Sandra Rodrigues da Silva Ramos

Máximos e Mínimos: Uma proposta para o cálculo em funções cúbicas sem o uso de derivadas.

Maringá-PR, Brasil

29/08/2019

Sandra Rodrigues da Silva Ramos

Máximos e Mínimos: Uma proposta para o cálculo em funções cúbicas sem o uso de derivadas.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Universidade Estadual de Maringá- UEM

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

Maringá-PR, Brasil

29/08/2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

Ramos, Sandra Rodrigues da Silva
R175m Máximos e mínimos : Uma proposta para o cálculo em funções sem o uso de derivadas / Sandra Rodrigues da Silva Ramos. -- Maringá, PR, 2019.
71 f.: il., figs.

Orientadora: Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes.
Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) - Mestrado Profissional, 2019.

1. Máximos. 2. Mínimos. 3. Funções Cúbicas. I. Arantes, Luciene Parron Gimenes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) - Mestrado Profissional. III. Título.

CDD 23.ed. 511.42

Ademir Henrique dos Santos - CRB-9/1065

SANDRA RODRIGUES DA SILVA RAMOS

MÁXIMOS E MÍNIMOS: UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO EM FUNÇÕES CÚBICAS SEM O USO DE DERIVADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Luciene Parron G. Arantes

Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientadora)

Rodrigo Martins

Prof. Dr. Rodrigo Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Nazira H. Harb

Profa. Dra. Nazira Hanna Harb
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Londrina

Aprovada em: 29 de agosto de 2019.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me concedido força, coragem e sabedoria nos momentos mais difíceis do mestrado. Agradeço à minha orientadora, professora Luciene Parron Gimenes Arantes pela atenção, dedicação, profissionalismo, paciência e pela grande orientação prestada, por confiar no meu trabalho, pelo apoio em todos os momentos dessa caminhada. Agradeço ao meu esposo André e meu amado filho Miguel, por todo apoio e compreensão, principalmente compreendendo a minha ausência para os estudos, pelo incentivo e inspiração nos momentos conclusivos. Agradeço às minhas amigas e colegas do mestrado, Nélidy, Aline, Simone, Elaine e Bruna, pelos momentos agradáveis que passamos juntos, pela força e incentivo nos momentos mais difíceis, pela amizade e pela constante ajuda durante o mestrado. Agradeço aos professores do PROFMAT-UEM, por compartilharem seus conhecimentos e por nos auxiliarem nessa caminhada.

"O sucesso nasce do querer, da determinação
e persistência em se chegar a um objetivo.
Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence
obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.
(José de Alencar)

Resumo

Este trabalho é uma proposta para o cálculo de máximos e mínimos locais de funções cúbicas. Nosso objetivo é apresentar uma metodologia para tal cálculo, abrangendo conceitos abordados no ensino médio. Propomos um plano de aula para esta abordagem, atividades com resolução de problemas e com materiais manipuláveis. Para encontrar os pontos de extremos locais de uma função cúbica utilizamos conceitos de transformações de funções, transladando a função cúbica de modo a relacionar as abscissas desses pontos com as funções transladadas.

Palavras-chave: máximo, mínimo, funções cúbicas.

Abstract

This work is a proposal for the calculation of local maximum and minimum cubic functions. Our goal is to present a methodology for such calculation, covering concepts addressed in high school. We propose a lesson plan for this approach, problem-solving activities and manipulable materials. To find the local end points of a cubic function we use concepts of function transformations, translating the cubic function in order to relate the abscissas of these points with the translated functions.

Keywords: maximum. minimum. cubic functions.

Lista de ilustrações

Sumário

INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa propor uma alternativa para o cálculo de máximos e mínimos locais de funções cúbicas utilizando ferramentas de estudo que estejam dentro do escopo do ensino médio. Ou melhor, apresentar um método de cálculo sem o uso de derivadas e aplicá-lo na solução de problemas de otimização para os alunos da terceira série do ensino médio. A motivação com esse tema se deu pelo fato da matriz curricular da educação básica conter o estudo de funções e equações polinomiais, porém abrangendo o cálculo de máximos e mínimos locais apenas de funções quadráticas, observando sua concavidade e realizando os cálculos pelo vértice da parábola, o que nos permitiu perceber as restrições em trabalhar com otimização quando esta envolve funções cúbicas.

Segundo (MARCHAND, 2016, p.20) a otimização é definida como "a forma pela qual é possível encontrar uma solução ou um conjunto de soluções ótimas para uma determinada função ou um conjunto de funções". Encontrar uma solução ótima é encontrar o melhor resultado para o seu problema, aquele que atingiu melhor os objetivos respeitando todas as condições que foram impostas no problema. Em matemática, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável.

Esta área do conhecimento exato é muito útil e necessária para a vida cotidiana do ser humano em qualquer tempo e espaço, além de dialogar com todas as áreas da matemática. Dentre as áreas que necessariamente trabalham com otimização, podemos citar, por exemplo, engenharia, administração, logística, economia, biologia. Na indústria, a otimização é utilizada constantemente. Podemos destacar a questão envolvendo as embalagens dos produtos, estas são dimensionadas pensando em obter maior aproveitamento do espaço com menor custo. Na maioria das vezes o objetivo é minimizar gastos, mas há outros fatores utilizados para determinar o formato de uma embalagem, por exemplo, o encaixe da embalagem na mão do consumidor pode ser mais importante do que ter o maior volume interno. Na matemática o termo otimização refere-se ao estudo de problemas que buscam minimizar ou maximizar uma função objetivo. A partir do momento que temos as funções previamente definidas, podemos utilizar técnicas matemáticas para encontrar estes valores. Apesar de, reconhecidamente, ser um assunto muito utilizado, por outro lado, na rede básica de ensino, os alunos ficam restritos aos problemas que envolvem funções quadráticas.

Em uma função quadrática, a determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função, bem como seus pontos de máximo ou mínimo locais sem o uso de derivadas. Toda função do segundo grau pode possuir a concavidade voltada para cima, e consequentemente um ponto de mínimo local, ou a concavidade voltada para baixo, e consequentemente um ponto de máximo local. Esse ponto de mínimo ou de máximo local é chamado de vértice da parábola. Considerando uma função $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > 0$, pela simetria do gráfico de f, temos que a coordenada x_v do mínimo local de f fica no ponto médio do segmento entre as raízes x_1 e x_2 da parábola, portanto, para encontrar a coordenada x_v, podemos calcular a média aritmética entre as raízes da função, ou seja,

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{1}$$

As raízes de f são dadas por $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Substituindo x_1 e x_2 em (1), obtemos $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ como a abscissa de mínimo local de f. Analogamente, se $a < 0$, obtemos a abscissa $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ como abscissa do ponto de máximo local de f.

A resolução de problemas de otimização que envolve funções cúbicas, geralmente é explorada apenas no ensino superior, fazendo uso de derivada para o cálculo de máximo ou mínimo local da função. Neste trabalho propomos uma técnica para este estudo, que é possível ser aplicada na rede básica de ensino, mais precisamente no terceiro ano do ensino médio, visto que nesta etapa o aluno tem conhecimentos básicos suficientes para o entendimento. Dos conteúdos abordados no ensino superior para este estudo, fizemos uma abordagem que considera aspectos conceituais, na forma mais intuitiva possível. Para tanto usamos com frequência gráficos para fixar ideias. Este trabalho, está dirigido para professores de matemática do ensino médio que desejam aprofundar o estudo de otimização com funções cúbicas e contribuir para um aprendizado aprofundado além do que o currículo da educação básica propõe.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos, sendo que, no primeiro capítulo apresentamos alguns resultados envolvendo cálculo diferencial e integral, bem como definições relacionadas às transformações de funções para conceituar este trabalho. No segundo capítulo fizemos um estudo das funções cúbicas detalhado, calculamos os pontos de extremos usando derivada e observamos seu comportamento geométrico através da sua equação reduzida. No terceiro capítulo desenvolvemos a construção do que acreditamos ser a base necessária para que o estudante tenha uma alternativa para o cálculo de máximos e mínimos locais de uma função cúbica sem o uso do cálculo diferencial e integral. E, por fim, no quarto capítulo sugerimos um plano de trabalho para a abordagem do assunto, bem como uma proposta de atividades para ser trabalhada no ensino médio, mais precisamente na terceira série do ensino médio. Enfatizamos que para a abordagem deste assunto na educação básica, é necessário que o professor utilize métodos bastante intuitivos com seus alunos, visto que se faz necessário o entendimento de alguns conceitos que estão fora do escopo do ensino médio, porém é possível ter um bom entendimento através de figuras e gráficos para justificar a argumentação. Acreditamos que uma abordagem intuitiva possa permitir que o raciocínio do aluno flua mais facilmente.

Para proposta apresentada neste trabalho, para o cálculo de pontos de extremos é necessário os conhecimentos de ponto de inflexão da função e de limite. Sugerimos que esta abordagem seja feita por intuição e por conhecimento do comportamento geométrico de funções, finalizando com a definição do ponto de inflexão e sendo calculado através de uma fórmula matemática, veja Seção 3.1.

1 Pré-requisitos

O objetivo deste capítulo é dar sustentação teórica para o leitor e auxiliá-lo no estudo das funções cúbicas. Apresentamos uma série de definições e resultados de Cálculo Diferencial e Integral que fundamentam argumentações que se sucedem. Tais definições e axiomas são referenciados quando de sua apresentação. Usamos resultados de coordenadas no plano que não são elencados neste trabalho, no entanto, tais resultados podem ser encontrados em (LIMA, 2002).

1.1 Alguns resultados de Cálculo Diferencial e Integral

Algumas demonstrações dos resultados desta seção serão omitidas, porém, podem ser encontradas nas referências, por exemplo, veja (LEITHOLD, 1994) e (GUIDORIZZI, 2001).

O Teorema do Valor Intermediário é um dos mais importantes da Matemática, onde reside a raiz de muitos outros. Inicialmente, apresentamos um caso particular do Teorema do Valor Intermediário, chamado de Teorema de Bolzano. Na maioria das aplicações deste trabalho, é esta versão que utilizamos com frequência. De posse do Teorema de Bolzano, apresentamos o caso geral.

Teorema 1.1. *(Teorema de Bolzano) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponhamos que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos. Então, existe pelo menos um $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.*

Teorema 1.2. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se d é um número real tal que $f(a) \leq d \leq f(b)$, então existe pelo menos um $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = d$.*

As demonstrações do Teoremas 1.1 e 1.2 podem ser encontradas em (NETO, 2015), páginas 112, 113 e 114, respectivamente.

Intuitivamente o Teorema do Valor Intermediário assegura que quando uma função é contínua e assume dois valores distintos ela assume também todos os valores intermediários. Assim, se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(A)$ também é um intervalo. Embora muito conhecido e utilizado, só no início do século XIX, este resultado foi demonstrado. Antes disso, todos se apoiavam numa justificativa geométrica.

O conceito de derivada é uma ferramenta matemática essencial para o cálculo de máximos e mínimos de uma função. Ele começou a se desenvolver no século XVII de forma gradual e apareceu nas obras de importantes cientistas, como Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried W. Leibniz (1646-1716). Mas foram Newton e Leibniz que vieram mais tarde e realizaram, independentemente um do outro, o trabalho de sistematização das ideias e a criação do Cálculo Diferencial e Integral.

A seguir, apresentamos a definição de reta tangente em um ponto. Posteriormente, definimos derivada, enunciamos os testes da primeira e segunda derivada e ponto de inflexão de uma função real.

Definição 1.3. *Consideremos a função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ contínua, $x_1 \in (a, b)$. Vamos definir a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $P(x_1, f(x_1))$. Seja T o intervalo aberto que contém x_1 e no qual f está definida. Seja $Q(x_2, f(x_2))$ outro ponto do gráfico de f, tal que x_2 também esteja em T. Vamos denotar a diferença entre as abscissas de Q e de P por $\Delta x = x_2 - x_1$. A inclinação da reta PQ é dada por*

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x},$$

desde que a reta PQ não seja vertical. Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, a inclinação de PQ pode ser escrita como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Definição 1.4. *Seja uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ contínua, $x_1, x_2 \in (a, b)$ e $\Delta x = x_2 - x_1$. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é*
(i) a reta que passa por P tendo inclinação $m(x_1)$ dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \tag{1.1}$$

se o limite existir;

(ii) a reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty.$$

Se (i) e (ii) da Definição 1.4 não forem verdadeiras, então não existirá uma reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P(x_1, f(x_1))$.

Definição 1.5. *A derivada de uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é a função, denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f é dado por*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

se esse limite existir.

Se x_1 pertence ao domínio de f, então

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \tag{1.2}$$

se esse limite existir. Comparando as fórmulas (1.1) e (1.2), observamos que a inclinação da reta tangente ao gráfico $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ é precisamente a derivada de f calculada em x_1.

Na fórmula (1.2), seja $x_1 + \Delta x = x$. Então "$\Delta x \longrightarrow 0$" é equivalente a "$x \longrightarrow x_1$". Logo, de (1.2), obtemos a seguinte fórmula para $f'(x_1)$,

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

se o limite existir.

O fato da derivada de uma função num ponto ser a inclinação da reta tangente ao gráfico da função neste ponto, nos possibilita aplicar derivadas como um recurso auxiliar no esboço de gráficos.

Definição 1.6. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_1 \in (a, b)$, definimos*
(a) a derivada à direita de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, por
$f'_+(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_1^+} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$, *se o limite existir.*

(b) a derivada à esquerda de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, por
$f'_-(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_1^-} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$, *se o limite existir.*

Da Definição 1.6 segue que uma função f definida num intervalo aberto contendo x_1 será derivável em x_1 se e, somente se, $f'_+(x_1)$ e $f'_-(x_1)$ ambas existirem e forem iguais.

Exemplo 1.7. Seja g a função valor absoluto, ou seja, $g(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.
Pela definição de valor absoluto, se $x \leq 0$ então $g(x) = -x$ e se $x > 0, g(x) = x$. Um esboço dessa função está na Figura 1. A função g é contínua em 0, no entanto, da Definição 1.6, temos
$g'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x| - |0|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$ e
$g'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x| - |0|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} -1 = -1.$

Como $g'_+(0) \neq g'_-(0)$, segue que $g'(0)$ não existe e, assim, g não é derivável em 0. Como a Definição 1.4 não está satisfeita quando $x = 0$, não existe reta tangente na origem para o gráfico da função g.

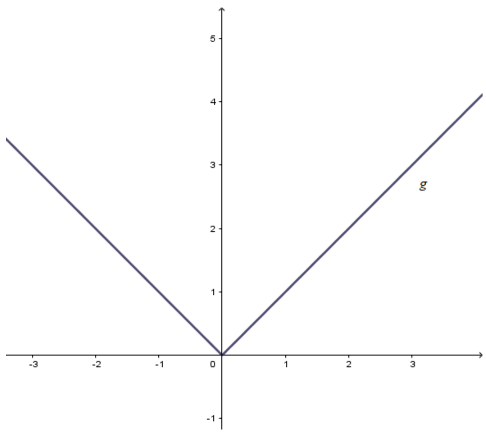

Figura 1 – Gráfico da função $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

Geometricamente, podemos usar a derivada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal, esses são os pontos onde a derivada da função é zero.

Definição 1.8. *Dada uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f terá um valor máximo local (respectivamente, valor mínimo local) em c, se existir um intervalo aberto em A, contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ (respectivamente, $f(c) \leq f(x)$) para todo x nesse intervalo.*

Genericamente, um ponto de máximo ou mínimo local de uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é denominado ponto de extremo local de f.

Teorema 1.9. *Se $f(x)$ está definida para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b) e se f tiver um extremo local em c, onde $a < c < b$, então $f'(c) = 0$, se $f'(c)$ existir.*

Demonstração. Veja (LEITHOLD, 1994, p. 217). □

Se f é uma função derivável em um intervalo (a, b), isto é, existe $f'(x)$ para todos $x \in (a.b)$, então os únicos valores possíveis de x para os quais f pode ter um extremo local são aqueles em que $f'(x) = 0$; no entanto, $f'(x)$ pode ser igual a zero para um valor específico de x, sem que f possua um extremo local neste ponto. Assim, nem toda função admite máximo e mínimo local. Existem funções que admitem apenas um deles ou ainda nenhum, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.10. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Então $f'(x) = 3x^2$, daí $f'(0) = 0$, pois

$f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ e

$f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0.$

Mas, $f(0) = 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$ e $f(x) > 0$ se $x > 0$. Assim, f não tem um extremo relativo em 0, veja Figura 2.

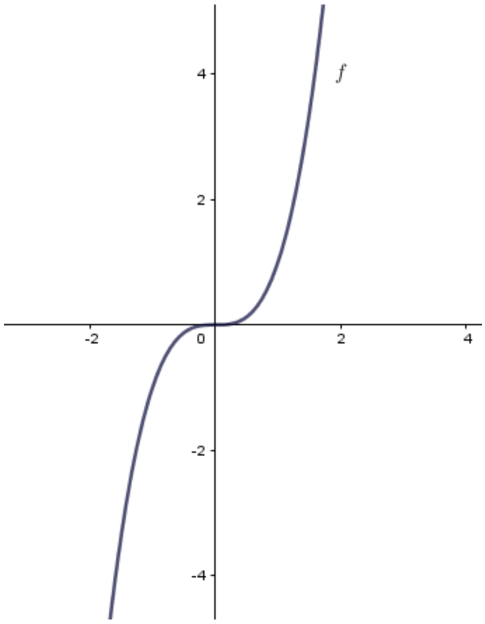

Figura 2 – Gráfico da função $y = x^3, x \in \mathbb{R}$

Definição 1.11. *Seja c pertencente ao domínio da função f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Dizemos que c é um ponto ou número crítico de f.*

A noção de ponto crítico admite uma interpretação geométrica explícita. Conforme Figura 3, sendo A um intervalo aberto, segue que os pontos críticos de uma função derivável $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ são precisamente aqueles pontos de A em que a derivada é zero ou a derivada não existe (Veja Exemplo 1.10), ou seja, onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal ou nos pontos onde a derivada não existe.

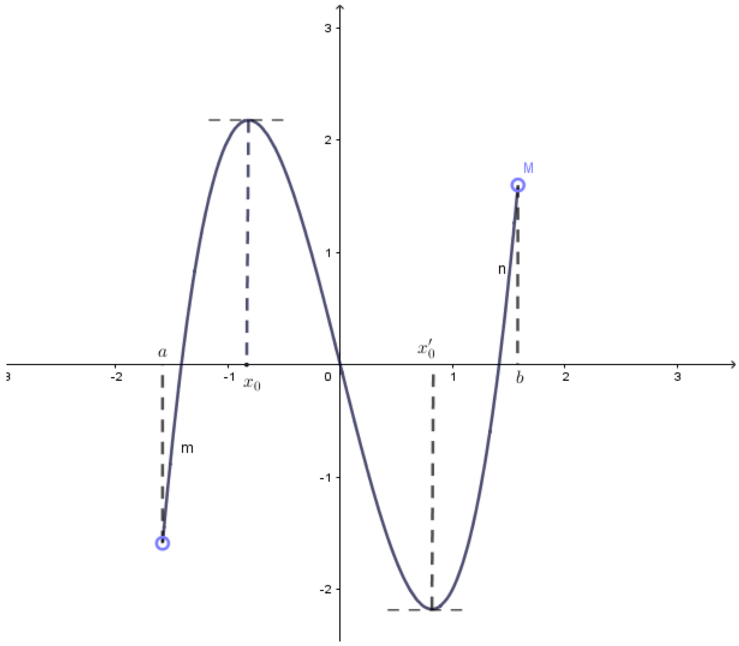

Figura 3 – Gráfico da função $y = f(x), x \in \mathbb{R}$ e seus pontos críticos

O ponto de máximo absoluto é aquele ponto do domínio de f onde a função atinge seu maior valor possível. Da mesma forma, o mínimo absoluto é o ponto do domínio da função onde esta atinge seu menor valor possível, de acordo com a definição a seguir.

Definição 1.12. *$f(c)$ é dito o valor máximo absoluto ou valor mínimo absoluto da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \geq f(x)$ ou $f(c) \leq f(x)$, respectivamente, para todos os valores de x no domínio de f.*

Um extremo absoluto de uma função é um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto da função.

Teorema 1.13. *(de Weiertrass) Se a função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então existem x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo x em $[a, b]$.*

Demonstração. Veja (GUIDORIZZI, 2001, p. 513). □

O Teorema acima assegura que a continuidade de uma função em um intervalo fechado é condição suficiente para garantir a existência dos valores máximo e mínimo absolutos de uma função. Um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um extremo local ou um valor de função num extremo do intervalo.

Exemplo 1.14. Vamos encontrar os valores de máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$.

Uma vez que f é contínua em $[-\frac{1}{2}, 4]$ e $f'(x)$ existe, para todo $x \in [-\frac{1}{2}, 4]$, temos que $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, isto é, $f'(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 2$. Observemos que cada um desses números críticos está no intervalo $(-\frac{1}{2}, 4)$. Daí, comparando os valores de f nestes números críticos e nas extremidades do intervalo, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$. Podemos ver o esboço do gráfico na Figura 4.

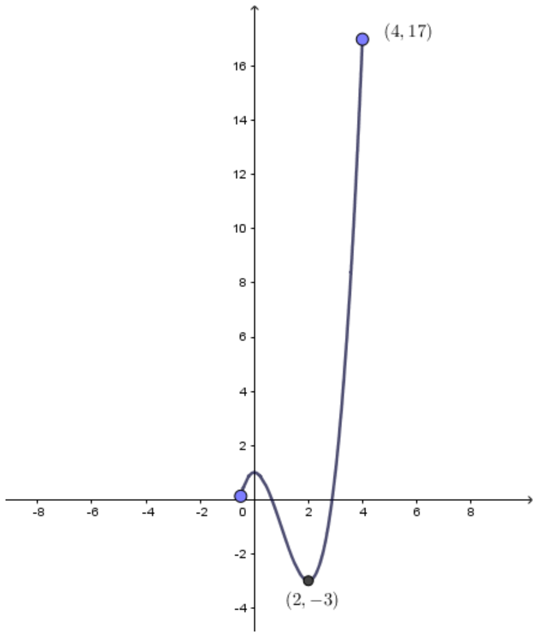

Figura 4 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$

Proposição 1.15. *Se $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável, então todo extremo local de f também é ponto crítico de f.*

Demonstração. Veja (NETO, 2015, p. 169). □

Devemos observar que a recíproca deste resultado é falsa, pois se $f'(c) = 0$ não significa que f assume valor máximo ou mínimo local em c, conforme vimos no Exemplo 1.10.

Podemos concluir que os valores extremos locais de uma função derivável na vizinhança de um ponto não são caracterizados pelos pontos que anulam a derivada mas, estes são os "candidatos" para pontos de extremos locais da função, ou seja, se existirem extremos locais estes acontecerão dentre aqueles pontos que anulam a derivada da função. Isto nos permite decidir se um ponto crítico é ponto de máximo local, mínimo local ou que a função não possui pontos nem de máximo, nem de mínimo local. Resumindo, para funções deriváveis em um intervalo (a, b), a anulação da derivada em um ponto c é condição necessária mas não suficiente para que c seja um extremo local de uma função.

Teorema 1.16. *(Teorema de Rolle) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Com base no Teorema de Rolle, enunciamos o Teorema do Valor Médio.

Teorema 1.17. *(Teorema do Valor Médio) Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em [a,b] e derivável em (a,b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

A grande importância do Teorema do Valor Médio reside no fato dele estabelecer uma relação importante entre a função e sua derivada. As demonstrações dos Teoremas 1.16 e 1.17 podem ser encontradas, respectivamente, em (LEITHOLD, 1994, p.231, 232).

Vejamos uma aplicação do resultado anterior.

Exemplo 1.18. Consideremos $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua e derivável em $\mathbb{R}$, satisfazendo as hipóteses do Teoremas 1.17. Em particular, para $a = 1$ e $b = 3$, vamos encontrar todos os números c no intervalo aberto $(1, 3)$ tais que $f'(c) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$. Temos que
$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$ e $f(1) = -7$ e $f(3) = -27$. Daí,
$\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{-27 - (-7)}{2} = -10.$
Equacionando $f'(c) = -10$, obtemos
$3c^2 - 10c - 3 = -10 \Leftrightarrow 3c^2 - 10c + 7 = 0 \Leftrightarrow (3c - 7)(c - 1) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{7}{3}$ ou $c = 1$.
Como 1 não está no intervalo aberto $(1, 3)$, o único valor possível para c é $\frac{7}{3}$.

Por consequência do Teorema 1.17 e da Proposição 1.15, podemos obter os intervalos de monotonicidade de uma função derivável. Temos que no ponto crítico de uma função a derivada é zero ou não existe, podemos supor que numa vizinhança a esquerda do ponto crítico de uma função o sinal da derivada seja positivo e numa vizinhança a direita o sinal seja negativo. Desta forma, que à esquerda do ponto crítico a função é crescente e para valores maiores que o ponto crítico a função se torna decrescente e o ponto crítico é o ponto de máximo local da função. Mas nem todo ponto crítico de uma função dá origem a um ponto de máximo ou mínimo da função. A partir daí, podemos enunciar o Teste da Primeira Derivada que nos diz se f tem ou não um máximo ou mínimo local em um ponto crítico.

Teorema 1.19. *(Teste da Primeira Derivada) Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponhamos que f' exista em todos os pontos do intervalo (a, b) contendo o número c, exceto possivelmente em c. Então,*
(i) se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo direito, e se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo esquerdo, então f tem um valor máximo local em c;
(ii) se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo direito, e se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo

c como extremo esquerdo, então f tem um valor mínimo local em c.

Demonstração. Veja (LEITHOLD, 1994, p. 238). □

O Teste da Primeira Derivada para extremos locais estabelece essencialmente que se f for contínua em c e o sinal algébrico de $f'(x)$ muda de positivo para negativo para valores de x maiores que c, então f tem um valor máximo local em c, e se $f'(x)$ muda o sinal de negativo para positivo para valores de x maiores que c, então f tem um valor mínimo local em c. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.20. Vamos encontrar os valores de máximos e mínimos locais da função $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$.

A derivada de $f(x)$ é dada por $f'(x) = 6x^2 - 3x - 3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $f'(x) = 0$, se $x_1 = -\frac{1}{2}$ ou $x_2 = 1$. Então, os pontos críticos de f são $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$. Observemos que $f'(x) > 0$ em $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ou $(1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ em $(-\frac{1}{2}, 1)$.

Pelo Teste da Primeira Derivada (Teorema 1.19), $x_1 = -\frac{1}{2}$ é um ponto de máximo local de f e $x_2 = 1$ é um ponto de mínimo local de f. O comportamento da função f é dado pela Figura 5.

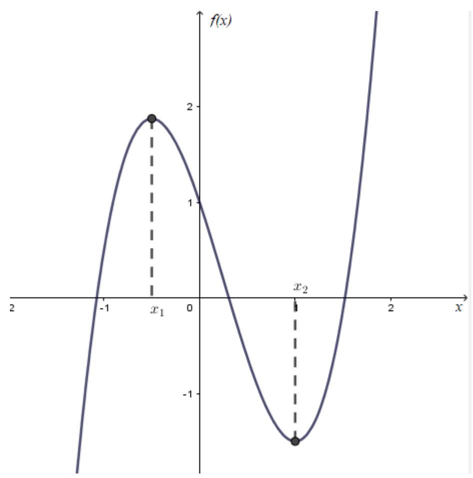

Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1, x \in \mathbb{R}$

Definição 1.21. *(Ponto de inflexão) O ponto $(c, f(c))$ é dito um ponto de inflexão do gráfico da função f se o gráfico de f tiver nesse ponto uma reta tangente e se existir um intervalo aberto I contendo c, com x em I e tal que*
(i) $f''(x) < 0$ se $x < c$ e $f''(x) > 0$ se $x > c$, ou
(ii) $f''(x) > 0$ se $x < c$ e $f''(x) < 0$ se $x > c$.

Em outras palavras, um ponto $I = (c, f(c))$ em uma curva $y = f(x)$ é um ponto de inflexão se f é contínua em c e a concavidade da curva muda em I. Por exemplo, na Figura 3, intuitivamente o ponto $(0, 0)$ é ponto de inflexão de f.

A segunda derivada de uma função nos ajuda a determinar os intervalos de concavidade. Olhando para o gráfico da Figura 3, indo da esquerda para a direita, observamos que a derivada f' é uma função decrescente no intervalo $(a, 0)$, portanto $f''(x)$ é negativa para x em $(a, 0)$. E f' é uma função crescente em $(0, b)$, e consequentemente, sua derivada $f''(x)$ é positiva para $x \in (0, a)$. Para a definição de côncava para baixo e côncava para cima, veja (LEITHOLD, 1994, p. 242).

Corolário 1.22. *Se a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c, $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f e $f''(c)$ existe, então $f''(c) = 0$.*

Demonstração. Veja (LEITHOLD, 1994, p. 245). □

Uma aplicação da segunda derivada é o teste a seguir para os valores de máximo e mínimo de uma função.

Teorema 1.23. *(Teste da Segunda Derivada) Seja c um ponto crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponhamos que f' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c. Se $f''(c)$ existe e,*
(i) se $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo local em c.
(ii) se $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo local em c.

Demonstração. Veja (LEITHOLD, 1994, p. 250). □

O Teste da Segunda Derivada é inconclusivo quando $f''(c) = 0$, pois esse ponto pode ser um ponto de máximo ou de mínimo local de f ou nenhum dos dois. Este teste também falha quando $f''(c)$ não existe. Em tais casos, o Teste da Primeira Derivada deve ser usado (Teorema 1.19).

Nos exemplos a seguir, utilizamos e vemos a eficácia dos Teoremas 1.19 e 1.23.

Exemplo 1.24. Se $f(x) = x^4$, então $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$. Assim, $f(0), f'(0)$ e $f''(0)$ são todas nulas. Aplicando o Teste da Primeira Derivada, f tem um valor mínimo local em 0. Um esboço do gráfico de f está na Figura 6.

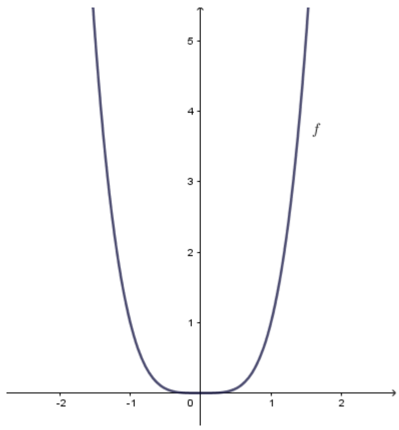

Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$

Exemplo 1.25. Se $h(x) = 2x^3$, então $h'(x) = 6x^2$ e $h''(x) = 12x$. Assim, $h(0), h'(0)$ e $h''(0)$ são todas nulas. A função h não tem extremo local em 0, pois se $x < 0$, $h(x) < h(0)$ e se $x > 0, h(x) > h(0)$. Este raciocínio se aplica também ao Exemplo 1.10. Um esboço do gráfico de f está na Figura 7.

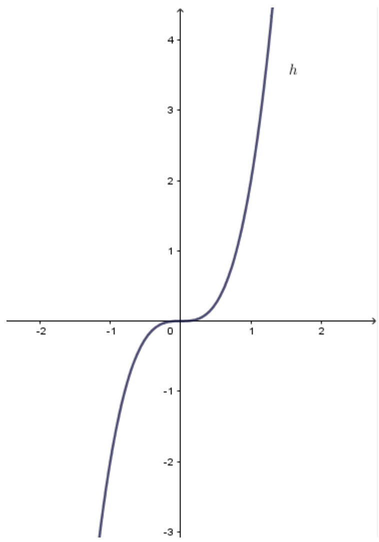

Figura 7 – Gráfico da função $h(x) = 2x^3, x \in \mathbb{R}$

Para obter um esboço do gráfico de uma função f, alguns passos podem nos auxiliar, a saber, determinamos o domínio da função f, achamos os interceptos y do gráfico, determinamos as raízes da equação se possível, aplicamos as propriedades desta seção, achamos a inclinação da reta tangente nos pontos de inflexão e verificamos a existência de possíveis assíntotas horizontais, verticais ou oblíquas. Para mais detalhes, veja (LEITHOLD, 1994, p.256). Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.26. Vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ determinando primeiro: os extremos locais de f, os pontos de inflexão do gráfico de f, os intervalos nos quais f é crescente e decrescente e os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e para baixo.

O domínio de f é o conjunto dos números reais e o intercepto y é 3.
Também $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e $f''(x) = 6x - 6$.
Equacionando $f'(x) = 0$, temos que $x = 0$ ou $x = 2$. Também de $f''(x) = 0$, obtemos $x = 1$. Considerando os pontos $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, bem como os intervalos entre esses valores de x, analisamos os seguintes casos:
se $x < 0$, $f'(x)$ é positiva e $f''(x)$ é negativa, portanto, para $x \in (-\infty, 0)$ f é crescente e o gráfico côncavo para baixo;
se $x = 0$: $f(0) = 3$, $f'(0) = 0$ e $f''(0)$ é negativa, portanto, f tem um valor máximo local em $x = 0$;
se $0 < x < 1$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são negativas, portanto, em $(0, 1)$ a função f é decrescente e o gráfico côncavo para baixo;
se $x = 1$, $f(1) = 1$, $f'(1) = -3$ e $f''(1) = 0$, portanto, f é decrescente e o gráfico tem um ponto de inflexão em $x = 1$;
se $1 < x < 2$, $f'(x)$ é negativa e $f''(x)$ é positiva, portanto, em $(1, 2)$ a função f é decrescente e o gráfico côncavo para cima;
se $x = 2$, $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$ e $f''(x)$ é positiva, portanto, f tem um valor mínimo local em $x = 2$ e
se $x > 2$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são positivas, portanto, em $(2, +\infty)$ a função f é crescente e o gráfico côncavo para cima.

Estas informações nos auxiliam na determinação do comportamento do gráfico de f, permitindo o esboço do mesmo, veja Figura 8.

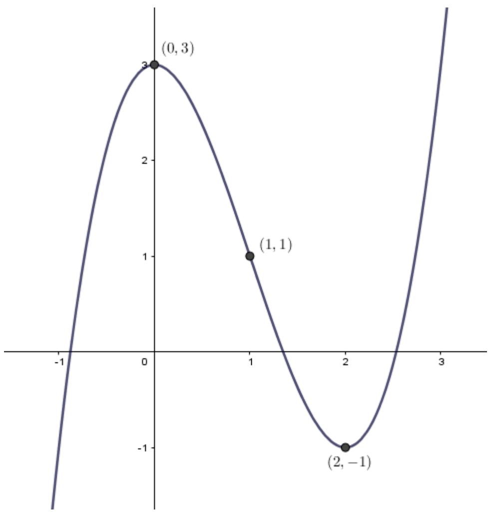

Figura 8 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3, x \in \mathbb{R}$

Em relação a multiplicidade das raízes de um polinômio apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.27. *Suponhamos que $p(x)$ é um polinômio com uma raiz de multiplicidade m em $x = r$, conforme Figura 9, onde $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$.*
(a) Se m for par, então o gráfico de $y = p(x)$ é tangente ao eixo x em $x = r$, mas não cruza o eixo x nesse ponto nem tem um ponto de inflexão nesse ponto.
(b) Se m for ímpar e o maior do que 1, então o gráfico é tangente ao eixo x em $x = r$, cruza o eixo x nesse ponto e tem um ponto de inflexão nesse ponto.
(c) Se $m = 1$ (de modo que a raiz é simples), então o gráfico não é tangente ao eixo s em $x = r$, cruza o eixo x nesse ponto e pode ou não ter um ponto de inflexão nesse ponto.

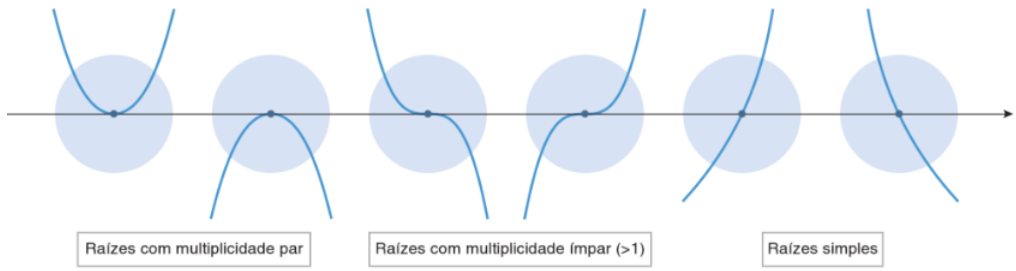

Figura 9 – Multiplicidade de Raízes. Fonte: (ANTON, BIVENS E DAVIS, 2014, p. 249)

1.2 Transformações de funções

Nesta seção, apresentamos as definições e propriedades de transformações de funções, na qual, juntamente com os exemplos abordados, são fundamentais para os resultados discutidos posteriormente. O conteúdo desta seção possui como referências principais (LIMA, 2002) e (LOPES, 2018).

Definição 1.28. *Uma transformação T do plano $\mathbb{R}^2$ é uma função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano.*

Existem vários tipos de transformações do plano. Mas, nessa seção, damos ênfase às translações (horizontal e vertical), rotação e simetria rotacional.

Com o auxílio de conhecimentos de transformações, podemos obter diversos outros gráficos a partir dos originais, podendo ser utilizadas no estudo de funções mais complexas.

Nesta seção, denotamos por $||.||$ a norma em $\mathbb{R}^2$. Relembramos que a norma de um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, denotada por $||v||$, define-se como $||v|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definição 1.29. *(Isometria) Dizemos que uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria se*

$$||(T(P) - T(Q)|| = ||P - Q||,$$

para quaisquer pontos P e Q de $\mathbb{R}^2$.

Isometrias são movimentos do plano que preservam distâncias, ou seja, são transformações que mudam a posição dos objetos preservando suas características, tais como ângulos, comprimento dos lados, distância, tamanhos, dando origem a figuras congruentes. As isometrias mais simples são as translações.

Definição 1.30. *(Translação) Translação é a correspondência na qual todos os pontos do plano se deslocam, segundo um comprimento, numa mesma direção, sentido e preservando distância.*

Na simetria de translação, a figura desliza sobre uma reta, mantendo-se inalterada. Em particular, uma figura no plano é preservada na sua forma original, após uma translação.

Proposição 1.31. *(Translação Vertical) Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere b um número real e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) + b$. A imagem do gráfico de f por meio de uma translação vertical é o gráfico de g e $Img = Imf + b$.*

Demonstração. Veja (LOPES, 2018, p. 36). □

Na prática, consideremos uma função f conforme Proposição 1.31 acima e supondo $b > 0$, a fim de obter o gráfico de g, deslocamos o gráfico de f em b unidades para cima. Se $b < 0$, deslocamos o gráfico de f em b unidades para baixo. Conforme ilustramos na Figura 10, o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (x^3 - 3x^2 + 3) - 4$ foi obtido a partir do gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, deslocando gráfico de f 4 unidades no eixo y.

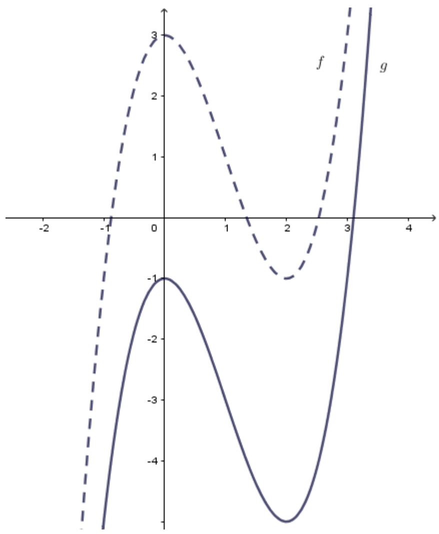

Figura 10 – Translação Vertical de uma função.

Proposição 1.32. *(Translação Horizontal) Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Consideremos um número real a e $g : X + a \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x - a)$. A imagem do gráfico de f por meio de uma translação horizontal é o gráfico de g e $Img = Imf$.*

Demonstração. Veja (LOPES, 2018, p. 39). □

Na prática, consideremos uma função f conforme proposto acima e supondo $a > 0$, a fim de obter o gráfico de g definida por $g(x) = f(x - a)$ deslocamos o gráfico da f em a unidades para a direita. Se $a < 0$, deslocamos o gráfico em a unidades para a esquerda. Conforme ilustramos na Figura 11, o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (x - 4)^3 - 3(x - 4)^2 + 3$ foi obtido a partir do gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, deslocando 4 unidades para a direita.

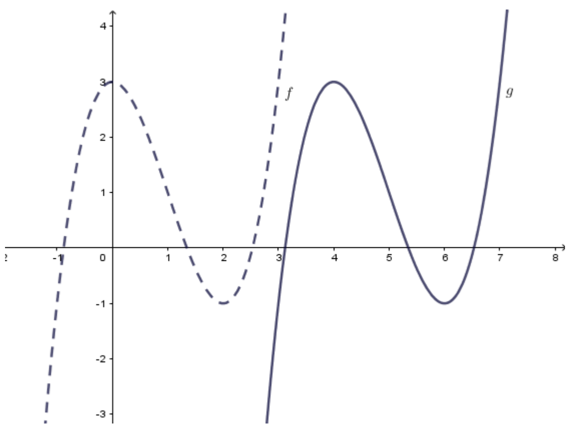

Figura 11 – Translação Horizontal de uma função.

Definição 1.33. *(Rotação) Uma rotação de centro em O e amplitude α é uma isometria que ao ponto O faz corresponder o próprio ponto O e a cada ponto P, diferente de O, faz corresponder um ponto P' tal que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e $P\hat{O}P = \alpha$.*

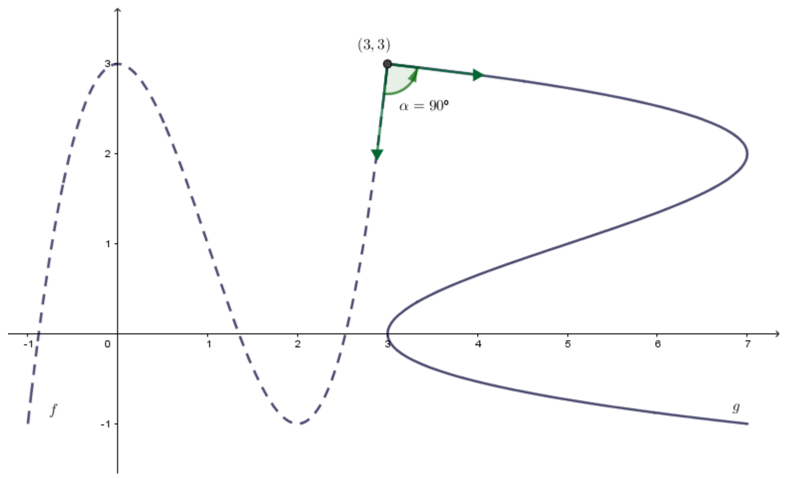

Figura 12 – Rotação de uma curva com amplitude $\alpha = 90º$.

De acordo com a Figura 12, a curva g foi obtida a partir do gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, considerando uma rotação de centro no ponto de coordenadas $(3, 3)$ e amplitude $\alpha = 90º$.

Definição 1.34. *(Simetria rotacional ou simetria de rotação) Uma figura tem uma simetria rotacional ou de rotação de centro O e medida de amplitude α, se o resultado de transformação da figura pela rotação de centro O e ângulo α é a própria figura, isto é, quando realizamos uma rotação em torno de um ponto e obtemos a mesma figura na nova posição.*

De um modo geral, um objeto tem simetria rotacional quando possui a mesma aparência depois de um determinado montante de rotações.

Neste trabalho, para a simetria de rotação, usamos amplitude $\alpha = 180º$.

Exemplo 1.35. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Temos que f tem simetria rotacional em torno do ponto $I = (1, 1)$. De fato, ao realizar uma rotação de amplitude $\alpha = 180º$ em torno do ponto $I = (1, 1)$ obtemos a função g com as mesmas características da f, conforme Figura 13.

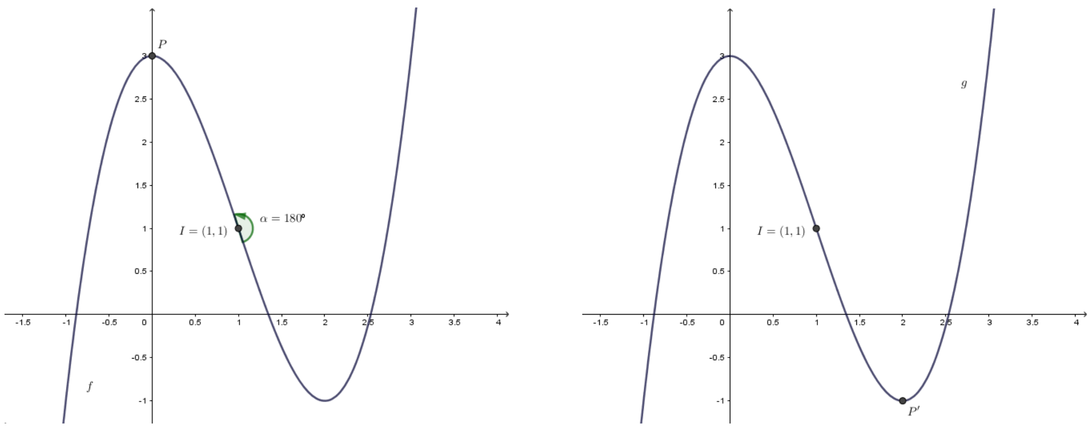

Figura 13 – Simetria rotacional de uma função.

Uma propriedade importante de algumas funções é a paridade, que se refere ao fato de uma função ser par ou ímpar. A seguir, relacionamos paridade de uma função com relação a sua simetria rotacional.

Definição 1.36. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função par se, para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(-x) = f(x).$$

Definição 1.37. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função ímpar se, para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(-x) = -f(x).$$

Exemplo 1.38. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 2x$ é uma função ímpar, pois

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 2(-x) = -2x^3 + 2x = -(2x^3 - 2x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.39. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 + 1$ não é uma função ímpar. De fato, para $x = 1$ temos
$f(-1) = (-1)^4 + 1 = 2$, e $-f(1) = -(1^4 + 1) = -2$.
Portanto, a $f(-1) \neq -f(1)$. Consequentemente, f não é ímpar. No entanto, $f(-x) = (-x)^4 + 1 = x^4 + 1 = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é par.

Do ponto de vista geométrico, o gráfico de uma função ímpar f é simétrico em relação à origem. Se for possível a construção do gráfico de f, para $x \geq 0$, podemos obter o restante do gráfico girando o gráfico construído em 180º em torno da origem, veja Figura 14.

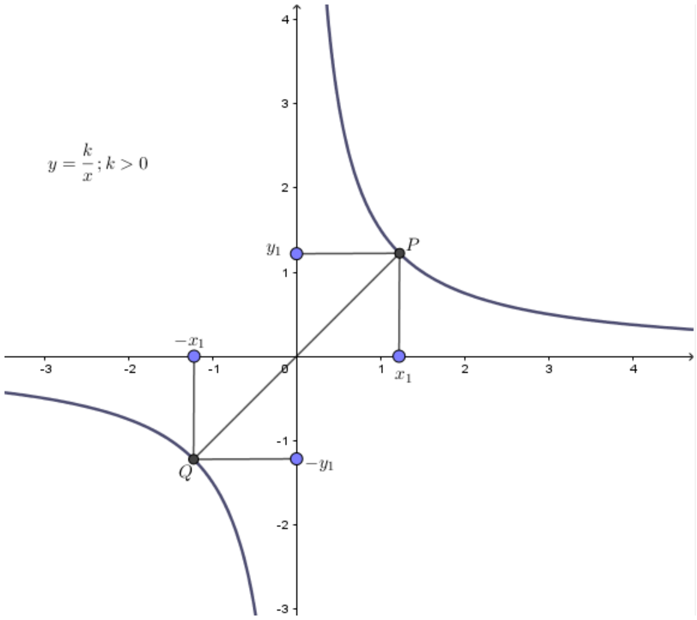

Figura 14 – Gráfico com rotação de 180 graus em torno da origem

Proposição 1.40. *Toda função ímpar tem simetria rotacional em torno do ponto* $O = (0, 0)$ *com medida de amplitude* $\alpha = 180^o$*.*

Demonstração. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar, pela Definição 1.37, $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e b a imagem de a pela f. Logo,

$$f(a) = b \text{ e } f(-a) = -f(a) = -b.$$

Ou melhor, se $P = (a, b)$ pertence ao gráfico de f, então o ponto $Q = (-a, -b)$ também pertence, isto significa que ao girar a curva em torno do ponto $O = (0, 0)$ em um ângulo $\alpha = 180^o$, a nova curva terá a mesma aparência da original. Portanto, f tem simetria rotacional em torno do ponto $O = (0, 0)$ com amplitude $\alpha = 180^o$. $\square$

2 Função cúbica ou de terceiro grau

Neste capítulo, usamos dos conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral e fizemos um estudo aprofundado das funções cúbicas. Apresentamos o gráfico e as raízes da função cúbica e estudamos seu comportamento. As referências principais deste capítulo são (SOUZA, 2013), (LIMA, 1987) e (LEITHOLD, 1994).

Definição 2.1. *Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de terceiro grau ou uma função cúbica, quando para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{2.1}$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Proposição 2.2. *Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, uma função cúbica. Então, $f(x)$ é ímpar se, e somente se, $b = d = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $f(x)$ é ímpar então $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = -[a(-x^3) + b(-x)^2 + c(-x) + d] = ax^3 - bx^2 + cx - d.$$

Portanto, pela igualdade de polinômios, f ímpar implica que $b = d = 0$. Agora, seja $f(x)$ uma função cúbica com que $b = d = 0$, logo $f(x) = ax^3 + cx$. Observamos que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = a(-x)^3 + c(-x) = -[ax^3 + cx] = -f(x).$$

Portanto, f é ímpar, para todo $x \in \mathbb{R}$. □

2.1 Máximos e mínimos da função cúbica

Nesta seção, mostramos que uma função cúbica tem ponto de inflexão $I = (m, n)$ se a transformarmos em uma nova função, cujo ponto de inflexão do gráfico coincida com a origem do plano e esta nova função seja ímpar. Este primeiro passo nos permite examinar o comportamento de uma função cúbica considerando uma função relacionada que seja bem comportada, lembrando que usamos transformações isométricas, preservando congruências. Como base para esta seção, usamos como referência (DE VILLIERS, 2004).

Consideremos uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, conforme Definição 2.1. Segundo o Corolário 1.19, os candidatos aos valores de máximo e mínimo locais de f são dados a partir da derivada de f. Desta forma,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

e, fazendo $f'(x) = 0$ determinamos os pontos críticos de f, a saber

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}. \tag{2.2}$$

Assim, de (2.2),

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

são os candidatos aos pontos de máximo e mínimo locais de f.

Sabendo que estes são dois números reais distintos, podemos calcular o ponto de inflexão da f e verificar sua concavidade e, de acordo com o Corolário 1.23, usar o Teste da Segunda Derivada para determinar qual, x_1 ou x_2 nos dá um máximo local e qual valor fornece um mínimo local de f. Observemos que

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

e fazendo $f''(x) = 0$, temos

$$x = \frac{-b}{3a}. \tag{2.3}$$

Esta é a abscissa do ponto I de inflexão do gráfico de f, ou melhor, onde o gráfico de f muda sua concavidade.

Para $b^2 - 3ac > 0$, podemos concluir de (2.2) e (2.3) que se,
$a > 0$,

$$f''(x_1) = 6a\frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} + 2b = -2\sqrt{b^2 - 3ac} < 0$$

e

$$f''(x_2) = 6a\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} + 2b = 2\sqrt{b^2 - 3ac} > 0.$$

Portanto, f tem um máximo local em x_1 e um mínimo local em x_2. Também se
$a < 0$, $f''(x_1) > 0$ e $f''(x_2) < 0$, portanto, f tem um mínimo local em x_1 e um máximo local em x_2. A Figura 15 mostra o caso para $a < 0$.

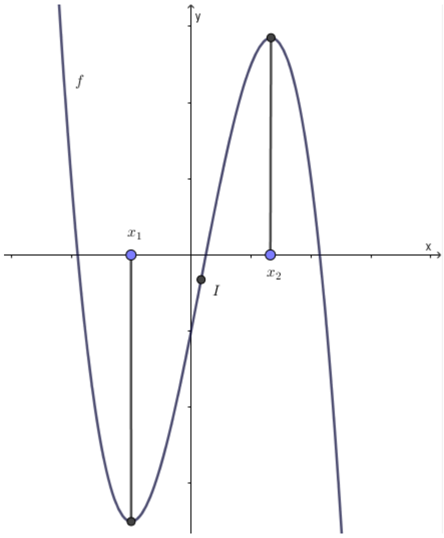

Figura 15 – Gráfico da função cúbica $y = f(x), x \in \mathbb{R}$

Proposição 2.3. *Seja f uma função cúbica. Então $I = (m, n)$ é o ponto de inflexão de f se, e somente se,*

$$g(x) = f(x + m) - n \tag{2.4}$$

é uma função ímpar. Além disso, esse par de transformações move o ponto I de modo que ele coincida com a origem do plano, conforme Figura 16.

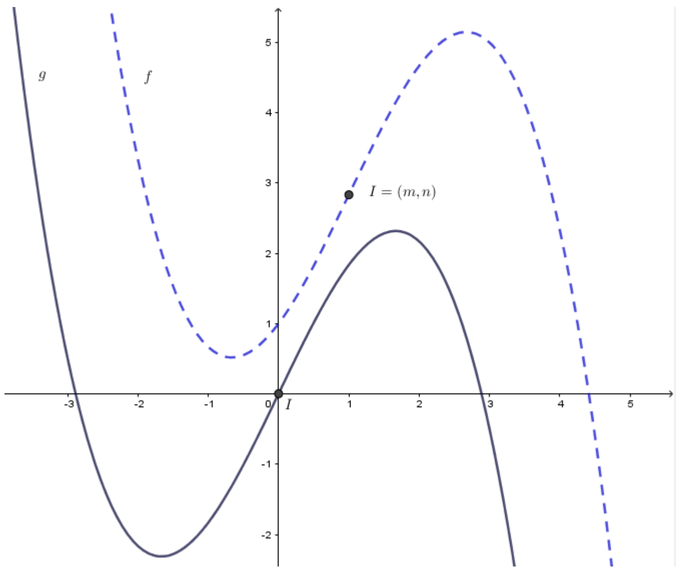

Figura 16 – Gráfico da $g(x) = f(x + m) - n$

Demonstração. Sejam $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ uma função cúbica (veja Definição 2.1) e $I = (m, n)$, com $m, n \in \mathbb{R}$, seu ponto de inflexão. Vamos mostrar que $g(x) = f(x+m)-n$ é ímpar. Pela equação (2.3), como $I = (m, n)$ é o ponto de inflexão da f, temos que

$m = -\frac{b}{3a}$ e $n = f(m) = a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b}{3a}\right) + d$. Assim,

$$\begin{aligned} g(x) &= a(x+m)^3 + b(x+m)^2 + c(x+m) + d - (am^3 + bm^2 + cm + d) \\ &= a(x^3 + 3x^2m + 3xm^2 + m^3) + b(x^2 + 2xm + m^2) + c(x+m) - am^3 - bm^2 - cm \\ &= ax^3 + 3ax^2m + 3axm^2 + bx^2 + 2bxm + cx \\ &= ax^3 + (3am + b)x^2 + (3am^2 + 2bm + c)x. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Conforme Proposição 2.2, g é ímpar se, e somente se, g não tiver o termo constante e o coeficiente de x^2 for zero. Substituindo $m = \frac{-b}{3a}$ na equação (2.5), temos que $3am + b = 0$. Portanto, $g(x) = f(x+m) - n$ é ímpar.

Reciprocamente, suponhamos que $g(x) = f(x+m) - n$ é uma função ímpar, vamos mostrar que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem ponto de inflexão $I = (m, n)$. Pela equação (2.5),
$g(-x) = -ax^3 + (3am + b)x^2 - (3am^2 + 2bm + c)x$ e
$-g(x) = -ax^3 - (3am + b)x^2 - (3am^2 + 2bm + c)x$.
Mas, g ímpar implica que $3am + b = -3am - b$, donde $m = \dfrac{-b}{3a}$. De (2.3), segue que $I = (\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$ é o ponto de inflexão de f, como queríamos demonstrar. $\square$

Notemos que a função g dada por (2.4) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} g(x) &= ax^3 + (3am + b)x^2 + (3am^2 + 2bm + c)x \\ &= ax^3 + \left(3a\left(\frac{-b}{3a}\right) + b\right)x^2 + \left(3a\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + 2b\left(\frac{-b}{3a}\right) + c\right)x \\ &= ax^3 + \left(3a\left(\frac{b^2}{(3a)(3a)}\right) - \frac{2b^2}{3a} + \frac{3ac}{3a}\right)x \\ &= ax^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a}\right)x. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2 Forma reduzida da equação cúbica

Nesta seção, apresentamos a forma reduzida da equação cúbica. É importante ressaltar que o gráfico da função cúbica na forma reduzida é uma translação do gráfico da função cúbica na forma geral. As equações do terceiro grau na forma reduzida nos auxiliam na resolução e na construção do esboço do gráfico de uma função cúbica na forma geral.

Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ uma função cúbica e consideremos a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{2.7}$$

Dividindo todos os termos de (2.7) por a, obtemos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0. \tag{2.8}$$

Em (2.8), considerando $\frac{b}{a} = A$, $\frac{c}{a} = B$, $\frac{d}{a} = C$, temos

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0. \tag{2.9}$$

A equação (2.9) tem as mesmas raízes que a equação cúbica em (2.7). Vamos agora, transformar (2.9) em uma equação cúbica de forma que esta não tenha o termo de segundo grau, para tanto, façamos, $x = y - \frac{A}{3}$, daí

$$\begin{aligned} 0 = x^3 + Ax^2 + Bx + C &= \left(y - \frac{A}{3}\right)^3 + A\left(y - \frac{A}{3}\right)^2 + B\left(y - \frac{A}{3}\right) + C \\ &= y^3 - \frac{A}{3}y^2 - \frac{2A}{3}y^2 - \frac{A^2}{3}y - \frac{A^3}{27} + Ay^2 + \frac{A^3}{9} + By - \frac{AB}{3} + C \\ &= y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)y + \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C = 0. \end{aligned}$$

Sendo $p = B - \frac{A^2}{3}$ e $q = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C$, obtemos a equação reduzida desprovida de termo do segundo grau

$$y^3 + py + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Observemos que, como fizemos $x = y - \frac{A}{3}$, as raízes x_i da equação (2.9), na sua forma original, são obtidas das raízes y_i da equação reduzida (2.10), com $i = 1, 2, 3$. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.4. O gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 2$ é mostrado na Figura 17. Dividindo a equação $2x^3 - 4x^2 - 2x + 2 = 0$ por 2, obtemos a nova função $k(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ cujas raízes são as mesmas da função original. Fazendo a troca de variável $x = y + \frac{2}{3}$, obtemos

$$y^3 + \left(-\frac{7}{3}\right)y - \left(\frac{7}{27}\right) = 0.$$

Esta é a equação da função f dada na forma reduzida. Assim, $r(x) = x^3 + (-\frac{7}{3})x - (\frac{7}{27})$ é uma translação do gráfico da função k, observe Figura 17.

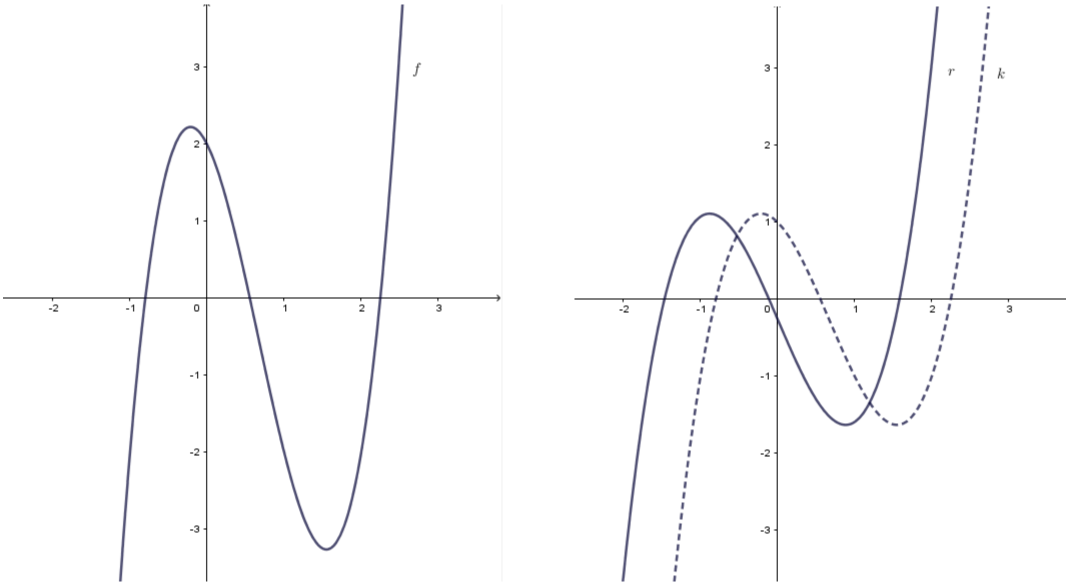

Figura 17 – Gráfico da função na forma original e reduzida

Observemos que, considerando a equação (2.7), dividindo ambos os lados da igualdade por a e fazendo $b = d = 0$, obtemos a equação da função f na forma reduzida $x^3 + px = 0$, com $p = \dfrac{c}{a}$ e $q = 0$. Logo, se $b = d = 0$, f é ímpar e o seu gráfico tem um único ponto de inflexão em $I = (0, 0)$, pois q é zero, conforme Proposição 2.2.

Também, dividindo (2.6) por a, temos

$$0 = x^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{(\frac{b}{a})^2}{3}\right)x. \tag{2.11}$$

Logo, a equação (2.11) é a forma reduzida $x^3 + px = 0$ da função f, com $p = B - \frac{A^2}{3} = \left(\frac{c}{a} - \frac{(\frac{b}{a})^2}{3}\right)$ e $q = 0$.

Exemplo 2.5. Consideremos a função cúbica $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ cujo gráfico é mostrado na Figura 18.

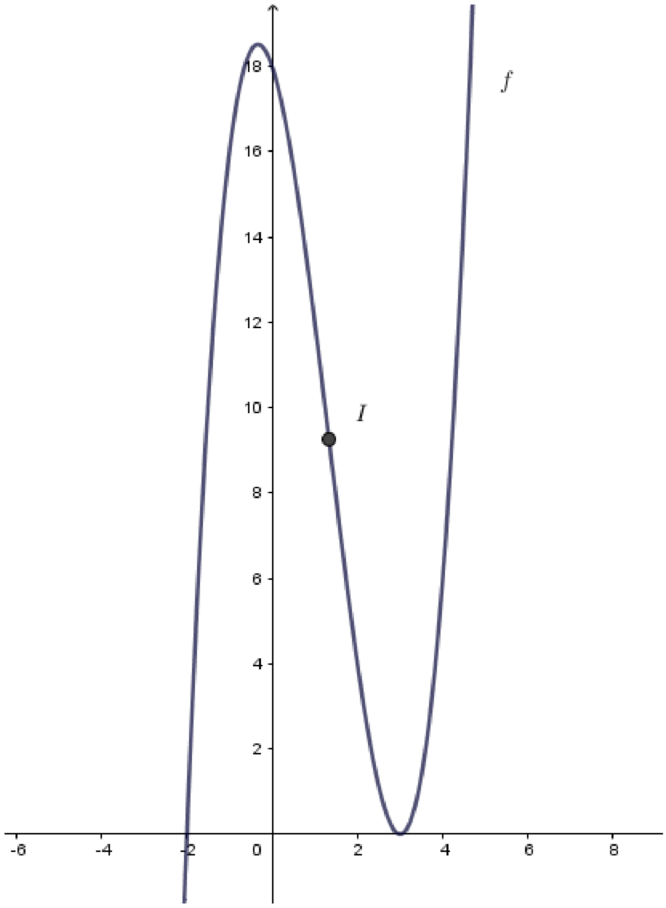

Figura 18 – Gráfico da função cúbica $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

Intuitivamente, podemos visualizar um ponto de inflexão, aproximadamente, entre $x = 1$ e $x = 2$. No entanto, calculando o ponto de inflexão da f, temos $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$ e $f"(x) = 6x - 8$. Então, $f"(x) = 0$ se, e somente se, $x = \frac{4}{3}$. Substituindo o valor de x na função f, o ponto de inflexão do gráfico de f é dado por $I = \left(\frac{-b}{3a}, f\left(\frac{-b}{3a}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{250}{27}\right)$. Transladando a função $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ para a origem e usando (2.4), temos

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f\left(x + \frac{4}{3}\right) - \frac{250}{27} \\
&= \left(x + \frac{4}{3}\right)^3 - 4\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - 3\left(x + \frac{4}{3}\right) + 18 - \frac{250}{27} \\
&= \left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{59}{9}\right) + \frac{236}{27} \\
&= x^3 - \frac{25}{3}x.
\end{aligned}
$$

Então, g é uma função ímpar, veja Proposição 2.2, e g é a forma reduzida da função cúbica f dada.

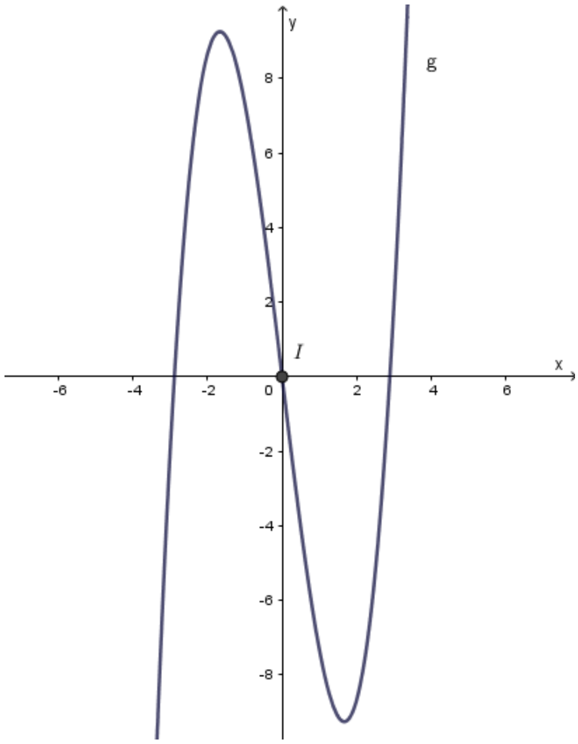

Figura 19 – Gráfico da função $g(x) = f(x+m) - n = x^3 - \dfrac{25}{3}x$

Pela Figura 19, observamos que o gráfico de g é a translação do gráfico de f. A translação é uma transformação isométrica, ou seja, o gráfico da g é geometricamente congruente com o gráfico de f e preserva as mesmas características da função original.

A equação reduzida possui as mesmas propriedades da função original e possibilita realizar alguns cálculos com mais facilidades, como exemplo o cálculo das raízes da função, a existência e o cálculo de pontos de extremos locais, entre outros.

Proposição 2.6. *Seja f uma função cúbica e $r(x) = x^3 + px + q$, com $x^3 + px + q = 0$ a equação reduzida de f, então f terá pontos de extremos locais se, e somente se, $p < 0$.*

Demonstração. Se $p \geq 0$, $r'(x) = 3x^2 + p \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e $x \neq 0$. Então r é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, possui apenas uma única raiz e, portanto, f não tem pontos de máximo local e nem de mínimo local.

Se $p < 0$, então da Definição 1.11

$$x_1 = -\sqrt{\frac{|p|}{3}} \text{ e } x_2 = +\sqrt{\frac{|p|}{3}}$$

são os pontos críticos de r e, como $r''(x_1) = -6\sqrt{\frac{|p|}{3}} < 0$ e $r''(x_2) = 6\sqrt{\frac{|p|}{3}} > 0$, então x_1, x_2 são pontos de extremos locais de r e, portanto, f também possuirá pontos de extremos locais. $\square$

2.3 Gráfico das funções cúbicas na forma reduzida

Consideremos uma função cúbica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 + px + q, \tag{2.12}$$

onde $p, q \in \mathbb{R}$. Façamos um estudo do comportamento do gráfico da função f dada por (2.12).

2.3.1 Intervalo de crescimento da função

De (2.12) e da Proposição 2.6, temos que $f'(x) = 3x^2 + p$ e se $p \geq 0$, f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e possui apenas uma única raiz. Por outro lado, se $p < 0$, os pontos críticos de f são

$$x_1 = -\sqrt{\frac{|p|}{3}} \text{ e } x_2 = +\sqrt{\frac{|p|}{3}}.$$

De acordo com o Teorema 1.19, podemos concluir que f é crescente nos intervalos abertos $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)$ e $\left(+\sqrt{\frac{|p|}{3}}, +\infty\right)$ e f é decrescente no intervalo $\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}, \sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)$, para $p < 0$.

2.3.2 Pontos de máximo e mínimo locais

De acordo com a Seção 2.3.1, como f é estritamente crescente para $p \geq 0$, não existem pontos de máximo locais e nem pontos de mínimo locais em todo seu domínio. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.7. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 2$. De (2.12), temos $p = 0$. Então, f é estritamente crescente e, portanto, f não tem pontos de máximo e nem de mínimo locais, observemos a Figura 20.

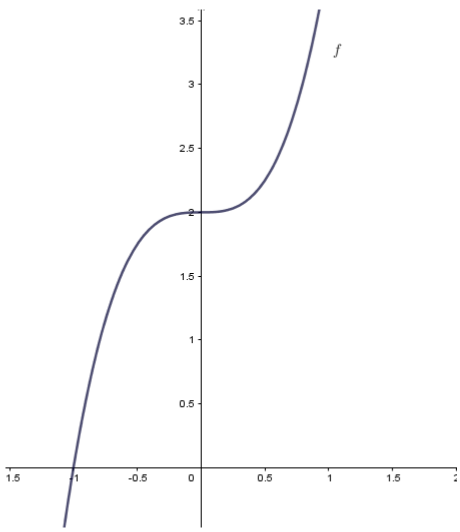

Figura 20 – Gráfico da função $f(x) = 2x^3 + 2, x \in \mathbb{R}$

Agora, para $p < 0$, façamos a segunda derivada de $f(x) = x^3 + px + q$. Então $f''(x) = 6x$. Avaliando $f''(x)$ em $x_1 = -\sqrt{\frac{|p|}{3}}$, obtemos

$$f''(x_1) = -6\sqrt{\frac{|p|}{3}} < 0$$

e, portanto, x_1 é um ponto de máximo local de f. Avaliando, agora, $f''(x)$ em $x_2 = +\sqrt{\frac{|p|}{3}}$, obtemos

$$f''(x_2) = 6\sqrt{\frac{|p|}{3}} > 0,$$

logo x_2 é um ponto de mínimo local de f.

2.3.3 Pontos de inflexão

Os possíveis pontos de inflexão da função cúbica f dada por (2.12) são obtidos através de sua derivada segunda, ou melhor, onde $f''(x) = 0$. Logo, $f''(x) = 6x = 0$ se $x = 0$. Então há um único ponto de inflexão, que é o ponto com abscissa $x = 0$. Neste ponto, $f(0) = 0^3 + 0p + q = q$, portanto, $I = (0, q)$ é o único ponto de inflexão de f.

Ao escrever a equação cúbica na forma reduzida, estamos transladando o gráfico da função de forma que o ponto de inflexão I tenha abscissa $x = 0$.

Pelo Corolário 1.23, podemos verificar em qual intervalo da reta a função tem concavidade voltada para cima e onde tem concavidade voltada para baixo. Fazendo um estudo do sinal da função $f''(x) = 6x$, percebemos que para $x < 0$, no intervalo $(-\infty, 0)$, ou seja, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo, e em $(0, +\infty)$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

2.3.4 Comportamento no infinito

Façamos o estudo do comportamento da função cúbica dada por (2.12) quando x tende ao infinito. Lembramos que isto se faz necessário para a construção do seu gráfico. Mais especificamente, temos

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 + px + q) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = +\infty.$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 + px + q) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = -\infty.$$

Vamos, também, analisar o caso em que o coeficiente do termo de maior grau é negativo, temos

$$\lim_{x\to+\infty}(-x^3 + px + q) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = -\infty.$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 + px + q) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = +\infty.$$

Observemos que se tratando de uma função polinomial não há $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ para os quais
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$.
Logo, o gráfico de f não possui assíntotas verticais e nem horizontais.

Como $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = +\infty$, o gráfico de f não apresenta assíntotas oblíquas.

Para mais detalhes sobre assíntotas, veja (LEITHOLD, 1994. p. 86 e 94).

2.3.5 Traçado do gráfico

A partir da informações obtidas nas subseções anteriores, vamos fazer o traçado do gráfico da função cúbica $f(x) = x^3 + px + q$. Iniciamos marcando no plano cartesiano o ponto de inflexão $I = (0, q)$. Analisando o comportamento de p, temos que o considerar dois casos.

1º Caso: $p > 0$

Para $p > 0$, conforme as subseções anteriores, a função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, não tem máximos ou mínimos locais çe $I = (0, q)$ é o único ponto de inflexão, ainda, neste ponto de inflexão, a derivada é sempre positiva, ou seja, $f'(0) > 0$. Logo, o gráfico da f, independente do eixo x, é uma curva conforme Figura 21.

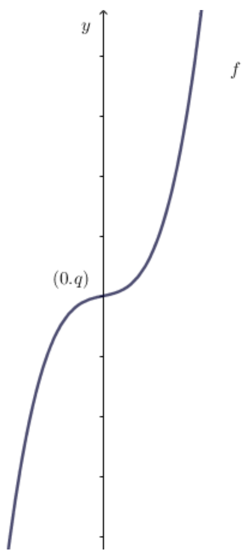

Figura 21 – Gráfico da função $y = x^3 + px + q, p > 0$

2º Caso: $p < 0$

Para $p < 0$, como visto na Subseção 2.3.2, há pontos de máximo e mínimo locais, que são as abscissas dos pontos do gráfico de f cujas coordenadas são, respectivamente

$\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}, f\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}, f\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)\right)$. Pela Seção 2.3.3, o ponto de inflexão I tem coordenadas $(0, q)$. Além disso, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo quando $x < 0$ e concavidade voltada para cima quando $x > 0$. Reunindo as informações já obtidas, e sem traçar o eixo horizontal, temos a Figura 22.

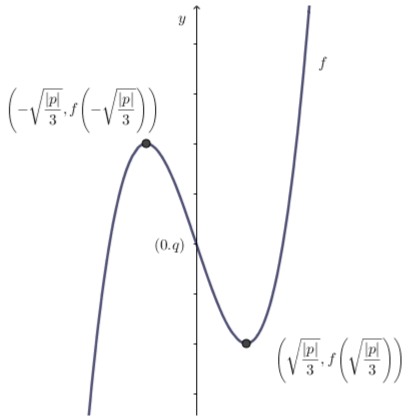

Figura 22 – Gráfico da função $y = x^3 + px + q, p < 0$

Independentemente dos valores que possam ter os números reais q e p, desde que $p < 0$, é importante observar que a forma da curva, e as coordenadas dos pontos assinalados são como na Figura 22. Isto nos permite compreender que a mudança de variável que produziu a forma reduzida da equação de grau três transladou o eixo y para que ele passasse pelo ponto onde a curva muda de concavidade, ou melhor, o ponto cuja abscissa é o ponto de inflexão da função f.

3º Caso: $p = 0$

Como ocorre no caso para $p < 0$, também quando $p = 0$, a função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, não tem máximos ou mínimos locais, e tem $I = (0, q)$ como único ponto de inflexão de seu gráfico. Também em seu ponto de inflexão, a derivada $f'(0) = p$. Portanto, o gráfico da função cúbica f é uma curva conforme Figura 23.

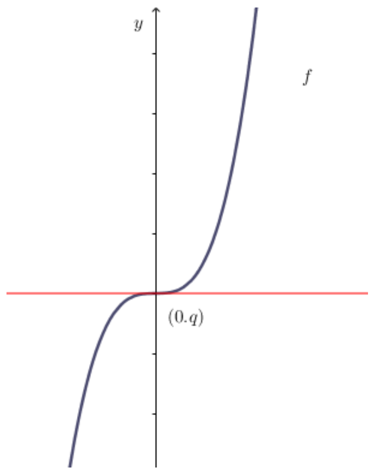

Figura 23 – Gráfico da função $y = x^3 + px + q, p = 0$

2.4 Raízes da função cúbica

O método que resolvia as equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$ foi descoberto em 1.515 por Scipione del Ferro (1465 - 1526), professor de matemática da Universidade de Bolonha, que antes de morrer o revelou aos discípulos Antônio Maria Fior e Annibale Della Nave. Por volta de 1535, Nicolo Fontana (1500 - 1557), conhecido pelo apelido de Tartaglia (gago, em italiano), anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 + q = 0$. Naquela época era frequente o lançamento de desafios entre os sábios. Fior desafiou Tartaglia para uma disputa matemática envolvendo a resolução de equações cúbicas, faltando poucos dias para a disputa Tartaglia conseguiu resolver também a equação da forma $x^3 + px + q = 0$. Como Tartaglia sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente. A vitória de Tartaglia, muito divulgada, foi do conhecimento do médico e professor Girolano Cardano (1501 - 1576), que auto definia-se como inescrupuloso. Logo, Cardano, conseguiu atrair Tartaglia para lhe ensinar a regra de resolução recém encontrada, sob o juramento de jamais publicá-la. Conforme qualquer um poderia prever, Cardano quebrou todas as promessas e juramentos e, em 1545, fez publicar na *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, o maior compêndio algébrico da época, mais conhecida por *Ars Magna*, a fórmula revelada por Tartaglia.

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre as raízes da função cúbica.

É um fato conhecido que toda função polinomial de grau ímpar tem ao menos uma raiz real, o que é uma consequência do Teorema 1.17 cuja demonstração podemos verificar em (LIMA, 2013, p.432). Em particular, a função cúbica possui ao menos uma raiz real. Ainda mais, utilizando a teoria de números complexos, as funções cúbicas são totalmente analisadas e podem ser resumidas no seguinte resultado que enunciamos sem demonstração, conforme (LOPES, 2018, p. 26).

Teorema 2.8. *Consideremos a função cúbica f definida por (2.1) e sua equação reduzida definida em (2.10) com* $p = \dfrac{-b^2+3ac}{3a^2}$, $q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$ *e seja* $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$.
(1) Se $D = 0$ a função cúbica possui no máximo duas raízes. Mais precisamente,

(i) Se $p = q = 0$ a função cúbica possui uma única raiz dada por $x = \dfrac{-b}{3a}$;

(ii) Se $pq \neq 0$ a função cúbica possui duas raízes dadas por $x_1 = \dfrac{3q}{p} - \dfrac{b}{3a}$ *e* $x_2 = \dfrac{-3q}{2p} - \dfrac{-b}{3a}$.

(2) Se $D > 0$ a função cúbica possui uma única raiz dada por $x = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{D}} - \dfrac{b}{3a}$;

(3) Se $D < 0$ a função cúbica possui três raízes dadas por $x_1 = 2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}cos(\dfrac{\theta}{3}) - \dfrac{b}{3a}$, $x_2 = 2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}cos(\dfrac{\theta+2\pi}{3}) - \dfrac{b}{3a}$ *e* $x_3 = 2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}cos(\dfrac{\theta+4\pi}{3}) - \dfrac{b}{3a}$, *onde* $\theta = arccos\dfrac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$.

O número real D é chamado discriminante da função cúbica f. A fórmula do item (2), do Teorema 2.8, é chamada de *Fórmula de Cardano* e, em geral, ela é sempre válida toda vez que o discriminante D é maior ou igual a zero.

Proposição 2.9. *Consideremos a função cúbica f dada por (2.12). Para $p \geq 0$, independentemente da multiplicidade, a equação $x^3 + px + q = 0$ tem uma única raiz real.*

Demonstração. A existência de uma raiz real de uma função cúbica é garantida pelo Teorema 2.8. Suponhamos que essa raiz não seja única, isto é, existem $x_1 < x_2$ raízes da equação $x^3 + px + q = 0$ no qual $p > 0$. Então $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pelo Teorema 1.16, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = 0$. Mas $f'(x) = 3x^2 + p$ e $p > 0$. Logo $f'(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o que é uma contradição. □

Observando o gráfico da função cúbica reduzida, podemos concluir que o número e a multiplicidade das raízes reais da equação $x^3 + px + q = 0$ serão determinados pela combinação dos seguintes fatores:
- pela curva do gráfico de f, a qual depende do sinal de p, $p > 0, p < 0$ ou $p = 0$.
- como o gráfico da função f intercepta o eixo x, traçado perpendicularmente ao eixo y.

Resumidamente, quando $p > 0$, vemos que qualquer que seja a distância do eixo x em relação a q, só há um ponto de intersecção. Disso concluímos que, neste caso, a equação tem uma única solução real. Observemos o gráfico da função $f(x) = x^3 + \frac{1}{5}x + 1$, com $q = 1$, na Figura 24.

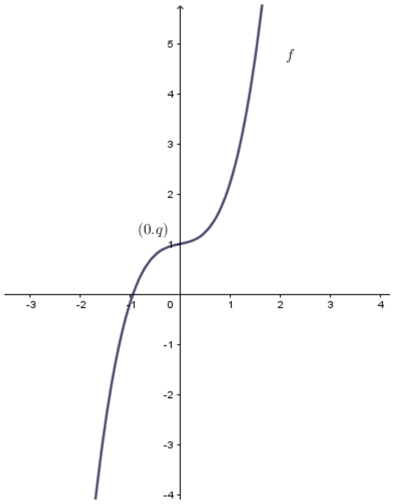

Figura 24 – Gráfico da função $f(x) = x^3 + \frac{1}{5}x + 1, x \in \mathbb{R}$ e $q = 1$

Quando $p < 0$, podemos ter uma, duas ou três soluções reais distintas, como observado nas Figuras 25, 26 e 27, respectivamente.

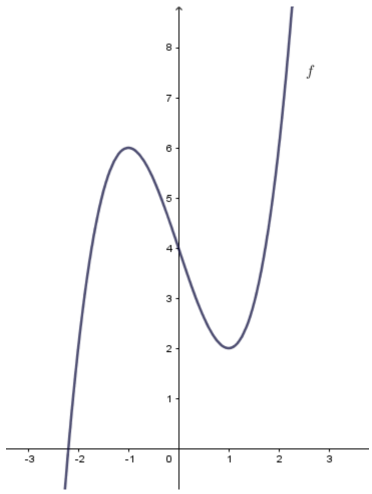

Figura 25 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - x + 1, x \in \mathbb{R}$ e $p = -1$

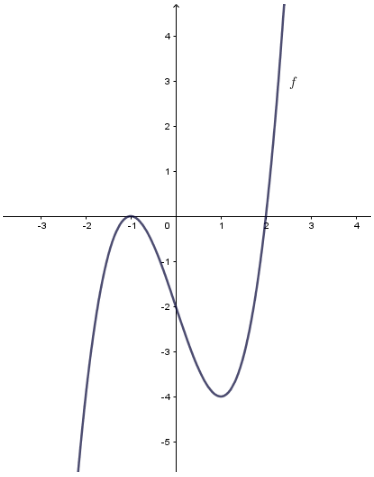

Figura 26 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x - 2, x \in \mathbb{R}$ e $p = -3$

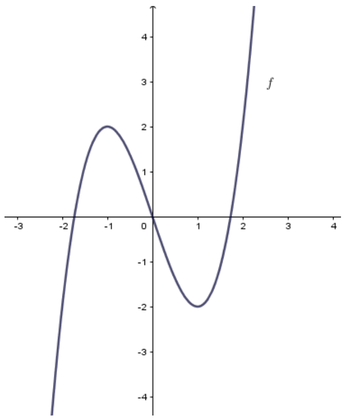

Figura 27 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x, x \in \mathbb{R}$ e $p = -3$

Por fim, quando $p = 0$ há uma única solução real. No entanto, há uma situação ($q = 0$) em que a solução é uma raiz de multiplicidade 3, de acordo com a Figura 28.

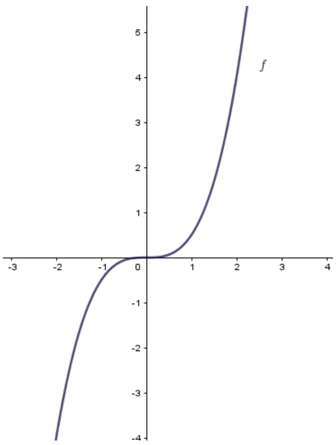

Figura 28 – Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{2}x^3, x \in \mathbb{R}$ e $p = 0$

3 MÁXIMOS E MÍNIMOS

Geralmente, na rede básica de ensino, os alunos necessitam calcular valores de máximos e mínimos de funções polinomiais no contexto da solução de um problema aplicado; seja este em matemática, física ou áreas afim. Mas sem a noção de derivada, existe uma certa dificuldade para alguns tipos de funções. Nesses casos, há a tentativa de reduzir essas funções para funções quadráticas, uma vez que os alunos conhecem a fórmula para o vértice de uma parábola ou as soluções são aproximadas usando uma calculadora. Neste capítulo, mostramos que é possível encontrar os valores de máximos e mínimos locais de uma função cúbica sem fazer o uso da derivada ou uso de uma calculadora para encontrar uma aproximação. Em vez disso, usamos técnicas elementares que são essenciais e apropriadas ao ensino médio. As principais referências no desenvolvimento deste capítulo são (DE VILLERS, 2004) e (TAYLOR; HANSEN, 2008).

3.1 Máximos e mínimos sem o uso do cálculo

Para encontrar os valores de máximos e mínimos locais usando técnicas de Cálculo Diferencial, basta estudar os pontos críticos de uma função e aplicar o Teste da Primeira Derivada (Teorema 1.19). Podemos usar também o Teste da Segunda Derivada (Teorema 1.23) e observar o comportamento da derivada segunda, veja Seção 2.1. Essa solução tem o benefício de ser concisa, mas requer técnicas além do escopo do ensino básico. A solução sem o uso do Cálculo Diferencial e Integral, por outro lado, utiliza de conceitos comuns de matemática do ensino médio, objetivo desta seção.

Sem o uso de Cálculo Diferencial e Integral, usamos algumas ideias básicas de transformações de gráficos e as propriedades de uma função ímpar. Nesta seção, mudamos através de translações nossa função cúbica original para obter uma nova função, de forma que as raízes dessa nova função corresponda à abscissa de um valor máximo ou mínimo local de nossa função original f.

Para encontrar os valores extremos de uma função f, transformamos a função g, definida na equação (2.4), em uma nova função cuja fatoração podemos determinar.

Lema 3.1. *Sejam $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $a \neq 0$ e $g(x) = f(x+m)-n$, onde $I = (m,n)$ é o ponto de inflexão de f. Se g tem extremos locais, então f também terá, a saber,*

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}.$$

Demonstração. 1º caso: $a < 0$.

Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a < 0$. Pela Proposição 2.3, $g(x) = f(x+m) - n$ é uma função ímpar com $g(0) = 0$, onde $I = (m, n)$ é o ponto de inflexão de f. Suponhamos que g tenha um máximo local em $A = (u, v)$. Definimos $h(x)$ transladando o gráfico da função g de modo que a ordenada do ponto A seja nula. Desta forma,

$$h(x) = g(x) - v.$$

Como g tem um máximo local em $x = u$ e $a < 0$, então $h(x)$ também terá um máximo local em $x = u$, conforme Figura 29. Mais ainda, pela Definição 1.27, h terá uma raiz dupla em $x = u$ e uma outra raiz real, digamos $x = w$. Assim, $h(x)$ pode ser escrita da seguinte forma $h(x) = a(x-u)^2(x-w)$. Logo

$$h(x) = ax^3 + (-2au - aw)x^2 + (au^2 + 2awu)x - awu^2. \tag{3.1}$$

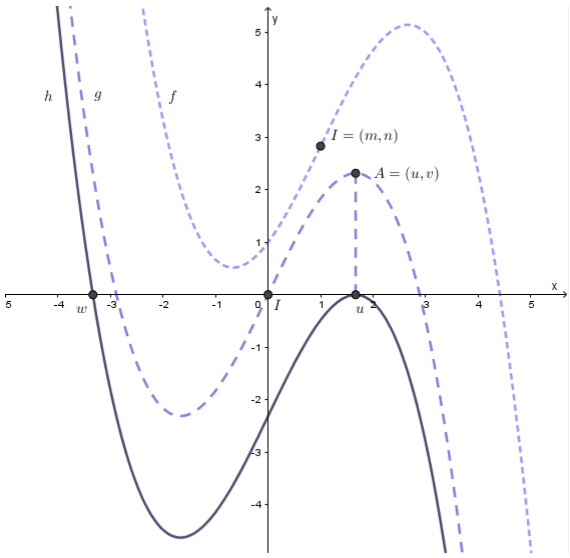

Figura 29 – Gráfico da $h(x) = g(x) - v, a < 0$

Por outro lado, $h(x) = g(x) - v$. Então, da equação (2.6),

$$g(x) - v = ax^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a}\right)x - v. \tag{3.2}$$

Pela igualdade de polinômios, igualando as equações (3.1) e (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} &-2au - aw = 0, \\ &au^2 + 2awu = \frac{3ac - b^2}{3a}, \text{ donde } u = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Se $b^2 - 3ac = 0$, então $u = 0$. Neste caso, g teria um máximo local na origem, o que é impossível, pois g é ímpar e f não teria nenhum extremo local. Se $b^2 - 3ac < 0$ o valor de u não estaria definido e o gráfico de f não teria mais nenhum valor máximo ou mínimo, mas a hipótese inicial era de que tínhamos uma função com extremos locais. Logo, o valor de $b^2 - 3ac$ deve ser positivo. Além disso, por causa da simetria do gráfico de h, sabemos que um valor de u nos dá a abscissa do ponto de máximo local de g e o outro valor de u nos dá a abscissa do ponto de mínimo local de g.

Como $a < 0$, para determinar o valor do máximo local de f, usamos o comportamento de f e g, observando que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} ax^3 \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Assim, o gráfico de f é conforme o gráfico da Figura 29, logo, f e g possuem a abscissa do ponto de máximo local positiva. Portanto, se $a < 0$, então o valor positivo de u produz a abscissa do máximo local de g e o valor negativo de u produz a abscissa do mínimo local de g.

Nosso interesse é encontrar o valor máximo local de f, dessa maneira, vamos traduzir o valor da abscissa x do ponto de máximo local de g para corresponder ao gráfico de f. Isto é, uma vez que o gráfico da f tem seu ponto de inflexão com abscissa $x = m$, ele terá um máximo local em $(m + u, f(m + u))$. Como a coordenada $x = m + u$ e $m = \frac{-b}{3a}$, pela equação (3.3), temos

$$\begin{aligned}x &= m + u \\ &= \left(\frac{-b}{3a}\right) + \left(\frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right) \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Portanto, a equação (3.4) nos dá a abscissa do máximo local da função f.

Podemos, também, refazer os mesmos procedimentos definindo a função h de modo que a ordenada do ponto de mínimo local da função g coincida com 0, ou melhor, supondo que g tenha um mínimo local em $B = (u', v')$, definindo a função h por

$$h(x) = g(x) + v'.$$

Dessa forma, a função h ainda terá uma raiz dupla em $x = u'$ e uma outra raiz $x = w'$, logo os cálculos acima seguem sem alterações e o valor positivo de u' produz a abscissa do máximo local de g e o valor negativo de u' produz a abscissa do mínimo local de g. Logo, a abscissa do ponto de mínimo local de f é

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}.$$

Portanto, para $a < 0$, as abscissas dos extremos locais de f são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}.$$

2º caso: $a > 0$

Sejam $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a > 0$, $g(x) = f(x+m) - n$ uma função ímpar, $I = (m, n)$ o ponto de inflexão de f e suponhamos que g tem uma máximo local em $A = (u, v)$. Para $a > 0$ o cálculos para os valores da abscissa dos extremos locais de g se mantêm como acima e como no caso anterior, observando o comportamento de f e g, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x+\to\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d \\
&= \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} \right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} ax^3 \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Assim, o gráfico de f é semelhante ao gráfico exibido na Figura 30, logo, f e g possuem a abscissa do ponto de máximo local negativa. Portanto, se $a > 0$, o valor positivo de u produz a abscissa do mínimo local de g e o valor negativo de u produz a abscissa do máximo local de g.

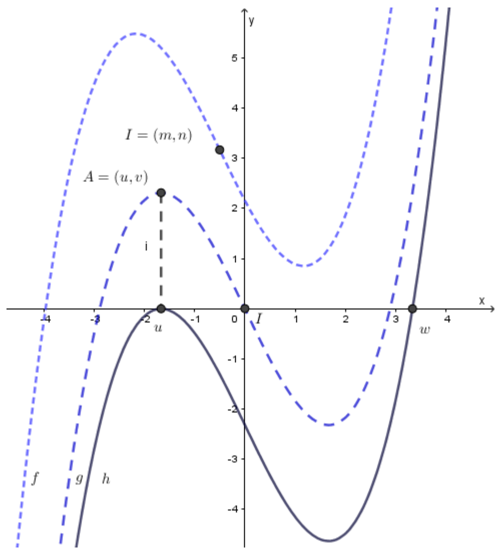

Figura 30 – Gráfico da $h(x) = g(x) - v, a > 0$

Traduzindo o valor da abscissa dos extremos locais de g para corresponder ao gráfico de f temos que

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

nos dá a abscissa do máximo local da função f e

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

nos dá a abscissa do mínimo loca da função f. Portanto, as abscissas dos extremos locais de f são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a},$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Teorema 3.2. *Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Então, os pontos de extremos locais de f são dados por*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}. \tag{3.5}$$

caso existam.

Demonstração. Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, suponhamos que existem os extremos locais de f. Pelo Lema 3.1, as abscissas dos extremos locais de f são dados pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}.$$

$\square$

Para verificar a existência de extremos locais de uma função cúbica f, basta escrever a f na forma reduzida e verificar o comportamento de p, conforme Seção 2.2.

3.2 Exemplos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos de cálculo de máximos e mínimos de funções cúbicas, sem o uso de derivadas.

Exemplo 3.3. Determinar os extremos locais das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$

Vamos escrever a equação reduzida de f. Por (2.10), temos

$$y^3 + \left(15 - \frac{(-9)^2}{3}\right) y + \left(\frac{(2)(-9)^3}{27} - \frac{(-9)(15)}{3} + (-5)\right) = 0.$$

Logo,

$$y^3 - 12y - 14 = 0,$$

com $p = -12$ e $q = -14$. Como $p < 0$, f admite valores de extremos locais, conforme Proposição 2.6.

Considerando a equação (3.5) e substituindo $a = 1, b = -9, c = 15$, temos

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 3(1)(15)}}{(3)(1)} = \frac{9 \pm 6}{3},$$

ou seja, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ são os extremos locais de f. Como o sinal do coeficiente de x^3 é positivo, o máximo local de f ocorre no menor valor de x e o mínimo local no maior valor de x, ou seja, para $x_1 = 1$, $f(1) = 2$, daí $A = (1, 2)$ é um ponto de máximo local e para $x_2 = 5$, $f(5) = -30$, logo $B = (5, -30)$ é um ponto de mínimo local de f. Observemos Figura 31.

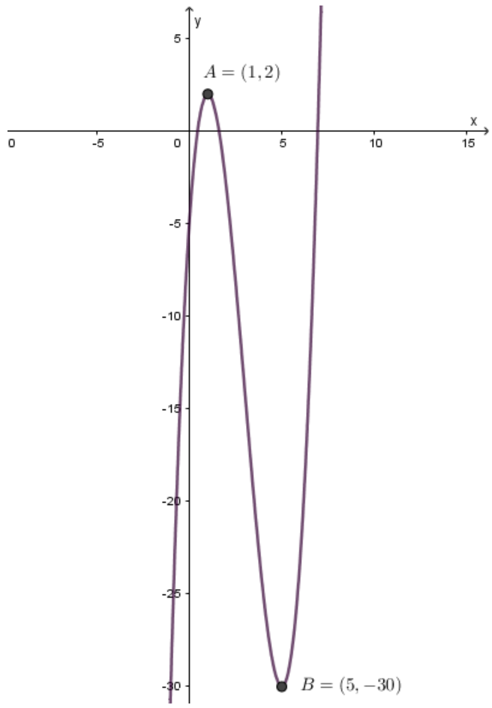

Figura 31 – Gráfico da função $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 5, x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = -2x^3 - 9x^2 + 2$

Vamos escrever a equação reduzida de g. Por (2.10), temos

$$y^3 + \left(0 - \frac{(4,5)^2}{3}\right) y + \left(\frac{(2)(4,5)^3}{27} - \frac{(4,5)(0)}{3} + (-1)\right) = 0.$$

Logo,

$$y^3 - 6,75y + 5,75 = 0,$$

com $p = -6,75$ e $q = 5,75$. Como $p < 0$, pela Proposição 2.6, a função f admite valores de extremos locais.

Considerando a equação (3.5) e substituindo $a = -2, b = -9, c = 0$, temos

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 3(-2)(0)}}{(3)(-2)} = \frac{9 \pm 9}{-2},$$

ou seja, $x_1 = -3$ e $x_2 = 0$ são os extremos locais de f. O sinal do coeficiente de x^3 é negativo, assim ocorrem o máximo local no maior valor de x e o mínimo local no menor valor de x, ou seja, para $x = -3$, $g(-3) - 25 =$, daí $C = (-3, -25)$ é o ponto de mínimo local e para $x = 0$, $g(0) = 2$, logo $D = (0, 2)$ é o ponto de máximo local de g. Observemos Figura 32.

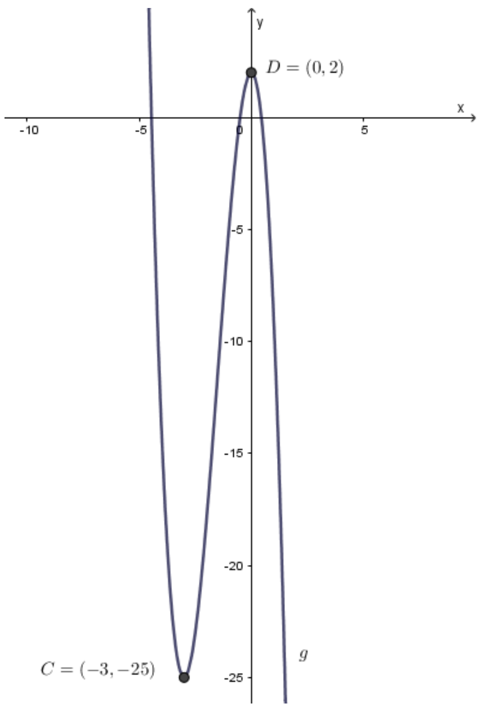

Figura 32 – Gráfico da função $y = -2x^3 - 9x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$

4 PLANO DE TRABALHO

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCNEM (BRASIL, 2006), o estudo das funções polinomiais é muito importante na formação do discente, visto que esse conteúdo está presente em diversas áreas do conhecimento, como em computação, engenharia, física e diversas outras áreas afins. Preveem que, para além das funções afim e quadrática, podem estar presentes o estudo de funções de grau maior que 2, como um trabalho complementar em relação ao conhecimento matemático como, por exemplo, as funções cúbicas. Porém, este assunto, quando possível, é abordado de forma bastante sucinta, apenas através da atribuição de pontos para a função e, na sequência, na construção do esboço do gráfico e algumas vezes usando a simetria em relação à origem. Por outro lado, problemas envolvendo funções cúbicas é muito discutido no ensino médio e técnico, principalmente em problemas de otimização. A Base Nacional Comum Curricular, BNCC, propõe que o professor use estratégias, conceitos, procedimentos matemáticos para que os alunos do ensino médio, possam resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados. (BRASIL, 2018, p. 529).

Com o propósito de auxiliar o professor no ensino de máximo e mínimo de funções cúbicas, neste capítulo propomos um plano de aula para a fundamentação teórica e na sequência apresentamos atividades para que sejam desenvolvidas na sala de aula. Nas escolas estaduais do Estado do Paraná, o tema funções polinomiais de grau n, quando abordado, é tratado especificamente na 3ª série do ensino médio, embora a função afim e quadrática são tratadas na 1ª série, através de modelagem matemática envolvendo a resolução de problemas.

Cada atividade proposta é composta de problemas que exploram a construção e o entendimento dos conceitos, assim como a contextualização do cálculo de máximos e mínimos de funções cúbicas e por meio da visualização das características das funções, tendo como suporte básico, a equação (3.5). O plano de aula proposto é voltado para alunos da 3ª série do ensino médio ou técnico. Sugerimos a realização da sequência de atividades no final do estudo teórico das funções polinomiais, contribuindo, assim, para uma melhor compreensão dos conceitos estudados sobre o tema.

4.1 Plano de Aula: Fundamentação teórica

Dados de Identificação

Título da aula: Máximo e mínimo de Funções cúbicas.

Etapa de Ensino: 3ª série do ensino médio.

Duração: 3 aulas de 50 minutos

Conteúdos Estruturantes: Números e álgebra, grandezas e medidas e funções.

Conteúdos Específicos: Polinômios, volume e funções cúbicas: máximo e mínimo de funções cúbicas.

Objetivos

Objetivos geral: Apresentar um método para o cálculo de máximo e mínimo de funções cúbicas usando conceitos que esteja dentro do escopo do ensino médio.

Objetivos específico:

- Reconhecer funções cúbicas.

- Relacionar funções cúbicas com as equações polinomiais de grau 3.

- Relacionar o domínio, imagem e contradomínio de uma função cúbica.

- Analisar, interpretar e construir gráficos de funções cúbicas.

- Associar função cúbica a uma função ímpar.

- Identificar diferentes funções cúbicas por meio da sua representação algébrica e/ou gráfica.

- Identificar o comportamento do gráfico de uma função cúbica a partir da sua equação reduzida.

- Reconhecer o comportamento do gráfico, os intervalos de crescimento ou decrescimento por meio do sinal do coeficiente a. Veja Seção 2.3.

- Determinar o número de raízes de uma cúbica por meio de análise de sua representação gráfica.

- Definir teoricamente e algebricamente o ponto de inflexão da função cúbica.

- Definir teoricamente e geometricamente máximos e mínimos de uma função cúbica.

- Rever conceitos translação de função. Veja Seção 1.2.

- Calcular as abscissas dos pontos de máximo e mínimo.

- Trabalhar exemplos de fixação do conteúdo.

Desenvolvimento do tema

- O professor pode abordar o tema conceituando otimização e máximos e mínimos de funções cúbicas.

- Definir ponto de inflexão $I = (m, n)$ de uma função cúbica, geometricamente e algebricamente, pela fórmula $x = \frac{-b}{3a}$.

- Sendo f uma função cúbica, transladar a função f de modo que seu ponto de inflexão coincida com a origem, escrevendo esta nova função, sendo $g(x) = f(x+m) - n$.

- Sendo $A = (u, v)$ o ponto de máximo da g, transladar a função g de modo que v coincida com zero e escrever esta nova função, sendo $h(x) = g(x) - v$.

- Como h tem duas raízes reais, supondo as raízes u e w, escrever esta função como $h(x) = a(x-u)^2(x-w)$. Veja a prova do Lema 3.1.

- Mostrar que u é definido pela equação (3.3).

- Analisar o comportamento do gráfico das funções cúbicas usando a ideia intuitiva de limite associando ao sinal do coeficiente a.

- Concluir que $x = m + u$ é a abscissa dos pontos de extremos locais da função f.

Para mais detalhes da descrição da abordagem teórica desse tema, consulte Seção 3.1.

Metodologia

-Apresentar os conteúdos através de aulas expositivas e explicativas.

- Estimular o aluno para que pense, raciocine, crie, relacione ideias, descubra e tenha autonomia de pensamentos.

- Associar o conteúdo a situações-problemas que envolvam o cotidiano dos alunos, através de exemplos.

Recursos Didáticos

Quadro negro e giz. Pode-se utilizar recursos tecnológicos para melhor visualização dos conceitos abordados.

Avaliação

Fica a critério do professor.

4.2 Proposta de Atividades

Nesta seção apresentamos uma proposta de atividades com problemas e uma atividade experimental com material manipulável envolvendo máximo e mínimo de funções cúbicas.

4.2.1 Problemas envolvendo funções cúbicas

Esta subseção é composta por 5 atividades, cada uma delas envolvendo problemas contextualizados e modelados por funções cúbicas.

Orienta-se que os alunos se sentem em duplas, pois a divisão da turma facilita a compreensão do conteúdo pelos alunos, fazendo com que estes discutam entre si as possíveis resoluções e dúvidas a respeito das questões propostas.

Conteúdos

- Funções: função cúbica, máximo e mínimo locais de funções cúbicas.

- Polinômios: equação polinomial de grau 3.

- Geometria plana: Áreas e perímetro.

- Geometria espacial: problemas de otimização.

Objetivos

- Interpretar problemas envolvendo equações de 3º grau.

- Identificar a lei de formação de uma função cúbica que descreve o problema.

- Mostrar a aplicabilidade de funções cúbicas.

- Calcular máximo e mínimo de funções cúbicas.

- Interpretar gráficos da funções cúbicas.

Duração

2 Aulas de 50 minutos.

Materiais

- Lista de atividades

- Lápis

- Régua

- Borracha

- Caneta

- Quadro

- Giz.

Desenvolvimento

Exercício 1: Entre 0ºC e 30ºC, o volume V (em centímetros cúbico) de $1kg$ de água a uma temperatura T é, aproximadamente, dado pela fórmula

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3. \tag{4.1}$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

Solução

A densidade de uma substância é calculada pela razão entre massa e o volume desta. Permanecendo a massa constante, a densidade assume seu valor máximo quando o volume é mínimo. Assim, vamos determinar o volume mínimo, calculando os extremos da função $V(T)$.

Temos que a função $V(T)$ em (4.1) é uma função cúbica, com $T \in [0, 30]$ e $a = -0,0000679$, $b = 0,0085043$, $c = -0,06426$ e $d = 999,87$. Substituindo em (3.5) temos

$$T = \frac{-(0,0085043) \pm \sqrt{(0,0085043)^2 - 3(-0,0000679)(-0,06426)}}{3(-0,0000679)}.$$

Logo, $T_1 = 79,53176$ e $T_2 = 3,96651$ são os extremos locais de V. Como buscamos uma temperatura entre 0^oC e 30^oC vamos desprezar T_1. Agora, calculando a função em T_2 e nos extremos do intervalo $[0, 30]$. Segue que
$V(0) = 999,87$, $V(3,96651) = 999,7446746$ e, por fim, $V(30) = 1003,76277$.

Segue que o volume mínimo ocorre na temperatura $3,96651^oC$, logo essa é a temperatura para qual a densidade da água será máxima.

Exercício 2: Calcule as dimensões de um cone circular de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio R, conforme Figura 33.

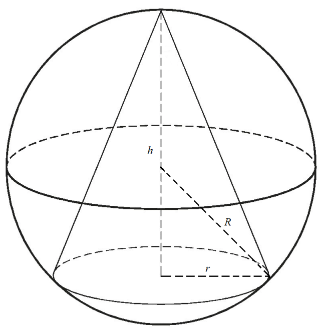

Figura 33 – Cone de altura h e raio r inscrito na esfera de raio R.

Solução

Sendo R o raio da esfera, r o raio e h a altura do cone e usando o Teorema de Pitágoras, podemos escrever
$R^2 = r^2 + (h - R)^2$, logo $r^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2Rh - h^2$.

Sabemos que o volume do cone é

$$V = \frac{r^2 h\pi}{3}. \tag{4.2}$$

Logo, substituindo r^2 em (4.2), podemos escrever o volume em função da altura do cone, ou seja,

$$V(h) = \left(\frac{(2Rh - h^2)h\pi}{3}\right) = \frac{2Rh^2\pi - h^3\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}h^3 + \frac{2\pi R}{3}h^2,$$

sendo $0 < h < 2R$.

Observemos que $V(h)$ é uma função cúbica, com $a = -\frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2R\pi}{3}$ e $c = 0$. Como queremos a dimensão do cone de volume máximo, vamos calcular as abscissas dos extremos locais da função V. Substituindo a, b e c em (3.5), temos

$$h = \frac{\frac{2R\pi}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2R\pi}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{\pi}{3}\right)0}}{3\left(-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Daí, $h_1 = 0$ e $h_2 = \frac{4R}{3}$ são os extremos locais de V. Como h_1 não pertence ao domínio de V, concluímos que h_2 é a abscissa do ponto de máximo de V e, portanto, $r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$ e $h_2 = \frac{4R}{3}$ são as dimensões do cone circular de volume máximo inscrito na esfera de raio R.

Exercício 3: A Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) é o órgão regulador das atividades que integram a indústria do petróleo, gás natural e biocombustíveis no Brasil. Dentre suas funções, a ANP acompanha os preços dos combustíveis por meio de uma pesquisa semanal e comunica aos órgãos do Ministério da Justiça possíveis indícios de infrações contra a ordem econômica. Essa pesquisa é publicada periodicamente ilustrando o comportamento do mercado de combustíveis.

A função cúbica dada por

$$q(x) = 0,0023x^3 - 0,0431x^2 + 0,1969x + 1,3882 \tag{4.3}$$

representa o preço médio mensal cobrado nos postos de combustíveis por litro de álcool hidratado no Brasil, no ano de 2007. Determine em que o mês do ano de 2007 o preço médio mensal cobrado por litro de álcool hidratado foi mínimo e qual foi o valor cobrado.

Solução

Pela natureza do problema, o domínio de q é $(0, 12]$. Vamos determinar o mês com menor preço médio calculando os extremos locais da função q. Como (4.3) é uma função cúbica com $a = 0,0023$, $b = -0,0431$ e $c = 0,1969$, usando a equação (3.5) temos

$$x = \frac{-(0,0431) \pm \sqrt{(-0,0431)^2 - 3(0,0023)(0,1969)}}{3(0,0023)} = \frac{0,043 \pm 0,0223383}{0,0069}.$$

Daí, $x_1 \approx 2,994$ e $x_2 \approx 9,469$ são, aproximadamente, os extremos locais de q.

Temos que $q(x_1) =$ R\$ $1,65$, $q(x_2) =$ R\$ $1,35$ e $q(12) = 1,519$. Logo, o mês em que o preço médio mensal cobrado por litro de álcool hidratado foi mínimo é $x_2 \approx 9,469$, ou melhor, em outubro. E o valor médio cobrado neste mês foi de R\$ $1,35$. Esta análise, pode ser feita pelo sinal do coeficiente a. Visto que $a > 0$, a função q possui um mínimo local na maior abscissa dos extremos calculados. Graficamente, observemos a Figura 34.

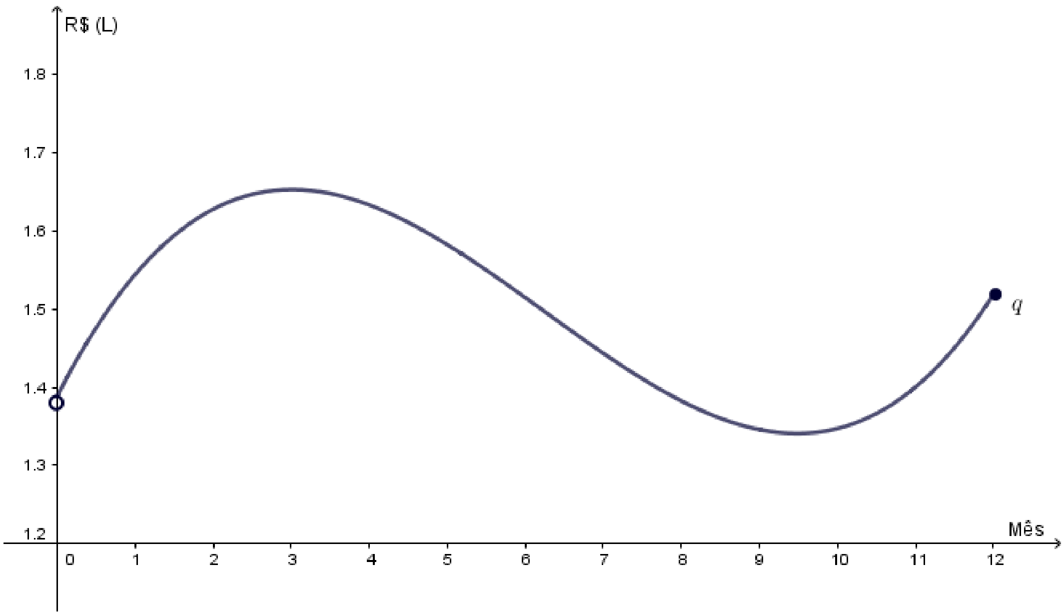

Figura 34 – Gráfico o preço médio do álcool hidratado em 2007

Exercício 4: Um pacote, conforme Figura 35, precisa ser enviado pelo correio. Algumas diretrizes postais exigem que a soma das dimensões do pacote não possam exceder um valor fixo, por exemplo, $200cm$. A questão é, qual o maior pacote, em termos de volume, que pode ser enviado?

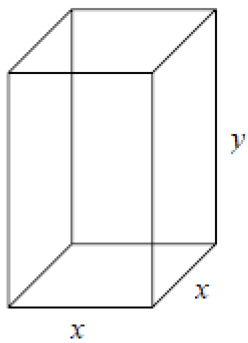

Figura 35 – Dimensões do pacote a ser enviado

Solução

O volume da caixa de dimensões x centímetros de largura por y centímetros de comprimento é dado por $V(x) = x^2y = x^2(200 - 2x)$. Logo,

$$V = 200x^2 - 2x^3, x > 0. \tag{4.4}$$

Pela natureza do problema, sabemos da existência de um valor máximo de V. Podemos resolver o problema dado, encontrando o valor máximo da equação (4.4). Usando as técnicas sem o uso do Cálculo Diferencial, conforme a equação (3.5), vemos que a função V tem um máximo local no ponto cujo valor de x é dado por

$$\begin{aligned} x &= \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 3(-2)0}}{3(-2)} \\ &= \frac{-200 \pm 200}{-6}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como o coeficiente de x^3 é negativo, sabemos que o máximo local será no maior valor de x dado por (4.5). Portanto, o valor do máximo local de V ocorre em $x = \frac{200}{3} \approx 66,6$. Assim,

$$\begin{aligned} V &= x^2(200 - 2x) \\ &= \left(\frac{200}{3}\right)^2 \left(200 - \frac{400}{3}\right) \\ &= 296296,3cm^3. \end{aligned}$$

Portanto, o maior pacote que você pode enviar pelo correio, em termos de volume é um cubo com, aproximadamente, $66,6cm$ de largura.

Exercício 5: Uma empresa produz determinado produto e vende-o a um preço unitário de R$13. Estima-se que o custo total C para produzir e vender q unidades é dado por

$$C = q^3 - 3q^2 + 4q + 2.$$

Supondo que toda a produção seja absorvida pelo mercado consumidor, que quantidade deverá ser produzida para que a empresa tenha lucro máximo?

Solução

O lucro é obtido pela diferença entre a receita arrecadada e o custo total da produção. A receita arrecadada será calculada de acordo com o preço unitário do produto e a quantidade q de unidades vendidas. Neste problema, a receita é $R = 13q, q > 0$.

Seja L o lucro máximo, então $L = R - C$. Logo

$$L(q) = R(q) - C(q) = 13q - (q^3 - 3q^2 + 4q + 2) = -q^3 + 3q^2 + 13q - 4q - 2.$$

Portanto,

$$L(q) = -q^3 + 3q^2 + 9q - 2, \tag{4.6}$$

onde q é quantidade de produto vendido, ou seja, $q \geq 0$.

Observemos que (4.6) é uma função cúbica, com $a = -1$, $b = 3$ e $c = 9$. Como queremos a quantidade que deverá ser produzida para se ter lucro máximo, vamos calcular as abscissas dos extremos locais da função dada por (4.6). Substituindo a, b e c em (3.5), temos

$$q = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 3(-1)(9)}}{3(-1)}.$$

Daí, $q_1 = -1$ e $q_2 = 3$ são os extremos locais de q. Como $q > 0$, então a solução é $q = 3$. E como o sinal do coeficiente de x^3 é negativo, ocorre um máximo local no maior valor de q. Realizando a verificação
$L(3) = -(3)^3 + 3(3)^2 + 9(3) - 2 = 25$. Portanto, para se ter lucro máximo é necessário produzir 3 unidades do produto. Observemos graficamente na Figura 36.

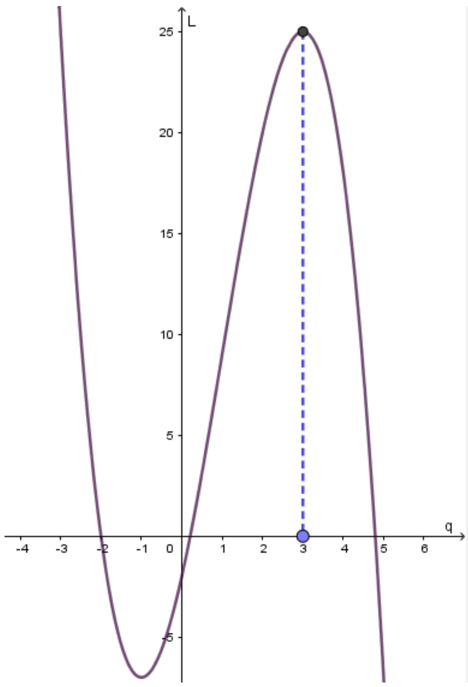

Figura 36 – Gráfico da função lucro em relação a quantidade produzida

4.2.2 Atividade prática com material manipulável

4.2.2.1 Qual a "maior"caixa de papel?

Para a realização desta atividade, os alunos, trabalhando em grupo, construirão no mínimo seis caixas de papel e tentarão descobrir qual delas tem maior volume. Depois, fazendo os cálculos, verificarão se sua intuição estava certa. Usamos como referência (KIELING, 2019), (OLIVEIRA, 2007).

Conteúdos

- Funções: função cúbica, máximos e mínimo de funções cúbicas.

- Polinômios: equação polinomial de grau 3.

- Geometria espacial: problemas de otimização.

Objetivo

- Entender o conceito de volume associado a uma variável.

- Construir gráficos através de dados obtidos experimentalmente.

- Determinar a lei que fornece a variação do volume de uma caixa em função de suas dimensões (altura x largura x comprimento).

- Discutir o comportamento de funções associado com o conceito de volume.

- Sendo x a medida dos lados dos quadrados nos quatros cantos da folha A4, calcular a medida x de um corte apropriado para obter o maior volume possível de uma caixa sem tampa usando a folha de papel A4.

- Calcular os pontos de extremos de uma função associada ao volume de forma a maximizá-los.

Duração

2 Aulas de 50 minutos.

Materiais

- Folha de papel A4

- Régua

- Lápis

- Cola

- Tesoura.

Desenvolvimento

A folha A4 tem medidas a e b dos lados padronizados em $210mm$ e $297,4mm$, respectivamente. Nesta atividade, usar medidas $a = 21cm$ e $b = 30cm$ que é uma boa aproximação.

Desenvolver a atividade em grupo. Cada grupo deverá construir no mínimo seis caixas, escolhendo para cada uma delas diferentes valores de x. Observar com os alunos que x deve ser menor que a metade do menor lado da folha (lado de medida a) e maior que zero. Isto é,

$$0 < x < \frac{a}{2},$$

se $x = \frac{a}{2}$ ou $x = 0$, nestes casos, não há volume algum.

Para o procedimento da construção da caixa, veja (KIELING, 2019).

Após a construção das caixas, o grupo deve nomeá-las, discutir e tentar descobrir qual delas tem o maior volume. Em seguida, devem construir uma tabela conforme Figura 37 e anotar, na coluna 1ª numeração, em ordem decrescente do volume, ou seja, do maior volume para o menor. Essa anotação servirá de registro para a verificação da percepção visual dos alunos acerca do volume das caixas.

Caixa		Altura	Volume
1ª Numeração	2ª Numeração		

Figura 37 – Tabela volume das caixas.

Em seguida, os alunos devem calcular os volumes das caixas algebricamente e anotar na tabela da Figura 37. Para isso, com o auxílio de uma régua, os alunos medirão o comprimento, a largura e a altura de cada caixa. Na coluna 2ª Numeração, ordenar as caixas do maior para o menor volume calculado e na coluna Volume, anotar o valor obtido. Fazer a comparação com os alunos, da percepção visual que eles têm do volume com o valor calculado. Em seguida, os grupos poderão esboçar o gráfico do volume da caixa em função de sua altura x em um sistema de eixos de coordenadas. O gráfico deve ficar semelhante ao gráfico mostrado na Figura 38.

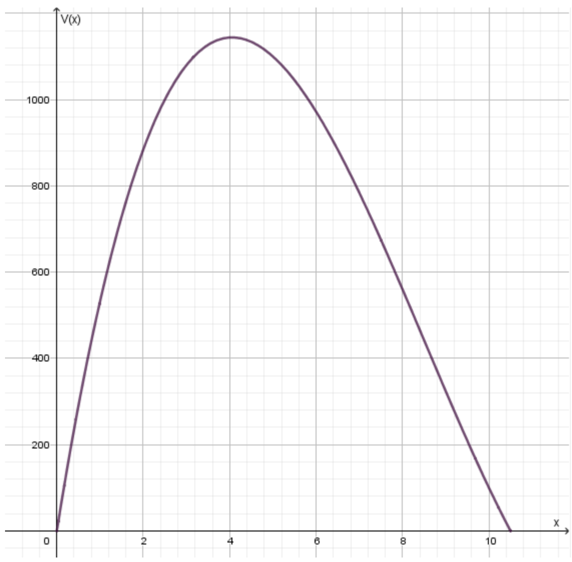

Figura 38 – Gráfico do Volume das caixas de papel

Quando terminarem o esboço, levantar os seguintes questionamentos:
Qual a caixa construída de maior volume?
Para qual valor de x a caixa teria o maior volume possível?

Encerramento

Escrever a função que representa o volume da caixa considerando as medidas da altura e largura da folha A4.

O volume da caixa é o produto

$$V = A \cdot B \cdot C,$$

onde A, B e C são as medidas dos lados do paralelepípedo. Considerando a construção feita em uma folha de lado a e b e sendo x a altura da caixa, temos

$$A = a - 2x, B = b - 2x, C = x$$

Assim, o volume da caixa é

$$V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x, \qquad x > 0.$$

Como $a = 21cm$ e $b = 30cm$,

$$V(x) = (21 - 2x)(30 - 2x)x = 630x - 102x^2 + 4x^3 \qquad x > 0, \tag{4.7}$$

que é uma função cúbica.

Esboçar o gráfico da função V. Nesta etapa, o professor pode utilizar recursos tecnológicos, para maior precisão, por exemplo, o software Geogebra, veja Figura 39.

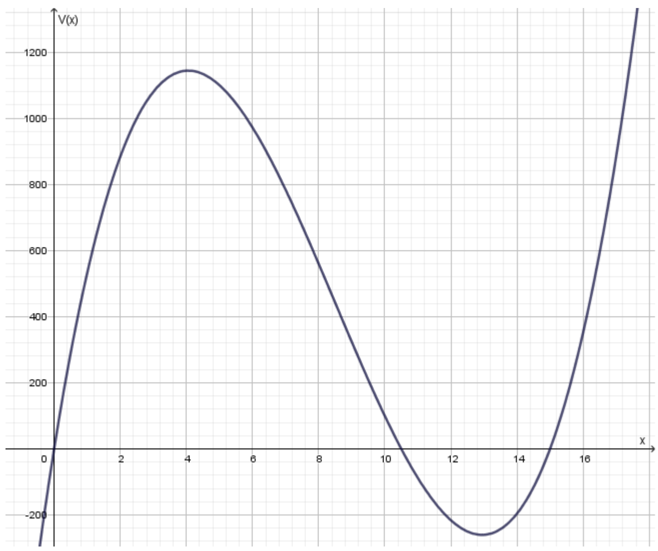

Figura 39 – Gráfico da função Volume das caixas de papel

Observar que pela natureza do problema, a função V admite um valor máximo. No esboço, comentar que o gráfico inclui valores de x tais que $V < 0$, que a interpretação de volume não permite valores negativos e isso já deve estar claro pela prática, que impede valores de $x > a/2$. Os pontos tabelados pelos alunos forneceram somente valores onde $V > 0$, ou seja, na "montanha" do gráfico.

Após o término da socialização dos dados, pedir para cada grupo mostrar, com as caixas, a numeração que fizeram antes e depois do cálculo do volume. Neste momento, discutir sobre a divergência entre as intuições com os cálculos matemáticos.

Depois da discussão, comentar da existência do valor máximo para o volume e realizar a validação das conjecturas obtidas pelos alunos usando a equação (3.5).

De (4.7), $V(x) = 4x^3 - 102x^2 + 630x$, logo a abscissa dos extremos locais da função V são dados por

$$x = \frac{-(-102) \pm \sqrt{(-102)^2 - 3(4)(630)}}{3(4)}.$$

Nesta etapa, fica a critério do professor o cálculo da ordenada das abscissas dos pontos dos extremos locais encontrados e verificar onde ocorre o máximo local ou ainda analisar o sinal do coeficiente de x^3.

Como o sinal do coeficiente de x^3 é positivo, o máximo local ocorre no menor valor de x, ou ainda,

$$x = \frac{-(-102) - \sqrt{(-102)^2 - 3(4)(630)}}{3(4)} \approx 4.$$

Para concluir, construir com os alunos a caixa para $x = 4cm$ e calcular $V(4) = 1144cm^3$.

4.2.2.2 Otimizando uma otimização

Para esta atividade, usamos como referência (GARCIA, 2016, p. 13-16).

Digamos que as quatro peças quadradas remanescentes da caixa da atividade proposta anteriormente, sejam usadas na construção de uma espécie de anexo da caixa construída, com a mesma forma desta, como sugere a Figura 40.

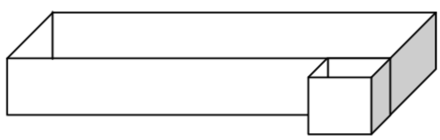

Figura 40 – Caixa acoplada.

Uma vez construída a caixa principal de volume máximo, considerando $x = 4cm$, obtém-se um ganho no volume de $x^3 = 4^3 = 64cm^3$ com o acréscimo desse complemento, podendo passar a ter um volume de $1.144 + 64 = 1.208cm^3$. Nessa nova situação, vamos maximizar o volume do novo recipiente. Consideremos a seguinte função dada por

$$V_t(x) = 630x - 102x^2 + 4x^3 + x^3 = 630x - 102x^2 + 5x^3.$$

Observemos que, agora, V_t pode ser definida no intervalo $(0, \frac{a}{2}]$, onde $a = 21cm$ e $b = 30cm$ são as dimensões da folha A4. Uma parte de seu gráfico está esboçado na Figura 41

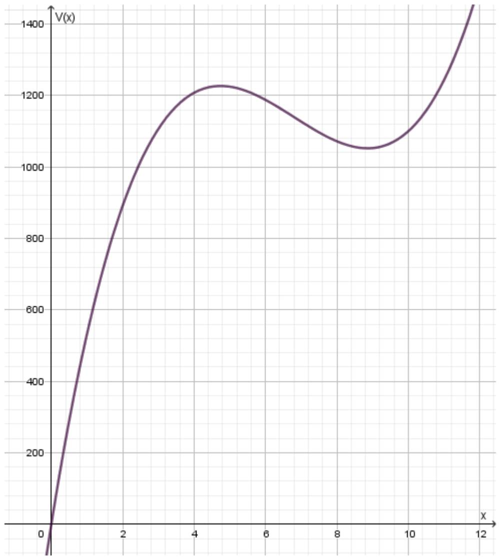

Figura 41 – Gráfico da Função V_t

Pelo tipo de função envolvida e pelo contexto da situação proposta, existe ponto de máximo. Pela equação (3.5), temos a abscissa dos extremos locais da função V_t são dados por

$$x = \frac{-(-102) \pm \sqrt{(-102)^2 - 3(5)(630)}}{3(5)}.$$

Como o sinal do coeficiente de x^3 é positivo, o máximo local ocorre no menor valor de x, ou ainda,

$$x = \frac{-(-102)\sqrt{(-102)^2 - 3(4)(630)}}{3(4)} \approx 5.$$

Conseguimos, com isso, otimizar o volume desse novo recipiente e, ainda, contar com o total aproveitamento do material disponível.

5 Conclusão

O estudo de pontos de extremos de funções são importantes para o desenvolvimento e resolução de problemas nas diversas áreas em que se aplicam as funções polinomiais, em particular, na engenharia, para o cálculo de otimização de funções. É importante salientar que diversos problemas práticos são representados por funções de expressões difíceis de manipular algebricamente e que os polinômios são frequentemente utilizados para aproximar tais funções. No ensino médio, esta aproximação se limita as funções de grau menor ou igual a dois. Neste trabalho estudamos uma fundamentação teórico-matemática sobre otimização, bem como uma metodologia para o cálculo dos máximos e mínimos locais de funções cúbicas sem o uso de derivadas.

Através da metodologia empregada, ou seja, a transformação de funções, chegamos a uma equação que nos fornece as abscissas dos pontos de extremos locais da função cúbica. Buscamos ofertar ao professor de matemática da rede básica de ensino esta ferramenta para aprofundar o estudo de otimização relacionado as funções cúbicas.

As atividades propostas traz aos alunos e professores de matemática de educação básica, novos conceitos e uma nova metodologia para o cálculo dos pontos de extremos de funções cúbicas, utilizando conceitos que estejam dentro do escopo do ensino médio, que não são explorados. E, por consequência, esta proposta permite a aprendizagem dos próprios professores, visto que este assunto é abordado apenas no ensino superior, utilizando métodos mais avançados.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para o estudo de funções cúbicas e em outras disciplinas que envolvem aplicações matemáticas relacionadas ao cálculo de máximos e mínimos de funções cúbica.

Referências

ANTON H., BIVENS I. e DAVIS S., *Cálculo*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. v. 1.

BRASIL, *Base Nacional Comum Curricular*: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio>, Acesso em 20 jun. 2019.

BRASIL, *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* 1. ed. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006. v. 2.

GARCIA, C. Otimizando uma otimização. *Revista do professor de matemática*, São Paulo, n. 90, p. 13-16, ano 34, 2016.

GUIDORIZZI, H. L., *Um curso de cálculo.* 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KIELING, G. A., *Uma proposta pedagógica para o ensino de funções através de materiais manipuláveis* 2019. 184 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Maringá, PR, 2019.

LEITHOLD, L., *O cálculo com geometria analítica.* São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

LIMA, E. L., *Coordenadas no Plano,* 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

LIMA, E. et al., A Equação do Terceiro Grau. *Revista Matemática Universitária*, junho de 1987. Rio de Janeiro: SBM - 2006. v. 5. Disponível em <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo01.pdf>, Acesso em: 25 jan. 2019.

LOPES, B. F. S., *Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no ensino médio.* 2018. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, MT, 2018.

MARCHAND, L., *Multiplicadores de Lagrange: uma aplicação em problemas de otimização global restrita,* 2016. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática Aplicada Bacharelado) - Universidade Federal do Rio Grande, Instituto de Matemática, Estatística e Física. Rio Grande, RS, 2016.

MUNIZ NETO, A. C., *Fundamentos de Cálculo.* SBM, 2015. (coleção PROFMAT).

OLIVEIRA, S. R., ALUANI, T., *Experimento: Caixa de papel,*. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367>. Acesso em: 30 jan. 2019.

SOUZA, F. N. B., *Uma abordagem geométrica para as equações cúbicas* 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Recife, PE, 2013.

TAYLOR, R., HANSEN, R., Optimization of Cubic Polynomial Functions without Calculus. *Mathematics Teacher*. n. 6, fevereiro 2008, 408-411. v. 101.

VILLIERS, M., All cubic polynomials are point symmetric. *Learning & Teaching Mathematics*. n. 1, abril 2004, 12-15. Disponível em: <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/cubics.pdf>, Acesso em 25 jan. 2019.