CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MAIKON PAVEI BOFF

UMA PROPOSTA DE MATEMÁTICA CRÍTICA PARA SALA DE AULA

Maringá
2019

MAIKON PAVEI BOFF

UMA PROPOSTA DE MATEMÁTICA CRÍTICA PARA SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves

MARINGÁ
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Boff, Maikon Pavei
B673p Uma proposta de matemática crítica para sala de aula / Maikon Pavei Boff. -- Maringá, 2019.
xi, 89 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2019.

1. Educação matemática crítica. 2. Matemática financeira. 3. Combinatória e probabilidade. I. Neves, Eduardo de Amorim, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 510.1

Edilson Damasio CRB9-1.123

MAIKON PAVEI BOFF

UMA PROPOSTA DE MATEMÁTICA CRÍTICA PARA SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
Universidade Estadual do Paraná – Paranavaí

Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 03 de maio de 2019.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

"Mathematics is not about numbers, equations, computations or algorithms,

it's about understanding".

William Paul Thurston
Winner of the Fields Medal (1982)

Resumo

Esta dissertação tem o objetivo de apresentar aspectos da fundamentação teórica da Educação Matemática Crítica como, algumas situações que relacionam a matemática da sala de aula com problemas e situações do cotidiano. Nesse sentido, nossa proposta tem o intuito de ajudar a evidenciar a matemática como uma atividade social que favoreça a investigação, o diálogo e as reflexões. Para tanto, escolhemos diversas situações que, quando munido dos instrumentos matemáticos adequados, possibilitam ter uma melhor clareza sobre determinadas informações e podendo assim, contestar afirmações que antes considerávamos inquestionáveis.

Palavras-chave: Educação Matemática Crítica; Matemática Financeira; Combinatória e Probabilidade.

Abstract

This dissertation aims to present aspects of the theoretical foundation of Critical Mathematics Education. For example, some situations relating to mathematics in a classroom with daily problems and situations. In this sense, our proposal is intended to help highlight the math as a social activity that encourages research, dialogue and reflections. To this end, we chose several situations that, when fitted with the appropriate mathematical instruments, make it possible to have a better clarity about certain information and challenge assertions that were considered unquestioned.

Keywords: Critical Mathematics Education; Financial Mathematics; Combinatorics and Probability.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, por sua presença em toda minha caminhada e por ter me dado força e ânimo para superar os obstáculos encontrados.

Agradeço a todos da minha família, pelo amor, paciência, pelo apoio e por acreditarem na realização deste trabalho.

Agradeço às amizades realizadas ao longo desse tempo de estudo

Agradeço aos professores do programa da conceituada instituição UEM.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

Agradeço ao professor Dr. Thiago Fanelli Ferraiol, pelo apoio e contribuições no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador professor Dr. Eduardo de Amorin Neves, pelos ensinamento, pelas sugestões, pela paciência, pelo tempo dedicado ao desenvolvimento deste trabalho e pela amizade.

Agradeço em especial ao meu filho Miguel e à minha esposa Mayara. Reconheço que, nestes anos, em muitos momentos não estive presente. O tempo de ausência, de isolamento me dedicando aos estudos, vocês souberam entender. Compreenderam a atenção que não lhes foi devidamente dada, datas que não pudemos comemorar, sempre sacrificando minha presença pelo compromisso de estudo. Hoje, no fim desta longa caminhada, paro para dizer o meu muito obrigado pela compreensão, pelo estímulo nas horas de desânimo e pelas alegrias compartilhadas. Vocês são muito importantes! Amo vocês!

INTRODUÇÃO

A educação matemática como campo de pesquisa, busca contribuir com discussões em torno do ensino e aprendizagem de matemática. O que ensinar? Porque ensinar? Como ensinar? Como avaliar? Quais competências desenvolver?

A prática do professor atinge diretamente a formação e o desempenho do estudante. Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, o perfil de saída do aluno do Ensino Médio está indicada no Art.35 da Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996:

> "O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidade: I - a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina."(BRASIL,1996,p.14).

De acordo com Skovsmose(2007), durante toda trajetória estudantil um aluno terá resolvido em torno de 10.000 exercícios do tipo: "calcule o valor de..." "resolva a equação..." "ache a medida de...". São exercícios que representam repetição e uma série de comandos. No início do século XX, o ensino de matemática foi caracterizado por este estilo de repetição, no qual alguns dos alunos compreendiam o que faziam e até conseguiam raciocinar, porém, a grande maioria esquecia do que haviam decorado.(ONUCHIC e ALLEVATO,2004).

Dessa forma, ensina-se a calcular o valor de x em equações, determinar o valor do delta, sempre justificando para o aluno que ele precisará desse conteúdo para acompanhar a série seguinte. Ensina-se a calcular porcentagens e juros compostos com fórmulas e as pessoas não conseguem decidir entre uma compra à vista ou a prazo, (não quer dizer que atividades do tipo "calcule" devam ser deixadas de lado, porém, salientamos que não são suficientes para o desenvolvimento como um todo). Com facilidade, um estudante consegue descobrir os termos de uma progressão geométrica, mas tem dificuldade em diferenciar um bom investimento de um golpe em forma de pirâmide financeira. Ensina-se problemas de contagem, análise combinatória e probabilidade e as pessoas continuam apostando em jogos de loteria.

No contexto nacional as respostas são mais enfatizadas que as perguntas e temos um ensino essencialmente por repetição e não para reflexão. Vivemos a "era da informação" e isso tem criado impactos na economia, política e educação, o que aumenta a importância de desenvolver nos jovens estudantes competências e habilidades que implicam em pensamentos críticos. Atualmente, existe um excesso de informação em que é preciso saber separar o que é útil, o que é válido, e interpretar o significado da informação. O avanço tecnológico não faz interpretações críticas para as pessoas, são as pessoas que precisam se preparar para serem cidadãos críticos. Será que de fato a escola contribui para tal formação crítica? Segundo os PCN's temos que:

> "Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação."(BRASIL,2002,p.111).

Neste sentido, a intenção do trabalho é expor algumas situações do cotidiano e propor algumas atividades para serem exploradas em sala de aula, de modo que propicie aos alunos a utilizarem seus conhecimentos matemáticos para refletirem sobre suas práticas. Para isso, elegemos tópicos relacionados ao ensino de matemática financeira, probabilidade, esperança e jogos de azar sob a perspectiva da Educação Matemática Crítica (EMC).

Assim, os objetivos do trabalho são:

1. Realizar um breve estudo sobre fundamentação teórica da Educação Matemática Crítica.

2. Pesquisar e aprofundar os assuntos matemáticos elencados.

3. Estabelecer reflexões e conexões entre EMC e o conhecimento matemático abordado como possibilidades para a sala de aula.

4. Contribuir com o desenvolvimento da autonomia e criticidade.

O presente texto está organizado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo, faremos uma exposição de conceitos sobre educação matemática crítica.

No segundo capítulo, apresentaremos os conceitos de matemática financeira, combinatória e probabilidade necessários para o entendimento dos capítulos seguintes, expondo inclusive exemplos que despertam um olhar crítico.

No terceiro capítulo, faremos algumas comparações sobre o custo para se manter um automóvel e a partir disso, quanto aproximadamente seriam os ganhos dos motoristas de aplicativo. Destacaremos também questões como "comprar ou alugar?", "pagar à vista ou parcelado?".

No quarto capítulo apresentaremos algumas situações com intuito de mostrar como a falta de conhecimento em matemática pode induzir interpretações equivocadas. Destacaremos alguns pontos sobre a reforma da previdência e apresentaremos uma simulação do sistema de capitalização.

No quinto capítulo, analisaremos um vídeo em que é apresentado um esquema para melhorar as apostas na lotofácil e a partir daí realizaremos alguns apontamentos. Exploraremos conceitos como distribuição de probabilidade e valor esperado em alguns jogos de azar.

No sexto capítulo, relataremos sobre a aplicação dos conceitos de probabilidade e valor esperado em uma turma do curso de Formação de Docentes e precedido de tal, algumas atividades que relacionam matemática crítica.

Para finalizar, no sétimo capítulo, através do trabalho desenvolvido, faremos as considerações finais e a abertura para possíveis trabalhos.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

Neste capítulo, vamos apresentar a fundamentação teórica sobre a Educação Matematica Crítica (EMC), pautada em especial, nas obras de Ole Skovsmose, que nos contemplou com excelentes abordagens e colocações sobre o papel da educação matemática num contexto democrático, reflexivo e politizado para melhorar o processo de ensino aprendizagem de matemática. Apesar de não encontrarmos a nomenclatura EMC em documentos como LDBE, PCN´s, DCE´s e BNCC, entendemos que a EMC está em pleno acordo com os PCN´s quando afirma:

> “A Matemática do ensino médio pode ser determinante para a leitura das informações que circulam na mídia e em outras áreas do conhecimento na forma de tabelas, gráficos e informações de caráter estatístico. Contudo, espera-se do aluno nessa fase da escolaridade que ultrapasse a leitura de informações e reflita mais criticamente sobre seus significados. Assim, o tema proposto deve ir além da simples descrição e representação de dados, atingindo a investigação sobre esses dados e a tomada de decisões.”(BRASIL,2002,p.126).

O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja pela grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL,2013). Assim, a escola assume um papel essencial. Ela necessita conduzir de forma competente o conhecimento formal científico historicamente construído e acumulado, preparando os alunos para compreender a sociedade em que vivem e nela poder atuar de forma crítica.

Skovsmose (2007), afirma que a sala de aula não é o único lugar para se aprender matemática, e expõe exemplos de locais ricos fora do sistema de ensino, como bancos, tapeçarias, lojas, supermercados, noticiários, natureza, etc. Mais ainda, Freire afirma que: "o conhecimento é continuamente criado e necessita a presença curiosa de sujeitos confrontados com o mundo".(FREIRE,1973,p.101). Dessa forma, é necessário deixar de ver a matemática como algo pronto e acabado, afinal de contas, o conhecimento matemático também está em constante construção e elaboração.

Nessa perspectiva, ensinar e aprender matemática deverá ser muito mais do que reconhecer símbolos, manejar fórmulas, utilizar regras, técnicas, perceber problemas, equacioná-los ou resolvê-los. É necessário atentar-se à competências para interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, sensibilizar-se e posicionar-se de maneira crítica.

Segundo Bicudo,

> [...] os alunos só adquirirão uma postura crítica em relação aos conhecimentos matemáticos se, através de um trabalho competente do professor, tornarem-se capazes de interpretar, analisar e comparar as informações matemáticas que lhes chegam no dia a dia, avaliando sua consistência e veracidade. (BICUDO, 2011, p.56)

O movimento da educação matemática crítica surgiu na década de 80 articulado por vários personagens, entre eles, Marilyn Frankenstein e Arthur Powell, nos Estados Unidos; Munir Fasheh, na Palestina; Paulus Gerdes e John Volmink, na África; Stieg Mellin-Olsen e Ole Skvosmose na Europa; e Ubiratan D´Ambrosio, no Brasil. Muitos não usavam a denominação EMC.(SKOVSMOSE,2001).

Um dos impulsionadores da EMC na Europa foi Ole Skvosmose, dinamarquês, professor e pesquisador na área de educação matemática e democracia. Autor de várias obras socioculturais, Skovsmose assume que a educação matemática crítica não é um objeto da matemática e sim uma visão sociopolítica de ensino e aprendizagem de matemática ligada ao desenvolvimento da alfabetização matemática em que prepara os estudantes para serem cidadãos e introduz a matemática como ferramenta para analisar de maneira crítica feitos relevantes socialmente.

Sobre Educação Matemática Crítica, Skovsmose(2007) afirma:

> Eu estou interessado no possível papel da educação matemática como um porteiro, responsável pela entrada de pessoas, e como ela estratifica as pessoas. Eu estou preocupado com todo discurso que possa tentar eliminar os aspectos sociopolíticos da educação matemática e definir obstáculos de aprendizagem, politicamente determinados, como folhas pessoais. Eu estou preocupado a respeito de como o racismo, sexismo, elitismo poderiam operar na educação matemática. Eu estou preocupado com a relação entre educação matemática e a democracia.(SKOVSMOSE, 2007, p.176)

É importante ressaltar que a educação matemática crítica não é uma metodologia de ensino. Ela se apresenta como uma corrente da educação matemática em que professores e alunos, através do diálogo e senso crítico desenvolvem a democratização do saber. Utilizando utensílios que os ajudem, tanto nos estudos quanto na procura por opção para solucionar a situação, é necessário que os estudantes desenvolvam habilidades de interpretação e reflexão para que possa atribuir significados (CARDOSO, 2017).

Quando aborda a questão do criticismo, Pais(2008) afirma que:

> Num sentido básico, percebermos o criticismo como um modo de perceber os processos através dos quais os hábitos e as ideias se naturalizaram. É a interrogação do que "é", para que "é", porque "é", e como "é" (dado como adquirido), para dar um passo em frente e ver além da naturalização dos discursos e práticas que nos constroem como sujeitos. É a arqueologia que procura desconstruir para construir, recompor de forma transformativa. Neste sentido, a interrogação crítica oferece oportunidades para a emancipação, pois não restringe a investigação ao atual, mas procura alternativas a essas realidades naturalizadas.(PAIS,2008,p.2).

Segundo a concepção de Skovsmose (2001), ao investigar e buscar alternativas para resolver conflitos estamos sendo críticos. Em suas obras notamos várias fontes de inspiração que influenciaram a EMC, como a Teoria Crítica de Frankfurt que propaga a ideia de autonomia e reflexão crítica. Neste mesmo sentido, Bourdie tem papel fundamental na França assim como o educador Paulo Freire no Brasil.

Assim, a EMC preocupa-se com o desenvolvimento de uma educação matemática que apoie a democracia, tendo como um de seus objetivos centrais refletir sobre os papéis sociais e políticos que a matemática e a educação matemática desempenham na sociedade.

Tendo em vista alguns conceitos no âmbito da Educação Matemática Crítica, destacamos que expressões como “a matemática é exata”, “os números não mentem”, “tão certo como um e um são dois” são aceitas sem restrições como verdadeiras. Para Borba e Skovsmose (2001), dados matemáticos e estatísticos são muito utilizados por governantes para dar sustentação às discussões na sociedade e se referem a uma “linguagem de poder”.

De modo geral, as argumentações matemáticas intimidam as pessoas que tem dificuldade em pensar claramente sobre os números. Políticos usam com bastante convicção e são unanimes em suas falas, o que leva a população a acreditar e aceitar medidas impostas: “se disser isso, ninguém vai discordar”. Para Skovsmose (2007), decisões de nível político e social baseadas na matemática não são neutras. Além disso destaca que:

> A ideologia da certeza designa uma atitude para com a matemática. Refere-se um respeito exagerado em relação aos números. A ideologia afirma que a matemática, mesmo quando aplicada, apresentará soluções corretas asseguradas por suas certezas. A precisão da matemática (pura) é como que transferida para a precisão das soluções aos problemas. A matemática é vista como uma ferramenta adequada para resolver problemas de uma área abrangente de questões cotidianas e tecnológicas. Essa afirmação tem uma raiz na filosofia da matemática, mas também, na matemática trabalhada em sala de aula. A ideologia da certeza representa um elemento dogmático alimentado pela educação matemática, mas não, espera-se, por todas as suas modalidades. (SKOVSMOSE, 2007,p.81).

A sala de aula tradicional contribui para a ideologia da certeza (IC), uma vez que a matemática trabalhada em sala foi pensada e preparada em contextos que Skovsmose denomina de *realidade virtual*, ou seja, problemas que são associados a uma única resposta, em situações de natureza muito particular, porém, vivemos em um mundo real.(SKOVSMOSE,2007).

Para exemplificarmos essa situação de *realidade virtual* presente nos livros didáticos, considere o exemplo:

Uma imobiliária lançou um loteamento com lotes de três tamanhos, o menor tem $80m^2$ *e o intermediário* $160m^2$*. Sabendo que as áreas dos lotes estão em progressão geométrica, qual é a medida da área do lote maior?*

Essa situação, embora a contextualização tenha sido inventada, não é uma situação real. Existe terreno de $80m^2$ em algum loteamento no Brasil? Será que alguma empresa, ao lotear, leva em consideração P.G para determinar os tamanhos dos lotes? Será que nesse município em que está o loteamento, o terreno de $80m^2$ poderá ser escriturado levando em conta que existe um tamanho mínimo para obter essa documentação? Caso os estudantes fizessem esses e outros levantamentos e questionamentos sobre a situação dos terrenos, o professor poderia descartar dizendo que o que eles precisam para resolver o exercício já está no enunciado. Sobre essa situação observa-se que:

> [...] em uma realidade virtual, o professor de matemática tem as justificativas para assumir que todos os dados relevantes para resolver os problemas estão apresentados com exatidão; que as informações não-relevantes para a solução do problema são deixadas de lado; que é possível resolver o problema por meio de técnicas matemáticas já apresentadas e bem definidas; e que há uma e apenas uma solução correta.(SKOVSMOSE, 2007, p.83)

Estamos preocupados em abordar situações existentes no cotidiano, no mundo em que as pessoas enfrentam longas filas em lotéricas para jogar na loteria, no mundo em que as pessoas fazem financiamentos e refinanciamentos e as dívidas só aumentam. Para lidar com situações que envolvem conceitos matemáticos no cotidiano é importante desenvolver algumas habilidades e competências que começam com o letramento. O conceito de letramento é recente no cenário educacional brasileiro. Segundo Soares (2000), a palavra letramento

> é a versão para o português da palavra da língua inglesa litteracy (...), que corresponde ao estado ou condição que assume aquele que aprende a ler e escrever. Implícita nesse conceito está a ideia de que a escrita traz consequências sociais, culturais, políticas, econômicas, cognitivas, linguísticas, quer para o grupo social em que seja introduzida, quer para o indivíduo que aprenda a usá-la. Em outras palavras: do ponto de vista individual, o aprender a ler e escrever – alfabetizar-se, deixar de ser analfabeto, tornar-se alfabetizado, adquirir a "tecnologia" do ler e escrever e envolver-se nas práticas sociais de leitura e de escrita – tem consequências sobre o indivíduo e altera seu estado ou condição em aspectos sociais, psíquicos, culturais, políticos, cognitivos, linguísticos e até mesmo econômicos; do ponto de vista social, a introdução da escrita em um grupo até então ágrafo tem sobre esse grupo efeitos de natureza social, cultural, política, econômica, linguística. O "estado" ou a "condição" que o indivíduo ou grupo social passam a ter, sob o impacto dessas mudanças, é que é designado por litteracy.(SOARES, 2000, P.17-18).

Existem outras denominações voltadas para isso, tais como alfabetismo, alfabetismo funcional, letramento, literacia, numeracia, numeramento, alfabetismo matemático. (FONSECA, 2004). Dessa forma, percebe-se que a alfabetização não está somente relacionada ao saber ler e escrever, e sim, à habilidade de interpretação crítica. Giroux (1989) destaca que:

> [...] a alfabetização, como construção radial, teve de ser enraizada em um espírito de crítica e em um projeto de possibilidades que permitissem às pessoas participar no entendimento e na transformação de suas sociedades. Como ambos, a supremacia das habilidades específicas e de formas particulares de conhecimento, a alfabetização tinha que se tornar um pré-requisito para a emancipação social e cultural.(GIROUX, 1989, p.148).

Skovsmose (2007) aponta a alfabetização matemática como pré-requisito para desenvolver a democracia numa sociedade tecnológica.

Para Bicudo (2005), "uma população matematicamente analfabeta pode ser convencida, por exemplo, que programas de bem-estar social são responsáveis por seu decadente padrão de vida".

Assim como Freire abordou o conceito de alfabetização, aptidão literária que vai além do ler e escrever e ter domínio sobre a língua portuguesa, mas sim, desenvolver competência para ler e interpretar situações sociais, Skovsmose destaca o termo "matemacia", que está relacionada ao suporte para o exercício da cidadania crítica.(SKOVSMOSE, 2007).

A noção de matemacia faz referência a certas competências, sendo elas, lidar com noções de matemática, isto é, dominar conceitos, resultados e algoritmos; aplicar essas noções em diferentes contextos e refletir sobre essa aplicação, ou seja, avaliar criticamente.

Para Skovsmose (2007),

> [...] a educação matemática crítica está relacionada com o desenvolvimento de competências da matemacia, de tal modo que pode prover melhorias similares àquelas expressas pelo letramento. Um significado direto de poder refere-se às possibilidades de um individuo ultrapassar as limitações que uma situação sociopolítica impôs a um grupo de pessoas. De forma mais geral, matemacia significa um suporte para o cidadão crítico, bem como para qualquer grupo de pessoas que nós tenhamos em mente.(SKOVSMOSE,2007,p.76).

Milani (2013), destaca que a matemacia consiste em uma compreensão a respeito de como a matemática escolar pode fazer a transformação da leitura do mundo de maneira crítica.

Desta forma, a matemacia é uma alfabetização matemática como uma possibilidade democrática de incentivar a cidadania por meio da (educação) matemática, promovendo uma competência de lidar com situações do mundo real.

Para possibilitar tal prática, Skovsmose (2000) sugere um ambiente através de uma matriz de aprendizagem, dividida em 6 ambientes, onde apresenta as formas de como as aulas de matemática se organizam e como poderiam se organizar,fazendo referências à matemática pura, à semi-realidade e à situações da vida real, por meio do paradigma do exercício, que corresponde a sala de aula tradicional e dos cenários de investigação.

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Tabela 1.1: Ambientes de aprendizagem

De modo geral os professores preferem as aulas tradicionais, no caso, ambientes (1) e (3), pois geram menos desgaste, os exercícios a serem propostos foram resolvidos antecipadamente e as chances de não conseguirem responder algum questionamento são baixas, ou seja, o professor permanece no paradigma do exercício.(SKVOSMOSE,2000).

Para Chiarello (2014), o ensino de matemática inspirado pelos cenários de investigação possui a finalidade de mudar a forma de como a matemática é apresentada e trabalhada na sala de aula. Em relação ao trabalho do professor e alunos considerando-se os ambientes de aprendizagem, Skovsmose (2000) afirma que deve haver movimentação entre os ambientes, porém, ensinar através de cenários de investigação envolve muitas dificuldades para o professor, desafios para os alunos e um grande esforço de todas as partes envolvidas, pois o professor não sabe os questionamentos que poderão surgir e nem o rumo que a aula poderá tomar, o que normalmente causa-lhe insegurança.

Frente ao exposto acima, nosso objetivo é apresentar situações para se trabalhar em sala de aula de modo a explorar matemática relacionada à realidade.

CAPÍTULO 2

TÓPICOS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo que segue, apresentaremos conceitos de matemática financeira, combinatória e probabilidade que serão utilizados nos capítulos seguintes. Para o leitor que já tem familiaridade com o assunto, o capítulo pode ser omitido. Para o que se segue, vamos seguir as referências de Morgado (2005), Morettin (2017), Iezzi (1995), Meyer (1970), Castanheira (2010) e Camargo (2007).

2.1 Matemática financeira

Práticas financeiras e comerciais já existiam desde os babilônicos cerca de 2000 a.C. (EVES 2004). Entre os registros mais antigos de problemas matemáticos propostos por povos do oriente, uma tábula do acervo do Museu do Louvre, datada de 1700 a.C. apresenta o seguinte problema:

"Por quanto tempo deve-se aplicar certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% *para que ela dobre?"*(EVES, 2004, p.77).

De maneira mais geral, esse problema pode ser reescrito do seguinte modo: Qual é o *montante* M obtido através de um capital inicial C (chamado de valor atual ou valor presente) aplicado a uma *taxa* i por um certo *período* de tempo n? O valor ganhado além do capital inicial é chamado de *juros* J [1]. A incorporação dos juros ao capital denomina-se *capitalização* e a soma $C + J$ é o que denominamos de *montante* M.

[1]juros pode ser entendido como a remuneração do capital aplicado ou custo do crédito

Para construir o conceito de juros compostos e entender melhor como o dinheiro se desloca no tempo precisamos antes abordar alguns conceitos de porcentagem e progressões geométricas.

2.1.1 Porcentagem, descontos e acréscimos

Realizar operações ou comparações entre frações que têm numeradores e denominadores diferentes nem sempre é uma tarefa fácil, por exemplo, descobrir qual fração é maior, $\frac{23}{20}$ ou $\frac{20}{17}$. Para calcular a soma entre essas frações, podemos reescrevê-las como frações equivalentes que tenham os mesmos denominadores. Em problemas contextualizados é importante dar interpretações para essa razão. Nesse sentido, as razões cujo o denominador é 100 são mais esclarecedoras para interpretar a relação de proporção entre duas grandezas, e por isso está fração cujo denominador é 100 ganha nome e nomenclatura própria.

Definição 2.1. *Dá-se o nome de* ***porcentagem*** *a uma razão na forma $p/100$, em que p é um número real. Essa razão é comumente escrita na forma $p\%$. O símbolo "%" significa por cento.*

A tabela abaixo fornece, formas equivalentes de representar alguns números reais.

Fração	**Número Decimal**	**Razão Centesimal**	**Porcentagem**
36/90	0,40	40/100	40%
9/12	0,75	75/100	75%
64,8/54	1,20	120/100	120%
4/5	0,20	20/100	20%

Note que, é bem mais simples verificar a proporção entre o numerador e o denominador através da razão centesimal, e também é relativamente mais fácil fazer algum tipo de interpretação de dados, quando utiliza-se o número decimal ou porcentagem.

Para exemplificar essa afirmação, considere uma cidade com 439.238 habitantes, nos quais 231.341 são mulheres e 207.897 são homens. Qual a proporção de mulheres nessa cidade? Olhar a fração

$$\frac{231.341}{439.238},$$

não parece ser muito esclarecedora. Agora, ao deixar a fração em número decimal ou porcentagem essa interpretação é imediata

$$\frac{231.341}{439.238} \approx 0.5266 = \frac{52,66}{100} = 52,66\%.$$

Ou seja, a cada 100 pessoas dessa cidade aproximadamente 52 são mulheres e 48 são homens.

Já no contexto de matemática financeira, as porcentagens também são frequentes.

Exemplo 2.2. *Uma aplicação financeira promete um rendimento de* 6% *ao ano. Nesse caso, quem depositar* R$ 800,00 *nessa aplicação, quanto receberá, após um ano? Para calcular o juros basta fazer:*

$$6\% \times 800 = \frac{6}{100} \times 800 = 0,06 \times 800 = \text{R\$ } 48,00.$$

Logo o montante ao final do período será de $M = C + J = 800 + 48 = \text{R\$ } 848,00$.

Devemos ter alguns cuidados ao trabalhar com porcentagens no qual, como fazer desconto ou acréscimos sucessivos.

Exemplo 2.3. *Em novembro de* 2017*, o preço do tomate era de* R$ 1,99 *o kg. Em fevereiro de* 2018*, o preço do tomate subiu* 100% *do preço original e caiu* 16% *no mês de abril de* 2018*. Qual foi o percentual de aumento do preço do tomate?*

De maneira ingênua, muitos poderiam resolver de maneira errada fazendo

$$100\% - 16\% = 84\%.$$

Neste caso, o preço do tomate seria de R$ 3,66.

Porém, a maneira correta de fazer esse cálculo é começar com o preço de 1,99 *e aumentar* 100%*, ou seja*

$$1,99 + 100\% \times 1,99 = 1,99 + 1 \times 1,99 = 1,99 \cdot (1+1) = 3,98.$$

Agora com a diminuição de 16% *do preço atual do tomate terá um decréscimo de*

$$3,98 - 16\% \times 3,98 = 3,98 \cdot (1 - 0,16) = 3,34.$$

Note que, poderíamos ter feito esse cálculo diretamente

$$1,99 \times (1+1) \cdot (1 - 0,16) = 3,34.$$

E, esse valor representa um aumento de 68%*, pois*

$$1,99 \times p\% = 3,34 \Leftrightarrow$$
$$p\% = \frac{3,34}{1,99} \approx 1,68$$

Por outro lado, se a ordem das alterações dos preços tivessem sido ao contrário, isto é, se o preço tivesse caído 16% *e depois aumentado* 100%. *Qual o percentual de aumento neste período?*

Procedendo de forma análoga ao feito acima, temos que

$$1,99 \cdot (1 - 0,16) \cdot (1 + 1) = 3,34,$$

o que representa um aumento também de 68%*.*

De modo um pouco mais em geral, a ordem desses eventos não modifica o resultado final.

Acréscimo seguido de desconto ou desconto seguido de acréscimo: Elevar o preço de um produto em $p_1\%$ e depois realizar um desconto de $p_2\%$, é o mesmo que dar um desconto de $p_2\%$ e depois realizar um acréscimo de $p_1\%$. De fato, considere x o preço do produto, assim

$$\begin{aligned}(x + p_1\%x) - p_2\%(x + p_1\%x) &= (x + p_1\%x)(1 - p_2\%)\\ &= x(1 + p_1\%)(1 - p_2\%).\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}(x - p_2\%x) + p_1\%(x - p_2\%x) &= (x - p_2\%x)(1 + p1\%)\\ &= x(1 + p_1\%)(1 - p_2\%).\end{aligned}$$

Descontos sucessivos: Dar um desconto de $p_1\%$ e em seguida dar um outro desconto de $p_2\%$ é igual a:

$$\begin{aligned}(x - p_1\%x) - p_2\%(x - p_1\%x) &= (x - p_1\%x)(1 - p_2\%)\\ &= x(1 - p_1\%)(1 - p_2\%).\end{aligned}$$

Por outro lado dar um desconto de $(p_1 + p_2)\%$ é igual a:

$$\begin{aligned}x - (p_1 + p_2)\%x &= x - p_1\%x - p_2\%x\\ &= x(1 - p_1\% - p_2\%).\end{aligned}$$

Observe que $(1 - p_1\%)(1 - p_2\%) = (1 - p_1\% - p_2\% - p_1\%p_2\%) < (1 - p_1\% - p_2\%)$. Portanto, dar o desconto de $p_1\%$ e, em seguida dar um outro desconto de $p_2\%$ não é igual a dar um desconto de $(p_1 + p_2)\%$

Acréscimos sucessivos Dar um acréscimo de $p_1\%$ e em seguida dar um outro acréscimo de $p_2\%$ é igual a:

$$\begin{aligned}(x+p_1\%x)+p_2\%(x+p_1\%x) &= (x+p_1\%x)(1+p_2\%)\\ &= x(1+p_1\%)(1+p_2\%).\end{aligned}$$

2.1.2 Progressão geométrica

Definição 2.4. *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica* $(a_1, a_2, \cdots)$ *na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente. Esse quociente constante é representado por* q *e chamado de razão da PG, isto é para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$.

- **Termo geral**

  Dada uma PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots)$ de razão q podemos escrever qualquer termo em função do primeiro.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q\\ a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q)\cdot q = a_1 \cdot q^2\\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3\\ \vdots &= \vdots\\ a_n &= a_{n-1}\cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}\end{aligned}$$

  Note que, o termo geral da sequência $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ com $n \in \mathbb{N}^*$ pode ser visto, como uma função exponencial[2] do tipo $f(x) = b \cdot a^x$ em que o domínio é o conjunto dos números naturais.

- **Soma dos n primeiros termos da PG**

  É possível calcular a soma dos n primeiros termos de uma PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$ de razão $q \neq 1$. Para isso, denote por S_n a soma dos n primeiros termos da PG

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \tag{2.1}$$

[2] Uma função $f : R \to \mathbb{R}_+^*$ é chamada de função exponencial de base **a** quando existe um número real **a**, com $\mathbf{a} > 0$ e $\mathbf{a} \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Multiplicando os dois membros pela razão q temos:

$$\begin{aligned} q \cdot S_n &= q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) && (2.2)\\ &= a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+1} && (2.3) \end{aligned}$$

Subtraindo (2.1) de (2.2), obtemos:

$$\begin{aligned} qS_n - S_n &= (a_2 + a_3 + a_4 + \cdot + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdot + a_n)\\ &= a_{n+1} - a_1 \end{aligned}$$

Colocando S_n em evidência e depois isolando S_n obtemos a expressão para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

$$\therefore S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)}. \qquad (2.4)$$

Dentre todas as aplicações, os conceitos de progressão geométrica são fundamentais para resolução de problemas de matemática financeira, como mostra o exemplo abaixo:

Exemplo 2.5. *Com o recebimento de uma herança, Mayara decidiu fazer uma reserva financeira investindo um capital de* $R\$\,50.000,00$ *numa aplicação com taxa de rendimento* $i = 5\%\,a.a.$

Podemos representar os valores ao final de cada mês por uma sequência. Neste caso, $a_1 = 50.000$ e a razão é $q = (1 + 0,05) = 1,05$.

$a_1 = 50.000$

$a_2 = 50.000 \cdot 1,05 = 52.500$

$a_3 = 52.500 \cdot 1,05 = 55.125$

$a_4 = 55.125 \cdot 1,05 = 57.881,25$

$a_5 = 57.881,25 \cdot 1,05 = 60.775,3125$

$\vdots$

$a_n = 50.000 \cdot 1,05^{n-1}$ em que n corresponde ao tempo de aplicação.

Ao subtrair do montante o capital inicial obtém-se os juros ao final de cada mês, isto é, $Juros = Montante - Capital$. Neste caso, temos que $j_n = 50.000\left[(1,05)^{n-1} - 1\right]$.

Podemos representar o rendimento dos juros de cada mês por uma sequência em que o primeiro valor de juros obtido é $j_2 = 2.500$ e a razão é $q = (1 + 0,05) = 1,05$. Desta forma, podemos calcular quanto foi pago de juros aplicando a soma de P.G $S_n = \dfrac{2.500\,(1,05^{n-1} - 1)}{1,05 - 1} = \dfrac{2.500}{0,05} \cdot (1,05^{n-1} - 1) = 50.000\left[(1,05)^{n-1} - 1\right]$

2.1.3 Juros compostos e Taxas equivalentes

No regime de juro composto, o juro é calculado sempre sobre o resultado da aplicação anterior, ou seja, calculamos "juro sobre juro".

Iniciaremos o conceito considerando o seguinte exemplo:

Exemplo 2.6. *Qual o montante gerado pelo investimento de* R$ 1.000,00 *à taxa de* 0,6% *ao mês sob o regime de juro composto?*

início	$C_0 = 1000$	$C_0 = 1000$
após 1 mês	$M_1 = 1000 + 1000 \cdot 0,006$ $M_1 = 1006$	$M_1 = 1000(1 + 0,06)^1$
após 2 meses	$M_2 = 1006 + 1006 \cdot 0,006$ $M_2 = 1012,036$	$M_2 = 1000(1,006)(1,006)$ $M_2 = 1000(1 + 0,06)^2$
após 3 meses	$M_3 = 1012,036 + 1012,036 \cdot 0,006$ $M_3 = 1018,108216$	$M_3 = 1000(1,006)(1,006)(1,006)$ $M_3 = 1000(1 + 0,06)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
após n meses		$M_n = 1000(1 + 0,06)^n$

Tabela 2.1: Juros compostos

De maneira geral, podemos representar os cálculos realizados do montante ao final de cada mês:

- após 1 mês: $M_1 = C_0(1 + i)$
- após 2 meses: $M_2 = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2$
- após 3 meses: $M_3 = C_0(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^3$
- após 4 meses: $M_4 = C_0(1 + i)(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^4$

$\vdots$

- após n meses: $M_n = C_0(1 + i)^n$

A fórmula $M_n = C_0(1+i)^n$ mostra como deslocar o dinheiro no tempo, basta realizar o seguinte processo:

$$V_{\text{futuro}} = V_{\text{hoje}} \times (1+i)^n. \tag{2.5}$$

Como podemos identificar se o juros de $0,05\%$ ao dia cobrado pelo atraso em uma conta de luz é pouco ou é muito? Como podemos comparar se o juros de 18% ao mês cobrado por um banco por atrasar uma fatura do cartão de crédito é muito ou pouco? É mais que $0,05\%$ ao dia cobrado pela companhia de energia elétrica? Um milhão daqui 30 anos tem maior valor que cem mil reais hoje? É melhor parcelar uma compra em 4 vezes de R\$ $250,00$ ou em 8 vezes de R\$$130,00$? Como comparar dois tipos de investimentos e verificar qual é mais vantajoso? Para todos esses tipos de problemas é necessário uniformizar os períodos.

Duas taxas, se apresentadas em tempos distintos, são ditas *taxas equivalentes* quando aplicadas ao mesmo capital, pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo juro ou montante. No regime de juros composto, as taxas de juros **não** são proporcionais, ou seja, uma taxa de 12% ao ano não é equivalente a 1% ao mês.

Para levar uma **taxa mensal** para seu respectivo **valor anual**,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{i_{\text{mês}}}{100}\right)^{12} &= 1+\frac{i_{\text{anual}}}{100}\\
\frac{i_{\text{anual}}}{100} &= \left(1+\frac{i_{\text{mês}}}{100}\right)^{12} - 1\\
i_{\text{anual}} &= \left(\left(1+\frac{i_{\text{mês}}}{100}\right)^{12} - 1\right)\cdot 100
\end{aligned}$$

Em notação de porcentagem temos:

$$i\%_{\text{anual}} = (1+i\%_{\text{mês}})^{12} - 1. \tag{2.6}$$

Para levar uma **taxa anual para mensal**, basta fazer a conta inversa

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{i_{\text{mês}}}{100}\right)^{12} &= 1+\frac{i_{\text{anual}}}{100}\\
\frac{i_{\text{mês}}}{100} &= \left(1+\frac{i_{\text{anual}}}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1\\
i_{\text{mês}} &= \left(\left(1+\frac{i_{\text{anual}}}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1\right)\cdot 100
\end{aligned}$$

Em notação de porcentagem temos:

$$i\%_{\text{mês}} = (1 + i\%_{\text{anual}})^{\frac{1}{12}} - 1. \tag{2.7}$$

Para levar uma **taxa diária** para seu respectivo **valor mensal**, basta considerarmos o período de 30 dias!

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{i_{\text{dia}}}{100}\right)^{30} &= 1 + \frac{i_{\text{mês}}}{100} \\
\frac{i_{\text{mês}}}{100} &= \left(1 + \frac{i_{\text{dia}}}{100}\right)^{30} - 1 \\
i_{\text{mês}} &= \left(\left(1 + \frac{i_{\text{dia}}}{100}\right)^{30} - 1\right) \cdot 100
\end{aligned}$$

$$i\%_{\text{mês}} = (1 + i\%_{\text{dia}})^{30} - 1. \tag{2.8}$$

De modo geral, se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo t é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo t, é

$$I = (1 + i)^n - 1.$$

Para diferenciar com clareza os tipos de taxas, vamos nos basear nas definições de Castanheira:

- **Taxa nominal:** Quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital não coincide com aquele a que a taxa está referida.

  Exemplo 2.7. *Se uma grandeza cresce com taxa mensal constante igual a 0,6%, sua taxa de crescimento anual é **I** tal que* $1+I = (1+0,006)^{12} \cong 1,0744$. *Daí, a taxa anual é* $I \cong 0,0744 = 7,44\%\, a.a$

  Por outro lado para saber qual é a taxa mensal equivalente a 20% *ao ano deve-se resolver a equação* $(1 + 0,2) = (1 + i)^{12}$, *ou seja,* $\sqrt[12]{1,2} - 1 = i$. *Portanto,* $i = 1,53\%\, a.m$

- **Taxa efetiva:** Quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquele a que a taxa está referida.

Exemplo 2.8.

" 24% a.a. com capitalização anual."

" 3% a.m. com capitalização mensal."

" 10% a.t com capitalização trimestral."

- **Taxa aparente:** É a taxa que utilizamos sem levarmos em conta a inflação do período.

- **Taxa real:** É a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação.

Exemplo 2.9. *Vamos determinar a taxa de rendimento real de uma aplicação cuja taxa aparente foi de* $7,44\%$ *ao ano, durante um ano em que a inflação foi* $4,5\%$.

$$(1+0,0744) = (1+i)(1+0,045)$$
$$\frac{1,0744}{1,045} = (1+i)$$
$$i = 2,81\%$$

2.1.4 Cálculo de prestações e amortização

Vamos determinar a fórmula que relaciona a prestação com o valor atual, taxa de juros e número de prestações, para fazer os cálculos de pagamento de dívidas de forma parcela.

A *Amortização* é um processo para saldar uma dívida através de pagamentos periódicos. O pagamento de uma dívida em parcelas deve contemplar a restituição tanto do capital quanto dos juros, sendo que os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor.

Assim, temos: **Prestação = amortização + juros**

Dentre os principais sistemas de amortização estão o *sistema de amortização constante (SAC)* e o *sistema price* ou *francês (PRICE)*. Para exemplificar cada um dos modelos, vamos considerar um financiamento de R\$ $10.000,00$ que será pago ao final de 5 meses à taxa de 4% ao mês.

Sistema SAC: A amortização da dívida é constante e igual em cada período (Usado para financiamento habitacional).

No exemplo que vamos apresentar, o devedor paga o principal em 5 pagamentos sendo que as amortizações são sempre constantes e iguais. Assim, cada amortização será $\frac{1}{5}$ da dívida, isto é, R\$ 2.000, 00.

Época	Amortização	Juros	Prestação	Estado da dívida
0	-	-	-	10000
1	2000	$10000 \times 0,04 = 400$	2000+400=2400	8000
2	2000	$8000 \times 0,04 = 320$	2320	6000
3	2000	240	2240	4000
4	2000	160	2160	2000
5	2000	80	2080	-

Tabela 2.2: Sistema SAC

A tabela 2.2 mostra o valor total pago foi de R\$ 11.200, 00 que equivale a um pagamento de juros de 11, 2% em 5 meses.

Assim, os juros e o valor das prestações variam ao longo do tempo. As prestações ficam em ordem decrescente. Os juros são obtidos pela multiplicação entre taxa de juros i e o valor do estado da dívida do período anterior. O estado da dívida é encontrado, diminuindo-se a parcela de amortização recém paga do estado da dívida do período anterior.

Sistema PRICE: Os pagamentos (prestações) são iguais.

Vamos apresentar a simulação de financiamento pelo sistema Price. Num primeiro momento, é necessário calcular o valor das parcelas. Para isso, seja V um valor financiado a ser pago em n prestações iguais a P nas datas $1, 2, 3, \cdots, n$ e suponhamos que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja i por período de tempo.

Podemos indicar o valor atual das prestações, representado por V, à taxa i, como:

$$V = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

Note que o segundo membro dessa expressão é a soma dos n primeiros termos da PG finita, cujo primeiro termo é $a_1 = \frac{P}{(1+i)}$ e a razão é $q = \frac{1}{(1+i)}$.

Então,

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\dfrac{P}{(1+i)}\left[\dfrac{1}{(1+i)^n}-1\right]}{\dfrac{1}{(1+i)}-1} \\
&= \frac{\dfrac{P}{(1+i)}\left[\dfrac{1}{(1+i)^n}-1\right]}{\dfrac{1}{(1+i)}-\dfrac{(1+i)}{(1+i)}}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{P}{(1+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^n}-1\right]\times\frac{(1+i)}{-i}
$$

Assim, $(1+i)$ do denominador é cancelado com $(1+i)$ do numerador, e manipulando o que está entre colchetes temos:

$$
\begin{aligned}
V &= P\cdot\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n(-i)}\right] \\
&= P\cdot\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n(i)}\right] \\
&= P\cdot\left[\frac{(1+i)^n}{i(1+i)^n}-\frac{1}{i(1+i)^n}\right]
\end{aligned}
$$

E, finalmente:

$$
V = P\cdot\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right). \tag{2.9}
$$

Voltando para o exemplo, substituindo os valores temos, $10000 = P\cdot\dfrac{1-(1+0,04)^{-5}}{0,04}$. Isolando P, temos que o valor da parcela é de R\$ $2.246,27$.

Época	Prestação	Amortização	Juros	Estado da dívida
0	-	-	-	10000
1	2246,27	2246,27-400 = 1846,27	$10000\times 0,04 = 400$	8153,73
2	2246,27	1920,12	326,15	6233,61
3	2246,27	1993,93	249,34	4236,68
4	2246,27	2076,80	169,47	2159,88
5	2246,27	2159,88	86,40	-

Tabela 2.3: Sistema PRICE

O valor total pago via o sistema PRICE foi de R$ $11.231,35$ que equivale a um pagamento de juros de $11,23\%$ em 5 meses.

Ao compararmos os valores finais da simulação de financiamento, a quantia de juros gerada pelo sistema SAC foi menor que pelo sistema PRICE. Mas será que o sistema SAC sempre custará menos? Segundo Santos (2015), a soma de todas as parcelas pagas resultam num valor final mais baixo pelo sistema SAC, independente do valor financiado, taxa ou prazo. Pelo sistema SAC as parcelas iniciais são maiores, a amortização do saldo devedor é mais rápida e com isso as parcelas diminuem ao longo do tempo. Muito utilizado para financiamentos habitacionais em que os prazos são longos, exige grande esforço financeiros nas parcelas iniciais e proporciona uma folga no final do financiamento. Porém, devido à analise de renda familiar que as financeiras fazem para saber o quanto da renda será comprometida com as parcelas, o sistema PRICE favorece a possibilidade de aprovação de crédito, pois as parcelas são constantes e menores que as parcelas iniciais do sistema SAC. O sistema PRICE, de modo geral, possui as parcelas fixas o que possibilita uma organização e planejamento e é bastante utilizado para empréstimos com prazos menores como financiamento de veículos, bens de consumo, consignados e empréstimos em geral.

2.2 Combinatória e probabilidade

Nesta seção procuramos apresentar algumas regras de contagem de agrupamentos que podem ser feitos com uma quantidade finita de objetos dados. Em seguida, buscamos abordar as chances de ocorrência de resultados em experimentos aleatórios[3] através dos conceitos de probabilidade.

2.2.1 Contagem

O *princípio fundamental da contagem* diz que se uma ação é composta de duas etapas sucessivas, sendo que a primeira pode ser feita de x modos e, para cada um destes, a segunda pode ser feita de y modos, então, o número de modos de realizar a ação é xy.

Exemplo 2.10. *Se lançarmos uma moeda e um dado, quais são os possíveis resultados, ou seja, de quantas formas diferentes podemos dispor os pares (resultados da*

[3]Um experimento é denominado aleatório se repetido sob as mesmas condições apresenta resultados diferentes, porém, previsíveis

moeda, resultados do dado) neste lançamento?

Solução:

Os possíveis resultado são:

(Cara,1); (Cara,2); (Cara,3); (Cara,4); (Cara,5); (Cara,6);

(Coroa,1); (Coroa,2); (Coroa,3); (Coroa,4); (Coroa,5); (Coroa,6).

A resposta é $2 \times 6 = 12$ maneiras diferentes.

Exemplo 2.11. *Com os símbolos* $\star, \otimes$ *e* $\boxtimes$ *podemos formar as seguintes sequências:*

$$(\star; \otimes; \boxtimes), (\star; \boxtimes; \otimes), (\otimes; \boxtimes; \star), (\otimes; \star; \boxtimes), (\boxtimes; \star; \otimes), (\boxtimes; \otimes; \star).$$

Cada uma dessas sequências é chamada de *permutação* dos três símbolos. Se a ordem dos símbolos de uma permutação for diferente da ordem dos símbolos de outra permutação, dizemos que as duas permutações são diferentes.

Note que a quantidade de sequências geradas pode ser obtido fazendo $3\times2\times1$, ou seja, a escolha do símbolo que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de 3 modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de 2 modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de 1 modo. Neste caso, a resposta é $3 \times 2 \times 1 = 3!$

De modo geral, a permutação de n objetos distintos é

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Para introduzir o conceito de *combinação simples*, analisemos a seguinte questão:

Exemplo 2.12. *Considere o conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, 23, 24, 25\}$. *De quantas maneiras podemos escolher 15 números para realizar uma aposta na loteria?*

Solução:

A primeira escolha pode ser qualquer um dos 25 elementos do conjunto; há portanto, 25 possibilidades para ele.

A segunda escolha pode ser qualquer um dos 24 elementos restantes, excluído aquele já escolhido.

A terceira escolha pode ser qualquer um dos 23 elementos restantes. Há portanto, 23 possibilidades para a terceira escolha e assim por diante.

Desta forma, pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que a quantidade de grupos de 15 números escolhidos entre os 25 é $25 \times 24 \times 23 \times \cdots \times 11$, que pode ser representado por $\frac{25!}{10!}$. Porém, quando contamos dessa maneira, estamos dizendo que o jogo formado pelos números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,$$

é diferente do jogo

$$15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,$$

quando na verdade correspondem ao mesmo jogo. Contamos formações iguais como se diferentes fossem. Os 15 números escolhidos podem ser permutados entre si de 15! maneiras distintas, assim, para corrigir a contagem, precisamos dividir $25 \times 24 \times 23 \times \cdots \times 11$ por 15!. Essa operação pode ser expressa por $\frac{25!}{10!15!} = 3268760$.

Portanto, escolher 15 números entre 25 pode ser representado por

$$C_{25}^{15} = \binom{25}{15} = 3268760.$$

Para generalizar a fórmula da *combinação simples* devemos notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos (selecionados), e um grupo de $n - p$ objetos (não-selecionados).

Assim, representamos por

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemplo 2.13. *De quantos modos é possível dividir* 15 *objetos em três grupos de* 5 *objetos?*

Solução: Há C_{15}^5 modos de formar o primeiro grupo. Depois disso, C_{10}^5 modos de formar o segundo grupo e 1 modo de formar o último grupo. Permutando os grupos, a subdivisão permanece a mesma, portanto precisamos corrigir a contagem realizando uma divisão por 3!.

Assim, temos que o número de modos para dividir 15 objetos em três grupos de 5 objetos é $\frac{C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times 1}{3!}$.

Exemplo 2.14. *De quantos modos é possível dividir* 20 *objetos em* 4 *grupos de* 3 *e* 2 *grupos de* 4*?*

Solução: Há 20! modos de listar os objetos. Entretanto, contamos formações iguais como se diferentes fossem, portanto, é necessário fazer divisões para corrigir o resultado. Trocando a ordem dos elementos em cada grupo, temos 3!3!3!3! (quatro grupos com três elementos cada) e 4!4! (dois grupos com quatro elementos cada). Além disso, a permutação dos quatro grupo de três elementos corresponde a 4! formações que foram contadas como se distintas fossem mais a permutação dos dois grupos de quatro elementos que corresponde a 2!.

Assim, temos a resposta: $\dfrac{20!}{(3!)^4(4!)^2 4!2!}$.

2.2.2 Probabilidade

Experiências que repetidas várias vezes sob as mesmas condições produzem resultados que não são conhecidos antecipadamente são chamadas de *aleatórias*. Chamaremos de (S) o *espaço amostral* de um experimento aleatório o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento e vamos considerar apenas os casos em que S é finito ou infinito enumerável. Todo subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório é chamado de *evento* (E). O conjunto $\emptyset$ é chamado de *evento impossível*. Indicaremos o número de elementos de um evento E e o número de elementos do espaço amostral S por $n(E)$ e $n(S)$ respectivamente.

Para ajudar na compreensão, vamos expor alguns exemplos:

Exemplo 2.15.

a) Quando se retira uma bola de uma urna que contém 10 *bolas numeradas de* 1 *a* 10*, um evento possível é: a bola retirada conter um número primo menor que* 6*. O espaço amostral desse experimento é* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *e o evento é* $E = \{2, 3, 5\}$

b) No sorteio de uma carta de um baralho honesto de 52 cartas, um possível evento é: a carta sorteada ser ás.

Definição 2.16. *Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento E um número $P(E)$ de forma que:*

- *Para todo evento E,* $0 \leq P(E) \leq 1$.
- $P(S) = 1$

- *Se E e F são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente* ($E \cap F = \emptyset$) *então* $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

A probabilidade de um evento E de um espaço amostral S finito, de resultados equiprováveis é denotado por

$$P(E) = \frac{\text{Total de casos favoráveis}}{\text{Total de casos possíveis}}.$$

O evento (E^c) é chamado complementar do evento E e ocorrerá se, e somente se o evento (E) não ocorrer. Desta forma, temos que

$$P(E) + P(E^c) = 1 \ \text{ ou } \ P(E^c) = 1 - P(E).$$

Se uma pessoa escolher tirar uma carta de um baralho, a chance de não tirar um ás de ouro é $\frac{51}{52}$. Veja que $E = \{\text{retirar um ás de ouro}\}$ e $P(E) = \frac{1}{52}$. Dessa maneira, temos que $P(E^c) = 1 - \frac{1}{52} = \frac{51}{52}$.

Exemplo 2.17. *Considere uma aposta da mega sena com 6 números:*

a) Qual a probabilidade de errar os seis números escolhidos?

b) Qual a probabilidade de acertar os seis números escolhidos?

Solução:

Evento: $E = \{$ errar os 6 números sorteados$\}$.

a) Dos seis números sorteados eu erro todos, e dos outros 54 números não-sorteados eu acerto 6. Assim, a probabilidade de não haver acerto é:

$$\frac{C_6^0 \times C_{54}^6}{C_{60}^6} \cong 51,6\%.$$

b) Acertar os 6 números da mega sena é ganhar o prêmio máximo.

Evento: $A = \{\text{acertar os 6 números sorteados}\}$. Dessa forma, temos que $P(A) = \frac{1}{50063860}$. Logo $P(A^c) = 1 - \frac{1}{50063860} = \frac{50063859}{50063860}$.

Observe que o complementar do evento $A = \{\text{acertar 6 números}\}$ não é o evento $E = \{\text{errar 6 números }\}$.

Para introduzir a noção de probabilidade condicional analisemos a seguinte situação:

Um apostador lança um dado e aposta que vai obter mais do que três pontos. Se ocorrer o evento $A = \{4, 5, 6\}$ a vitória é do apostador. O espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é equiprovável[4], logo, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Após o lançamento, o apostador descobre que o resultado é um número ímpar de pontos. Assim, é possível concluir que o resultado foi 1 ou 3 ou 5 pontos, isto é, o apostador só tem uma chance em três de ter ganhado a aposta, ou seja, a probabilidade de ganhar a aposta, depois da informação dada, fica sendo $\frac{1}{3}$.

Desta maneira, temos que a *probabilidade condicional* de ganhar a aposta (ocorrer o evento A) sabendo que o resultado foi ímpar (ocorreu o evento $B = \{1, 3, 5\}$). Podemos indicar $P(A|B)$ e ler: Probabilidade de E dado B.

De maneira geral, dados dois eventos A e B de um espaço amostral S, a probabilidade condicional de ocorrer o evento A, tendo ocorrido o evento B é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplo 2.18. *De um baralho de cartas comum com* 52 *cartas, retira-se aleatoriamente uma delas. Qual a probabilidade de se sortear uma dama, sendo conhecido que o naipe da carta é preta?*

Sendo o evento $A = \{dama\}$ e o evento $B = \{\text{naipe preto}\}$, temos que a probabilidade dos eventos são $P(A) = \frac{1}{13}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$. Como existem duas damas pretas no total das 52 cartas, podemos escrever $P(A \cap B) = \frac{1}{26}$, então $P(A|B) = \frac{\frac{1}{26}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{13}$.

Agora já conhecendo o conceito de probabilidade, vamos abordar o conceito de esperança matemática ou valor esperado.

2.2.3 Valor Esperado

Antes de abordar o conceito de *esperança matemática*, introduziremos a noção de variáveis aleatórias discretas com o seguinte problema:

[4]Um espaço amostral é equiprovável quando é formado por elementos que têm a mesma chance de ocorrer.

Lançam-se duas moedas. Seja X o número de ocorrências da face coroa. Determinar a distribuição de probabilidade de X.

O espaço amostral do experimento é: $S = \{(ca, ca)(ca, co)(co, ca)(co, co)\}$

Se X é o número de coroa, X assume os valores $0, 1$ e 2. Podemos associar a esses números eventos que correspondam à ocorrência de nenhuma, uma ou duas coroas respectivamente, bem como sua probabilidade:

X	**Evento correspondente**	**P(X)**
0	$A = \{(ca, ca)\}$	$P(X = 0) = P(A) = 1/4$
1	$B = \{(co, ca), (ca, co)\}$	$P(X = 1) = P(B) = 1/2$
2	$C = \{(co, co)\}$	$P(X = 2) = P(C) = 1/4$

Assim, podemos dizer que *variável aleatória* é a função que associa a todo evento pertencente a uma partição do espaço amostral um único número real. A variável aleatória, para ser discreta, deve assumir valores em um conjunto finito ou em um conjunto infinito enumerável.

Exemplo 2.19. *No lançamento de dois dados honestos e considerando as faces voltadas para cima, o espaço amostral possui* 36 *elementos. A tabela a seguir mostra todos os possíveis resultados do experimento.*

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tabela 2.4: Lançamento de dois dados

Note que em seis casos a soma das faces voltadas para cima é 7 e em um caso a soma das faces voltadas para cima é 2. Assim, podemos expressar quão provável é a ocorrência de um evento ocorrer. Observe:

- *Qual probabilidade de que a soma dos dois números seja 7?*

  Indicaremos esta probabilidade por $P(X = 7)$, ou seja, é a função que associa cada elemento a soma dos pares ordenados. Note que teremos 6 resultados favoráveis:$(6,1);(5,2);(4,3);(3,4);(2,5);(1,6)$. Assim,

$$P(X=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\cong 16,66\%$$

- *Qual a probabilidade de que a soma dos dois números seja* 2?

  A variável aleatória X representa a soma 2. Neste caso,

$$P(X=2)=\frac{1}{36}\cong 2,77\%.$$

O valor esperado (ou esperança matemática) de um jogo é uma medida que leva em consideração a premiação e sua probabilidade. Introduziremos o conceito de *esperança matemática* com o seguinte exemplo:

Exemplo 2.20. *Vende-se o direito de jogar um dado e, como prêmio, receber em reais o valor correspondente ao número tirado. O comprador ganha* R\$ 1,00 *se tirar o número* 1*;* R\$ 2,00 *se tirar o número* 2*; e assim por diante. Qual o valor esperado do ganho deste jogador?*

Solução: X é a quantia de dinheiro ganha em qualquer lançamento. Como todas as faces possuem a mesma probabilidade, temos:

$$E(X)=1\frac{1}{6}+2\frac{1}{6}+3\frac{1}{6}+4\frac{1}{6}+5\frac{1}{6}+6\frac{1}{6}=3,5$$

Assim, o jogador pode esperar ganhar em média, a longo prazo, R\$ 3,50 por rodada. Em um jogo honesto, o jogador deveria pagar no máximo R\$ 3,50 para entrar no jogo.

Definição 2.21. *Dada a variável aleatória X discreta, assumindo os valores $x_1,\cdots,x_n$, com probabilidade $p_1,\cdots,p_n$ chamamos valor médio ou esperança matemática de X ao valor*

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

Para melhorar a compreensão da definição, apresentaremos alguns exemplos.

Exemplo 2.22. *O professor propõem ao aluno o seguinte jogo: Lança-se dois dados, se a soma for* 7*, o aluno paga* R\$ 2,00 *para o professor; se der soma* 2 *o aluno recebe* R\$ 5,00*. Qual o valor esperado pelo o aluno que aceitar jogar esse jogo muitas vezes?*

Solução: Considere a variável aleatória X que representa o lucro do aluno.

$P(X = 5) = \dfrac{1}{36}$

$P(X = -2) = \dfrac{6}{36}$

Com essas informações podemos calcular $E(X)$:

$E(X) = 5 \cdot \dfrac{1}{36} - 2 \cdot \dfrac{6}{36}$

Se a situação acima se repetir muitas vezes, o aluno perderá em média R\$ 0,19 por aposta realizada.

Exemplo 2.23. *Uma loteria vende* 100 *bilhetes. O preço de cada bilhete é* R\$ 1,20 *e o bilhete sorteado paga um prêmio de* 100 *reais. Qual a esperança de ganho de uma pessoa que comprou um bilhete?*

Solução:

X é a variável aleatória que representa o ganho.

X é $-1,20$ com probabilidade $0,99$ e $98,80$ com probabilidade $0,01$. Temos que a esperança de X é:

$E(X) = -1,20 \cdot 0,99 + 98,80 \cdot 0,01 = -0,20$

A esperança negativa indica que em média, o jogador vai perder 20 centavos toda vez que participar de novas rodadas.

Exemplo 2.24. *Uma loteria vende* 10.000 *bilhetes. As premiações são:*

- 200 *prêmios de* 5 *reais;*
- 20 *prêmios de* 25 *reais;*
- 5 *prêmios de* 100 *reais.*

Qual o preço justo a ser pago por um bilhete?

Solução: Considere X uma variável aleatória que representa a quantia de dinheiro a ser ganho.

$$E(X) = 5 \cdot 0,02 + 25 \cdot 0,002 + 100 \cdot 0,0005 = 0,20.$$

O preço justo é de R\$ 0,20. Dado que uma loteria geralmente é projetada para arrecadar dinheiro, o preço por bilhete seria maior.

Exemplo 2.25. *Considere o jogo da roleta. Há* 37 *números inteiros enumerados do* 0 *ao* 36 *sendo* 18 *vermelhos,* 18 *pretos e o zero que é branco. As opções de apostas são:*

- *Apostar em preto ou vermelho. Em caso de acerto, para cada real apostado recebe-se um outro real;*

- *Aposta na primeira dúzia* (1 *a* 12)*. Em caso de acerto, recebe-se* 2 *reais para cada real apostado.*

Suponha que um jogador escolheu apostar R\$ 10, 00 na primeira dúzia. Denote por X o número observado quando se gira a roleta e Y é o ganho nessa rodada.

Vamos determinar $E(Y)$. Pela definição de Y temos:

Se $1 \leq X \leq 12$ então $Y = 20$

Se $12 < X \leq 36$ ou $X = 0$ então $Y = -10$

Todos os pontos do espaço amostral são equiprováveis, temos a distribuição de probabilidade:

Valor de Y	Probabilidade
20	12/37
-10	25/37

Para este jogo a esperança matemática é $\left(20 \cdot \dfrac{12}{37}\right) + \left(-10 \cdot \dfrac{25}{37}\right) = -0,27$. Isto é, quem optar por jogar este jogo muitas vezes, vai perder em média, 27 centavos por rodada.

Com base na definição e nos exemplos apresentados, podemos interpretar a esperança matemática (ou valor esperado) como a média dos valores observados em uma sequência grande de repetições do experimento, em que cada realização do mesmo, observa-se um valor da variável.

Este capítulo foi pensado e desenvolvido com o objetivo de demonstrar por meio de exemplos, a importância de alguns conceitos de matemática financeira, problemas de contagem e probabilidade. Nos próximos capítulos, iremos utilizar os conceitos trabalhados neste capítulo, para mostrar como um bom conhecimento matemático pode ajudar a tomar uma melhor decisão.

CAPÍTULO 3

MATEMÁTICA FINANCEIRA CRÍTICA

Neste capítulo utilizaremos os conceitos de matemática financeira para que possamos despertar um olhar mais crítico para situações reais que envolvem tomadas de decisão. As situações que vamos expor estabelecem relações entre a matemática financeira e a educação financeira. Entendemos que nossa proposta possa fortalecer uma educação para a cidadania e ajudar nas escolhas mais acertadas e responsáveis. No Brasil, a educação financeira vem conquistando espaço a partir da publicação do Decreto nº 7.397, de 22 dezembro de 2010, que instituiu a Estratégia Nacional de Educação Financeira (Enef), que tem como objetivo:

> "I. promover a educação financeira e previdenciária; II. aumentar a capacidade do cidadão para realizar escolhas conscientes sobre a administração dos seus recursos; III. contribuir para a eficiência e a solidez dos mercados financeiro, de capitais, de seguros, de previdência e de capitalização".

3.1 Comprar à vista ou a prazo?

Saber decidir a melhor opção entre uma compra à vista ou a prazo é muito importante para fazer o dinheiro render mais. Quando se faz uma compra parcelada, embutido no preço está uma alta taxa de juros. Para isso, é necessário saber o valor do dinheiro no tempo. Segundo Castanheira (2010), juros é o pagamento pelo empréstimo de dinheiro.

A seguir, vamos levar o leitor em algumas situações do cotidiano, possibilitando a reflexão sobre qual decisão tomar.

Exemplo 3.1. *O IPVA de um carro é* R\$ 474,63. *O governo oferece duas formas de pagamento: à vista com* 3% *de desconto ou em* 3 *vezes sem juros. Qual a melhor opção?*

1. *Pagar à vista e investir o que sobrou.*
2. *Investir o total e retirar as parcelas mensais.*

Primeiramente, vamos fazer um caso particular em que temos uma aplicação que rende $1,1\%$ ao mês.

1º Caso

- 3% de $474,63 = 14,24$.
- Investindo 14,24 com juros de $1,1\%$ ao mês durante 3 meses

$$14,24\left(1+\frac{1,1}{100}\right)^3 = 14,71.$$

2º Caso

Vamos supor que pagamos as parcelas no final de cada mês.

- Final do 1° mês: $474,63$ investidos com juros de $1,1\%$ ao mês durante 1 mês descontando a 1ª parcela $474,63/3 = 158,21$;

$$474,63\cdot(1+0,011) - 158,21 = 479,85 - 158,21 = 321,64.$$

- Final do 2° mês: Idem, porém com valor inicial de $321,64$;

$$321,64\cdot(1+0,011) - 158,21 = 325,18 - 158,21 = 166,97.$$

- Final do 3° mês:

$$166,97\cdot(1+0,011) - 158,21 = 168,81 - 158,21 = 10,60.$$

Para determinar o que é mais vantajoso, é necessário comparar o dinheiro no mesmo tempo, ou seja, é preciso trazer o dinheiro para a data focal[1] Nesse caso hipotético, foi feito a comparação na data final do período do pagamento, assim foi mais vantajoso fazer o pagamento à vista e investir o valor do desconto.

Mas será que isso valeria para qualquer taxa de investimento? Ou para qualquer desconto? Ou para qualquer tipo de parcelamento? Para conseguir responder essas perguntas, precisamos generalizar esses cálculos. Para isso, considere, v o valor total a ser pago, $d\%$ o desconto, p o número de parcelas sem juros e $r\%$ a taxa de investimento.

1. **Pagamento à vista com desconto:** Nessa situação vamos pagar à vista e investir o que sobrou.

   - O desconto de $d\%$ sobre v nos dá o valor a ser investido C

   $$C = v \cdot \frac{d}{100}$$

   - O montante recebido após p parcelas, com rendimento $r\%$ é dado por:

   $$M = \left(v\frac{d}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)^p$$

2. **Pagamento parcelado sem juros:** Agora vamos investir o total e retirar as parcelas de cada mês.

   Supomos que a primeira parcela será paga no fim do primeiro período

   - Final do 1° período: rendimento durante 1° período descontado da primeira parcela

   $$v\left(1+\frac{r}{100}\right)-\frac{v}{p}$$

   - Final do 2° período: rendimento do restante no mês anterior durante 1 período descontado da segunda parcela

   $$\left[v\left(1+\frac{r}{100}\right)-\frac{v}{p}\right]\left(1+\frac{r}{100}\right)-\frac{v}{p} =$$
   $$v\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-\frac{v}{p}\left(1+\frac{r}{100}\right)-\frac{v}{p} =$$
   $$v\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-\frac{v}{p}\left(1+\left(1+\frac{r}{100}\right)\right)$$

[1] Data focal: é a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a diferentes datas. A data focal também é chamada de data de avaliação ou data de referência.

- Final do 3° período:

$$\begin{aligned}\left[v\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-\frac{v}{p}\left(1+\left(1+\frac{r}{100}\right)\right)\right]\left(1+\frac{r}{100}\right)-\frac{v}{p}&=\\ v\left(1+\frac{r}{100}\right)^3-\frac{v}{p}\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)+\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\right]-\frac{v}{p}&=\\ v\left(1+\frac{r}{100}\right)^3-\frac{v}{p}\left[1+\left(1+\frac{r}{100}\right)+\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\right]&\end{aligned}$$

- Final do p-ésimo período:

$$v\left(1+\frac{r}{100}\right)^p-\frac{v}{p}\left[\sum_{n=1}^{p+1}\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}\right]$$

Assim utilizando a fórmula da soma dos n primeiros termos de um P.G. $\sum_{n=1}^{p} a_1 q^{n-1}=\frac{q^p-1}{q-1}$ com $a_1=1$, $q=\left(1+\frac{r}{100}\right)$ e $a_n=a_1\cdot q^n$ temos

$$\begin{aligned}vq^p-\frac{v}{p}\left[\frac{q^p-1}{q-1}\right]&=\\ vq^p-\frac{vq^p}{p(q-1)}+\frac{v}{p(q-1)}&=\\ \frac{v}{p(q-1)}\left[q^p p(q-1)-q^p+1\right]&=\\ \frac{v}{p(q-1)}\left[q^p[p(q-1)-1]+1\right]&=\\ \frac{v}{p\frac{r}{100}}\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^p\left(p\frac{r}{100}-1\right)+1\right]&\end{aligned}$$

Suponha as mesmas condições do pagamento do IPVA. Qual é o menor desconto que o governo pode dar que ainda compense o pagamento à vista?

Devemos resolver a equação

$$\left(v\frac{d}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)^p=\frac{v}{p\frac{r}{100}}\left[\left(p\frac{r}{100}-1\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)^p+1\right]$$

para os valores de r, v e p fixados.

$$\left(v\frac{d}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)^p = \frac{v}{p\frac{r}{100}}\left[\left(p\frac{r}{100}-1\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)^p+1\right]$$
$$v\frac{d}{100} = \frac{\frac{v}{p\frac{r}{100}}\left[\left(p\frac{r}{100}-1\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)^p+1\right]}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^p}$$
$$d = \frac{\frac{v}{p\frac{r}{100}}\left[\left(p\frac{r}{100}-1\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)^p+1\right]}{v\left(1+\frac{r}{100}\right)^p}\cdot 100$$

Assim, sempre que o desconto d for maior que o lado direito da equação acima, será mais vantajoso optar pelo pagamento à vista com desconto ao invés do pagamento parcelado sem juros.

3.2 Comparando Capital e Taxas

Retornando aos questionamentos iniciais da seção de 2.1.3. Poderíamos identificar se o juros de $0,05\%$ ao dia cobrado pelo atraso em uma conta de luz é pouco ou é muito? Se é maior ou menor que o juros de 18% ao mês cobrado por um banco por atrasar uma fatura do cartão de crédito? Um milhão daqui 30 anos tem maior valor que cem mil reais hoje?

Exemplo 3.2. *Quem cobra mais? A companhia elétrica* $0,05\%$ *por dia pelo atraso em uma conta de luz ou* 18% *ao mês cobrado por um banco por atrasar uma fatura do cartão de crédito?*

Para fazer tal comparação é necessário converter as taxas para o mesmo período de tempo.

$$p_{\text{mês}} = (1,0005^{30}-1)100 = 0,01511\cdot 100 = 1,51\text{a.m.}$$

Considerando a taxa de rendimento da poupança de $0,6\%$ ao mês e a taxa de pagamento parcial do cartão de crédito é de 18% ao mês. Podemos ver, que a taxa da companhia de energia elétrica é o **duas vezes e meia** ao rendimento da poupança enquanto que, a taxa do cartão de crédito é **12 vezes!!** a da companhia elétrica.

Exemplo 3.3. *Investir na poupança ou tesouro direto? Lembrando que a poupança é 70% do tesouro mas isento de imposto e o tesouro tem 22,5% de imposto sobre o lucro.*

Para exemplificar esta situação, vamos considerar dois investimento de R\$ $40,00$: um na poupança (rendimento de $0,6\%$ ao mês) e outro no tesouro direto (rendimento de $0,857\%$ ao mês).

- Na poupança, R\$ $40,00$ aplicado durante 6 meses resultará num montante de $40 \cdot 1,006^6 = 41,46$.
- No tesouro direto[2], R\$ $40,00$ aplicado durante 6 meses resultará num montante de $40 \cdot 1,00857^6 = 42,10$.

Note que, na poupança o valor investido renderá R\$ $1,46$ e no tesouro direto aproximadamente R\$ $2,10$(valor sem descontar os impostos e taxas). Podemos ver, que em termos percentuais, a poupança gera 30% menos que o tesouro direto, o que parece ser uma grande diferença. No entanto, percebemos neste exemplo que quando se trata de pouco dinheiro, se considerarmos valores absolutos, essa diferença é pouca, ou seja, quem tem pouco dinheiro para investir, a diferença gerada entre os dois tipos de investimento é praticamente insignificante. Na poupança, pode ser depositado o valor que quiser em qualquer dia do mês e o dinheiro aplicado pode ser retirado pelo cliente a qualquer momento. As aplicações no tesouro direto podem ser vantajosas a longo prazo, pois a alíquota do imposto é menor, o que pode tornar o montante gerado pelo tesouro direto maior que o gerado pela poupança.

Exemplo 3.4. *Qual o valor de 1 milhão de reais daqui 10 anos nos dias de hoje?*

Isto é, 1 milhão de reais daqui há 10 anos tem o mesmo valor de 1 milhão de reais hoje? Para podermos fazer tal comparação é necessário trazer o capital para o tempo presente e supor uma inflação para o período.

$$V_{\text{hoje}} = \frac{V_{\text{futuro}}}{(1+i\%)^t}$$

Considerando uma inflação de $4,5\%$ ao ano teremos após 10 anos que 1 milhão de reais é equivalente nos dias atuais há

$$V_{\text{hoje}} = \frac{1.000.000,00}{(1+0,045)^{10}} = \text{R\$}\,638.272,14$$

Alguns detalhes são importantes quando se trata de mercado financeiro:

[2]Para maiores informações sobre Tesouro direto , acessar http://www.tesouro.fazenda.gov.br/

- A poupança não rende diariamente;
- Financeiramente, o mês **não tem** 30 dias;
- Em finanças, considera-se que o ano tem **252 dias úteis**;
- Para levar uma taxa diária a mensal, o correto é torná-la anual (ir para frente 252 dias) e depois ir para trás 12 meses;
- Para levar uma taxa mensal a diária, o correto é torná-la anual (ir para frente 12 meses) e depois ir para trás 252 dias.

Exemplo 3.5. *Qual o valor de* 1 *milhão de reais daqui* 30 *anos?*

Note que, a pergunta aqui é diferente da pergunta anterior. Aqui queremos saber qual é o valor equivalente a 1 milhão de reais daqui a 30 anos, ou seja, o valor que dê o mesmo poder aquisitivo de 1 milhão de reais hoje.

Vamos supor que uma pessoa deseja criar uma reserva financeira correspondente a 1 milhão de reais para desfrutar desse dinheiro daqui 30 anos. O valor do dinheiro depende do instante que se está olhando para ele. Devido a inflação, o que se adquire com 1 milhão hoje não será o mesmo daqui 30 anos. Para manter o mesmo poder de compra, supondo uma taxa de inflação de $4,5\%$ a.a., será necessário ter:

$$\text{Valor daqui 30 anos} = 1000000(1+0,045)^{30} = 3.745.318,13.$$

Daqui 30 anos será necessário R\$ $3.745.318,13$ para comprar o que se compra atualmente com 1 milhão.

Considerando uma rentabilidade real, isto é, já descontado a inflação de $0,37\%$ a.m., o valor P dos aportes para conseguir a reserva financeira desejada pode ser obtida resolvendo:

$$P \cdot (1+i) + P \cdot (1+i)^2 + \cdots + P \cdot (1+i)^{360} = 3.745.318,13.$$

Colocando P em evidência e isolando, temos:

$$\text{Parcelas} = \frac{3.745.318,13}{\text{Soma dos 360 termos PG de razão (1,0037)}}.$$

A soma dos 360 termos da pg é $\dfrac{1,0037(1,0037^{360}-1)}{1,0037-1} \cong 753,944$

Assim, temos que $P = \dfrac{3.745.318,13}{753,944} = \text{R\\$}\,4.967,63$.

Note que, 360 aportes de R$ 4.967, 63 totalizam R$ 1.788.348, 37. A diferença para totalizar os R$ 3.745.318, 13 provém dos juros sobre juros.

Supondo que as aplicações tivessem sido realizadas real em títulos do tesouro direto[3] com uma rentabilidade líquida de 0, 52% a.m., os aportes seriam de

$$P = \frac{3.745.318,13}{\dfrac{1,0052(1,0052^{360} - 1)}{0,0052}} = 3.542.14.$$

Note que com a taxa de rentabilidade líquida maior, os aportes mensais necessários para obter o mesmo 1 milhão corrigidos em valores da época é menor.

3.3 Quanto custa ter um carro?

Decidir entre comprar um automóvel à vista ou financiado, alugar um automóvel ou contratar serviços de táxi ou aplicativos, se feito os cálculos, são decisões que podem ser tomadas de maneira inteligente e vantajosa. Quanto custa ter um carro? Quanto ele pesa no orçamento familiar? Muitas pessoas sonham em ter o próprio carro. Ter liberdade de ir e vir para onde quiser, quando quiser e não precisar depender de ônibus ou carona. Levar em conta apenas o valor do automóvel ou apenas os valores das parcelas não é uma boa ideia. O automóvel gera despesas como custo de manutenção, depreciação, impostos, pneu, combustível, seguro particular além das parcelas do financiamento caso o automóvel não esteja pago. Tudo isso deve ser percebidos antes da aquisição. Devido a empolgação, muitos acabam não querendo por na "ponta do lápis" essas despesas e pensam apenas nos pontos positivos. Segundo Domingos(2013), o sonho do carro precisa caber dentro do orçamento.

3.3.1 Despesas

O que faremos aqui é uma comparação entre os valores que diversos canais do youtube abordam sobre as despesas e impactos financeiros de um automóvel. Os

[3]Para maiores informações, acessar http://www.tesouro.fazenda.gov.br/tesouro-direto

canais "Quero Ficar Rico"[4], "Programa Vrum"[5] e "O primo Rico[6]", buscam apresentar as despesas que o automóvel podem gerar ao longo do tempo.

Como muitos canais são patrocinados, as análises realizadas por eles acabam sendo direcionadas, tendenciosas e muitas vezes induzem o telespectador a fazer uma tomada de decisão equivocada. A escolha dessa plataforma para a análise deu-se pelo fato de que os canais do youtube são fontes de consulta e aprendizagem. Podemos salientar que os vídeos possuem milhares de visualizações. Selecionamos estes canais e uma situação particular como objeto de nosso estudo. Os dados correspondem aos custos fixos[7] e custos variáveis[8] de carros populares.

- Caso 1. Vídeo apresentado por Rafael Seabra do blog QueroFicarRico.com, em que considera um automóvel no valor de R$ 30.000, 00. Este vídeo foi publicado em 19 de fevereiro de 2018.

Item	Custo anual
IPVA	R$1.200,00
Seguro particular	R$2.400,00
Revisão	R$1.000,00
Estacionamento	R$1.200,00
Combustível	R$4.800 ,00
Depreciação	R$3.600,00
Custo de oportunidade	R$1.800,00

Tabela 3.1: Blog QueroficarRico.com

A quilometragem considerada paras os cálculos foi de 12.000 km rodados. A soma das despesas com seguro, ipva, depreciação e custo de oportunidade[9] totalizaram 9 mil reais. Esse é o custo para manter o automóvel na garagem de casa sem rodar. Nesta simulação, os custos para se manter o automóvel

[4]Quanto custa ter um carro?. Disponível em www.youtube.com/watch?v=nSLetHlhWWQt=1s, acesso em 17 out.2018.

[5]Manter um carro pode custar muito mais do se imagina. Disponível em www.youtube.com/watch?v=Xi7ukqp4mSo, acesso em 17 out.2018.

[6]Vale a pena ou não comprar um carro? Disponível em www.youtube.com/watch?v=muj3vRBsPEct=460s, acesso em 17 out.2018.

[7]IPVA, seguro obrigatório, licenciamento e depreciação

[8]custos variáveis dependem do uso que faz do carro e envolvem combustível, manutenção, reparo, estacionamento, pedágio, multa,etc

[9]O custo de oportunidade é um conceito teórico que mensura o custo daquilo que se deixa de fazer quando é preciso fazer uma escolha de qualquer tipo. Em nossos exemplos, é o quanto renderia o dinheiro utilizado na compra do automóvel, caso esse dinheiro tivesse sido aplicado.

foi de R$ 16.000,00 no ano. Isso corresponde aproximadamente R$ 1,33 por quilômetro rodado. A depreciação foi $\dfrac{3600}{30.000} = 12\%$ e o custo de oportunidade foi simulado num investimento com rendimentos de $\dfrac{1800}{30.000} = 6\% a.a.$

- Caso 2. Vídeo postado no canal Rafa3257 em 24 de julho de 2012, produzido pelo programa VRUM. A simulação é referente a um automóvel no valor de R$ 30.000,00.

Item	Custo
IPVA	R$1.200,00
Seguro obrig.+ Licenc.	R$163,86
Seguro particular	R$1.200,00
Revisão	R$480,00
Lavagem	R$2.400,00
Pneu	R$333 ,00
Estacionamento	R$3.000,00
Combustível	R$3.156,00
Depreciação	R$3.600,00
Taxa de inspeção	R$44,36
Vaga garagem	R$3.096

Tabela 3.2: Reportagem produzida pelo programa Vrum

Somando as despesas obtém-se R$ 18.673,22. Os cálculos foram realizados levando em consideração 12.000 km rodados ao ano, o que representa um custo de aproximadamente R$ 1,55 por quilômetro rodado.

Como este vídeo é de 2012, precisamos atualizar esses valores para os dias atuais. Considerando a inflação acumulada até 2018, em torno de 36%, a despesa anual seria de aproximadamente R$ 25.395,58, ou seja, R$ 2,11 por quilômetro rodado. Podemos notar que, nesta simulação foram considerados despesas que as pessoas muitas vezes não levam em consideração como os desgastes de pneus, despesas com estacionamento e aluguel de vaga de garagem em condomínio.

- Caso 3. Vídeo postado no canal O Primo Rico em 30 de maio de 2018. Os valores são referentes a um automóvel no valor de R$ 40.000,00.

Nesta simulação, a soma dos valores da tabela não coincidem com o valor mostrado no vídeo. Acreditamos que não tenha sido citado mas tenha sido

Item	Custo
IPVA	R$1.200,00
Seguro particular	R$2.000,00
Revisão	R$2.400,00
Estacionamento	R$6.000,00
Combustível	R$4.116,00
Depreciação	R$3.600,00
Multa	R$100,00
Licenciamento	R$86,00

Tabela 3.3: Dados publicados pelo canal O primo Rico

utilizado nos cálculos o custo de oportunidade com taxa de aproximadamente 1% ao mês. Isto justifica o valor apresentado de R$ 24.242, 76. Dividindo esse custo anual pela quilometragem percorrida de 10800 km, obtém-se um custo de aproximadamente R$ 2, 25 por quilômetro rodado.

- Caso 4. Situação real. Os valores utilizados nesta situação foram registrados pelo próprio autor que adquiriu um veículo Ford Ka 0km por R$ 40.000, 00[10]. Todas as despesas foram registradas ao longo do tempo. As revisões sempre foram realizadas na concessionária e a quilometragem totalizou 100.000km em 45 meses. Consultando a tabela fipe[11], o valor do automóvel após os 45 meses estava em torno de R$ 33.340, 00 para vender no particular, pois para negociar na concessionária na troca de outro seria aproximadamente R$ 29.000, 00 o que representa 13% a menos.

  Organizamos os custos com combustível, IPVA, seguro obrigatório, licenciamento, seguro particular e revisão, separados por ano: 2015, 2016, 2017 e 2018.

  – Janeiro de 2015 até Dezembro de 2015: R$ 13607, 00 ao ano ou aproximadamente R$ 1133, 91 ao mês.
  – Janeiro de 2016 até Dezembro de 2016: R$ 10918, 00 ao ano ou R$ 909, 83 ao mês.

[10]Este preço é correspondente ao ano de 2015. O mesmo veículo está sendo vendido em 2018 por R$ 41.990, 00, um aumento de 4, 975%.

[11]A Tabela Fipe expressa preços médios de veículos no mercado nacional, servindo apenas como um parâmetro para negociações ou avaliações. Os preços efetivamente praticados variam em função da região, conservação, cor, acessórios ou qualquer outro fator que possa influenciar as condições de oferta e procura por um veículo específico.

– Janeiro de 2017 até Dezembro de 2017: R\$ $8367,00$ ao ano ou R\$ $697,25$ ao mês.

– Janeiro de 2018 até setembro de 2018: R\$ $607,87$ ao mês.

Agora, vamos apresentar todas as despesas que esse automóvel gerou para o proprietário no período de 3 anos e 9 meses.

Item	Custo
IPVA	R$ 3.818,00
Seguro obrig.+ Licenc.	R$ 907,00
Seguro particular	R$ 6.139,00
Revisão	R$ 4.371,00
Lavagem	R$ 265 ,00
Pneu	R$ 500,00
Estacionamento	R$ 82,00
Combustível	R$ 23.010
Custo de oportunidade	R$ 12.356,32
Depreciação	R$ 6.660,00
Pedágio	R$ 647,00
Outros	R$ 500,00

Tabela 3.4: FONTE:arquivo pessoal do autor

Somando todas as despesas apresentadas na tabela, temos um custo total de R\$ $59.255,32$ para rodar 100.000km num período de 45 meses. Isso corresponde a um valor médio de aproximadamente R\$ $1.316,78$ por mês. Dividindo o custo total pela quilometragem obtemos um custo de aproximadamente R\$ $0,60$ por cada quilômetro rodado. Em relação ao valor inicial do automóvel, o custo com IPVA nesse período foi de $\frac{3.818}{40.000} \approx 9,5\%$; seguro obrigatório $\frac{907}{40.000} \approx 2,2\%$; seguro particular $\frac{6.139}{40.000} \approx 15,3\%$; revisão $\frac{4.371}{40.000} \approx 11\%$; combustível $\frac{23.010}{40.000} \approx 57,5\%$ e depreciação foi aproximadamente $16,6\%$.

3.3.2 Discussão

Do ponto de vista financeiro, manter um automóvel pode não ser a melhor opção, porém dependendo das condições de vida, trabalho e outros, ter o automóvel pode ser algo necessário. É preciso apenas estar atento ao custo que esse veículo vai proporcionar para saber se realmente encaixa dentro do orçamento. As despesas apresentadas podem sofrer variações, dependendo do uso e perfil de cada motorista, modelo e ano do carro e outros custos adicionais. Analisando as tabelas de despesas, percebe-se no Caso 1, que o valor apresentado do seguro particular foi de R$ 2.400, 00, o que corresponde ao dobro do Caso 2, 20% a mais que o Caso 3 e mais que o dobro apresentado no Caso 4. O custo com estacionamento também pesou nas simulações dos três primeiros casos. No vídeo postado pelo Canal Primo Rico, foi considerado R$ 6.000, 00 em estacionamento. No Caso 4, devido a realidade pessoal e a facilidade de encontrar estacionamento gratuito, as despesas foram de R$ 82, 00. De modo geral, o combustível corresponde a uma das maiores frações do custo para se manter o automóvel, sendo que no Caso 4, correspondeu a 57, 5% do preço inicial do automóvel e 38% de todas as despesas no período 45 meses. Quanto mais quilômetros rodados, maior serão as despesas, porém, os custos fixos serão distribuídos por essas quilometragens, o que faz o valor do quilômetro rodado ficar menor. Desta forma, a pergunta "quanto é gasto por mês" esconde muita coisa. Assim, vamos apresentar o valor do quilômetro rodado:

- Caso 1. R$ 1, 33 por quilômetro rodado
- Caso 2. R$ 2, 11 por quilômetro rodado
- Caso 3. R$ 2, 25 por quilômetro rodado
- Caso 4. R$ 0, 60 por quilômetro rodado

Comparando os casos apresentados, o custo do quilômetro rodado no Caso 1 é praticamente o dobro do caso 4, enquanto o Caso 2 e 3 são bem próximos de 3,5 vezes o custo do Caso 4. Percebemos que as simulações dos vídeos apresentam custos mais altos e distâncias percorridas bem menores em relação a situação real apresentada no Caso 4. São vários fatores que interferem nos custos para se ter e manter um automóvel e não há uma única resposta certa no que se refere a comprar ou não um automóvel, porém, existe a pergunta certa: "Qual é o valor do quilômetro rodado?"

3.4 Automóvel: Pagar para ter ou pagar para usar?

Anotar as despesas geradas pelo automóvel é fundamental para perceber o quanto ele pesa no orçamento, porém, e isso pode até mudar a opinião sobre o sonho do carro próprio. Vamos deixar claro que os valores apresentados nas simulações anteriores variam muito de acordo com o modelo do automóvel, quantidade de quilômetros que será rodado,características regionais, etc. É possível ter um automóvel e não contratar o seguro particular, fazer a limpeza em casa e não no lavador. O preço do seguro depende da idade do motorista, do modelo do carro e alguns outros fatores. A maneira como se dirige pode provocar um desgaste maior no veículo e encarecer a revisão. Os valores de estacionamento também dependem muito da região em que a pessoa utiliza o automóvel. Quem busca realizar um empréstimo, deve estar atento não apenas à taxa de juros ou ao valor da parcela, mas sim, ao custo efetivo total. [12]. A seguir vamos apresentar duas simulações de financiamento. O custo efetivo total, as taxas de juros, tarifas, pagamentos a terceiros, seguros, impostos podem variar de acordo com ano do veículo, marca, valores, prazos e demais condições escolhidas pelo cliente.

1. Simulação de financiamento pelo Banco A.

   R\$ 40.000 à vista ou entrada de R\$ 24.000, 00 mais 48 parcelas fixas. Vamos calcular o valor das parcelas sendo que neste caso, o CET é de $2,432210\%$ a.m.

$$\text{Valor financiado} = \frac{1 - (1 + \text{taxa de juros})^{-\text{número de meses}}}{\text{taxa de juros}} \cdot \text{Valor da prestação}$$

$$16000 = \frac{1 - (1,0243221)^{-48}}{0,0243221} \cdot P$$

$$\frac{16000 \times 0,0243221}{1 - (1,0243221)^{-48}} = P$$

$$\therefore P = 568,55$$

   O valor final a pagar por esse financiamento é de R\$ 51.290, 40, o que corresponde a R\$11.290, 40 de juros. Neste caso, ao final de quatro anos, você teria desembolsado R\$ 51.290, 40 por um carro de R\$ 40.000, 00 cujo valor de mercado segunda a tabela FIPE seria aproximadamente R\$ 29.000, 00.

[12]Custo efetivo total (C.E.T.) quer dizer custo efetivo total. Ele mostra quanto será o valor final do empréstimo. Nem sempre a menor taxa será a melhor opção. O C.E.T. inclui os juros, I.O.F,seguro do financiamento, taxas de aberturas de conta e várias outros encargos que pesam no final do financiamento

2. Simulação de financiamento pelo Banco B.

   R$ 40.000 à vista ou entrada de R$ 24.000, 00 mais 48 vezes de R$ 601, 17. Nesta situação o CET é de 39, 28% a.a.

   Note que neste caso, o CET está ao ano, e de maneira ingênua, poderíamos pensar que ao dividir os 39, 28% por 12 meses teríamos a taxa equivalente ao mês, podendo comparar com a simulação anterior. Mas não é bem assim. Os 39, 28% foram formados a partir do cálculo da equação $(1+i)^{12} = (1,3928)$, que corresponde a $i = 2,8\%$a.m. Isto quer dizer que uma capitalização mensal de $i = 2,8\%$ durante 12 meses corresponde a um único aumento de 39, 28%. Em linguagem matemática temos $(1 + \text{taxa que quero})^{12} = (1 + \text{taxa que tenho})$. Nesta situação, o valor final do financiamento é de R$ 52.856, 16.

Por outro lado, quem não pretende encarar o caminho do financiamento, pode optar em alugar um automóvel.

Consultamos alguns sites e empresas de locação a fim de verificar a viabilidade do aluguel.[Valores de referência: 2º semestre de 2018].

1. Locação convencional pela empresa IGUFOZ[13].

   Foram consideradas 365 diárias no valor de R$ 72, 00, totalizando R$ 26.280, 00 ao ano mais R$ 16.016, 00 de proteção parcial + terceiros + aos ocupantes do veículo, totalizando R$ 42.296, 00 ao ano. Isso corresponde a R$ 3.524, 66 por mês. Para locação mensal, essa é uma opção inviável se comparado com os custos gerais para se ter um automóvel popular. Nesta simulação não identificamos o limite de quilometragem.

2. Simulação de locação pela plataforma Movida mensal flex[14].

   Mensalidade média de R$ 1.662, 09. Neste pacote está incluso uma franquia mensal de 2000km. Para aproveitar 100% da quilometragem, o custo com combustível seria em torno de R$ 500, 00. Isso gera um custo de R$ 1, 08 por quilômetro rodado.

3. Locação a longo prazo pela empresa IGUFOZ para pessoa jurídica.[15] O valor do aluguel é R$ 930, 00 mais R$ 229, 00 de seguro. Isto corresponde a uma

[13]Simulação realizada em 21/12/2018 no site www.igufoz.com.br
[14]Simulação realizada em 21/12/2018
[15]Orçamento realizado por vendedor responsável e encaminhado por email.

franquia mensal de 2000km por um custo de aproximadamente R$ 1.159, 00 ao mês ou R$ 0, 58 por quilômetro sem considerar o combustível. Cada quilômetro excedente custa R$ 0, 75. Considerando R$ 500, 00 o custo com combustível, o quilômetro rodado fica em torno de R$ 0, 82.

A seguir, vamos apresentar a comparação entre despesas geradas quando se adquire um veículo de R$ 40.000, 00 nas condições à vista, financiado e alugado. Os valores correspondem a despesas relativas ao primeiro ano, com quilometragem rodada de 24.000 km.

- Veículo comprado

	Aquisição à vista	Aquisição financiada
Valor	R$40.000,00	R$24.000,00
Ipva, licenciamento, Seguro obrigatório	R$1.505,00	R$1.505,00
Parcelas		R$6.822,60
Seguro	R$1.664,00	R$1.664,00
Depreciação	R$6.000,00	R$6.000,00
Custo de oportunidade	R$2.976,00	R$2.976,00
Revisão	R$1.402,00	R$1.402,00
Total de despesas	R$13.547,00	R$19.179,60

Tabela 3.5: Custo anual com a aquisição

- Veículo alugado

Empresa	Valor da assinatura
IguFoz	R$ 42.296,00
Movida	R$ 19.945,00
IguFoz CNPJ	R$ 13.908,00

Tabela 3.6: Custo anual com a locação

Podemos perceber que, os valores do aluguel para pessoa física ainda são altos se comparado ao custo para quem compra e mantém o automóvel. A opção de aluguel mais em conta é o plano empresarial, porém, nessa modalidade, é montado um processo de pedido para a locadora que faz uma análise da viabilidade para efetuar a locação. As despesas geradas pela aquisição à vista e pelo aluguel CNPJ são basicamente as mesmas, com a vantagem do aluguel por não precisar dispor dos 40 mil reais necessários para a aquisição do veículo.

3.4.1 Discussão

Quem pretende obter o veículo financiado, se escolher a primeira simulação irá fazer menos R$ 1.500,00 em pagamentos. Portanto, o custo mensal será o valor das parcelas de R$ 568,55 mais as despesas gerais que poderá variar de R$ 253,00[16] até R$ 2.020,23[17]. Na pior das hipóteses é necessário disponibilizar R$ 821,55 por mês para deixar o automóvel parado na garagem de casa sem seguro particular.

Por outro lado, com o valor da entrada de R$ 24.000,00 seria possível comprar carros, como por exemplo um Volkswagen Gol, Fiat Siena, Renault Clio e vários outros de ano 2013, que dependendo do estado de conservação seria uma boa opção para quem não quer pagar juros. Realizando 48 depósitos mensais de R$ 568,55 numa conta poupança que rende em torno de 0,6% a.m. renderia aproximadamente R$ 4.416,28 de juros, resultando num total acumulado de R$ 32.275,23.Levando em conta a desvalorização do automóvel de 24 mil durante os quatro anos, seria possível revender por R$ 15.746,17. Este valor somado ao valor poupado possibilitaria a compra à vista de um automóvel no valor de R$ 48.021,23. Sabendo que nesse período de 4 anos um automóvel que era vendido por 40 mil reais foi reajustado para 42 mil,seria possível fazer uma economia de aproximadamente R$ 6.021,23. É claro que se encontrar um bom plano de investimento com rendimentos melhores que a poupança, a lucratividade é maior, e a aquisição do carro zero pode ser realizada num tempo menor.

E se você optasse em aplicar os R$ 24.000,00 na poupança,fazendo os aportes de R$568,55,teria um montante no valor aproximadamente de R$ 63.500,21. Porém, durante esses 4 anos, seria necessário ir ao trabalho e passear com a família de ônibus, táxi ou aplicativo.

Agora, para quem é empresário, o sistema de aluguel vale a pena pois o valor que seria gasto na aquisição do automóvel pode ser usado para investimento na empresa, mas tem um detalhe, é muito difícil ficar com o automóvel durante um ano e impedir

[16] Foram considerados apenas custos fixos que não dependem do uso que faz do carro e que paga mesmo que esteja parado. Utilizamos os valores da situação real para estimar este valor. Consideramos os valores do IPVA, seguro obrigatório, licenciamento e depreciação

[17] Simulação 3. O Primo Rico; Este valor pode ser maior, pois depende do modelo e do uso do automóvel

arranhões e amassados, por isso, é importante estar atento no momento do contrato, pois nas letras miúdas estarão os valores das franquias. Pode ser que, um amassado ou risco no para-choque, que poderia muito bem ser resolvido com um martelinho de ouro e um polimento, seja cobrado como um para-choque novo, aumentando o custo total.

Mas como todos sabem, o automóvel proporciona conforto, liberdade para ir e vir no tempo que a pessoa quiser.

3.5 Vale a pena trabalhar de uber?

Trabalhar em parceria com a Uber, conectando pessoas de forma rápida, eficiente e renovando o conceito de mobilidade urbana pode ser uma oportunidade para conseguir renda extra no tempo que quiser(UBER,2018). Porém, é necessário atenção na hora de anotar as despesas para que no final das contas não se tenha que pagar para trabalhar. Os ganhos com a Uber podem variar de acordo com a demanda, dias, horários e lugares das viagens. A Uber é uma empresa de tecnologia que estabelece a conexão entre motorista e passageiro através de um aplicativo. Em seu website esclarece que não é empresa de transporte e nega ser um serviço de carona remunerada.

Em relação aos ganhos, o motorista recebe um preço base por viagem, somado a um valor por tempo e distância da viagem, além de outros valores como pedágios, preço dinâmico e promoções[18]. O preço base e os valores por tempo e distância variam por cidade e produto. Para nossos cálculos, vamos considerar os valores relacionados ao UberX [valores de referência: out/2018] na região de Foz do Iguaçu, que consiste em R$ 1,10 por quilômetro rodado mais R$ 0,15 por minuto. Para o cálculo do tempo, vamos considerar uma média de 25 km/h. Não estamos considerando o preço dinâmico[19] e nenhum outro tipo de bônus que possa ser pago ao motorista. Todas as nossas análises podem variar de motorista para motorista, quanto para municípios.

Considerando os custos para se manter um veículo apresentados anteriormente neste trabalho, vamos analisar a viabilidade e possíveis faturamentos obtidos pelos

[18] Ver https://www.uber.com/pt-BR/drive/resources/ganhos/

[19] Preço dinâmico é um fator de acréscimo que muda de acordo com a procura pelo serviço

motoristas colaboradores UberX.

1. Motorista Uber que trabalha com veículo próprio, modelo Ford Ka apresentado no caso 4.

   Distância percorrida: 100.000 km ao ano

   Receita: R$ 128.000, 00

   Repasse para Uber: R$ 32.000, 00

   Despesas para manter o automóvel:R$ 59.255, 32

   Lucro de R$ 36.774, 68

   O valor mensal recebido pelo motorista vai depender da demanda de sua região e de quanto ele trabalha por dia. É possível fazer 100.000 km em corridas durante um ano e seu rendimento médio líquido será de R$ 3.064, 05 por mês. Devido aos semáforos e congestionamento, vamos considerar a velocidade média de 25km/h para se transitar na cidade. Dessa forma, $\dfrac{100.000km}{25km/h} = 4.000$ horas por ano, 333, 33 horas por mês ou um **tempo de trabalho equivalente a aproximadamente 11 horas diárias**. É claro que se considerarmos valores dinâmicos e outros bônus, a arrecadação será maior se trabalhar o mesmo tempo, ou o tempo de serviço será menor para obter o mesmo rendimento.

2. Motorista Uber com carro da locadora Movida (locação diária com prazo de 30 dias) e limite de quilometragem.

   Distância percorrida: 24.000 km ao ano.

   Receita: R$ 30.720, 00

   Repasse para Uber: R$ 7.680, 00

   Despesa: R$ 25.920, 00

   Prejuízo: R$ 2.880, 00

   Essa opção com limite de 2.000km por mês para trabalhar de Uber não é viável, pois o motorista não conseguiria arcar com as despesas do automóvel.

3. Motorista Uber com carro próprio no valor de R$ 40.000, 00 financiado.

   Distância percorrida: 24.000 km ao ano.

   Receita:R$ 30.720, 00

Repasse para Uber: R\$ $7.680,00$

Despesas com o automóvel:R\$ $24.699,60$

Prejuízo:R\$ $1.659,60$

Com o carro financiado, rodar apenas 2000km ao mês implica em prejuízo. Acreditamos que o financiamento não é uma boa ideia para quem pretende iniciar como motorista por aplicativo, pois imprevistos poderão acontecer e dificultar o pagamento das despesas, inclusive das prestações do financiamento.

4. Motorista Uber que trabalha com veículo alugado de terceiros.

   Distância percorrida: $7.000\,km$ ao mês.

   Receita: R\$ $8.960,00$

   Repasse para Uber: R\$ $2.240,00$

   Despesas com aluguel:R\$ $2.000,00$

   Despesas com combustível: R\$ $1.610,00$

   Lucro:R\$ $3.110,00$

   O tempo de trabalho necessário para rodar 7 mil quilômetros considerando uma velocidade média de 25km/h é de aproximadamente **9 horas por dia**. Trabalhar de motorista Uber com a modalidade de aluguel de pessoa para pessoa é a melhor opção. Neste caso, o aluguel do veículo é 2 mil reais com limite de quilometragem de 7 mil quilômetros e o único custo para o motorista além do aluguel é o combustível. Podemos observar que, nesta modalidade o motorista trabalha menos e ganha mais em relação primeiro caso apresentado em que o motorista é o proprietário. Existem casos em que, os proprietários e motoristas dividem em parte iguais a despesa com manutenção, então, os valores com despesas aumentam e consequentemente, o lucro diminui.

3.5.1 Locações especiais para aplicativos

As empresas de locação de veículos criaram modalidades para as pessoas que desejam trabalhar como motoristas de aplicativo. Esse tipo de locação exige alguns pré-requisitos:

- Habilitação com pelo menos 2 anos de emissão

- Ser maior de 21 anos
- Cadastro aprovado na plataforma Uber Driver
- Comprovante de residência (água, luz, telefone fixo ou contrato de aluguel)

1. A empresa IguFoz oferece um pacote especial para motorista de aplicativo por R$ 1.490, 00 mensais com limite de 5.000 km rodados. Essa quilometragem exige uma média de trabalho de aproximadamente 6,6 horas por dia. Desta forma, tomando como parâmetro as tarifas de R$ 1, 10 por km e R$ 0, 15 por minuto o motorista tem a possibilidade de arrecadar aproximadamente $1,10 \cdot 5.000 + 0,15 \cdot 400 =$ R$ 5.560, 00 mensais. Descontando R$ 1.150, 00 de combustível,R$ 1.490, 00 de aluguel e R$ 1.390, 00 de repasse para Uber, um motorista nestas condições terá um faturamento de aproximadamente R$ 1.530, 00. Esses valores podem sofrer variações de acordo com a procura pelo serviço. taxas municipais entre outros fatores.
2. A empresa Localiza não disponibilizou ainda o serviço de locação para aplicativo na cidade de Foz do Iguaçu. Então, fizemos algumas considerações em relação ao Município de Maringá. O aluguel mensal para 5.000 km pela Localiza é de R$ 1.441, 50. As tarifas utilizadas para os cálculos foram de R$ 1, 12 por km e R$ 0, 24 por minuto. Considerando uma distância média percorrida de 25 km a cada hora, a arrecadação do motorista seria aproximadamente $1,12 \cdot 5.000 + 0,24 \cdot 400 =$ R$ 5.696, 00. O saldo final descontando o combustível, aluguel e repasse para a Uber é de aproximadamente R$ 1.680, 50.

3.5.2 Discussão

Um pessoa que está desempregada e pretende trabalhar de Uber, dificilmente terá um bom dinheiro para dar de entrada num financiamento. Com sorte ele consegue comprar o carro sem entrada ou com baixo valor de entrada, o que gera prestações entre R$ 1.100, 00 a R$ 1.400, 00 por mês, parcelados em 48 meses ou até 60 meses. Além das prestações, é preciso contar as despesas anuais que podem variar, chegando a 15 mil reais por ano. O motorista roda o primeiro ano tranquilo, obtendo ganhos que são suficientes para pagar a prestação, o seguro, o ipva, manutenção, multas e outras taxas. No segundo ano, o carro está acima dos 100 mil quilômetros rodados, mas se estiver bem cuidado e com manutenções em dia continuará obtendo ganhos suficientes para honrar com os compromissos. A partir do terceiro ano, o veículo já passa de 200 mil quilômetros rodados e pode ser que comece dar problemas com manutenções mais caras. Nestes casos o motorista pode começar a atrasar as parcelas ou ter que vender o carro. Com sorte, o valor recebido pela venda é o suficiente para terminar de quitar o saldo restante do veículo, porém, no terceiro ano, se o carro estiver deteriorado, mesmo vendendo não será suficiente para quitar o saldo restante. Assim, o motorista continua rodando e espera o banco efetuar uma campanha para renegociar a dívida ou no pior das hipóteses, espera ser parado em uma blitz para busca e apreensão do veículo.

Portanto, para quem não tem carro próprio, não vale a pena fazer financiamento para trabalhar com aplicativo, pois a demanda pelo serviço pode não ser suficiente para cobrir as despesas necessárias, e isso pode transformar uma boa oportunidade em um grande problema. Neste caso, é vantajoso trabalhar com a modalidade de locação pois as despesas de manutenção são do locatário. O motorista precisa se preocupar apenas com o combustível e o valor da assinatura do veículo, e caso desista desse trabalho, basta devolver o carro e não terá boleto de financiamento a pagar.

Os proprietários de automóveis particulares alugam seus carros por valores que variam em torno de R$ 2.000,00 por mês, com limite 7.000 km rodados por mês. Neste caso, as despesas de impostos e manutenção são por conta do proprietário ou proprietário e motorista. O proprietário por sua vez, separa mensalmente em torno de R$ 1.000,00 para despesas com manutenção, impostos e proteção veicular. Para baratear os custos, as manutenções são feitas fora das concessionárias e são utilizados serviços de proteção veicular de cooperativas.

O aluguel de terceiros é bom principalmente para o locador que tem restrição no nome e dificilmente conseguirá aprovação para financiamento.

Os ganhos dos motoristas parceiros variam de acordo com o seu planejamento de quando e onde dirigir, então é difícil ter um valor exato, porém, como vimos nas situações apresentadas, trabalhar com aplicativos pode ser uma boa opção para quem procura uma renda extra. Vale a pena destacar que um automóvel de 40 mil ou um de 25 mil vai proporcionar a mesma rentabilidade, desde que estejam em bom estado e sempre revisado.

Neste capítulo, num primeiro momento o objetivo é ajudar a resolver o problema do cidadão. A escolha entre comprar à vista ou parcelado, financiar um automóvel ou alugar, trabalhar como motorista de aplicativo, requer algumas análises que o uso de ferramentas matemáticas podem ajudar nas melhores escolhas. O cidadão aceita trabalhar como motorista de aplicativo sem saber quais variáveis devem ser levadas em consideração na hora de calcular quanto custa o quilômetro rodado do automóvel. Queremos mostrar que a matemática pode contribuir na hora de analisar e tomar decisões.

Os assuntos trabalhados neste capítulo também nos levam a refletir sobre o tempo de trabalho dos motoristas e sobre a porcentagem que lhes é cobrado pelo uso do aplicativo. Infelizmente, o desemprego em alta no país faz com que motoristas passem grande parte do dia dirigindo motivados pela necessidade individual de quem tem contas a pagar. Desta forma, a apropriação privada de desenvolvimento tecnológico leva à concentração de renda e aprisionam os indivíduos.

CAPÍTULO 4

UMA ANÁLISE CRÍTICA SOBRE OS NÚMEROS

Vivemos em uma sociedade que valoriza muito os números e as estatísticas. As grandes empresas de marketing, e até mesmo o governo usam os números para dar respaldo aos discursos.(SKOVSMOSE,2007). Até nas conversas informais, as pessoas usam a matemática para reforçarem suas declarações.

A seguir, apresentaremos algumas situações que podem ser colocadas em sala de aula no intuito de mostrar como a falta de conhecimento em matemática podem induzir interpretações equivocadas.

4.1 O número que parece ser mas não é

Muitos paranaenses não entenderam o verdadeiro reajuste no valor do Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA) do Estado do Paraná em 2015. A alíquota foi reajustada de $2,5\%$ para $3,5\%$.

Vamos destacar que o *acréscimo de* 1% não representa um *aumento de* 1% no valor do IPVA.

Para compreensão do leitor, vamos simular o valor do imposto de um automóvel popular no valor de R\$ $40.000,00$. Podemos notar na tabela abaixo que o valor do imposto passou de R\$ $1.000,00$ para R\$ $1.400,00$.

Valor do automóvel	alíquota do IPVA	Valor do imposto
40000	2,5%	1000
	3,5%	1400

Tabela 4.1: Comparação do Ipva antes e depois do reajuste

Para identificar em termos percentuais o reajuste dado, basta calcular a equação $2,5\% \cdot (1+i) = 3,5\%$ em que (1+i) é o fator de acréscimo. Isolando a taxa i temos

$$i = \frac{0,035}{0,025} - 1 = 0,4 = 40\%$$

Portanto, o aumento no valor do imposto foi de $\dfrac{400}{1000} = 40\%$ e não de 1%.

Outra "manipulação" nos números que ocorre com bastante frequência pelas empresas para tentar camuflar o aumento do preço de seus produtos, é a redução do peso deles. Por exemplo, uma caixa de bombom teve o peso reduzido de $332g$ para $289,2g$, enquanto o preço passou de R\$ 7,99 para R\$ 7,19. Para identificar se de fato houve uma redução no preço do produto, é necessário calcular qual foi a variação percentual do preço do quilo do produto. Isto é.

$$\frac{\text{R\$}\,7,99,00}{0,332\text{kg}} = \text{R\$}\,24,06\,/\text{kg}$$
$$\frac{\text{R\$}\,7,19}{0,289\text{kg}} \approx \text{R\$}\,24,87/\text{kg}$$

Assim, apesar da aparente redução, o preço subiu R\$ 0,81 por quilo, o que corresponde a um aumento de 3,36%.

Uma notícia que não agradou os Paranaenses em 2017 foi a mudança na tarifa de água da Sanepar. O Jornal Gazeta do Povo apresentou a notícia com o título *"Sanepar corta pela metade o consumo mínimo de água. Mas tarifa cai apenas* 10%*"*. Num primeiro momento pode-se pensar que houve uma diminuição no preço, porém, não foi isso o que aconteceu. Antes da mudança, a tarifa residencial normal era de R\$ 33,74 para o consumo mínimo de $10\,m^3$. Com a mudança, o consumo mínimo passou a ser $5\,m^3$ por R\$ 32,90.

Para o volume mínimo de $10\,m^3$, cada metro cúbico custava R\$ 3,374. Após a mudança, cada metro cúbico passou a custar R\$ 6,58. Considerando a tabela antiga como período-base, a quantidade de água caiu pela metade (50%) enquanto o preço do m^3 praticamente dobrou.

Quantidade	Até $5m^3$	6 a 10
Valor	R\$ $32,90$	R\$ $1,02/m^3$

Tabela 4.2: Tarifa residencial normal

A família que mantiver o consumo de $10\,m^3$, gastará R\$ $38,00$. Esse aumento representa $12,62\%$, o que corresponde a R\$ $4,26$ por mês ou R\$ $51,12$ ao ano.

Para consumir $7\,m^3$, o valor gasto seria de R\$ $34,94$, isto é, um valor mais caro do que se pagava pela tarifa mínima de $10\,m^3$. Porém, a Agência Reguladora do Paraná, autorizou um aumento de aproximadamente $8,53\%$ no valor da tarifa, o que permitiu aumentar de R\$ $33,74$ para R\$ $36,61$ a tabela do sistema antigo e assim, usar como parâmetro para justificar uma possível economia pelo novo formato. Assim, é possível afirmar que $7\,m^3$ por R\$ $34,94$ é mais barato que $10\,m^3$ por R\$ $36,61$.

Até janeiro de 2019, a Sanepar possuía 3.375.534 tarifas residenciais normais[1]. A tabela de saneamento básico vigente[2] para categoria residencial normal é de R\$ $34,58$ até $5\,m^3$. Supondo um consumo de $10\,m^3$ para todas as residencias com tarifas normais, o pequeno e singelo aumento de R\$ $4,26$ implicaria numa arrecadação adicional de R\$ 14.379.774,84 por mês.

Destacamos que notícias de jornais, revistas e informações de interesse da sociedade, quando levadas para a sala de aula de matemática, promovem a investigação de variáveis e geram debates. Com o uso de ferramentas matemáticas elementares é possível explorar pontos de vista que ajudam a compreender melhor as situações analisadas.

4.2 Reforma da Previdência: Sistema de capitalização é de fato sustentável?

O congelamento dos gastos públicos para os próximos 20 anos teve como objetivo frear a trajetória de crescimento dos gastos e tentar equilibrar as contas públicas.

Segundo Dweck et al.(2018), o governo vende a ideia de que o Brasil vai voltar a crescer e que vai ajustar as contas fiscais, mas no fundo está fazendo o desmonte do

[1]Ver http://site.sanepar.com.br/a-sanepar/sanepar-em-numeros
[2]Para ver outras tarifas, acessar http://site.sanepar.com.br/clientes/nossas-tarifas

estado social. O intuito é beneficiar aqueles que não querem financiar via impostos o estado social e os setores econômicos privados que querem abocanhar serviços como saúde e educação possibilitando geração de lucros. Quem perde com isso é a população mais pobre, pois são eles quem mais usufruem dos serviços públicos. Desde 1988 o Brasil vive um pacto de solidariedade social onde através de um acordo a sociedade aceitou arcar com os custos dos problemas sociais que ocorrem (BRASIL,1988). Se alguém tiver uma doença grave, a sociedade arca com esse problema, independente se a pessoa é pobre ou rica. Para Rossi (2016), é possível optar por um pacto onde é cada um por si, mas isto é uma opção social que precisa passar por um debate e pelas urnas, pois o que observa-se é uma mudança do projeto de país, ou seja, é a reorganização de um pacto social sem a participação da sociedade. O mesmo observa-se em relação à reforma da previdência. Alguns economistas afirmam que garantia de crescimento dependem do teto de gastos e da reforma da previdência social[3]. A previdência social é um seguro em que o trabalhador participa a partir de contribuições mensais. O objetivo dessa contribuição é garantir a aposentadoria do trabalhador. Os trabalhadores que têm carteira assinada são filiados à previdência automaticamente e quem trabalha por conta própria precisa se inscrever e contribuir mensalmente. Não pagar a contribuição mensal durante o período exigido ao INSS implica em não ter direito de se aposentar. Além da aposentadoria, o INSS dispõem de benefícios como aposentadoria por idade, por tempo de contribuição, por invalidez, aposentadoria especial, auxílio doença, auxílio acidente, auxílio reclusão, pensão por morte, pensão especial, salário maternidade e salário família. Para os servidores públicos existem sistemas de contribuição que são gerenciadas por estados e municípios. O custeio financeiro determinado à manutenção das prestações da seguridade social partem dos empregados, empregadores e impostos.(IBRAHIM,2007).

O tema *Reforma da previdência* foi uma das grandes bandeiras do governo do ex-presidente Michel Temer, que investiu em campanhas publicitárias para mostrar a necessidade da reforma da previdência. Com o slogan "Previdência: reformar hoje para prevenir o amanhã", numa maneira alarmista, o governo tentou convencer a todos de que a previdência social gera prejuízo e a reforma é necessária.

Propaganda 1[4]: *Para quem já se aposentou ou já cumpriu os requisitos para se*

[3]Matéria extraída do site www.economia.uol.com.br reforma-da-previdencia-e-teto-de-gastos-garantem-crescimento, acesso em 5 out.2018

[4]Reforma da Previdência: Rumo ao Estado de mal-estar social. Adunicamp 2017. www.youtube.com/watch?v=7j3pxnrdNfM acesso em 05 out.2018

aposentar, a reforma da previdência não muda nada. A reforma é necessária, isso sim, para garantir que você continue sua aposentadoria e os benefícios no futuro.

Propaganda 2[5]: *Quando eu pago a previdência todo mês, estou pagando a minha aposentadoria? Resposta: Não, a previdência não é uma conta individual, é uma rede de proteção aos trabalhadores, na qual quem esta trabalhando paga a aposentadoria de quem se aposentou, bem como benefícios como salário maternidade e o salário família.*

Propaganda 3:[6] *É verdade que se não houver a reforma da previdência a única maneira de garanti-la é o aumento dos impostos? Resposta: É verdade, se a reforma nao for feita para resolver esse rombo que cresce a cada ano, não vai ter dinheiro para pagar as aposentadorias e benefícios.*

O governo diz com convicção que o problema fiscal no Brasil é a previdência o que causa medo, intimidação e leva a entender que não há outras saídas ou soluções para a questão fiscal no país. Para Vianna (2017), o governo deveria enfrentar questões como: Pagamento de juros, desonerações fiscais[7] e sonegação.

De novembro de 2017 a novembro de 2018, os juros nominais acumulados atingiram R$ 385, 6 bilhões (5, 64% do PIB)[8]. O governo gastou com a previdência em 2018 em torno de 629,23 bilhoes[9]. Em 2017, o governo abriu mão de 354,7 bilhões com renúncias fiscais que ele concede a grupos econômicos. Entre Janeiro e junho de 2018 o país deixou de arrecadar R$ 29, 666 bilhões, sendo que aproximadamente 6, 239 bilhões corresponde a desoneração da folha[10]. Só na primeira quinzena do mês de janeiro de 2019 o governo deixou de arrecadar em torno de 24 bilhões com a sonegação de impostos[11]. A sonegação causa um impacto grande na dívida da união. Um trabalho de combate às distorções na concessão de benefícios, registrou

[5]Reforma da Previdência: Rumo ao Estado de mal-estar social. Adunicamp 2017. www.youtube.com/watch?v=kw2yxkwtdMo acesso em 05 out.2018

[6]Reforma da Previdência: Rumo ao Estado de mal-estar social. Adunicamp 2017. www.youtube.com/watch?v=Hs1WsSTOfNo acesso em 05 out.2018

[7]As desonerações de impostos e contribuições – renúncias tributárias que a Receita Federal nomeia como gastos tributários – passaram a vigorar, para diversos setores econômicos, a partir de 2009. Gradativamente foram se ampliando e, em 2011, o plano Brasil Maior incluiu, entre as renúncias, a desoneração da contribuição previdenciária incidente sobre a folha de pagamentos para alguns setores econômicos (Vianna, 2017)

[8]Para maiores informações, ver https://www.bcb.gov.br/estatisticas/estatisticasfiscais

[9]Para maiores informações, ver http://www.portaltransparencia.gov.br/funcoes/09-previdencia-social?ano=2018

[10]Ver https://impostometro.com.br/Noticias/Interna?idNoticia=259

[11]http://www.quantocustaobrasil.com.br/ acesso em 16 jan. 2019

uma economia de R\$ 463 milhões aos cofres públicos.[12]

Ao somar 385 bilhões gastos com juros aos 354 bilhões gastos com as desonerações, mais as perdas com sonegações, obtém-se um valor que supera os gastos com a previdência em 2018, porém, o discurso é apenas sobre a quebra da previdência.

Atualmente, pelo menos 82%[13] dos idosos tem como fonte de renda a previdência social. Para Vianna (2017), a reforma da previdência proporcionará a extinção do direito à proteção na velhice. Segundo IBGE, 40% dos trabalhadores brasileiros estão na informalidade e esse número é ainda maior na região do nordeste. A equipe do atual governo defende o regime de capitalização como uma proposta de reforma da previdência. Neste modelo, os contribuintes passam a contar apenas com aquilo que pagaram, não há solidariedade, ou seja, uma pessoa não paga pela aposentadoria da outra. Com essa reforma, quem será prejudicado? Será que o sistema de capitalização é sustentável?

Vamos simular uma situação em que o trabalhador aplicará 11% de seu salário por 35 anos a taxa de $0,41\%$ a.m.

$i =$ taxa de investimento real.

$S =$ salário.

$0,11 \cdot S =$ valor da contribuição.

Primeiramente, vamos calcular o montante gerado durante 35 anos (420 meses)

$$0,11S(1,0041) + 0,11S(1,0041)^2 + 0,11S(1,0041)^3 + \cdots + 0,11S(1,0041)^{420}$$

Colocando $0,11S$ em evidência temos

$$0,11S\left[\frac{1,0041(1,0041^{420}-1)}{0,0041}\right] = 1112 \text{ vezes } 11\% \text{ do salário}$$

Note que, temos 1112 parcelas correspondentes a 11% do salário, que equivale aproximadamente a 123 vezes o salário inteiro.

Vamos calcular por quanto tempo esse trabalhador terá sua aposentadoria levando em consideração que o valor resgatado mensalmente será 100% do salário.

[12] http://www.previdencia.gov.br/2019/01/atuacao-da-forca-tarefa-previdenciaria-em-2018-garante-economia-de-r-463-milhoes/ acesso em 13 nov.2018

[13] Ver http://www.previdencia.gov.br/2017/10/cnp-aposentados-representam-239-da-populacao-idosa-ocupada/

Ao retirar o pagamento S de um mês, o restante do dinheiro continuará aplicado rendendo $i = 0,41\%$ a.m

$$123 \cdot S = S(1,0041)^{-1} + S(1,0041)^{-2} + \cdots + S(1,0041)^{-n}$$

$$\frac{123 \cdot S}{S} = \frac{1}{1,0041} + \frac{1}{1,0041^2} + \cdots + \frac{1}{1,005^n}$$

Note que o segundo membro da igualdade é uma soma de P.G.

$$123 = \frac{\frac{1}{1,0041}\left(\left(\frac{1}{1,0041}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{1,0041} - 1}$$

desenvolvendo essa equação, temos:

$$0,4957 = \left(\frac{1}{1,0041}\right)^n$$

Agora, aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\log 0,4957 = n \log\left(\frac{1}{1,0041}\right)$$

Portanto,

$$n = \frac{\log 0,4957}{\log\left(\frac{1}{1,0041}\right)} = \cong 171,5$$

Assim, esse trabalhador terá o benefício por $n \cong 171,5$ meses, o que corresponde aproximadamente a 14 anos. Após esse período, o trabalhador não poderá mais contar com recursos vindos da aposentadoria, podendo ficar desamparado num momento da vida em que mais precisa. Neste cálculo hipotético, foi considerado aplicações mensais de 11% do salário a uma taxa real de 0,41% a.m. durante 35 anos.

A seguir, vamos generalizar os cálculos e obter o tempo N que durará o benefício se considerarmos uma taxa de investimento real de $i\%$, um valor de contribuição mensal de $I\%$ do salário S por um tempo de n meses.

Primeiramente, vamos calcular o montante acumulado durante n meses de contribuição.

$$M = \frac{I}{100}S(1+i/100) + \frac{I}{100}S(1+i/100)^2 + ... + \frac{I}{100}S(1+i/100)^n$$

Colocando $\frac{I}{100}S$ em evidência temos

$$M = \frac{I}{100}S\left((1+i/100) + (1+i/100)^2 + ... + (1+i/100)^n\right)$$

Logo,

$$M = \frac{I}{100}S\left[\frac{(1+i/100)[(1+i/100)^n - 1]}{i}\right]$$

Note que M representa o total acumulado ao longo dos n meses de contribuição.

Agora, vamos calcular por quanto tempo N esse trabalhador poderá contar com seus recursos financeiros se resgatar mensalmente 100% do salário. Para isso, devemos resolver a equação

$$\frac{I}{100}S\left[\frac{(1+i/100)[(1+i/100)^n - 1]}{i/100}\right] = S(1+i/100)^{-1} + S(1+i/100)^{-2} + ... + S(1+i/100)^{-N}$$

para os valores de i,I e n fixados.

Note que o segundo membro da equação é uma soma dos N primeiros termos de uma PG com razão igual a $\frac{1}{(1+i/100)}$. Dividindo os dois membros da equação por S, temos:

$$\frac{I}{100}\left[\frac{(1+i/100)[(1+i/100)^n - 1]}{i/100}\right] = \frac{\frac{1}{(1+i/100)}\left[\left(\frac{1}{1+i/100}\right)^N - 1\right]}{\frac{1}{(1+i/100)} - 1}$$

Desenvolvendo a equação, obtemos

$$\frac{I}{100}\left[(1+i)\left((1+i)^n - 1\right)\right] = -\left(\frac{1}{1+i}\right)^N + 1$$

$$\frac{I}{100}\left[(1+i)\left((1+i)^n-1\right)\right]-1=-\left(\frac{1}{1+i}\right)^N$$

Assim, aplicando logaritmo em ambos os lados da equação temos:

$$log\left[1-\frac{I}{100}\left[(1+i)\left((1+i)^n-1\right)\right]\right]=N\cdot log\left(\frac{1}{1+i}\right)$$

Isolando N, obtemos o tempo que o trabalhador terá para desfrutar de sua aposentadoria. Para isso, basta substituir os valores i,I e n na equação a seguir:

$$N=\frac{log\left[1-\frac{I}{100}[(1+i)[(1+i)^n-1]]\right]}{log\left(\frac{1}{1+i}\right)}$$

Podemos perceber que os benefícios são proporcionais ao tempo e ao valor contribuído, isto é, quanto mais tempo o trabalhador contribuir ou mais dinheiro ele destinar ao fundo financeiro, maior será o tempo para usufruir do seu beneficio. Por outro lado, se o trabalhador contribuir pouco para a previdência, ou passar pouco tempo vinculado ao regime, terá um valor muito baixo para manter sua subsistência. A mudança de modelo da previdência não é garantia de justiça social. Entendemos que o sistema de capitalização previsto pela Reforma da Previdência, pode gerar um futuro de incerteza, pobreza e desamparo para os aposentados.

CAPÍTULO 5

JOGOS DE AZAR

Uma maneira de entretenimento desde tempos antigos são os jogos de estratégia e jogos de azar, e que para muitos, é uma maneira de ganhar dinheiro, ou melhor dizendo, "perder dinheiro". A partir daí surge a pergunta: Será que existe uma estratégia para vencer sempre os jogos? Ao longo da história muitos matemáticos dedicaram e dedicam esforços para identificar fórmulas e meios de vencer alguns desses jogos.

Entender a teoria por trás dos jogos de apostas não é tarefa simples, mas faz toda diferença na hora da tomada de decisão. Segundo O'Connor (2001), no tempo de Cardano não existia as leis sobre eventos casuais e não era possível em muitos jogos, determinar com precisão qual devia ser uma aposta justa. Cardano foi um dos primeiros a analisar matematicamente esses jogos.

Muitos matemáticos contribuíram com trabalhos sobre aleatoriedade. Pascal e Fermat, por exemplo, definiram o "valor esperado" de um jogo, que determinava o ganho médio, caso uma pessoa resolvesse jogar muitas vezes. O matemático Bernoulli ajudou os pesquisadores da época a entender o quanto uma aposta vale a pena do ponto de vista matemático e do ponto de vista das decisões na vida real. Em geral, as pessoas preferiam apostas de baixo risco àquelas que eram mais lucrativas. O que conduzia essas tomadas de decisões não era o lucro esperado, mas o que Bernoulli chamou de "utilidade esperada", que dependia do quanto a pessoa já tinha. Uma única moeda vale mais para uma pessoa pobre do que para uma rica.(BASSETT, 1987)

Nota-se, que essas percepções estão presentes até hoje nas tomadas de decisões. Um assalariado que adquiriu um automóvel com muito esforço, prefere contratar um serviço de seguro a não pagar nada e arriscar sofrer um acidente com perda total. Já um seguro para celular pode não ser tão interessante para essa mesma pessoa, pois o celular é mais barato para substituir.

Jogos como xadrez, damas, jogo da velha, vinte e um ou pôquer, alguns mais fáceis que outros, são jogos em que a habilidade favorece e dependendo da decisão escolhida pode torná-lo um vencedor ou perdedor. Porém, jogos de lançamento de dados, moedas, roletas e loterias exibem resultados que possuem mesma probabilidade que qualquer outro resultado.

Na próxima seção, vamos abordar questões relacionadas à lotofácil.

5.1 Lotofácil

Na Lotofácil são sorteados 15 dezenas dentre as 25. O apostador deve marcar entre 15 a 18 números, sendo que o total de jogos distintos é de 3 268 760. Para levar algum prêmio, o apostador precisa acertar 11, 12, 13, 14 ou 15 números. A premiação é fixa para os acertos de 11, 12 e 13 dezenas.

Os prêmios são:

- R\$ $4,00$ para quem fizer 11 acertos.
- R\$ $8,00$ para quem fizer 12 acertos.
- R\$ $20,00$ para quem fizer 13 acertos.
- Uma porcentagem da arrecadação para quem fizer 14 e 15 acertos.

A aposta de 15 números custa R\$ $2,00$; de 16 números custa R\$ $32,00$; de 17 números custa R\$ $272,00$ e 18 números custa R\$ $1632,00$.

As chances de uma pessoa levar o prêmio máximo fazendo uma aposta são de "1 para 3.268.760". Por meio de uma fração poderíamos dizer que a "probabilidade" de acertar os 15 números é $\dfrac{1}{3.268.760}$.

Imagine uma aposta aleatória e outra aposta estratégica cuidadosamente escolhida por uma pessoa. Existe alguma forma de dizer qual é qual? A probabilidade da sequência $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ ocorrer é pequena, mas possível. A sequência $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 12, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25\}$ a longo prazo vai aparecer com a mesma frequência que qualquer outra das 3.268.760.

Estamos tratando de variáveis aleatórias e isto quer dizer que, o resultado do evento anterior não exerce qualquer influência sobre o resultado do evento futuro, ou seja, as bolas do sorteio da lotofácil são retiradas ao acaso sem nenhuma ligação com resultados anteriores. No vídeo intitulado "Como ganhar na lotofácil – Acerte os 15 pontos em 3 passos simples", o responsável sugere um método para acertar 14 pontos nas semanas seguintes podendo acertar 15 pontos. Afirma que, é necessário considerar o resultado do último sorteio da lotofácil e a partir daí separar as 15 dezenas sorteadas de três em três, separar as dez dezenas que não foram sorteadas de duas em duas e agrupar três dezenas sorteadas com duas não sorteadas. Assim, formam-se cinco grupos com cinco dezenas cada. Para finalizar, ele monta combinações de 5 agrupados 3 a 3. O total de combinações é 10, o que corresponde a 10 jogos, mas no vídeo, ele monta apenas 6 jogos e reforça a sugestão de montar jogos nesse formato pois 90% das vezes haverá 9 dezenas repetidas.

Neste ponto, destacamos que usar os números do sorteio anterior na certeza que é muito provável que em torno de 9 números se repetirão, não tem a ver com tendenciosidade ou frequência dos últimos sorteios, mas sim com a distribuição de probabilidade. Para entender melhor o que estamos falando, vamos escolher 15 dezenas dentre as 25 disponíveis, e calcular a probabilidade dos acertos pretendidos.

Exatamente 5 acertos

- Possibilidades de escolher 5 números dentre os 15 apostados para serem os números certos: $C_{15}^{5} = 3003$.
- Possibilidades de escolher 10 números dentre os 10 não apostados para serem os números errados: $C_{10}^{10} = 1$.

Assim, o número de jogos com os 15 números apostados em que há 5 acertos e 10 erros é $C_{15}^{5} \times C_{10}^{10} = 3003$.

Logo, a chance de acertar exatamente 5 números é de $\dfrac{C_{15}^{5} \times C_{10}^{10}}{C_{25}^{15}} = 0,092\%$

Exatamente 6 acertos

- Possibilidades de escolher 6 números dentre os 15 apostados para serem os números certos: $C_{15}^{6} = 5005$.

- Possibilidades de escolher 9 números dentre os 10 não apostados para serem os números errados: $C_{10}^{9} = 10$.

Assim, o número de jogos com os 15 números apostados em que há 5 acertos e 10 erros é $C_{15}^{6} \times C_{10}^{9} = 50050$.

Logo, a chance de acertar exatamente 5 números é de $\dfrac{C_{15}^{6} \times C_{10}^{9}}{C_{25}^{15}} = 1,53\%$

De maneira análoga, podemos determinar as probabilidades para os demais acertos.

Exatamente 7 **acertos:** $\dfrac{C_{15}^{7} \times C_{10}^{8}}{C_{25}^{15}} = 8,85\%$

Exatamente 8 **acertos:** $\dfrac{C_{15}^{8} \times C_{10}^{7}}{C_{25}^{15}} = 23,62\%$

Exatamente 9 **acertos:** $\dfrac{C_{15}^{9} \times C_{10}^{6}}{C_{25}^{15}} = 32,15\%$

Exatamente 10 **acertos:** $\dfrac{C_{15}^{10} \times C_{10}^{5}}{C_{25}^{15}} = 23,15\%$

Exatamente 11 **acertos:** $\dfrac{C_{15}^{11} \times C_{10}^{4}}{C_{25}^{15}} = 8,77\%$

Exatamente 12 **acertos:** $\dfrac{C_{15}^{12} \times C_{10}^{3}}{C_{25}^{15}} = 1,67\%$

Exatamente 13 **acertos:** $\dfrac{C_{15}^{13} \times C_{10}^{2}}{C_{25}^{15}} = 0,1445\%$

Exatamente 14 **acertos:** $\dfrac{C_{15}^{14} \times C_{10}^{1}}{C_{25}^{15}} = 0,0045\%$

Podemos perceber que, para quaisquer 15 dezenas escolhidas, a chance de acertar exatamente 9 dezenas é de $32,15\%$ e as chances de acertar $8,9$ ou 10 números giram em torno de 78%. Como dissemos no início, o resultado de um sorteio não exerce qualquer influência sobre o resultado do próximo sorteio e basear-se nisso é simplesmente uma questão de fé.

Embora as abordagens das probabilidades de acertos na lotofácil não apresentem nenhum argumento muito complexo, os estudos para determinar o valor esperado exigem esforço e resultados intermediários.

5.1.1 Qual o valor esperado jogando na lotofácil?

Pretendemos usar o conceito de esperança matemática para alertar sobre esquemas e estratégias que prometem ganhos na lotofácil. Ao montar dois jogos, o número mínimo de interseções será 5 dezenas e o máximo será 15 dezenas, quando os jogos forem iguais. Para calcular o valor esperado, separamos em casos. Para ganhos acumulados, vamos considerar por exemplo, dois cartões com 14 números em comum, caso um cartão tenha registrado 14 pontos, o outro cartão pode também ter sido contemplado com 14 pontos ou 13 pontos. Neste caso, vamos considerar o ganho correspondente a um prêmio de 14 e outro de 13.

- Dois jogos, com apenas 5,6,7,8,9, ou 10 números em comum.

  Considere a variável aleatória X, que representa a quantia de dinheiro a ser ganho.
  $P(X = 2.000.000) = \dfrac{1}{3.268.760}$
  $P(X = 2.000) = \dfrac{9}{200.000}$
  $P(X = 20) = \dfrac{289}{200.000}$
  $P(X = 8) = \dfrac{167}{10.000}$
  $P(X = 4) = \dfrac{877}{10.000}$
  Com essas informações, podemos calcular $E(X)$:
  $E(X) = 2.000.000 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{3.268.760} + 2.000 \cdot 2 \cdot \dfrac{9}{200.000} + 20 \cdot 2 \cdot \dfrac{289}{200.000} + 8 \cdot 2 \cdot \dfrac{167}{10.000} + 4 \cdot 2 \cdot \dfrac{877}{10.000} \approx 2,43$
  Para um apostador, que joga R\$ 4,00 toda vez, a longo prazo, espera-se que seu ganho médio seja de $\text{R\$}\,2,43 - \text{R\$}\,4,00 = \text{R\$}\,-1,57$.

  Ao fazer dois jogos nesse formato, caso seja sorteado, só é possível garantir apenas um prêmio.

- Dois jogos iguais

  $E(X) = 2.000.000 \cdot 1/3.268.760 + 2.000 \cdot 9/200.000 + 20 \cdot 289/200.000 + 8 \cdot 167/10.000 + 4 \cdot 877/10.000 \approx 1,21$

  Note que, a longo prazo, espera-se que o apostador tenha um ganho médio de $\text{R\$}\,1,21 - \text{R\$}\,4,00 = \text{R\$}\,-2,79$.

- Dois jogos (14 dezenas em comum)

  Neste caso, se ganhar o prêmio de 15 dezenas, pelo fato dos bilhetes terem 14 números em comum, ganhará também o prêmio de 14 pontos. Se acertar 14 pontos em um cartão, ganhará também o prêmio de 13 pontos ou 14 pontos com o segundo cartão. Se acertar 13 pontos, ganhará também o prêmio de 12 pontos ou 13 pontos com o segundo cartão e se acertar 12 pontos, ganhará também o prêmio de 11 pontos ou 12 pontos com o segundo cartão. Isto quer dizer que o prêmio será maior.
  $E(X) = 2.002.000 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{3.268.760} + 2.020 \cdot 2 \cdot \dfrac{9}{200.000} + 28 \cdot 2 \cdot \dfrac{289}{200.000} + 12 \cdot 2 \cdot \dfrac{167}{10.000} + 4 \cdot 2 \cdot \dfrac{877}{10.000} \approx 2,59$
  Ao jogar muitas vezes, espera-se que o ganho médio seja de R\$ $2,59 -$ R\$ $4,00 =$ R\$ $-1,41$

- Três jogos (14 e 13 dezenas em comum)
  $E(X) = 2.002.020 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{3.268.760} + 2.028 \cdot 3 \cdot \dfrac{9}{200.000} + 32 \cdot 3 \cdot \dfrac{289}{200.000} + 12 \cdot 3 \cdot \dfrac{167}{10.000} + 4 \cdot 3 \cdot \dfrac{877}{10.000} \approx 3,90$
  O custo para realizar três jogos é R\$ $6,00$. Neste caso, a longo prazo, espera-se que seu ganho médio seja de R\$ $3,90 -$ R\$ $6,00 =$ R\$ $-2,10$.

- Quatro jogos (14,13 e 12 dezenas em comum)
  $E(X) = 2.002.028 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{3.268.760} + 2.032 \cdot 4 \cdot \dfrac{9}{200.000} + 32 \cdot 4 \cdot \dfrac{289}{200.000} + 12 \cdot 4 \cdot \dfrac{167}{10.000} + 4 \cdot 4 \cdot \dfrac{877}{10.000} \approx 5,20$
  Veja que, apostando quatro jogos toda vez, o custo será de R\$ $8,00$. Assim, a longo prazo, espera-se que o apostador tenha um ganho médio de R\$ $5,20 -$ R\$ $8,00 =$ R\$ $-2,80$.

- Cinco jogos (14,13,12 e 11 dezenas em comum)
  $E(X) = 2.002.032 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{3.268.760} + 2.032 \cdot 5 \cdot \dfrac{9}{200.000} + 32 \cdot 5 \cdot \dfrac{289}{200.000} + 12 \cdot 5 \cdot \dfrac{167}{10.000} + 4 \cdot 5 \cdot \dfrac{877}{10.000} \approx 6,50$
  Para apostar cinco jogos, o custo é de R\$ $10,00$. Ao jogar muitas vezes, espera-se que o ganho médio do apostador seja de R\$ $6,50 -$ R\$ $10,00 =$ R\$ $-3,50$.

Quando se faz jogos com muitas dezenas em comum, caso seja sorteado, a premiação é maior. Para isso, é necessário fazer mais jogos, o que aumenta a probabilidade, porém, o valor esperado aumenta negativamente, ou seja, o apostador perde mais dinheiro a longo prazo.

Se tomarmos dois bilhetes distintos, a chance de ganhar nos dois é a mesma, porém, no valor esperado isso faz diferença. Entre dois jogos distinto (até 10 dezenas em comum) ou dois jogos iguais, é melhor optar por dois jogos distintos. Entre dois jogos distintos(até 10 dezenas em comum) ou dois jogos (14 dezenas em comum), deve-se optar por mais dezenas em comum.

Vamos considerar dez jogos escolhidos cuidadosamente através da estratégia apresentada no vídeo "Como ganhar na lotofácil – Acerte os 15 pontos em 3 passos simples". Neste caso, cada jogo, terá no máximo 10 intersecções, isto é, se uma das dez apostas forem sorteadas, só é possível garantir uma única premiação. Uma pessoa aposta em todos os concursos realizando sempre dez jogos de R\$ 2,00 cada. Caso os 15 números sorteados sejam o da aposta realizada, a pessoa ganha R\$ 2000000,00[1]; caso acerte 14 números, a pessoa ganha R\$ 2000,00; caso acerte 13,12 ou 11 receberá R\$ 20,00, R\$ 8,00 e R\$ 4,00 respectivamente. Neste caso, uma pessoa que aposta 20 reais durante um longo tempo, o lucro médio aproximado pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\frac{2000000\frac{1\times 10n}{3268760}+2000\frac{10\times 9n}{200000}+20\frac{10\times 289n}{200000}+8\frac{10\times 167n}{10000}+4\frac{10\times 463}{2000}}{n}\approx 12,15$$

Considerando os 20 reais gastos para realizar as apostas, o valor esperado será de $\text{R\$}\,12,15-\text{R\$}\,20,00=-\text{R\$}\,7,85$.

O número $-7,85$ é muito importante, pois é ele que determina o quanto estará ganhando ou perdendo em média caso resolva jogar muitas vezes.

Em um jogo, para garantir 11 dezenas e faturar o prêmio de R\$ 4,00, é necessário realizar $C_{15}^{11}\cdot C_{10}^{4}=286650$ apostas e um investimento de R\$ 57.3300,00. É claro que com todos esses jogos, aumenta a chance dos outros prêmios.

Se aumentar o número de apostas, as chances serão aumentadas, e com isso, espera-se também, perder mais dinheiro a longo prazo, pois os jogos de loteria foram feitos para terem esperança matemática negativa. Acreditamos que trazendo

[1] Os valores dos prêmios para quem acertar 15 ou 14 pontos mudam de acordo com a arrecadação

situações do cotidiano sob uma perspectiva crítica estamos contribuindo com a formação de cidadãos reflexivos e ativos na sociedade. Os estudantes num primeiro momento, poderão encontrar dificuldades para desenvolver ou compreender os cálculos, mas é importante que reflitam sobre o que realmente está envolvido nestas situações.

5.2 Uma análise do valor esperado do jogo do bicho

No jogo do bicho são vinte e cinco animais, e cada um tem um número que o representa. (Cada bicho é representado por quatro unidades, sendo o avestruz os números $01, 02, 03$ e 04; o grupo da caracteriza outro grupo, que vem logo depois, possui os números $05, 06, 07$ e 08; e assim sucessivamente, totalizando 25 grupos). Existem várias maneiras de jogar, porém o mais comum é a do grupo simples. Ganha-se R\$ $18,00$ para cada R\$ $1,00$ jogado. Uma pessoa aposta todos os dias neste jogo em que a probabilidade de ganhar é $\frac{1}{25}$. Caso a aposta corresponda ao grupo que foi sorteado, o ganhador recebe 18 vezes o valor apostado. Neste caso, a pessoa que aposta 1 real, ganha R\$ $17,00$ com probabilidade de $\frac{1}{25}$ e perde $1,00$ com probabilidade de $\frac{24}{25}$, sendo que, uma pessoa que aposta 1 real por dia em um período longo, terá um lucro médio aproximado de $\frac{17}{25} - \frac{24}{25} = -\frac{7}{25} = -0,28$. O número $-0,28$ indica o quanto estará perdendo em média caso resolva entrar nesse jogo e jogar muitas vezes. O jogador não estará perdendo 1 real porque, de vez em quando ele irá ganhar.

CAPÍTULO 6

RELATO DE EXPERIÊNCIA E SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Este trabalho também foi pensado e desenvolvido para servir de auxílio aos professores que têm interesse em aplicar determinado conteúdo em suas aulas, adaptando-as conforme a realidade. A leitura e acompanhamento do texto, assim como todas as abordagens realizadas no capítulo deste trabalho, compõem o material de atividades além das propostas sugeridas à seguir.

As sugestões de atividades são para ajudar a explorar problemas envolvendo fatos reais, investigação matemática, interdisciplinariedade e discussão.

1. ***Jogos para explorar conceitos de probabilidade e esperança matemática***

   Esta oficina foi desenvolvida pelo professor Dr. Thiago Fanelli Ferraiol em um curso de extensão do projeto TIME (Teoria e Investigação em Matemática Elementar).

   Em posse desse material, realizamos as adaptações necessárias para aplicar junto aos alunos do curso de formação de docentes do Colégio Estadual Dom Manoel Konner, na Mostra Cultural, onde criaram uma sala de matemática para expor os conceitos trabalhados. Durante o quarto bimestre, os estudantes tiveram a oportunidade de investigar e aprender conceitos sobre *"distribuição de probabilidade, variável aleatória, valor esperado"* entre outros. Desse modo, debates, apresentações de soluções e estudos foram realizados em sala de aula.

Os alunos elaboraram materiais concretos e criaram uma sala de jogos com o nome “Quer pagar quanto?” onde foi abordado o conceito de probabilidade e valor esperado em jogos de dados, cartas, jogos presentes em cassinos, entre outros.

O desenvolvimento dessa oficina seguiu às seguintes atividades:

Atividade 1 Material utilizado: 1 dado.

Considere o seguinte jogo: você compra o direito de jogar um dado não viciado e recebe o correspondente ao valor tirado: se tirar 1, recebe 1 real; se tirar 2, recebe 2 reais; e assim por diante. Quanto você pagaria para jogar esse jogo? Qual a esperança matemática?

Obs: É possível fazer algumas variações. Para atrair o jogador, é possível, por exemplo pagar R$ $4,00$ ou R$ $5,00$ reais se cair face 1. Outra variação seria colocarmos várias bolas numeradas em uma caixa e retirá-las aleatoriamente. Neste caso, pode-se falar antecipadamente quantas bolas de cada número há na caixa, ou então deixar que eles mesmos façam a estimativa conforme o jogo se desenrola.

Relato: Alguns alunos atribuíram valores próximos de R$ $3,50$ mas não conseguiram explicar o que estavam raciocinando. Um comentário que causou espanto foi feito por um aluno que afirmou:“não tem problema pagar 5 reais pois ainda tem chance de ganhar 6”. Pensamos que o aluno estivesse confuso com sua fala, um equívoco qualquer, mas convidado a repetir a frase, utilizou as mesmas palavras. Após algum tempo de debate com os colegas, esse aluno não havia compreendido o raciocínio envolvido nesta situação. A atividade foi finalizada com a formalização do conceito de valor esperado.

Comentário: Exemplo resolvido no capítulo 2.

Atividade 2 Material utilizado: Dois dados.

O professor deverá propor ao aluno o seguinte jogo: Lança-se dois dados, se a soma for 7, o aluno paga R$ $2,00$ para o professor; se der soma 2 o aluno recebe R$ $5,00$.

Esse jogo é justo? Qual a probabilidade que cada um tem de ganhar? Qual o valor esperado para o aluno aceitar jogar esse jogo 100 vezes?

Relato: Ao questionarmos se esse jogo era justo, alguns alunos rapidamente disseram que sim, pois pensaram que a soma 2 ocorresse uma vez e a soma 7 ocorresse apenas uma vez também. Foi necessário fazer uma tabela para mostrar que a soma sete tem mais chances de ocorrer que a soma dois. Quando percebiam que suas chances eram menores alguns alunos topavam participar com a condição de que a soma 7 ficasse para eles.

Comentário: Exemplo resolvido no capítulo 2.

Atividade 3 Material utilizado: 1 baralho.

Num jogo de baralho, você compra o direito de retirar uma entre as 52 cartas do baralho. Se a carta escolhida for **Às**, você ganha o dobro. Se você fosse jogar muitas vezes esse jogo, qual o valor esperado?

Relato: Nesta atividade, foi necessário explicar sobre as cartas do baralho, enumeração e naipes. Por mais que percebessem que a probabilidade não estavam ao seu favor, muitos alunos insistiam em tentar a sorte e encontrar algum Às. Um dos alunos questionou se em todos os jogos o valor esperado é sempre negativo. Explicamos que para um jogo ser justo o valor esperado deve ser zero, porém, os jogos que visam lucro, geralmente possuem o valor esperado negativo (isto para o jogador).

Atividade 4 **Problema de Monty Hall**. Apresenta-se três portas ao convidado. Atrás de uma delas esta um prêmio e as outras duas nenhum prêmio.

1.ª etapa. O participante escolhe uma das três portas;

2.ª etapa. O apresentador abre uma das outras duas portas que o convidado não escolheu, revelando que o prêmio não se encontra nessa porta;

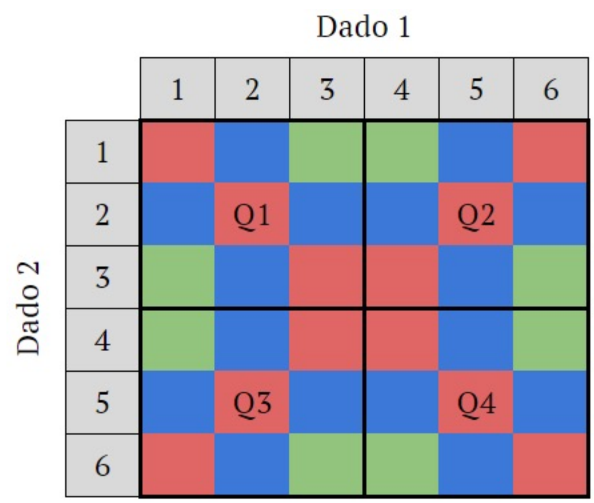
3.ª etapa. O apresentador pergunta ao participante se quer decidir permanecer com a porta que escolheu no início do jogo ou se ele pretende mudar para a outra porta que ainda está fechada para então a abrir.

Qual é a estratégia mais lógica? Ficar com a porta escolhida inicialmente ou mudar de porta? Com qual das duas portas ainda fechadas o concorrente tem mais probabilidades de ganhar? Por quê?

Relato: Esta atividade foi a mais visitada pelos estudantes. As portas foram representadas por três baldes com tampa, o prêmio era bala e o mico eram massinhas para sujar as mãos. O visitante escolhia o balde, optava em trocar ou não e, em seguida, inseria a mão dentro do balde para pegar o prêmio ou melecar a mão. Num primeiro momento, os estudantes se divertiam apenas jogando e observando. Em seguida, explicava-se que para ter mais chances era necessário trocar de porta. Apesar da explicação, alguns estudantes pensaram que mudando ou não mudando não faria diferença alguma.

Atividade 5 **Malha quadriculada.** Material utilizado: Dois dados por equipe.

Montar equipe com 4 jogadores. Cada jogador deverá apostar na cor ou no quadrante.



Aposta	Probabilidade	Resultado	Vitória/Derrota	Débito/Crédito	Saldo

$P(vermelho) = \dfrac{1}{3}$

$P(verde) = \dfrac{2}{9}$

$P(Azul) = \dfrac{4}{9}$

$P(quadrante) = \dfrac{1}{4}$

Se acertar a aposta, o jogador ganha o inverso da probabilidade da opção que escolheu.

Comentários:

Vamos supor que um apostador irá jogar 900 vezes.

Se apostar no azul irá vencer 400 vezes e perder 500 vezes. O valor esperado nesse caso é $\dfrac{9}{4} \cdot 10 \cdot 400 + 500 \cdot (-10)$.

Se apostar no vermelho, o valor esperado é $3 \cdot 10 \cdot 300 + 600(-10)$

Se apostar no verde, serão 200 vitórias e 700 derrotas. Isto que dizer que o valor esperado é $\frac{9}{2} \cdot 10 \cdot 200 - 10 \cdot 700 = 2000$.

Se apostar no quadrante terá $4 \cdot 10 \cdot 225 - 10 \cdot 675$

Qual a melhor estratégia para obter maiores ganhos neste jogo? Apostar pouco em probabilidade baixa ou apostar muito em probabilidade alta? Até quanto você pagaria para jogar esse jogo?

Relato: Essa atividade foi realizada em sala de aula várias vezes com o intuito apenas de jogar e revisar operações envolvendo frações. Ao fazer as contas do valor esperado, os alunos puderam perceber que todos os casos a esperança era positiva. A partir daí, explorou-se o que valeria mais a pena: Apostar muito em probabilidades baixas? Apostar pouco em probabilidades altas? Assim, começamos a explorar conceitos, estratégias e compreensão. Durante a Mostra Cultural, a tabela colorida foi reproduzida no chão da sala em tamanho grande com objetivo de proporcionar uma maior interação entre o jogo e o jogador, pois era possível se posicionar na cor ou quadrante escolhido. A maior parte dos visitantes participaram desta atividade sem se preocupar com estratégia para aumentar os ganhos. Ao explicar que o jogador ganha o inverso da probabilidade da opção que escolheu, muitos alunos disseram que não gostavam de fazer cálculos com frações e que gostariam apenas de se divertir explorando a sorte.

Atividade 6 **Roleta.**

Pedir para os alunos construírem uma roleta de cassino, simular vários jogos e explorar os conceitos de esperança matemática

Atividade 7 **Lotofácil.**

Pesquise, analise e compare vídeos na internet sobre como ganhar na lotofácil. Escolha o que mais te agradou, copie o link e escreva as principais razões (pelo menos três) pelas quais você o escolheu.

Escolha uma dessas estratégias e construa dez jogos. Em seguida, utilize um simulador de sorteio ou busque os vinte últimos sorteios realizados pela Loteria federal. Com os valores pagos para os ganhadores, qual seria o valor médio esperado por esses jogos?

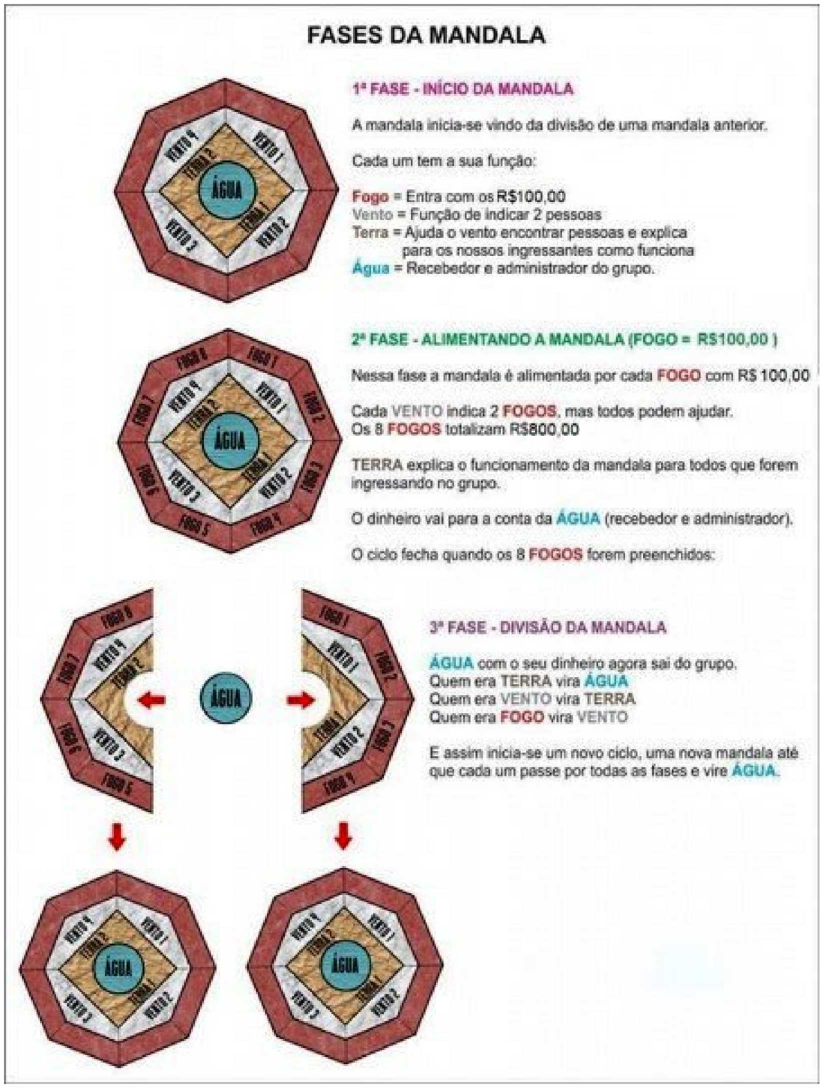
Calcule a distribuição de probabilidade e observe qual o número de acertos tem mais chances de ocorrer.

Existe alguma estratégia vencedora para lotofácil? Existe alguma maneira em que as chances de ganhar aumentam?

2. **Pirâmide Financeira** Com a promessa de bons ganhos, muitas pessoas pôr necessidade de pagar as contas ou simplesmente ambição, acabam caindo em golpes, e o que parece lucrativo acaba virando prejuízo. Esse suposto investimento se chama Mandala[1]

O processo tem como base criar uma rede de membros que assemelha-se aos esquemas de pirâmide financeiras e é dividido em quatro fases:

[1]Esse suposto investimento também é conhecido como ajuda mútua ou giro solidário.



(a) Doar

(b) Convidar duas pessoas

(c) Ensinar e esperar

(d) Receber e motivar

- Explorar com os alunos a mesma situação em que os alunos da sala são todas as pessoas que eles conhecem. Será que a pirâmide vai funcionar?
- Discutir matematicamente a inviabilidade do processo.

3. ***Inflação***

Solicitar aos alunos que se organizem em grupos e apresentem um seminário:

1. O que é inflação?

2. O que causa inflação?

3. Quais os impactos da inflação na vida do cidadão?

4. Qual a taxa de inflação do Brasil antes do Plano Real.

5. Quais as principais estratégias adotadas pelos governos, a fim de conter o aumento da inflação e os impactos de tais estratégias na vida dos consumidores.

6. Visite uma imobiliária para fazer o levantamento do preço médio de três terrenos próximos à região onde você mora.

7. Considerando as projeções do governo em relação a taxa de inflação, faça a projeção do preço destes terrenos para daqui 3 anos; 5 anos e 10 anos. Se possível, tentar descobrir por quanto o terreno foi colocado para venda no passado, e comparar a trajetória do preço em relação a inflação.

4. ***Manter um automóvel***

Após realizar pesquisas, elabore uma maneira gráfica para representar os dados sobre os custos para se manter um automóvel. Converse com os familiares que tem automóvel, sobre quanto eles o utilizam e quanto ele gera de despesas. Apresente aos demais colegas da turma.

5. ***Títulos de capitalização (Bingo transmitido por televisão)***

Com o objetivo de arrecadar contribuição à APAE BRASIL, concedem aos colaboradores o direito de participação em uma campanha regional, distribuição gratuita de prêmios por meio de sorteio realizada pela própria entidade em parceria com empresas de capitalização. Os doadores da APAE BRASIL que contribuem através do Certificado de Contribuição passarão a concorrer a diversos prêmios oferecidos em sorteios lastreados por títulos de Capitalização da Modalidade Incentivo, emitidos por uma empresa de Capitalização S/A. Além disso, estarão ajudando, de forma indireta, na prestação de serviços de assistência à saúde, assistência social, acolhimento educacional e na integração social das pessoas com deficiência intelectual e múltipla, promovendo a melhoria da qualidade de vida dessas pessoas, em todo o seu ciclo de vida.

Em uma das edições do sorteio tinham 100.000 certificados de contribuição concorrendo ao sorteio e um total de R\$ $115.000,00$ em prêmios para ser distribuído. Se cada certificado custa R$ 10,00. O apostador está pagando um preço justo? (Basta calcular o valor esperado)

(Como sugestão: abordar a porcentagem que é repassada para as Apaes; visitar a Apae do Município para conhecer; ver as necessidades; conversar sobre os repasses da Apae Brasil; observar como os certificados são oferecidos nas ruas para a população, será que são oferecidos como contribuição?)

6. ***Dados sobre seu município***

   a) Pesquise o crescimento populacional da cidade e do estado relativo a uma década.

   b) Encontre os valores do PIB da cidade de dez anos atrás e o atual.

   c) Abrir discussões e explorar cálculos, fazer projeções, analisar o que deve melhorar, etc.

   d) Organizar um painel para expor os dados estatísticos do município.

7. ***Valor ideal para o salário mínimo***

   Solicitar aos estudantes a elaboração de um levantamento de custos que uma família de 4 pessoas tem ao longo do mês e a partir daí, criar critérios para determinar o valor do salário mínimo.(Simultaneamente, registrar durante um mês as despesas da própria família para comparações)

   Organizar em tabelas os custos para uma família com 4 pessoas e duas pessoas. Lembre-se: algumas taxas como água, luz e internet são as mesmas independente da quantidade de pessoas que moram na residência. Do ponto de vista matemático, vale a pena morar sozinho?

8. ***Margem de lucro***

   Propor aos alunos que pensem na sua família. Quantos trabalham? O que cada um faz? Quanto ganham? Quanto que eles produzem para a empresa? O que isso significa?

9. ***Regras de aposentadoria***

   Dona Maria tem 30 anos de contribuição e 55 anos de idade. Atualmente, ela conseguirá se aposentar em qual modalidade? Escolha um membro da sua família que é registrado ou que contribui, e calcule quanto tempo mais ele precisará contribuir para a aposentadoria.(Neste caso será possível observar as famílias em que as pessoas são autônomas ou que não contribuem com a previdência e que supostamente não terão aposentadoria)

10. ***Expectativa de vida no Brasil***

    1. O que é expectativa de vida?

    2. Verifique a expectativa de vida da população de uma determinada área, em um determinado ano. O que é levado em consideração para efeitos de cálculo?

    3. A esperança de vida ao nascer pode ser estratificada segundo a classe de renda, o acesso a serviços de saúde, saneamento, educação, cultura e lazer, bem como os índices de violência, criminalidade e poluição do local onde vive a população. Desta forma, é possível calcular diferenças na expectativa de vida de determinados setores da população (por exemplo, entre ricos e pobres). A expectativa de vida levada em consideração para cálculos de aposentadoria acata essas diferenças? Investigue e monte um esquema para apresentar para os colegas.

11. ***Black Friday***

    Cada estudante deverá montar uma lista de produtos e manter o registro de variação de preço durante os meses de julho à novembro(data do black friday). A lista de produtos deverá ser montada em relação aos produtos que as empresas colocaram na promoção em edições anteriores. Analisar a oferta de crédito para aproveitar o black Friday *"Faça já seu financiamento e aproveite a black friday"* e verificar o que vale a pena.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sob o olhar da Educação Matemática Crítica buscamos preencher uma lacuna que existe no ensino de matemática, que é relacionar a matemática de sala de aula com situações do cotidiano. Neste trabalho, a intenção foi apresentar algumas dessas situações. Como comentamos na introdução, tínhamos como objetivos principais:

- *Realizar um breve estudo sobre fundamentação teórica da Educação Matemática Crítica.*
- *Pesquisar e aprofundar os assuntos matemáticos elencados.*
- *Estabelecer reflexões e conexões entre EMC e o conhecimento matemático abordado como possibilidades para a sala de aula.*
- *Contribuir com o desenvolvimento da autonomia e criticidade.*

Apresentamos alguns aspectos sobre EMC, expondo que a matemática, quando usada como argumentação para debates na sociedade, expressa uma linguagem de poder. A busca pela matemática crítica permitiu vivenciar a investigação e a resolução de problemas, possibilitando abordar conceitos matemáticos apresentados nas aulas de nível médio e graduação sob um olhar diferenciado, favorecendo o exercício de uma cidadania crítica.

Utilizamos a matemática elementar para explorar problemas do cotidiano analisando os números sob vários pontos de vista.

Verificamos o custo para se manter um automóvel e simulamos as receitas e os custos de quem é ou pretende ser motorista Uber. Constatamos que para esse tipo de trabalho, a locação de automóvel pode ser vantajosa em alguns casos.

Também expusemos algumas análises a respeito da reforma da previdência com objetivo de promover provocações e reflexões. Pudemos perceber a dificuldade em processar dados sobre a previdência e os gastos públicos pois, são diversas fontes com dados relativos, que dificultam as interpretações. Realizamos uma simulação sobre o sistema de capitalização e percebemos que uma aplicação individual por parte do trabalhador pode não ser suficiente para proporcionar uma aposentadoria integral e vitalícia.

Abordamos alguns conceitos sobre probabilidade e valor esperado com objetivo de tornar claro que em jogos de loteria os métodos que garantem ganhos são falíveis.

Como possibilidades para sala de aula, elaboramos sugestões de atividades de ensino-aprendizagem sob a perspectiva da EMC que têm o propósito de contribuir com a formação crítica em que o aluno se apropria de habilidades e competências em matemática e desenvolve a estruturação do seu pensamento, sendo capaz de analisar, avaliar e argumentar diante de uma situação em que tenha que tomar uma decisão.

Apesar de ter experiência em docência, os conceitos e abordagens da EMC foram novidades o que proporcionou ganho pessoal significativo no conhecimento matemático, crítico e pedagógico. Esperamos que o mesmo possa contribuir para o leitor aprofundar e evoluir dentro dos contextos apresentados e que as propostas de trabalho sejam utilizadas por outros professores, possibilitando a disseminação da matemática crítica.

BIBLIOGRAFIA

[1] BASSETT, G.W; The st. peterburg paradox and bounded utility. History of Political Economy, 19(4):517-523,1987.

[2] BICUDO, M.A.V. et al Educação Matemática. Moraes, 2005

[3] BORBA, M.C. e SKOVSMOSE, O. A ideologia da certeza em educação matemática. Skovsmose,O. Educação matemática crítica: a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, p.127-148,2001.

[4] BRASIL. Lei de diretrizes e bases da educação nacional. Senado Federal, Subsecretaria de Edições Técnicas, 1996.

[5] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais,Ensino Médio. "Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais."Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias,2002.

[6] BRASIL. Diretrizes curriculares nacionais gerais da educação básica. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

[7] CAMARGO, C. Análise de investimento e demonstrativos financeiros: Editora Ibpex, 2007.

[8] CARDOSO, V.C. SKOVSMOSE,O. Educação matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001, coleção perspectivas em educação matemática, Sbem,160 p. HIPÁTIA-Revista Brasileira de História, Educação e Matemática-Câmpus Campos do Jordão, 2(1):60-64,2017.

[9] CASTANHEIRA,N.P. e MACEDO, L.R.D. Matemática financeira aplicada, 2010.

[10] CHIARELLO, A.P.R.; PELINSON, N.C.P.; BERNARDI, L.M. e BERNARDI L.S. Educaçao financeira para jovens do campo: Novas perspectivas de ensinar e de aprender,2014.

[11] D'AMBRÓSIO,U. Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática. Grupo Editorial Summus, 1986.

[12] D'AMBRÓSIO, U. Educação matemática: da teoria à prática. Papirus Editora, 1996.

[13] DWECK,E.; OLIVEIRA, A.L.M. e ROSSI, P. Austeridade e retrocesso: impactos sociais da política fiscal no Brasil. São Paulo: Brasil Debate,2018.

[14] DO BRASIL, Senado Federal. Constituição da república federativa do Brasil. Brasília: Senado Federal, Centro Gráfico, 1988.

[15] DOMINGOS, R. Ter dinheiro não tem segredo. DSOP Educação Financeira LTDA,2013.

[16] EVES,H.W. Introdução à história da matemática. Unicamp, 2004.

[17] FONSECA,M.C.F.R et al. Letramento no Brasil: habilidades matemáticas. São Paulo: Global, p.65-90,2004.

[18] FREIRE,P. Education for critical consciousness, volume 1. Bloomsbury Publishing,1973.

[19] GIROUX, H.A. Schooling for democracy: Critical pedagogy in the modernage. Routledge,1989.

[20] GONÇALVES. J.P. A história da matemática comercial e financeira. Disponível no site http://somatematica.com.br/história/matematicafinanceira4.php,2007

[21] HUFF, D. Como mentir com estatística. Editora Intrinseca, 2016.

[22] IBRAHIM. F.Z. Curso de direito previdenciário. Desaposentação: O caminho para uma melhor aposentadoria. Edição 5, Rio de Janeiro: Impretus, 2007

[23] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; HAZZAN, S. e DOLCE, O. Fundamentos da matemática elementar. Atual, 1995.

[24] KISTEMANN JÚNIOR, M. A. Sobre a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores. 528 f. 2011. Diss. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

[25] LEVITIN, D.J. A field guide to lies:Critical thinkings in the information age. Pengin, 2016.

[26] LOTOFÁCIL. Como ganhar na lotofácil?. Disponível em www.youtube.com/watch?v=6lspfQH4jTM, acesso em 10 out.2018

[27] MEYER, P.L. Probabilidade: aplicações à estatística. Livro Técnico, 1970.

[28] MILANI, R.; SILVA, M.T. e SAULLO, C.R.R.H. Educação matemática crítica: possibilidades de ação e sala de aula. Educação Matemática em revista, (34): 05-13,2013.

[29] MIRANDA, C.T; SANTOS,G; PINHEIRO, N.A.M e PILATTI, L.A. Educação matemática crítica: Propostas de atividades de acadêmicos de licenciatura em matemática. Educere-Revista da Educação da Unipar, 12(1), 2014.

[30] MORETTIN, P. A e BUSSAB, W.O. Estatística básica. Editora Saraiva, 2017.

[31] MORGADO, A.C.; WAGNER, E.e ZANI,S.C. Progressões e matemática financeira. Sbm, 2005.

[32] NIGRO,T. Vale a pena ou não comprar um carro? Disponível em www.youtube.com/watch?v=muj3vRBsPEct=460s, acesso em 17 out.2018.

[33] O'CONNOR, JJ. e ROBERTSON, E.F. Girolamo Cardano. The Mac Tutor History of Mathematics archive, 2001.

[34] ONUCHIC, L.R. e ALLEVATO,N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, p.212-231,2004.

[35] PCN-Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, p.538-545,1999.

[36] PAIS,A.;ALVES,A.S.;FERNANDES,E.;GERARDO,H.;AMORIM,I.;MATOS,J.F. e MESQUITA, M. O conceito de crítica em educação matemática e perspectivas de investigação.2008.

[37] PROGRAMA VRUM. Manter um carro pode custar muito mais do se imagina. Disponível em www.youtube.com/watch?v=Xi7ukqp4mSo, acesso em 17 out.2018.

[38] ROSSI,P. Pec(55)241 Governo vende gato por lebre, 2016. Disponível em www.youtube.com/watch?v=mKhQwJY4tQ, acesso em 14 set. 2018.

[39] SANTOS, K.M.B. A matemática do financiamento habitacional. MS thesis. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2015.

[40] SEABRA,R. Quanto custa ter um carro?. Disponível em www.youtube.com/watch?v=nSLetHlhWWQt=1s, acesso em 17 out.2018.

[41] SKOVSMOSE,O. Cenários para investigação, 2000.

[42] SKOVSMOSE,O. Educação matemática crítica: a questão da democracia. Papirus Editora, 2001.

[43] SKOVSMOSE,O. Educação crítica: Incerteza, matemática, responsabilidade.2007.

[44] SOARES,M. Letramento e alfabetização: as muitas facetas,2000.

[45] VIANNA, M. L. T. W. et al. Reforma da previdência: contexto atual, pós-verdade e catástrofe. 2017.

[46] www.gazetadopovo.com.br/politica/parana/sanepar-corta-pela-metade-o-consumo-minimo-de-agua-mas-tarifa-cai-apenas-10-535qvtnhl3afu7po5ws54qegd/ acesso em 12 set.2018.

[47] https://paranaportal.uol.com.br/economia/tarifa-de-agua-tera-reajuste-de-853/, acesso em 19 nov.2018

[48] https://economia.uol.com.br/noticias/reuters/2018/11/22/reforma-da-previdencia-e-teto-de-gastos-garantem-crescimento-de-3-e-anos-fabulosos-diz-mansueto.htm, acesso em 5 out. 2018.

[49] www.vidaedinheiro.gov.br, acesso em 15 nov.2018

[50] www.ibge.gov.br, acesso em 14 dez.2018

[51] www.uber.com, acesso em 15 nov.2018

[52] www.previdencia.gov.br, acesso em 13 nov.2018