

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

MARCOS VINICIUS FAGUNDES PADILHA

**Regularidade e decaimento para equações de
Navier-Stokes postas em domínios limitados e
ilimitados.**

Maringá - PR
2020

MARCOS VINICIUS FAGUNDES PADILHA

**Regularidade e decaimento para equações de
Navier-Stokes postas em domínios limitados e
ilimitados.**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de doutor.

Orientador: Nikolai Andreevitch Larkin;
Co-orientador: Gleb Germanovitch Doronin.

Maringá - PR
2020

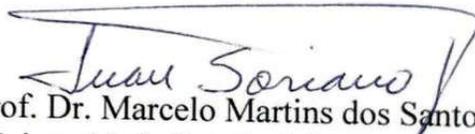
REGULARIDADE E DECAIMENTO PARA EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES POSTAS EM
DOMÍNIOS LIMITADOS E ILIMITADOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



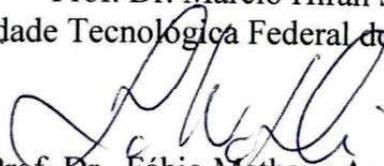
Prof. Dr. Nikolai Andreevitch Larkine
Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Márcio Hiran Simões
Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Apucarana



Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Cícero Lopes Frota
Universidade Estadual de Maringá

Aprovado em: 13 de fevereiro de 2020.

Local de defesa: Anfiteatro Adelbar Antonio Sampaio, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

P123r Padilha, Marcos Vinicius Fagundes
Regularidade e decaimento para equações de Navier-Stokes postas em domínios limitados e ilimitados / Marcos Vinicius Fagundes Padilha. -- Maringá, 2020.
53 f. : il.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Nikolai Andreevitch Larkin.
Coorientador: Prof^o. Dr^o. Gleb Germanovitch Doronin.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2020.

1. Navier-Stokes. 2. Domínios Lipschitzianos. 3. Comportamento assintótico. 4. Regularidade. 5. Lipschitz domains. 6. Asymptotic behavior. 7. Regularity. I. Larkin, Nikolai Andreevitch. II. Doronin, Gleb Germanovitch, orient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. IV. Título.

CDD 22.ed. 515.353

Edilson Damasio CRB9-1.123

AGRADECIMENTOS

Aos professores e toda a equipe do Programa de Pós-Graduação em Matemática, pelo conhecimento agregado nas disciplinas, seminários e nos corredores sempre que precisei.

À minha família que me acolheu nos momentos mais difíceis.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Marcos.

“Manuscritos não se consomem pelo fogo”
- Mikhail Bulgákov.

RESUMO

A presente tese aborda problemas de valores iniciais e de fronteira para as equações de Navier-Stokes consideradas em diferentes domínios. Nossos resultados incluem a existência e unicidade de soluções fortes através de uma nova abordagem, assim como o decaimento exponencial e eventuais regularidades adicionais nas normas de H^2 e “efeito de suavização”. Para o caso bidimensional, são considerados domínios suaves, tanto limitados como ilimitados e domínios Lipschitzianos, especificamente retângulos e semi-faixas. No caso tridimensional, são apresentados resultados similares, considerando uma restrição ao tamanho do domínio, neste caso são considerados domínios suaves, limitados e ilimitados, e também paralelepípedos limitados e ilimitados.

Palavras-chave: Navier-Stokes, domínios Lipschitzianos, comportamento assintótico, regularidade.

ABSTRACT

The present thesis deals with initial-boundary value problems for the Navier-Stokes equations posed in some domains. Our results include the existence and uniqueness of strong solutions through a new approach, exponential decay and regularities in the H^2 -norm and “smoothing effect”. For the two-dimensional case, smooth domains, bounded and unbounded, and Lipschitz domains, specifically, rectangles and half-strips are considered. In the three-dimensional case, similar results are presented, considering a restriction on the size of the domain, in this case we consider smooth domains, bounded and unbounded, and parallelepipeds, bounded and unbounded.

Keywords: Navier-Stokes, Lipschitz domains, asymptotic behavior, regularity.

SUMÁRIO

1	Introdução	2
1.1	Fluidos	2
1.2	Boa colocação e decaimento de Soluções Fortes	4
1.3	Regularidade de Soluções	5
2	Preliminares	7
2.1	Notações	7
2.1.1	Espaços de Sobolev	7
2.2	Resultados Auxiliares	8
2.2.1	Funções Solenoidais	12
2.3	Definição de Solução	14
3	Problemas em Duas Dimensões	16
3.1	Regularidade e decaimento em retângulos	19
3.2	Regularidade e decaimento em domínios suaves e limitados	26
3.3	Regularidade e decaimento em domínios suaves e ilimitados	29
4	Problemas em Três Dimensões	32
4.1	Regularidade e decaimento em paralelepípedos	37
4.2	Decaimento de soluções globais fortes em domínios suaves e limitados	44
4.3	Decaimento de soluções globais fortes em domínios suaves e ilimitados	46

Introdução

Neste capítulo faremos um breve histórico de algumas equações que modelam a dinâmica de fluidos e seus significados físicos. Nós apresentaremos o sistema que trabalhamos na tese e algumas noções físicas dos termos da equação, citaremos alguns resultados clássicos já obtidos, o problema principal em que trabalhamos, as dificuldades a serem abordadas, os métodos utilizados e as inspirações que nos levaram a eles.

1.1 Fluidos

A busca por justificativas teóricas na mecânica de fluidos atrai a atenção de cientistas de diversos campos, pois apesar de os modelos serem utilizados na prática, se tratando do embasamento teórico e desenvolvimento de métodos e justificativas matemáticas ainda buscamos algumas respostas. Apesar de avanços teóricos significativos, ainda há uma grande variedade de questões aguardando suas respostas. Em relação a fluidos, as equações de Navier-Stokes se destacam como um dos modelos mais conhecidos.

A importância das provas teóricas mencionadas acima é tão marcante que desde o ano 2000, o Clay Mathematics Institute oferece um prêmio no valor de um milhão de dólares para sete problemas matemáticos considerados divisores de águas em seus campos de pesquisa, chamados “Problemas do Milênio”. O sexto problema proposto é provar a existência e suavidade de soluções (ou encontrar um contra exemplo que mostre que a formulação utilizada pela ciência não está bem colocada) para as equações de Navier-Stokes em três dimensões [5]. Apesar de não estarmos resolvendo o problema do milênio, acreditamos que as novas ferramentas apresentadas possam auxiliar na expansão da teoria.

Podemos considerar como um fluido, um meio contínuo que se deforma quando submetido a um determinado tipo de tensão ou força externa. Podemos rapidamente citar líquidos e gases pela certeza de observarmos sua movimentação todos os dias de nossas vidas. Quanto às aplicações científicas, elas estão entre as mais variadas. Na construção de automóveis e aviões, análises de poluição, simulação de movimentos de gases e líquidos em jogos e filmes de computação gráfica, movimento sanguíneo, etc.

O modelo inicial para descrever a velocidade de um fluido iniciou-se com as equações

de Euler, onde eram considerados fluidos incompressíveis, com o atrito interno desprezado e sem a ação de forças externas. Na notação moderna, a qual utilizaremos neste trabalho, ela seria escrita na forma simplificada como

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) + \nabla p = 0, \quad (1.1)$$

onde $u(x, t)$ trata-se de um campo vetorial (incógnita) o qual fornece a velocidade do fluido, ρ designa densidade, $p(x, t)$ é uma função escalar que descreve a pressão em determinado ponto x nas dimensões espaciais $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e instante de tempo $t > 0$. Uma solução pode se referir apenas a $u(x, t)$ principalmente porque é tal função que pode descrever o movimento do fluido e é a mais utilizada nas simulações. Para a análise matemática, compete trabalharmos questionando se o problema é bem posto, ou seja, se fornecido o termo $\rho > 0$ e acrescentadas as condições $u(x, 0) = u_0(x)$ e $\nabla \cdot u = 0$, verificar se será possível obter um par (u, p) que solucionará (1.1).

As primeiras versões das equações que após aprimoradas derivaram para o que hoje conhecemos como equações de Navier-Stokes são datadas de 1821 e podem ser encontradas em [29]. Pela primeira vez foi considerada a fricção nas partículas dentro de uma equação que modelava o movimento de fluidos. Após considerações feitas por renomados físicos-matemáticos como Cauchy, Poisson e Stokes, podemos enunciar as equações de Navier-Stokes na notação moderna como

$$\rho(u_t + u \cdot \nabla u) = f - \nabla p + \nu \Delta u,$$

onde $u(x, t)$ é um campo vetorial que indica a velocidade do fluido, $f(x, t)$ é uma campo vetorial que acrescenta uma aceleração oriunda de forças externas, $p(x)$ é uma função escalar que indica a pressão, $\nu > 0$ uma constante que se refere à viscosidade e $\rho > 0$ à densidade. Para os fins da análise matemática (justificativas teóricas como existência e unicidade de soluções), consideramos a densidade constante $\rho = 1$ e para simplificar os cálculos utilizamos a força externa $f = 0$, uma vez que se considerada com suavidade suficiente não irá alterar o resultado significativamente. Também adicionamos condições nas fronteiras, as quais fisicamente não comprometem o modelo e divergência livre $\nabla \cdot u = 0$, o que caracteriza a conservação de massa para um fluido incompressível. Assim obtemos o sistema que estamos interessados

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty); \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty); \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, \infty); \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ e Ω será considerado um domínio aberto e conexo bidimensional ou tridimensional. Em alguns casos iremos considerar Ω como um domínio ilimitado em uma das suas dimensões e adicionaremos a condição $u(x, t) \rightarrow 0$ quando $x_1 \rightarrow \infty$.

1.2 Boa colocação e decaimento de Soluções Fortes

Os principais problemas sobre existência e unicidade de soluções para (1.2) com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sendo um domínio com fronteira suave são considerados resolvidos e uma abordagem completa pode ser encontrada em livros clássicos de O. Ladyzhenskaya [17], J. L. Lions [25] e R. Temam [33]. Se tratando do problema tridimensional, a unicidade de soluções fracas para (1.2) foi provada desde que em um intervalo de tempo limitado (soluções locais) ou se a norma do dado inicial for suficientemente pequena [7, 10, 11, 15, 19, 24, 26].

Em 1934, J. Leray [24] formalizara o problema para o decaimento da energia de soluções, isto é, é possível controlar o comportamento da integral $\int_{\Omega} u^2(t) dx$ por um limitante superior à medida que $t \rightarrow \infty$? Tal problema atrai a atenção de pesquisadores da matemática pura e aplicada [3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 19, 24, 33] e verifica-se que em muitos trabalhos, a resposta é sim, mas o termo que majora a energia está associado ao primeiro autovalor do operador $A = P\Delta u$ onde P é a uma projeção sobre o espaço das funções solenoidais de $L^2(\Omega)$. Além do mais, o procedimento não nos permite obter tais resultados para domínios ilimitados ou para domínios com fronteiras de geometria complexa, por exemplo, sem fronteira de classe C^2 .

Observando os resultados em [9], destacamos que

$$\|u\|(t) \leq C(\|u_0\|)e^{-Kt}, \quad (1.3)$$

onde $K > 0$ depende do primeiro autovalor do operador P citado acima e do termo de viscosidade ν . Nesta tese, estamos interessados em explorar a ideia de obter uma estimativa como (1.3) sem a dependência da constante λ a qual é considerada abstrata e não nos fornece informação adicional em relação ao decaimento. Conseguimos explorar tal ideia após notarmos abordagem similar para a equação de Zakharov-Kuznetsov [22] em duas dimensões. O método se mostrou eficaz onde o domínio considerado foi uma semifaixa, a qual é um domínio ilimitado, resultado que não poderia ser obtido através dos métodos em [9].

Após ter investigado os resultados conhecidos sobre decaimento exponencial para soluções fracas da equação de Korteweg-de-Vries, durante a dissertação de Mestrado do autor [30], seria natural seguirmos com a pesquisa no campo das equações dispersivas, assim, nos primeiros anos do trabalho no doutorado, focamos no objetivo de se obter o decaimento para soluções fortes da equação de Zakharov-Kuznetsov (a qual é uma generalização da equação KdV) utilizando características geométricas do domínio. Tal objetivo pôde ser alcançado para 3 dimensões [20] com um domínio ilimitado, ou seja, obtemos uma desigualdade do tipo

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ce^{-\chi t}, \quad (1.4)$$

onde χ é uma constante positiva que depende das dimensões do domínio e C é uma constante que depende de $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$ e de ν . Vale ressaltar que, os resultados obtidos com esse objetivo em 3 dimensões estabelecem restrições à energia do sistema no momento inicial, ou seja, a norma de u_0 no espaço $H^2(\Omega)$ deve ser suficientemente pequena.

Na sequência, decidimos então verificar a eficiência do método utilizado por N. Larkin e E. Tronco [22] e aplicado em [20], agora para o sistema de Navier-Stokes. Mais especificamente, o objetivo era obter uma estimativa crucial para a norma de u_t através de características geométricas do domínio. Resultados nessa direção podem ser encontrados em [13, 34].

Veremos que para o caso bidimensional, como esperado, é possível obter uma estimativa como (1.4), adicionando que χ também inclui dependência pela constante ν em (1.2). Tal estimativa nos permite estender o comportamento assintótico quando $t \rightarrow \infty$ para a norma de u em $H_0^1(\Omega)$ o que conseqüentemente caracteriza o decaimento de $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ para soluções fortes e então a unicidade das soluções nessa classe.

Para o caso tridimensional o método também foi utilizado com sucesso, porém dessa vez assumimos restrições ao tamanho máximo do domínio, ao menos em uma das três dimensões. Assim, é possível afirmar que para qualquer dado inicial, se o tamanho do domínio for relativamente pequeno em uma das dimensões, podemos provar existência global e unicidade para soluções fortes do sistema tridimensional e o seu decaimento na norma do espaço $H_0^1(\Omega)$. Ressaltamos que os resultados não exigem que os dados iniciais sejam pequenos em algum sentido.

1.3 Regularidade de Soluções

Uma vez que nas estimativas do tipo (1.4), tanto para a equação de Zakharov-Kuznetsov, quanto para resultados conhecidos em equações de Navier-Stokes [15, 17, 33], a constante C depende da norma de u_0 em $H^2(\Omega)$, então se faz importante verificar se a solução $u(x, t)$ do problema (1.2) conserva a regularidade do dado inicial u_0 . Nosso trabalho também abordou tais tipos de problemas, obtendo resultados particulares para diferentes tipos de domínios.

Para o problema da regularidade posto em domínios limitados e suaves de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , nosso método se resume a verificar se o sistema (1.2) satisfaz as hipóteses de um resultado conhecido de L. Cattabriga para equações estacionárias [4]. Assim, viria a ser possível obter desigualdades do tipo

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq C e^{-\chi t}, \quad (1.5)$$

onde χ é uma constante positiva que depende das dimensões do domínio e C é uma constante que depende de $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Em busca de saber se seria possível obter tal regularidade para domínios sem a suavidade na fronteira, consideramos um domínio limitado e Lipschitziano. Primeiramente generalizamos um resultado de A. Koshelev [16] e então obtivemos uma estimativa do tipo (1.5) para Ω sendo um retângulo, e mais tarde, para o problema em três dimensões, onde o Ω foi considerado um paralelepípedo. Assim, dadas as condições estabelecidas na obtenção do decaimento e da unicidade de soluções fortes, tais soluções são também regulares.

No caso de domínios ilimitados, tanto em duas, como em três dimensões, não obtivemos desigualdades do tipo (1.5) através da nossa abordagem. Porém, apesar de não termos mostrado

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; X),$$

com $X = H^2(\Omega)$, conseguimos provar uma regularidade para X melhor do que $X = H_0^1(\Omega)$, ou seja, obtivemos resultados de regularidade para uma solução forte, mesmo em domínios ilimitados. Para tal, fizemos o uso do cálculo da norma de u em $H^2(\Omega)$ em subdomínios de Ω . Em domínios suaves e ilimitados foi possível verificar inclusive que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_{loc}^2(\Omega))$.

Adicionalmente, trabalhamos em outro sentido na busca de regularização para soluções, inspirados pelo resultado de T. Kato [14] para equação de Korteweg-de-Vries generalizada (gKdV), onde foi possível provar que com dados iniciais $u_0 \in H^s(\Omega)$ para $s > 0$, a solução se verificava

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^{s+1}),$$

ou seja, em algum sentido, a solução para $t > 0$ é mais regular do que o dado inicial. Assim, nossa pergunta foi: enunciado o problema (1.2) com dados iniciais $u_0 \in H^2(\Omega)$, é possível provar que

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega))?$$

Para domínios limitados a resposta foi positiva e no caso de domínios ilimitados, provamos que quando não para todo o domínio Ω , para subdomínios contidos no interior de Ω , a solução se mostra mais regular do que o dado inicial no sentido de T. Kato [14].

A tese estará dividida na seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta as notações utilizadas, resultados clássicos e algumas demonstrações. O Capítulo 3 aborda os resultados obtidos em duas dimensões, obtendo as estimativas a priori em cada caso e replicando os métodos teóricos contidos na literatura [19, 33]. Os resultados em três dimensões e o seu desenvolvimento detalhado, incluindo os passos intermediários do método de Faedo-Galerkin, estarão no Capítulo 4.

Preliminares

2.1 Notações

Nesta seção iremos definir as notações para os principais espaços de Lebesgue e Sobolev que serão utilizados durante todo o trabalho. Também definiremos alguns espaços auxiliares que são essenciais durante o texto.

2.1.1 Espaços de Sobolev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e conexo, onde $n = 2$ ou $n = 3$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Utilizaremos as notações usuais de espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$, e para espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ (ver [33]), isto é, as funções mensuráveis tais que as normas definidas abaixo são limitadas.

(i) Para funções vetoriais $u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right) dx,$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)|,$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{0 \leq \alpha \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Se $p = 2$, escreveremos $W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$, que é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$[[u, v]] = \sum_{|j| \leq k} (D^j u, D^j v).$$

e norma

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 = [[u, u]].$$

(ii) Para funções escalares $f(x)$,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |f(x)|^p dx,$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)|,$$

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{0 \leq \alpha \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

O produto escalar e a norma em $L^2(\Omega)$ serão denotados respectivamente por (\cdot, \cdot) e $\|\cdot\|$.

Vale lembrar também a notação para o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis definidas no conjunto Ω , como $C^\infty(\Omega)$. Se considerarmos as funções de $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto, isto é, onde o conjunto dos pontos onde o valor da função não é igual a zero tem fecho compacto e contido em Ω , utilizamos a notação $C_0^\infty(\Omega)$.

Como $C_0^\infty \subset H^1(\Omega)$ (ver [1]), assim o fecho de C_0^∞ na norma de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ será denotado como $H_0^1(\Omega)$. O produto interno padrão em $H_0^1(\Omega)$ poderá ser denotado por $[\cdot, \cdot]$. Vale ressaltar que se Ω for um conjunto limitado, $H_0^1(\Omega)$ é também um espaço de Hilbert se for associado com o produto escalar $((\cdot, \cdot))$, definido abaixo

$$((u, v)) = \sum_{j=1}^n (D_j u, D_j v). \quad (2.1)$$

Se para cada $t \in (0, T)$, a função $x \mapsto u(x, t) \in X$, onde X é um espaço de Banach. O espaço $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$, consistirá de classes das funções mensuráveis com domínio $(0, T)$ e imagem no conjunto X , ou seja, das funções $u : (0, T) \rightarrow X$, tais que

(i) para $1 \leq p < +\infty$:

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)}^p = \left(\int_0^T \|u\|_X^p(t) dt \right) < \infty.$$

(ii) para $p = \infty$:

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess } \|u\|_X(t) < \infty.$$

2.2 Resultados Auxiliares

Lema 2.1 (Desigualdade Diferencial de Gronwall). *Consideremos o intervalo $I = [t_0, t_1]$. Suponhamos que $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sejam funções integráveis. Seja $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável satisfazendo*

$$u_t(t) \leq a(t)u(t) + b(t), \text{ para todo } t \in I \text{ e } u(t_0) = u_0. \quad (2.2)$$

Então

$$u(t) \leq u_0 e^{\int_{t_0}^t a(r) dr} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(r) dr} b(s) ds. \quad (2.3)$$

Demonstração. Multiplicamos (2.2) pelo fator integrante $e^{\int_{t_0}^s a(r) dr}$ e integramos de t_0 a t . \square

Lema 2.2 (Desigualdade de Steklov). *Seja $v(x) \in H_0^1(0, L)$. Então*

$$\frac{\pi^2}{L^2} \|v\|^2 \leq \|v_x\|^2. \quad (2.4)$$

Demonstração. Ver [32]. \square

Lema 2.3. *Seja Ω um conjunto aberto do \mathbb{R}^n e $v \in H_0^1(\Omega)$, temos que*

(i) *se $n = 2$, então*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|v\|^{1/2} \|Dv\|^{1/2}.$$

(ii) *se $n = 3$, então*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/2} \|v\|^{1/4} \|Dv\|^{3/4}.$$

Demonstração. Ver [33] Lema 3.3 p. 291 e Lema 3.5 p. 295. \square

Proposição 2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e Lipschitziano e $f \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função vetorial. Então*

$$f = \nabla p,$$

se, e somente se,

$$\langle f, v \rangle = 0, \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \text{ tal que } \nabla \cdot v = 0.$$

Demonstração. A demonstração é uma aplicação do Teorema de Rham [31]. Ver [33], Proposição 1.1, p. 14. \square

Proposição 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e Lipschitziano. Se uma distribuição p tem suas derivadas de primeira ordem $p_{x_i}, 1 \leq i \leq n$, em $L^2(\Omega)$ ou em $H^{-1}(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [33], Proposição 1.2, p. 15. \square

A seguir enunciaremos resultados conhecidos como **Teoremas de imersão**, em geral ele poderá ser encontrado em diferentes versões dependendo das condições do domínio escolhido. Para o nosso fim, escolheremos essa condição como “Condição do Cone”, que definiremos abaixo.

Definição 2.1. *Diremos que um conjunto aberto Ω satisfaz a **Condição do Cone** se existe um cone finito \mathcal{C} tal que para cada $x \in \Omega$, podemos escolher um cone finito $C_x \subset \Omega$ o qual é congruente ao cone \mathcal{C} .*

Lema 2.4 (Teoremas de imersão). *Seja Ω um domínio o qual satisfaz a condição do cone. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

(i) *Se $n < mp$, então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para $p \leq q \leq \infty$.

(ii) *Se $n = mp$, então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para $p \leq q < \infty$.

(iii) *Finalmente, se $mp < n$, então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

Demonstração. Ver [2], Corolário 9.13; p. 283. □

Lema 2.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Um conjunto limitado, com fronteira de classe C^s , $s = \max(l, 2)$ e $l \in \mathbb{N}$. Sejam*

$$v \in W^{1,q}(\Omega) \text{ e } p \in L^q(\Omega), \quad 1 < q < \infty,$$

uma solução (v, p) para o problema de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta v + \nabla p = f & \text{em } \Omega; \\ \nabla \cdot v = g & \text{em } \Omega; \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

Se $f \in W^{l-2,q}$ e $g \in W^{l-1,q}$, então $v \in W^{l,q}(\Omega)$, $p \in W^{l-1,q}(\Omega)$ e existe uma constante C que depende de q, ν, l e Ω tal que

$$\|v\|_{W^{l,q}(\Omega)} + \|p\|_{W^{l-1,q}} \leq C(\|f\|_{W^{l-2,q}(\Omega)} + \|g\|_{W^{l-1,q}}). \quad (2.6)$$

Demonstração. Para $n = 3$ ver [4] e para $n = 2$, ver [33], Proposição 2.2 p. 33. □

Para o próximo Lema consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega; \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

onde Ω representa um conjunto aberto n -dimensional.

Lema 2.6. Consideremos o problema (2.7) no bloco n -dimensional $\Omega_\pi = (0, \pi)^n$. Se $f \in L^p(\Omega)$, então existe uma única solução de (2.7) $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Adicionalmente,

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega_\pi)} \leq C(\Omega)\|f\|_{L^p(\Omega_\pi)} \text{ para } 1 < p \leq 2.$$

Demonstração. Ver [16]. □

Iremos aqui, generalizar o resultado para qualquer paralelepípedo n -dimensional limitado.

Teorema 2.1. Para $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 < x_i < L_i; i = 1, \dots, n\}$, se $f \in L^p(\Omega)$, com $1 < p \leq 2$, o problema (2.7) possui uma solução $u(x_1, \dots, x_n) \in W^{2,p}(\Omega)$. Adicionalmente,

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2.8)$$

onde a constante C depende do domínio Ω .

Demonstração. Escrevemos a função $f(x)$ através de séries de Fourier:

$$f(x) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\infty} \left[a_{i_1, \dots, i_n} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{L_k} i_k x_k\right) \right].$$

Uma solução para (2.7) é dada formalmente pela série

$$u = - \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{i_1, \dots, i_n}}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{i_k \pi}{L_k}\right)^2} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{L_k} i_k x_k\right) \right].$$

Diferenciamos o lado direito da equação em relação a x_j e obtemos

$$D_{x_j}^2 u(x) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{i_1, \dots, i_n} \left(\frac{i_j \pi}{L_j}\right)^2}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{i_k \pi}{L_k}\right)^2} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{L_k} i_k x_k\right) \right].$$

E foi mostrado em [27] que os multiplicadores do tipo

$$\frac{\left(\frac{i_j}{L_j}\right)^2}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{i_k \pi}{L_k}\right)^2}, \quad \text{com } 1 \leq j \leq n$$

preservam a regularidade em $L^p(\Omega)$ para $p > 1$, o que implica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \in L^p(\Omega) \text{ para } j = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Por outro lado, pelo fato de que $f \in L^p(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, segue [16, 18] que (2.7) possui uma única solução $u \in H_0^1(\Omega)$. Dessa forma como o problema possui solução única, a qual é munida da regularidade demonstrada e o Teorema 2.1 está demonstrado. □

2.2.1 Funções Solenoidais

Considere o espaço $\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega); \nabla \cdot v = 0\}$. Os fechos do conjunto \mathcal{V} nas normas de $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ serão espaços essenciais no nosso trabalho, para os quais usaremos as seguintes notações:

- H é o fecho de \mathcal{V} com a norma de $L^2(\Omega)$.
- V é o fecho de \mathcal{V} com a norma de $H_0^1(\Omega)$.

Note que os espaços H e V são espaços de Hilbert, com os produtos internos naturais de $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente. Quando Ω for um conjunto limitado também podemos considerar o produto interno definido em (2.1).

O operador Au :

Consideremos $u \in V$. Para cada $v \in V$ é possível escrever o produto interno $((u, v))$. O termo $\nu\Delta u$ no sistema (1.2) está associado com tal produto interno, pois dada uma função $u \in \mathcal{V}$, notemos que

$$(-\nu\Delta u, v) = \sum_{i=1}^n \nu(D_i u, D_i v) = \nu((u, v)) = Au(v). \quad (2.10)$$

Tal operador será extremamente útil na hora de definirmos de que forma uma função $u(x, t)$ é solução do problema (1.2) e como obter estimativas para o termo $-\nu\Delta u$. Esse tipo de abordagem também pode ser entendida como:

Au é o operador projeção de $-\nu\Delta u$ no espaço das funções solenoidais.

O Operador Bu :

Observe o termo $(u \cdot \nabla)u$ no sistema (1.2). Lembremos que a primeira linha do sistema,

$$u_t - \nu\Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 \quad (2.11)$$

é na verdade um sistema de equações, uma vez que uma solução $u(x, t)$ é de fato uma função vetorial da forma $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$ e ∇p é o gradiente da função escalar $p(x, t)$. Escrita em termos de coordenadas

$$(u_k)_t - \nu\Delta u_k + \sum_{i=1}^n D_i p + u_k \left(\sum_{i=1}^n D_k u_i \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sejam $u, v \in V$. Para cada $w \in V$, com $n = 2, 3$ temos que a integral

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i(D_i w_j) v_j dx, \quad (2.12)$$

pois, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_{\Omega} u_i(D_i w_j) v_j dx \leq \|u\|_{L^4(\Omega)} \|w\|_V \|v\|_{L^4(\Omega)}$$

e veremos à frente (Lema 2.3) que o lado direito da desigualdade acima é limitado.

Definimos então o operador $B(u, w) = b(u, w, v)$, que inicialmente pertence ao espaço dual do espaço V , ou seja $B(u, w) \in V'$, que é dado por

$$b(u, w, v) = B(u, w)(v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i(D_i w_j) v_j dx. \quad (2.13)$$

No sistema de Navier-Stokes (1.2) temos a presença do operador $B(u, w)$ com $w = u$. Assim, definimos o operador Bu da forma $Bu(v) = b(u, u, v)$.

Eventualmente estudaremos o operador Bu para funções v que não estão no espaço V . Assim, o operador Bu pode ser definido de forma geral através da dualidade, como segue:

$$\langle Bu, v \rangle = b(u, u, v), \quad (2.14)$$

onde

$$b(u, w, v) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i(D_i w_j) v_j dx.$$

Sendo assim, para $v \in X$, onde X é um espaço de Banach, é possível definir uma norma para o operador Bu , como segue

$$\|Bu\|_{X'} = \sup_{v \in X} \frac{|b(u, u, v)|}{\|v\|_X} = \sup_{\|v\|_X \leq 1} |b(u, u, v)|.$$

Veremos adiante que dependendo da forma que estiver definida uma solução para o problema (1.2), o operador Bu funcionará como um representante para o termo $(u \cdot \nabla)u$ para efeitos de cálculos de regularidade. Esse tipo de abordagem pode ser entendida da seguinte forma:

Bu é o operador projeção de $(u \cdot \nabla)u$ no espaço das funções solenoidais.

2.3 Definição de Solução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo. Dada uma função $u_0 \in H$, o que chamamos de “dado inicial”, consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, t); \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, t); \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, t); \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.15)$$

para $t > 0$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$. Se Ω for ilimitado, adiciona-se a condição $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, se a existência do limite não estiver clara, a condição trata-se do traço da função.

Quando nos referirmos a uma **solução fraca**, estamos falando de funções $u(x, t)$ que solucionam (2.15) de alguma forma e que são da classe $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ (Ver [33]). Em nosso trabalho estamos interessados em soluções globais, então iremos considerar que $t > 0$.

Definição 2.2. Dado $u_0 \in V$, uma **solução global forte** para o problema (2.15) é uma função vetorial $u(x, t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ com $u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V)$,

$$\nabla \cdot u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

e que satisfaz a identidade

$$\int_{\Omega} \left(u_t \phi + \nu u_{x_i} \phi_{x_i} - u_i u \phi_{x_i} \right) dx = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

para toda $\phi(x) \in V$.

Lema 2.7. Para $n = 2, 3$, se o sistema (2.15) possui uma solução forte $u(x, t)$, então ela é única.

Demonstração. Em [15] foi provado que se uma solução $u(x, y)$ pertence ao espaço $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^4(\Omega))$ consequentemente obtemos a unicidade. Assim, garantir a unicidade se torna equivalente a obter estimativas

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_i^2 dx dt < \infty, \quad \text{e} \quad \int_{\omega} \sum_{i=1}^2 u_i^4 dx < \infty, \quad (2.17)$$

Mas pelo Lema 2.4 (iii), temos que $\|u\|_{L^4(\Omega)}(t) \leq C\|u\|_V(t)$, ou seja, uma solução forte sempre satisfaz (2.17). Ver [15] e [19], Teorema 1, p. 124. \square

Observação 2.1. Resultados para obtenção da unicidade de soluções sob diferentes condições são objetivos específicos particularmente interessantes, podemos citar (ver: [25] P. 82) onde a unicidade da solução $u \in L^s(0, T; L^r(\Omega))$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é garantida desde que

(i) Para Ω limitado:

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{r} \leq 1.$$

(ii) Para Ω ilimitado:

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1.$$

Definição 2.3. Dado $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$, uma **solução regular** do problema (2.15) é uma solução que satisfaz a Definição 2.2 e adicionalmente

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega)).$$

Seja (u, p) uma **solução global clássica** de (2.15), isto é, $u \in C^1(\mathbb{R}^+; C^2(\bar{\Omega}))$, $p \in C(\mathbb{R}^+; C^1(\bar{\Omega}))$. Consideremos $v \in \mathcal{V}$ definido na Seção 2.2.1. Notemos que da maneira como foram construídos os operadores A e B , podemos mostrar que

$$\frac{d}{dt}(u, v) + Au(v) + Bu(v) = 0, \quad (2.18)$$

e pela densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em V , isso valerá para toda $v \in V$.

A equação (2.18) nos motiva a definir uma formulação alternativa para o problema (2.15), como segue:

Dado $u_0 \in H$, verificar a existência de u satisfazendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t + Au + Bu = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.19)$$

no sentido das distribuições. Tal problema será chamado “problema na forma variacional” e encontrar uma solução para (2.19) é equivalente a encontrar uma solução para (2.15) (Ver [33] p. 282).

Problemas em Duas Dimensões

Neste capítulo estudaremos o modelo homogêneo das equações de Navier-Stokes em duas dimensões, dado na forma

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, t); \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, t); \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, t); \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Estamos essencialmente interessados em encontrar soluções regulares, assim, a velocidade inicial do fluido $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$.

Em duas dimensões, para obter a existência de soluções fracas, optamos por utilizar o método de Faedo-Galerkin (Ver [33] Teor. 3.1 p. 282). Os detalhes do método para garantir a existência de soluções serão apresentados no próximo capítulo, onde trabalharemos o problema em três dimensões, e deixaremos para este capítulo apenas resultados inéditos obtidos no decorrer do trabalho.

Teorema 3.1. *Seja Ω um retângulo da forma $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_i < L_i; i = 1, 2\}$, dado $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$, existe uma única solução global forte para o Problema 3.1,*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V),$$

tal que

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2(t) &\leq \|u_t(0)\|^2 e^{-\chi t}, \\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}(t) &\leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega)}) e^{-3/2\chi t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\chi = \nu \left(\frac{\pi^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2}{L_2^2} \right)$.

Demonstração. Mostraremos as **estimativas a priori** que podem ser obtidas nas aproximações de Faedo Galerkin.

Estimativa para a norma de u em H .

Multiplicamos a primeira equação em (3.1) por u e integramos no domínio Ω , obtendo

$$(u_t, u)(t) + \nu((u, u))(t) = 0, \quad (3.3)$$

logo

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2(t) + 2\nu\|u\|_V^2(t) = 0. \quad (3.4)$$

Integrando (3.4) em $(0, t)$, obtemos

$$\|u\|^2(t) + 2\nu \int_0^t \|u\|_V^2(s) ds = \|u_0\|^2, \quad t > 0. \quad (3.5)$$

A estimativa acima garante a limitação da solução aproximada no espaço $L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V)$.

Para obter a estimativa de decaimento, pelo Lema 2.2, obtemos que

$$\chi\|u\|^2 \leq \nu\|u\|_V^2, \quad (3.6)$$

então de (3.4) temos que

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2(t) + 2\chi\|u\|^2(t) \leq 0. \quad (3.7)$$

Daí, pelo Lema 2.1 (desigualdade de Gronwall) segue a estimativa desejada:

$$\|u\|^2(t) \leq \|u_0\|^2 e^{-2\chi t}. \quad (3.8)$$

Estimativa para a norma de $u_t(0)$ em H .

Multiplicando a primeira equação em (3.1) por u_t e integrando em Ω , obtemos

$$\|u_t\|^2 + \nu((u, u_t)) + b(u, u, u_t(0)) = 0$$

e particularmente para $t = 0$ temos

$$\|u_t(0)\|^2 = \nu(\Delta u_0, u_t(0)) - b(u_0, u_0, u_t(0)),$$

assim $\|u_t(0)\| \leq \nu\|\Delta u_0\| + \|Bu_0\|$ e o primeiro termo do lado direito é claramente estimado por $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$. Pela estimativa

$$|b(u_0, u_0, v)| \leq C\|u_0\|_{L^4(\Omega)}\|Du_0\|_{L^4(\Omega)}\|v\| \quad (3.9)$$

$$\leq C\|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2\|v\|, \quad (3.10)$$

temos $\|Bu_0\| \leq C\|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2$. Assim concluímos que

$$\|u_t(0)\| \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V} + \|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V}^2). \quad (3.11)$$

Estimativa para a norma de u_t em V .

Derivamos a primeira equação em (3.1) em relação a t e multiplicamos o resultado por u_t , obtendo

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) + 2\nu\|u_t\|_V^2(t) + 2b(u_t, u, u_t)(t) = 0. \quad (3.12)$$

Pelo Lema 2.3, para qualquer $\epsilon > 0$, estimamos

$$\begin{aligned} 2|b(u_t, u, u_t)(t)| &\leq 2^{3/2}\|u_t\|^{1/2}(t)\|u_t\|_V^{3/2}(t)\|u\|_V(t) \\ &\leq \nu\|u_t\|_V^2(t) + \frac{2^3}{\nu}\|u\|_V^2(t)\|u_t\|^2(t) \end{aligned}$$

e (3.12) se torna

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) + \nu\|u_t\|_V^2(t) \leq \phi(t)\|u_t\|^2(t), \quad (3.13)$$

onde $\phi(t) = \frac{2^3}{\nu}\|u\|_V^2(t)$. Fazendo uso do Lema 2.1, obtemos

$$\|u_t\|^2(t) \leq \|u_t(0)\|^2 e^{\int_0^t \phi(s) ds}. \quad (3.14)$$

Por (3.11), já podemos concluir que $u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V)$.

Retornamos para (3.13) e calculamos

$$\nu\|u\|_V^2(t) \leq (u, u_t)(t) \leq \|u\|(t)\|u_t\|(t). \quad (3.15)$$

Assim $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$.

Para obter a estimativa do decaimento, utilizamos o Lema 2.2, obtendo

$$\nu\|u_t\|_V^2(t) \geq \chi\|u_t\|^2(t), \quad (3.16)$$

onde $\chi = \nu\left(\frac{\pi^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2}{L_2^2}\right)$.

Assim

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) + (\chi - \phi)\|u_t\|^2(t) \leq 0, \quad (3.17)$$

onde $\phi(t) = \frac{2^3}{\nu}\|u\|_V^2(t)$.

Utilizando o Lema 2.1 obtemos

$$\|u_t\|^2(t) \leq \|u_t(0)\|^2 e^{\int_0^t \phi(s) ds} e^{-\chi t}. \quad (3.18)$$

Por (3.18) com (3.11), obtemos

$$\|u_t\|^2(t) \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V} + \|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V}^2) e^{-\chi t}. \quad (3.19)$$

Por (3.15),

$$\|u\|_V^2(t) \leq \frac{1}{\nu} \|u_0\| C (\|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V} + \|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V}^2)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}\chi t}.$$

Como V é um subespaço de $H_0^1(\Omega)$, então

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2(t) \leq C (\|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V}) e^{-\frac{3}{2}\chi t}. \quad (3.20)$$

Realizando formalmente a passagem dos limites nas soluções aproximadas, as estimativas (3.19) e (3.20) demonstram a existência de soluções fortes e o decaimento. A unicidade segue do Lema 2.7. \square

Observação 3.1. (ver [33] Teor. 3.5 P: 299) Durante os cálculos da estimativa (3.11), pode não estar tão claro o significado de $u_t(0)$. Vale ressaltar que trata-se de uma estimativa a priori, especificamente, u está representando uma função $u_m(\cdot, t)$ a qual é de classe $C^1(0, T)$ para todo $T > 0$. Assim, podemos dizer que

$$u_t(0) = \lim_{t \rightarrow 0} u_t(t).$$

A existência do limite é garantida por (3.11), sendo ele o limite da função aproximada, a qual é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^+, H) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V)$.

Para mais detalhes, mostraremos no Capítulo 4 as estimativas do método de Faedo-Galerkin e a explicação acerca da desigualdade análoga.

3.1 Regularidade e decaimento em retângulos

Teorema 3.2. Considere o retângulo $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < L_1; 0 < x_2 < L_2\}$. Dado $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$, o problema (3.1) possui uma única solução regular (u, p) tal que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \cap V) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)), \quad (3.21)$$

$$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V), \quad (3.22)$$

$$\nabla p \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H), \quad (3.23)$$

onde Ω_0 é um domínio arbitrário de Ω com fronteira de classe C^3 tal que $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega) \geq \delta > 0$. Adicionalmente,

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_{H^2 \cap V}(t) + \|\nabla p\|(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}, \quad (3.24)$$

onde $\chi = \nu \left(\frac{\pi^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2}{L_2^2} \right)$ e C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Decaimento para a norma de u em H^2 . Nosso método consiste de utilizar algumas iterações do Lema 2.1 identificando a solução $u(x, t)$ encontrada no

Teorema 3.1 como uma solução fraca do problema (2.7). Inicialmente, reescrevemos (3.1) na forma

$$\Delta u = f = \frac{1}{\nu} \left(u_t + \nabla p + (u \cdot \nabla)u \right) \quad (3.25)$$

e tentaremos mostrar que o lado direito de (3.25) é uma função de $L^{4/3}(\Omega)$. Pelo Lema 2.4 (iii), $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ e utilizando o Lema 2.3, estimamos

$$\begin{aligned} |((u \cdot \nabla)u, v)(t)| &= |b(u, u, v)|(t) \leq C \|u\|_{L^4(\Omega)}(t) \|u\|_V(t) \|v\|_{L^4(\Omega)}(t) \\ &\leq C \|u\|_V^2(t) \|v\|_{L^4(\Omega)}(t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Assim, de acordo com (2.13) temos

$$\|Bu\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \leq C \|u\|_V^2(t). \quad (3.27)$$

Utilizando a identificação feita na Subseção 2.2.1 e a estimativa (3.2), temos

$$\|(u \cdot \nabla)u\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{3}{2}\chi t}. \quad (3.28)$$

Pela forma variacional (2.19), obtemos

$$\|Au\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \leq C (\|Bu\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) + \|u_t\|(t)). \quad (3.29)$$

Segue de (3.19) e (3.28) que $\|Au\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}$. Pela Proposição 2.2, existe ∇p tal que

$$-\nabla p = u_t + Au + Bu \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned} \|\nabla p\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) &\leq C (\|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t) + \|Au\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \\ &\quad + \|Bu\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t)) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Aplicando o Teorema 2.1 em (3.25),

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2, \frac{4}{3}}(\Omega)}(t) &\leq C \left(\|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t) + \|\nabla p\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \right. \\ &\quad \left. + \|(u \cdot \nabla)u\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Finalmente, por (3.28), obtemos $\|u\|_{W^{2,4/3}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}$.

Pelo Lema 2.4 (i), $W^{2,4/3}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, tem-se

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}. \quad (3.33)$$

Para provar que as normas $\|u_t\|$, $\|\nabla p\|$ e $\|(u \cdot \nabla)u\|$ possuem decaimento exponencial, recordamos novamente (2.13):

$$\|(u \cdot \nabla)u\|(t) = \|Bu\|(t).$$

Estima-se

$$|((u \cdot \nabla)u, v)(t)| \leq |b(u, u, v)|(t) \leq C \|u\|_{L^\infty(\Omega)}(t) \|u\|_V(t) \|v\|(t) \quad (3.34)$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Por (3.33),

$$\|(u \cdot \nabla)u\|(t) \leq C e^{-\frac{5}{4}\chi t}. \quad (3.35)$$

Reescrevendo o problema na forma (2.19) e fazendo uso de (3.19) e (3.35), nós temos

$$\|Au\|(t) \leq \|Bu\|(t) + \|u_t\|(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}. \quad (3.36)$$

Por (3.30) e (3.36),

$$\|\nabla p\|(t) \leq \|u_t\|(t) + \|Au\|(t) + \|Bu\|(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}. \quad (3.37)$$

Substituindo (3.19), (3.35) e (3.37) em (3.25) e aplicando o Teorema 2.1, encontramos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}.$$

Lema 3.1 (Efeito de suavização). *Sob as condições do Teorema 3.2, seja Ω_0 um subdomínio de Ω de classe C^3 tal que $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega) \geq \delta > 0$ para δ arbitrário e positivo. Como (u, p) é tal que $u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega))$, $\nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H)$, então*

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)) \text{ e } \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_0)). \quad (3.38)$$

Demonstração. Seja Ω_1 um subdomínio de Ω de classe C^3 tal que $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ com $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega_1) \geq \frac{\delta}{2} > 0$ e $\text{dist}(\partial\Omega_1, \partial\Omega) > 0$. Defina uma função auxiliar $\xi(x) \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi(x) \leq 1$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \xi(x) = 1 \text{ em } \Omega_0, \\ \xi(x) = 0 \text{ em } \Omega/\Omega_1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Note que

$$\Delta(\xi u) = \xi \Delta u + 2 \sum_{j=1}^2 (D_j u D_j \xi) + u \Delta \xi. \quad (3.40)$$

Multiplique a primeira equação em (3.1) por ξ para obter

$$\nu \xi \Delta u = \xi \left(u_t + \nabla p + (u \cdot \nabla)u \right). \quad (3.41)$$

Substituindo (3.41) em (3.40), reescrevemos (3.1) para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}^+$ não singular, na forma de um problema elíptico

$$\begin{aligned} \nu \Delta(\xi u) - \nabla(\xi p) &= \xi \left(u_t + (u \cdot \nabla)u \right) - p \nabla \xi \\ &+ 2\nu \sum_{j=1}^2 (D_j u D_j \xi) + \nu u \Delta \xi \equiv f(x) \text{ em } \Omega_1; \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\nabla \cdot (\xi u) = u \nabla \xi \equiv g(x) \text{ em } \Omega_1; \quad (3.43)$$

$$\xi u = 0 \text{ em } \partial\Omega_1. \quad (3.44)$$

$$(3.45)$$

Utilizando o Lema 2.3, calculamos

$$\begin{aligned} \|(u \cdot \nabla)u\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|(u \cdot \nabla)u\| + \|(\nabla u)^2\| + \|uD^2u\| \\ &\leq C\|u\| \|\nabla u\| + \|\nabla u\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C\|\nabla u\| \|D^2u\| + C\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|(u \cdot \nabla)u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (3.46)$$

Então o lado direito de (3.42) está em $H^1(\Omega)$. As desigualdades (3.22), (3.23) e $u \in H^2(\Omega)$ implicam que $f \in H^1(\Omega_1)$, $g \in H^2(\Omega_1)$. Pelo Lema 2.5, tem-se que $\xi u \in L^2(\mathbb{R}^+, H^3(\Omega_1))$. Como conclusão, $u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0))$ e $\nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_0))$. A prova do Lema 3.1 está completa. \square

Por (3.38) e o Lema 3.1 completamos a prova do Teorema 3.2. \square

Existência e decaimento para uma semifaixa

Teorema 3.3. *Considere o domínio $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1; 0 < x_2 < L_2\}$. Dado $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$, então o problema*

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, t); \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, t); \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, t), \quad t > 0; \\ \lim_{x_1 \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega \end{cases} \quad (3.47)$$

possui uma única solução forte (u, p) tal que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V), \quad (3.48)$$

$$\nabla p \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{4/3}(\Omega)). \quad (3.49)$$

Adicionalmente,

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_V(t) + \|\nabla p\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad (3.50)$$

onde $\theta = \nu\left(\frac{\pi^2}{L_2^2}\right)$ e C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. De forma análoga à prova do Teorema 3.1, utilizamos o Lema 2.2, calculando

$$\theta\|u_t\|^2 \leq \nu\|u_t\|_V^2, \quad (3.51)$$

e similarmente, obtemos a seguinte estimativa a priori:

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_V(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (3.52)$$

Fazendo uso da igualdade

$$\|(u \cdot \nabla)u\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) = \|Bu\|_{L^4(\Omega)'}(t),$$

(3.52) e estimando

$$|((u \cdot \nabla)u, v)(t)| \leq C\|u\|_V^2(t)\|v\|_{L^4(\Omega)}(t) \quad (3.53)$$

obtemos

$$\|Au\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}.$$

Observando que (3.31) vale para soluções fortes de (3.47), nós obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla p\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) &\leq C\|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t) + \|Au\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \\ &+ \|Bu\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Por (3.52) e (3.54) prova-se (3.48) e temos provada a existência no Teorema 3.3. A unicidade segue do Lema 2.7. A prova do Teorema 3.3 está completa. \square

Subdomínios suaves de uma semifaixa

Seja $0 < r_4 < r_3 < r_2 < R_2 < R_3 < R_4$ números reais positivos. Definimos subdomínios suaves de Ω : Ω_i ; $i = 2, 3, 4$ como o conjunto de todos os pontos interiores, de classe C^3 , que será construída da seguinte maneira:

- Conecte os pontos $(r_i, 0)$ e (r_i, L_2) por uma curva suave γ_i .
- Conecte os pontos (r_i, L_2) e (R_i, L_2) através do intervalo $[r_i, R_i] \times L_2$.
- Conecte suavemente os pontos (R_i, L_2) e $(R_i, 0)$ através de uma curva suave (de classe C^3) denotada por Γ_i .

- Conecte os pontos $(R_i, 0)$ e $(r_i, 0)$ através do intervalo $[r_i, R_i] \times 0$.

Podemos escolher r_4 e γ_4 de forma que o intervalo $\{0\} \times (0, L_2)$ seja tangente a γ_4 e

$$\min\{\text{dist}(\gamma_i, \gamma_{i+1}), \text{dist}(\Gamma_i, \Gamma_{i+1})\} \geq \delta > 0,$$

para $i = 2, 3$, onde δ é um número real positivo tal que

$$0 < \delta < \min\{|r_i - r_{i+1}|, |L_i - L_{i+1}|\},$$

para $i = 2, 3$.

Procedendo da forma acima, nós construímos curvas fechadas e limitadas de classe C^3 denotadas por Γ_{Ω_i} , tais que o conjunto de seus pontos interiores formam domínios Ω_i os quais são limitados e com fronteiras de classe C^3 .

Observação 3.2. Observando a forma com que construímos os subdomínios acima, evidenciamos o domínio Ω_2 , o qual será igual a semifaixa Ω para $r_2 < x_1 < R_2$ e pode ter a fronteira tão próxima quanto se deseje de Ω para $x \leq r_2$.

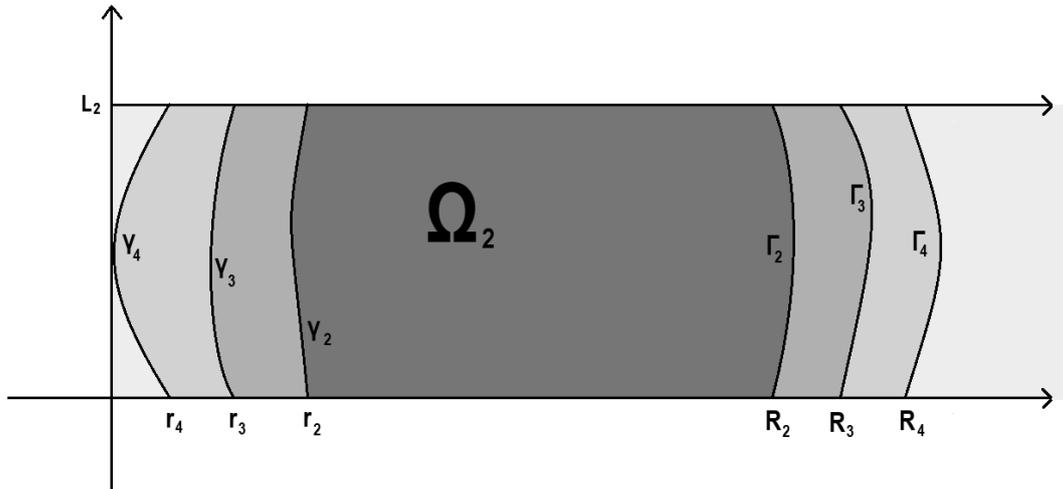


Figura 3.1: Esboço do subdomínio Ω_2 e das curvas γ_i e Γ_i com $i = 2, 3, 4$.

Teorema 3.4. Sob as condições do Teorema 3.3, seja $u(x, t)$ a solução forte de (3.1). Temos que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega_2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)).$$

onde Ω_2 é um domínio suave, definido como na Observação 3.2. Ω_0 é um subdomínio limitado de Ω com fronteira de classe C^3 tal que $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega) \geq \delta > 0$. Adicionalmente

$$\|u\|_{H^2(\Omega_2)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad (3.55)$$

onde $\theta = \nu \left(\frac{\pi^2}{L_2^2} \right)$ e C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Recordemos a cadeia de subdomínios definida anteriormente

$$\Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \Omega_4 \subset \Omega_5 = \Omega$$

e definimos funções auxiliares $\xi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, com $0 \leq \xi_i(x) \leq 1$, tal que

$$\begin{cases} \xi_i(x) = 1 \text{ em } \Omega_{i-1}; \\ \xi_i(x) = 0 \text{ em } \Omega_{i+1}/\Omega_i \end{cases} \quad (3.56)$$

para $i = 3, 4$. Da mesma maneira como em (3.42)-(3.44), nós escrevemos

$$\begin{aligned} \nu \Delta(\xi_i u) &= \xi_i \left(u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p \right) + 2\nu \sum_{j=1}^2 (D_j u D_j \xi_i) \\ &+ \nu u \Delta \xi_i = 0 \text{ em } \Omega_i \times \mathbb{R}^+; \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\nabla \cdot (\xi_i u) = u \nabla \xi_i \text{ em } \Omega_i \times \mathbb{R}^+; \quad (3.58)$$

$$\xi_i u = 0 \text{ em } \partial\Omega_i \times \mathbb{R}^+; \quad (3.59)$$

$$\xi_i u(x, 0) = \xi_i u_0(x) \text{ em } \Omega_i. \quad (3.60)$$

Pelo Teorema 3.3, $\xi_i u$ é uma solução forte para (3.57)-(3.60). O lado direito de (3.57) pertence a $L^{4/3}(\Omega)$ e seus valores estão abaixo de $Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}$ para qualquer t . Utilizando o Teorema 2.1 para $i = 4$, obtemos

$$\|\xi_4 u\|_{W^{2,4/3}(\Omega_4)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (3.61)$$

Utilizando o Lema 2.4 item (i) e o fato de que $\xi_4 u = u$ em Ω_3 ,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_3)}(t) \leq C \|u\|_{W^{2,4/3}(\Omega_3)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (3.62)$$

O que implica que para $i = 3$, o lado direito de (3.57) pertence a $L^2(\Omega_2)$, obtendo então que

$$\|u\|_{H^2(\Omega_2)}(t) \leq \|\xi_3 u\|_{H^2(\Omega_3)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (3.63)$$

Assim $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega_2))$.

Lema 3.2 (Efeito de suavização). *Sob as condições do Teorema 3.4, (u, p) será tal que*

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega_2)), \quad \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_2)).$$

Então

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)) \text{ e } \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_0)),$$

onde Ω_0 é um subdomínio de Ω_2 de classe C^3 tal que $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega_2) \geq \delta > 0$.

Demonstração. Utilizando o Lema 2.3, encontramos

$$(u \cdot \nabla)u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_2)). \quad (3.64)$$

Definindo uma função auxiliar $\xi_1(x) \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi_1(x) \leq 1$ tal que

$$\begin{cases} \xi_1(x) = 1 \text{ em } \Omega_0; \\ \xi_1(x) = 0 \text{ em } \Omega_2/\Omega_1, \end{cases} \quad (3.65)$$

onde Ω_1 é um subdomínio com fronteira de classe C^3 contido em Ω_2 de forma que $\text{dist}(\partial\Omega_2, \partial\Omega_1) > 0$ e $\text{dist}(\partial\Omega_1, \partial\Omega_0) \geq \frac{\delta}{2} > 0$. Escreva (3.57)-(3.60) para qualquer $t_0 > 0$ não singular como um problema elíptico,

$$\begin{aligned} \nu\Delta(\xi_1 u) - \nabla(\xi_1 p) &= \xi_1(u_t + (u \cdot \nabla)u) - p\nabla\xi_1 \\ &+ 2\nu \sum_{j=1}^2 (D_j u D_j \xi_1) + \nu u \Delta \xi_1 \text{ em } \Omega_1; \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\nabla \cdot (\xi_1 u) = u \nabla \xi_1 \text{ em } \Omega_1; \quad (3.67)$$

$$\xi_1 u = 0 \text{ em } \partial\Omega_1. \quad (3.68)$$

Note que por (3.48), (3.49) e (3.64), o lado direito de (3.66) pertence a $H^1(\Omega_1)$. Utilizando o Lema 2.5, nós obtemos $\xi_1 u \in H^3(\Omega_1)$ e $\xi_1 \nabla p \in H^1(\Omega_1)$. Como $\|u\|_{H^3(\Omega_0)} \leq \|\xi_1 u\|_{H^3(\Omega_1)}$ e $\|p\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \|\xi_1 p\|_{H^1(\Omega_1)}$, podemos concluir que

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)), \quad \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_0)). \quad (3.69)$$

□

Por (3.63) e o Lema 3.2 completamos a prova do Teorema 3.4.

□

3.2 Regularidade e decaimento em domínios suaves e limitados

Considere um domínio Ω com fronteira de classe C^3 e $D = (0, L_1) \times (0, L_2)$ sendo o menor retângulo tal que $\bar{\Omega} \subset \bar{D}$.

Teorema 3.5. *Seja Ω um domínio limitado com fronteira de classe C^3 e $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$, então o problema*

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, t); \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, t); \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, t), t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega \end{cases} \quad (3.70)$$

possui uma única solução regular (u, p) :

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; V \cap H^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)), \\ u_t &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V), \\ \nabla p &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Adicionalmente,

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}, \quad (3.72)$$

onde $\chi = \nu \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\pi^2}{L_i^2}\right)$ e C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Nesta demonstração, utilizaremos a solução fraca já conhecida (Ver [33] Teor. 3.1 P: 282) e iremos refazer estimativas análoga às do Teorema 3.1, para utilizar o Lema 2.2 precisaremos definir uma função extensão de $u(x, t)$, a qual possui o mesmo valor em norma.

Defina

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{se } x \in \Omega; \\ 0 & \text{se } x \in D/\Omega. \end{cases} \quad (3.73)$$

Utilizando o Lema 2.2 e $\tilde{u}(x, y)$, nós estimamos

$$\nu \|u\|_V^2(t) = \nu \|\tilde{u}\|_V^2(t) \geq \chi \|\tilde{u}\|^2(t) = \chi \|u\|^2(t), \quad (3.74)$$

então análogo a (2.1), obtemos

$$\|u\|^2(t) \leq \|u_0\|^2 e^{-2\chi t}.$$

Similarmente,

$$\nu \|u_t\|_V^2(t) = \nu \|\tilde{u}_t\|_V^2(t) \geq \chi \|\tilde{u}_t\|^2(t) = \chi \|u_t\|^2(t) \quad (3.75)$$

onde \tilde{u}_t é uma extensão para a derivada u_t e similarmente a (3.19) obtemos

$$\|u_t\|^2(t) \leq \|u_t\|^2(0) e^{-\chi t}, t > 0. \quad (3.76)$$

Como V é um subespaço de $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \cong \|u\|_V^2(t) \leq Ce^{-\frac{3}{2}\chi t}. \quad (3.77)$$

Isso implica a existência e a unicidade do problema (3.70).

Para obtermos estimativas na norma de $H^2 \cap V$, iremos utilizar duas desigualdades relacionadas às norma dos operadores Au e Bu , que podem ser encontradas em [33] Lema 3.7, P: 313,

$$\|D^2u\|^2 \leq C\|Au\|^2 \quad (3.78)$$

e

$$\|Bu\| \leq C\|u\|_V^{3/2}\|Au\|^{1/2}. \quad (3.79)$$

Calculando

$$\begin{aligned} \|Au\| &\leq \|u_t\| + \|Bu\| \leq \|u_t\| + C\|u\|_V^{3/2}\|Au\|^{1/2} \\ &\leq \|u_t\| + \frac{C^2}{2}\|u\|_V^3 + \frac{1}{2}\|Au\|. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Assim

$$\|Au\|(t) \leq 2\|u_t\|(t) + C^2\|u\|_V^3(t). \quad (3.81)$$

Substituindo (3.81) em (3.78), nós obtemos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}. \quad (3.82)$$

Para provar a existência de uma função p , nós relembramos as Proposições 1.1 e 1.2 de [33]: Existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\nabla p = u_t - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u. \quad (3.83)$$

Agindo como na prova do Teorema 3.1, nós obtemos

$$\|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}.$$

Lema 3.3 (Efeito de suavização). *Sob as condições do Teorema 3.5, como (u, p) é da forma*

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega)), \quad \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H).$$

Então

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)) \text{ e } \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)).$$

Demonstração. Da mesma maneira como no cálculo de (3.64), nós obtemos

$$(u \cdot \nabla)u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)). \quad (3.84)$$

Escreva (3.70) para qualquer $t_0 > 0$ não singular, $u(x, t_0) = v(x)$ como segue:

$$\begin{cases} -\nu\Delta v + \nabla p = -v_t - (u \cdot \nabla)v \text{ em } \Omega; \\ \nabla \cdot v = 0 \text{ em } \Omega; \\ v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.85)$$

Note que por (3.77) e (3.84), $-v_t - (v \cdot \nabla)v \in H^1(\Omega)$, fazendo uso do Lema 2.5, nós obtemos que $v \in H^3(\Omega)$ e $\nabla p \in H^1(\Omega)$. Nós concluímos que

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)), \quad \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)). \quad (3.86)$$

A prova do Lema 3.3 está completa. \square

Por (3.77), (3.82) e (3.86) provamos o Lema 3.3 e finalmente o Teorema 3.5. \square

3.3 Regularidade e decaimento em domínios suaves e ilimitados

Seja Ω um domínio ilimitado na dimensão x_1 , com fronteira de classe C^3 , consideremos a menor semifaixa que contenha Ω sendo

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1; 0 < x_2 < L_2\}.$$

Teorema 3.6. *Dado $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$, então o problema*

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 \text{ em } (0, t) \times \Omega; \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } (0, t) \times \Omega; \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, t), t > 0; \\ \lim_{x_1 \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega \end{cases} \quad (3.87)$$

possui uma única solução (u, p) tal que

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V), \\ \nabla p &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{4/3}(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Adicionalmente,

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_V(t) + \|\nabla p\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad (3.89)$$

onde $\theta = \nu \left(\frac{\pi^2}{L_2^2} \right)$ e C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Definimos uma função $\tilde{u}(x, t)$ como em (3.73), notemos que $u(x, t)$ é uma solução forte para (3.87) satisfazendo

$$\|u_t\|^2(t) \leq \|u_t\|^2(0) e^{-\theta t}, t > 0 \quad (3.90)$$

e

$$\|u\|_{H_0^1}^2(t) \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega)}) e^{-\frac{3}{2}\theta t}. \quad (3.91)$$

Para provar a existência de p , nós usamos a Proposição 1.1 de [33]: existe $p \in L_{loc}^2(\Omega)$, tal que

$$\nabla p = u_t - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^3 u_i u_{x_i}. \quad (3.92)$$

A regularidade de ∇p segue da mesma maneira como na prova da desigualdade (3.31),

$$\|\nabla p\|_{L^{4/3}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (3.93)$$

(3.31), (3.90) e (3.91) completam a parte da existência e regularidade no Teorema 3.6. A unicidade seguirá pelo Lema 2.7, e a prova do Teorema 3.6 está completa. \square

Subdomínios limitados de domínios suaves ilimitados

Teorema 3.7. *Seja $u(x, t)$ a solução forte obtida no Teorema 3.6 e R_0 um número positivo arbitrário, definimos Ω_0 sendo a restrição de Ω para $x < R_0$. Então*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega_0)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)). \quad (3.94)$$

Adicionalmente,

$$\|u\|_{H^2(\Omega_0)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad (3.95)$$

onde $\theta = \nu \left(\frac{\pi^2}{L_2^2} \right)$ e C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Sejam R_1, R_2, R_3 números reais positivos e ordenados, da forma $R_i < R_{i+1}$ for $i = 0, \dots, 3$. Definimos para $i = 1, 2, 3$, domínios $\Omega_i \subset ((0, R_{i+1}) \times \mathbb{R}^2) \cap \Omega$ com fronteira de classe C^3 coincidindo com a fronteira de Ω para $x_i \leq R_i$ e para $R_i < x_1 < R_{i+1}$ terá como fronteira, uma curva de classe C^3 . Note que

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \Omega.$$

Definimos funções auxiliares $\xi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi_i(x) \leq 1$ tais que

$$\begin{cases} \xi_i(x) = 1 \text{ em } \Omega_{i-1}; \\ \xi_i(x) = 0 \text{ em } \Omega/\Omega_i \end{cases} \quad (3.96)$$

para $i = 2, 3$.

Desde que estamos sob as condições do Teorema 3.6, uma solução forte de (3.87) satisfaz o seguinte problema elíptico:

$$\begin{aligned} \nu \Delta(\xi_i u) - \nabla(\xi_i p) &= \xi_i \left(u_t + (u \cdot \nabla)u \right) - p \nabla \xi_i \\ &+ 2\nu \sum_{j=1}^2 (D_j u D_j \xi_i) + \nu u \Delta \xi_i \text{ em } \Omega_i \times \mathbb{R}^+; \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\nabla \cdot (\xi_i u) = u \nabla \xi_i \text{ em } \Omega_i \times \mathbb{R}^+; \quad (3.98)$$

$$\xi_i u = 0 \text{ em } \partial \Omega_i \times \mathbb{R}^+. \quad (3.99)$$

Pelo Teorema 3.6, $\xi_i u$ é uma solução forte para (3.97)-(3.99). O lado direito de (3.97) pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{4/3}(\Omega))$ e $\|u\|_{L^{4/3}}(t)$ está sempre estimado por $Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}$ para todo t . Utilizando o Lema 2.5 para $i = 3$, nós obtemos

$$\|\xi_3 u\|_{W^{2,4/3}(\Omega_3)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (3.100)$$

Pelo Lema 2.4 (iii) e o fato de que $\xi_3 u = u$ em Ω_2 ,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_2)}(t) \leq C\|u\|_{W^{2,4/3}(\Omega_3)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (3.101)$$

Assim, para $i = 2$, o lado direito de (3.97) pertence a $L^2(\Omega_1)$. Isso implica

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)}(t) \leq \|\xi_2 u\|_{H^2(\Omega_2)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (3.102)$$

Assim

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega_1)). \quad (3.103)$$

Lema 3.4 (Efeito de suavização). *Sob as condições do Teorema 3.7, a solução $u(x, t)$ fornecida no Teorema 3.7 é tal que*

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)). \quad (3.104)$$

Demonstração. Defina uma função auxiliar $\xi_1(x) \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi_2(x) \leq 1$ em Ω_1 e

$$\begin{cases} \xi_1(x) = 1, & x \in \Omega_0; \\ \xi_1(x) = 0, & x \in \Omega/\Omega_1 \end{cases} \quad (3.105)$$

e para cada $t_0 > 0$ não singular, considere o seguinte problema elíptico:

$$\begin{aligned} \nu \Delta(\xi_1 u) - \nabla(\xi_1 p) &= \xi_1 \left(u_t + (u \cdot \nabla)u \right) - p \nabla \xi_1 \\ + 2\nu \sum_{j=1}^2 (D_j u D_j \xi_1) + \nu u \Delta \xi_1 &\equiv f(x) \text{ em } \Omega_1; \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\nabla \cdot (\xi_1 u) = u \nabla \xi_1 \equiv g(x) \text{ em } \Omega_1; \quad (3.107)$$

$$\xi_1 u = 0 \text{ em } \partial\Omega_1. \quad (3.108)$$

Podemos verificar, como no Lema 3.1 que $f \in H^1(\Omega_1)$, $g \in H^2(\Omega_1)$. Pelo Lema 2.5, $\xi_1 u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_1))$. Isso implica que $u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0))$. \square

Como $\Omega_0 \subset \Omega_1$, então (3.103) e o Lema 3.4 provam o Teorema 3.7. \square

Proposição 3.1. *Sob as condições do Teorema 3.7, a solução $u(x, t)$ de (3.87) é tal que*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_{loc}^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H_{loc}^3(\Omega)). \quad (3.109)$$

Demonstração. Como $\Omega_0 \subset \Omega$ no Teorema 3.7 pode ser definido com qualquer R_0 , quão grande quanto o necessário, (3.94) é válido para todo subdomínio de Ω_0 tal que Ω_0 seja uma restrição de Ω para $x \leq R_0$. Para estimar as normas em (3.109) para qualquer subconjunto compacto $K \subset \Omega$ é suficiente escolher Ω_0 tal que $K \subset \Omega_0$, o que prova a Proposição 3.1. \square

Problemas em Três Dimensões

Neste capítulo estudaremos o modelo homogêneo das equações de Navier-Stokes em três dimensões, dado na forma

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, t); \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, t); \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, t); \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Estamos essencialmente interessados em encontrar soluções regulares, assim, a velocidade inicial do fluido u_0 estará contida em $H^2(\Omega)$ e com divergência livre $\nabla \cdot u = 0$, assim, podemos simplesmente dizer: $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$.

Nosso primeiro resultado trata da existência e unicidade de soluções fortes. Iremos considerar Ω sendo um paralelepípedo o qual é apenas um domínio Lipschitziano

Durante a demonstração detalharemos o método de Faedo-Galerkin e algumas justificativas que foram omitidas no Capítulo 3.

Observação 4.1. *Nos enunciados dos próximos resultados apresentaremos uma condição do tipo $\|u_t\|(0) < C(\nu, \Omega, \|u_0\|_{H^2(\Omega)})$. Inicialmente tal hipótese pode parecer estranha, uma vez que a solução não pode estar condicionada às suas próprias características, ou seja ao traço de u_t quando $t \rightarrow 0$. Na verdade o termo $u_t(0)$ trata-se de um elemento que surge durante as estimativas e serve para facilitar a notação. Uma forma de observar o fenômeno seria escrever em termos dos operadores A e B definidos em (2.10) e (2.14).*

$$u_t(0) = -Au_0 - Bu_0,$$

Teorema 4.1. *Seja Ω um paralelepípedo da forma $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 0 < x_i < L_i; i = 1, 2, 3\}$. Dado $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$ e Ω tal que*

$$\frac{6^3}{\nu^5} \|u_0\|^2 \|u_t\|^2(0) - \frac{1}{2} \chi < 0, \quad (4.2)$$

onde $\|u_t\|(0) \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega)})$ e $\chi = \nu \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\pi^2}{L_i^2}\right)$, existe uma única solução global forte de (4.1):

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), \quad u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V)$$

a qual satisfaz a Definição 2.2 e as desigualdades

$$\|u_t\|^2(t) \leq Ce^{-\chi t}, \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2(t) \leq Ce^{-\frac{3}{2}\chi t}, \quad (4.3)$$

onde C é uma constante que depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Nessa demonstração utilizaremos o método de Faedo-Galerkin, que consiste em estabelecer soluções para problemas de equações diferenciais ordinárias na variável t , definidos em dimensões finitas nas variáveis espaciais x_1, x_2 e x_3 . [15, 19, 33].

Como V é um espaço separável, existe uma sequência $\{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ em V a qual é ortonormal em H e densa em V . Para cada valor $m \in \mathbb{N}$, V_m é um espaço linearmente gerado por $\{w_i\}$, com $i = 1, \dots, m$. Definimos uma função $u_m(x, t)$ da forma

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(x), \quad (4.4)$$

onde g_{im} são soluções do seguinte problema aproximado:

$$\begin{cases} (u_{mt}, w)(t) + \nu((u_m, w))(t) + b(u_m, u_m, w)(t) = 0; \\ u_m(0) = u_{0m}, m \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $w \in V$ e u_{0m} são projeções do dado inicial u_0 , fornecido na hipótese, sobre o espaço V_m . Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, $u_{0m} = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i)w_i$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_{0m} - u_0\|_{H^2(\Omega)} = 0$.

Tomando $w = w_j$ em (4.5), $j = 1, \dots, m$, nós reescrevemos (4.5) na forma

$$\begin{cases} g_{jmt}(t) + \nu \sum_{i=1}^m ((w_i, w_j))g_{jm}(t) \\ + ((u_m \cdot \nabla)u_m, w_j)g_{jm}(t) = 0; \\ g_{jm} = (u_0, w_j), \text{ para } j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (4.6)$$

Utilizando o Teorema de Caratheodory para equações diferenciais ordinárias, ver [6], Teorema 1.1, P: 43, temos uma solução local $g_{jm}(t)$ para (4.6) tal que

$$g_{jm}(t) \in C^1(0, T), \quad T > 0. \quad (4.7)$$

Tendo em mãos a solução (4.7) podemos integrar ou derivar ambos os lados da equação no sistema (4.5) e obter as estimativas a priori que virão a seguir.

Estimativa para norma de u_m em H .

Multiplicando (4.6) por $g_{jm}(t)$ e somando para $j = 1, \dots, m$, notamos que

$$\frac{d}{dt} \|u_m\|^2(t) + 2\nu \|u_m\|_V^2(t) = 0. \quad (4.8)$$

Integrando (4.8) em $(0, t)$, obtemos

$$\|u_m\|^2(t) + 2\nu \int_0^t \|u_m\|_V^2(s) ds = \|u_{0m}\|^2 \leq \|u_0\|^2, \quad t > 0. \quad (4.9)$$

Assim, u_m é limitada uniformemente em $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$.

Pelo Lema 2.2,

$$\chi \|u_m\|^2 \leq \nu \|u_m\|_V^2, \quad (4.10)$$

então (4.8) se torna

$$\frac{d}{dt} \|u_m\|^2(t) + 2\chi \|u_m\|^2(t) \leq 0, \quad (4.11)$$

o que implica

$$\|u_m\|^2(t) \leq \|u_{0m}\|^2 e^{-2\chi t} \leq \|u_0\|^2 e^{-2\chi t}. \quad (4.12)$$

Estimativa para a norma de $u_{mt}(0)$ em H .

Multiplicando (4.6) por $g_{jm}(t)$ e somando para $j = 1, \dots, m$, obtemos

$$\|u_{mt}\|^2 + \nu((u_m, u_{mt})) + b(u_m, u_m, u_{mt}) = 0$$

e particularmente para $t = 0$, uma vez que g_{jm} e g_{jmt} são contínuas, temos

$$\|u_{mt}(0)\|^2 = \nu(\Delta u_{0m}, u_{mt}(0)) - b(u_{0m}, u_{0m}, u_{mt}) \quad (4.13)$$

$$\leq \nu \|\Delta u_{0m}\| \|u_{mt}(0)\| + \|Bu_{0m}\| \|u_{mt}(0)\|, \quad (4.14)$$

assim $\|u_{mt}(0)\| \leq \nu \|\Delta u_{0m}\| + \|Bu_{0m}\|$ e como o primeiro termo do lado direito é estimado por $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$, resta a estimativa para o segundo termo, calculando

$$|b(u_{0m}, u_{0m}, v)| \leq C \|u_{0m}\|_{L^4(\Omega)} \|Du_{0m}\|_{L^4(\Omega)} \|v\| \quad (4.15)$$

$$\leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \|v\|, \quad (4.16)$$

lembramos de (2.13), e $\|Bu_0\| \leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2$.

Finalmente, obtemos

$$\|u_{mt}(0)\|^2 \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega \cap V)} + \|u_0\|_{H^2(\Omega \cap V)}^2). \quad (4.17)$$

Estimativa para norma de u_{mt} em H .

Derivando (4.6) e multiplicando o resultado por $g_{jmt}(t)$, notamos que

$$\frac{d}{dt} \|u_{mt}\|^2(t) + 2\nu \|u_{mt}\|_V^2(t) + 2b(u_{mt}, u_m, u_{mt})(t) = 0. \quad (4.18)$$

Pelo Lema 2.3, para qualquer $\epsilon > 0$, estimamos

$$\begin{aligned} 2|b(u_{mt}, u_m, u_{mt})(t)| &\leq 4\|u_{mt}\|^{1/2}(t)\|u_{mt}\|_V^{3/2}(t)\|u_m\|_V(t) \\ &\leq 4\left[\frac{3}{4}\epsilon^{4/3}\|u_{mt}\|_V^2(t) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^4\|u_m\|_V^4(t)\|u_{mt}\|^2(t)\right] \end{aligned}$$

e (4.18) se torna

$$\frac{d}{dt}\|u_{mt}\|^2(t) + (2\nu - 3\epsilon^{4/3})\|u_{mt}\|_V^2(t) \leq \frac{1}{\epsilon^4}\|u_m\|_V^4(t)\|u_{mt}\|^2(t). \quad (4.19)$$

Tomando $\epsilon = \left(\frac{\nu}{6}\right)^{3/4}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u_{mt}\|^2(t) + \frac{3}{2}\nu\|u_{mt}\|_V^2(t) - \left(\frac{6}{\nu}\right)^3\|u_m\|_V^4\|u_{mt}\|^2(t) \leq 0. \quad (4.20)$$

Fazendo uso do Lema 2.2, obtemos

$$\nu\|u_{mt}\|_V^2(t) \geq \chi\|u_{mt}\|^2(t) \quad (4.21)$$

e (4.20) se torna

$$\frac{d}{dt}\|u_{mt}\|^2(t) + \left[\frac{3}{2}\chi - \left(\frac{6}{\nu}\right)^3\|u_m\|_V^4(t)\right]\|u_{mt}\|^2(t) \leq 0. \quad (4.22)$$

Reescrevendo (4.8) na forma

$$\|u_m\|_V^2(t) \leq \frac{1}{\nu}\|u_m\|(t)\|u_{mt}\|(t) \quad (4.23)$$

e substituindo em (4.22), obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u_{mt}\|^2(t) + \left[\frac{3}{2}\chi - \frac{6^3}{\nu^5}\|u_0\|^2\|u_{mt}\|^2(t)\right]\|u_{mt}\|^2(t) \leq 0. \quad (4.24)$$

Utilizando (4.2), e a continuidade de u_{mt} , podemos afirmar que existe T_0 tal que para todo $t \in [0, T_0]$,

$$\frac{3}{2}\chi - \frac{6^3}{\nu^5}\|u_0\|^2\|u_{mt}\|^2(t) > 0. \quad (4.25)$$

Para $t \in [0, T_0]$ reduzimos (4.24) para a forma

$$\|u_{mt}\|^2(t) + \chi\|u_{mt}\|^2(t) \leq 0, \quad (4.26)$$

então para $t \in [0, T_0]$, temos

$$\|u_{mt}\|^2(t) \leq \|u_{mt}(0)\|^2 e^{-\chi t} \quad (4.27)$$

Notemos que (4.26) só não seria válida, caso não fosse possível obter (4.25). Supomos que exista T_* , sendo o menor valor real positivo tal que

$$\frac{3}{2}\chi - \frac{6^3}{\nu^5}\|u_0\|^2\|u_{mt}\|^2(T_*) = 0.$$

Ainda teríamos que

$$K = \int_0^{T_*} \frac{1}{2}\chi - \frac{6^3}{\nu^5}\|u_0\|^2\|u_{mt}\|^2(t) dt > 0.$$

Integrando (4.24) em $(0, T_*)$, obtemos

$$\|u_{mt}\|^2(T_*) + K \leq \|u_{mt}\|^2(0),$$

ou seja $\|u_{mt}\|^2(T_*) \leq \|u_{mt}\|^2(0)$, o que é uma contradição. Assim obtemos para todo $t > 0$:

$$\frac{d}{dt}\|u_{mt}\|^2(t) + \chi\|u_{mt}\|^2(t) \leq 0. \quad (4.28)$$

Finalmente, podemos afirmar que a estimativa (4.28) é válida para $t \in \mathbb{R}^+$ e

$$\|u_{mt}\|^2(t) \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V} + \|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V}^2)e^{-\chi t}. \quad (4.29)$$

Em consequência de (4.23),

$$\|u_m\|_V^2(t) \leq \frac{1}{\nu}\|u_0\|C^{1/2}(\|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V} + \|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V}^2)^{1/2}e^{-\frac{3}{2}\chi t}.$$

Como V é um subespaço de $H_0^1(\Omega)$, então

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2(t) \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega) \cap V})e^{-\frac{3}{2}\chi t}. \quad (4.30)$$

Dessa forma u_m é limitada uniformemente em $L^\infty(0, T; V)$. Por (4.30) é possível reescrever (4.5) e estender a solução para todo $t > 0$.

Passagem ao limite

Como as estimativas (4.12), (4.29) e (4.30) não dependem de m , t , temos que existe uma subsequência de u_m a qual converge fracamente nos espaços onde é provada a limitação independentemente de m , para uma função $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ com $u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$, ou seja,

Por u_{mt} ser limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$,

$$\int_{\Omega} u_{mt}\phi dx \rightarrow \int_{\Omega} u_t\phi dx \quad (4.31)$$

Por u_m ser limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$,

$$\int_{\Omega} \nu u_{mx_i} \phi_{x_i} dx \rightarrow \int_{\Omega} \nu u_{x_i} \phi_{x_i} dx \quad (4.32)$$

e

$$\int_{\Omega} u_{mi} u \phi_{x_i} dx \rightarrow \int_{\Omega} u_i u \phi_x dx. \quad (4.33)$$

Por (4.31), (4.32) e (4.33), obtemos que existe $u(x, t)$ que satisfaz (2.16). Isso prova a parte da existência do Teorema 4.1, para garantir a unicidade, recordamos do Lema 2.7, e assim temos que a solução é única. O Teorema 4.1 está provado. \square

4.1 Regularidade e decaimento em paralelepípedos

Nesta seção, iremos demonstrar os resultados de regularidade encontrados para a solução única encontrada no Teorema 4.1 em paralelepípedos. O resultado é dividido em duas partes, a primeira trata-se de aplicar o Teorema 2.1, na segunda parte, buscamos obter a regularidade de T. Kato [14] para subdomínios de Ω .

Teorema 4.2. *Considere o paralelepípedo $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 0 < x_i < L_i; i = 1, 2, 3\}$. Dada $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$ e Ω tal que*

$$\frac{6^3}{\nu^5} \|u_0\|^2 \|u_t\|^2(0) - \frac{1}{2} \chi \leq 0, \quad (4.34)$$

onde $\chi = \nu \left(\frac{\pi^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2}{L_2^2} + \frac{\pi^2}{L_3^2} \right)$, então (4.1) possui uma única solução regular (u, p) tal que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \cap V) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)), \quad (4.35)$$

$$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V), \quad (4.36)$$

$$\nabla p \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_0)), \quad (4.37)$$

onde Ω_0 é um domínio arbitrário de Ω com fronteira de classe C^3 tal que $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega) \geq \delta > 0$ com δ um número arbitrário e positivo. Adicionalmente,

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_{H^2 \cap V}(t) + \|\nabla p\|(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}, \quad (4.38)$$

onde C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. **Decaimento para a norma em H^2 .** Para estimar $\|u\|_{H^2(\Omega)}(t)$, iremos verificar as hipóteses do Lema 2.1 no nosso problema. Como $u(x, t)$ é uma solução forte para o problema (4.1), reescrevemos a primeira equação como

$$\Delta u = f = \frac{1}{\nu} \left(u_t + \nabla p + (u \cdot \nabla) u \right) \quad (4.39)$$

e com as nossas condições de fronteiras, nossa solução é forte, isto é $u \in H_0^1(\Omega)$ e resolve (2.7).

Pelo Lema 2.4 (iii), $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} |((u \cdot \nabla)u, v)(t)| &= |b(u, u, v)|(t) \leq C \|u\|_{L^6(\Omega)}(t) \|u\|_V(t) \|v\|_{L^3(\Omega)}(t) \\ &\leq C \|u\|_V^2(t) \|v\|_{L^3(\Omega)}(t). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Notando que o espaço $L^3(\Omega)$ é o espaço dual de $L^{3/2}(\Omega)$ e utilizando (4.3), encontramos

$$\|(u \cdot \nabla)u\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{3}{2}\chi t}. \quad (4.41)$$

Escrevendo o problema na forma variacional (2.19), obtemos

$$\|Au\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \leq C(\|Bu\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) + \|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t)). \quad (4.42)$$

Segue de (4.29) e (4.41) que $\|Au\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}$. Como consequência do Teorema de Rham [31] ou simplesmente utilizando a Proposição 2.2, existe ∇p tal que

$$-\nabla p = u_t + Au + Bu \quad (4.43)$$

e

$$\begin{aligned} \|\nabla p\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) &\leq C(\|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t) + \|Au\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \\ &\quad + \|Bu\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t)) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Utilizando o Teorema 2.1 e observando (4.39),

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2, \frac{3}{2}}(\Omega)}(t) &\leq \left(\|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t) + \|\nabla p\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \right. \\ &\quad \left. + \|(u \cdot \nabla)u\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Finalmente, por (4.41), obtemos $\|u\|_{W^{2,3/2}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}$. Utilizando o Lema 2.4 (ii), $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W^{2,3/2}(\Omega)) \subset L^\infty(\mathbb{R}^+; L^8(\Omega))$ e

$$\|u\|_{L^8(\Omega)}(t) \leq C \|u\|_{W^{2,3/2}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\chi t}. \quad (4.46)$$

Assim, a desigualdade

$$\begin{aligned} |\langle Bu, v \rangle| &= |b(u, u, v)|(t) \leq |((u \cdot \nabla)u, v)(t)| \\ &\leq C \|u\|_{L^8(\Omega)}(t) \|u\|_V(t) \|v\|_{L^{8/3}(\Omega)}(t) \end{aligned}$$

implica que

$$\|Bu\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t) \leq C \|u\|_{L^8(\Omega)}(t) \|u\|_V(t).$$

Recordando (2.13), por (4.3),

$$\|(u \cdot \nabla)u\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{5}{4}\chi t}.$$

Retornamos para (2.19), obtendo

$$\|Au\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t) \leq \|Bu\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t) + \|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t). \quad (4.47)$$

Utilizando (4.40) e (4.29), encontramos

$$\|Au\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t},$$

$$\begin{aligned} \|\nabla p\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t) &\leq \|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t) + \|Au\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t) \\ &\quad + \|Bu\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Pelo Teorema 2.1 e por (4.39),

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2, \frac{8}{5}}(\Omega)}(t) &\leq \|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t) + \|\nabla p\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t) \\ &\quad + \|(u \cdot \nabla)u\|_{L^{8/5}(\Omega)}(t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Utilizando (4.48), obtemos $\|u\|_{W^{2,8/5}(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}$.

Pelo Lema 2.4 (i), $W^{2,8/5}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, tem-se

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}. \quad (4.50)$$

Para provar que as normas $\|u_t\|$, $\|\nabla p\|$ e $\|(u \cdot \nabla)u\|$ possuem decaimento exponencial, estima-se

$$|((u \cdot \nabla)u, v)(t)| \leq |b(u, u, v)|(t) \leq C\|u\|_{L^\infty(\Omega)}(t)\|u\|_V(t)\|v\|(t) \quad (4.51)$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Por (4.3) e (4.50),

$$\|(u \cdot \nabla)u\|(t) \leq Ce^{-\frac{5}{4}\chi t}. \quad (4.52)$$

Novamente no problema variacional (2.19), fazendo uso de (4.29) e (4.52), nós temos

$$\|Au\|(t) \leq \|Bu\|(t) + \|u_t\|(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}. \quad (4.53)$$

Por (4.43) e (4.53),

$$\|\nabla p\|(t) \leq \|u_t\|(t) + \|Au\|(t) + \|Bu\|(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}. \quad (4.54)$$

Substituindo (4.29), (4.52) e (4.54) em (2.1), encontramos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}.$$

Lema 4.1 (Efeito de suavização). *Sob as condições do Teorema 4.2, seja Ω_0 um subdomínio de Ω de classe C^3 tal que $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega) \geq \delta > 0$. Se (u, p) é tal que $u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega))$, $\nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H)$, então*

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)) \text{ e } \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_0)). \quad (4.55)$$

Demonstração. Seja Ω_1 um subdomínio de Ω de classe C^3 tal que $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ com $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega_1) \geq \frac{\delta}{2} > 0$ e $\text{dist}(\partial\Omega_1, \partial\Omega) > 0$. Defina uma função auxiliar $\xi(x) \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi(x) \leq 1$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \xi(x) = 1 \text{ em } \Omega_0, \\ \xi(x) = 0 \text{ em } \Omega/\Omega_1. \end{cases} \quad (4.56)$$

Note que

$$\Delta(\xi u) = \xi \Delta u + 2 \sum_{j=1}^3 (D_j u D_j \xi) + u \Delta \xi. \quad (4.57)$$

Multiplique a primeira equação em (4.1) por ξ para obter

$$\nu \xi \Delta u = \xi \left(u_t + \nabla p + (u \cdot \nabla) u \right). \quad (4.58)$$

Substituindo (4.58) em (4.57), reescrevemos (4.1) para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}^+$ não singular, na forma de um problema elíptico

$$\begin{aligned} \nu \Delta(\xi u) - \nabla(\xi p) &= \xi \left(u_t + (u \cdot \nabla) u \right) - p \nabla \xi \\ &+ 2\nu \sum_{j=1}^3 (D_j u D_j \xi) + \nu u \Delta \xi \equiv f(x) \text{ em } \Omega_1; \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\nabla \cdot (\xi u) = u \nabla \xi \equiv g(x) \text{ em } \Omega_1; \quad (4.60)$$

$$\xi u = 0 \text{ em } \partial\Omega_1. \quad (4.61)$$

$$(4.62)$$

Utilizando o Lema 2.3, encontramos

$$\begin{aligned} \|(u \cdot \nabla) u\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|(u \cdot \nabla) u\| + \|(\nabla u)^2\| + \|u D^2 u\| \\ &\leq C \|u\| \|\nabla u\| + \|\nabla u\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C \|\nabla u\|^{1/2} \|D^2 u\|^{3/2} + C \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|(u \cdot \nabla) u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (4.63)$$

A desigualdade acima, (4.36) e (4.37) implicam que $f \in H^1(\Omega_1)$, $g \in H^2(\Omega_1)$. Pelo Lema 2.5, tem-se que $\xi u \in L^2(\mathbb{R}^+, H^3(\Omega_1))$. Como conclusão, $u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0))$ e $\nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_0))$. A prova do Lema 4.1 está completa. \square

Por (4.55) e o Lema 4.1 completamos a prova do Teorema 4.2. \square

Existência e decaimento para paralelepípedos não limitados

Teorema 4.3. *Considere o domínio $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 0 < x_1; 0 < x_2 < L_2; 0 < x_3 < L_3\}$. Dado $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$ e Ω tais que*

$$\frac{6^3}{\nu^5} \|u_0\|^2 \|u_t\|^2(0) - \frac{1}{2} \theta < 0, \quad (4.64)$$

onde $\theta = \nu \left(\frac{\pi^2}{L_2^2} + \frac{\pi^2}{L_3^2} \right)$, então o problema

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, t); \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, t); \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, t), \quad t > 0; \\ \lim_{x_1 \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega \end{cases} \quad (4.65)$$

possui uma única solução (u, p) tal que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V), \quad (4.66)$$

$$\nabla p \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{3/2}(\Omega)). \quad (4.67)$$

Adicionalmente,

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_V(t) + \|\nabla p\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad (4.68)$$

onde C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Similarmente à prova do Teorema 4.1, obtemos as seguintes estimativas

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_V(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (4.69)$$

Fazendo uso da igualdade

$$\|(u \cdot \nabla)u\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) = \|Bu\|_{L^3(\Omega)'}(t),$$

(4.40) e (4.29), obtemos

$$\|Au\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}.$$

Observando que (4.44) vale para soluções fortes de (4.65), nós obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla p\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) &\leq \|u_t\|_{L^2(\Omega)}(t) + \|Au\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \\ &+ \|Bu\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por (4.69) e (4.70) prova-se (4.66) e temos provada a parte da existência do Teorema 4.3. A unicidade segue do Lema 2.7. A prova do Teorema 4.3 está completa. \square

Regularidade e decaimento local para paralelepípedos ilimitados

Teorema 4.4. *Sob as condições do Teorema 4.1, seja $u(x, t)$ a solução forte de (4.1). Temos que*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_{loc}^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)).$$

onde Ω_0 é um subdomínio arbitrário de Ω com fronteira de classe C^3 de forma que $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega) \geq \delta > 0$. Adicionalmente

$$\|u\|_{H^2(\Omega_0)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad (4.71)$$

onde $\theta = \nu \left(\frac{\pi^2}{L_2^2} + \frac{\pi^2}{L_3^2} \right)$ e C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Definimos uma cadeia de subdomínios de Ω :

$$\Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \Omega_4 \subset \Omega_5 \subset \Omega_6 = \Omega,$$

com $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$, $i = 2, 3, 4, 5$ e $\Omega_i = (0, R_i) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$ onde $R_{i-1} < R_i$ para $i = 2, 3, 4, 5$. Definimos funções auxiliares $\xi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, com $0 \leq \xi_i(x) \leq 1$, tal que

$$\begin{cases} \xi_i(x) = 1 \text{ em } \Omega_{i-1}; \\ \xi_i(x) = 0 \text{ em } \Omega_{i+1}/\Omega_i \end{cases} \quad (4.72)$$

para $i = 3, 4, 5$. Da mesma maneira como em (4.59)-(4.61), nós escrevemos

$$\begin{aligned} \nu \Delta(\xi_i u) &= \xi_i \left(u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p \right) + 2\nu \sum_{j=1}^3 (D_j u D_j \xi_i) \\ &+ \nu u \Delta \xi_i = 0 \text{ em } \Omega_i \times \mathbb{R}^+; \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\nabla \cdot (\xi_i u) = u \nabla \xi_i \text{ em } \Omega_i \times \mathbb{R}^+; \quad (4.74)$$

$$\xi_i u = 0 \text{ em } \partial\Omega_i \times \mathbb{R}^+; \quad (4.75)$$

$$\xi_i u(x, 0) = \xi_i u_0(x) \text{ em } \Omega_i. \quad (4.76)$$

Pelo Teorema 4.3, $\xi_i u$ é uma solução forte para (4.73)-(4.76). O lado direito de (4.73) pertence a $L^{3/2}(\Omega)$ e se comporta abaixo de $Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}$ para qualquer t . Utilizando o Teorema 2.1 para $i = 5$, obtemos

$$\|\xi_5 u\|_{W^{2,3/2}(\Omega_5)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (4.77)$$

Pelo Lema 2.4 (ii) e o fato de que $\xi_5 u = u$ em Ω_4 ,

$$\|u\|_{L^8(\Omega_4)}(t) \leq C \|u\|_{W^{2,3/2}(\Omega_4)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (4.78)$$

Isso implica para $i = 4$ que o lado direito de (4.73) pertence a $L^{8/5}(\Omega_4)$. Assim

$$\|u\|_{W^{2,8/5}(\Omega_3)}(t) \leq \|\xi_4 u\|_{W^{2,8/5}(\Omega_4)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (4.79)$$

Pelo Lema 2.4 (i), $W^{2,8/5}(\Omega_3) \subset L^\infty(\Omega_3)$, logo

$$\|\xi_3(u \cdot \nabla)u\|_{L^2(\Omega_3)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}.$$

Para $i = 3$, o lado direito de (4.73) pertence a $L^2(\Omega_2)$, o que implica

$$\|u\|_{H^2(\Omega_2)}(t) \leq \|\xi_3 u\|_{H^2(\Omega_3)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (4.80)$$

Assim $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega_2))$ e para todo subdomínio compacto $K \subset \Omega$ podemos escolher Ω_2 tal que $K \subset \Omega_2$. Concluimos que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_{loc}^2(\Omega)).$$

Lema 4.2 (Efeito de suavização). *Sob as condições do Teorema 4.4, (u, p) será tal que*

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega_2)), \quad \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega_2)).$$

Então

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)) \text{ e } \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_0)),$$

onde Ω_0 é um subdomínio arbitrário de Ω_2 de classe C^3 tal que $\text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega_2) \geq \delta > 0$.

Demonstração. Utilizando o Lema 2.3, encontramos

$$(u \cdot \nabla)u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_2)). \quad (4.81)$$

Defina uma função auxiliar $\xi_1(x) \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi_1(x) \leq 1$ tal que

$$\begin{cases} \xi_1(x) = 1 \text{ em } \Omega_0; \\ \xi_1(x) = 0 \text{ em } \Omega_2/\Omega_1, \end{cases} \quad (4.82)$$

onde Ω_1 é um subdomínio com fronteira de classe C^3 contido em Ω_2 tal que $\text{dist}(\partial\Omega_2, \partial\Omega_1) > 0$ e $\text{dist}(\partial\Omega_1, \partial\Omega_0) \geq \frac{\delta}{2} > 0$. Escreva (4.73)-(4.76) para qualquer $t_0 > 0$ não singular como um problema elíptico,

$$\begin{aligned} \nu \Delta(\xi_1 u) - \nabla(\xi_1 p) &= \xi_1 \left(u_t + (u \cdot \nabla)u \right) - p \nabla \xi_1 \\ &+ 2\nu \sum_{j=1}^3 (D_j u D_j \xi_1) + \nu u \Delta \xi_1 \text{ em } \Omega_1; \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\nabla \cdot (\xi_1 u) = u \nabla \xi_1 \text{ em } \Omega_1; \quad (4.84)$$

$$\xi_1 u = 0 \text{ em } \partial\Omega_1. \quad (4.85)$$

Note que por (4.66), (4.67) e (4.81), o lado direito de (4.83) pertence a $H^1(\Omega_1)$. Utilizando o Lema 2.5, nós obtemos $\xi_1 u \in H^3(\Omega_1)$ e $\xi_1 \nabla p \in H^1(\Omega_1)$. Como $\|u\|_{H^3(\Omega_0)} \leq \|\xi_1 u\|_{H^3(\Omega_1)}$ e $\|p\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \|\xi_1 p\|_{H^1(\Omega_1)}$, podemos concluir que

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)), \quad \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega_0)). \quad (4.86)$$

A prova do Lema 4.2 está completa. \square

Por (4.80) e o Lema 4.2 completamos a prova do Teorema 4.4. \square

4.2 Decaimento de soluções globais fortes em domínios suaves e limitados

Considere um domínio Ω com fronteira de classe C^3 e $D = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$ sendo o menor paralelepípedo tal que $\bar{\Omega} \subset \bar{D}$.

Teorema 4.5. *Seja Ω um domínio limitado com fronteira de classe C^3 e $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$ tal que*

$$\frac{6^3}{\nu^5} \|u_0\|^2 \|u_t\|^2(0) - \frac{1}{2} \chi < 0, \quad (4.87)$$

onde $\chi = \nu \sum_{i=1}^3 (\frac{\pi^2}{L_i^2})$, então o problema

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, t); \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, t); \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, t), t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.88)$$

possui uma única solução regular (u, p) :

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; V \cap H^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)), \\ u_t &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V), \\ \nabla p &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Adicionalmente,

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad (4.90)$$

onde C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Agindo similarmente à prova das estimativas (4.9) e (4.18) no Teorema 4.2, chegamos às desigualdades

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2(t) + 2\nu \|u\|_V^2(t) \leq 0, \quad t > 0; \quad (4.91)$$

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) + \left[\frac{3}{2}\chi - \left(\frac{6}{\nu}\right)^3\|u\|_V^4(t)\right]\|u_t\|^2(t) \leq 0. \quad (4.92)$$

Defina

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{se } x \in \Omega; \\ 0 & \text{se } x \in D/\Omega. \end{cases} \quad (4.93)$$

Utilizando o Lema 2.2 e $\tilde{u}(x, y)$, nós estimamos

$$\nu\|u\|_V^2(t) \geq \chi\|u\|^2(t), \quad (4.94)$$

então (4.91) implica

$$\|u\|^2(t) \leq \|u_0\|^2 e^{-2\chi t}.$$

Similarmente,

$$\nu\|u_t\|_V^2(t) \geq \chi\|u_t\|^2(t) \quad (4.95)$$

e (4.92) se torna

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2(t) + \left[\frac{3}{2}\chi - \frac{6^3}{\nu^5}\|u_0\|^2\|u_t\|^2(t)\right]\|u_t\|^2(t) \leq 0.$$

Agindo como na prova do Teorema 4.2 para (4.29), (4.30), chegamos a estimativa

$$\|u_t\|^2(t) \leq \|u_t\|^2(0) e^{-\chi t}, t > 0. \quad (4.96)$$

Como V é um subespaço de $H_0^1(\Omega)$, notamos a equivalência de normas

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \approx \|u\|_V^2(t) \leq C e^{-\frac{3}{2}\chi t}. \quad (4.97)$$

Isso implica a existência e a unicidade de solução forte do problema (4.88).

Para obtermos estimativas na norma de $H^2 \cap V$, nós utilizaremos [33] Lema 3.7, P: 313,

$$\|D^2u\|^2 \leq C\|Au\|^2 \quad (4.98)$$

e

$$\|Bu\| \leq C\|u\|_V^{3/2}\|Au\|^{1/2}. \quad (4.99)$$

Então

$$\begin{aligned} \|Au\| &\leq \|u_t\| + \|Bu\| \leq \|u_t\| + C\|u\|_V^{3/2}\|Au\|^{1/2} \\ &\leq \|u_t\| + \frac{C^2}{2}\|u\|_V^3 + \frac{1}{2}\|Au\|. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Assim

$$\|Au\|(t) \leq 2\|u_t\|(t) + C^2\|u\|_V^3(t). \quad (4.101)$$

Substituindo (4.101) em (4.98), nós obtemos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}. \quad (4.102)$$

Para provar a existência de uma função p , nós relembramos as Proposições 2.1 e 2.2. Existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\nabla p = u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u. \quad (4.103)$$

Agindo como na prova do Teorema 4.2, nós obtemos

$$\|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}(t) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\chi t}.$$

Lema 4.3 (Efeito de suavização). *Sob as condições do Teorema 4.5, como (u, p) é da forma*

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega)), \quad \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H).$$

Então

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)) \text{ e } \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)).$$

Demonstração. Da mesma maneira como na prova de (4.81), nós obtemos

$$(u \cdot \nabla)u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)). \quad (4.104)$$

Escreva (4.88) para qualquer $t_0 > 0$ não singular, $u(x, t_0) = v(x)$ como segue:

$$\begin{cases} -\nu \Delta v + \nabla p = -v_t - (u \cdot \nabla)v \text{ em } \Omega; \\ \nabla \cdot v = 0 \text{ em } \Omega; \\ v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.105)$$

Note que por (4.97) e (4.104), $-v_t - (v \cdot \nabla)v \in H^1(\Omega)$, fazendo uso do Lema 2.5, nós obtemos que $v \in H^3(\Omega)$ e $\nabla p \in H^1(\Omega)$. Nós concluímos que

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega)), \quad \nabla p \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)). \quad (4.106)$$

A prova do Lema 4.3 está completa. □

Por (4.97), (4.102) e (4.106) provamos 4.3 e finalmente o Teorema 4.5. □

4.3 Decaimento de soluções globais fortes em domínios suaves e ilimitados

Seja Ω um domínio ilimitado com fronteira de classe C^3 , consideremos o menor paralelepípedo ilimitado que contenha Ω , sendo

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 0 < x_1; 0 < x_2 < L_2; 0 < x_3 < L_3\}.$$

Teorema 4.6. Dado $u_0 \in H^2(\Omega) \cap V$ e Ω tal que

$$\frac{6^3}{\nu^5} \|u_0\|^2 \|u_t\|^2(0) - \frac{1}{2} \theta < 0, \quad (4.107)$$

onde $\theta = \nu \sum_{i=2}^3 \frac{\pi^2}{L_i^2}$, então o problema

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = 0 \text{ em } (0, t) \times \Omega; \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } (0, t) \times \Omega; \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, t), t > 0; \\ \lim_{x_1 \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega \end{cases} \quad (4.108)$$

possui uma solução única (u, p) tal que

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(\mathbb{R}^+; V), \\ \nabla p &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{3/2}(\Omega)). \end{aligned} \quad (4.109)$$

Adicionalmente,

$$\|u_t\|(t) + \|u\|_V(t) + \|\nabla p\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad (4.110)$$

onde C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Definimos uma função $\tilde{u}(x, t)$ como em (4.93), notemos que $u(x, t)$ é uma solução forte para (4.108) satisfazendo

$$\|u_t\|^2(t) \leq \|u_t\|^2(0) e^{-\theta t}, t > 0 \quad (4.111)$$

e

$$\|u\|_{H_0^1}^2(t) \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega)}) e^{-\frac{3}{2}\theta t}. \quad (4.112)$$

Para provar a existência de p , nós usamos a Proposição 1.1 de [33]: existe $p \in L_{loc}^2(\Omega)$, tal que

$$\nabla p = u_t - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^3 u_i u_{x_i}. \quad (4.113)$$

A regularidade de ∇p segue da mesma maneira como na prova da desigualdade (4.44),

$$\|\nabla p\|_{L^{3/2}(\Omega)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}.$$

A última estimativa, (4.111) e (4.112) completam a parte da existência no Teorema 4.6. A unicidade seguirá pelo Lema 2.7. Finalmente, completamos a prova do Teorema 4.6. \square

Regularidade local para domínios suaves ilimitados

Teorema 4.7. *Seja $u(x, t)$ a solução forte obtida no Teorema 4.6 e R_0 um número positivo arbitrário grande, definimos Ω_0 sendo a restrição de Ω para $x < R_0$. Então*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega_0)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)). \quad (4.114)$$

Adicionalmente,

$$\|u\|_{H^2(\Omega_0)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}, \quad (4.115)$$

onde $\theta = \sum_{i=2}^3 \left(\frac{\pi^2}{L_i^2} \right)$ e C depende de ν e $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Demonstração. Sejam R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 números reais positivos e ordenados da forma $R_i < R_{i+1}$ for $i = 0, \dots, 4$. Definimos para $i = 1, 2, 3, 4$, domínios $\Omega_i \subset ((0, R_{i+1}) \times \mathbb{R}^2) \cap \Omega$ com fronteira de classe C^3 coincidindo com a fronteira de Ω para $x_i \leq R_i$ e para $R_i < x_1 < R_{i+1}$ terá como fronteira, uma superfície de classe C^3 . Note que

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \Omega_4 \subset \Omega.$$

Definimos funções auxiliares $\xi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi_i(x) \leq 1$ tais que

$$\begin{cases} \xi_i(x) = 1 \text{ em } \Omega_{i-1}; \\ \xi_i(x) = 0 \text{ em } \Omega/\Omega_i \end{cases} \quad (4.116)$$

para $i = 2, 3, 4$.

Desde que estamos sob as condições do Teorema 4.6, uma solução forte de (4.108) satisfaz o seguinte problema elíptico:

$$\begin{aligned} \nu \Delta(\xi_i u) - \nabla(\xi_i p) &= \xi_i \left(u_t + (u \cdot \nabla)u \right) - p \nabla \xi_i \\ &+ 2\nu \sum_{j=1}^3 (D_j u D_j \xi_i) + \nu u \Delta \xi_i \text{ em } \Omega_i \times \mathbb{R}^+; \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\nabla \cdot (\xi_i u) = u \nabla \xi_i \text{ em } \Omega_i \times \mathbb{R}^+; \quad (4.118)$$

$$\xi_i u = 0 \text{ em } \partial\Omega_i \times \mathbb{R}^+. \quad (4.119)$$

Pelo Teorema 4.6, $\xi_i u$ é uma solução forte para (4.117)-(4.119). O lado direito de (4.117) pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{3/2}(\Omega))$ e $\|u\|_{L^{3/2}}(t)$ está sempre estimado por $C e^{-\frac{1}{2}\theta t}$ para todo t . Utilizando o Lema 2.5 para $i = 4$, nós obtemos

$$\|\xi_4 u\|_{W^{2,3/2}(\Omega_4)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (4.120)$$

Pelo Lema 2.4 (ii) e o fato de que $\xi_4 u = u$ em Ω_3 ,

$$\|u\|_{L^8(\Omega_3)}(t) \leq C \|u\|_{W^{2,3/2}(\Omega_3)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (4.121)$$

Isso implica para $i = 3$ que o lado direito de (4.117) pertence a $L^{8/5}(\Omega_3)$. Assim

$$\|u\|_{W^{2,8/5}(\Omega_2)}(t) \leq \|\xi_3 u\|_{W^{2,8/5}(\Omega_3)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (4.122)$$

Pelo Lema 2.4 (i), $W^{2,8/5}(\Omega_2) \subset L^\infty(\Omega_2)$, assim

$$\|\xi_3(u \cdot \nabla)u\|_{L^2(\Omega_2)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}.$$

Para $i = 2$, o lado direito de (4.117) pertence a $L^2(\Omega_1)$. Isso implica

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)}(t) \leq \|\xi_2 u\|_{H^2(\Omega_2)}(t) \leq C e^{-\frac{1}{2}\theta t}. \quad (4.123)$$

Assim

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega_1)). \quad (4.124)$$

Lema 4.4 (Efeito de suavização). *Sob as condições do Teorema 4.7, a solução $u(x, t)$ fornecida no Teorema 4.7 é tal que*

$$u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0)). \quad (4.125)$$

Demonstração. Defina uma função auxiliar $\xi_1(x) \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi_1(x) \leq 1$ em Ω_1 e

$$\begin{cases} \xi_1(x) = 1, & x \in \Omega_0; \\ \xi_1(x) = 0, & x \in \Omega/\Omega_1 \end{cases} \quad (4.126)$$

e para cada $t_0 > 0$ não singular, considere o seguinte problema elíptico:

$$\begin{aligned} \nu \Delta(\xi_1 u) - \nabla(\xi_1 p) &= \xi_1 \left(u_t + (u \cdot \nabla)u \right) - p \nabla \xi_1 \\ + 2\nu \sum_{j=1}^3 (D_j u D_j \xi_1) + \nu u \Delta \xi_1 &\equiv f(x) \text{ em } \Omega_1; \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$\nabla \cdot (\xi_1 u) = u \nabla \xi_1 \equiv g(x) \text{ em } \Omega_1; \quad (4.128)$$

$$\xi_1 u = 0 \text{ em } \partial\Omega_1. \quad (4.129)$$

Podemos verificar, como no Lema 4.1 que $f \in H^1(\Omega_1)$, $g \in H^2(\Omega_1)$. Pelo Lema 2.5, $\xi_1 u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_1))$. Isso implica que $u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3(\Omega_0))$. \square

Como $\Omega_0 \subset \Omega_1$, então (4.124) e o Lema 4.4 provam o Teorema 4.7. \square

Proposição 4.1. *Sob as condições do Teorema 4.7, a solução $u(x, t)$ de (4.108) é tal que*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_{loc}^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H_{loc}^3(\Omega)). \quad (4.130)$$

Demonstração. A demonstração é análoga a da Proposição 3.3. Basta escolher R_0 suficientemente grande para o conjunto K compacto dado de forma que $K \subset \Omega_0$ e temos a regularidade localmente. \square

Publicações:

O trabalho desenvolvido nesta tese, deu origem às seguintes publicações:

N. A. Larkin, M. V. Padilha, Global Regular Solutions to One Problem of Saut-Temam For the 3D Zakharov-Kuznetsov Equation, Applied Mathematics & Optimization, v. 77, (2016) 253-274.

N. A. Larkin, M. V. Padilha, Decay of solutions for 2D Navier-Stokes equations posed on rectangles and on a half-strip, Open Access Journal of Mathematical and Theoretical Physics, ISSN: (2018) 2641-9335

N. A. Larkin, M. V. Padilha, Decay of solutions for 2D Navier-Stokes equations posed on Lipschitz and smooth bounded and unbounded domains, Journal of Differential Equations; v. 266, Issue 11, (2019) 7545-7568.

Apresentações:

Alguns resultados presentes nesta tese foram apresentados em:

IV Symposium on Partial Differential Equations - Global Regular Solutions to One Problem of Saut-Temam for the 3D Zakharov-Kuznetsov Equation. 23rd to 25th November 2016 (Maringá - PR)

XII Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações - Decay of solutions for the 2d Navier-Stokes equations posed on rectangles and on a half- strip. 7th to 9th, November 2018 (Brasília - DF)

Seminários do PMA - Navier-Stokes Equations - Introduction, Goals and a result on Smoothing Effect. 10th September 2019 (Maringá - PR)

XIII Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações - Smoothing Effect for the 2d Navier-Stokes Equations. 6th to 8th, November 2019 (Florianópolis - SC)

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [2] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York: Springer, 2011.
- [3] C. Cao, E. D. Titi, Regularity Criteria for the Three-dimensional Navier-Stokes Equations Indiana University Mathematics Journal, Vol. 57, 6 (2008) 2643-2661.
- [4] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961) 308-340.
- [5] C. L. Fefferman, Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation <http://claymath.org> (2000).
- [6] E. A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations New York: McGraw-Hill (1955).
- [7] P. Deuring, Strong Solutions of the Navier-Stokes System in Lipschitz Bounded Domains Math. Nachr. 171 (1995) 111-148.
- [8] D. E. Edmunds, Asymptotic behavior of solutions of the Navier-Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal. 22 (1966) 15-21.
- [9] C. Foias, J.C. Saut, Asymptotic behavior as $t \rightarrow \infty$ of solutions of Navier-Stokes equations in “Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications”, College of France Seminar, Vol. IV, (H Brezis J. L. Lions, Eds.), Pitman, (1983) 74-86.
- [10] J. G. Heywood, The Navier-Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions, Indiana University Mathematics Journal, Vol. No. 5 (1980), 639-681.
- [11] H. S. Jeong, N. Kim, M. Kwak, Regularity of Solutions of 3D Navier-Stokes Equations in a Lipschitz Domain for Small Data. Bull Korean Math. Soc. 50, 3 (2013), 753-760.
- [12] C. Hu, Navier-Stokes equations in 3D thin domains with Navier Friction boundary condition Journal of Differential Equations 236 (2007) 133-163.

- [13] D. Iftimie, G. Raugel, G. Sell, Navier-Stokes Equations in Thin 3D Domains with Navier Boundary Conditions Indiana University Mathematics Journal Vol. 56, No. 3 (2007) 1083-1156.
- [14] T. Kato, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equations. Advances in Mathematics Supplementary Studies, Stud. Appl.Math. 8, (1983). 93-128
- [15] A. A. Kiselev, O. A. Ladyzhenskaya, On the existence and uniqueness of the solution of the non-stationary problem for a viscous, incompressible fluid Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., Volume 21, Issue 5 (1957) 655–680.
- [16] A.I. Koshelev, A priori estimates in L_p and generalized solutions of elliptic equations and systems, Amer. Math. Soc. Transl., (2) 20 (1962) 105-171.
- [17] O. Ladyzhenskaya, Solution “in the Large” of the Nonstationary Boundary Value Problem for the Navier-Stokes System with Two Space Variables , Comm. Pure Applied Math, 12 (1959) 427-433.
- [18] O. A. Ladyzhenskaya, The Boundary Value problems of Mathematical Physics,, Springer Verlag: New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985.
- [19] O. A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York, English translation, Second Edition, 1969.
- [20] N. A. Larkin, M. V. Padilha, Global Regular Solutions to One Problem of Saut-Temam For the 3D Zakharov-Kuznetsov Equation, Applied Mathematics and Optimization, v. 77, (2016) 253-274.
- [21] N. A. Larkin, M. V. Padilha, Decay of solutions for 2D Navier-Stokes equations posed on Lipschitz and smooth bounded and unbounded domains, Journal of Differential Equations; v. 266, Issue 11, (2019) 7545-7568.
- [22] N. A. Larkin, E. Tronco, Regular solutions of the 2D Zakharov Kuznetsov equation on a half-strip. Journal of Differential Equations v. 254, (2012) 81-101.
- [23] N. A. Larkin, Decay of Strong Solutions for 4D Navier-Stokes Equations Posed on Lipschitz Domains. Advances in Mathematical Physics 4 (2018) 1-7.
- [24] J. Leray, Essai sur le mouvement d’un fluide visqueux emplissant l’espace, Acta Math, 63 (1934) 193-248.
- [25] J. L. Lions, Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non linéaires, Dunod Dunod, Paris, 1969.
- [26] J. L. Lions, G. Prodi, Un theoreme d’existence et d’unicite dans les equations de Navier-Stokes en dimension 2 C. R. Acad., Sci. Paris, 248 (1959) p.3519-3521;
- [27] J. Marcinkiewicz, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Studia Mathematica 8.1 (1939) 78-91.

- [28] L. A. Medeiros, J. L. Ferrel, Elliptic Regularization and Navier-Stokes System Mem. Differential Equations Math. Phys. 12 (1997) 165-177.
- [29] C.L. Navier, Annales de Chimie et de Physique, XIX, 244 (1821).
- [30] Padilha, M. V. Equação de Korteweg-de Vries em um intervalo limitado. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) Programa de Pós Graduação em Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2012.
- [31] G. de Rham, Variétés différentiables, Herman, Paris (1960).
- [32] A. V. Steklov, The problem of cooling of an heterogeneous rigid rod, Commun. Kharkov Math. Soc., Ser. 2, 5 (1896) 136-181 (Russian).
- [33] R. Temam, Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [34] R. Temam, M. Ziane, Navier-Stokes Equations in Three-Dimensional Thin Domains With Various Boundary Conditions Advances in Differential Equations, 1 (1996) 499-546.