

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

DAIANE CAMPARA SOARES

**Estabilidade uniforme para sistemas com amortecimento
viscoelástico**

Maringá
2021

DAIANE CAMPARA SOARES

Estabilidade uniforme para sistemas com amortecimento viscoelástico

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Maringá

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

S676e Soares, Daiane Campara
Estabilidade uniforme para sistemas com amortecimento viscoelástico / Daiane Campara Soares. -- Maringá, 2021. vi, 94 f. : il, color.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2021.

1. Amortecimento com memória. 2. Amortecimento do tipo Kelvin-Voigt. 3. Sistemas acoplados. 4. Damping memory. 5. Kelvin-Voigt damping. 6. Coupled systems. I. Cavalcanti, Marcelo Moreira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.39

Edilson Damasio CRB9-1.123

DAIANE CAMPARA SOARES

ESTABILIDADE UNIFORME PARA SISTEMAS COM AMORTECIMENTO
VISCOELÁSTICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti - UEM (Presidente)

Profa. Dra. Celene Buriol - UFSM

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva - UEL

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino - UEM

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo - UEM

Aprovado em: 15 de dezembro de 2021.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (<https://meet.google.com/cvk-zsch-kvd>)

*Ao meu esposo Guilherme.
Aos meus pais, José Pedro e Leange.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar lucidez, força e coragem para chegar até aqui!

Agradeço aos meus familiares, amigos e colegas que direta ou indiretamente contribuíram para que esse trabalho fosse desenvolvido.

Em especial:

Agradeço ao meu esposo Guilherme por toda compreensão, paciência, abdicção, companheirismo, carinho, incentivo e apoio.

Agradeço aos meus pais José Pedro e Leange por toda dedicação, incentivo e apoio que sempre me deram, mesmo sem muitas vezes entender a necessidade de tantas horas de estudo e dedicação.

Agradeço aos meus irmãos (Daniel e Deise) e aos meus sobrinhos pela compreensão da minha ausência em diversos momentos.

Agradeço a minha psicóloga Michele Amaral por todo suporte ao longo desses anos de doutorado.

Agradeço aos amigos Taís Saito Tavares e André Luiz Marques (*in memoriam*).

De forma carinhosa e com muita gratidão, agradeço aos amigos Eduardo Henrique Gomes Tavares e Leonel Giacomini Delatorre, sem os quais esse trabalho não teria sido possível, tanto pelas contribuições que fizeram quanto por não desistirem de mim e me fazerem não desistir também.

Agradeço a todos os meus professores na UFSM (Graduação), na UFMG (Mestrado) e na UEM (Doutorado).

De forma singular agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti pela oportunidade e paciência de sempre e a Prof^a. Dr^a. Celene Buriol (UFSM) pelo acolhimento, amizade e contribuições para com este trabalho.

Por fim, agradeço a Universidade Federal do Pampa pelo apoio financeiro.

Muito obrigada!

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência, unicidade e estabilidade de soluções para sistemas de equações de ondas lineares e semilineares com amortecimentos do tipo viscoelásticos. No primeiro problema, consideramos um sistema de equações de ondas acopladas com memória e provamos a boa colocação e estabilidade geral uniforme da energia. Para tanto, utilizaremos funcionais de Liapunov para construir uma perturbação adequada da energia. No segundo modelo, consideramos um sistema de Klein-Gordon não linear em um meio não-homogêneo e sujeito a duas dissipações, uma friccional e outra do tipo Kelvin-Voigt. Neste caso, mostramos que o problema está bem-posto e que a energia associada ao sistema decai exponencialmente para zero, para todos os dados iniciais tomados em conjuntos limitados do espaço de fase. Os ingredientes principais da prova da estabilidade são: um princípio de continuação única e argumentos de Análise Microlocal.

Palavras-chave Amortecimento com memória. Amortecimento do tipo Kelvin-Voigt. Sistemas acoplados.

Abstract

In this work, we study the existence, uniqueness and stability of solutions for linear and semi-linear wave equations systems with viscoelastic damping. In the first problem, we consider a system of memory-coupled wave equations and prove the well posedness and uniform stability of the energy. To this end, we use Liapunov functionals to construct a proper perturbed energy. In the second model, we consider a non-linear Klein-Gordon system in a non-homogeneous medium and subject to two dissipations, one frictional and the other of Kelvin-Voigt type. In this case, we show that the problem is well-posed and the energy associated with the system decays exponentially to zero, for all initial data taken in limited sets of phase space. The main ingredients in the proof of stability are: a Unique Continuation Principle and Microlocal Analysis arguments.

Key-words damping Memory. Kelvin-Voigt damping. Coupled systems.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Resultados Auxiliares	8
1.1 Distribuições e Espaços Funcionais	8
1.2 Espaços $L^p(\Omega)$	9
1.3 Espaços de Sobolev	10
1.4 Traço de uma função de $H^m(\Omega)$	12
1.5 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis	13
1.6 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais	15
1.7 Resultados Complementares	17
1.8 Operadores definidos por terna	20
1.8.1 O operador $-\Delta$	21
1.9 Resultados Utilizados de Semigrupos	22
1.10 Análise Microlocal	24
1.11 Espaços com Peso	29
1.12 Ferramentas Auxiliares	32
2 Estabilidade geral uniforme para um sistema de ondas com amortecimento viscoelástico com memória	34
2.1 Hipóteses, Notações e Boa Colocação	34
2.1.1 Utilizando uma abordagem com história infinita	34
2.1.2 Notações e Hipóteses	36
2.1.3 Boa Colocação: Problema auxiliar (2.8)-(2.11)	37
2.1.4 Boa Colocação: Problema Original (2.1)-(2.3)	46
2.2 Decaimento geral uniforme da energia	47

2.2.1	Ferramentas Preliminares	47
2.2.2	Processo de Regularização	50
2.2.3	Resultado Principal	52
3	Estabilidade uniforme para um sistema de Klein-Gordon com amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt	62
3.1	Hipóteses, Notações e Boa Colocação	62
3.1.1	O problema de Cauchy associado	63
3.2	Decaimento Exponencial	69
	Bibliografia	88

Introdução

A presente tese é dedicada ao estudo de existência, unicidade e estabilidade de soluções para dois sistemas de equações de ondas acopladas sujeitos à amortecimentos do tipo viscoelástico. Vamos apresentar o estado da arte e as devidas contribuições separadamente.

1º Problema: Amortecimento viscoelástico com memória

Consideramos inicialmente o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \mu_1(s) \Delta u(t-s) ds + \alpha(u-v) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t \mu_2(s) \Delta v(t-s) ds + \alpha(v-u) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1)$$

onde, Ω é um domínio limitado de \mathbb{R}^d , as funções μ_1, μ_2 são os *núcleos de memória* e $\alpha > 0$ é o coeficiente de acoplamento.

O sistema (1) descreve a interação entre o movimento de dois sólidos viscoelásticos lineares. Em particular, quando $\alpha = 0$, o sistema (1) pode ser reduzido a uma única equação da onda

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \mu(s) \Delta u(t-s) ds = 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (2)$$

que é um exemplo concreto de uma equação integro-diferencial linear de Volterra [23]. A equação (2) foi amplamente estudada por diversos autores e grandes contribuições foram obtidas. Devido a isso, já sabemos que (2) é bem posto no sentido de Hadamard [1, 26, 34, 41, 46, 47, 70, 72] e que, assumindo algumas condições de dissipação adequadas sobre μ , o funcional de energia, associado à equação (2), torna-se uma função decrescente e positiva que decai uniformemente, em geral, na mesma taxa do núcleo μ [24, Proposition 1.1].

A estabilidade das soluções de (2) (sem explicitar a taxa de decaimento) foi considerada pela primeira vez por Dafermos em seus artigos seminais [26, 27]. Cerca de vinte anos depois, a estabilidade exponencial foi estudada por vários autores (veja [1, 48, 72], entre outros). Nestes casos, foi assumido que μ satisfaz a desigualdade diferencial

$$\mu'(s) + \kappa\mu(s) \leq 0, \quad s \in \mathbb{R}^+,$$

para algum $\kappa > 0$, ou equivalentemente,

$$\mathcal{N}_\kappa := \{s \in \mathbb{R}^+, \mu'(s) + \kappa\mu(s) \leq 0\} = \mathbb{R}^+. \quad (3)$$

A condição (3) é crucial para mostrar que o funcional de energia decai exponencialmente para zero, pois permite fazer estimativas integrais de forma a controlar a parte viscoelástica da energia a partir do termo responsável pela dissipação.

Em 2008, Conti, Gatti e Pata [23] propuseram uma condição mais fraca que (3) e provaram o decaimento uniforme para o funcional de energia correspondente as soluções de (2). De fato, assumindo que, dado $p \in (0, +\infty]$, o núcleo μ satisfaz a seguinte desigualdade integral

$$\int_t^{+\infty} \mu(s) ds \leq C\Upsilon_p(t), \quad t > 0$$

onde $C > 0$ é constante e

$$\Upsilon_p(t) := \begin{cases} e^{-\delta t} (\delta > 0), & p = +\infty, \\ \frac{1}{(1+t)^p}, & p < +\infty, \end{cases}$$

os autores provaram que a energia decai exponencialmente (quando $p = +\infty$) e polinomialmente (quando $p < +\infty$) para zero. A grande dificuldade neste caso é o fato que a igualdade $\mathcal{N}_\kappa = \mathbb{R}^+$ não é garantida para algum $\kappa > 0$, exigindo a construção de um funcional adicional na perturbação da energia. Para outras condições que geram taxas de decaimento exponencial e polinomial do funcional de energia, veja, por exemplo, [1, 72], entre outros.

Ainda em 2008, outro ponto de vista foi considerado no intuito de gerar taxas arbitrárias que incluem o caso exponencial e polinomial [18, 19, 44, 49, 50, 59, 60, 64, 65, 67, 68]. Nestes casos, a seguinte condição é assumida sobre μ :

$$\mu'(s) + \gamma(s)H(\mu(s)) \leq 0, \quad s \in \mathbb{R}^+, \quad (4)$$

para algumas funções γ e H . Em geral, considera-se γ não-crescente e H convexa. Para outros tipos de hipóteses nesse sentido, veja [2, 83]. Recentemente, utilizando uma estratégia similar a [23], Conti e Pata [24] enfraqueceram a condição (4) e provaram que o funcional de energia decai uniformemente para zero. Especificamente, eles supuseram que μ satisfaz a condição:

$$\int_t^{+\infty} \mu(s) ds \leq \Lambda(t), \quad t > 0 \quad (5)$$

em que Λ é solução da desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) + \gamma(t)H(\Lambda(t)) \leq 0, \quad \text{q.t.p } t > 0. \quad (6)$$

Aqui, as funções γ e H cumprem as condições supracitadas.

Retornando ao sistema (1), isto é, considerando $\alpha > 0$, destacamos o trabalho pioneiro de Santos [79], o qual prova o decaimento exponencial da energia associada, assumindo que o núcleo está compreendido entre duas funções exponenciais. Com respeito a trabalhos envolvendo sistemas

do tipo (1) e as condições (3) ou (4), mencionamos os artigos [4, 17, 31, 32, 45, 54, 61, 62, 63, 66, 73, 74, 77, 78, 80, 81, 85]. No entanto, não há trabalhos na literatura que provam o decaimento geral uniforme da energia para o sistema (1) assumindo que os núcleos μ_1 e μ_2 satisfazem (5).

Do exposto acima, destacamos nossas contribuições e justificativas como segue:

- (i) Provaremos que (1) é bem-posto utilizando a abordagem apresentada em Conti, Gatti e Pata [23]. Especificamente, provaremos uma correspondência biunívoca entre (1) e um sistema autônomo proveniente de um problema com memória e história infinita.
- (ii) Devido ao acoplamento linear, a boa colocação de (1) nos permite usar a abordagem de semigrupo linear para estudar o decaimento geral uniforme para a energia correspondente, no sentido da seguinte definição:

Definição 0.1. *Seja $\Theta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ uma função decrescente tal que $\Theta(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Dizemos que $E(t)$ decai uniformemente à uma taxa Θ , se para todo $t_0 > 0$, existe uma função positiva $Q = Q(E(0))$ tal que*

$$E(t) \leq Q(t_0)\Theta(t), \quad t \geq t_0.$$

- (iii) Neste trabalho optamos por considerar, por simplicidade, $H(s) = s$ em (6) a fim de obtermos uma taxa de decaimento mais explícita.

2º Problema: Amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt localizado

O segundo problema considerado neste trabalho é um sistema Klein-Gordon colocado em um meio não-homogêneo e sujeito a um amortecimento localmente distribuído do tipo Kelvin-Voigt, a saber

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + v^2u + \gamma_1(x)u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + u^2v + \gamma_2(x)v_t - \operatorname{div}(b(x)\nabla v_t) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Aqui, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \leq 2$, é um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$, $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ e $k_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq d$ são funções de classe $C^\infty(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2,$$

em que $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ são constantes positivas e $K(x) = (k_{ij}(x))_{i,j}$ é uma matriz simétrica positiva definida.

O modelo de Kelvin-Voigt pode ser obtido a partir de uma análise física com respeito as massas totais dos núcleos de memória (ver [22]). Na terminologia de Dautray e Lions [28], essa é a passagem da viscoelasticidade com memória longa para a viscoelasticidade com memória curta.

O sistema de equações de onda semilineares acopladas definido em (7) está sujeito a dois amortecimentos localizados. O primeiro é do tipo viscoelástico e se distribui por uma vizinhança ω da fronteira de acordo com a Condição Geométrica de Controle. O segundo é um amortecimento por atrito e consideramos que prejudica a Condição Geométrica de Controle. Mostraremos que a energia do sistema decai uniforme e exponencialmente a zero para todos os dados iniciais de energia finita tomados em conjuntos limitados do espaço de fase. Para este propósito, argumentos de análise microlocal refinados são considerados explorando as ideias de Burq e Gérard [10].

O objetivo principal do Capítulo 3 é provar a existência e unicidade de soluções generalizadas para o problema (7) e, ainda, que essas soluções decaem exponencial e uniformemente para zero, isto é, considerando

$$E_{u,v}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x) |u(x,t)|^2 + \rho(x) |v(x,t)|^2 + \nabla u(x,t)^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t) dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v(x,t)^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t) + (uv)^2(x,t) dx,$$

existem constantes positivas C, ν , tais que

$$E_u(t) \leq C e^{-\nu t} E_u(0), \text{ para todo } t \geq T_0,$$

para toda solução generalizada do problema (7), desde que os dados iniciais $\{u_0, v_0, u_1, v_1\}$ sejam tomados em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Este resultado é um *resultado de estabilização local*. De fato, as constantes C e ν são uniformes em cada bola de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com raio $R > 0$ do espaço de fase, mas o resultado não garante que a taxa de decaimento seja global.

Inspirados [29] e [30] provamos que dado $T > T_0$ existe uma constante positiva $C_0 = C_0(T)$ tal que

$$E_{u,v}(0) \leq C_0 \left[\int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t(x,t)|^2 + \gamma_1(x) |u_t(x,t)|^2 dx dt \right. \\ \left. + \int_0^T \int_{\Omega} b(x) |\nabla v_t(x,t)|^2 + \gamma_2(x) |v_t(x,t)|^2 dx dt \right] \quad (8)$$

desde que os dados iniciais sejam obtidos em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Para provar (8) e, portanto, o resultado da estabilidade, argumentamos por contradição e encontramos uma sequência de (w^n, z^n) de soluções generalizadas para o problema (7) tal que $E_{w^n, z^n}(0) = 1$. A fim de obter uma contradição, precisamos provar que $E_{w^n, z^n}(0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Explorando as propriedades de $K(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, devemos provar que

$$\int_0^T \int_{\Omega \setminus C_1} |w_t^n|^2 dx dt \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_0^T \int_{\Omega \setminus C_2} |z_t^n|^2 dx dt \rightarrow 0, \quad (9)$$

quando n tende a infinito, em que

$$C_1 = \left\{ x \in A : d(x, \partial A) > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

e

$$C_2 = \left\{ x \in B : d(x, \partial B) > \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Desejamos propagar a convergência (9) de $\Omega \setminus C_1 \times (0, T)$ e $\Omega \setminus C_2 \times (0, T)$ para todo o conjunto $\Omega \times (0, T)$. Para fazer isso, consideramos as medidas de defeito microlocal μ_1 e μ_2 , associado à componente cinética de solução da equação de onda linear.

Primeiro, devemos estabelecer a convergência

$$\begin{aligned} \rho(x) \partial_t^2 w_t^n - \operatorname{div}(K(x) \nabla w_t^n) &\rightarrow 0 \quad \text{em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x) \partial_t^2 z_t^n - \operatorname{div}(K(x) \nabla z_t^n) &\rightarrow 0 \quad \text{em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)), \end{aligned}$$

o que é suficiente para garantir que $\operatorname{supp}(\mu_1)$ e $\operatorname{supp}(\mu_2)$ estejam contidos no conjunto característico do operador da onda.

No entanto, a última convergência não é suficiente para a propagação, uma vez que precisamos de uma convergência mais forte, a saber,

$$\begin{aligned} \rho(x) \partial_t^2 w_t^n - \operatorname{div}(K(x) \nabla w_t^n) &\rightarrow 0 \quad \text{em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x) \partial_t^2 z_t^n - \operatorname{div}(K(x) \nabla z_t^n) &\rightarrow 0 \quad \text{em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)), \end{aligned}$$

Os termos problemáticos são precisamente $\operatorname{div}(a(x) \nabla w_t^n)$ e $\operatorname{div}(b(x) \nabla z_t^n)$ porque

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a(x) \nabla w_t^n) &\rightarrow 0 \quad \text{em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)) \\ &\text{e} \\ \operatorname{div}(b(x) \nabla z_t^n) &\rightarrow 0 \quad \text{em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)). \end{aligned}$$

Este é o momento preciso em que as dissipações friccionais desempenham um papel fundamental no colar das fronteiras ∂A e ∂B .

É importante observar que, no Capítulo 3, para evitar certos detalhes técnicos que podem surgir ao se considerar a propagação até a fronteira, consideramos ω , a região em que o amortecimento é efetivo, como uma vizinhança da fronteira e satisfazendo a C.G.C. Nessas condições, podemos usar os resultados de propagação encontrados em [10].

A estabilidade de uma única equação da onda sujeita a um amortecimento Kelvin-Voigt

$$\rho(x) u_{tt} - \operatorname{div}(K(x) \nabla u) - \operatorname{div}(a(x) \nabla u_t) = 0, \quad (0, L) \times (0, \infty),$$

torna-se suscetível à continuidade dos materiais, no sentido de que, já foi provado para o caso unidimensional por Liu e Liu em [52] que se o coeficiente de amortecimento a for descontínuo na interface dos materiais, a energia não decai uniformemente. O mesmo ocorre para sistemas de ondas unidimensionais acoplados sujeitos a dois amortecimentos do tipo Kelvin-Voigt. Em

um cenário de dimensão superior, mesmo com um coeficiente de amortecimento mais regular e considerando um dado inicial suave, conforme explicado por Liu e Rao [53], há uma perda de regularidade das soluções, o que torna mais difícil o uso dos métodos de multiplicadores usuais. Portanto, o método de multiplicadores precisa ser combinado com outras técnicas para superar essas dificuldades. O método leva então os autores a impor várias condições técnicas ao coeficiente de amortecimento. No trabalho de Tebou em [84], tais condições no coeficiente de amortecimento, bem como as condições na região de controle de feedback são relaxadas. No entanto, o autor ainda requer uma restrição de desigualdade no gradiente do coeficiente de amortecimento, que não será exigida em nosso trabalho. Em [75] os autores consideram a equação $y_{tt} - \operatorname{div}[\nabla y(t, x) + a(x)\nabla y_t(t, x)] = 0$ no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $a(x) \in L^1(\Omega)$ e mostram que a taxa de decaimento logarítmico para energia do sistema sem qualquer suposição geométrica sobre o subdomínio no qual o amortecimento é efetivo.

Existem duas dificuldades principais em relação ao problema (7). Como estamos lidando com amortecimentos localizados do tipo Kelvin-Voigt, em uma vizinhança da fronteira, os operadores que definem os amortecimentos são limitados. Além disso, vale ressaltar que a presença dos coeficientes nos operadores da onda, conforme considerado em nosso trabalho, torna a análise muito mais apurada em termos dos raios da ótica geométrica. Além disso, não podemos obter o resultado de estabilização na dimensão $d = 3$, uma vez que as estimativas de Strichartz não podem ser aplicadas ao problema (7), porque $\operatorname{div}(a(x)\nabla u_t) \notin L^1(0, T; L^2(\Omega))$. Portanto, trabalhamos apenas em dimensões $d \leq 2$.

A grande vantagem de usar argumentos de análise microlocal refinados é que podemos usar o fluxo geodésico a nosso favor, a fim de direcionar as geodésicas para que elas entrem na região onde a dissipação é efetiva. Isso só é possível para certos casos especiais envolvendo a métrica $G = (K/\rho)^{-1}$. Os principais ingredientes da prova são: (i) um princípio de continuação única para sistemas, (ii) a propagação da medida de defeito microlocal pelo fluxo geodésico como mencionado anteriormente.

O modelo proposto neste trabalho é inspirado em uma equação introduzida por Segal em [82], dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + gv^2 u = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + hu^2 v = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (10)$$

que descreve a interação dos campos escalares u, v de massa m_1, m_2 , respectivamente, com constantes de interação g e h . Este sistema define o movimento da carga de mésons em um campo eletromagnético. Como o interesse deste trabalho é fazer a análise matemática, não há perda de generalidade se considerarmos apenas o caso em que $m_1 = m_2 = 0$ e $g = h = 1$.

O problema (10), quando $m_1 = m_2 = 0$, e $g = h = 1$ com condição de fronteira de Dirichlet em $\partial\Omega$, foi estudado por Medeiros e Menzala [56]. Neste artigo, os autores provaram a existência e unicidade de soluções globais fracas, usando o método de Galerkin, desde que $d \leq 3$. Outras generalizações também são dadas em [57] e [58] usando o método de Galerkin, onde os autores consideram as não linearidades da forma $|v|^{\rho+2}|u|^\rho u$, $|u|^{\rho+2}|v|^\rho v$ e algumas hipóteses sobre o coeficiente ρ , que estão relacionadas à dimensão d do espaço. Relacionado à existência global e

unicidade de soluções temos também o artigo [3], onde os autores provam a existência de soluções para um sistema Klein-Gordon com memória e não linearidades semelhante às consideradas em [57] e [58]. Outra generalização para este sistema pode ser encontrada em [25], onde os autores consideram um sistema $k \times k$ das equações de Klein-Gordon com condições de contorno acústicas.

Em [35] Ferreira deduziu resultados de decaimento para as soluções do sistema de equações não lineares de Klein-Gordon em \mathbb{R}^3 , mais precisamente, se os dados iniciais são tomados em $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ então toda solução do sistema decai uniformemente em x à taxa $\mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}})$ quando $|t| \rightarrow \infty$, e é assintótico para uma solução livre em $t = +\infty$ ou $t = -\infty$. Para obter esses resultados, os autores usam técnicas desenvolvidas por Morawetz e Strauss.

Gostaríamos também de citar os artigos [36] e [37]. Nesses artigos, a estabilidade exponencial para o sistema (10) é estabelecida, sob a suposição de dois termos de amortecimento de fricção $a(x)u_t$ e $b(x)v_t$ em vez de amortecimentos Kelvin-Voigt, conforme considerado no presente trabalho, onde a prova também funciona para qualquer combinação de amortecedores do tipo friccional ou Kelvin-Voigt. Além disso, em [36] e [37] o problema é considerado em um meio homogêneo que é mais fácil de ser analisado, uma vez que as bicaracterísticas são retas. Notamos também que em [36] e [37] o autor menciona o trabalho pioneiro de Ruiz [76], que garante a propriedade de continuação única para uma única equação com potencial $V(t, x) \in L^\infty(0, T; L^n(\Omega))$ e a métrica euclidiana $G(x) = I_d$, e assume, sem demonstração, que o resultado é válido para sistemas acoplados. Finalmente, em [36] e [37], devido ao tipo de dissipação utilizada, é possível obter a existência de soluções regulares e consequentemente a utilização de multiplicadores radiais para comprovar a estabilidade exponencial, o que não pode ser feito definitivamente no contexto deste trabalho. No artigo [20], os autores consideram um sistema Klein-Gordon generalizado que consiste em duas equações de evolução semilineares acopladas do tipo misto hiperbólico-parabólico degenerado. E ainda, são assumidos amortecimentos na fronteira, bem como, são provados a existência global e a taxa de decaimento assintótico.

Em [38], os autores têm estudado propriedades de decaimento de soluções do problema (10). Eles mostram que, na norma $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ as soluções decaem na ordem $\mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}})$ quando $t \rightarrow +\infty$ desde que os dados iniciais sejam suficientemente pequenos. Depois disso, o autor prova que as soluções do sistema decaem na norma local quando $t \rightarrow +\infty$. Até onde sabemos, este foi o primeiro trabalho a abordar a existência e unicidade de soluções para este sistema por meio da teoria dos semigrupos.

Por fim, destamos [16] em se apresenta um sistema de Klein-Gordon colocado em um meio não-homogêneo e sujeito a um amortecimento localmente distribuído do tipo friccional. Para obter o resultado principal, os autores provam um Princípio de Continuação Única para sistemas.

Esta tese está organizada da seguinte forma: O Capítulo 1 consiste da apresentação de resultados auxiliares, fundamentais para uma boa compreensão dos demais capítulos. No Capítulo 2, verificamos a existência, unicidade e decaimento geral do sistema (1), os resultados aqui obtidos estão sendo compilados para publicação. No Capítulo 3, mostramos a existência e unicidade de soluções e o decaimento exponencial da energia para o problema (7), resultados publicados no artigo [13].

Resultados Auxiliares

O objetivo deste capítulo preliminar é apresentar uma coletânea de conceitos e resultados fundamentais para a compreensão dos demais capítulos desta tese.

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ pontos do \mathbb{R}^d e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ d-uplas de números inteiros não-negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ e $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!$, denotaremos o operador derivação em \mathbb{R}^d por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^d e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos o *suporte* da função φ em Ω , e denotamos por $\text{supp}(\varphi)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $\text{supp}(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω . Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de Ω , $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$\varphi_\nu \rightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

- (i) $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu$ e $\text{supp}(\varphi) \subset K$;
- (ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em (1.1). Chamaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω . Diremos que $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, uma sequência de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$, converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e escreveremos

$$T_\nu \rightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^d$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição

T , denotada por $D^\alpha T$, é dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens, $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua.

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do \mathbb{R}^d e p um número real tal que $1 \leq p < +\infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u , definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω .

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se define por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\},$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$, com o produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$$

e a norma $\|u\|^2 = (u, u)$, é um espaço de Hilbert.

Seja $1 \leq p < +\infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Young). *Se a e b são números reais não-negativos então*

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^p}{p}$$

sempre que $1 < p, q < +\infty$ e $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

A desigualdade de Young também pode tomar a seguinte forma

$$ab \leq \varepsilon a^q + C(\varepsilon)b^p.$$

Referência: Ver [33, Appendix B.2.c e B.2.d, p. 622].

Proposição 1.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq +\infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Referência: Ver [33, Appendix B.2.e, p. 622].

Proposição 1.3 (Desigualdade de Hölder generalizada). *Sejam f_1, f_2, \dots, f_k funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Referência: Ver [33, Appendix B.2.g, p. 623].

Teorema 1.4 (Convergência Dominada de Lebesgue). *Se uma sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de funções integráveis a Lebesgue num conjunto Ω converge quase sempre em Ω para um função f , e se $|f_k| \leq \psi$, quase sempre em Ω , $\forall k \in \mathbb{N}$, para um certa função $\psi \in L^1(\Omega)$, então a integral $\int_{\Omega} f dx$ existe e*

$$\int_{\Omega} f dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_k dx.$$

Referência: Ver [39, Theorem 2.24, p. 54].

1.3 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do \mathbb{R}^d , $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções de $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx, \text{ se } 1 \leq p < +\infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx, \text{ se } p = +\infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escreve-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e, munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de \mathbb{R}^d e $1 \leq p < +\infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$, dada por

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx,$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < +\infty$ e p' é o índice conjugado de p . Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Observação 1.5. *Podemos reescrever a norma e o produto interno do espaço $H^1(\Omega)$ da seguinte maneira:*

$$\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2, \quad (u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

onde

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2, \quad (\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

Teorema 1.6 (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do \mathbb{R}^d , então, existe uma constante $C_P = C_P(\text{med}(\Omega))$ tal que*

$$C_P \|u\| \leq \|\nabla u\|, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Referência: Ver [12, Proposição 6.22, p. 441]

Teorema 1.7. *Sejam Ω um conjunto aberto do \mathbb{R}^d , de classe C^m , com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < +\infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

$$(i) \text{ se } \frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ onde } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d};$$

$$(ii) \text{ se } \frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[;$$

(iii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Referência: Ver [11, Teorema 1, p. 208].

Teorema 1.8 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Seja Ω um aberto limitado bem regular do \mathbb{R}^d , para $d \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) se $p < d$ então $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, $\forall 1 \leq q < \frac{dp}{d-p}$;

(ii) se $p = d$ então $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$;

(iii) se $p > d$ então $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^0(\overline{\Omega})$.

Referência: Ver [11, Teorema 3, p. 209].

1.4 Traço de uma função de $H^m(\Omega)$

Se $u \in C(\overline{\Omega})$, podemos obter os valores de u sobre a fronteira Γ de Ω , basta para isto tomar a restrição $u|_\Gamma$. Entretanto, se $u \in H^m(\Omega)$, como a medida n -dimensional de Γ é zero, não tem sentido, a priori, falar dos valores de u em Γ . O objetivo da teoria de traço é dar um significado para $u|_\Gamma$.

Conforme explicitado em [11], existe uma única aplicação

$$\gamma : H^m(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)u \quad \longmapsto \{\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u\},$$

denominada aplicação traço, que é linear, contínua, sobrejetiva, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, verificando

$$\gamma u = \left(u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial \nu} |_\Gamma, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} |_\Gamma \right), \forall u \in D(\overline{\Omega}),$$

e admitindo uma inversa à direita γ^{-1} linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear

$$\gamma^{-1} : \prod_{j=0}^{m-1} H_j^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^m(\Omega),$$

que é contínua e satisfaz

$$\gamma(\gamma^{-1}\xi) = \xi, \forall \xi \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Tomando, em particular, $m = 1$, temos a aplicação

$$\begin{aligned}\gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0 u = u|_{\Gamma},\end{aligned}$$

que é denominada aplicação traço de ordem zero.

Consideremos $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munido do produto interno

$$(u, v)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)},$$

o que o faz um espaço de Hilbert.

A aplicação

$$\begin{aligned}\gamma_1 : D(\bar{\Omega}) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}\end{aligned}$$

prolonga-se, por continuidade, a uma única aplicação linear e contínua $\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$, posto que $D(\bar{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Proposição 1.9. *A aplicação traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ é sobrejetiva e, além disso, $\text{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.*

Referência: Ver [11, Teorema 2, p. 336].

1.5 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca $*$, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

Considerando X um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(X, X')$ sobre X é a topologia menos fina sobre X que torna contínuas todas as aplicações $f \in X'$.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente para x na topologia fraca $\sigma(X, X')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que (x_n) converge fraco para x esse fato denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

Proposição 1.10. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X , então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em X se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in X'$;

(ii) Se $x_n \rightarrow x$ em X , então $x_n \rightharpoonup x$ em X ;

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em X , então $\|x\|_X$ é limitada e $\|x\|_X \leq \liminf \|x_n\|_X$;

(iv) Se $x_n \rightarrow x$ em X e $f_n \rightarrow f$ em X' , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Referência: Ver [12, Proposição 3.12, p. 112].

Sejam X um espaço de Banach e $x \in X$ fixo. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} J_x : X' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle, \end{aligned}$$

que é linear e contínua e portanto $J_x \in X''$, $\forall x \in X$. Deste modo, definamos a aplicação $J : X \rightarrow X''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de X em X'' .

A topologia fraca $*$, ou $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina sobre X' que faz contínuas todas as aplicações J_x .

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente para f na topologia fraca $*$ $\sigma(X, X')$. Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fraco $*$ para f , ou simbolicamente

$$f_n \xrightarrow{*} f \text{ em } X',$$

quando não houver possibilidade de confusão.

Proposição 1.11. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X' , então:*

- (i) $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall x \in X$;
- (ii) Se $f_n \rightarrow f$ forte, então $f_n \rightarrow f$ em $\sigma(X', X'')$;
- (iii) Se $f_n \rightarrow f$ em $\sigma(X', X'')$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' ;
- (iv) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' , então $\|f_n\|_{X'}$ é limitada e $\|f\|_{X'} \leq \liminf \|f_n\|_{X'}$;
- (v) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' e $x_n \rightarrow x$ em X , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Referência: Ver [12, Proposição 3.30, p. 123].

Dizemos que um espaço de Banach é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : X \rightarrow X''$ é sobrejetora. Um espaço métrico X é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset X$ enumerável e denso em X .

Teorema 1.12. *Seja X um espaço de Banach tal que X' é separável. Então X é separável.*

Referência: Ver [12, Teorema 3.53, p. 145].

Teorema 1.13. *Seja X um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X' . Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca $*$ $(\sigma(X', X))$.*

Referência: Ver [12, Corolário 3.61, p. 152].

Teorema 1.14. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um sequência limitada em X . Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca $(\sigma(X, X'))$.*

Referência: Ver [12, Proposição 3.63, p. 153].

1.6 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar espaços envolvendo as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido a problemas de evolução.

Para $t \in (0, T)$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x, t)$ como um elemento do espaço X . Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$ com valores no espaço X .

Sejam X um espaço de Banach e $T > 0$.

O espaço $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0, T]$ com imagem em X , ou seja, as funções $u : (0, T) \rightarrow X$ tais que

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

O espaço $L^\infty(0, T; X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X , isto é, as funções $u : (0, T) \rightarrow X$ limitadas quase sempre em $(0, T)$. A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} := \sup \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

O espaço $C^m(0, T; X)$, $m = 0, 1, \dots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[0, T]$. A norma, neste caso, é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^m \max_{t \in [0, T]} |u^{(i)}(t)|.$$

Proposição 1.15. *Sejam $m = 0, 1, \dots$, $1 \leq p < +\infty$, X e Y espaços de Banach.*

- (a) $C^m([0, T]; X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} .
- (b) $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(0, T; X)$ são espaços de Banach sobre \mathbb{K} .
- (c) $C([0, T]; X)$ é denso $L^p(0, T; X)$ e a imersão $C([0, T]; X) \hookrightarrow L^p(0, T; X)$ é contínua.
- (d) Se X é um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)_X$ então $L^2(0, T; X)$ é também um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} := \int_\Omega (u(t), v(t))_X dt.$$

(e) $L^p(0, T; X)$ é separável se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.

(f) O espaço $L^p(0, T; X)$ é reflexivo se $1 < p < +\infty$.

(g) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^q(0, T; Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Referência: Ver [87, Proposition 23.2, p. 407].

Proposição 1.16. *Seja X um espaço de Banach. Para todo $u \in L^1(0, T; X)$ vale*

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt$$

Referência: Ver [86, Corollary 1, p. 133-134].

O espaço dual de $L^p(0, T; X)$. Consideremos $Y = L^p(0, T; X)$. Temos a seguinte relação de dualidade $Y' = L^q(0, T; X')$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, devido ao seguinte teorema:

Teorema 1.17. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $0 \leq T < +\infty$. Então temos que:*

- Se $u \in L^p(0, T; X)$, então

$$\left\langle v, \int_0^T u(t) dt \right\rangle = \int_0^T \langle v, u(t) \rangle dt, \quad \forall v \in X'.$$

- Se $u \in L^p(0, T; X')$, então

$$\left\langle \int_0^T u(t) dt, v \right\rangle = \int_0^T \langle u(t), v \rangle dt, \quad \forall v \in X.$$

Referência: Ver [87, Proposition 23.9, p. 412].

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço localmente convexo e completo das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$. Dizemos que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é tal que

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0, T; X)$$

se:

- Existe um compacto K de $(0, T)$ tal que $\text{supp}(\varphi_\nu)$ e $\text{supp}(\varphi)$ estão contidos em K , para todo ν ;
- Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{dt^k} \varphi_\nu(t) \rightarrow \frac{d^k}{dt^k} \varphi$ em X , uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0, T) = \mathcal{D}(0, T; \mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ se $S : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ é linear e se $\theta_\nu \rightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(0, T)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X . Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle \text{ em } X, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

O espaço $\mathcal{D}(0, T; X)$ munido da convergência acima é denominado espaço das *distribuições vetoriais* de $(0, T)$ com valores em X .

Denotaremos por $H_0^1(0, T; X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0, T; X) := \{v \in L^2(0, T; X); v' \in L^2(0, T; X); v(0) = v(T) = 0\}$$

munido com o produto interno

$$(w, v)_{H_0^1(0, T; X)} = \int_0^T (w(t), v(t))_X dt + \int_0^T (w'(t), v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0, T; X)$ com o seu dual $[L^2(0, T; X)]'$, via Teorema de Riez, obtemos

$$\mathcal{D}(0, T; X) \hookrightarrow H_0^1(0, T; X) \hookrightarrow L^2(0, T; X) \hookrightarrow H^{-1}(0, T; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; X),$$

onde $H^{-1}(0, T; X) = [H_0^1(0, T; X)]'$.

Lema 1.18 (Compacidade Sequencial Fraco-Estrela). *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável. Então, toda sequência limitada $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $L^\infty(0, T; X^*)$ admite uma subsequência satisfazendo*

$$v_k \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0, T; X^*), \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

isto é, para todo $u \in L^1(0, T; X)$, temos

$$\int_0^T \langle v_k(t), u(t) \rangle_{X^*, X} dt \longrightarrow \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X^*, X} dt, \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Referência: Ver [87, Problem 23.12e, p. 449].

1.7 Resultados Complementares

Teorema 1.19 (Fórmulas de Green).

1. Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \nabla \gamma \cdot \nabla u dx = - \int_\Omega u \Delta \gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

2. Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} u \Delta \gamma - \gamma \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} - \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

Referência: Ver [7, pg. 316].

Teorema 1.20 (Regularidade Elíptica). *Sejam m um inteiro não-negativo e*

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^d (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

em que

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{\Omega}) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Supondo $f \in H^m(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial \Omega \end{cases}$$

para $\partial \Omega$ de classe C^{m+2} , então

$$u \in H^{m+2}(\Omega).$$

Referência: Ver [33, Theorem 5, p. 323].

Teorema 1.21 (Teorema da Divergência - adaptado). *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) \in L^2(\Omega),$$

em que $K(x)$ é uma matriz $d \times d$ com entradas $k_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq d$, funções de classe $C^\infty(\Omega)$. Considere também $v \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) \cdot v(x) dx = - \int_{\Omega} (\nabla u(x))^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) \cdot v(x) dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \cdot v(x) \right] dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) \cdot v(x) dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div} [v(x) \cdot K(x) \cdot \nabla u(x)] dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (\nabla u(x))^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x) dx. \end{aligned}$$

Como $v = 0$ em $\partial\Omega$, segue do Teorema da Divergência que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} [v(x) \cdot K(x) \cdot \nabla u(x)] \, dx = \int_{\partial\Omega} [v(x) \cdot K(x) \cdot \nabla u(x)] \cdot v(x) \, dx = 0.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) \cdot v(x) \, dx = - \int_{\Omega} (\nabla u(x))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla v(x) \, dx.$$

□

Teorema 1.22 (Teorema da Compacidade de Aubin-Lions-Simon). *Sejam $B_0 \subset B_1 \subset B_2$ três espaços de Banach. Assuma que a imersão de B_1 em B_2 é contínua e que a imersão de B_0 em B_1 é compacta. Sejam p, r tais que $1 \leq p, r \leq +\infty$. Para cada $T > 0$, definimos*

$$E_{p,r} = \{v \in L^p(0, T; B_0), v_t \in L^r(0, T; B_2)\}.$$

- i) Se $p < +\infty$, a imersão de $E_{p,r}$ em $L^p(0, T; B_1)$ é compacta.*
- ii) Se $p = +\infty$ e se $r > 1$, a imersão de $E_{p,r}$ em $C([0, T], B_1)$ é compacta.*

Referência: Ver [8, Theorem II.5.16, p. 102].

Teorema 1.23 (Lema de Lions). *Seja $\{u_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < +\infty$. Se*

- (i) $u_\mu \rightarrow u$ quase sempre em Q ;*
- (ii) $\|u_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$;*

então $u_\mu \rightharpoonup u$ em $L^q(Q)$.

Referência: Ver [51, Lemme 1.3, p. 12].

Teorema 1.24 (Teorema de Representação de Riesz-Fréchet). *Seja X um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in X'$, existe $f \in X$ único tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \quad \forall u \in X.$$

Além disso,

$$\|f\|_X = \|\varphi\|_{X'}.$$

Referência: Ver [7, Theorem 5.5, p. 135].

Definição 1.25. *Seja X um espaço de Hilbert. Se diz que uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é*

(i) *contínua se existe uma constante C tal que*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in X \text{ e}$$

(ii) *coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2, \quad \forall v \in X.$$

Teorema 1.26 (Lax-Milgram). *Seja $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in X'$, existe um único $u \in X$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in X.$$

Além disso, se a é simétrica, então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in X \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in X} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Referência: Ver [12, Corolário 4.15, p. 181].

1.8 Operadores definidos por terna

Consideremos V e H dois espaços de Hilbert complexos, tais que $V \xhookrightarrow{c} H$ e V é denso em H . Seja também $a(u, v)$ uma forma bilinear, hermitiana e contínua em $V \times V$, tal que existem α_0 e α em \mathbb{R} , com $\alpha > 0$, satisfazendo a condição de coercividade

$$\operatorname{Re}[a(v, v)] + \alpha_0(v, v)_H \geq \alpha\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Consideremos

$$D(A) = \{u \in V; \text{ a forma linear } v \mapsto a(u, v) \text{ é contínua}\},$$

onde V está munido com a topologia de H .

Pelo teorema de Riesz, para cada $u \in D(A)$ existe um único $Au \in H$, tal que $a(u, v) = (Au, v)_H, \forall v \in V$. Note que, desta forma definimos um operador A com domínio

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } a(u, v) = (f, v)_H, \forall v \in V\} \text{ e } Au = f.$$

Portanto, temos que $D(A)$ é um subespaço linear de H e $A : D(A) \subset V \rightarrow H$ é um operador de H . Assim, diremos que A é definido pela terna $\{V, H, a(u, v)\}$.

Proposição 1.27 (Teorema Espectral). *Nas condições acima, obtemos:*

(i) *A é auto-adjunto e existe um sistema ortonormal completo $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de H constituído de vetores próprios de A .*

(ii) *Se $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ são os valores próprios de A correspondentes aos $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, então*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_\nu \leq \dots, \text{ e } \lambda_\nu \longrightarrow +\infty.$$

(iii) *O domínio de A é dado por:*

$$D(A) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{+\infty} \lambda_\nu^2 |(u, \omega_\nu)_H|^2 < +\infty \right\}.$$

(iv) *$Au = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \lambda_\nu (u, \omega_\nu)_H \omega_\nu, \forall u \in D(A)$.*

Referência: Ver [12, Teorema 5.146, p. 368].

1.8.1 O operador $-\Delta$

Seja $-\Delta$ o operador definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u, v)\}$, onde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \overline{\nabla v} dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

e

$$D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

O teorema espectral para operadores auto-adjuntos garante a existência de um sistema (ω_ν) de $L^2(\Omega)$ ortonormal completo constituído pelas autofunções do operador $-\Delta$, soluções do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta \omega_m & = \lambda_m \omega_m, \\ \omega_m|_{\Gamma} & = 0. \end{cases}$$

Se $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ são os correspondentes autovalores de $-\Delta$, então

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m < \dots \text{ e } \lambda_m \rightarrow +\infty \text{ quando } m \rightarrow +\infty.$$

Além disso, segue que:

- $\left(\frac{\omega_m}{\sqrt{\lambda_m}} \right)$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^1(\Omega)$;
- $\left(\frac{\omega_m}{\lambda_m} \right)$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Este operador é densamente definido, injetivo e auto-adjunto. Além disso, pode ser isometricamente estendido para $-\tilde{\Delta} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, onde $H^{-1}(\Omega)$ é o dual topológico de $H_0^1(\Omega)$. Esta extensão é definida por

$$\langle -\tilde{\Delta}y, z \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = (\nabla y, \nabla z)_{L^2(\Omega)}; \forall y, z \in H_0^1(\Omega).$$

A partir de agora, por simplicidade, denotaremos $-\tilde{\Delta}$ por $-\Delta$. Observe que $-\Delta$ é um operador positivo, de modo que podemos definir suas potências fracionárias. De acordo com Lions-Magenes ([55], (2.7) e (9.1)), temos

$$D(-\Delta^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \text{ e } D(-\Delta^{1/4}) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega).$$

Pela teoria espectral, segue que

$$D(-\Delta) \hookrightarrow D((-\Delta)^{3/4}) \hookrightarrow D((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D((-\Delta)^{1/4}) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

1.9 Resultados Utilizados de Semigrupos

Definição 1.28. *Seja X um espaço de Banach. Um operador $F : X \rightarrow X$ é um operador globalmente Lipschitz quando existe uma constante $L > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, temos*

$$\|F(x) - F(y)\|_X \leq L\|x - y\|_X.$$

Teorema 1.29. *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador dissipativo, densamente definido e tal que $\text{Im}(I - A) = X$. Se $F : X \rightarrow X$ é um operador globalmente Lipschitz, então, para qualquer $u_0 \in X$, o problema*

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU + F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

admite uma única solução generalizada local $U \in C([0, +\infty), X)$, tal que

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t - \tau)F(U(\tau))d\tau.$$

Além disso, se X é um espaço de Banach reflexivo e $U_0 \in D(A)$, então a solução generalizada U é clássica.

Referência: Ver [88, Theorem 2.5.1 e Corollary 2.5.2, p. 46-49].

Definição 1.30. *Seja X um espaço de Banach. Um operador $F : X \rightarrow X$ é um operador localmente Lipschitz quando, para toda constante $L > 0$, existe uma constante $M_L > 0$ tal que*

se $\|x\|_X \leq L$, $\|y\|_X \leq L$, então

$$\|F(x) - F(y)\|_X \leq M_L \|x - y\|_X.$$

Teorema 1.31. *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador dissipativo, densamente definido e tal que $\text{Im}(I - A) = X$. Se $F : X \rightarrow X$ é um operador localmente Lipschitz, então, para qualquer $U_0 \in X$, existe uma constante positiva $T > 0$, tal que o problema*

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU + F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

admite, em $[0, T]$, uma única solução generalizada local $u \in C([0, T], X)$, tal que

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t - \tau)F(U(\tau))d\tau, \quad \forall t \in [0, T].$$

Além disso, se X é um espaço de Banach reflexivo e $U_0 \in D(A)$, então a solução generalizada U é clássica.

Referência: Ver [88, Theorem 2.5.4, p. 53].

Teorema 1.32. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.31, a solução U pode ser estendida para uma solução generalizada maximal em $[0, T_{\max})$ tal que:*

(i) $T_{\max} = +\infty$, isto é, o problema admite uma solução global;

ou

(ii) $T_{\max} < +\infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}^-} \|U(t)\| = +\infty,$$

isto é, a solução explode em um tempo finito T_{\max} .

Referência: Ver [88, Theorem 2.5.5, p. 54].

Proposição 1.33. *Seja H um espaço reflexivo e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador dissipativo tal que o operador $I - A$ é sobrejetor. Então $\overline{D(A)} = H$.*

Referência: Ver [69, Theorem 4.6, p. 16].

Teorema 1.34 (Lumer-Phillips). *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador com $\overline{D(A)} = X$. Então A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X se, e somente se, A é dissipativo e o operador $\lambda_0 I - A$ é sobrejetor para algum $\lambda_0 > 0$.*

Referência: Ver [69, Theorem 4.3, p. 14].

1.10 Análise Microlocal

Nesta seção serão enunciados alguns resultados que podem ser encontrados em [10] e [40].

Seja Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^d .

Definição 1.35. *Seja $m \in \mathbb{R}$. Definimos um símbolo de ordem m em Ω como uma função $a : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ , com suporte em $K \times \mathbb{R}^d$, onde K é um subconjunto compacto de Ω , que satisfaz a seguinte estimativa: para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d, \beta \in \mathbb{N}^d$, existe uma constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Denotamos por $S_c^m(\Omega)$ o espaço vetorial dos símbolos de ordem no máximo m em Ω .

Proposição 1.36. *Se $a \in S_c^m(\Omega)$, a fórmula*

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, \quad (1.2)$$

define, para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, um elemento Au de $C_0^\infty(\Omega)$.

A fórmula (1.2) define uma aplicação linear $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C_0^\infty(\Omega)$, a qual chamaremos de *operador pseudodiferencial* de símbolo a . Dizemos que o operador pseudodiferencial A admite um símbolo principal, denotado por $\sigma_m(A)$, se existe uma função $a_m = \sigma_m(A) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ com suporte, na primeira variável, compacto em $K \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ e homogênea de ordem m , na segunda variável, tal que, se $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ valendo 0 em uma vizinhança da origem e 1 fora de um compacto suficientemente grande, segue que,

$$a(x, \xi) = a_m(x, \xi) \chi(\xi) + r(x, \xi),$$

onde $r \in S_c^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$. Nestas condições, $a_m = \sigma_m(A)$ é chamado de símbolo principal de A .

Observe que, no caso em que $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ a aplicação $a \mapsto A$ não é injetora, isto é, um operador pseudodiferencial não é definido unicamente por um símbolo, por outro lado, é possível provar a unicidade do símbolo principal.

Apesar de termos definido operadores pseudodiferenciais sobre o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, é possível estender a ação de operadores pseudodiferenciais a espaços de Sobolev. Considerando K um subconjunto compacto contido em Ω e $s \in \mathbb{R}$, denotamos por $H_K^s(\Omega)$ o espaço das distribuições com suporte compacto em K , onde o prolongamento com 0 fora de Ω está em $H^s(\mathbb{R}^d)$. Denotamos por $H_{comp}^s(\Omega) = \bigcup_K H_K^s(\Omega)$, onde K é tomado sobre todos os compactos de Ω .

Teorema 1.37. *Seja $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ e seja K a projeção sobre Ω do suporte de a . Então, para todo real s , o operador definido em (1.2) se prolonga de forma única em uma aplicação linear e contínua de $H_{comp}^s(\Omega)$ em $H_K^{s-m}(\Omega)$.*

Vamos introduzir, agora, o conceito de medida microlocal de defeito, para tal, seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma

sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$, i.e.,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_K |u_k(x)|^2 dx < +\infty,$$

para todo subconjunto compacto K contido em Ω .

Dizemos que u_k converge fracamente para $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ quando, para todo $f \in L^2_{comp}(\Omega)$, tem-se

$$\int_{\Omega} u_k(x) f(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(x) f(x) dx.$$

Teorema 1.38. *Seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero em $L^2_{loc}(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e uma medida positiva de Radon μ sobre $T^1\Omega := \Omega \times S^{d-1}$ tal que para todo operador pseudodiferencial A de ordem 0 sobre Ω que admite um símbolo principal $\sigma_0(A)$ e para todo $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\chi\sigma_0(A) = \sigma_0(A)$, tem-se*

$$(A(\chi u_k), \chi u_k)_{L^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A)(x, \xi) d\mu(x, \xi). \quad (1.3)$$

Definição 1.39. *Sob as circunstâncias do Teorema 1.38, μ é chamada de **medida de defeito microlocal** (m.d.m.) da sequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.*

Observação 1.40. *O Teorema 1.38 assegura, para toda sequência limitada $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero, a existência de uma subsequência admitindo uma medida de defeito microlocal. Observamos que de (1.3), em particular quando $A = f \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} f(x) |u_k(x)|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} f(x) d\mu(x, \xi),$$

assim u_k converge fortemente para 0 se, e somente se, $\mu = 0$.

Observação 1.41. *Observe que dadas duas sequências $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ limitadas em $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fraco para zero, podemos associar a estas sequências, mesmo passando a uma subsequência, medidas microlocais de defeito μ_y e μ_x , respectivamente. Afirmamos que, se $y^k - x^k \rightarrow 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$, então $\mu_y = \mu_x$.*

De fato, dado A um operador pseudodiferencial de ordem zero e $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função nas condições do Teorema 1.38, temos

$$\begin{aligned} (A(\chi x^k), \chi x^k) &\rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_x, \\ (A(\chi y^k), \chi y^k) &\rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_y, \end{aligned}$$

com $\sigma_0(A)$ sendo o símbolo principal de A . Isto nos leva a

$$(A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y). \quad (1.4)$$

Por hipótese temos que $x^k - y^k \rightarrow 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ e, como $A\chi$ é um operador contínuo em $L^2_{loc}(\Omega)$

pelo Teorema 1.37, obtemos

$$A(\chi(x^k - y^k)) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) &= (A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi x^k) \\ &\quad + (A(\chi y^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \\ &= (A(\chi(x^k - y^k)), \chi x^k) + (A(\chi y^k), \chi(x^k - y^k)) \\ &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Logo, pela unicidade do limite, de (1.4) e (1.5) segue que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y) = 0 \text{ para todo } A,$$

o que nos leva a concluir que $\mu_x - \mu_y = 0$ e, portanto, $\mu_x = \mu_y$.

Teorema 1.42. *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω e seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m. μ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $Pu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ em $H^{-m}_{loc}(\Omega)$ ($m > 0$).
- (ii) $\text{supp}(\mu) \subset \{(x, \xi) \in \Omega \times S^{d-1} : \sigma_m(P)(x, \xi) = 0\}$.

Teorema 1.43. *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω , verificando $P^* = P$, e seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m. μ . Vamos assumir que $Pu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ em $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$. Então, para toda função $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d) \setminus \{0\})$ de grau $1 - m$ que é homogênea na segunda variável e com suporte compacto na primeira variável, tem-se*

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a, p\}(x, \xi) d\mu(x, \xi) = 0.$$

Teorema 1.44. *Seja X um espaço localmente compacto e de Hausdorff e μ uma medida de Radon positiva em X .*

- a) *Seja N a união de todos os conjuntos abertos $U \subset X$ tais que $\mu(U) = 0$. Então N é aberto e $\mu(N) = 0$. O complementar de N é chamado de suporte de μ .*
- b) *$x \in \text{supp } \mu$ se, e somente se, $\int_X f d\mu > 0$ para toda $f \in C_0(X)$ com $f(x) > 0$.*

Demonstração. O resultado no item a) segue do fato que

$$\mu(N) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset N \text{ e } K \text{ compacto}\}.$$

Vamos provar o item b). Para isso, suponha que $x \in \text{supp } \mu = N^C$ e considere $f \in C_c(X, [0, 1])$ tal que $f(x) > 0$. Por continuidade, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $f(y) > \frac{1}{2}f(x)$,

para todo $y \in U$. Se $\mu(U) = 0$, então sendo U aberto teríamos que $U \subset N$, o que contradiz o fato de $x \in N^C$. Dessa forma, $\mu(U) > 0$ e assim

$$\int_X f d\mu \geq \int_U f d\mu \geq \frac{1}{2} f(x) \mu(U) > 0.$$

Agora, suponha que $x \notin \text{supp } \mu$ e considere $F = \text{supp } \mu$. Então, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\mu(U) = 0$ e $U \cap F = \emptyset$. Considere K um conjunto compacto tal que $x \in K$ e $K \subset U$. Sabemos, pelo Teorema de Urysohn, que existe uma função $f \in C_0(X, [0, 1])$ tal que $f \equiv 1$ em K e $f = 0$ fora de um subconjunto compacto de U . Em particular, $f(x) = 1 > 0$ e ainda,

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_U f d\mu + \int_{X \setminus U} f d\mu \\ &= \int_U f d\mu + \int_{X \setminus U} 0 d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.45. *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ a qual converge para zero e admite uma medida microlocal de defeito μ . Então, $(x_0, \xi_0) \notin \text{supp } \mu$ se, e somente se, existe $A \in \Psi_c^0(\Omega)$ essencialmente homogêneo tal que $\sigma_0(A)(x_0, \xi_0) \neq 0$ e $A(\chi u_n) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ para todo $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Se $(x_0, \xi_0) \notin \text{supp } \mu$, então existem subconjuntos abertos $U \subset \Omega$, $V \subset S^{d-1}$ tais que $(x_0, \xi_0) \in U \times V$ e $(U \times V) \cap \text{supp } \mu = \emptyset$. Considere K uma vizinhança compacta de ξ_0 , tal que $K \subset V$ e também $\psi \in C^\infty(S^{d-1})$ tal que $\text{supp } \psi \subset K$ e $\psi \equiv 1$ em uma vizinhança de ξ_0 contida em K . Considere ainda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança de x_0 e $\text{supp } \phi \subset U$. Tome $\eta \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\eta \equiv 0$ próximo de 0 e $\eta \equiv 1$ no infinito e, defina $a(x, \xi) = \eta(\xi) \phi(x) \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$. Tomando A o operador definido por $a(\cdot, \cdot)$, note que $\sigma_0(A)(x_0, \xi_0) = 1$ e, para todo $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned} \|A(\chi u_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (A(\chi u_n), A(\chi u_n)) \\ &= (A(\chi u_n), A(\chi_1 \chi u_n)) \\ &= (A_{\chi_1}^* \circ A(\chi u_n), \chi u_n) \\ &\rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)(x, \xi)|^2 d\mu, \end{aligned} \tag{1.6}$$

em que $\chi_1 \equiv 1$ em uma vizinhança de $\text{supp } \chi$. Como $\text{supp } \sigma_0(A) \subset \text{supp } \phi \times \text{supp } \psi \subset \Omega \times S^{d-1} \setminus \text{supp } \mu$, temos

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)|^2 d\mu = 0.$$

Portanto, $\|A(\chi u_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$.

Reciprocamente, se existe $A \in \Psi_c^0(\Omega)$ essencialmente homogêneo tal que $\sigma_0(A)(x_0, \xi_0) \neq 0$ e

$A(\chi u_n) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$, para todo $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, de (1.6) e da unicidade do limite obtemos

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)|^2 d\mu = 0.$$

Utilizando o Teorema 1.44, concluímos que $(x_0, \xi_0) \notin \text{supp } \mu$. □

A seguir, apresentaremos algumas ferramentas clássicas referentes ao campo vetorial hamiltoniano e suas curvas bicaracterísticas no (x, ξ) -espaço cotangente para funções reais $p(x, \xi)$.

Definição 1.46. *Seja $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ uma função real. Chamamos H_p um campo Hamiltoniano de p , o seguinte campo de vetores definido em $\Omega \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$:*

$$H_p(x, \xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x, \xi), \dots, \frac{\partial p}{\partial \xi_d}(x, \xi); -\frac{\partial p}{\partial x_1}(x, \xi), \dots, -\frac{\partial p}{\partial x_d}(x, \xi) \right).$$

A derivada de Lie de uma função f com respeito ao campo Hamiltoniano H_p é dada por $H_p(f) = \{p, f\}$, onde

$$\{p, f\}(x, \xi) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \right).$$

Uma curva Hamiltoniana de p é uma curva integrável do campo de vetores H_p , isto é, é uma solução maximal $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ para equações Hamilton-Jacobi

$$\left\{ \dot{x} = p_\xi(x, \xi) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi), \quad \dot{\xi} = -p_x(x, \xi) = -\frac{\partial p}{\partial x} \right\},$$

onde I é um intervalo aberto de \mathbb{R} .

Observação 1.47. *Da identidade $H_p p = 0$ segue que a função p mantém um valor constante em cada uma de suas curvas Hamiltonianas. Dizemos que tal curva é bicaracterística de p se esse valor for nulo.*

Observação 1.48. *Seja λ uma função C^∞ em $T^0\Omega$ com valores reais diferentes de zero. Como*

$$H_{\lambda p} = \lambda H_p + p H_\lambda = \lambda H_p \quad \text{se } p = 0,$$

resulta que as bicaracterísticas de λp e p coincidem (módulo uma reparametrização).

Podemos agora traduzir os Teoremas 1.42 e 1.43 em termos mais geométricos.

Teorema 1.49. *Seja P um operador diferencial autoadjunto de ordem m sobre Ω que admite um símbolo principal p . Seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L_{loc}^2(\Omega)$ que converge fracamente para zero, com uma m.d.m. μ . Vamos assumir que $P u_k$ converge para 0 em $H_{loc}^{-(m-1)}$. Então o suporte de μ , $\text{supp}(\mu)$, é uma união de curvas do tipo $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|} \right)$, onde $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ é uma bicaracterística de p .*

Proposição 1.50. *A menos de uma mudança de variáveis, as bicaracterísticas do símbolo principal do operador de ondas*

$$p(t, x, \tau, \xi) = -\rho(x)\tau^2 + K(x)\xi \cdot \xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d),$$

são curvas da seguinte forma

$$t \mapsto \left(t, x(t), \tau, -\tau \left(\frac{K(x(t))}{\rho(x(t))} \right)^{-1} \dot{x}(t) \right),$$

onde $t \mapsto x(t)$ é uma geodésica de métrica $G = \left(\frac{K}{\rho} \right)^{-1}$ sobre Ω , parametrizado pelo comprimento de arco.

1.11 Espaços com Peso

Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ uma função absolutamente contínua, não-crescente e não-negativa.

Definição 1.51. *Seja X um espaço de Banach e $1 \leq p < +\infty$. Definimos o espaço com peso g por*

$$L_g^p(0, +\infty; X) := \left\{ \eta : [0, +\infty) \rightarrow X \mid \int_0^{+\infty} g(s) \|\eta(s)\|_X^p ds < +\infty \right\}.$$

Observação 1.52. *Nesta subseção mostraremos alguns resultados para o espaço com peso $L_g^p(0, +\infty; X)$, porém, ao longo da tese, mais especificamente no Capítulo 2, utilizaremos $p = 2$.*

Proposição 1.53. *Se $1 \leq p < +\infty$, então o espaço $L_g^p(0, +\infty; X)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|\eta\|_{L_g^p(0, +\infty; X)} := \left(\int_0^{+\infty} g(s) \|\eta(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, se X é um espaço de Hilbert, então $L_g^p(0, +\infty; X)$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(\eta, \zeta)_{L_g^p(0, +\infty; X)} := \int_0^{+\infty} g(s) (\eta(s), \zeta(s))_X ds.$$

Demonstração. A prova pode ser feita utilizando argumentos análogos aos usados para mostrar que os espaços $L^p(0, T; X)$ são espaços de Banach. \square

Proposição 1.54. *Seja $1 \leq p < +\infty$. A aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_g : L_g^p(0, +\infty; X) &\longrightarrow X \\ \eta &\longmapsto \mathcal{J}_g \eta = \int_0^{+\infty} g(s) \eta(s) ds \end{aligned}$$

é linear limitada com

$$\|\mathcal{J}_g \eta\|_X \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{\frac{p-1}{p}} \|\eta\|_{L_g^p(0, +\infty; X)}, \quad \forall \eta \in L_g^p(0, +\infty; X). \quad (1.7)$$

Demonstração. Da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(s) \|\eta(s)\|_X ds &= \int_0^{+\infty} g^{\frac{p-1}{p}}(s) g^{\frac{1}{p}}(s) \|\eta(s)\|_X ds \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} g(s) ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\eta\|_{L_g^p(0, +\infty; X)} \\ &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{\frac{p-1}{p}} \|\eta\|_{L_g^p(0, +\infty; X)}. \end{aligned}$$

Assim, \mathcal{J}_g está bem definida e vale

$$\|\mathcal{J}_g \eta\|_X \leq \int_0^{+\infty} g(s) \|\eta(s)\|_X ds \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{\frac{p-1}{p}} \|\eta\|_{L_g^p(0, +\infty; X)} \quad \forall \eta \in L_g^p(0, +\infty; X).$$

A linearidade de \mathcal{J}_g é imediata. □

Observação 1.55. No capítulo 2 desta tese, a desigualdade (1.7) será utilizada frequentemente com $p = 2$, isto é,

$$\|\mathcal{J}_g \eta\|_X \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{\frac{1}{2}} \|\eta\|_{L_g^2(0, +\infty; X)} \quad \forall \eta \in L_g^2(0, +\infty; X).$$

O Teorema 1.56 caracteriza o conceito de Convolução que será utilizado para a demonstração da Proposição 1.57.

Teorema 1.56. Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq +\infty$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, a função

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto F(y) = f(x - y)g(y) \end{aligned}$$

é integrável sobre \mathbb{R}^n . Definimos a convolução de f com g por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

Então, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Referência: Ver [7, Teorema 4.15. p. 104].

Proposição 1.57. Se $\eta \in L_g^2(0, +\infty; X)$, com X espaço de Hilbert. Então a função $\tilde{\eta} : [0, +\infty) \rightarrow X$ definida por

$$\tilde{\eta}(s) := \int_0^s e^{y-s} \eta(y) dy,$$

pertence a $L_g^2(0, +\infty; X)$. Em particular,

$$\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^s e^{y-s} \eta(y) dy ds < +\infty.$$

Demonstração. Seja $\eta \in L_g^2(0, +\infty; X)$. Note que, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(s) \|\tilde{\eta}(s)\|_X^2 ds &= \int_0^{+\infty} g(s) (\tilde{\eta}(s), \tilde{\eta}(s))_X ds \\ &= \int_0^{+\infty} g(s) \left(\int_0^s e^{y-s} \eta(y) dy, \int_0^s e^{w-s} \eta(w) dw \right) ds \\ &= \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^s e^{y-s} \int_0^s e^{w-s} (\eta(y), \eta(w))_X dw dy ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} g(s) \left(\int_0^s e^{y-s} \|\eta(y)\|_X dy \right) \left(\int_0^s e^{w-s} \|\eta(w)\|_X dw \right) ds. \end{aligned}$$

Denotando por

$$\varepsilon_1(s) = e^{-s} \text{ e } \varepsilon_2(s) = [g(s)]^{\frac{1}{2}} \|\eta(s)\|_X,$$

temos que $\varepsilon_1 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $\varepsilon_2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Pelo Teorema 1.56, obtemos que a função

$$(\varepsilon_1 * \varepsilon_2)(s) := \int_0^s \varepsilon_1(y-s) \varepsilon_2(y) dy$$

pertence a $L^2(\mathbb{R}^+)$ com

$$\|\varepsilon_1 * \varepsilon_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|\varepsilon_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|\varepsilon_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Ainda, pelo Teorema 1.56,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(s) \|\tilde{\eta}(s)\|_X^2 ds &\leq \int_0^{+\infty} g(s) \left(\int_0^s e^{y-s} \|\eta(y)\|_X dy \right) \left(\int_0^s e^{w-s} \|\eta(w)\|_X dw \right) ds \\ &= \int_0^{+\infty} (\varepsilon_1 * \varepsilon_2)^2(s) ds \\ &= \|\varepsilon_1 * \varepsilon_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\ &\leq \|\varepsilon_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^2 \|\varepsilon_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\ &= \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} e^{-s} ds \right)^2}_{=1} \left(\int_0^{+\infty} g(s) \|\eta(s)\|_X^2 ds \right) \\ &= \|\eta\|_{L_g^2(0, +\infty; X)}^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\eta}$ pertence a $L_g^2(0, +\infty; X)$, como queríamos. \square

1.12 Ferramentas Auxiliares

Teorema 1.58 (Princípio de Continuação Única). *Para todo $T > 0$ e $K(x) = (k_{ij}(x))_{i,j}$ matriz simétrica positiva e definida com $k_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq d$ funções de classe C^∞ e tal que $\alpha_1 |\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta_1 |\xi|^2$, para α_1, β_1 constantes positivas, temos que a única solução*

$$u \in C([0, T[; L^2(\Omega)) \cap C([0, T[; H^{-1}(\Omega))$$

do problema

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{em } \omega \times (0, T) \end{cases}$$

é a trivial $u = 0$.

Referência: Ver [10, Prova do Théorème 6.3 - equações (6.28) e (6.29), p. 75].

Proposição 1.59 (Princípio de Continuação Única para Sistemas). *Sejam $P_1(x, D)$ e $P_2(x, D)$ dois operadores hiperbólicos de segunda ordem com coeficientes de classe C^2 . Seja ϕ uma função estritamente pseudo-convexa com respeito a P_1 e P_2 . Então, a propriedade de continuação única é válida para soluções do sistema acoplado*

$$\begin{cases} P_1(x, D)u + V_1u = V_3v \\ P_2(x, D)v + V_2v = V_3u, \end{cases}$$

em que V_1, V_2 e V_3 são elementos de $L^{\frac{d+1}{2}}$.

Referência: Ver [16, Proposition 2.3, p. 459].

Proposição 1.60. *Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço mensurável. Se $\{E_j\}_1^{+\infty} \subset \mathcal{M}$ e $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, e $\mu(E_1) < +\infty$, então $\mu(\bigcap_1^{+\infty} E_j) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mu(E_j)$.*

Referência: Ver [39, Theorem 1.8.d, p. 26].

Proposição 1.61. *Seja $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função não-negativa tal que $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s)$ existe. Se $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = C > 0$ então $g \notin L^1(\mathbb{R}^+)$.*

Demonstração. Suponha que $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = C > 0$ e considere, na definição de limite, $0 < \varepsilon < C$. Assim, existe $A > 0$ tal que se $s > A$ temos que $|g(s) - C| < \varepsilon$, em outras palavras, existe $A > 0$ tal que

$$\text{se } s > A \text{ então } C - \varepsilon < g(s) < C + \varepsilon.$$

Como g é não-negativa, $|g(s)| = g(s)$ e então se $s > A$ temos que

$$C - \varepsilon < |g(s)| < C + \varepsilon.$$

Integrando em (A, a) , temos

$$\int_A^a (C - \varepsilon) ds < \int_A^a |g(s)| ds < \int_A^a (C + \varepsilon) ds$$

ou seja,

$$(C - \varepsilon)(a - A) < \int_A^a |g(s)| ds < (C + \varepsilon)(a - A).$$

Fazendo $a \rightarrow +\infty$ e observando que $C - \varepsilon > 0$, temos

$$(C - \varepsilon)(a - A) \rightarrow +\infty$$

$$(C + \varepsilon)(a - A) \rightarrow +\infty$$

e, portanto

$$\int_A^{+\infty} |g(s)| ds = +\infty.$$

Donde,

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} = \int_0^A |g(s)| ds + \int_A^{+\infty} |g(s)| ds = +\infty.$$

E assim $g \notin L^1(\mathbb{R}^+)$. □

Estabilidade geral uniforme para um sistema de ondas com amortecimento viscoelástico com memória

Ao longo desse capítulo, vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto, limitado e com fronteira suficientemente regular.

A fim de não sobrecarregar a notação, vamos omitir a dependência da variável x quando necessário. Além disso, todas as constantes positivas, salvo menção contrária, serão denotadas por C .

Neste capítulo, consideramos o seguinte sistema de ondas viscoelásticas acopladas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \mu_1(s) \Delta u(t-s) ds + \alpha(u-v) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t \mu_2(s) \Delta v(t-s) ds + \alpha(v-u) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (2.1)$$

equipado com condições de fronteira de Dirichlet

$$u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (2.2)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

Aqui, μ_1, μ_2 são *núcleos de memória* e α é uma constante positiva.

2.1 Hipóteses, Notações e Boa Colocação

2.1.1 Utilizando uma abordagem com história infinita

Inspirados pelo trabalho [23], consideramos as extensões

$$\tilde{u}_0(x, t) := \begin{cases} u_0(x), & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{v}_0(x, t) := \begin{cases} v_0(x), & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Então, podemos ver o sistema com história nula (2.1)-(2.3) como um caso particular de um sistema com história infinita, a saber

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \Delta u(t-s) ds + \alpha(u-v) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^{+\infty} \mu_2(s) \Delta v(t-s) ds + \alpha(v-u) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (2.5)$$

com condições de fronteira Dirichlet

$$u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} u(x, t) = \tilde{u}_0(x, t), & u_t(0) = u_1(x), & x \in \Omega, t \leq 0, \\ v(x, t) = \tilde{v}_0(x, t), & v_t(0) = v_1(x), & x \in \Omega, t \leq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Com base nas ideias dos trabalhos precursores de Dafermos [26, 27] e graças às contribuições recentes de Grasselli e Pata [43] é conveniente ver (2.5)-(2.7) em um espaço estendido. Para fazer isso, definimos as variáveis auxiliares *deslocamento das histórias* $\eta = \eta^t(x, s)$ e $\zeta = \zeta^t(x, s)$ como

$$\begin{cases} \eta^t(x, s) := u(x, t) - u(x, t-s), & (x, t, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta^t(x, s) := v(x, t) - v(x, t-s), & (x, t, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Derivando formalmente temos que η e ζ satisfazem as equações

$$\begin{cases} \eta_t^t(s) + \eta_s^t(s) = u_t(t), & t \in [0, +\infty), s \in \mathbb{R}^+, \\ \zeta_t^t(s) + \zeta_s^t(s) = v_t(t), & t \in [0, +\infty), s \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Logo, se o par (u, v) é uma solução para o sistema (2.5)-(2.7) então (u, v, η, ζ) satisfazem formalmente o sistema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \omega_1 \Delta u - \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \Delta \eta(s) ds + \alpha(u-v) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} - \omega_2 \Delta v - \int_0^{+\infty} \mu_2(s) \Delta \zeta(s) ds + \alpha(v-u) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t + \eta_s = u_t & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta_t + \zeta_s = v_t & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (2.8)$$

em que, para $i = 1, 2$,

$$\omega_i := 1 - \int_0^{+\infty} \mu_i(s) ds.$$

O problema (2.8) possui condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ \eta^0(x, s) = u_0(x) - u_0(x, -s) := \eta_0(x, s), & (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in \Omega, \\ \zeta^0(x, s) = v_0(x) - v_0(x, -s) := \zeta_0(x, s), & (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (2.9)$$

as condições de fronteira

$$\begin{cases} u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times [0, +\infty), \\ \eta = \zeta = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (2.10)$$

e as condições de compatibilidade

$$\begin{cases} \eta^t(0) := \lim_{s \rightarrow 0^+} \eta^t(s) = 0, & \forall t \geq 0, \\ \zeta^t(0) := \lim_{s \rightarrow 0^+} \zeta^t(s) = 0, & \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Por outro lado, ao considerarmos uma solução (u, v, η, ζ) para o sistema (2.8)-(2.11) é possível mostrar que (u, v) é uma solução para o sistema (2.5)-(2.7). Este fato é bem conhecido, para mais detalhes veja [42] e [43].

No que segue estudaremos o sistema (2.8)-(2.11) a fim de obter resultados relacionados ao sistema (2.1)-(2.3).

2.1.2 Notações e Hipóteses

Consideremos os espaços $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ munidos com produto interno e norma usuais definidos, respectivamente, nas seções 1.2 e 1.3 dos Resultados Auxiliares. Para tratar os termos de deslocamento das histórias, consideramos o espaço de Hilbert com peso $\mathcal{M}_i := L_{\mu_i}^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$, $i = 1, 2$, equipado do produto interno e norma usuais, definidos na Proposição 1.53. Consideremos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2,$$

equipado com o produto interno

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} &= \omega_1(\nabla u_1, \nabla u_2) + \omega_2(\nabla v_1, \nabla v_2) + (w_1, w_2) + (z_1, z_2) + \alpha(u_1 - v_1, u_2 - v_2) \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \mu_1(\nabla \eta_1(s), \nabla \eta_2(s)) ds + \int_0^{+\infty} \mu_2(\nabla \zeta_1(s), \nabla \zeta_2(s)) ds \end{aligned}$$

e a respectiva norma $\|U_1\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle U_1, U_1 \rangle_{\mathcal{H}}$, em que $U_i(t) = (u_i, v_i, w_i, z_i, \eta_i, \zeta_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$.

Vamos assumir que os núcleos de memória satisfazem a seguinte hipótese:

Hipótese 2.1. *Os núcleos $\mu_1, \mu_2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ são funções absolutamente contínuas, não-crescentes*

e não-negativas tais que

$$\ell_i := \int_0^{+\infty} \mu_i(s) ds \in (0, 1), \quad i = 1, 2.$$

Observação 2.2. A derivada dos núcleos que satisfazem a hipótese 2.1 existe em quase todo ponto e $\mu'_i(s) \leq 0$, em quase todo $s \in \mathbb{R}^+$, para $i = 1, 2$.

Observação 2.3. Sob a hipótese 2.1, Grasselli e Pata [43] estudaram rigorosamente o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\xi = \mathbb{L}_i\xi + h \text{ em } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \xi^0 = \xi_0 \in \mathcal{M}_i, \\ \xi^t(0) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

em que o operador linear $\mathbb{L}_i : D(\mathbb{L}_i) \subset \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}_i$ é definido por

$$D(\mathbb{L}_i) = \{\xi \in \mathcal{M}_i \mid \xi_s \in \mathcal{M}_i, \xi(0) = 0\}, \quad \mathbb{L}_i\xi = -\xi_s, \quad (2.13)$$

e $h \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, para todo $T > 0$. Os autores mostraram que se $h = p_t$ para algum $p \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega))$, a solução generalizada de (2.12) tem a seguinte expressão

$$\xi^t(s) = \begin{cases} \xi_0(s-t) + p(t) - p(0), & \text{se } t < s, \\ p(t) - p(t-s), & \text{se } 0 < s \leq t. \end{cases} \quad (2.14)$$

Os operadores \mathbb{L}_1 e \mathbb{L}_2 definidos em (2.13) são fundamentais para obter regularidade adicional da solução do problema (2.1)-(2.3), contribuindo para estimativas de energia adequadas, conforme veremos nos lemas que compõe a demonstração do resultado principal. Além disso, a expressão (2.14) permite obter algumas identidades integrais que também auxiliam nas estimativas para energia, este fato ficará mais evidente no Lema 2.9.

2.1.3 Boa Colocação: Problema auxiliar (2.8)-(2.11)

Sejam $w = u_t$, $z = v_t$ e $U = (u, v, w, z, \eta, \zeta)$. Desta forma, podemos reescrever (2.8)-(2.11) como o seguinte problema de Cauchy equivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t) = \mathcal{A}U(t), \quad t > 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

em que $U_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1, \eta_0, \zeta_0)$ e o operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} w \\ z \\ \Delta [\omega_1 u + \mathbb{I}_{\mu_1}(\eta)] - \alpha(u - v) \\ \Delta [\omega_2 v + \mathbb{I}_{\mu_2}(\zeta)] - \alpha(v - u) \\ w - \mathbb{L}_1(\eta) \\ z - \mathbb{L}_2(\zeta) \end{pmatrix},$$

em que, por simplicidade, para $i = 1, 2$, adotamos a notação

$$\mathbb{I}_{\mu_i}(\xi) := \int_0^{+\infty} \mu_i(s)\xi(s) ds, \quad \xi \in \mathcal{M}_i.$$

O domínio $D(\mathcal{A})$ é formado por todas as funções

$$(u, v, w, z, \eta, \zeta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times D(\mathbb{L}_1) \times D(\mathbb{L}_2),$$

tais que

$$\omega_1 u + \mathbb{I}_{\mu_1}(\eta), \quad \omega_2 v + \mathbb{I}_{\mu_2}(\zeta) \in H^2(\Omega).$$

Vamos mostrar agora a boa colocação do PVI (2.15) e, conseqüentemente, do sistema (2.8)-(2.11).

Teorema 2.4 (Boa Colocação). *Suponhamos que a Hipótese 2.1 seja satisfeita. Então, o operador linear \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ em \mathcal{H} , isto é,*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \|U_0\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall U_0 \in \mathcal{H}. \quad (2.16)$$

Conseqüentemente, temos:

(i) Se $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (2.15) possui uma única solução generalizada na classe $U \in C([0, +\infty); \mathcal{H})$ satisfazendo

$$U(t) = S(t)U_0, \quad t \geq 0,$$

em que $S(t) = e^{tA}$ denota o semigrupo gerado por A ;

(ii) Se, além disso, $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então a solução generalizada U é na verdade uma solução clássica de (2.15) com

$$U \in C([0, +\infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}).$$

(iii) Para cada $t > 0$ e $U_0 \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\frac{d}{dt} \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^{+\infty} \mu_1'(s) \|\nabla \eta(s)\|^2 ds + \int_0^{+\infty} \mu_2'(s) \|\nabla \zeta(s)\|^2 ds. \quad (2.17)$$

Demonstração. A demonstração será feita em etapas como segue:

\mathcal{A} é dissipativo: Considere $U = (u, v, w, z, \eta, \zeta) \in D(\mathcal{A})$. Então, utilizando a fórmula de Green,

temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \omega_1(\nabla w, \nabla u) + \omega_2(\nabla z, \nabla v) - \omega_1(\nabla u, \nabla w) - (\mathbb{I}_{\mu_1}(\nabla \eta), \nabla w) - \alpha(u - v, w) \\
&\quad - w_2(\nabla v, \nabla z) - (\mathbb{I}_{\mu_2}(\nabla \zeta), \nabla z) - \alpha(v - u, z) + (\nabla w, \mathbb{I}_{\mu_1}(\nabla \eta)) + (\nabla z, \mathbb{I}_{\mu_2}(\nabla \zeta)) \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \mu_1(s) (\nabla \eta_s(s), \nabla \eta(s)) ds - \int_0^{+\infty} \mu_2(s) (\nabla \zeta_s(s), \nabla \zeta(s)) ds \\
&\quad + \alpha(w, u - v) + \alpha(z, v - u) \\
&= - \int_0^{+\infty} \mu_1(s) (\nabla \eta_s(s), \nabla \eta(s)) ds - \int_0^{+\infty} \mu_2(s) (\nabla \zeta_s(s), \nabla \zeta(s)) ds \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Vamos analisar o primeiro termo em (2.18) utilizando integração por partes:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{+\infty} \mu_1(s) (\nabla \eta_s(s), \nabla \eta(s)) ds \\
&= - \frac{1}{2} \lim_{\tilde{z} \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{\tilde{z}} \mu_1(s) \left(\frac{d}{ds} \|\nabla \eta(s)\|^2 \right) ds \\
&= - \frac{1}{2} \lim_{\tilde{z} \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\left[\mu_1(\tilde{z}) \|\nabla \eta(\tilde{z})\|^2 - \mu_1(y) \|\nabla \eta(y)\|^2 \right] - \int_y^{\tilde{z}} \mu_1'(s) \|\nabla \eta(s)\|^2 ds \right). \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mu_1(y) \|\nabla \eta(y)\|^2 = 0. \tag{2.20}$$

De fato, como μ_1 é não-negativa, temos

$$\begin{aligned}
0 \leq \mu_1(y) \|\nabla \eta(y)\|^2 &= \mu_1(y) \|\nabla \eta(y) - \nabla \eta(0)\|^2 \\
&= \mu_1(y) \left\| \int_0^y \frac{d}{ds} \nabla \eta(s) ds \right\|^2 \\
&\leq \mu_1(y) \left(\int_0^y \|\nabla \eta_s(s)\| ds \right)^2 \\
&\leq \left(\left(\int_0^y ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^y \left[(\mu_1(s))^{\frac{1}{2}} \|\nabla \eta_s(s)\| \right]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq \left((y)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^y \mu_1(s) \|\nabla \eta_s(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq y \|\eta_s\|_{\mathcal{M}_1}^2,
\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^+$. Como $(u, v, w, z, \eta, \zeta) \in D(\mathcal{A})$, temos $\eta_s \in \mathcal{M}_1$ e, dessa forma $\|\eta_s\|_{\mathcal{M}_1}^2 < +\infty$.
Donde,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mu_1(y) \|\nabla \eta(y)\|^2 = 0,$$

como queríamos em (2.20).

Agora, vamos analisar a segunda parcela em (2.18) e mostrar que

$$\lim_{\tilde{z} \rightarrow +\infty} \mu_1(\tilde{z}) \|\nabla\eta(\tilde{z})\|^2 = 0. \quad (2.21)$$

De fato, inicialmente vamos considerar a mudança de variável $\tilde{z} = \frac{1}{\tilde{y}}$, em que $\tilde{y} > 0$. Como $\tilde{z} \rightarrow +\infty$, teremos que $\frac{1}{\tilde{y}} \rightarrow 0$. Então, de (2.20) podemos reescrever (2.19) como

$$-\int_0^{+\infty} \mu_1(s) (\nabla\eta_s(s), \nabla\eta(s)) ds = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\mu_1\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right) \left\| \nabla\eta\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right) \right\|^2 + \int_y^{\frac{1}{\tilde{y}}} \mu'_1(s) \|\nabla\eta(s)\|^2 ds \right). \quad (2.22)$$

Note que o integrando na segunda parcela da igualdade em (2.22) é não-positivo uma vez que $\mu'_1 \leq 0$ q.s. e $\|\nabla\eta(s)\|^2 \geq 0$, então, temos duas possibilidades excludentes:

- (i) existe $\lim_{0 < y \rightarrow 0} \int_y^{\frac{1}{\tilde{y}}} \mu'_1(s) \|\nabla\eta(s)\|^2 ds$ e seu valor é igual a uma constante negativa;
- (ii) $\int_y^{\frac{1}{\tilde{y}}} \mu'_1(s) \|\nabla\eta(s)\|^2 ds = -\infty$.

Por outro lado,

$$-\int_0^{+\infty} \mu_1(s) (\nabla\eta_s(s), \nabla\eta(s)) ds = (\eta_s, \eta)_{\mathcal{M}_1}^2 \leq \|\eta_s\|_{\mathcal{M}_1} \|\eta\|_{\mathcal{M}_1} < +\infty, \quad (2.23)$$

donde podemos concluir que a possibilidade em (ii) **não pode ocorrer**, pois a primeira parcela da igualdade em (2.22) não pode compensar a segunda parcela, de forma que a soma dentro do parênteses em (2.22) seja finita como o indicado acima.

Logo, deve ocorrer a possibilidade (i), isto é

$$\lim_{0 < y \rightarrow 0} \int_y^{\frac{1}{\tilde{y}}} \mu'_1(s) \|\nabla\eta(s)\|^2 ds = C < 0. \quad (2.24)$$

De (2.22), (2.23) e (2.24) temos que $\lim_{0 < y \rightarrow 0} \mu_1\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right) \left\| \nabla\eta\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right) \right\|^2$ existe. Logo, pela proposição 1.61, temos que

$$\lim_{0 < y \rightarrow 0} \mu_1\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right) \left\| \nabla\eta\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right) \right\|^2 = 0,$$

o que prova (2.21).

De (2.20) e (2.21) temos que

$$-\int_0^{+\infty} \mu_1(s) (\nabla\eta_s(s), \nabla\eta(s)) ds = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mu'_1(s) \|\nabla\eta(s)\|^2 ds.$$

Analogamente,

$$-\int_0^{+\infty} \mu_2(s) (\nabla \zeta_s(s), \nabla \zeta(s)) ds = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mu'_2(s) \|\nabla \zeta(s)\|^2 ds.$$

Logo, utilizando que $\mu'_1, \mu'_2 \leq 0$ q.s., deduzimos que

$$(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mu'_1(s) \|\nabla \eta(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mu'_2(s) \|\nabla \zeta(s)\|^2 ds \leq 0.$$

Portanto, \mathcal{A} é um operador dissipativo.

$I - \mathcal{A}$ é sobrejetivo: Queremos mostrar que $\text{Im}(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Ou ainda, em outras palavras, mostrar que dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$, devemos encontrar $U = (u, v, w, z, \eta, \zeta) \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(I - \mathcal{A})U = F,$$

ou seja,

$$\begin{cases} u - w = f_1, \\ v - z = f_2, \\ w - \omega_1 \Delta u - \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \Delta \eta(s) ds + \alpha(u - v) = f_3, \\ z - \omega_2 \Delta v - \int_0^{+\infty} \mu_2(s) \Delta \zeta(s) ds + \alpha(v - u) = f_4, \\ \eta - (w - \eta_s) = f_5, \\ \zeta - (z - \zeta_s) = f_6. \end{cases} \quad (2.25)$$

De (2.25)₁ e (2.25)₂ temos

$$\begin{cases} w = u - f_1, \\ z = v - f_2. \end{cases} \quad (2.26)$$

Multiplicando (2.25)₅ por e^s temos

$$\frac{d}{ds} (\eta(s) e^s) = w e^s + f_5(s) e^s.$$

Se $0 \leq y \leq s$, podemos reescrever a igualdade acima como

$$\frac{d}{dy} (\eta(y) e^y) = w e^y + f_5(y) e^y.$$

Integrando com relação a y em $(0, s)$, temos

$$\int_0^s \frac{d}{dy} (\eta(y) e^y) dy = w \int_0^s e^y dy + \int_0^s f_5(y) e^y dy,$$

e, supondo que $\eta(0) = 0$, segue que

$$\eta(s) = w(1 - e^{-s}) + \Phi_{f_5}(s), \quad (2.27)$$

em que $\Phi_{f_5}(s) = \int_0^s f_5(y) e^{y-s} dy$ está bem definida, e ainda, pela proposição 1.57, $\Phi_{f_5}(s) \in \mathcal{M}_1$.

Substituindo (2.26)₁ em (2.27) temos

$$\eta(s) = (u - f_1)(1 - e^{-s}) + \Phi_{f_5}(s). \quad (2.28)$$

Procedendo de maneira análoga com (2.25)₆ obtemos

$$\zeta(s) = z(1 - e^{-s}) + \Phi_{f_6}(s), \quad (2.29)$$

em que $\Phi_{f_6}(s) = \int_0^s f_6(y) e^{y-s} dy$ está bem definida, e ainda, pela proposição 1.57, $\Phi_{f_6}(s) \in \mathcal{M}_2$.

Substituindo (2.26)₂ em (2.29) temos

$$\zeta(s) = (v - f_2)(1 - e^{-s}) + \Phi_{f_6}(s). \quad (2.30)$$

Substituindo (2.26)₁ e (2.28) em (2.25)₃, temos

$$\begin{aligned} u - \omega_1 \Delta u - \left(\int_0^{+\infty} \mu_1(s)(1 - e^{-s}) ds \right) \Delta u + \alpha(u - v) \\ = f_3 + f_1 + \left(\int_0^{+\infty} \mu_1(s)(e^{-s} - 1) ds \right) \Delta f_1 + \left(\int_0^{+\infty} \mu_1(s) \Phi_{\Delta f_5}(s) ds \right). \end{aligned}$$

Analogamente, substituindo (2.26)₂ e (2.30) em (2.25)₄, temos

$$\begin{aligned} v - \omega_2 \Delta v - \left(\int_0^{+\infty} \mu_2(s)(1 - e^{-s}) ds \right) \Delta v + \alpha(v - u) \\ = f_4 + f_2 + \left(\int_0^{+\infty} \mu_2(s)(e^{-s} - 1) ds \right) \Delta f_2 + \left(\int_0^{+\infty} \mu_2(s) \Phi_{\Delta f_6}(s) ds \right). \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{cases} g_1 := f_3 + f_1 + \left(\int_0^{+\infty} \mu_1(s)(e^{-s} - 1) ds \right) \Delta f_1 + \left(\int_0^{+\infty} \mu_1(s) \Phi_{\Delta f_5}(s) ds \right) \\ g_2 := f_4 + f_2 + \left(\int_0^{+\infty} \mu_2(s)(e^{-s} - 1) ds \right) \Delta f_2 + \left(\int_0^{+\infty} \mu_2(s) \Phi_{\Delta f_6}(s) ds \right) \end{cases}$$

e observe que $f_3, f_4 \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, $f_1, f_2 \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ e, conseqüentemente, $\Delta f_1, \Delta f_2 \in H^{-1}(\Omega)$. E ainda, $f_5 \in \mathcal{M}_1$ donde $\Delta f_5 \in L_{\mu_1}^2(0, +\infty; H^{-1}(\Omega))$ e, pela Proposição 1.57, concluimos que $\Phi_{\Delta f_5} \in L_{\mu_1}^2(0, +\infty; H^{-1}(\Omega))$. Analogamente, concluimos que $\Phi_{\Delta f_6} \in L_{\mu_2}^2(0, +\infty; H^{-1}(\Omega))$. Donde segue que

$$\int_0^{+\infty} \mu_1(s) \Phi_{\Delta f_5}(s) ds \text{ e } \int_0^{+\infty} \mu_2(s) \Phi_{\Delta f_6}(s) ds \in H^{-1}(\Omega).$$

E assim, $g_1, g_2 \in H^{-1}(\Omega)$. Denotamos, para $i = 1, 2$,

$$c_{\mu_i} := 1 - \int_0^{+\infty} \mu_i(s) e^{-s} ds > 0.$$

Vamos agora resolver o sistema

$$\begin{cases} u - c_{\mu_1} \Delta u + \alpha(u - v) = g_1, \\ v - c_{\mu_2} \Delta v + \alpha(v - u) = g_2. \end{cases} \quad (2.31)$$

Para isto, utilizaremos o Teorema de Lax-Milgram. De fato, vamos definir a forma bilinear

$$a : [H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)] \times [H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)] \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$a((u, v), (\varphi, \psi)) = (u, \varphi) + c_{\mu_1} (\nabla u, \nabla \varphi) + (v, \psi) + c_{\mu_2} (\nabla v, \nabla \psi) + \alpha(u - v, \varphi - \psi).$$

Note que

- a é coerciva: De fato,

$$\begin{aligned} a((u, v), (u, v)) &= \|u\|^2 + c_{\mu_1} \|\nabla u\|^2 + \|v\|^2 + c_{\mu_2} \|\nabla v\|^2 + \alpha \|u - v\|^2 \\ &\geq C (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2), \end{aligned}$$

o que prova a coercividade desejada.

- a é contínua: De fato, para todos $u, v, \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, utilizando a desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned} |a((u, v), (\varphi, \psi))| &\leq C (\|u\| \|\varphi\| + \|\nabla u\| \|\nabla \varphi\| + \|v\| \|\psi\| + \|\nabla v\| \|\nabla \psi\| + \|u - v\| \|\varphi - \psi\|) \\ &\leq C [\|u\| \|\varphi\| + \|\nabla u\| \|\nabla \varphi\| + \|v\| \|\psi\| + \|\nabla v\| \|\nabla \psi\|] \\ &\quad + C [(\|u\| + \|v\|) (\|\varphi\| + \|\psi\|)] \\ &\leq C [\|\nabla u\| \|\nabla \varphi\| + \|\nabla u\| \|\nabla \varphi\| + \|\nabla v\| \|\nabla \psi\| + \|\nabla v\| \|\nabla \psi\|] \\ &\quad + C [\|\nabla u\| \|\nabla \varphi\| + \|\nabla u\| \|\nabla \psi\| + \|\nabla v\| \|\nabla \varphi\| + \|\nabla v\| \|\nabla \psi\|] \\ &\leq C (\|\nabla u\| + \|\nabla v\|) (\|\nabla \varphi\| + \|\nabla \psi\|), \end{aligned}$$

o que prova a continuidade. Assim, segue do Teorema de Lax-Milgram que existe um único $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a((u, v), (\varphi, \psi)) = \langle g_1, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle g_2, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad (2.32)$$

para todo $(\varphi, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Agora, motivados por (2.26), (2.27) e (2.29), definimos

$$\begin{cases} w = u - f_1, \\ z = v - f_2, \\ \eta(s) = w(1 - e^{-s}) + \Phi_{f_5}(s), \\ \zeta(s) = z(1 - e^{-s}) + \Phi_{f_6}(s) \end{cases} \quad (2.33)$$

e afirmamos que $U = (u, v, w, z, \eta, \zeta) \in D(\mathcal{A})$ e suas componentes satisfazem (2.25). De fato, considerando $\psi \in H_0^1(\Omega)$ qualquer e $\varphi = 0$ em (2.32), temos:

$$(v, \psi) + c_{\mu_2}(\nabla v, \nabla \psi) + \alpha(v - u, \psi) = \langle g_2, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Utilizando a extensão do operador Laplaciano em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$\langle v, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + c_{\mu_2} \langle -\Delta v, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha \langle v - u, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle g_2, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Donde,

$$\langle v - c_{\mu_2} \Delta v + \alpha(v - u), \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle g_2, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

ou seja, da arbitrariedade de $\psi \in H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$v - c_{\mu_2} \Delta v + \alpha(v - u) = g_2 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega).$$

E assim, (2.31)₂ é satisfeita em $H^{-1}(\Omega)$. De forma análoga, considerando $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ qualquer e $\psi = 0$ em (2.32), temos

$$u - c_{\mu_1} \Delta u + \alpha(u - v) = g_1 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega).$$

E assim, (2.31)₁ é satisfeita em $H^{-1}(\Omega)$. Note que, utilizando a definição de g_1 e g_2 , podemos reescrever (2.31) como

$$\begin{cases} w - \omega_1 \Delta u - \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \Delta \eta(s) ds + \alpha(u - v) = f_3 \\ z - \omega_2 \Delta v - \int_0^{+\infty} \mu_2(s) \Delta \zeta(s) ds + \alpha(v - u) = f_4 \end{cases}$$

mostrando que estão satisfeitas (2.25)₃ e (2.25)₄. Além disso, reescrevendo a primeira equação do sistema acima,

$$\omega_1 \Delta u + \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \Delta \eta(s) ds = w + \alpha(u - v) - f_3, \quad (2.34)$$

temos que o lado direito em (2.34) está em $L^2(\Omega)$, pois $u, v, w \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $f_3 \in L^2(\Omega)$,

donde concluimos que

$$\omega_1 \Delta u + \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \Delta \eta(s) ds \in L^2(\Omega).$$

Analogamente, concluimos também que

$$\omega_2 \Delta v + \int_0^{+\infty} \mu_2(s) \Delta \zeta(s) ds \in L^2(\Omega).$$

Como $u, v, f_1, f_2 \in H_0^1(\Omega)$ então $w = u - f_1 \in H_0^1(\Omega)$ e $z = v - f_2 \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, reescrevendo, temos que $u - w = f_1$ e $v - z = f_2$, satisfazendo (2.25)₁ e (2.25)₂. Mais ainda, de (2.33)₃ e (2.33)₄ concluimos que $\eta(0) = 0$ e $\zeta(0) = 0$.

Observemos agora que $\eta \in \mathcal{M}_1$. Com efeito, utilizando (2.33)₃, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \|\nabla \eta(s)\|^2 ds &\leq 2 \int_0^{+\infty} \mu_1(s) (1 - e^{-s})^2 \|\nabla w\|^2 ds + 2 \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \|\nabla \Phi_{f_5}(s)\|^2 ds \\ &\leq 2 \ell_1 \|\nabla w\|^2 + 2 \|\nabla \Phi_{f_5}\|_{\mathcal{M}_1}^2 \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

De maneira similar, $\zeta \in \mathcal{M}_2$. Assim, $(\eta, \zeta) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$.

Por fim, observe que, utilizando a Regra de Leibniz para integrais, temos

$$\begin{aligned} \eta_s(s) &= \frac{d}{ds} \left(w(1 - e^{-s}) + \int_0^s e^{y-s} f_5(y) dy \right) \\ &= we^{-s} + \frac{d}{ds} \left(\int_0^s e^{y-s} f_5(y) dy \right) \\ &= we^{-s} - \int_0^s e^{y-s} f_5(y) dy + f_5(y). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \eta + \eta_s &= \left[(1 - e^{-s})w + \int_0^s e^{y-s} f_5(y) dy \right] + \left[we^{-s} - \int_0^s e^{y-s} f_5(y) dy + f_5(y) \right] \\ &= w + f_5(y), \end{aligned}$$

satisfazendo assim (2.25)₅. Além disso, como $w \in H_0^1(\Omega)$, $f_5 \in \mathcal{M}_1$ e $\eta \in \mathcal{M}_1$, temos que

$$\eta_s = w + f_5 - \eta \in \mathcal{M}_1.$$

Analogamente, mostramos que (2.25)₆ é satisfeita e que

$$\zeta_s = z + f_6 - \zeta \in \mathcal{M}_2.$$

Portanto, mostramos que as equações no sistema (2.25) são satisfeitas e garantimos a existência de $U = (u, v, w, z, \eta, \zeta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $(I - \mathcal{A})U = F$.

Tendo em mãos que o operador \mathcal{A} é dissipativo, que $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor e que $D(\mathcal{A})$ é denso em

\mathcal{H} (ver Proposição 1.33), segue do Teorema de Lumer-Phillips que \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ em \mathcal{H} . E, pelo Teorema 1.29, tomando $F \equiv 0$, garantimos que o problema (2.15) tem uma única solução generalizada satisfazendo $U(t) = S(t)U_0$. Além do mais, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ então a solução generalizada é clássica, concluindo assim a prova do teorema. \square

2.1.4 Boa Colocação: Problema Original (2.1)-(2.3)

Agora estamos em condições de mostrar que o problema original é bem-posto. Para isso, sejam $(u_0, v_0, u_1, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e

$$\mathcal{V} := \{(u, v, w, z, \eta, \zeta) \in \mathcal{H}, \eta(s) = u \text{ e } \zeta(s) = v, \forall s > 0\}. \quad (2.35)$$

Se $U_0 := (u_0, v_0, u_1, v_1, \eta_0, \zeta_0) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}$, podemos aplicar o Teorema 2.4 para obter uma única solução generalizada dada por

$$S(t)U_0 = (u(t), v(t), w(t), z(t), \eta^t, \zeta^t), \quad t > 0.$$

Além disso, de (2.14) e (2.35), a função η tem a expressão

$$\eta^t(s) = \begin{cases} u(t), & \text{se } t < s, \\ u(t) - u(t-s), & \text{se } 0 < s \leq t \end{cases}.$$

Então,

$$\omega_1 u(t) + \mathbb{I}_{\mu_1}(\eta^t) = u(t) - \int_0^t \mu_1(s)u(t-s) ds.$$

Analogamente, temos

$$\omega_2 v(t) + \mathbb{I}_{\mu_2}(\zeta^t) = v(t) - \int_0^t \mu_2(s)v(t-s) ds.$$

Consequentemente, o par (u, v) é uma solução para (2.1)-(2.3). Isso motiva a seguinte definição:

Definição 2.5. *O par (u, v) formado pelas duas primeiras componentes do vetor*

$$U(t) = S(t)(u_0, u_1, v_0, v_1, u_0, u_1),$$

é dito uma solução fraca do sistema (2.1)-(2.3) com dados iniciais $(u_0, u_1, v_0, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.6. *Sob a hipótese 2.1 e para qualquer*

$$(u_0, v_0, u_1, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

o sistema (2.1)-(2.3) tem uma única solução fraca (u, v) na classe

$$(u, v) \in C([0, +\infty), H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \times C^1([0, +\infty), L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)).$$

□

Terminamos esta subseção resumindo a discussão acima no diagrama a seguir:

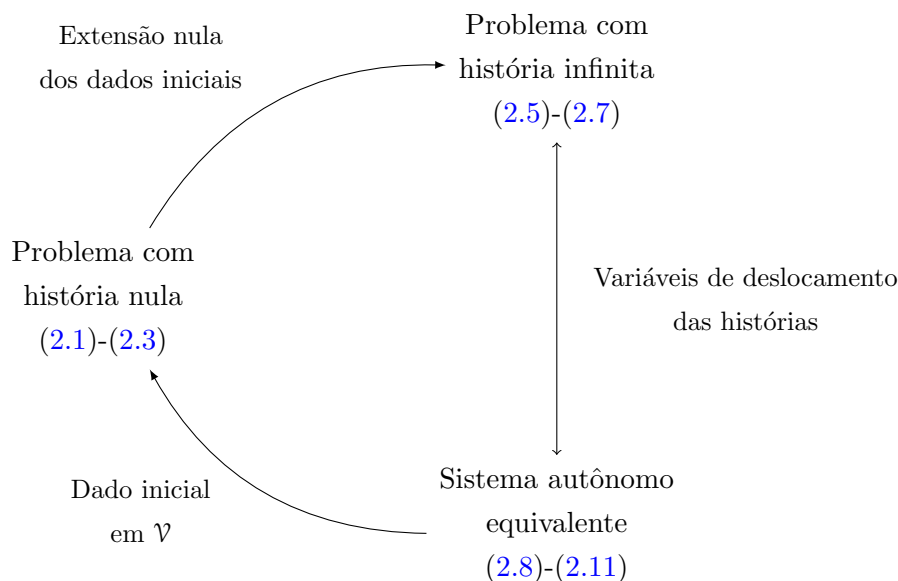


Figura 2.1: Estratégia para provar a boa-colocação do sistema (2.1)-(2.3).

2.2 Decaimento geral uniforme da energia

Nesta seção, estudaremos a estabilidade geral do funcional de energia associado a (2.1)-(2.3), a saber

$$E(t) = \frac{1}{2} \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}}^2, \quad U_0 \in \mathcal{V}.$$

2.2.1 Ferramentas Preliminares

Nessa subseção apresentaremos as ferramentas técnicas para demonstrar o decaimento geral do funcional de energia. Para isso, coletamos algumas notações, definições e resultados auxiliares de [21, 23, 24].

Seja $i = 1, 2$. Para qualquer conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^+$, consideremos a *medida de probabilidade* $\hat{\mu}_i$ associada a μ_i definida por

$$\hat{\mu}_i(A) = \frac{1}{\ell_i} \int_A \mu_i(s) ds. \quad (2.36)$$

Dado $\kappa > 0$, vamos decompor \mathbb{R}^+ de forma que $\mathbb{R}^+ = N_{i,\kappa} \dot{\cup} P_{i,\kappa}$, em que

$$N_{i,\kappa} := \{s \in \mathbb{R}^+ \mid \mu_i'(s) + \kappa\mu_i(s) \leq 0\}, \quad P_{i,\kappa} := \mathbb{R}^+ \setminus N_{i,\kappa}. \quad (2.37)$$

Escrevendo, para $\xi \in \mathcal{M}_i$,

$$\int_{P_{i,\kappa}} \mu_i(s) \|\nabla \xi(s)\|^2 ds := \mathcal{P}_{i,\kappa}(\xi), \quad \int_{N_{i,\kappa}} \mu_i(s) \|\nabla \xi(s)\|^2 ds := \mathcal{N}_{i,\kappa}(\xi), \quad (2.38)$$

temos que

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{\mathcal{M}_i}^2 &= \int_0^{+\infty} \mu_i(s) \|\nabla \xi(s)\|^2 ds \\ &= \int_{P_{i,\kappa}} \mu_i(s) \|\nabla \xi(s)\|^2 ds + \int_{N_{i,\kappa}} \mu_i(s) \|\nabla \xi(s)\|^2 ds \\ &= \mathcal{P}_{i,\kappa}(\xi) + \mathcal{N}_{i,\kappa}(\xi). \end{aligned}$$

Definimos o *conjunto de achatamento* de μ_i como

$$\mathcal{F}_{\mu_i} := \{s \in \mathbb{R}^+ \mid \mu_i(s) > 0 \text{ e } \mu_i'(s) = 0\}, \quad (2.39)$$

e a *taxa de achatamento* de μ_i como

$$\mathcal{R}_{\mu_i} := \hat{\mu}_i(\mathcal{F}_{\mu_i}). \quad (2.40)$$

Listamos abaixo algumas propriedades relacionadas as definições acima.

Lema 2.7. *Considerando as notações definidas acima e a hipótese 2.1, temos:*

(a) $\mathcal{R}_{\mu_i} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \hat{\mu}_i(P_{i,\kappa});$

(b) *Para qualquer $\xi \in \mathcal{M}_i$, vale:*

$$\begin{cases} \left(\int_{N_{i,\kappa}} \mu_i(s) \|\nabla \xi(s)\|^2 ds \right)^2 \leq \ell_i \hat{\mu}_i(N_{i,\kappa}) \mathcal{N}_{i,\kappa}(\xi) \\ \left(\int_{P_{i,\kappa}} \mu_i(s) \|\nabla \xi(s)\|^2 ds \right)^2 \leq \ell_i \hat{\mu}_i(P_{i,\kappa}) \mathcal{P}_{i,\kappa}(\xi) \end{cases} \quad (2.41)$$

Demonstração. Seja $i = 1, 2$.

Prova de (a): Inicialmente, afirmamos que

$$\bigcap_{\kappa > 0} P_{i,\kappa} = \mathcal{F}_{\mu_i} \cup \{s \in \mathbb{R}^+ \mid \nexists \mu_i'(s)\}.$$

De fato, se $s_0 \in \mathcal{F}_{\mu_i}$ então $s_0 \in \mathbb{R}^+$, $\mu_i(s_0) > 0$ e $\mu_i'(s_0) = 0$, donde $\mu_i'(s_0) + \kappa\mu_i(s_0) = \kappa\mu_i(s_0) > 0$.

Logo, $s_0 \in P_{i,\kappa}$ para todo $\kappa > 0$, isto é, $s_0 \in \bigcap_{\kappa > 0} P_{i,\kappa}$.

Por outro lado, se $s_0 \in \mathbb{R}^+$ e $\mu'_i(s_0)$ não existe, então $s_0 \in P_{i,\kappa}$ para todo $\kappa > 0$, isto é, $s_0 \in \bigcap_{\kappa>0} P_{i,\kappa}$. Agora, se $s_0 \in \bigcap_{\kappa>0} P_{i,\kappa}$ então, ocorre uma, e somente uma, das situações abaixo:

- $\mu'_i(s_0)$ não existe
- existe $\mu'_i(s_0)$ e, neste caso, $\mu'_i(s_0) + \kappa \mu_i(s_0) > 0$, para todo $\kappa > 0$.

Se ocorrer a primeira situação então, trivialmente, $s_0 \in \mathcal{F}_{\mu_i} \cup \{s \in \mathbb{R}^+ \mid \nexists \mu'_i(s)\}$. Se ocorrer que $\mu'_i(s_0) + \kappa \mu_i(s_0) > 0$, para todo $\kappa > 0$, então, fazendo $\kappa \rightarrow 0$, temos $\mu'_i(s_0) \geq 0$. Por outro lado, como μ_i é não-crescente, temos $\mu'_i(s_0) \leq 0$. Donde segue que $\mu'_i(s_0) = 0$. Além disso, como $\kappa > 0$ e $\kappa \mu_i(s_0) > 0$, temos que $\mu_i(s_0) > 0$. Assim, $s_0 \in \mathcal{F}_{\mu_i}$ e, conseqüentemente, $s_0 \in \mathcal{F}_{\mu_i} \cup \{s \in \mathbb{R}^+ \mid \nexists \mu'_i(s)\}$. Donde podemos concluir a afirmação.

Para mostrar o item (a), observamos que:

- A medida do conjunto $\{s \in \mathbb{R}^+ \mid \nexists \mu'_i(s)\}$ é nula;
- Se $\kappa_1 > \kappa_2$ então $P_{i,\kappa_1} \subseteq P_{i,\kappa_2}$.

Logo, segue de (2.39), (2.40) e da proposição 1.60 que

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \hat{\mu}_i(P_{i,\kappa}) &= \hat{\mu}_i\left(\bigcap_{\kappa>0} P_{i,\kappa}\right) = \hat{\mu}_i(\mathcal{F}_{\mu_i} \cup \{s \in \mathbb{R}^+ \mid \nexists \mu'_i(s)\}) \\ &= \hat{\mu}_i(\mathcal{F}_{\mu_i}) + \hat{\mu}_i(\{s \in \mathbb{R}^+ \mid \nexists \mu'_i(s)\}) \\ &= \hat{\mu}_i(\mathcal{F}_{\mu_i}) \\ &= \mathcal{R}_{\mu_i}. \end{aligned}$$

Prova de (b): De (2.36) e (2.38), temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{N_{i,\kappa}} \mu_i(s) \|\nabla \xi(s)\| ds\right)^2 &\leq \left(\int_{N_{i,\kappa}} \mu_i(s) ds\right) \left(\int_{N_{i,\kappa}} \mu_i(s) \|\nabla \xi(s)\|^2 ds\right) dx \\ &= \ell_i \hat{\mu}_i(N_{i,\kappa}) \mathcal{N}_{i,\kappa}(\xi). \end{aligned}$$

Analogamente provamos a outra estimativa em (2.41). □

Observação 2.8. *Os núcleos de memória considerados na Hipótese 2.1 podem apresentar uma possível singularidade em $s = 0$, como ocorre por exemplo em*

$$g(s) = \frac{e^{-s}}{s}.$$

Para lidar com essa possibilidade, exploramos o fato de que $\mu_i \in L^1(\mathbb{R}^+)$. De fato, para todo $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, podemos escolher $s_i^* = s_i^*(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_0^{s_i^*} \mu_i(s) ds < \frac{\varepsilon \ell_i}{2}. \quad (2.42)$$

Então, consideramos o núcleo truncado $\mu_i^* : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$, como

$$\mu_i^*(s) := \mu(s_i^*) \chi_{(0, s_i^*]}(s) + \mu_i(s) \chi_{(s_i^*, +\infty)}(s) \quad (2.43)$$

que satisfaz

$$\mu_i^*(s) = [\mu_i(s_i^*) - \mu_i(s)] \chi_{(0, s_i^*]}(s) + \mu_i(s) \leq \mu_i(s), \quad s > 0, \quad (2.44)$$

para $i = 1, 2$.

2.2.2 Processo de Regularização

Para obtermos as estimativas desejadas para a energia em \mathcal{H} , precisamos trabalhar com um subespaço mais regular e denso em \mathcal{H} , por exemplo, $D(\mathcal{A})$. No entanto, $D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{V}$ não é denso em \mathcal{V} pois

$$D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{V} = \{(0, 0, w, z, 0, 0), \quad w, z \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Para superar essa dificuldade, seguimos as ideias de [23, 24] e construímos uma sequência regularizante que satisfaz algumas propriedades.

Lema 2.9. *Dado $U_0 = (u_0, v_0, w_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathcal{V}$, então existe $\psi_n \in C^1([0, +\infty))$ e*

$$(u_0^n, v_0^n, w_0^n, z_0^n) \in [H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)] \times [H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

tal que a sequência $U_0^n = (u_0^n, v_0^n, w_0^n, z_0^n, \psi_n u_0^n, \psi_n v_0^n)$ pertence a $D(\mathcal{A})$ e satisfaz

$$U_0^n \rightarrow U_0 \text{ em } \mathcal{H}. \quad (2.45)$$

Além disso, as duas últimas componentes de

$$S(t)U_0^n = (u^n(t), v^n(t), u_t^n(t), v_t^n(t), (\eta^t)^n, (\zeta^t)^n),$$

tem a forma explícita

$$(\eta^t)^n(s) = \begin{cases} u^n(t) - u^n(t-s), & \text{se } 0 < s \leq t \\ u^n(t) + (\psi_n(s-t) - 1)u_0^n, & \text{se } t < s \leq t + \frac{1}{n} \\ u^n(t), & \text{se } s > t + \frac{1}{n} \end{cases} \quad (2.46)$$

e

$$(\zeta^t)^n(s) = \begin{cases} v^n(t) - v^n(t-s), & \text{se } 0 < s \leq t \\ v^n(t) + (\psi_n(s-t) - 1)v_0^n, & \text{se } t < s \leq t + \frac{1}{n} \\ v^n(t), & \text{se } s > t + \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (2.47)$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a sequência $\psi_n : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\psi_n(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s < \frac{1}{2n} \\ \text{sen}^2 \left[\frac{\pi}{2}(2ns - 1) \right], & \text{se } \frac{1}{2n} \leq s \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \text{se } s > \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (2.48)$$

Explorando as imersões densas

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega), \quad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

garantimos a existência de uma sequência

$$(u^n, v^n, w^n, z^n) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

tal que

$$(u_0^n, v_0^n, w_0^n, z_0^n) \rightarrow (u_0, v_0, w_0, z_0) \text{ em } H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad (2.49)$$

Claramente $\psi_n \in C^1([0, +\infty))$ e a sequência $U_0^n = (u_0^n, v_0^n, w_0^n, z_0^n, \psi_n u_0^n, \psi_n v_0^n) \in D(\mathcal{A})$. Vamos mostrar que U_0^n satisfaz (2.45). De fato,

$$\begin{aligned} \|U_0^n - U_0\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \omega_1 \|\nabla u_0^n - \nabla u_0\|^2 + \omega_2 \|\nabla v_0^n - \nabla v_0\|^2 + \|w_0^n - w_0\|^2 \\ &\quad + \|z_0^n - z_0\|^2 + 2\alpha \|u_0^n - u_0\|^2 + 2\alpha \|v_0^n - v_0\|^2 \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \|\nabla \psi_n u_0^n - \nabla u_0\|^2 ds + \int_0^{+\infty} \mu_2(s) \|\nabla \psi_n v_0^n - \nabla v_0\|^2 ds. \end{aligned} \quad (2.50)$$

De (2.49) temos que os seis primeiros termos de (2.50) tendem a zero. Resta mostrar que o mesmo ocorre com os dois últimos termos. A análise pode ser feita apenas para o sétimo termo pois, para a oitava parcela basta realizarmos um procedimento análogo e obtermos a mesma conclusão. Com efeito, note que

$$\|\nabla \psi_n u_0^n - \nabla u_0\|^2 \leq 2|\psi_n - 1|^2 \|\nabla u_0^n\|^2 + 2\|\nabla u_0^n - \nabla u_0\|^2.$$

Da convergência (2.49) temos que existe $C = C(\|\nabla u_0^n\|) > 0$ tal que $\|\nabla u_0^n\| \leq C$, donde

$$\int_0^{+\infty} \mu_1(s) \|\nabla \psi_n u_0^n - \nabla u_0\|^2 ds \leq C^2 \int_0^{+\infty} \mu_1(s) |\psi_n - 1|^2 ds + 2\ell_1 \|\nabla u_0^n - \nabla u_0\|^2. \quad (2.51)$$

Novamente de (2.49) temos que a segunda parcela em (2.51) tende para zero. A fim de verificarmos que o mesmo ocorre com a primeira parcela, observamos que:

(i) $\mu_1(s)|\psi_n - 1|^2$ é limitada por uma função $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ pois,

$$\mu_1(s)|\psi_n - 1|^2 \leq \mu_1(s)(|\psi_n(s)| + 1)^2 \leq 4\mu_1(s).$$

(ii) Ao tomarmos o limite quando n tende a infinito, $\mu_1(s)|\psi_n - 1|^2$ tende para zero, para todo

$s \in [0, +\infty)$ pois, de (2.48) temos que $\psi_n(s) - 1 = 0$, para todo $s > \frac{1}{n}$ e, por outro lado, utilizando a propriedade arquimediana, para todo $s > 0$ fixo, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s > \frac{1}{n_0}$ e, assim, podemos concluir que para todo $n > n_0$ temos que $s > \frac{1}{n}$ e, portanto $\psi_n(s) - 1 = 0$, garantindo a convergência desejada.

Agora, tendo em vista (i) e (ii), podemos utilizar o Teorema da Convergência dominada para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mu_1(s) \|\nabla \psi_n u_0^n - \nabla u_0\|^2 ds = 0. \quad (2.52)$$

De (2.51) e (2.52), temos que a sétima parcela em (2.50) tende a zero, provando (2.49).

A fim de concluir (2.46), podemos considerar $p = u^n$ em (2.14) e analisar dois casos:

Caso 1: $0 < s \leq t$. De (2.14), segue que

$$(\eta^t)^n(s) = u^n(t) - u^n(t-s). \quad (2.53)$$

Caso 2: $s > t$. De (2.14) e da expressão de U_0^n , obtemos

$$\begin{aligned} (\eta^t)^n(s) &= \eta_0^n(s-t) + u^n(t) - u^n(0) \\ &= \psi_n(s-t)u_0^n + u^n(t) - u_0^n \\ &= u^n(t) + (\psi_n(s-t) - 1)u_0^n. \end{aligned}$$

No entanto, para $s > t + \frac{1}{n}$, temos que $s - t > \frac{1}{n}$ e portanto $\psi_n(s-t) = 1$, ou seja,

$$(\eta^t)^n(s) = \begin{cases} u^n(t) + (\psi_n(s-t) - 1)u_0^n & t < s \leq t + \frac{1}{n}, \\ u^n(t) & s > t + \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (2.54)$$

e, de (2.53) e (2.54), temos o desejado em (2.46). De modo análogo também concluimos a expressão desejada em (2.47). \square

2.2.3 Resultado Principal

Para estabelecermos o resultado principal, consideramos para cada $i = 1, 2$, uma função absolutamente contínua $G_i : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo a desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}G_i(t) + \gamma_i(t)G_i(t) \leq 0, \quad \text{q.t.p. } t > 0, \quad (2.55)$$

em que $\gamma_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é decrescente e contínua com

$$\int_0^{+\infty} \min \{\gamma_1(s), \gamma_2(s)\} ds = +\infty. \quad (2.56)$$

Vamos assumir que os núcleos μ_1 e μ_2 satisfazem a seguinte hipótese adicional:

Hipótese 2.10. Para cada $i = 1, 2$ e para cada $t \geq 0$, vamos assumir que o núcleo μ_i satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\int_t^{+\infty} \mu_i(s) ds \leq G_i(t). \quad (2.57)$$

Nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 2.11. Vamos admitir as hipóteses 2.1, 2.10 e supor ainda que

$$\mu'_1(s), \mu'_2(s) < 0 \text{ para quase todo } s > 0. \quad (2.58)$$

Então, para todo $U_0 \in \mathcal{V}$ e $t_0 > 0$, existe uma constante estrutural $\rho = \rho(t_0) > 0$ e uma função crescente $Q = Q(\|U_0\|_{\mathcal{H}})$ tal que

$$E(t) \leq Q(t_0) e^{-\rho \int_{t_0}^t \min\{\gamma_1(s), \gamma_2(s)\} ds}, \quad t \geq t_0. \quad (2.59)$$

Como a prova deste teorema é extensa, vamos dividi-la em vários lemas. Para isso, vamos explorar a força do Lema 2.9, considerando para qualquer dado inicial

$$U_0 = (u_0, v_0, w_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathcal{V},$$

uma sequência

$$U_0^n = (u_0^n, v_0^n, w_0^n, z_0^n, \psi_n u_0^n, \psi_n v_0^n) \in D(\mathcal{A}),$$

tal que (2.45) é válida e as duas últimas componentes de

$$S(t)U_0^n = (u^n(t), v^n(t), u_t^n(t), v_t^n(t), (\eta^t)^n, (\zeta^t)^n) \in D(\mathcal{A}),$$

são dadas por (2.46) e (2.47), respectivamente.

Lema 2.12. Para todo $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, o funcional Ψ_1^n dado por

$$\Psi_1^n(t) = (u^n(t), u_t^n(t)) + (v^n(t), v_t^n(t)),$$

satisfaz a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_1^n(t) &\leq \|u_t^n(t)\|^2 + \|v_t^n(t)\|^2 - (\omega_1 - \varepsilon) \|\nabla u^n(t)\|^2 - (\omega_2 - \varepsilon) \|\nabla v^n(t)\|^2 \\ &\quad - \int_{P_{1,\kappa}} \mu_1(s) (\nabla u^n(t), \nabla (\eta^t)^n(s)) ds - \int_{P_{2,\kappa}} \mu_2(s) (\nabla v^n(t), \nabla (\zeta^t)^n(s)) ds \\ &\quad - \alpha \|u^n(t) - v^n(t)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} [\mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Demonstração. Fazendo a derivada de $\Psi_1^n(t)$ e usando (2.8)₁ e (2.8)₂, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_1^n(t) &= \|u_t^n(t)\|^2 + \|v_t^n(t)\|^2 - \omega_1 \|\nabla u^n(t)\|^2 - \omega_2 \|\nabla v^n(t)\|^2 - \alpha \|u^n(t) - v^n(t)\|^2 \\ &\quad - (\nabla u^n(t), \mathbb{I}_{\mu_1}(\nabla (\eta^t)^n)) - (\nabla v^n(t), \mathbb{I}_{\mu_2}(\nabla (\zeta^t)^n)). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por outro lado, utilizando alguns cálculos simples, (2.37) e (2.41), podemos estimar os dois últimos termos no lado direito de (2.61) como segue

$$\begin{cases} (\nabla u^n(t), \mathbb{I}_{\mu_1}(\nabla(\eta^t)^n)) \geq \int_{P_{1,\kappa}} \mu_1(s) (\nabla u^n(t), \nabla(\eta^t)^n(s)) ds - \varepsilon \|\nabla u^n(t)\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) \\ (\nabla v^n(t), \mathbb{I}_{\mu_2}(\nabla(\zeta^t)^n)) \geq \int_{P_{2,\kappa}} \mu_2(s) (\nabla v^n(t), \nabla(\zeta^t)^n(s)) ds - \varepsilon \|\nabla v^n(t)\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n) \end{cases}$$

Substituindo as últimas estimativas em (2.61), obtemos (2.60). \square

Lema 2.13. Para cada $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, o funcional Ψ_2^n definido por

$$\Psi_2^n(t) = -\frac{1}{\ell_1} \int_0^{+\infty} \mu_1^*(s) ((\eta^t)^n(s), u_t^n(t)) ds - \frac{1}{\ell_2} \int_0^{+\infty} \mu_2^*(s) ((\zeta^t)^n(s), v_t^n(t)) ds,$$

satisfaz a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_2^n(t) &\leq -(1-\varepsilon) [\|u_t^n(t)\|^2 + \|v_t^n(t)\|^2] + 2\varepsilon^{1/2} \left[\frac{\omega_1}{\ell_1} \|\nabla u^n(t)\|^2 + \frac{\omega_2}{\ell_2} \|\nabla v^n(t)\|^2 \right] \\ &\quad + \left(\varepsilon^{1/2} + 2\hat{\mu}_1(P_{1,\kappa}) \right) \mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \left(\varepsilon^{1/2} + 2\hat{\mu}_2(P_{2,\kappa}) \right) \mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n) \\ &\quad + \frac{\omega_1}{\ell_1} \int_{P_{1,\kappa}} \mu_1(s) (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds + \frac{\omega_2}{\ell_2} \int_{P_{2,\kappa}} \mu_2(s) (\nabla(\zeta^t)^n(s), \nabla v^n(t)) ds \\ &\quad - \frac{\mu_1(s_1^*)}{2C_P \ell_1^2 \varepsilon} \int_0^{+\infty} \mu_1'(s) \|\nabla(\eta^t)^n(s)\|^2 ds - \frac{\mu_2(s_2^*)}{2C_P \ell_2^2 \varepsilon} \int_0^{+\infty} \mu_2'(s) \|\nabla(\zeta^t)^n(s)\|^2 ds \\ &\quad + \alpha \int_0^\infty \left(\frac{\mu_1^*(s)}{\ell_1} (\eta^t)^n(s) - \frac{\mu_2^*(s)}{\ell_2} (\zeta^t)^n(s), (u^n - v^n)(t) \right) ds \\ &\quad + \frac{3}{\varepsilon} [\mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Demonstração. Derivando $\Psi_2^n(t)$ e utilizando as equações de (2.8), chegamos em

$$\frac{d}{dt} \Psi_2^n(t) = \sum_{k=1}^4 J_k^n(t) + \alpha \int_0^\infty \left(\frac{\mu_1^*(s)}{\ell_1} (\eta^t)^n(s) - \frac{\mu_2^*(s)}{\ell_2} (\zeta^t)^n(s), (u^n - v^n)(t) \right) ds, \quad (2.63)$$

onde

$$\begin{aligned} J_1^n(t) &:= -\frac{1}{\ell_1} \left(\int_0^\infty \mu_1^*(s) ds \right) \|u_t^n(t)\|^2 - \frac{1}{\ell_2} \left(\int_0^\infty \mu_2^*(s) ds \right) \|v_t^n(t)\|^2, \\ J_2^n(t) &:= \frac{1}{\ell_1} \int_0^\infty \mu_1^*(s) ((\eta^t)^n_s(s), u_t^n(t)) ds + \frac{1}{\ell_2} \int_0^\infty \mu_2^*(s) ((\zeta^t)^n_s(s), v_t^n(t)) ds, \\ J_3^n(t) &:= \frac{\omega_1}{\ell_1} \int_0^\infty \mu_1^*(s) (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds + \frac{\omega_2}{\ell_2} \int_0^\infty \mu_2^*(s) (\nabla(\zeta^t)^n(s), \nabla v^n(t)) ds, \\ J_4^n(t) &:= \frac{1}{\ell_1} \int_0^\infty \mu_1^*(s) (\nabla(\eta^t)^n(s), \mathbb{I}_{\mu_1}(\nabla(\eta^t)^n)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\ell_2} \int_0^\infty \mu_2^*(s) (\nabla(\zeta^t)^n(s), \mathbb{I}_{\mu_2}(\nabla(\zeta^t)^n)) ds. \end{aligned}$$

No que segue, estimaremos os termos $J_k^n(t)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Estimativa para $J_1^n(t)$: Observando (2.42) e (2.44), temos que

$$\int_0^\infty \mu_i^*(s) ds = \mu_i(s_i^*)s_i^* + \ell_i - \int_0^{s_i^*} \mu_i(s) ds \geq \ell_i \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad i = 1, 2,$$

e assim

$$J_1^n(t) \leq - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) [\|u_t^n(t)\|^2 + \|v_t^n(t)\|^2]. \quad (2.64)$$

Estimativa para $J_2^n(t)$: Usando integração por partes, argumentos análogos a (2.20) e (2.21) e também o fato que $(\eta^t)^n \in D(\mathbb{L}_1)$ e $(\zeta^t)^n \in D(\mathbb{L}_2)$, podemos escrever

$$J_2^n(t) = -\frac{1}{\ell_1} \int_0^\infty (\mu_1^*)'(s) ((\eta^t)^n(s), u_t^n(t)) ds - \frac{1}{\ell_2} \int_0^\infty (\mu_2^*)'(s) ((\zeta^t)^n(s), v_t^n(t)) ds.$$

Então, de (2.43) e da desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} |J_2^n(t)| &\leq -\frac{1}{\ell_1} \int_0^{+\infty} (\mu_1^*)'(s) \|(\eta^t)^n(s)\| \|u_t^n(t)\| ds - \frac{1}{\ell_2} \int_0^{+\infty} (\mu_2^*)'(s) \|(\zeta^t)^n(s)\| \|v_t^n(t)\| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} [\|u_t^n(t)\|^2 + \|v_t^n(t)\|^2] - \frac{\mu_1(s_1^*)}{2C_P \ell_1^2 \varepsilon} \int_0^{+\infty} \mu_1'(s) \|\nabla(\eta^t)^n(s)\|^2 ds \\ &\quad - \frac{\mu_2(s_2^*)}{2C_P \ell_2^2 \varepsilon} \int_0^{+\infty} \mu_2'(s) \|\nabla(\zeta^t)^n(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Estimativa para $J_3^n(t)$: Escrevendo

$$\begin{aligned} J_3^n(t) &= \frac{\omega_1}{\ell_1} \int_0^{+\infty} \mu_1(s) (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds + \frac{\omega_2}{\ell_2} \int_0^{+\infty} \mu_2(s) (\nabla(\zeta^t)^n(s), \nabla v^n(t)) ds \\ &\quad - \frac{\omega_1}{\ell_1} \int_0^{s_1^*} [\mu_1(s) - \mu_1^*(s)] (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds \\ &\quad - \frac{\omega_2}{\ell_2} \int_0^{s_2^*} [\mu_2(s) - \mu_2^*(s)] (\nabla(\zeta^t)^n(s), \nabla v^n(t)) ds, \end{aligned}$$

e usando (2.43), (2.37), podemos estimar $J_3^n(t)$ por

$$\begin{aligned} |J_3^n(t)| &\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\omega_1}{\ell_1} \|\nabla u^n(t)\|^2 + \frac{\omega_2}{\ell_2} \|\nabla v^n(t)\|^2 \right] + \varepsilon^{\frac{1}{2}} [\mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)] \\ &\quad + \frac{\omega_1}{\ell_1} \int_{P_{1,\kappa}} \mu_1(s) (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds + \frac{\omega_2}{\ell_2} \int_{P_{2,\kappa}} \mu_2(s) (\nabla(\zeta^t)^n(s), \nabla v^n(t)) ds \\ &\quad + \frac{3}{2\varepsilon} [\mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Estimativa para $J_4^n(t)$: Executando uma sequência de cálculos usuais, (2.36), (2.37), (2.41) e

(2.43), obtemos

$$\begin{aligned}
|J_4^n(t)| &\leq \hat{\mu}_1(P_{1,\kappa})\mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \frac{2}{\ell_1} (l_1^2 \hat{\mu}_1(P_{1,\kappa}) \mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n))^{\frac{1}{2}} (\mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n))^{\frac{1}{2}} + \mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) \\
&\quad + \hat{\mu}_1(P_{2,\kappa})\mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n) + \frac{2}{\ell_2} (l_2^2 \hat{\mu}_2(P_{2,\kappa}) \mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n))^{\frac{1}{2}} (\mathcal{N}_{2,\kappa}(\zeta))^{\frac{1}{2}} + \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n) \\
&\leq 2 [\hat{\mu}_1(P_{1,\kappa})\mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \hat{\mu}_2(P_{2,\kappa})\mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)] \\
&\quad + \frac{3}{2\varepsilon} [\mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)]. \tag{2.67}
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas (2.64), (2.65), (2.66) e (2.67) em (2.63), deduzimos (2.62). \square

Lema 2.14. *O funcional Ψ_3^n dado por*

$$\begin{aligned}
\Psi_3^n(t) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} \mu_1(\tau) \chi_{P_{1,\kappa}}(\tau) d\tau \right) \|\nabla(\eta^t)^n(s) - \nabla u^n(t)\|^2 ds \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} \mu_2(\tau) \chi_{P_{2,\kappa}}(\tau) d\tau \right) \|\nabla(\zeta^t)^n(s) - \nabla v^n(t)\|^2 ds,
\end{aligned}$$

satisfaz a igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Psi_3^n(t) &= 2 \left[\int_{P_{1,\kappa}} \mu_1(s) (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds + \int_{P_{2,\kappa}} \mu_2(s) (\nabla(\zeta^t)^n(s), \nabla v^n(t)) ds \right] \\
&\quad - [\mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)]. \tag{2.68}
\end{aligned}$$

Demonstração. De fato, utilizando a Regra de Leibniz para integrais, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Psi_3^n(t) &= 2 \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} \mu_1(\tau) \chi_{P_{1,\kappa}}(\tau) d\tau \right) \frac{d}{ds} (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds \\
&\quad + 2 \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} \mu_2(\tau) \chi_{P_{2,\kappa}}(\tau) d\tau \right) \frac{d}{ds} (\nabla(\zeta^t)^n(s), \nabla v^n(t)) ds \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} \mu_1(\tau) \chi_{P_{1,\kappa}}(\tau) d\tau \right) \frac{d}{ds} \|\nabla(\eta^t)^n(s)\|^2 ds \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} \mu_2(\tau) \chi_{P_{2,\kappa}}(\tau) d\tau \right) \frac{d}{ds} \|\nabla(\zeta^t)^n(s)\|^2 ds. \tag{2.69}
\end{aligned}$$

A fim de obter (2.68), vamos analisar apenas o primeiro e o terceiro termo em (2.69), pois os demais seguem de modo análogo. Para isto, utilizamos de integração por partes, (2.36) e o fato de que $(\eta^t)^n \in D(\mathbb{L}_1)$ e $(\zeta^t)^n \in D(\mathbb{L}_2)$, obtemos que

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} \mu_1(\tau) \chi_{P_{1,\kappa}}(\tau) d\tau \right) \frac{d}{ds} (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds = \int_{P_{1,\kappa}} \mu_1(\tau) (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds, \tag{2.70}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} \mu_1(\tau) \chi_{P_{1,\kappa}}(\tau) d\tau \right) \frac{d}{ds} \|\nabla(\eta^t)^n(s)\|^2 ds = \mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n). \tag{2.71}$$

Combinando (2.69), (2.70) e (2.71), temos o desejado em (2.68). \square

Lema 2.15. *Existem $\kappa > 0$ e $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ tais que o funcional*

$$\Psi_4^n(t) := R \|S(t)U_0^n\|_{\mathfrak{H}}^2 + \varepsilon^3(1 - 2\varepsilon)\Psi_1^n(t) + \varepsilon^3\Psi_2^n(t) + \frac{\varepsilon^2}{4}\Psi_3^n(t),$$

satisfaz $\|S(t)U_0^n\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \Psi_4^n(t)$ para todo $R > 0$ suficientemente grande, e

$$\frac{d}{dt}\Psi_4^n(t) + \beta_0\|S(t)U_0^n\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq 0, \quad t > 0, \quad (2.72)$$

para algum $\beta_0 > 0$.

Demonstração. Coletando (2.17), (2.60), (2.62) e (2.68), multiplicando cada um pelo seu respectivo peso e somando os resultados, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi_4^n(t) &\leq -\varepsilon^4 [\|u_t^n(t)\|^2 + \|v_t^n(t)\|^2] - \varepsilon^3(1 - 2\varepsilon)\alpha\|u^n(t) - v^n(t)\|^2 \\ &\quad - \varepsilon^3 \left[\omega_1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3\ell_1 + 4}{2\ell_1} \right) \right] \|\nabla u^n(t)\|^2 - \varepsilon^3 \left[\omega_2 - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3\ell_2 + 4}{2\ell_2} \right) \right] \|\nabla v^n(t)\|^2 \\ &\quad - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} - 3\varepsilon \right) \mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} - 3\varepsilon \right) \mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_1}{\ell_1} + \frac{5}{2} \right) \int_{P_{1,\kappa}} \mu_1(s) (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_2}{\ell_2} + \frac{5}{2} \right) \int_{P_{2,\kappa}} \mu_2(s) (\nabla(\zeta^t)^n(s), \nabla v^n(t)) ds \\ &\quad + \left(2R - \frac{\mu_1(s_1^*)\varepsilon^2}{2C_P\ell_1^2} \right) \int_0^{+\infty} \mu_1'(s) \|\nabla(\eta^t)^n(s)\|^2 ds \\ &\quad + \left(2R - \frac{\mu_2(s_2^*)\varepsilon^2}{2C_P\ell_2^2} \right) \int_0^{+\infty} \mu_2'(s) \|\nabla(\zeta^t)^n(s)\|^2 ds \\ &\quad + \alpha\varepsilon^3 \left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mu_1^*(s)}{\ell_1} (\eta^t)^n(s) - \frac{\mu_2^*(s)}{\ell_2} (\zeta^t)^n(s), (u^n - v^n)(t) \right) ds \right] \\ &\quad + 4\varepsilon^2 [\mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Agora, usando (2.41), temos

$$\begin{cases} \left(\frac{\omega_1}{\ell_1} + \frac{5}{2} \right) \int_{P_{1,\kappa}} \mu_1(s) (\nabla(\eta^t)^n(s), \nabla u^n(t)) ds \leq \frac{1}{16} \mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + C\hat{\mu}_1(P_{1,\kappa})\|\nabla u^n(t)\|^2 \\ \left(\frac{\omega_2}{\ell_2} + \frac{5}{2} \right) \int_{P_{2,\kappa}} \mu_2(s) (\nabla(\zeta^t)^n(s), \nabla v^n(t)) ds \leq \frac{1}{16} \mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n) + C\hat{\mu}_2(P_{2,\kappa})\|\nabla v^n(t)\|^2 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} &\alpha \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mu_1^*(s)}{\ell_1} (\eta^t)^n(s) - \frac{\mu_2^*(s)}{\ell_2} (\zeta^t)^n(s), (u^n - v^n)(t) \right) ds \\ &\quad \leq C\alpha [\hat{\mu}_1(P_{1,\kappa}) + \hat{\mu}_2(P_{2,\kappa}) + \varepsilon] \|u^n(t) - v^n(t)\|^2 + \frac{1}{16} [\mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)] \\ &\quad \quad + \frac{1}{4\varepsilon} [\mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)]. \end{aligned}$$

Então, substituindo as últimas estimativas em (2.73), concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Psi_4^n(t) &\leq -\varepsilon^4 [\|u_t^n(t)\|^2 + \|v_t^n(t)\|^2] \\
&\quad -\varepsilon^3 \alpha [1 - (2 + C)\varepsilon - C(\hat{\mu}_1(P_{1,\kappa}) + \hat{\mu}_2(P_{2,\kappa}))] \|u^n(t) - v^n(t)\|^2 \\
&\quad -\varepsilon^3 \left[\omega_1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3\ell_1 + 4}{2\ell_1} \right) - \frac{C}{\varepsilon} \hat{\mu}_1(P_{1,\kappa}) \right] \|\nabla u^n(t)\|^2 \\
&\quad -\varepsilon^3 \left[\omega_2 - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3\ell_2 + 4}{2\ell_2} \right) - \frac{C}{\varepsilon} \hat{\mu}_2(P_{2,\kappa}) \right] \|\nabla v^n(t)\|^2 \\
&\quad -\varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - 3\varepsilon \right) \mathcal{P}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - 3\varepsilon \right) \mathcal{P}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n) \\
&\quad + \left(2R - \frac{\mu_1(s_1^*)\varepsilon^2}{2C_P \ell_1^2} \right) \int_0^{+\infty} \mu_1'(s) \|\nabla(\eta^t)^n(s)\|^2 ds \\
&\quad + \left(2R - \frac{\mu_2(s_2^*)\varepsilon^2}{2C_P \ell_2^2} \right) \int_0^{+\infty} \mu_2'(s) \|\nabla(\zeta^t)^n(s)\|^2 ds \\
&\quad + 5\varepsilon^2 [\mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)].
\end{aligned}$$

Este é o momento preciso em que usamos (2.58). De fato, com essa condição, os conjuntos de achatamento \mathcal{F}_{μ_1} e \mathcal{F}_{μ_2} tem medida de probabilidade nula e, conseqüentemente,

$$\mathcal{R}_{\mu_i} = \hat{\mu}_i(\mathcal{F}_{\mu_i}) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \hat{\mu}_i(P_{i,\kappa}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\kappa = \kappa(\varepsilon) > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que

$$\hat{\mu}_i(P_{i,\kappa}) < \varepsilon^2, \quad i = 1, 2. \quad (2.74)$$

Agora, procederemos como segue:

- Primeiro, escolhemos $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2})$ suficientemente pequeno, a saber

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{1}{2 + 3C}, \frac{\omega_1^2}{\left[\left(\frac{3\ell_1 + 4}{2\ell_1} \right) + C \right]^2}, \frac{\omega_2^2}{\left[\left(\frac{3\ell_2 + 4}{2\ell_2} \right) + C \right]^2}, \frac{1}{24} \right\}.$$

- Para esse ε_0 , escolhemos $s_i^* > 0$, $i = 1, 2$, satisfazendo (2.42) e $\kappa > 0$ satisfazendo (2.74).

Com essas escolhas, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Psi_4^n(t) &\leq -\beta_0 \|S(t)U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2 + (2R - C) \int_0^{+\infty} [\mu_1'(s) \|\nabla(\eta^t)^n(s)\|^2 + \mu_2'(s) \|\nabla(\zeta^t)^n(s)\|^2] ds \\
&\quad + C [\mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) + \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n)], \quad (2.75)
\end{aligned}$$

para algum $\beta_0 > 0$.

Note que, de (2.37) temos

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{1,\kappa}((\eta^t)^n) \leq -\frac{1}{\kappa} \int_0^{+\infty} \mu'_1(s) \|\nabla(\eta^t)^n(s)\|^2 ds \\ \mathcal{N}_{2,\kappa}((\zeta^t)^n) \leq -\frac{1}{\kappa} \int_0^{+\infty} \mu'_2(s) \|\nabla(\zeta^t)^n(s)\|^2 ds \end{cases}$$

donde, retornando a (2.75), concluimos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \Psi_4^n(t) + \beta_0 \|S(t)U_0^n\|_{\mathfrak{H}}^2 \\ & \leq \left[2R - C \left(\frac{\kappa+1}{\kappa} \right) \right] \int_0^{+\infty} [\mu'_1(s) \|\nabla(\eta^t)^n(s)\|^2 + \mu'_2(s) \|\nabla(\zeta^t)^n(s)\|^2] ds. \end{aligned}$$

Tomando $R > \frac{C}{2} \left(\frac{1+\kappa}{\kappa} \right) > 0$, concluimos que (2.72) é válida.

Por fim, a desigualdade $\|S(t)U_0^n\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \Psi_4^n(t)$ segue da estimativa (obtida por meio de uma sequência de contas usuais)

$$|\Psi_1^n(t)| + |\Psi_2^n(t)| \leq C \|S(t)U_0^n\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad t \geq 0, \quad (2.76)$$

combinada ao fato de $\Psi_3^n \geq 0$ e da escolha de $R > 0$ suficientemente grande, concluindo assim a prova do lema. \square

Lema 2.16. *O funcional*

$$\Psi_5^n(t) := \int_0^t [G_1(t-s) \|\nabla u^n(s)\|^2 + G_2(t-s) \|\nabla v^n(s)\|^2] ds,$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt} \Psi_5^n(t) + \min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} \Psi_5^n(t) \leq \nu_0 \|S(t)U_0^n\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad t \geq 0,$$

para algum $\nu_0 > 0$.

Demonstração. Fazendo a derivada de Ψ_5^n através da aplicação da Regra de Leibniz para integrais, utilizando a desigualdade (2.55) e o fato de $\gamma_i(t)$ ser decrescente para $i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_5^n(t) &= \int_0^t [G'_1(t-s) \|\nabla u^n(s)\|^2 + G'_2(t-s) \|\nabla v^n(s)\|^2] ds \\ &\quad + G_1(0) \|\nabla u^n(t)\|^2 + G_2(0) \|\nabla v^n(t)\|^2 \\ &\leq - \int_0^t [\gamma_1(t-s) G_1(t-s) \|\nabla u^n(s)\|^2 + \gamma_2(t-s) G_2(t-s) \|\nabla v^n(s)\|^2] ds \\ &\quad + \left(\frac{G_1(0)}{\omega_1} + \frac{G_2(0)}{\omega_2} \right) \|S(t)U_0^n(t)\|_{\mathfrak{H}}^2 \\ &\leq - \min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} \Psi_5^n(t) + \nu_0 \|S(t)U_0^n(t)\|_{\mathfrak{H}}^2, \end{aligned}$$

em que $\nu_0 := \left(\frac{G_1(0)}{\omega_1} + \frac{G_2(0)}{\omega_2} \right) > 0$. \square

Lema 2.17. *Para todo $t_0 > 0$, there existe $\delta = \delta(t_0) > 0$ tal que o funcional*

$$\Psi_6^n(t) := \Psi_4^n(t) + \frac{\beta_0}{2\nu_0} \Psi_5^n(t).$$

satisfaz

$$\|S(t)U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \Psi_6^n(t) \leq C [\|S(t)U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2 + \Psi_5^n(t) + G_1(t) + G_2(t)], \quad t \geq 0 \quad (2.77)$$

e

$$\frac{d}{dt} \Psi_6^n(t) + \delta \min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} \Psi_6^n(t) \leq \min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} (G_1(t) + G_2(t)), \quad t \geq t_0, \quad (2.78)$$

para todo n suficientemente grande dependendo somente de $\|U_0\|_{\mathcal{H}}$.

Demonstração. Do Lema 2.15 e usando que $\Psi_5^n \geq 0$, temos $\|S(t)U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \Psi_6^n(t)$, para todo $t \geq 0$. Agora, de (2.45) existe $M = M(\|U_0\|_{\mathcal{H}}) > 0$ tal que $\|U_0^n\|_{\mathcal{H}} \leq M$. E ainda, utilizando (2.57) e as expressões (2.46) e (2.47), obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_3^n(t) &\leq \int_0^t [G_1(s)\|\nabla u^n(t-s)\|^2 + G_2(s)\|\nabla v^n(t-s)\|^2] ds \\ &\quad + \|\nabla u_0^n\|^2 \int_t^{t+\frac{1}{n}} G_1(s)[1-\psi_n(s-t)] ds + \|\nabla v_0^n\|^2 \int_t^{t+\frac{1}{n}} G_2(s)[1-\psi_n(s-t)] ds \\ &\leq \Psi_5^n(t) + \frac{M^2}{n} \left[\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right] (G_1(t) + G_2(t)). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Então, tomando $n > M^2 \left[\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right]$ e combinando (2.76) com (2.79), obtemos a última desigualdade de (2.77).

Por outro lado, fazendo a derivada de $\Psi_6^n(t)$ e aplicando o Lema 2.15 e o Lema 2.16, temos

$$\frac{d}{dt} \Psi_6^n(t) + \frac{\beta_0}{2} \|S(t)U_0^n(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\beta_0}{2\nu_0} \min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} \Psi_5^n(t) \leq 0. \quad (2.80)$$

Adicionando $\min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} (G_1(t) + G_2(t))$ em ambos os lados de (2.80), chegamos que

$$\|S(t)U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \frac{\min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\}}{\min\{\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)\}} \|S(t_0)U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \geq t_0 > 0,$$

e levando em consideração (2.77), concluímos que (2.78) é válida, para algum $\delta = \delta(t_0) > 0$. \square

Lema 2.18. *Para todo $t_0 > 0$, existe $\rho = \rho(t_0) > 0$ tal que o funcional*

$$\Psi_7^n(t) := \Psi_6^n(t) + 2(G_1(t) + G_2(t))$$

satisfaz

$$\Psi_7^n(t) \leq \Psi_7^n(t_0) e^{-\rho \int_{t_0}^t \min\{\gamma_1(s), \gamma_2(s)\} ds}, \quad t \geq t_0, \quad (2.81)$$

para todo n suficientemente grande dependendo somente de $\|U_0\|_{\mathcal{H}}$.

Demonstração. Fazendo a derivada de $\Psi_7^n(t)$ e usando (2.55) e (2.78), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_7^n(t) &\leq -\min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} [\delta \Psi_6^n(t) + (G_1(t) + G_2(t))] \\ &\leq -\rho \min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} \Psi_7^n(t), \end{aligned} \quad (2.82)$$

para algum $\rho = \rho(t_0) > 0$ e para todo $t \geq t_0$. Assim, multiplicando (2.82) por $e^{\rho \int_{t_0}^t \min\{\gamma_1(s), \gamma_2(s)\} ds}$ e integrando o resultado em (t_0, t) , $t \geq t_0$, concluímos que (2.81) é válida, como queríamos. \square

Prova do Teorema 2.11. De (2.77), levando em conta que $S(t)$ é um semigrupo de contrações e que G é decrescente, temos

$$\|S(t)U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \Psi_7^n(t) \leq Q(t) := C [M^2 \nu_0 t + (M^2 + \nu_0)], \quad (2.83)$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, dependendo somente de $\|U_0\|_{\mathcal{H}}$. Então, combinando (2.81) e (2.83), deduzimos que

$$\|S(t)U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq Q(t_0) e^{-\rho \int_{t_0}^t \min\{\gamma_1(s), \gamma_2(s)\} ds}, \quad t \geq t_0,$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, dependendo somente de $\|U_0\|_{\mathcal{H}}$. Assim, usando a convergência (2.45) e observando novamente que $S(t)$ é um semigrupo de contrações, podemos fazer $n \rightarrow +\infty$ para concluir que (2.59) é válida, completando a prova do teorema. \square

Observação 2.19. Podemos observar que nosso resultado permite uma grande classe de funções relaxamento e, no caso em que ocorre (2.56), (2.59) nos dá uma taxa de decaimento mais geral da qual as estimativas de decaimento exponencial e polinomial usuais são apenas casos especiais. De fato,

- Se $\mu_1 = \mu_2 = ae^{-b(1+t)^p}$, $0 < p \leq 1$, então, para $i = 1, 2$, $\mu_i'(t) = -\tilde{\gamma}(t)\mu_i(t)$, em que $\tilde{\gamma} = bp(1+t)^{p-1}$. Para constantes positivas adequadamente escolhidas a e b , μ_i satisfaz as hipóteses 2.1 e 2.10 e a taxa (2.59) é dada por

$$E(t) \leq C e^{-\tilde{\omega}b(1+t)^p}.$$

- Se $\mu_1(t) = \frac{a_1}{(1+t)^q}$, $q > 1$, e $\mu_2(t) = a_2 e^{-b(1+t)^p}$, $0 < p \leq 1$, então

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{q\tilde{\omega}}}.$$

Para mais exemplos de outras estimativas de decaimentos que podem ser obtidas a partir de (2.59), ver [63].

Estabilidade uniforme para um sistema de Klein-Gordon com amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt

Este capítulo é destinado ao estudo do sistema Klein-Gordon colocado em um meio não-homogêneo e sujeito a um amortecimento localmente distribuído do tipo Kelvin-Voigt, a saber

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + v^2u + \gamma_1(x)u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + u^2v + \gamma_2(x)v_t - \operatorname{div}(b(x)\nabla v_t) = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Aqui, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \leq 2$, é um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$, ρ é uma função densidade, a matriz $K(x)$ está associada ao meio não-homogêneo e as funções γ_1 , γ_2 , a e b são responsáveis por localizar as dissipações friccionais e viscoelásticas, respectivamente.

Neste capítulo, sempre que conveniente, será omitida a dependência da variável x . Além disso, todas as constantes positivas, salvo menção contrária, serão denotadas por C .

3.1 Hipóteses, Notações e Boa Colocação

Ao longo dessa seção vamos assumir a seguinte hipótese:

Hipótese 3.1. *Sejam $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$, $k_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq d$ funções de classe $C^\infty(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha_1 |\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta_1 |\xi|^2, \quad (3.2)$$

onde $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ são constantes positivas e $K(x) = (k_{ij}(x))_{i,j}$ é uma matriz simétrica positiva definida.

Observação 3.2. *Considerando (3.2), temos que as expressões*

$$\int_{\Omega} \nabla u(x)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x) \, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \rho(x)[uv](x) \, dx, \quad u, v \in L^2(\Omega) \quad (3.3)$$

definem produtos internos em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Além disso, estes produtos

internos induzem normas equivalentes as usuais nestes espaços.

A partir da Observação 3.2, neste capítulo, vamos considerar os espaços $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ munidos com os produtos internos dados em (3.3). Consideremos também

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

o espaço de fase munido do produto interno

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} &:= \int_{\Omega} \nabla u_1(x)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla u_2(x) \, dx + \int_{\Omega} \nabla v_1(x)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v_2(x) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho(x)[w_1 w_2](x) \, dx + \int_{\Omega} \rho(x)[z_1 z_2](x) \, dx. \end{aligned}$$

cuja norma associada é dada por:

$$\begin{aligned} \|U_1\|_{\mathcal{H}}^2 &:= \int_{\Omega} \nabla u_1(x)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla u_1(x) \, dx + \int_{\Omega} \nabla v_1(x)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v_1(x) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho(x)|w_1(x)|^2 \, dx + \int_{\Omega} \rho(x)|z_1(x)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

em que $U = (u_1, v_1, w_1, z_1)$, $V = (u_2, v_2, w_2, z_2) \in \mathcal{H}$.

3.1.1 O problema de Cauchy associado

Sejam $w = u_t$, $z = v_t$ e $U = (u, v, w, z)$. Desta forma, podemos reescrever (3.1) como o seguinte problema de Cauchy equivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{F}(U(t)) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

em que $U_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1)$, o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} w \\ z \\ \frac{1}{\rho(\cdot)} \operatorname{div}(K(\cdot)\nabla u + a(\cdot)\nabla w) - \frac{1}{\rho(\cdot)}\gamma_1(\cdot)w \\ \frac{1}{\rho(\cdot)} \operatorname{div}(K(\cdot)\nabla v + b(\cdot)\nabla z) - \frac{1}{\rho(\cdot)}\gamma_2(\cdot)z \end{pmatrix}$$

e o operador não linear $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é definido por

$$\mathcal{F}(u, v, w, z) = \left(0, 0, -\frac{1}{\rho(\cdot)}v^2u, -\frac{1}{\rho(\cdot)}u^2v \right). \quad (3.5)$$

O domínio $D(\mathcal{A})$ é formado por todas as funções

$$(u, v, w, z) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

tais que

$$\operatorname{div}(K(\cdot)\nabla u), \operatorname{div}(a(\cdot)\nabla w), \operatorname{div}(K(\cdot)\nabla v), \operatorname{div}(b(\cdot)\nabla z) \in L^2(\Omega)$$

Agora, estamos em condições de apresentar o principal resultado desta seção que prova que o problema (3.4) e, conseqüentemente, o problema (3.1) está bem posto.

Teorema 3.3 (Boa colocação). *Suponhamos que a hipótese 3.1 seja satisfeita e que as funções $a(\cdot), b(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ e $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot) \in C^0(\bar{\Omega})$ são não-negativas.*

(i) *Se $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (3.4) possui um única solução generalizada na classe $U \in C([0, +\infty), \mathcal{H})$ satisfazendo*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-\tau)\mathcal{F}(U(\tau))d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) *Se, além disso, $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então a solução generalizada U do problema (3.4) é clássica, com*

$$U \in C([0, +\infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty), \mathcal{H}).$$

(iii) *É válida a seguinte identidade de energia:*

$$\begin{aligned} E_{u,v}(t_2) - E_{u,v}(t_1) &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [a(x)|\nabla u_t(x,t)|^2 + \gamma_1(x)|u_t(x,t)|^2] dx dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [b(x)|\nabla v_t(x,t)|^2 + \gamma_2(x)|v_t(x,t)|^2] dx dt, \end{aligned} \quad (3.6)$$

para todo $0 \leq t_1 \leq t_2$.

Demonstração. A demonstração será feita em etapas como segue:

\mathcal{A} é dissipativo: Considere $U = (u, v, w, z) \in D(\mathcal{A})$. Então, utilizando o Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} (\nabla w(x))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla z(x))^T \cdot K(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)\nabla u(x) - a(x)\nabla w(x)) \cdot w(x) dx - \int_{\Omega} \gamma_1(x) \cdot w^2(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)\nabla v(x) - b(x)\nabla z(x)) \cdot z(x) dx - \int_{\Omega} \gamma_2(x) \cdot z^2(x) dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla w(x))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla z(x))^T \cdot K(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) \cdot w(x) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)\nabla v(x)) \cdot z(x) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (a(x)|\nabla w(x)|^2 + b(x)|\nabla z(x)|^2) dx - \int_{\Omega} (\gamma_1(x)|w(x)|^2 + \gamma_2(x)|z(x)|^2) dx \\ &= - \int_{\Omega} (a(x)|\nabla w(x)|^2 + b(x)|\nabla z(x)|^2) dx - \int_{\Omega} (\gamma_1(x)|w(x)|^2 + \gamma_2(x)|z(x)|^2) dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Segue daí que \mathcal{A} é dissipativo.

$\text{Im}(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$: Com efeito, para qualquer $(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathcal{H}$ exibiremos $U = (u, v, w, z) \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(I - \mathcal{A})(u, v, w, z) = (m_1, m_2, m_3, m_4),$$

ou seja,

$$\begin{cases} u - w = m_1 \\ v - z = m_2 \\ w - \frac{1}{\rho(x)} \text{div}(K(x)\nabla u + a(x)\nabla w) + \frac{1}{\rho(x)}\gamma_1(x)w = m_3 \\ z - \frac{1}{\rho(x)} \text{div}(K(x)\nabla v + b(x)\nabla z) + \frac{1}{\rho(x)}\gamma_2(x)z = m_4. \end{cases} \quad (3.7)$$

De (3.7)₁ e (3.7)₂, temos

$$\begin{cases} w = u - m_1, \\ z = v - m_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Substituindo as equações (3.8) em (3.7)₃ e (3.7)₄ respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} \rho(x)u - \text{div}(K(x)\nabla u + a(x)\nabla u) + \gamma_1(x)u = g_1, \\ \rho(x)v - \text{div}(K(x)\nabla v + b(x)\nabla v) + \gamma_2(x)v = g_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Vamos agora resolver o sistema (3.9) em que

$$\begin{cases} g_1 := -\text{div}(a(\cdot)\nabla m_1) + \gamma_1(\cdot)m_1 + \rho(\cdot)(m_1 + m_3) \in H^{-1}(\Omega), \\ g_2 := -\text{div}(b(\cdot)\nabla m_2) + \gamma_2(\cdot)m_2 + \rho(\cdot)(m_2 + m_4) \in H^{-1}(\Omega). \end{cases}$$

Para isto, utilizaremos o Teorema de Lax-Milgram. De fato, definimos a forma bilinear

$$\zeta : [H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)] \times [H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)] \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\begin{aligned} \zeta((u, v), (\varphi, \psi)) &= \int_{\Omega} [\rho(x) + \gamma_1(x)]u(x)\varphi(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla u(x))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nabla u(x))^{\top} a(x)\nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} [\rho(x) + \gamma_2(x)]v(x)\psi(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nabla v(x))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla \psi(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla v(x))^{\top} b(x)\nabla \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Mostraremos, agora, que $\zeta(\cdot, \cdot)$ é contínua e coerciva.

• ζ é contínua. De fato, da hipótese 3.1, sabemos que $\gamma_1, \gamma_2 \in C_0(\bar{\Omega})$. Assim, existem constantes $M_1, M_2 > 0$ tais que $\gamma_1(x) \leq M_1$ e $\gamma_2(x) \leq M_2$, para todo $x \in \bar{\Omega}$. Além disso, levando em consideração a equivalência de normas (observada no início da seção) e a desigualdade de

Poincaré, temos que

$$\begin{aligned}
|\zeta((u, v), (\varphi, \psi))| &\leq \left| \int_{\Omega} [\rho(x) + \gamma_1(x)] u(x) \varphi(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} (\nabla u(x))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega} (\nabla u(x))^{\top} a(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} [\rho(x) + \gamma_2(x)] v(x) \psi(x) dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega} (\nabla v(x))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla \psi(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} (\nabla v(x))^{\top} b(x) \cdot \nabla \psi(x) dx \right| \\
&\leq C (\|\nabla u\| \|\nabla \varphi\| + \|\nabla u\| \|\nabla \varphi\| + \|\nabla u\| \|\nabla \varphi\|) \\
&\quad + C (\|\nabla v\| \|\nabla \psi\| + \|\nabla v\| \|\nabla \psi\| + \|\nabla v\| \|\nabla \psi\|) \\
&\leq C (\|\nabla u\| + \|\nabla v\|) (\|\nabla \varphi\| + \|\nabla \psi\|),
\end{aligned}$$

o que prova a continuidade desejada.

• ζ é coerciva: Com efeito, levando em consideração a equivalência de normas, temos

$$\begin{aligned}
\zeta((u, v), (u, v)) &= \int_{\Omega} [\rho(x) + \gamma_1(x)] |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} (\nabla u(x))^{\top} a(x) \nabla u(x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} [\rho(x) + \gamma_2(x)] |v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} (\nabla v(x))^{\top} b(x) \nabla v(x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (\nabla u(x))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla u(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla v(x))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla v(x) dx \\
&\geq C (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2).
\end{aligned}$$

o que prova a coercividade. Sendo $\zeta(\cdot, \cdot)$ bilinear, contínua e coerciva, segue do Teorema de Lax-Milgram que existe um único $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\zeta((u, v), (\varphi, \psi)) = \langle g_1, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle g_2, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad (3.10)$$

para quaisquer $(\varphi, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Motivados por (3.8), definimos

$$\begin{cases} w = u - m_1 \in H_0^1(\Omega) \\ z = v - m_2 \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.11)$$

e afirmamos que $U = (u, v, w, z) \in D(\mathcal{A})$ e suas componentes satisfazem (3.7). De fato, consideremos $\varphi = 0$ e $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (3.10), obtemos

$$\int_{\Omega} [(\rho(x) + \gamma_2(x)) v(x)] \psi(x) dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x) \nabla v(x) + b(x) \nabla v(x)) \psi(x) dx = \int_{\Omega} g_2(x) \psi(x) dx,$$

para qualquer $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Donde segue que

$$\langle (\rho(\cdot) + \gamma_2(\cdot))v - \operatorname{div}(K(\cdot) \nabla v + b(\cdot) \nabla v), \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle g_2, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)},$$

para qualquer $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, isto é,

$$(\rho(\cdot) + \gamma_2(\cdot))v - \operatorname{div}(K(\cdot) \nabla v + b(\cdot) \nabla v) = g_2 \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observando que ambos os lados da última igualdade estão em $H^{-1}(\Omega)$, temos que

$$(\rho(\cdot) + \gamma_2(\cdot))v - \operatorname{div}(K(\cdot)\nabla v + b(\cdot)\nabla v) = g_2 \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

satisfazendo (3.9)₂. Além disso, utilizando (3.11)₂, temos

$$-\operatorname{div}(K(\cdot)\nabla v + b(\cdot)\nabla z) = \gamma_2(\cdot)m_2 + \rho(\cdot)(m_2 + m_4) - (\rho(\cdot) + \gamma_2(\cdot))v \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Como o lado direito da igualdade acima está em $L^2(\Omega)$ temos que a condição $\operatorname{div}(K(\cdot)\nabla v + b(\cdot)\nabla z) \in L^2(\Omega)$ no domínio $D(\mathcal{A})$ está satisfeita, como queríamos.

Procedendo de maneira inteiramente análoga (tomando $\psi=0$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$), obtemos que a condição $\operatorname{div}(K(\cdot)\nabla u + a(\cdot)\nabla w) \in L^2(\Omega)$, bem como (3.9)₁ são satisfeitas. Mais ainda, de (3.11) temos que w e $z \in H_0^1(\Omega)$.

Note que, utilizando a definição de g_1 e g_2 e (3.11), segue de (3.9) que estão satisfeitas as equações (3.7)₃ e (3.7)₄. Além disso, também de (3.11) temos satisfeitas (3.7)₁ e (3.7)₂.

Assim, garantimos a existência de $U = (u, v, w, z) \in D(\mathcal{A})$ que satisfaz as equações em (3.7), garantindo a sobrejetividade do operador $I - \mathcal{A}$, como queríamos.

Tendo em mãos que o operador \mathcal{A} é dissipativo, que $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor e que $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} (ver Proposição 1.33), segue do Teorema de Lumer-Phillips que \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ em \mathcal{H} .

Além disso, o operador não linear $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado em (3.5) é localmente Lipschitz. De fato, dado $R > 0$ tal que $\|U_i\|_{\mathcal{H}} \leq R$, onde $U_i = (u_i, v_i, w_i, z_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(U_1) - \mathcal{F}(U_2)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\| \left(0, 0, -\frac{1}{\rho}(v_1^2 u_1 - v_2^2 u_2), -\frac{1}{\rho}(u_1^2 v_1 - u_2^2 v_2) \right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(x)} |[v_2^2 u_2 - v_1^2 u_1](x)|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(x)} |[u_2^2 v_2 - u_1^2 v_1](x)|^2 dx \\ &= \left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}(v_2^2 u_2 - v_1^2 u_2 + v_1^2 u_2 - v_1^2 u_1) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}(u_2^2 v_2 - u_1^2 v_2 + u_1^2 v_2 - u_1^2 v_1) \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}((v_2^2 - v_1^2)u_2 + v_1^2(u_2 - u_1)) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}((u_2^2 - u_1^2)v_2 + u_1^2(v_2 - v_1)) \right\|^2 \\ &\leq C \left(\left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}(v_2^2 - v_1^2)u_2 \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}(u_2^2 - u_1^2)v_2 \right\|^2 \right) \\ &\quad + C \left(\left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}v_1^2(u_2 - u_1) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}u_1^2(v_2 - v_1) \right\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vamos mostrar que cada termo do lado direito de (3.12) é limitado por uma constante positiva (que depende de R) multiplicada por $\|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}$. Para isso, basta analisar o primeiro e o último termo pois a estimativa para os demais é realizada de forma análoga. De fato, utilizando

a hipótese sobre ρ , a desigualdade de Hölder com $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}(v_2^2 - v_1^2)u_2 \right\|^2 &= \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(x)} |v_2 - v_1(x)|^2 |v_2 + v_1(x)|^2 |u_2(x)|^2 dx \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} |v_2 - v_1(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Omega} |v_2 + v_1(x)|^3 |u_2(x)|^3 dx \right)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} |v_2 - v_1(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(\int_{\Omega} |u_2(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v_2 + v_1(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} \\
&\leq C \|\nabla u_2\|^2 (\|\nabla v_2\|^2 + \|\nabla v_1\|^2) \|\nabla(v_2 - v_1)\|^2 \\
&\leq C(R) \|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} u_1^2 (v_2 - v_1) \right\|^2 &= \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(x)} |u_1(x)|^4 |v_2 - v_1(x)|^2 dx \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} |u_1(x)|^6 dx \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\Omega} |v_2 - v_1(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq C \|\nabla u_1\|^4 \|\nabla(v_2 - v_1)\|^2 \\
&\leq C(R) \|\nabla(v_2 - v_1)\|^2 \\
&\leq C(R) \|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

De (3.12), (3.13) e (3.14) obtemos que

$$\|\mathcal{F}(U_1) - \mathcal{F}(U_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C(R) \|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}^2,$$

o que prova que \mathcal{F} é localmente Lipschitz.

Assim, temos garantida – pelos Teoremas 1.31 e 1.32 – a existência de um tempo maximal T_{\max} , tal que o problema (3.4) tem uma única solução generalizada $U \in C([0, T_{\max}); \mathcal{H})$ satisfazendo

$$U(t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}F(U(s)) ds, \quad \forall t \in [0, T_{\max}).$$

Em particular, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ então a solução generalizada é clássica e

$$U \in C([0, T_{\max}); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, T_{\max}); \mathcal{H}).$$

Além disso, tal $T_{\max} \in (0, +\infty]$ e goza da seguinte propriedade:

- (i) $T_{\max} = +\infty$, isto é, o problema admite uma solução global ou
- (ii) $T_{\max} < +\infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}^-} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty. \tag{3.15}$$

A fim de provar a existência global, é suficiente provar que (ii) não pode ocorrer. De fato, suponhamos o contrário, isto é, consideremos que: $T_{\max} < +\infty$, vale (3.15) e $U_0 \in D(\mathcal{A})$. Multiplicando (3.1)₁ por u_t e (3.1)₂ por v_t , integrando em Ω e adicionando os resultados, obtemos

$$\frac{d}{dt} E_{u,v}(t) = - \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t(x, t)|^2 dx - \int_{\Omega} b(x) |\nabla v_t(x, t)|^2 dx \leq 0, \quad (3.16)$$

em que

$$E_{u,v}(t) = \frac{1}{2} \|(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (uv)^2(x, t) dx. \quad (3.17)$$

Da hipótese 3.1 e (3.16), temos que $E_{(u,v)}(t)$ é não-crescente, e, conseqüentemente,

$$E_{u,v}(t) \leq E_{u,v}(0), \quad \forall t \in [0, T_{\max}). \quad (3.18)$$

De (3.17) e (3.18), temos

$$\frac{1}{2} \|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq E_{u,v}(t) \leq E_{u,v}(0), \quad \text{para todo } t \in [0, T_{\max}).$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}^-} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} < +\infty,$$

e, pelo Teorema 1.32, concluímos que $T_{\max} = +\infty$. Assim, fica provado os itens (i) e (ii).

Por fim, integrando (3.16) em (t_1, t_2) , obtemos

$$\begin{aligned} E_{u,v}(t_2) - E_{u,v}(t_1) &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [a(x) |\nabla u_t(x, t)|^2 + \gamma_1(x) |u_t(x, t)|^2] dx dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [b(x) |\nabla v_t(x, t)|^2 + \gamma_2(x) |v_t(x, t)|^2] dx dt, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t_1 \leq t_2$, o que prova (iii). Portanto, vale (i), (ii) e (iii) e o teorema fica demonstrado. \square

3.2 Decaimento Exponencial

Nesta seção vamos utilizar a seguinte variante da desigualdade de Poincaré:

$$\|u\|_{L^2(\omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\omega)}, \quad \forall u \in H^1(\omega), \quad (3.19)$$

para alguma constante $c > 0$. A demonstração desse resultado utiliza argumentos análogos aos mencionados em [28, Remark 4, pg. 129]

Além disso, vamos supor que as seguintes hipóteses sejam válidas:

Hipótese 3.4. *Sejam $A = \{x \in \Omega : a(x) = 0\}$ e $B = \{x \in \Omega : b(x) = 0\}$. Assumimos que A e B são subconjuntos compactos e conexos de Ω com fronteiras suaves e interiores não-vazios. As funções não-negativas $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$, responsáveis pelo efeito dissipativo localizado são consideradas*

contínuas e estritamente positivas em uma vizinhança de toda a fronteira $\partial\Omega$, ou seja, elas satisfazem as seguintes condições:

$$a(\cdot) \in L^\infty(\Omega) \cap C(\overline{O_1}) \text{ e } b(\cdot) \in L^\infty(\Omega) \cap C(\overline{O_2})$$

em que $O_1 = \Omega \setminus A$ e $O_2 = \Omega \setminus B$.

Vamos admitir que $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot) \in C^0(\overline{\Omega})$ são funções não-negativas satisfazendo as seguintes condições: dado $\varepsilon > 0$, considere $\gamma_1(x) > 0$ em $A_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, y) \leq \varepsilon, y \in \partial A\}$ com $\gamma_1(x) = c_0 > 0$ em $G_1 = \{x \in \Omega : d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}, y \in \partial A\}$ e $\gamma_2(x) > 0$ em $B_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, y) \leq \varepsilon, y \in \partial B\}$ com $\gamma_2(x) = c_1 > 0$ em $G_2 = \{x \in \Omega : d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}, y \in \partial B\}$.

Observação 3.5. Em virtude dessas suposições, existem constantes positivas a_0 e b_0 tais que $a(x) > a_0 > 0$ em $\omega_1 = \Omega \setminus (A + \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)})$ e $b(x) > b_0 > 0$ em $\omega_2 = \Omega \setminus (B + \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)})$. Vamos denotar por ω a interseção dos conjuntos ω_1 e ω_2 .

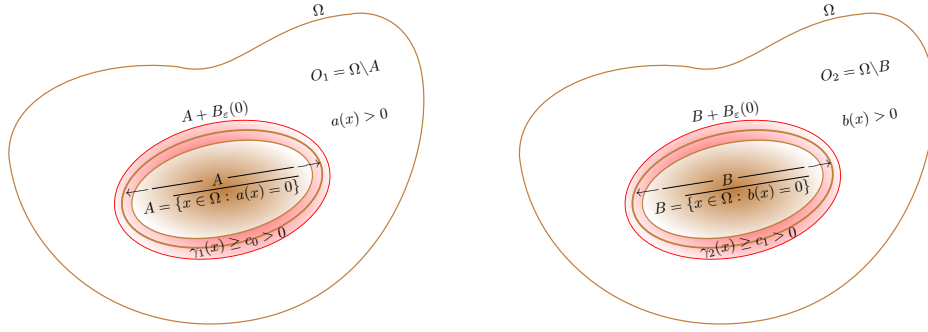


Figura 3.1: Os amortecimentos do tipo Kelvin-Voigt agindo em $O_1 = \Omega \setminus A$ e $O_2 = \Omega \setminus B$ enquanto os amortecimentos friccionais são efetivos em um colar de ∂A e ∂B .

Hipótese 3.6. ω controla Ω geometricamente, isto é, existe $T_0 > 0$, tal que toda geodésica da métrica $G(x)$, em que $G(x) = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$ viajando com velocidade constante igual a 1 e partindo de $t = 0$, encontra o conjunto ω em um tempo $t < T_0$.

Hipótese 3.7. Para todo $T > T_0$, a única solução $u, v \in C([0, T[; L^2(\Omega)) \cap C([0, T[; H^{-1}(\Omega))$ para o sistema

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + V_1(x, t)u = V_3(x, t)v & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + V_2(x, t)v = V_3(x, t)u & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \omega, \end{cases}$$

em que $V_1(x, t), V_2(x, t)$ e $V_3(x, t)$ são elementos de $L^\infty(0, T; L^{\frac{d+1}{2}}(\Omega))$, é a solução trivial $u = v = 0$.

Observação 3.8. Vamos ressaltar algumas consequências da hipótese 3.6:

- A hipótese 3.6 é chamada de Condição Geométrica de Controle (C.G.C.). Sabemos que a C.G.C. é uma condição necessária e suficiente para o controle e estabilização da equação da onda linear (ver [5], [9], [14], [15], [30], [71] e suas referências). Nessa direção, vale mencionar

o trabalho de Betelú, Gulliver e Littman [6] onde os autores discutem a questão das geodésicas fechadas no interior da região Ω . Tais geodésicas fechadas tornam o controle impossível já que as bicaracterísticas nunca encontram a região onde o controle é posto. Neste artigo ([6]) os autores mostram que, no caso bidimensional, a não existência de geodésicas fechadas no interior é também uma condição suficiente para o controle. Por essa razão e pelo fato de não termos nenhum controle sobre as geodésicas já que estamos em um meio não-homogêneo, neste capítulo, consideramos ω uma vizinhança de todo bordo $\partial\Omega$ e damos condições sobre a métrica $G = (K/\rho)^{-1}$ de forma que todas as geodésicas dessa métrica encontrem o conjunto ω em um tempo $t < T_0$.

• É importante observar que a Hipótese 3.6 não é trivialmente satisfeita para toda matriz $G = (K/\rho)^{-1}$. Por exemplo, o equador na esfera unitária S^2 é uma geodésica periódica e podemos considerar $\Omega \subset S^2$, que contém o equador, como um domínio em \mathbb{R}^2 munido da métrica Riemanniana G .

Observação 3.9. A Hipótese 3.7 é chamada de Princípio de Continuação Única. Conforme o trabalho [29], este tipo de condição é geralmente assumida em resultados que visam obter algum controle/estabilização. Na seção 1.12, apresentamos um resultado estabelecido por Cavalcanti et. al. [16] que visa garantir determinadas situações em que o Princípio de Continuação Única dado na Hipótese 3.7 é válido ao menos localmente.

Vale a pena mencionar que se $a(x) = b(x) = 0$, então os amortecimentos friccionais $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ não são fortes o suficiente para fornecerem um decaimento exponencial e uniforme da energia, uma vez que violam severamente a Condição Geométrica de Controle (C.G.C.), ver [5], [9].

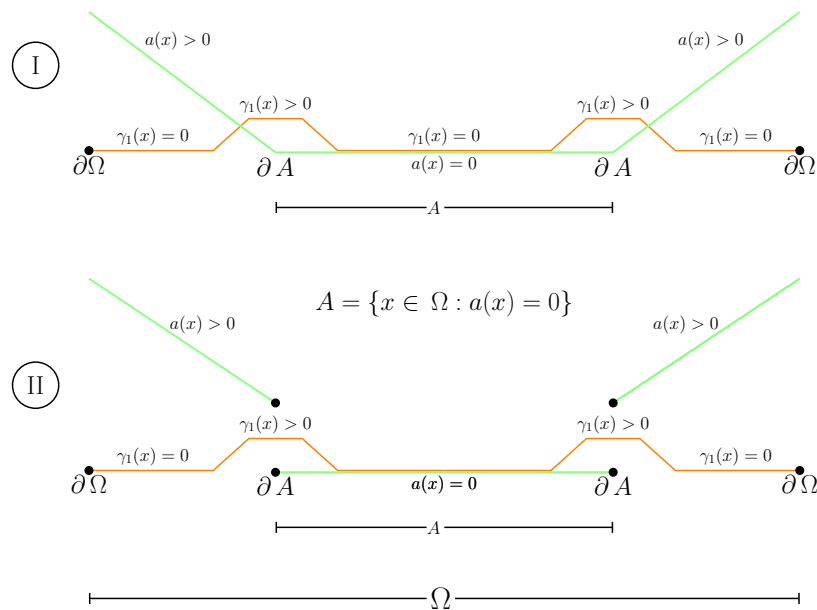


Figura 3.2: Exemplos de conjuntos unidimensionais de Ω em que o amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt e o amortecimento friccional são localizados.

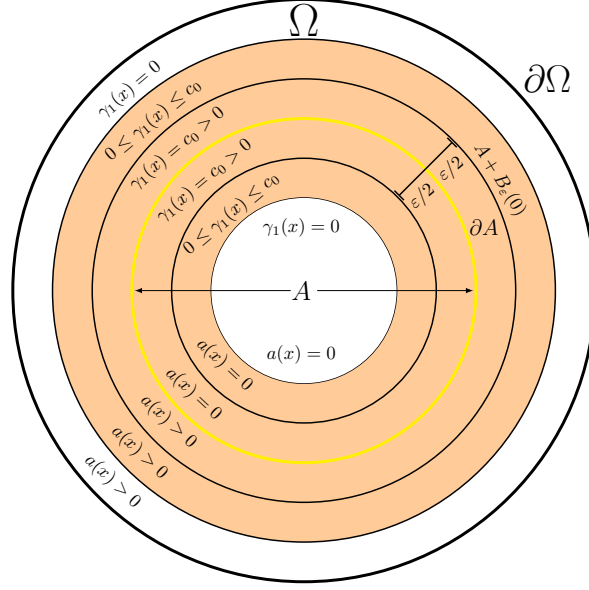


Figura 3.3: Geometrias admissíveis para a interação entre os amortecimentos do tipo Kelvin-Voigt e friccionais, respectivamente.

Nessa seção vamos provar o principal resultado deste capítulo, a saber

Teorema 3.10. *Suponha válidas as hipóteses 3.4, 3.6 e 3.7. Então, dado $R > 0$ existem constantes positivas $C = C(R)$ e $\nu = \nu(R)$ tais que a seguinte desigualdade é válida*

$$E_{u,v}(t) \leq C e^{-\nu t} E_{u,v}(0), \quad t > 0, \quad (3.20)$$

para toda solução generalizada do problema (3.1) desde que $E_{u,v}(0) \leq R$.

Observação 3.11. *Por argumentos usuais de densidade é suficiente trabalhar com soluções regulares, uma vez que a taxa de decaimento (3.20) pode ser recuperada para soluções fracas.*

Para mostrar (3.20) é importante observar que os dados iniciais $\{u_0, v_0, u_1, v_1\}$ precisam ser tomados em conjuntos limitados de \mathcal{H} , transformando o Teorema 3.10 em um *resultado de estabilização local*. De fato, as constantes C e ν são uniformes em cada bola de \mathcal{H} com raio $R > 0$ do espaço de fase, mas o resultado *não garante* que (3.20) seja válida com constantes C e ν que sejam independentes dos dados iniciais.

A fim de demonstrar o Teorema 3.10 e inspirados nos argumentos de [29] e [30], apresentamos uma prova da desigualdade inversa do problema (3.1), ou seja, provamos primeiro a seguinte estimativa de observabilidade:

Lema 3.12. *Para todo $T > T_0$ e para todo $R > 0$, existe uma constante positiva $C_0 = C_0(T, R)$ tal que a desigualdade*

$$E_{u,v}(0) \leq C_0 \left[\int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t(x, t)|^2 + \gamma_1(x) |u_t(x, t)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} b(x) |\nabla v_t(x, t)|^2 + \gamma_2(x) |v_t(x, t)|^2 dx dt \right] \quad (3.21)$$

é válida para toda solução regular (u, v) do problema (3.1), desde que os dados $\|(u_0, v_0, u_1, v_1)\|_{\mathcal{H}} \leq R$.

Demonstração. Para provar (3.21), argumentaremos por contradição. Suponhamos que (3.21) não é válida. Então, existe uma sequência (u^n, v^n) de soluções regulares para o problema, de acordo com o Teorema 3.3, tal que os dados iniciais satisfazem

$$E_{u^n, v^n}(0) \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.22)$$

e para algum $L > 0$. Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{u^n, v^n}(0)}{\int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t^n(x, t)|^2 + \gamma_1(x) |u_t^n(x, t)|^2 + b(x) |\nabla v_t^n(x, t)|^2 + \gamma_2(x) |v_t^n(x, t)|^2 dx dt} = +\infty. \quad (3.23)$$

De (3.23) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t^n(x, t)|^2 + \gamma_1(x) |u_t^n(x, t)|^2 + b(x) |\nabla v_t^n(x, t)|^2 + \gamma_2(x) |v_t^n(x, t)|^2 dx dt}{E_{u^n, v^n}(0)} = 0. \quad (3.24)$$

De (3.22) e (3.24) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t^n(x, t)|^2 + \gamma_1(x) |u_t^n(x, t)|^2 + b(x) |\nabla v_t^n(x, t)|^2 + \gamma_2(x) |v_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.25)$$

De (3.19) e (3.25), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega_1} |u_t^n(x, t)|^2 dx dt \\ &\leq C_{\omega_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega_1} a(x) |\nabla u_t^n(x, t)|^2 dx dt \\ &\leq C_{\omega_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t^n(x, t)|^2 dx dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega_1} |u_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.27)$$

Analogamente, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega_2} |v_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.28)$$

Usando novamente (3.25), obtemos

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{G_1} |u_t^n(x, t)|^2 dx dt \leq \frac{1}{c_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1(x) |u_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0, \quad (3.29)$$

o que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{G_1} |u_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.30)$$

De modo análogo, resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{G_2} |v_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.31)$$

Das convergências (3.27), (3.28), (3.30) e (3.31), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega \setminus C_1} |u_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0 \quad (3.32)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega \setminus C_2} |v_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0, \quad (3.33)$$

em que

$$\begin{cases} C_1 := (\Omega \setminus G_1) \cap (A + \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}) = \{x \in A : d(x, \partial A) > \frac{\varepsilon}{2}\}, \\ C_2 := (\Omega \setminus G_2) \cap (B + \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}) = \{x \in B : d(x, \partial B) > \frac{\varepsilon}{2}\}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Como $E_{u^n, v^n}(t)$ é não-crescente e (3.22) é válida, temos que a sequência (u^n, v^n, u_t^n, v_t^n) é limitada em \mathcal{H} . Assim, obtemos uma subsequência, a qual ainda será denotada por (u^n, v^n, u_t^n, v_t^n) , que verifica

$$\begin{cases} (u^n, v^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v) \text{ em } [L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))]^2, \\ (u_t^n, v_t^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t, v_t) \text{ em } [L^\infty(0, T; L^2(\Omega))]^2. \end{cases} \quad (3.35)$$

De (3.35), utilizando o Teorema de Aubin-Lions-Simon (Teorema 1.22) e a cadeia de imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, para todo $q \in [2, +\infty)$, temos, para uma eventual subsequência (a qual ainda será denotada da mesma forma), que

$$(u^n, v^n) \rightarrow (u, v) \text{ em } [L^\infty(0, T; L^q(\Omega))]^2, \text{ para todo } q \in [2, +\infty). \quad (3.36)$$

Note que

$$\begin{cases} (v^n)^2 u^n \rightarrow v^2 u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ (u^n)^2 v^n \rightarrow u^2 v \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (3.37)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} |[(v^n)^2 u^n](x, t) - [v^2 u](x, t)|^2 dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} |[(v^n)^2 u^n](x, t) - [(v^n)^2 u](x, t) + [(v^n)^2 u](x, t) - [v^2 u](x, t)|^2 dx dt \\
&\leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} |[(v^n)^2 (u^n - u)](x, t)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |[(v^n)^2 - v^2]u|(x, t)|^2 dx dt \right) \\
&\leq C \int_0^T \int_{\Omega} |[u^n - u](x, t)|^2 dx dt + C \int_0^T \int_{\Omega} |[(v^n)^2 - v^2](x, t)|^2 dx dt. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Como consequência de (3.36), a primeira parcela em (3.38) tende para zero quando n tende para infinito. Para a segunda parcela realizamos um procedimento análogo e obtemos que - ao passar ao limite - ela também tende a zero. Donde concluímos a primeira convergência em (3.37). A segunda convergência é obtida de modo análogo.

Nesse ponto iremos dividir a prova em quatro casos:

Caso (i): $u = 0$ e $v \neq 0$. Consideremos $u = 0$ e a seguinte seqüência de problemas

$$\begin{cases}
\rho(x)u_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla u^n) + (v^n)^2 u^n + \gamma_1(x)u_t^n - \operatorname{div}(a(x)\nabla u_t^n) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\
\rho(x)v_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla v^n) + (u^n)^2 v^n + \gamma_2(x)v_t^n - \operatorname{div}(b(x)\nabla v_t^n) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\
u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\
u^n(x, 0) = u_0^n(x), \quad u_t^n(x, 0) = u_1^n(x) & \text{em } \Omega, \\
v^n(x, 0) = v_0^n(x), \quad v_t^n(x, 0) = v_1^n(x) & \text{em } \Omega.
\end{cases} \tag{3.39}$$

Passando o limite em (3.39) e tendo em conta (3.25), (3.27), (3.28), (3.35) e (3.36), temos

$$\begin{cases}
\rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\
v_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T).
\end{cases} \tag{3.40}$$

Derivando (3.40) no sentido das distribuições e tomando $z = v_t$ obtemos

$$\begin{cases}
\rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\
z = 0 & \text{em } \omega \times (0, T),
\end{cases}$$

o que implica, pelo Teorema 1.58, que $z = v_t = 0$ em $\Omega \times (0, T)$. Multiplicando (3.40)₁ por v , integrando em $\Omega \times (0, T)$ e utilizando o Teorema da divergência, temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla v(x, t) dx dt = 0.$$

Da desigualdade de Poincaré e a equivalência entre as normas, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |v(x,t)|^2 dx dt \leq C_P \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v(x,t)|^2 dx dt \\ &\leq C \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v(x,t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t) dx dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

E assim, $\|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 0$, o que implica que $v = 0$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, o que é um absurdo pois supomos $v \neq 0$.

Caso (ii): $v = 0$ e $u \neq 0$. Consideremos $v = 0$ e a sequência de problemas (3.39).

Passando o limite em (3.39) e observando (3.25), (3.27), (3.28), (3.35) e (3.36) temos

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ u_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases}$$

Analogamente ao caso anterior, mostramos que $u = 0$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, o que é um absurdo.

Caso (iii): $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Passando o limite em (3.39) e observando (3.26), (3.29) e (3.35)-(3.37), temos

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + v^2u = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + u^2v = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ u_t = v_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.41)$$

Derivando (3.41) no sentido das distribuições e tomando $w = u_t$ e $z = v_t$ obtemos

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + 2vuz + v^2w = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) + 2uvw + u^2z = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ w = z = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.42)$$

Definindo $V_1(x,t) = v^2(x,t)$, $V_2(x,t) = u^2(x,t)$ e $V_3(x,t) = -2[uv](x,t)$, o sistema (3.42) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + V_1(x,t)w = V_3(x,t)z & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) + V_2(x,t)z = V_3(x,t)w & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ w = z = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases}$$

Observamos que V_1 , V_2 e V_3 são elementos de $L^\infty(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$.

- $V_1 \in L^\infty(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$. Com efeito, utilizando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |V_1(x,t)|^{\frac{3}{2}} dx = \int_{\Omega} |v(x,t)|^3 dx \leq C \|\nabla v(x,t)\|^3 \leq C \|v\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))}^3 < +\infty, \quad \forall t \in (0, T).$$

Logo, $V_1 \in L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$.

- $V_2 \in L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$. A demonstração desse fato é análoga a que acabamos de fazer.
- $V_3 \in L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$. Com efeito, utilizando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |V_3(x, t)|^{\frac{3}{2}} dx &= C \int_{\Omega} |u(x, t)v(x, t)|^{\frac{3}{2}} dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |u(x, t)|^3 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u(x, t)|^3 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\nabla u(t)\|^{\frac{3}{2}} \|\nabla v(t)\|^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C \|u\|_{C([0, T]; H_0^1(\Omega))} \|v\|_{C([0, T]; H_0^1(\Omega))} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

como queríamos. Agora, utilizando a Hipótese 3.7, concluímos que $(w, z) = (0, 0)$ em $\Omega \times (0, T)$. Multiplicando (3.41)₁ por u , (3.41)₂ por v , integrando em $\Omega \times (0, T)$ e utilizando o Teorema da divergência, temos

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |[uv](x, t)|^2 dx dt = 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla v(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla v(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |[vu](x, t)|^2 dx dt = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

De (3.43)₁, segue que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x, t) dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} |[uv](x, t)|^2 dx dt \leq 0.$$

Donde, da desigualdade de Poincaré e a equivalência entre as normas, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx dt \\ &\leq C \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x, t) dx dt \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

E assim, $\|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = 0$, o que implica que $u = 0$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e, procedendo de forma análoga para (3.43)₂, deduzimos que $v = 0$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, o que é uma contradição com o que assumimos no caso (iii).

Caso (iv): $(u, v) = (0, 0)$.

Agora, vamos definir

$$\alpha_n := [E_{u^n, v^n}(0)]^{1/2}, \quad w^n := \frac{u^n}{\alpha_n}, \quad z^n := \frac{v^n}{\alpha_n} \quad (3.44)$$

e considerarmos a seguinte sequência de problemas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(x)w_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla w^n) + \alpha_n^2(z^n)^2w^n + \gamma_1(x)w_t^n - \operatorname{div}(a(x)\nabla w_t^n) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)z_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla z^n) + \alpha_n^2(w^n)^2z^n + \gamma_2(x)z_t^n - \operatorname{div}(b(x)\nabla z_t^n) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w_n = z_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ w^n(x, 0) = w_0^n(x) = \frac{u_0^n}{\alpha_n}, w_t^n(x, 0) = w_1^n(x) = \frac{u_1^n}{\alpha_n} & \text{em } \Omega, \\ z^n(x, 0) = z_0^n(x) = \frac{v_0^n}{\alpha_n}, z_t^n(x, 0) = z_1^n(x) = \frac{v_1^n}{\alpha_n} & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Multiplicando (3.45)₁ por w_t^n e (3.45)₂ por z_t^n , integrando em Ω e adicionando os resultados deduzimos que

$$E_{w^n, z^n}(t) = \frac{1}{\alpha_n^2} E_{u^n, v^n}(t). \quad (3.46)$$

De (3.46) segue que $E_{w^n, z^n}(0) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A fim de obter uma contradição, vamos provar agora que $E_{w^n, z^n}(0)$ converge à zero. De fato, de maneira análoga a obtenção de (3.26)-(3.33) temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla w_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0, \quad (3.47)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla z_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.48)$$

Ainda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1(x) |w_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0, \quad (3.49)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_2(x) |z_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.50)$$

Como $a(x) \geq a_0 > 0$ quase sempre em ω_1 , de (3.47) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega_1} |\nabla w_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0, \quad (3.51)$$

e também, como $b(x) \geq b_0 > 0$ quase sempre em ω_2 , de (3.48) resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega_2} |\nabla z_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.52)$$

De (3.19), (3.51) e (3.52), segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega_1} |w_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0 \quad (3.53)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega_2} |z_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.54)$$

Como $\gamma_1(x) = c_0 > 0$ em G_1 e $\gamma_2(x) = c_1 > 0$ em G_2 , de (3.49) e (3.50) deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{G_1} |w_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0 \quad (3.55)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{G_2} |z_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (3.56)$$

Das convergências (3.53), (3.54), (3.55) e (3.56), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega \setminus C_1} |w_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0 \quad (3.57)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega \setminus C_2} |z_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0, \quad (3.58)$$

para C_1 e C_2 definidos em (3.34). Como $E_{w^n, z^n}(t)$ é não-crescente e $E_{w^n, z^n}(0)$ é uma seqüência limitada, temos que a seqüência (w^n, z^n, w_t^n, z_t^n) é limitada em \mathcal{H} . Assim, obtemos uma subsequência, a qual ainda será denotada por (w^n, z^n, w_t^n, z_t^n) , que verifica

$$\begin{cases} (w^n, z^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (w, z) \text{ em } (L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)))^2, \\ (w_t^n, z_t^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (w_t, z_t) \text{ em } (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2. \end{cases} \quad (3.59)$$

Novamente, pelo Teorema de Aubin-Lions-Simon (Teorema 1.22), para uma eventual subsequência, a qual será denotada pela mesma notação, temos que

$$(w^n, z^n) \rightarrow (w, z) \text{ em } (L^\infty(0, T; L^q(\Omega)))^2, \text{ para todo } q \in [2, \infty). \quad (3.60)$$

Agora, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência de α_n , a qual será denotada pela mesma notação, tal que $\alpha_n \rightarrow \alpha \in [0, +\infty)$. Vamos analisar os dois casos possíveis:

• Se $\alpha = 0$, então

$$\begin{cases} \alpha_n w^n = u^n \rightarrow 0 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \alpha_n z^n = v^n \rightarrow 0 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{cases} \quad (3.61)$$

Observando (3.47), (3.48), (3.59), (3.61) e passando ao limite o sistema (3.45), obtemos

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ w_t = z_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.62)$$

Derivando (3.62)₁ e (3.62)₂ no sentido das distribuições e definindo $\varphi = w_t$ e $\psi = z_t$, temos

$$\begin{cases} \rho(x)\varphi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla\varphi) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x)\psi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla\psi) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \varphi = \psi = 0 & \text{em } \omega \times (0, T) \end{cases}$$

o que implica que $\varphi = \psi = 0$ e, conseqüentemente, retornando para (3.62) em um processo análogo ao realizado no caso (i), segue que $w = z = 0$.

• Se $\alpha > 0$, então, passando ao limite o sistema (3.45) chegamos em

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + \alpha^2 z^2 w = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) + \alpha^2 w^2 z = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ w_t = z_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.63)$$

Tomando $\varphi = w_t$ e $\psi = z_t$ em (3.63), temos

$$\begin{cases} \rho(x)\varphi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla\varphi) + 2\alpha^2 z w \psi + \alpha^2 z^2 \varphi = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x)\psi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla\psi) + 2\alpha^2 w z \varphi + \alpha^2 w^2 \psi = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \varphi = \psi = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.64)$$

Denotando $V_1(x, t) = \alpha^2 z^2(x, t)$, $V_2(x, t) = \alpha^2 w^2(x, t)$ e $V_3(x, t) = -2\alpha^2 [zw](x, t)$ podemos reescrever (3.64) como

$$\begin{cases} \rho(x)\varphi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla\varphi) + V_1(x, t)\varphi = V_3(x, t)\psi & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x)\psi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla\psi) + V_2(x, t)\psi = V_3(x, t)\varphi & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ \varphi = \psi = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases}$$

Observando que V_1 , V_2 e V_3 são elementos de $L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ (demonstração análoga a realizada no caso (iii)) e utilizando a Hipótese 3.7, concluímos que $(\varphi, \psi) = (0, 0)$ em $\Omega \times (0, T)$. Retornando a (3.63) (contas análogas as apresentadas no caso (iii)) segue que $w = z = 0$.

Assim, em ambos os casos ($\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$), concluímos que $w = z = 0$. Como consequência disso, $w = z = 0$ nas convergências (3.59) e (3.60). Analogamente a (3.37), podemos mostrar que

$$\begin{cases} \alpha_n^2 (z^n)^2 w^n \rightarrow \alpha z^2 w & \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \alpha_n^2 (w^n)^2 z^n \rightarrow \alpha w^2 z & \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{cases}$$

e, utilizando que $w = z = 0$, concluímos que

$$\begin{cases} \alpha_n^2(z^n)^2 w^n \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \alpha_n^2(w^n)^2 z^n \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (3.65)$$

Lembremos que nosso objetivo é provar que $E_{w^n, z^n}(0)$ converge para zero, em que

$$\begin{aligned} E_{w^n, z^n}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x) |w_t^n(x, t)|^2 + \rho(x) |z_t^n(x, t)|^2 + (\nabla w^n(x, t))^\top \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x, t) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla z^n(x, t))^\top \cdot K(x) \cdot \nabla z^n(x, t) + \alpha_n^2 [w^n z^n]^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

Para isso, vamos utilizar a seguinte notação

$$P := -\rho(x) \partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} (k_{ij}(x) \partial_{x_j}).$$

Considerando as convergências (3.47), (3.48), (3.49), (3.50) e (3.65) para zero e observando as hipóteses sobre $a(x)$, $b(x)$, $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$, deduzimos que

$$\begin{cases} Pw_t^n = \partial_t (\alpha_n^2(z^n)^2 w^n - \gamma_1(x) w_t^n + \operatorname{div}(a(x) \nabla w_t^n)) \rightarrow 0 & \text{em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)), \\ Pz_t^n = \partial_t (\alpha_n^2(w^n)^2 z^n - \gamma_2(x) z_t^n + \operatorname{div}(b(x) \nabla z_t^n)) \rightarrow 0 & \text{em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)). \end{cases} \quad (3.66)$$

Desejamos propagar as convergências (3.57) e (3.58) de $\Omega \setminus C_1 \times (0, T)$ e $\Omega \setminus C_2 \times (0, T)$ para todo o conjunto $\Omega \times (0, T)$. No entanto, as convergências em (3.66) não são suficientes para este propósito, uma vez que precisamos de uma convergência em $H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T))$ para tal propagação. Mas, observamos que, de fato

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_n^2(z^n)^2 w^n - \gamma_1(x) w_t^n) &\rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)) \\ &\text{e} \\ \partial_t (\alpha_n^2(w^n)^2 z^n - \gamma_2(x) z_t^n) &\rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)). \end{aligned}$$

Os termos problemáticos são precisamente $\operatorname{div}(a(x) \nabla w_t^n)$ e $\operatorname{div}(b(x) \nabla z_t^n)$ porque

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a(x) \nabla w_t^n) &\rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)), \\ &\text{e} \\ \operatorname{div}(b(x) \nabla z_t^n) &\rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)). \end{aligned}$$

Este é o momento preciso em que os amortecimentos friccionais desempenham um papel fundamental no colar das fronteiras ∂A e ∂B . De fato, note que $a(x) \nabla w_t^n = 0$ em $A \times (0, T)$ e

$b(x)\nabla z_t^n = 0$ em $B \times (0, T)$. Consequentemente, de (3.45) temos

$$\begin{aligned} \rho(x)w_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla w^n) &= -\alpha_n^2(z^n)^2w^n - \gamma_1(x)w_t^n \text{ em } A \times (0, T), \\ &\text{e} \\ \rho(x)z_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla z^n) &= -\alpha_n^2(w^n)^2z^n - \gamma_2(x)z_t^n \text{ em } B \times (0, T). \end{aligned}$$

Considerando (3.45), (3.49), (3.50) e (3.65), resulta que

$$\begin{aligned} \square w_t^n &\rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\operatorname{int} A \times (0, T)), \\ &\text{e} \\ \square z_t^n &\rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\operatorname{int} B \times (0, T)), \end{aligned}$$

em que $\square = \partial_t^2 - \Delta$ é o operador D'Alambertiano.

Vamos denotar por μ_1 e μ_2 as medidas de defeito microlocal associadas a w_t^n e z_t^n em $L^2(\operatorname{int} A \times (0, T))$ e $L^2(\operatorname{int} B \times (0, T))$, respectivamente, as quais existem em virtude do Teorema 1.38. Então, da Hipótese 3.6, deduzimos dois fatos:

- (i) Os suportes das medidas μ_1 e μ_2 estão contidos no conjunto característico do operador de onda.
- (ii) μ_1 e μ_2 se propagam ao longo do fluxo bicaracterístico deste operador, o que significa, particularmente, que se algum ponto $\omega_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ não pertence a algum dos conjuntos $\operatorname{supp}(\mu_1)$ ou $\operatorname{supp}(\mu_2)$ então todo o bicaracterístico emitido de ω_0 permanece fora de $\operatorname{supp}(\mu_1)$ ou $\operatorname{supp}(\mu_2)$.

Das convergências obtidas e do Teorema 1.42, deduzimos o item (i).

Além disso, pela Proposição 1.50 e o Teorema 1.49, segue que $\operatorname{supp}(\mu) \in (\Omega \times (0, T)) \times S^d$ é uma união de curvas do tipo

$$t \in I \mapsto m_{\pm}(t) = \left(t, x(t), \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + |G(x)\dot{x}|^2}}, \frac{\mp G(x)\dot{x}}{\sqrt{1 + |G(x)\dot{x}|^2}} \right), \quad (3.67)$$

em que $t \in I \mapsto x(t) \in \Omega$ é uma geodésica da métrica $G(x)$, para $i = 1, 2$.

Como $w_t^n \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega \setminus C_1 \times (0, T))$ e $z_t^n \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega \setminus C_2 \times (0, T))$, temos pelo Teorema 1.45 que $\mu_1 = \mu_2 = 0$ em ω e, consequentemente, $\operatorname{supp}(\mu_1) \subset C_1 \times (0, T)$ e $\operatorname{supp}(\mu_2) \subset C_2 \times (0, T)$.

Por outro lado, sejam $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in \operatorname{supp}(\mu_1) \cup \operatorname{supp}(\mu_2)$, $t_0 \in (0, +\infty)$ e x uma geodésica de G definida próximo de t_0 . Sabendo que as geodésicas partindo de pontos dentro de C_1 e C_2 , entram necessariamente na região ω , elas também interceptam o conjunto $\Omega \setminus C_1$ e $\Omega \setminus C_2$, então, para qualquer geodésica da métrica G , com $0 \in I$ existe $t > 0$ tal que $m_{\pm}(t)$ não pertence a $\operatorname{supp}(\mu_1)$ e $\operatorname{supp}(\mu_2)$ e assim, $m_{\pm}(t_0)$ também não pertence, o que mostra a validade do item (ii).

Dessa forma, $\operatorname{supp}(\mu_1)$ e $\operatorname{supp}(\mu_2)$ são vazios. Como consequência disso, temos que $w_t^n \rightarrow 0$ e $z_t^n \rightarrow 0$ em $L_{loc}^2(\Omega \times (0, T))$. Já que $v_t^n \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega \setminus C_1 \times (0, T))$ e $z_t^n \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega \setminus C_2 \times (0, T))$

concluimos que

$$\begin{cases} w_t^n \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ z_t^n \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (3.68)$$

Agora vamos utilizar (3.68) para mostrar a seguinte afirmação: dado $\varepsilon > 0$, satisfazendo $\varepsilon < T - \varepsilon$, é válido que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} E_{w^n, z^n}(t) dt = 0. \quad (3.69)$$

Na verdade, vamos mostrar que cada componente de $E_{w^n, z^n}(t)$ converge a zero. Para isso, consideremos a função de corte $\theta \in C^\infty(0, T)$ tal que

$$0 \leq \theta(t) \leq 1, \quad \theta(t) = 1 \text{ em } (\varepsilon, T - \varepsilon) \quad \text{e} \quad \theta(0) = \theta(T) = 0. \quad (3.70)$$

Multiplicando (3.45)₁ por $w^n \theta$, integrando em $\Omega \times (0, T)$ e utilizando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) [w_{tt}^n w^n](x, t) \theta(t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla w^n(x, t))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x, t) \theta(t) dx dt \\ & + \alpha_n^2 \int_0^T \int_{\Omega} [(z^n)^2 (w^n)^2](x, t) \theta(t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma_1(x) [w_t^n w^n](x, t) \theta(t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} a(x) \nabla w_t^n(x, t) \cdot \nabla w^n(x, t) \theta(t) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(x) [w_{tt}^n w^n](x, t) \theta(t) dx &= - \int_{\Omega} \rho(x) [w_t^n w_t^n](x, t) \theta(t) dx - \int_{\Omega} \rho(x) [w_t^n w^n](x, t) \theta'(t) dx \\ &+ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x) [w_t^n w^n](x, t) \theta(t) dx. \end{aligned}$$

E, utilizando (3.70), temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) [w_{tt}^n w^n](x, t) \theta(t) dx dt &= - \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \rho(x) |w_t^n(x, t)|^2 dx dt \\ &- \int_0^T \theta'(t) \int_{\Omega} \rho(x) [w_t^n w^n](x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Substituindo (3.72) em (3.71) temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \rho(x) |w_t^n(x, t)|^2 dx dt - \int_0^T \theta'(t) \int_{\Omega} \rho(x) [w_t^n w^n](x, t) dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (\nabla w^n(x, t))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x, t) dx dt + \alpha_n^2 \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} [(z^n)^2 (w^n)^2](x, t) dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \gamma_1(x) [w_t^n w^n](x, t) dx dt + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} a(x) \nabla w_t^n(x, t) \cdot \nabla w^n(x, t) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Vamos estimar os termos de (3.73). Para isso, observamos as condições estabelecidas sobre ρ , γ_1

e θ , as convergências (3.47), (3.65) e (3.68), a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e a limitação proveniente de (3.59). Desta forma, para o primeiro termo, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \rho(x) (w_t^n)^2(x, t) dx dt \right| &\leq \int_0^T |\theta(t)| \int_{\Omega} |\rho(x)| |w_t^n(x, t)|^2 dx dt \\ &\leq C \|w_t^n\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \\ &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Para o segundo termo, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \theta'(t) \int_{\Omega} \rho(x) [w_t^n w^n](x, t) dx dt \right| &\leq \int_0^T |\theta'(t)| \int_{\Omega} |\rho(x)| |w_t^n(x, t)| |w^n(x, t)| dx dt \\ &\leq C \int_0^T \|w_t^n(x, t)\| \|\nabla w^n(x, t)\| dt \\ &\leq \|w_t^n\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|w^n\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Analisando o quarto termo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \left| \alpha_n^2 \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} [(z^n)^2 (w^n)^2](x, t) dx dt \right| &\leq \int_0^T |\theta(t)| \int_{\Omega} \alpha_n^2 |z^n(x, t)|^2 |w^n(x, t)|^2 dx dt \\ &\leq C \int_0^T \|\alpha_n^2 [(z^n)^2 w^n](x, t)\| \|\nabla w^n(x, t)\| dt \\ &\leq C \|\alpha_n^2 (z^n)^2 w^n\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|w^n\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Ao estimar o quinto termo, deduzimos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \gamma_1(x) [w_t^n w^n](x, t) dx dt \right| &\leq \int_0^T |\theta(t)| \int_{\Omega} |\gamma_1(x)| |w_t^n(x, t)| |w^n(x, t)| dx dt \\ &\leq C \int_0^T \|w_t^n(x, t)\| \|\nabla w^n(x, t)\| dt \\ &\leq \|w_t^n\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|w^n\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por fim, para o sexto termo, observamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} a(x) [\nabla w_t^n \nabla w^n](x, t) dx dt \right| &\leq \int_0^T |\theta(t)| \int_{\Omega} |a(x)| |\nabla w_t^n(x, t)| |\nabla w^n(x, t)| dx dt \\ &\leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla w_t^n(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \|w^n\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

De (3.73) e as estimativas realizadas, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (\nabla w^n(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x, t) \, dx dt = 0.$$

Analogamente, multiplicando (3.45)₂ por $z^n \theta$, integrando em $\Omega \times (0, T)$ e estimando os termos como fizemos para (3.73), concluímos também que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \rho(x) |w_t^n(x, t)|^2 \, dx dt = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (\nabla z^n(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla z^n(x, t) \, dx dt = 0. \end{cases} \quad (3.76)$$

Utilizando (3.70), temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla w^n(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x, t) \, dx dt \\ &\leq \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (\nabla z^n(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla z^n(x, t) \, dx dt \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla w^n(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x, t) \, dx dt = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla z^n(x, t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla z^n(x, t) \, dx dt = 0. \end{cases} \quad (3.77)$$

De (3.70), (3.74), (3.75), (3.76) e (3.77), concluímos a prova de (3.69).

Como $E_{w^n, z^n}(t)$ é não-crescente, temos que, para $t \in (\varepsilon, T - \varepsilon)$ é válido que

$$E_{w^n, z^n}(t) \geq E_{w^n, z^n}(T - \varepsilon).$$

Donde

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} E_{w^n, z^n}(t) \, dt \geq \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} E_{w^n, z^n}(T - \varepsilon) \, dt = (T - 2\varepsilon) E_{w^n, z^n}(T - \varepsilon) \geq 0.$$

Portanto, de (3.69), segue que

$$(T - 2\varepsilon) E_{w^n, z^n}(T - \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Como $\varepsilon < T - \varepsilon$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{w^n, z^n}(T - \varepsilon) = 0. \quad (3.78)$$

Por outro lado, da identidade da energia, podemos concluir que

$$\begin{aligned} E_{w^n, z^n}(T - \varepsilon) - E_{w^n, z^n}(\varepsilon) &= - \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} a(x) |\nabla w_t^n(x, t)|^2 + \gamma_1(x) |w_t^n(x, t)|^2 dx dt \\ &\quad - \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} b(x) |\nabla z_t^n(x, t)|^2 + \gamma_2(x) |z_t^n(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Das convergências (3.47), (3.48), (3.49) e (3.50) bem como o lado direito da igualdade imediatamente acima tende a zero e de (3.78), temos que a primeira parcela do lado esquerdo tende a zero. Donde podemos deduzir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{w^n, z^n}(\varepsilon) = 0.$$

Pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, segue que $E_{w^n, z^n}(0) \rightarrow 0$, o que é um absurdo. Portanto, vale (3.21) e a prova do lema está concluída. \square

De posse do Lema 3.12 vamos provar o decaimento dado em (3.20). Com efeito, tomando $T_0 > 0$ suficientemente grande, temos, como consequência da identidade de energia, que a aplicação $t \in [0, +\infty) \mapsto E_{u,v}(t)$ é não-crescente. Logo,

$$E_{u,v}(T_0) \leq E_{u,v}(0)$$

e, de (3.21) obtemos

$$\begin{aligned} E_{u,v}(T_0) &\leq C_1 \left[\int_0^{T_0} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t(x, t)|^2 + \gamma_1(x) |u_t(x, t)|^2 dx dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} b(x) |\nabla v_t(x, t)|^2 + \gamma_2(x) |v_t(x, t)|^2 dx dt \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$

com $C_0 = C_0(T_0, R)$ onde T_0 e R estão fixados. Por outro lado, ainda da identidade de energia, obtemos

$$\begin{aligned} E_{u,v}(T_0) - E_{u,v}(0) &= - \int_0^{T_0} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t(x, t)|^2 + \gamma_1(x) |u_t(x, t)|^2 dx dt \\ &\quad - \int_0^{T_0} \int_{\Omega} b(x) |\nabla v_t(x, t)|^2 + \gamma_2(x) |v_t(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Combinando (3.79) e (3.80), resulta que existe $C_0 = C_0(T_0, R) > 0$ tal que

$$E_{u,v}(T_0) \leq C_0 (-E_{u,v}(T_0) + E_{u,v}(0)),$$

donde concluímos que

$$E_{u,v}(T_0) \leq \left(\frac{C_0}{1 + C_0} \right) E_{u,v}(0). \quad (3.81)$$

Argumentando de forma similar agora para o intervalo $[T_0, 2T_0]$ concluimos que

$$E_{u,v}(2T_0) \leq \left(\frac{C_0}{1+C_0} \right) E_{u,v}(T_0). \quad (3.82)$$

De (3.81) e (3.82) deduzimos que

$$E_{u,v}(2T_0) \leq \left(\frac{C_0}{1+C_0} \right) E_{u,v}(T_0) \leq \left(\frac{C_0}{1+C_0} \right)^2 E_{u,v}(0).$$

Recursivamente, resulta que

$$E_{u,v}(nT_0) \leq \left(\frac{C_0}{1+C_0} \right)^n E_{u,v}(0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.83)$$

Note que é possível realizar esse processo pois $E_{u,v}(nT_0) \leq E_{u,v}(0) \leq R$.

Consideremos $t > T_0$. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = nT_0 + r$, para $0 \leq r < T_0$. Consequentemente de (3.83) e do fato de $E_{u,v}(t)$ ser não-crescente, obtemos

$$\begin{aligned} E_{u,v}(t) &\leq E_{u,v}(t-r) \\ &\leq \left(\frac{C_0}{1+C_0} \right)^n E_{u,v}(0) \\ &= \left(\frac{C_0}{1+C_0} \right)^{\frac{t-r}{T_0}} E_{u,v}(0) \\ &= e^{-\frac{r}{T_0} \ln\left(\frac{C_0}{1+C_0}\right)} e^{\frac{\ln\left(\frac{C_0}{1+C_0}\right)}{T_0} t} E_{u,v}(0), \text{ para todo } t > T_0, \end{aligned}$$

tomando $C := e^{-\frac{r}{T_0} \ln\left(\frac{C_0}{1+C_0}\right)}$ e $\nu = -\frac{\ln\left(\frac{C_0}{1+C_0}\right)}{T_0}$, temos o desejado em (3.20), finalizando assim a prova do principal resultado do capítulo.

Bibliografia

- [1] Alabau-Boussouira, F.; Cannarsa, P.; Sforza, D. *Decay estimates for second order evolution equations with memory*. Journal of Functional Analysis. 254 (5) (2008), 1342-1372.
- [2] Alabau-Boussouira, F.; Cannarsa, P. *A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations*. Comptes Rendus Mathématique. 347 (15) (2009), 867-872.
- [3] Andrade, D.; Mognon, A. *Global Solutions for a System of Klein-Gordon Equations with Memory*. Bol. Soc. Parana. Mat. (3) 21 (2003), no. 1-2, 127-138.
- [4] Benaïssa, A.; Beniani, A.; Zennir, K. *General decay of solution for coupled system of viscoelastic wave equations of Kirchhoff type with density in \mathbb{R}^n* . Journal Facta Universitatis. Ser. Math. Inform. 31 (5) (2016), 1073-1090.
- [5] Bardos, C.; Lebeau, G.; Rauch, J. *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*. SIAM J. Control Optim. 30 (1992), no. 5, 1024-1065.
- [6] Betelú, S.; Gulliver, R.; Littman, W. *Boundary control of PDEs via curvature flows: the view from the boundary*. II. Appl. Math. Optim. 46 (2-3): 167-178, 2002. Special issue dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions.
- [7] Brezis, H. *Functional analysis. Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, New York, 2011.
- [8] Boyer, F.; Fabrie, P. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*. Springer. New York, 2013.
- [9] Burq, N.; Gérard, P. *Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325 (1997), no. 7, 749-752.
- [10] Burq, N.; Gérard, P. *Contrôle Optimal des équations aux dérivées partielles*. 2001, URL:<http://www.math.u-psud.fr/~burq/articles/coursX.pdf>
- [11] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Maringá: Eduem, 2009.
- [12] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Komornik, V. *Introdução à Análise Funcional*. Maringá: Eduem, 2011.

-
- [13] Cavalcanti, M. M.; Delatorre, L. G.; Gonzalez Martinez, V. H.; Soares, D. C.; Zanchetta, J. P. *Uniform stabilization of the Klein-Gordon system*. Communications on Pure & Applied Analysis (2020), 19 (11), 5131-5156.
- [14] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Fukuoka, R.; Soriano, J. A. *Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result*. Arch. Ration. Mech. Anal. 197 (2010), no. 3, 925-964.
- [15] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Fukuoka, R.; Soriano, J. A. *Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping-a sharp result*. Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 9, 4561-4580.
- [16] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Mansouri, S.; Gonzalez Martinez, V. H.; Hajje, Z.; Rojas Astudillo, M. R. *Asymptotic stability for a strongly coupled Klein-Gordon system in an inhomogeneous medium with locally distributed damping*. J. Differential Equations (2019).
- [17] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Santos, M. L. *Existence and uniform decay rates of solutions to a degenerate system with memory conditions at the boundary*. Applied Mathematics and Computation. 150 (2004), 439-465.
- [18] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Lasiecka, I.; Nascimento, F.A.F. *Intrinsic decay rate estimates for the wave equation with competing viscoelastic and frictional dissipative effects*. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B 19 (7) (2014), 1987.
- [19] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Lasiecka, I.; Webler, C. M. *Intrinsic decay rates for the energy of a nonlinear viscoelastic equation modeling the vibrations of thin rods with variable density*. Advances in Nonlinear Analysis 6 (2) (2017), 121-145.
- [20] Cavalcanti, M. M.; Khemmoudj, A.; Medjen, M. *Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel Problem with variable coefficients and dynamic boundary condition*. J. Math. Anal. Appl. 328 (2), (2007), 900-930.
- [21] Chepyzhov, V. V.; Pata, V. *Some remarks on stability of semigroups arising from linear viscoelasticity*. Asymptot. Anal. 46 (2006), no. 3-4, 251-273.
- [22] Conti, M.; Danese, V.; Giorgi, C.; Pata, V. *A model of viscoelasticity with time-dependent memory kernels*. American Journal of Mathematics 140 (2018), 349-389.
- [23] Conti, M.; Gatti, S.; Pata, V. *Uniform decay properties of linear Volterra integro-differential equations*. Math. Models Methods Appl. Sci. 18 (2008), no. 1, 21-45.
- [24] Conti, M.; Pata, V. *General decay properties of abstract linear viscoelasticity*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 71 (1) (2020), 6.
- [25] Cousin, A. T.; Frota, C. L.; Larkin, N. A. *On a system of Klein-Gordon type equations with acoustic boundary conditions*. J. Math. Anal. Appl. 293 (2004), no. 1, 293-309.

-
- [26] Dafermos, C. M. *An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity*. J. Diff. Eqns. 7 (1970), 554–569.
- [27] Dafermos, C. M. *Asymptotic stability in viscoelasticity*. Arch. Rational Mech. Anal. 37(1970), 554–569.
- [28] Dautray, R.; Lions, J. L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 2. Functional and Variational Methods*. Springer, Berlin, 2000.
- [29] Dehman, B. Gérard, P.; Lebeau, G. *Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface*. Math. Z. 254 (2006), no. 4, 729-749.
- [30] Dehman, B.; Lebeau, G.; Zuazua, E. *Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation*. Anna. Sci. Ec. Norm. Super. 36 525-551 (2003).
- [31] Dharmawardane, P. M.; Nakamura, T.; Kawashima, S. *Global solutions to quasi-linear hyperbolic systems of viscoelasticity*. Kyoto Journal of Mathematics. 51 (2) (2011), 467-483.
- [32] Dharmawardane, P. M. N.; Rivera, J. E. M.; Kawashima, S. *Decay property for second order hyperbolic systems of viscoelastic materials*. J. Math. Anal. Appl. 366 (2010) 621-635.
- [33] Evans, L. *Partial Differential Equations. Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, 1998.
- [34] Fabrizio, M.; Morro, A. *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*. Studies in Applied Mathematics, 12, Philadelphia, PA: SIAM, 1992.
- [35] Ferreira, J. S. *Asymptotic behavior of the solutions of a nonlinear system of Klein-Gordon equations*. Nonlinear Anal. 13 (1989), no. 9, 1115–1126.
- [36] Ferreira, J. S. *Exponential decay for a nonlinear system of hyperbolic equations with locally distributed dampings*. Nonlinear Anal. 18 (1992), no. 11, 1015–1032.
- [37] Ferreira, J. S. *Exponential decay of the energy of a nonlinear system of Klein-Gordon equations with localized dampings in bounded and unbounded domains*. Asymptotic Anal. 8 (1994), no. 1, 73-92.
- [38] Ferreira, J.; Menzala, G. P. *Decay of solutions of a system of nonlinear Klein-Gordon equations*. Internat. J. Math. Math. Sci. 9 (1986), no. 3, 471-483.
- [39] Folland, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons. (1999).
- [40] Gérard, P. *Microlocal defect measures*. Comm. Partial Differential Equations. 16 (1991) 1761-1794.
- [41] Giorgi, C.; Lazzari, B. *On the stability for linear viscoelastic solids*. Quart. Appl. Math. 55 (1997), no. 4, 659-675.

-
- [42] Gomes Tavares, E. H. *Modelos de vigas viscoelásticas extensíveis: Boa colocação e estabilidade*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.
- [43] Grasselli, M.; Pata, V. *Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory*. Evolution equations, semigroups and Functional Analysis. Springer (2002), 155–178.
- [44] Guesmia, A. *Asymptotic stability of abstract dissipative systems with infinite memory*. J. Math. Anal. Appl. 382 (2011) 748-760.
- [45] Guesmia, A. *New General Decay Rates of Solutions for Two Viscoelastic Wave Equations with Infinite Memory*. Mathematical Modelling and Analysis. 25 (3) (2020), 351-373.
- [46] Hrusa, W. J. *Global existence and asymptotic stability for a semilinear hyperbolic Volterra equation with large initial data*. SIAM journal on mathematical analysis. 16 (1) (1985), 110-134.
- [47] Hrusa, W. J.; Nohel, J.; Renardy, M. *Mathematical Problems in Viscoelasticity*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 35, 1987.
- [48] Kirane, M.; Said-Houari, B. *Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 62 (6) (2011), 1065-1082.
- [49] Lasiecka, I.; Messaoudi, S. A.; Mustafa, M. I. *Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory*. Journal of Mathematical Physics. 54 (3) (2013), 031504.
- [50] Lasiecka, I.; Wang, X. *Intrinsic decay rate estimates for semilinear abstract second order equations with memory*. New prospects in direct, inverse and control problems for evolution equations. Springer, Cham, 2014. 271-303.
- [51] Lions, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Guthier-Villars, 1969.
- [52] Liu, K.; Liu, K. *Exponential decay of energy of the Euler-Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping*. SIAM J. Control and Optim. 36 (1998) 1086-1098.
- [53] Liu, K.; Rao, B. *Exponential stability for the wave equations with local Kelvin-Voigt damping*. Z. Angew. Math. Phys. 57 (2006) 419-432.
- [54] Liu, W. *General Decay of Solutions of a Nonlinear System of Viscoelastic Equations*. Acta Appl Math 110 (1) (2010), 153-165.
- [55] Lions, J. L.; Magenes, E. *Problèmes Aux Limites Non Homogènes et Applications*. Dunod, Paris, (1968), Vol. 1.
- [56] Medeiros, L. A.; Menzala, G. P. *On a mixed problem for a class of nonlinear Klein-Gordon equations*. Acta Math. Hungar. 52 (1988), no. 1-2, 61-69.

- [57] Medeiros, L. A.; Miranda, M. M. *Weak solutions for a system of nonlinear Klein-Gordon equations*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 146 (1987), 173–183.
- [58] Medeiros, L. A.; Miranda, M. M. *On the existence of global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon equations*. Funkcial. Ekvac. 30 (1987), no. 1, 147-161.
- [59] Messaoudi, S. A. *General decay of solutions of a viscoelastic equation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 341 (2) (2008), 1457-1467.
- [60] Messaoudi, S. A. *General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 69 (8) (2008), 2589-2598.
- [61] Messaoudi, S. A.; Al-Gharabli, M. M. *A general decay result of a nonlinear system of wave equations with infinite memories*. Applied Mathematics and Computation 259 (2015), 540-551.
- [62] Messaoudi, S. A.; Hassan, J. H. *On the general decay for a system of viscoelastic wave equations*. In Current Trends in Mathematical Analysis and Its Interdisciplinary Applications (pp. 287-310). Birkhäuser, Cham. 2019.
- [63] Mustafa, M. I. *Well posedness and asymptotic behavior of a coupled system of nonlinear viscoelastic equations*. Nonlinear Analysis: Real World Applications 13 (2012) 452-463.
- [64] Mustafa, M. I. *Optimal decay rates for the viscoelastic wave equation*. Mathematical Methods in the Applied Sciences 41 (1) (2018), 192-204.
- [65] Mustafa, M. I.; Messaoudi, S. A. *General stability result for viscoelastic wave equations*. Journal of Mathematical Physics. 53 (5) (2012), 053702.
- [66] Nicaise, S.; Pignotti, C. *Energy decay rates for solutions of Maxwell's system with a memory boundary condition*. Collect. Math. 58 (3) (2007), 327-342.
- [67] Park, J. Y.; Park, S. H. *Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions*. Nonlinear Analysis 74 (2011) 993-998.
- [68] Park, J. Y.; Kang, J. R. *Existence, uniqueness and uniform decay for the non-linear degenerate equation with memory condition at the boundary*. Applied Mathematics and Computation 202 (2008) 481-488.
- [69] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [70] Prüss, J. *Evolutionary integral equations and applications*. Monographs in Mathematics. 87. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [71] Rauch, J.; Taylor, M. *Decay of solutions to n nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds*. Comm. Pure Appl. Math. 28(4) (1975), 501-523.

- [72] Rivera, J. E. M. *Asymptotic behavior in linear viscoelasticity*. Quarterly of Applied Mathematics. 52 (4) (1994), 628-648.
- [73] Rivera, J. E. M.; Naso, M. G. *On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation*. Asymptotic Analysis. 49 (2006), 189-204.
- [74] Rivera, J. E. M.; Oquendo, H. P. *The Transmission Problem of Viscoelastic Waves*. Acta Applicandae Mathematicae. 62 (2000), 1-21.
- [75] Robbiano, L.; Zhang, Q. *Logarithmic Decay of a Wave Equation with Kelvin-Voigt Damping*. Mathematics 8 (5) (2020), 715.
- [76] Ruiz, A. *Unique Continuation for Weak Solutions of the Wave Equation plus a Potential*. J. Math. Pures. Appl. 71 (1992) 455-467.
- [77] Said-Houari, B. *Exponential growth of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms*. Z. Angew. Math. Phys. 62 (2011), 115-133.
- [78] Said-Houari, B.; Messaoudi, S. A.; Guesmia, A. *General decay of solutions of a nonlinear system of viscoelastic wave equations*. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 18 (2011), 6589-684.
- [79] Santos, M. L. *Decay rates for solutions of a system of wave equations with memory*. Electronic Journal of Differential Equations. 38 (2002), 1-17.
- [80] Santos, M. L.; Ferreira, J. *Stability for a system of wave equations of Kirchhoff with coupled nonlinear and boundary conditions of memory type*. Advances in Differential Equations. 8 (7) (2003), 873-896.
- [81] Santos, M. L.; Rocha, M. P. C.; Braga, P. L. O. *Global solvability and asymptotic behavior for a nonlinear coupled system of viscoelastic waves with memory in a noncylindrical domain*. J. Math. Anal. Appl. 325 (2007), 1077-1094.
- [82] Segal, I. E. *Nonlinear partial differential equations in quantum field theory*. 1965. Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. XVII pp. 210-226 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [83] Tatar, N-e. *Arbitrary decays in linear viscoelasticity*. Journal of Mathematical Physics. 52 (1) (2011), 013502.
- [84] Tebou, L. *Stabilization of some elastodynamic systems with localized Kelvin-Voigt damping*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 36 7117-7136 (2016).
- [85] Yang, X.; Zhang, J.; Wang, S. *Stability and dynamics of a weak viscoelastic system with memory and nonlinear time-varying decay*. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 40 (3) (2020), 1493-1515.
- [86] Yosida, K. *Functional Analysis*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [87] Zeidler, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Vol 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.

- [88] Zheng, S. *Nonlinear Evolution Equations*. Chapman & Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics. CRC Press, 2004.