UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

Diâmetro do Grafo Comutante de um Grupo Solúvel Finito

Thiago Luiz Bernin de Almeida

Orientadora: Profa. Dra. Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR

2022

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Diâmetro do Grafo Comutante de um Grupo Solúvel Finito

Thiago Luiz Bernin de Almeida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra

Orientadora: Profa. Dra. Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Almeida, Thiago Luiz Bernin de
A447d Diâmetro do grafo comutante de um grupo solúvel finito / Thiago Luiz Bernin de Almeida. -- Maringá, 2022.
x, 74 f. : il.

Orientadora: Profª. Drª. Irene Naomi Nakaoka.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática – Área de Concentração: Álgebra, 2022.

1. Diâmetro. 2. Grafo comutante. 3. Grupo solúvel. 4. Grupo de Frobenius. 5. Grupo 2-Frobenius. I. Nakaoka, Irene Naomi, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemáica – Área de concentração: Álgebra. III. Título.

CDD 22.ed. 515.24
Edilson Damasio CRB9-1.123

THIAGO LUIZ BERNIN DE ALMEIDA

DIÂMETRO DO GRAFO COMUTANTE DE UM GRUPO SOLÚVEL FINITO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Irene Naomi Nakaoka - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Alex Carrazedo Dantas - UnB
Prof. Dr. Igor dos Santos Lima - UnB

Aprovado em: 13 de abril de 2022.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (https://meet.google.com/oaq-kxsx-ucz)

Aos meus amados pais.

"Vá até onde a sua vista alcançar e, ao chegar lá, você conseguirá enxergar mais longe."

John Pierpont Morgan.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus amados pais por sempre me apoiarem em meus estudos e serem a minha base durante a minha caminhada.

Agradeço principalmente à minha orientadora Profa. Dra. Irene Naomi Nakaoka, por seus ensinamentos e conselhos durante toda minha jornada, desde a graduação até a conclusão do mestrado.

À minha namorada por sempre me apoiar e estar ao meu lado nos momentos mais difíceis.

À todos os meus amigos que me apoiaram e me ajudaram com dúvidas e, principalmente, nos momentos de descontração em meio à tensão.

À todos os professores que estiveram presentes em minha jornada acadêmica.

À CAPES, pelo auxílio financeiro, que foi essencial para que eu pudesse me dedicar exclusivamente aos estudos.

Aos professores doutores Alex Carrazedo Dantas e Igor dos Santos Lima por terem aceitado fazer parte da banca examinadora desta dissertação, e por contribuirem com sugestões para elaboração da versão final deste trabalho.

Meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma passaram por minha vida durante essa jornada.

Por fim, agradeço à Deus por me possibilitar e dar forças para alcançar essa nova etapa em minha vida.

Resumo

O grafo comutante $\Gamma(G)$ de um grupo G é o grafo que tem os elementos não centrais de G como seu conjunto de vértices e dois vértices distintos x e y são ligados por uma aresta sempre que eles comutam. O objetivo central desse trabalho é o estudo do grafo comutante de um grupo solúvel finito com centro trivial. Apresentamos a demonstração do resultado de C. Parker, o qual estabelece que se G é um grupo solúvel finito com centro trivial e $\Gamma(G)$ é conexo, então o diâmetro de $\Gamma(G)$ é no máximo 8. Tal estimativa encontrada é a melhor possível, já que existem grupos solúveis finitos com centro trivial cujos grafos comutantes são conexos e têm diâmetro exatamente 8. Também apresentamos o resultado de C. Parker que caracteriza os grupos solúveis finitos com centro trivial para os quais o grafo comutante é desconexo. Mais especificamente, ele mostrou que o grafo comutante de um grupo solúvel G com centro trivial é desconexo se, e somente se, G é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius. Finalizamos este trabalho apresentando uma generalização do resultado de C. Parker relativo ao diâmetro do grafo comutante estabelecida por N. F. Beike, R. Carleton, D. Costanzo, C. Heath, M. Lewis, K. Lu e J. Pearce.

Palavras-chave: Diâmetro, grafo comutante, grupo solúvel, grupo de Frobenius, grupo 2-Frobenius.

Abstract

The commuting graph $\Gamma(G)$ of a group G is the graph that has the non-central elements of G as its set of vertices and two distinct vertices x and y are connected by an edge whenever they commute. The main goal of this work is the study of the commuting graph of a finite solvable group with trivial center. We present the proof of C. Parker's result that states that if G is a finite solvable group with trivial center and $\Gamma(G)$ is connected, then the diameter of $\Gamma(G)$ is at most 8. Such estimate found is the best possible, since there are finite soluble groups with trivial center whose commuting graph is connected and its diameter is exactly 8. We also present the result by C. Parker that characterizes the finite soluble groups with trivial center for which the commuting graph is disconnected. More specifically, he showed that the commuting graph of a solvable group G with trivial center is disconnected if and only if G is a Frobenius group or a 2-Frobenius group. We end this work with the generalization of C. Parker's result concerning the diameter of the commuting graph presented by N. F. Beike, R. Carleton, D. Costanzo, C. Heath, M. Lewis, K. Lu and J. Pearce.

Key words: Diameter, commuting graph, soluble group, Frobenius group, 2-Frobenius group

Índice de Notações

$\emptyset$	conjunto vazio
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_n$	conjunto dos números inteiros módulo n
$X \subset Y$	X é um subconjunto de Y
$\|X\|$	cardinalidade do conjunto X
$X \times Y$	produto direto de X por Y
$X \setminus Y$	$\{x \in X \mid x \notin Y\}$
$H \leq G$	H é um subgrupo de G
$H < G$	H é um subgrupo próprio de G
$H \lhd G$	H é um subgrupo normal próprio de G
$H \unlhd G$	H é um subgrupo normal de G
$\langle X \rangle$	subgrupo gerado por X
$G \cong H$	grupo G isomorfo ao grupo H
$Aut(G)$	grupo dos automorfismos de G
$Im(f)$	imagem da função f
$Ker(f)$	núcleo da função f
$C_G(x)$	centralizador de x em G
$C_G(H)$	centralizador de H em G, isto é, $\{g \in G;\ gh = hg,\ \text{para todo } h \in H\}$
$Z(G)$	centro de um grupo G
$[x, y]$	comutador de x por y
$[X, Y]$	subgrupo comutador de X e Y
a^g	conjugado de a por g
a^G	classe de conjugação de a em G
$\pi(G)$	conjunto de todos os primos que estão na decomposição de $\|G\|$
$C_G(\phi)$	$\{x \in G : \phi(x) = x\}$, onde $\phi \in Aut(G)$
$Est(x)$	estabilizador do elemento x
G'	subgrupo derivado
$G(V, \mathbb{F})$	grupo dos operadores lineares inversíveis de V
$\mathcal{O}(x)$	órbita de um elemento x

H *char* G	H é um subgrupo característico de G
$\frac{G}{H}$, G/H	grupo quociente de G por um subgrupo normal H
Hg	$\{hg; h \in H\}$ classe lateral à esquerda de H em G

Sumário

Introdução

Dado um subconjunto não vazio X de um grupo finito G, o grafo comutante $C(G, X)$ de G sobre X é o grafo que tem X como seu conjunto de vértices e dois elementos distintos x e y em X são ligados por uma aresta sempre que eles comutam. Este conceito foi primeiramente estudado por R. Brauer e K.A. Fowler [5], cujo objetivo era estudar os grupos de ordem par. Eles mostraram que se G é um grupo finito de ordem par que possui pelo menos duas classes de conjugação de involuções, então a distância entre quaisquer duas involuções é no máximo 3. No trabalho deles, o conjunto X foi tomado como sendo $G \setminus \{1_G\}$. Desde então, muitos trabalhos têm investigado $C(G, X)$ para diferentes escolhas de X. Por exemplo, C. Bates, D. Bundy, S. Hart e P. Rowley [3] estudaram o grafo $C(G, X)$ quando X consiste involuções do grupo e os trabalhos [1, 10, 11] consideraram X como sendo o conjunto dos elementos não centrais de G.

Neste trabalho, consideramos o subconjunto X como sendo o conjunto dos elementos não centrais de G e denotamos este grafo comutante por $\Gamma(G)$. Muitos trabalhos deram ênfase em analisar o diâmetro desse grafo para diferentes escolhas do grupo G. Por exemplo, em [14], A. Iranmanesh e A. Jafarzedah demonstraram que $\Gamma(S_n)$ é desconexo ou tem diâmetro no máximo 5 e que o mesmo é válido para $\Gamma(A_n)$. No mesmo trabalho os autores conjecturaram a existência de um natural n tal que se G é um grupo não abeliano finito e $\Gamma(G)$ é conexo, então $\text{diam}(\Gamma(G)) \leq n$. Essa conjectura foi provada ser falsa quando M. Giudici e C. Parker [10] apresentaram uma família de grupos G_n, com $n \geq 4$, de forma que $\Gamma(G_n)$ é conexo e possui diâmetro $n-1$. Em uma tentativa de não perder totalmente a conjectura, no mesmo trabalho, M. Giudici e C. Parker conjecturaram que existe esse limitante universal para o diâmetro do grafo comutante quando G é um grupo com centro trivial. As tentativas de prova da nova conjectura proposta geraram vários trabalhos, dentre eles o que vamos apresentar nessa dissertação, no qual C. Parker [18] prova o seguinte resultado:

Teorema A. [18, C. PARKER] Se G é um grupo solúvel finito com centro trivial, as seguintes afirmações são válidas:

(i) O grafo $\Gamma(G)$ é desconexo se, e somente se, G é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius.

(ii) Se o grafo $\Gamma(G)$ é conexo, então $\Gamma(G)$ tem diâmetro no máximo 8.

O limitante superior para o diâmetro de $\Gamma(G)$ estabelecido no Teorema A não pode ser reduzido, já que no mesmo trabalho C. Parker apresenta uma família de grupos solúveis com centro trivial cujos grafos comutantes são conexos e têm diâmetro 8. Logo em seguida, G.L. Morgan e C. Parker [17] mostraram que se G é um grupo com centro trivial e $\Gamma(G)$ é conexo, então $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \leq 10$.

Apresentamos também uma extensão dos resultados de C. Parker feita por N. F. Beike, *et al.* a qual pode ser encontrada em [4], onde substituiu-se a condição de $Z(G) = \{1_G\}$ por $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$, onde $Z(G)$ e G' denotam, respectivamente, o centro e o subgrupo derivado de G. Mais especificamente, eles provaram o seguinte:

Teorema B. [4, N. F. BEIKE *et al.*] *Seja G um grupo não abeliano finito e suponhamos que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $\Gamma(G)$ é conexo se, e somente, se, $\Gamma(G/Z(G))$ é conexo;

(ii) Se G é solúvel e $\Gamma(G)$ é conexo, então $\Gamma(G)$ tem diâmetro no máximo 8;

(iii) Se G é solúvel, então $\Gamma(G)$ é desconexo se, e somente se, $G/Z(G)$ é ou um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius.

O Capítulo 1 é dedicado a apresentarmos alguns resultados que acreditamos serem necessários para um bom entendimento deste trabalho. Iniciamos fixando algumas notações e apresentando alguns resultados básicos da Teoria dos Grupos. Na Seção 1.1, abordamos outras duas classes de grupos: os grupos solúveis e os grupos nilpotentes, destacando algumas de suas propriedades. Na Seção 1.2 tratamos dos subgrupos de Hall e algumas de suas propriedades. A Seção 1.3 é sucinta, onde apresentamos o conceito de automorfismo livre de pontos fixos e o Teorema de Thompson. Na Seção 1.4, abordamos as ações e representações de grupos, onde apresentamos algumas propriedades e notações para o decorrer do texto. Por fim, na Seção 1.5, mudamos um pouco o enfoque introduzindo o conceito de grafo e apresentando algumas maneiras de associar um grafo a um grupo. Nesta seção também apresentamos o conceito de grafo comutante, que será nosso foco de estudo no Capítulo 3.

O Capítulo 2 tem o objetivo de apresentar os grupos de Frobenius e é composto por três seções. A Seção 2.1 é introdutória e nela definimos os grupos de Frobenius, além de darmos uma caracterização para os mesmos. Além disso, também são apresentados dois subgrupos essenciais para a teoria, a saber, o complemento de Frobenius e o núcleo de Frobenius. Na Seção 2.2, apresentamos resultados sobre a estrutura dos grupos de Frobenius. Além de algumas caracterizações, também vamos obter propriedades para o complemento e o núcleo de Frobenius. Por fim, na Seção 2.3 abordamos uma classe de grupos, chamada de grupos 2-Frobenius, e apresentamos algumas de suas propriedades.

Finalizamos nosso trabalho com o Capítulo 3 que está dividido em 4 seções. Na Seção 3.1, apresentaremos um pouco sobre a linha cronológica do diâmetro do grafo comutante e enunciaremos o Teorema A. As Seções 3.2 e 3.3 são dedicadas a apresentar a prova do Teorema A. Na Seção 3.4, apresentamos a ideia da construção de um grupo solúvel com centro trivial cujo grafo comutante é conexo e possui diâmetro igual a 8. Finalizamos este capítulo com a demonstração do Teorema B na Seção 3.5.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as notações e os resultados que serão utilizados no desenvolvimento dos Capítulos 2 e 3 deste trabalho. Também introduziremos alguns conceitos e resultados da Teoria dos Grupos e Teoria dos Grafos, sem enfoque nas demonstrações, mas, indicando uma referência onde encontrá-las.

Iniciaremos apresentando várias notações e alguns conceitos que nem sempre são vistos em um curso básico de Teoria dos Grupos. Dividiremos este capítulo em 5 seções, sendo a primeira delas uma breve introdução aos grupos solúveis e nilpotentes. Na Seção 1.2 apresentaremos os subgrupos de Hall e as principais propriedades que usaremos no texto. Na Seção 1.3, apresentaremos a definição de automorfismo livre de pontos fixos e o Teorema de Thompson, o qual não será demonstrado, mas, para mais detalhes, sugerimos [13]. Na Seção 1.4 abordaremos ações de grupos e representações de um grupo e destacaremos algumas propriedades que serão necessárias neste texto. Por fim, na Seção 1.5, faremos um breve estudo sobre grafos, no qual apresentaremos as notações a serem utilizadas, alguns exemplos e também veremos algumas formas de como relacionar um grupo a um grafo. Dentre essas formas, apresentaremos o grafo comutante, que será o nosso foco de estudo no Capítulo 3.

No decorrer de todo o texto, assumiremos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos teóricos básicos de grupos tais como o de subgrupos, subgrupos normais, homomorfismos, Teoremas do Isomorfismo e subgrupos de Sylow. Os grupos serão considerados com a notação multiplicativa e se G é um grupo, denotaremos seu elemento neutro por 1_G e o conjunto $G \setminus \{1_G\}$ será indicado por $G^{\#}$.

Um resultado muito importante na estrutura dos grupos finitos é o argumento de Frattini. Dentre tantas utilidades, ele é essencial para mostrarmos que um grupo nilpotente é o produto direto de seus subgrupos de Sylow. Ele também será de grande importância no Capítulo 3, mais especificamente, na prova do Lema 3.12.

Teorema 1.1. *(**Argumento de Frattini**) Seja K um subgrupo normal de um grupo finito G. Se P é um p-subgrupo de Sylow de K (para algum primo p), então*

$$G = KN_G(P).$$

Demonstração: Veja [22, Teorema 4.18, pg 81]. □

A respeito do produto de subgrupos, temos os seguintes resultados:

Proposição 1.2. *(**Fórmula do Produto**) Seja H e K subgrupos de um grupo finito G. Então $|HK||H \cap K| = |H||K|$.*

Demonstração: Consulte [22, Teorema 2.20, pg 30]. □

Proposição 1.3. *(**Lei modular de Dedekind**) Sejam H, K e L subgrupos de um grupo G. Se $H \leq L$, então $(HK) \cap L = H(K \cap L)$.*

Demonstração: Veja [21, 1.3.14, pg 15]. □

A fim de definirmos subgrupo característico, lembremos que o conjunto de todos os automorfismos de um grupo G tem uma estrutura de grupo com a operação de composição de funções, o qual chamaremos de grupo de automorfismos de G e denotaremos por $Aut(G)$. Dado um subgrupo H de G, dizemos que H é um subgrupo **característico** de G quando $\phi(H) \leq H$, para todo $\phi \in Aut(G)$. Percebamos que se H é um subgrupo característico de um grupo G, é fácil ver que $H \trianglelefteq G$ usando o fato que a conjugação induz um automorfismo de G. Outras propriedades sobre os subgrupos característicos são descritas a seguir:

Proposição 1.4. *Sejam G um grupo, H e K subgrupos de G. Então:*

(i) Se H char K e K char G, então H char G;

(ii) Se H char K e $K \trianglelefteq G$, então $H \trianglelefteq G$;

(iii) $Z(G)$ char G.

Demonstração: Os itens (i) e (ii) podem ser encontrados em [22, Lema 5.20, pg 104]. Já o item (iii) é de fácil verificação. □

A seguir apresentamos uma classe de grupos que têm a propriedade de todo subgrupo ser característico.

Proposição 1.5. *Se G é um grupo cíclico finito, então todo subgrupo de G é característico em G.*

Demonstração: Seja H um subgrupo de G de ordem s. Então H é o único subgrupo de G que possui ordem s. Este fato pode ser encontrado em [22, Lema 2.15, pg 28]. Se $\phi \in Aut(G)$, então $|\phi(H)| = |H| = s$. Desde que $\phi(H) \leq G$, segue $\phi(H) = H$. Portanto, $H \; char \; G$, como queríamos. □

Para finalizarmos, apresentaremos duas classes de grupos: os grupos abelianos elementares e os grupos metacíclicos. Para isso, dado um número primo p, dizemos que G é um p-**grupo abeliano elementar** quando G é um p-grupo abeliano e todo elemento de $G^{\#}$ tem ordem p. Quando G é um p-grupo abeliano elementar finito, então G é isomorfo a um produto direto de um número finito de grupos cíclicos de ordem p e, além disso, podemos munir G com uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Z}_p$, com a multiplicação por escalar dada por: para cada $\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_p$ e cada $g \in G$, definimos

$$\overline{\alpha} g = g^{\alpha}. \tag{1.2}$$

Por outro lado, um grupo G é dito **metacíclico** quando contém um subgrupo normal cíclico N tal que G/N também é cíclico.

1.1 Grupos Solúveis e Nilpotentes

Nesta seção temos como objetivo apresentar duas classes de grupos: os grupo solúveis e os grupos nilpotentes. Além disso, elencaremos algumas propriedades para essas duas classes de grupos e definiremos o subgrupo de Fitting. Para isso, começaremos abordando os conceitos de comutador e subgrupo derivado.

Sejam G um grupo e g, h elementos de G. Definimos o **comutador** de g e h como sendo o elemento

$$[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} = h^g h^{-1}.$$

O subgrupo gerado pelos comutadores, isto é, $\langle \{[g, h];\ g, h \in G\} \rangle$ é chamado de subgrupo **derivado** de G e denotado por G'. Sobre esses conceitos, temos as seguintes propriedades:

Proposição 1.6. *Sejam x, y e z elementos de um grupo G. Então:*

(i) $[x, y]^{-1} = [y, x]$;

(ii) $[xy, z] = [y, z]^x [x, z]$ *e* $[x, yz] = [x, y][x, z]^y$;

(iii) G' *char* G;

(iv) Seja N um subgrupo normal de G. Então $\dfrac{G}{N}$ é abeliano se, e somente se, $G' \leq N$.

Demonstração: Os itens (i) e (ii) podem ser encontrados em [13, Teorema 2.1, pg 18]. Agora, para o item (iii), veja [13, Teorema 3.1, pg 21]. Por fim, o item (iv) é de fácil verificação. □

Outro resultado envolvendo o subgrupo derivado é o seguinte.

Proposição 1.7. *Suponha que todos os subgrupos de Sylow de um grupo finito G são cíclicos. Então G' e G/G' são cíclicos e, além disso, mdc$(|G'|, |G/G'|) = 1$.*

Demonstração: Consulte [15, Teorema 5.1, pg 160]. □

Após as considerações feitas, definiremos grupo solúvel, o qual é um dos conceitos mais antigos da Teoria dos Grupos e surgiu quando E. Galois caracterizou os polinômios resolúveis por radicais.

Definição 1.8. *Um grupo G é* ***solúvel*** *se existir uma cadeia finita de subgrupos de G da forma*

$$\{1_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

em que $G_i \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ é abeliano, para todo $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

A seguir elencamos as principais propriedades de grupos solúveis.

Proposição 1.9. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Subgrupo e imagem homomórfica de grupo solúvel são solúveis;

(ii) Se $H \trianglelefteq G$ e ambos H e G/H são solúveis, então G é solúvel;

(iii) Produto direto de grupos solúveis é solúvel;

(iv) Todo p-grupo finito é solúvel;

(v) Se G for um grupo solúvel finito, então todo subgrupo normal minimal de G é um p-grupo abeliano elementar para algum primo p.

Demonstração: Todas as propriedades podem ser encontradas em [13]. □

Seja G um grupo e seja $H \neq \{1_G\}$ um subgrupo normal de G. Dizemos que H é um subgrupos normal **minimal** de G se não existir $K \triangleleft G$ tal que $\{1_G\} < K < H$. Os subgrupos normais e minimais de um grupo solúvel estão bem caracterizados como a seguinte proposição irá nos mostrar.

Proposição 1.10. *Se G é um grupos solúvel finito, então todo subgrupo normal minimal de G é um p-grupo abeliano elementar.*

Demonstração: Seja N um subgrupo normal minimal de G. Mostraremos inicialmente que N é abeliano. Sabemos que $\{1_G\} \leq N' \leq N$ e $N' \triangleleft G$ (pois N' *char* N e $N \triangleleft G$). Deste modo, como N é um subgrupo normal minimal de G, devemos ter

$$N' = \{1_G\} \qquad \text{ou} \qquad N' = N.$$

Pelo fato de N ser solúvel, pois é sugrupo de grupo solúvel, podemos considerar a seguinte série normal de N

$$\{1_G\} = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \cdots \triangleleft N_r = N$$

em que $N_i \triangleleft N$ e $\dfrac{N_{i+1}}{N_i}$ é abeliano, para todo $i = 0, 1, \cdots, r-1$. Notemos que $\dfrac{N}{N_{r-1}}$ é abeliano e, assim, pela Proposição 1.9, temos $N' \subseteq N_{r-1} \subsetneq N$, ou seja, $N' \neq N$. Portanto, resta que $N' = \{1_G\}$, ou seja, N é abeliano.

Seja p um divisor primo de $|N|$. Afirmamos que N é um p-grupo. Seja P um p-subgrupo de Sylow de N, o qual será característico em N, pois $P \trianglelefteq N$, uma vez que N é abeliano. Agora, como $P \neq \{1_G\}$, segue pela minimalidade de N que $P = N$, mostrando que N é um p-grupo.

Resta mostrarmos que todo elemento de N possui ordem p. Para isso, consideremos o conjunto $X = \{x \in N;\ n^p = 1_G\}$. Sendo N abeliano e p um divisor de $|N|$, devemos ter $\{1\} \neq X \leq N$. Não é difícil ver que X *char* G e, assim, X é um subgrupo normal não trivial de N e, pela minimalidade de N, segue a igualdade $X = N$. Portanto, N é um p-grupo abeliano elementar. $\square$

Daqui até o fim dessa seção, iremos apresentar o conceito de grupo nilpotente e algumas de suas propriedades.

Definição 1.11. *Um grupo G é **nilpotente** se existe uma série normal*

$$\{1_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

*tal que $G_i \trianglelefteq G$ e $G_{i+1}/Gi \leq Z(G/G_i)$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Uma série normal com esta propriedade recebe o nome de **série central**. O comprimento da menor série central de um grupo nilpotente G é chamado de **classe de nilpotência de** G.*

Algumas propriedades conhecidas para grupos nilpotentes são apresentadas a seguir.

Proposição 1.12. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(i) Todo p-grupo finito é nilpotente;

(ii) Todo grupo nilpotente é solúvel;

(iii) Se $G \neq \{1_G\}$ é nilpotente, então $Z(G) \neq \{1_G\}$;

(iv) Se G é um grupo nilpotente e H é um subgrupo próprio de G, então H é um subgrupo próprio de $N_G(H)$;

(v) Um grupo finito G é nilpotente se, e somente se, G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow;

(vi) Se H é um subgrupo normal não trivial de um grupo nilpotente G, então temos $H \cap Z(G) = \{1_G\}$.

Demonstração: Para mais detalhes, veja [13]. □

Outro resultado sobre os grupos nilpotentes que iremos utilizar na Capítulo 3 é o seguinte.

Proposição 1.13. *Sejam G um grupo finito, N um subgrupo normal minimal de G e H um subgrupo normal nilpotente de G. Então $H \leq C_G(N)$.*

Demonstração: Faremos a prova deste resultado separando-a em duas etapas.

Para a primeira etapa, suponhamos que $H \cap N = \{1_G\}$ e sejam $h \in H$ e $k \in K$ arbitrários. Então, como $H, N \trianglelefteq G$, segue que $hkh^{-1} \in K$ e $kh^{-1}k^{-1} \in H$; isso nos diz que $[h, k] \in H \cap K = \{1_G\}$, mostrando o desejado. Portanto, $H \subseteq C_G(N)$.

Para a segunda etapa, vamos supor que $H \cap N \neq \{1_G\}$. Nesta situação, como $N \cap H \trianglelefteq G$, $N \cap H \leq N$ e N é um subgrupo normal minimal, obtemos $N \cap H = N$, ou seja, $N \subseteq H$ e, assim, $N \trianglelefteq H$. Aplicando a Proposição 1.12, obtemos $N \cap Z(H) \neq \{1_G\}$. Também temos $Z(H)$ *char* H e $H \trianglelefteq G$; logo, da Proposição 1.4 item (ii), resulta $Z(H) \trianglelefteq G$. Deste modo, pela minimalidade de N, devemos ter $N \cap Z(H) = N$, ou seja, $N \subseteq Z(H)$. Portanto, $H \subseteq C_G(N)$.

Portanto em ambas as situações temos $H \subseteq C_G(N)$, o que mostra o desejado. □

Finalizamos essa seção apresentando o subgrupo de Fitting de um grupo G, que será de extrema importância no desenvolvimento do Capítulo 3. Para definirmos este subgrupo, precisamos do seguinte resultado.

Teorema 1.14. ***(Fitting)*** *Sejam M e N subgrupos normais nilpotentes de um grupo G. Então, o produto MN também é um subgrupo normal nilpotente de G.*

Demonstração: Consulte [13, Lema 6.1.1, pg 217]. □

Dado um grupo G, definimos o subgrupo de **Fitting** de G, denotado por $F(G)$, como sendo o subgrupo gerado por todos os subgrupos normais nilpotentes de G. Pelo Teorema 1.14, vemos que se G é um grupo finito, então $F(G)$ é um subgrupo normal nilpotente de G e contém todo subgrupo normal nilpotente de G. Quando G é um grupo solúvel, temos o seguinte resultado sobre o subgrupo de Fitting:

Teorema 1.15. *Se G é um grupo finito solúvel, então*

$$C_G(F(G)) \leq F(G).$$

Demonstração: Veja [13, Lema 6.1.3, pg 218]. □

1.2 Subgrupos de Hall

Essa seção tem como objetivo apresentar os subgrupos de Hall e algumas de suas propriedades que serão de extrema importância no estudo do Capítulo 3.

Dado π um conjunto não vazio de números primos, dizemos que um inteiro positivo n é um π-número quando seus fatores primos pertencem a π. Denotamos o complementar de π com relação ao conjunto dos números primos por π'. Um elemento $g \in G$ é um π-elemento quando a ordem de g é um π-número; um grupo G é um π-grupo quando todos seus elementos são π-elementos; se G é um grupo finito, um subgrupo H de G é um π-**subgrupo de Hall** quando H é um π-grupo e seu índice em G é um π'-número.

Os π-subgrupos de Hall nem sempre existem. Por exemplo, se $G = A_5$ e $\pi = \{3, 5\}$, então π-subgrupo de Hall de A_5 teria que ter índice 4, mas A_5 não contém nenhum subgrupo de ordem 15. Veremos no próximo resultado que, em um grupo solúvel, os π-subgrupos de Hall sempre existem e também têm algumas propriedades semelhantes às de p-subgrupos de Sylow.

Teorema 1.16. *(P. Hall) Seja G um grupo solúvel finito. Para todo conjunto de primos π, as seguintes afirmações são válidas:*

(i) G possui um π-subgrupo de Hall;

(ii) Quaisquer dois π-subgrupos de Hall são conjugados;

(iii) Todo π-subgrupo de G está contido em algum π-subgrupo de Hall de G.

Demonstração: Consulte [13, Teorema 4.1, pg 231]. □

No caso em que o grupo G não é necessariamente solúvel, o próximo resultado fornece uma condição suficiente para a existência e conjugação de π-subgrupos de Hall, ou melhor, de π'-subgrupos de Hall, na notação do teorema.

Teorema 1.17. *(Schur-Zassenhaus) Seja N um π-subgrupo normal de Hall de G. Então*

(i) G possui um π'-subgrupo de Hall K de G que é um complemento para N em G.

(ii) Se N ou G/N é solúvel, então quaisquer dois π'-subgrupos de Hall de G são conjugados.

Demonstração: Veja [13, Teorema 6.2.1, pg 221] □

W. Feit e J. Thompson [8] mostraram que todo grupo finito de ordem ímpar é solúvel. Isso nos diz que a condição "N ou G/N é solúvel" pode ser retirada do enunciado do item (ii) do Teorema de Schur-Zassenhaus, uma vez que $|N|$ ou $|G/N|$ é ímpar.

Para finalizar esta seção, iremos apresentar um resultado envolvendo grupos de automorfismo e π-grupos. Para isso, precisaremos do seguinte conceito:

Definição 1.18. *Sejam G um grupo e A um grupo de automorfismos de G. Dizemos que um subgrupo H de G é A-**invariante**, se $\phi(h) \in H$, para todo $h \in H$ e $\phi \in A$.*

Neste contexto, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.19. *Seja A um π'-grupo de automorfismos de um π-grupo G. Então, para cada primo p em π, temos que A deixa invariante algum p-subgrupo de Sylow de G.*

Demonstração: Indicamos [13, Teorema 6.2.2, pg 224]. □

1.3 Automorfismo Livre de Pontos Fixos

Sejam G um grupo finito e ϕ um automorfismo de G. Denotamos o **centralizador** de ϕ em G, ou **subgrupo de pontos fixos de** ϕ em G, por

$$C_G(\phi) = \{x \in G \mid \phi(x) = x\}.$$

Neste caso, se $C_G(\phi) = \{1_G\}$, dizemos que ϕ é **livre de pontos fixos**. Equivalentemente, um automorfismo ϕ de um grupo G é livre de pontos fixos se ele deixa fixo somente a identidade de G, ou seja, $\phi(x) = x$ se, e somente se, $x = 1_G$. A seguir, iremos apresentar dois exemplos automorfismos livres de pontos fixos:

Exemplo 1.20. *Consideremos o grupo aditivo* $\mathbb{Z}$ *e o automorfismo* $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $\phi(z) = -z$*, para todo* $z \in \mathbb{Z}$*. O autormorfismo* ϕ *é livre de pontos fixos pois* $\phi(z) = z$ *ocorre se, e somente se,* $z = 0$.

Exemplo 1.21. *Sejam* G *um grupo finito,* N *um subgrupo normal não trivial de* G *e* h *um elemento de* G *de ordem prima tal que* $C_N(h) = \{1_G\}$ *. Então o automorfismo* $\phi : N \longrightarrow N$ *tal que* $\phi(g) = g^h$ *é livre de pontos fixos e, além disso,* $|\phi| = |h|$*. De fato, se* $\phi(g) = g$*, então* $g = g^h = hgh^{-1}$*, ou seja,* $g \in C_N(g) = \{1_G\}$ *e, consequentemente,* $g = 1_G$*. Além disso, é claro que* $\phi^{|h|} = Id_G$*. Assim,* $|\phi|$ *divide* $|h|$*, mas, sendo* $|h|$ *prima e* $\phi \neq Id_G$*, devemos ter* $|\phi| = |h|$*, como queríamos.*

Um dos principais resultados sobre automorfismo livres de pontos fixos foi provado por Thompson em 1959 e será dado a seguir:

Teorema 1.22. *(**Thompson**) Se um grupo finito* G *admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima, então* G *é nilpotente.*

Demonstração: Consulte [13, Teorema 10.3.2, pg 340]. □

1.4 Ações de Grupos

Nesta seção apresentaremos os conceitos de ação e de representação de grupos assim como os principais resultados que utilizaremos no decorrer do texto.

Definição 1.23. *Sejam* X *um conjunto não vazio e* G *um grupo. Dizemos que uma aplicação* $\sigma : G \times X \to X$ *é uma **ação** de* G *sobre* X *se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\sigma(1_G, x) = x$*, para todo* $x \in X$*;*

(ii) $\sigma(gh, x) = \sigma(g, \pi(h, x))$*, para todos* $g, h \in G$ *e* $x \in X$*.*

Daqui em diante, escreveremos $g * x$ no lugar de $\sigma(g, x)$ e também diremos que G age sobre X quando estiver definida uma ação de G sobre X.

Dada uma ação de um grupo G sobre um conjunto X, a relação R sobre X, definida por:

$$xRy \text{ se, e somente se, existe } g \in G \text{ tal que } x = g \cdot y,$$

é uma relação de equivalência sobre X. As classes de equivalência, módulo a relação R, são chamadas de **órbitas** da ação. Se $x \in X$, denotaremos a órbita de x por $\mathcal{O}(x)$, ou seja,

$$\mathcal{O}(x) = \{y \in X;\ y = g * x,\ \textit{para algum } g \in G\} = \{g * x;\ g \in G\}.$$

Uma vez que órbitas são classes de equivalência e o conjunto das classes de equivalência forma uma partição de X, no caso em que X é finito, existem $x_1, x_2, \ldots, x_r$ em X tais que

$$X = \mathcal{O}(x_1) \cup \mathcal{O}(x_2) \cup \ldots \cup \mathcal{O}(x_r) \qquad \textit{(União disjunta)}$$

Definição 1.24. *Diremos que uma ação é transitiva, quando ela possuir uma única órbita.*

Dada uma ação de um grupo G sobre um conjunto X, o **estabilizador** de $x \in X$, indicado por $Est(x)$, é o conjunto

$$Est(x) = \{\ g \in G;\ g * x = x\}.$$

Não é difícil verificar que $Est(x)$ é um subgrupo de G. Além disso, se o único elemento de G tal que $g * x = x$, para todo $x \in X$ for 1_G, então diremos que a ação é **fiel** e, ainda, se existe uma ação de G sobre X fiel, diremos que G age sobre X fielmente. A seguir, apresentaremos algumas propriedades envolvendo os estabilizadores e as órbitas de uma ação:

Teorema 1.25. *Dada uma ação de um grupo finito G sobre um conjunto finito X, temos:*

(i) Para todo $x \in X$, $|\mathcal{O}(x)| = \dfrac{|G|}{|Est(x)|}$. Em particular, $|\mathcal{O}(x)|$ divide G;

(ii) $|g^G| = [G : C_G(g)]$.

Demonstração: O item (i) pode ser encontrado em [22, Teorema 3.19, pg 57] e o item (ii) em [22, Corolário 3.21, pg 57]. □

Toda ação de um grupo G sobre um conjunto X pode ser vista como um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow Sym(X)$. De fato, dada uma ação de G sobre X, podemos definir

$$\begin{array}{rccl} \psi: & G & \longrightarrow & Sym(X) \\ & g & \longmapsto & \psi(g): \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & g * x \end{array} \end{array}$$

a qual não é díficil vermos que é um homomorfismo. Por outro lado, dado um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow Sym(X)$, podemos definir a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & \psi(g)(x) \end{array}$$

a qual é uma ação de G sobre X. Além disso, se a ação é fiel, então o homomorfismo construído é injetor; também se o homomorfismo ψ for injetor, então a ação σ será fiel.

Se X e G são grupos e existe um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow Aut(X)$, dizemos que G age sobre X por automorfismo.

Veremos agora um exemplo:

Exemplo 1.26. *Sejam G um grupo e H, N subgrupos de G tais que $N \subseteq N_G(H)$ e $C_N(H) = \{1_G\}$. Então H age fielmente sobre N, por automorfismos. De fato, desde que $N \subseteq N_G(H)$, podemos definir a seguinte aplicação:*

$$\begin{array}{rccl} \psi: & N & \longrightarrow & Aut(H) \\ & n & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \psi(n): & H & \longrightarrow H \\ & h & \longmapsto nhn^{-1} \end{array} \end{array}$$

Não é difícil ver que σ é um homomorfismo e, além disso, se existe $n \in Ker(\sigma)$, então $nhn^{-1} = h$, para todo $h \in H$ e, assim, $n \in C_N(H) = \{1_G\}$. Portanto, $n = 1_G$ e, consequentemente, devemos ter que σ é injetor, como queríamos.

Teorema 1.27. *Sejam p, q e r números primos distintos, X um grupo de ordem r que age fielmente, por automorfismos, sobre um q-grupo finito Q e V um p-grupo abeliano elementar finito tais que XQ age fielmente sobre V por automorfismos. Adicionalmente, se $q = 2$ e r é um primo de Fermat, suponhamos que Q é abeliano. Então $C_V(X) \neq \{1_V\}$.*

Demonstração: Para mais detalhes consulte [2, 36.1, pg 193]. □

A seguinte consequência do Teorema 1.27 terá um papel importante no Capítulo 3 deste trabalho

Corolário 1.28. *Sejam G um grupo finito e $p, q, r \in \pi(G)$ distintos. Suponhamos que G possui subgrupos X, Q e V tais que*

(i) $|X| = r$, Q é um q-grupo e V é um p-grupo abeliano elementar;

(ii) $X \subseteq N_G(Q)$ *e* $XQ \subseteq N_G(V)$*;*

(iii) $C_X(Q) = \{1_G\}$ *e* $C_{XQ}(V) = \{1_G\}$.

Além disso, se $q = 2$ *e* r *é um primo de Fermat, assuma também que* Q *é abeliano. Então*

$$C_V(X) \neq \{1_G\}.$$

Demonstração: Desde que $X \subseteq N_G(Q)$ e $C_X(Q) = \{1_G\}$, o Exemplo 1.26 nos diz que X age fielmente sobre Q por automorfismos. Além disso, desde que $XQ \subseteq N_G(V)$, podemos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & XQ & \longrightarrow & Aut(V) \\ & g & \longmapsto & \sigma(g) : \begin{array}{rl} V & \longrightarrow V \\ v & \longmapsto gvg^{-1}. \end{array} \end{array}$$

Não é difícil ver que σ é um homomorfismo tal que $ker(\sigma) = C_{XQ}(V) = \{1_G\}$. Agora, o corolário segue do Teorema 1.27. □

Para finalizar essa seção apresentaremos o Teorema de Fitting cuja demonstração pode ser encontrada em [15, Teo 4.44, pg 140]

Teorema 1.29. *(Fitting) Seja* H *um grupo agindo via automorfismo sobre um grupo abeliano* G *e assuma que* G *e* H *são finitos tais que* $\mathrm{mdc}(|G|, |H|) = 1$. *Então,*

$$G = C_G(A) \times [G, A].$$

1.5 Grafos Relacionados com Grupos

Nesta seção, apresentaremos de modo breve as principais definições e nomenclaturas da Teoria dos Grafos que serão utilizadas neste trabalho. Também veremos que existem maneiras de relacionar um grafo a um grupo, dentre elas a que é conhecida na literatura como grafo comutante, que será o foco principal do nosso estudo no Capítulo 3.

1.5.1 Conceitos Básicos de Grafos

Começaremos a subseção com a definição de grafo.

Definição 1.30. *Um grafo é um par $\mathcal{G} = (V, E)$, onde V é um conjunto não vazio finito e E é uma família formada por subconjuntos de dois elementos de V. Chamaremos os elementos de V de **vértices** e os elementos de E de **arestas**.*

Ás vezes, é conveniente escrever $V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{G})$ em vez de V e E para enfatizar que esses são os conjuntos de vértices e de arestas de um determinado grafo $\mathcal{G}$. Além disso, diremos que dois grafos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são iguais se $V(\mathcal{G}) = V(\mathcal{H})$ e $E(\mathcal{G}) = E(\mathcal{H})$; neste caso, escrevemos $\mathcal{G} = \mathcal{H}$.

Por simplicidade (embora seja um abuso de notação) é comum denotar uma aresta $\{u, v\}$ simplesmente por uv e também é comum representar um grafo por um diagrama no plano, onde os vértices são representados por pontos e cujas arestas $\{u, v\}$ são indicadas pela presença de um segmento de reta ou curva ligando os pontos que representam u e v. Por exemplo: seja $\mathcal{G}$ o grafo, onde $V(\mathcal{G}) = \{u, v, w, x, y\}$ e $E(\mathcal{G}) = \{uv,\ vw,\ vx,\ vy,\ wy,\ xy\}$. Podemos representar esse grafo como na Figura 1.1

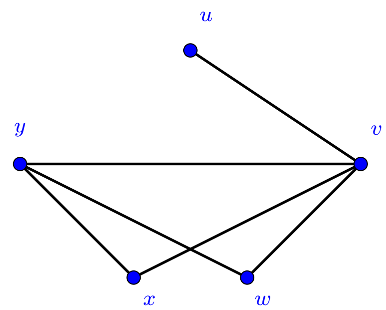

Figura 1.1: Grafo G

Definição 1.31. *Se uv é uma aresta do grafo $\mathcal{G}$, então u e v são ditos **adjacentes** em $\mathcal{G}$.*

A definição a seguir é necessária para conseguirmos definir quando um grafo é conexo ou não.

Definição 1.32. *Um caminho em um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ é uma sequência de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_k$, distintos dois a dois, tal que v_i e v_{i+1} são adjacentes, para todo $i = 0, \ldots, k-1$. Neste caso, o número k é chamado de comprimento do caminho. Denotemos o caminho por $v_0 \sim v_1 \sim \cdots \sim v_k$.*

Com a definição acima, podemos não só definir quando um grafo é conexo ou não, mas também podemos definir uma relação de equivalência como veremos no que segue.

Definição 1.33. *Um grafo $\mathcal{G}$ é **conexo** se, e somente se, para todos $u, v \in V$, com $u \neq v$, existir um caminho de u para v. Caso contrário, dizemos que $\mathcal{G}$ é **desconexo**.*

Dado um grafo $\mathcal{G}$, não é difícil ver que a relação R definida no seu conjunto de vértices como segue:

$$uRv \text{ se, e somente se, } u = v \text{ ou existe um caminho de } u \text{ para } v.$$

é uma relação de equivalência. As classes de equivalências módulo essa relação são chamadas de ***componentes*** do grafo G.

Exemplo 1.34. *Na Figura 1.2, o grafo $\mathcal{G}$ é conexo, enquanto que o grafo $\mathcal{H}$ é desconexo possuindo 3 componentes conexas.*

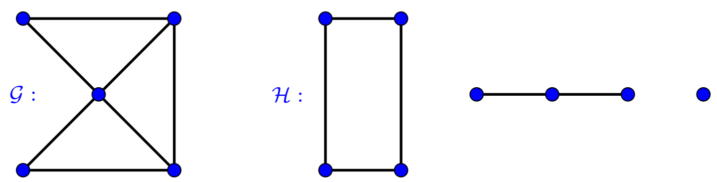

Figura 1.2: Grafos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$

Por fim, introduziremos o conceito de diâmetro de um grafo.

Definição 1.35. *Dados $u, v \in V$, com $u \neq v$, definimos a distância de u a v por*

$$d(u,v) = min\{k : \text{ existe um caminho de } u \text{ a } v \text{ de comprimento } k\}.$$

Se não existe um caminho de u a v, então $d(u,v) = \infty$. Quando o grafo $\mathcal{G}$ é conexo, o diâmetro de $\mathcal{G}$, denotado por $\operatorname{diam}(\mathcal{G})$, é o número definido como segue:

$$\operatorname{diam}(\mathcal{G}) = sup\{d(u,v);\ u, v \in V,\ u \neq v\}$$

1.5.2 Grafos Relacionados com Grupos

Existem várias maneiras de associar um grafo a um grupo e essa seção tem como objetivo apresentar algumas delas. Essa abordagem é interessante, pois observando o grafo podemos obter informações sobre a estrutura do grupo considerado. Por exemplo, veremos que quando o grafo comutante de um grupo solúvel finito com centro trivial é desconexo, então só nos resta que o grupo considerado é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius. As definições desses dois tipos de grupos ainda não foram dadas, mas é algo que veremos no próximo capítulo. Este fato foi mostrado por C. Parker em [18] e será apresentado no Capítulo 3.

A primeira maneira de relacionar um grafo a um grupo que vamos apresentar é conhecida na teoria como **Grafo de Cayley** e será definida a seguir.

Definição 1.36. *Dados um grupo G e um subconjunto não vazio S de G, o* ***grafo de Cayley****, denotado por $Cay(G : S)$, é o grafo que tem G como seu conjunto de vértices e dois elementos distintos u e v de G são adjacentes sempre que $a^{-1}b \in S$ ou $b^{-1}a \in S$.*

Notamos que $a^{-1}b \in S$ ou $b^{-1}a \in S$ se, e somente se, existe $s \in S$ tal que $b = as$ ou $b = as^{-1}$. Em outras palavras, os vértices adjacentes a um elemento $a \in G$ são da forma as ou as^{-1}, com $s \in S$. Comentamos que os grafos relacionados com grupos são ferramentas para extrairmos propriedades dos grupos. Uma propriedade conhecida do grafo de Cayley é que, quando $Cay(G : S)$ é conexo, então S é um conjunto gerador de G. Por exemplo, considere o grupo diedral de ordem 8, que pode ser visto como:

$$D_8 = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta\},$$

onde $\beta^2 = e$ e $\alpha^k\beta = \beta\alpha^{4-k}$, para todo $k \in \{1, 2, 3\}$. O grafo de Cayley $Cay(D_8 : S)$ para $S = \{\alpha, \beta\}$ é dado na Figura 1.3:

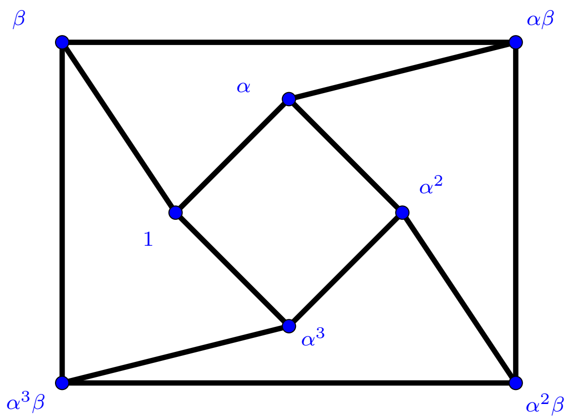

Figura 1.3: Grafo de Cayley $Cay(D_8 : S)$

Podemos ver que o grafo $Cay(D_8 : S)$ é conexo e, assim, S deve ser um conjunto gerador de D_8, o qual já sabemos ser verdade.

Outra maneira que podemos relacionar um grafo a um grupo é dada a seguir:

Definição 1.37. *Seja G um grupo finito. O* ***grafo primo*** *é o grafo com conjunto de vértices $\pi(G)$, isto é, o conjunto de divisores primos de G, onde dois vértices r e s formam uma aresta se, e somente, se G contém um elemento de ordem rs.*

Consideremos o grupo das permutações $S_3 = \{(1), (23), (13), (12), (132), (123)\}$. Então $\pi(S_3) = \{2, 3\}$ e o grafo primo de S_3 é dado pelos dois pontos isolados 2 e 3, já que em S_3 não existe nenhuma permutação de ordem 6.

Outro grafo relacionado com grupo será apresentado na próxima subseção. Este grafo será o foco principal de nosso estudo; mais especificamente, no Capítulo 3 iremos estudar o seu diâmetro quando considerarmos um grupo solúvel finito com centro trivial.

1.5.3 Grafo Comutante

Os grafos comutantes de um grupo aparecem na literatura definidos de várias maneiras, dependendo do objetivo do trabalho. Na definição a seguir, apresentaremos o conceito mais geral de um grafo comutante de um grupo.

Definição 1.38. *Dado um subconjunto não vazio X de um grupo G, o* ***grafo comutante*** *$C(G, X)$ de G sobre X é o grafo que tem X como seu conjunto de vértices e dois elementos distintos x e y em X são ligados por uma aresta sempre que eles comutam, isto é, se $[x, y] = 1_G$.*

O conceito de grafo comutante foi introduzido em 1955 por R. Brauer e K.A. Fowler [5], cujo objetivo era estudar os grupos de ordem par. Eles mostraram que se G é um grupo finito de ordem par que possui pelo menos duas classes de conjugação de involuções, então a distância entre quaisquer duas involuções em $C(G, X)$, é no máximo 3. Para isso, o conjunto X foi tomado como sendo $G \setminus \{1_G\}$. Os autores Y. Segev em [23] e A. S. Rapinchuck, Y. Segev e G. M. Seitz em [20] também optaram por essa escolha de X. Desde então, muitos trabalhos têm investigado $C(G, X)$ para diferentes escolhas de X. Por exemplo, C. Bates, D. Bundy, S. Hart e P. Rowley em [3] estudaram o grafo $C(G, X)$ quando X consiste de elementos de ordem 2 do grupo e os trabalhos [1, 10, 11] consideraram X como sendo o conjunto dos elementos não centrais de G.

Da mesma forma que os trabalhos [1, 10, 11], nessa dissertação, mais especificamente no Capítulo 3, quando iremos trabalhar com os grafo comutantes, escolhemos X como sendo o conjunto dos elementos não centrais de G. Neste caso, denotaremos o grafo comutante de G sobre $G \setminus Z(G)$ por $\Gamma(G)$.

Vejamos agora alguns exemplos:

Exemplo 1.39. *Sabemos que D_8 pode ser visto como o conjunto:*

$$D_8 = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta\},$$

onde $\beta^2 = e$ e $\alpha^k\beta = \beta\alpha^{4-k}$, para todo $k = 1, 2, 3$. Não é díficil ver que $Z(D_8) = \{e, a^2\}$ e, assim, $V(\Gamma(D_6)) = \{\alpha, \alpha^3, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta\}$. Também podemos checar que:

$$E(\Gamma(D_8)) = \{\{\alpha, \alpha^3\}, \{\beta, \alpha^2\beta\}, \{\alpha\beta, \alpha^3\beta\}\}.$$

Portanto, o grafo comutante $\Gamma(D_8)$ pode ser representado com na Figura 1.4.

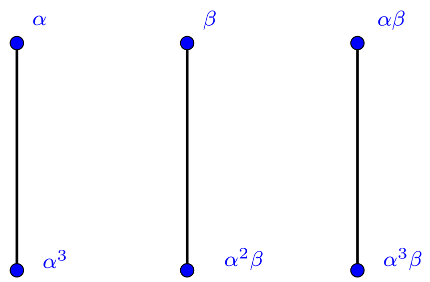

Figura 1.4: Grafo comutante $\Gamma(D_8)$

Exemplo 1.40. *Consideremos o grupo*

$$S_3 = \{(1), (23), (13), (12), (132), (123)\}.$$

Sabemos que $Z(S_3) = \{(1)\}$, além disso, apenas (132) e (123) comutam. Portanto:

$$V(\Gamma(S_3)) = S_3 - Z(S_3) = \{(23), (13), (12), (132), (123)\} \text{ e } E(\Gamma(S_3)) = \{\{(132), (123)\}\}.$$

Uma representação para o grafo comutante $\Gamma(S_3)$ é pela Figura 1.5.

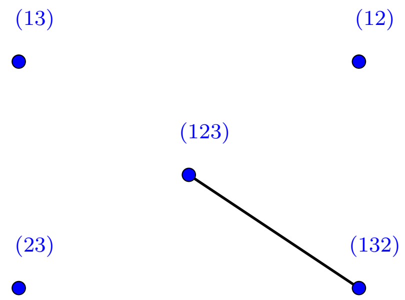

Figura 1.5: Grafo comutante $\Gamma(S_3)$

Exemplo 1.41. *Sabemos que o grupo dos quatérnios* Q_8 *pode ser visto como o conjunto* $Q_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$ *onde*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \; ij = k, \; jk = i, \; ki = j, \; ji = -k, \; kj = -i, \; ik = -j.$$

É fácil ver que $Z(Q_8) = \{1, -1\}$ *e, assim,* $V(\Gamma(Q_8)) = \{i, j, k, -i, -j, -k\}$*. Além disso, podemos verificar que:*

$$E(\Gamma(Q_8)) = \{\{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}\}.$$

Portanto, o grafo comutante $\Gamma(Q_8)$ *pode ser representado como na Figura 1.6.*

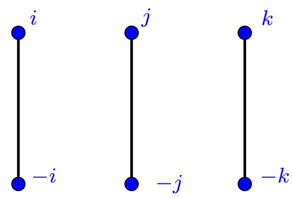

Figura 1.6: Grafo comutante $\Gamma(Q_8)$

Exemplo 1.42. *Considere* $A_4 = \{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}\}$*, como no Exemplo 2.17. Com cálculos rotineiros, não é díficil ver que* $Z(A_4) = \{g_0\}$*,* $[g_1, g_2] = g_0$ $[g_2, g_3] = g_0$*,* $[g_3, g_1] = g_0$*,* $[g_4, g_7] = g_0$*,* $[g_5, g_8] = g_0$*,* $[g_6, g_{11}] = g_0$ *e* $[g_9, g_{10}] = g_0$*. Desta forma, temos*

$$V(\Gamma(A_4)) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7\, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}\}$$

e

$$E(\Gamma(A_4)) = \{\{g_1, g_2\}, \{g_2, g_3\}, \{g_1, g_3\}, \{g_4, g_7\}, \{g_5, g_8\}, \{g_6, g_{11}\}\, \{g_9, g_{10}\}\}.$$

Uma represenção do grafo comutante $\Gamma(A_4)$ *é dada pela Figura 1.7.*

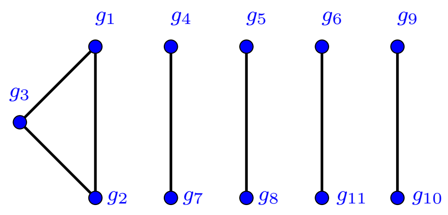

Figura 1.7: Grafo comutante $\Gamma(A_4)$

Veremos na Seção 3.1 que quando o grupo G é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius, então o grafo comutante de G é desconexo. Estes conceitos ainda não foram apresentados, mas isso serve de motivação para o que vem adiante. Sob algumas condições, a recíproca deste fato também é válida e será apresentada no Capítulo 3. Por conta disso, a fim de que tenhamos um bom entendimento do Capítulo 3, necessitaremos de um estudo sobre essas duas classes de grupos e o Capítulo 2 será apresentado para suprir essa necessidade.

Para os leitores interessados, outras maneiras de se associar um grafo a um grupo podem ser encontradas no trabalho de P. J. Cameron em [7].

Capítulo 2

Grupo de Frobenius

Historicamente, os grupos presentes neste capítulo foram inicialmente estudados por F.G. Frobenius e, por isso, recebem esse nome. Os grupos de Frobenius aparecem naturalmente em várias frentes da Teoria de Grupos, por exemplo, eles têm um papel fundamental na prova de W. Feit e J. Thompson [8] de que grupos de ordem ímpar são solúveis. O estudo profundo dos grupos de Frobenius também resultou na criação e desenvolvimento da teoria de caráter.

Iniciaremos este capítulo com uma breve introdução sobre os grupos de Frobenius, onde apresentaremos a sua definição e alguns de seus subgrupos particulares que são extremamente importantes para essa teoria. A Seção 2.2 será dedicada a apresentarmos a estrutura dos grupos de Frobenius. Por fim, na Seção 2.3, introduziremos os grupos 2-Frobenius e faremos um breve estudo sobre essa classe de grupos.

2.1 Conceitos Iniciais

Essa seção tem como objetivo apresentar a classe dos grupos de Frobenius. O estudo que faremos nessa seção foi baseado em [16].

Definição 2.1. *Seja G um grupo finito agindo sobre um conjunto X de forma transitiva com $|X| > 1$. Dizemos que G é um* ***grupo de Frobenius*** *em X se:*

(i) $Est(x) \neq \{1_G\}$, *para todo* $x \in X$;

(ii) $Est(x) \cap Est(y) = \{1_G\}$, *para todos* $x, y \in X$ *com* $x \neq y$.

A definição acima foi construída utilizando a teoria de ações de grupos, no entanto, existem várias formas equivalentes para definirmos grupos de Frobenius. Uma delas será apresentada no próximo resultado.

Proposição 2.2. *Seja G um grupo finito. Então existe um conjunto X de forma que G é um grupo de Frobenius sobre X se, e somente se, G possui um subgrupo próprio não trivial H tal que*

$$H \cap H^g = \{1_G\}, \quad \textit{para todo } g \in G \setminus H.$$

Demonstração: Suponhamos que G é um grupo de Frobenius sobre X. Então, existe uma ação transitiva de G sobre X satisfazendo os itens (i) e (ii) da Definição 2.1, a qual denotarararemos simplesmente por $*$. Tomemos $x \in X$ e coloquemos $Est(x) = H$. Da Definição 2.1 resulta que $H \neq G$ e $H \neq \{1_G\}$. Seja $h \in H^{\#}$ um elemento qualquer. Afirmamos que $h \notin H^g$, para todo $g \in G \setminus H$. De fato, seja $g \in G \setminus H$. Como $h \in H$ e $g \notin H$, obtemos $h * x = x$ e $g * x \neq x$. Além disso, $h * (g * x) \neq g * x$, pois caso contrário, teríamos $h \in Est(x) \cap Est(g * x)$, contradizendo o item (ii), uma vez que $g * x \neq x$ e $h \neq 1_G$. Desta forma, $g^{-1} * (h * (g * x)) \neq g^{-1} * (g * x)$, ou seja, $(g^{-1}hg) * x \neq x$. Isso implica que $g^{-1}hg \notin Est(x) = H$, mostrando que $h \notin H^g$. Portanto $H \cap H^g = \{1_G\}$, para todo $g \in G \setminus H$.

Reciprocamente, suponhamos que exista um subgrupo próprio não trivial H de G de forma que $H \cap H^g = \{1_G\}$, para todo $g \in G \setminus H$. Consideremos o conjunto $X = \{gH;\ g \in G\}$ que é formado por todas as classes laterais à esquerda de H em G e definamos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rll} * : & G \times X & \longrightarrow X \\ & (g_1, gH) & \longmapsto g_1 * gH = (g_1 g)H \end{array} \tag{2.3}$$

É fácil vermos que $*$ é uma ação de G sobre X. Notemos ainda que G age de modo transitivo sobre X, pois se $g_1H, g_2H \in X$, então $(g_2g_1^{-1}) * g_1H = g_2H$, ou seja, $g_1H \in \mathcal{O}(g_2H)$ e, isso, mostra que $*$ possui uma única órbita. Portanto, G é um grupo agindo sobre o conjunto X de forma transitiva. Resta mostrarmos os itens (i) e (ii) da Definição 2.1. Começaremos mostrando o item (i), isto é, $Est(gH) \neq \{1_G\}$, para todo $gH \in X$. De fato, seja $gH \in X$. Então

$$\begin{aligned} Est(gH) &= \{g_1 \in G;\ (g_1g)H = gH\} = \{g_1 \in G;\ g^{-1}g_1g \in H\} \\ &= \{g_1 \in G;\ g_1 \in gHg^{-1}\} = H^g. \end{aligned}$$

Como $H^g \neq \{1_G\}$, pois $H \neq \{1_G\}$, temos $Est(gH) \neq \{1_G\}$. Mostremos agora o item (ii). Para isso, tomemos $g_1H, g_2H \in X$ com $g_1H \neq g_2H$. Pelo que acabamos de verificar acima, $Est(g_1H) = H^{g_1}$ e $Est(g_2H) = H^{g_2}$. Queremos mostrar que $H^{g_1} \cap H^{g_2} = \{1_G\}$.

Seja $g \in H^{g_1} \cap H^{g_2}$. Então existem $h_1, h_2 \in H$ tais que $g = g_1 h_1 g_1^{-1} = g_2 h_2 g_2^{-1}$ e essas igualdades nos dão $h_1 = g_1^{-1} g_2 h_2 g_2^{-1} g_1$. É claro que $g_1^{-1} g_2 \in G \setminus H$, pois $g_1 H \neq g_2 H$; logo

$$h_1 \in H \cap H^{g_1^{-1} g_2} = \{1_G\}.$$

Desta forma, $h_1 = 1_G$ e, assim, $g = 1_G$. Portanto, $H^{g_1} \cap H^{g_2} = \{1_G\}$. □

Com base no resultado anterior, podemos perceber que nenhum grupo abeliano pode ser um grupo de Frobenius, pois se G é um grupo abeliano, temos $H \cap H^g = H$, para qualquer subgrupo H de G e qualquer $g \in G$.

Vejamos um exemplo de grupo de Frobenius.

Exemplo 2.3. Consideremos o grupo diedral $D_6 = \{1, \beta, \alpha, \alpha^2, \beta\alpha, \beta\alpha^2\}$, onde $\alpha^k \beta = \beta \alpha^{3-k}$, com $k = 1, 2$. É claro que $\langle \beta \rangle = \{1, \beta\}$,

$$\beta^\alpha = \beta\alpha,\ \beta^{\alpha^2} = \beta\alpha^2,\ \beta^{\beta\alpha} = \beta\alpha\beta(\beta\alpha)^{-1} = \beta\alpha^2 \text{ e } \beta^{\beta\alpha^2} = \beta\alpha^2\beta(\beta\alpha^2)^{-1} = \beta\alpha.$$

Desta forma, $\langle \beta \rangle \cap \langle \beta \rangle^g = \{1\}$, para todo $g \in D_6 \setminus \langle \beta \rangle$. Portanto, a proposição anterior nos assegura que D_6 é um grupo de Frobenius.

De um modo geral, o grupo diedral D_{2n} é um grupo de Frobenius quando n é um inteiro ímpar, pois satisfaz a igualdade $\langle \beta \rangle \cap \langle \beta \rangle^g = \{1\}$, para todo $g \in D_{2n} \setminus \langle \beta \rangle$

A Proposição 2.2, além de fornecer uma caracterização para os grupos de Frobenius, também nos permite demonstrar o seguinte resultado.

Corolário 2.4. *Se G é um grupo de Frobenius sobre X e H é o estabilizador de algum elemento de X, então $N_G(H) = H$.*

Demonstração: Tomemos $g \in N_G(H)$ e suponhamos que $g \notin H$. Assim, $H^g = H$. Desde que G é um grupo de Frobenius, a Proposição 2.2 nos assegura que $H \cap H^g = \{1_G\}$. Disso, obtemos $H = H^g = \{1_G\}$, o que não pode ocorrer, pois $H \neq \{1_G\}$. Portanto $g \in H$ e, assim, $N_G(H) \leq H$, completando a prova do corolário. □

Até o final dessa seção, G denotará um grupo de Frobenius sobre X. Então, existe uma ação transitiva de G sobre X satisfazendo os itens (i) e (ii) da Definição 2.1, a qual vamos denotar simplesmente por $*$. Se $H = Est(x)$, para algum $x \in X$, então H é dito ser um **complemento de Frobenius** em G.

Observação 2.5. Devido à demonstração da Proposição 2.2, se um grupo finito G possui um subgrupo próprio e não trivial H tal que $H \cap H^g = \{1_G\}$, para todo $g \in G \setminus H$, então G é um grupo de Frobenius sobre o conjunto de todas as classes laterais à esquerda de H em G, cuja ação é dada em (2.3) e, além disso, $Est(1_G H) = H$. Devido a esse fato, podemos dizer que, neste caso, H é um complemento de Frobenius para G.

Exemplo 2.6. Por conta da observação anterior, o Exemplo 2.3 nos mostra que $\langle \beta \rangle$ é um complemento para o grupo de Frobenius D_6.

Denotemos por K^* o conjunto de todos os elementos de G que não possuem pontos fixos em X. Afirmamos que o conjunto de todos os elementos de G que têm pontos fixos é exatamente o conjunto $\bigcup_{g \in G} H^g$, em que $H = Est(x)$, para algum $x \in X$. De fato, dado $g_1 \in \bigcup_{g \in G} H^g$, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $g_1 = h^g$. Logo, $h = g_1^{g^{-1}}$ e, assim, $g_1^{g^{-1}} * x = h * x = x$, ou ainda, $g_1 * (g * x) = g * x$; donde $g_1 \in Est(g * x)$, mostrando que g_1 possui um ponto fixo, ou seja, $g_1 \notin K^*$. Por outro lado, seja $g \in G$ um elemento que possui ponto fixo. Então existe $y \in X$ tal que $g \in Est(y)$. Como a ação é transitiva, x e y estão na mesma órbita e, desta forma, existe $g_1 \in G$ tal que $g_1 * x = y$. Assim, desde que $g \in Est(y)$, temos $g * y = g_1 * x$ e, assim, $g * (g_1 * x) = g_1 * x$. Logo $(g_1^{-1} g g_1) * x = x$. Disso concluímos que $g_1^{-1} g g_1 \in H$, ou seja, $g \in H^{g_1}$, como queríamos mostrar. Portanto, obtemos a igualdade:

$$K^* = \left(G \setminus \bigcup_{g \in G} H^g \right). \tag{2.4}$$

Chamamos o conjunto $K = K^* \cup \{1_G\}$ de **núcleo de Frobenius** de G.

Em 1901, Frobenius, no seu trabalho [9], provou que o núcleo de um grupo de Frobenius G é um subgrupo normal de G. A demonstração deste fato faz uso de teoria de caracteres e não será apresentada aqui, pois foge do objetivo deste trabalho.

Teorema 2.7. *Se G é um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo K, então K é um subgrupo normal de G.*

Demonstração: Sugerimos [16, Teorema 2.2.5, pg 25]. □

2.2 Estrutura dos Grupos de Frobenius

Esta seção terá como objetivo principal apresentar vários resultados importantes sobre os grupos de Frobenius e que utilizaremos no próximo capítulo. O estudo dessa seção se baseou principalmente na referência [16], mas também utilizamos a referência [15] no estudo de alguns resultados no final dessa seção.

Proposição 2.8. *Suponha que G é um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo K. Então*

(i) $|K| = [G : H] > 1$*;*

(ii) G *é o produto semidireto de* K *por* H*;*

(iii) Se $N \lhd G$ *com* $H \cap N = \{1_G\}$*, então* $N \subseteq K$*.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente o item (i). Pelo Corolário 2.7, temos $N_G(H) = H$. Com uma simples contagem, vemos que

$$\left|\bigcup_{g\in G} H^g\right| = [G : H](|H| - 1) + 1 = |G| - [G : H] + 1$$

e, assim,

$$|K| = |G| - (|G| - [G : H] + 1) + 1 = [G : H].$$

Como H é um subgrupo não trivial, obtemos que $[G : H] > 1$, como queríamos mostrar.

Mostraremos agora o item (ii). É claro que $H \cap K = \{1_G\}$. Além disso, o Teorema 2.7 nos assegura que $K \trianglelefteq G$. Agora, pelo item anterior, obtemos

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = |H|[G : H] = |G|.$$

Logo, $G = NH$. Portanto, G é o produto semidireto de K por H, como queríamos mostrar.

Por fim, vamos mostrar o item (iii). Suponhamos que $N \nsubseteq K$. Então, existe $n \in N^\#$ de forma que $n \notin K$. Assim, por (2.4), existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $n = ghg^{-1}$, de onde $g^{-1}ng = h \in H$. Mas, sendo $N \trianglelefteq G$, obtemos $h = g^{-1}ng \in N$. Logo $h \in H \cap N = \{1_G\}$ e, consequentemente, $n = 1_G$, o que não pode ocorrer. Portanto, $N \subseteq K$, como queríamos mostrar. $\square$

O próximo resultado nos fornece uma propriedade para o núcleo K de um grupo de Frobenius G, a qual diz que os elementos que comutam com algum elemento de $K^{\#}$ são também elementos de K.

Proposição 2.9. *Seja G um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo K. Então*

$$C_G(k) \leq K, \text{ para todo } k \in K^{\#}.$$

Demonstração: Seja $k \in K^{\#}$ um elemento qualquer e tomemos $g \in C_G(k)$. Queremos mostrar que $g \in K$. Para isso, suponhamos que $g \notin K$. Desta forma, por (2.4), existem $g_1 \in G$ e $h \in H$ tais que $g = h^{g_1}$. Agora, como $g \in C_G(k)$, obtemos

$$k = gkg^{-1} = h^{g_1}k(h^{g_1})^{-1} = g_1(hk^{g_1^{-1}}h^{-1})g_1^{-1}$$

e, assim, $k^{g_1^{-1}} = hk^{g_1^{-1}}h^{-1}$, ou seja, $h \in C_G(k^{g_1^{-1}})$. Logo $h \in H \cap C_G(k^{g_1^{-1}})$. Agora, desde que $K \trianglelefteq G$, obtemos $k^{g_1^{-1}} \in K$ e, assim, $H \cap H^{k^{g_1^{-1}}} = \{1_G\}$. Mas é claro que $h \in H \cap H^{k^{g_1^{-1}}}$, uma vez que $h \in C_G(k^{g_1^{-1}})$. Logo, $h = 1_G$ e, consequentemente, $g = 1_G$, o que não pode ocorrer. Portanto $g \in K$, como queríamos mostrar. □

O resultado a seguir é fundamental para mostrarmos que tanto o complemento quanto o núcleo de um grupo de Frobenius G são subgrupos de Hall de G.

Proposição 2.10. *Seja G um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo K. Então $|H|$ divide $|K| - 1$.*

Demonstração: Como $K \trianglelefteq G$, podemos considerar a ação por conjugação de H sobre K. Seja $k \in K^{\#}$. Então, pela Proposição 2.9, $C_G(k) \leq K$ e, assim, $C_H(k) = \{1_G\}$, pois $H \cap K = \{1_G\}$. Por outro lado, é fácil ver que $Est(k) = C_H(k)$ e sabemos que $|\mathcal{O}(k)| = [H : Est(k)]$ (veja Proposição 1.25). Logo, como $C_H(k) = \{1_G\}$, segue a igualdade $|\mathcal{O}(z)| = |H|$. Por fim, desde que K é particionado pelas órbitas, devemos ter $|K| = (s-1)|H| + 1$, onde s é o número de órbitas. Portanto, $|H|$ divide $|K| - 1$, como queríamos mostrar. □

Agora podemos provar o resultado comentado antes da proposição anterior.

Corolário 2.11. *O complemento H de um grupo de Frobenius G é um subgrupo de Hall de G e o núcleo K é um subgrupo de Hall normal de G.*

Demonstração: Pela Proposição 2.10, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $|K| - 1 = s|H|$ de onde $1 = |K| - s|H|$. Disso podemos concluir que $mdc(|K|, |H|) = 1$. Agora, pela Proposição 2.8 $|K| = [G : H]$. Logo, $mdc(|H|, [G : H]) = 1$, mostrando que H é um subgrupo de Hall de G. Por fim, temos também $[G : K] = |H|$ e, assim, $mdc(|K|, [G : K]) = 1$, mostrando que K é um subgrupo normal de Hall de G, como queríamos. $\square$

Quando a ordem do complemento de um grupo de Frobenius G é par, temos algumas propriedades interessantes. O resultado a seguir nos fornece algumas delas.

Proposição 2.12. *Sejam G um grupo de Frobenius com complemento H de ordem par e z um elemento de ordem 2 em H. Então*

(i) O núcleo K é abeliano e $k^z = k^{-1}$, para todo $k \in K$;

(ii) z é o único elemento de ordem 2 em H e $z \in Z(H)$.

Demonstração: Mostraremos inicialmente o item (i). Notemos que $k \neq k^z$ para todo $k \in K^{\#}$, pois pela Proposição 2.9 $C_G(k) \leq K$. Desta forma, $k^z k^{-1} \neq 1_G$ para todo $k \in K^{\#}$. Consideremos a aplicação ψ de K em K tal que $\psi(k) = k^z k^{-1}$. Vamos mostrar que ψ é uma bijeção. Observamos que se mostrarmos que ψ é injetora, a finitude de K implicará que ψ é bijetora. Sejam $k_1, k_2 \in K$ tais que $\psi(k_1) = \psi(k_2)$. Então $k_1^z k_1^{-1} = k_2^z k_2^{-1}$, ou seja, $z k_2^{-1} k_1 z = k_2^{-1} k_1$ e, assim, $z \in C_G(k_2^{-1} k_1)$. Porém, pela Proposição 2.9, obtemos $C_G(k_2^{-1} k_1) \leq K$, uma vez que $k_2^{-1} k_1 \in K$; logo, $z \in H \cap K = \{1_G\}$, mas isso não pode ocorrer, já que $z \neq 1_G$. Desta forma, devemos ter $k_2^{-1} k_1 = 1_G$ e, portanto, $k_1 = k_2$, mostrando que ψ é injetora. Portanto, desde que ψ é uma bijeção, obtemos $K = \{k^z k^{-1};\ k \in K\}$. Notemos que, para cada $k_1 \in K$, existe $k \in K$ de forma que $k_1 = k^z k^{-1}$ e, assim,

$$k_1^z = (k^z k^{-1})^z = z(zkzk^{-1})z = kzk^{-1}z = k(k^z)^{-1} = (k^z k^{-1})^{-1} = k_1^{-1}. \tag{2.5}$$

Isso prova a segunda parte do item (i). Além disso, a aplicação $\psi_1 : K \longrightarrow K$ tal que $\psi_1(k) = k^z$, para todo $k \in K$, é um automorfismo de K. Desde que $k^z = k^{-1}$, obtemos que $\psi_1(k) = k^{-1}$ e, como ψ_1 é um automorfismo de K, segue que K é abeliano, completando a prova do item (i).

Para finalizar, vamos mostrar o item (ii). Suponha que exista outro elemento $z' \in H$ cuja ordem é 2. Então, pelo item anterior, dado $k \in K^{\#}$, obtemos $k^{z'} = k^{-1} = k^z$. Logo

$z^{-1}z' \in C_G(k) \leq K$ e, assim, $z^{-1}z' \in H \cap K = \{1_G\}$, mostrando que $z = z'$. Além disso, para todo $h \in H$, temos que $hzh^{-1} \in H$ e possui ordem 2. Desta forma, pela unicidade que acabamos de mostrar, $hzh^{-1} = z$, para todo $h \in H^{\#}$. Portanto $z \in Z(H)$. □

Subgrupos normais de um grupo de Frobenius possuem uma forte relação com o núcleo de Frobenius, como veremos a seguir.

Proposição 2.13. *Se G é um grupo de Frobenius com núcleo K e $N \trianglelefteq G$, então $K \subseteq N$ ou $N \subseteq K$.*

Demonstração: Suponhamos que $N \nsubseteq K$ e seja H um complemento de Frobenius de G. Como $N \nsubseteq K$, existe $n \in N^{\#}$ de modo que $n \notin K$. Nestas condições, afirmamos que $C_G(n) \cap K = \{1_G\}$. De fato, suponhamos que $C_G(n) \cap K \neq \{1_G\}$ e tomemos $g \in C_G(n) \cap K$. Como $g \in K^{\#}$ a Proposição 2.9 nos assegura que $C_G(g) \leq K$ e, assim, de $n \in C_G(g)$, obtemos $n \in K$, o que é uma contradição. Logo, $C_G(n) \cap K = \{1_G\}$. Agora, como $|KC_G(n)|$ divide $|G|$, existe $s \in \mathbb{N}$ de forma que $|KC_G(n)|s = |G|$ e, consequentemente, $|C_G(n)|s = |H|$. Por outro lado, $|G| = |C_G(n)||n^G|$, donde

$$|G|s = |C_G(n)|s|n^G| = |H||n^G|.$$

Isso implica que $|K||H|s = |H||n^G|$, ou seja, $|K|$ divide $|n^G|$. Observamos que, pelo fato de $n \in N$ e $N \trianglelefteq G$, devemos ter $n^G \subseteq N$ e, assim, $|n^G|$ divide $|N|$, ou seja, $|K|$ divide $|N|$. Seja p um primo tal que p divide $|K|$ e escreva $|K| = p^{\alpha}s_1$, onde $s_1 \in \mathbb{N}$. Como $|K|$ divide $|N|$, existe $s_2 \in \mathbb{N}$ de forma que $|N| = p^{\alpha}s_1s_2$. Além disso, K é um subgrupo normal de Hall de G e, assim, $|G| = p^{\alpha}s_3$, para algum $s_3 \in \mathbb{N}$.

Seja P um p-subgrupo de Sylow de K. Então P é um p-subgrupo de Sylow de G. Se Q é um p-subgrupo de Sylow de N, então Q é conjugado à P em G, ou seja, existe $g \in G$ de modo que $Q = gPg^{-1}$. Assim, $P = g^{-1}Qg \leq N$, pois $N \trianglelefteq G$. Isso nos diz que qualquer p-subgrupo de Sylow de K tal que p divide $|K|$ está contido em N. Assim, $K \subseteq N$, como queríamos mostrar. □

Veremos nos próximos dois teoremas outra caracterização para os grupos de Frobenius.

Teorema 2.14. *Suponhamos que N seja um subgrupo normal próprio e não trivial de um grupo finito G. Então, G é um grupo de Frobenius com núcleo N se, e somente se, $C_G(n) \leq N$ para todo $n \in N^{\#}$.*

Demonstração: A condição necessária já foi provada na Proposição 2.9. Resta-nos mostrar a condição suficiente. Suponhamos que exista um subgrupo normal não trivial N tal que $N \neq G$ e $C_G(n) \leq N$, para todo $n \in N^{\#}$. Vamos mostrar inicialmente que N é um subgrupo de Hall de G. Para isso, suponhamos o contrário, isto é, $mdc(|N|, [G : N]) \neq 1$. Então existe um primo p tal que p divide $|N|$ e divide $[G : N]$. Neste caso, podemos supor que $|G| = p^{\alpha}q$ e $|N| = p^{\beta}q'$ com $\alpha > \beta$ e $mdc(p, q) = mdc(p, q') = 1$. Desta forma, tomemos um p-subgrupo de Sylow P de N e um p-subgrupo de Sylow Q de G com $P \leq Q$, de onde $|P| = p^{\beta}$ e $|Q| = p^{\alpha}$. É claro que $Q \cap N$ é um p-subgrupo de N e, como $P \leq N \cap Q$, devemos ter $P = N \cap Q$. Desde que $Z(Q) \neq \{1_G\}$, o Teorema de Cauchy nos assegura da existência de um elemento $g \in Z(Q)$ tal que $|g| = p$ e, além disso, $Q \leq C_G(g)$. Agora, se $g \in P \leq N$, então de $Q \cap N = P$, teríamos $Q = P$, uma contradição. Logo $g \notin P$. É claro que $g \in C_G(h)$, para todo $h \in P^{\#}$ e, assim, por hipótese, obtemos que $g \in N$. Logo, $g \in N \cap Q = P$, o que não pode ocorrer. Portanto, devemos ter que N é um subgrupo de Hall de G. Desde que N é também normal em G, o Teorema de Schur-Zassenhaus nos assegura da existência de um subgrupo H de G tal que $G = NH$ e $H \cap N = \{1_G\}$. Afirmamos que $H \cap H^g = \{1_G\}$, para todo $g \in G \setminus H$. De fato, seja $g \in G \setminus H$ e suponhamos que $H \cap H^g \neq \{1_G\}$. Como $G = NH$, existem $n \in N$ e $h \in H$ tais que $g = nh$. Notemos que $n \neq 1_G$, pois $g \notin H$. Assim,

$$H^g = H^{nh} = nhHh^{-1}n^{-1} = H^n,$$

ou seja, $H \cap H^n \neq \{1_G\}$. Seja $h_1 \in (H \cap H^n)^{\#}$. Então $h_1 \in H$ e $h_1 = nh_2n^{-1}$, para algum $h_2 \in H$ e é claro que $h_2 \neq 1_G$. Desta forma, $h_1(h_2)^{-1} \in H$, mas também

$$h_1(h_2)^{-1} = nh_2n^{-1}(h_2)^{-1} = n(h_2n^{-1}(h_2)^{-1}) \in N.$$

Logo, $nh_2n^{-1}(h_2)^{-1} = 1_G$ e, consequentemente, $h_2 \in C_G(n)$. Mas isto contraria a hipótese, pois $h_2 \notin N$. Portanto, $H \cap H^g = \{1_G\}$, para todo $g \in G \setminus H$ e, consequentemente, pela Proposição 2.2 e Observação 2.5, devemos ter que G é um grupo de Frobenius com complemento H.

Por fim, como $H \cap N = \{1_G\}$ e $G = HN$, temos que se K é o núcleo de Frobenius de G, então, pela Proposição 2.8, devemos ter $|K| = [G : H] = |N|$. Assim, desde que $N \trianglelefteq G$, segue pela proposição anterior que $N \subseteq K$ ou $K \subseteq N$ e, pela finitude dos grupos, devemos ter $K = N$, mostrando que N é o núcleo de Frobenius para G, como queríamos. □

Teorema 2.15. *Dado um grupo finito G, suponhamos que K é um subgrupo normal próprio e não trivial de G e H é um complemento para K em G. Então, $C_G(h) \leq H$, para todo $h \in H^{\#}$ se, somente se, G é um grupo de Frobenius com complemento H.*

Demonstração: Suponhamos que $C_G(h) \leq H$, para todo $h \in H^{\#}$. Queremos mostrar que $H \cap H^g = \{1_G\}$, para todo $g \in G \setminus H$. Para isso, tomemos $g \in G \setminus H$. Como $G = KH$, existem $h \in H$ e $k \in K$ tais que $g = kh$ e, desta forma, $H \cap H^g = H \cap H^k$. Suponhamos que $H \cap H^k \neq \{1_G\}$ e tomemos $g_1 \in (H \cap H^k)^{\#}$. Então $g_1 \in H$ e existe $h_1 \in H$ de forma que $g_1 = kh_1k^{-1}$. Logo, $g_1, g_1^{k^{-1}} \in H$ e, assim, $g_1^{-1}g_1^{k^{-1}} \in H$. Porém $g_1^{-1}g_1^{k^{-1}} = (g_1^{-1}k^{-1}g_1)k \in K$, pois $K \trianglelefteq G$; donde $(g_1^{-1}k^{-1}g_1)k \in H \cap K = \{1_G\}$. Portanto

$$k \in K \cap C_G(g_1) \leq K \cap H = \{1_G\}.$$

Logo $k = 1_G$, ou seja, $g = h \in H$, o que não pode ocorrer, pois $g \in G \setminus H$. Logo, $H \cap H^g = \{1_G\}$, para todo $g \in G \setminus H$. Portanto, a Proposição 2.2 e a Observação 2.5 nos asseguram que G é um grupo de Frobenius com complemento H.

Reciprocamente, suponhamos que G é um grupo de Frobenius com complemento H. Então, $H \cap H^g = \{1_G\}$, para todo $g \in G \setminus H$. Seja $h \in H^{\#}$ e tomemos g_1 um elemento qualquer de $C_G(h)$. Como $G = HK$, existem $h_1 \in H$ e $k_1 \in K$ tais que $g_1 = h_1k_1$. Se mostrarmos que $k_1 = 1_G$, obteremos $g_1 \in H$. Notamos que

$$1_G = [g_1, h] = [h_1k_1, h] = [k_1, h]^{h_1}[h_1, h],$$

onde a última igualdade segue do item (ii) da Proposição 1.6. Logo,

$$[h_1, h]^{-1} = [k_1, h]^{h_1} = h_1k_1(hk_1^{-1}h_1^{-1})h_1^{-1} \in H \cap K = \{1_G\}.$$

Desta forma, $1_G = [k_1, h]$ e, então $h \in H \cap H^{k_1}$. Desde que $H \cap H^g = \{1_G\}$, para todo $g \in G \setminus H$, devemos ter $k_1 = 1_G$, mostrando o desejado. $\square$

A seguir, apresentaremos algumas equivalências que serão úteis no próximo capítulo.

Proposição 2.16. *Seja G um grupo de Frobenius e suponhamos que N e H sejam subgrupos não triviais de G tais que $N \trianglelefteq G$, $G = NH$ e $N \cap H = \{1_G\}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $C_G(n) \leq N$, *para todo* $n \in N^{\#}$;

(ii) $C_H(n) = \{1_G\}$, *para todo* $n \in N^{\#}$;

(iii) $C_G(h) \leq H$, *para todo* $h \in H^{\#}$;

(iv) H *é um complemento e* N *é o núcleo de Frobenius para* G.

Demonstração: Mostremos inicialmente que $(i) \Rightarrow (ii)$. Seja $n \in N^{\#}$ e tomemos $h \in C_H(n)$. Por hipótese, $C_G(n) \leq N$ e, assim, $h \in H \cap N = \{1_G\}$. Logo, $h = 1_G$, provando que $C_H(n) = \{1_G\}$.

Mostremos que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Seja $h \in H^{\#}$ e tomemos $g \in C_G(h)$. Desde que $G = NH$, existem $n \in N$ e $h_1 \in H$ tais que $g = nh_1$. Suponhamos que $n \neq 1_G$. Como $h = h^g$, obtemos $h = ghg^{-1} = nh^{h_1}n^{-1}$ e, assim, $hn = nh^{h_1}$, ou ainda,

$$n^{-1}n^h = (h^{h_1}h^{-1}) \in N \cap H = \{1_G\},$$

pois $N \trianglelefteq G$. Deste modo, $h^{h_1}h^{-1} = 1_G$ e, consequentemente, $h = nh^{h_1}n^{-1}$; logo, $h \in C_H(n)$ e, por (ii), segue que $h = 1_G$, contrariando o fato que $h \in H^{\#}$. Desta forma, $n = 1_G$, donde $g = h_1 \in H$, mostrando o desejado.

Mostremos que $(iii) \Rightarrow (iv)$. O Teorema 2.15 já garante que H é um complemento de Frobenius para G. Agora se K é o núcleo de Frobenius, então, pela Proposição 2.8, devemos ter que $|K| = [G : H]$ e, como $G = HN$ e $H \cap N = \{1_G\}$, obtemos $|K| = [G : H] = |N|$. Assim, desde que $N \trianglelefteq G$, segue pela Proposição 2.13 que $N \subseteq K$ ou $K \subseteq N$. Logo, $K = N$, mostrando que N é o núcleo de Frobenius para G, como queríamos.

Por fim, o Teorema 2.14 garante que $(vi) \Rightarrow (i)$. $\square$

Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 2.17. Consideremos $A_4 = \{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}\}$, onde

$$g_0 = (1),\ g_1 = (12)(34),\ g_2 = (13)(24),\ g_3 = (14)(23),\ g_4 = (123),\ g_5 = (124)$$

$$g_6 = (134),\ g_7 = (132),\ g_8 = (142),\ g_9 = (234),\ g_{10} = (243) \text{ e } g_{11} = (143).$$

Com cálculos rotineiros, podemos mostrar que $A_4 = KH$, onde K é o grupo de Klein, isto é, $K = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ e $H = \{g_0, g_4, g_7\}$. Já sabemos que $K \trianglelefteq A_4$. Além disso,

$$C_{A_4}(g_4) = H = C_{A_4}(g_7).$$

Portanto, o Teorema 2.15 nos garante que A_4 é um grupo de Frobenius e a proposição anterior nos diz que H é um complemento e K é o núcleo para o grupo de Frobenius A_4.

Iremos agora caracterizar os subgrupos de Sylow do complemento de um grupo de Frobenius. Para isso, os dois próximos lemas serão de extrema importância. Não vamos demonstrá-los, mas indicaremos uma referência para as demonstrações.

Lema 2.18. *Seja G um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo K e sejam p e q primos não necessariamente distintos. Se $N \leq H$ e $|N| = pq$, então N é um grupo cíclico.*

Demonstração: Consulte [16, Prop 3.2.20]. □

Para o próximo resultado, necessitaremos da seguinte definição:

Definição 2.19. *O grupo dos quatérnios generalizado de ordem 2^n, $n \geq 3$, é o grupo dado pela seguinte apresentação:*

$$\langle r, s \mid r^{2^{n-1}} = 1,\ s^2 = r^{2^{n-2}},\ s^{-1}rs = r^{-1} \rangle.$$

Lema 2.20. *Seja G um p-grupo finito. Se G possui um único subgrupo de ordem p, então G ou é cíclico ou é um grupo dos quatérnios generalizado.*

Demonstração: Indicamos [12, Pag 93]. □

Teorema 2.21. *Seja G um grupo de Frobenius com complemento H e seja p um divisor primo de $|H|$. Se P é um p-subgrupo de Sylow de H, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se $p = 2$, então P é cíclico ou um grupo dos quatérnios generalizado;

(ii) Se $p \neq 2$, então P é cíclico.

Demonstração: Como P é um p-grupo, é bem conhecido que seu centro é não trivial e, por conta disso e do Teorema de Cauchy, existe um subgrupo N de $Z(P)$ tal que $|N| = p$. Queremos mostrar que N é o único subgrupo de P de ordem p. Para isso, suponhamos que exista outro subgrupo N_1 de P que possui ordem p. Neste caso, como $N \triangleleft P$, pois

$N \leq Z(P)$, segue que NN_1 é um subgrupo de ordem p^2 e, assim, é abeliano. Desta forma, $NN_1 \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Disso, podemos concluir que NN_1 não é um grupo cíclico, mas isso contraria o Lema 2.18. Portanto, N é o único subgrupo de P que possui ordem p e, pelo Lema 2.20, P é cíclico ou um grupo dos quatérnios generalizado. Notemos que não impomos restrições para p; logo, se $p = 2$ segue o item (i). Agora, se $p \neq 2$ é claro que P tem que ser cíclico; por conta disso, segue o item (ii). □

Vimos na Proposição 2.12 algumas propriedades quando o complemento de um grupo de Frobenius tem ordem par. Naturalmente surge a dúvida se existem propriedades interessantes para o complemento de Frobenius quando este possuir ordem ímpar. Os próximos dois resultados tratarão de responder essa pergunta.

Proposição 2.22. *Seja G um grupo de Frobenius com complemento H. Se H tem ordem ímpar, então H é metacíclico.*

Demonstração: Suponha que H tem ordem ímpar. Então todos os subgrupos de Sylow de H são cíclicos. Desta forma, pela Proposição 1.7, temos que H' e H/H' são grupos cíclicos. Portanto, H é um grupo metacíclico. □

Proposição 2.23. *Seja G um grupo de Frobenius com complemento H. Se H tem ordem ímpar, então H possui um único subgrupo de ordem p, para cada divisor primo p de $|H|$. Em particular, quaisquer dois elementos de ordem prima em H comutam.*

Demonstração: Seja p um primo tal que p divide $|H|$. De Teorema 2.21 e Proposição 1.7, obtemos

$$mdc(|H'|, |H/H'|) = 1. \tag{2.6}$$

Primeiramente, suponhamos que p divide $|H'|$. Desta forma, por (2.6), p não é um divisor de $|H/H'|$ e, então, todo subgrupo de H de ordem p deve ser um subgrupo de H'. Desde que H' é cíclico, pelo corolário anterior, ele possui um único subgrupo de ordem p; logo, H possui um único subgrupo de ordem p.

Para finalizarmos a prova, resta-nos verificar quando p não divide $|H'|$. Neste caso, por (2.6), p deve dividir $|H/H'|$. Pelo corolário anterior, H/H' é cíclico e, então, H/H' possui um único subgrupo X/H' de ordem p. Seja Q um subgrupo de H com ordem p.

Desta forma, $QH'/H' = X/H'$ e, consequentemente, $QH' = X$. Além disso, como p não divide $|H'|$, devemos ter que Q é um p-subgrupo de Sylow de X. Assim, se mostrarmos que $Q \trianglelefteq X$, teremos a unicidade desejada. Seja $R \leq H'$ um subgrupo qualquer de ordem prima, digamos q. Desde que H' é cíclico e H' *char* H, obtemos $R \trianglelefteq H'$. Desta forma $R \trianglelefteq H$, pois H' *char* H. Disso, obtemos que RQ é um subgrupo de H cuja ordem é pq. Assim, pelo Lema 2.18, temos que RQ é cíclico e, em particular, $R \leq C_{H'}(Q)$. Logo, $C_{H'}(Q)$ contém todo subgrupo de H' cuja ordem é prima. Agora, desde que H' é abeliano e tem ordem coprima com p, segue pelo Teorema de Fitting 1.29 que

$$H' = [H', Q] \times C_{H'}(Q).$$

Por fim, como $C_{H'}(Q)$ contém todo subgrupo de H' de ordem prima, segue que $[H', Q] = \{1_G\}$. Então $Q \trianglelefteq QH' = X$. Assim, Q é o único p-subgrupo de Sylow de X, como queríamos.

Em particular, se x e y são elementos de H com ordem ímpar, digamos p e q, respectivamente, pelo que provamos acima, $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ são os únicos subgrupos de ordens p e q, respectivamente e, disso, obtemos que $\langle x \rangle \trianglelefteq H$ e $\langle y \rangle \trianglelefteq H$. Daí $\langle x \rangle\langle y \rangle \leq H$ tem ordem pq e, assim, pelo Lema 2.18, temos que $\langle x \rangle\langle y \rangle \leq H$ é cíclico, de onde x comuta com y, finalizando a prova do resultado. $\square$

Para finalizarmos essa seção, mostraremos que o núcleo de um grupo de Frobenius coincide com o subgrupo de Fitting. Para provarmos este fato, precisaremos do seguinte teorema, que não será demonstrado, mas a prova com todos os detalhes pode ser encontrada em [19, Pg 184].

Teorema 2.24. *O núcleo de um grupo de Frobenius é nilpotente.*

Demonstração: Veja [19, Pag 184]. $\square$

Proposição 2.25. *Seja G um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo K. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $K = F(G)$;

(ii) $Z(G) = \{1_G\}$

Demonstração: Mostraremos inicialmente o item (i). Pelo Teorema 2.24, o subgrupo K é nilpotente e, desde que $K \trianglelefteq G$, devemos ter $K \leq F(G)$. Por outro lado, como $F(G)$ é nilpotente e $K \trianglelefteq F(G)$ segue da Proposição 1.12 que $K \cap Z(F(G)) \neq \{1_G\}$. Desta forma, podemos considerar $f \in (K \cap Z(F(G)))^{\#}$. Disso, obtemos que

$$F(G) \leq C_G(f) \leq K$$

de onde $F(G) \leq K$. Portanto $K = F(G)$, provando o item (i).

Mostraremos o item (ii). É claro que $Z(G) \leq C_G(x)$, para todo $x \in G$. Disso, podemos concluir que $Z(G) \leq K$, uma vez que $C_G(k) \leq K$, para todo $k \in K^{\#}$ e $Z(G) \leq H$, já que $C_G(h) \leq H$, para todo $h \in H^{\#}$. Desta forma, $Z(G) \leq H \cap K = \{1_G\}$, ou seja, $Z(G) = \{1_G\}$, provando o item (ii). □

A proposição anterior nos garante que o núcleo K de um grupo de Frobenius G é único, já que o subgrupo de Fitting $F(G)$ o é. Além disso, desde que os complementos de Frobenius são subgrupos de Hall, o Teorema de Schur-Zassenhaus nos assegura de que os mesmos são conjugados. Percebendo este fato, não podemos ter que um grupo de Frobenius G é nilpotente, pois se fosse, teríamos $G = F(G)$ e, assim, o complemento seria o subgrupo trivial, o que não pode ocorrer pela definição.

Observação 2.26. *Considerando a estrutura dos grupos de Frobenius surge a seguinte questão: Todo grupo de Frobenius é solúvel? A resposta é não, mas vale observar que se G é um grupo de Frobenius, então $G = HF(G)$, onde H é um complemento de Frobenius para G. Se a ordem de H é ímpar, então H é solúvel (pelo Teorema de Feit-Thompson) e, como $F(G)$ é solúvel, concluímos que G também é solúvel. Entretanto, quando o complemento H tem ordem par, pode acontecer de G não ser solúvel. Um exemplo deste fato pode ser encontrado em [19, Pag 122].*

2.3 Grupos 2-Frobenius

Nesta seção faremos uma pequena introdução à classe de grupos chamada de grupos 2-Frobenius. Daremos a definição e apresentaremos algumas propriedades que serão de extrema importância na prova do Teorema 3.1 no Capítulo 3.

Definição 2.27. *Um grupo finito G é chamado de grupo 2-**Frobenius** se G possui uma série normal $\{1_G\} \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq K_2 \trianglelefteq G$, onde G/K_1 e K_2 são grupos de Frobenius com núcleos K_2/K_1 e K_1, respectivamente.*

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.28. *Consideremos o grupo S_4. É claro que*

$$\{1_G\} \trianglelefteq K \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4,$$

onde K é o grupo de Klein. Além disso, vimos no Exemplo 2.17 que A_4 é um grupo de Frobenius com núcleo K. Por fim, sabemos que $S_4/K \cong S_3$ e $S_3 \cong D_6$. Logo, pelo Exemplo 2.3, segue que S_4/K é um grupo de Frobenius com complemento de ordem 2. Desta forma, pela Proposição 2.8, o núcleo de S_4/K deve ter ordem 3. Também percebemos que $|A_4/K| = 3$ e $A_4/K \trianglelefteq S_4/K$; logo, pela Proposição 2.13, o núcleo de S_4/K deve ser A_4/K. Portanto, S_4 é um grupo 2-Frobenius.

No decorrer dessa seção, quando G for um grupo 2-Frobenius, K_1 e K_2 denotarão os subgrupos normais conforme a Definição 2.27 e H um complemento de Frobenius para K_2.

Proposição 2.29. *Se G é um grupo 2-Frobenius, então $N_G(H)$ é um grupo Frobenius com núcleo de Frobenius H.*

Demonstração: Mostremos inicialmente que

$$G = K_1 N_G(H) \quad \text{com} \quad K_1 \cap N_G(H) = \{1_G\}.$$

De fato, segue do Teorema de Schur-Zassenhaus que quaisquer dois complementos de K_1 em K_2 são conjugados por elementos de K_1 e é claro que gHg^{-1} é também um complemento de K_1 em K_2, para qualquer $g \in G$. Afirmamos que $G = K_1 N$. Já temos que $K_1 N \subseteq G$. Resta mostrarmos a inclusão contrária. Para isso, tomemos $g \in G$ um elemento arbitrário. Então, como gHg^{-1} é um complemento de K_1 em K_2, existe $k \in K_1$ de modo que $gHg^{-1} = kHk^{-1}$. Assim, $H = g^{-1}kH(g^{-1}k)^{-1}$. Disso, obtemos que $g^{-1}k \in N$, ou seja, existe $n \in N$ tal que $n = g^{-1}k$ e, consequentemente, $g = kn^{-1} \in K_1 N$. Logo, $G \subseteq K_1 N$. Mostremos que $K_1 \cap N_G(H) = \{1_G\}$. Seja $k \in K_1 \cap N_G(H)$. Então $H = H^k$ com $k \in K_2 \setminus H$. Porém, sendo H um complemento de Frobenius para K_2, segue $H \cap H^k = \{1_G\}$. Portanto, devemos ter $k = 1_G$, como queríamos.

Por fim, pelo que acabamos de mostrar, temos $N \cong G/K_1$ e, como G/K_1 é um grupo de Frobenius, segue do isomorfismo que N é um grupo de Frobenius. Além disso, se X é o núcleo de Frobenius de N, então

$$|X| = [K_2 : K_1] = |H|.$$

Além disso, $H \trianglelefteq N$ e, assim, pela Proposição 2.13, segue que $H \subseteq X$ ou $X \subseteq H$. Mas, como $|X| = |H|$, segue de imediato que $X = H$. Portanto H é o núcleo de Frobenius de N. $\square$

Assim como os grupos de Frobenius, os grupos 2-Frobenius também possuem centro trivial.

Proposição 2.30. *O centro de um grupo* 2*-Frobenius é trivial.*

Demonstração: Suponhamos que G é um grupo 2-Frobenius. Então, como G/K_1 e K_2 são grupos de Frobenius, segue pela Proposição 2.25 que $Z(G/K_1)$ e $Z(K_2)$ são triviais. Desta forma, se $g \in Z(G)$, então é claro que $gK_1 \in Z(G/K_1) = K_1$. Disso, obtemos que $g \in K_1 \leq K_2$ e, assim, $g \in Z(K_2) = \{1_G\}$. Portanto, $g = 1_G$ o que mostra que $Z(G) = \{1_G\}$. $\square$

Capítulo 3

Diâmetro do Grafo Comutante de um Grupo Solúvel Finito

Este capítulo tem como objetivo apresentar um estudo sobre o diâmetro do grafo comutante de um grupo solúvel com centro trivial. Mais especificamente, vamos apresentar a demonstração de um resultado de C. Parker [18] que caracteriza os grupos solúveis com centro trivial que possuem grafo comutante desconexo. Além disso, no caso em que este grafo é conexo, este resultado estabelece que seu diâmetro é no máximo 8. De primeiro momento, na Seção 3.1, apresentaremos um pouco de como foi a linha cronológica do estudo do diâmetro do grafo comutante. As Seções 3.2 e 3.3 são dedicadas a apresentar a prova do resultado de C. Parker. Na Seção 3.4, apresentaremos a ideia da construção de um grupo solúvel com centro trivial cujo grafo comutante é conexo e possui diâmetro igual a 8. Este exemplo nos mostra que o limitante encontrado por Parker é excelente, no sentido que não pode mais ser diminuido. Finalizamos este capítulo com uma extensão do Teorema de Parker, devida a N. F. Beike *et al.* [4].

3.1 O Teorema Principal

Muitos trabalhos deram ênfase em analisar o diâmetro do grafo comutante de um grupo G, para diferentes escolhas de G. Por exemplo, em [14] A.Iranmanesh e A. Jafarzedah demonstraram que $\Gamma(S_n)$ é desconexo ou tem diâmetro no máximo 5 e que o mesmo é válido para $\Gamma(A_n)$. No mesmo trabalho os autores conjecturaram a existência de um número natural n tal que se G é um grupo não abeliano finito e $\Gamma(G)$ é conexo, então $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \leq n$. Essa conjectura foi provada ser falsa quando M. Giudici e C. Parker em [10] apresentaram uma família de grupos G_n com $n \geq 4$ de forma que $\Gamma(G_n)$ é conexo e possui diâmetro $n-1$. Em uma tentativa de não perder totalmente a conjectura, no mesmo trabalho, M. Giudici e C. Parker conjecturaram que existe esse limitante universal quando G é um grupo com centro trivial. As tentativas de prova da nova conjectura proposta geraram vários trabalhos, dentre eles o que vamos apresentar nesse capítulo, no qual C. Parker em [18] prova que se G é um grupo solúvel com centro trivial e $\Gamma(G)$ é conexo, então $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \leq 8$. Além disso, ele apresenta uma família de grupos solúveis com centro trivial cujos grafos comutantes são conexo e têm diâmetro 8. Logo em seguida, G.L. Morgan e C. Parker em [17] mostraram que se G é um grupo com centro trivial e $\Gamma(G)$ é conexo, então $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \leq 10$.

Nosso objetivo neste capítulo é o de apresentar a demonstração do C. Parker do seguinte resultado:

Teorema 3.1. *[18, C. PARKER] Se G é um grupo solúvel finito com centro trivial, as seguintes afirmações são válidas:*

(i) O grafo $\Gamma(G)$ é desconexo se, e somente se, G é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius.

(ii) Se o grafo $\Gamma(G)$ é conexo, então $\Gamma(G)$ tem diâmetro no máximo 8.

Inicialmente C. Parker observou que pelo fato do núcleo e complemento de um grupo de Frobenius serem auto centralizantes, tem-se o seguinte resultado:

Lema 3.2. *Se G é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius, então $\Gamma(G)$ é desconexo.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que G é um grupo de Frobenius com K e H, respectivamente, o núcleo e um complemento de Frobenius de G. Pela Proposição 2.9,

$$C_G(h) \leq h, \quad \text{para todo } h \in H^{\#}.$$

Disso podemos concluir que os vértices de $\Gamma(G)$ em $H^{\#}$ são adjacentes apenas aos vértices em $H^{\#}$ e, assim, dados $h \in H^{\#}$ e $k \in K^{\#}$, não existe um caminho de h para k. Portanto $\Gamma(G)$ é desconexo, mostrando o item (i).

Por fim, suponhamos que G é um grupo 2- Frobenius. Então, existe uma série normal $1 \trianglelefteq K \trianglelefteq L \trianglelefteq G$, onde G/K e L são grupos de Frobenius com núcleos L/K e K, respectivamente. Pela Proposição 2.29, o subgrupo $N_G(J)$ é um grupo de Frobenius com núcleo J, onde J é o complemento de Frobenius para L . Logo

$$G = KN_G(J) \quad \text{e} \quad K \cap N_G(J) = \{1_G\}.$$

Afirmamos que $C_G(j) \leq J$, para todo $j \in J^{\#}$. De fato, seja $j \in J^{\#}$ e tomemos $a \in C_G(j)$. Como $G = KN_G(J)$, existem $k \in K$ e $n \in N_G(J)$ tais que $a = kn$. Assim, $knjn^{-1}k^{-1} = j$, ou seja, $njn^{-1} = k^{-1}jk \in L$. Também temos que $njn^{-1} \in N_G(J)$, pois $n, j \in N_G(J)$. Logo,

$$k^{-1}jk \in L \cap N_G(J) = (JK) \cap N_G(J) = J(K \cap N_G(J)) = J\{1_G\} = J.$$

A segunda igualdade segue da Proposição 1.3 (Lei modular). De $k^{-1}jk \in J$ resulta que existe $j_1 \in J$ tal que $k^{-1} = j_1k^{-1}j^{-1} = j_1j^{-1}(jk^{-1}j^{-1})$. Disso obtemos que $k^{-1}(jk^{-1}j^{-1})^{-1} = j_1j^{-1} \in K \cap J = \{1_G\}$. Desta forma, $k \in C_L(j) \leq J$, isto é, $k \in J \cap K = \{1_G\}$. Assim, $a = n \in N_G(j)$, ou seja, $a \in C_{N_G(J)}(j)$. Mas vimos que $N_G(J)$ é um grupo de Frobenius com núcleo J; logo $a \in J$, pois a Proposição 2.16 nos diz que $C_{N_G(J)}(j) \leq J$. Isso finaliza a prova da afirmação. Seguindo o mesmo argumento do caso anterior, concluímos que $\Gamma(G)$ é desconexo. □

Observação 3.3. *O lema anterior garante a condição suficiente do item (i) do Teorema 3.1. Agora, nosso objetivo, no que segue, é apresentar a demonstração do Parker de que vale a condição necessária quando trabalhamos com grupos solúveis com centro trivial e também da do item (ii) do teorema. Isso exigirá vários resultados auxiliares e a próxima seção terá o papel de apresentá-los. A demonstração foi feita seguindo o seguinte caminho:*

- *A prova da condição necessária do item (i) foi feita por contrapositiva. Assim, Parker supôs que G é um grupo solúvel com centro trivial que não é nem um grupo de Frobenius nem um grupo 2-Frobenius e o objetivo era mostrar que $\Gamma(G)$ é conexo.*

- *Naturalmente, se $d(x, y) \leq 8$, para todos os vértices x e y, então $\Gamma(G)$ é conexo. Assim, o objetivo do Parker foi o de mostrar que não existem $x, y \in G^{\#}$ tais que $d(x, y) > 8$ e isso foi feito usando o método da contradição.*

- *Desta forma, Parker supôs que existem $x, y \in G^{\#}$ tais que $d(x, y) > 8$ e, após uma longa construção que será vista nas próximas seções, ele chegou em uma contradição* *ao obter um caminho de x para y de comprimento 8. Disso concluí-se que $d(x,y)$ é no máximo 8, para todos $x, y \in G^{\#}$, ou seja, $\Gamma(G)$ é conexo. Isso completa a prova do item (i) do Teorema de Parker.*

- *Como consequência, obtém-se também que se o grafo $\Gamma(G)$ é conexo, então G não é um grupo de Frobenius nem um grupo 2- Frobenius. Logo, $d(x,y) \leq 8$, para todos $x, y \in G^{\#}$ e, portanto, o diâmetro de $\Gamma(G)$ é no máximo 8, completando a prova do teorema.*

Vale observar que o Teorema 3.1 também pode ser considerado como uma ferramenta para verificar se um grupo solúvel com centro trivial é de Frobenius ou 2-Frobenius. Por exemplo, sabemos que S_3 e A_4 são grupos solúveis com centro trivial. Além disso, pelos Exemplos 1.40 e 1.42 vemos que os grafos $\Gamma(S_3)$ e $\Gamma(A_4)$ são desconexos e, portanto, temos que S_3 e A_4 são grupos de Frobenius ou 2-Frobenius. De fato, esses grupos são de Frobenius conforme vimos nos Exemplos 2.17 e 2.3.

3.2 Resultados Necessários para a Prova

Em toda essa seção, salvo menção em contrário, G denotará um grupo solúvel finito com centro trivial e F o subgrupo de Fitting de G. Desde que $Z(G) = \{1_G\}$, temos $V(\Gamma(G)) = G^{\#}$. Observamos que os próximos dois lemas valem para qualquer grupo finito G.

Lema 3.4. *Suponhamos que N seja um subgrupo normal minimal de G. Se $a, b \in G^{\#}$ e $d(a,b) > 4$, então $C_G(a) \cap C_G(N) = \{1_G\}$ ou $C_G(b) \cap C_G(N) = \{1_G\}$.*

Demonstração: Suponhamos $C_G(a) \cap C_G(N) \neq \{1_G\}$ e $C_G(b) \cap C_G(N) \neq \{1_G\}$ e sejam $x_1 \in (C_G(a) \cap C_G(N))^{\#}$ e $x_2 \in (C_G(b) \cap C_G(N))^{\#}$. Desde que $x_1, x_2 \in C_G(N)$ devemos ter $[x_1, n] = 1_G = [x_2, n]$, para qualquer $n \in N$. Desta forma, como $x_1 \in C_G(a)$ e $x_2 \in C_G(b)$, temos o seguinte caminho de comprimento 4, para todo $n \in C_G(N)$

$$a \sim x_1 \sim n \sim x_2 \sim b$$

e isso nos diz que $d(a,b) \leq 4$. Mas isso contraria a hipótese. □

Lema 3.5. *Seja G um grupo finito e suponhamos que* $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \geq 7$. *Se N é um subgrupo normal minimal de G, então $C_G(N) = F$.*

Demonstração: Sabemos que F é um subgrupo normal nilpotente de G e, como N é um subgrupo normal minimal de G, segue da Proposição 1.13 que $F \leq C_G(N)$. Por outro lado, como $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \geq 7$, existem $c, d \in G^{\#}$ tais que $d(c,d) > 6$. Consideremos $a \in \langle c \rangle$ e $b \in \langle d \rangle$ elementos de ordem prima. Desde que $d(c,d) > 6$, devemos ter $d(a,b) > 4$, pois se $d(a,b) \leq 4$, existiria um caminho de a para b de comprimento no máximo 4, digamos P; disso teríamos que $c \sim P \sim d$ é um caminho de c para d de tamanho no máximo 6, o que não pode ocorrer em nossa situação. Desta forma, pelo Lema 3.4 temos $C_{C_G(N)}(a) = C_G(a) \cap C_G(N) = \{1_G\}$ ou $C_{C_G(N)}(b) = C_G(b) \cap C_G(N) = \{1_G\}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $C_{C_G(N)}(a) = \{1_G\}$. Não é difícil ver que $C_G(N) \trianglelefteq G$ e, assim, faz sentido considerar o seguinte automorfismo $\psi : C_G(N) \to C_G(N)$ dado por $\psi(x) = x^a$, o qual é livre de pontos fixos e possui a mesma ordem de a, pelo Exemplo 1.21. Como ψ é um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima, o Teorema de Thompson 1.22 nos garante que o subgrupo $C_G(N)$ é nilpotente. Assim $C_G(N)$ é normal e nilpotente e, consequentemente, $C_G(N) \leq F$. Portanto, vale a igualdade $C_G(N) = F$. $\square$

Consideremos o homomorfismo canônico $\phi : G \to G/F$ e tomemos os seguintes subgrupos normais de G:

$$J = \phi^{-1}\left(F\left(\frac{G}{F}\right)\right) \quad \text{e} \quad J_2 = \phi^{-1}\left(Z\left(F\left(\frac{G}{F}\right)\right)\right).$$

Consideremos também um subgrupo normal minimal V de G. O Lema 3.5 nos assegura que $F = C_G(V)$. Como G é um grupo solúvel, pela Proposição 1.9, o subgrupo V é abeliano elementar, ou seja, V é nilpotente. Assim, $V \leq F$.

O próximo resultado vai nos dizer que se p é um divisor primo de $|F|$, todo p-subgrupo de Sylow de J também será um p-subgrupo de Sylow de F.

Lema 3.6. *Se* $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \geq 7$, *então $mdc(|J/F|, |F|) = 1$.*

Demonstração: Seja p um primo tal que p divide $|F|$ e seja P um p-subgrupo de Sylow de J. Mostremos que $P \leq F$. Como p divide $|F|$, existe um p-subgrupo de Sylow Q_1 de F. Notemos que $Z(Q_1) \neq \{1_G\}$. Agora, desde que F é nilpotente, segue da Proposição 1.12 que Q_1 é o único p-subgrupo de Sylow de F, de onde Q_1 *char* F. Assim, pela Proposição

1.4, obtemos $Z(Q_1)$ *char* F, uma vez que $Z(Q_1)$ *char* Q_1. Como $F \trianglelefteq FP$, novamente pela Proposição 1.4, segue que $Z(Q_1) \trianglelefteq FP$. Logo, $Z(Q_1)$ é um p-subgrupo normal não trivial de FP. Também temos que P é um p-subgrupo de Sylow de FP, já que $FP \leq J$. Além disso, $Z(Q_1) \trianglelefteq P$, pois $Z(Q_1) \trianglelefteq FP$ e, assim, como P é nilpotente, a Proposição 1.12 nos assegura que $Z(Q_1) \cap Z(P) \neq \{1_G\}$. Consequentemente, $Z(FP) \neq \{1_G\}$. Mostraremos agora que $FP \trianglelefteq G$. Já sabemos que $J/F = F(G/F)$ e não é difícil ver que PF/F é um p-subgrupo de Sylow de J/F. Assim, como J/F é nilpotente, temos PF/F *char* J/F e, desde que $J/F \trianglelefteq G/F$, segue $PF/F \trianglelefteq G/F$ e, consequentemente, $PF \trianglelefteq G$, como queríamos. Assim, $Z(PF) \trianglelefteq G$. Daí, existe um subgrupo normal minimal N de G tal que $N \leq Z(PF)$ e, pelo Lema 3.5, devemos ter $F = C_G(N)$. Disso, para todo $n \in N$, temos $ng = gn$, para todo $g \in P$. Assim, $P \leq C_G(N) = F$. Portanto, necessariamente, devemos ter

$$mdc\left(\left|\frac{J}{F}\right|, |F|\right) = 1.$$

□

De agora em diante, assumiremos que G não é um grupo de Frobenius nem um grupo 2-Frobenius e que o diâmetro de $\Gamma(G)$ é maior que 8.

Observação 3.7. *Nessas condições, existem $x, y \in G^{\#}$ tais que $d(x, y) > 8$. Observamos que pode não existir um caminho de x para y, já que não estamos assumindo que $\Gamma(G)$ é conexo. Consideremos $x_r \in \langle x \rangle$ um elemento de ordem prima r e $y_s \in \langle y \rangle$ um elemento de ordem prima s. É claro que $d(x_r, y_s) > 6$.*

Agora, como F é um subgrupo normal de G, podemos considerar as seguintes ações por conjugação:

$$\begin{array}{rccc} \phi_1: & C_G(x_r) \times F & \longrightarrow & F \\ & (z, f) & \longmapsto & zfz^{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \phi_2: & C_G(y_s) \times F & \longrightarrow & F \\ & (w, f) & \longmapsto & wfw^{-1} \end{array}$$

Com respeito às ações citadas acima, temos o seguinte lema:

Lema 3.8. *Todos os elementos de $C_G(x_r)^{\#}$ ou todos os elementos de $C_G(y_s)^{\#}$ agem livres de pontos fixos sobre F.*

Demonstração: Suponhamos que o resultado não é válido. Então, existem $a \in C_G(x_r)^{\#}$, $b \in C_G(y_s)^{\#}$ e $f_1, f_2 \in F$ de modo que $\phi_1(a, f_1) = f_1$ e $\phi_2(b, f_2) = f_2$. Isso nos diz que

$f_1 \in C_F(a)$ e $f_2 \in C_F(b)$. Como $f_1, f_2 \in F = C_G(V)$, temos $f_1 v = v f_1$ e $f_2 v = v f_2$, para todo $v \in V^\#$. Portanto, obtemos o seguinte caminho de x para y de comprimento 8:

$$x \sim x_r \sim a \sim f_1 \sim v \sim f_2 \sim y_s \sim y,$$

o que contraria o fato $d(x, y) > 8$. □

Por causa do lema anterior, podemos assumir, sem perda de generalidade, que todos os elementos de $C_G(x_r)^\#$ agem por conjugação sobre F livres de pontos fixos. Assim $[a, f] \neq 1_G$, para todos $a \in C_G(x_r)^\#$ e $f \in F^\#$. Em particular, $[x_r, f] \neq 1_G$, para todo $f \in F^\#$, donde

$$C_G(x_r) \cap F = \{1_G\}. \tag{3.4}$$

Com isso, temos o seguinte:

Lema 3.9. *O subgrupo $C_G(x_r)F$ é um grupo de Frobenius com complemento $C_G(x_r)$ e núcleo F.*

Demonstração: Coloquemos $C_G(x_r)F = H$. Mostremos inicialmente que, para todo $a \in C_G(x_r)^\#$, temos $C_H(a) \leq C_G(x_r)$. Para isso, tomemos $u \in C_H(a)$ e sejam $h \in C_G(x_r)$ e $f \in F$ tais que $u = hf$. Afirmamos que $f = 1_G$. De fato, como $hf \in C_H(a)$, temos $hfa = ahf$. Disso, obtemos $hfaf^{-1} = ah \in C_G(x_r)$ e, assim, $(hfaf^{-1})x_r = x_r(hfaf^{-1})$, donde $faf^{-1}x_r = x_r faf^{-1}$, uma vez que $[h, x_r] = 1_G$. Logo, $faf^{-1} \in C_G(x_r)$. Daí, como $F \lhd G$ e usando (3.4), temos

$$(a^{-1}fa)f^{-1} = a^{-1}(faf^{-1}) \in C_G(x_r) \cap F = \{1_G\}.$$

Desta forma, $faf^{-1} = a$, ou seja, $af = fa$. Agora, como $a \neq 1_G$, obtemos $f = 1_G$, uma vez que os elementos de $C_G(x_r)^\#$ agem sobre F livre de pontos fixos. Portanto $C_H(a) \leq C_G(x_r)$. Agora, o Teorema 2.15 completa a prova de que H é um grupo de Frobenius com complemento $C_G(x_r)$. Por fim, pela Proposição 2.16, o subgrupo $C_G(x_r)$ é um complemento de Frobenius para H e F é o núcleo de Frobenius de H □

O lema anterior também nos diz que $G \neq C_G(x_r)F$, pois $C_G(x_r)F$ é um grupo de Frobenius e G não.

Lema 3.10. *O subgrupo $C_G(x_r)$ tem ordem ímpar e é metacíclico.*

Demonstração: Suponhamos que $C_G(x_r)$ tenha ordem par. O Lema 3.9 nos diz que $C_G(x_r)F$ é um grupo de Frobenius com complemento $C_G(x_r)$ e núcleo F e, assim, pela Proposição 2.12 o subgrupo $C_G(x_r)$ possui um único elemento z de ordem 2 que satisfaz

$$f = zf^{-1}z, \qquad \text{para todo } f \in F. \tag{3.5}$$

Além disso, $z \in Z(C_G(x_r))$, F é um grupo abeliano e $[x, z] = 1_G$.

Mostremos que $C_G(z)F = G$ e $C_G(z) \cap F = \{1_G\}$. Para isso, afirmamos inicialmente que $[g, z] \in C_G(F)$, para todo $g \in G$. De fato, sejam $g \in G$ e $f \in F$. Como $F \trianglelefteq G$ temos $g^{-1}f^{-1}g \in F$ e, assim, por (3.5), obtemos

$$g^{-1}f^{-1}g = z(g^{-1}f^{-1}g)^{-1}z = zg^{-1}fgz,$$

de onde $zg^{-1}f^{-1}g = g^{-1}fgz$. Desta forma,

$$\begin{aligned} [g, z]f &= gzg^{-1}zf = gzg^{-1}z(zf^{-1}z) = g(zg^{-1}f^{-1}g)g^{-1}z = g(g^{-1}fgz)g^{-1}z \\ &= fgzg^{-1}z = f[g, z]. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de $f \in F$ concluímos que $[g, z] \in C_G(F)$. Sendo G um grupo solúvel, o Teorema 1.15 nos diz que $[g, z] \in F$ e, assim, $gzg^{-1} \in \langle z\rangle F$. Claramente $\langle z\rangle$ é um 2-subgrupo de Sylow de $\langle z\rangle F$ e, como $gzg^{-1} \in \langle z\rangle F$ e $|gzg^{-1}| = 2$ segue que $\langle gzg^{-1}\rangle$ também é um 2-subgrupo de Sylow de $\langle z\rangle F$ e, portanto, $\langle z\rangle$ e $\langle gzg^{-1}\rangle$ são conjugados, isto é, existem $a \in \langle z\rangle$ e $f \in F$ tais que

$$\langle gzg^{-1}\rangle = af\langle z\rangle f^{-1}a^{-1}.$$

Disso, obtemos $gzg^{-1} = afzf^{-1}a^{-1}$, ou ainda, $zg^{-1}af = g^{-1}afz$. Logo, $g^{-1}af \in C_G(z)$ o que implica em $g^{-1}af = z_1 \in C_G(z)$, donde $g = afz_1^{-1} \in C_G(z)F$. Portanto, $G \leq C_G(z)F$ e isso finaliza a prova de que $G = C_G(z)F$. Agora vamos mostrar que $C_G(z) \cap F = \{1_G\}$. Seja $a \in C_G(z) \cap F$. Assim, $a = zaz$ e, por (3.5), $a = za^{-1}z$, ou seja, $a = a^{-1}$. Logo $a = 1_G$ ou a tem ordem 2. Como $|F|$ é ímpar, devemos ter $a = 1_G$, mostrando a igualdade $C_G(z) \cap F = \{1_G\}$.

Desde que G não é um grupo de Frobenius, o Teorema 2.15 garante a existência de $d \in C_G(z)^{\#}$ tal que $C_G(d) \nsubseteq C_G(z)$. Desta forma, podemos tomar $hf \in C_G(d)$ de forma que $hf \notin C_G(z)$ com $h \in C_G(z)$ e $f \in F^{\#}$ e, assim, $hfd = dhf$, donde $fdf^{-1} = h^{-1}dh \in C_G(z)$. Logo, $d^{-1}(fdf^{-1}) = d^{-1}(h^{-1}dh) \in C_G(z) \cap F = \{1_G\}$ e, consequentemente, $f \in C_F(d)$. Portanto, $C_F(d) \neq \{1_G\}$. Tomemos $f^* \in C_F(d)^{\#}$ e notemos que $C_F(y_s) = \{1_G\}$, pois se existisse $f_1 \in C_F(y_s)^\#$, teríamos o seguinte caminho de x para y de tamanho 6

$$x \sim z \sim d \sim f^* \sim f_1 \sim y_s \sim y$$

o que não pode ocorrer, pois $d(x, y) > 8$. Agora de $C_F(y_s) = \{1_G\}$ e $[F : C_F(y_s)] = |y_s^F|$ resulta $|y_s^F| = |y_s F|$. Desta igualdade e o fato que $fy_s f^{-1} = y_s[y_s^{-1}, f] \in y_s F$ para todo $f \in F$, obtemos

$$\{fy_s f^{-1};\ f \in F\} = y_s F. \tag{3.6}$$

Como $G = C_G(z)F$, existem $a \in C_G(z)$ e $f \in F$ tais que $y_s = af$, ou seja, $y_s f^{-1} = a \in C_G(z)$. Além disso, por (3.6), existe $f_2 \in F$ satisfazendo $y_s f^{-1} = f_2 y_s f_2^{-1}$, ou seja, $y_s = f_2^{-1} y_s f^{-1} f_2 = (y_s f^{-1})^{f_2^{-1}}$. Observamos que

$$[y_s, f_2^{-1} z f_2] = [(y_s f^{-1})^{f_2^{-1}}, z^{f_2^{-1}}] = [a, x]^{f_2^{-1}} = 1_G$$

e $f_2^{-1} d f_2 \in C_G(f_2^{-1} z f_2)$, pois $d \in C_G(z)^\#$. Como F é abeliano,

$$C_F(f_2^{-1} d f_2) = f_2^{-1} C_F(d) f_2 = C_F(d).$$

Desta forma, desde que $f^* \in C_F(d)^\#$, segue a igualdade $[f^*, f_2 d f_2^{-1}] = 1_G$. Portanto, conseguimos construir o seguinte caminho de x para y de tamanho 7

$$x \sim z \sim d \sim f^* \sim (f_2^{-1} d f_2) \sim (f_2^{-1} z f_2) \sim y_s \sim y,$$

o que novamente não pode ocorrer, já que estamos supondo que $d(x, y) > 8$. Portanto, devemos ter necessariamente que a ordem de $|C_G(x_r)|$ é ímpar. Assim, como $C_G(x_r)F$ é um grupo de Frobenius com complemento $C_G(x_r)$ (pelo Lema 3.9), o Teorema 2.22 nos assegura que $C_G(x_r)$ é um grupo metacíclico. Isso conclui a prova. □

O fato de G ser solúvel desempenha um papel fundamental no próximo lema.

Lema 3.11. *Temos que $x_r \in J_2$ e J_2/F é cíclico.*

Demonstração: Mostremos inicialmente que $x_r \in J_2$. Suponhamos que o contrário ocorre, isto é, $x_r F \notin Z(F(G/F))$. Como $F(G/F)$ é nilpotente e G/F é solúvel, da Proposição 1.12 e Teorema 1.15 segue que $F(G/F)$ é o produto direto de seus subgrupos de Sylow e $C_{G/F}(F(G/F)) \leq F(G/F)$. Desta forma, existe um primo t e um t-subgrupo de Sylow X/F de $F(G/F)$ que não é centralizado por $x_r F$.

Afirmamos que $t \neq r$. De fato, suponha que $t = r$ e seja R um r-subgrupo de Sylow de $J\langle x_r\rangle$ tal que $x_r \in R$. Como $J \leq J\langle x_r\rangle$, temos $F(G/F) \leq J\langle x_r\rangle/F$, de onde $X/F \leq J\langle x_r\rangle/F$. Agora, desde que X/F é um r-subgrupo de $J\langle x_r\rangle$, existe um r-subgrupo de Sylow R_1/F de $J\langle x_r\rangle/F$ tal que $X/F \leq R_1/F$. Pelo Segundo Teorema de Sylow, os r-subgrupos de Sylow R_1/F e RF/F são conjugados, isto é, existe $jx_r^kF \in J\langle x_r\rangle/F$ com $j \in J$ e $k \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$\frac{X}{F} \leq \frac{R_1}{F} = \left(jx_r^kF\right)\frac{RF}{F}\left(x_r^{-k}j^{-1}F\right) = \frac{jx_r^kRFx_r^{-k}j^{-1}}{F} = \frac{jRFj^{-1}}{F}$$

e, assim,

$$\frac{j^{-1}Xj}{F} \leq \frac{RF}{F}.$$

Sendo $X/F \trianglelefteq J/F$, pois J/F é nilpotente, segue de imediato que $X/F \leq RF/F$. Isso nos diz que $x_r \notin Z(R)$, pois x_rF não centraliza X/F. Agora, como r divide $|Z(R)|$, pelo Teorema de Cauchy, existe $z_r \in Z(R)$ cuja ordem é r. Afirmamos que $\langle x_r\rangle \cap \langle z_r\rangle = \{1_G\}$. De fato, suponha que exista $a \in \langle x_r\rangle \cap \langle z_r\rangle$ com $a \neq 1_G$. Desta forma, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k_1, k_2 \leq r-1$ tais que $x_r^{k_1} = z_r^{k_2}$. Daí, como $z_r \in Z(R)$, segue que $\langle x_r^{k_1}\rangle \leq Z(R)$. Mas $\langle x_r^{k_1}\rangle = \langle x_r\rangle$ o que implica que $x_r \in Z(R)$ e isso não pode ocorrer. Logo, vale a igualdade $\langle x_r\rangle \cap \langle z_r\rangle = \{1_G\}$. É claro que $\langle z_r\rangle \leq Z(\langle x_r, z_r\rangle)$, donde segue que $\langle x_r, z_r\rangle$ é o produto direto de $\langle x_r\rangle$ e $\langle z_r\rangle$, o qual é isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_r$. Portanto $\langle x_r, z_r\rangle$ não é cíclico. Agora, é claro que $\langle x_r, z_r\rangle \leq C_G(x_r)$ e, assim, $\langle x_r, z_r\rangle$ está contido em algum r-subgrupo de Sylow P de $C_G(x_r)$. Pelos Lemas 3.9 e 3.10, $C_G(x_r)F$ é um grupo de Frobenius com complemento $C_G(x_r)$ de ordem ímpar. Desta forma, pelo Teorema 2.21, P deve ser cíclico. Mas, isso é um absurdo, pois sendo P cíclico deveríamos ter que $\langle x_r, z_r\rangle$ é cíclico também, o que não ocorre. Portanto, $t \neq r$.

Afirmamos que existe um t-subgrupo de Sylow T de J tal que $\langle x_r\rangle \leq N_G(T)$. De fato, sendo J solúvel, existe um r'-subgrupo de Hall U de J. Daí, de $r \nmid |F|$ e $F \trianglelefteq G$, concluímos que $F \leq U$ e U/F é um r'-subgrupo de Hall de $J/F = F(G/F)$. Assim, U/F é um produto direto de subgrupos de Sylow de U/F os quais são também subgrupos de Sylows de J/F. Logo, U é um subgrupo de Hall característico de J, o qual é normal em G. Assim, $U \trianglelefteq G$ e $x_r \in N_G(U)$. Disso, podemos definir o automorfismo ψ de U tal que $\psi(g) = g^{x_r}$ e considerar $\pi = \{p;\ p \text{ é primo e } p \text{ divide } |U|\}$. É fácil ver que $|\psi| = r$ e, assim, $\langle\psi\rangle$ é um π'-subgrupo de automorfismos de U, já que $r \notin \pi$. Logo, como U é um π-grupo e $t \in \pi$, pelo Teorema 1.19 existe um t-subgrupo de Sylow T de U (e, portanto, de J) o qual é $\langle\psi\rangle$-invariante. Em outras palavras $x_r \in N_G(T)$, de onde $\langle x_r\rangle \leq N_G(T)$, provando o afirmado.

Agora, vejamos que $C_{\langle x_r\rangle}(T) = \{1_G\}$. Suponhamos que exista $k \in \mathbb{Z}$ com $0 < k \leq r-1$ tal que $x_r^k \in C_{\langle x_r\rangle}(T)$. Desta forma, $\langle x_r\rangle = \langle x_r^k\rangle \subseteq C_G(T)$, de onde $x_r \in C_G(T)$. Logo, $x_rF \in C_{G/F}(TF/F) = C_{G/F}(X/F)$, pois J/F é nilpotente; mas isso contraria o fato que x_rF não centraliza X/F. Logo, $C_{\langle x_r\rangle}(T) = \{1_G\}$. Por outro lado, desde que V é um subgrupo normal de G, obtemos $\langle x_r\rangle T \leq N_G(V)$. Além disso, também temos $C_{\langle x_r\rangle T}(V) = \{1_G\}$, pois se $g \in C_{\langle x_r\rangle}(V)$, então $g \in C_G(V)$. Mas o Lema 3.5 nos diz que $C_G(V) = F$ e, então, $g \in F$. O Lema 3.6 nos assegura que $mdc(|J/F|, |F|) = 1$; de onde $t, r \notin \pi(F)$. Logo, $g = 1_G$, mostrando que $C_{\langle x_r\rangle T}(V) = \{1_G\}$. Resumindo, temos os seguinte fatos:

(i) p, r e t são primos distintos, pois $V \leq F$ e $r \neq t$;

(ii) $|\langle x_r\rangle| = r$, T é um t-grupo e V é um p-grupo abeliano elementar;

(iii) $\langle x_r\rangle \subseteq N_G(T)$ e $\langle x_r\rangle T \subseteq N_G(V)$;

(iv) $C_{\langle x_r\rangle}(T) = \{1_G\}$ e $C_{\langle x_r\rangle T}(V) = \{1_G\}$.

Assim, como $C_V(x_r) = \{1_G\}$, pois $V \leq F$ e $C_G(x_r) \cap F = \{1_G\}$, do Corolário 1.28 concluímos que $t = 2$, r é um primo de Fermat e T não é abeliano. Desta forma, T é um 2-grupo e $Z(T) \neq T$. Sabemos que $Z(T) \neq \{1_G\}$ e $Z(T)$ *char* T; assim, $\langle x_r\rangle \leq N_G(Z(T))$. De (3) e (4), obtemos também

$$\langle x_r\rangle Z(T) \leq N_G(V), \quad \text{e} \quad C_{\langle x_r\rangle Z(T)}(V) = \{1_G\}$$

Agora, como $Z(T)$ é abeliano, $t = 2$, r é um primo de Fermat e $C_V(x_r) = \{1_G\}$, do Corolário 1.27 resulta que $C_{\langle x_r\rangle}(Z(T)) \neq \{1_G\}$ e, consequentemente, $C_{\langle x_r\rangle}(Z(T)) = \langle x_r\rangle$, pois x_r tem ordem prima. Logo, $Z(T) \leq C_G(x_r)$ e, desta forma, $C_G(x_r)$ deve ter ordem par, o que contraria o Lema 3.9. Portanto, $x_r \in J_2$.

Finalmente mostremos que J_2/F é cíclico. Consideremos $\pi = \pi(J_2) - \pi(F)$. Como $r \notin \pi(F)$, segue que $\langle x_r\rangle$ é um π-grupo e, desta forma, pelo Teorema 1.16, existe um π-subgrupo de Hall C de J_2 tal que $\langle x_r\rangle \leq C$, isto é, $x_r \in C$. Agora, uma vez que $mdc(|J/F|, |F|) = 1$ é claro que $|CF| = |J_2|$ e $C \cap F = \{1_G\}$; logo, $J_2 = CF$. Por fim, é fácil ver que $C \cong J_2/F$ e, consequentemente, C é um grupo abeliano e $C \leq C_G(x_r)$. Desta forma, C é um subgrupo abeliano de $C_G(x_r)$. Entretanto, o Lema 3.9 juntamente com o Lema 3.10 nos diz em que $C_G(x_r)$ é um complemento de Frobenius de ordem ímpar para o grupo de Frobenius $C_G(x_r)F$ e, disso, podemos concluir pelo Teorema 2.21 que todos os subgrupos de Sylow de $C_G(x_r)$ são cíclicos, uma vez que a ordem de $C_G(x_r)$ é ímpar. Daí, de $C \leq C_G(x_r)$ e C abeliano resulta que C é um subgrupo cíclico, o que finaliza a prova de J_2/F ser um grupo cíclico, uma vez que $C \cong J_2/F$. □

Lema 3.12. *Os seguintes itens são válidos:*

(i) $G = N_G(\langle x_r \rangle)F$;

(ii) $N_G(\langle x_r \rangle) \cap F = \{1_G\}$;

(iii) $G/C_G(x_r)F$ *é cíclico de ordem dividindo* $r-1$.

Demonstração: O Lema 3.11 nos diz que $J_2/F = Z(F(G/F))$ é cíclico e $x_r \in J_2$. Disso, podemos concluir que $\langle x_r \rangle F \leq J_2$, ou ainda, $\langle x_r \rangle F/F \leq Z(F(G/F))$. Pela Proposição 1.5 devemos ter $\langle x_r \rangle F/F$ *char* $Z(F(G/F)$. Além disso, é conhecido que $Z(F(G/F))$ *char* $F(G/F)$ e $F(G/F) \trianglelefteq G/F$. Daí, pela Proposição 1.4, segue que $\langle x_r \rangle F/F \trianglelefteq G/F$ e, portanto, $\langle x_r \rangle F \trianglelefteq G$. O Lema 3.6 no diz que $mdc(r, |F|) = 1$, de onde $\langle x_r \rangle$ é um r-sugrupo de Sylow de $\langle x_r \rangle F$ e, pelo Argumento de Frattini, devemos ter

$$G = N_G(\langle x_r \rangle)\langle x_r \rangle F = N_G(\langle x_r \rangle)F$$

e, assim, o item (i) acontece. Para o item (ii), seja $a \in N_G(\langle x_r \rangle) \cap F$. Como $a \in N_G(\langle x_r \rangle)$, devemos ter que $a\langle x_r \rangle = \langle x_r \rangle a$. Em particular, existe $1 \leq k \leq r-1$ tal que $ax_r = x_r^k a$. Suponhamos $k \geq 2$. Desta forma, $x_r^{k-1} = (x_r^{-1}ax_r)a^{-1} \in F$, porém x_r^{k-1} possui ordem r, já que $k-1 \geq 1$, mas isso não pode ocorrer, pois $r \nmid |F|$. Desta forma, $k = 1$ e, consequentemente, $a \in C_G(x_r)$. Isso implica que $a \in C_G(x_r) \cap F = \{1_G\}$. Portanto, $N_G(\langle x_r \rangle) \cap F = \{1_G\}$, finalizando a prova do item (ii).

Dos itens (i), (ii) e pelo fato de $F \trianglelefteq G$, podemos concluir que G é o produto semidireto de F por $N_G(\langle x_r \rangle)$.

Para finalizar, vamos mostrar o item (iii). Para isso, lembramos que x_r tem ordem prima r e, assim, pode-se mostrar que $Aut(\langle x_r \rangle)$ é cíclico de ordem $r-1$. Vamos definir uma aplicação $\psi : G \longrightarrow Aut(\langle x_r \rangle)$ da seguinte forma: dado $g \in G$ existem únicos

$n \in N_G(\langle x_r \rangle)$ e $f \in F$ tais que $g = nf$ e, além disso, como $n \in N_G(\langle x_r \rangle)$ temos que $nx_rn^{-1} = x_r^k$, para algum $k \in \{1, \cdots, r-1\}$. Coloquemos

$$\psi(g) = \psi(nf) := \phi_k,$$

onde ϕ_k é o automorfismo de $\langle x_r \rangle$ tal que $\phi_k(x_r) = x_r^k$. Pela unicidade da escrita de cada elemento de G temos que ψ está bem definida. Agora, vamos mostrar que ψ é um homomorfismo com núcleo $C_G(x_r)F$. De fato, sejam $g_1 = n_1f_1 \in G$ e $g_2 = n_2f_2 \in G$ com $n_1, n_2 \in N_G(\langle x_r \rangle)$ e $f_1, f_2 \in F$. Existem inteiros k_1 e k_2 com $1 \leq k_1, k_2 \leq r-1$ tais que $n_1x_rn_1^{-1} = x_r^{k_1}$, $n_2x_rn_2^{-1} = x_r^{k_2}$ e, daí, $n_1n_2x_r(n_1n_2)^{-1} = x_r^{k_1k_2}$. Logo,

$$\psi(g_1g_2) = \psi(n_1f_1n_2f_2) = \psi(n_1n_2(n_2^{-1}f_1n_2)f_2) = \phi_{k_1k_2} = \phi_{k_1} \circ \phi_{k_2} = \psi(g_1) \circ \psi(g_2).$$

Portanto, ψ é de fato um homomorfismo e não é difícil ver que o núcleo de ψ é $C_G(x_r)F$. Assim, pelo Teorema do Isomorfismo, devemos ter

$$\frac{G}{C_G(x_r)F} \cong Im(\psi)$$

Portanto, podemos concluir que $G/C_G(x_r)F$ é cíclico de ordem dividindo $r-1$, como queríamos. □

Por conveniência, dados um subgrupo H de G e $g \in G$, colocamos $\overline{H} = HF/F$ e $\overline{g} = gF$. Percebemos que, pelo item (i) do lema anterior, $\overline{\langle x_r \rangle} \trianglelefteq \overline{G}$. A seguir apresentaremos outras propriedades envolvendo o subgrupo $C_G(x_r)$ que serão de extrema importância na demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.13. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(i) $\overline{C_G(x_r)} = C_{\overline{G}}(\overline{x_r})$;

(ii) $\overline{F(C_G(x_r))} = F(C_{\overline{G}}(\overline{x_r}))$ *e* $\overline{Z(F(C_G(x_r)))} = Z(F(C_{\overline{G}}(\overline{x_r})))$;

(iii) $F(\overline{G}) \leq F(C_{\overline{G}}(\overline{x_r}))$.

Demonstração: Mostremos inicialmente o item (i). É claro que $\overline{C_G(x_r)} \leq C_{\overline{G}}(\overline{x_r})$. Por outro lado, seja $\overline{g} \in C_{\overline{G}}(\overline{x_r})$. Então, pelo item (i) do lema anterior, existem $g_1 \in N_G(\langle x_r \rangle)$ e $f \in F$ tais que $g = g_1f$ e, consequentemente, $\overline{g} = \overline{g_1}$. Desta forma, desde que $\overline{g_1} \in C_{\overline{G}}(\overline{x_r})$, obtemos $x_r^{g_1}x_r^{-1} \in F$. Além disso, como $g_1 \in N_G(\langle x_r \rangle)$, temos $x_r^{g_1}x_r^{-1} \in C_G(x_r)$ e, assim,

$x_r^{g_1}x_r^{-1} \in C_G(x_r) \cap F = \{1_G\}$, ou seja, $g_1 \in C_G(x_r)$ e, portanto, $\overline{g} = \overline{g_1} \in \overline{C_G(x_r)}$. Portanto temos a igualdade desejada do item (i).

Por conta do item (i), podemos ver que a restrição do homomorfismo canônico $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ no subgrupo $C_G(x_r)$ é um isomorfismo de $C_G(x_r)$ para $C_{\overline{G}}(\overline{x_r})$ e, portanto, obtemos as igualdades desejadas do item (ii).

Por fim, mostremos o item (iii). Seja $\overline{g} \in F(\overline{G})$. Pelo Lema 3.11, $x_r \in J_2$ e, consequentemente, $[\overline{x_r}, \overline{g}] = \overline{1_G}$. Isso nos diz que $F(\overline{G}) \leq C_{\overline{G}}(\overline{x_r})$ e, portanto, como $F(\overline{G})$ é normal em $C_{\overline{G}}(\overline{x_r})$ e $F(\overline{G})$ é nilpotente, segue $F(\overline{G}) \leq F(C_{\overline{G}}(\overline{x_r}))$. □

Consideremos agora um subgrupo L de G que satisfaz as seguintes condições:

(i) $C_G(x_r) \leq L \leq N_G(\langle x_r \rangle)$;

(ii) LF é um grupo de Frobenius com complemento L e núcleo F.

Notemos que sempre existe um subgrupo L satisfazendo as condições acima, pois podemos tomar $L = C_G(x_r)$. Neste contexto, temos o seguinte resultado:

Lema 3.14. *Os seguintes itens são válidos:*

(i) $LF \trianglelefteq G$ *e* $L \trianglelefteq N_G(\langle x_r \rangle)$;

(ii) $N_G(\langle x_r \rangle) = N_G(L)$;

(iii) L *tem ordem ímpar.*

Demonstração: Mostremos inicialmente o item (i). Como $C_G(x_r) \leq L$ e, pelo Lema 3.12, o grupo $G/C_G(x_r)F$ é cíclico, concluímos que $LF/C_G(x_r)F \trianglelefteq G/C_G(x_r)F$, de onde $LF \trianglelefteq G$. Assim, se $a \in L$ e $n \in N_G(\langle x_r \rangle)$, existem $b \in L$ e $f \in F$ tais que $nan^{-1} = bf$ e, daí, $b^{-1}nan^{-1} = f \in N_G(\langle x_r \rangle) \cap F = \{1_G\}$. Logo $nan^{-1} \in L$, provando que $L \trianglelefteq N_G(\langle x_r \rangle)$

Mostremos agora o item (ii) é válido. Vimos no item anterior que $L \trianglelefteq N_G(\langle x_r \rangle)$ e disso obtemos $N_G(\langle x_r \rangle) \leq N_G(L)$. Por outro lado, dado $u \in N_G(L)$, temos $L^u = L$. Agora, pelo Lema 3.12, $G = N_G(\langle x_r \rangle)F$ e, assim, existem $n \in N_G(\langle x_r \rangle)$ e $f \in F$ tais que $u = fn$. Daí $L = L^u = L^{fn} = L^f$ e, consequentemente, $f \in N_{LF}(L) = L$ (veja Corolário 2.4). Logo, $f \in L \leq N_G(\langle x_r \rangle)$ e, disso, obtemos $f = 1_G$, uma vez que $N_G(\langle x_r \rangle) \cap F = \{1_G\}$. Portanto, $u = n \in N_G(\langle x_r \rangle)$, ou seja, $N_G(L) \leq N_G(\langle x_r \rangle)$, finalizando a prova de que $N_G(\langle x_r \rangle) = N_G(L)$.

Por fim, mostremos o item (iii). Suponhamos que L tenha ordem par. Então, como L é o complemento de Frobenius para o grupo de Frobenius LF, a Proposição 2.12 nos diz que L possui um único elemento de ordem 2, digamos z e, além disso, $z \in Z(L)$. Em particular, $[z, x_r] = 1_G$ e, isso implica que $z \in C_G(x_r)$, o que não pode ocorrer, pois $C_G(x_r)$ possui ordem ímpar. Portanto, L tem ordem ímpar, mostrando o item (iii). □

Finalizamos essa seção construindo um caminho $x_r \sim c \sim d \sim v$ para algum elemento $v \in V$, com $d \in G^\#$ e $c \in C_G(x_r)$, como o próximo lema irá nos dizer.

Lema 3.15. *Existem $d \in G^\#$, $c \in C_G(x_r)^\#$ e $v \in V^\#$ tais que*

$$x_r \sim c \sim d \sim v.$$

Além disso, c pode ser escolhido de ordem prima.

Demonstração: Vimos no Lema 3.9 que $C_G(x_r)F$ é um grupo de Frobenius e como G não é um grupo de Frobenius, temos $G \neq C_G(x_r)F$. Desta forma, podemos escolher um subgrupo L de G de forma que

$$C_G(x_r) \leq L \leq N_G(\langle x_r \rangle)$$

e L é maximal com respeito à inclusão no sentido de deixar LF um grupo de Frobenius com complemento L e núcleo F.

Mostraremos agora que existe $l \in L^\#$ de maneira que $C_G(l) \nleq L$. Para isso, suponhamos que $C_G(l) \leq L$, para todo $l \in L^\#$. Em particular

$$C_{N_G(\langle x_r \rangle)}(l) \leq L \quad \text{para todo } l \in L^\#$$

e, pelos Lemas 3.12 e 3.14, L é um subgrupo normal próprio de $N_G(\langle x_r \rangle)$. Assim, o Teorem 2.14 nos diz que $N_G(\langle x_r \rangle)$ é um grupo de Frobenius com núcleo L. Logo, tomemos a seguinte série de subgrupos normais de G:

$$F \trianglelefteq LF \trianglelefteq G = N_G(\langle x_r \rangle)F.$$

Agora, notemos que $G/F = N_G(\langle x_r \rangle)F/F \cong N_G(\langle x_r \rangle)$, donde G/F é um grupo de Frobenius, cujo núcleo tem ordem $|L|$. Assim, como $|LF/F| = |L|$ e $LF/F \trianglelefteq G/F$, pelo Lema 3.14, segue que LF/F é o núcleo de Frobenius de G/F. Disso e do fato que F é o núcleo para o grupo de Frobenius LF, podemos concluir que G é um grupo 2-Frobenius, o que não pode acontecer. Portanto, deve existir $l \in L^{\#}$ de forma que $C_G(l) \nleq L$. Seja $l \in L$ qualquer um desses elementos. Então, para cada $g \in C_G(l)$ é claro que $\langle l\rangle \leq L \cap L^g$. Agora, como $G = FN_G(\langle x_r\rangle)$, existem $n \in N_G(\langle x_r\rangle)$ e $f \in F$ tais que $g = fn$ e, assim, $L^g = L^{fn} = f(nLn^{-1})f^{-1} = L^f$, o que implica $\langle l\rangle \leq L \cap L^f$, ou seja $L \cap L^f \neq \{1_G\}$. Disso, obtemos $f = 1_G$, pois $f \in F$ e LF é um grupo de Frobenius cujo nucleo é F. Logo, $g = n$, mostrando que $C_G(l) \leq N_G(\langle x_r\rangle)$. Observamos que essa inclusão é válida para todo $l \in L^{\#}$.

Vimos que $C_G(l) \nleq L$ e $C_G(l) \leq N_G(\langle x_r\rangle)$; logo existe $n \in N_G(\langle x_r\rangle)\backslash L$ tal que $n \in C_G(l)$. Desta forma, podemos escolher $d_0 \in N_G(\langle x_r\rangle)\backslash L$ um elemento de ordem minima tal que $C_L(d_0) \neq \{1_G\}$. Notemos que $|L\langle d_0\rangle : L| = t$, para algum primo t, pois se esse índice fosse igual a ks, com $k, s \in \mathbb{Z}$ e $k, s \geq 2$, de

$$\left|\frac{\langle do\rangle}{L \cap \langle do\rangle}\right| = \left|\frac{L\langle do\rangle}{L}\right| \tag{3.7}$$

resultaria que $d_0^k \in N_G(\langle x_r\rangle)\backslash L$, com $\{1_G\} \leq C_L(d_0) \leq C_L(d_0^k)$ e $|d_0^k| < |d_0|$, contradizendo a escolha minimal de d_0. Pela maximalidade da escolha de L e pelo fato de

$$C_G(x_r) \leq L \leq L\langle d_0\rangle \leq N_G(\langle x_r\rangle),$$

segue que $L\langle d_0\rangle F$ não é um grupo de Frobenius com complemento $L\langle d_0\rangle$ e, pelo Teorema 2.15, existe $d \in L\langle d_0\rangle$ tal que $C_F(d) \neq \{1_G\}$. Agora, pelo fato de LF ser um grupo de Frobenius com complemento L e núcleo F, o subgrupo $C_F(l')$ é trivial para todo $l' \in L^{\#}$ e, assim, devemos ter que $\langle d\rangle \cap L = \{1_G\}$.

Veremos que $L\langle d_0\rangle = L\langle d\rangle$ e $|d| = t$. É claro que $L\langle d\rangle \leq L\langle d_0\rangle$. Por outro lado, como $d \in L\langle d_0\rangle$, existem $l_1 \in L$ e $s \in \mathbb{N}$ de forma que $d = l_1 d_0^s$. Neste caso, pelo fato de que $\langle d\rangle \cap L = \{1_G\}$ e $d \neq 1_G$, temos $d \notin L$ e, com isso, d_0^s não pode pertencer a L. Claramente $|d_0^s| \leq |d_0|$ e $C_L(d_0^s) \neq \{1_G\}$; logo, pela escolha minimal de d_0, devemos ter $\langle d_0\rangle = \langle d_0^s\rangle$. Disso, tomando $a \in L\langle d_0\rangle = L\langle d_0^s\rangle$, existem $l_2 \in L$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $a = l_2(d_0^s)^m$, donde

$$a = l_2(d_0^s)^m = l_2(l_1^{-1}d)^m \in L\langle d\rangle.$$

Portanto $L\langle d_0\rangle = L\langle d\rangle$. Dai, como $|L\langle d_0\rangle : L| = t$ e $L \cap \langle d\rangle = \{1_G\}$, a ordem de d deve ser t.

Afirmamos que $C_L(d) \neq \{1_G\}$. De fato, vamos dividir a prova em dois casos. No primeiro caso, suponhamos que t divide $|L|$ e tomemos T um t-subgrupo de Sylow de

$L\langle d\rangle$ que contém d. Seja $l_1d^n \in Z(T)^\#$, com $l_1 \in L$ e $n \in \mathbb{Z}$. De $[l_1d^n, d] = 1_G$, obtemos $[l_1, d] = 1_G$. Assim, se $l_1 \neq 1_G$, já temos $C_L(d) \neq \{1_G\}$. Se $l_1 = 1_G$, então $t \nmid n$, pois $l_1d^n \neq 1_G$ e, assim, $\langle d\rangle = \langle d^n\rangle \subseteq Z(T)$ e, consequentemente, $[d, l_2] = 1_G$, para todo $l_2 \in T \cap L$. Deste modo, $C_L(d) \neq \{1_G\}$, pois $T \cap L \neq \{1_G\}$. No segundo caso, resta-nos supor que $t \nmid |L|$. De (3.7) e $|L\langle d_0\rangle : L| = t$, resulta $d_0^t \in L$. Desta forma, se $d_0^t \neq 1_G$, considerando que $t \nmid |L|$, existiria um inteiro β tal que $d_o^{t\beta} = 1_G$ com $\beta \geq 2$ e $t \nmid \beta$. Mas, então, teríamos $C_L(d_0) \leq C_L(d_0^\beta)$ com $|d_0^\beta| < |d_0|$, o que contraria a escolha minimal de d_0. Logo, $|d_0| = t$. Como $t \nmid |L|$, $\langle d\rangle$ e $\langle d_0\rangle$ são t-subgrupos de Sylow de $L\langle d_0\rangle$ e, assim, conjugados, isto é, existe $g \in L\langle d_0\rangle$ tal que $\langle d\rangle = g\langle d_0\rangle g^{-1}$ e temos $d = gd_0^ig^{-1}$, para algum $i \in \{1, \ldots, t-1\}$. Agora, a afirmação segue do fato que $C_L(d) = gC_L(d_0^i)g^{-1} \supseteq gC_L(d_0)g^{-1}$. Portanto, $C_L(d) \neq \{1_G\}$.

Por fim, vamos mostrar que $C_V(d) \neq \{1_G\}$. De fato, notemos que se V é um t-subgrupo de G, então considerando o t-subgrupo $V\langle d\rangle$ de G, de modo análogo ao que fizemos no primeiro caso da prova de que $C_L(d) \neq \{1_G\}$, mostramos que $C_V(d) \neq \{1_G\}$. Resta-nos verificar quando V não é um t-subgrupo de G, ou seja, V é um p-subgrupo de G com $p \neq t$. É claro que $r \neq p$, pois r divide $|C_G(x_r)|$, p divide $|F|$ e $C_G(x_r)F$ é um grupo de Frobenius. Notemos também que $r \neq t$, pois, caso contrário, de $\langle d\rangle \cap \langle x_r\rangle \leq \langle d\rangle \cap L = \{1_G\}$, teríamos $|\langle d\rangle\langle x_r\rangle| = r^2$, com r primo; consequentemente, o subgrupo $\langle d\rangle\langle x_r\rangle$ seria abeliano, contradizendo o fato de $d \notin C_G(x_r)$. É claro que $\langle d\rangle \leq N_G(\langle x_r\rangle)$ e, pelo fato de V ser normal em G, $\langle d\rangle\langle x_r\rangle \leq N_G(V)$. Além disso, como $|d|$ é prima e $d \notin C_G(x_r)$, temos $C_{\langle d\rangle}(\langle x_r\rangle) = \{1_G\}$. Também, de $C_G(V) = F$ e Lema 3.14 item (ii), segue $C_{\langle x_r\rangle\langle d\rangle}(V) = \{1_G\}$. Desta forma, o Corolário 1.28 nos diz que $C_V(\langle d\rangle) \neq \{1_G\}$.

Para finalizar, seja $c \in C_L(d)$ escolhido de ordem prima. Como $c \in L$, L é um complemento de Frobenius em LF e $V \leq F$, temos

$$C_V(c) \leq C_F(c) = \{1_G\}$$

e, desde que $x_r, c \in L$ e L tem ordem ímpar, segue pela Proposição 2.23 que $[c, x_r] = 1_G$ e, assim, $c \in C_G(x_r)$. Portanto, escolhendo $v \in C_V(d)^\#$ temos

$$x_r \sim c \sim d \sim v,$$

como queríamos. $\square$

3.3 Prova do Teorema Principal

O intuito dessa seção será o de mostrar o Teorema 3.1, utilizando os resultados que foram apresentados na seção anterior. Para conveniência do leitor, enunciaremos novamente aquele teorema.

Teorema 3.6.[18, C. PARKER] Se G é um grupo solúvel finito com centro trivial, as seguintes afirmações são válidas:

(i) O grafo $\Gamma(G)$ é desconexo se, e somente se, G é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius.

(ii) Se o grafo $\Gamma(G)$ é conexo, então $\Gamma(G)$ tem diâmetro no máximo 8.

Primeiramente, mostraremos a condição necessária do item (i) por contrapositiva. Para isso, suponhamos que G não é nem um grupo de Frobenius nem um grupo 2-Frobenius. Notemos que se $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \leq 8$, então $\Gamma(G)$ é conexo. Suponhamos que $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) > 8$ e consideremos elementos $x, y \in G^{\#}$ tais que $d(x, y) > 8$, um elemento $x_r \in \langle x \rangle$ de ordem prima r e um elemento $y_s \in \langle y \rangle$ de ordem prima s, conforme a Observação 3.7. Verifiquemos que, assim como acontece com $C_G(x_r)^{\#}$, todos os elementos de $C_G(y_s)$ agem por conjugação livres de pontos fixos sobre F. Para isso, suponhamos que existam $f \in F^{\#}$ e $e \in C_G(y_s)^{\#}$ de forma que $[e, f] = 1_G$. Agora, o Lema 3.15 nos assegura da existência de elementos $c \in C_G(x_r)$, $d \in G^{\#}$ e $v \in V^{\#}$ tais que

$$x_r \sim c \sim d \sim v$$

é um caminho de x_r para v. Para finalizar, como $f \in F$ e $V^{\#} \subseteq Z(F)^{\#}$, devemos ter $[v, f] = 1_G$, então podemos construir o seguinte caminho de x para y:

$$x \sim x_r \sim c \sim d \sim v \sim f \sim e \sim y_s \sim y,$$

cujo comprimento é 8, contradizendo o fato de $d(x, y) > 8$. Portanto, $C_F(e) = \{1_G\}$ para todo $e \in C_G(y_s)^{\#}$. Por consequência, podemos utilizar os mesmos argumentos usados nas demonstrações dos Lemas 3.9, 3.10 e 3.11 para mostrar as seguintes afirmações:

(i) $C_G(y_s)F$ é um grupo de Frobenius com complemente $C_G(y_s)$ e nucleo F;

(ii) $mdc(s, |F|) = 1$;

(iii) $C_G(y_s)$ tem ordem ímpar;

(iv) $y_s \in J_2$.

Agora, pelo Lema 3.15, existem $c \in C_G(x_r)^{\#}$, $d \in G^{\#}$ e $v \in V^{\#}$, com ordem de c prima, tais que

$$x_r \sim c \sim d \sim v$$

é um caminho de x_r para v. O Lema 3.9 nos assegura que $C_G(x_r)$ possui ordem ímpar e, assim, temos pela Proposição 2.23 que $\langle c \rangle$ é o único subgrupo de $C_G(x_r)$ cuja ordem é $|c|$. Desta forma, obtemos $\langle c \rangle \trianglelefteq C_G(x_r)$ e, como $\langle c \rangle$ é nilpotente, temos $c \in F(C_G(x_r))$. Além disso, sabemos que $F(C_G(x_r))$ é nilpotente e, assim, o mesmo é o produto direto de seus subgrupos de Sylow, os quais são cíclicos, já que os subgrupos de Sylow de $C_G(x_r)$ o são (ver Teorema 2.21). Disso podemos ver que $c \in Z(F(C_G(x_r)))$, ou seja, $\overline{c} \in \overline{Z(F(C_G(x_r)))}$. Assim, pelo item (ii) do Lema 3.13, obtemos $\overline{c} \in Z(F(C_{\overline{G}}(\overline{x_r})))$. Ainda pelo Lema 3.13 item (iii), temos $F(\overline{G}) \leq F(C_{\overline{G}}(\overline{x_r}))$, de onde $Z(F(C_{\overline{G}}(\overline{x_r}))) \leq Z(F(\overline{G}))$. Portanto $\overline{c} \in Z(F(\overline{G}))$ e, consequentemente, $c \in J_2$.

Agora, consideremos o conjunto de primos $\pi = \pi(J_2) \setminus \pi(F)$. Desde que J_2 é solúvel, existem π-subgrupos de Hall H_1 e H_2 de J_2 tais que $y_s \in H_1$ e $c \in H_2$. Como os π-subgrupos de Hall são conjugados e $J_2 = FH_2$, existem $h_2 \in H_2$ e $f \in F$ satisfazendo

$$H_1 = fh_2H_2h_2^{-1}f^{-1} = fH_2f^{-1}.$$

Disso, resulta a inclusão $\langle y_s, c^f \rangle \leq H_1$. Desde que H_1 é um grupo abeliano, pois $J_2/F \cong H_1$, temos $[c^f, y_s] = 1_G$. Portanto, como $V \leq Z(F)$, existe o seguinte caminho entre x e y:

$$x \sim x_r \sim c \sim d \sim v = v^f \sim d^f \sim c^f \sim y_s \sim y$$

cujo comprimeiro é 8, contradizendo novamente o fato que $d(x, y) > 8$. Esta contradição finalmente nos diz que $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \leq 8$. Portanto, $\Gamma(G)$ é conexo, finalizando a prova da condição necessária do item (i) do Teorema 3.1.

Portanto, conforme a Observação 3.3 concluímos a prova do Teorema 3.1.

3.4 Exemplos de Diâmetro 8

Nesta seção, apresentaremos a ideia de como construir uma família de grupos solúveis G com centro trivial feita por C. Parker em [18] de forma que o grafo comutante de G é conexo e tem diâmetro igual a 8. Essa família de grupos nos mostra que o limite sobre o diâmetro de $\Gamma(G)$ obtido no Teorema 3.1 é excelente, no sentido que não pode ser minorado. No que segue, usaremos as mesmas notações das seções anteriores, mas aqui consideraremos que o primo r é maior ou igual a 5.

Suponhamos que q e t sejam números primos satisfazendo as seguinte condições:

(C_1) q é um primo ímpar tal que o primo r divide $q-1$, porém com a condição de que r^2 não divide $q-1$;

(C_2) t é um primo que divide $(q^r-1)/(q-1)$, mas não $q-1$.

Por exemplo, quando $r=5$, podemos tomar $q=11$ e $t=3221$. Notemos que, pelo fato de r dividir $q-1$, deve existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $q-1=rk$, ou seja, $q=rk+1$. Elevando ambos os lados dessa igualdade a r, obtemos

$$\begin{aligned} q^r=(rk+1)^r &= \tbinom{r}{0}(rk)^0+\tbinom{r}{1}(rk)^1+\cdots+\tbinom{r}{r}(rk)^r \\ &= 1+r^2k+\cdots+\tbinom{r}{r}(rk)^r. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$q^r-1=r^2k+\cdots+\binom{r}{r}(rk)^r.$$

Isso mostra que r^2 divide q^r-1.

Seja $\mathbb{F}=GF(q^r)$ o corpo finito com q^r elementos e consideremos a matriz:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dada uma matriz A, vamos denotar a sua transposta por A^T. É conhecido da literatura que

$$H=Sp(4,q^r)=\{A\in M_{4\times 4}(\mathbb{F});\ AJA^T=J\},$$

é um grupo com respeito à operação de multiplicação usual de matrizes o qual é chamado de **grupo simplético**. Seja

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & x & 1 & 0 \\ c & d & -a & 1 \end{pmatrix} ;\ a, b, c, d, x \in \mathbb{F},\ xa = b - d \right\}.$$

Então, com uma simples contagem, vemos que $|\mathcal{F}| = q^{4r}$. Além disso, não é difícil ver que $\mathcal{F}$ é um subgrupo de H e que $\mathcal{F}$ tem classe de nilpotência 3. Uma vez que r^2 divide $q^r - 1$, podemos escolher um elemento e do grupo multiplicativo $\mathbb{F}/\{0\}$ tal que $|e| = r^2$. Coloquemos $f = e^2$. Como $r \geq 5$, o conjunto $\{e^r, e^{-r}, f^r, f^{-r}\}$ tem cardinalidade 4. Assim, tomemos o seguinte elemento de H:

$$z = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix},$$

cuja ordem é r^2. Através de cálculos rotineiros e usando o fato que os elementos e^r, e^{-r}, f^r, f^{-r} são dois a dois distintos, mostramos as seguintes afirmações:

(i) $z \in N_H(\mathcal{F})$;

(ii) $C_{\mathcal{F}}(z^r) = \{1_H\}$.

Agora, desde que t divide $(q^r - 1)/(q - 1)$ e t não divide $q - 1$, podemos dizer que t divide $q^r - 1$. Desta forma, existe um elemento g no grupo multiplicativo $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ de ordem t. Tomemos o seguinte elemento de H:

$$c = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{-1} \end{pmatrix}.$$

É claro que c tem ordem t e não é difícil verificar que:

$$C_{\mathcal{F}}(c) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix} ;\ a \in \mathbb{F} \right\}.$$

Com uma contagem simples, vemos que $|C_{\mathcal{F}}(c)| = q^r$. Além disso, se $A \in C_{\mathcal{F}}(c)$, então

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ na_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -na_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, todo elemento de $C_{\mathcal{F}}(c)$ possui ordem q. Além disso, quaisquer dois de seus elementos comutam, mostrando que $C_{\mathcal{F}}(c)$ é um q-grupo abeliano elementar.

Seja β o automorfismo de $\mathbb{F}$ tal que $\beta(h) = h^q$, para todo $h \in \mathbb{F}$, o qual é conhecido como **automorfismo de Frobenius**. Observamos que β induz um automorfismo de H aplicando β às entradas das matrizes em H, o qual denotamos por α. Consideremos agora o seguinte homomorfismo:

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & \langle\alpha\rangle & \longrightarrow & Aut(H) \\ & \alpha & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \sigma(\alpha): & H & \longrightarrow H \\ & A & \longmapsto \alpha(A) \end{array} \end{array} .$$

A partir deste homomorfismo podemos construir o produto semi-direto externo de H por $\langle\alpha\rangle$, o qual vamos denotar por $H \rtimes \langle\alpha\rangle$. Lembremos que a operação em $H \rtimes \langle\alpha\rangle$ é definida da seguinte forma: se (A, α^{k_1}), $(B, \alpha^{k_2}) \in H \rtimes \langle\alpha\rangle$, então :

$$(A, \alpha^{k_1})(B, \alpha^{k_2}) = (A\sigma(\alpha^{k_1})(B), \alpha^{k_1} \circ \alpha^{k_2}) = (A\alpha^{k_1}(B), \alpha^{k_1+k_2})$$

Além disso, se $(A, \alpha^{k_1}) \in H \rtimes \langle\alpha\rangle$, temos

$$(A, \alpha^{k_1})^{-1} = (\sigma(\alpha^{-k_1})(A^{-1}), \alpha^{-k_1}) = (\alpha^{-k_1}(A^{-1}), \alpha^{-k_1}).$$

Coloquemos $x = (z, \alpha) \in H \rtimes \langle\alpha\rangle$ e, por um abuso de notação escreveremos $c = (c, 1_{\langle\alpha\rangle})$. Consideraremos também o subgrupo $D = \langle x, c\rangle$ de $H \rtimes \alpha$. Então, Parker mostrou que valem as seguinte afirmações:

(iii) x^r tem ordem r e comuta com c;

(iv) $c^x = c^q \neq c$, assim $[c, x] \neq 1_D$;

(v) $\langle x^r\rangle \leq Z(D)$.

Lembramos que c possui ordem t e, pelo item (iii), x possui ordem r^2. Desta forma, como t e r são primos distintos, obtemos que $\langle c\rangle \cap \langle x\rangle = \{1_{H\rtimes\langle\alpha\rangle}\}$. De (iv) segue que

$x \in N_{H\rtimes\langle\alpha\rangle}(\langle c\rangle)$ e, consequentemente, D é o produto semidireto de $\langle c\rangle$ por $\langle x\rangle$. Portanto, D tem ordem r^2t e

$$\langle x\rangle \cong \frac{D}{\langle c\rangle}.$$

Isso mostra que D é um grupo solúvel. Vimos no item (v) que $\langle x^r\rangle \leq Z(D)$ e, assim, $Z(D) \neq \{1_D\}$ e, portanto, D não pode ser um grupo de Frobenius (veja Proposição 2.25). Por um abuso de notação, vamos escrever o subgrupo $\mathcal{F} \times \{1_{\langle\alpha\rangle}\}$ de $H \rtimes \langle\alpha\rangle$ simplesmente como $\mathcal{F}$. Notemos ainda que valem as seguintes propriedades:

(vi) $x \in N_{H\rtimes\langle\alpha\rangle}(\mathcal{F})$;

(vii) $c \in N_{H\rtimes\langle\alpha\rangle}(\mathcal{F})$.

Pelos itens (vi) e (vii), podemos considerar o seguinte subgrupo $G = \mathcal{F}D$ de $H \rtimes \langle\alpha\rangle$. Este é o grupo que C. Parker mostrou possuir grafo comutante conexo de diâmetro 8. Notemos que a ordem de G é $q^{4r}r^2t$ e é solúvel, pois $\mathcal{F}$ e D são solúveis e $\mathcal{F} \trianglelefteq G$. Além disso, Parker mostrou o seguinte:

Lema 3.16. *As seguintes afirmações são válidas:*

(1) $C_G(x) = \langle x\rangle$;

(2) $C_G(x_r) = D$ *para todo elemento* x_r *de ordem* r *em* $C_G(x)$;

(3) $C_G(c^*) = \langle c, x^r\rangle C_F(c)$ *para algum elemento* c^* *de ordem* t *em* D;

(4) $Z(G) = \{1_{H\rtimes\langle\alpha\rangle}\}$;

(5) $\mathcal{F} = F(G)$.

Seguindo as notações acima, temos a seguinte.

Proposição 3.17. *Temos que* G *não é um grupo de Frobenius nem um grupo* 2*-Frobenius. Em particular,* $\Gamma(G)$ *é conexo.*

Demonstração: Faremos a prova por contradição. Suponhamos inicialmente que G é um grupo de Frobenius com complemento H e núcleo K. Pela Proposição 2.25, temos $\mathcal{F} = F(G) = K$ e, assim, deveríamos ter $C_G(f) \leq \mathcal{F}$, para todo $f \in F(G)^{\#}$ (ver Proposição 2.16). Mas isso não ocorre, uma vez que $C_{\mathcal{F}}(c) \neq \{1_G\}$ e $c \notin \mathcal{F}$. Neste caso, resta que G é um grupo 2-Frobenius. Assim, existem subgrupos próprios normais K_1 e K_2 de G tais que K_2 é um grupo de Frobenius com núcleo K_1 e G/K_1 é um grupo de Frobenius com núcleo K_2/K_1. Novamente pela Proposição 2.25, obtemos

$$K_1 = F(K_2) \;\text{ e }\; \frac{K_2}{K_1} = F\left(\frac{G}{K_1}\right)$$

e, como $K_1 \leq F(G) = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}/K_1$ é normal e nilpotente, segue $\mathcal{F}/K_1 \leq K_2/K_1$. Mas então, $\mathcal{F} \leq K_2$ e, isso implica que $\mathcal{F} \leq F(K_2) = K_1$, de onde $\mathcal{F} = K_1$. Daí $G/\mathcal{F} \cong D$ deve ser um grupo de Frobenius, o que não pode ocorrer. $\square$

Consideremos agora o seguinte elemento:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$$

e tomemos $y = x^g$. Temos que

$$y = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ e - f^{-1} & f - f^{-1} & f^{-1} & 0 \\ 0 & f - e^{-1} & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Lema 3.18. *Se $w \in C_{\mathcal{F}}(c)^{\#}$ e $w^* \in (C_{\mathcal{F}}(c)^g)^{\#}$, então $[w, w^*] \neq 1_{\mathcal{F}}$.*

Demonstração: Inicialmente, vamos encontrar a forma geral de $C_{\mathcal{F}}(c)^g$. Após alguns cálculos rotineiros, obtemos

$$C_{\mathcal{F}}(c)^g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2a & a & -a & 1 \end{pmatrix} ;\; a \in \mathbb{F} \right\}.$$

Desta forma, dados

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2a & a & -a & 1 \end{pmatrix} \in (C_{\mathcal{F}}(c)^g)^{\#} \;\text{ e }\; w^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 1 \end{pmatrix} \in C_F(c)^{\#}$$

com $a, b \in \mathbb{F} - \{0\}$, temos que

$$[w, w^*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2ab & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora de $a, b \in \mathbb{F} - \{0\}$ e $q \geq 2$, segue de imediato que $2ab \neq 0$ e, assim, $[w, w^*] \neq \{1_{\mathcal{F}}\}$, como queríamos mostrar. $\square$

Proposição 3.19. *A distância entre x e y é 8 e, consequentemente, o grafo $\Gamma(G)$ tem diâmetro 8.*

Demonstração: Vimos no Lema 3.17 que $\Gamma(G)$ é um grafo conexo e, portanto, existe um caminho de x para y. Desde que $C_G(a) \leq C_G(a^n)$ para todo inteiro n, podemos supor que em um caminho de x a y, os termos internos do caminho têm ordem prima. Pelo Lema 3.16 item (1), temos $C_G(x) = \langle x \rangle$ e, assim, como $C_G(y) = C_G(x)^g$, existe um caminho de x para y que tem a forma:

$$x \sim x^r \sim \cdots \sim (x^r)^g \sim x^g = y.$$

Além disso, de acordo com o item (2) do Lema 3.16, vale $C_G(x^r) = D$; logo a única maneira de avançar de x^r em direção a y por um caminho de menor comprimento é passar por um elemento de D de ordem t. Observamos que $\langle c \rangle$ é único grupo cíclico desta ordem em D e, por isso, podemos considerar:

$$x \sim x^r \sim c \sim \cdots \sim c^g \sim (x^r)^g \sim x^g = y.$$

Agora, o próximo vértice deve pertencer a $C_G(c)$ o qual, pelo Lema 3.16 item (3), é igual a:

$$C_G(c) = \langle x^r, c \rangle C_F(c).$$

Lembramos que $\langle x^r, c \rangle$ é abeliano de ordem rt e $|C_{\mathcal{F}}(c)| = q$. Também temos que os elementos de ordem prima que pertencem ao subgrupo $C_G(c)$ são conjugados aos elementos não triviais de $\langle x^r \rangle$, $C_F(c)$ ou $\langle c \rangle$. Além disso, os elementos de ordem t em $C_G(c)$ estão em $\langle c \rangle$ e, então, continuar a rota por um desses elementos não resultará em um caminho mais curto de x para y, uma vez que $C_G(c^*) = C_G(c)$, para todo $c^* \in \langle c \rangle^{\#}$. Isso mostra que não podemos prosseguir passando por um conjugado de um elemento de $\langle c\rangle$ se queremos um caminho entre x e y de menor comprimento. Suponhamos agora que:

$$x \sim x^r \sim c \sim (x^r)^h \tag{3.8}$$

para algum $h \in C_G(c)$. Pelo Lema 3.16 itens (1) e (2), temos $C_G(x_r) = D = \langle x, c\rangle$ para todo elemento x_r de ordem r em $\langle x\rangle$. Então, os vizinhos primos de $(x^r)^h$ estão no grupo abeliano $\langle x^r, c\rangle^h = \langle (x^r)^h, c\rangle$ e, portanto, não há como seguir essa rota sem passar por alguma potência de c. Desta forma, (3.8) não pode ser parte de um caminho mais curto entre x e y. Segue-se que devem existir $w \in C_F(c)^\#$ e $w^* \in C_F(c^g)^\#$ de modo que:

$$x \sim x^r \sim c \sim w \sim \ldots \sim w^* \sim c^g \sim (x^r)^g \sim x^g = y$$

Pelo Lema 3.18, não há escolhas de $w \in C_F(c)^\#$ e $w^* \in C_F(c^g)^\#$ tais que $[w, w^*] = 1$. Como F é nilpotente, seu centro não é trivial e, assim, temos $d(w, w^*) = 2$. Portanto, $d(x, y) = 8$. Como $\Gamma(G)$ é conexo, obtemos que $\Gamma(G)$ tem diâmetro 8 usando o Teorema 3.1. □

Finalmente, notamos que, como $q = 11$, $r = 5$ e $t = 3221$ satisfaz as condições (C_1) e (C_2), temos um exemplo explícito de um grupo solúvel com centro trivial de ordem $11^{20} \cdot 5^2 \cdot 3221$, que tem um grafo comutante de diâmetro 8.

3.5 Uma Extensão do Teorema de Parker

J. Vahidi e A. A. Telebi [24] observaram que se $x \sim y$ em $\Gamma(G)$, então $g \sim h$, para todos $g \in xZ(G)$ e $h \in yZ(G)$. Além disso, não é díficil ver que se $x \sim y$ em $\Gamma(G)$ e $xZ(G) \neq yZ(G)$, então $xZ(G) \sim yZ(G)$ em $\Gamma(G/Z(G))$. Entretanto, pode acontecer de termos $xZ(G) \sim yZ(G)$ em $\Gamma(G/Z(G))$ mas os vértices x e y não serem adjacentes em $\Gamma(G)$. Isso acontece quando $[x, y] \in Z(G)$ e $[x, y] \neq 1_G$. Diante deste fato, é de se esperar que se $Z(G) \cap K(G) = \{1_G\}$, onde $K(G) = \{[x, y];\ x, y \in G\}$, então informações sobre conexidade e diâmetro do grafo $\Gamma(G/Z(G))$ possam ser transferidas para $\Gamma(G)$. Isso foi comprovado por N. F. Beike *et al.* [4] no seguinte resultado, o qual estende o Teorema de Parker:

Teorema 3.20. *[4, N. F. BEIKE et al.] Seja G um grupo não abeliano finito e suponhamos que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $\Gamma(G)$ *é conexo se, e somente, se,* $\Gamma(G/Z(G))$ *é conexo;*

(ii) Se G *é solúvel e* $\Gamma(G)$ *é conexo, então* $\Gamma(G)$ *tem diâmetro no máximo* 8*;*

(iii) Se G *é solúvel, então* $\Gamma(G)$ *é desconexo se, e somente se,* $G/Z(G)$ *é ou um grupo de Frobenius ou um grupo* 2*-Frobenius.*

O restante dessa seção foi baseado no trabalho de N. F. Beike et al. [4]. O Teorema 3.20 citado acima é uma extensão do Teorema 3.1 onde a hipótese $Z(G) = \{1_G\}$ é substituída por $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$. É claro que se $Z(G) = \{1_G\}$, então $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$. Por outro lado, existem grupos solúveis finitos G tais que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$ e $Z(G) \neq \{1_G\}$. Por exemplo, podemos considerar o grupo $\mathbb{Z}_3 \times A_4$ o qual satisfaz

$$Z(\mathbb{Z}_3 \times A_4) = Z(\mathbb{Z}_3) \times Z(A_4) = \mathbb{Z}_3 \times \{1_{A_4}\} \;\text{ e }\; (\mathbb{Z}_3 \times A_4)' = \{1_{\mathbb{Z}_3}\} \times K,$$

onde K é o grupo de Klein. Assim, $Z(\mathbb{Z}_3 \times A_4) \cap (\mathbb{Z}_3 \times A_4)' = \{1_{\mathbb{Z}_3}\} \times \{1_{A_4}\}$.

De acordo com [6, Corolário 4.5], se G é um grupo finito tal que todos os seus subgrupos de Sylow são abelianos, então $Z(G) \cap G' = \{1_G\}$. Desta forma, outros exemplos podem ser encontrados na classe dos grupos não abelianos solúveis de ordens livres de cubos e que possuem centro não trivial.

Para dar ínicio à prova do Teorema 3.20 precisaremos estudar algumas relações entre $\Gamma(G)$ e $\Gamma(G/Z(G))$. Para isso, fixaremos que se $\phi : G \longrightarrow G/Z(G)$ é o homomorfismo canônico, então Z_2 denota o subgrupo normal de G que é a imagem inversa de $Z(G/Z(G))$ por ϕ.

O lema a seguir nos dá uma relação entre os elementos adjacentes em $\Gamma(G)$ e os elementos adjacentes em $\Gamma(G/Z(G))$.

Lema 3.21. *Sejam* G *um grupo não abeliano finito e* $g, h \in G \setminus Z_2$*.*

(i) Se $g \sim h$ *em* $\Gamma(G)$*, então* $gZ(G) \sim hZ(G)$ *em* $\Gamma(G/Z)$*;*

(ii) Se $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$ *e* $gZ(G) \sim hZ(G)$ *em* $\Gamma(G/Z(G))$*, então* $g \sim h$ *em* $\Gamma(G)$*.*

Demonstração: O item (i) é de fácil verificação. Mostraremos o item (ii). Suponhamos que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$ e $gZ(G) \sim hZ(G)$ em $\Gamma(G/Z(G))$. Então, $ghZ(G) = hgZ(G)$ e, assim, $[g, h] = gh(hg)^{-1} \in Z(G)$. Logo, $[g, h] \in G' \cap Z(G) = \{1_G\}$, ou seja, $g \sim h$ em

$\Gamma(G)$, finalizando a prova do item (ii). □

O próximo lema irá analisar a relação entre $\Gamma(G)$ e $\Gamma(G/Z(G))$ quando $Z_2 = Z(G)$ e, em particular, quando $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$.

Lema 3.22. *Seja G um grupo não abeliano finito e suponhamos que $Z(G) = Z_2$. Então*

(i) Se $\Gamma(G)$ é um grafo conexo, então o grafo $\Gamma(G/Z(G))$ também é conexo e satisfaz $\mathrm{diam}(\Gamma(G/Z(G))) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(G))$*;*

(ii) Se $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$ e o grafo $\Gamma(G/Z(G))$ é conexo, então o grafo $\Gamma(G)$ é conexo e satisfaz $\mathrm{diam}(\Gamma(G)) = \mathrm{diam}(\Gamma(G/Z(G)))$.

Demonstração: Mostraremos inicialmente o item (i). Suponhamos que $\Gamma(G)$ é conexo. Queremos mostrar que $\Gamma(G/Z)$ é conexo. Para isso, tomemos $gZ(G), hZ(G) \in V(\Gamma(G/Z(G))$. Desta forma $g, h \notin Z(G)$ e, assim, $g, h \in V(\Gamma(G))$. Sendo $\Gamma(G)$ conexo existe um caminho de g para h em $\Gamma(G)$, digamos

$$g = g_0 \sim g_1 \sim \cdots \sim g_s = h.$$

Do Lema 3.21, segue que

$$gZ(G) = g_0Z(G) \sim g_1Z(G) \sim \cdots \sim g_sZ(G) = hZ(G).$$

é um caminho de $gZ(G)$ para $hZ(G)$ em $\Gamma(G/Z(G))$. Portanto, gZ e hZ estão conectados e, pela arbitrariedade da escolha de gZ e hZ, segue que $\Gamma(G/Z(G))$ é conexo. Por construção, segue de imediato que o diâmetro de $\Gamma(G/Z(G))$ será menor ou igual ao diâmetro de $\Gamma(G)$, pois em alguns casos pode ocorrer de $g_iZ(G) = g_{i+1}Z(G)$, para algum $i = 0, \cdots, s-1$.

Mostraremos agora a veracidade do item (ii). Suponhamos que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$ e que $\Gamma(G/Z(G))$ é conexo. Mostraremos que $\Gamma(G)$ é conexo. Para isso, tomemos $g, h \in V(\Gamma(G))$ elementos quaisquer, porém distintos. Então temos dois casos para analisar: no primeiro caso, suponhamos que $gZ(G) = hZ(G)$ e, assim, é fácil ver que $[g, h] = 1_G$. Logo $g \sim h$ em $\Gamma(G)$ e, por isso, g e h estão conectados. No segundo caso, suponhamos que $gZ(G) \neq hZ(G)$. Sendo $\Gamma(G/Z(G))$ conexo, existe um caminho de $gZ(G)$ para $hZ(G)$, digamos

$$gZ(G) = g_0Z(G) \sim g_1Z(G) \sim \cdots \sim g_sZ(G) = hZ(G).$$

Desde que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$, segue do Lema 3.21 que

$$g = g_0 \sim g_1 \sim \ldots \sim g_s = h$$

é um caminho de g para h em $\Gamma(G)$. Desta forma, após analisarmos os dois casos, podemos concluir que $\Gamma(G)$ é conexo. Além disso, é claro que devemos ter $\mathrm{diam}(\Gamma(G))=\mathrm{diam}(\Gamma(G/Z(G)))$.
□

O resultado seguinte fornece uma condição suficiente para que o grafo $\Gamma(G)$ seja desconexo.

Lema 3.23. *Se G é um grupo não abeliano finito tal que $G/Z(G)$ é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius, então $\Gamma(G)$ é desconexo.*

Demonstração: Pelas Proposições 2.25 e 2.30, temos que um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius possui centro trivial. Desta forma, $Z(G/Z(G)) = \{1_G Z(G)\}$ e, assim,

$$Z_2 = \phi^{-1}(Z(G/Z(G))) = \phi^{-1}(\{1_G Z(G)\}) = Nuc(\phi) = Z(G).$$

Portanto, o Teorema 3.1 nos assegura que $G/Z(G)$ é desconexo. E assim, pela contra positiva do item (i) do Lema 3.22, obtemos que $\Gamma(G)$ é desconexo, como queríamos. □

A seguir mostraremos que se $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$, então $Z(G) = Z_2$. Para isso, para cada $g \in G$ defina

$$D_G(g) = \{d \in G;\ [d, g] \in Z(G)\}.$$

Vejamos que $D_G(g)$ é um subgrupo de G, para cada $g \in G$. De fato, sejam $d_1, d_2 \in D_G(g)$. Então

$$[d_1, g] \in Z(G) \quad \text{e} \quad [d_1, g] \in Z(G)$$

e isso implica que

$$[d_1 d_2, g]h = [d_2, g]^{d_1}[d_1, g]h = h[d_2, g]^{d_1}[d_1, g] = h[d_1 d_2, g],$$

para todo $h \in G$. Logo, $[d_1 d_2, g] \in Z(G)$, mostrando que $d_1 d_2 \in D_G(g)$. Pela finitude dos grupos considerados, segue que $D_G(g)$ é um subgrupo de G, como queríamos. Desta forma, levando em conta que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi(D_G(g)) &= \{\phi(d);\ d \in D_G(g)\} = \{dZ(G);\ [d, g] \in Z(G)\} \\ &= \{dZ(G);\ [d, g] = 1_G\} = \{dZ(G);\ [dZ(G), gZ(G)] = 1_G\} \\ &= C_{G/Z(G)}(gZ(G)), \end{aligned}$$

de onde

$$D_G(g)/Z(G) = C_{G/Z(G)}(gZ(G))$$

Além disso, desde que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$ é fácil ver que $D_G(g) = C_G(g)$, para todo $g \in G$ e, assim,

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g) = \bigcap_{g \in G} D_G(g).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \phi(Z(G)) = \phi\left(\bigcap_{g \in G} D_G(g)\right) &= \bigcap_{g \in G} \phi(D_G(g)) = \bigcap_{g \in G} D_G(g)/Z(G) \\ &= \bigcap_{g \in G} C_{G/Z(G)}(gZ(G)) = Z(G/Z(G)). \end{aligned}$$

Isso implica

$$Z(G) = \phi^{-1}(Z(G/Z(G))) = Z_2.$$

Estamos prontos para apresentar a demonstração do Teorema 3.20 o qual segue reenunciado a seguir:

Teorema 3.23. [4, N. F. BEIKE *et al.*] *Seja G um grupo não abeliano finito e suponhamos que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $\Gamma(G)$ *é conexo se, e somente, se,* $\Gamma(G/Z(G))$ *é conexo;*

(ii) Se G é solúvel e $\Gamma(G)$ é conexo, então $\Gamma(G)$ tem diâmetro no máximo 8;

(iii) Se G é solúvel, então $\Gamma(G)$ é desconexo se, e somente se, $G/Z(G)$ é ou um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius.

Demonstração: Suponhamos que $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$. Vimos que, neste caso, $Z(G) = Z_2$. Assim, pelo Lema 3.22, obtemos a veracidade do item (i).

Para o item (ii), notemos inicialmente que $\Gamma(G/Z(G))$ é conexo, pelo Lema 3.22. Observamos também que, pelo fato de $Z(G) = Z_2$, obtemos $Z(G/Z(G)) = \{1_G Z(G)\}$. Desta forma, como $G/Z(G)$ é solúvel, o Teorema 3.1 garante que $\Gamma(G/Z(G))$ tem diâmentro no máximo 8. Portanto, novamente pelo Lema 3.22 segue que $\Gamma(G)$ terá diâmetro no máximo 8, como queríamos.

Por fim, mostraremos o item (iii). Desde que $\Gamma(G)$ é desconexo, o Lema 3.22 no diz que $\Gamma(G/Z(G))$ é desconexo; logo, como $G/Z(G)$ é solúvel e $Z(G/Z(G)) = \{1_G Z(G)\}$ o

Teorema 3.1 nos assegura que $G/Z(G)$ é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius. Reciprocamente, suponha que $G/Z(G)$ é um grupo de Frobenius ou um grupo 2-Frobenius. Como $G/Z(G)$ é solúvel e $Z(G/Z(G)) = \{1_G Z(G)\}$, do Teorema 3.1 segue que $\Gamma(G/Z(G))$ é desconexo e, desta forma, pelo Lema 3.22, concluímos que $\Gamma(G)$ é desconexo. $\square$

Observação 3.24. *Em toda a construção feita nesta seção foi utilizada apenas a hipótese de que $Z(G) \cap K(G) = \{1_G\}$. Por conta disso, podemos reduzir a condição $G' \cap Z(G) = \{1_G\}$ do Teorema 3.20 simplesmente para $Z(G) \cap K(G) = \{1_G\}$.*

Referências Bibliográficas

[1] M. AKBARI, A. R. MOGHADDAMFAR, **The Existence or Nonexistence of Non-Commuting Graphs with Particular Properties**, J. Algebra Appl. 13 (2014) 1350064, 11 páginas.

[2] M. ASCHBACHER, **Finite group theory**, 2nd edn. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 10 (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[3] C. BATES, D. BUNDY, S. HART and P. ROWLEY, **Commuting involution graphs for sporadic simple groups**, J. Algebra 316 (2007), 849-868.

[4] N. BEIKE, R. CARLETON, D. COSTANZO, C. HEATH, M. LEWIS, K. LU, and J. PEARCE, **Extending Results of Morgan and Parker About Commuting Graphs.** Bulletin of the Australian Mathematical Society (2022), 105(1), 92-100.

[5] R. BRAUER, K. A. FOWLER, **On groups of even order**, Ann. of Math. (2) 62 (1955), 567-583

[6] A. M. BROSHI, **Finite Groups Whose Sylow Subgroups Are Abelian**, Journal of Algebra. 17 (1971), 74-82.

[7] P. J. CAMERON, **Graphs defined on groups**, preprint (arXiv:2102.11177), disponível em: https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.11177, (2021).

[8] W. FEIT, J. G. THOMPSON, **Solvability of groups of odd order**, Pacific J. Math. 13 (1963), 773–1029.

[9] G. FROBENIUS, **Über auflösbare Gruppen**, IV., Berl. Ber. (in German): 1216–1230, (1901).

[10] M. GIUDICI, C. PARKER, **There is no upper bound for the diameter of the commuting graph of a finite group**, J. Combin. Theory Ser. A 120 (2013) 1600–1603.

[11] M. GIUDICI, A. POPE, **On bounding the diameter of the commuting graph of a group**, J. Group Theory 17 (2014), 131-149

[12] L. C. GROVE, **Groups and Characters**, John Wiley e Sons, New York, 1997.

[13] D. GORENSTEIN, **Finite Groups.** New York: Chelsea n Publishing Company, 2.ed., (1980).

[14] A. IRANMANESH, A. JAFARZADEH, **On the commuting graph associated with the symmetric and alternating groups**, J. Algebra Appl. 7 (2008) 129–146.

[15] I. M. ISAACS , **Finite Group Theory.** Vol. 92. American Mathematical Soc., 2008.

[16] P. PERUMAL, **On the Theory of the Frobenius Groups**. Monatsh Math 187, 603–615, (2018).

[17] G. L. MORGAN and C. W. PARKER, **The Diameter of the Commuting Graph of a Finite Group with Trivial Centre**, Journal of Algebra 393 (2013), 41-59.

[18] C. PARKER , **The commuting graph of a soluble group**, Bull. Lond. Math. Soc. 45 (4) (2013) 839–848.

[19] D. E. PASSAMN, **Permutation Groups**, Benjamin, New York, 1968.

[20] A. S. RAPINCHUK , Y. SEGEV and G. M. SEITZ. **Finite quocient of the multiplicative group of a finite division algebra are solvable**. J. Amer. Math. Soc. 15(4) (2002).

[21] D. J. S. ROBINSON, **A Course in the Theory of Groups.** New York: Spring-Verlag, (1993).

[22] J. J. ROTMAN, **An Introduction to the Theory of Groups.** New York: Spring-Verlag, 4.ed., (1994).

[23] Y. SEGEV, **The commuting Graph of minimal Nonsolvable Groups**, Geometriae Dedicata 88: 55-66, 2001.

[24] L. VAHIDI, A. A. TALEBI, **The Commuting graphs on groups D_{2n} and Q_n**, J. Math. Comput. Sci. 1 (2010), 123-127.