver Teorema 3.4 em [10]. □

Capítulo 2

Existência e Unicidade de solução

Neste capítulo, abordaremos a existência, unicidade e regularidade da solução do sistema abaixo. Tais tópicos serão discutidos utilizando a Teoria de Semigrupos não-lineares estudada em [5] e [10]. Estudaremos o seguinte sistema de Bresse sem forças externas

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \ \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \ \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \ \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned} \tag{2.1}$$

com condições de fronteira tipo Dirichlet-Neumann (não-linear)

$$\varphi(0,t) = \psi(0,t) = w(0,t) = 0, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{2.2}$$

e

$$\begin{aligned} k(\varphi_x + \psi + lw)(L,t) = -g_1(\varphi_t(L,t)), \quad \forall\, t \geq 0 \\ b\psi_x(L,t) = -g_2(\psi_t(L,t)), \quad \forall\, t \geq 0 \\ k_0(w_x - l\varphi)(L,t) = -g_3(w_t(L,t)), \quad \forall\, t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot,0) = \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1(\cdot) \\ \psi(\cdot,0) = \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot,0) = \psi_1(\cdot) \\ w(\cdot,0) = w_0(\cdot), \quad w_t(\cdot,0) = w_1(\cdot). \end{aligned} \tag{2.4}$$

As funções φ, ψ e w descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal e a oscilação longitudinal, os coeficientes $\rho_1, \rho_2, k, k_0, b$ e l são constantes positivas e g_1, g_2 e g_3 representam termos dissipativos na fronteira não lineares satisfazendo algumas condições.

Hipótese H-1: As funções não lineares $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, 3$ satisfazem as seguintes condições:

(i) g_i são funções contínuas e monótonas crescentes sobre $\mathbb{R}$;

(ii) $g_i(s)s > 0$ para $s \neq 0$,

(iii) Existem m e M constantes tais que $0 < m < M$ e $ms^2 \leq g_i(s)s \leq Ms^2$, $|s| > 1$.

Em todo o texto quando desejarmos indicar a transposta de uma matriz utilizaremos a letra grega τ. Introduzimos o espaço de Hilbert

$$V_0 = \{f \in H^1(0, L); f(0) = 0\},$$

com

$$(u, v)_{V_0} = \int_0^L f_x \cdot g_x dx, \quad \forall\, f, g \in V_0, \tag{2.5}$$

$$||f||_{V_0}^2 = \int_0^L |f_x|^2 dx, \quad \forall\, f \in V_0 \tag{2.6}$$

onde $H^1(0, L)$ denota o espaço de Sobolev de ordem 1. Denotaremos o espaço dual de V_0 por V_0'. Colocando $\Phi = \varphi_t, \Psi = \psi_t$ e $W = w_t$, o espaço de Hilbert abaixo será o espaço de fase do problema proposto:

$$\mathcal{H} := \underbrace{V_0 \times V_0 \times V_0}_{V_0^3} \times \underbrace{L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L)}_{(L^2(0,L))^3} = V_0^3 \times (L^2(0, L))^3$$

com a norma dada por

$$\| \mathbf{U} \|_{\mathcal{H}}^2 := \| (\varphi, \psi, w, \Phi, \Psi, W)^\tau \|_{\mathcal{H}}^2 = a(\{\varphi, \psi, w\}^\tau, \{\varphi, \psi, w\}^\tau) + \| (\Phi, \Psi, W)^\tau \|_*^2, \tag{2.7}$$

onde $a : V_0^3 \times V_0^3 \to \mathbb{R}$ é a forma bilinear definida por

$$a(\{\varphi, \psi, w\}^\tau, \{u, v, z\}^\tau) = \int_0^L [k(\varphi_x + \psi + lw)(u_x + v + lz) + b\psi_x v_x + k_0(w_x - l\varphi)(z_x - lu)]dx \tag{2.8}$$

e $\|\cdot\|_*$ é uma norma em $(L^2(0,L))^3$ induzida pelo seguinte produto interno

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\ v\\ z\end{pmatrix}\right)_*\\
&=\int_0^L\left(\begin{pmatrix}\rho_1&0&0\\ 0&\rho_2&0\\ 0&0&\rho_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\ v\\ z\end{pmatrix}\right)dx=\int_0^L\left(\begin{pmatrix}\rho_1\varphi\\ \rho_2\psi\\ \rho_1 w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\ v\\ z\end{pmatrix}\right)dx\\
&=\int_0^L\rho_1\varphi u dx+\int_0^L\rho_2\psi v dx+\int_0^L\rho_1 wz dx.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Denotaremos por $|\cdot|$ a norma usual em $\mathcal{H}$, ou seja,

$$
|\mathbf{U}|_{\mathcal{H}}^2=\|\Phi\|_{L^2(0,L)}^2+\|\Psi\|_{L^2(0,L)}^2+\|W\|_{L^2(0,L)}^2+\|\varphi_x\|_{L^2(0,L)}^2+\|\psi_x\|_{L^2(0,L)}^2+\|w_x\|_{L^2(0,L)}^2.
$$

Pode-se mostrar que, a norma definida em (2.7) e a norma usual em $\mathcal{H}$ são equivalentes.

A seguir definiremos um operador que será de extrema importância no decorrer do texto. Definamos o operador A pela terna

$$
A\leftrightarrow\left\{V_0^3,(L^2(0,L))^3,a([U,V]^\tau)\right\}.
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
A:D(A)\subset(L^2(0,L))^3 &\rightarrow (L^2(0,L))^3\\
U=\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ w\end{pmatrix} &\rightarrow AU
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ w\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\rho_1}&0&0\\ 0&\frac{1}{\rho_2}&0\\ 0&0&\frac{1}{\rho_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k(\varphi_x+\psi+lw)_x-k_0l(w_x-l\varphi)\\ -b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)\\ -k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\rho_1}[-k(\varphi_x+\psi+lw)_x-k_0l(w_x-l\varphi)]\\ \frac{1}{\rho_2}[-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)]\\ \frac{1}{\rho_1}[-k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)]\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

com domínio

$$D(A) = \{U = \{\varphi, \psi, w\}^{\tau} \in (H^2(0,L) \cap V_0)^3 : QU(L) = 0\},$$

onde $Q = \begin{pmatrix} k\partial_x & kI & kl \\ 0 & b\partial_x & 0 \\ -k_0 lI & 0 & k_0\partial_x \end{pmatrix}$. Em outra notação,

$D(A) = \{\{\varphi, \psi, w\}^{\tau} \in (H^2(0,L) \cap V_0)^3 : k(\varphi_x + \psi + lw)(L) = b\psi_x(L) = k_0(w_x - l\varphi)(L) = 0\}.$

Não é difícil ver que a aplicação bilinear a é contínua e coerciva. Pela teoria espectral para operadores não limitados, segue que A é um operador fechado, auto-adjunto, densamente definido em $\mathcal{H}$ e também $D(A)$ é denso em V_0^3. Além disso, existe a extensão de A para todo V_0^3, que denotaremos também pela letra $A : V_0^3 \to (V_0')^3$.

2.1 Resultados Iniciais

Nesta seção enunciaremos e provaremos alguns resultados que nos auxiliarão no teorema de existência e unicidade de solução do sistema de Bresse estudado. Além disso, o leitor poderá conhecer algumas caracteríctica do operador tipo Neumann e do operador A.

Lema 2.1. *Sejam A o operador definido em (2.10) e a a forma bilinear dada em (2.8). Então,*

$(A(\{\varphi, \psi, w\}^{\tau}), \{u, v, z\}^{\tau})_* = a\left(\{\varphi, \psi, w\}^{\tau}, \{u, v, z\}^{\tau}\right), \ \forall\{\varphi, \psi, w\}^{\tau} \in D(A) \ e \ \forall\{u, v, z\}^{\tau} \in V_0^3.$

Demonstração. Sejam $\{\varphi, \psi, w\}^\tau \in D(A)$ e $\{u, v, z\}^\tau \in V_0^3$. Então,

$$\begin{aligned}
\left(A \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \right)_* &= \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1}[-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi)] \\ \frac{1}{\rho_2}[-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw)] \\ \frac{1}{\rho_1}[-k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw)] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \right)_* \\
&= \int_0^L \left(\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1}[-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi)] \\ \frac{1}{\rho_2}[-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw)] \\ \frac{1}{\rho_1}[-k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw)] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \right) \\
&= \int_0^L [-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi)] u dx \\
&+ \int_0^L [-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw)] v dx \\
&+ \int_0^L [-k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw)] z dx \\
&= -k(\varphi_x + \psi + lw)(L)u(L) - b\psi_x(L)v(L) - k_0(w_x - l\varphi)(L)z(L) \\
&+ \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)(u_x + v + lz) dx + \int_0^L b\psi_x v_x dx \\
&+ \int_0^L -k_0(w_x - l\varphi)(z_x - lu) dx.
\end{aligned}$$

Agora, uma vez que $\{\varphi, \psi, w\}^\tau \in D(A)$, $k(\varphi_x + \psi + lw)(L) = b\psi_x(L) = k_0(w_x - l\varphi)(L) = 0$. Portanto, para todos $\{\varphi, \psi, w\}^\tau \in D(A)$ e $\{u, v, z\}^\tau \in V_0^3$, vale

$$\left(A \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \right)_* = a \left(\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \right).$$

□

Lema 2.2. *Dado* $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *existe uma única terna* $p = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ w \end{pmatrix} \in (C^2[0, L] \cap V_0)^3$

solução do problema abaixo:

$$\left\{\begin{array}{l} A\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\rho_1}[-k(\varphi_x+\psi+lw)_x-k_0l(w_x-l\varphi)]\\ \frac{1}{\rho_2}[-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)]\\ \frac{1}{\rho_1}[-k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\varphi(0)\\ \psi(0)\\ w(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k(\varphi_x+\psi+lw)(L)\\ b\psi_x(L)\\ k_0(w_x-l\varphi)(L)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\end{array}\right. \tag{2.11}$$

Demonstração. Vamos considerar a forma bilinear contínua e coerciva $a : V_0^3 \times V_0^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(\{\varphi,\psi,w\}^\tau,\{u,v,z\}^\tau)=\int_0^L[k(\varphi_x+\psi+lw)(u_x+v+lz)+b\psi_xv_x+k_0(w_x-l\varphi)(z_x-lu)]dx$$

e o funcional linear contínuo $L : V_0^3 \to \mathbb{R}$ dado pela regra

$$<L,(u,v,z)^\tau>=q_1u(L)+q_2v(L)+q_3z(L),\qquad \forall(u,v,z)^\tau\in V_0^3.$$

Assim, pelo Teorema de Lax-Milgran existe uma única terna $(\varphi,\psi,w)^\tau \in V_0^3$ tal que

$$a(\{\varphi,\psi,w\}^\tau,\{u,v,z\}^\tau)=<L,(u,v,z)^\tau>,\qquad \forall(u,v,z)^\tau\in V_0^3. \tag{2.12}$$

Agora, considerando $(u, v, z)^\tau \in (C_0^\infty(0, L))^3$ em (2.12), tem-se

$$\left\{\begin{array}{lll} -k(\varphi_x+\psi+lw)_x-k_0l(w_x-l\varphi)=0 & \text{em} & D'(0,L)\\ -b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)=0 & \text{em} & D'(0,L)\\ -k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)=0 & \text{em} & D'(0,L)\end{array}\right. \tag{2.13}$$

Como $(\varphi, \psi, w)^\tau \in V_0^3$ das equações de (2.13) vem que φ_{xx}, ψ_{xx} e w_{xx} pertencem ao espaço $L^2(0, L)$, então concluímos que $\varphi, \psi, w \in H^2(0, L) \cap V_0$. Além disso, utilizando derivada com relação a distribuição, obtemos que $\varphi, \psi, w \in C^2[0, L] \cap V_0$.

Fazendo $v = z = 0$ e $u = \xi \in D(0, L)$ em (2.12), temos

$$<-k(\varphi_x+\psi+lw)_x-k_0l(w_x-l\varphi),\xi>=0,\qquad \forall\xi\in D(0,L);$$

assim,

$$-k(\varphi_x+\psi+lw)_x-k_0l(w_x-l\varphi)=0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{2.14}$$

Analogamente, considerando os casos $u=z=0, v=\xi\in D(0,L)$ e $u=v=0, z=\xi\in D(0,L)$, respectivamente, tem-se

$$-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)=0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{2.15}$$

e

$$-k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)=0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{2.16}$$

Substituindo (2.14), (2.15) e (2.16) em (2.12) e utilizando integração por partes, obtemos

$$-k(\varphi_x+\psi+lw)(L)u(L)-b\psi_{xx}(L)v(L)-k_0(w_x-l\varphi)(L)z(L)+q_1u(L)+q_2v(L)+q_3z(L)=0,$$

para todo $\forall\{u,v,z\}^\tau\in V_0^3$. Para finalizar colocando

$$u(L)=1, v(L)=z(L)=0; v(L)=1, u(L)=z(L)=0; z(L)=1, u(L)=v(L)=0,$$

respectivamente na equação acima, temos

$$\begin{cases} k(\varphi_x+\psi+lw)(L)=q_1 \\ b\psi_x(L)=q_2 \\ k_0(w_x-l\varphi)(L)=q_3 \end{cases}$$

□

Com isso estamos em condição de definir o operador Tipo Neumann $N:\mathbb{R}^3\to V_0^3$ por

$$N\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}\iff\begin{cases} A\begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} p_1(0)\\ p_2(0)\\ p_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} k(p_{1,x}+p_2+lp_3)(L)\\ bp_{2,x}(L)\\ k_0(p_{3,x}-lp_1)(L)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}\end{cases} \tag{2.17}$$

Note que os operadores N e N^* são contínuos. De fato, sejam $\left\{ q_n = \begin{pmatrix} q_{n1} \\ q_{n2} \\ q_{n3} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ e $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ com $N \begin{pmatrix} q_{1n} \\ q_{2n} \\ q_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ p_{3n} \end{pmatrix} = p_n$ e $N \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p$ tais que

$$q_n \to q \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3.$$

Então,

$$\begin{aligned}
a(p_n - p, p_n - p) &= (q_{1n} - q_1)(p_{1n}(L) - p_1(L)) + (q_{2n} - q_2)(p_{2n}(L) - p_2(L)) \\
&+ (q_{3n} - q_3)(p_{3n}(L) - p_3(L)) \\
&\leq C^{\frac{1}{2}} \big(|q_{1n} - q_1|_{\mathbb{R}} \parallel p_{1n,x} - p_{1,x} \parallel_{L^2(0,L)} + |q_{2n} - q_2|_{\mathbb{R}} \parallel p_{2n,x} - p_{2,x} \parallel_{L^2(0,L)} \\
&+ |q_{3n} - q_1|_{\mathbb{R}} \parallel p_{3n,x} - p_{3,x} \parallel_{L^2(0,L)} \big) \\
&\leq C^{\frac{1}{2}} \left(|q_{1n} - q_1|^2_{\mathbb{R}} + |q_{2n} - q_2|^2_{\mathbb{R}} + |q_{3n} - q_3|^2_{\mathbb{R}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\cdot \left(\parallel p_{1n,x} - p_{1,x} \parallel^2_{L^2(0,L)} + \parallel p_{2n,x} - p_{2,x} \parallel^2_{L^2(0,L)} + \parallel p_{3n,x} - p_{3,x} \parallel^2_{L^2(0,L)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C^{\frac{1}{2}} \left(|q_{1n} - q_1|^2_{\mathbb{R}} + |q_{2n} - q_2|^2_{\mathbb{R}} + |q_{3n} - q_3|^2_{\mathbb{R}} \right)^{\frac{1}{2}} \parallel p_n - p \parallel_{V_0^3} \\
&\leq C |q_n - q|_{\mathbb{R}^3} \, a^{\frac{1}{2}}(p_n - p, p_n - p) \\
&\leq \frac{C}{2} |q_n - q|^2_{\mathbb{R}^3} + \frac{1}{2} a(p_n - p, p_n - p).
\end{aligned}$$

Logo, $a(p_n - p, p_n - p) \leq C|q_n - q|^2_{\mathbb{R}^3}$ e, portanto, $N(q_n - q) \to (0,0,0)^\tau$ em V_0^3, donde concluímos que N é contínuo. Consequentemente, N^* é contínuo.

Lema 2.3. *Sejam A o operador definido em (2.10) e N o operador dado em (2.17).Então,*

$$N^* A v = v(L),$$

para todo $v \in V_0^3$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que a composição $N^* A^*$ faz sentido

$$V_0 \times V_0 \times V_0 \xrightarrow{A^*} V_0' \times V_0' \times V_0' \xrightarrow{N^*} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Sejam $v=(v_1,v_2,v_3)^\tau \in D(A)\subset H^2(0,L)$ e $q\in\mathbb{R}^3$ tal que $Nq=p=\begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}$. Então,

$$
\begin{aligned}
&< N^*A^*v, q >_{\mathbb{R}^3}\\
&= <A^*v, Nq>_{(V_0')^3\times(V_0)^3} = <A^*v, p>_{(V_0')^3\times(V_0)^3}\\
&= <Av, p>_{(V_0')^3\times(V_0)^3} = (Av,p)_* \quad (v\in D(A))\\
&= (A\{v_1,v_2,v_3\}^\tau, \{p_1,p_2,p_3\}^\tau)_*\\
&= \int_0^L \left(\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0\\ 0 & \rho_2 & 0\\ 0 & 0 & \rho_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1}[-k(v_{1,x}+v_2+lv_3)_x - k_0 l(v_{3,x}-lv_1)]\\ \frac{1}{\rho_2}[-bv_{2,xx}+k(v_{1,x}+v_2+lv_3)\\ \frac{1}{\rho_1}[-k_0(v_{3,x}-lv_1)_x+kl(v_{1,x}+v_2+lv_3)]\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}\right) dx\\
&= \int_0^L [-k(v_{1,x}+v_2+lv_3)_x - k_0 l(v_{3,x}-lv_1)]p_1 dx\\
&+ \int_0^L [-bv_{2,xx}+k(v_{1,x}+v_2+lv_3)p_2 dx + \int_0^L [-k_0(v_{3,x}-lv_1)_x+kl(v_{1,x}+v_2+lv_3)]p_3 dx\\
&= \underbrace{\int_0^L -k(v_{1,x}+v_2+lv_3)_x p_1 dx}_{Y_1} + \underbrace{\int_0^L -bv_{2,xx}p_2 dx}_{Y_2} + \underbrace{\int_0^L -k_0(v_{3,x}-lv_1)_x p_3 dx}_{Y_3}\\
&+ \int_0^L -k_0 l(v_{3,x}-lv_1)p_1 dx + \int_0^L k(v_{1,x}+v_2+lv_3)p_2 dx + \int_0^L kl(v_{1,x}+v_2+lv_3)p_3 dx
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Utilizando integração por partes vem que:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \int_0^L -k(v_{1,x}+v_2+lv_3)_x p_1 dx\\
&= -k(v_{1,x}+v_2+lv_3)(L)p_1(L) + k(v_{1,x}+v_2+lv_3)(0)p_1(0) + k\int_0^L (v_{1,x}+v_2+lv_3)p_{1,x}dx\\
&= k\int_0^L (v_{1,x}+v_2+lv_3)p_{1,x}dx \qquad (v\in D(A) \ \text{ e } \ N(q)=p),
\end{aligned}
$$

da mesma forma encontra-se Y_2 e Y_3; assim,

$$\begin{aligned} Y_2 &= \int_0^L -bv_{2,xx}p_2dx = b\int_0^L v_{2,x}p_{2,x}dx = v_2(L)(bp_{2,x}(L)) - b\int_0^L v_2p_{2,xx}dx \\ &= v_2(L)q_2 - b\int_0^L v_2p_{2,xx}dx. \end{aligned}$$

$$Y_3 = \int_0^L -k_0(v_{3,x}-lv_1)_xp_3dx = k_0\int_0^L (v_{3,x}-lv_1)p_{3,x}dx$$

Substituindo Y_1, Y_2 e Y_3 na equação (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} < N^*A^*v, q >_{\mathbb{R}^3} &= k\int_0^L (v_{1,x}+v_2+lv_3)p_{1,x}dx - b\int_0^L v_2p_{2,xx}dx \\ &+ k_0\int_0^L (v_{3,x}-lv_1)p_{3,x}dx + \int_0^L v_2(L)q_2 + \int_0^L -k_0l(v_{3,x}-lv_1)p_1dx \\ &+ \int_0^L k(v_{1,x}+v_2+lv_3)p_2dx + \int_0^L kl(v_{1,x}+v_2+lv_3)p_3dx \\ &= k\int_0^L v_{1,x}p_{1,x}dx + k\int_0^L (v_2+lv_3)p_{1,x}dx - b\int_0^L v_2p_{2,xx}dx \\ &+ k_0\int_0^L v_{3,x}p_{3,x}dx - k_0l\int_0^L v_1p_{3,x}dx - k_0l\int_0^L v_{3,x}p_1dx \\ &+ k_0l^2\int_0^L v_1p_1dx + k\int_0^L v_{1,x}p_2dx + k\int_0^L (v_2+lv_3)p_2dx \\ &+ kl\int_0^L v_{1,x}p_3dx + kl\int_0^L (v_2+lv_3)p_3dx + v_2(L)q_2. \end{aligned}$$

Agora, utilizando integração por partes novamente e o fato de que $v \in V_0^3$, tem-se

$$\begin{aligned} < N^*A^*v, q >_{\mathbb{R}^3} &= \int_0^L -k(p_{1,x}+p_2+lp_3)_xv_1dx + \int_0^L -bp_{2,xx}v_2dx \\ &+ \int_0^L k(p_{1,x}+p_2+lp_3)v_2dx + \int_0^L kl(p_{1,x}+p_2+lp_3)v_3dx \\ &+ \int_0^L -k_0l(p_{3,x}-lp_1)v_1dx + \int_0^L -k_0(p_{3,x}-lp_1)_xv_3dx \\ &+ k(p_{1,x}+p_2+lp_3)(L)v_1(L) + q_2v_2(L) + k_0(p_{3,x}-lp_1)(L)v_3(L) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< N^*A^*v, q >_{\mathbb{R}^3} &= \int_0^L [-k(p_{1,x} + p_2 + lp_3)_x - k_0 l(p_{3,x} - lp_1)]v_1 dx \\
&+ \int_0^L [-bp_{2,xx} + k(p_{1,x} + p_2 + lp_3)]v_2 dx \\
&+ \int_0^L [-k_0(p_{3,x} - lp_1)_x + kl(p_{1,x} + p_2 + lp_3)]v_3 dx \\
&+ k(p_{1,x} + p_2 + lp_3)(L)v_1(L) + q_2 v_2(L) + k_0(p_{3,x} - lp_1)(L)v_3(L) \\
&= q_1 v_1(L) + q_2 v_2(L) + q_3 v_3(L) \\
&= <(v_1(L), v_2(L), v_3(L))^\tau, (q_1, q_2, q_3)^\tau>_{\mathbb{R}^3} \\
&= < v(L), q >_{\mathbb{R}^3} .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$< N^*A^*v, q >_{\mathbb{R}^3} = < v(L), q >_{\mathbb{R}^3}, \quad \forall v \in D(A) \ \text{ e } \ \forall q \in \mathbb{R}^3,$$

assim, como $D(A)$ é denso em V_0^3, concluímos que

$$< N^*A^*v, q >_{\mathbb{R}^3} = < v(L), q >_{\mathbb{R}^3}, \quad \forall v \in V_0^3 \ \text{ e } \ \forall q \in \mathbb{R}^3.$$

Portanto,

$$N^*Av = v(L), \quad \forall v \in V_0^3.$$

□

2.2 Formulação do Semigrupo

Nesta seção, iremos apresentar a formulação abstrata associada ao sistema de Bresse (2.1)-(2.4).

Agora, reescreveremos o sistema (2.1) - (2.4) como um problema de valor inicial.

Denotemos por

$$Y = (\underbrace{\varphi, \psi, w}_{U}, \underbrace{\Phi, \Psi, W}_{V})^\tau = (U, V)^\tau$$

onde $\Phi = \varphi_t, \Psi = \psi_t$ e $W = w_t$. Assim, podemos escrever o sistema (2.1) - (2.4) na seguinte forma matricial.

$$-Y_t = \begin{pmatrix} -\varphi_t \\ -\psi_t \\ -w_t \\ -\Phi_t \\ -\Psi_t \\ -W_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Phi \\ -\Psi \\ -W \\ A\left[\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ w \end{pmatrix} + N\begin{pmatrix} g_1(\Phi(L)) \\ g_2(\Psi(L)) \\ g_3(W(L)) \end{pmatrix}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V \\ A\left[U + N\begin{pmatrix} g_1(\Phi(L)) \\ g_2(\Psi(L)) \\ g_3(W(L)) \end{pmatrix}\right] \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

ou ainda,

$$Y_t + \mathcal{A}Y = 0,$$

onde $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o operador linear dado por

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ w \\ \Phi \\ \Psi \\ W \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V \\ A\left[U + N\begin{pmatrix} g_1(\Phi(L)) \\ g_2(\Psi(L)) \\ g_3(W(L)) \end{pmatrix}\right] \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

cujo domínio é

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (\varphi, \psi, w, \Phi, \Psi, W)^\tau \in (V_0)^3 \times (V_0)^3 : \left(\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ w \end{pmatrix} + N\begin{pmatrix} g_1(\Phi(L)) \\ g_2(\Psi(L)) \\ g_3(W(L)) \end{pmatrix} \right) \in D(A) \right\}.$$

Observemos que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$, uma vez que $g_i(0) = 0$, para $i = 1, 2, 3$.

Colocando $G = \begin{pmatrix} g_1(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & g_2(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & g_3(\cdot) \end{pmatrix}$ a regra (2.20) pode ser reescrito da forma:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V \\ A\left(U + NG(V(L))\right). \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Dessa forma, o problema (2.1) - (2.4) pode ser reescrito da forma

$$\begin{cases} Y_t + \mathcal{A}Y = 0, \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{2.22}$$

com $Y_0 = (\varphi_0, \psi_0, w_0, \varphi_1, \psi_1, w_1)^\tau$.

2.3 Teorema de Existência e Unicidade de solução

O próximo teorema é o principal resultado deste capítulo e para verificarmos a sua veracidade utilizaremos o Teorema (1.41).

Teorema 2.4. *Suponhamos que se verifica as Hipóteses $H-1$. Então,*

(**a**) *Solução* **forte**. *Para cada $Y_0 \in D(\mathcal{A})$ existe uma única solução forte para o sistema de Bresse dado em (2.1)-(2.4) na classe*

$$\varphi, \psi, \omega \in W^{1,\infty}((0,\infty); V_0) \cap W^{2,\infty}((0,\infty); L^2(0,L)).$$

e a energia associada verifica

$$E(t) + \int_0^t g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L) + g_2(\psi_t(L))\psi_t(L) + g_3(w_t(L))w_t(L)ds = E(0), \quad \forall t > 0, \tag{2.23}$$

onde

$$E(t) := \int_0^L \frac{1}{2}(\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2)(x,t)dx. \tag{2.24}$$

(**b**) *Solução* **fraca**. *Se $Y_0 \in \mathcal{H}$ o sistema de Bresse (2.1)-(2.4) admite uma única solução fraca tal que*

$$\varphi, \psi, \omega \in C([0,\infty); V_0)) \cap C^1([0,\infty); L^2(0,L)).$$

Demonstração. Tendo em mente o Teorema (1.41) necessitamos mostrar que o operador $\mathcal{A}$ é maximal monótono em $\mathcal{H}$. Para isso, usaremos o Teorema (1.40), ou seja, devemos provar que o operador $\mathcal{A}$ é monótono e $Im(I + \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Primeiramente, vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é monótono. De fato, sejam $\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_1 \\ \Phi_1 \\ \Psi_1 \\ W_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \\ w_2 \\ \Phi_2 \\ \Psi_2 \\ W_2 \end{pmatrix}$ elementos do domínio de $\mathcal{A}$.

Então,

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{A}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} - \mathcal{A}\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\begin{pmatrix} -V_1 \\ A(U_1 + NG(V_1(L))) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -V_2 \\ A(U_2 + NG(V_2(L))) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ V_1 - V_2 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\begin{pmatrix} V_2 - V_1 \\ A[(U_1 - U_2) + N\left(G(V_1(L)) - G(V_2(L))\right)] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ V_1 - V_2 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \\
&= a(V_2 - V_1, U_1 - U_2) + (A[(U_1 - U_2) + N\left(G(V_1(L)) - G(V_2(L))\right)], V_1 - V_2)_* \\
&= a(V_2 - V_1, U_1 - U_2) + < A[(U_1 - U_2) + N\left(G(V_1(L)) - G(V_2(L))\right)], V_1 - V_2 >_{(V_0')^3 \times V_0^3} \\
&= a(V_2 - V_1, U_1 - U_2) + < A(U_1 - U_2), V_1 - V_2) >_{(V_0')^3 \times V_0^3} \\
&+ < A[N\left(G(V_1(L)) - G(V_2(L))\right)], V_1 - V_2 >_{(V_0')^3 \times V_0^3} \\
&= a(V_2 - V_1, U_1 - U_2) + a(U_1 - U_2, -(V_2 - V_1)) \\
&+ < AN\left(G(V_1(L)) - G(V_2(L))\right), V_1 - V_2 >_{(V_0')^3 \times V_0^3}, \\
&=< G(V_1(L)) - G(V_2(L)), N^* A(V_1 - V_2) >_{(V_0')^3 \times V_0^3} .
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

ma vez que, pelo Lema (2.3) temos $N^*A(V_1 - V_2) = (V_1 - V_2)(L)$, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{A}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} - \mathcal{A}\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \\
&=< G(V_1(L)) - G(V_2(L)), (V_1 - V_2)(L) >_{\mathbb{R}^3} \\
&= (g_1(\Phi_1(L)) - g_1(\Phi_2(L)))(\Phi_1 - \Phi_2)(L) \qquad (2.26)\\
&+ (g_2(\Psi_1(L)) - g_2(\Psi_2(L)))(\Psi_1 - \Psi_1)(L) \\
&+ (g_3(W_1(L)) - g_3(W_2(L)))(W_1 - W_2)(L) \\
&\geqslant 0, \qquad \forall (U_1, V_1)^\tau, (U_2, V_2)^\tau \in D(\mathcal{A}),
\end{aligned}
$$

desde que, por hipótese g_i é monótona para $i = 1, 2, 3$. Portanto, o operador $\mathcal{A}$ é monótono. Neste momento, passemos para a segunda etapa dessa demonstração. Vamos mostrar que $Im(I + \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Dado $\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \in V_0^3 \times (L^2(0, L))^3$, devemos exibir $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$
\begin{cases} U - V = H_1 \\ V + AU + ANGV(L) = H_2. \end{cases} \tag{2.27}
$$

Da primeira equação de (2.27) vem que $U = V + H_1$, que substituindo na segunda equação de (2.27) e utilizando o Lema (2.3), obtemos

$$
V + AV + GN^*A(V) = -AH_1 + H_2 \in (V_0')^3. \tag{2.28}
$$

Definamos o operador B por

$$
B = A \circ N \circ G \circ N^* \circ A.
$$

Seja $F : V_0^3 \to (V_0')^3$ a aplicação dualidade. Então, dado $v \in V_0^3$, existe $v' \in (V_0')^3$ tal que $F(v) = v'$. Além disso,

$$
<v', v>_{(V_0')^3 \times V_0^3} \quad = \quad a(v, v) = <Av, v>_{(V_0')^3 \times V_0^3},
$$

o que implica $Av = v'$; logo, $A = F$. Assim, considerando $\lambda = 1$ no Teorema (1.38) temos que o operador $A + (I + B) : V_0^3 \to (V_0')^3$ é sobrejetor se, e somente se, $I + B$ é maximal monótono em $V_0^3 \times (V_0')^3$. Para mostrar este fato, vamos definir o operador $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuja regra é

$$\varPhi\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix} = \int_0^{u_1} g_1(\tau)d\tau + \int_0^{u_2} g_2(\tau)d\tau + \int_0^{u_3} g_3(\tau)d\tau.$$

Observe que, se g_i é contínua e satisfaz a hipótese (H-1)-(iii), para $i = 1, 2, 3$, então existe uma constante positiva C tal que

$$|g_i(s)| \leq C + C|s|, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3. \tag{2.29}$$

Utilizando a desigualdade dada em (2.29) é fácil ver que a função $\varPhi$ está bem definida. Novamente utilizando a desigualdade (2.29) obtemos que $\varPhi$ é contínua. De fato, consideremos $\left\{U_n = \begin{pmatrix}u_{n1}\\ u_{n2}\\ u_{n3}\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$ e $U = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tais que $U_n \to U$ em $\mathbb{R}^3$. Então,

$$\begin{aligned}
|\varPhi(U_n) - \varPhi(U)| &= \left|\int_0^{u_{n1}} g_1(\tau)d\tau + \int_0^{u_{n2}} g_2(\tau)d\tau + \int_0^{u_{n3}} g_3(\tau)d\tau - \int_0^{u_1} g_1(\tau)d\tau\right.\\
&- \left.\int_0^{u_2} g_2(\tau)d\tau - \int_0^{u_3} g_3(\tau)d\tau\right|\\
&\leq \left|\int_{u_1}^{u_{n1}} g_1(\tau)d\tau\right| + \left|\int_{u_2}^{u_{n2}} g_2(\tau)d\tau\right| + \left|\int_{u_3}^{u_{n3}} g_3(\tau)d\tau\right|\\
&\leq \int_{u_1}^{u_{n1}} |g_1(\tau)|d\tau + \int_{u_2}^{u_{n2}} |g_2(\tau)|d\tau + \int_{u_3}^{u_{n3}} |g_3(\tau)d\tau|\\
&\overset{(2.29)}{\leq} C_1\int_{u_1}^{u_{n1}} (1+|\tau|)d\tau + C_2\int_{u_2}^{u_{n2}} (1+|\tau|)d\tau + C_3\int_{u_3}^{u_{n3}} (1+|\tau|)d\tau\\
&\leq C\left(|u_{n1} - u_1| + |u_{n2} - u_2| + |u_{n3} - u_3| + (|u_{n1}| + |u_1|)\,\big|\,|u_{n1}| - |u_1|\,\big|\right.\\
&+ \left.(|u_{n2}| + |u_2|)\big|\,|u_{n2}| - |u_2|\,\big| + (|u_{n3}| + |u_3|)\,\big|\,|u_{n3}| - |u_3|\,\big|\right)\\
&\leq C\left(|u_{n1} - u_1| + |u_{n2} - u_2| + |u_{n3} - u_3| + (|u_{n1}| + |u_1|)|u_{n1} - u_1|\right.\\
&+ \left.(|u_{n2}| + |u_2|)|u_{n2} - u_2| + (|u_{n3}| + |u_3|)|u_{n3} - u_3|\right),
\end{aligned}$$

assim, do fato de $U_n \to U$ em $\mathbb{R}^3$, resulta que $\varPhi(U_n) \to \varPhi(U)$, como queríamos. Agora, mostremos que Φ é Gauteaux-Diferenciável. Dados $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $\delta \in \mathbb{R}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}(\Phi(U+\delta V) - \Phi(U)) &= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left[\int_{u_1}^{u_1+\delta v_1} g_1(\tau)d\tau + \int_{u_2}^{u_2+\delta v_2} g_2(\tau)d\tau + \int_{u_3}^{u_3+\delta v_3} g_3(\tau)d\tau\right] \\
&= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta v_1}\left[\int_{u_1}^{u_1+\delta v_1} g_1(\tau)\right] v_1 d\tau + \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta v_2}\left[\int_{u_2}^{u_2+\delta v_2} g_2(\tau)\right] v_2 d\tau \\
&+ \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta v_3}\left[\int_{u_3}^{u_3+\delta v_3} g_3(\tau)\right] v_3 d\tau \\
&\overset{h_i=\delta v_i}{=} \left[\lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{h_1}\int_{u_1}^{u_1+h_1} g_1(\tau)d\tau\right] v_1 + \left[\lim_{h_2 \to 0} \frac{1}{h_2}\int_{u_2}^{u_2+h_2} g_2(\tau)d\tau\right] v_2 \\
&+ \left[\lim_{h_3 \to 0} \frac{1}{h_3}\int_{u_3}^{u_3+h_3} g_3(\tau)d\tau\right] v_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}(\Phi(U+\delta V) - \Phi(U)) &= g_1(u_1)v_1 + g_2(u_2)v_2 + g_3(u_3)v_3 \qquad \text{(Teorema da Média)} \\
&= \left(\begin{pmatrix} g_1(u_1) \\ g_2(u_2) \\ g_3(u_3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) = \left(G\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= (GU, V),
\end{aligned}
$$

para todo $V \in \mathbb{R}^3$. Com isso,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Phi(U+\delta V) - \Phi(U)}{\delta} = (\Phi'(U), V) = (GU, V), \qquad \forall V \in \mathbb{R}^3;$$

assim, $\Phi'(U) = GU$, para todo $U \in \mathbb{R}^3$. Portanto, $\Phi' = G$. Uma vez que, g_i é monótona para $i = 1, 2, 3$, pelo Teorema Kachurovskii, segue que Φ é convexa, assim do Teorema (1.36), temos que para todo $U \in \mathbb{R}^3$ vale $\Phi'(U) = \partial\Phi(U)$.

Por outro lado, uma vez que o operador $N : \mathbb{R}^3 \to V_0^3$ é fechado e $A : V_0^3 \to (V_0^3)'$ é um operador auto-adjunto, definindo $\Lambda = N^* \circ A$, temos $\Lambda^* = A \circ N$. Logo,

$$B = A \circ N \circ G \circ N^* \circ A = \Lambda^* \circ G \circ \Lambda.$$

Como $\Lambda : V_0^3 \to \mathbb{R}^3$ é contínuo, uma vez que é a composição de funções contínuas, do Teorema (1.33) segue que

$$\partial(\Phi \circ \Lambda) = \Lambda^* \circ \partial\Phi \circ \Lambda = \Lambda^* \circ \Phi^{'} \circ \Lambda = \Lambda^* \circ G \circ \Lambda = B.$$

Agora, repare que a composição $\Phi \circ \Lambda$ é convexa, pois Φ é convexa e $\Lambda = N^* \circ A$ é linear. Além disso, $\Phi \circ \Lambda$ é contínuo; assim, pelo Teorema (1.39) temos que $B = \partial(\Phi \circ \Lambda)$ é maximal monótono.

Do fato de $I : V_0^3 \to V_0^3 \hookrightarrow (V_0^{'})^3$ ser monótono, contínuo, limitado e B ser maximal monótono do Corolário (1.37) segue que $I + B$ também é maximal monótono. Portanto, $A + (I + B)$ é sobrejetor e, assim, se $T = -AH_1 + H_2 \in (V_0^{'})^3$ então, existe $V \in V_0^3$ que satisfaz (2.28).

Resta mostrarmos que o par encontrado $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ pertence ao domínio de $\mathcal{A}$. Definindo $U = V + H_1 \in V_0^3$, obtemos $A(U + NGV(L)) + V = H_2$. Como $H_2 - V \in (L^2(0, L))^3$, concluímos que $A(U + NGV(L)) \in D(A)$. Logo, $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$. Assim, o operador $\mathcal{A}$ é maximal monótono e, portanto, segue do Teorema (1.41) que para $Y_0 \in D(\mathcal{A})$, existe uma única solução forte $Y = (U, U_t)^\tau$ para (2.22). Além disso, pela definição de solução forte a sua regularidade é $W^{1,\infty}((0, \infty), \mathcal{H})$, ou seja, $Y \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{H})$ e $Y_t \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{H})$. Com isso, temos que

$$\begin{gathered} U \in C([0, T]; V_0^3) \cap L^\infty(0, \infty; V_0^3) \\ U_t \in C([0, T]; (L^2(0, L))^3) \cap L^\infty(0, \infty; V_0^3) \cap L^\infty(0, \infty; (L^2(0, L))^3) \\ U_{tt} \in L^\infty(0, \infty; (L^2(0, L))^3). \end{gathered} \tag{2.30}$$

Portanto, concluímos que

$$\varphi, \psi, \omega \in W^{1,\infty}((0, \infty); V_0) \cap W^{2,\infty}((0, \infty); L^2(0, L)).$$

Além disso, repare que pela regularidade da solução forte a identidade de energia está bem definida para este tipo de solução.

Agora, uma vez que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$, para $Y_0 = (U_0\ V_0)^\tau \in \mathcal{H}$ segue do Teorema (1.43) que o problema de Cauchy (2.22) possui uma única solução fraca Y tal que $Y \in C([0, \infty], \mathcal{H})$.

A fim de encontrarmos a identidade de energia para $Y = (\varphi, \psi, w, \varphi_t, \psi_t, w_t)$ solução forte do problema proposto multipliquemos a primeira equação do sistema de Bresse (2.1) por φ_t, a segunda equação por ψ_t, a terceira equação por w_t e, integrando por partes e utilizando as condições de fronteira, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\int_0^L \frac{1}{2}(\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2)(x,t)dx\right)\\ = & -\int_0^t g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L) + g_2(\psi_t(L))\psi_t(L) + g_3(w_t(L))w_t(L)ds. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Definiremos a integral do lado direito da expressão acima como a energia $E(t)$ do sistema de Bresse, ou seja, a energia $E(t)$ é dada por:

$$E(t) := \int_0^L \frac{1}{2}(\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2)(x,t)dx. \quad (2.32)$$

Assim, integrando (2.31) de 0 à t obtemos a seguinte identidade:

$$E(t) + \int_0^t g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L) + g_2(\psi_t(L))\psi_t(L) + g_3(w_t(L))w_t(L)ds = E(0) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.33)$$

$\square$

Proposição 2.5. *Suponhamos que as funções g_i satisfazem as Hipóteses (H-1), para $i = 1, 2, 3$. Seja $Y = (\varphi, \psi, w, \varphi_t, \psi_t, w_t)^\tau \in C([0, \infty], \mathcal{H})$ uma solução fraca do sistema de Bresse (2.1)-(2.4). Então, a seguinte identidade de energia é verificada para $0 \leq t \leq T$,*

$$E(t) + \int_0^t g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L) + g_2(\psi_t(L))\psi_t(L) + g_3(w_t(L))w_t(L)ds = E(0), \quad (2.34)$$

onde

$$E(t) := \int_0^L \frac{1}{2}(\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2)(x,t)dx.$$

Demonstração. Inicialmente repare que, como $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$ e $Y_0 \in \mathcal{H}$, então existe uma sequência $\{Y_0^n\}$ em $D(\mathcal{A})$ tal que $Y_0^n \to Y_0$ em $\mathcal{H}$. Na primeira parte, mostramos que existe uma única solução forte para cada dado inicial do domínio de $\mathcal{A}$, com isso, podemos afirmar que existe uma sequência de soluções fortes $\{Y^n = (U^n \ V^n)^\tau\}$, proveniente de $\{Y_0^n\}$.

Para soluções fortes a identidade para energia dada em (2.23) é satisfeita, então para $\{Y^n\}$, temos

$$E^n(t) + \int_0^t g_1(\varphi_t^n(L,t))\varphi_t^n(L,t) + g_2(\psi_t^n(L,t))\psi_t^n(L,t) + g_3(w_t^n(L,t))w_t^n(L,t)ds = E^n(0), \tag{2.35}$$

para todo $t \in [0,T]$ com

$$\begin{aligned} E^n(t) = &\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t^n(t)\|^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t^n(t)\|^2 + \frac{\rho_1}{2}\|w_t^n(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x^n(t)\|^2 + \frac{k}{2}\|\varphi_x^n(t) + \psi^n(t) + lw^n(t)\|^2 \\ &+ \frac{k_0}{2}\|w_x^n(t) - l\varphi^n(t)\|^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Então, de (2.35) e (2.36), temos

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t^n(t)\|^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t^n(t)\|^2 + \frac{\rho_1}{2}\|w_t^n(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x^n(t)\|^2 + \frac{k}{2}\|\varphi_x^n(t) + \psi^n(t) + lw^n(t)\|^2 \\ &+ \frac{k_0}{2}\|w_x^n(t) - l\varphi^n(t)\|^2 + \int_0^t g_1(\varphi_t^n(L,t))\varphi_t^n(L,t) + g_2(\psi_t^n(L,t))\psi_t^n(L,t) + g_3(w_t^n(L,t))w_t^n(L,t)ds \\ &= \frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t^n(0)\|^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t^n(0)\|^2 + \frac{\rho_1}{2}\|w_t^n(0)\|^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x^n(0)\|^2 + \frac{k}{2}\|\varphi_x^n(0) + \psi^n(0) + lw^n(0)\|^2 \\ &+ \frac{k_0}{2}\|w_x^n(0) - l\varphi^n(0)\|^2, \end{aligned} \tag{2.37}$$

assim, do item (iii) das Hipóteses (H-1), segue que

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t^n(t)\|^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t^n(t)\|^2 + \frac{\rho_1}{2}\|w_t^n(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x^n(t)\|^2 + \frac{k}{2}\|\varphi_x^n(t) + \psi^n(t) + lw^n(t)\|^2 \\ &+ \frac{k_0}{2}\|w_x^n(t) - l\varphi^n(t)\|^2 + m\int_0^t |\varphi_t^n(L,t)|^2 + |\psi_t^n(L,t)|^2 + |w_t^n(L,t)|^2 ds \\ &\leq \frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t^n(0)\|^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t^n(0)\|^2 + \frac{\rho_1}{2}\|w_t^n(0)\|^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x^n(0)\|^2 + \frac{k}{2}\|\varphi_x^n(0) + \psi^n(0) + lw^n(0)\|^2 \\ &+ \frac{k_0}{2}\|w_x^n(0) - l\varphi^n(0)\|^2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Consideremos $Y^n = (U^n \; V^n)^\tau$ e $Y^m = (U^m \; V^m)^\tau$ elementos da sequência de soluções fortes de $\{Y^n\}$ com dados iniciais $Y_0^n = (U_0^n \; V_0^n)^\tau$ e $Y_0^m = (U_0^m \; V_0^m)^\tau$, respectivamente. Temos que $Y^n - Y^m$ é solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} Y_t + \mathcal{A}Y = 0, \\ Y(0) = Y_0^n - Y_0^m. \end{cases} \tag{2.39}$$

Isto é, para $(x,t) \in (0,L) \times (0,T)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\rho_1(\varphi^n-\varphi^m)_{tt} - k((\varphi^n-\varphi^m)_x + (\psi^n-\psi^m) + l(w^n-w^m))_x - k_0 l((w^n-w^m)_x - l(\varphi^n-\varphi^m)) = 0\\
\rho_2(\psi^n-\psi^m)_{tt} - b(\psi^n-\psi^m)_{xx} + k((\varphi^n-\varphi^m)_x + (\psi^n-\psi^m) + l(w^n-w^m)) = 0\\
\rho_1(w^n-w^m)_{tt} - k_0((w^n-w^m)_x - l(\varphi^n-\varphi^m))_x + kl((\varphi^n-\varphi^m)_x + (\psi^n-\psi^m) + l(w^n-w^m)) = 0\\
(\varphi^n-\varphi^m)(0,t) = (\psi^n-\psi^m)(0,t) = (w^n-w^m)(0,t) = 0\\
k((\varphi^n-\varphi^m)_x + (\psi^n-\psi^m) + l(w^n-w^m))(L,t) = -g_1(\varphi_t^n(L,t)) + g_1(\varphi_t^m(L,t))\\
b(\psi^n-\psi^m)_x(L,t) = -g_2(\psi_t^n(L,t)) + g_2(\psi_t^m(L,t))\\
k_0((w^n-w^m)_x - l(\varphi^n-\varphi^m))(L,t) = -g_3(w_t^n(L,t)) + g_3(w_t^m(L,t)).
\end{aligned}
$$

Como feito anteriormente, podemos concluir de (2.37) que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho_1}{2}\|(\varphi^n-\varphi^m)_t(t)\|^2 + \frac{\rho_2}{2}\|(\psi^n-\psi^m)_t(t)\|^2 + \frac{\rho_1}{2}\|(w^n-w^m)_t(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|(\psi^n-\psi^m)_x(t)\|^2\\
&+ \frac{k}{2}\|((\varphi^n-\varphi^m)_x + (\psi^n-\psi^m) + l(w^n-w^m)(t)\|^2 + \frac{k_0}{2}\|((w^n-w^m)_x - l(\varphi^n-\varphi^m))(t)\|^2\\
&+ \int_0^T [g_1(\varphi_t^n(L,t)) - g_1(\varphi_t^m(L,t))][\varphi_t^n(L,t) - \varphi_t^m(L,t)]\\
&+ [g_2(\psi_t^n(L,t)) - g_2(\psi_t^m(L,t))][\psi_t^n(L,t) - \psi_t^m(L,t)]\\
&= \frac{\rho_1}{2}\|(\varphi^n-\varphi^m)_t(0)\|^2 + \frac{\rho_2}{2}\|(\psi^n-\psi^m)_t(0)\|^2 + \frac{\rho_1}{2}\|(w^n-w^m)_t(0)\|^2 + \frac{b}{2}\|(\psi^n-\psi_m)_x(0)\|^2\\
&+ \frac{k}{2}\|(\varphi^n-\varphi^m)_x(0) + (\psi^n-\psi^m)(0) + l(w^n-w^m)(0)\|^2\\
&+ \frac{k_0}{2}\|(w^n-w^m)_x(0) - l(\varphi^n-\varphi^m)(0)\|^2,
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\| Y^n(t) - Y^m(t) \|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T [g_1(\varphi_t^n(L,t)) - g_1(\varphi_t^m(L,t))][\varphi_t^n(L,t) - \varphi_t^m(L,t)]\\
&+ [g_2(\psi_t^n(L,t)) - g_2(\psi_t^m(L,t))][\psi_t^n(L,t) - \psi_t^m(L,t)]\\
&+ [g_3(w_t^n(L,t)) - g_3(w_t^m(L,t))][w_t^m(L,t) - w_t^m(L,t)]dt\\
&= \| Y^n(0) - Y^m(0) \|_{\mathcal{H}}^2 .
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Agora, como $Y_0^n \to Y_0$ em $\mathcal{H}$, segue que sequência a $\{Y_0^n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$; logo, pela identidade anterior a sequência de soluções fortes $\{Y^n\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,T],\mathcal{H})$. Então, existe $\Gamma \in C([0,T],\mathcal{H})$ tal que $Y^n \to \Gamma$ em $C([0,T],\mathcal{H})$, com $Y_0^n \to \Gamma(0)$ em $\mathcal{H}$. Logo, concluímos que Γ é uma solução fraca de (2.22). Porém, do Teorema (1.43) a solução fraca é única; donde segue que $\Gamma = Y$. Contudo, temos que existe uma sequência de soluções fortes $\{Y^n\}$ do problema dado em (2.22) tal que

$$Y^n \to Y \text{ em } C([0,T],\mathcal{H}). \tag{2.42}$$

Consequentemente, pelo equivalência entre as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ tem-se

$$\begin{aligned}
&\varphi_t^n \longrightarrow \varphi_t \quad \text{em} \quad C([0,T];L^2(0,L)) \quad \text{e} \quad \varphi^n \longrightarrow \varphi \quad \text{em} \quad C([0,T];V_0) \hookrightarrow C([0,T];C[0,L])\\
&\psi_t^n \longrightarrow \psi_t \quad \text{em} \quad C([0,T];L^2(0,L)) \quad \text{e} \quad \psi^n \longrightarrow \psi \quad \text{em} \quad C([0,T];V_0) \hookrightarrow C([0,T];C[0,L])\\
&w_t^n \longrightarrow w_t \quad \text{em} \quad C([0,T];L^2(0,L)) \quad \text{e} \quad w^n \longrightarrow w \quad \text{em} \quad C([0,T];V_0) \hookrightarrow C([0,T];C[0,L]),
\end{aligned} \tag{2.43}$$

logo, das convergências do lado direito de (2.43), obtemos

$$\varphi^n(L,\cdot) \to \varphi(L,\cdot) \quad \text{em} \quad C([0,T]) \hookrightarrow L^2(0,T) \tag{2.44}$$

$$\psi^n(L,\cdot) \to \psi(L,\cdot) \quad \text{em} \quad C([0,T]) \hookrightarrow L^2(0,T) \tag{2.45}$$

$$w^n(L,\cdot) \to w(L,\cdot) \quad \text{em} \quad C([0,T]) \hookrightarrow L^2(0,T) \tag{2.46}$$

então,

$$\begin{aligned}
\varphi_t^n(L,\cdot) \to \varphi_t(L,\cdot) \quad &\text{em} \quad H^{-1}(0,T)\\
\psi_t^n(L,\cdot) \to \psi_t(L,\cdot) \quad &\text{em} \quad H^{-1}(0,T)\\
w_t^n(L,\cdot) \to w_t(L,\cdot) \quad &\text{em} \quad H^{-1}(0,T).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Por outro lado, da desigualdade dada em (2.38) vem que:

$$\varphi_t^n(L), \psi_t^n(L), w_t^n(L) \ \text{ são limitadas em } L^2(0,T). \tag{2.48}$$

Deste fato, existem subsequências de $\{\varphi_t^n(L)\}, \{\psi_t^n(L)\}, \{w_t^n(L)\}$, de mesmo nome, e $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in L^2(0,T)$, tais que

$$\begin{aligned}
\varphi_t^n(L,t) \rightharpoonup \xi_1 \quad &\text{em} \quad L^2(0,T) \hookrightarrow H^{-1}(0,T)\\
\psi_t^n(L,t) \rightharpoonup \xi_2 \quad &\text{em} \quad L^2(0,T) \hookrightarrow H^{-1}(0,T)\\
w_t^n(L,t) \rightharpoonup \xi_3 \quad &\text{em} \quad L^2(0,T) \hookrightarrow H^{-1}(0,T).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Combinando (2.47) e (2.49), da unicidade do limite fraco vem que:

$$\begin{aligned} \varphi_t^n(L,t) &\rightharpoonup \varphi_t(L,t) \quad \text{em} \quad L^2(0,T) \\ \psi_t^n(L,t) &\rightharpoonup \psi_t(L,t) \quad \text{em} \quad L^2(0,T) \\ w_t^n(L,t) &\rightharpoonup w_t(L,t) \quad \text{em} \quad L^2(0,T). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Das limitações obtidas em (2.48), segue de (2.29) e (2.37) que

$$g_1(\varphi_t^n(L)), g_2(\psi_t^n(L)), g_3(w_t^n(L)) \ \text{ são limitadas em } L^2(0,T). \tag{2.51}$$

Dessa forma, existem subsequências de $\{g_1(\varphi_t^n(L))\}, \{g_2(\psi_t^n(L))\}$ e $\{g_3(w_t^n(L))\}$, de mesmo nome, e $g_1^*, g_2^*, g_3^* \in L^2(0,T)$ tais que

$$\begin{aligned} g_1(\varphi_t^n(L)) &\rightharpoonup g_1^* \in L^2(0,T) \\ g_2(\psi_t^n(L)) &\rightharpoonup g_2^* \in L^2(0,T) \\ g_3(w_t^n(L)) &\rightharpoonup g_3^* \in L^2(0,T). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Agora, de (2.41) e sendo $\{Y^n\}$ e $\{Y_0^n\}$ sequências de Cauchy em $\mathcal{H}$, vem que:

$$\begin{aligned} &\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T [[g_1(\varphi_t^n(L,t)) - g_1(\varphi_t^m(L,t))][\varphi_t^n(L,t) - \varphi_t^m(L,t)] \\ &+[g_2(\psi_t^n(L,t)) - g_2(\psi_t^m(L,t))][\psi_t^n(L,t) - \psi_t^m(L,t)] \\ &+[g_3(w_t^n(L,t)) - g_3(w_t^m(L,t))][w_t^m(L,t) - w_t^m(L,t)]dt] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, sendo g_i monótona crescente para $i = 1, 2, 3$, tem-se

$$\begin{aligned} &\int_0^T [g_1(\varphi_t^n(L,t)) - g_1(\varphi_t^m(L,t))][\varphi_t^n(L,t) - \varphi_t^m(L,t)]dt \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n,m\to\infty \\ &\int_0^T [g_2(\psi_t^n(L,t)) - g_2(\psi_t^m(L,t))][\psi_t^n(L,t) - \psi_t^m(L,t)]dt \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n,m\to\infty \\ &\int_0^T [g_3(w_t^n(L,t)) - g_3(w_t^m(L,t))][w_t^n(L,t) - w_t^m(L,t)]dt \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n,m\to\infty, \end{aligned} \tag{2.53}$$

assim, da primeira convergência de (2.53) e das convergências (2.50) e (2.52), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t))\varphi_t^n(L,t)dt - \lim_{m\to\infty}\int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t))\varphi_t^m(L,t)dt\right.\\
&- \left.\lim_{m\to\infty}\int_0^T g_1(\varphi_t^m(L,t))\varphi_t^n(L,t)dt + \lim_{m\to\infty}\int_0^T g_1(\varphi_t^m(L,t))\varphi_t^m(L,t)dt\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t))\varphi_t^n(L,t)dt - \int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t))\varphi_t(L,t)dt\right.\\
&- \left.\int_0^T g_1^*\varphi_t^n(L,t)dt + \lim_{m\to\infty}\int_0^T g_1(\varphi_t^m(L,t))\varphi_t^m(L,t)dt\right];
\end{aligned} \tag{2.54}$$

logo, colocando n no lugar de m, obtemos:

$$2\lim_{n\to\infty}\int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t))\varphi_t^n(L,t)dt = 2\int_0^T g_1^*\varphi_t(L,t)dt. \tag{2.55}$$

Agora, como g_1 é monótona crescente, para todo $v \in L^2(0,T)$, temos

$$\begin{aligned}
&0 \le \int_0^T (g_1(\varphi_t^n(L,t)) - g_1(v(t)))(\varphi_t^n(L,t) - v(t))dt\\
&= \int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t)\varphi_t^n(L,t)dt - \int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t))v(t)dt - \int_0^T g_1(v(t))(\varphi_t^n(L,t) - v(t))dt,
\end{aligned}$$

mas $g_1(\varphi_t^n(L,t)$ e $\varphi_t^n(L,t)$ são limitadas em $L^2(0,T)$, então a existência do $\lim_{n\to\infty} sup$ está garantida, dessa forma,

$$\begin{aligned}
&0 \le \lim_{n\to\infty} sup\int_0^T (g_1(\varphi_t^n(L,t)) - g_1(v(t)))(\varphi_t^n(L,t) - v(t))dt\\
&= \lim_{n\to\infty} sup\left[\int_0^T g_1(\varphi_t^n)(L,t)\varphi_t^n(L,t)dt - \int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t))v(t)dt\right.\\
&- \left.\int_0^T g_1(v(t))(\varphi_t^n(L,t) - v(t))dt\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T g_1(\varphi_t^n)(L,t)\varphi_t^n(L,t)dt - \int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t))v(t)dt\right.\\
&- \left.\int_0^T g_1(v(t))(\varphi_t^n(L,t) - v(t))dt\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t)\varphi_t^n(L,t)dt - \lim_{n\to\infty}\int_0^T g_1(\varphi_t^n(L,t))v(t)dt\\
&- \lim_{n\to\infty}\int_0^T g_1(v(t))(\varphi_t^n(L,t) - v(t))dt\\
&\overset{(3.93),(2.52)}{=} \int_0^T g_1^*\varphi_t(L,t)dt - \int_0^T g_1^* v(t)dt - \int_0^T g_1(v(t))(\varphi_t(L,t) - v(t))dt.
\end{aligned}$$

Então, para todo $v \in L^2(0,T)$, temos

$$0 \leq \int_0^T (g_1^*(t) - g_1(v(t)))(\varphi_t(L,t) - v(t))dt,$$

em particular para $v(t) = \varphi_t(L,t) + \lambda z(t)$, com $z(t) \in L^2(0,T)$ e $\lambda > 0$, isto é,

$$0 \leq \int_0^T (g_1^*(t) - g_1(\varphi_t(L,t) + \lambda z(t)))(-\lambda z(t))dt, \quad \forall z \in L^2(0,T), \lambda > 0. \tag{2.56}$$

ou melhor,

$$0 \geqslant \int_0^T (g_1^*(t) - g_1(\varphi_t(L,t) + \lambda z(t)))z(t)dt, \quad \forall z \in L^2(0,T). \tag{2.57}$$

Agora, pela continuidade da g_1 e da convergência $\varphi_t(L,t) + \lambda z(t) \overset{\lambda \to 0}{\to} \varphi_t(L,t)$, tem-se

$$g_1(\varphi_t(L,t) + \lambda z(t)) \longrightarrow g_1(\varphi_t(L,t)) \quad \text{q.s em} \quad [0,T]. \tag{2.58}$$

Da desigualdade obtida em (2.29), vem que existe $C > 0$ tal que

$$|g_1(\varphi_t(L,t) + \lambda z(t)) - g_1(\varphi_t(L,t))|^2 \leq C(1 + |\varphi_t(L,t)|^2 + |z(t)|^2). \tag{2.59}$$

Logo, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue o seguinte limite:

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_0^T (g_1^*(t) - g_1(\varphi_t(L,t) + \lambda z(t))z(t)dt = \int_0^T (g_1^*(t) - g_1(\varphi_t(L,t)))z(t)dt, \tag{2.60}$$

assim , de (2.57) obtemos

$$\int_0^T (g_1^*(t) - g_1(\varphi_t(L,t)))z(t)dt \leq 0, \quad \forall z \in L^2(0,T). \tag{2.61}$$

Em particular, a desigualdade anterior é verdadeira para $-z \in L^2(0,T)$, isto é,

$$\int_0^T (g_1^*(t) - g_1(\varphi_t(L,t)))(-z(t))dt \leq 0, \quad \forall z \in L^2(0,T).$$

então,

$$\int_0^T (g_1^*(t) - g_1(\varphi_t(L,t)))z(t)dt \geq 0, \quad \forall z \in L^2(0,T). \tag{2.62}$$

Portanto, das desigualdades (2.61) e (2.62), obtemos

$$\int_0^T (g_1^*(t) - g_1(\varphi_t(L,t)))z(t)dt = 0, \quad \forall z \in L^2(0,T), \tag{2.63}$$

donde vem que

$$g_1^*(\cdot) = g_1(\varphi_t(L, \cdot)).$$

Finalmente, da igualdade anterior e de (2.52) concluímos a seguinte convergência:

$$g_1(\varphi_t^n(L,t)) \rightharpoonup g_1(\varphi_t(L,t)) \quad \text{em} \quad L^2(0,T). \tag{2.64}$$

Analogamente, obtemos

$$g_2(\psi_t^n(L,t)) \rightharpoonup g_2(\psi_t(L,t)) \quad \text{em} \quad L^2(0,T) \tag{2.65}$$

$$g_3(w_t^n(L,t)) \rightharpoonup g_3(w_t(L,t)) \quad \text{em} \quad L^2(0,T). \tag{2.66}$$

Pela parte de solução forte, (2.44) e (2.64), temos

$$-g_1(\varphi_t^n(L,t)) = k(\varphi_x^n + \psi^n + lw^n)(L,t) \rightharpoonup k(\varphi_x + \psi + lw)(L,t) \quad \text{em} \quad L^2(0,T) \tag{2.67}$$

$$-g_2(\psi_t^n(L,t)) = b\psi_x^n(L,t) \rightharpoonup b\psi_x(L,t) \quad \text{em} \quad L^2(0,T) \tag{2.68}$$

$$-g_3(w_t^n(L,t)) = k_0(w_x^n - l\varphi^n)(L,t) \rightharpoonup k_0(w_x - l\varphi)(L,t) \quad \text{em} \quad L^2(0,T). \tag{2.69}$$

Então, de (2.64)-(2.66) e (2.67)-(2.68), tem-se

$$\begin{aligned} k(\varphi_x + \psi + lw)(L,t) &= -g_1(\varphi_t(L,t)) \quad \text{em} \quad L^2(0,T); \\ b\psi_x(L,t) &= -g_2(\varphi_t(L,t)) \quad \text{em} \quad L^2(0,T); \\ k_0(w_x - l\varphi)(L,t) &= -g_3(w_t(L,t)) \quad \text{em} \quad L^2(0,T). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Finalmente, passando o limite, quando $n \to \infty$, na identidade (2.35) segue convergências obtidas em (2.43), (2.50) e (2.70) que: para toda solução fraca $(\varphi, \psi, w, \varphi_t, \psi_t, w_t)^\tau \in C([0,T], \mathcal{H})$ a identidade abaixo é satisfeita:

$$E(t) + \int_0^t g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L) + g_2(\psi_t(L))\psi_t(L) + g_3(w_t(L))w_t(L) ds = E(0) \quad \text{para} \quad t \in [0,T],$$

onde,

$$E(t) := \int_0^L \frac{1}{2}(\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2)(x,t)dx,$$

o que conclui a prova.

$\square$

Capítulo 3

Estabilização Para o Sistema de Bresse com Dissipação não linear na Fronteira

Diversos trabalhos que envolvem sistema, têm como hipótese uma condição puramente matemática. Esta condição é a igualdade ou diferença entre as velocidades de propagações de ondas, a saber,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad \text{e} \quad k = k_0. \tag{3.1}$$

O objetivo deste capítulo é mostrar que a energia associado à uma solução do sistema de Bresse com dissipações não lineares na fronteira decai exponencialmente sem a hipótese (3.1). Desssa forma, estamos trabalhando com sistemas fisicamente possíveis.

Em todo o capítulo, no intuito de simplificar a escrita, abusaremos um pouco na notação e sempre que não houver perigo de confusão, algumas expressões serão simplificadas, como por exemplo $(g(\varphi(x,t)))$ será denotada apenas por $g(\varphi)$. No mesmo intuito as constantes positivas que aparecem multiplicando algumas expressões, serão denotadas pela mesmo símbolo, uma vez que a desigualdade continua válida se tomarmos a maior dessas constantes.

3.1 Multiplicadores

Consideremos uma solução forte $Y = (\varphi, \psi, w, \varphi_t, \psi_t, w_t)^\tau$ do sistema de Bresse (2.1)-(2.4).

Repare que a expressão (2.32) também define uma norma em $\mathcal{H}$ e, é equivalente à norma usual em $\mathcal{H}$. Repare também que utilizando o item (ii) da hipótese H-1 em (2.31) vem que:

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0. \tag{3.2}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema de Bresse, (2.1), por $(\varphi_x).r(x)$, onde a função $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ depende apenas da variável x e integrando em $(0, L) \times (0, T)$, temos

$$0 = \underbrace{\int_0^T \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_x r dx dt}_{N_1} - \underbrace{\int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_x r dx dt}_{N_2} - \int_0^T \int_0^L k_0 l(w_x - l\varphi)\varphi_x r dx dt \tag{3.3}$$

Vamos estimar os termos N_1 e N_2 da última igualdade.
Estimativa para $N_1 = \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}\varphi_x r dx dt$. Integrando N_1 por partes, obtemos:

$$N_1 = \left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x r dx \right]_0^T \underbrace{- \rho_1 \int_0^L \int_0^T \varphi_t \varphi_{xt} r dt dx}_{N_{11}} \tag{3.4}$$

Agora, integrando N_{11} por partes em relação a variável x, vem que:

$$\begin{aligned} N_{11} &= -\rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_t \varphi_{xt} r dx dt \\ &= - \left[\rho_1 \int_0^T \varphi_t \varphi_t r dx \right]_0^L + \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_t \varphi_{tx} r dx dt + \rho_1 \int_0^T \int_0^L (\varphi_t)^2 \frac{dr}{dx} dx dt, \end{aligned} \tag{3.5}$$

então

$$N_{11} = -\frac{\rho_1}{2} \left[\int_0^T (\varphi_t)^2 r dt \right]_0^L + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L (\varphi_t)^2 \frac{dr}{dx} dx dt. \tag{3.6}$$

Substituindo N_{11} em N_1, temos:

$$N_1 = \left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x r dx \right]_0^T - \frac{\rho_1}{2} \left[\int_0^T (\varphi_t)^2 r dt \right]_0^L + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L (\varphi_t)^2 \frac{dr}{dx} dx dt. \tag{3.7}$$

Estimativa para $N_2 = -\int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_x r dx dt$. Primeiramente, observemos que:

$$\begin{aligned}
N_2 &= -\int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_x r dx dt \\
&= -\int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x (\varphi_x + (\psi + lw) - (\psi + lw)) r dx dt \\
&= \underbrace{-\int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x (\varphi_x + \psi + lw) r dx dt}_{N_{22}} \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x (\psi + lw) r dx dt.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Integrando N_{22} por partes, em relação a variável x, obtemos:

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x (\varphi_x + \psi + lw) r dx dt = &- \left[\int_0^T k(\varphi_x + \psi + lw)(\varphi_x + \psi + lw) r dt \right]_0^L \\
&+ \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x (\varphi_x + \psi + lw) r dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)^2 \frac{dr}{dx} dx dt,
\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
N_{22} = -\int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x (\varphi_x + \psi + lw) r dx dt = &-\frac{1}{2} \left[\int_0^T k(\varphi_x + \psi + lw)^2 r dt \right]_0^L \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)^2 \frac{dr}{dx} dx dt,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Substituindo (3.9) em (3.8) vem que :

$$\begin{aligned}
N_2 = &-\frac{1}{2} \left[\int_0^T k(\varphi_x + \psi + lw)^2 r dt \right]_0^L + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)^2 \frac{dr}{dx} dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x (\psi + lw) r dx dt.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Assim, substituindo as estimativas de N_1 e N_2 em (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
0 = &\left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x r dx \right]_0^T - \frac{\rho_1}{2} \left[\int_0^T (\varphi_t)^2 r dx \right]_0^L + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L (\varphi_t)^2 \frac{dr}{dx} dx dt \\
&- \frac{1}{2} \left[\int_0^T k(\varphi_x + \psi + lw)^2 r dt \right]_0^L + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)^2 \frac{dr}{dx} dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x (\psi + lw) r dx dt - \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l\varphi) \varphi_x r dx dt
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, multiplicando a segunda equação do sistema de Bresse (2.1) por $(\psi_x)r$, temos:

$$0=\underbrace{\int_0^T\int_0^L \rho_2\psi_{tt}\psi_x r dxdt}_{M_1}-\underbrace{\int_0^T\int_0^L b\psi_{xx}\psi_x r dxdt}_{M_2}+\int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)\psi_x r dxdt. \tag{3.12}$$

A estimativa a seguir é obtida utilizando procedimento análogo ao empregado para N_1 :

$$M_1=\rho_2\left[\int_0^L \psi_t\psi_x r dx\right]_0^T-\left[\frac{\rho_2}{2}\int_0^T(\psi_t)^2 r dt\right]_0^L+\frac{\rho_2}{2}\int_0^T\int_0^L(\psi_t)^2\frac{dr}{dx}dxdt.$$

Estimativa para $M_2=-\int_0^T\int_0^L b\psi_{xx}\psi_x r dxdt$. Integrando M_2 por partes em relação à variável x, vem que:

$$-\int_0^T\int_0^L b\psi_{xx}\psi_x r dxdt=-\left[\int_0^T b(\psi_x)^2 r dt\right]_0^L+\int_0^T\int_0^L b\psi_x\psi_{xx} r dxdt+\int_0^T\int_0^L b(\psi_x)^2\frac{dr}{dx}dxdt, \tag{3.13}$$

assim,

$$M_2=-\frac{1}{2}\left[\int_0^T b(\psi_x)^2 r dt\right]_0^L+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L b(\psi_x)^2\frac{dr}{dx}dxdt.$$

Logo, Substituindo as estimativas obtidas anteriormente para M_1 e M_2 em (3.12), tem-se:

$$\begin{aligned}0=&\rho_2\left[\int_0^L \psi_t\psi_x r dx\right]_0^T-\left[\frac{\rho_2}{2}\int_0^T(\psi_t)^2 r dt\right]_0^L+\frac{\rho_2}{2}\int_0^T\int_0^L(\psi_t)^2\frac{dr}{dx}dxdt-\frac{1}{2}\left[\int_0^T b(\psi_x)^2 r dt\right]_0^L\\&+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L b(\psi_x)^2\frac{dr}{dx}dxdt+\int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)\psi_x r dxdt.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Por último, multiplicando a terceira equação do sistema de Bresse (2.1) por $(w_x)r$ e integrando sobre o intervalo $(0,L)\times(0,T)$, obtemos:

$$0=\underbrace{\int_0^T\int_0^L \rho_1 w_t w_x r dxdt}_{R_1}-\underbrace{\int_0^T\int_0^L k_0(w_x-l\varphi)_x w_x r dxdt}_{R_2}+\int_0^T\int_0^L kl(\varphi_x+\psi+lw)w_x r dxdt. \tag{3.15}$$

Analogamente ao processo utilizado para a obtenção de N_1 e M_1, realizamos para obter a seguinte estimativa para R_1 :

$$R_1=\rho_1\left[\int_0^L w_t w_x r dx\right]_0^T-\frac{\rho_1}{2}\left[\int_0^T(w_t)^2 r dt\right]_0^L+\frac{\rho_1}{2}\int_0^T\int_0^L(w_t)^2\frac{dr}{dx}dxdt.$$

Observe que,

$$R_2 = -\int_0^T\int_0^L k_0(w_x - l\varphi)_x(w_x - l\varphi + l\varphi)rdxdt = \underbrace{-\int_0^T\int_0^L k_0(w_x - l\varphi)_x(w_x - l\varphi)rdxdt}_{R_{22}} - \int_0^T\int_0^L k_0 l(w_x - l\varphi)_x\varphi rdxdt. \tag{3.16}$$

Assim, integrando por partes R_{22} em relação à variável x, vem que:

$$-\int_0^T\int_0^L k_0(w_x - l\varphi)_x(w_x - l\varphi)rdxdt = -\left[\int_0^T k_0(w_x - l\varphi)^2rdt\right]_0^L + \int_0^T\int_0^L k_0(w_x - l\varphi)^2\frac{dr}{dx}dxdt + \int_0^T\int_0^L k_0(w_x - l\varphi)(w_x - l\varphi)_x rdxdt. \tag{3.17}$$

Logo,

$$R_{22} = -\frac{1}{2}\left[\int_0^T k_0(w_x - l\varphi)^2rdt\right]_0^L + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L k_0(w_x - l\varphi)^2\frac{dr}{dx}dxdt.$$

Substituindo a estimativa obtida acima para R_{22} em (3.16), vem que:

$$R_2 = -\frac{1}{2}\left[\int_0^T k_0(w_x - l\varphi)^2rdt\right]_0^L + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L k_0(w_x - l\varphi)^2\frac{dr}{dx}dxdt - \int_0^T\int_0^L k_0 l(w_x - l\varphi)_x\varphi rdxdt.$$

Daí, substituindo as estimativas para R_1 e R_2 na equação (3.15), temos:

$$0 = \rho_1\left[\int_0^L w_t w_x rdx\right]_0^T - \frac{\rho_1}{2}\left[\int_0^T (w_t)^2rdt\right]_0^L + \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\int_0^L (w_t)^2\frac{dr}{dx}dxdt - \frac{1}{2}\left[\int_0^T k_0(w_x - l\varphi)^2rdt\right]_0^L + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L k_0(w_x - l\varphi)^2\frac{dr}{dx}dxdt - \int_0^T\int_0^L k_0 l(w_x - l\varphi)_x\varphi rdxdt + \int_0^T\int_0^L kl(\varphi_x + \psi + lw)w_x rdxdt. \tag{3.18}$$

Portanto, somando as equações (3.11), (3.14), (3.18) e reorganizando de forma conveniente tem-se:

$$
\begin{aligned}
0 &= \rho_1\left[\int_0^L \varphi_t\varphi_x r dx\right]_0^T + \rho_2\left[\int_0^L \psi_t\psi_x r dx\right]_0^T + \rho_1\left[\int_0^L w_t w_x r dx\right]_0^T - \frac{\rho_1}{2}\left[\int_0^T (\varphi_t)^2 r dx\right]_0^L \\
&- \frac{\rho_2}{2}\left[\int_0^T (\psi_t)^2 r dt\right]_0^L - \frac{\rho_1}{2}\left[\int_0^T (w_t)^2 r dt\right]_0^L + \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\int_0^L (\varphi_t)^2\frac{dr}{dx}dxdt + \frac{\rho_2}{2}\int_0^T\int_0^L (\psi_t)^2\frac{dr}{dx}dxdt \\
&+ \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\int_0^L (w_t)^2\frac{dr}{dx}dxdt - \frac{1}{2}\left[\int_0^T k(\varphi_x+\psi+lw)^2 r dt\right]_0^L - \frac{1}{2}\left[\int_0^T b(\psi_x)^2 r dt\right]_0^L \\
&- \frac{1}{2}\left[\int_0^T k_0(w_x - l\varphi)^2 r dt\right]_0^L + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)^2\frac{dr}{dx}dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L b(\psi_x)^2\frac{dr}{dx}dxdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L k_0(w_x-l\varphi)^2\frac{dr}{dx}dxdt + \underbrace{\int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)_x(\psi+lw) r dxdt}_{S_1} \\
&+ \underbrace{\int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)\psi_x r dxdt}_{S_2} \underbrace{-\int_0^T\int_0^L k_0 l(w_x-l\varphi)\varphi_x r dxdt}_{S_3} \underbrace{-\int_0^T\int_0^L k_0 l(w_x-l\varphi)_x\varphi r dxdt}_{S_4} \\
&+ \underbrace{\int_0^T\int_0^L kl(\varphi_x+\psi+lw)w_x r dxdt}_{S_5}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Somando S_2 e S_5, obtemos: $S_2 + S_5 = \int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw)_x r dxdt := S_6$. Agora, reparemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw)r] &= k(\varphi_x+\psi+lw)_x(\psi+lw)r + k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw)_x r \\
&+ k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw)\frac{dr}{dx},
\end{aligned}
$$

então, $S_1 + S_6$ pode ser escrito da forma:

$$
\begin{aligned}
S_1 + S_6 &= S_1 + (S_2 + S_5) \\
&= \int_0^T\int_0^L \frac{d}{dx}[k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw)r]dxdt - \int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw)\frac{dr}{dx}dxdt \\
&= \left[\int_0^T k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw) r dt\right]_0^L - \int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw)\frac{dr}{dx}dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Observe, também que:

$$
\frac{d}{dx}[k_0 l(w_x-l\varphi)\varphi r] = k_0 l(w_x-l\varphi)_x\varphi r + k_0 l(w_x-l\varphi)\varphi_x r + k_0 l(w_x-l\varphi)\varphi\frac{dr}{dx},
$$

com isso,

$$\begin{aligned} S_3 + S_4 &= -\int_0^T \int_0^L \frac{d}{dx}[k_0 l(w_x - l\varphi)\varphi r]dxdt + \int_0^T \int_0^L k_0 l(w_x - l\varphi)\varphi \frac{dr}{dx} dxdt \\ &= -\left[\int_0^T k_0 l(w_x - l\varphi)\varphi r dt\right]_0^L + \int_0^T \int_0^L k_0 l(w_x - l\varphi)\varphi \frac{dr}{dx} dxdt. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Portanto, substituindo (3.20) e (3.21) na equação (3.19), vem que:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) r dx\right]_0^T \\ &- \frac{1}{2}\left[\int_0^T [\rho_1(\varphi_t)^2 + \rho_2(\psi_t)^2 + \rho_1(w_t)^2 + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + b(\psi_x)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2] r dt\right]_0^L \\ &+ \left[\int_0^T k(\varphi_x + \psi + lw)(\psi + lw) r dt\right]_0^L - \left[\int_0^T k_0 l(w_x - l\varphi)\varphi r dt\right]_0^L \\ &- \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)(\psi + lw)\frac{dr}{dx} dxdt + \int_0^T \int_0^L k_0 l(w_x - l\varphi)\varphi \frac{dr}{dx} dxdt + \int_0^T E(t)\frac{dr}{dx} dt. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Assim, considerando $r(x) = x$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t)dt &= -\left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) x dx\right]_0^T \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T [\rho_1(\varphi_t)^2(L) + \rho_2(\psi_t)^2(L) + \rho_1(w_t)^2(L) + k(\varphi_x + \psi + lw)^2(L) + b(\psi_x)^2(L) \\ &+ k_0(w_x - l\varphi)^2(L)] L dt \\ &- \int_0^T [k(\varphi_x + \psi + lw)(L)(\psi + lw)(L)] L dt + \int_0^T [k_0(w_x - l\varphi)(L) l\varphi(L)] L dt \\ &+ \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)(\psi + lw) dxdt - \int_0^T \int_0^L k_0(w_x - l\varphi) l\varphi dxdt. \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.2 Decaimento Uniforme

Já mencionamos que a energia $E(t)$ definida em (2.32) define uma norma equivalente à norma usual em $\mathcal{H}$, que a partir de agora denotaremos por $E_1(t)$. Ou seja, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1 E_1(t) \leq E(t) \leq C_2 E_1(t). \tag{3.24}$$

Temos por objetivo limitar a expressão dada em (3.23). Para isso, primeiramente, vamos obter uma estimativa para $-\left[\int_0^L(\rho_1\varphi_t\varphi_x+\rho_2\psi_t\psi_x+\rho_1 w_t w_x)xdx\right]_0^T$. Inicialmente repare que:

$$\begin{aligned}\left[\int_0^L(\rho_1\varphi_t\varphi_x+\rho_2\psi_t\psi_x+\rho_1 w_t w_x)xdx\right]_0^T &= -\int_0^L[\rho_1\varphi_t(T)\varphi_x(T)+\rho_2\psi_t(T)\psi_x(T)+\rho_1 w_t(T)w_x(T)]xdx\\ &+\int_0^L[\rho_1\varphi_t(0)\varphi_x(0)+\rho_2\psi_t(0)\psi_x(0)+\rho_1 w_t(0)w_x(0)]xdx\end{aligned} \tag{3.25}$$

Vamos analisar o termo $-\int_0^L \rho_1\varphi_t(T)\varphi_x(T)xdx$ da igualdade (3.25),

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^L \rho_1\varphi_t(T)\varphi_x(T)xdx\right| &\leq \int_0^L \rho_1|\varphi_t(T)||\varphi_x(T)|xdx \leq \rho_1 L\int_0^L |\varphi_t(T)||\varphi_x(T)|xdx\\ &\overset{\text{Holder}}{\leq} \rho_1 L\left(\int_0^L|\varphi_t(T)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L|\varphi_x(T)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\overset{\text{Young}}{\leq} \frac{\rho_1 L}{2}\left(\|\varphi_t(T)\|^2_{L^2(0,L)}+\|\varphi_x(T)\|^2_{L^2(0,L)}\right)\\ &\leq C_{\rho_1,L}\left(\|\varphi_t\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|\varphi_x\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}\right),\end{aligned} \tag{3.26}$$

da mesma forma feito acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^L \rho_2\psi_t(T)\psi_x(T)xdx\right| &\leq C_{\rho_2,L}\left(\|\psi_t\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|\psi_x\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}\right)\\ \left|-\int_0^L \rho_1 w_t(T)w_x(T)xdx\right| &\leq C_{\rho_1,L}\left(\|w_t\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|w_x\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}\right).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Para $t=0$ procedemos da mesma maneira que para $t=T$, com isso segue que:

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^L \rho_1\varphi_t(0)\varphi_x(0)xdx\right| &\leq C_{\rho_1,L}\left(\|\varphi_t\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|\varphi_x\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}\right)\\ \left|-\int_0^L \rho_2\psi_t(0)\psi_x(0)xdx\right| &\leq C_{\rho_2,L}\left(\|\psi_t\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|\psi_x\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}\right)\\ \left|-\int_0^L \rho_1 w_t(0)w_x(0)xdx\right| &\leq C_{\rho_1,L}\left(\|w_t\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|w_x\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}\right).\end{aligned} \tag{3.28}$$

Assim, majorando (3.25) por (3.26), (3.27) e (3.28), tem-se:

$$\begin{aligned}\left[\int_0^L \rho_1\varphi_t\varphi_x+\rho_2\psi_t\psi_x+\rho_1 w_t w_x dx\right]_0^T &\leq C\left(\|\varphi_t\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|\psi_t\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}\right.\\ &\left.+\|w_t\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|\varphi_x\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|\psi_x\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}+\|w_x\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

Analisemos o termo $\int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw)dxdt$ da expressão dada em (3.23).

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)(\psi+lw)dxdt\right| &\leq \int_0^T\int_0^L \sqrt{k\varepsilon}|\varphi_x+\psi+lw|\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\varepsilon}}|\psi+lw|dxdt\\
&\leq \int_0^T\left[\left(\int_0^L(\sqrt{k\varepsilon}|\varphi_x+\psi+lw|)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\varepsilon}}|\psi+lw|\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]dt\\
&\leq \varepsilon\int_0^T\left(\frac{1}{2}\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)^2dx\right)dt+\frac{k}{2\varepsilon}\int_0^T\int_0^L(\psi+lw)^2dxdt\\
&\leq \varepsilon\int_0^T E(t)dt+\frac{k}{2\varepsilon}\int_0^T\int_0^L(\psi^2+l^2w^2)dxdt\\
&\leq \varepsilon\int_0^T E(t)dt+C_\varepsilon\int_0^T\int_0^L(\psi^2+w^2)dxdt.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Analogamente, temos:

$$\left|-\int_0^T\int_0^L k_0(w_x-l\varphi)(l\varphi)dxdt\right|\leq\varepsilon\int_0^T E(t)dt+C_\varepsilon\int_0^T\int_0^L\varphi^2dxdt. \tag{3.31}$$

Para finalizarmos as estimativas dos termos da expressão dada em (3.23), analisemos $\int_0^T(k_0(w_x-l\varphi)(L)l\varphi(L))Ldt$.

$$\left|\int_0^T(k_0(w_x-l\varphi)(L)l\varphi(L))Ldt\right|\leq\int_0^T\sqrt{k_0L}|(w_x-l\varphi)(L)|l\sqrt{k_0L}|\varphi(L)|dt. \tag{3.32}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
|\varphi(L)| &= \int_0^L\varphi_x(x,t)dx\leq L^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L|\varphi_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq L^{\frac{1}{2}}(2E_1(t))^{\frac{1}{2}}\overset{(3.24)}{\leq}L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{C_1}E(t)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq\left(\frac{2L}{C_1}\right)^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}(t),
\end{aligned}$$

então, de (3.32) segue que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T(k_0(w_x-l\varphi)(L)l\varphi(L))Ldt\right| &\leq\int_0^T\sqrt{k_0L}|(w_x-l\varphi)(L)|l\sqrt{k_0L}\left(\frac{2L}{C_1}\right)^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}dt\\
&\leq\int_0^T lL\left(\frac{2k_0}{\varepsilon C_1}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{k_0}|(w_x-l\varphi)(L)|\sqrt{L}(\varepsilon E)^{\frac{1}{2}}dt\\
&\overset{Young}{\leq}\int_0^T\left[l^2L^2\frac{2k_0}{\varepsilon C_1}k_0(w_x-l\varphi)^2(L)\right]Ldt+\varepsilon\int_0^T E(t)dt\\
&= C_\varepsilon\int_0^L(k_0(w_x-l\varphi)^2(L))Ldt+\varepsilon\int_0^T E(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Analogamente,

$$\left|-\int_0^T [k(\varphi_x+\psi+lw)(L)(\psi+lw)(L)]Ldt\right| \leq C_\varepsilon \int_0^T (k(\varphi_x+\psi+lw)(L))Ldt + \varepsilon \int_0^T E(t)dt. \tag{3.34}$$

Logo, tomando o valor absoluto em ambos os membros de (3.23) e majorando o lado direito por (3.29), (3.30), (3.31), (3.33) e (3.34), obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt \leq\ & C(\| \varphi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| \psi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| w_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} \\ & + \| \varphi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| \psi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| w_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}) \\ & + C_\varepsilon \int_0^T \left[\rho_1(\varphi_t)^2(L) + \rho_2(\psi_t)^2(L) + \rho_1(w_t)^2(L) + k(\varphi_x+\psi+lw)^2(L) + b(\psi_x)^2(L)\right. \\ & \left. + k_0(w_x - l\varphi)^2(L)\right]Ldt + 4\varepsilon \int_0^T E(t)dt + C_\varepsilon \int_0^T \int_0^L (\varphi^2+\psi^2+w^2)dxdt,\end{aligned} \tag{3.35}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}(1-4\varepsilon)\int_0^T E(t)dt \leq\ & C(\| \varphi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| \psi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| w_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} \\ & + \| \varphi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| \psi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| w_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}) \\ & + C_\varepsilon \int_0^T \left[\rho_1(\varphi_t)^2(L) + \rho_2(\psi_t)^2(L) + \rho_1(w_t)^2(L) + k(\varphi_x+\psi+lw)^2(L)\right. \\ & \left. + b(\psi_x)^2(L) + k_0(w_x - l\varphi)^2(L)\right]Ldt + C_\varepsilon \int_0^T \int_0^L (\varphi^2+\psi^2+w^2)dxdt.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Portanto, fazendo $\varepsilon = \frac{1}{5}$ chegamos na seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt \leq\ & C(\| \varphi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| \psi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| w_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} \\ & + \| \varphi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| \psi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| w_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}) \\ & + C \int_0^T \left[\rho_1(\varphi_t)^2(L) + \rho_2(\psi_t)^2(L) + \rho_1(w_t)^2(L) + k(\varphi_x+\psi+lw)^2(L)\right. \\ & \left. + b(\psi_x)^2(L) + k_0(w_x - l\varphi)^2(L)\right]Ldt + C \int_0^T \int_0^L (\varphi^2+\psi^2+w^2)dxdt.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Utilizando as condições de fronteira (2.3) em (3.37), obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt \leq C(\| \varphi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| \psi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| w_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))}\\ + \| \varphi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| \psi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} + \| w_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))})\\ + C\int_0^T \left[\rho_1(\varphi_t)^2(L) + \rho_2(\psi_t)^2(L) + \rho_1(w_t)^2(L) + (g_1(\varphi_t(L)))^2\right.\\ \left. + (g_2(\psi_t(L)))^2 + (g_3(w_t(L)))^2\right] Ldt + C\int_0^T\int_0^L(\varphi^2+\psi^2+w^2)dxdt.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Agora, nosso objetivo é majorar a expressão (3.38). Primeiramente, observemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^L (\varphi_t)^2 dx \leq 2CE(t) \overset{(3.2)}{\leq} 2CE(0) \Rightarrow \| \varphi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} \leq 2CE(0)\\ \int_0^L (\psi_t)^2 dx \leq 2CE(t) \overset{(3.2)}{\leq} 2CE(0) \Rightarrow \| \psi_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} \leq 2CE(0)\\ \int_0^L (w_t)^2 dx \leq 2CE(t) \overset{(3.2)}{\leq} 2CE(0) \Rightarrow \| w_t \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} \leq 2CE(0)\end{aligned} \tag{3.39}$$

e, também,

$$\begin{aligned}\int_0^L (\varphi_x)^2 dx \leq 2CE_1(t) \leq 2CE(t) \overset{(3.2)}{\leq} 2CE(0) \Rightarrow \| \varphi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} \leq 2CE(0)\\ \int_0^L (\psi_x)^2 dx \leq 2CE_1(t) \leq 2CE(t) \overset{(3.2)}{\leq} 2CE(0) \Rightarrow \| \psi_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} \leq 2CE(0)\\ \int_0^L (w_x)^2 dx \leq 2CE_1(t) \leq 2CE(t) \overset{(3.2)}{\leq} 2CE(0) \Rightarrow \| w_x \|^2_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} \leq 2CE(0).\end{aligned} \tag{3.40}$$

Utilizando (3.39) e (3.40) para majorar (3.38), vem que:

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt \leq 12CE(0) + C\int_0^T \left[\rho_1(\varphi_t)^2(L) + \rho_2(\psi_t)^2(L) + \rho_1(w_t)^2(L) + (g_1(\varphi_t(L)))^2\right.\\ \left. + (g_2(\psi_t(L)))^2 + (g_3(w_t(L)))^2\right] Ldt + C\int_0^T\int_0^L(\varphi^2+\psi^2+w^2)dxdt\\ \overset{(2.23)}{=} 12CE(T) + 12C\int_0^T g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L) + g_2(\psi_t(L))\psi_t(L) + g_3(w_t(L))w_t(L)dt\\ + C\int_0^T \left[\rho_1(\varphi_t)^2(L) + \rho_2(\psi_t)^2(L) + \rho_1(w_t)^2(L) + (g_1(\varphi_t(L)))^2\right.\\ \left. + (g_2(\psi_t(L)))^2 + (g_3(w_t(L)))^2\right] Ldt + C\int_0^T\int_0^L(\varphi^2+\psi^2+w^2)dxdt.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Usando as desigualdades de Holder e Young em $\int_0^T g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L)dt$, $\int_0^T g_2(\psi_t(L))\psi_t(L)dt$ e $\int_0^T g_3(w_t(L))w_t(L)dt$, respectivamente, temos:

$$\int_0^T g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L)dt \leq \frac{1}{2}\int_0^T |g_1(\varphi_t(L))|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |\varphi_t(L)|^2 dt$$
$$\int_0^T g_2(\psi_t(L))\psi_t(L)dt \leq \frac{1}{2}\int_0^T |g_2(\psi_t(L))|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |\psi_t(L)|^2 dt$$
$$\int_0^T g_3(w_t(L))w_t(L)dt \leq \frac{1}{2}\int_0^T |g_3(w_t(L))|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |w_t(L)|^2 dt.$$

Finalmente de (3.41) resulta que:

$$\int_0^T E(t)dt \leq C\left[\int_0^T \left[\rho_1(\varphi_t)^2(L) + \rho_2(\psi_t)^2(L) + \rho_1(w_t)^2(L) + (g_1(\varphi_t(L)))^2 + (g_2(\psi_t(L)))^2\right.\right.$$
$$\left.\left. +(g_3(w_t(L)))^2\right]Ldt + \int_0^T\int_0^L (\varphi^2+\psi^2+w^2)dxdt + E(T)\right]. \tag{3.42}$$

Lema 3.1. *Para $T > 0$ suficientemente grande e $\overline{M} > 0$, existe uma constante $C > 0$, que depende de T e L, tal que*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L (\varphi^2+\psi^2+w^2)dxdt \leq C\int_0^T &[(g_1(\varphi_t(L)))^2 + (g_2(\psi_t(L)))^2 + (g_3(w_t(L)))^2 \\ &+ \rho_1(\varphi_t)^2(L) + \rho_2(\psi_t)^2(L) + \rho_1(w_t)^2(L)]Ldt,\end{aligned} \tag{3.43}$$

para toda solução $U = (\varphi, \psi, w, \varphi_t, \psi_t, w_t)$ do sistema de Bresse dado em (2.1)-(2.4) com $E_0 \leq \overline{M}$, com $E_0 := E(0)$.

Demonstração. Suponhamos que (3.43) não se verifica , e seja

$$U_n(0) = (\varphi_n(0), \psi_n(0), w_n(0), (\varphi_n)_t(0), (\psi_n)_t(0), (w_n)_t(0))$$

uma sequência de dados iniciais limitados em $\mathcal{H}$, para as correspondentes soluções

$$U_n = (\varphi_n, \psi_n, w_n, (\varphi_n)_t, (\psi_n)_t, (w_n)_t)$$

do sistema

$$\begin{aligned}\rho_1(\varphi_n)_{tt} - k((\varphi_n)_x + \psi_n + lw_n)_x - k_0 l((w_n)_x - l\varphi_n) = 0 \quad &\text{em } (0,L)\times(0,T),\\ \rho_2(\psi_n)_{tt} - b(\psi_n)_{xx} + k((\varphi_n)_x + \psi_n + lw_n) = 0 \quad &\text{em } (0,L)\times(0,T),\\ \rho_1(w_n)_{tt} - k_0((w_n)_x - l\varphi_n)_x + kl((\varphi_n)_x + \psi_n + lw_n) = 0 \quad &\text{em } (0,L)\times(0,T),\end{aligned} \tag{3.44}$$

com condições de fronteira

$$\varphi_n(0,t) = \psi_n(0,t) = w_n(0,t) = 0, \quad \forall t \in (0,T), \tag{3.45}$$

e

$$\begin{aligned} k((\varphi_n)_x + \psi_n + lw)(L,t) &= -g_1((\varphi_n)_t(L,t)), \quad \forall t \in (0,T) \\ b(\psi_n)_x(L,t) &= -g_2((\psi_n)_t(L,t)), \quad \forall t \in (0,T) \\ k_0((w_n)_x - l\varphi_n)(L,t) &= -g_3((w_n)_t(L,t)), \quad \forall t \in (0,T) \end{aligned} \tag{3.46}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} (\varphi_n)(\cdot,0) &= (\varphi_n)_0(\cdot) \in V_0, \quad (\varphi_n)_t(\cdot,0) = (\varphi_n)_1(\cdot) \in L^2(0,L) \\ (\psi_n)(\cdot,0) &= (\psi_n)_0(\cdot) \in V_0, \quad (\psi_n)_t(\cdot,0) = (\psi_n)_1(\cdot) \in L^2(0,L) \\ (w_n)(\cdot,0) &= (w_n)_0(\cdot) \in V_0, \quad (w_n)_t(\cdot,0) = (w_n)_1(\cdot) \in L^2(0,L). \end{aligned} \tag{3.47}$$

com $E_n(0)$ uniformemente limitada em n. Como (3.43) não se verifica, então para qualquer $C > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (\varphi_n)^2 + (\psi_n)^2 + (w_n)^2 dxdt > C \int_0^T & [[g_1((\varphi_n)_t(L))]^2 + [g_2((\psi_n)_t(L))]^2 + [g_3((w_n)_t(L))]^2 \\ & + \rho_1((\varphi_n)_t)^2(L) + \rho_2((\psi_n)_t)^2(L) + \rho_1((w_n)_t)^2(L)]Ldt. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Escolhendo $C = n$, com $n \in \mathbb{N}$, obteremos para cada $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de soluções $(\varphi_n, \psi_n, w_n, (\varphi_n)_t, (\psi_n)_t, (w_n)_t)$ satisfazendo $0 < E_n(0) \leq \overline{M}$ e ainda

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (\varphi_n)^2 + (\psi_n)^2 + (w_n)^2 dxdt > n \int_0^T & [[g_1((\varphi_n)_t(L))]^2 + [g_2((\psi_n)_t(L))]^2 + [g_3((w_n)_t(L))]^2 \\ & + \rho_1((\varphi_n)_t)^2(L) + \rho_2((\psi_n)_t)^2(L) + \rho_1((w_n)_t)^2(L)]Ldt. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Então, tomando limite quando $n \to \infty$, temos

$$\frac{\int_0^T \int_0^L (\varphi_n)^2 + (\psi_n)^2 + (w_n)^2 dxdt}{\int_0^T \left([g_1(\varphi_{nt}(L))]^2 + [g_2(\psi_{nt}(L))]^2 + [g_3(w_{nt}(L))]^2 + \rho_1((\varphi_{nt})^2(L) + \rho_2((\psi_{nt})^2(L) + \rho_1((w_{nt})^2(L)\right) Ldt} \to \infty. \tag{3.50}$$

Como E_{1n} e E_n são equivalentes, existe $C_1 > 0$ tal que

$$C_1 E_{1n}(t) \leq E_n(t) \overset{(3.2)}{\leq} E_n(0) \leq \overline{M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,T]. \tag{3.51}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&(1a) \quad (\varphi_n)_t \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,L^2(0,L));\\
&(2a) \quad (\psi_n)_t \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,L^2(0,L));\\
&(3a) \quad (w_n)_t \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,L^2(0,L));\\
&(4a) \quad (\varphi_n)_x \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,L^2(0,L));\\
&(5a) \quad (\psi_n)_x \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,L^2(0,L));\\
&(6a) \quad (w_n)_x \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,L^2(0,L)).
\end{aligned}$$

além disso, aplicando a desigualdade de Poincaré em (4a), (5a) e (6a), vem que:

$$\begin{aligned}
&(7a) \quad \varphi_n \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,H^1(0,L));\\
&(8a) \quad \psi_n \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,H^1(0,L));\\
&(9a) \quad w_n \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,H^1(0,L)).
\end{aligned}$$

Assim, utilizando o Teorema de Simon segue que existem subsequências, de mesmo nome, de $(\varphi_n), (\psi_n)$ e (w_n) tal que

$$\begin{aligned}
&\varphi_n \to \varphi \text{ em } C([0,T], C(0,L))\\
&\psi_n \to \psi \text{ em } C([0,T], C(0,L))\\
&w_n \to w \text{ em } C([0,T], C(0,L)),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
&(1b) \quad \varphi_n(L) \to \varphi(L) \text{ em } C([0,T]) \hookrightarrow L^2(0,T);\\
&(2b) \quad \psi_n(L) \to \psi(L) \text{ em } C([0,T]) \hookrightarrow L^2(0,T);\\
&(3b) \quad w_n(L) \to w(L) \text{ em } C([0,T]) \hookrightarrow L^2(0,T).
\end{aligned}$$

Denotemos $Q = (0,T) \times (0,L)$. Agora, também de (3.52), para $n \to +\infty$, as seguintes convergências ocorrem:

$$
\begin{aligned}
&(4b) \quad \varphi_n \to \varphi \text{ em } L^2(Q);\\
&(5b) \quad \psi_n \to \psi \text{ em } L^2(Q);\\
&(6b) \quad w_n \to w \text{ em } L^2(Q);
\end{aligned}
$$

Vamos analisar dois casos:

Caso 1: $(\varphi, \psi, w, \varphi_t, \psi_t, w_t) \neq (0,0,0,0,0,0)$. Inicialmente, observe que, por (3.50), para todo $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual razão

$$
\frac{\int_0^T \int_0^L (\varphi_n)^2 + (\psi_n)^2 + (w_n)^2 dxdt}{\int_0^T \left([g_1(\varphi_{nt}(L))]^2 + [g_2(\psi_{nt}(L))]^2 + [g_3(w_{nt}(L))]^2 + \rho_1(\varphi_{nt})^2(L) + \rho_2(\psi_{nt})^2(L) + \rho_1(w_{nt})^2(L)\right) Ldt},
$$

é maior que A, para todo $n > n_0$. Assim, qualquer que seja $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \big([g_1(\varphi_{nt}(L))]^2 + [g_2(\psi_{nt}(L))]^2 + [g_3(w_{nt}(L))]^2 + \rho_1(\varphi_{nt})^2(L) + \rho_2(\psi_{nt})^2(L) + \rho_1(w_{nt})^2(L)\big) Ldt\\
&< \frac{1}{A} \underbrace{\int_0^T \int_0^L (\varphi_n)^2 + (\psi_n)^2 + (w_n)^2 dxdt}_{\text{limitado}}.
\end{aligned}
$$

Então, vem que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^T \big([g_1(\varphi_{nt}(L))]^2 + [g_2(\psi_{nt}(L))]^2 + [g_3(w_{nt}(L))]^2 + \rho_1(\varphi_{nt})^2(L) + \rho_2(\psi_{nt})^2(L) +\\
&\qquad\qquad + \rho_1(w_{nt})^2(L)\big) Ldt\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, as convergências abaixo ocorrem:

$$
\left|
\begin{aligned}
((\varphi_n)_t)(L) &\to 0 \text{ em } L^2(0,T)\\
((\psi_n)_t)(L) &\to 0 \text{ em } L^2(0,T)\\
((w_n)_t)(L) &\to 0 \text{ em } L^2(0,T)\\
g_1((\varphi_n)_t(L)) &\to 0 \text{ em } L^2(0,T)\\
g_2((\psi_n)_t(L)) &\to 0 \text{ em } L^2(0,T)\\
g_3((w_n)_t(L)) &\to 0 \text{ em } L^2(0,T).
\end{aligned}
\right. \tag{3.53}
$$

Como

$$\begin{cases} \rho_1(\varphi_n)_{tt} - k((\varphi_n)_x + \psi_n + lw_n)_x - k_0 l((w_n)_x - l\varphi_n) = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2(\psi_n)_{tt} - b(\psi_n)_{xx} + k((\varphi_n)_x + \psi_n + lw_n) = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1(w_n)_{tt} - k_0((w_n)_x - l\varphi_n)_x + kl((\varphi_n)_x + \psi_n + lw_n) = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ (\varphi_n)(x,0) = \varphi_{0n}, (\psi_n)(x,n) = \psi_0, (w_n)(x,0) = w_{0n} & \text{em } (0,L) \\ (\varphi_n)_t(x,n) = \varphi_{1n}, (\psi_n)_t(x,n) = \psi_{1n}, (w_n)_t(x,0) = w_{1n} & \text{em } (0,L) \\ \varphi_n(0,t) = \psi_n(0,t) = w_n(0,t) = 0 & \text{em } (0,T) \\ k((\varphi_n)_x + \psi_n + lw_n)(L,t) = -g_1((\varphi_n)_t(L,t)) & \text{em } (0,T) \\ b(\psi_n)_x(L,t) = -g_2((\psi_n)_t(L,t)) & \text{em } (0,T) \\ k_0((w_n)_x - l\varphi_n)(L,t) = -g_3((w_n)_t(L,t)) & \text{em } (0,T) \end{cases} \tag{3.54}$$

das convergências (3.53), aplicando o limite quando $n \to \infty$, chegamos em

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ \varphi(x,0) = \varphi_0, \psi(x,0) = \psi_0, w(x,0) = w_0 & \text{em } (0,L) \\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1, \psi_t(x,0) = \psi_1, w_t(x,0) = w_1 & \text{em } (0,L) \\ \varphi(0,t) = \psi(0,t) = w(0,t) = 0 & \text{em } (0,T) \\ k(\varphi_x + \psi + lw)(L,t) = 0 & \text{em } (0,T) \\ b\psi_x(L,t) = 0 & \text{em } (0,T) \\ k_0(w_x - l\varphi)(L,t) = 0 & \text{em } (0,T) \end{cases} \tag{3.55}$$

Tomando a derivada em (3.55) em t no sentido distribucional e usando que

$$\varphi_t(L,t) = 0, \quad \psi_t(L,t) = 0 \quad \text{e} \quad w_t(L,t) = 0,$$

fazendo $\varphi_t = \mathit{\Phi}, \psi_t = \Psi$ e $w_t = W$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \rho_1 \mathit{\Phi}_{tt} - k(\mathit{\Phi}_x + \Psi + lW)_x - k_0 l(W_x - l\mathit{\Phi}) = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2 \Psi_{tt} - b\Psi_{xx} + k(\mathit{\Phi}_x + \Psi + lW) = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1 W_{tt} - k_0(W_x - l\mathit{\Phi})_x + kl(\mathit{\Phi}_x + \Psi + lW) = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ \mathit{\Phi}(x,0) = \mathit{\Phi}_0, \Psi(x,0) = \Psi_0, W(x,0) = W_0 & \text{em } (0,L) \\ \mathit{\Phi}_t(x,0) = \mathit{\Phi}_1, \Psi_t(x,0) = \Psi_1, W_t(x,0) = W_1 & \text{em } (0,L) \\ \mathit{\Phi}(0,t) = \Psi(0,t) = W(0,t) = 0 & \text{em } (0,T) \\ \mathit{\Phi}(L,t) = \Psi(L,t) = W(L,t) = 0 & \text{em } (0,T) \\ \mathit{\Phi}_x(L,t) = \Psi_x(L,t) = W_x(L,t) = 0 & \text{em } (0,T) \end{cases}, \tag{3.56}$$

onde $\mathit{\Phi}_0, \Psi_0, W_0 \in L^2(0,L)$ e $\mathit{\Phi}_1, \Psi_1, W_1 \in (V_0)'$.

Definamos

$$\overline{\mathit{\Phi}}(t) = \begin{cases} -3\mathit{\Phi}(-t) + 4\mathit{\Phi}(-t/2) & ; \quad \text{se} \quad t \in [-T,0] \\ \mathit{\Phi}(t) & ; \quad \text{se} \quad t \in [0,T] \end{cases}, \tag{3.57}$$

$$\overline{\Psi}(t) = \begin{cases} -3\Psi(-t) + 4\Psi(-t/2) & ; \quad \text{se} \quad t \in [-T,0] \\ \Psi(t) & ; \quad \text{se} \quad t \in [0,T] \end{cases}, \tag{3.58}$$

$$\overline{W}(t) = \begin{cases} -3W(-t) + 4W(-t/2) & ; \quad \text{se} \quad t \in [-T,0] \\ W(t) & ; \quad \text{se} \quad t \in [0,T] \end{cases}. \tag{3.59}$$

e consideremos a seguinte sucessão regularizante:

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \rho_n(t) \geq 0,\ supp(\rho_n) \subset \left(-\frac{1}{n}, 0\right),\ \int_{-\frac{1}{n}}^0 \rho_n(t)dt = 1;\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, dado $\epsilon > 0$ e n suficientemente grande, definimos as sequências:

$$\mathit{\Phi}_n(t) = \overline{\mathit{\Phi}}(t) * \rho_n(t) = \int_{-\frac{1}{n}}^0 \mathit{\Phi}(t-s)\rho_n(s)ds; \quad t \in [0, T-\epsilon],$$

$$\Psi_n(t) = \overline{\Psi}(t) * \rho_n(t) = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \Psi(t-s)\rho_n(s)ds; \quad t \in [0, T-\epsilon],$$

e

$$W_n(t) = \overline{W}(t) * \rho_n(t) = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} W(t-s)\rho_n(s)ds; \quad t \in [0, T-\epsilon].$$

Agora, da forma como $\overline{\Phi}, \overline{\Psi}$ e $\overline{W}$ forão construídas elas preservam a mesma regularidade das aplicações Φ, Ψ e W. Dessa forma, observemos que:

$$\begin{aligned} &\Phi_n, (\Phi_n)_t, (\Phi_n)_{tt}, \dots && \in L^\infty([0, T-\epsilon], L^2(0, L)) \\ &\Psi_n, (\Psi_n)_t, (\Psi_n)_{tt}, \dots && \in L^\infty([0, T-\epsilon], L^2(0, L)) \\ &W_n, (W_n)_t, (W_n)_{tt}, \dots && \in L^\infty([0, T-\epsilon], L^2(0, L)) \end{aligned} \tag{3.60}$$

e

$$\begin{cases} \rho_1(\Phi_n)_{tt} - k((\Phi_n)_x + \Psi_n + lW_n)_x - k_0 l((W_n)_x - l\Phi_n) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, T-\epsilon) \\ \rho_2(\Psi_n)_{tt} - b(\Psi_n)_{xx} + k((\Phi_n)_x + \Psi_n + lW_n) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, T-\epsilon) \\ \rho_1(W_n)_{tt} - k_0((W_n)_x - l\Phi_n)_x + kl((\Phi_n)_x + \Psi_n + lW_n) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, T-\epsilon) \end{cases} \tag{3.61}$$

com

$$\begin{cases} \Phi_n(0,t) = \Psi_n(0,t) = W_n(0,t) = 0 & \text{em } (0, T-\epsilon) \\ \Phi_n(L,t) = \Psi_n(L,t) = W_n(L,t) = 0 & \text{em } (0, T-\epsilon). \\ (\Phi_n)_x(L,t) = (\Psi_n)_x(L,t) = (W_n)_x(L,t) = 0 & \text{em } (0, T-\epsilon) \end{cases} \tag{3.62}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\Phi_n, (\Phi_n)_t, (\Phi_n)_{tt}, \dots && \in C([0, T-\epsilon], L^2(0, L)) \\ &\Psi_n, (\Psi_n)_t, (\Psi_n)_{tt}, \dots && \in C([0, T-\epsilon], L^2(0, L)) \\ &W_n, (W_n)_t, (W_n)_{tt}, \dots && \in C([0, T-\epsilon], L^2(0, L)) \end{aligned} \tag{3.63}$$

e mais,

$$\begin{cases} -k((\varPhi_n)_x + \Psi_n + lW_n)_x - k_0 l((W_n)_x - l\varPhi_n) = -\rho_1(\varPhi_n)_{tt} & \text{em } C([0,T-\epsilon],L^2(0,L)) \\ -b(\Psi_n)_{xx} + k((\varPhi_n)_x + \Psi_n + lW_n) = -\rho_2(\Psi_n)_{tt} & \text{em } C([0,T-\epsilon],L^2(0,L)) \\ -k_0((W_n)_x - l\varPhi_n)_x + kl((\varPhi_n)_x + \Psi_n + lW_n) = -\rho_1(W_n)_{tt} & \text{em } C([0,T-\epsilon],L^2(0,L)) \\ \varPhi_n(0,t) = \Psi_n(0,t) = W_n(0,t) = 0 & \text{em } (0,T-\epsilon) \\ \varPhi_n(L,t) = \Psi_n(L,t) = W_n(L,t) = 0 & \text{em } (0,T-\epsilon) \\ (\varPhi_n)_x(L,t) = (\Psi_n)_x(L,t) = (W_n)_x(L,t) = 0 & \text{em } (0,T-\epsilon) \end{cases}. \tag{3.64}$$

Assim como no lema (2.2), temos que:

$$\varPhi_n, \Psi_n, W_n \in C([0,T-\epsilon], H_0^1(0,L)). \tag{3.65}$$

Ou melhor,

$$\varPhi_n, \Psi_n, W_n \in C([0,T-\epsilon], H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)). \tag{3.66}$$

Portanto, de (3.63) e (3.66), tem-se:

$$\begin{array}{rcl} \varPhi_n(0), \Psi_n(0), W_n(0) & \in & H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \\ (\varPhi_n)_t(0), (\Psi_n)_t(0), (W_n)_t(0) & \in & L^2(0,L) \end{array}. \tag{3.67}$$

Considerando o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k(u_x + v + lz)_x - k_0 l(z_x - lu) = 0 \\ \rho_2 v_{tt} - bv_{xx} + k(u_x + v + lz) = 0 \\ \rho_1 z_{tt} - k_0(z_x - lu)_x + kl(u_x + v + lz) = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) = z(0,t) = z(L,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,t) = u_1(x) \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(x,t) = v_1(x) \\ z(x,0) = z_0(x), z_t(x,t) = z_1(x), \end{cases} \tag{3.68}$$

onde $u_0, v_0, z_0 \in H_0^1(0,L)$ e $u_1, v_1, z_1 \in L^2(0,L)$,

Andrade. J., em [4], obteve o seguinte resultado : se

(i) $x_0 < 0, \Gamma_0 = \{L\}$;

(ii) $T > 2\sup_{x\in[0,L]}|x - x_0| = 2(L - x_0)$.

Então, existe uma constante C_0 tal que para cada $u(0), v(0), z(0) \in H_0^1(0, L)$ e $u_t(0), v_t(0), z_t(0) \in L^2(0, L)$ tem-se

$$E_0 \leq C_0 \int_0^T \left(|u_x(L)|^2 + |v_x(L)|^2 + |z_x(L)|^2\right) dt, \tag{3.69}$$

onde $E_0 = E(0)$ é a energia inicial dada por

$$\frac{1}{2}\int_0^L \rho_1|u_1|^2 + \rho_2|v_1|^2 + \rho_1|z_1|^2 + k_0|z_{0x} - lu_0|^2 + b|v_{0x}|^2 + k|u_{0x} + v_0 + lz_0|^2 dx.$$

A fim de utilizarmos o resultado acima de Andrade. J, consideremos

(i) $x_0 < 0, \Gamma_0 = \{L\}$;

(ii) $T > 2\sup_{x\in[0,L]}|x - x_0| = 2(L - x_0)$.

Assim, de (3.67), segue que existe uma constante C_0 tal que

$$E_n(0) \leq C_0 \int_0^T \left(|(\Phi_n)_x(L)|^2 + |(\Psi_n)_x(L)|^2 + |(W_n)_x(L)|^2\right) dt. \tag{3.70}$$

Mas, em (3.64), temos $(\Phi_n)_x(L,t) = (\Psi_n)_x(L,t) = (W_n)_x(L,t) = 0$, para $t \in (0, T-\epsilon)$, então de (3.70) vem que:

$$E_n(0) = 0.$$

Então, do sistema dado por (3.61) e (3.62), obtemos que:

$$(\Phi_n)(x,t) = (\Psi_n)(x,t) = (W_n)(x,t) = 0 \ \text{ em } \ (0,L) \times (0, T-\epsilon).$$

Porém, em (3.66) temos que $\Phi_n, \Psi_n, W_n \in C([0, T-\epsilon], L^2(0, L))$; logo,

$$\begin{array}{lll} \Phi_n = \overline{\Phi} * \rho_n \to \Phi & \text{em} & C([0, T-\epsilon], L^2(0, L)) \\ \Psi_n = \overline{\Psi} * \rho_n \to \Psi & \text{em} & C([0, T-\epsilon], L^2(0, L)) \\ W_n = \overline{W} * \rho_n \to W & \text{em} & C([0, T-\epsilon], L^2(0, L)) \end{array}. \tag{3.71}$$

Assim, para $T > 2(L - x_0)$, temos

$$\varPhi(x,t) = \Psi(x,t) = W(x,t) = 0, \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0, T - \epsilon),$$

e sendo $\epsilon > 0$ arbitrário concluimos que:

$$\varPhi(x,t) = \Psi(x,t) = W(x,t) = 0, \text{ para todo o retângulo } Q = (0,L) \times (0,T),$$

ou equivalentemente,

$$\varphi_t = \psi_t = w_t = 0, \quad \text{em} \quad \text{Q}. \tag{3.72}$$

Então, retornado ao sistema (3.55) obtemos que:

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 & \text{em } (0,L) \times (0,T) \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } (0,L) \times (0,T) \\ -k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } (0,L) \times (0,T) \\ \varphi(x,0) = \varphi_0, \psi(x,0) = \psi_0, w(x,0) = w_0 & \text{em } (0,L) \\ \varphi(0,t) = \psi(0,t) = w(0,t) = 0 & \text{em } (0,T) \\ k(\varphi_x + \psi + lw)(L,t) = 0 & \text{em } (0,T) \\ b\psi_x(L,t) = 0 & \text{em } (0,T) \\ k_0(w_x - l\varphi)(L,t) = 0 & \text{em } (0,T) \end{cases} \tag{3.73}$$

Multiplicando a primeira, a segunda, e a terceira equação do sistema (3.73) por φ, ψ e w respectivamente, e somando o resultado obtido e integrando por partes, temos

$$\int_Q (\varphi + \psi + lw)^2 + b(\psi_x)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2 dxdt = 0.$$

Da igualdade acima, ocorre $\psi = 0$, usando a desigualdade de Poincaré. Além disso, como temos (3.72) chegamos ao sistema de EDO's :

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + l^2\varphi = 0 \\ w_{xx} + l^2 w = 0 \\ \varphi(0) = w(0) = 0 \\ \varphi_x(L) = w_x(L) = 0. \end{cases} \tag{3.74}$$

que possui solução única $\varphi = w = 0$, em relação a variável x. Por outro lado, as três variáveis φ, ψ e w são constantes em relação à t. Portanto, $\varphi = \psi = w = 0$, para todo $(x,t) \in Q$, o que é uma contradição.

Caso 2: $(\varphi, \psi, w, \varphi_t, \psi_t, w_t)^\tau = (0,0,0,0,0,0)^\tau$. Denotemos por

$$C_n = \left(\| \varphi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \psi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| w_n \|^2_{L^2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_n &:= \frac{\varphi_n}{\left(\| \varphi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \psi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| w_n \|^2_{L^2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}} := \frac{\varphi_n}{C_n},\\
\widetilde{\psi}_n &:= \frac{\psi_n}{\left(\| \varphi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \psi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| w_n \|^2_{L^2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}} := \frac{\psi_n}{C_n},\\
\widetilde{w}_n &:= \frac{w_n}{\left(\| \varphi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \psi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| w_n \|^2_{L^2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}} := \frac{w_n}{C_n}.
\end{aligned}$$

Claramente,

$$\| \widetilde{\varphi}_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \widetilde{\psi}_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \widetilde{w}_n \|^2_{L^2(Q)} = 1. \tag{3.75}$$

Em (3.50) temos que:

$$\frac{C_n^2}{\int_0^T \left([g_1(\varphi_{nt}(L))]^2 + [g_2(\psi_{nt}(L))]^2 + [g_3(w_{nt}(L))]^2 + \rho_1(\varphi_{nt}(L))^2 + \rho_2(\psi_{nt}(L))^2 + \rho_1(w_{nt}(L))^2\right) L dt}$$
$$\longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty$$

Então, como $(\varphi, \psi, w, \varphi_t, \psi_t, w_t)^\tau = (0,0,0,0,0,0)^\tau$, temos $C_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Assim,

$$\| \rho_1 \widetilde{\varphi}_n(L) \|^2_{L^2(0,T)} + \| \rho_2 \widetilde{\psi}_n(L) \|^2_{L^2(0,T)} + \| \rho_1 \widetilde{w}_n(L) \|^2_{L^2(0,T)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \ n \to \infty$$

e

$$\left\|\frac{g_1(\varphi_{nt}(L))}{C_n}\right\|^2_{L^2(0,T)} + \left\| \frac{g_2(\psi_{nt}(L))}{C_n} \right\|^2_{L^2(0,T)} + \left\| \frac{g_3(w_{nt}(L))}{C_n} \right\|^2_{L^2(0,T)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \ n \to \infty.$$

Portanto, as convergências abaixo ocorrem:

$$
\left|
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{nt}(L) &\to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T)\\
\widetilde{\psi}_{nt}(L) &\to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T)\\
\widetilde{w}_{nt}(L) &\to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T)\\
\frac{g_1(\varphi_{nt}(L))}{C_n} &\to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T)\\
\frac{g_2(\psi_{nt}(L))}{C_n} &\to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T)\\
\frac{g_3(w_{nt}(L))}{C_n} &\to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T).
\end{aligned}
\right. \tag{3.76}
$$

Vimos em (2.23) que para todo $t \in [0,T]$,

$$E_n(t) + \int_0^t g_1(\varphi_{nt}(L))\varphi_{nt}(L) + g_2(\psi_{nt}(L))\psi_{nt}(L) + g_3(w_{nt}(L))w_{nt}(L)ds = E_n(0).$$

Então, segue do item (ii) da hipótese H-1 que $E(t)$ é decrescente, consequentemente,

$$E_n(t) \geqslant E_n(T).$$

Assim,

$$TE_n(T) \leq \int_0^T E_n(t)dt. \tag{3.77}$$

Multiplicando a identidade abaixo por T

$$E_n(0) - \int_0^T g_1(\varphi_{nt}(L))\varphi_{nt}(L) + g_2(\psi_{nt}(L))\psi_{nt}(L) + g_3(w_{nt}(L))w_{nt}(L)dt = E_n(T),$$

temos que

$$
\begin{aligned}
&TE_n(0) - T\int_0^T g_1(\varphi_{nt}(L))\varphi_{nt}(L) + g_2(\psi_{nt}(L))\psi_{nt}(L) + g_3(w_{nt}(L))w_{nt}(L)dt = TE_n(T)\\
&\overset{(3.77)}{\leq} \int_0^T E_n(t)dt.
\end{aligned}
$$

Assim, segue da desigualdade (3.42) que:

$$
\begin{aligned}
&TE_n(0) - T\int_0^T g_1(\varphi_{nt}(L))\varphi_{nt}(L) + g_2(\psi_{nt}(L))\psi_{nt}(L) + g_3(w_{nt}(L))w_{nt}(L)dt\\
&\leq C\left[\int_0^T \left[\rho_1(\varphi_{nt})^2(L) + \rho_2(\psi_{nt})^2(L) + \rho_1(w_{nt})^2(L) + (g_1(\varphi_{nt}(L)))^2 + (g_2(\psi_{nt}(L)))^2\right.\right.\\
&\left.\left.+(g_3(w_{nt}(L)))^2\right]Ldt + \int_0^T\int_0^L(\varphi_n^2 + \psi_n^2 + w_n^2)dxdt + E_n(T)\right].
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}
&(T-C)E_n(0) \leq TE_n(0) - CE_n(T)\\
&\leq C_{T,L}\left[\int_0^T \left[\rho_1(\varphi_{nt})^2(L) + \rho_2(\psi_{nt})^2(L) + \rho_1(w_{nt})^2(L) + (g_1(\varphi_{nt}(L)))^2 + (g_2(\psi_{nt}(L)))^2\right.\right.\\
&\left.\left.+(g_3(w_{nt}(L)))^2\right]Ldt + \int_0^T\int_0^L(\varphi_n^2 + \psi_n^2 + w_n^2)dxdt\right].
\end{aligned}$$

Tomando T_0 suficientemente grande de modo que $T_0 - C \geqslant 1$, para $T > T_0$,

$$\begin{aligned}
&E_n(t) \leq E_n(0) \leq (T-C)E_n(0) \leq TE_n(0) - CE_n(T)\\
&\leq C_{T,L}\left[\int_0^T \left[\rho_1(\varphi_{nt})^2(L) + \rho_2(\psi_{nt})^2(L) + \rho_1(w_{nt})^2(L) + (g_1(\varphi_{nt}(L)))^2 + (g_2(\psi_{nt}(L)))^2\right.\right.\\
&\left.\left.+(g_3(w_{nt}(L)))^2\right]Ldt + \int_0^T\int_0^L(\varphi_n^2 + \psi_n^2 + w_n^2)dxdt\right].
\end{aligned}$$

Logo, como $E_{n1}(t) \leq \frac{1}{C_1}E_n(t)$, vale

$$\begin{aligned}
&\| \varphi_{nt} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \psi_{nt} \|^2_{L^2(0,L)} + \| w_{nt} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \varphi_{nx} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \psi_{nx} \|^2_{L^2(0,L)} + \| w_{nx} \|^2_{L^2(0,L)}\\
&\leq C_{T,L}\left[\int_0^T \left[\rho_1(\varphi_{nt})^2(L) + \rho_2(\psi_{nt})^2(L) + \rho_1(w_{nt})^2(L) + (g_1(\varphi_{nt}(L)))^2 + (g_2(\psi_{nt}(L)))^2\right.\right.\\
&\left.\left.+(g_3(w_{nt}(L)))^2\right]Ldt + \int_0^T\int_0^L(\varphi_n^2 + \psi_n^2 + w_n^2)dxdt\right].
\end{aligned}$$

Daí, dividindo ambos os lados da desigualdade acima por C_n^2 e utilizando (3.76), vem que:

$$\begin{aligned}
&\| \widetilde{\varphi}_{nt} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{\psi}_{nt} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{w}_{nt} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{\varphi}_{nx} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{\psi}_{nx} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{w}_{nx} \|^2_{L^2(0,L)}\\
&\leq C_{T,L}\left[\frac{\rho_1 \| \varphi_{nt}(L) \|^2_{L^2(0,T)} + \rho_2 \| \psi_{nt}(L) \|^2_{L^2(0,T)} + \rho_1 \| w_{nt}(L) \|^2_{L^2(0,T)}}{\| \varphi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \psi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| w_n \|^2_{L^2(Q)}}\right.\\
&\left.\frac{+ \| g_1(\varphi_{nt}(L)) \|^2_{L^2(0,T)} + \| g_2(\psi_{nt}(L)) \|^2_{L^2(0,T)} + \| g_3(w_{nt}(L)) \|^2_{L^2(0,T)}}{\| \varphi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \psi_n \|^2_{L^2(Q)} + \| w_n \|^2_{L^2(Q)}} + 1\right].
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Denotando novamente por $C_{T,L}$ a constante do lado direito de (3.78), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\| \widetilde{\varphi}_{nt} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{\psi}_{nt} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{w}_{nt} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{\varphi}_{nx} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{\psi}_{nx} \|^2_{L^2(0,L)} + \| \widetilde{w}_{nx} \|^2_{L^2(0,L)}\\
&\leq C_{T,L},
\end{aligned} \tag{3.79}$$

para $0 \leq t \leq T$. Logo, (3.79) , temos que:

$$\widetilde{\varphi}_{nt}, \widetilde{\psi}_{nt}, \widetilde{w}_{nt} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T,L^2(0,L)).$$

Dessa forma, segue do Teorema de Simon que existem subsequências de $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$ e $\widetilde{w}$, de mesmo nome, tal que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_n \to \widetilde{\varphi} \;\; &\text{em} \;\; C([0,T], C[0,L]) \hookrightarrow L^2(Q)\\
\widetilde{\psi}_n \to \widetilde{\psi} \;\; &\text{em} \;\; C([0,T], C[0,L]) \hookrightarrow L^2(Q)\\
\widetilde{w}_n \to \widetilde{w} \;\; &\text{em} \;\; C([0,T], C[0,L]) \hookrightarrow L^2(Q),
\end{aligned} \tag{3.80}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_n(L) \to \widetilde{\varphi}(L) \;\; &\text{em} \;\; L^2(0,T)\\
\widetilde{\psi}_n(L) \to \widetilde{\psi}(L) \;\; &\text{em} \;\; L^2(0,T)\\
\widetilde{w}_n(L) \to \widetilde{w}(L) \;\; &\text{em} \;\; L^2(0,T).
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Em resumo,

$$\left| \begin{array}{l}
\widetilde{\varphi}_n \to \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}_n \to \widetilde{\psi}, \widetilde{w}_n \to \widetilde{w} \;\; \text{em} \;\; L^2(Q)\\
\widetilde{\varphi}_n(L) \to \widetilde{\varphi}(L), \widetilde{\psi}_n(L) \to \widetilde{\psi}(L), \widetilde{w}_n(L) \to \widetilde{w}(L) \;\; \text{em} \;\; L^2(0,T).
\end{array} \right. \tag{3.82}$$

Retornando ao problema inicial associado à solução $(\varphi_n, \psi_n, w_n, (\varphi_n)_t, (\psi_n)_t, (w_n)_t)$, temos

$$\left\{ \begin{aligned}
\rho_1(\widetilde{\varphi}_n)_{tt} - k((\widetilde{\varphi}_n)_x + (\widetilde{\psi}_n)_t + l\widetilde{w}_n)_x - k_0 l((\widetilde{w}_n)_x - l\widetilde{\varphi}_n) = 0 \;\; &\text{em } (0,L)\times(0,T)\\
\rho_2((\widetilde{\psi}_n))_{tt} - b(\widetilde{\psi}_n)_{xx} + k((\widetilde{\varphi}_n)_x + \widetilde{\psi}_n + l\widetilde{w}_n) = 0 \;\; &\text{em } (0,L)\times(0,T)\\
\rho_1(\widetilde{w}_n)_{tt} - k_0((\widetilde{w}_n)_x - l\widetilde{\varphi}_n)_x + kl((\widetilde{\varphi}_n)_x + \widetilde{\psi}_n + l\widetilde{w}_n) = 0 \;\; &\text{em } (0,L)\times(0,T)\\
(\widetilde{\varphi}_n)(x,0) = \widetilde{\varphi}_0, (\widetilde{\psi}_n)(x,0) = \widetilde{\psi}_0, (\widetilde{w}_n)(x,0) = \widetilde{w}_{0n} \;\; &\text{em } (0,L)\\
(\widetilde{\varphi}_n)_t(x,0) = \widetilde{\varphi}_{1n}, (\widetilde{\psi}_n)_t(x,0) = \widetilde{\psi}_{1n}, (\widetilde{w}_n)_t(x,0) = \widetilde{w}_{1n} \;\; &\text{em } (0,L)\\
\widetilde{\varphi}_n(0,t) = \widetilde{\psi}_n(0,t) = \widetilde{w}_n(0,t) = 0 \qquad &\text{em } (0,T)\\
k((\widetilde{\varphi}_n)_x + \widetilde{\psi}_n + l\widetilde{w}_n)(L,t) = \frac{-g_1((\varphi_n)_t(L))}{C_n} \qquad &\text{em } (0,T)\\
b(\widetilde{\psi}_n)_x(L,t) = \frac{-g_2((\psi)_n)_t(L)}{C_n} \qquad &\text{em } (0,T)\\
k_0((\widetilde{w}_n)_x - l\widetilde{\varphi}_n)(L,t) = \frac{-g_3((w_n)_t(L))}{C_n} \qquad &\text{em } (0,T)
\end{aligned} \right. \tag{3.83}$$

Utilizando as convergências dadas em (3.76) e (3.82), no sistema (3.83), quando $n \to \infty$ obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \rho_1(\widetilde{\varphi}_n)_{tt} - k((\widetilde{\varphi}_n)_x + (\widetilde{\psi}_n)_t + l\widetilde{w}_n)_x - k_0 l((\widetilde{w}_n)_x - l\widetilde{\varphi}_n) = 0 \ \text{ em } (0,L)\times(0,T) \\ \rho_2((\widetilde{\psi}_n))_{tt} - b(\widetilde{\psi}_n)_{xx} + k((\widetilde{\varphi}_n)_x + \widetilde{\psi}_n + l\widetilde{w}_n) = 0 \ \text{ em } (0,L)\times(0,T) \\ \rho_1(\widetilde{w}_n)_{tt} - k_0((\widetilde{w}_n)_x - l\widetilde{\varphi}_n)_x + kl((\widetilde{\varphi}_n)_x + \widetilde{\psi}_n + l\widetilde{w}_n) = 0 \ \text{ em } (0,L)\times(0,T) \\ (\widetilde{\varphi}_n)(x,0) = \widetilde{\varphi}_0, (\widetilde{\psi}_n)(x,0) = \widetilde{\psi}_0, (\widetilde{w}_n)(x,0) = \widetilde{w}_{0n} \ \text{ em } (0,L) \\ (\widetilde{\varphi}_n)_t(x,0) = \widetilde{\varphi}_{1n}, (\widetilde{\psi}_n)_t(x,0) = \widetilde{\psi}_{1n}, (\widetilde{w}_n)_t(x,0) = \widetilde{w}_{1n} \ \text{ em } (0,L) \\ \widetilde{\varphi}_n(0,t) = \widetilde{\psi}_n(0,t) = \widetilde{w}_n(0,t) = 0 \quad \text{ em } (0,T) \\ k((\widetilde{\varphi}_n)_x + \widetilde{\psi}_n + l\widetilde{w}_n)(L,t) = 0 \quad \text{ em } (0,T) \\ b(\widetilde{\psi}_n)_x(L,t) = 0 \quad \text{ em } (0,T) \\ k_0((\widetilde{w}_n)_x - l\widetilde{\varphi}_n)(L,t) = 0 \quad \text{ em } (0,T) \end{cases} \tag{3.84}$$

Agora, procedendo de forma similar ao Caso 1, obtemos que $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} = \widetilde{w} = 0$. Porém, por (3.75)

$$\| \widetilde{\varphi}_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \widetilde{\psi}_n \|^2_{L^2(Q)} + \| \widetilde{w}_n \|^2_{L^2(Q)} = 1$$

e, fazendo $n \to \infty$ devemos ter

$$\| \widetilde{\varphi} \|^2_{L^2(Q)} + \| \widetilde{\psi} \|^2_{L^2(Q)} + \| \widetilde{w} \|^2_{L^2(Q)} = 1$$

o que contradiz o fato de $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} = \widetilde{w} = 0$. Isto conclui a prova do lema. □

Lema 3.2. *Seja $T > 0$ suficientemente grande. Então,*

$$E(T) \leq C_T \int_0^T \left[\left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + (g_1(\varphi_t))^2 + (g_2(\psi_t))^2 + (g_3(w_t))^2 \right)(L) \right] L dt. \tag{3.85}$$

Demonstração. Combinando a desigualdade (3.42) e o Lema (3.1), tem-se

$$\int_0^T E(T) dt \leq C \left[\int_0^T \left[\left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + (g_1(\varphi_t))^2 + (g_2(\psi_t))^2 + (g_3(w_t))^2 \right)(L) \right] L dt + E(T) \right].$$

Logo, utilizando que $E(T) \leq E(t)$, para $0 \leq t \leq T$ e escolhendo T suficientemente grande, de modo que $T - C \geqslant \epsilon > 1$, obtemos

$$E(T) \leq C_T \int_0^T \left[\left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + (g_1(\varphi_t))^2 + (g_2(\psi_t))^2 + (g_3(w_t))^2 \right)(L) \right] L dt.$$

□

A seguir definiremos algumas funções que foram introduzidas por Lasiecka e Tatura em [25] e posteriormente adaptadas por Cavalcanti e colaboradores em [16].

Seja h definida por

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + h_3(x),$$

onde h_i são funções côncavas e estritamente crescentes, com $h_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$, tais que

$$h_i(sg_i(s)) \geqslant s^2 + g_i^2(s), \quad \text{para} \quad |s| \leq 1. \tag{3.86}$$

Note que tal função pode ser construída devido às condições impostas para as funções g_i dadas em H-1.

Com estas funções definimos

$$r(\cdot) = h\left(\frac{\cdot}{med(0,T)}\right). \tag{3.87}$$

Como r é monótono crescente, então $cI + r$ é invertível para todo $c \geqslant 0$. Para uma constante positiva K definimos

$$p(x) = (cI + r)^{-1}(Kx). \tag{3.88}$$

Vemos que a função p é positiva, contínua e estritamente crescente com $p(0) = 0$. Finalmente, seja

$$q(x) = x - (I + p)^{-1}(x). \tag{3.89}$$

Utilizando as funções acima e procedendo de forma similar como em [25], tendo em vista o Lema (3.2), se U é solução do sistema (2.1)-(2.4), então temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3. *Sob as hipóteses dadas em H-1, se* $U = (\varphi, \psi, w, \varphi_t, \psi_t, w_t)$ *é solução do sistema (2.1)-(2.4) e, satisfaz para* h_i*, a condição (3.86), então para algum* $T_0 > 0$,

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0, \tag{3.90}$$

com $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$*, onde* $S(t)$ *é a solução da equação diferencial*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0 \\ S(0) = 0 \end{cases}$$

sendo q *a função definida em (3.89).*

Antes de concluirmos o nosso último resultado (Teorema (3.3)) enunciaremos um lema obtido por Lasieka e Tataru em [25].

Lema 3.4. *Sejam p e q as funções definidas anteriormente. Consideremos a sequência (s_n) de número positivos tal que*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Então, $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é uma solução da equação diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0 \\ S(0) = s_0 \end{cases}$$

Além disso, $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$, se $p(x) > 0$ para $x > 0$.

Demonstração. Ver Lema 3.3 em [25]. □

Demonstração. (Teorema 3.3) No Lema (3.2) obtemos a desigualdade:

$$E(T) \leq C_T \int_0^T \left[\left(\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + (g_1(\varphi_t))^2 + (g_2(\psi_t))^2 + (g_3(w_t))^2\right)(L)\right] Ldt. \tag{3.91}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} E(T) \leq C_T \cdot L \Bigg[& \underbrace{\int_0^T \rho_1\varphi_t^2(L) + (g_1(\varphi_t))^2(L)dt\, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^T \rho_2\psi_t^2(L) + (g_2(\psi_t))^2(L)dt}_{I_2} + \\ & + \underbrace{\int_0^T \rho_1 w_t^2(L) + (g_3(w_t))^2(L)dt}_{I_3}\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Vamos estimar as integrais I_1, I_2 e I_3, para isso, consideremos os conjuntos:

$$\Lambda_\varphi := \{t \in (0,T); |\varphi_t(L,t)| > 1\},$$

$$\Lambda_\psi := \{t \in (0,T); |\psi_t(L,t)| > 1\},$$

$$\Lambda_w := \{t \in (0,T); |w_t(L,t)| > 1\}$$

e

$$\overline{\Lambda}_\varphi := (0,T)\backslash\Lambda_\varphi, \quad \overline{\Lambda}_\psi := (0,T)\backslash\Lambda_\psi, \quad \overline{\Lambda}_w := (0,T)\backslash\Lambda_w.$$

Com isso, podemos reescrever I_1 da forma:

$$I_1 = \int_0^T \rho_1\varphi_t^2(L)+(g_1(\varphi_t))^2(L)dt = \int_{\Lambda_\varphi} \rho_1\varphi_t^2(L)+(g_1(\varphi_t))^2(L)dt+\int_{\overline{\Lambda}_\varphi} \rho_1\varphi_t^2(L)+(g_1(\varphi_t))^2(L)dt. \tag{3.93}$$

Do item (iii) das Hipóteses (H-1), segue que

$$\int_{\Lambda_\varphi} \rho_1\varphi_t^2(L) + (g_1(\varphi_t))^2(L)dt \leq \left(\frac{\rho_1}{m} + M\right) \int_{\Lambda_\varphi} g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L)dt \tag{3.94}$$

Agora, da hipótese dada em (3.86) e da Desigualdade de Jensen, chegamos em:

$$\begin{aligned} &\int_{\overline{\Lambda}_\varphi} \rho_1\varphi_t^2(L) + (g_1(\varphi_t))^2(L)dt \\ &\leq max\{\rho_1, 1\} \int_{\overline{\Lambda}_\varphi} \varphi_t^2(L) + (g_1(\varphi_t))^2(L)dt \leq C_{\rho_1} \int_{\overline{\Lambda}_\varphi} h_1(g_1(\varphi(L))\varphi_t(L))dt \\ &\leq C^1_{\rho_1}|med(0,T)|h_1\left(\frac{1}{|med(0,T)|}\int_0^T g_1(\varphi(L))\varphi_t(L)\right). \end{aligned} \tag{3.95}$$

Então, usando (3.94) e (3.95) em (3.93), vem que

$$I_1 \leq \left(\frac{\rho_1}{m} + M\right) \int_{\Lambda_\varphi} g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L)dt + C^1_{\rho_1}|med(0,T)|h_1\left(\frac{1}{|med(0,T)|}\int_0^T g_1(\varphi(L))\varphi_t(L)\right). \tag{3.96}$$

Para estimar as integrais I_2 e I_3 procedemos de maneira análoga à I_1. Dessa forma, obtemos:

$$I_2 \leq \left(\frac{\rho_2}{m} + M\right) \int_{\Lambda_\psi} g_2(\psi_t(L))\psi_t(L)dt + C^2_{\rho_2}|med(0,T)|h_2\left(\frac{1}{|med(0,T)|}\int_0^T g_2(\psi(L))\psi_t(L)\right). \tag{3.97}$$

e

$$I_3 \leq \left(\frac{\rho_1}{m} + M\right) \int_{\Lambda_w} g_3(w_t(L))w_t(L)dt + C^3_{\rho_1}|med(0,T)|h_3\left(\frac{1}{|med(0,T)|}\int_0^T g_3(w(L))w_t(L)\right). \tag{3.98}$$

Substituindo (3.96), (3.97), (3.98) em (3.92) e a hipótese de que as funções h_i, para $i = 1, 2, 3$

são estritamente crescentes, temos

$$\begin{aligned}
&E(T) \leq C_T \cdot L\left[\left(\frac{\rho_1}{m}+M\right)+\left(\frac{\rho_2}{m}+M\right)+\left(\frac{\rho_1}{m}+M\right)\right]\int_0^T [g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L)+ \\
&+g_2(\psi_t(L))\psi_t(L)+g_3(w_t(L))w_t(L)dt]+|med(0,T)|\left(C^1_{\rho_1}+C^2_{\rho_2}+C^3_{\rho_1}\right)\cdot \\
&\cdot r\int_0^T [g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L)+\ +g_2(\psi_t(L))\psi_t(L)+g_3(w_t(L))w_t(L)dt]\,,
\end{aligned} \tag{3.99}$$

sendo r a função definida (3.87).

Colocando

$$K := \frac{1}{C_T \cdot L|med(0,T)|\left(C^1_{\rho_1}+C^2_{\rho_2}+C^3_{\rho_1}\right)} \quad \text{e} \quad c := \frac{max\{2\left(\frac{\rho_1}{m}+M\right)+\left(\frac{\rho_2}{m}+M\right)\}}{|med(0,T)|\left(C^1_{\rho_1}+C^2_{\rho_2}+C^3_{\rho_1}\right)},$$

de (3.99), obtemos que

$$\begin{aligned}
KE(T) &\leq c\int_0^T g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L)+g_2(\psi_t(L))\psi_t(L)+g_3(w_t(L))w_t(L)dt \\
&+r\int_0^T g_1(\varphi_t(L))\varphi_t(L)+g_2(\psi_t(L))\psi_t(L)+g_3(w_t(L))w_t(L)dt \\
&=(cI+r)(E(0)-E(T)).
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Agora, repare que podemos reescrever a desigualdade anterior como

$$p(E(T)) \leq E_0 - E(T).$$

Assim, substituindo T e 0 por $(m+1)T$ e mT, respectivamente, na desigualdade acima, vem que

$$E((m+1)T)+p(E((m+1)T)) \leq E(mT), \quad \text{para} \quad m=0,1,\cdot.$$

Logo, segue do Lema (3.4) com $s_m = E(mT)$ que

$$E(mT) \leq S(m), \quad \text{para} \quad m=0,1,\cdot.$$

Portanto, para $t = mT+\tau$ com $0 \leq \tau < T$ tem-se

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) \leq S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T}-1\right),$$

o que conclui a prova do teorema.

□

Portanto, com as técnicas utilizadas por Lasieka e Tataru em [25] conseguimos mostrar que as soluções do sistema de Bresse com dissipação não linear na fronteira possuem taxa de decaimento uniforme dada em (3.90) sem hipótese alguma sobre as velocidades de propagação de ondas.

Capítulo 4

Trabalhos Futuros

Considere o sistema de Bresse abaixo com força externa e dissipação não linear na fronteira

$$\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi+lw)_x - k_0l(w_x-l\varphi) + f_{01}(\varphi) &= 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi+lw) + f_{02}(\psi) &= 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x-l\varphi)_x + kl(\varphi_x+\psi+lw) + f_{03}(w) &= 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

com condições de fronteira

$$\varphi(0,t)=\psi(0,t)=w(0,t)=0, \quad \forall\ t\geq 0, \tag{4.2}$$

e

$$\begin{aligned}
k(\varphi_x+\psi+lw)(L,t) &= -g_1(\varphi_t(L,t)) - f_{11}(\varphi(L)), \quad \forall\ t\geq 0\\
b\psi_x(L,t) &= -g_2(\psi_t(L,t)) - f_{12}(\psi(L)), \quad \forall\ t\geq 0\\
k_0(w_x-l\varphi)(L,t) &= -g_3(w_t(L,t)) - f_{13}(w(L)), \quad \forall\ t\geq 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned}
\varphi(\cdot,0) &= \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot,0)=\varphi_1(\cdot)\\
\psi(\cdot,0) &= \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot,0)=\psi_1(\cdot)\\
w(\cdot,0) &= w_0(\cdot), \quad w_t(\cdot,0)=w_1(\cdot).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

As funções φ,ψ e w descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal e a oscilação longitudinal, os coeficientes ρ_1,ρ_2,k,k_0,b e l são constantes positivas, f_{ij} são termos não lineares do sistema, para $i=0,1$ e $j=1,2,3$ e g_1, g_2, e g_3 representam termos dissipativos na fronteira não lineares satisfazendo algumas condições.

Um trabalho futuro é o estudo do sistema de Bresse dado em (4.1)-(4.4) com hipóteses sobre o termos fontes e adicionando a condição de forte monotonicidade para as funções $g_i's$, seguindo as ideias do teorema de existência e unicidade do Capítulo 2, ou seja, a teoria dos operadores maximais monótonos. Em seguida, enfraquecer a hipótese da forte monotonicidade das dissipações não lineares sobre as forças axial, de cisalhamento e no momento bending para obter a existência de soluções. E por fim, estudar o decaimento uniforme de soluções utilizando novamente as técnicas de Lasieka e Tataru dadas em [25].

Referências

[1] ALVES, Margareth S. et al. *Exponential stability to the Bresse system with boundary dissipation conditions*. arXiv preprint arXiv:1506.01657, 2015.

[2] ALVES, M. O. et al. *Stability and optimality of decay rate for a weakly dissipative Bresse system*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, v. 38, n. 5, p. 898-908, 2015.

[3] AMMAR-KHODJA, Farid; KERBAL, Sebti; SOUFYANE, Abdelaziz. *Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam*. Journal of mathematical analysis and applications, v. 327, n. 1, p. 525-538, 2007.

[4] ANDRADE, J. *Controlabilidade exata a zero na fronteira para o sistema de Bresse e controlabilidade interna para o sistema de Bresse termoelástico*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.

[5] BARBU, V. *Nonlinear semigroup and differencial equations in Banach spaces*. Sditura Academici Române, Bucuresti, 1974.

[6] BASSAM, Maya et al. *Polynomial stability of the Timoshenko system by one boundary damping*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 425, n. 2, p. 1177-1203, 2015.

[7] BOUSSOUIRA, F. A.; RIVERA. J. E. M.; ALMEIDA, D. S. J.; *Stability to weak dissipative Bresse system*, J. Math. Anal. Appl 1-18, 2011

[8] BRÉZIS. H. *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[9] BRÉZIS. H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2010.

[10] BRÉZIS. H. *Operateurs maximaux monotones et semi-grupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* American Elservier Publishing Company - INC, New York, 1973.

[11] CAIXETA, A.H.; *Estabilização Uniforme da fronteira da Equação da Onda Semilinear com Dissipação não linear na Fronteira.* Programa de Pós-Graduação em Matemática. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2012.

[12] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, VN Domingos; SORIANO, J. A. *Global solvability and asymptotic stability for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term. In: Contributions to nonlinear analysis.* Birkhäuser Basel, 2005. p. 161-184.

[13] CAVALCANTI, Marcelo Moreira; CAVALCANTI, VN Domingos. *Introdução teoria das distribuiçoes e aos espaços de Sobolev.* Maringá: UEM, 2009.

[14] CAVALCANTI. M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI., V. N. e KOMORNIK. V., *Introdução à Análise Funcional.* Eduem - UEM, Maringá, PR, 2011.

[15] CAVALCANTI, Marcelo M.; CAVALCANTI, Valéria N. Domingos; LASIECKA, Irena. *Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping source interaction. Journal of Differential Equations*, v. 236, n. 2, p. 407-459, 2007.

[16] CAVALCANTI, Marcelo M.; KHEMMOUDJ, Ammar; MEDJDEN, Mohamed. *Uniform stabilization of the damped Cauchy Ventcel problem with variable coefficients and dynamic boundary conditions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 328, n. 2, p. 900-930, 2007.

[17] CHARLES. W.; SORIANO J. A.; NASCIMENTO. F. A. FALCÃO. e RODRIGUES. J. H., *Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping*, J. Differential Equations 255 2267-2290, 2013

[18] CODDINGTON, E. A.; LEVINSON. N. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill Book Company, Massachusetts, 1955.

[19] FATORI, L. H.; MONTEIRO, R. N. *The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system.* Appl. Math. Lett., 25, nº 3, 600-604, 2011

[20] FATORI. L. H.; RIVERA. J.E.M., *Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system*, IMA J. Appl. Math. 1-24, 2010.

[21] KESAVAN, Srinivasan. *Functional analysis.* Springer, 2009.

[22] KIM, Jong Uhn; RENARDY, Yuriko. *Boundary control of the Timoshenko beam.* SIAM Journal on Control and Optimization, v. 25, n. 6, p. 1417-1429, 1987

[23] KREYSZIG. E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York, John Wiley, 1989.

[24] LACERDA, J.H.H; *Estabilidade Uniforme na fronteira de uma Equação da onda semi-lionear com dissipação não linear na fronteira.* Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2018.

[25] LASIECKA, Irena; TATARU, Daniel. *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping. Differential and integral Equations*, v. 6, n. 3, p. 507-533, 1993.

[26] LIONS, J.L. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Tome 1. RMA, v. 8, 1988.

[27] LIONS, Jacques Louis. *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires.* 1969.

[28] LIONS, Jacques Louis; MAGENES, Enrico. *Non-homogeneous boundary value problems and applications: Vol. 1.* Springer Science & Business Media, 2012.

[29] LI, D.; ZHANG, C.; Hu, Q.; ZHANG, H. *Energy Decay Rate for Bresse System with Nonlinear Localized Damping.*British Journal of Mathematics & Computer Science 4(12): 1665-1677, 2014

[30] LIMA. P. R. *Sistema de Bresse termoelástico não linear: existencia global e estabilidade exponencial*, Dissertação de Mestrado PGMAC-UEL, 2015.

[31] LIU. Z.; RAO. B., *Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system.* Z. Angew. Math. Phys. **60**, 54?69, 2009

[32] NAJDI, Nadine; WEHBE, Ali. *Weakly locally thermal stabilization of Bresse systems.* Electron. J. Diff. Equ, v. 182, p. 1-19, 2014.

[33] MEDEIROS, L.A., MIRANDA, M.M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[34] MEDEIROS, L.A., RIVERA, P.H. Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais. Textos de Métodos Matemáticos 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[35] MIRANDA, M.M. *Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev.* Bol. So. Paran. Mat. (2 série), vol 11, num 2 (1990), 131-137.

[36] PAZY. A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, NY, 1983.

[37] RIVERA. J. E. M., *Estabilização de Semigrupos e Aplicações.* Academia das Contas, 2008.

[38] RIVERA, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* LNCC, Petrópolis, RJ, 2004.

[39] RIVERA, Jaime E. Muñoz; NASO, Maria Grazia. *Boundary stabilization of Bresse systems.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, v. 70, n. 2, p. 1-16, 2019.

[40] SHOWALTER, Ralph Edwin. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations.* American Mathematical Soc., 2013.

[41] SIMON, Jacques. *Compact sets in the space* $L^p(O, T; B)$. Annali di Matematica pura ed applicata, v. 146, n. 1, p. 65-96, 1986.

[42] SORIANO, J. A.; CHARLES, Wenden; SCHULZ, Rodrigo. *Asymptotic stability for Bresse systems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 412, n. 1, p. 369-380, 2014.

[43] SORIANO, J.A.; RIVERA, J. E. M; FATORI, L. H. *Bresse system with indefinite damping*. Journal of Math. Anal. Appl., 387, 284-290, 2012.

[44] ZHENG. S. *Nonlinear Evolutions Equations*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[45] ZEIDLER. E. *Nonlinear Function Analysis and its Aplications. Vol 2A: Linear monotone operators*. Springer-Verlag, 1990.