UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

LEONEL GIACOMINI DELATORRE

Boa colocação e estabilidade para problemas hiperbólicos com amortecimento localizado: uma equação da viga extensível e um sistema de Klein-Gordon generalizado

Maringá
2021

LEONEL GIACOMINI DELATORRE

Boa colocação e estabilidade para problemas hiperbólicos com amortecimento localizado: uma equação da viga extensível e um sistema de Klein-Gordon generalizado

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Maringá
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Delatorre, Leonel Giacomini
D341b Boa colocação e estabilidade para problemas hiperbólicos com amortecimento localizado : uma equação da viga extensível e um sistema de Klein-Gordon generalizado / Leonel Giacomini Delatorre. -- Maringá, 2021.
117 f. : il.

Orientador: Prof.° Dr.° Marcelo Moreira Cavalcanti.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2021.

1. Problemas hiperbólicos semilineares – Amortecimento localizado. 2. Equação da viga extensível. 3. Sistema de Klein-Gordon generalizado. 4. Semilinear hyperbolic problems. 5. Extensible beam equation. 6. Generalized Klein-Gordon system. I. Cavalcanti, Marcelo Moreira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.35

Edilson Damasio CRB9-1.123

LEONEL GIACOMINI DELATORRE

BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE PARA PROBLEMAS HIPERBÓLICOS COM AMORTECIMENTO LOCALIZADO: UMA EQUAÇÃO DA VIGA EXTENSÍVEL E UM SISTEMA DE KLEIN-GORDON GENERALIZADO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti - UEM (Presidente)
Profa. Dra. Celene Buriol - UFSM
Prof. Dr. Wellington José Corrêa - UTFPR
Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino - UEM
Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria - UEM

Aprovado em: 13 de dezembro de 2021.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (https://meet.google.com/omh-bros-oro)

À minha mãe Marivete e à minha irmã Luana, dedico.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter permitido chegar até aqui com equilíbrio, força e coragem.

À minha mãe Marivete e à minha irmã Luana por estarem sempre presentes, sendo a fortaleza e a calmaria necessárias nos momentos de turbulência, mesmo (muitas vezes) sem entender direito sobre o processo de doutoramento e as tantas dificuldades inerentes a este. Obrigado por confiarem nas minhas decisões, sempre acreditando em minha capacidade, quando eu mesmo duvidava. Agradeço a vocês pelo amor, carinho e compreensão.

Aos meu familiares, agradeço por entenderem algumas ausências, bem como agradeço pelas orações e pelo apoio incondicional.

Aos grandes amigos que fiz nesta etapa de doutoramento. Em especial, agradeço a Taís Saito Tavares, Emanuela Régia de Sousa Coelho, Giovana Higinio e André Luiz Marques (*in memoriam*) por todas os auxílios, conversas, risadas e por deixarem esta caminhada mais saudável. Agradeço imensamente ao grande amigo Eduardo Henrique Gomes Tavares pelas valiosas dicas, contribuições e discussões, fundamentais à realização/finalização deste trabalho.

Aos meus amigos de graduação (UFSM) e mestrado (UFMG), por estarem sempre presentes, com uma palavra amiga e por todo o apoio recebido, nas mais diversas ocasiões. Em especial, agradeço a Thanise Azzolin dos Santos e Sílvia Gonçalves Santos. Um carinho especial a minha irmã de coração Daniela de Rosso Tolfo (*in memoriam*) que partiu para outro plano, a qual agradeço pelas longas conversas, conselhos e por me ajudar a manter a sanidade em tantos momentos difíceis.

Ao orientador, Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti, agradeço pela oportunidade, pela dedicação e pela paciência com que transmitiu seus conhecimentos.

À Profª. Drª. Celene Buriol (UFSM) agradeço pelo acolhimento, pela amizade e pelas contribuições para com este trabalho. Estendo o agradecimento à todos os autores dos artigos publicados que permitiram a conclusão desta tese.

De forma particular, agradeço a Daiane Campara Soares, amiga e colega de graduação, mestrado, doutorado e de instituição, por todo o apoio nos momentos de dificuldades que tivemos. Obrigado pela parceria, por não desistir e não permitir que eu desistisse também!

Aos professores da UEM agradeço por tantos conhecimentos e experiências compartilhadas. Estendo essa homenagem aos meus professores de graduação e mestrado, bem como aos membros da banca examinadora. Muito obrigado!!

Agradeço a Universidade Federal do Pampa pelo suporte financeiro no período de afastamento integral, bem como aos colegas do Campus Itaqui pelo apoio recebido.

Muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho, estudamos a boa colocação e comportamentos assintótico de soluções para dois problemas associados a modelos hiperbólicos semilineares com amortecimento localizado em domínios limitados. No primeiro modelo, consideramos a equação de uma viga semilinear com um amortecimento não linear localmente distribuído e provamos a boa colocação e a estabilidade uniforme do funcional de energia associado. Para fazer isso, construímos aproximações regularizantes adequadas e, a partir de uma desigualdade de observabilidade associada ao problema linear e uma propriedade de continuação única, obtemos o resultado desejado. No segundo problema, consideramos um sistema Klein-Gordon não linear agindo em um meio não-homogêneo e sujeito a um amortecimento localizado. Para esse sistema, mostramos a boa colocação e que a energia correspondente ao sistema decai exponencialmente para zero, para todos os dados iniciais tomados em conjuntos limitados do espaço de fase.

Palavras-Chave: Problemas hiperbólicos semilineares com amortecimento localizado; Equação da viga extensível; Sistema de Klein-Gordon generalizado.

Abstract

In this work, we study the well-posedness and asymptotic behavior of solutions to two problems associated with semilinear hyperbolic models with localized damping in limited domains. In the first model, we consider the equation of a semilinear beam with locally distributed nonlinear damping and prove the well-posedness and uniform stability of the associated energy functional. To do this, we construct suitable regularizing approximations and, from an observability inequality associated with the linear problem and a unique continuation property, we obtain the desired result. In the second problem, we consider a non-linear Klein-Gordon system acting in a non-homogeneous medium and subject to localized damping. For this system, we show the well-posedness and that the energy corresponding to the system decays exponentially to zero, for all initial data taken in bounded sets of phase space.

Key-words: Semilinear hyperbolic problems with localized damping; Extensible beam equation; Generalized Klein-Gordon system.

Sumário

Introdução

Nesta tese investigaremos a boa colocação e estabilidade de energia para dois problemas de valor inicial e de fronteira associados ao seguinte modelo hiperbólico semilinear com amortecimento localizado:

$$\begin{cases} \rho(x)\,\partial_t^2 u + \mathbf{A}u + f_1(u,v) + a(x)\,g_1(\partial_t u) = 0, \\ \rho(x)\,\partial_t^2 v\ + \mathbf{A}v + f_2(u,v) + b(x)\,g_2(\partial_t v)\ = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Sistemas do tipo (1) são amplamente estudados na literatura, principalmente quando $\mathbf{A} = -\operatorname{div}(K(x)\nabla u)$ [23], o qual engloba o caso $\mathbf{A} = -\Delta$ [31, 32, 50, 51, 52, 63]. Em particular, considerando $v \equiv 0$, $f_1(u,v) = f(u)$, $f_2 \equiv 0$, reduzimos o sistema original a uma única equação:

$$\rho(x)\,\partial_t^2 u + \mathbf{A}u + \tilde{f}(u) + a(x)\,g(\partial_t u) = 0. \tag{2}$$

A equação (2) possui uma gama de resultados na literatura. De fato, mencionamos os trabalhos [1], [7], [9], [14], [16], [22], [24], [28], [30], [36], [41], [42], [43], [48], [53], [54], [55], [58], [59], [62], [67], [68], [70], [76] no caso em que $\mathbf{A} = -\Delta$ e [18], [19], [34], [35], [38], [40], [44], [49], [56], [69], [71] no caso em que $\mathbf{A} = \Delta^2$.

Desta forma, o foco da presente tese será nos seguintes casos:

• **Problema 1:** O primeiro problema a ser estudado será um caso particular de (2) com

$$\rho \equiv 1, \quad \mathbf{A} = \Delta^2, \quad \tilde{f}(u) = -b\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u + f(u).$$

Ou seja,

$$\partial_t^2 u + \Delta^2 u - b\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u + f(u) + a(x)\,g(\partial_t u) = 0. \tag{3}$$

• **Problema 2:** O segundo problema a ser estudado será um caso particular de (1) com

$$\mathbf{A} = -\operatorname{div}(K(x)\nabla(\cdot)), \quad f_1(u,v) = |v|^{p+2}\,|u|^p\,u \quad f_2(u,v) = |u|^{p+2}\,|v|^p\,v, \quad g_1(s) = g_2(s) = s.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + |v|^{p+2}\,|u|^p\,u + a(x)\partial_t u = 0 & \text{em } \ \Omega \times (0,\infty), \\ \rho(x)\partial_t^2 v - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + |u|^{p+2}\,|v|^p\,v + b(x)\partial_t v = 0 & \text{em } \ \Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{4}$$

No que segue, apresentamos o estado da arte de cada problema abordado nesta tese.

Problema 1: Uma Equação da viga extensível

Estimativas de taxas de decaimento para o funcional de energia associada as soluções de equações hiperbólicas com amortecimentos localizados têm sido amplamente estudadas por muitos autores, sob diferentes condições. Dentre os artigos relacionados a este tema, destacamos inicialmente o trabalho de Zuazua [76]. Neste trabalho, o autor prova o decaimento exponencial uniforme do funcional de energia correspondente as soluções de uma equação da onda semilinear, reduzindo o problema em questão ao uso do principio de continuação única provado por Ruiz [61]. Para outro trabalhos com respeito a equação da onda com amortecimento localizado, veja [3, 16, 22, 23]. No entanto, devido a ausência de resultados similares para problemas de viga/placa, a estabilidade exponencial para problemas do tipo (3) (mesmo com $b = 0$) ainda permaneceu em aberto por um tempo. Especificamente, esta insuficiência estaria associada à falta de um resultado de continuação única para as soluções fracas da equação da viga/placa com coeficientes não suaves. Porém, esta questão foi recentemente resolvida por Khanmamedov e Simsek [39, 65] ao considerar amortecimentos localizados do tipo friccional e Kelvin-Voight em domínios ilimitados. Em particular, ressaltamos que no trabalho [65], os autores mostram que o funcional de energia é de fato uma contração, o que leva ao decaimento exponencial de energia para o problema. Para isso, foi utilizada uma combinação da compacidade assintótica uniforme para a família de semigrupos gerados pelas soluções fracas do problema em questão com uma propriedade dissipativa da equação da placa semilinear estabelecida em [37], e também invocam algumas desigualdades de energia obtidas em [77] para o caso superlinear.

Nesta perspectiva, destacamos que as principais contribuições deste trabalho residem na complementação dos trabalhos acima mencionados [39, 65], em dois sentidos:

(i) Considerar um termo de amortecimento não linear localizado $a(\cdot)\, g(\partial_t u)$ e um termo de extensibilidade da viga $b\, \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \Delta u$;

(ii) Introduzir uma nova abordagem ao tratar das estimativas de decaimento uniforme associadas ao problema (3), utilizando a desigualdade de observabilidade para o problema linear

$$\begin{cases} \partial_t^2 z + \Delta^2 z = f & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ z = \partial_\nu z = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ z(0) = z_0,\ \partial_t z(0) = z_1 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

estabelecida por Tucsnak [71], bem como o fato de que a aplicação que associa os dados iniciais $\{z_0, z_1, f\}$ com a única solução do problema linear (5) é linear e contínua [47].

É importante ressaltar que a ausência de resultados de continuação única para domínios gerais torna bastante difícil tanto o tratamento dos termos não lineares na passagem ao limite, quanto a obtenção de uma propriedade de continuação única para o modelo dado em (3). Isto nos motivou a adotar uma nova estratégia para estabilizar equações de vigas localmente amortecidas, embasando um primeiro trabalho com modelos aproximados cujos termos fonte são Lipschitz contínuos. Mais especificamente, ao invés de estudar o problema (3), vamos tratar da seguinte sequência de problemas auxiliares truncados:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \Delta^2 u - b\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u + f_k(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,+\infty), \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

em que, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos uma sequência de truncamentos de f, a saber, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f_k(s) := \begin{cases} f(s), & |s| \leqslant k, \\ f(k), & s > k, \\ f(-k), & s < -k. \end{cases}$$

A partir de tais modelos aproximados, construiremos uma sequência de soluções (u_k) que possuem as propriedades desejadas de unicidade e regularidade forte (no sentido de semigrupos não-lineares) que nos conduzirão, na passagem ao limite, a uma solução fraca do problema original (3). Neste sentido, nos concentraremos na estabilidade uniforme das soluções desses modelos aproximados. Isto é consideravelmente mais simples do que trabalhar com o modelo não linear, visto que podemos obter, a partir do trabalho de Kim [40], uma propriedade de continuação única para os modelos aproximados. Com isso, poderemos validar uma desigualdade de observabilidade para o nosso problema (3) e estabelecer o decaimento da energia a partir de uma equação diferencial ordinária não linear, conforme trabalho de Lasiecka e Tataru [41].

Problema 2: Um sistema de Klein-Gordon Generalizado

O modelo proposto neste trabalho é inspirado em um sistema introduzido por Segal em [63], dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + g v^2 u = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + h u^2 v = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \end{cases} \tag{6}$$

que descreve a interação dos campos escalares u, v de massa m_1, m_2, respectivamente, com constantes de interação g e h. Como o interesse deste trabalho é fazer a análise matemática, não há perda de generalidade em considerar apenas o caso em que $m_1 = m_2 = 0$ e $g = h = 1$. Estas condições, aliadas à condição de fronteira de Dirichlet em $\partial\Omega$, embasaram o trabalho de Medeiros e Menzala [50]. Neste artigo, os autores provaram a existência e unicidade de soluções globais fracas, usando o método de Galerkin restrito a dimensões $d \leqslant 3$.

Ainda, nesse sentido, destacamos os trabalhos [51, 52], onde os autores consideram as não linearidades da forma $|v|^{p+2}|u|^p u$, $|u|^{p+2}|v|^p v$, em que a potência de crescimento p está relacionada à dimensão d do espaço. Com respeito à existência global e unicidade de soluções mencionamos o artigo de Andrade e Mognon [2], onde os autores provam a existência de soluções para um sistema Klein-Gordon com memória e não linearidades semelhantes às consideradas em [51, 52]. Outra generalização para este sistema pode ser encontrada no trabalho de Cousin *et al* [26], onde os autores consideram um sistema $k \times k$ das equações de Klein-Gordon com condições de fronteira acústicas.

No caso em que os meios são homogêneos, ressaltamos os trabalhos [31, 32]. Nestes artigos, a estabilidade exponencial para o sistema (6) é estabelecida considerando dois termos de amortecimento friccionais $a(x)\partial_t u$ e $b(x)\partial_t v$. Ainda, em um trabalho mais recente, Cavalcanti *et al* [23] consideraram o seguinte problema em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + v^2 u + a(x)u_t - \gamma(x)v_t = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + u^2 v + b(x)v_t + \gamma(x)u_t = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{in } \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = v_1(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

Utilizando argumentos de análise microlocal e estimativas de Strichartz, os autores obtiveram o decaimento exponencial para as soluções do problema (7) desde que os dados iniciais sejam tomados em conjuntos limitados do espaço de fase natural.

Motivados pela exposição bibliográfica supracitada, o objetivo principal relacionado ao sistema (4), é provar a existência e unicidade de soluções generalizadas e ainda, que essas soluções decaem exponencialmente e uniformemente para zero, isto é, considerando

$$\begin{aligned} E_{(u,v)}(t) = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \rho(x)|u_t(x,t)|^2 dx + \int_\Omega \rho(x)|v_t(x,t)|^2 dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)^\top \cdot K(x)\cdot \nabla u(x,t)dx\right] \\ + \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \nabla v(x,t)^\top \cdot K(x)\cdot \nabla v(x,t)dx + \frac{2}{p+2}\int_\Omega |uv|^{p+2}(x,t)dx\right], \end{aligned}$$

provaremos que existem constantes positivas C, γ, tais que

$$E_{(u,v)}(t) \leqslant Ce^{-\gamma t}E_{(u,v)}(0), \quad \text{para todo } t \geqslant T_0, \tag{8}$$

para toda solução generalizada do problema (4), desde que os dados iniciais (u_0, v_0, u_1, v_1) sejam tomados em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Este resultado é um *resultado de estabilização local*. De fato, as constantes C e γ são uniformes em cada bola de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com raio $R > 0$ do espaço de fase, mas o resultado não garante que a taxa de decaimento seja global, ou seja, que (8) é válido com constantes C, γ, que são independentes dos dados iniciais.

Inspirados por argumentos de Dehman, Gérard, Lebeau [27] ou Dehman, G. Lebeau e Zuazua [28], apresentaremos uma prova direta da desigualdade de observabilidade para (4), ou seja, provaremos que dado $T > T_0$ existe uma constante positiva $C = C(T)$ tal que

$$E_{(u,v)}(0) \leqslant C\int_0^T \int_\Omega (a(x)\,|\partial_t u(x,t)|^2 + b(x)\,|\partial_t v(x,t)|^2)\,dx\,dt, \tag{9}$$

desde que os dados iniciais sejam considerados em conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times$

$L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Com (9) em mãos juntamente com a identidade de energia correspondente, mostramos que a energia é dominada por uma função exponencial com taxa negativa. Ao não assumimos quaisquer restrições ao expoente de crescimento da não linearidade, generalizamos resultados anteriores disponíveis na literatura para $d = 2$. Além disso, a grande vantagem de usar argumentos de análise microlocal é que podemos usar o fluxo geodésico a nosso favor, a fim de direcionar as geodésicas para que elas entrem na região onde a dissipação é efetiva e, por isso, consideramos $d = 2$. Isso só é possível para certos casos especiais envolvendo a métrica $G = (K/\rho)^{-1}$.

A presente tese está organizada da seguinte maneira:

- O capítulo 1 consiste da apresentação de alguns resultados preliminares, essenciais para uma boa compreensão dos demais capítulos;

- No capítulo 2 mostramos resultados de boa colocação e estabilidade (localmente) uniforme para (3) utilizando aproximações e argumentos de compacidade. Tais resultados estão publicados no artigo [15];

- No capítulo 3, apresentamos a existência e unicidade de soluções generalizadas (no sentido da fórmula da variação dos parâmetros) para (4), bem como o decaimento exponencial da energia associada as soluções de (4). Para isso, utilizamos a medida de defeito microlocal para propagar as convergências do termo dissipativo para todo o domínio. Os resultados deste capítulo estão publicados no artigo [12].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$ pontos do $\mathbb{R}^d$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2..., \alpha_d)$ d$-$uplas de números inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2... + \alpha_d$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_d!$, denotaremos o operador derivação em $\mathbb{R}^d$ por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^d$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Definimos o *suporte* da função φ em Ω, e denotamos por $\text{supp}(\varphi)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $\text{supp}(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$\varphi_\nu \to \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

(i) $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu$ e $\text{supp}(\varphi) \subset K$;

(ii) $D^\alpha\varphi_\nu \to D^\alpha\varphi$ uniformemente sobre $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em (1.1). Chamaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω. Diremos que $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, uma sequência de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$, converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e escreveremos

$$T_\nu \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle\,,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^d$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T, denotada por $D^\alpha T$, é dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle\,,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens, $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e além disso, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua.

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^d$ e p um número real tal que $1 \leqslant p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u, definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se define por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leqslant C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leqslant C \text{ q.s. em } \Omega\},$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$, com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$$

e a norma $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = (u, u)_{L^2(\Omega)}$, é um espaço de Hilbert.

Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Young). *Se a e b são números reais não negativos então*

$$ab \leqslant \frac{a^q}{q} + \frac{b^p}{p}$$

sempre que $1 < p, q < \infty$ e $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$.

A desigualdade de Young também pode tomar a seguinte forma

$$ab \leqslant \varepsilon a^q + C(\varepsilon)\, b^p.$$

Referência: [29, Apêndice B.2.c e B.2.d, p. 622]

Proposição 1.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv| \leqslant ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Referência: Ver [29, Apêndice B.2.e, p. 622].

Proposição 1.3 (Desigualdade de Hölder generalizada). *Sejam $f_1, f_2, ..., f_k$ funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega), 1 \leqslant i \leqslant k$, onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leqslant 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 ... f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Referência: Ver [29, Apêndice B.2.g, p. 623].

Teorema 1.4 (Convergência Dominada de Lebesgue). *Se uma sequência $\{f_k\}$ de funções integráveis a Lebesgue num conjunto Ω converge quase sempre em Ω para um função f, e se $|f_k| \leqslant \psi$, quase sempre em Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, para um certa função $\psi \in L^1(\Omega)$, então a integral $\int_\Omega f$ existe e*

$$\int_\Omega f dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, dx.$$

Referência: Ver [4, Teorema 1.2.6, p. 9].

Teorema 1.5 (Teorema da Convergência Dominada Inversa). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto e $\{u_k\}_k \subset L^p(\Omega), p \in [1, +\infty]$, uma sequência tal que $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ quando $k \to \infty$. Então, existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}_j$ e uma função $v \in L^p(\Omega)$ tais que*

(i) $u_{k_j}(x) \to u(x)$ q. s. em Ω quando $j \to \infty$;

(ii) para todo j, $|u_{k_j}(x)| \leqslant v(x)$ q. s. em Ω.

Referência: Ver [4, Teorema 1.2.7 ; p. 10].

1.3 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^d$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ e $m \geqslant 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções de $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $\alpha \leqslant m$. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, |\alpha| \leqslant m\}.$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$||u||^p_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } p = +\infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escreve-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e, munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx,$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W^{m,p}_0(\Omega)$ como sendo fecho de $C^\infty_0(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C^\infty_0(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W^{m,p}_0(\Omega), \qquad 1 \leqslant p < +\infty.$$

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^d$ e $1 \leqslant p < +\infty$, então a norma em $W^{m,p}_0(\Omega)$, dada por

$$||u||^p_{m,p} = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx,$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1.6. *Em particular, consideramos em $H^m_0(\Omega)$ a norma*

$$||u||^2_{H^m_0(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx,$$

é equivalente a norma induzida por $H^m(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W^{m,p}_0(\Omega)$, onde $1 \leqslant p < +\infty$ e p' é o índice conjugado de p. Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H^m_0(\Omega)$.

Teorema 1.7 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do $\mathbb{R}^d$, então, existe uma constante $C = C(med\,(\Omega))$ tal que*

$$\|u\| \leqslant C\, \|\nabla u\|, \forall\, u \in H^1_0(\Omega).$$

Referência: Ver [21, Proposição 6.22, p. 441]

Teorema 1.8. *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^d$, de classe C^m, com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geqslant 1$, e $1 \leqslant p < \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

(i) *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$;*

(ii) *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$;*

(iii) *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Referência: Ver [20, Teorema 1, p. 208].

Teorema 1.9 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^d$, para $d \geqslant 2$. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) *se $p < d$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, 1 \leqslant q < \frac{dp}{d-p}$;*

(ii) *se $p = d$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$;*

(iii) *se $p > d$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$.*

Referência: Ver [20, Teorema 3, p. 209].

Teorema 1.10. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, em que I é um intervalo limitado de $\mathbb{R}$. Então, existe $\widetilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que*

$$u = \widetilde{u} \quad q.\ s.\ em\ I$$

e

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\, dt,$$

para quaisquer $x, y \in \bar{I}$.

Referência: Ver [11, Teorema 8.2, p. 204].

1.4 Traço de uma função de $H^m(\Omega)$

Se $u \in C(\overline{\Omega})$, podemos obter os valores de u sobre a fronteira Γ de Ω, basta para isto tomar a restrição $u_{|\Gamma}$. Entretanto, se $u \in H^m(\Omega)$, como a medida n-dimensional de Γ é zero, não tem sentido, a priori, falar dos valores de u em Γ. O objetivo da teoria de traço é dar um significado para $u_{|\Gamma}$.

Conforme explicitado em [20], existe uma única aplicação

$$\gamma : H^m(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)u \qquad\qquad \longmapsto \{\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\},$$

denominada aplicação traço, que é linear, contínua, sobrejetiva, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, verificando

$$\gamma u = \left(u_{|\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial_\nu}\,|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial_\nu^{m-1}}\,|_\Gamma \right), \forall\, u \in D(\overline{\Omega}),$$

e admitindo uma inversa à direita γ^{-1} linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear

$$\gamma^{-1} : \prod_{j=0}^{m-1} H_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \to H^m(\Omega),$$

que é contínua e satisfaz

$$\gamma(\gamma^{-1}\xi) = \xi, \, \forall \, \xi \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Tomando, em particular, m = 1, temos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\to H^{1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0 u = u_{|_\Gamma}, \end{aligned}$$

que é denominada aplicação traço de ordem zero.

Consideremos $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)\,;\, \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munido do produto interno

$$(u, v)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)},$$

o que o faz um espaço de Hilbert. A aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_1 : D(\overline{\Omega}) &\to H^{-1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\,|_\Gamma \end{aligned}$$

prolonga-se, por continuidade, a uma única aplicação linear e contínua $\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, posto que $D(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Proposição 1.11. *A aplicação traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ é sobrejetiva e, além disso,*

$$Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega).$$

Referência: Ver [20, Teorema 2, p. 336].

1.5 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca-$*$, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

Considerando X um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(X, X')$ sobre X é a topologia menos fina sobre X que torna contínuas todas as aplicações $f \in X'$.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para x na topologia fraca $\sigma(X, X')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que (x_n) converge fraco para x esse fato denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

Proposição 1.12. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X, então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* X *se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\, f \in X'$;

(ii) Se $x_n \to x$ *em* X*, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* X;

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* X*, então* $||x||_X$ *é limitada e* $||x||_X \leqslant \liminf ||x_n||_X$;

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* X *e* $f_n \to f$ *em* X'*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Referência: Ver [21, Proposição 3.12, p. 112].

Sejam X um espaço de Banach e $x \in X$ fixo. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} J_x : X' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \,, \end{array}$$

que é linear e contínua e portanto $J_x \in X''$, $\forall\, x \in X$. Deste modo, definamos a aplicação $J : X \to X''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de X em X''.

A topologia fraca $*$, ou $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina sobre X' que faz contínuas todas as aplicações J_x.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para f na topologia fraca $*$ $\sigma(X, X')$. Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que $\{f_n\}$ converge fraco $*$ para f, ou simbolicamente

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } X',$$

quando não houver possibilidade de confusão.

Proposição 1.13. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X', então:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* X' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\, x \in X$;

(ii) Se $f_n \to f$ *forte, então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(X', X'')$;

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(X', X'')$*, então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* X';

(iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* X'*, então* $||f_n||_{X'}$ *é limitada e* $||f||_{X'} \leqslant \liminf ||f_n||_{X'}$;

(v) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* X' *e* $x_n \to x$ *em* X*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Referência: Ver [21, Proposição 3.30, p. 123].

Dizemos que um espaço de Banach é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : X \to X''$ é sobrejetora. Um espaço métrico X é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset X$ enumerável e denso em X.

Teorema 1.14. *Seja X um espaço de Banach tal que X' é separável. Então X é separável.*

Referência: Ver [21, Teorema 3.53, p. 145].

Teorema 1.15. *Seja X um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X'. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca $*$ ($\sigma(X', X)$).*

Referência: Ver [21, Corolário 3.61, p. 152].

Teorema 1.16. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sequência limitada em X. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca ($\sigma(X, X')$).*

Referência: Ver [21, Proposição 3.63, p. 153].

1.6 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar espaços envolvendo as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido a problemas de evolução.

Para $t \in (0, T)$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x, t)$ como um elemento do espaço X. Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$ com valores no espaço X.

Sejam X um espaço de Banach e $T > 0$. Define-se:

- O espaço $L^p(0, T; X)$, $1 \leqslant p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0, T]$ com imagem em X, ou seja, as funções $u : (0, T) \to X$ tais que
$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \; dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

- O espaço $L^\infty(0, T; X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0, T]$ com imagem em X, isto é, as funções $u : (0, T) \to X$ limitadas quase sempre em $(0, T)$. A norma neste espaço é dada por
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup \operatorname{ess} \|u(t)\|_X \, .$$

- O espaço $C^m([0, T]; X)$, $m = 0, 1, 2, \cdots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [0, T] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[0, T]$. A norma, neste caso, é dada por
$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[0,T]} \left| u^{(i)}(t) \right| .$$

Proposição 1.17. *Sejam $m = 0, 1, \cdots, 1 \leqslant p < +\infty$, X e Y espaços de Banach.*

(a) $C^m([0,T];X)$ *é um espaço de Banach sobre* $\mathbb{K}$.

(b) $L^p(0,T;X), 1 \leqslant p < +\infty$ *e* $L^\infty(0,T;X)$ *são espaços de Banach sobre* $\mathbb{K}$.

(c) $C([0,T];X)$ *é denso* $L^p(0,T;X)$ *e a imersão* $C([0,T];X) \hookrightarrow L^p(0,T;X)$ *é contínua.*

(d) Se X *é um espaço de Hilbert com produto interno* $(.,.)_X$ *então* $L^2(0,T;X)$ *é também um espaço de Hilbert com produto interno*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} := \int_\Omega (u(t), v(t))_X \, dt.$$

(e) $L^p(0,T;X)$ *é separável se* X *for separável e* $1 \leqslant p < +\infty$.

(f) O espaço $L^p(0,T;X)$ *é reflexivo se* $1 < p < +\infty$.

(g) Se $X \hookrightarrow Y$*, então* $L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y)$, $1 \leqslant q \leqslant r \leqslant +\infty$.

Referência: Ver [75, Proposição 23.2, p. 407].

Proposição 1.18. *Seja* X *um espaço de Banach. Para todo* $u \in L^1(0,T;X)$ *vale*

$$\left\| \int_0^T u(t)\, dt \right\|_X \leqslant \int_0^T \|u(t)\|_X \, dt$$

Referência: Ver [73, Corolário 1, p. 133-134].

O espaço dual de $L^p(0,T;X)$. Consideremos $Y = L^p(0,T;X)$. Temos a seguinte relação de dualidade $Y' = L^q(0,T;X')$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, devido ao seguinte teorema:

Teorema 1.19. *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e separável,* $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $0 \leqslant T < +\infty$*. Então temos que:*

- *Se* $u \in L^p(0,T;X)$*, então*

$$\left\langle v, \int_0^T u(t)\, dt \right\rangle = \int_0^T \langle v, u(t) \rangle \, dt, \quad \forall\, v \in X'.$$

- *Se* $u \in L^p\,(0,T;X')$*, então*

$$\left\langle \int_0^T u(t)\, dt, v \right\rangle = \int_0^T \langle u(t), v \rangle \, dt, \quad \forall\, v \in X.$$

Referência: Ver [75, Proposição 23.9, p. 412].

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço localmente convexo e completo das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0,T)$. Dizemos que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é tal que

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0,T;X)$$

se:

(i) Existe um compacto K de $(0,T)$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi_\nu)$ e $\operatorname{supp}(\varphi)$ estão contidos em K, para todo ν;

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi$ em X, uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0,T) = \mathcal{D}(0,T;\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ se $S : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é linear e se $\theta_\nu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ implicar que $\langle S,\theta_\nu\rangle \to \langle S,\theta\rangle$ em X. Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;X)$$

se

$$\langle S_\nu,\theta\rangle \to \langle S,\theta\rangle \ \text{ em }, \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

O espaço $\mathcal{D}(0,T;X)$ munido da convergência acima é denominado espaço das *distruibuições vetoriais* de $(0,T)$ com valores em X.

Sendo H um espaço de Hilbert, denotaremos por $H_0^1(0,T;H)$ o espaço

$$H_0^1(0,T;H) := \{v \in L^2(0,T;H);\ v' \in L^2(0,T;H);\ v(0) = v(T) = 0\}$$

que também é de Hilbert, quando munido com o produto interno

$$(w,v)_{H_0^1(0,T;H)} = \int_0^T (w(t),v(t))_H\,dt + \int_0^T (w'(t),v'(t))_H\,dt.$$

Identificando $L^2(0,T;H)$ com o seu dual $[L^2(0,T;H)]'$, via Teorema de Riesz, obtemos

$$\mathcal{D}(0,T;H) \hookrightarrow H_0^1(0,T;H) \hookrightarrow L^2(0,T;H) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;H) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;H),$$

onde $H^{-1}(0,T;H) = [H_0^1(0,T;H)]'$.

Lema 1.20 (Compacidade Sequencial Fraco-Estrela)**.** *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável. Então, toda sequência limitada (v_k) em $L^\infty(0,T;X^{'})$ admite uma subsequência satisfazendo*

$$v_k \xrightarrow{\ *\ } v \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X^{'}), \quad \text{quando} \quad k \to \infty,$$

isto é, para todo $u \in L^1(0,T;X)$, temos

$$\int_0^T \langle v_k(t),u(t)\rangle_{X',X}\,dt \longrightarrow \int_0^T \langle v(t),u(t)\rangle_{X',X}\,dt, \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Referência: Ver [75, Problema 23.12e; p. 449].

Lema 1.21. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, X um espaço reflexivo, tais que $X \hookrightarrow Y$. Definimos $C_w(0,T;Y)$ como o espaço das funções $\eta \in L^\infty(0,T;Y)$ que são escalarmente contínuas de $[0,T] \mapsto Y$, isto é, funções tais que a aplicação $t \to \langle \eta(t), y' \rangle$ é contínua em $[0,T]$, $\forall\, y' \in Y'$, dual topológico de Y. Então,*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_w(0,T;Y) = C_w(0,T;X).$$

Referência: Ver [47, Lema 8.1; p. 297].

Proposição 1.22. *Sejam X e Y dois espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y$. Se $u \in L^1(0,T;X)$ e $\partial_t u \in L^1(0,T;Y)$, então $u \in C([0,T];Y)$.*

Referência: Ver [75, Problema 23.13a; p. 450].

Lema 1.23. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável. Se*

$$v_k' = u_k \quad \text{sobre} \quad (0,T), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

no sentido distribucional e, ainda, valem as convergências

$$\begin{aligned} u_k &\xrightarrow{\ *\ } u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X'), \quad \text{quando} \quad k \to \infty, \\ v_k &\xrightarrow{\ *\ } v \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;X'), \quad \text{quando} \quad k \to \infty, \end{aligned}$$

então,

$$v' = u \quad \text{sobre} \quad (0,T).$$

Referência: Ver [75, Problema 23.12g; p. 449-450].

1.7 Resultados Complementares

Teorema 1.24 (Fórmulas de Green)**.**

1. *Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \nabla\gamma \cdot \nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta\gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} u ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

2. *Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega u\Delta\gamma - \gamma\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} ds.$$

Referência: Ver [11, p. 316].

Teorema 1.25 (Regularidade Elíptica). *Sejam m um inteiro não negativo e*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

em que

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\overline{\Omega}) \quad (i,j = 1, \ldots, n).$$

Supondo $f \in H^m(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

para $\partial\Omega$ de classe C^{m+2}, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega).$$

Referência: Ver [29, Teorema 5; p. 323].

Teorema 1.26 (Teorema da Divergência - adaptado). *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) \in L^2(\Omega),$$

em que $K(x)$ é uma matriz $d \times d$ com entradas $k_{ij} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leqslant i, j \leqslant d$, funções de classe $C^\infty(\Omega)$. Considere também $v \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) \cdot v(x)\, dx = -\int_\Omega (\nabla u(x))^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x)\, dx.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) \cdot v(x)\, dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \cdot v(x) \right] dx \\ &\quad - \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) \cdot v(x)\, dx &= \int_\Omega \operatorname{div}\left[v(x) \cdot K(x) \cdot \nabla u(x)\right] dx \\ &\quad - \int_\Omega (\nabla u(x))^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x)\, dx. \end{aligned}$$

Como $v = 0$ em $\partial\Omega$, segue do Teorema da Divergência que

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left[v(x) \cdot K(x) \cdot \nabla u(x)\right] dx = \int_{\partial\Omega} \left[v(x) \cdot K(x) \cdot \nabla u(x)\right] \cdot v(x)\, dx = 0.$$

Logo,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(K(x)\nabla u(x)) \cdot v(x)\, dx = -\int_\Omega (\nabla u(x))^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x)\, dx.$$

$\square$

Teorema 1.27 (Teorema da Compacidade de Aubin-Lions-Simon)**.** *Sejam $B_0 \subset B_1 \subset B_2$ três espaços de Banach. Assuma que a imersão de B_1 em B_2 é contínua e que a imersão de B_0 em B_1 é compacta. Sejam p, r tais que $1 \leqslant p, r \leqslant +\infty$. Para cada $T > 0$, definimos*

$$E_{p,r} = \{v \in L^p(0,T;B_0), v_t \in L^r(0,T;B_2)\}.$$

i) Se $p < +\infty$, a imersão de $E_{p,r}$ em $L^p(0,T;B_1)$ é compacta.

ii) Se $p = +\infty$ e se $r > 1$, a imersão de $E_{p,r}$ em $C([0,T],B_1)$ é compacta.

Referência: Ver [10, Teorema II.5.16, p. 102].

Lema 1.28 (Lema de Lions)**.** *Seja (u_μ) uma sequência de funções em $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

(i) *$u_\mu \to u$ quase sempre em Q;*

(ii) $\|u_\mu\|_{L^q(Q)} \leqslant C, \ \ \forall \mu \in \mathbb{N}$;

então $u_\mu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Referência: Ver [45, Lema 1.3, p. 12].

Proposição 1.29 (Lema de Gronwall)**.** *Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $\varphi \in L^1(0,T)$ tais que $z(x) \geqslant 0$, $\varphi(t) \geqslant 0$ e seja $c \geqslant 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leqslant c + \int_0^t z(s)\varphi(s)ds, \ \forall t \in (0,T),$$

então

$$\varphi(t) \leqslant c.e^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in (0,T).$$

Referência: Ver [64, Lema 4.2′, p. 179].

Teorema 1.30 (Teorema de Representação de Riesz-Fréchet)**.** *Seja H um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que*

$$\langle \varphi, u\rangle = (f, u), \ \forall u \in H.$$

Além disso,

$$||f||_H = ||\varphi||_{H'}.$$

Referência: Ver [11, Teorema 5.5, p. 135].

Definição 1.31. *Seja H um espaço de Hilbert. Se diz que uma forma bilinear $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ é*

(i) contínua *se existe uma constante C tal que*

$$|a(u,v)| \leqslant C|u||v|, \ \forall u, v \in H \ e$$

(ii) coerciva *se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geqslant \alpha |v|^2, \ \forall v \in H.$$

Teorema 1.32 (Lax-Milgram). *Seja $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \ \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \ e \ \frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, v\rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Referência: Ver [21, Corolário 4.15, p. 181].

Teorema 1.33 (Teorema de Holmgren). *Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes em R^d. Seja u solução de $Pu = 0$ em Q_1, onde Q_1 é um aberto de R^d. Suponha $u = 0$ em Q_2, onde Q_2 é um subconjunto aberto e não vazio de Q_1. Então $u = 0$ em Q_3, onde Q_3 é um subconjunto aberto de Q_1 que contém Q_2 e tal que qualquer hiperplano característico do operador P que intersecta Q_3 também intersecta Q_2.*

Referência: Ver [46, Teorema 8.1, p. 88].

Proposição 1.34 (Desigualdade de Jensen). *Seja B um hipercubo do $\mathbb{R}^d$, então, para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$, teremos*

$$F\left(\frac{1}{medB}\int_B g(x)dx\right) \geqslant \frac{1}{medB}\int_B F(g(x))dx.$$

Referência: Ver [60, Teorema 3.3, p. 62].

Lema 1.35 (Lema de Strauss). *Sejam $\mathcal{O}$ um aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, $1 < q < +\infty$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que é limitada em $L^q(\mathcal{O})$. Se $u_n \to u$ q. s. em $\mathcal{O}$, então $u \in L^q(\mathcal{O})$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^q(\mathcal{O})$. Mais do que isso, se $1 \leqslant r < q$ então $u_n \to u$ em $L^r(\mathcal{O})$.*

Referência: Ver [11, Exercício 4.16, p. 123] ou [66].

1.8 Operadores definidos por terna

Consideremos V e H dois espaços de Hilbert complexos, tais que $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ e V é denso em H. Seja também $a(u,v)$ uma forma bilinear, hermitiana e contínua em $V \times V$, tal que existem α_0 e α em $\mathbb{R}$, com $\alpha > 0$, satisfazendo a condição de coercividade

$$Re[a(v,v)] + \alpha_0 (v,v)_H \geqslant \alpha \|v\|_V^2, \forall v \in V.$$

Consideremos

$$D(A) = \{u \in V;\ \text{a forma linear } v \mapsto a(u,v) \text{ é contínua}\},$$

onde V está munido com a topologia de H.

Pelo teorema de Riesz, para cada $u \in D(A)$ existe um único $Au \in H$, tal que $a(u,v) = (Au, v)_H, \forall v \in V$. Note que, desta forma definimos um operador A com domínio

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H, \forall v \in V\} \text{ e } Au = f.$$

Portanto, temos que $D(A)$ é um subespaço linear de H e $A : D(A) \subset V \longrightarrow H$ é um operador de H. Assim, diremos que A é definido pela terna $\{V, H, a(u,v)\}$.

Proposição 1.36 (Teorema Espectral)**.** *Nas condições acima, obtemos:*
(i) A é auto-adjunto e existe um sistema ortonormal completo $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de H constituído de vetores próprios de A.
(ii) Se $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ são os valores próprios de A correspondentes aos $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, então

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\nu \leqslant \ldots,\ e\ \lambda_\nu \longrightarrow \infty.$$

(iii) O domínio de A é dado por:

$$D(A) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 |(u, \omega_\nu)_H|^2 < \infty \right\}.$$

(iv) $Au = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (u, \omega_\nu)_H \omega_\nu, \forall u \in D(A)$.

Referência: Ver [21, Teorema 5.146, p. 368].

1.8.1 Os operadores $-\Delta$ e Δ^2

Seja $-\Delta$ o operador definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$, onde

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v}\, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

e

$$D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

O teorema espectral para operadores auto-adjuntos garante a existência de um sistema (ω_ν) de $L^2(\Omega)$ ortonormal completo constituído pelas autofunções do operador $-\Delta$, soluções do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta\omega_m & = \lambda_m \omega_m, \\ \omega_m|_\Gamma & = 0. \end{cases}$$

Se $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ são os correspondentes autovalores de $-\Delta$, então

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_m < ... \text{ e } \lambda_m \to +\infty \text{ quando } m \to +\infty. \tag{1.2}$$

Além disso, segue que:

- $\left(\dfrac{\omega_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right)$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^1(\Omega)$;
- $\left(\dfrac{\omega_m}{\lambda_m}\right)$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Este operador é densamente definido, injetivo e auto-adjunto. Além disso, pode ser isometricamente estendido para $-\tilde{\Delta} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, onde $H^{-1}(\Omega)$ é o dual topológico de $H_0^1(\Omega)$. Esta extensão é definida por

$$\langle -\tilde{\Delta} y, z \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = (\nabla y, \nabla z)_{L^2(\Omega)}; \forall y, z \in H_0^1(\Omega).$$

A partir de agora, por simplicidade, denotaremos $-\tilde{\Delta}$ por $-\Delta$. Observe que $-\Delta$ é um operador positivo, de modo que podemos definir suas potências fracionárias. De acordo com Lions-Magenes [47], (2.7) e (9.1), temos

$$D((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \text{ e } D((-\Delta)^{1/4}) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega). \tag{1.3}$$

Pela teoria espectral, segue que

$$D(-\Delta) \hookrightarrow D((-\Delta)^{3/4}) \hookrightarrow D((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D((-\Delta)^{1/4}) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

De maneira análoga, concluímos que o operador bilaplaciano (ou biharmônico) Δ^2 é definido pela terna $\{H_0^2(\Omega), L^2(\Omega), b(u,v)\}$, onde

$$b(u,v) = \int_\Omega \Delta u \, \overline{\Delta v} \, dx, \quad u, v \in H_0^2(\Omega),$$

e

$$D(\Delta^2) = H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega).$$

Além disso, $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, Δ^2 é um operador fechado, auto-adjunto e não limitado em $L^2(\Omega)$ e vale a cadeia de imersões

$$D(\Delta^2) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega) \hookrightarrow \left[H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right]'.$$

1.9 Resultados Utilizados de Semigrupos

Consideramos o seguinte problema abstrato de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U) \\ U(0) = U^0 \end{cases} . \tag{1.4}$$

Definição 1.37. *Seja X um espaço de Banach. Um operador $F : X \to X$ é um operador localmente Lipschitz quando, para toda constante $L > 0$, existe uma constante $M_L > 0$ tal que se $\|x\|_X \leqslant L$, $\|y\|_X \leqslant L$, então*

$$\|F(x) - F(y)\|_X \leqslant M_L \|x - y\|_X.$$

Teorema 1.38. *Seja X um espaço de Banach e $-A : D(-A) \subset X \to X$ um operador linear dissipativo, densamente definido e tal que $\operatorname{Im}(I + A) = X$. Se $F : X \to X$ é um operador localmente Lipschitz, então para qualquer $U^0 \in X$, existe uma constante positiva $T > 0$, dependendo de $\|U^0\|$, tal que o problema (1.4) admite, em $[0, T]$, uma única solução generalizada local $U \in C([0, T], X)$, tal que*

$$U(t) = S(t)\, U^0 + \int_0^t S(t - \tau)\, F(U(\tau))\, d\tau, \qquad \forall t \in [0, T].$$

Além disso, se X é um espaço de Banach reflexivo e $U^0 \in D(A)$, então a solução generalizada U é clássica.

Referência: Ver [74, Teorema 2.5.4, p. 53].

Teorema 1.39. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.38, a solução U pode ser estendida para uma solução generalizada maximal em $[0, T_{\max})$ tal que:*

(i) $T_{\max} = +\infty$, isto é, o problema admite uma solução global;

ou

(ii) $T_{\max} < +\infty$ e

$$\lim_{t \to T_{\max}^-} \|U(t)\| = +\infty,$$

isto é, a solução explode em um tempo finito $T_{\max}$.

Referência: Ver [74, Teorema 2.5.5, p. 54].

Definição 1.40 (Solução Forte). *Uma função $u : [0, \infty) \to X$ diz-se solução forte de (1.4) se*

(i) u *é contínua em* $[0, \infty)$ *e lipschitziana em cada subconjunto compacto de* $(0, \infty)$*;*

(ii) u *é diferenciável em quase todo ponto de* $(0, \infty)$*;*

(iii) $u(t) \in D(A)$ *para quase todo* $t \in (0, \infty)$*;*

(iv) $-\frac{du}{dt}(t) \in Au(t)$ *para quase todo* $t \in (0, \infty)$*.*

Teorema 1.41. *Suponha que A é maximal monótono e que $0 \in A0$. Se $U^0 \in D(A)$ e $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador localmente Lipschitz, então existe $T_{\max} \leqslant +\infty$ tal que o problema de Cauchy (1.4) tem uma única solução forte no intervalo $[0, T_{\max})$. Além disso, se $U^0 \in \overline{D(A)}$, obtemos uma única solução generalizada $U \in C([0, T_{max}); \mathcal{H})$ para o problema de Cauchy (1.4). Em ambos os casos, se $T_{max} < +\infty$, então $\lim\limits_{t \nearrow T_{max}} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty$.*

Referência: Considerar $f \equiv 0$ e $B = -\mathcal{F}$ em [25, Teorema 7.2, p. 1945].

Proposição 1.42. *Seja H um espaço reflexivo e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear dissipativo tal que o operador $I - A$ é sobrejetor. Então $\overline{D(A)} = H$.*

Referência: Ver [57, Teorema 4.6, p. 16].

Teorema 1.43 (Lumer-Phillips). *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com $\overline{D(A)} = X$. Então A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X se, e somente se, A é dissipativo e o operador $\lambda_0 I - A$ é sobrejetor para algum $\lambda_0 > 0$.*

Referência: Ver [57, Teorema 4.3, p. 14].

Proposição 1.44. *Seja X um espaço reflexivo e seja R um operador de X em X' monótono e hemicontínuo. Seja S um operador maximal monótono de X em X'. Então $R + S$ é maximal monótono de X em X'. Além disso, se $R + S$ é coercivo, então $Im(R + S) = X'$.*

Referência: Ver [5, Corolário 1.3, p. 48].

Lema 1.45. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e A um subconjunto maximal monótono de $X \times X^{'}$. Suponha $(u_n, v_n) \in A$ tal que $u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v$ e, ainda,*

$$\limsup_{n,m\to\infty} (u_n - u_m, v_n - v_m) \leqslant 0$$

ou

$$\limsup_{n\to\infty} (u_n - u, v_n - v) \leqslant 0$$

Então $(u, v) \in A$ e $(u_n, v_n) \to (u, v)$ quando $n \to \infty$.

Referência: Ver [6, Lema 2.3; p. 38].

1.10 Análise Microlocal

Iniciamos esta seção anunciando alguns resultados devidos a Burq e Gérard em [13] e Gérard em [33].

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^d$.

Definição 1.46. *Seja $m \in \mathbb{R}$. Definimos um **símbolo de ordem** m em Ω como uma função $a : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ de classe C^∞, com suporte em $K \times \mathbb{R}^d$, onde K é um subconjunto compacto de Ω, que satisfaz a seguinte estimativa: para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d, \beta \in \mathbb{N}^d$, exite uma constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Denotamos por $S_c^m(\Omega)$ o espaço vetorial dos símbolos de ordem no máximo m em Ω.

Proposição 1.47. *Se $a \in S_c^m(\Omega)$, a fórmula*

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi, \tag{1.5}$$

define, para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, um elemento Au de $C_0^\infty(\Omega)$.

A fórmula (1.5) define uma aplicação linear $A : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$, a qual chamaremos de **operador pseudodiferencial** de símbolo a. Dizemos que o operador pseudodiferencial A admite um símbolo principal, denotado por $\sigma_m(A)$, se existe uma função $a_m = \sigma_m(A) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\}))$ com suporte, na primeira variável, compacto em $K \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ e homogênea de ordem m, na segunda variável, tal que, se $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ valendo 0 em uma vizinhança da origem e 1 fora de um compacto suficientemente grande, segue que,

$$a(x,\xi) = a_m(x,\xi)\chi(\xi) + r(x,\xi),$$

onde $r \in S_c^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$. Nestas condições, $a_m = \sigma_m(A)$ é chamado de símbolo principal de A.

Observe que, no caso em que $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ a aplicação $a \mapsto A$ não é injetora, isto é, um operador pseudodiferencial não é definido unicamente por um símbolo, por outro lado, é possível provar a unicidade do símbolo principal.

Apesar de termos definido operadores pseudodiferenciais sobre o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, é possível estender a ação de operadores pseudodiferenciais a espaços de Sobolev. Considerando K um subconjunto compacto contido em Ω e $s \in \mathbb{R}$, denotamos por $H_K^s(\Omega)$ o espaço das distribuições com suporte compacto em K, onde o prolongamento com 0 fora de Ω está em $H^s(\mathbb{R}^d)$. Denotamos por $H_{comp}^s(\Omega) = \bigcup_K H_K^s(\Omega)$, onde K é tomado sobre todos os compactos de Ω.

Teorema 1.48. *Seja $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ e seja K a projeção sobre Ω do suporte de a. Então, para todo real s, o operador definido em (1.5) se prolonga de forma única em uma aplicação linear e contínua de $H_{comp}^s(\Omega)$ em $H_K^{s-m}(\Omega)$.*

Vamos introduzir, agora, o conceito de medida microlocal de defeito, para tal, seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$, i.e.,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_K |u_k(x)|^2\, dx < +\infty,$$

para todo subconjunto compacto K contido em Ω.

Dizemos que u_k converge fracamente para $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ quando, para todo $f \in L^2_{comp}(\Omega)$, tem-se

$$\int_\Omega u_k(x)\, f(x)\, dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u(x)\, f(x)\, dx.$$

Teorema 1.49. *Seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero em $L^2_{loc}(\Omega)$. Então existe uma subsequência $\{u_k\}$ e uma medida positiva de Radon μ sobre $T^1\Omega := \Omega \times S^{d-1}$ tal que para todo operador pseudodiferencial A de ordem 0 sobre Ω que admite um símbolo principal $\sigma_0(A)$ e para todo $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\chi\sigma_0(A) = \sigma_0(A)$, tem-se*

$$(A(\chi u_k), \chi u_k)_{L^2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A)(x,\xi)\, d\mu(x,\xi). \tag{1.6}$$

Definição 1.50. *Sob as circunstâncias do Teorema 1.49, μ é chamada de* **medida de defeito microlocal** *(m.d.m.) da sequência $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.*

Observação 1.51. *O Teorema 1.49 assegura, para toda sequência limitada $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero, a existência de uma subsequência admitindo uma medida de defeito microlocal. Observamos que de (1.6), em particular quando $A = f \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int_\Omega f(x)|u_k(x)|^2\, dx \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} f(x)\, d\mu(x,\xi), \tag{1.7}$$

assim u_k converge fortemente para 0 se, e somente se, $\mu = 0$.

Observação 1.52. *Observe que dadas duas sequências (y^k) e (x^k) limitadas em $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fraco para zero, podemos associar a estas sequências, mesmo passando a uma subsequência, medidas microlocais de defeito μ_y e μ_x, respectivamente. Afirmamos que, se $y^k - x^k \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$, então $\mu_y = \mu_x$.*

De fato, dado A um operador pseudodiferencial de ordem zero e $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função nas condições do Teorema 1.49, temos

$$(A(\chi x^k), \chi x^k) \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_x,$$

$$(A(\chi y^k), \chi y^k) \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_y,$$

com $\sigma_0(A)$ sendo o símbolo principal de A. Isto nos leva a

$$(A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \longrightarrow \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y). \tag{1.8}$$

Por hipótese temos que $x^k - y^k \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ e, como $A\chi$ é um operador contínuo em $L^2_{loc}(\Omega)$ pelo Teorema 1.48, obtemos

$$A(\chi(x^k - y^k)) \to 0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim,

$$\begin{aligned}(A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) &= (A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi x^k) \\ &\quad + (A(\chi y^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \\ &= (A(\chi(x^k - y^k)), \chi x^k) + (A(\chi y^k), \chi(x^k - y^k)) \\ &\longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Logo, pela unicidade do limite, de (1.8) e (1.9) segue que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y) = 0 \text{ para todo } A,$$

o que nos leva a concluir que $\mu_x - \mu_y = 0$ e, portanto, $\mu_x = \mu_y$.

Teorema 1.53. *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω e seja $\{u_k\}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m. μ. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $Pu_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *fortemente em* $H^{-m}_{loc}(\Omega)$ $(m > 0)$.

(ii) $\operatorname{supp}(\mu) \subset \{(x, \xi) \in \Omega \times S^{d-1} : \sigma_m(P)(x, \xi) = 0\}$.

Teorema 1.54. *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω, verificando $P^* = P$, e seja $\{u_k\}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m. μ. Vamos assumir que $Pu_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ fortemente em $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$. Então, para toda função $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d) \backslash \{0\})$ de grau $1 - m$ que é homogênea na segunda variável e com suporte compacto na primeira variável, tem-se*

$$\int_{\Omega \times s^{d-1}} \{a, p\}(x, \xi) \, d\mu(x, \xi) = 0. \tag{1.10}$$

Teorema 1.55. *Seja X um espaço localmente compacto e de Hausdorff e μ uma medida de Radon positiva em X.*

a) Seja N a união de todos os conjuntos abertos $U \subset X$ tais que $\mu(U) = 0$. Então N é aberto e $\mu(N) = 0$. O complementar de N é chamado de suporte de μ.

b) $x \in \operatorname{supp} \mu$ se, e somente se, $\int_X f \, d\mu > 0$ para toda $f \in C_0(X)$ com $f(x) > 0$.

Demonstração. O resultado no item *a)* segue do fato que $\mu(N) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset N \text{ e } K \text{ compacto}\}$.

Vamos provar o item *b)*. Para isso, suponha que $x \in \operatorname{supp} \mu = N^C$ e considere $f \in C_c(X, [0, 1])$ tal que $f(x) > 0$. Por continuidade, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $f(y) > \frac{1}{2} f(x)$, para todo $y \in U$. Se $\mu(U) = 0$, então sendo U aberto teríamos que $U \subset N$, o que contradiz o fato de $x \in N^C$. Dessa forma, $\mu(U) > 0$ e assim

$$\int_X f\, d\mu \geqslant \int_U f\, d\mu \geqslant \frac{1}{2} f(x)\, \mu(U) > 0.$$

Agora, suponha que $x \notin \operatorname{supp}\mu$ e considere $F = \operatorname{supp}\mu$. Então, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\mu(U) = 0$ e $U \cap F = \emptyset$. Considere K um conjunto compacto tal que $x \in K$ e $K \subset U$. Sabemos, pelo Teorema de Urysohn, que existe uma função $f \in C_0(X, [0,1])$ tal que $f \equiv 1$ em K e $f = 0$ fora de um subconjunto compacto de U. Em particular, $f(x) = 1 > 0$ e ainda,

$$\begin{aligned}
\int_X f\, d\mu &= \int_U f\, d\mu + \int_{X\setminus U} f\, d\mu \\
&= \int_U f\, d\mu + \int_{X\setminus U} 0\, d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.56. *Seja $\{u_n\}_n$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ a qual converge para zero e admite uma medida microlocal de defeito μ. Então, $(x_0, \xi_0) \notin \operatorname{supp}\mu$ se, e somente se, existe $A \in \Psi^0_c(\Omega)$ essencialmente homogêneo tal que $\sigma_0(A)(x_0,\xi_0) \neq 0$ e $A(\chi\, u_n) \to 0$ em $L^2(\Omega)$ para todo $\chi \in C^\infty_0(\Omega)$.*

Demonstração. Se $(x_0, \xi_0) \notin \operatorname{supp}\mu$, então existem subconjuntos abertos $U \subset \Omega$, $V \subset S^{d-1}$ tais que $(x_0, \xi_0) \in U \times V$ e $(U \times V) \cap \operatorname{supp}\, \mu = \emptyset$. Considere K uma vizinhança compacta de ξ_0, tal que $K \subset V$ e também $\psi \in C^\infty(S^{d-1})$ tal que $\operatorname{supp}\psi \subset K$ e $\psi \equiv 1$ em uma vizinhança de ξ_0 contida em K. Considere ainda $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$ tal que $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança de x_0 e $\operatorname{supp}\, \phi \subset U$. Tome $\eta \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\eta \equiv 0$ próximo de 0 e $\eta \equiv 1$ no infinito e, defina $a(x,\xi) = \eta(\xi)\, \phi(x)\, \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$. Tomando A o operador definido por $a(\cdot,\cdot)$, note que $\sigma_0(A)(x_0,\xi_0) = 1$ e, para todo $\chi \in C^\infty_0(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned}
||A(\chi\, u_n)||^2_{L^2(\Omega)} &= (A(\chi\, u_n), A(\chi\, u_n)) \\
&= (A(\chi\, u_n), A(\chi_1\, \chi\, u_n)) \\
&= \left(A^*_{\chi_1} \circ A(\chi\, u_n), \chi\, u_n\right) \\
&\to \int_{\Omega\times S^{d-1}} |\sigma_0(A)(x,\xi)|^2\, d\mu, \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

em que $\chi_1 \equiv 1$ em uma vizinhança de $\operatorname{supp}\, \chi$. Como $\operatorname{supp}\sigma_0(A) \subset \operatorname{supp}\, \phi \times \operatorname{supp}\, \psi \subset \Omega \times S^{d-1} \setminus \operatorname{supp}\, \mu$, temos

$$\int_{\Omega\times S^{d-1}} |\sigma_0(A)|^2\, d\mu = 0.$$

Portanto, $||A(\chi\, u_n)||^2_{L^2(\Omega)} \to 0$ em $L^2(\Omega)$.

Reciprocamente, se existe $A \in \Psi^0_c(\Omega)$ essencialmente homogêneo tal que $\sigma_0(A)(x_0,\xi_0) \neq 0$ e

$A(\chi\, u_n) \to 0$ em $L^2(\Omega)$, para todo $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, de (1.11) e da unicidade do limite obtemos

$$\int_{\Omega\times S^{d-1}} |\sigma_0(A)|^2\, d\mu = 0.$$

Utilizando o Teorema 1.55, concluímos que $(x_0, \xi_0) \notin \text{supp } \mu$. □

A seguir, apresentaremos algumas ferramentas clássicas referentes ao campo vetorial hamiltoniano e suas curvas bicaracterísticas no $(x, \xi)-$espaço cotangente para funções reais $p(x, \xi)$.

Definição 1.57. *Seja $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ uma função real. Chamamos H_p um* ***campo Hamiltoniano*** *de p, o seguinte campo de vetores definido em $\Omega \times \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$:*

$$H_p(x,\xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x,\xi), \cdots, \frac{\partial p}{\partial \xi_d}(x,\xi); -\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,\xi), \cdots, -\frac{\partial p}{\partial x_d}(x,\xi)\right).$$

A derivada de Lie de uma função f com respeito ao compo Hamiltoniano H_p é dado por $H_p(f) = \{p, f\}$, onde

$$\{p, f\}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right).$$

Uma ***curva Hamiltoniana*** *de p é uma curva integrável do campo de vetores H_p, isto é, é uma solução maximal $s \in I \mapsto (x(s),\ \xi(s))$ para equações Hamilton-Jacobi*

$$\left\{\dot{x} = p_\xi(x,\xi) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi), \quad \dot{\xi} = -p_x(x,\xi) = -\frac{\partial p}{\partial x}\right\}, \tag{1.12}$$

onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Observação 1.58. *Da identidade $H_p p = 0$ segue que a função p mantém um valor constante em cada uma de suas curvas Hamiltonianas. Dizemos que tal curva é* ***bicaracterística*** *de p se esse valor for nulo.*

Observação 1.59. *Seja λ uma função C^∞ em $T^0\Omega$ com valores reais diferentes de zero. Como*

$$H_{\lambda p} = \lambda H_p + pH_\lambda = \lambda H_p \ \text{ se } p = 0,$$

resulta que as bicaracterísticas de λp e p concidem (módulo uma reparametrização).

Podemos agora traduzir os Teoremas 1.53 e 1.54 em termos mais geométricos.

Teorema 1.60. *Seja P um operador diferencial autoadjunto de ordem m sobre Ω que admite um símbolo principal p. Seja $\{u_k\}_k$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero, com uma m.d.m. μ. Vamos assumir que Pu_k converge para 0 em $H^{-(m-1)}_{loc}$. Então o suporte de μ, $\text{supp}(\mu)$, é uma união de curvas do tipo $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right)$, onde $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ é uma bicaracterística de p.*

Proposição 1.61. *A menos de uma mudança de variáveis, as bicaracterísticas do símbolo principal do operador de ondas*

$$p(t,x,\tau,\xi) = -\rho(x)\tau^2 + K(x)\,\xi\cdot\xi, \quad \xi = (\xi_1,\cdots,\xi_d), \tag{1.13}$$

são curvas da seguinte forma

$$t \mapsto \left(t, x(t), \tau, -\tau\left(\frac{K(x(t))}{\rho(x(t))}\right)^{-1}\dot{x}(t)\right),$$

onde $t \mapsto x(t)$ é uma geodésica de métrica $G = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{-1}$ sobre Ω, parametrizado pelo comprimento de arco.

1.11 Ferramentas Auxiliares

Teorema 1.62. *Suponha A um operador definido pela terna $\{V, H, a(u,v)\}$. Então, após uma possível modificação em um conjunto de medida nula, a solução u de*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t) + A(t)u(t) = f(t) \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1 \end{cases}$$

em que $u \in L^2(0,T;V)$ e $\partial_t u \in L^2(0,T;H)$, verificando

$$(u, \partial_t u) \in C([0,T];V) \times C([0,T];H)$$

torna a aplicação $\{f, u_0, u_1\} \to (u, \partial_t u)$ contínua de

$$L^2(0,T;H) \times V \times H \to C([0,T];V) \times C([0,T];H).$$

Referência: Ver [47, Teorema 8.2; p. 296-297].

Teorema 1.63. *(Propriedade de Continuação Única para Placas) Consideramos*

$$\begin{cases} \partial_t^2 v + \Delta^2 v + p_1(x,t)\,\Delta v + p_2(x,t)\,v = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)), \\ v = \partial_\nu v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega\times(0,T), \\ v = 0 & \text{em } \omega\times(0,T), \end{cases} \tag{1.14}$$

em que assumimos

$$p_1 \in C(\overline{\Omega}\times(0,T)) \cap L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega)),$$
$$p_2 \in C(\overline{\Omega}\times(0,T)) \cap L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega)).$$

Sejam ω uma vizinhança aberta da fronteira $\partial\Omega$ e v uma solução de (1.14) em $\Omega\times(0,T)$ e suponha que $v \in C\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T;H^{-2}(\Omega)\right)$. Se $v = 0$ em $\omega\times(0,T)$, então $v = 0$ em $\Omega\times(0,T)$.

Referência: Considerar

$$b_\alpha = \begin{cases} p_1, & \text{se } |\alpha| = 2, \\ 0, & \text{se } |\alpha| = 1, \\ p_2, & \text{se } \alpha = 0, \end{cases}$$

e $d \equiv 0$ em [40, Proposição 1.6, p. 1007].

Lema 1.64. *Seja p uma função positiva e crescente, com $p(0) = 0$. Nestas condições, podemos definir uma função crescente q dada por $q(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$ e considerar uma sequência de números positivos (s_m) que satisfaz*

$$s_{m+1} + p\left(s_{m+1}\right) \leqslant s_m.$$

Então $s_m \leqslant S(m)$, em que $S(t)$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0.$$

Além disso, se $p(x) > 0$ para $x > 0$, então $\lim_{t \to \infty} S(t) = 0$.

Referência: Ver [41, Lema 3.3; p. 531].

Teorema 1.65 (Princípio de Continuação Única). *Para todo $T > 0$, a única solução $u \in C((0,T); L^2(\Omega)) \cap C((0,T); H^{-1}(\Omega))$ do problema*

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em } \omega \times (0,T) \end{cases} \tag{1.15}$$

é a trivial $u = 0$.

Referência: Ver [13, Prova do Teorema 6.3, p. 75].

Proposição 1.66 (Princípio de Continuação Única para Sistemas). *Sejam $P_1(x,D)$ e $P_2(x,D)$ dois operadores hiperbólicos de segunda ordem com coeficientes de classe C^2. Seja ϕ uma função estritamente pseudo-convexa com respeito a P_1 e P_2. Então, a propriedade de continuação única é válida para soluções do sistema acoplado*

$$\begin{cases} P_1(x,D)u + V_1 u = V_3 v \\ P_2(x,D)v + V_2 v = V_3 u, \end{cases} \tag{1.16}$$

em que V_1, V_2 e V_3 são elementos de $L^{\frac{d+1}{2}}$.

Referência: Ver [23, Proposição 2.3, p. 459].

Observação 1.67. *Em diversas etapas do texto, por simplicidade, utilizaremos a notação "$\lesssim$" para expressar a ideia de "menor a menos de constante".*

Capítulo 2

Estimativas de decaimento uniforme para uma equação da viga extensível com amortecimento não linear localmente distribuído

Neste capítulo, estamos interessados em estabelecer taxas de decaimento uniforme para soluções da equação de uma viga extensível, sujeita a um amortecimento não linear localmente distribuído:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \Delta^2 u - b\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Delta u + f(u) + a(x) g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 1$) com fronteira $\partial\Omega$ regular. A constante $b > 0$ representa o coeficiente de extensibilidade da viga, $f(u)$ é o termo fonte, enquanto a é responsável pela localização da região efetiva do amortecimento não linear, cujo comportamento é descrito pela função g.

Estaremos considerando o espaço de fase

$$\mathcal{H} := H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

que é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno e norma usuais, a saber,

$$(U_1, U_2)_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \Delta u_1(x)\, \Delta u_2(x)\, dx + \int_\Omega v_1(x)\, v_2(x)\, dx,$$
$$\|U_1\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_\Omega |\Delta u_1(x)|^2\, dx + \int_\Omega |v_1(x)|^2\, dx.$$

em que $U_1 = (u_1, v_1)$ e $U_2 = (u_2, v_2)$.

Ao longo deste capítulo, vamos impor as seguintes hipóteses sobre as funções a, f e g:

(H.1) A função $a(x)$ é não-negativa, satisfazendo

$$a(\cdot) \in L^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \quad \text{com } a(x) \geqslant a_0 > 0 \quad \text{em } \omega \subset \Omega.$$

(H.2) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com

$$|f'(s)| \leqslant k_f\, (1 + |s|)^{p-1}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

para algum $k_f > 0$, desde que $1 \leqslant p \leqslant \frac{d}{d-4}$ se $d \geqslant 5$ ou $p \geqslant 1$ se $d = 1, 2, 3, 4$. Além disso, supomos ainda que

$$0 \leqslant F(s) \leqslant f(s)\, s, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

com $F(s) := \int_0^s f(\lambda)\, d\lambda$.

(H.3) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, monótona crescente e, ainda, satisfaz

$$g(s)\, s > 0 \quad \text{para} \quad s \neq 0 \qquad \text{e} \qquad M\, s^2 \leqslant g\,(s)\, s \leqslant \overline{M}\, s^2, \quad \text{para} \quad |s| > 1,$$

em que M e $\overline{M}$ são constantes positivas.

A critério de organização, apresentamos a seguir alguns resultados auxiliares que serão utilizados ao longo do texto, os quais permitem um melhor entendimento acerca das propriedades de f e g. Ressaltamos, ainda, que consideraremos nas demonstrações apenas o caso $p > 1$, pois quando $p = 1$ a função f tem o comportamento de uma função afim.

Lema 2.1 (Propriedades de f e de F)**.** *Se a hipótese* **(H.2)** *é válida, então* $f(0) = 0$ *e*

$$|f(s) - f(r)| \leqslant C_f \left(1 + |s|^{p-1} + |r|^{p-1}\right) |s - r|, \quad \forall\, r, s \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

para algum $C_f > 0$*. Consequentemente,*

$$\begin{cases} |f(s)| \leqslant C_f \left[|s| + |s|^p\right], \\ F(s) \leqslant C_f \left[|s|^2 + |s|^{p+1}\right], \end{cases} \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Demonstração. Por hipótese, temos que $f(s)\, s \geqslant 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} f(s) \geqslant 0, & \text{se} \quad s > 0 \\ f(s) \leqslant 0, & \text{se} \quad s < 0. \end{cases}$$

Da continuidade de f em $\mathbb{R}$, temos

$$0 \leqslant \lim_{s \to 0^+} f(s) = f(0) = \lim_{s \to 0^-} f(s) \leqslant 0.$$

Logo, $f(0) = 0$.

Sabemos, ainda, que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Assim sendo, dados $r, s \in \mathbb{R}$ existe, pelo Teorema do Valor Médio, $\tau = \tau(s, r) \in (0, 1)$ para o qual vale

$$|f(s) - f(r)| \leqslant |f'\left((1 - \tau)\, s + \tau\, r\right)|\, |s - r|. \tag{2.6}$$

Da condição (2.2) aplicada a (2.6) obtemos

$$|f(s) - f(r)| \leqslant k_f \;(1 + |(1 - \tau)\, s + \tau\, r|)^{p-1}\; |s - r|. \tag{2.7}$$

Observe que $0 < 1 + |(1-\tau)\, s + \tau\, r| \leqslant 1 + |1-\tau|\, |s| + |\tau|\, |r| \leqslant 1 + |s| + |r|$ e, sendo $p > 1$, a função potência x^{p-1} é crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Daí segue que:

$$(1 + |(1-\tau)\, s + \tau\, r|)^{p-1} \leqslant (1 + |s| + |r|)^{p-1}.$$

Disto e de (2.7), temos que

$$\begin{aligned} |f(s) - f(r)| &\leqslant k_f\ (1 + |s| + |r|)^{p-1}\ |s-r| \\ &\leqslant k_f\, 2^{p-1}\ \left(1 + (|s| + |r|)^{p-1}\right)\ |s-r| \\ &\leqslant k_f\, 2^{p-1}\ \left(1 + 2^{p-1}\,(|s|^{p-1} + |r|^{p-1})\right)\ |s-r| \\ &\leqslant \underbrace{k_f\, 2^{2(p-1)}}_{:=C_f}\ \left(1 + |s|^{p-1} + |r|^{p-1}\right)\ |s-r|, \end{aligned}$$

obtendo a desigualdade (2.4). Como consequência, tomando $r = 0$ em (2.4), de $f(0) = 0$, temos:

$$|f(s)| \leqslant C_f\ \left(1 + |s|^{p-1}\right) |s| = C_f\ [|s| + |s|^p] \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

e, ainda, ao considerar (2.3), temos

$$|F(s)| \leqslant |f(s)|\, |s| \leqslant C_f\ [|s| + |s|^p]\ |s| = C_f\ \left[|s|^2 + |s|^{p+1}\right],$$

concluindo (2.5) e a prova deste resultado. □

Lema 2.2 (Propriedades de g)**.** *Suponha válidas as condições da Hipótese* ***(H.3)****. Então, g satisfaz as seguintes condições:*

(a) $g(0) = 0$;

(b) $M\, |s| \leqslant |g(s)| \leqslant \overline{M}\, |s|$, *para* $|s| > 1$;

(c) Se $|s| \leqslant 1$, *então* $|g(s)| \leqslant K_g$, *para algum* $K_g > 0$;

(d) Se $\varphi \in L^p(\Omega)$, *então* $g(\varphi) \in L^p(\Omega)$, *qualquer que seja* $p \in [1, +\infty)$. *Ainda,*

$$\|g(\varphi)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_g\, (1 + \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}). \tag{2.8}$$

(e) O operador $\mathbb{A} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, *em que* $\mathbb{A}u = a\, g(u)$, *é maximal monótono.*

Demonstração. Provaremos cada item separadamente.

(a) Sabemos, por hipótese, que $g(s)\, s > 0$ para $s \neq 0$. ou seja,

$$\begin{cases} g(s) > 0, & \text{se} \quad s > 0 \\ g(s) < 0, & \text{se} \quad s < 0. \end{cases}$$

Além disso, da continuidade de g em $\mathbb{R}$, temos

$$0 \leqslant \lim_{s \to 0^+} g(s) = g(0) = \lim_{s \to 0^-} g(s) \leqslant 0.$$

(b) Da última desigualdade em **(H.3)**, temos, em valor absoluto:

$$M|s|^2 \leqslant |g(s)||s| \leqslant \overline{M}|s|^2 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{|s|>1} \quad M|s| \leqslant |g(s)| \leqslant \overline{M}|s|,$$

(c) Basta observar que

$$|g(s)| \leqslant \sup_{y \in [-1,1]} |g(y)| = \max_{y \in [-1,1]} |g(y)| := K_g.$$

(d) Seja $\varphi \in L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Considere os conjuntos:

$$\begin{aligned} \Omega_\varphi^1 &= \{x \in \Omega : |\varphi(x)| \leqslant 1\}, \\ \Omega_\varphi^2 &= \{x \in \Omega : |\varphi(x)| > 1\}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Note que $\Omega = \Omega_\varphi^1 \dot\cup \Omega_\varphi^2$ e

$$\|g(\varphi)\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |g(\varphi(x))|^p \, dx = \int_{\Omega_\varphi^1} |g(\varphi(x))|^p \, dx + \int_{\Omega_\varphi^2} |g(\varphi(x))|^p \, dx := I_1 + I_2.$$

Observe, inicialmente, que

$$\{|g(\varphi(x))|^p : x \in \Omega_\varphi^1\} = \{|g(\varphi(x))|^p : |\varphi(x)| \leqslant 1\} \subset \{|g(y)|^p : |y| \leqslant 1\}. \tag{2.10}$$

Então:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_\varphi^1} |g(\varphi(x))|^p \, dx \leqslant \sup_{x \in \Omega_\varphi^1} |g(\varphi(x))|^p \operatorname{med}(\Omega_\varphi^1) \overbrace{\leqslant}^{(2.10)} \sup_{y \in [-1,1]} |g(y)|^p \operatorname{med}(\Omega_\varphi^1) \\ &\leqslant K_g^p \operatorname{med}(\Omega) < +\infty. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega_\varphi^2} |g(\varphi(x))|^p \, dx \leqslant \overline{M}^p \int_{\Omega_\varphi^2} |\varphi(x)|^p \, dx \leqslant \overline{M}^p \int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \\ &= \overline{M}^p \, \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^p < +\infty. \end{aligned}$$

Assim, $g(\varphi) \in L^p(\Omega)$ e vale (2.8) para $C_g = \max\left\{K_g \operatorname{med}(\Omega)^{1/p}; \overline{M}\right\}$.

(e) A fim de obter o desejado, mostraremos que $\mathbb{A}$ é monótono, hemicontínuo e leva conjuntos limitados em limitados.

<u>$\mathbb{A}$ *é monótono*</u>. Sejam u_1, $u_2 \in L^2(\Omega)$. Então:

$$\big(\mathbb{A}u_1 - \mathbb{A}u_2, u_1 - u_2\big)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega a(x)\,[g(u_1(x) - g(u_2(x))]\,(u_1(x) - u_2(x))\,dx \geqslant 0,$$

pois $a(x)$ é uma função não-negativa e g é monótona crescente.

<u>$\mathbb{A}$ *é hemicontínuo*</u>. Seja $(t_m) \subset \mathbb{R}$ uma sequência tal que $t_m \to 0$, quando $m \to +\infty$. Daí segue que $|t_m| \leqslant \tilde{K}$, para algum $\tilde{K} > 0$.
Note que, dados u_1, u_2, $u_3 \in L^2(\Omega)$, temos:

$$\lim_{m\to+\infty} \big(\mathbb{A}(u_1 + t_m\, u_2), u_3\big)_{L^2(\Omega)} = \lim_{m\to+\infty} \int_\Omega a(x)\,g(u_1(x) + t_m\, u_2(x))\,u_3(x)\,dx.$$

Defina:

$$h_m(x) := a(x)\,g(v_1(x) + t_m\, v_2(x))\,v_3(x)$$

e observe que temos a seguinte convergência pontual:

$$h_m(x) = a(x)\,g(u_1(x) + t_m\, u_2(x))\,u_3(x) \longrightarrow a(x)\,g(u_1(x))\,u_3(x) = h(x), \qquad \forall x \in \Omega,$$

dada a continuidade de g. Além disso,

- Se $|u_1(x) + t_m\, u_2(x)| \leqslant 1$, temos

  $$|h_m(x)| \leqslant a(x)\,|g(u_1(x) + t_m\, u_2(x))|\,|u_3(x)| \leqslant K_g\, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\,|u_3(x)|,$$

  pelo item (c) do Lema 2.2.
- Se $|v_1(x) + t_m\, v_2(x)| > 1$, do item (b) do Lema 2.2 temos que

$$\begin{aligned} |h_m(x)| &= |a(x)\,g(u_1(x) + t_m\, u_2(x))\,u_3(x)| \\ &\leqslant \overline{M}\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\,|u_1(x) + t_m\, u_2(x)|\,|u_3(x)| \\ &\leqslant \overline{M}\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\,\Big[|u_1(x)| + \tilde{K}\,|u_2(x)|\Big]\,|u_3(x)| \\ &\leqslant C\,\left[|u_1(x)| + |u_2(x)|\right]\,|u_3(x)|. \end{aligned}$$

Desta forma, definindo

$$\tilde{h}(x)(x) := \big[K\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)} + C\,\left(\,|u_1(x)| + |u_2(x)|\right)\big]\,|u_3(x)|,$$

temos

$$|h_m(x)| \leqslant \tilde{h}(x)(x), \quad \text{q.s. em} \quad \Omega,$$

com $h \in L^1(\Omega)$, visto que $u_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1,2,3$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos:

$$\lim_{m\to+\infty} \big(\mathbb{A}(u_1 + t_m\, u_2), u_3\big)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega a(x)\,g(u_1(x))\,u_3(x)\,dx = \big(\mathbb{A}u_1, u_3\big)_{L^2(\Omega)},$$

garantindo que $\mathbb{A}$ é hemicontínuo.

$\mathbb{A}$ *leva conjuntos limitados em conjuntos limitados*. Seja $v_0 \in D_\delta = \{u \in L^2(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \delta\}$. Então,

$$\|\mathbb{A}v_0\|_{\mathcal{H}} = \int_\Omega |a(x)\, g(v_0(x))|^2\, dx = \int_{\Omega_1} |a(x)\, g(v_0(x))|^2\, dx + \int_{\Omega_2} |a(x)\, g(v_0(x))|^2\, dx,$$

em que estamos considerando Ω_1 e Ω_2, respectivamente, como os conjuntos definidos em (2.9), para $\varphi = v_0$. Daí,

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}v_0\|_{\mathcal{H}} &\leqslant \|a\|_{L^\infty(\Omega)} K_g \operatorname{med}(\Omega) + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\, \overline{M}^2\, \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \|a\|_{L^\infty(\Omega)} K_g \operatorname{med}(\Omega) + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\, \overline{M}^2\, \delta := \delta'.\end{aligned}$$

Assim, se $v_0 \in D_\delta$, temos $\mathbb{A}v_0 \in D_{\delta'}$, como queríamos. □

2.1 Boa Colocação

Antes de enunciarmos o principal resultado desta seção – que nos garante a boa colocação do problema (2.1) – apresentamos o conceito de solução que estaremos buscando.

Definição 2.3 (Solução fraca). *Sejam $T > 0$ e $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$. Uma função $u(x,t)$ é dita ser uma solução fraca para o problema* (2.1) *se u satisfizer*

$$(u, \partial_t u) \in C([0,T]; \mathcal{H}), \qquad (u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1) \quad \text{em} \quad \mathcal{H},$$

e, ainda, é válida a equação variacional

$$\begin{aligned}&- \int_0^T \theta'(t) \int_\Omega \partial_t u(x,t)\, \varphi(x)\, dx\, dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega \Delta u(x,t)\, \Delta\varphi(x)\, dx\, dt \\ &\qquad + b \int_0^T \theta(t) \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \int_\Omega \nabla u(x,t)\, \nabla\varphi(x)\, dx\, dt \\ &\qquad\qquad + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega f(u(x,t))\, \varphi(x)\, dx\, dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega a(x) g(\partial_t u(x,t)) \varphi(x)\, dx\, dt = 0,\end{aligned} \tag{2.11}$$

para toda $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ e para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Neste sentido, nos concentraremos em demostrar a validade do resultado seguinte, que nos assegura que o problema em questão está bem posto.

Teorema 2.4 (Boa Colocação). *Assuma que $a \in L^\infty(\Omega)$ é não negativa e que as funções f e g satisfazem, respectivamente, as hipóteses **(H.2)** e **(H.3)**. Então, dado $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ o problema* (2.1) *admite uma única solução global no sentido da Definição 2.3. Além disso, quaisquer que sejam $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < \infty$, é válida a identidade da energia*

$$E_u(t_2) - E_u(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega a(x)\, g(\partial_t u(x,t))\, \partial_t u(x,t)\, dx\, dt,$$

em que E_u é definida por:

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\partial_t u(x,t)|^2 + |\Delta u(x,t)|^2\right)\, dx\, dt + \frac{b}{4}\|\nabla u(t)\|^4_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F(u(x,t))\, dx. \tag{2.12}$$

2.1.1 Estratégia da prova do Teorema 2.4 e ferramentas preliminares

A demonstração deste resultado é extensa e, por isso, dedicaremos a presente subseção para explicitar a metodologia adotada.

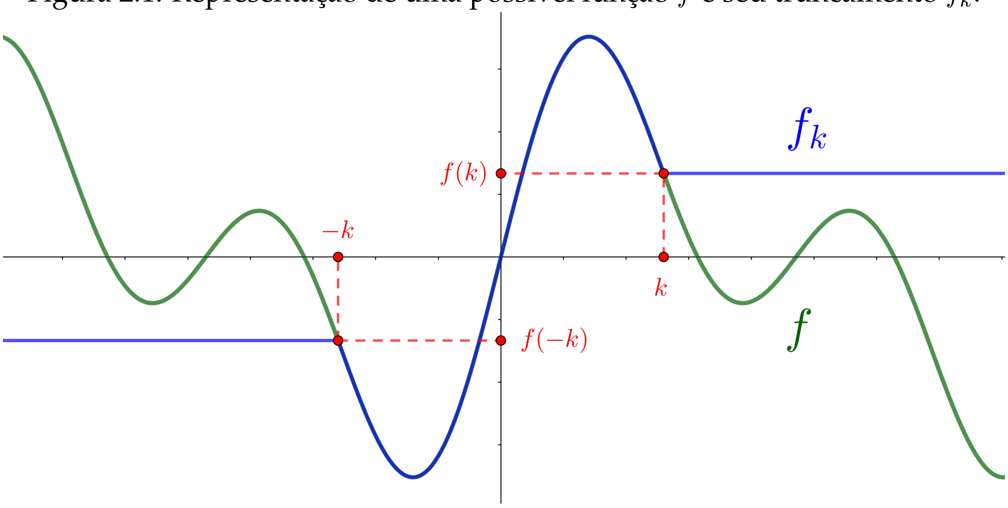
O Princípio de Continuação Única (PCU) que utilizaremos neste trabalho é válido para termos de fonte Lipschitz contínuos, propriedade não garantida para f nas condições da Hipótese **(H.2)**. Neste sentido, não apenas mostraremos a existência e unicidade de uma solução fraca u no sentido da Definição 2.3, como também construiremos uma sequência de soluções fortes (u_k), associadas a problemas auxiliares truncados, cujos termos fonte f_k são Lipschitz contínuos.

Nesta perspectiva, a prova do Teorema 2.4 será organizada segundo as seguintes etapas:

(E.1) Motivados por Lasiecka e Tataru [41], vamos considerar, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função truncamento $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_k(s) := \begin{cases} f(s), & |s| \leqslant k, \\ f(k), & s > k, \\ f(-k), & s < -k. \end{cases} \tag{2.13}$$

Figura 2.1: Representação de uma possível função f e seu truncamento f_k.



Fonte: Autor.

A partir disto, vamos mostrar que para todo par $(u_0, u_1) \in (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, o problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \Delta^2 u - b\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Delta u + f_k(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

admite uma única solução forte, no sentido de Semigrupos Não-Lineares.

(E.2) Dados $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Por argumentos usuais de densidade, vamos considerar uma sequência

$$(u_{0,k}, u_{1,k}) \in \left(H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)\right) \times H_0^2(\Omega)$$

tal que

$$(u_{0,k}, u_{1,k}) \longrightarrow (u_0, u_1) \text{ em } H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

A partir do que observamos na etapa **(E.1)**, vamos obter uma limitação uniforme para a sequência de soluções fortes (u_k) do seguinte problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k + \Delta^2 u_k - b\|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Delta u_k + f_k(u_k) + a(x)g(\partial_t u_k) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_k = \partial_\nu u_k = 0 & \text{sobre } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_k(x,0) = u_{0,k}(x), \quad \partial_t u_k(x,0) = u_{1,k}(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Em particular, vamos obter também algumas convergências em espaços adequados.

(E.3) De posse das convergências e limitações obtidas na etapa anterior, obtemos por passagem ao limite uma função u que satisfaz a identidade variacional (2.11), a menos do termo correspondente à dissipação.

(E.4) A seguir, mostraremos que u satisfaz, de fato, a identidade variacional e possui a regularidade requerida na Definição 2.3. Para isso, usaremos o Lema 1.45, bem como a completude de $C([0,T]; \mathcal{H})$.

(E.5) Utilizando as convergências da etapa **(E.2)** e a identidade variacional (2.11) garantiremos que as condições iniciais são satisfeitas, isto é, $(u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1)$ em $\mathcal{H}$.

(E.6) Uma vez mostrada a existência, estamos aptos a mostrar a unicidade da solução u, por meio do método de regularização de Visik-Ladyzhenskaya. O uso desta técnica justifica-se pela falta de regularidade da solução fraca obtida.

(E.7) Por fim, utilizando novamente as convergências obtidas nas etapas anteriores, prova-se a identidade de energia (2.12). A maior dificuldade recai na convergência

$$\int_\Omega F_k(u_k(x,t))\, dx \longrightarrow \int_\Omega F(u(x,t))\, dx, \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

em que

$$F_k(s) = \int_0^s f_k(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} \displaystyle\int_0^s f(\lambda)\,d\lambda, & |s| \leqslant k, \\ \displaystyle\int_0^k f(\lambda)\,d\lambda + f(k)[s-k], & s > k, \\ \displaystyle f(-k)[s+k] + \int_0^{-k} f(\lambda)\,d\lambda, & s < -k. \end{cases} \tag{2.14}$$

A critério de simplicidade, vamos elencar algumas propriedades das funções f_k e F_k antes de passarmos, efetivamente, à demonstração do Teorema 2.4.

Lema 2.5. *A derivada distribucional f_k' da função f_k definida em (2.13) é a função essencialmente limitada $\tilde{f}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\tilde{f}_k(s) := \begin{cases} f'(s), & |s| \leqslant k, \\ 0, & s > k, \\ 0, & s < -k. \end{cases}$$

Demonstração. Inicialmente, observe que $\tilde{f}_k$ é essencialmente limitada.

De fato,

$$|\tilde{f}_k(s)| \leqslant \sup_{s\in\mathbb{R}} |\tilde{f}_k(s)| = \sup_{s\in[-k,k]} |\tilde{f}_k(s)| = \sup_{s\in[-k,k]} |f'(s)| = \tilde{C}.$$

Segue daí que $f_k \in L^\infty(\mathbb{R})$. Como consequência, temos que $\tilde{f}_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Agora, mostremos que $f_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Com efeito, dado $K \subset \mathbb{R}$ um compacto, temos:

$$\int_K |f_k(s)|\,ds \leqslant \sup_{s\in K} |f_k(s)| \int_K ds = \max_{s\in K} |f_k(s)| \text{ med}(K) < +\infty,$$

visto que f_k é contínua. Nestas condições, tome $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e, como $f_k,\ \tilde{f}_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}
\langle f_k', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} &= -\langle f_k, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = -\int_{\mathbb{R}} f_k(s)\varphi'(s)\,ds \\
&= -\left[\int_{-\infty}^{-k} f(-k)\varphi'(s)\,ds + \int_{-k}^{k} f(s)\varphi'(s)\,ds + \int_k^{+\infty} f(k)\varphi'(s)\,ds\right] \\
&= -\left[f(-k)\varphi(-k) + \left(f(k)\varphi(k) - f(-k)\varphi(-k) - \int_{-k}^{k} f'(s)\varphi(s)\,ds\right) - f(k)\varphi(k)\right] \\
&= \int_{-k}^{k} f'(s)\varphi(s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_k(s)\varphi(s)\,ds = \left\langle \tilde{f}_k, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\langle f_k', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \left\langle \tilde{f}_k, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Portanto, f_k' e $\tilde{f}_k$ são iguais em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, como queríamos.

□

Lema 2.6 (Propriedade Lispschitz de f_k)**.** *Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante positiva C_k para a qual*

$$|f_k(r) - f_k(s)| \leqslant C_k\,|r-s|, \qquad \forall\, r,s \in \mathbb{R},$$

em que f_k é a função definida em (2.13)*.*

Demonstração. Sejam $r, s \in \mathbb{R}$, os quais supomos satisfazer $s \leqslant r$, sem perda de generalidade. Para tais, consideramos o intervalo $J = (s - \varepsilon_0, r + \varepsilon_0)$, para algum $\varepsilon_0 > 0$ fixo, que é limitado em $\mathbb{R}$.

Afirmamos que $f_k \in W^{1,p}(J)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, isto é:

(i) $f_k \in L^p(J)$ para $1 \leqslant p \leqslant +\infty$;

(ii) $f_k' \in L^p(J)$ para $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Com efeito,

$$|f_k(s)| \leqslant \sup_{s\in J}|f_k(s)| \leqslant \sup_{s\in\mathbb{R}}|f_k(s)| = \sup_{s\in[-k,k]}|f_k(s)| = \max_{s\in[-k,k]}|f(s)| < +\infty.$$

Assim, $f_k \in L^\infty(J)$ e, sendo $\operatorname{med}(J) < +\infty$, temos $L^\infty(J) \subset L^p(J)$ para $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, concluindo a prova do item (i).
De maneira inteiramente análoga, concluímos que $f_k' \in L^p(J)$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, como desejado no item (ii), concluindo a afirmação feita.

Com a garantia de que $f_k \in W^{1,p}(J)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, estamos em condições de aplicar o Teorema 1.10. Deste, segue que:

$$f_k(r) - f_k(s) = \int_s^r f_k'(s)\,ds \qquad \text{q.t.p. } r,s \in J.$$

Utilizando o Lema 2.5, obtemos:

$$\begin{aligned}|f_k(r) - f_k(s)| &= \left|\int_s^r f_k'(s)\,ds\right| \leqslant \int_s^r |f_k'(s)|\,ds \leqslant \sup_{s\in J}|f_k'(s)| \int_s^r ds \\ &\leqslant \sup_{s\in\mathbb{R}}|f_k'(s)|\,|r-s| = \underbrace{\sup_{s\in[-k,k]}|f'(s)|}_{:=C_k}\,|r-s| = C_k\,|r-s|,\end{aligned}$$

finalizando a demonstração. □

Lema 2.7 (Propriedades de f_k e F_k)**.** *Sejam f_k e F_k, conforme definido em* (2.13) *e* (2.14)*. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos:*

(i) f_k *é contínua;*

(ii) $|f_k(s)| \leqslant C\left[|s| + |s|^p\right]$*, para todo* $s \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $0 \leqslant F_k(s) \leqslant f_k(s)\,s$*, para todo* $s \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $F_k(s) \leqslant C\left[|s|^2 + |s|^{p+1}\right]$*, para todo* $s \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Demonstraremos cada item separadamente.

(i) Decorre imediatamente da continuidade de f, da definição de f_k dada em (2.13) e do Lema de Colagem.

(ii) Vamos considerar as três possibilidades para $s \in \mathbb{R}$: $|s| \leqslant k$, $s > k$ ou $s < -k$.

Se $|s| \leqslant k$, então
$$|f_k(s)| = |f(s)| \leqslant C\left[|s| + |s|^p\right].$$

Se $s > k$, então
$$|f_k(s)| = |f(k)| \leqslant C\left[|k| + |k|^p\right] \leqslant C\left[|s| + |s|^p\right],$$

uma vez que $0 < k < s$ implica que $|s| > |k|$.
Se $s < -k$, então

$$|f_k(s)| = |f(-k)| \leqslant C\left[|-k| + |-k|^p\right] \leqslant C\left[|s| + |s|^p\right],$$

uma vez que $s < -k < 0$ implica que $|s| > |-k|$.

(iii) Novamente, temos as três possibilidades para $s \in \mathbb{R}$: $|s| \leqslant k$, $s > k$ ou $s < -k$.

Se $|s| \leqslant k$, então $f_k(s) = f(s)$ e $F_k(s) = F(s)$. Neste caso, segue imediatamente que

$$0 \leqslant F_k(s) \leqslant f_k(s)\, s.$$

Se $s > k$, então

$$0 \leqslant F_k(s) = F(k) + f(k)\,(s-k) \leqslant f(k)\,k + f(k)\,(s-k) = f(k)\,s = f_k(s)\,s,$$

uma vez que de $k > 0$ e $k\,f(k) \geqslant 0$, temos $f(k) \geqslant 0$.
Se $s < -k$, então

$$0 \leqslant F_k(s) = F(-k) + f(-k)\,(s+k) \leqslant f(-k)\,(-k) + f(-k)\,(s+k) = f(-k)\,s = f_k(s)\,s,$$

uma vez que de $-k < 0$ e $(-k)\,f(-k) \geqslant 0$, temos $f(-k) \leqslant 0$.

(iv) Segue imediatamente dos itens (ii) e (iii). □

2.1.2 Prova do Teorema 2.4

• **Problemas Auxiliares Truncados**: Considere, inicialmente, $(u_0, u_1) \in (H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$. Mostraremos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, o problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \Delta^2 u - b\,\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u + f_k(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,+\infty), \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

admite uma única solução forte (no sentido de Semigrupos Não-Lineares).

Denotando $v = \partial_t u$ e $U(t) = (u, v)$, podemos reescrever o problema (2.15) na forma do seguinte problema abstrato de Cauchy em $\mathcal{H}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(t) + \mathcal{A}U(t) = \mathcal{F}_k(U(t)), \\ U(0) = U^0, \end{cases} \tag{2.16}$$

com $U^0 = (u_0, u_1)$ e para o qual denotamos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ por

$$\mathcal{A} = A + B,$$

em que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I(\cdot) \\ \Delta^2(\cdot) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{A} \end{pmatrix}.$$

onde $\mathbb{A}$ é o operador definido no Lema 2.2. Ainda, o operador $\mathcal{F}_k : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é definido por:

$$\mathcal{F}_k(U(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ b\,\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\Delta u - f_k(u) \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

A partir das hipóteses descritas na seção seguinte, temos

$$\begin{aligned} D(A) &= (H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \times H_0^2(\Omega), \\ D(B) &= H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) = \mathcal{H}. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$D(\mathcal{A}) = D(A) \cap D(B) = (H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \times H_0^2(\Omega).$$

A fim de mostrar a existência e unicidade, vamos utilizar o Teorema 1.41. Neste sentido, precisamos mostrar que

(i) $\mathcal{A} = A + B$ é um operador maximal monótono;

(ii) $\mathcal{F}_k$ é um operador localmente Lipschitz, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para mostrar (i), precisamos apenas mostrar que o operador linear A é maximal monótono visto que, do item (e) do Lema 2.2, concluímos que o operador B é monótono, hemicontínuo e leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. Com isso, a Proposição 1.44 nos garante que $\mathcal{A} = A + B$ é um operador maximal monótono e temos o desejado.

<u>*A é monótono*</u>. Sendo A um operador linear, basta mostrar que A é positivo, ou seja, $(AU, U)_{\mathcal{H}} \geqslant 0$,

para todo $U = (u, v) \in D(A)$. Com efeito, temos

$$
\begin{aligned}
(AU, U)_{\mathcal{H}} = \big((-v, \Delta^2 u), (u, v)\big)_{\mathcal{H}} &= -\int_\Omega \Delta v(x) \cdot \Delta u(x)\, dx + \int_\Omega \Delta^2 u(x) \cdot v(x)\, dx \\
&= -\int_\Omega \Delta v(x) \cdot \Delta u(x)\, dx + \int_\Omega \Delta v(x) \cdot \Delta u(x)\, dx \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

<u>*A é maximal*</u>. Para provar a maximalidade de A, é suficiente provar que $\mathrm{Im}(I + A) = \mathcal{H}$. Neste sentido, seja $J = (j_1, j_2) \in \mathcal{H}$ e mostremos a existência de $U = (u, v) \in D(A)$ tal que

$$U + AU = J,$$

ou seja, devemos exibir $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ e $v \in H_0^2(\Omega)$ satisfazendo

$$
\begin{cases} u - v = j_1, \\ v + \Delta^2 u = j_2. \end{cases} \tag{2.18}
$$

De $(2.18)_1$ obtemos que $v = u - j_1$ e, substituindo em $(2.18)_2$, obtemos

$$u + \Delta^2 u = j, \tag{2.19}$$

em que $j := j_2 - j_1 \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$.

Definimos, então, a forma bilinear:

$$
\begin{aligned}
\Phi : \quad H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\longmapsto \Phi(u, v) = (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + (u, v)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

a qual mostraremos ser contínua e coerciva.
Com efeito, observe que:

$$
\begin{aligned}
|\Phi(u, v)| &\leqslant \left|(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}\right| + \left|(u, v)_{L^2(\Omega)}\right| \\
&\leqslant \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant (1 + \tilde{C}^2)\, \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

de onde segue a continuidade de Φ.
Ainda, note que

$$|\Phi(u, u)| = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geqslant \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

e temos garantida, também, a coercividade de Φ.

Sendo $\Phi(\cdot, \cdot)$ bilinear, contínua e coerciva, segue do Teorema de Lax-Milgram, que existe uma única $u \in H_0^2(\Omega)$, tal que

$$\Phi(u, w) = \langle j, w \rangle_{H^{-2}(\Omega), H_0^2(\Omega)}, \qquad \forall w \in H_0^2(\Omega).$$

Decorre daí que u satisfaz a seguinte equação:

$$\langle u+\Delta^2 u, w\rangle_{H^{-2}(\Omega),H_0^2(\Omega)} = \langle j, w\rangle_{H^{-2}(\Omega),H_0^2(\Omega)}, \qquad \forall w \in H_0^2(\Omega).$$

Desta forma, temos $u+\Delta^2 u = j$ em $H^{-2}(\Omega)$ e, então,

$$u+\Delta^2 u = j \in L^2(\Omega).$$

Portanto, $u \in H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$ e satisfaz (2.19). Definindo $v = u - j_1 \in H_0^2(\Omega)$, segue que v satisfaz $(2.18)_1$. Concluímos, assim, a existência de $(u,v)\in D(A)$ satisfazendo (2.18), como queríamos. Logo, A é maximal monótono.

Agora, mostremos a validade de (ii), ou seja, que $\mathcal{F}_k$ definido em (2.17) é localmente Lipschitz, para todo $k\in\mathbb{N}$. Sejam $U_1=(u_1,v_1), U_2=(u_2,v_2)\in\mathcal{H}$, tais que $\|U_1\|_{\mathcal{H}}\leqslant R$ e $\|U_2\|_{\mathcal{H}}\leqslant R$. Então:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_kU_2-\mathcal{F}_kU_1\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\|\left(0, b\,\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)}\,\Delta u_2 - b\,\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\,\Delta u_1 + f_k(u_1)-f_k(u_2)\right)\right\|^2_{\mathcal{H}}\\
&= \left\|b\,\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)}\,\Delta u_2 - b\,\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\,\Delta u_1 + f_k(u_1)-f_k(u_2)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (2.20)\\
&\leqslant 2\,b^2\left\|\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)}\,\Delta u_2 - b\,\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\,\Delta u_1\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\,\|f_k(u_1)-f_k(u_2)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&:= 2\,b^2\,N_1 + 2\,N_{f_k}.
\end{aligned}$$

Observe que, sendo f_k Lipschitz contínua, para todo $k\in\mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned}
N_{f_k} &= \int_\Omega |f_k(u_1(x))-f_k(u_2(x))|^2\,dx \leqslant C_k\int_\Omega |u_1(x)-u_2(x)|^2\,dx\\
&= C_k\,\|u_1-u_2\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \tilde{C}_k\,\|u_1-u_2\|^2_{H_0^2(\Omega)}\\
&\leqslant \tilde{C}_k\|U_2-U_1\|^2_{\mathcal{H}}. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

No que segue, a constante $C(R)$ denotará, de maneira geral, todas as constantes positivas dependentes de R.
Considerando a imersão $H_0^2(\Omega)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \left\|\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)}\,\Delta(u_2-u_1) + \left(\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\,\Delta u_1\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant \left(\left\|\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)}\,\Delta(u_2-u_1)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\left(\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\,\Delta u_1\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\\
&\leqslant 2\|\nabla u_2\|^4_{L^2(\Omega)}\,\|\,\Delta(u_2-u_1)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left(\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^2\|\Delta u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant 2\,C\,\|\Delta u_2\|^4_{L^2(\Omega)}\,\|\Delta(u_2-u_1)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left(\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^2\|\Delta u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant C(R)\left[\|\Delta(u_2-u_1)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^2\right]\\
&\leqslant C(R)\left[\|U_2-U_1\|^2_{\mathcal{H}} + \underbrace{\left(\|\nabla u_2\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^2}_{:=N_2}\right]. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Ainda, estimando separadamente o segundo termo:

$$
\begin{aligned}
N_2 &= \left(\|\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \left(\|\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \\
&\leqslant \|\nabla(u_2 - u_1)\|^2_{L^2(\Omega)}\, C \left(\|\Delta u_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \\
&\leqslant C(R)\, \|\Delta(u_2 - u_1)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C(R)\, \|U_2 - U_1\|^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, retornando a (2.22), temos:

$$
N_1 \leqslant C(R)\|U_2 - U_1\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{2.23}
$$

De (2.20), (2.21) e (2.23), segue que

$$
\|\mathcal{F}_k U_2 - \mathcal{F}_k U_1\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_k(R)\, \|U_2 - U_1\|_{\mathcal{H}},
$$

como queríamos.

Assim, o Teorema 1.41, nos garante que existe $T_{\max} \in (0, +\infty]$ para o qual:

- se $U^0 \in \mathcal{H}$, então o problema (2.16) possui uma única solução generalizada

$$
U \in C([0, T_{\max}); \mathcal{H}).
$$

- se $U^0 \in D(\mathcal{A})$, então tal solução é forte no sentido da Definição 1.40, com regularidade

$$
U \in W^{1,1}((0, T_{\max}]; \mathcal{H}) \cap C([0, T_{\max}]; \mathcal{H})
$$

  com $U(t) \in D(\mathcal{A})$, para quase todo $t \in (0, T_{\max}]$.

Vejamos agora que $T_{\max} = +\infty$. De fato, ao supormos, por absurdo, $T_{\max} < +\infty$, ainda pelo Teorema 1.41, temos

$$
\lim_{t \nearrow T_{\max}} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty. \tag{2.24}
$$

Por outro lado, multiplicando a equação $(2.15)_1$ por $\partial_t u$ e integrando em Ω, temos

$$
\frac{d\mathcal{E}^k_u}{dt}(t) + \left(\int_\Omega a(x)\, g(\partial_t u(x,t))\, \partial_t u(x,t)\, dx\right) = 0, \tag{2.25}
$$

em que

$$
\mathcal{E}^k_u(t) := \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\partial_t u(x,t)|^2\, dx + \int_\Omega |\Delta u(x,t)|^2\, dx + \frac{b}{2}\|\nabla u(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right] + \int_\Omega F_k(u(x,t))\, dx.
$$

Assim, de (2.25), segue que $\mathcal{E}^k_u(t) \leqslant \mathcal{E}^k_u(0),\ \forall\, t \in [0, T_{\max})$, visto que g é monótona crescente e a

é não negativa. Além disso,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_u^k(t) &= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\partial_t u(x,t)|^2\,dx + \int_\Omega |\Delta u(x,t)|^2\,dx + \frac{b}{2}\|\nabla u(t)\|^4_{L^2(\Omega)}\right] + \int_\Omega F_k(u(x,t))\,dx\\ &\geqslant \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\partial_t u(x,t)|^2\,dx + \int_\Omega |\Delta u(x,t)|^2\,dx\right]\\ &= \frac{1}{2}\|(u(t),\partial_t u(t))\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant 2\,\mathcal{E}_u^k(t) \leqslant 2\,\mathcal{E}_u^k(0) \leqslant C(\|U^0\|_{\mathcal{H}}),\ \forall\, t\in[0,T_{\max}),$$

contrariando (2.24). Logo, só pode ocorrer $T_{\max} = +\infty$.

Em busca de uma solução fraca no sentido da Definição 2.3, consideramos $(u_0,u_1)\in H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Por argumentos usuais de densidade, vamos considerar uma sequência

$$(u_{0,k},u_{1,k})\in \left(H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)\right)\times H_0^2(\Omega)$$

tal que

$$(u_{0,k},u_{1,k}) \longrightarrow (u_0,u_1)\ \text{ em } H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{2.26}$$

Pela argumentação utilizada anteriormente, dada a sequência de *problemas auxiliares truncados*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k + \Delta^2 u_k - b\|\nabla u_k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u_k + f_k(u_k) + a(x)g(\partial_t u_k) = 0 & \text{em } \Omega\times(0,+\infty),\\ u_k = \partial_\nu u_k = 0 & \text{sobre } \Omega\times(0,+\infty),\\ u_k(x,0) = u_{0,k}(x), \quad \partial_t u_k(x,0) = u_{1,k}(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.27}$$

garantimos a existência de uma sequência de soluções fortes (u_k), isto é, uma sequência em que, para cada $k\in\mathbb{N}$ e $T>0$, temos

$$u_k \in W^{2,1}((0,T];L^2(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))\cap C([0,T];H_0^2(\Omega)),$$

com $(u_k(t),\partial_t u_k(t))\in D(\mathcal{A})$, para quase todo $t\in(0,T]$. No que segue, vamos obter estimativas uniformes para (u_k).

• **Estimativas a priori**: Observamos que a energia associada ao problema (2.27) é dada por:

$$\begin{aligned} E_{u_k}(t) = \mathcal{E}^k_{u_k}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\partial_t u_k(x,t)|^2 + |\Delta u_k(x,t)|^2\right)\,dx\\ + \frac{b}{4}\|\nabla u_k(t)\|^4_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F_k(u_k(x,t))\,dx. \end{aligned} \tag{2.28}$$

em que $F_k(s) = \int_0^s f_k(\lambda)\,d\lambda$. Segue daí que

$$E_{u_k}(0) = \frac{1}{2}\|u_{1,k}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta u_{0,k}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b}{4}\|\nabla u_{0,k}\|^4_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F_k(u_{0,k}(x))\,dx, \tag{2.29}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Sabemos que

$$(u_{0,k}, u_{1,k}) \longrightarrow (u_0, u_1) \text{ em } H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \|u_{0,k}\|_{H_0^2(\Omega)} &\longrightarrow \|u_0\|_{H_0^2(\Omega)} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \\ \|u_{1,k}\|_{L^2(\Omega)} &\longrightarrow \|u_1\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

e, da imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, segue ainda que:

$$\|u_{0,k}\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{2.31}$$

Das convergências (2.30) e (2.31), temos as limitações:

$$\|u_{0,k}\|_{H_0^2(\Omega)} \leqslant C_1, \quad \|u_{1,k}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_2 \quad \text{e} \quad \|u_{0,k}\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C_3, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2.32}$$

Além disso,

$$\int_\Omega F_k(u_{0,k}(x))\, dx \leqslant C \int_\Omega \left[|u_{0,k}(x)|^2 + |u_{0,k}(x)|^{p+1}\right] dx = C\left[\|u_{0,k}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{0,k}\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}\right]. \tag{2.33}$$

Note que, para qualquer d, vale

$$H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega),$$

visto que $2 \leqslant p+1 \leqslant \frac{2d-4}{d-4} \leqslant \frac{2d}{d-4} = 2^*$. Retornando a (2.33), temos

$$\int_\Omega F_k(u_{0,k}(x))\, dx \leqslant C\left[\|u_{0,k}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{0,k}\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}\right] \lesssim \|u_{0,k}\|^2_{H_0^2(\Omega)} + \|u_{0,k}\|^{p+1}_{H_0^2(\Omega)} \leqslant \tilde{C},$$

em que consideramos a primeira limitação dada em (2.32). Desta forma, obtemos que todos os termos à direita de (2.29) são limitados, isto é,

$$E_{u_k}(0) \leqslant R, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

em que R é uma constante que independe de k e t. Agora, como g é monótona crescente, a é não negativa e vale

$$\frac{d}{dt}E_{u_k}(t) + \left(\int_\Omega a(x) g(\partial_t u_k(x,t))\, \partial_t u_k(x,t)\, dx\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad F_k(s) \geqslant 0,$$

para quaisquer $t > 0$ e $s \in \mathbb{R}$, temos:

$$0 \leqslant E_{u_k}(t) \leqslant E_{u_k}(0) \leqslant R, \qquad\qquad \forall t \geqslant 0, \tag{2.34}$$

e, portanto, cada termo de (2.28) é menor ou igual a R. Assim, como R independe de $k \in \mathbb{N}$ e de $t \geqslant 0$, temos

$$\|\Delta u_k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{2R}, \tag{2.35}$$
$$\|\partial_t u_k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{2R}, \tag{2.36}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Das limitações (2.35) e (2.36), pelo Lema 1.20, temos:

$$u_k \xrightarrow{\ *\ } u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \quad \forall T > 0, \tag{2.37}$$
$$\partial_t u_k \xrightarrow{\ *\ } \partial_t u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0. \tag{2.38}$$

Além disso, note que de (2.8) e (2.36), temos

$$\begin{aligned}
\|a(x)\cdot g(\partial_t u_k)\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} &= \int_0^T \int_\Omega |a(x)|^2 \, |g(\partial_t u_k(t))|^2 \, dx\, dt \\
&\leqslant \|a\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T \int_\Omega |g(\partial_t u_k(x,t))|^2 \, dx\, dt \\
&= \|a\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T \|g(\partial_t u_k(t))\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \\
&\leqslant \|a\|^2_{L^\infty(\Omega)} C_g \int_0^T \left(1 + \|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}\right) dt \\
&\leqslant C(R)\, T.
\end{aligned}$$

Desta forma, a sequência $(a(x)\cdot g(\partial_t u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\Omega\times(0,T))$ que é um espaço reflexivo (pois é Hilbert). Assim, existe uma subsequência, denotada da mesma forma por simplicidade, para a qual:

$$a(x)g(\partial_t u_k) \longrightarrow \chi \quad \text{em} \quad L^2(\Omega\times(0,T)), \quad \forall T > 0. \tag{2.39}$$

Agora, note que podemos considerar no Teorema 1.27 de Aubin-Lions-Simon as seguintes imersões:

$$B_0 = H_0^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} B_1 = H_0^{2-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow B_2 = L^2(\Omega),$$
$$B_0 = H_0^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} B_1 = L^{2^*-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow B_2 = L^2(\Omega),$$

donde segue que

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T,H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)), \quad \forall T > 0, \tag{2.40}$$
$$u_k \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T,L^{2^*-\varepsilon}(\Omega)), \quad \forall T > 0, \tag{2.41}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Mais do que isso, da imersão $L^\infty(0,T,H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(\Omega\times(0,T))$, temos pelo Teorema da Convergência Dominada Inversa (Teorema 1.5) que

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{q. s. em} \quad \Omega\times(0,T), \quad \forall T > 0. \tag{2.42}$$

Além disso, mostraremos válida a convergência

$$f_k(u_k) \longrightarrow f(u) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega \times (0,T)). \tag{2.43}$$

De fato, observamos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega |f_k(u_k(x,t)) - f(u(x,t))|^2 \, dx \, dt \\
&\quad \lesssim \underbrace{\int_0^T \int_\Omega |f_k(u_k(x,t)) - f(u_k(x,t))|^2 \, dx \, dt}_{:=I_1} + \underbrace{\int_0^T \int_\Omega |f(u_k(x,t)) - f(u(x,t))|^2 \, dx \, dt}_{:=I_2}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

e nos concentraremos em mostrar que cada termo, I_1 e I_2, converge a zero quando $k \to +\infty$. Neste sentido, primeiramente mostraremos que:

$$I_1 = \int_0^T \int_\Omega |f_k(u_k(x,t)) - f(u_k(x,t))|^2 \, dx \, dt \longrightarrow 0. \tag{2.45}$$

Com efeito, vamos definir, para cada $t \in [0,T]$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto:

$$\Omega_k^t := \{x \in \Omega : \ |u_k(x,t)| > k\}.$$

Da definição de f_k, dada em (2.13), sabemos que $f_k(u_k(x,t)) = f(u_k(x,t))$, se $|u_k(x,t)| \leqslant k$, ou seja,

$$f_k(u_k(x,t)) - f(u_k(x,t)) = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \setminus \Omega_k^t.$$

Consequentemente, podemos escrever:

$$I_1 = \int_0^T \int_\Omega |f_k(u_k(x,t)) - f(u_k(x,t))|^2 \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega_k^t} |f_k(u_k(x,t)) - f(u_k(x,t))|^2 \, dx \, dt.$$

Assim, assumindo $1 \leqslant p < \frac{d}{d-4}$ for $d \geqslant 5$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_k(u_k(x,t)) - f(u_k(x,t))|^2 \, dx &= \int_{\Omega_k^t} |f_k(u_k(x,t)) - f(u_k(x,t))|^2 \, dx \\
&\lesssim \int_{\Omega_k^t} |f_k(u_k(x,t))|^2 \, dx + \int_{\Omega_k^t} |f(u_k(x,t))|^2 \, dx \\
&\lesssim \left[\int_{\Omega_k^t} |f(-k)|^2 \, dx + \int_{\Omega_k^t} |f(k)|^2 \, dx \right] + \int_{\Omega_k^t} |f(u_k(x,t))|^2 \, dx \\
&\lesssim \int_{\Omega_k^t} [|k|^2 + |k|^{2p}] \, dx + \int_{\Omega_k^t} \left[|u_k(x,t)|^2 + |u_k(x,t)|^{2p} \right] \, dx \\
&\lesssim \int_{\Omega_k^t} \left[|u_k(x,t)|^2 + |u_k(x,t)|^{2p} \right] \, dx \\
&\lesssim \int_{\Omega_k^t} |u_k(x,t)|^{2p} \, dx,
\end{aligned}$$

uma vez que $|u_k(x,t)| > k \geqslant 1$ em Ω_k^t e $2 \leqslant 2p < 2^*$.

Por outro lado, observe que $2 < \frac{2d-1/2}{d-4} < 2^*$ e, portanto $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2d-\frac{1}{2}}{d-4}}(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} k^{\frac{2d-\frac{1}{2}}{d-4}} \operatorname{med}(\Omega_k^t) = \int_{\Omega_k^t} k^{\frac{2d-\frac{1}{2}}{d-4}} dx &\leqslant \int_{\Omega_k^t} |u_k(x,t)|^{\frac{2d-\frac{1}{2}}{d-4}} dx \\ &= \|u_k(t)\|^{\frac{2d-\frac{1}{2}}{d-4}}_{L^{\frac{2d-\frac{1}{2}}{d-4}}(\Omega_k^t)} \lesssim \|u_k(t)\|^{\frac{2d-\frac{1}{2}}{d-4}}_{H_0^2(\Omega)} \lesssim [E_{u_k}(0)]^{\frac{2d-\frac{1}{2}}{d-4}} \leqslant C(R), \end{aligned} \tag{2.46}$$

para todo $t \in [0,T]$, em que $C(R) > 0$ independe de k e de t. Assim, da dessigulade (2.46), temos $\operatorname{med}(\Omega_k^t) \lesssim k^{\frac{-2d+\frac{1}{2}}{d-4}}$, para todo $t \in [0,T]$.

Definimos, agora, $\beta_1 := \frac{2d}{(2p)(d-4)}$ para $d \geqslant 5$. Então,

$$p < \frac{d}{d-4} \iff 2p < \frac{2d}{d-4} = 2^* \iff 2d > (2p)(d-4) \iff \beta_1 > 1.$$

Tomando $\beta_2 > 0$ de forma que $\frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_1} = 1$, obtemos que $\beta_2 = \frac{2d}{2d-(2p)(d-4)}$. Assim, utilizando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k^t} |u_k(x,t)|^{2p} dx &\leqslant \left(\int_{\Omega_k^t} dx\right)^{\frac{2d-(2p)(d-4)}{2d}} \left(\int_{\Omega_k^t} |u_k(x,t)|^{\frac{2d}{d-4}}\right)^{\frac{(2p)(d-4)}{2d}} \\ &= \left(\operatorname{meas}(\Omega_k^t)\right)^{\frac{2d-(2p)(d-4)}{2d}} \|u_k(t)\|^{2p}_{L^{\frac{2d}{d-4}}(\Omega)} \\ &\lesssim k^{\left(\frac{-2d+\frac{1}{2}}{d-4}\right)\left(\frac{2d-(2p)(d-4)}{2d}\right)} \|u_k(t)\|^{2p}_{L^{\frac{2d}{d-4}}(\Omega)} \\ &\lesssim k^{\left(\frac{-2d+\frac{1}{2}}{d-4}\right)\left(\frac{2d-(2p)(d-4)}{2d}\right)} \|u_k(t)\|^{2p}_{H_0^2(\Omega)} \\ &\lesssim k^{\left(\frac{-2d+\frac{1}{2}}{d-4}\right)\left(\frac{2d-(2p)(d-4)}{2d}\right)} (E_{u_k}(0))^{2p} \longrightarrow 0, \quad \forall\, t \in [0,T], \end{aligned}$$

uma vez que $E_{u_k}(0) \leqslant C(R)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\left(\frac{-2d+\frac{1}{2}}{d-4}\right)\left(\frac{2d-(2p)(d-4)}{2d}\right) < 0$. Segue, portanto, a convergência (2.45).

Agora, trabalharemos com a integral I_2, no intuito de provar que

$$I_2 = \int_0^T \int_\Omega |f(u_k(x,t)) - f(u(x,t))|^2 \, dx\, dt \longrightarrow 0. \tag{2.47}$$

De fato, observe que:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \int_\Omega |f(u_k(x,t)) - f(u(x,t))|^2 \, dx\, dt \\ &\leqslant \int_0^T \int_\Omega \left(1 + |u_k(x,t)|^{p-1} + |u(x,t)|^{p-1}\right)^2 |u_k(x,t) - u(x,t)|^2 \, dx\, dt \lesssim I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3}, \end{aligned}$$

em que,

$$
\begin{aligned}
I_{2,1} &:= \int_0^T \int_\Omega |u_k(x,t) - u(x,t)|^2 \, dx \, dt \\
I_{2,2} &:= \int_0^T \int_\Omega |u_k(x,t)|^{2(p-1)} |u_k(x,t) - u(x,t)|^2 \, dx \, dt \\
I_{2,3} &:= \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^{2(p-1)} |u_k(x,t) - u(x,t)|^2 \, dx \, dt.
\end{aligned}
$$

Da convergência (2.41) segue que

$$
u_k \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T,L^q(\Omega)), \quad q \in [2,2^*), \quad \forall T > 0,
$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim,

$$
I_{2,1} = \int_0^T \int_\Omega |u_k(x,t) - u(x,t)|^2 \, dx \, dt = \|u_k - u\|^2_{L^2(\Omega \times (0,T))} \longrightarrow 0. \tag{2.48}
$$

Em seguida, mostraremos que $I_{2,2} \longrightarrow 0$. Com efeito, observe que da Desigualdade de Hölder segue que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u_k(x,t)|^{2(p-1)} |u_k(x,t) - u(x,t)|^2 \, dx &\leqslant \left(\int_\Omega |u_k(x,t)|^{2p} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |u_k(x,t) - u(x,t)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u_k(t)\|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\Omega)} \, \|u_k(t) - u(t)\|^2_{L^{2p}(\Omega)} \\
&\lesssim \|u_k(t)\|^{2(p-1)}_{H^2_0(\Omega)} \, \|u_k(t) - u(t)\|^2_{L^{2p}(\Omega)} \\
&\lesssim \|u_k(t) - u(t)\|^2_{L^{2p}(\Omega)} \\
&\lesssim \|u_k(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ,
\end{aligned}
$$

uma vez que $2 \leqslant 2p \leqslant 2^*$ e $\operatorname{med}(\Omega) < +\infty$. Desta forma,

$$
I_{2,2} \lesssim \int_0^T \|u_k(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \longrightarrow 0. \tag{2.49}
$$

Com isso, de (2.48) e (2.49), obtemos a convergência (2.47). Observando que, por processo inteiramente análogo, $I_{2,3} \longrightarrow 0$ e combinando (2.44), (2.45) e (2.47), segue que

$$
f_k(u_k) \longrightarrow f(u) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega \times (0,T)),
$$

como queríamos em (2.43).

Tais convergências são suficientes para a passagem ao limite na expressão (2.50), a qual será definida a seguir.

Vamos considerar, a partir de agora, salvo menção contrária, funções $\varphi \in H^2_0(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ quaisquer. Multiplicando $(2.27)_1$ por $\theta(t)\,\varphi(x)$ e integrando em $\Omega \times (0,T)$, obtemos que U

satisfaz a identidade variacional referente à solução fraca, a saber,

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \theta'(t) \int_\Omega \partial_t u_k(x,t)\, \varphi(x)\, dx\, dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega \Delta u_k(x,t)\, \Delta\varphi(x)\, dx\, dt \\
+ b \int_0^T \theta(t) \|\nabla u_k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \int_\Omega \nabla u_k(x,t)\, \nabla\varphi(x)\, dx\, dt \\
+ \int_0^T \theta(t) \int_\Omega f(u_k(x,t))\, \varphi(x)\, dx\, dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega a(x) g(\partial_t u_k(x,t)) \varphi(x)\, dx\, dt = 0
\end{aligned} \tag{2.50}$$

em que utilizou-se integração por partes no primeiro termo. Esta identidade norteará a obtenção de convergências adequadas, processo a ser realizado a seguir.

• **Passagem ao limite**: O objetivo desta etapa reside em mostrar a convergência, termo a termo, de (2.50) para a solução fraca do problema original (2.1), dada pela Definição 2.3. Isto ocorrerá a menos da obtenção de $\chi = a(x)\, g(\partial_t u)$.

Note que, das convergências (2.37) e (2.38), a saber,

$$\begin{aligned}
u_k &\xrightarrow{\ *\ } u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \quad \forall T>0,\\
\partial_t u_k &\xrightarrow{\ *\ } \partial_t u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \quad \forall T>0,
\end{aligned}$$

temos, pelo Lema 1.20, garantidas as convergências

$$\int_0^T (\Delta u_k(t), \psi(t))_{L^2(\Omega)}\, dt \longrightarrow \int_0^T (\Delta u(t), \psi(t))_{L^2(\Omega)}\, dt, \tag{2.51}$$

$$\int_0^T (\partial_t u_k(t), \psi(t))_{L^2(\Omega)}\, dt \longrightarrow \int_0^T (\partial_t u(t), \psi(t))_{L^2(\Omega)}\, dt, \tag{2.52}$$

qualquer que seja $\psi \in L^1(0,T,L^2(\Omega))$. Tomando, em particular, $\psi = \psi(x,t) = \Delta\varphi(x)\, \theta(t) \in L^1(0,T,L^2(\Omega))$ em (2.51), temos:

$$\int_0^T \theta(t)\ (\Delta u_k(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)}\, dt \longrightarrow \int_0^T \theta(t)\ (\Delta u(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)}\, dt, \tag{2.53}$$

o que nos dá a convergência desejada para o segundo termo de (2.50). Ainda, para a escolha particular $\psi = \psi(x,t) = \varphi(x)\, \theta'(t) \in L^1(0,T,L^2(\Omega))$ em (2.52), temos:

$$\int_0^T \theta'(t)\ (\partial_t u_k(t), \varphi(x))_{L^2(\Omega)}\, dt \longrightarrow \int_0^T \theta'(t)\ (\partial_t u(t), \varphi(x))_{L^2(\Omega)}\, dt, \tag{2.54}$$

o que nos dá a convergência desejada para o primeiro termo de (2.50).

Observe agora que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a imersão $H_0^{2-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ é válida e, de (2.40), segue que

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T,H_0^1(\Omega)), \quad \forall T>0,$$

o que nos dá

$$\int_0^T \|\nabla u_k(t) - \nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, observe que, para todo $t \geqslant 0$, temos:

$$\begin{aligned}
&\left| \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right|^2 \\
&\qquad = \left| \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \right|^2 \left| \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \right|^2 \\
&\qquad \leqslant C(R) \left| \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \right|^2 \\
&\qquad \leqslant C(R) \, \|\nabla u_k(t) - \nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

em que utilizamos a imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ e a limitação (2.35). Desta forma,

$$\int_0^T \left| \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right|^2 dt \leqslant C(R) \int_0^T \|\nabla u_k(t) - \nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \longrightarrow 0,$$

de onde concluímos que

$$\|\nabla u_k(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \longrightarrow \|\nabla u(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{em} \quad L^2(0,T). \tag{2.55}$$

Por outro lado, dada $\gamma \in L^2(0,T)$ qualquer, escolhemos em particular $\psi = \psi(x,t) = \Delta\varphi(x)\,\theta(t)\,\gamma(t) \in L^1(0,T,L^2(\Omega))$ em (2.51).Então,

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (\nabla u_k(t), \nabla\varphi \cdot \theta(t))_{L^2(\Omega)} \cdot \gamma(t)\, dt &= \int_0^T (\Delta u_k(t), \varphi \cdot \gamma(t) \cdot \theta(t))_{L^2(\Omega)} \, dt \\
&\longrightarrow \int_0^T (\Delta u(t), \varphi \cdot \gamma(t) \cdot \theta(t))_{L^2(\Omega)} \, dt = -\int_0^T (\nabla u(t), \nabla\varphi \cdot \theta(t))_{L^2(\Omega)} \cdot \gamma(t)\, dt
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$-(\nabla u_k(\cdot), \nabla\varphi)_{L^2(t)} \, \theta(\cdot) \rightharpoonup -(\nabla u(\cdot), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} \, \theta(\cdot) \quad \text{em} \quad L^2(0,T). \tag{2.56}$$

Por fim, de (2.55) e (2.56), segue que

$$\begin{aligned}
b \int_0^T \theta(t) \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_\Omega \nabla u_k(x,t)\, \nabla\varphi(x)\, dx\, dt \\
\longrightarrow b \int_0^T \theta(t) \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_\Omega \nabla u(x,t)\, \nabla\varphi(x)\, dx\, dt,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

o que nos dá a convergência desejada para o terceiro termo de (2.50). Agora, da convergência (2.43), segue que para toda $\phi \in L^2(\Omega \times (0,T))$, vale

$$(f_k(u_k), \phi)_{L^2(\Omega \times (0,T))} \longrightarrow (f(u), \phi)_{L^2(\Omega \times (0,T))} \, .$$

Escolhendo, em particular, $\phi = \phi(x,t) = \varphi(x)\,\theta(t) \in L^2(\Omega \times (0,T))$, temos:

$$\int_0^T \theta(t)\,(f(u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\;dt \longrightarrow \int_0^T \theta(t)\,(f(u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\;dt, \tag{2.58}$$

o que nos dá a convergência desejada para o quarto termo de (2.50).

Por fim, vamos utilizar a convergência fraca (2.39), a saber,

$$a(x)g(\partial_t u_k) \longrightarrow \chi \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(0)), \quad \forall T > 0,$$

e, então, para cada $\phi \in L^2(\Omega \times (0,T))$, vale

$$(a(\cdot)g(\partial_t u_k), \phi)_{L^2(\Omega\times(0,T))} \longrightarrow (\chi, \phi)_{L^2(\Omega\times(0,T))}.$$

Escolhendo, em particular, $\phi = \phi(x,t) = \varphi(x)\,\theta(t) \in L^2(\Omega \times (0,T))$, temos:

$$\int_0^T \theta(t)\,(a(\cdot)g(\partial_t u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\;dt \longrightarrow \int_0^T \theta(t)\,(\chi(t), \varphi)_{L^2(\Omega)}\;dt, \tag{2.59}$$

o que nos dá uma convergência para o quinto termo de (2.50), porém ainda não é a desejada. Desta forma, passando o limite quando $k \to +\infty$ em (2.50) e considerando as convergências (2.53), (2.54), (2.57), (2.58) e (2.59), obtemos:

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \theta'(t)\;(\partial_t u(t), \varphi(x))_{L^2(\Omega)}\;dt + \int_0^T \theta(t)\;(\Delta u(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)}\;dt \\
+\, b\int_0^T \theta(t)\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \int_\Omega \nabla u(x,t)\,\nabla\varphi(x)\,dx\,dt \\
+ \int_0^T \theta(t)\,(f(u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\;dt + \int_0^T \theta(t)\,(\chi(t), \varphi)_{L^2(\Omega)}\;dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Utilizando integração por partes no primeiro termo, reescrevemos (2.60) como

$$\left\langle \partial_t^2 u(t) + \tilde{\Delta}^2 u(t) - b\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u(t) + f(u(t)) + \chi(t), \varphi \right\rangle_{H^{-2}(\Omega), H_0^2(\Omega)} = 0$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$. Assim,

$$\partial_t^2 u(t) + \tilde{\Delta}^2 u(t) - b\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u(t) + f(u(t)) + \chi(t) = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;H^{-2}(\Omega)).$$

Do fato que:

$$\begin{aligned}
&\partial_t u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \quad \Delta^2 u \in L^\infty(0,T;H^{-2}(\Omega)); \quad \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \\
&\chi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad f(u) \in L^\infty(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)),
\end{aligned}$$

obtemos $\partial_t^2 u \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$, e, ainda,

$$\partial_t^2 u + \Delta^2 u - \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u + f(u) + \chi = 0 \;\text{ in } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)).$$

Pelo Lema 1.22, segue que $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ e $\partial_t u \in C([0,T];H^{-2}(\Omega))$ e, consequentemente,

$$u \in C_w([0,T];L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad \partial_t u \in C_w([0,T];H^{-2}(\Omega)).$$

Isto nos permite concluir, por meio do Lema 1.21, que

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \cap C_w([0,T];L^2(\Omega)) = C_w([0,T];H_0^2(\Omega)), \\ \partial_t u &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap C_w([0,T];H^{-2}(\Omega)) = C_w([0,T];L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Ressaltamos aqui que a regularidade obtida em (2.61) nos permite avaliar u e $\partial_t u$ em $t = 0$, garantindo que $(u(0), \partial_t u(0)) \in \mathcal{H}$.

• **Recuperando a regularidade temporal**: O principal objetivo desta etapa é mostrar que as soluções do problema (2.1) estão na classe

$$u \in C([0,T];H_0^2(\Omega)),\ \partial_t u \in C([0,T];L^2(\Omega)),\ \text{para todo } T > 0,$$

satisfazendo

$$(u_k, \partial_t u_k) \longrightarrow (u, \partial_t u) \quad \text{em} \quad C([0,T];\mathcal{H}). \tag{2.62}$$

Por fim, e não menos importante, obteremos

$$\chi = a(x)g(\partial_t u), \tag{2.63}$$

que nos permite concluir que, na passagem ao limite, u satisfaz a identidade variacional (2.11). Consideramos u_m e u_n soluções fortes do problema truncado (2.27) em $[0,T]$. São válidas as expressões

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 u_m(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u_m(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)} + b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla u_m(t), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} \\ + (f_m(u_m(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} + (a(\cdot)(g(\partial_t u_m(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 u_n(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u_n(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)} + b\,\|\nabla u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla u_n(t), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} \\ + (f_n(u_n(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} + (a(\cdot)(g(\partial_t u_n(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \end{aligned} \tag{2.65}$$

para todo $t \in (0,T)$. Desta forma, subtraindo (2.65) de (2.64) e definindo $z = z(m,n) = u_m - u_n$, verifica-se

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 z(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} + (\Delta z(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)} + b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla u_m(t), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} \\ - b\,\|\nabla u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla u_n(t), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} + (f_m(u_m(t)) - f_n(u_n(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} \\ + (a(\cdot)(g(\partial_t u_m(t)) - g(\partial_t u_n)(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \end{aligned} \tag{2.66}$$

para toda $\varphi \in H_0^2(\Omega)$.

Adicionando e subtraindo em (2.66) o termo $b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla u_n(t),\nabla\varphi)_{L^2(\Omega)}$, obtemos:

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 z(t),\varphi)_{L^2(\Omega)} &+ (\Delta z(t),\Delta\varphi)_{L^2(\Omega)} + b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla z(t),\nabla\varphi)_{L^2(\Omega)}\\ &+ (f_m(u_m(t)) - f_n(u_n(t)),\varphi)_{L^2(\Omega)} + (a(\cdot)(g(\partial_t u_m(t)) - g(\partial_t u_n)(t)),\varphi)_{L^2(\Omega)}\\ &= b\left(\|\nabla u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)(\nabla u_n(t),\nabla\varphi)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.67}$$

Escolhendo, em particular, $\varphi = \partial_t z(t)$ que pertence a $H_0^2(\Omega)$, para quase todo $t\in(0,T]$, e substituindo na equação (2.67), temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}&\left\{\|\partial_t z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} + b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla z(t),\nabla\partial_t z(t))_{L^2(\Omega)}\\ &+ (f_m(u_m(t)) - f_n(u_n(t)),\partial_t z(t))_{L^2(\Omega)} + (a(\cdot)(g(\partial_t u_m(t)) - g(\partial_t u_n)(t)),\partial_t z(t))_{L^2(\Omega)}\\ &= b\left(\|\nabla u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)(\nabla u_n(t),\nabla\partial_t z(t))_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.68}$$

No entanto, observe que

$$\begin{aligned}b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,(\nabla z(t),\nabla\partial_t z(t))_{L^2(\Omega)} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\\ &\quad + b\,\|\nabla z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,(\nabla u_m(t),\nabla\partial_t u_m(t))_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.69}$$

De (2.69) substituído em (2.68), obtém-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}&\left\{\|\partial_t z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}\\ &+ \int_\Omega (f_m(u_m(x,t)) - f_n(u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\\ &+ \int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,t)) - g(\partial_t u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\\ =\ & b\left(\|\nabla u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)(\nabla u_n(t),\nabla\partial_t z(t))_{L^2(\Omega)}\\ &+ b\,\|\nabla z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,(\nabla u_m(t),\nabla\partial_t u_m(t))_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.70}$$

para quase todo $t\in(0,T]$. Observamos agora que:

$$\begin{aligned}\text{(I)}\ &\left|\|\nabla u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right|\\ &\qquad = \left(\|\nabla u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\right)\left|\|\nabla u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\right|\\ &\qquad \lesssim \|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\qquad \lesssim \|\Delta z(t)\|_{L^2(\Omega)},\\ \text{(II)}\ &\left|(\nabla u_n(t),\nabla\partial_t z(t))_{L^2(\Omega)}\right| = \left|(\Delta u_n(t),\partial_t z(t))_{L^2(\Omega)}\right|\\ &\qquad \leqslant \|\Delta u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}\,\|\partial_t z(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\qquad \lesssim \|\partial_t z(t)\|_{L^2(\Omega)},\\ \text{(III)}\ &\left|(\nabla u_n(t),\nabla\partial_t u_m(t))_{L^2(\Omega)}\right| = \left|(\Delta u_n(t),\partial_t u_m(t))_{L^2(\Omega)}\right|\\ &\qquad \leqslant \|\Delta u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}\,\|\partial_t u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\qquad \leqslant C(R),\end{aligned}$$

em que consideramos a imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ e o fato de que $E_{u_k}(t) \leqslant E_{u_k}(0) \leqslant R$, para todo $t \in (0,T)$. De posse das desigualdades (I), (II) e (III) acima, podemos estimar o lado direito de (2.70), para quase todo $t \in (0,T]$, por:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\partial_t z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + b\,\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right\}\\
&\qquad + \int_\Omega (f_m(u_m(x,t)) - f_n(u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\\
&\qquad + \int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,t)) - g(\partial_t u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\\
&\lesssim \left(\|\Delta z(t)\|_{L^2(\Omega)}\,\|\partial_t z(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\
&\lesssim \left(\|\partial_t z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right),
\end{aligned} \tag{2.71}$$

em que utilizamos a desigualdade de Young na última linha. Integrando (2.71) sobre o intervalo $(0,t)$, para algum $t \in [0,T]$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{\|\partial_t z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + b\,\|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right\}\\
&\qquad + \int_0^t\int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,s)) - g(\partial_t u_n(x,s)))\,(\partial_t u_m(x,s) - \partial_t u_n(x,s))\,dx\,ds\\
&\lesssim \left\{\|u_{1,m} - u_{1,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u_{0,m} - \Delta u_{0,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b\,\|\nabla u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)}^2\|\nabla u_{0,m} - \nabla u_{0,n}\|_{L^2(\Omega)}^2\right\}\\
&\qquad + \left|\int_0^t\int_\Omega (f_m(u_m(x,t)) - f_n(u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\,ds\right|\\
&\qquad + \int_0^t \left[\|\partial_t z(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta z(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\right]\,ds.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Observe, então, que a convergência (2.26), nos dá que

$$\lim_{m,n\to+\infty}\left[\|\Delta u_{0,m} - \Delta u_{0,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b\,\|\nabla u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)}^2\|\nabla u_{0,m} - \nabla u_{0,n}\|_{L^2(\Omega)}^2\right] = 0, \tag{2.73}$$

$$\lim_{m,n\to+\infty}\|u_{1,m} - u_{1,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, \tag{2.74}$$

enquanto as convergências (2.38) e (2.43) nos garantem que

$$\lim_{m,n\to+\infty}\left|\int_0^t\int_\Omega (f_m(u_m(x,t)) - f_n(u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\,ds\right| = 0. \tag{2.75}$$

Assim, definimos

$$\begin{aligned}
\zeta_{m,n} &:= \|u_{1,m} - u_{1,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u_{0,m} - \Delta u_{0,n}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\qquad + b\,\|\nabla u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)}^2\|\nabla u_{0,m} - \nabla u_{0,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \big(f_m(u_m) - f_n(u_n), \partial_t u_m - \partial_t u_n\big)_{L^2(\Omega\times(0,T))}
\end{aligned}$$

e, de (2.73), (2.74) e (2.75), segue que

$$\lim_{m,n\to+\infty}\zeta_{m,n} = 0. \tag{2.76}$$

Isto nos permite reescrever (2.72) na forma

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{\|\partial_t z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}\\
&\qquad + \int_0^t \int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,s)) - g(\partial_t u_n(x,s)))\,(\partial_t u_m(x,s) - \partial_t u_n(x,s))\,dx\,ds \\
&\lesssim \zeta_{m,n} + \int_0^t \left[\|\partial_t z(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] ds.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

A fim de obter as conclusões desejadas, note primeiramente que

$$0 \leqslant b\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e, sendo g uma função crescente, temos

$$0 \leqslant \int_0^t \int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,t)) - g(\partial_t u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\,ds,$$

qualquer que seja $t \in (0,T)$. Disto, e de (2.77), resulta que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{\|\partial_t z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}\\
&\qquad + \int_0^t \int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,t)) - g(\partial_t u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\,ds \\
&\lesssim \zeta_{m,n} + \int_0^t \left[\|\partial_t z(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] ds \\
&\qquad + \int_0^t \left[\int_0^s \int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,\tau)) - g(\partial_t u_n(x,\tau)))\,(\partial_t u_m(x,\tau) - \partial_t u_n(x,\tau))\,dx\,d\tau\right] ds.
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema de Gronwall, temos que

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \|\partial_t z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad + \int_0^t \int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,t)) - g(\partial_t u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\,ds \lesssim \zeta_{m,n},
\end{aligned} \tag{2.78}$$

para todo $t \in [0,T]$. Assim, de (2.78), concluímos que:

$$0 \leqslant \|\partial_t z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \lesssim \zeta_{m,n},$$

para todo $t \in [0,T]$. Neste sentido, como $\zeta_{m,n}$ independe de t e $z = u_m - u_n$, podemos tomar o supremo em $t \in [0,T]$, de forma que a convergência (2.76) nos garanta que $(u_k, \partial_t u_k)$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];\mathcal{H})$. Desta forma, existem $(w_1, w_2) \in C([0,T];\mathcal{H})$ tais que:

$$\begin{aligned}
u_k &\longrightarrow w_1 \quad \text{em} \quad C([0,T];H^2_0(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^2_0(\Omega)),\\
\partial_t u_k &\longrightarrow w_2 \quad \text{em} \quad C([0,T];L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Da convergência (2.40), temos que

$$u_k \longrightarrow u \qquad \text{em} \qquad L^2(0,T;H_0^2(\Omega)),$$

o que nos dá, pela unicidade do limite, $w_1 = u \in C([0,T];H_0^2(\Omega))$. Ainda, da convergência (2.37), temos que

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0. \tag{2.79}$$

Da imersão $C([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, obtemos

$$\partial_t u_k \overset{*}{\rightharpoonup} w_2 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0. \tag{2.80}$$

Pelo Lema 1.23, em vista de (2.79) e (2.80), garantimos que $w_2 = \partial_t u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, o que conclui a convergência (2.62).

Por outro lado, a desigualdade (2.78) nos permite escrever

$$0 \leqslant \int_0^T \int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,t)) - g(\partial_t u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\,ds \lesssim \zeta_{m,n},$$

de onde segue imediatamente que

$$\lim_{m,n\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)\,(g(\partial_t u_m(x,t)) - g(\partial_t u_n(x,t)))\,(\partial_t u_m(x,t) - \partial_t u_n(x,t))\,dx\,ds = 0. \tag{2.81}$$

Levando em consideração o operador não linear maximal monótono $\mathbb{A} = a(x)\,g(\cdot)$ (ver item (e) do Lema 2.2), o limite (2.81) e as convergências

$$\begin{aligned} \partial_t u_k &\longrightarrow \partial_t u \quad &&\text{em} \quad L^2(\Omega\times(0,T)),\\ \mathbb{A}(\partial_t u_k) = a(x)\,g(\partial_t u_k) &\rightharpoonup \chi \quad &&\text{em} \quad L^2(\Omega\times(0,T)), \end{aligned}$$

obtemos, pelo Lema 1.45, a igualdade

$$\chi = \mathbb{A}(\partial_t u) = a(x)\,g(\partial_t u),$$

como queríamos em (2.63).

• **Condições Iniciais**: Mostraremos agora que

$$(u(0),\partial_t u(0)) = (u_0,u_1) \quad \text{em} \quad \mathcal{H}.$$

Para isso, considere inicialmente $\varphi \in L^2(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Das convergências (2.37) e (2.38), por meio do Lema 1.20, valem

$$\int_0^T (u_k(t),\psi(t))_{L^2(\Omega)}\,dt \longrightarrow \int_0^T (u(t),\psi(t))_{L^2(\Omega)}\,dt,$$
$$\int_0^T (\partial_t u_k(t),\Psi(t))_{L^2(\Omega)}\,dt \longrightarrow \int_0^T (\partial_t u(t),\Psi(t))_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

quaisquer que sejam $\psi \in L^1(0,T;H^{-2}(\Omega))$ e $\Psi \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Em particular, considerando $\Psi = \Psi(x,t) = -\theta(t)\,\varphi(x) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, temos

$$-\int_0^T \theta(t)\ (\partial_t u_k(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt \longrightarrow -\int_0^T \theta(t)\ (\partial_t u(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

que, usando integração por partes, nos dá

$$\begin{aligned}(u_k(0),\varphi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \theta'(t)\ (u_k(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt&\\ \longrightarrow (u(0),\varphi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \theta'(t)\ (u(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt.&\end{aligned} \tag{2.82}$$

Por outro lado, tomando em particular $\psi = \psi(x,t) = -\theta'(t)\,\varphi(x) \in L^1(0,T;H^{-2}(\Omega))$, temos

$$-\int_0^T \theta'(t)\ (u_k(t),\psi(t))_{L^2(\Omega)}\,dt \longrightarrow -\int_0^T \theta'(t)\ (u(t),\psi(t))_{L^2(\Omega)}\,dt, \tag{2.83}$$

Assim, das convergências (2.82) e (2.83), podemos concluir que

$$\begin{aligned}(u_k(0),\varphi)_{L^2(\Omega)} &= \left[(u_k(0),\varphi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \theta'(t)\ (u_k(t),\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt\right] - \int_0^T \theta'(t)\ (u_k(t),\psi(t))_{L^2(\Omega)}\,dt\\ &\longrightarrow (u(0),\varphi)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

ou seja,

$$(u_k(0),\varphi)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (u(0),\varphi)_{L^2(\Omega)}\,, \qquad \forall\,\varphi \in L^2(\Omega). \tag{2.84}$$

Pela densidade de $L^2(\Omega)$ em $H^{-2}(\Omega)$, de (2.84) segue que

$$\langle u_k(0),w\rangle_{H_0^2(\Omega),H^{-2}(\Omega)} \longrightarrow \langle u(0),w\rangle_{H_0^2(\Omega),H^{-2}(\Omega)}\,, \qquad \forall\,w \in H^{-2}(\Omega)$$

e, portanto,

$$u_k(0) \rightharpoonup u(0) \quad \text{em} \quad H_0^2(\Omega).$$

No entanto, sabemos que

$$u_k(0) = u_{0,k} \longrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad H_0^2(\Omega).$$

Da unicidade do limite fraco, segue que $u(0) = u_0$ em $H_0^2(\Omega)$. Resta mostrar que $\partial_t u(0) = u_1$ em $L^2(\Omega)$. Sendo u_k solução do problema truncado (2.27), temos:

$$(\partial_t^2 u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u_k(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)} + b\,\|\nabla u_k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla u_k(t), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} + (f_k(u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} + (a(\cdot)(g(\partial_t u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{2.85}$$

para quaisquer $t \in [0, T]$ e $\varphi \in H_0^2(\Omega)$. Multiplicando (2.85) por $\theta(t)$ e integrando sobre $[0, T]$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \theta(t)\,(\partial_t^2 u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt &+ \int_0^T \theta(t)\,(\Delta u_k(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &+ b\int_0^T \theta(t)\,\|\nabla u_k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla u_k(t), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T \theta(t)\,(f_k(u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &+ \int_0^T \theta(t)\,(a(\cdot)(g(\partial_t u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt = 0,\end{aligned} \tag{2.86}$$

para toda $\varphi \in H_0^2(\Omega)$. Agora, utilizando integração por partes o primeiro termo, podemos reescrever (2.86) como

$$\begin{aligned}-\int_0^T \theta'(t)\,(\partial_t^2 u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt &+ \int_0^T \theta(t)\,(\Delta u_k(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &+ b\int_0^T \theta(t)\,\|\nabla u_k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla u_k(t), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T \theta(t)\,(f_k(u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &+ \int_0^T \theta(t)\,(a(\cdot)(g(\partial_t u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt = (\partial_t u_k(0), \varphi)_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.87}$$

para toda $\varphi \in H_0^2(\Omega)$. Por processos análogos aos que realizamos anteriormente, passamos ao limite de $k \to +\infty$ em (2.87), de forma a obter

$$\begin{aligned}-\int_0^T \theta'(t)\,(\partial_t^2 u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt &+ \int_0^T \theta(t)\,(\Delta u(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &+ b\int_0^T \theta(t)\,\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\nabla u(t), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T \theta(t)\,(f(u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &+ \int_0^T \theta(t)\,(a(\cdot)(g(\partial_t u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt = (u_1, \varphi)_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.88}$$

Utilizando, novamente, integração por partes no primeiro termo de (2.88) e a Fórmula de Green, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \theta(t)\,\frac{d}{dt}(\partial_t^2 u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt &+ \int_0^T \theta(t)\,(\Delta u(t), \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &+ b\int_0^T \theta(t)\,\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}(\Delta u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T \theta(t)\,(f(u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &+ \int_0^T \theta(t)\,(a(\cdot)(g(\partial_t u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)}\,dt = (u_1, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\partial_t u(0), \varphi)_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

o que nos dá, da Definição 2.3 de Solução Fraca, que

$$(u_1, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\partial_t u(0), \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \qquad \forall\, \varphi \in H_0^2(\Omega).$$

Pela densidade de $H_0^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, segue que

$$(u_1, v)_{L^2(\Omega)} = (\partial_t u(0), v)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall\, v \in L^2(\Omega)$$

e, portanto, $\partial_t u(0) = u_1$ em $L^2(\Omega)$, como queríamos.

• **Unicidade**: Sejam u e v soluções fracas do problema (2.1). Considere $w = u - v$. Então,

$$w \in C\left([0,T]; H_0^2(\Omega)\right), \quad \partial_t w \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right),$$

bem como w satisfaz o problema

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 w + \Delta^2 w \\ &\quad = b\,\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u - b\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta v - (f(u) - f(v)) - a(x)\left(g(\partial_t u) - g(\partial_t v)\right) \end{aligned} \tag{2.89}$$

em $L^\infty\left(0,T; H^{-2}(\Omega)\right)$, com dados iniciais

$$w(0) = \partial_t w(0) = 0.$$

Observamos que, nestas condições, não faz sentido compormos $\partial_t^2 w(t)$ com $\partial_t w(t)$ na dualidade de $H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, uma vez que temos $\partial_t w(t) \in L^2(\Omega)$, para todo $t \in [0,T]$. Isto torna o método da energia não adequado ao caso. Neste sentido, contornando esta situação, vamos obter a unicidade da solução fraca via Método de Visik-Ladyzhenskaya, que pode ser encontrado em [72] e em [45]. De fato, dado $s \in (0,T]$, consideramos a seguinte função auxiliar:

$$\psi(t) := \begin{cases} -\int_t^s w(\tau)\,d\tau & \text{se} \quad 0 \leqslant t < s \\ \quad 0 & \text{se} \quad s \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2.90}$$

cuja derivada no sentido das distribuições a valores vetoriais é dada por

$$\partial_t \psi(t) = \begin{cases} w(t) & \text{se} \quad 0 \leqslant t < s \\ \;\;0 & \text{se} \quad s \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Definindo $\Psi(t) = \int_0^t w(\tau)\,d\tau$, segue de (2.90) que:

$$\begin{cases} \psi(t) = \Psi(t) - \Psi(s), & \forall\, t \in [0,s], \\ \psi(s) = 0, \quad \psi(0) = -\Psi(s). \end{cases}$$

Além disso, $\psi \in C([0,T]; H_0^2(\Omega))$, visto que

$$\|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega))} \leqslant \int_t^s \|\Delta w(\tau)\|_{L^2(\Omega))}\,d\tau \leqslant \|w\|_{C([0,T];H_0^2(\Omega))}(s-t) \leqslant \|w\|_{C([0,T];H_0^2(\Omega))}T,$$

para todo $t \in [0,T]$ e, de maneira imediata, $\partial_t\psi \in C([0,T]; H_0^2(\Omega))$. Com isso, podemos compor (2.89) com ψ na dualidade $L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ e, notando que $\psi \equiv 0$ em $[s,T]$, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \langle \partial_t^2 w(t), \psi(t)\rangle\, dt + \int_0^s \langle \Delta^2 w(t), \psi(t)\rangle\, dt \\
&\quad = b\int_0^s \left\langle \left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u(t) - \|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta v(t)\right), \psi(t)\right\rangle\, dt \\
&\qquad - \int_0^s \langle (f(u(t)) - f(v(t))), \psi(t)\rangle\, dt - \int_0^s \langle a(x)\,(g(\partial_t u(t)) - g(\partial_t v(t))), \psi(t)\rangle\, dt.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Integrando por partes o primeiro termo de (2.91), temos que

$$\int_0^s \langle \partial_t^2 w(t), \psi(t)\rangle\, dt = \langle \partial_t w(s), \underbrace{\psi(s)}_{=0}\rangle - \langle \underbrace{\partial_t w(0)}_{=0}, \psi(0)\rangle - \int_0^s \langle \partial_t w(t), \partial_t\psi(t)\rangle\, dt$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
\int_0^s \langle \partial_t^2 w(t), \psi(t)\rangle\, dt &= -\int_0^s \langle \partial_t w(t), w(t)\rangle\, dt = -\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\|w(0)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = -\frac{1}{2}\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Por outro lado, usando a extensão do operador Δ^2 no espaço $H_0^2(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^s \left\langle \Delta^2 w(t), \psi(t)\right\rangle\, dt &= \int_0^s (\Delta\psi_t(t), \Delta\psi(t))\, dt = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|\Delta\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\Delta\psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\Delta\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = -\frac{1}{2}\|\Delta\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= -\frac{1}{2}\|\Delta\Psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Substituindo (2.92) e (2.93) em (2.91), temos:

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta\Psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} = I_b + I_f + I_g, \tag{2.94}$$

em que

$$\begin{aligned}
I_b &:= -b\int_0^s \left\langle \left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta u(t) - \|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Delta v(t)\right), \psi(t)\right\rangle\, dt, \\
I_f &:= \int_0^s \langle (f(u(t)) - f(v(t))), \psi(t)\rangle\, dt, \\
I_g &:= \int_0^s \langle a(x)\,(g(\partial_t u(t)) - g(\partial_t v(t))), \psi(t)\rangle\, dt.
\end{aligned}$$

Para estimarmos o termo I_b, escrevemos $I_b = I_{b,1} + I_{b,2}$ com

$$
\begin{aligned}
I_{b,1} &:= -b \int_0^s \left[\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \right] (\Delta v(t), \psi(t))\, dt, \\
I_{b,2} &:= -b \int_0^s \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} (\Delta w(t), \psi(t))\, dt.
\end{aligned}
$$

Note inicialmente que:

$$
\begin{aligned}
\left| \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \right| &= |(\Delta u(t), u(t)) - (\Delta v(t), v(t))| \\
&= |(\Delta u(t), u(t)) - (\Delta u(t), v(t)) + (\Delta u(t), v(t)) - (\Delta v(t), v(t))| \\
&= |(\Delta u(t), w(t)) + (\Delta w(t), v(t))| \\
&= |(\Delta u(t), w(t)) + (w(t), \Delta v(t))| \\
&\leqslant |(\Delta u(t), w(t))| + |(w(t), \Delta v(t))| \\
&\leqslant \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \left(\|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta v(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leqslant C \, \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Além disso, pelo Teorema de Green, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela imersão $H^2_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
|(\Delta v(t), \psi(t))| = |(v(t), \Delta\psi(t))| \leqslant \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \, \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I_{b,1} \leqslant |I_{b,1}| &\leqslant b \int_0^s \left| \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \right| \, |(\Delta v(t), \psi(t))|\, dt \\
&\leqslant C \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \, \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt.
\end{aligned}
\tag{2.95}
$$

Utilizando novamente o Teorema de Green, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a imersão $H^2_0(\Omega) \hookrightarrow H^1_0(\Omega)$, temos que

$$
\begin{aligned}
I_{b,2} \leqslant |I_{b,2}| &\leqslant b \int_0^s \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, |(\Delta w(t), \psi(t))|\, dt \\
&\leqslant C \int_0^s |(w(t), \Delta\psi(t))| dt \\
&\leqslant C \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} dt
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

para alguma $C > 0$.

Assim, de (2.95) e (2.96), segue

$$
I_b \leqslant I_{b,1} + I_{b,2} \leqslant C \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt. \tag{2.97}
$$

Para estimar o termo I_f, observamos inicialmente que

$$
\begin{aligned}
I_f &\leqslant \int_0^s \int_\Omega |f(u(x,t)) - f(v(x,t))| \; |\psi(x,t)| \, dx \, dt \\
&\leqslant C \int_0^s \int_\Omega \left[1 + |u(x,t)|^{p-1} + |v(x,t)|^{p-1}\right] \; |w(x,t)| \, |\psi(x,t)| \, dx \, dt \\
&\leqslant C \left[I_{f,1} + I_{f,2} + I_{f,3}\right] \qquad (2.98)
\end{aligned}
$$

em que definimos:

$$
\begin{aligned}
I_{f,1} &:= \int_0^s \int_\Omega |w(x,t)| \, |\psi(x,t)| \, dx \, dt, \\
I_{f,2} &:= \int_0^s \int_\Omega |u(x,t)|^{p-1} \, |w(x,t)| \, |\psi(x,t)| \, dx \, dt, \\
I_{f,3} &:= \int_0^s \int_\Omega |v(x,t)|^{p-1} \, |w(x,t)| \, |\psi(x,t)| \, dx \, dt.
\end{aligned}
$$

Assim, trabalharemos separadamente cada integral. Inicialmente,

$$
\begin{aligned}
I_{f,1} &\lesssim \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \, \|\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \, dt \\
&\lesssim \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \, \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \, dt,
\end{aligned}
$$

em que utilizamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Agora, pela desigualdade de Hölder Generalizada com $q_1 = \frac{2p}{p-1}$, $q_2 = 2$ e $q_3 = 2p$, temos

$$
\begin{aligned}
I_{f,2} &\leqslant \int_0^s \left(\int_\Omega |u(x,t)|^{2p} \, dx\right)^{\frac{p-1}{2p}} \left(\int_\Omega |w(x,t)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\psi(x,t)|^{2p} \, dx\right)^{\frac{1}{2p}} \, dt \\
&\lesssim \int_0^s \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{p-1} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \, dt \\
&\lesssim \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \, dt,
\end{aligned}
$$

em que utilizamos a imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ e o fato de que $u \in C\left([0,T]; H_0^2(\Omega)\right)$. De maneira inteiramente análoga, temos:

$$
I_{f,3} \lesssim \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \, dt.
$$

Desta forma, retornando com as estimativas para (2.98), temos:

$$
I_f \lesssim \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \, dt. \qquad (2.99)
$$

Consideramos agora a integral

$$
I_g = \int_0^s \int_\Omega a(x) \; \left(g(\partial_t u(x,t)) - g(\partial_t v(x,t))\right) \; \psi(x,t) \, dx \, dt.
$$

Nosso intuito é mostrar que $I_g \leqslant 0$. Para isso, vamos considerar dois conjuntos

$$\Lambda_1 := \{(x,t) \in \Omega \times [0,s) : \partial_t u(x,t) \geqslant \partial_t v(x,t)\},$$
$$\Lambda_2 := \{(x,t) \in \Omega \times [0,s) : \partial_t u(x,t) < \partial_t v(x,t)\}.$$

Então, observe que:

(i) $\partial_t w(x,t) \geqslant 0$ em Λ_1. Então, w é não-decrescente na variável t em Λ_1 com $w(x,0) = 0$. Segue que $w(x,t) \geqslant w(x,0) = 0$ em Λ_1.

Agora, observe que sendo w contínua na variável $t \in [0,T]$ e, em particular, em $[t,s]$, deve existir pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, um $t_0 \in [t,s]$ tal que

$$\psi(x,t) = -\int_t^s w(x,\tau)\,d\tau = -w(x,t_0)(s-t) = \underbrace{w(x,t_0)}_{\geqslant 0 \text{ em } \Lambda_1}(t-s) \leqslant 0.$$

Assim, temos $\psi(x,t) \leqslant 0$ em Λ_1.

(ii) $\partial_t w(x,t) < 0$ em Λ_2. Então, w é decrescente na variável t em Λ_2 com $w(x,0) = 0$. Segue que $w(x,t) < w(x,0) = 0$ em Λ_2.

Por argumentação análoga, deve existir $t_1 \in [t,s]$ tal que

$$\psi(x,t) = -\int_t^s w(x,\tau)\,d\tau = -w(x,t_1)(s-t) = \underbrace{w(x,t_1)}_{< 0 \text{ em } \Lambda_2}(t-s) \geqslant 0.$$

Assim, temos $\psi(x,t) \geqslant 0$ em Λ_2.

Como g é monótona crescente, de (i) e (ii), concluímos que

$$\begin{cases} \partial_t w(x,t) \geqslant 0 & \Longrightarrow \quad g(\partial_t u(x,t)) \geqslant g(\partial_t v(x,t)) \quad \text{e} \quad \psi(x,t) \leqslant 0, \\ \partial_t w(x,t) < 0 & \Longrightarrow \quad g(\partial_t u(x,t)) < g(\partial_t v(x,t)) \quad \text{e} \quad \psi(x,t) \geqslant 0. \end{cases}$$

Por fim, sendo $\Omega \times [0,s) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, temos

$$[g(\partial_t u(x,t)) - g(\partial_t v(x,t))]\,\psi(x,t) \leqslant 0, \qquad \text{em} \qquad \Omega \times [0,s),$$

e, portanto,

$$I_g = \int_0^s \int_\Omega a(x)\,\left(g(\partial_t u(x,t)) - g(\partial_t v(x,t))\right)\,\psi(x,t)\,dx\,dt \leqslant 0, \tag{2.100}$$

uma vez que a é uma função não-negativa. Retornando, então, com as estimativas (2.97), (2.99) e (2.100) para (2.94), obtemos:

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta\Psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

ou ainda, de $\psi(t) = \Psi(t) - \Psi(s)$, $\forall t \in [0, s]$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta\Psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C \Bigg\{ \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\Psi(t)\|_{L^2(\Omega)} dt \\ + \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\Psi(s)\|_{L^2(\Omega)} dt \Bigg\},\end{aligned} \tag{2.101}$$

para alguma constante $C > 0$. Seguem da Desigualdade de Young

$$\int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\Psi(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^s \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^s \|\Delta\Psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt. \tag{2.102}$$

e, para $\varepsilon = (2Cs)^{1/2} > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\Psi(s)\|_{L^2(\Omega)} dt &= \int_0^s \varepsilon \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\varepsilon} \|\Delta\Psi(s)\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^s \varepsilon^2 \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{1}{\varepsilon^2}\|\Delta\Psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ &= Cs \int_0^s \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{4C}\|\Delta\Psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant CT \int_0^s \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{4C}\|\Delta\Psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{2.103}$$

De (2.101), (2.102) e (2.103), concluímos que

$$\frac{1}{4}\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\Delta\Psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_T \int_0^s \left(\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\Psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dt, \tag{2.104}$$

para $C_T > 0$ e $\forall s \in (0, T]$. Pelo Lema de Gronwall, aplicado a (2.104), temos que

$$\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\Psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0, \quad \forall s \in (0, T].$$

Assim $\|w(s)\|_2^2 = 0$, para cada $s \in (0, T]$. Do fato de que $w(0) = 0$, obtemos que

$$w(s) = 0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega), \quad \forall\, s \in [0, T].$$

Portanto, $u = v$ em $C\left([0, T]; L^2(\Omega)\right)$ e consequentemente, $u = v$ em $C\left([0, T]; H_0^2(\Omega)\right)$.

• **Identidade de Energia**: Multiplicando $(2.27)_1$ por $\partial_t u_k$ e integrando em Ω, obtemos:

$$\frac{d}{dt} E_{u_k}(t) = -\int_\Omega a(x)\, g(\partial_t u_k(x, t))\, \partial_t u_k(x, t)\, dx. \tag{2.105}$$

Tomados $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, e integrando (2.105) de t_1 a t_2, temos:

$$E_{u_k}(t_2) - E_{u_k}(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega a(x)\, g(\partial_t u_k(x, t))\, \partial_t u_k(x, t)\, dx\, dt. \tag{2.106}$$

Lembramos que

$$\begin{aligned} a(x)\, g(\partial_t u_k) &\longrightarrow a(x)\, g(\partial_t u) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega \times (0,T)),\\ \partial_t u_k &\longrightarrow \partial_t u \quad \text{em} \quad C([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(\Omega \times (0,T)), \end{aligned}$$

para todo $T > 0$. Segue, portanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega a(x)\, g(\partial_t u_k(x,t))\, \partial_t u_k(x,t)\, dx\, dt \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega a(x)\, g(\partial_t u(x,t))\, \partial_t u(x,t)\, dx\, dt, \tag{2.107}$$

quaisquer que sejam $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$. Agora, mostraremos que $E_{u_k}(t) \longrightarrow E_u(t)$, para todo $t \in [0,T]$. De fato, já sabemos que

$$E_{u_k}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\partial_t u_k(x,t)|^2 + |\Delta u_k(x,t)|^2\right)\, dx\, dt + \frac{b}{4}\|\nabla u_k(t)\|^4_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F_k(u_k(x,t))\, dx,$$

em que $F_k(s) = \int_0^s F_k(\lambda)\, d\lambda$. Da convergência (2.62) e da imersão $C([0,T];H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow C([0,T];H_0^1(\Omega))$ seguem as convergências das três primeiras parcelas de $E_{u_k}(t)$ para os respectivos termos em $E_u(t)$, para todo $t \in [0,T]$. Resta-nos, portanto, mostrar a convergência

$$\int_\Omega F_k(u_k(x,t))\, dx \longrightarrow \int_\Omega F(u(x,t))\, dx, \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.108}$$

Com efeito, tomando $t_0 \in [0,T]$ arbitrário porém fixo, observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |F_k(u_k(x,t_0))|^{\frac{2^*}{p+1}}\, dx &\leqslant \int_\Omega \left(|u_k(x,t_0)|^2 + |u_k(x,t_0)|^{p+1}\right)^{\frac{2^*}{p+1}} dx\\ &\lesssim \int_\Omega |u_k(x,t_0)|^{\frac{2\cdot 2^*}{p+1}}\, dx + \int_\Omega |u_k(x,t_0)|^{2^*}\, dx\\ &\lesssim \|u_k(t_0)\|^{\frac{2\cdot 2^*}{p+1}}_{L^{\frac{2\cdot 2^*}{p+1}}(\Omega)} + \|u_k(t_0)\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\\ &\lesssim \|u_k(t_0)\|^{\frac{2\cdot 2^*}{p+1}}_{H_0^2(\Omega)} + \|u_k(t_0)\|^{2^*}_{H_0^2(\Omega)}\\ &\lesssim [E_{u_k}(t_0)]^{\frac{2^*}{p+1}} + [E_{u_k}(t_0)]^{\frac{2^*}{2}}\\ &\lesssim [E_{u_k}(0)]^{\frac{2^*}{p+1}} + [E_{u_k}(0)]^{\frac{2^*}{2}}\\ &\lesssim C(R), \end{aligned}$$

em que utilizamos as imersões $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2\cdot 2^*}{p+1}}(\Omega)$ $(2 \leqslant p+1 < 2^* \Rightarrow 2 = \frac{2(p+1)}{p+1} < \frac{2\cdot 2^*}{p+1} \leqslant 2^*)$, $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e a desigualdade (2.34). Disto, segue que a sequência

$$\{F_k(u_k(\cdot,t_0))\} \text{ é limitada em } L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega). \tag{2.109}$$

Nos concentraremos em provar a convergência

$$F_k(u_k(x,t_0)) \longrightarrow F(u(x,t_0)) \quad \text{q. s. em} \quad \Omega, \tag{2.110}$$

a qual, juntamente com (2.109), verifica as hipóteses do Lema 1.35 (Lema de Strauss) a fim de garantir que

$$F_k(u_k(\cdot,t_0)) \rightharpoonup F(u(\cdot,t_0)) \quad \text{em} \quad L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega).$$

Mais do que isso,

$$F_k(u_k(\cdot,t_0)) \longrightarrow F(u(\cdot,t_0)) \quad \text{em} \quad L^r(\Omega). \tag{2.111}$$

para todo $1 \leqslant r < \frac{2^*}{p+1}$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} &|F_k(u_k(x,t_0)) - F(u(x,t_0))| \\ &\qquad \leqslant |F_k(u_k(x,t_0)) - F(u_k(x,t_0))| + |F(u_k(x,t_0)) - F(u(x,t_0))|. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Para validar (2.110), mostraremos que os termos à direita de (2.112) tendem a zero, sempre que $k \to \infty$. Da convergência (2.42) e da continuidade de F, segue que

$$F(u_k(x,t_0)) - F(u(x,t_0)) \longrightarrow 0 \quad \text{q. s. em} \quad \Omega.$$

Resta-nos mostrar que

$$F_k(u_k(x,t_0)) - F(u_k(x,t_0)) \longrightarrow 0 \quad \text{q. s. em} \quad \Omega.$$

Pelo Teorema 1.5 da Convergência Dominada Inversa, existe $L = L_{t_0}(\cdot) \in L^1(\Omega)$ tal que a desigualdade

$$|u_k(x,t_0)| \leqslant L_{t_0}(x), \qquad \text{q. s. em} \quad \Omega,$$

é válida uniformemente em k. Desta forma, para quase todo $x \in \Omega$, temos que

$$(0, u_k(x,t_0)) \subset (-L_{t_0}(x), L_{t_0}(x))$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} |F_k(u_k(x,t_0)) - F(u_k(x,t_0))| &= \left| \int_0^{u_k(x,t_0)} f_k(s)ds - \int_0^{u_k(x,t_0)} f(s)ds \right| \\ &\leqslant \int_{-L_{t_0}(x)}^{L_{t_0}(x)} |f_k(s) - f(s)|\, ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

desde que $k \geqslant L_{t_0}(x)$. Com isso, concluímos a verificação de (2.110).

Assim, tomando $r = 1$ em (2.111) e dada a arbitrariedade de $t_0 \in [0,T]$, garantimos a convergência (2.108). De (2.62) e (2.108) segue

$$E_{u_k}(t) \longrightarrow E_u(t), \tag{2.113}$$

para todo $t \in [0,T]$. Por fim, de (2.106), (2.107) e (2.113), na passagem ao limite, obtemos a identidade de energia

$$E_u(t_2) - E_u(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega a(x)\, g(\partial_t u(x,t))\, \partial_t u(x,t)\, dx\, dt,$$

como queríamos. Isto encerra a demonstração do teorema. $\square$

2.2 Decaimento Uniforme da Energia

Nesta seção apresentaremos um decaimento uniforme para o funcional de energia $E(t)$ definido em (2.12). Inspirados, mais uma vez, por Lasiecka e Tataru [41] mostraremos que o decaimento na energia é estabelecido por meio da solução de uma equação diferencial ordinária não linear. Para isso, como se trata de um problema com amortecimento localizado, vamos utilizar uma estratégia usual, fundamentada pela combinação de uma continuação única e uma desigualdade de observabilidade. Neste sentido, apresentaremos a seguir condições e definições necessárias à obtenção do nosso principal resultado.

(H.4) Supomos que ω satisfaz a condição geométrica de controle (CGC), isto é, existe $T_0 > 0$, tal que todo raio da ótica geométrica viajando com velocidade constante igual a 1 e partindo de $t = 0$, encontra o conjunto ω em um tempo $t < T_0$.

(H.5) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função côncava e estritamente crescente, satisfazendo $h(0) = 0$ e

$$h(g(s)\, s) \geqslant s^2 + g^2(s), \quad |s| \leqslant 1.$$

Observação 2.8. *Em virtude das hipóteses sobre a função g dadas em **(H.3)** a função h sempre pode ser construída. De fato, definindo as funções crescentes h_1, h_2 sobre $\mathbb{R}$ tais que*

$$\begin{aligned} h_1(s\, g(s)) &\geqslant s^2 + g^2(s), \quad \text{para } s \leqslant 0,\\ h_2(s\, g(s)) &\geqslant s^2 + g^2(s), \quad \text{para } s \geqslant 0, \end{aligned}$$

podemos considerar a função envelope côncavo de h_1 e h_2, dada por $h = \operatorname{conc}(\max\{h_1, h_2\})$, que possui as propriedades desejadas.

2.2.1 Princípio da Continuação Única

Como previamente mencionado, a argumentação utilizada para garantir a existência e unicidade de solução fraca para o problema (2.1) foi estabelecida a partir da construção de problemas auxiliares truncados em que o termo fonte $f_k(u)$ era Lipschitz contínuo, para cada $k \in \mathbb{N}$. Apresentamos, a seguir, o resultado de continuação única que motivou esta estratégia e que é fundamental para obtermos a desigualdade de observabilidade.

Lema 2.9. *Sejam $p \in W^{1,\infty}(0,T)$, $p \geqslant 0$, ω uma vizinhança da fronteira $\partial\Omega$ satisfazendo a condição geométrica de controle dada pela Hipótese **(H.4)** e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua. Se $v \in C([0,T]; H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ satisfaz*

$$\begin{cases} \partial_t^2 v + \Delta^2 v - p(t)\,\Delta v + f(v) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\ v = \partial_\nu v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \partial_t v = 0 & \text{em } \omega \times (0,T), \end{cases} \tag{2.114}$$

então $v = 0$ em $\Omega \times (0,T)$.

Demonstração. Se $p(t) = p_0$ para todo $t \in [0;T]$, então a função $y = \partial_t v$ satisfaz o problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \Delta^2 y - p_0\,\Delta y + f'(v)y = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\ y = \partial_\nu y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{em } \omega \times (0,T). \end{cases}$$

Uma vez que $f'(v) \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$, podemos aplicar o Princípio de Continuação Única dado pelo Teorema 1.63, ao considerar $p_1(x,t) = -p_0$ e $p_2(x.t) = f'(v)$, obtendo que $y \equiv 0$ e, consequentemente, $v \equiv 0$.

Supomos agora que $p'(t) \neq 0$ para t variando em um subconjunto de medida estritamente positiva de $[0,T]$. Da primeira equação em (2.114) e do fato que $v(x,t) = v(x,0)$ para $x \in \omega$ (note que $\partial_t v = 0$ em $\omega \times (0,T)$), obtemos que

$$\Delta^2 v(x,0) - p(t)\,\Delta v(x,0) + f(v(x,0)) = 0 \text{ em } \omega \times (0,T).$$

Tomando derivada no tempo t na última igualdade, temos:

$$p'(t)\,\Delta v(x,0) = 0 \text{ em } \omega \times (0,T).$$

Sabendo que $p'(t) \neq 0$, da relação acima têm-se $\Delta v(x,0) = 0$ em ω e, desde que $v = \partial_\nu v = 0$ temos, pelo Teorema de Holmgren, que $v \equiv 0$ em ω. Utilizando, novamente, o Teorema 1.63 deduzimos que $v \equiv 0$ como desejado. □

2.2.2 Desigualdade de Observabilidade

Lema 2.10 (Desigualdade de observabilidade). *Supondo válida a Hipótese **(H.4)**, considere $T \geqslant T_0$ e $R = 2\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{H}}$. Existe uma constante positiva $C = C(R,T)$, independente de k, tal que a solução u_k correspondente a (2.27) com $(u_{0,k}, u_{1,k}) \in D(\mathcal{A})$ satisfaz*

$$E_{u_k}(0) \leqslant C\left(\int_0^T \int_\Omega a(x)\left(|\partial_t u_k(x,t)|^2| + |g(\partial_t u_k(x,t))|^2\right)\,dx\,dt\right). \tag{2.115}$$

Demonstração. Primeiramente, note que o dado inicial $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ no problema original (2.1) é nulo ou não nulo.

Caso 1: Supondo $(u_0, u_1) = (0, 0)$ e observando a convergência (2.26), podemos considerar $(u_{0,k}, u_{1,k}) = (0, 0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, a desigualdade de observabilidade (2.115) será trivialmente satisfeita para qualquer escolha de $C > 0$.

Caso 2: Supondo $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$, observamos que existem r, $R > 0$, tais que

$$0 < r < \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}} < R;$$

em que consideramos, por exemplo, $r = \frac{1}{2}\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}}$. Portanto, de (2.26), existe $k_0 \geqslant 1$ tal que para todo $k \geqslant k_0$ a sequência $(u_{0,k}, u_{1,k})$ satisfaz

$$0 < r < \|(u_{0,k}, u_{1,k})\|_{\mathcal{H}} < R \tag{2.116}$$

Dito isto, argumentaremos por contradição. Supondo que o lema seja falso, obtemos que para toda constante $C > 0$, independente de k, existem dados iniciais $\left(u_{0,k}^C, u_{1,k}^C\right) \in D(\mathcal{A})$ cujas soluções correspondentes u_k^C satisfazem (2.116) porém não verificam a desigualdade de observabilidade (2.115), isto é,

$$E_{u_k^C}(0) > C \int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|\partial_t u_k^C(x,t)|^2 + |g(\partial_t u_k^C(x,t))|^2\right) \, dx \, dt.$$

Em particular, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, podemos considerar $C = m \in \mathbb{N}$ e garantir a existência de uma sequência de dados iniciais $(u_{0,k}^m, u_{1,k}^m)$ verificando (2.116) e cuja soluções correspondentes u_k^m satisfazem a desigualdade reversa

$$E_{u_k^m}(0) > m \int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|\partial_t u_k^m(x,t)|^2 + |g(\partial_t u_k^m(x,t))|^2\right) \, dx \, dt.$$

Desta forma, obtemos uma sequência (u_k^m) de soluções do problema (2.27) tais que

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{E_{u_k^m}(0)}{\int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|\partial_t u_k^m(x,t)|^2 + |g(\partial_t u_k^m(x,t))|^2\right) \, dx \, dt} = +\infty,$$

e, consequentemente,

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|\partial_t u_k^m(x,t)|^2 + |g(\partial_t u_k^m(x,t))|^2\right) \, dx \, dt}{E_{u_k^m}(0)} = 0. \tag{2.117}$$

Da limitação $E_{u_k^m}(0) \leqslant R$, para todo $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|\partial_t u_k^m(x,t)|^2 + |g(\partial_t u_k^m(x,t))|^2\right) \, dx \, dt = 0, \tag{2.118}$$

em virtude de (2.117). Ainda, por argumentos análogos aos utilizados nas estimativas à priori (prova do Teorema 2.4), para todo $T > 0$, são válidas as convergências

$$\begin{aligned} u_k^m &\xrightarrow{\ *\ } u_k && \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \\ \partial_t u_k^m &\xrightarrow{\ *\ } \partial_t u_k && \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_k^m &\longrightarrow u_k && \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)), \\ u_k^m &\longrightarrow u_k && \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^q(\Omega)), \quad \forall\, q \in [2,2^*), \end{aligned} \tag{2.119}$$

para uma eventual subsequência de (u_k^m), denotada por simplicidade da mesma forma. Neste momento da demonstração, vamos novamente considerar dois casos: $u_k \not\equiv 0$ e $u_k \equiv 0$.

Subcaso 2 (a): $u_k \not\equiv 0$.

Observe que tomando o limite, quando $m \to +\infty$, no problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k^m + \Delta^2 u_k^m - b\,\|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Delta u_k^m + f_k(u_k^m) + a(x) g(\partial_t u_k^m) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u_k^m = \partial_\nu u_k^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_k^m(x,0) = u_{0,k}^m(x); \quad \partial_t u_k^m(x,0) = u_{1,k}^m(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e levando em consideração o limite (2.118) e as convergências (2.119), temos

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k + \Delta^2 u_k - b\,\|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Delta u_k + f_k(u_k) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\ u_k = \partial_\nu u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ \partial_t u_k = 0 & \text{q.s. em } \omega. \end{cases}$$

Da regularidade das soluções fortes (u_k), temos $p(t) = b\,\|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \in W^{1,\infty}(0,T)$ e, uma vez que f_k é Lipschitz contínua, pelo Lema 2.9 segue que $u_k \equiv 0$, resultando em uma contradição.

Subcaso 2 (b): $u_k \equiv 0$.

Inicialmente, observamos que, neste caso, as convergências dadas em (2.119) se reescrevem como

$$\begin{aligned} u_k^m &\xrightarrow{\ *\ } 0 && \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \\ \partial_t u_k^m &\xrightarrow{\ *\ } 0 && \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_k^m &\longrightarrow 0 && \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)), \\ u_k^m &\longrightarrow 0 && \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^q(\Omega)), \quad \forall\, q \in [2,2^*). \end{aligned}$$

Definindo

$$\alpha_m := \sqrt{E_{u_k^m}(0)}, \qquad v_k^m := \frac{u_k^m}{\alpha_m}, \tag{2.120}$$

de (2.117) segue a convergência

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|\partial_t v_k^m(x,t)|^2 + \frac{1}{\alpha_m^2} |g(\partial_t u_k^m(x,t))|^2 \right) dx\, dt = 0. \tag{2.121}$$

Considerando $(v_k^m)_{m\in\mathbb{N}}$, como definido em (2.120), temos a seguinte sequência de problemas normalizados

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_k^m + \Delta^2 v_k^m - b\,\|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\Delta v_k^m + \frac{1}{\alpha_m} f_k(u_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} a(x)\,g(\partial_t u_k^m) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_k^m = \partial_\nu v_k^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ v_k^m(x,0) = \frac{u_{0,k}^m}{\alpha_m}; \quad \partial_t v_k^m(x,0) = \frac{u_{1,k}^m}{\alpha_m}, & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.122}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_m}\int_\Omega f_k(u_k^m(x,t))\,\partial_t v_k^m\,dx &= \frac{1}{\alpha_m^2}\int_\Omega f_k(\alpha_m\,v_k^m(x,t))\,\partial_t(\alpha_m\,v_k^m(x,t))\,dx \\ &= \frac{1}{\alpha_m^2}\frac{d}{dt}\int_\Omega F_k(\alpha_m\,v_k^m(x,t))\,dx \\ &= \frac{1}{\alpha_m^2}\frac{d}{dt}\int_\Omega F_k(u_k^m(x,t))\,dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -b\,\|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_\Omega \Delta v_k^m(x,t)\,\partial_t v_k^m(x,t)\,dx &= b\,\|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_\Omega \nabla v_k^m(x,t)\,\nabla\partial_t v_k^m(x,t)\,dx \\ &= b\,\alpha_m^2\,\|\nabla v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\ &= \alpha_m^2\,\frac{b}{4}\,\frac{d}{dt}\|\nabla v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4. \end{aligned}$$

Desta forma, multiplicando $(2.122)_1$ por $\partial_t v_k^m$ e integrando em Ω, obtemos

$$\frac{dE_{v_k^m}}{dt}(t) + \left(\int_\Omega a(x)\,g(\partial_t v_k^m(x,t))\,\partial_t v_k^m(x,t)\,dx\right) = 0,$$

em que

$$E_{v_k^m}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\partial_t v_k^m(x,t)|^2 + |\Delta v_k^m(x,t)|^2\right)\,dx + \alpha_m^2\frac{b}{4}\|\nabla v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 + \frac{1}{\alpha_m^2}\int_\Omega F_k(u_k^m(x,t))\,dx.$$

Ainda, observe que do funcional de energia acima e da definição (2.120), segue imediatamente que

$$E_{v_k^m}(t) = \frac{1}{\alpha_m^2}\,E_{u_k^m}(t), \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Em particular,

$$E_{v_k^m}(0) = \frac{1}{\alpha_m^2}\,E_{u_k^m}(0) = 1, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.123}$$

De forma a obtermos uma contradição com (2.123) e concluirmos o resultado, provemos a convergência

$$\lim_{m\to+\infty} E_{v_k^m}(0) = 0. \tag{2.124}$$

De fato, da limitação (2.123), por argumentos previamente desenvolvidos, verificam-se as convergências

$$\begin{aligned} v_k^m &\xrightarrow{\;*\;} v_k && \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)), \\ \partial_t v_k^m &\xrightarrow{\;*\;} \partial_t v_k && \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ v_k^m &\longrightarrow v_k && \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)), \\ v_k^m &\longrightarrow v_k && \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^q(\Omega)), \quad \forall\, q \in [2,2^*), \end{aligned} \tag{2.125}$$

para uma eventual subsequência de (v_k^m), denotada por simplicidade da mesma forma.

Observamos que, passando a uma subsequência, se necessário, temos $\alpha_m \to \alpha$ para algum $\alpha \geqslant 0$. No entanto, note que $\alpha \neq 0$, pois, caso contrário, da definição (2.120) teríamos $E_{u_k^m}(0) \to 0$, ou seja,

$$E_{u_k^m}(0) = \frac{1}{2}\left\|(u_{0,k}^m, u_{1,k}^m)\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{b}{4}\|\nabla u_{0,k}^m\|_{L^2(\Omega)}^4 + \int_\Omega F_k(u_{0,k}^m(x))\,dx \longrightarrow 0,$$

quando $m \to +\infty$. Como todos os termos da energia são positivos e $(u_{0,k}^m, u_{1,k}^m)$ satisfaz (2.116), temos

$$0 = \lim_{m\to+\infty} \left\|(u_{0,k}^m, u_{1,k}^m)\right\|_{\mathcal{H}} \geqslant r > 0,$$

o que nos dá um absurdo. Assim, ao passarmos o limite com $m \to +\infty$ em (2.122), obtemos

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_k + \Delta^2 v_k + b\,\alpha^2\|\nabla v_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Delta v_k = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)), \\ v_k = \partial_\nu v_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega\times(0,T), \\ \partial_t v_k = 0 & \text{q.s. em } \omega, \end{cases}$$

em virtude das convergências (2.121) e (2.125). Da regularidade das soluções fortes (u_k), temos $p(t) = b\,\alpha^2\,\|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \in W^{1,\infty}(0,T)$ e, pelo Lema 2.9 segue que $v_k \equiv 0$.

Para facilitar a obtenção de (2.124), escrevemos

$$E_{v_k^m}(t) = \frac{1}{2}\,\|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{\frac{b}{4}\,\alpha_m^2\,\|\nabla v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4}_{:=I_1} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_m^2}\int_\Omega F_k(u_k^m(x,t))\,dx}_{:=I_2}. \tag{2.126}$$

Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} |I_1| &\lesssim \|\Delta v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 \\ &\lesssim \|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|_{\mathcal{H}}^2\; E_{v_k^m}(t) \\ &\lesssim \|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|_{\mathcal{H}}^2\; E_{v_k^m}(0) \\ &\lesssim \|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

uma vez que $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ e a aplicação $t \mapsto E_{v_k^m}(t)$ é não crescente, com $E_{v_k^m}(0) = 1$. Além disso,

$$|I_2| \lesssim \frac{1}{\alpha_m^2} \int_\Omega \left[|u_k^m(x,t)|^2 + |u_k^m(x,t)|^{p+1} \right] \, dx.$$

Agora, sendo $p > 1$ temos $2 < p+1 < \frac{2d}{d-4}$ e, portanto, $p+1 = 2+\varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
|I_2| &\lesssim \left[\|v_k^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_m^{p-1} \|v_k^m(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \right] \\
&\lesssim \left[\|v_k^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_m^{p-1} \|v_k^m(t)\|^{2+\varepsilon}_{H_0^2(\Omega)} \right] \\
&\lesssim \left[\|v_k^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_m^{p-1} \|v_k^m(t)\|^{2}_{H_0^2(\Omega)} \|v_k^m(t)\|^{\varepsilon}_{H_0^2(\Omega)} \right] \\
&\lesssim \|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|^2_{\mathcal{H}} + \alpha_m^{p-1} \|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|^2_{\mathcal{H}} \left[E_{v_k^m}(t)\right]^\varepsilon \\
&\lesssim \|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|^2_{\mathcal{H}} + \alpha_m^{p-1} \|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|^2_{\mathcal{H}} \left[E_{v_k^m}(0)\right]^\varepsilon \\
&\lesssim \|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|^2_{\mathcal{H}} .
\end{aligned}$$

Retornando para (2.126) com as estimativas para I_1 e I_2, temos

$$E_{v_k^m}(t) \lesssim \|(v_k^m(t), \partial_t v_k^m(t))\|^2_{\mathcal{H}} , \qquad \forall \, t \in [0,T]. \tag{2.127}$$

No intuito de obter (2.124), vamos escrever $v_k^m = y_k^m + z_k^m$ em que y_k^m e z_k^m são, respectivamente, soluções dos seguintes problemas:

$$\begin{cases} \partial_t y_k^m + \Delta^2 y_k^m = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ y_k^m = \partial_\nu y_k^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ y_k^m(0) = v_k^m(0), \ \partial_t y_k^m(0) = \partial_t v_k^m(0), & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2.128}$$

e

$$\begin{cases} \partial_t z_k^m + \Delta^2 z_k^m = b \, \|\nabla u_k^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \Delta v_k^m - \frac{1}{\alpha_m} \left(f_k(u_k^m) - g(\partial_t u_k^m) \right) & \text{em } \ \Omega \times (0,T), \\ z_k^m = \partial_\nu z_k^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ z_k^m(0) = 0, \ \partial_t z_k^m(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.129}$$

Utilizaremos a desigualdade de observabilidade associada ao problema linear (2.128) provada por Tucsnak [71], a saber, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$E_{y_k^m}(0) \leqslant C \int_0^T \int_\omega |\partial_t y_k^m(x,t)|^2 \, dx \, dt, \tag{2.130}$$

em que

$$E_{y_k^m}(t) := \frac{1}{2} \, \|(y_k^m(t), \partial_t y_k^m(t))\|^2_{\mathcal{H}} .$$

Agora, observando que $E_{y_k^m}(0) = \|(v_k^m(0), \partial_t v_k^m(0))\|^2_{\mathcal{H}}$, de (2.127) e (2.130), obtemos

$$E_{v_k^m}(0) \lesssim \|(v_k^m(0), \partial_t v_k^m(0))\|_{\mathcal{H}}^2 = E_{y_k^m}(0) \leqslant C \int_0^T \int_\omega |\partial_t y_k^m(x,t)|^2 \, dx \, dt. \tag{2.131}$$

De (2.131), observando que $a(x) \geqslant a_0 > 0$ em ω temos:

$$E_{v_k^m}(0) \lesssim \int_0^T \int_\Omega a(x) \, |\partial_t v_k^m(x,t)|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega |\partial_t z_k^m(x,t)|^2 \, dx \, dt. \tag{2.132}$$

Por outro lado, retornando ao problema (2.129) e considerando

$$z_0 = z_1 = 0 \quad \text{e} \quad \phi := b \, \|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Delta v_k^m - \frac{1}{\alpha_m} f(u_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} a(x) g(\partial_t u_k^m)$$

no Teorema 1.62, segue que

$$\|(z, \partial_t z)\|_{C([0,T];\mathcal{H})} \lesssim \left[\|(z_0, z_1)\|_{\mathcal{H}} + \|\phi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right]$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |\partial_t z_k^m(x,t)|^2 \, dx \, dt \lesssim & \int_0^T \|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 \|\Delta v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \\ & + \frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^T \int_\Omega |f_k(u_k^m(x,t))|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^T \int_\Omega a(x) \, |g(\partial_t u_k^m(x,t))|^2 \, dx \, dt.\end{aligned}$$

Retornando a (2.132), temos:

$$\begin{aligned}E_{v_k^m}(0) \lesssim & \int_0^T \int_\Omega a(x) \, |\partial_t v_k^m(x,t)|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 \|\Delta v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \\ & + \frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^T \int_\Omega |f_k(u_k^m(x,t))|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^T \int_\Omega a(x) \, |g(\partial_t u_k^m(x,t))|^2 \, dx \, dt.\end{aligned} \tag{2.133}$$

Ainda, do fato de f_k ser Lipschitz contínua, observamos que

$$\frac{1}{\alpha_m^2} \, |f_k(u_k^m(x,t))|^2 \leqslant C_k \, \frac{1}{\alpha_m^2} |u_k^m(x,t)|^2 = \frac{C_k}{\alpha_m^2} \alpha_m^2 |v_k^m(x,t)|^2.$$

Segue daí que

$$0 \leqslant \frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^T \int_\Omega |f_k(u_k^m(x,t))|^2 \, dx \, dt \leqslant C_k \int_0^T \int_\Omega |v_k^m(x,t)|^2 \, dx \, dt,$$

e, então,

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^T \int_\Omega |f(u_k^m(x,t))|^2 \, dx \, dt = 0. \tag{2.134}$$

Note agora que, por definição, $u_k^m = \alpha_m v_k^m$, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 \|\Delta v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt &= \alpha_m^4 \int_0^T \|\nabla v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 \|\Delta v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \\ &\lesssim \alpha_m^4 \|v_k^m\|_{L^\infty(0,T;H_0^2\Omega)}^2 \int_0^T \|\nabla v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 \, dt \\ &\lesssim \alpha_m^4 \|v_k^m\|_{L^\infty(0,T;H_0^2\Omega)}^2 \|v_k^m\|_{L^\infty(0,T;H_0^1\Omega)}^4 T.\end{aligned}$$

Segue, portanto,

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^T \|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^4 \|\Delta v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt = 0. \tag{2.135}$$

Por fim, das convergências (2.121), (2.134) e (2.135) garantimos, a partir de (2.133), que

$$\lim_{m\to+\infty} E_{v_k^m}(0) = 0,$$

verificando (2.124). □

Corolário 2.11. *Sob as Hipóteses* **(H.4)** *e* **(H.5)***, existe uma função p, dependendo de R, positiva, crescente, com $p(0) = 0$ tal que*

$$p\left[E_u(T)\right] \leqslant E_u(0) - E_u(T). \tag{2.136}$$

Demonstração. Inicialmente, observamos que de (2.113) e (2.115), obtemos por passagem ao limite que

$$E_u(0) \leqslant C \int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|\partial_t u(x,t)|^2 + |g(\partial_t u(x,t))|^2\right) \, dx \, dt, \quad \forall T > T_0, \tag{2.137}$$

em que o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue é utilizado de forma análoga ao que foi desenvolvido na prova do item (e) do Lema 2.2.

Por outro lado, considere os conjuntos:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \, : \, |\partial_t u(x,t)| > 1\}, \\ \Sigma_2 &= (\Omega \times (0,T)) \setminus \Sigma_1.\end{aligned}$$

Da Hipótese **(H.3)**, segue que

$$\int_{\Sigma_1} a(x) \left([g(\partial_t u(x,t))]^2 + (\partial_t u(x,t))^2\right) dx \, dt \leqslant M_1 \int_{\Sigma_1} a(x) g(\partial_t u(x,t)) \, \partial_t u(x,t) \, dx \, dt, \tag{2.138}$$

em que $M_1 := \left(M^{-1} + \overline{M}\right)$.

Além disso, da Hipótese **(H.5)**, sendo h côncava e crescente, deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_2} a(x)\left([g(\partial_t u(x,t))]^2 + (\partial_t u(x,t))^2\right)\,dx\,dt \\
&\qquad \leqslant \int_{\Sigma_2} a(x)\,h\left(g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\right)\,dx\,dt \\
&\qquad = \int_{\Sigma_2} (1+\|a\|_\infty)\frac{a(x)}{1+\|a\|_\infty} h\left(g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\right)\,dx\,dt \\
&\qquad \leqslant \int_{\Sigma_2} (1+\|a\|_\infty) h\left(\frac{a(x)}{1+\|a\|_\infty} g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\right)\,dx\,dt \\
&\qquad \leqslant (1+\|a\|_\infty)\int_{\Sigma_2} h\left(a(x)\,g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\right)\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

uma vez que $a(x) \leqslant \|a\|_\infty + 1$ e $\frac{a(x)}{1+\|a\|_\infty} < a(x)$. Pela desigualdade de Jensen, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_2} a(x)\left([g(\partial_t u(x,t))]^2 + (\partial_t u(x,t))^2\right)\,dx\,dt \\
&\qquad \leqslant (1+\|a\|_\infty)\int_{\Sigma_2} h\left(a(x)\,g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\right)\,dx\,dt \\
&\qquad \leqslant (1+\|a\|_\infty)\,M_2\,h\left(\frac{1}{M_2}\int_0^T\int_\Omega a(x)g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\,dx\,dt\right),
\end{aligned} \tag{2.139}$$

para $M_2 := \text{med}(\Omega \times (0,T))$. Assim, de (2.138) e (2.139), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega a(x)\left([g(\partial_t u(x,t))]^2 + (\partial_t u(x,t))^2\right)\,dx\,dt \\
&\qquad \leqslant M_1\int_0^T\int_\Omega a(x)g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\,dx\,dt \\
&\qquad\quad + (1+\|a\|_\infty)\,M_2\,h\left(\frac{1}{M_2}\int_0^T\int_\Omega a(x)g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\,dx\,dt\right)
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Da desigualdade de observabilidade (2.137) e de (2.140), sendo a aplicação $t \mapsto E_u(t)$ não crescente, temos:

$$\begin{aligned}
E_u(T) &\leqslant C\,M_1\int_0^T\int_\Omega a(x)g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\,dx\,dt \\
&\quad + C\,(1+\|a\|_\infty)\,M_2\,h\left(\frac{1}{M_2}\int_0^T\int_\Omega a(x)g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\,dx\,dt\right) \\
&= C\,(1+\|a\|_\infty)\,M_2\left[\frac{M_1}{(1+\|a\|_\infty)\,M_2}\int_0^T\int_\Omega a(x)g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\,dx\,dt\right. \\
&\quad \left. + h\left(\frac{1}{M_2}\int_0^T\int_\Omega a(x)g\left(\partial_t u(x,t)\right)\partial_t u(x,t)\,dx\,dt\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.141}$$

Definindo $r(\cdot) = h\left(\frac{\cdot}{M_2}\right)$, $l_0 = \frac{M_1}{(1+\|a\|_\infty)\,M_2}$ e $L_0 = \frac{1}{C\,(1+\|a\|_\infty)\,M_2}$, a função

$$p(s) = [l_0\,I + r]^{-1}(L_0\,s) \tag{2.142}$$

é positiva, crescente, com $p(0) = 0$ e, por (2.141), temos que

$$p\left[E_u(T)\right] \leqslant \int_0^T \int_\Omega a(x)\, g\left(\partial_t u(x,t)\right) \partial_t u(x,t)\, dx\, dt = E_u(0) - E_u(T),$$

como queríamos. □

2.2.3 Resultado Principal

Teorema 2.12 (Estabilidade Uniforme)**.** *Suponhamos que as hipóteses* **(H.1)-(H.5)** *sejam satisfeitas e consideramos* $(u_0, u_1) \in \{z \in \mathcal{H} \mid \|z\|_{\mathcal{H}} \leqslant R\}$*, para qualquer* $R > 0$*. Então, o funcional de energia* $E(t)$ *definido em* (2.12) *decai uniformemente para zero. Mais especificamente, para algum* $T_1 > 0$*.*

$$E(t) \leqslant S\left(\frac{t}{T_1} - 1\right), \quad \forall t > T_1$$

em que $S(t)$ *é solução da equação diferencial*

$$\frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \qquad S(0) = E(0)$$

com

$$q(s) = s - (I + p)^{-1}(s),$$

para p *definida em* (2.142)*. Ainda,* $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$*.*

Demonstração. Com o intuito de utilizar o Lema 1.64, vamos combinar a propriedade de $E(t)$ com a desigualdade (2.136). De fato, iterando m vezes a identidade (2.136), obtemos:

$$s_{m+1} + p\left(s_{m+1}\right) \leqslant s_m, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

em que $s_m = E_u(mT)$ e $s_0 = E_u(0)$.

Aplicando o Lema 1.64, obtemos que

$$E_u(mT) \leqslant S(m), \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

Finalmente, para $t = mT + \tau$, com $0 \leqslant \tau \leqslant T_1$, temos

$$E_u(t) \leqslant E_u(mT) \leqslant S(m) \leqslant S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leqslant S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \quad t > T_1.$$

A prova está completa. □

2.2.4 Cálculos efetivos de algumas Taxas de Decaimento

Dedicamos esta subseção à obtenção de algumas taxas de decaimento associadas ao Teorema 2.12. Inicialmente, apresentamos duas importantes consequências do mesmo e, em seguida, alguns exemplos relacionados. Os conceitos e procedimentos aqui apresentados são devidos à Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Lasiecka [17].

Corolário 2.13. *Suponha que $g'(0) = 0$ e que a função $\sqrt{s}\, g(\sqrt{s})$ é convexa para $s \in [0, s_0]$, s_0 arbitrariamente pequeno. A equação diferencial a ser resolvida se torna*

$$\frac{d}{dt}S(t) + \sqrt{S(t)}g(\sqrt{S(t)}) = 0, \quad S(0) = E(0) = S_0$$

e $E(t) \leqslant C(E(0))S(t)$. Mais especificamente, se

$$G\left(s, S_0\right) := \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{s}} \frac{du}{g(u)}$$

então

$$S(t) = G^{-1}\left(-\frac{t}{2}, S_0\right)$$

Corolário 2.14. *Suponha que*

$$\lim_{s \to 0} \frac{s}{g(s)} = 0$$

e além disso, $\sqrt{s}\, g^{-1}(\sqrt{s})$ é convexa, para $s \in [0, s_0]$, em que s_0 é arbitrariamente pequeno. A equação diferencial a ser resolvida se torna

$$\frac{d}{dt}S(t) + \sqrt{S(t)}g^{-1}(\sqrt{S(t)}) = 0, \quad S(0) = E(0) = S_0$$

e $E(t) \leqslant C(E(0))S(t)$. Mais especificamente, se

$$G\left(s, S_0\right) := \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{s}} \frac{du}{g^{-1}(u)}$$

então

$$S(t) = G^{-1}\left(-\frac{t}{2}, S_0\right)$$

Observação 2.15. *O Corolário 2.13 aplica-se às funções g que decaem para zero mais rápido do que qualquer função linear enquanto o Corolário 2.14 trata sobre o caso complementar.*

Nos exemplos que seguem, as constantes serão normalizadas de forma que as omitiremos das expressões.

Exemplo 2.16. *Consideremos $g(s) = s^p, p > 1$ na origem. Uma vez que a função $s^{\frac{p+1}{2}}$ é convexa para $p \geqslant 1$, vamos resolver*

$$S_t + S^{\frac{p+1}{2}} = 0.$$

Poderíamos integrar a equação diretamente, porém, a fim de ilustrarmos a fórmula geral, calculamos:

$$G\left(s, S_0\right) = \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{s}} u^{-p} du = \frac{1}{1-p}\left[s^{\frac{-p+1}{2}} - S_0^{\frac{-p+1}{2}}\right].$$

Assim $G^{-1}(t) = \left[S_0^{\frac{-p+1}{2}} - t(1-p)\right]^{\frac{2}{-p+1}}$ *e, então,*

$$E(t) \leqslant C(E(0)) \left[E(0)^{\frac{-p+1}{2}} + t(p-1)\right]^{\frac{2}{-p+1}}.$$

Exemplo 2.17. *Consideremos* $g(s) = s^3\, e^{-\frac{1}{s^2}}$ *para* s *na origem. Sendo a função* $s^2 e^{-\frac{1}{s}}$ *convexa em uma vizinhança da origem, resolveremos*

$$S_t + S^2 e^{-\frac{1}{S}} = 0.$$

Neste caso $G\left(s, S_0\right) = -\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{s}} - e^{-\frac{1}{S_0}}\right]$ *e* $G^{-1}\left(t, S_0\right) = \left[\ln\left(e^{\frac{1}{S_0}} - 2t\right)\right]^{-1}$. *Desta forma, temos*

$$E(t) \leqslant C(E(0)) \left[\ln\left(e^{\frac{1}{E(0)}} + t\right)\right]^{-1}.$$

Exemplo 2.18. *Consideremos* $g(s) = s\,|s|\, e^{-\frac{1}{|s|}}$ *para* s *próxima de zero. Sendo a função* $s^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}}$ *convexa em* $[0, s_0]$ *para algum* s_0 *pequeno, devemos resolver a equação diferencial*

$$S_t + S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{S}}} = 0.$$

A função $G\left(s, S_0\right)$ *é dada por* $G\left(s, S_0\right) = -\left[e^{\frac{1}{\sqrt{s}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{S_0}}}\right]$. *Assim, devemos ter:*

$$G^{-1}\left(t, S_0\right) = \frac{1}{\ln^2\left[e^{\frac{1}{\sqrt{S_0}}} - t\right]}$$

e, ainda,

$$E(t) \leqslant C(E(0)) \frac{1}{\ln^2\left[e^{\frac{1}{\sqrt{E(0)}}} + \frac{1}{2}t\right]}.$$

Exemplo 2.19. *Tomemos* $g(s) = |s|^{\theta-1}s, 0 < \theta < 1$. *Neste caso, o procedimento é análogo ao realizado no Exemplo 2.16 sendo* $g^{-1}(s) = s^{\frac{1}{\theta}}, s > 0$ *e* $\frac{1}{\theta} > 1$. *Assim, as taxas de decaimento tornam-se*

$$E(t) \leqslant C(E(0)) \left[E(0)^{\frac{-1+\theta}{2\theta}} + t\frac{1-\theta}{\theta}\right]^{\frac{2\theta}{\theta-1}}.$$

Capítulo 3

Estabilidade assintótica para um sistema de Klein-Gordon não linear generalizado

Neste capítulo vamos investigar a estabilidade exponencial de um sistema não linear generalizado de Klein-Gordon posto em um meio não-homogêneo, sujeito a dissipações lineares localmente distribuídas, a saber:

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + |v|^{p+2}\,|u|^p\,u + a(x)\partial_t u = 0 & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \rho(x)\partial_t^2 v - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + |u|^{p+2}\,|v|^p\,v + b(x)\partial_t v = 0 & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x),\ \partial_t v(x,0) = v_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \leqslant 2$, é um domínio limitado com fronteira suficientemente regular $\Gamma = \partial\Omega$, p é uma constante real positiva, as funções a e b são responsáveis pelo efeito dissipativo linear localizado, ρ é uma função densidade e a matriz $K(x)$ está associada ao meio não-homogêneo.

3.1 Boa Colocação

3.1.1 Hipóteses e notações

Ao longo deste capítulo vamos considerar as seguintes hipóteses:

(H.1) Sejam $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $k_{ij} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leqslant i, j \leqslant d$ funções de classe $C^\infty(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\alpha_0 \leqslant \rho(x) \leqslant \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha_1|\xi|^2 \leqslant \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leqslant \beta_1|\xi|^2,$$

onde $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ são constantes positivas e $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$ é uma matriz simétrica positiva definida.

(H.2) As funções não-negativas a e b satisfazem as seguintes condições:

$$a,\ b \in L^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\omega}),\ \text{com } a(x) \geqslant a_0 > 0 \text{ em } \omega \subset \Omega \quad \text{e} \quad b(x) \geqslant b_0 > 0 \text{ em } \omega \subset \Omega.$$

Ainda, antes de apresentarmos as condições gerais sobre a boa colocação do problema (3.1), salientamos:

Observação 3.1. *A partir das condições apresentadas na Hipótese* **(H.1)**, *as expressões*

$$\int_\Omega \nabla u^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v \, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega) \qquad e \qquad \int_\Omega \rho(x) \, u \, v \, dx, \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

definem produtos internos em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Além disso, estes produtos internos induzem normas equivalentes às usuais nestes espaços.

Estaremos considerando, neste capítulo, o espaço de fase

$$\mathcal{H} := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

o qual é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$\begin{aligned}\langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} := \int_\Omega (\nabla u_1(x))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u_2(x) \, dx + \int_\Omega (\nabla v_1(x))^T \cdot K(x) \cdot \nabla v_2(x) \, dx \\ + \int_\Omega \rho(x) \, w_1(x) \, w_2(x) \, dx + \int_\Omega \rho(x) \, z_1(x) \, z_2(x) \, dx,\end{aligned}$$

e respectiva norma

$$\|U_1\|_{\mathcal{H}}^2 := \int_\Omega (\nabla u_1(x))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u_1(x) + (\nabla u_2(x))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u_2(x) + \rho(x) \, u_3^2(x) + \rho(x) \, u_4^2(x) \, dx,$$

em que $U_1 = (u_1, v_1, w_1, z_1)$ e $U_2 = (u_2, v_2, w_2, z_2)$.

3.1.2 O Problema de Cauchy associado

Denotando $w = \partial_t u$ e $z = \partial_t v$ e escrevendo $U(t) = (u, v, w, z)$, podemos estabelecer o seguinte problema de Cauchy em $\mathcal{H}$, associado ao problema (3.1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(t) + \mathcal{A}U(t) = \mathcal{F}(U(t)) \\ U(0) = U^0, \end{cases} \tag{3.2}$$

em que $U^0 = (u_0, v_0, u_1, v_1)$. O operador linear não-limitado $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -w \\ -z \\ \frac{1}{\rho(x)} \left(a(x) \, w - \operatorname{div}(K(x) \nabla u) \right) \\ \frac{1}{\rho(x)} \left(b(x) \, z - \operatorname{div}(K(x) \nabla v) \right) \end{pmatrix},$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

enquanto o operador não linear $\mathcal{F} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é definido por

$$\mathcal{F}(u,v,w,z) = \left(0, 0, -\frac{1}{\rho}|v|^{p+2}|u|^{p}u, -\frac{1}{\rho}|u|^{p+2}|v|^{p}v\right). \tag{3.3}$$

Teorema 3.2 (Boa colocação)**.** *Suponhamos que a Hipótese* ***(H.1)*** *seja satisfeita e que as funções $a(\cdot), b(\cdot) \in L^{\infty}(\Omega)$ são não negativas.*

(I) Se $U^0 \in \mathcal{H}$, então o problema (3.1) possui uma única solução generalizada $U \in C([0,\infty), \mathcal{H})$ satisfazendo

$$U(t) = S(t)\,U_0 + \int_0^t S(t-\tau)\,\mathcal{F}(U(\tau))\,d\tau, \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

(II) Se, além disso, $U^0 \in D(\mathcal{A})$, então a solução generalizada U do problema (3.1) é regular, com

$$U \in C([0,\infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}).$$

(III) É válida a seguinte identidade de energia:

$$E_{u,v}(t_2) - E_{u,v}(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(a(x)|\partial_t u(x,t)|^2 + b(x)|\partial_t v(x,t)|^2\right)\,dx\,dt,$$

para todo $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$.

Demonstração. A fim de provar a existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy (3.2), utilizaremos os Teoremas 1.38 e 1.39. Neste sentido, precisamos mostrar que

(i) $-\mathcal{A}$ é um operador dissipativo, densamente definido e tal que $\mathrm{Im}(I + \mathcal{A}) = \mathcal{H}$.;

(ii) $\mathcal{F}$ é um operador localmente Lipschitz.

Por simplicidade, nesta demonstração, sempre que conveniente, será omitida a dependência da variável x. Mostremos, inicialmente, a validade de **(i)**.

$-\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato, para todo $U = (u,v,w,z) \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned}
(-\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \left(\left(w, z, \frac{1}{\rho(x)}(\mathrm{div}(K(x)\nabla(u)) - a(x)\,w), \frac{1}{\rho(x)}(\mathrm{div}(K(x)\nabla(v)) - b(x)\,z)\right), U\right)_{\mathcal{H}} \\
&= \int_\Omega (\nabla w)^T \cdot K(x) \cdot \nabla u\,dx + \int_\Omega (\nabla z)^T \cdot K(x) \cdot \nabla v\,dx \\
&\quad + \int_\Omega (\mathrm{div}(K(x)\nabla(u)) - a(x)\,w) \cdot w\,dx + \int_\Omega (\mathrm{div}(K(x)\nabla(v)) - b(x)\,z) \cdot z\,dx \\
&= \left[\int_\Omega \left((\nabla w)^T \cdot K(x) \cdot \nabla u \; + (\nabla z)^T \cdot K(x) \cdot \nabla v\right)\,dx\right. \\
&\quad \left. + \int_\Omega \left(\mathrm{div}(K(x)\nabla(u)) \cdot w + \mathrm{div}(K(x)\nabla(v)) \cdot z\right)\,dx\right] - \int_\Omega (a(x)\,w^2 + b(x)\,z^2)\,dx \\
&= -\int_\Omega (a(x)\,w^2 + b(x)\,z^2)\,dx \leqslant 0,
\end{aligned}$$

em que, na última igualdade, utilizamos o Teorema da Divergência.

$\underline{\mathrm{Im}(I+\mathcal{A})=\mathcal{H}}$. Com efeito, para qualquer $H=(h_1,h_2,h_3,h_4)\in\mathcal{H}$ exibiremos $U=(u,v,w,z)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$(I+\mathcal{A})(u,v,w,z)=(h_1,h_2,h_3,h_4),$$

ou seja,

$$\begin{cases} u-w=h_1, \\ v-z=h_2, \\ w-\frac{1}{\rho(x)}\operatorname{div}(K(x)\nabla u)+\frac{1}{\rho(x)}a(x)w=h_3, \\ z-\frac{1}{\rho(x)}\operatorname{div}(K(x)\nabla v)+\frac{1}{\rho(x)}b(x)z=h_4, \end{cases} \tag{3.4}$$

De $(3.4)_1$ e $(3.4)_2$, temos

$$\begin{cases} w=u-h_1, \\ z=v-h_2. \end{cases} \tag{3.5}$$

Substituindo as equações (3.5) em $(3.4)_3$ e $(3.4)_4$, respectivamente, obtemos:

$$\begin{cases} (u-h_1)-\frac{1}{\rho(x)}\operatorname{div}(K(x)\nabla u)+\frac{1}{\rho(x)}a(x)(u-h_1)=h_3, \\ (v-h_2)-\frac{1}{\rho(x)}\operatorname{div}(K(x)\nabla v)+\frac{1}{\rho(x)}b(x)(v-h_2)=h_4, \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} \rho(x)u-\operatorname{div}(K(x)\nabla u)+a(x)u=g_1 \\ \rho(x)v-\operatorname{div}(K(x)\nabla v)\ +b(x)v=g_2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Resolveremos, agora, o sistema (3.6) em que

$$\begin{cases} g_1=a(x)h_1+\rho(x)(h_1+h_3), \\ g_2=b(x)h_2+\rho(x)(h_2+h_4). \end{cases}$$

Para isto, definimos a forma bilinear

$$\phi:\big(H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\big)\times\big(H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\big)\longrightarrow\mathbb{R}$$

dada por

$$\begin{aligned}\phi((u,v),(\tilde{u},\tilde{v}))=\int_\Omega(\rho(x)+a(x))u\tilde{u}+(\nabla u)^\top\cdot K(x)\cdot\nabla\tilde{u}\,dx \\ +\int_\Omega(\rho(x)+b(x))v\tilde{v}+(\nabla v)^\top\cdot K(x)\cdot\nabla\tilde{v}\,dx.\end{aligned}$$

Mostraremos, agora, que $\phi(\cdot,\cdot)$ é contínua e coerciva.

• ϕ é contínua. De fato,

$$\begin{aligned}
|\phi((u,v),(\tilde{u},\tilde{v}))| &\leqslant \left|\int_\Omega (\rho(x)+a(x))\,u\,\tilde{u}\,dx\right| + \left|\int_\Omega (\nabla u)^\top \cdot K(x)\cdot \nabla \tilde{u}\,dx\right| \\
&\quad + \left|\int_\Omega (\rho(x)+b(x))\,v\,\tilde{v}\,dx\right| + \left|\int_\Omega (\nabla v)^\top \cdot K(x)\cdot \nabla \tilde{v}\,dx\right| \\
&\leqslant (\beta_0 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)})\left(\|u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}\right) + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + (\beta_0 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)})\left(\|v\|_{L^2(\Omega)}\,\|\tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}\right) + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\tilde{v}\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leqslant C^2\,(\beta_0 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)})\left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}\right) + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + C^2\,(\beta_0 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)})\left(\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\tilde{v}\|_{H_0^1(\Omega)}\right) + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\tilde{v}\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\lesssim \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\tilde{v}\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\lesssim \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}\right)\left(\|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\tilde{v}\|_{H_0^1(\Omega)}\right) \\
&\lesssim \|(u,v)\|_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\,\|(\tilde{u},\tilde{v})\|_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

• ϕ é coerciva. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\phi((u,v),(u,v)) &= \int_\Omega \rho(x)|u|^2\,dx + \int_\Omega \rho(x)|v|^2\,dx \int_\Omega a(x)|u|^2\,dx + \int_\Omega b(x)|v|^2\,dx \\
&\quad + \int_\Omega (\nabla u)^\top \cdot K(x)\cdot \nabla u\,dx + \int_\Omega (\nabla v)^\top \cdot K(x)\cdot \nabla v\,dx \\
&\geqslant \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \|(u,v)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Sendo $\phi(\cdot,\cdot)$ bilinear, contínua e coerciva, segue do Teorema de Lax-Milgram, que existe um único $(u,v)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\phi((u,v),(\varphi,\psi)) = \langle g_1,\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle g_2,\psi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}, \tag{3.7}$$

para quaisquer $(\varphi,\psi)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.

Motivados por (3.5), definimos

$$\begin{cases} w = u - h_1 \\ z = v - h_2. \end{cases} \tag{3.8}$$

e afirmamos que $U=(u,v,w,z)\in D(\mathcal{A})$ e suas componentes satisfazem (3.4). De fato, tomando $\varphi=0$ e $\psi\in\mathcal{D}(\Omega)$ em (3.7), temos válida a expressão

$$\int_\Omega (\rho(x)+b(x))\,v\,\psi + (\nabla v)^\top\cdot K(x)\cdot\nabla\psi\,dx = \int_\Omega g_2\,\psi\,dx, \quad \forall\,\psi\in\mathcal{D}(\Omega),$$

a qual, pelo Teorema da Divergência, podemos reescrever como

$$\int_\Omega (\rho(x)+b(x))\,v\,\psi - \operatorname{div}(K(x)\nabla v)\psi\,dx = \int_\Omega g_2\,\psi\,dx, \quad \forall\,\psi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Segue daí que

$$\langle(\rho(x)+b(x))v-\operatorname{div}(K(x)\nabla v),\psi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}=\langle g_2,\psi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)},\quad \forall\,\psi\in\mathcal{D}(\Omega),$$

isto é,

$$(\rho(x)+b(x))v-\operatorname{div}(K(x)\nabla v)=g_2 \ \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observando que ambos os lados da igualdade acima estão em $H^{-1}(\Omega)$, temos que

$$(\rho(x)+b(x))v-\operatorname{div}(K(x)\nabla v)=g_2 \ \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

satisfazendo $(3.6)_2$.

Ainda, como $g_2\in L^2(\Omega)$ e $v\in H_0^1(\Omega)$, pela regularidade elíptica dada pelo Teorema 1.25, segue que $v\in H^2(\Omega)$. Assim, garantimos a existência de $v\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ satisfazendo $(3.6)_2$.

Procedendo de maneira inteiramente análoga (tomando $\psi=0$ e $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ em (3.7)), obtemos a existência de $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ que satisfaz $(3.6)_1$. Mais ainda, da definição (3.8) temos que $w,z\in H_0^1(\Omega)$.

Note que, utilizando a definição de g_1 e g_2 e (3.8), podemos reescrever (3.6) como

$$\begin{cases}\rho(x)w-\operatorname{div}(K(x)\nabla u)+a(x)\,w=\rho(x)h_3,\\ \rho(x)z\ -\operatorname{div}(K(x)\nabla v)\ +b(x)\,z\ =\rho(x)h_4,\end{cases}$$

mostrando que estão satisfeitas as equações $(3.4)_3$ e $(3.4)_4$. Além disso, também de (3.8) temos satisfeitas $(3.4)_1$ e $(3.4)_2$.

Pelo exposto acima, garantimos a existência de $U=(u,v,w,z)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ que satisfaz as equações (3.4), garantindo a sobrejetividade do operador $I+\mathcal{A}$, como queríamos.

$\mathcal{A}$ é densamente definido. Tendo em mãos que o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo e $\operatorname{Im}(I+\mathcal{A})=\mathcal{H}$, do fato de $\mathcal{H}$ ser um espaço reflexivo, segue da Proposição 1.42 que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$.

Agora, mostremos a validade de **(ii)**, ou seja, que $\mathcal{F}$ definido em (3.3) é localmente Lipschitz. De fato, sejam $U=(u_1,u_2,u_3,u_4),V=(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathcal{H}$. Observe que:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(U)-\mathcal{F}(V)\|_{\mathcal{H}}^2=&\int_\Omega\frac{1}{\rho(x)}\left||v_2|^{p+2}|v_1|^p\,v_1-|u_2|^{p+2}|u_1|^p\,u_1\right|^2\,dx\\&+\int_\Omega\frac{1}{\rho(x)}\left||v_1|^{p+2}|v_2|^p\,v_2-|u_1|^{p+2}|u_2|^p\,u_2\right|^2\,dx.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Nos concentraremos em estimar (3.9). Para isso, analisaremos apenas o primeiro termo, visto que o segundo apresenta estimativa inteiramente análoga.

Considerando $g(s) = |s|^{p+1}\, s$, $f(s) = |s|^p\, s$ e utilizando o Lema A.1 (Apêndice A), temos

$$\begin{aligned}\big||v_2|^{p+2}|v_1|^p\, v_1 - |u_2|^{p+2}|u_1|^p\, u_1\big| &= \Big|g(|v_2|)\cdot f(v_1) - g(|u_2|)\cdot f(u_1)\Big| \\ &\leqslant C(p)\left[|v_2|^{p+2}\Big\{|u_1|^p + |v_1|^p\Big\}|v_1 - u_1|\right. \\ &\qquad \left. + |u_1|^p\Big\{|v_2|^{p+1} + |u_2|^{p+1}\Big\}|v_2 - u_2|\right].\end{aligned}$$

Desta forma, podemos estimar o primeiro termo de (3.9) por:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{1}{\rho(x)}\big||v_2|^{p+2}|v_1|^p\, v_1 - |u_2|^{p+2}|u_1|^p\, u_1\big|^2\, dx \\ &\qquad \leqslant \tilde{C}(p)\left[\int_\Omega |v_2|^{2(p+2)}\Big\{|u_1|^{2p} + |v_1|^{2p}\Big\}|v_1 - u_1|^2 dx\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \int_\Omega |u_1|^{2(p+1)}\Big\{|v_2|^{2(p+1)} + |u_2|^{2(p+1)}\Big\}|v_2 - u_2|^2 dx\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sejam $R > 0$ uma constante e $U, V \in \mathcal{H}$ tais que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leqslant R$ e $\|V\|_{\mathcal{H}} \leqslant R$.

- Se $d = 1$, vale a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e, então,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{1}{\rho(x)}\big||v_2|^{p+2}|v_1|^p\, v_1 - |u_2|^{p+2}|u_1|^p\, u_1\big|^2\, dx \\ &\leqslant \tilde{C}(p)\left[\|v_2\|^{2(p+2)}_{L^\infty(\Omega)}\left(\|v_1\|^{2p}_{L^\infty(\Omega)} + \|u_1\|^{2p}_{L^\infty(\Omega)}\right)\|v_1 - u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right. \\ &\qquad \left. + \|u_1\|^{2(p+1)}_{L^\infty(\Omega)}\left(\|v_2\|^{2(p+1)}_{L^\infty(\Omega)} + \|u_2\|^{2(p+1)}_{L^\infty(\Omega)}\right)\|v_2 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \\ &\leqslant \tilde{C}(p)\left[\|v_2\|^{2(p+2)}_{H_0^1(\Omega)}\left(\|v_1\|^{2p}_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|^{2p}_{H_0^1(\Omega)}\right)\|v_1 - u_1\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right. \\ &\qquad \left. + \|u_1\|^{2(p+1)}_{H_0^1(\Omega)}\left(\|v_2\|^{2(p+1)}_{H_0^1(\Omega)} + \|u_2\|^{2(p+1)}_{H_0^1(\Omega)}\right)\|v_2 - u_2\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right] \\ &\leqslant M_1(R)\left(\|v_1 - u_1\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v_2 - u_2\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \\ &= M_1(R)\|U - V\|^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

- Se $d = 2$, escrevemos (3.10) na forma

$$\int_\Omega \frac{1}{\rho(x)}\big||v_2|^{p+2}|v_1|^p\, v_1 - |u_2|^{p+2}|u_1|^p\, u_1\big|^2\, dx \leqslant \tilde{C}(p)\,(I_1 + I_2)$$

em que

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_\Omega |v_2|^{2(p+2)}|u_1|^{2p}|v_1 - u_1|^2\, dx + \int_\Omega |v_2|^{2(p+2)}|v_1|^{2p}|v_1 - u_1|^2\, dx \quad \text{e} \\ I_2 &= \int_\Omega |u_1|^{2(p+1)}|v_2|^{2(p+1)}|v_2 - u_2|^2\, dx + \int_\Omega |u_1|^{2(p+1)}|u_2|^{2(p+1)}|v_2 - u_2|^2\, dx.\end{aligned}$$

Avaliemos I_1 e I_2. Inicialmente, observamos que a expressão I_1 possui duas integrais cujas estimativas são análogas, visto que possuem os mesmos expoentes. Utilizando a desigualdade de Hölder generalizada, com $p_1 = \frac{p+2}{p}$, $q_1 = p+2$ e $r_1 = p+2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |v_2|^{2(p+2)}|u_1|^{2p}|v_1-u_1|^2\,dx \\
&\qquad \leqslant \left(\int_\Omega |v_2|^{2(p+2)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p+2}} \left(\int_\Omega |u_1|^{2(p+2)}\right)^{\frac{p}{p+2}} \left(\int_\Omega |v_1-u_1|^{2(p+2)}\right)^{\frac{1}{p+2}} \\
&\qquad \leqslant \|v_2\|^{2(p+2)}_{L^{2(p+2)(p+2)}(\Omega)} \|u_1\|^{2p}_{L^{2(p+2)}(\Omega)} \|v_1-u_1\|^2_{L^{2(p+2)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

e como neste caso ($d=2$) é válida a imersão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \geqslant 2, \tag{3.12}$$

concluímos que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(p+2)(p+2)}(\Omega) \text{ and } H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(p+2)}(\Omega).$$

Portanto,

$$\int_\Omega |v_2|^{2(p+2)}|u_1|^{2p}|v_1-u_1|^2\,dx \leqslant L_1(R)\|v_1-u_1\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.13}$$

Da mesma forma, obtemos que

$$\int_\Omega |v_2|^{2(p+2)}|v_1|^{2p}|v_1-u_1|^2\,dx \leqslant L_1(R)\|v_1-u_1\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.14}$$

Assim como ocorreu em I_1, a expressão I_2 possui duas integrais cujas estimativas são análogas, visto que possuem os mesmos expoentes. Utilizando, novamente, a desigualdade de Hölder generalizada, com $p_2 = p+2$, $q_2 = \frac{2(p+2)}{p+1}$ e $r_2 = \frac{2(p+2)}{p+1}$, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u_1|^{2(p+1)}|v_2|^{2(p+1)}|v_2-u_2|^2\,dx \\
&\qquad \leqslant \left(\int_\Omega |u_1|^{4(p+2)}\right)^{\frac{p+1}{2(p+2)}} \left(\int_\Omega |v_2|^{4(p+2)}\right)^{\frac{p+1}{2(p+2)}} \left(\int_\Omega |v_2-u_2|^{2(p+2)}\right)^{\frac{1}{p+2}} \\
&\qquad \leqslant \|u_1\|^{2(p+1)}_{L^{4(p+2)}(\Omega)} \|v_2\|^{2(p+1)}_{L^{4(p+2)}(\Omega)} \|v_2-u_2\|^2_{L^{2(p+2)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

e, por (3.12), são válidas as imersões

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{4(p+2)}(\Omega) \text{ and } H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(p+2)}(\Omega).$$

Assim,

$$\int_\Omega |u_1|^{2(p+1)}|v_2|^{2(p+1)}|v_2-u_2|^2\,dx \leqslant L_2(R)\|v_2-u_2\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Ainda,

$$\int_\Omega |u_1|^{2(p+1)}|u_2|^{2(p+1)}|v_2-u_2|^2\,dx \leqslant L_2(R)\|v_2-u_2\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.16}$$

De (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16), escolhendo $M_2(R) = \max\{2L_1(R), 2L_2(R)\}$, obtemos

$$\int_\Omega \frac{1}{\rho(x)} \left| |v_2|^{p+2}|v_1|^p\, v_1 - |u_2|^{p+2}|u_1|^p\, u_1 \right|^2 \, dx \leqslant M_2(R)(\|v_1 - u_1\|^2 + \|v_2 - u_2\|^2) \\ \leqslant M_2(R)\|U - V\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.17}$$

De maneira similar, como feito em (3.11) e (3.17), existem $M_3(R)$, $M_4(R) > 0$ tal que

$$\int_\Omega \frac{1}{\rho(x)} \left| |v_1|^{p+2}|v_2|^p\, v_2 - |u_1|^{p+2}|u_2|^p\, u_2 \right|^2 \, dx \leqslant M_3(R)\|U - V\|^2_{\mathcal{H}},$$

se $d = 1$ e

$$\int_\Omega \frac{1}{\rho(x)} \left| |v_1|^{p+2}|v_2|^p\, v_2 - |u_1|^{p+2}|u_2|^p\, u_2 \right|^2 \, dx \leqslant M_4(R)\|U - V\|^2_{\mathcal{H}},$$

se $d = 2$. Tomando $M(R) = \max\{M_1(R), M_2(R), M_3(R), M_4(R)\}$, obtemos

$$\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V)\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant M(R)\|U - V\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Desta forma, mostramos que $\mathcal{F}$ é localmente Lipschitz, como desejado. Assim, temos garantida – pelos Teoremas 1.38 e 1.39 – a existência de um tempo maximal $T_{\max}$, tal que o problema (3.1) tem uma única solução generalizada $U \in C([0, +\infty); \mathcal{H})$ satisfazendo

$$U(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}\, \mathcal{F}(U(s))\, ds, \quad \forall\, t \in [0, T_{\max}).$$

Em particular, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ então a solução generalizada é clássica e

$$U \in C([0, +\infty); D(\mathcal{A}) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}).$$

Além disso, tal $T_{\max} \in (0, +\infty]$ e goza da seguinte propriedade:

(i) $T_{\max} = +\infty$, isto é, o problema admite uma solução global ou

(ii) $T_{\max} < +\infty$ e

$$\lim_{t \to T_{\max}^-} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty. \tag{3.18}$$

A fim de provar a existência global, é suficiente provar que (ii) não pode ocorrer. De fato, suponhamos o contrário, isto é, $T_{\max} < +\infty$ e vale (3.18) e que $U_0 \in D(\mathcal{A})$. Multiplicando a equação $(3.1)_1$ por $\partial_t u$, $(3.1)_2$ por $\partial_t v$, integrando em Ω e adicionando os resultados, obtemos:

$$\frac{d}{dt}E_{(u,v)}(t) + \left(\int_\Omega \left(a(x)|\partial_t u(x,t)|^2 + b(x)|\partial_t v(x,t)|^2 \right) \, dx \right) = 0, \tag{3.19}$$

em que

$$\begin{aligned}E_{(u,v)}(t) = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \rho(x)|\partial_t u(x,t)|^2 dx + \int_\Omega \rho(x)|\partial_t v(x,t)|^2 dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t) dx\right] \\ + \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \nabla v(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t) dx + \frac{2}{p+2}\int_\Omega |uv|^{p+2}(x,t) dx\right].\end{aligned}$$

Assim, de (3.19), segue que $E_{(u,v)}(t) \leqslant E_{(u,v)}(0),\ \forall\, t \in [0, T_{\max})$, visto que a e b são funções não negativas. Além disso,

$$\begin{aligned}E_{(u,v)}(t) &\geqslant \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \rho(x)|\partial_t u(x,t)|^2 dx + \int_\Omega \rho(x)|\partial_t v(x,t)|^2 dx\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \nabla u(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t) dx + \int_\Omega \nabla v(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t) dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\|(u, v, \partial_t u, \partial_t v)\|_{\mathcal{H}}^2,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2}\|(u, v, \partial_t u, \partial_t v)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant E_{(u,v)}(t) \leqslant E_{(u,v)}(0) \leqslant C(\|U^0\|_{\mathcal{H}}),\ \text{para todo}\ t \in [0, T_{\max}),$$

contrariando (3.18). Logo, só pode ocorrer $T_{\max} = +\infty$. Isto encerra a demonstração dos itens (I) e (II) deste resultado. Por fim, integrando (3.19) em (t_1, t_2), obtemos

$$E_{u,v}(t_2) - E_{u,v}(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(a(x)|\partial_t u(x,t)|^2 + b(x)|\partial_t v(x,t)|^2\right)\, dx\, dt,$$

para todo $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$, o que prova o item (III) deste teorema e conclui a demonstração. □

3.2 Decaimento Exponencial

Nesta seção, no intuito de obtermos a estabilidade exponencial do problema (3.1), supomos válidas as hipóteses seguintes.

(H.3) O conjunto ω denota uma interseção de Ω com uma vizinhança da fronteira $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^d$. Supomos que ω controla Ω geometricamente, ou seja, existe $T_0 > 0$, tal que toda geodésica da métrica $G(x)$, em que $G(x) = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$, viajando com velocidade 1 e partindo de $t = 0$, intercepta o conjunto ω em um tempo $t < T_0$.

(H.4) Para todo $T > 0$, a única solução $u, v \in C(]0, T[; L^2(\Omega)) \cap C(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ para o sistema

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + V_1(x,t)u = V_3(x,t)v & \text{em}\ \ \Omega \times (0,T), \\ \rho(x)\partial_t^2 v - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + V_2(x,t)v = V_3(x,t)u & \text{em}\ \ \Omega \times (0,T), \\ u = v = 0 & \text{sobre}\ \ \omega, \end{cases}$$

em que $V_1(x,t), V_2(x,t)$ e $V_3(x,t)$ são elementos de $L^\infty(]0,T[,L^{\frac{d+1}{2}}(\Omega))$, é a solução trivial $u = v = 0$.

Observação 3.3. *A Hipótese* **(H.3)** *é conhecida como Condição Geométrica de Controle (CGC). Sabe-se que a CGC é uma condição necessária e suficiente para o controle e estabilização da equação da onda linear (ver [7], [14], [22], [16], [28], [58] e suas referências). Nesta direção, vale ainda mencionar o trabalho de Betelú, Gulliver e Littman [8], onde os autores discutem a questão das geodésicas fechadas no interior da região Ω. Tais geodésicas fechadas tornam o controle impossível já que as bicaracterísticas nunca encontram a região onde o controle é posto. Neste mesmo artigo, os autores mostram – no caso bidimensional – que a não existência de geodésicas fechadas no interior é, também, uma condição suficiente para o controle.*

Do observado acima e do fato de não termos nenhum controle sobre as geodésicas, já que estamos em um meio não-homogêneo, neste capítulo consideramos ω uma vizinhança de todo o bordo $\partial\Omega$ e damos condições sobre a métrica $G = (K/\rho)^{-1}$ de forma que todas as geodésicas dessa métrica encontrem o conjunto ω em um tempo $t < T_0$. No caso geral, devemos assumir que $a, b \in C(\overline{\Omega})$ e que as hipóteses seguintes sejam satisfeitas:

(i) $a(x), b(x) > 0$, $\forall x \in \partial\Omega$;

(ii) Para toda geodésica $t \in I \mapsto x(t) \in \Omega$ da métrica $G = (K/\rho)^{-1}$, com $0 \in I$, existe $t \geqslant 0$ tal que $a(x(t)), b(x(t)) > 0$.

Observamos que se $G = I_d$ a condição (i) implica que (ii) também é válida, visto que as geodésicas são linhas retas (ver Figura 3.1, à esquerda). Por outro lado, quando estamos com uma métrica arbitrária, a condição (i) pode ser válida sem que (ii) se verifique, por exemplo, no caso em que G admite uma geodésica presa (ver Figura 3.1, à direita).

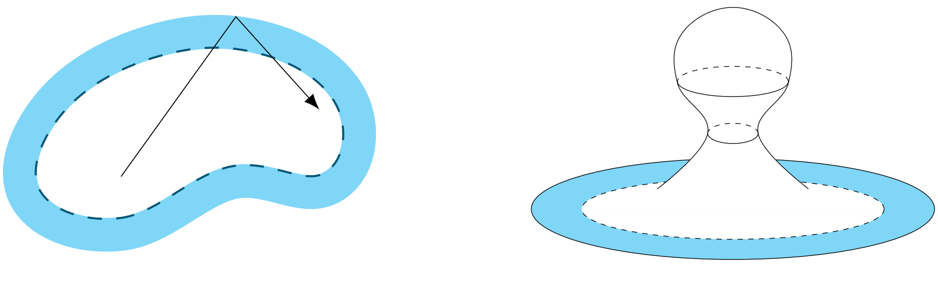


Figura 3.1: Exemplos de geodésicas.

Observação 3.4. *É importante salientar que a Hipótese* **(H.3)** *não é trivialmente satisfeita para toda matriz $G = (K/\rho)^{-1}$. Por exemplo, o equador na esfera unitária S^2 é uma geodésica periódica e podemos considerar $\Omega \subset S^2$, que contém o equador, como um domínio em $\mathbb{R}^2$ munido da métrica Riemanniana G. Pode-se observar em [3] outros exemplos em que essa situação ocorre. Quando $G(x) = I_d$, as geodésicas são linhas retas e, neste caso, elas necessariamente vão encontrar a região ω.*

Por razões já discutidas, para uma métrica $G = (K/\rho)^{-1}$, sem nenhuma condição extra sobre a densidade $\rho(x)$, a região ω estar localizada em uma vizinhança da fronteira de Ω pode não ser suficiente para a estabilização. Uma maneira de superar esta dificuldade, isto é, minimizar o máximo possível a região onde o efeito dissipativo atua, é seguir as ideias introduzidas por Cavalcanti *et al.* em [22] e [16]. Nestes artigos, os autores mostram que dada uma variedade Riemanniana (Ω, G) com métrica $G = (K/\rho)^{-1}$ e ω uma vizinhança da fronteira de Ω, existe uma família finita $\{V_i\}_{i=1,\cdots,k}$ de conjuntos abertos com fronteira suave tais que seus fechos são, dois a dois, disjuntos e $V = \cup_{i=1}^{k} V_i$ satisfaz

- med$(V) \geqslant$ med$(M\backslash\omega) - \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$,
- V pode ser deixado sem dissipação.

Assim, se considerarmos uma dissipação agindo em ω e em $(\Omega\backslash\omega)\backslash V$, então toda geodésica da métrica $G = (K/\rho)^{-1}$ irá interceptar a região onde a dissipação atua. Assim, não existirão geodésicas "presas" dentro dos conjuntos V_i, $i = 1, \cdots, k$, os quais estão livres de dissipação e, assim, a Hipótese **(H.3)** é satisfeita. Mais ainda, $(\Omega\backslash\omega)\backslash V$ pode ser arbitrariamente pequeno, fazendo com que o volume da região onde a dissipação atua seja tão pequeno quanto possível para uma métrica geral $G = (K/\rho)^{-1}$.

Na figura abaixo, a região ω (em cor azul) em torno da fronteira $\partial\Omega$ e $(\Omega\backslash\omega)\backslash V$ (malha em cor cinza claro) ilustram a região onde a dissipação atua na variedade (Ω, G), em que $G = (K/\rho)^{-1}$, a qual pode ser considerada com medida arbitrariamente pequena, entretanto totalmente distribuída sobre Ω. A região $V := \overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} V_i$ (em cor branca) ilustra a região sem dissipação com medida arbitrariamente grande e também totalmente distribuída em Ω.

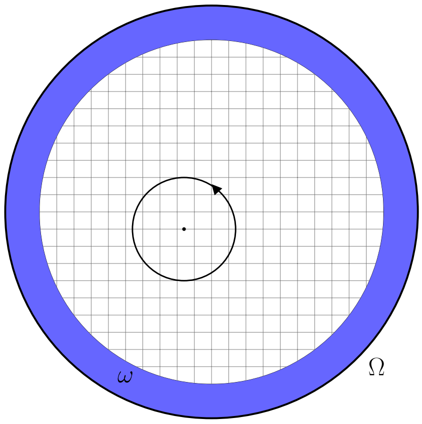


Figura 3.2: Ilustração das regiões ω, $(\Omega\backslash\omega)\backslash V$ e V.

Com isso, estamos em condições de estabelecer o principal resultado desta seção.

Teorema 3.5 (Estabilidade Exponencial)**.** *Suponha válidas as Hipóteses* **(H.3)** *e* **(H.4)***. Então, dado* $R > 0$*, existem constantes positivas* C *e* γ *(possivelmente dependentes de* R*) tais que a seguinte* *desigualdade é válida*

$$E_{(u,v)}(t) \leqslant C\, e^{-\gamma t}\, E_{(u,v)}(0), \quad \text{para todo } t > 0, \tag{3.20}$$

para toda solução generalizada do problema (3.1)*, desde que* $E_{(u,v)}(0) \leqslant R$.

Observação 3.6. *Por argumentos usuais de densidade é suficiente trabalhar com soluções regulares, uma vez que a taxa de decaimento* (3.20) *pode ser recuperada para soluções fracas.*

Para mostrar (3.20) é importante observar que os dados iniciais (u_0, v_0, u_1, v_1) precisam ser tomados em conjuntos limitados de $\mathcal{H}$, transformando o Teorema 3.5 em um *resultado de estabilização local*. De fato, as constantes C e γ são uniformes em cada bola de $\mathcal{H}$ com raio $R > 0$ do espaço de fase, mas o resultado *não garante* que (3.20) seja válida com constantes C e γ, que sejam independentes dos dados iniciais.

A fim de demonstrar o Teorema 3.5 precisamos de duas importantes ferramentas: validar um *princípio da continuação única para sistemas* e a obtenção de uma *desigualdade de observabilidade*. Neste sentido, observamos, inicialmente, que a Hipótese **(H.4)** indica o Princípio da Continuação Única a ser utilizado. Assim, precisamos assegurar que, nas condições do nosso problema, este princípio se verifica, pelo menos, localmente. Esta importante garantia nos é dada pela Proposição 1.66, um resultado estabelecido por Cavalcanti *et al* [23]. Dedicaremos a próxima subseção à obtenção da desigualdade de observabilidade.

3.2.1 Desigualdade de Observabilidade

Inspirados nos argumentos de [27] e [28], apresentamos uma prova da desigualdade inversa do problema (3.1).

Lema 3.7 (Desigualdade de Observabilidade)**.** *Para todo* $R > 0$ *e para todo* $T > 0$*, existe uma constante* $C = C(R,T) > 0$ *que torna válida a desigualdade*

$$E_{(u,v)}(0) \leqslant C \int_0^T \int_\Omega (a(x)\,|\partial_t u(x,t)|^2 + b(x)\,|\partial_t v(x,t)|^2)\,dx\,dt, \tag{3.21}$$

para toda solução regular u *do problema* (3.1)*, desde que os dados iniciais satisfaçam* $E_{(u,v)}(0) \leqslant R$.

Demonstração. Para provar (3.21), argumentaremos por contradição. Suponhamos então que (3.21) não é válida. Então, existe uma sequência (u^n, v^n) de soluções regulares para o problema, de acordo com o Teorema 3.2, tal que os dados iniciais satisfazem

$$E_{(u^n,v^n)}(0) \leqslant L, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3.22}$$

e para algum $L > 0$. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{(u^n,v^n)}(0)}{\int_0^T \int_\Omega (a(x)\,|\partial_t u^n(x,t)|^2 + b(x)\,|\partial_t v^n(x,t)|^2)\,dx\,dt} = +\infty,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega (a(x)\,|\partial_t u^n(x,t)|^2 + b(x)\,|\partial_t v^n(x,t)|^2)\,dxdt}{E_{(u^n,v^n)}(0)} = 0. \tag{3.23}$$

De (3.22) e (3.23), temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\Omega (a(x)\,|\partial_t u^n(x,t)|^2 + b(x)\,|\partial_t v^n(x,t)|^2)\,dx\,dt = 0. \tag{3.24}$$

e, uma vez que $a(x) \geqslant a_0 > 0$ e $b(x) \geqslant b_0 > 0$ q. s. em ω, concluímos de (3.24) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\partial_t u^n(x,t)|^2\,dx\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\partial_t v^n(x,t)|^2\,dx\,dt = 0. \tag{3.25}$$

Como $E_{(u^n,v^n)}(t)$ é não-crescente e (3.22) é válida, temos que a sequência $(u^n, v^n, \partial_t u^n, \partial_t v^n)$ é limitada em $\mathcal{H}$. Assim, $(\nabla u^n, \nabla v^n)$ e $(\partial_t u^n, \partial_t v^n)$ são sequências limitadas em $L^2(\Omega)$ e aplicando o Teorema 1.20 para $V = L^2(\Omega) = V^*$, obtemos uma subsequência, a qual será denotada da mesma forma, que verifica

$$\begin{cases} (u^n, v^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v) & \text{em } [L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))]^2, \\ (\partial_t u^n, \partial_t v^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (\partial_t u, \partial_t v) & \text{em } [L^\infty(0,T;L^2(\Omega))]^2. \end{cases} \tag{3.26}$$

De (3.26), utilizando o Teorema de Aubin-Lions-Simon (Teorema 1.27) e a cadeia de imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, para todo $q \in [2, +\infty)$, temos, para uma eventual subsequência (a qual ainda será denotada da mesma forma), que

$$(u^n, v^n) \longrightarrow (u, v) \text{ em } [L^\infty(0,T;L^q(\Omega))]^2, \quad \text{para todo } q \in [2, +\infty). \tag{3.27}$$

Note que de (3.27), em particular temos

$$(u^n, v^n) \longrightarrow (u, v) \quad \text{em } [L^2(0,T;L^2(\Omega))]^2,$$

o que, pelo Teorema da Convergência Dominada Inversa (Teorema 1.5) nos dá

$$(u^n, v^n) \longrightarrow (u, v) \quad \text{q. s. em } \Omega \times (0,T).$$

Sendo $(r,s) \mapsto |s|^{p+2}|r|^p\,r$ uma função contínua para quaisquer $r, s \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{cases} |v^n|^{p+2}\,|u^n|^p\,u^n \longrightarrow |v|^{p+2}\,|u|^p\,u & \text{q. s. em } \Omega \times (0,T), \\ |u^n|^{p+2}\,|v^n|^p\,v^n \longrightarrow |u|^{p+2}\,|v|^p\,v & \text{q. s. em } \Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.28}$$

Além disso, as sequências $(|v^n|^{p+2}\,|u^n|^p\,u^n)$ e $(|u^n|^{p+2}\,|v^n|^p\,v^n)$ são limitadas em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \left| |v^n(x,t)|^{p+2} \, |u^n(x,t)|^p \, u^n(x,t) \right|^2 \, dx \, dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_\Omega |v^n(x,t)|^{2(p+2)} \, |u^n(x,t)|^{2(p+1)} \, dx \, dt \\
&\qquad \leqslant \left(\int_0^T \int_\Omega |v^n(x,t)|^{2(p+2)^2} \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{p+2}} \left(\int_0^T \int_\Omega |u^n(x,t)|^{2(p+2)} \, dx \, dt \right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\
&\qquad = \|v^n\|^{2(p+2)}_{L^{2(p+2)^2}(\Omega \times (0,T))} \|u^n\|^{2(p+1)}_{L^{2(p+2)}(\Omega \times (0,T))} \\
&\qquad \lesssim \|v^n\|^{2(p+2)}_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \|u^n\|^{2(p+1)}_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} < +\infty.
\end{aligned}
$$

Analogamente, obtém-se a outra limitação. Destas limitações e das convergências (3.28), podemos utilizar o Lema de Lions (Lema 1.28) para concluir que

$$
\begin{cases}
|v^n|^{p+2} \, |u^n|^p \, u^n \longrightarrow |v|^{p+2} \, |u|^p \, u & \text{em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\
|u^n|^{p+2} \, |v^n|^p \, v^n \longrightarrow |u|^{p+2} \, |v|^p \, v & \text{em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{cases} \tag{3.29}
$$

Nesse ponto iremos dividir a prova em quatro casos:

Caso (i): $u = 0$ e $v \neq 0$. Consideremos $u = 0$ e a seguinte sequência de problemas

$$
\begin{cases}
\rho(x)\partial_t^2 u^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla u^n) + |v^n|^{p+2} \, |u^n|^p \, u^n + a(x)\partial_t u^n = 0 & \text{em } \ \Omega \times (0,T), \\
\rho(x)\partial_t^2 v^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla v^n) + |u^n|^{p+2} \, |v^n|^p \, v^n + b(x)\partial_t v^n = 0 & \text{em } \ \Omega \times (0,T), \\
u^n = v^n = 0 & \text{sobre } \ \partial\Omega \times (0,T), \\
u^n(x,0) = u_0^n(x), \ \partial_t u^n(x,0) = u_1^n(x) & \text{em } \ \Omega, \\
v^n(x,0) = v_0^n(x), \ \partial_t v^n(x,0) = v_1^n(x) & \text{em } \ \Omega,
\end{cases} \tag{3.30}
$$

Passando o limite em (3.30) e levando em conta (3.24), (3.25), (3.26) e (3.27), temos

$$
\begin{cases}
\rho(x)\partial_t^2 v - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) = 0 & \text{em } \ \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\
\partial_t v = 0 & \text{em } \ \omega \times (0,T).
\end{cases} \tag{3.31}
$$

Derivando (3.31) no sentido das distribuições e tomando $z = \partial_t v$ obtemos

$$
\begin{cases}
\rho(x)\partial_t^2 z - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) = 0 & \text{em } \ \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\
z = 0 & \text{em } \ \omega \times (0,T),
\end{cases}
$$

o que implica, pelo Teorema 1.65, que $z = \partial_t v = 0$ em $\Omega \times (0,T)$. Multiplicando $(3.31)_1$ por v, integrando em $\Omega \times (0,T)$ e utilizando o Teorema da divergência, temos

$$
\int_0^T \int_\Omega (\nabla v(x,t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t) \, dx \, dt = 0.
$$

Donde, da desigualdade de Poincaré e a equivalência entre as normas, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \int_0^T \int_\Omega |v(x,t)|^2 \, dx\, dt &\lesssim \int_0^T \int_\Omega |\nabla v(x,t)|^2 \, dx\, dt \\
&\lesssim \int_0^T \int_\Omega (\nabla v(x,t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t) \, dx\, dt \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

E assim, $\|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 0$, o que implica que $v = 0$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, o que é um absurdo pois supomos $v \neq 0$.

Caso (ii): $v = 0$ e $u \neq 0$. Consideremos $v = 0$ e a seguinte sequência de problemas (3.30).

Passando o limite em (3.30) e levando em conta (3.24)-(3.27), temos

$$
\begin{cases}
\rho(x)\partial_t^2 u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\
\partial_t u = 0 & \text{em } \omega \times (0,T).
\end{cases}
$$

Analogamente ao caso anterior, mostramos que $u = 0$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, o que é um absurdo.

Caso (iii): $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Passando o limite em (3.30) e observando (3.25)-(3.29), obtemos

$$
\begin{cases}
\rho(x)\partial_t^2 u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + |v|^{p+2}\,|u|^p\, u = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\
\rho(x)\partial_t^2 v - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + |u|^{p+2}\,|v|^p\, v = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\
\partial_t u = \partial_t v = 0 & \text{em } \omega \times (0,T),
\end{cases}
\tag{3.32}
$$

Derivando (3.32) no sentido das distribuições e tomando $w = \partial_t u$ e $z = \partial_t v$ obtemos

$$
\begin{cases}
\rho(x)\partial_t^2 w - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + (p+1)\,|v|^{p+2}\,|u|^p\, w + (p+2)\,|uv|^p\, uv\, z = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\
\rho(x)\partial_t^2 z - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) + (p+1)\,|u|^{p+2}\,|v|^p\, z + (p+2)\,|uv|^p\, uv\, w = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\
w = z = 0 & \text{em } \omega \times (0,T).
\end{cases}
$$

Definindo

$$
\begin{aligned}
V_1(x,t) &= (p+1)|v(x,t)|^{p+2}\,|u(x,t)|^p, \\
V_2(x,t) &= (p+1)|u(x,t)|^{p+2}\,|v(x,t)|^p, \\
V_3(x,t) &= -(p+2)|uv|^p(x,t)\,(uv)(x,t),
\end{aligned}
$$

o sistema imediatamente acima pode ser reescrito como

$$
\begin{cases}
\rho(x)\partial_t^2 w - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + V_1(x,t)\, w = V_3(x,t)\, z & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\
\rho(x)\partial_t^2 z - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) + V_2(x,t)\, z = V_3(x,t)\, w & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\
w = z = 0 & \text{em } \omega \times (0,T).
\end{cases}
$$

Observamos que V_1, V_2 e V_3 são elementos de $L^\infty(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|V_1(t)\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} &= \int_\Omega |V_1(x,t)|^{\frac{3}{2}} dx \\
&= |p+1|^{\frac{3}{2}} \int_\Omega |u(x,t)|^{\frac{3(p+2)}{2}} |v(x,t)|^{\frac{3p}{2}}\, dx \\
&\lesssim \left(\int_\Omega |u(x,t)|^{\frac{3(p+2)^2}{4}}\, dx\right)^{\frac{2}{p+2}} \left(\int_\Omega |v(x,t)|^{\frac{3(p+2)}{2}}\, dx\right)^{\frac{p}{p+2}} \\
&\lesssim \|u(t)\|^{\frac{3(p+2)}{2}}_{L^{\frac{3(p+2)^2}{4}}(\Omega)} \|v(t)\|^{\frac{3p}{2}}_{L^{\frac{3(p+2)}{2}}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $u, v \in L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$ para qualquer $q \geqslant 2$ e $\min\left\{\frac{3(p+2)^2}{4}, \frac{3(p+2)}{2}\right\} \geqslant 3$, segue que $V_1 \in L^\infty(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$. Analogamente, $V_2 \in L^\infty(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$.

De maneira similar, provamos que $V_3 \in L^\infty(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|V_3(t)\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} &= \int_\Omega |V_3(x,t)|^{\frac{3}{2}} dx \\
&= |p+2|^{\frac{3}{2}} \int_\Omega |u(x,t)|^{\frac{3(p+1)}{2}} |v(x,t)|^{\frac{3(p+1)}{2}}\, dx \\
&\lesssim \left(\int_\Omega |u(x,t)|^{\frac{3(p+1)(p+2)}{2}}\, dx\right)^{\frac{1}{p+2}} \left(\int_\Omega |v(x,t)|^{\frac{3(p+2)}{2}}\, dx\right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\
&\lesssim \|u(t)\|^{\frac{3(p+1)}{2}}_{L^{\frac{3(p+1)(p+2)}{2}}(\Omega)} \|v(t)\|^{\frac{3(p+1)}{2}}_{L^{\frac{3(p+2)}{2}}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, como $u, v \in L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$ para qualquer $q \geqslant 2$ e $\min\left\{\frac{3(p+1)(p+2)}{2}, \frac{3(p+2)}{2}\right\} \geqslant 3$, segue que $V_3 \in L^\infty(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$.

Agora, utilizando a Hipótese **(H.4)**, concluímos que $(w,z) = (0,0)$ em $\Omega \times (0,T)$. Multiplicando (3.32)$_1$ por u, (3.32)$_2$ por v, integrando em $\Omega \times (0,T)$ e utilizando o Teorema da divergência, temos

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T\int_\Omega (\nabla u(x,t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t)\, dx\, dt + \int_0^T\int_\Omega |v(x,t)|^{p+2}|u(x,t)|^p u^2(x,t)\, dx\, dt = 0 \\ \displaystyle\int_0^T\int_\Omega (\nabla v(x,t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t)\, dx\, dt + \int_0^T\int_\Omega |u(x,t)|^{p+2}|v(x,t)|^p v^2(x,t)\, dx\, dt = 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

De (3.33)$_1$, segue que

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla u(x,t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t)\, dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega |v(x,t)|^{p+2}\, |u(x,t)|^p\, u^2(x,t)\, dx\, dt \leqslant 0.$$

Da desigualdade de Poincaré e a equivalência entre as normas, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2 \; dx\,dt &\lesssim \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 \; dx\,dt \\
&\lesssim \int_0^T \int_\Omega (\nabla u(x,t))^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t)\, dx\,dt \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

E assim, $\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 0$, o que implica que $u = 0$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, procedendo de forma análoga para $(3.33)_2$, deduzimos que $v = 0$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, o que é uma contradição com o que assumimos no caso (iii).

<u>**Caso (iv):** $u = v = 0$.</u> Agora, definimos

$$
\alpha_n := [E_{(u^n,v^n)}(0)]^{1/2}, \; w^n := \frac{u^n}{\alpha_n} \text{ e } z^n := \frac{v^n}{\alpha_n}, \tag{3.34}
$$

e tomamos a seguinte sequência de problemas:

$$
\begin{cases}
\rho(x)\partial_t^2 w^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla w^n) + \alpha_n^{2p+2} \; |z^n|^{p+2} \, |w^n|^p \, w^n + a(x)\, \partial_t w^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\
\rho(x)\partial_t^2 z^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla z^n) + \alpha_n^{2p+2} \; |w^n|^{p+2} \, |z^n|^p \, z^n + b(x)\, \partial_t z^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\
w^n = z^n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\
w^n(x,0) = w_0^n(x) := \frac{u_0^n(x)}{\alpha_n}, \; \partial_t w^n(x,0) = w_1^n(x) := \frac{u_1^n(x)}{\alpha_n} & \text{em } \Omega \\
z^n(x,0) = z_0^n(x) := \frac{v_0^n(x)}{\alpha_n}, \; \partial_t z^n(x,0) = z_1^n(x) := \frac{v_1^n(x)}{\alpha_n} & \text{em } \Omega.
\end{cases} \tag{3.35}
$$

Multiplicando $(3.35)_1$ por $\partial_t w^n$ e $(3.35)_2$ por $\partial_t z^n$, integrando em Ω e adicionando os resultados deduzimos que

$$
E_{(w^n,z^n)}(t) = \frac{1}{\alpha_n^2} \, E_{(u^n,v^n)}(t). \tag{3.36}
$$

De (3.36) segue que $E_{(w^n,z^n)}(0) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A fim de obter uma contradição, como mencionamos no início da demonstração, vamos provar agora que $E_{(w^n,z^n)}(0)$ converge à zero. De fato, de (3.23) e (3.34) temos que

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)\, |\partial_t w^n(x,t)|^2 \, dxdt = 0 \tag{3.37}
$$

e

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\Omega b(x)\, |\partial_t z^n(x,t)|^2 \, dxdt = 0. \tag{3.38}
$$

Uma vez que $a(x) \geqslant a_0 > 0$, $b(x) \geqslant b_0 > 0$ q. s. em ω, de (3.37) e (3.38) deduzimos que

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\partial_t w^n(x,t)|^2 \, dxdt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\partial_t z^n(x,t)|^2 \, dxdt = 0. \tag{3.39}
$$

Além disso, sabendo que $E_{(w^n,z^n)}(t)$ é não crescente e $E_{(w^n,z^n)}(0)$ é uma sequência limitada, temos que $\{(\nabla w^n, \nabla z^n)\}$ e $\{(\partial_t w^n, \partial_t z^n)\}$ são sequências limitadas em $L^2(\Omega)$. Aplicando o Lema 1.20 para estas sequências, obtemos duas subsequências, as quais ainda serão denotadas por $\{(w^n, z^n)\}$ e $\{(\partial_t w^n, \partial_t z^n)\}$, que verificam

$$\begin{aligned} (w^n, z^n) &\xrightarrow{\ *\ } (w, z) \quad \text{em } (L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)))^2, \\ (\partial_t w^n, \partial_t z^n) &\xrightarrow{\ *\ } (\partial_t w, \partial_t z) \quad \text{em } (L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^2. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Novamente, pelo Teorema de Aubin-Lions-Simon (Teorema 1.27), para uma eventual subsequência, a qual será denotada da mesma forma, temos que

$$(w^n, z^n) \longrightarrow (w, z) \text{ em } (L^\infty(0,T;L^q(\Omega)))^2,\ q \in [2, +\infty). \tag{3.41}$$

Agora, uma vez que $\alpha_n = [E_{(u^n,v^n)}(0)]^{1/2} \leqslant R$, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência, a qual será denotada da mesma forma, tal que $\alpha_n \to \alpha \in [0, +\infty)$. Vamos analisar os dois casos possíveis:

Subcaso iv. (a): $\alpha = 0$. Nesta situação, observe que

$$\begin{aligned} \alpha_n w^n = u^n &\longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \alpha_n z^n = v^n &\longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Observando (3.37)-(3.40) e (3.42) e passando o limite em (3.35), obtemos:

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 w - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\ \rho(x)\partial_t^2 z - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\ \partial_t w = \partial_t z = 0 & \text{em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.43}$$

Derivando $(3.43)_1$ e $(3.43)_2$ no sentido das distribuições e definindo $\varphi = \partial_t w$ e $\psi = \partial_t z$, temos

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 \varphi - \operatorname{div}(K(x)\nabla \varphi) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\ \rho(x)\partial_t^2 \psi - \operatorname{div}(K(x)\nabla \psi) = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)), \\ \varphi = \psi = 0 & \text{em } \omega \times (0,T), \end{cases}$$

o que implica que $\varphi = \psi = 0$ e, consequentemente, retornando para (3.43) em um processo análogo ao realizado no caso (i), segue que $w = z = 0$.

Subcaso iv. (b): $\alpha > 0$. Neste contexto, passando o limite no sistema (3.35), deduzimos que

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 w - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + \alpha^{2p+2}\,|z|^{p+2}\,|w|^p\,w = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \rho(x)\partial_t^2 z - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) + \alpha^{2p+2}\,|w|^{p+2}\,|z|^p\,z = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ w_t = z_t = 0 & \text{em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.44}$$

Derivando $(3.44)_1$ e $(3.44)_2$ no sentido das distribuições e definindo $\varphi = \partial_t w$ e $\psi = \partial_t z$, temos

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2\varphi - \operatorname{div}(K(x)\nabla\varphi) + V_1(x,t)\varphi = V_3(x,t)\psi & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)), \\ \rho(x)\partial_t^2\psi - \operatorname{div}(K(x)\nabla\psi) + V_2(x,t)\psi = V_3(x,t)\varphi & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)), \\ \varphi = \psi = 0 & \text{em } \omega\times(0,T). \end{cases}$$

em que

$$\begin{aligned} V_1(x,t) &= \alpha^{2p+2}(p+1)|z(x,t)|^{p+2}|w(x,t)|^p; \\ V_2(x,t) &= \alpha^{2p+2}(p+1)|w(x,t)|^{p+2}|z(x,t)|^p; \\ V_3(x,t) &= -\alpha^{2p+2}(p+2)|wz|^p(x,t)\,(wz)(x,t). \end{aligned}$$

Por argumentos inteiramente análogos àqueles utilizados no caso (iii), ao observar que V_1, V_2 e V_3 são elementos de $L^\infty(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$, concluímos que $(\varphi,\psi) = (0,0)$ em $\Omega\times(0,T)$ e, retornando a (3.44), segue que $w = z = 0$.

Assim, em ambos os subcasos ($\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$), concluímos que $w = z = 0$. Como consequência disso, $w = z = 0$ nas convergências (3.40) e (3.41).

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega \left|\alpha_n^{2p+2}\,|z^n(x,t)|^{p+2}\,|w^n(x,t)|^p\,w^n(x,t)\right|^2\,dx\,dt \\ &= \alpha_n^{4p+4}\int_0^T\int_\Omega |z^n(x,t)|^{2(p+2)}\,|w^n(x,t)|^{2(p+1)}\,dx\,dt \\ &\lesssim \left(\int_0^T\int_\Omega |z^n(x,t)|^{2(p+2)^2}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{p+2}}\left(\int_0^T\int_\Omega |w^n(x,t)|^{2(p+2)}\,dx\,dt\right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\ &\lesssim \|z^n\|^{2(p+2)}_{L^{2(p+2)^2}(\Omega\times(0,T))}\,\|w^n\|^{2(p+1)}_{L^{2(p+2)}(\Omega\times(0,T))} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

uma vez que $w^n \to 0$ em $L^{2(p+2)}(\Omega\times(0,T))$ e $z^n \to 0$ em $L^{2(p+2)^2}(\Omega\times(0,T))$, dada a convergência (3.41) e observando que $\min\{2(p+2), 2(p+2)^2\} \geqslant 2$.

Disto, temos

$$\begin{aligned} \alpha_n^{2p+2}|z^n|^{p+2}|w^n|^p w^n &\longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \alpha_n^{2p+2}|w^n|^{p+2}|z^n|^p z^n &\longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \end{aligned} \tag{3.45}$$

em que a segunda convergência é obtida de maneira análoga.

Agora, validaremos as convergências:

$$\begin{aligned} |z^n|^{p+2}\,|w^n|^p\,w^n &\longrightarrow 0 \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)), \\ |w^n|^{p+2}\,|z^n|^p\,z^n &\longrightarrow 0 \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.46}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left\| |z^n(t)|^{p+2} \, |w^n(t)|^p \, w^n(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1}} \left| \left\langle |z^n(t)|^{p+2} \, |w^n(t)|^p \, w^n(t), \, \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \\
&\leqslant \sup_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1}} \int_\Omega |z^n(x,t)|^{p+2} \, |w^n(x,t)|^{p+1} \, |\varphi(x)| \\
&\leqslant \sup_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1}} \|z^n(t)\|_{L^{2(p+2)^2}(\Omega)}^{p+2} \, \|w^n(t)\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+1} \, \|\varphi\|_{L^{2(p+2)}(\Omega)} \\
&\lesssim \|z^n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+2} \, \|w^n(t)\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+1} \\
&\lesssim \|z^n\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^{p+2} \, \|w^n\|_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))}^{p+1} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

uma vez que $z^n \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $w^n \to 0$ em $L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))$. Analogamente para a segunda convergência.

Mais do que isso, a partir de (3.46), podemos concluir:

$$\begin{aligned}
\partial_t \left(|z^n|^{p+2} \, |w^n|^p \, w^n \right) &\longrightarrow 0 \ \text{ em } \ H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Omega)) = H^{-1}(\Omega \times (0,T)) \\
\partial_t \left(|w^n|^{p+2} \, |z^n|^p \, z^n \right) &\longrightarrow 0 \ \text{ em } \ H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Omega)) = H^{-1}(\Omega \times (0,T)).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Com efeito, basta observar que, dada $\psi \in H_0^1(\Omega \times (0,T))$, temos:

$$\begin{aligned}
&\left| \left\langle \partial_t \left(|z^n|^{p+2} \, |w^n|^p \, w^n \right), \, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega \times (0,T)), H_0^1(\Omega \times (0,T))} \right| \\
&\qquad = \left| \left\langle |z^n|^{p+2} \, |w^n|^p \, w^n, \, \partial_t \psi \right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \right| \\
&\qquad \leqslant \left\| |z^n|^{p+2} \, |w^n|^p \, w^n \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \|\partial_t \psi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&\qquad \lesssim \left\| |z^n|^{p+2} \, |w^n|^p \, w^n \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega \times (0,T))},
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\left\| \partial_t \left(|z^n|^{p+2} \, |w^n|^p \, w^n \right) \right\|_{H^{-1}(\Omega \times (0,T))} \lesssim \left\| |z^n|^{p+2} \, |w^n|^p \, w^n \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \longrightarrow 0,$$

uma vez que $|z^n|^{p+2} \, |w^n|^p \, w^n \longrightarrow 0$ em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Analogamente para a segunda convergência.

Lembremos que nosso objetivo é provar que $E_{(w^n,z^n)}(0)$ converge para zero, em que

$$\begin{aligned}
E_{(w^n,z^n)}(t) &= \frac{1}{2} \left[\int_\Omega \rho(x) |\partial_t w^n(x,t)|^2 dx + \int_\Omega \rho(x) |\partial_t z^n(x,t)|^2 dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\int_\Omega \nabla z^n(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla z^n(x,t) \, dx + \int_\Omega \nabla w^n(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x,t) \, dx \right] \\
&\quad + \frac{\alpha_n^{2p+2}}{p+2} \int_\Omega |w^n(x,t) \, z^n(x,t)|^{p+2} dx
\end{aligned}$$

Vamos utilizar a seguinte notação

$$P := \rho(x)\partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\left(k_{ij}(x)\partial_{x_j}\right).$$

Da imersão $H^{-1}(\Omega \times (0,T)) \hookrightarrow H^{-1}_{\text{loc}}(\Omega \times (0,T))$ e das convergências para zero (3.37), (3.38) e (3.47), observando as hipóteses sobre a e b, deduzimos que:

$$\begin{array}{rcllll} P\,\partial_t w^n & = & -\partial_t\left(|z^n|^{p+2}\,|w^n|^p\,w^n\right) - \partial_t\left(a(x)\,\partial_t w^n\right) & \longrightarrow & 0 & \text{em } H^{-1}_{loc}(\Omega \times (0,T)), \\ P\,\partial_t z^n & = & -\partial_t\left(|w^n|^{p+2}\,|z^n|^p\,z^n\right) - \partial_t\left(b(x)\,\partial_t z^n\right) & \longrightarrow & 0 & \text{em } H^{-1}_{loc}(\Omega \times (0,T)). \end{array} \tag{3.48}$$

Vamos denotar por μ_1 e μ_2 as medidas de defeito microlocal associadas a $\{\partial_t w^n\}$ e $\{\partial_t z^n\}$ em $L^2(\Omega \times (0,T))$, as quais existem em virtude do Teorema 1.49. Então, da Hipótese **(H.3)**, deduzimos dois fatos:

(i) Os suportes das medidas μ_1 e μ_2 estão contidos no conjunto característico do operador de onda, a saber, $\left\{\tau^2 - \dfrac{1}{\rho(x)}\xi^\top \cdot K(x)\cdot \xi = 0\right\}$.

(ii) μ_1 e μ_2 se propagam ao longo do fluxo bicaracterístico deste operador, o que significa, particularmente, que se algum ponto $\omega_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ não pertence a algum dos conjuntos $\mathrm{supp}(\mu_1)$ ou $\mathrm{supp}(\mu_2)$ então todo o bicaracterístico emitido de ω_0 permanece fora de $\mathrm{supp}(\mu_1)$ ou $\mathrm{supp}(\mu_2)$.

De fato, de (3.48) e do Teorema 1.53 deduzimos o item (i).

Além disso, pela Proposição 1.61 e o Teorema 1.60, segue que $\mathrm{supp}(\mu) \in (\Omega \times (0,T)) \times S^d$ é uma união de curvas do tipo

$$t \in I \cap (0,\infty) \mapsto m_\pm(t) = \left(t, x(t), \frac{\pm 1}{\sqrt{1+|G(x)\dot{x}|^2}}, \frac{\mp G(x)\dot{x}}{\sqrt{1+|G(x)\dot{x}|^2}}\right),$$

em que $t \in I \mapsto x(t) \in \Omega$ é uma geodésica da métrica $G(x)$.

Como $\partial_t w^n \to 0$ e $\partial_t z^n \to 0$ em $L^2(\omega \times (0,T))$, temos pelo Teorema 1.56 que $\mu_1 = \mu_2 = 0$ em ω e consequentemente $\mathrm{supp}(\mu_1) \subset (\Omega\backslash\omega) \times (0,T)$ e $\mathrm{supp}(\mu_2) \subset (\Omega\backslash\omega) \times (0,T)$.

Por outro lado, sejam $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in \mathrm{supp}(\mu_1) \cup \mathrm{supp}(\mu_2)$, $t_0 \in (0, +\infty)$ e x uma geodésica de G definida próximo de t_0. Sabendo que as geodésicas partindo de pontos de dentro de $\Omega\backslash\omega$ entram necessariamente na região ω, então para qualquer geodésica da métrica G, com $0 \in I$ existe $t > 0$ tal que $m_\pm(t)$ não pertence a $\mathrm{supp}\,(\mu_1)$ e a $\mathrm{supp}\,(\mu_2)$ e, portanto, $m_\pm\,(t_0)$ também não pertence, o que mostra a validade do item (ii).

Uma vez que o tempo t_0 e as geodésicas x foram tomadas arbitrariamente, concluímos que $\mathrm{supp}(\mu_i) = \emptyset$ $(i = 1, 2)$, isto é, $\mu_i = 0$ em todo $\Omega \times (0,T)$. Assim, por propagação garantida pela

Observação 1.51 temos que:

$$\begin{aligned} \partial_t w^n &\longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_{\text{loc}}(\Omega \times (0,T)) \\ \partial_t z^n &\longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_{\text{loc}}(\Omega \times (0,T)) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Assim, de (3.49) e como $\partial_t w^n \to 0$ e $\partial_t z^n \to 0$ em $L^2(\omega \times (0,T))$ concluímos que

$$\begin{aligned} \partial_t w^n &\longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \partial_t z^n &\longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Agora vamos utilizar (3.50) para mostrar a seguinte afirmação: Dado $\varepsilon > 0$, de forma que $\varepsilon < T - \varepsilon$, é válido que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} E_{(w^n,z^n)}(t)\,dt = 0. \tag{3.51}$$

Na verdade, vamos mostrar que cada componente de $E_{(w^n,z^n)}(t)$ converge a zero. Para isso, consideremos a função de corte $\theta \in C^\infty(0,T)$ tal que

$$0 \leqslant \theta(t) \leqslant 1, \quad \theta(t) = 1 \text{ em } (\varepsilon, T-\varepsilon) \ \text{ e } \ \theta(0) = \theta(T) = 0. \tag{3.52}$$

Multiplicando $(3.35)_1$ por $w^n\theta$, integrando por partes em Ω e depois em $[0,T]$ e utilizando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \theta(t) \int_\Omega \rho(x)\, \partial_t^2 w^n(x,t)\, w^n(x,t)\,dx\,dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega (\nabla w^n(x,t))^\top \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x,t)\,dx\,dt \\ + \alpha_n^{2p+2} \int_0^T \theta(t) \int_\Omega |z^n(x,t)|^{p+2} |w^n(x,t)|^{p+2}\,dx\,dt \\ + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega a(x)\,\partial_t w^n(x,t)\, w^n(x,t)\,dx\,dt = 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Note que

$$\int_0^T \theta(t) \int_\Omega \rho(x)\,\partial_t^2 w^n(x,t)\,w^n(x,t)\,dx\,dt = \int_0^T (\partial_t^2 w^n(t), \theta w^n(t))_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

E ainda,

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 w^n(t), \theta(t) w^n(t))_{L^2(\Omega)} = -(w_t^n(t), \theta' w^n(t))_{L^2(\Omega)} - (w_t^n(t), \theta(t) w_t^n(t))_{L^2(\Omega)} \\ + \frac{d}{dt}(w_t^n(t), \theta(t) w^n(t))_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Logo, integrando a igualdade (3.54) em $(0,T)$ e utilizando (3.52), temos

$$\int_0^T \theta(t)\,(\partial_t^2 w^n(t), w^n(t))_{L^2(\Omega)}\,dt = -\int_0^T \theta(t) \|\partial_t w^n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt - \int_0^T \theta'(t)(\partial_t w^n(t), w^n(t))_{L^2(\Omega)}\,dt$$

a qual, substituída em (3.53) retorna a seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T \theta(t) \int_\Omega \rho(x)|\partial_t w^n(x,t)|^2\, dxdt - \int_0^T \theta'(t) \int_\Omega \rho(x)\partial_t w^n(x,t) w^n(x,t)\, dxdt& \\
+ \int_0^T \theta(t) \int_\Omega (\nabla w^n(x,t))^\top \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x,t)\, dxdt& \\
+ \alpha_n^{2p+2} \int_0^T \theta(t) \int_\Omega |z^n(x,t)|^{p+2} |w^n(x,t)|^{p+2}\, dxdt& \\
+ \int_0^T \theta(t) \int_\Omega a(x)\, \partial_t w^n(x,t) w^n(x,t)\, dxdt = 0.&
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

A seguir, vamos analisar cada termo em (3.55). Para estimar o primeiro termo de (3.55), observamos as condições estabelecidas sobre ρ e θ e a convergência $(3.50)_1$, temos

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^T \theta(t) \int_\Omega \rho(x)\, |\partial_t w^n(x,t)|^2\, dx\, dt \right| &\leqslant \int_0^T |\theta(t)| \int_\Omega |\rho(x)| |\partial_t w^n(x,t)|^2\, dx\, dt \\
&\lesssim \|\partial_t w^n\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Na estimativa do segundo termo de (3.55) vamos utilizar as condições estabecidas sobre ρ e θ, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e as convergências (3.41) e $(3.50)_1$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^T \theta'(t) \int_\Omega \rho(x) \partial_t w^n(x,t) w^n(x,t)\, dx\, dt \right| &\leqslant \int_0^T |\theta'(t)| \int_\Omega |\rho(x)| |\partial_t w^n(x,t)|\, |w^n(x,t)|\, dx\, dt \\
&\lesssim \int_0^T \|\partial_t w^n(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w^n(t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&\lesssim \|\partial_t w^n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|w^n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Para analisar o quarto termo de (3.55), utilizamos as condições estabelecidas sobre θ, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e as convergências $(3.40)_1$ e $(3.45)_1$, a fim de obter

$$
\begin{aligned}
&\left| \alpha_n^{2p+2} \int_0^T \theta(t) \int_\Omega |z^n(x,t)|^{p+2} |w^n(x,t)|^{p+2}\, dxdt \right| \\
&\qquad \leqslant \int_0^T \theta(t) \left| \left(\alpha_n^{2p+2} |z^n(t)|^{p+2} |w^n(t)|^{p+1}, |w^n(t)| \right)_{L^2(\Omega)} \right| dt \\
&\qquad \lesssim \int_0^T \left\| \alpha_n^{2p+2} |z^n(t)|^{p+2} |w^n(t)|^p w^n(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w^n\|_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&\qquad \lesssim \left\| \alpha_n^{2p+2} |z^n|^{p+2} |w^n|^p w^n \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)} \|w^n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&\qquad \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Para estimar o quinto termo de (3.55) vamos utilizar as condições estabelecidas sobre a e θ, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e as convergências $(3.40)_1$ e $(3.50)_1$.

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^T \theta(t)\int_\Omega a(x)\,\partial_t w^n(x,t) w^n(x,t)\,dx\,dt\right| &\leqslant \int_0^T |\theta(t)|\int_\Omega |a(x)||\partial_t w^n(x,t)||| w^n(x,t)|\,dx\,dt\\
&\lesssim \int_0^T \|\partial_t w^n(t)\|\|\nabla w^n(t)\|\,dt\\
&\leqslant \|\partial_t w^n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|w^n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

De (3.55) e todas as estimativas realizadas, concluímos que

$$
\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \theta(t)\int_\Omega (\nabla w^n(x,t))^T\cdot K(x)\cdot\nabla w^n(x,t)\,dx\,dt = 0.
$$

Analogamente, multiplicando $(3.35)_2$ por $z^n\theta$, integrando por partes em Ω, integrando em $[0,T]$ e estimando os termos como fizemos para (3.55), concluímos também que

$$
\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \theta(t)\int_\Omega (\nabla z^n(x,t))^T\cdot K(x)\cdot\nabla z^n(x,t)\,dx\,dt = 0.
$$

Utilizando (3.52), temos que

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_\Omega (\nabla w^n(x,t))^T\cdot K(x)\cdot\nabla w^n(x,t)\,dx\,dt\\
&\leqslant \int_0^T \theta(t)\int_\Omega (\nabla w^n(x,t))^T\cdot K(x)\cdot\nabla w^n(x,t)\,dx\,dt \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Donde conluímos que

$$
\begin{cases}
\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_\Omega (\nabla w^n(x,t))^T\cdot K(x)\cdot\nabla w^n(x,t)\,dx\,dt = 0,\\
\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_\Omega (\nabla z^n(x,t))^T\cdot K(x)\cdot\nabla z^n(x,t)\,dx\,dt = 0.
\end{cases}
\tag{3.56}
$$

Utilizando (3.52), as estimativas realizadas para os termos de (3.55) combinadas com as estimativas análogas para os termos com z^n e (3.56), concluímos a prova de (3.51).

Como $E_{(w^n,z^n)}(t)$ é não crescente, temos que, para $t\in(\varepsilon,T-\varepsilon)$ é válido que

$$
E_{(w^n,z^n)}(t)\geqslant E_{(w^n,z^n)}(T-\varepsilon).
$$

Donde

$$
\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} E_{(w^n,z^n)}(t)\,dt \geqslant \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} E_{(w^n,z^n)}(T-\varepsilon)\,dt = (T-2\varepsilon)\,E_{(w^n,z^n)}(T-\varepsilon)\geqslant 0.
$$

Portanto, de (3.51), segue que

$$
(T-2\varepsilon)E_{(w^n,z^n)}(T-\varepsilon)\to 0.
$$

Como $\varepsilon < T - \varepsilon$, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} E_{(w^n,z^n)}(T-\varepsilon) = 0. \tag{3.57}$$

Por outro lado, da identidade da energia, podemos concluir que

$$E_{(w^n,z^n)}(T-\varepsilon) - E_{(w^n,z^n)}(\varepsilon) = -\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_\Omega \left(a(x)|\partial_t w^n(x,t)|^2 + b(x)|\partial_t z^n(x,t)|^2\right)\, dx\, dt.$$

Das convergências (3.37) e (3.38) temos que o lado direito da igualdade imediatamente acima tende a zero e de (3.57), temos que a primeira parcela do lado esquerdo tende a zero. Donde podemos deduzir que

$$\lim_{n\to+\infty} E_{(w^n,z^n)}(\varepsilon) = 0.$$

Pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, segue que $E_{(w^n,z^n)}(0) \to 0$ quando $n \to +\infty$, como queríamos. $\square$

3.2.2 Prova do Teorema 3.5

Por fim, tendo em mãos o Lema 3.7, estamos em condições de provar o Teorema 3.5. De fato, tomando $T_0 > 0$ suficientemente grande e observando que, por (3.19), a aplicação $t \in [0,+\infty) \mapsto E_{(u,v)}(t)$ é não crescente, temos:

$$E_{(u,v)}(T_0) \leqslant E_{(u,v)}(0)$$

e, por (3.21), vale

$$E_{(u,v)}(T_0) \leqslant C\int_0^T\int_\Omega \left(a(x)|\partial_t u(x,t)|^2 + b(x)|\partial_t v(x,t)|^2\right)\, dx\, dt \tag{3.58}$$

com $C = C(T_0, R)$, T_0 e R constantes fixadas.

Por outro lado, ainda de (3.19), temos

$$E_{(u,v)}(T_0) - E_{(u,v)}(0) = -\int_0^{T_0}\int_\Omega \left(a(x)|\partial_t u(x,t)|^2 + b(x)|\partial_t v(x,t)|^2\right)\, dx\, dt. \tag{3.59}$$

Combinando (3.58) e (3.59), garante-se a existência de uma constante $K = K(R, T_0) > 0$ para a qual

$$E_{(u,v)}(T_0) \leqslant \left(\frac{K}{1+K}\right) E_{(u,v)}(0).$$

Argumentando de forma similar ao considerar o intervalo $[T_0, 2T_0]$, concluímos que

$$E_{(u,v)}(2T_0) \leqslant \left(\frac{K}{1+K}\right)^2 E_{(u,v)}(0).$$

Repetindo o processo recursivamente, resulta que

$$E_{(u,v)}(nT_0) \leqslant \left(\frac{K}{1+K}\right)^n E_{(u,v)}(0), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Denotando $\kappa := \dfrac{K}{1+K}$ segue que $0 < \kappa < 1$ e tomando $t = nT_0 + r$, para $0 \leqslant r < T_0$, obtemos

$$E_{(u,v)}(t) \leqslant \left(\mathrm{e}^{-\frac{r}{T_0}\ln\kappa}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln\kappa}{T_0}t}\right) E_{(u,v)}(0),$$

para todo $t > T_0$. Tomando $C := \mathrm{e}^{-\frac{r}{T_0}\ln\kappa}$ e $\gamma = -\frac{\ln\kappa}{T_0}$, temos o desejado em (3.20), o que conclui a prova do Teorema 3.5.

$\square$

Apêndice A

Lema A.1. *Considere as funções reais $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$g(s) = |s|^{p+1}\, s \text{ e } f(s) = |s|^p\, s.$$

Então, para quaisquer $s_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, vale

$$\Big| g(s_1) \cdot f(s_2) - g(s_3) \cdot f(s_4) \Big| \leqslant C(p) \Big[|s_1|^{p+2} \Big\{ |s_4|^p + |s_2|^p \Big\} |s_2 - s_4| \\ + |s_4|^{p+1} \Big\{ |s_1|^{p+1} + |s_3|^{p+1} \Big\} |s_1 - s_3| \Big].$$

Demonstração. Inicialmente, observamos que

$$\begin{aligned} \Big| g(s_1) \cdot f(s_2) - g(s_3) \cdot f(s_4) \Big| &= \Big| g(s_1) \cdot f(s_2) - g(s_1) \cdot f(s_4) + g(s_1) \cdot f(s_4) - g(s_3) \cdot f(s_4) \Big| \\ &\leqslant \Big| g(s_1) \Big| \Big| f(s_2) - f(s_4) \Big| + \Big| f(s_4) \Big| \Big| g(s_1) - g(s_3) \Big|. \end{aligned}$$

Sabemos que $g'(s) = (p+2)\,|s|^{p+1}$, $f'(s) = (p+1)\,|s|^p$ e, portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe uma constante $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} |f(s_2) - f(s_4)| &\leqslant |f'(s_2 \cdot \theta + (1-\theta) \cdot s_4)|\, |s_2 - s_4| \\ &= (p+1)|s_2 \cdot \theta + (1-\theta) \cdot s_4|^p\, |s_2 - s_4|. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Da mesma forma, existe uma constante $\tilde{\theta} \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} |g(s_1) - g(s_2)| &\leqslant |g'(s_1 \cdot \tilde{\theta} + (1-\tilde{\theta}) \cdot s_3)|\, |s_1 - s_3| \\ &= (p+2)|s_1 \cdot \tilde{\theta} + (1-\tilde{\theta}) \cdot s_3|^{p+1}\, |s_1 - s_3|. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Das desigualdades (A.1) e (A.2), obtemos

$$\begin{aligned} &|g(s_1)|\, |f(s_2) - f(s_4)| + |f(s_4)|\, |g(s_1) - g(s_3)| \\ &\leqslant (p+1)|g(s_1)|\, |s_2 \cdot \theta + (1-\theta) \cdot s_4|^p |s_2 - s_4| + (p+2)|f(s_4)|\, |s_1 \cdot \tilde{\theta} + (1-\tilde{\theta}) \cdot s_3|^{p+1} |s_1 - s_3|. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Do fato de que $p \geqslant 0$ e avaliando o primeiro termo do lado direito de (A.3), obtemos

$$\begin{aligned} (p+1)\,|g(s_1)|\,|s_2\theta + (1-\theta)s_4|^p |s_2 - s_4| &= (p+1)\,|g(s_1)|\,|s_4 + \theta(s_2 - s_4)|^p |s_2 - s_4| \\ &\leqslant (p+1)\,|g(s_1)| \Big\{ |s_4| + |s_2| + |s_2| + |s_4| \Big\}^p |s_2 - s_4| \\ &= (p+1)\,|g(s_1)|\, 2^p \Big\{ |s_4| + |s_2| \Big\}^p |s_2 - s_4| \\ &\leqslant (p+1)\,|g(s_1)|\, 2^p\, 2^p \Big\{ |s_4|^p + |s_2|^p \Big\} |s_2 - s_4| \\ &= C_0(p)\,|g(s_1)|\, \Big\{ |s_4|^p + |s_2|^p \Big\} |s_2 - s_4|. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Analogamente, avaliando o segundo termo do lado direito de (A.3), obtemos

$$\begin{aligned}(p+2)|f(s_4)|\,|s_1\tilde{\theta}+(1-\tilde{\theta})s_3|^{p+1}|s_1-s_3| &\leqslant (p+2)\,C_1(p)\,|f(s_4)|\,\Big\{|s_1|^{p+1}+|s_3|^{p+1}\Big\}|s_1-s_3| \\ &= C_2(p)\,|f(s_4)|\,\Big\{|s_1|^{p+1}+|s_3|^{p+1}\Big\}|s_1-s_3|. \end{aligned} \tag{A.5}$$

De (A.3), (A.4) e (A.5), temos

$$\begin{aligned}\Big|g(s_1)\cdot f(s_2)-g(s_3)\cdot f(s_4)\Big| &\leqslant C_0(p)\,|g(s_1)|\,\Big\{|s_4|^p+|s_2|^p\Big\}|s_2-s_4| \\ &\qquad + C_2(p)\,|f(s_4)|\,\Big\{|s_1|^{p+1}+|s_3|^{p+1}\Big\}|s_1-s_3| \\ &\leqslant C(p)\bigg[|s_1|^{p+2}\Big\{|s_4|^p+|s_2|^p\Big\}|s_2-s_4|+|s_4|^{p+1}\Big\{|s_1|^{p+1}+|s_3|^{p+1}\Big\}|s_1-s_3|\bigg] \end{aligned} \tag{A.6}$$

como desejado. □

Bibliografia

[1] F. Alabau-Boussouira. Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems. Appl. Math. Optim. 2005; **51**(1): 61–105.

[2] D. Andrade, A. Mognon. Global Solutions for a System of Klein-Gordon Equations with Memory. *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3) 21 (2003), no. 1-2, 127-138.

[3] M. Astudillo, M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuosa, A. B. Pampu, Uniform Decay Rates estimates for the semilinear for the semilinear wave equation in inhomogeneous media with locally distributed nonlinear damping, *Nonlinearity.* 31. (2018), pp. 4031-4064.

[4] M. Badiale, E. Serra. Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach. Springer Science & Business Media, 2010.

[5] V. Barbu. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Springer, 1976.

[6] V. Barbu. Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces. Springer Science & Business Media, 2010.

[7] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. SIAM J. Control Optim. 1992; **30**:1024–1065.

[8] S. Betelú, R. Gulliver, and W. Littman. Boundary control of PDEs via curvature flows: the view from the boundary. II. *Appl. Math. Optim.*, 46(2-3):167-178, 2002. Special issue dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions.

[9] C. A. Bortot, M. M. Cavalcanti, W. J. Corrêa, V. N. Domingos Cavalcanti. Uniform decay rate estimates for Schrödinger and plate equations with nonlinear locally distributed damping. Journal of Differential Equations. 2013; **254**:3729–3764.

[10] F. Boyer e P. Fabrie. Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models. Springer. New York, 2013.

[11] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, New York, 2011.

[12] C. Buriol, L. G. Delatorre, V. H. Gonzalez Martinez, D. C. Soares, E. H. G. Tavares. Asymptotic stability for a generalized nonlinear Klein-Gordon system. *Journal of Differential Equations.* 280 (2021), 517-545.

[13] N. Burq, P. Gérard. Contrôle Optimal des équations aux dérivées partielles. 2001. Disponível em: http://www.math.u-psud.fr/ burq/articles/coursX.pdf.

[14] N. Burq, P. Gérard. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1997; **325**:749–752.

[15] M. M. Cavalcanti, L. G. Delatorre, V. N. Domingos Cavalcanti, V. H. Gonzalez Martinez, D. C. Soares. Uniform decay rate estimates for the beam equation with locally distributed nonlinear damping. *Math Meth Appl Sci*. 2021; 44: 10281– 10303.

[16] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano. Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result. Arch. Ration. Mech. Anal. 2010; **197**(3):925–964.

[17] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, I. Lasiecka. Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping–source interaction. *Journal of Differential Equations*. 236 (2007), n. 2, 407-459.

[18] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, T. F. Ma. Exponantial decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains. Differential and Integral Equations. 2004; **17**:495–510.

[19] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano. Global existence and asymptotic stability for the nonlinear and generalized damped equation, extensible plate. Communications in Contemporary Mathematics. 2004; **5**:705–731.

[20] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev. Maringá: Eduem, Brasil, 2009.

[21] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti e V. Komornik, Introdução à Análise Funcional, Maringá: Eduem, 2011.

[22] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping-a sharp result. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), no. 9, 4561-4580.

[23] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, S. Mansouri, V. H. Gonzalez Martinez, Z. Hajjej, M. R. Astudillo Rojas. Asymptotic stability for a strongly coupled Klein-Gordon system in an inhomogeneouns medium with locally distributed damping. *Journal of Differential Equations.* 268 (2020), 447-489.

[24] M. M. Cavalcanti, A. Guesmia. General decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary condition of memory type. Differential Integral Equations. 2005; **18**(5):583–600.

[25] I. Chueshov, M. Eller, I. Lasiecka. On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation. *Comm. Partial Differential Equations* 27 (2002), no. 9-10, 1901-1951.

[26] A. T. Cousin, C. L. Frota, N. A. Larkin. On a system of Klein-Gordon type equations with acoustic boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.* 293 (2004), no. 1, 293-309.

[27] B. Dehman, P. Gérard, G. Lebeau. Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface. *Math. Z.* 254 (2006), no. 4, 729-749.

[28] B. Dehman; G. Lebeau; E. Zuazua. Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation, Anna. Sci. Ec. Norm. Super. **36**, 525-551 (2003).

[29] L. Evans. Partial Differential Equations. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998

[30] S. J. Feng, D. X. Feng. Nonlinear internal damping of wave equations with variable coefficients. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2004; **20**(6):1057–1072.

[31] J. S. Ferreira. Exponential decay for a nonlinear system of hyperbolic equations with locally distributed dampings. *Nonlinear Anal.* 18 (1992), no. 11, 1015–1032.

[32] J. S. Ferreira. Exponential decay of the energy of a nonlinear system of Klein-Gordon equations with localized dampings in bounded and unbounded domains. *Asymptotic Anal.* 8 (1994), no. 1, 73-92.

[33] P. Gérard. Microlocal defect measures, *Comm. Partial Differential Equations* 16 (1991) 1761-1794.

[34] A. Guesmia. Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système de Petrovsky. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 1998; **5**(4):583–594.

[35] R. B. Guzman, M. Tucsnak. Energy decay estimates for the damped plate equation with a local degenerated dissipation. Systems and Control Letters. 2003; **48**:191–197.

[36] R. Joly, C. Laurent. Stabilization for the semilinear wave equation with geometric control. Analysis & PDE. 2013; **6**:1089–1119.

[37] A. K. Khanmamedov. Global attractors for the plate equation with localized damping and a critical exponent in an unbounded domain. Journal of Differential Equations. 2006; **225**:528–548.

[38] A. K. Khanmamedov. Global attractors for Von Karman equations with nonlinear interior dissipation. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006; **318**:92–101.

[39] A. K. Khanmamedov, S. Yayla. Long-time dynamics of the strongly damped semilinear plate equation in RN. Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.). 2018; **38**(3):1025–1042.

[40] J. U. Kim. Exact semi-internal control of an Euler-Bernoulli equation. SIAM J. Control and Optimization. 1992; **30**(5):1001–1023.

[41] I. Lasiecka and D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, *Differential and integral Equations*, 6 (1993), 507-533.

[42] I. Lasiecka, D. Toundykov. Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms. Nonlinear Anal. 2006; **64**(8):1757–1797.

[43] G. Lebeau. Equations des ondes amorties. Algebraic Geometric Methods in Maths. Physics, 1996; 73–109.

[44] J. Li, Y. Wu. Exponential stability of the plate equations with potential of second order and indefinite damping. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009; **359**:62–75.

[45] J. L. Lions, *Quelques Métodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires,* Dunod, Paris, (1969).

[46] J.L. Lions, Contrôlabilité Exacte, Stabilization et Perturbations de Système Distribuées, Tome 1, Masson, RMA 8, (1988).

[47] J. L. Lions, E. Magenes. *Problèmes Aux Limites Non Homogènes et Applications*. Dunod, Paris, (1968), Vol. 1.

[48] K. Liu. Locally distributed control and damping for the conservative systems. SIAM J. Control Optim. 1997; **35**(5):1574–1590.

[49] K. Liu, K. Liu. Exponential decay of energy of the Euler-Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping, SIAM J. Control and Optim. **36**, 1086-1098 (1998).

[50] L. A. Medeiros, G. P. Menzala. On a mixed problem for a class of nonlinear Klein-Gordon equations. *Acta Math. Hungar.* 52 (1988), no. 1-2, 61-69.

[51] L. A. Medeiros, M. M. Miranda. Weak solutions for a system of nonlinear Klein-Gordon equations. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 146 (1987), 173–183.

[52] L. A. Medeiros, M. M. Miranda. On the existence of global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon equations. *Funkcial. Ekvac.* 30 (1987), no. 1, 147-161.

[53] P. Martinez. A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping. Rev. Mat. Complut. 1999; **12**(1):251–283.

[54] L. Miller. Escape function conditions for the observation, control, and stabilization of the wave equation. SIAM J. Control Optim. 2002; **41**(5):1554–1566.

[55] M. Nakao. Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation. Math. Ann. 1996; **305**(3):403–417.

[56] J. Y. Park, J. R. Kang. Energy decay estimates for the Bernoulli-Euler type equation with a local degenerate dissipation. Applied Mathematics Letters. 2010; **23**:1274–1279.

[57] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[58] J. Rauch, M. Taylor. Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds. Comm. Pure Appl. Math. 1975; **28**(4):501–523.

[59] J. Rauch, M. Taylor. Erratum: "Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds" (Comm. Pure Appl. Math. 1975; **28**(4):501–523.. Comm. Pure Appl. Math. 1975; **28**(5):677.

[60] W. Rudin. Real and complex analysis. McGraw-Hill, Inc. (1987).

[61] A. Ruiz. Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1992; **71**:455–467.

[62] B. Said-Houari, S. A. Messaoudi, A. Guesmia. General decay of solutions of a nonlinear system of viscoelastic wave equations. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 2011; **18**(6):659–684.

[63] I. E. Segal. Nonlinear partial differential equations in quantum field theory. 1965. *Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. XVII* pp. 210–226 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[64] R. E. Showalter. Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear partial differential equation. American Mathematical Society (1996).

[65] S. Simsek, A. K. Khanmamedov. Exponential decay of solutions for the plate equation with localized damping. Math. Methods Appl. Sci. 2015; **38**(9):1767–1780.

[66] W. A. Strauss. On weak solutions of semilinear hyperbolic equations. Anais da Academia Brasileira de Ciências. 1972; **71**:645–651.

[67] L. Tebou. Stabilization of the wave equation with localized nonlinear damping. Journal of Differential Equations. 1998; **145**:502–524.

[68] L. Tebou. Well posedness and energy decay estimates for the damped wave equations with Lr localizing coefficient. Communications in Partial Differential Equations. 1998; **23**:1839–1855.

[69] L. Tebou. Well-posedness and stability of a hinged plate equation with a localized nonlinear structural damping. Nonlinear Analysis. 2009; **71**:2288–2297.

[70] D. Toundykov. Optimal decay rates for solutions of a nonlinear wave equation with localized nonlinear dissipation of unrestricted growth and critical exponent source terms under mixed boundary conditions. Nonlinear Anal. 2007; **67**(2):512–544.

[71] M. Tucsnak. Semi-internal stabilization for a non-linear Bernoulli-Euler equation. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1996; **19**:897–907.

[72] M. I. Visik, O. A. Ladyzhenskaya. On boundary value problems for pde and certain class of operators equations. AMS Transl 2, 10 (1958).

[73] K. Yosida, Functional Analysis. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[74] S. Zheng. Nonlinear Evolution Equatios. Chapman & Hall/CRC Series Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Vol.133. Boca Ratón, 2004.

[75] E. Zeidler. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: II/A: Linear Monotone Operators. Springer Science & Business Media, 1985.

[76] E. Zuazua. Exponential decay for the semilinear wave equation with locally ditributed damping. Communications in Partial Differential Equations. 1990; **15**:205–235.

[77] E. Zuazua. Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1991; **70**:513–529.