TALES APARECIDO SANCHES MACEDO

JOGOS COMBINATÓRIOS DO TIPO NIM COMO ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA

Maringá-PR, Brasil
25/02/2022

TALES APARECIDO SANCHES MACEDO

JOGOS COMBINATÓRIOS DO TIPO NIM COMO ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol

Maringá-PR, Brasil
25/02/2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Macedo, Tales Aparecido Sanches
M141j Jogos combinatórios do tipo Nim como estratégia pedagógica / Tales Aparecido Sanches Macedo. -- Maringá, 2022.
54 f. : il., color.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2022.

1. Jogos combinatórios. 2. Jogo de Nim. 3. Estratégia vencedora. I. Ferraiol, Thiago Fanelli, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 512.7

Edilson Damasio CRB9-1.123

TALES APARECIDO SANCHES MACEDO

JOGOS COMBINATÓRIOS DO TIPO NIM COMO ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Profa. Dra. Ana Lúcia da Silva
UEL - Universidade Estadual de Londrina

Marcos A. Verdi

Prof. Dr. Marcos André Verdi
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovado em: 25 de fevereiro de 2022
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática – Bloco F67

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que, quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por sempre me abençoar.

A Nossa Senhora de Aparecida, por sempre me proteger.

Aos meus pais Amarildo e Cristina, que sempre me incentivaram ao estudo e sempre me apoiaram com muito amor e carinho.

Em especial, à minha irmã, Tatiane, que sempre me ajudou e influenciou nos estudos.

A minha namorada Gabriele por compreender minha ausência nos momentos de estudos, pelos conselhos e por sempre me apoiar.

Ao meu orientador e professor Dr. Thiago Fanelli Ferraiol, pela paciência, conselhos, incentivos, ideias e orientações desse trabalho.

Aos professores do Centro de Ciências Exatas – UEM, por todo o conhecimento compartilhado comigo. Sem dúvidas, estes contribuíram para minha evolução.

Aos professores do PROFMAT – UEM, por todos os ensinamentos que puderam me oferecer para chegar até aqui.

Aos meus amigos Fernandinho, Leandro, Letícia e Rubens por todo o apoio.

Enfim, obrigado a todos

“A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.”

George Polya

RESUMO

O presente trabalho aborda um tema significativo para o ensino aprendizagem da matemática que são os Jogos Combinatórios através do Jogo Nim, onde o mesmo torna-se uma excelente alternativa para desenvolver a capacidade dos alunos de atuarem como sujeitos na construção de seus conhecimentos. Após breve apresentação da história do jogo e também a Teoria dos Jogos Combinatórios, será trabalhado o Jogo Nim - um jogo imparcial que participam dois jogadores se alternando entre as jogadas, escolhendo uma das pilhas e removendo uma quantidade qualquer de peças. O trabalho se desenvolve em torno da elaboração de estratégias vencedoras. Serão apresentadas atividades práticas, desde a utilização de estratégias simples até a mais avançada, levando ao conhecimento das teorias matemáticas que levam a estratégia vencedora do Jogo Nim.

Palavras-chave: Jogos Combinatórios, Jogo de Nim, Matemática, Estratégia vencedora.

ABSTRACT

The present work addresses a significant theme for the teaching and learning of mathematics, which are Combinatorial Games through the Nim Game, where it becomes an excellent alternative to develop students' ability to act as subjects in the construction of their knowledge. After a brief presentation of the game's history and also the Theory of Combinatorial Games, the Nim Game will be worked on - an impartial game in which two players take turns alternating between moves, choosing one of the piles and removing any number of pieces. The work is developed around the elaboration of winning strategies. Practical activities will be presented, from the use of simple strategies to the most advanced, leading to the knowledge of the mathematical theories that lead to the winning strategy of the Nim Game.

Keywords: Combinatorial Games, Neem Game, Mathematics, Winning Strategy.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 PROBLEMA

Diante das dificuldades enfrentadas no ensino da matemática, é recomendável que os professores busquem, gradativamente, priorizar não apenas a reprodução, mas sim a construção dos conhecimentos, sendo que, para tanto, devem ser trabalhadas atividades que despertem o interesse e a motivação dos alunos, permitindo uma interação entre professor, aluno e saber matemático possibilitando assim, a busca de definições dos conceitos a serem construídos.

Dentre tais atividades, destacam-se os jogos matemáticos, que têm valores educacionais intrínsecos, assim, acredita-se que a utilização deste recurso em sala de aula é uma excelente alternativa para desenvolver a capacidade dos alunos de atuarem como sujeitos na construção de seus conhecimentos.

Um conjunto de jogos matemáticos, em especial, vem sendo estudados por apresentarem uma matemática atraente. São jogos analisados com objetivo de descobrir uma forma de jogar que permite a um dos jogadores sempre chegar à vitória usando um caminho calculado e baseado numa teoria matemática. Esses jogos compõem uma área da matemática denominada ‘Teoria dos Jogos’ que tem o intuito de analisar fatos que acontecem quando dois ou mais jogadores interagem entre si.

Com o desenvolvimento desses jogos, criou-se uma área mais específica da Teoria dos Jogos, conhecida como Teoria dos Jogos Combinatórios, ainda pouco explorada no Brasil, mas que é muito pesquisada em outros países. A Teoria dos Jogos Combinatórios estuda jogos procurando uma solução, isto é, uma maneira de jogar que permita a um dos jogadores tomar decisões que o levem à vitória. Muitas vezes não é possível chegar a uma solução completa para todos os jogos, como é o caso do jogo de Xadrez, que vamos abordar mais a frente. Já em outros jogos, são encontradas soluções para alguns casos. Assim, esses jogos podem ser divididos em classes de acordo com algumas características especiais de suas regras e soluções.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste estudo é compreender um pouco da história dos jogos, em particular dos jogos combinatórios e propor algumas atividades para auxiliar no ensino de matemática e também conhecer um jogo combinatório especial conhecido como Jogo de Nim. Esse jogo tem uma importância para a Teoria dos jogos Combinatórios, pois a partir de sua análise e solução abriu-se caminho para os estudos de outros jogos, encontrar a solução dos mesmos através da comparação e até mesmo do uso da teoria matemática criada para resolver o Jogo de Nim.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Para realizar o objetivo proposto, estruturamos esta dissertação da seguinte forma:

No capítulo 2, estudaremos um pouco sobre a história dos jogos e sua origem, bem como a importância dos jogos no processo de ensino e aprendizagem, apresentando algumas referências bibliográficas que permitem um embasamento teórico.

No capítulo 3, vamos conhecer um pouco da Teoria dos Jogos Combinatórios, suas características, dando prioridade a temas que permitem entender a matemática envolvida na solução do Jogo de Nim.

No capítulo 4, abordaremos sobre o jogo de Nim, bem como sua origem, suas regras e formas de jogar e principalmente qual a forma que um jogador pode utilizar para vencer esse e outros jogos que são variações do Jogo de Nim, ou seja, as estratégias vencedoras, tendo como uma das mesmas o sistema binário.

Ao final, no capítulo 5 vamos propor algumas atividades com objetivo didático de desenvolver o raciocínio lógico, fazendo com que possa se aplicar a solução do Jogo de Nim no contexto escolar.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DOS JOGOS

2.1 HISTÓRIA DOS JOGOS

A história do jogo é bastante antiga. Não encontramos uma data exata para o seu início, porém, há relatos que alguns jogos tiveram sua origem nos ritos religiosos, nas festas culturais, nas atividades de imitação, aos quais foram incluídos as lendas, ritos, mitos e arte. Algumas atividades lúdicas eram associadas à religião, que tinha como objetivo preparar os jovens para a morte e outras vezes estavam relacionadas as estações do ano no período da colheita.

> Os povos antigos, ao praticarem os jogos, desenvolveram suas culturas, seus costumes por essa razão, as formas lúdicas de conduta manifestavam-se por meio da adivinhação, com oráculos em transe, predição pelos astros, ou sinais na natureza que indicavam presságios quase sempre representados nos jogos de tabuleiros. Tais jogos, em geral, representavam combates, apresentando, também, características religiosas que envolviam oferendas em troca de luz e calor emanados pelo sol, que representava o grande deus símbolo da vida e da fertilidade. (CARNEIRO, 2003, p. 12).

Na Antiguidade os jogos eram praticamente de conquista com caráter religioso e estes jogos desenvolviam-se ao redor dos grandes centros, dos quais só participavam a nobreza e a alta sociedade.

Segundo Nallin (2005, p.03):

> O jogo advém do século XVI, e os primeiros estudos foram realizados em Roma e na Grécia, destinados ao aprendizado das letras. Esse interesse decresceu com o surgimento do cristianismo, que visava uma educação disciplinadora, com memorização e obediência. A partir deste momento histórico, os jogos foram vistos como sendo delituosos, ou seja, que levam à prostituição e à embriaguez. (NALLIN, 2005, p. 03).

A palavra jogo surge do latim "incus" que significa divertimento ou brincadeira. Nos dicionários a palavra jogo nos remete as atividades cuja natureza ou finalidade é a diversão e o entretenimento.

Segundo o dicionário Aurélio (1999, p.1163), jogo é definido como:

> [...] S.m. 1. Atividade física ou mental organizada por um sistema de regras que definem a perda ou o ganho: jogo de damas; jogo de futebol. 2. Brinquedo, passatempo, divertimento: jogo de armar; jogo de salão. 3. Passatempo ou loteriaq sujeito a regras e no qual, as vezes, se arrisca dinheiro: jogo de cartas; jogo do bicho. [...] (AURÉLIO, 1999, p.1163).

Atualmente existem vários tipos de jogos, são eles:jogos de mesa, de caneta e papel, de cartas, de dados, de tabuleiro, musicais e jogos interativos. Os jogos de mesa são jogos que estão confinados a uma área pequena, geralmente em mesas e que exigem pouco esforço físico, pois basicamente os movimentos são para pegar e mover peças, como por exemplo: o jogo de damas, o tamgram, entre outros.

Segundo Neto & Silva (2004, p.16), os jogos matemáticos são chamados puzzles, ou seja,

> [...] problemas e atividades que vão de uma simples charada à questões matemáticas ainda em aberto. A história da matemática mostra que grandes matemáticos de todos os tempos se dedicaram ao que, na altura, se poderia chamar jogos. Assim nasceram alguns ramos da matemática.

Os mesmos autores enfatizam que foi nos anos 20 que foi descoberto o jogo com regras, sendo este o mais antigo, tratando-se do jogo mais antoigo, florescido na Mesopotâmia (NETO; SILVA, 2004).

Daí foram surgindo vários jogos de regras. Senet era uma versão do jogo de Ur, regras muito semelhantes. O "Cães e Chacais" era outro jogo egípcio muito popular, sendo também um jogo de corrida; o jogo do moinho é tipico de uma família de jogos de alinhamento, onde também é conhecido desde os tempos egípcios, mais foi praticado durante toda a época medieval.

Em 287-212 a.C., Arquimedes descreveu o puzzle geométrico chamado Stomachion, no estilo do Tangram, composto por quatorze figuras planas que podem formar um quadrado (NETO; SILVA, 2004).

Os jogos de tabuleiro floreceram na Idade média, onde o que persistiu entre eles foi o tabuleiro de Fithcheall. Em 1883, Edouard Lucas, um matemático Frances, inventou as Torres de Hanoi, sendo este um puzzle ainda muito popular e estudado por estar relacionado a várias áreas da matemática.

O antepassado mais antigo do xadrez parece ser o Choturanga, que se jogava na Índia no século VI. Este foi evoluindo muito durante o tempo e a partir do século XVII que o xadrez se tornou universal (NETO; SILVA, 2004).

2.2 IMPORTÂNCIA DOS JOGOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Segundo as autoras Rizzi e Haydt (1997, p. 11),

> (...) O estudo mais completo sobre a evolução do jogo na criança é de autoria de Jean Piaget, que verificou este impulso lúdico já nos primeiros meses de vida do bebê, na forma do chamado jogo de exercício sensório motor; do segundo ao sexto ano de vida predomina sob a forma de jogo simbólico, para se manifestar, a partir da etapa seguinte, através da prática do jogo de regras.

Segundo as mesmas autoras, há três categorias de jogos que caracterizam a evolução da criança conforme a fase de desenvolvimento em que aparecem:

1) Jogo de exercício sensório-motor: é através dos exercícios motores mais simples realizados pela criança que surgem as atividades lúdicas. A criança realiza gestos repetitivos e movimentos simples buscando o prazer funcional, a exploração do seu corpo e o seu domínio.

2) Jogo simbólico: no período que compreende os 2 aos 6 anos de idade, a manifestação do lúdico predomina como jogo simbólico, ou seja, o jogo de ficção, a imaginação e a imitação se fazem presentes com a função de satisfação pessoal, transformando o real conforme seus desejos, auxiliando a criança a compreender e resolver seus conflitos afetivos, a inverter papeis, a compensar suas necessidades, reproduzindo situações vivenciadas. "O jogo simbólico se desenvolve a partir dos esquemas sensório-motores que, à medida que são interiorizados, dão origem à imitação e, posteriormente, à representação". (RIZZI e HAYDT, 1997, p. 12).

3) Jogo de regras: se manifesta por volta dos 5 anos, se desenvolvendo principalmente dos 7 aos 12 anos, predominando por toda a vida, são jogos regulamentados por regras, em que as crianças jogam juntas segundo regras pré-estabelecidas, os jogadores podem assumir papeis interdependentes, opostos ou cooperativos, planejando as estratégias para obter um melhor desempenho. O jogo se torna uma atividade social com obrigações, ordenações ou regras que não devem ser violadas.

Os jogos de regras executados em grupos estimulam o convívio social, a capacidade construtiva da criança, oferecendo-lhe a oportunidade de pensar de forma independente, inventar, experimentar, descobrir, tomar consciência de suas estratégias e dos colegas, assumindo e analisando seus erros. Os jogos de regras possibilitam a troca de experiências, a necessidade de argumentar para defender as próprias ideias, favorecendo a capacidade de ouvir o outro, de superar conflitos e contradições.

Dessa mesma forma Rizzi e Haydt (1997), acreditam que os jogos de regras podem e devem ser usados como recurso pedagógico, pois ajudam a criança a ordenar o tempo, o espaço e seus movimentos, desenvolvendo as áreas cognitivas, afetivas e motoras, ajudando também no desenvolvimento da autonomia e da socialização.

Para Chateau (1987) o jogo manifesta na criança a curiosidade pessoal e o sucesso contribuindo também no desenvolvimento da capacidade construtiva, da imaginação e da capacidade de sistematização, em que a criança exercita o imaginário e ao mesmo tempo está se preparando para a vida, para futuras realizações concretas, as diversas situações de jogos contribuem para a formação da personalidade e também para a autonomia. O jogo não é apenas um exercício ou um divertimento qualquer, mas sim uma fonte preciosa onde o pensamento começa a se desenvolver. É por meio do jogo que se consegue contemplar, projetar e construir.

Kishimoto (1997, p. 95 e 96) ressalta que

> O jogo não pode ser visto, apenas, como divertimento ou brincadeira para desgastar energia, pois ele favorece o desenvolvimento físico, cognitivo, afetivo, social e moral. Para Piaget (1967), o jogo é a construção do conhecimento, principalmente, nos períodos sensório-motor e préoperatório. Agindo sobre os objetos, as crianças, desde pequenas, estruturam seu espaço e o seu tempo, desenvolvem a noção de causalidade, chegando à representação e finalmente, à lógica.

Os jogos educativos passaram a serem vistos como um recurso para o ensino, possibilitando sua expansão no mundo como um todo. Mas, isso só aconteceu com o aparecimento de uma organização religiosa chamada Companhia de Jesus, pois, a mesma utilizava o processo educacional como sua principal arma (NALLIN, 2005). A Companhia de Jesus foi criada por um grupo de estudantes da Universidade de Paris, sob a liderança de Iñigo López de Loyola (1491-1556), mais conhecido como Ignácio de Loyola.

Portanto, foi a partir deste movimento ou momento histórico que os jogos foram entendidos como algo importante e fundamental para o processo de ensino-aprendizagem das crianças, fortalecendo a imagem do jogo educativo como algo importante para a aquisição dos conteúdos escolares.

A partir deste momento, foram surgindo estudos sobre a importância do jogo no processo de ensino-aprendizagem das crianças e aos poucos os mesmos foram sendo inseridos na formação de professores e discutidos com pais, estudiosos, entre outros.

Vários autores abordam sobre o tema jogo, alguns trazem a definição sobre jogo, mas para Huizinga apud Bueno (2010, p. 24) “o jogo para a criança não é igual ao jogo dos adultos, pois é preciso pensar que para a criança trata-se de um momento em que, em geral ocorre aprendizagem e, em geral, para o adulto, é recreação”.

O jogo para as crianças tem uma importância muito grande, pois é através dele que a mesma pode aprender sobre diversos aspectos que se tornam importantes para o desenvolvimento do ser humano.

De acordo com Kishimoto (1998) apud Bueno (2010) o jogo, o brinquedo e as brincadeiras acabam sendo termos que se misturam e por alguns momentos se confundem. “O jogo é uma atividade que contribui para o desenvolvimento da criatividade da criança tanto na criação como também na execução. Os jogos são importantes, pois envolvem regras como ocupação do espaço e a percepção do lugar.” (BUENO, 2010, p. 25) É uma atividade mais estruturada, com regras explícitas e determinadas previamente e podem ser utilizadas tanto por crianças como por adultos. São exemplos de jogos: o jogo de cartas, botão, dominó, tabuleiro, futebol, voleibol, basquete, mímica, entre outros.

Segundo Kishimoto (1993, p. 15)

> Os jogos têm diversas origens e culturas que são transmitidas pelos diferentes jogos e formas de jogar. Este tem função de construir e desenvolver uma convivência entre as crianças estabelecendo regras, critérios e sentidos, possibilitando assim, um convívio mais social e democracia, porque enquanto manifestação espontânea da cultura popular, os jogos tradicionais têm a função de perpetuar a cultura infantil e desenvolver formas de convivência social.

Para Nallin o significado traz consigo vários simbolismos, “reforça a motivação e possibilita a criação de novas ações e o sistema de regras, que definem a perda ou o ganho.”Ainda, “nem todos os jogos e brincadeiras são sinônimos de divertimento, pois a perda muitas vezes pode ocasionar sentimento de frustração, insegurança, rebeldia e angústia”. (NALLIN, 2005, p. 13)

3 JOGOS COMBINATÓRIOS

3.1 CONCEITO DE JOGOS COMBINATÓRIOS

Um jogo combinatório é um jogo sequencial com informação completa, isto é, são jogos onde os jogadores jogam alternadamente e sabem tudo sobre a posição corrente do jogo e os possíveis lances a cada momento (TEIXEIRA, 2013). Em particular, "informação completa"significa que o elemento de sorte/azar/probabilidade não pode estar presente no jogo, nem pode haver "cartas escondidas"ou algo do gênero.

Alguns jogos tradicionais do cotidiano são jogos combinatórios, como por exemplo, o Jogo da Velha, Xadrez e Damas. Esses jogos além de desenvolver o raciocínio lógico dedutivo e a formação de estratégias para a solução de problemas, também faz com que o estudante estimule a sua criatividade, promovendo a comunicação com outro estudante, favorecendo o desenvolvimento da linguagem e da cooperação. (KISHIMOTO, 2001)

Nesse sentido, vamos entender um pouco de como funcionam os jogos combinatórios. Para que um jogo possa ser considerado combinatório, precisamos que sejam estabelecidos alguns elementos como um padrão inicial para começar o jogo, um conjunto de jogadas ou movimentos pré-estabelecidas, que levam o jogo de um estado para outro a fim de levar o jogo a um estado final. É um jogo onde os jogadores jogam alternadamente e sabem tudo sobre a posição corrente do jogo e os possíveis lances a cada momento. Entretanto, se em algum jogo surgir um elemento de sorte/azar ou alguma probabilidade, então este não poderá ser considerado um jogo combinatório.

Pode-se considerar o jogo de xadrez, por exemplo. Ele pode ser considerado um jogo combinatório, pois possui um tabuleiro onde se coloca um padrão inicial para que o jogo se inicie, têm também, movimentos pré-estabelecidos entre as peças que a cada movimento levam o jogo de um estado para outro, a fim de nos levar ao "xeque mate, fim do jogo". Uma forma para se medir a complexidade do jogo de xadrez é utilizando o chamado "número de Shannon". Ele foi calculado pela primeira vez por Claude Shannon, o pai da teoria da informação. De acordo com ele, em média, 40 movimentos são feitos no jogo de xadrez e cada jogador escolhe um movimento entre 30 (embora possa haver menos movimentos, bem como nenhum - como no caso do xeque-mate ou empate - ou muitos como 218). Entretanto, $(30 \times 30)^{40}$, isto é, 900^{40} jogos de xadrez são possíveis. Este número é aproximadamente 10^{120}, valor que se obtém ao resolver a equação: $900^{40} = 10^{x}$ que é $x = 40 \times log\, 900$. É claro que, no xadrez, as combinações possíveis entre as jogadas de acordo com cada movimento são muitas, mas o intuito é apenas mostrar que é um jogo combinatório.

Os jogos combinatórios podem ser divididos em duas classes: jogos parciais e imparciais. Para que o jogo combinatório possa ser considerado parcial o conjunto de movimentos possíveis dos jogadores deve ser diferente em qualquer momento do jogo. Por exemplo, nos jogos como xadrez e damas, os jogadores controlam dois conjuntos diferentes de peças, as pretas e brancas, portanto, são considerados parciais por conta de um jogador não poder movimentar as peças do outro. Já se considera um jogo combinatório de imparcial quando o conjunto de movimentos é igual para ambos os jogadores. Neste caso, um exemplo clássico é o jogo da velha, pois, apesar dos jogadores controlarem peças diferentes, um movimento significa colocar uma peça em um espaço vazio. Como em qualquer estado às posições vazias são as mesmas para ambos, os movimentos possíveis são iguais.

De acordo com Teixeira (2013), os jogos combinatórios imparciais possuem resultados mais generalizados e de maior relevância. A fim de analisar os diferentes jogos, considera-se que ambos os jogadores são jogadores racionais e sempre tomam o melhor movimento a ser feito em seu benefício.

Jogos imparciais são jogos onde não há distinção entre os jogadores, não há vantagem intrínseca para algum jogador, pois, o vencedor será determinado apenas por quem começa. Vamos generalizar alguns conceitos que valem para a grande maioria dos jogos dessa classe:

- São jogados entre dois jogadores;
- Existe um número finito de posições possíveis durante o jogo, e uma posição inicial;
- Existem regras definidas que descrevem os movimentos que um jogador pode fazer a partir de uma posição para chegar em outra;
- Os jogadores se alternam em suas jogadas;
- Aquele que não puder efetuar um movimento perde;
- As regras são tais que, em algum momento, um dos jogadores não poderá efetuar mais movimentos (o jogo é finito);
- Ambos os jogadores sabem de todos os detalhes do jogo a todo o momento, isto é, o jogo é de informação completa (não há informações privadas);
- Não existem fatores aleatórios, como por exemplo jogar dados, embaralhamento, etc.
- Todos os movimentos podem ser feitos pelos dois jogadores, isto é, não existem movimentos que apenas um dos jogadores pode efetuar.

Entre os jogos imparciais de estratégia, um dos exemplos mais importantes é o Jogo do Nim, que estudaremos no próximo capítulo. Algumas das principais características dos jogos imparciais estão presentes no jogo Nim, a saber: é jogado por dois participantes, com jogadas são alternadas, perfeita informação, sendo que os dois jogadores possuem, em todos os momentos, informação completa sobre a situação. Analisando desta forma, pode-se dizer que o dominó e o baralho, não são jogos imparciais, pois o jogador não tem acesso às informações do outro. Nim é um jogo determinístico, não há interferências de fenômenos aleatórios, ou seja, não é jogo de sorte.

4 JOGOS NIM

4.1 CONCEITO DO JOGO NIM

Vimos no capítulo 2 que os jogos são tão antigos quanto a humanidade. O jogo sempre esteve inserido na sociedade. Nas pesquisas relacionadas às civilizações passadas sempre encontram algum registro de atividades lúdicas praticada pelos povos. Com os jogos do tipo Nim não é diferente, ele foi criado muito antigamente, existem relatos de que na China da Idade Média esse jogo já era jogado pelos soldados. Mas o jogo foi formalizado no começo do século XX por Charles Leonard Bouton, que também desenvolveu sua teoria matemática. (ALMEIDA; CARVALHO, 2016).

Para Bouton, o Nim é “extremely simple and complete mathematical theory”, traduzido para o português, é um jogo simples que apresenta uma teoria matemática completa. A origem do nome é desconhecida, porém percebe-se que a palavra nim espelhada forma a palavra “win”, que em inglês significa ganhar (ALMEIDA; CARVALHO, 2016).

Apropriando-se das palavras de Almeida e Carvalho (2016), em relação às classificações de jogos feitas por Kishimoto (2001) e Grando (1995) o Jogo do Nim se enquadra nas categorias “jogo educativo”, pois auxilia de maneira mais prazerosa no ensino e aprendizagem dos alunos e “jogos de estratégia” devido o jogador, neste caso o estudante, precisa elaborar uma estratégia para vencer, dependendo somente das ações do jogador.

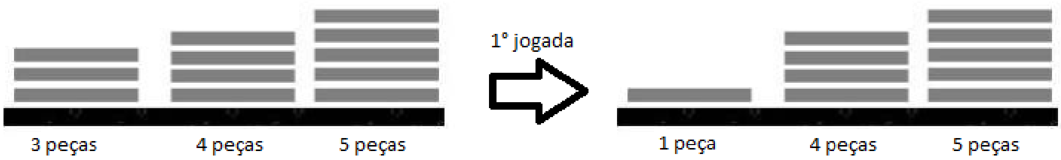
Segundo a Teoria dos jogos combinatórios, Nim é um jogo imparcial, ou seja, os movimentos permitidos dependem apenas da posição atual, e não de qual jogador vai fazer a jogada. Um conceito importante de Teoria Aritmética dos Números utilizado na caracterização de Nim é a representação binária de um número que vamos ver mais à frente.

4.2 REGRAS DO JOGO NIM

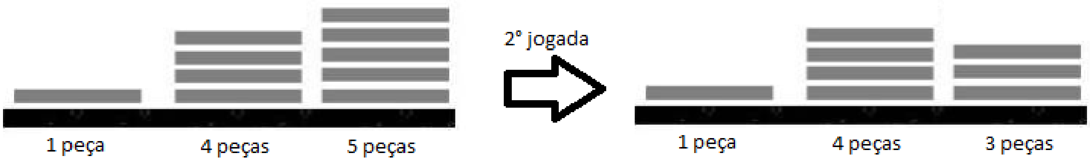
O jogo de Nim possui as seguintes características: participam dois jogadores, possuem três pilhas, contendo peças, cada uma das pilhas pode ter qualquer número de objetos, e os jogadores podem remover quantos objetos desejarem, desde que sejam da mesma pilha, os jogadores alternam jogadas, escolhendo uma das pilhas e para remover uma quantidade qualquer de peças. Na versão normal, ganha o jogador que retirar o último objeto da última pilha restante. O jogo também pode ser jogado na versão misère, onde o jogador que retirar o último objeto perde.

Como exemplo, consideramos os jogadores A e B em um jogo normal de Nim com

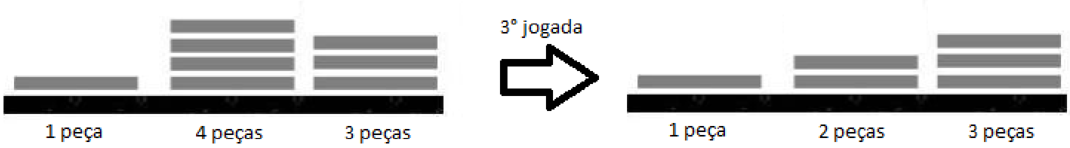
3 pilhas com 3, 4 e 5 objetos:



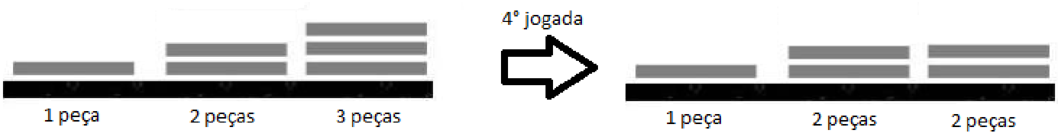
Na primeira jogada o jogador A tira duas peças da primeira pilha trocando o jogo da situação (3, 4, 5) para (1, 4, 5).



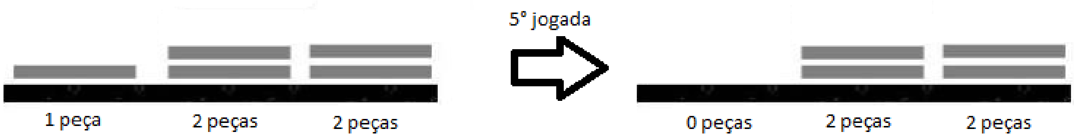
Na segunda jogada o jogador B tira duas peças da terceira pilha trocando o jogo da situação (1, 4, 5) para (1, 4, 3).



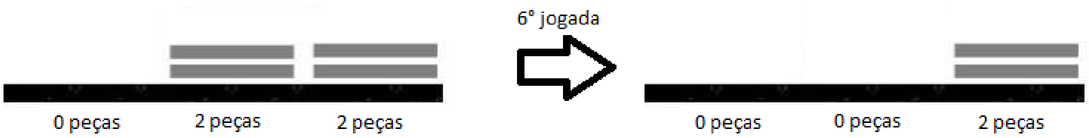
Na terceira jogada o jogador A retira duas peças da segunda pilha, trocando o jogo da situação (1, 4, 3) para (1, 2, 3).



Na quarta jogada, o jogador B retira 1 peça da terceira pilha, trocando o jogo da situação (1, 2, 3) para (1, 2, 2).



Na quinta jogada, o jogador A retira 1 peça da primeira pilha, trocando o jogo da situação (1, 2, 2) para (0, 2, 2).



Na sexta jogada, o jogador B retira 2 peças da segunda pilha, trocando o jogo da situação (0, 2, 2) para (0, 0, 2). Nesse momento, o jogador A retira as duas últimas peças da terceira pilha vencendo o jogo.

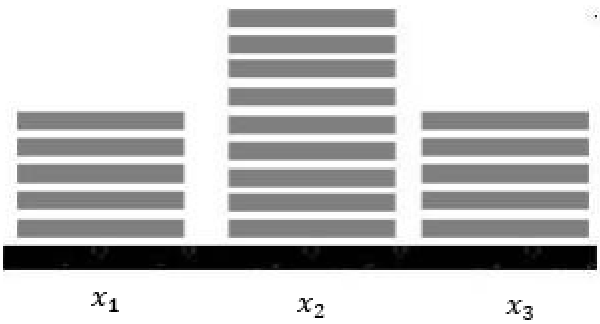
4.3 ESTRATÉGIA VENCEDORA: PARTE 1

O objetivo do jogo é desenvolver os conceitos e a estratégia para sempre vence-lo. Portanto, a introdução dos conceitos será baseada na estratégia ganhadora.

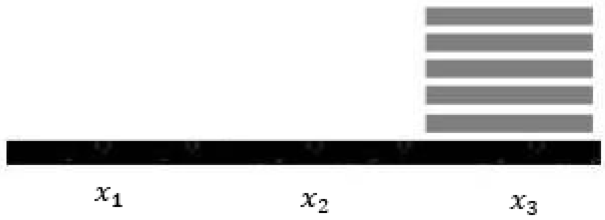
Os jogos são uma importante ferramenta na tarefa de facilitar a construção de conhecimentos, pois, ajudam a estimular e desenvolver em nossos alunos a capacidade de pensar de uma maneira independente, e os jogos do tipo Nim estimulam que o estudante tenha uma formação de atitudes importantes para aprendizagem matemática e leva a desenvolver suas próprias estratégias para solucionar os problemas

De agora em diante referenciamos estados que implicam na vitória do próximo a jogar como *N-posição* (***N****ext player*), ou *posição vencedora*, e os estados que implicam na derrota do próximo a jogar como *P-posição* (***P****revious player*), ou *posição perderdora*.

De maneira geral, vamos considerar três pilhas contendo x_1 , x_2 e x_3 peças, respectivamente, de onde os jogadores se revesam escolhendo uma das pilhas e removendo uma quantidade qualquer de peças. O último a realizar um movimento é declarado o ganhador.

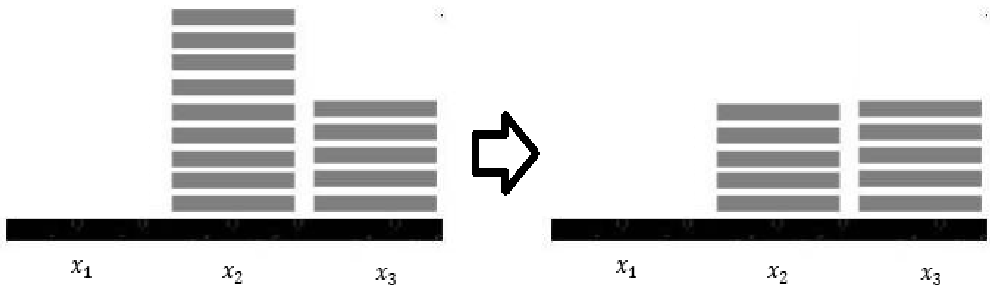


Vamos analisar o jogo e tentar encontrar uma maneira geral de rotular os estados como N- e P-posições. Sabe-se que o estado terminal (0, 0, 0) é uma P- posição, portanto qualquer estado com uma única pilha (0, 0, x) é uma N-posição, observe:

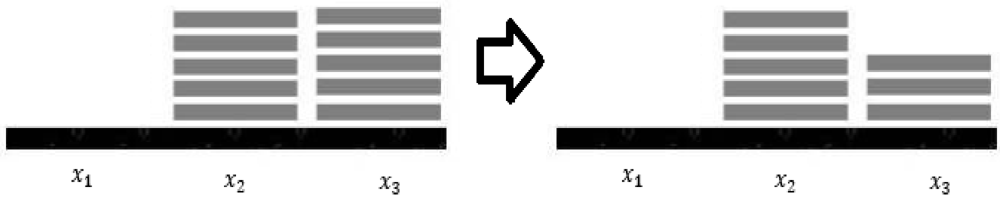


Nesse caso pode-se remover todas as peças da última pilha.

No caso em que há duas pilhas (0, x, y) pode-se observar que se $x \neq y$ o jogo pode ser levado para o estado (0, x, x) (assumindo sem perda de generalidade que y > x).



Já se x = y, encontra-se em um estado (0, x, x) e o jogo só pode ser levado para um estado (0, x, y) onde $x \neq y$.



Note que, essencialmente, quando o jogo possui duas pilhas idênticas, para qualquer movimento que o jogador fizer em uma das pilhas, o oponente realiza simetricamente o mesmo movimento na outra pilha, levando o jogo para um estado com pilhas de mesmas quantidades. Como a cada jogada a quantidade de peças de uma pilha só pode ser reduzida e como ambos os jogadores ficam alternando entre esses casos de estados, eventualmente ocorrerá uma jogada na forma (0, x, x) → (0, 0, x).

Como vimos, (0, 0, x) é uma N-posição e, portanto, todo estado na forma (0, x, x) é uma P- posição, implicando que (0, x, y) é N-posição.

Em outras palavras, o jogador que for a vez de jogar em um estado (0, x, x) perderá pois o oponente pode simetricamente imitar qualquer jogada realizada, levando o jogo para (0, y, y) com $y < x$, até que seja forçado a reduzir o jogo ao caso de uma única pilha, do qual o oponente garante a vitória removendo todas as peças da pilha restante.

Para o caso em que há três pilhas com peças, a análise de P- e N-posições por indução reversa se torna significativamente mais complexa. Para analisar jogos de Nim com mais de duas pilhas cabe utilizarmos o Teorema de Bouton, que classifica um estado como uma P- ou N-posição com base na quantidade de peças em cada uma de suas pilhas.

Para descrever a estratégia vencedora de **Nim com 3-pilhas** é necessário conhecer uma operação que é chamada de **Soma Nim** e consiste em representar os números inteiros em base 2 (binária) e somá-los em módulo 2. Esta operação será denotada pelo símbolo $\oplus$.

Portanto, primeiramente vamos entender como é a representação binária de um número. Essa representação binária também está relacionada com uma estratégia vencedora que iremos usar.

4.3.1 Sistema Binário

O sistema de numeração binário é representado por apenas dois dígitos, 0 ou 1. Trata-se de um sistema de numeração posicional que utiliza todas as características do sistema de numeração decimal (base 10), tomando como base o 2, cada digito, 0 ou 1, a depender de sua posição, passa a representar o seu valor absoluto multiplicado pela potência de 2 relativa a posição, enumerados da direita para a esquerda.

Não é incomum o estudo de disciplina que utiliza a mudança de base. Sendo assim, será apresentada a seguir algumas possibilidades dessas mudanças.

Segundo Eves (2004) é fácil passar um número de uma dada base para a base decimal, ou seja:

O número 100_2 (um zero zero na base 2) é igual a $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4_{10}$ (quatro na base 10).

O número 101_2 (um zero um na base 2) é igual a $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5_{10}$ (cinco na base 10)

E para enfatizar, no sistema decimal, o símbolo do número tem dois valores, um é propriamente dito o dígito e o outro está relacionado com a posição do dígito no número, ou seja, o peso, por se tratar de um sistema posicional.

No número 75, o dígito 7 representa 7x10, ou seja 70, devido a posição que ele ocupa no número. Este princípio pode ser aplicado a qualquer sistema de numeração posicional onde os dígitos possuem pesos, respectivos à sua posição no número. Então, de acordo com Oliveira (1999), um sistema de numeração genérico pode ser escrito da seguinte maneira:

Exemplo:

$$N = d_n . b^n + \ldots + d_3 . b^3 + d_2 . b^2 + d_1 . b^1 + d_0 . b^0$$

Onde:

N = representação do número na base b

d_n= dígito na posição n

b = base do sistema utilizado

n = valor posicional do dígito

Por exemplo, o número 8375 no sistema decimal é representado como:

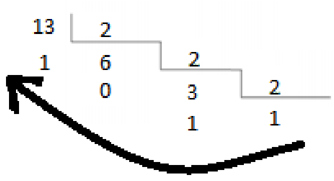
$$N = d_3 . b^3 + d_2 . b^2 + d_1 . b^1 + d_0 . b^0$$

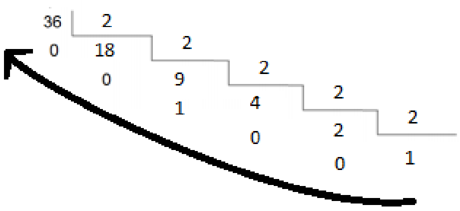
$$8375 = 8 . 10^3 + 3 . 10^2 + 7 . 10^1 + 5 . 10^0$$

De acordo com a definição, citada acima, de um sistema de numeração qualquer, a representação o número binário 1101 pode ser representado da seguinte forma:

O número 1101_2 (um um zero um na base dois) é igual a $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$ (treze na base 10).

Entretanto, para se converter um número da base decimal para outra base, de acordo com Idoeta (2012), divide-se sucessivamente o número decimal pela base na qual se quer o número, até que o último quociente seja menor que o divisor. Os restos obtidos das divisões e o último quociente compõem um número na base equivalente, como mostra a seguir.





O número é lido de trás para frente, logo $13_{10} = (1101)_2$ e $36_{10} = (100100)_2$.

Podemos perceber que o sistema de numeração binário utiliza apenas os dois símbolos, 0 e 1, para representar qualquer número, a partir de um conjunto de regras.

O sistema de numeração binário ficou muito conhecido na linguagem tecnológica. O computador, por exemplo, é composto por uma série de interruptores elétricos com duas posições. Por convensão, a chave na posição "1" significa que está ligado e a chave na posição "0" significa que o interruptor está na posição desligado. Com isso, é possivel utilizar "zeros"e "uns" em codificações de qualquer tipo de informações como imagens, sons, caracteres, videos, etc.

Desde o primeiro computador eletrônico digital construído em larga escala no final da década de 1940 são utilizados números binários. Além disso, o sistema binário teve repentina popularização por causa dasua utilização em calculadoras digitais e no desenvolvimento da Teoria da Informação e Comunicação de Shannon (GLASER, 1981).

A partir dos pulsos elétricos (on/off) o computador reescreve através de dígitos binários. Por exemplo, quando escrevemos a letra "a" o computador converte esta letra em dígitos binários ou código binário 0100.0001 de acordo com a tabela ASCII (American Standard Code Information Interchange). E qualquer dispositivo digital, capaz de armazenar um dígito binário define um "bit" de informação. A medida da letra é expressa em bytes (8 bits).

Contudo, vivemos em um mundo cada dia mais digital onde fica evidente a importância de desenvolver e conhecer os mais diversos conteúdos computacionais que estão iseridos no nosso dia a dia, inclusive os números binários, que é a raiz dessa linguagem computacional.

Mendes (2014) verificou a existência de abordagem de números binários em livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental avaliados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD por meio de dois domínios: Grandezas e Medidas (unidades de medida da informática) e Números e Operações (sistema de numeração binário). Verificou a existência de diretrizes curriculares nacionais referente ao conteúdo de números binários, mais precisamente, referente à orientação curricular de unidades da informática, compondo assim um tema básico de matemática á nível de ensino fundamental.

Agora, após a compreensão da representação binária bem como a sua importância nos estudos da matemática, cabe a nós entender um pouco melhor sobre a soma Nim.

4.4 ESTRATÉGIA VENCEDORA: PARTE 2

A **soma Nim** de dois inteiros não negativos α e β, representados na base binária (base 2) é soma dos coeficientes das potências de 2 (isto é, 0 ⊕ 0 = 0, 0 ⊕ 1 = 1, 1 ⊕ 0 = 1, 1 ⊕ 1 = 0) e representa-se por $\alpha \oplus \beta$. Em outras palavras, se $a = a_m \cdot 2^m + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0$ escrevemos $\mathrm{a} = (\mathrm{a_m}, \ldots, \mathrm{a_0})_2$. Assim, dados dois números inteiros não negativos $\mathrm{a} = (\mathrm{a_m}, \ldots, \mathrm{a_0})_2$ e $\mathrm{b} = (\mathrm{b_m}, \ldots, \mathrm{b_0})_2$ a **soma Nim** de a com b denotada por $a \oplus b$ é dada por $c = a \oplus b$, onde $c = (c_m, \ldots, c_0)_2$ com $c_k = a_k +_2 b_k$ para todo $k \in \{0, 1, 2, .., m\}$ e

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

Tome por exemplo o valor de 5⊕9. Note que as representações binárias de 5 e 9 são iguais a $5 = (101)_2$ e $9 = (1001)_2$. Assim precisamos efetuar a soma (módulo 2) ordenada dos coeficientes.

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Observe que, temos de escrever um zero à esquerda dos coeficientes módulo 2 do número 5, pois a sua representação possui apenas três coeficientes e a do número 9 tem quatro.

Como a soma dos coeficientes é igual a $(1100)_2$ que na representação numérica de base 10 é igual ao 12, temos que 5⊕9=12.

Calcular a soma Nim com 3 números não é diferente. Por exemplo, vamos calcular 2⊕3⊕7. Observe que a representação binária de 2, 3 e 7 são $2 = (10)_2$, $3 = (11)_2$ e $7 = (111)_2$. Calculando a soma módulo 2, temos:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Observe novamente que, temos de escrever um zero a esquerda dos coeficientes módulo 2 do número 2 e do número 3, pois as suas representações possuem apenas dois coeficientes e a do número 7 tem três. Como a soma dos coeficientes é igual a $(110)_2$ que na representação númerica de base 10 é igual ao 6, temos que $2 \oplus 3 \oplus 7 = 6$.

É importante ressaltar que , a soma Nim goza das seguintes propriedades:

Associatividade

Dados inteiros a, b e c quaisquer tais que $\mathrm{a} = (\mathrm{a_m}, \ldots, \mathrm{a_0})_2, \mathrm{b} = (\mathrm{b_m}, \ldots, \mathrm{b_0})_2$

e $\mathrm{c} = (\mathrm{c_m}, \ldots, \mathrm{c_0})_2$, então:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a} \oplus (\mathrm{b} \oplus \mathrm{c}) &= (\mathrm{a_m}, \dots, \mathrm{a_0})_2 \oplus ((\mathrm{b_m}, \dots, \mathrm{b_0})_2 \oplus (\mathrm{c_m}, \dots, \mathrm{c_0})_2) \\
&= (\mathrm{a_m}, \dots, \mathrm{a_0})_2 \oplus (\mathrm{b_m} +_2 \mathrm{c_m}, \dots, \mathrm{b_0} +_2 \mathrm{c_0})_2 \\
&= \left(\mathrm{a_m} +_2 (\mathrm{b_m} +_2 \mathrm{c_m}), \dots, \mathrm{a_0} +_2 (\mathrm{b_0} +_2 \mathrm{c_0})\right)_2 \\
&= ((\mathrm{a_m} +_2 \mathrm{b_m}) +_2 \mathrm{c_m}, \dots, (\mathrm{a_0} +_2 \mathrm{b_0}) +_2 \mathrm{c_0})_2 \\
&= (\mathrm{a_m} +_2 \mathrm{b_m}, \dots, \mathrm{a_0} +_2 \mathrm{b_0})_2 \oplus (\mathrm{c_m}, \dots, \mathrm{c_0})_2 \\
&= ((\mathrm{a_m}, \dots, \mathrm{a_0})_2 \oplus (\mathrm{b_m}, \dots, \mathrm{b_0})_2) \oplus (\mathrm{c_m}, \dots, \mathrm{c_0})_2 \\
&= (\mathrm{a} \oplus \mathrm{b}) \oplus c
\end{aligned}
$$

Comutatividade

Dados inteiros a e b quaisquer tais que $a = (\mathrm{a_m}, \ldots, \mathrm{a_0})_2$ e $\mathrm{b} = (\mathrm{b_m}, \ldots, \mathrm{b_0})_2$ então:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a} \oplus \mathrm{b} &= (\mathrm{a_m}, \dots, \mathrm{a_0})_2 \oplus (\mathrm{b_m}, \dots, \mathrm{b_0})_2 \\
&= (\mathrm{a_m} +_2 \mathrm{b_m}, \dots, \mathrm{a_0} +_2 \mathrm{b_0})_2 \\
&= (\mathrm{b_m} +_2 \mathrm{a_m}, \dots, \mathrm{b_0} +_2 \mathrm{a_0})_2 \\
&= (\mathrm{b_m}, \dots, \mathrm{b_0})_2 \oplus (\mathrm{a_m}, \dots, \mathrm{a_0})_2 \\
&= \mathrm{b} \oplus \mathrm{a}
\end{aligned}
$$

O elemento neutro é: $0 = (0, \dots, 0)_2$

Dado um inteiro a qualquer tal que $= (\mathrm{a_m}, \ldots, \mathrm{a_0})_2$, então

$$a \oplus 0 = (a_m, \ldots, a_0)_2 \oplus (0, \ldots, 0)_2$$
$$= (a_m +_2 0, \ldots, a_0 +_2 0)_2$$
$$= (a_m, \ldots, a_0)_2$$
$$= a$$

Cada número é o inverso de si prório

Dado um inteiro a qualquer tal que $= (a_m, \ldots, a_0)_2$, então:

$$a \oplus a = (a_m, \ldots, a_0)_2 \oplus (a_m, \ldots, a_0)_2$$
$$= (a_m +_2 a_m, \ldots, a_0 +_2 a_0)_2$$
$$= (0, \ldots, 0)_2$$
$$= 0$$

Resta mostrar que é válida a lei do cancelamento, ou também chamada de lei do corte.

Lei do cancelamento (Lei do Corte)

Dados inteiros a, b e c quaisquer, então:

$a \oplus b = c \oplus b \Leftrightarrow (a \oplus b) \oplus b = (c \oplus b) \oplus b$ (pela definição de soma Nim)

$\Leftrightarrow a \oplus (b \oplus b) = c \oplus (b \oplus b)$ (pela associatividade da soma Nim)

$\Leftrightarrow a \oplus 0 = c \oplus 0$ (pela definição de inverso de um elemento)

$\Leftrightarrow a = c$ (pela definição de elemento neutro)

Portanto, vale a lei do cancelamento.

Tais propriedades citadas anteriormente, serão de grande importância para a conclusão de resultados que vão ser apresentados no decorrer do trabalho.

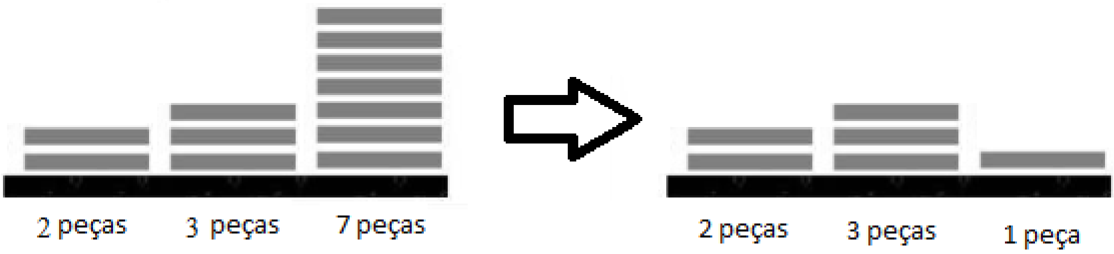
No jogo **Nim com 3-pilhas**, o conjunto de P-posições (n_1, n_2, n_3) ocorre quando:

$$n_1 \oplus n_2 \oplus n_3 = 0$$

isto é, quando a soma Nim da quantidade de peças das pilhas for igual a zero.

Quando a soma Nim da posição inicial for diferente de zero, $n_1 \oplus n_2 \oplus n_3 \neq 0$, ou seja, uma N-posição, o primeiro jogador tem a chance de usar a estratégia vencedora e ser vencedor do jogo. Caso contrário, é o segundo jogador que tem a chance de ser o vencedor. Vejamos um exemplo. No caso um jogo de Nim com 3-pilhas, com a posição inicial (2, 3, 7) é o primeiro jogador que terá a oportunidade de vencer. Como no exemplo visto anteriormente, $2 \oplus 3 \oplus 7 = 6$, isto é, a soma Nim da quantidade de peças é difrente de zero.

Uma boa estratégia vencedora, nesse exemplo, seria retirar 6 peças da maior pilha o que resultará na posição (1, 2, 3) que é uma P-posição. Observe:



Note que:

$$1 \oplus 2 \oplus 3 = (01)_2 \oplus (10)_2 \oplus (11)_2 = (00)_2 = 0$$

Depois dessa jogada, não importa qual seja o movimento do oponente, ele sempre levará o jogo para uma N-posição. Suponha que o opoinente retire 2 peças da maior pilha, ficando a N-posição (1, 1, 2).

Na sua vez, o primeiro jogador retirando duas peças da maior pilha resulta na posição (0, 1, 1) que é uma P-posição. Restando apenas um movimento obrigatório para o oponente que é retirar uma peça de uma das duas pilhas, dando chance do primeiro jogado fazer a última jogada e vencer o jogo.

O jogo de Nim com n-pilhas, segue também as mesmas regras utilizadas para o Nim com 3-pilhas. Para verificar essa estratégia basta analizarmos o teorema de Bouton. O professor chamado Bounton, foi um dos primeiros autores a publicar um trabalho voltado exclusivamente para o Nim e sua teoria, criando duas teorias fundamentais para este jogo e que orientam os jogadores.

TEOREMA (Teorema de Bounton): O conjunto de P-posições para um jogo de Nim com k-pilhas, denotada por $(n_1; n_2; n_3; \dots, n_k)$, ocorre quando

$$n_1 \oplus n_2 \oplus n_3 \oplus \dots \oplus n_k = 0.$$

A prova desse teorema consiste em demonstrar que:

1. Todas a posições terminais são P-posições;
2. De qualquer P-posição todas as jogadas levam a uma N-posição;
3. De qualquer N-posição existe pelo menos uma jogada para uma P-posição

Note que a posição $(0;\ 0; 0;\ \dots;\ 0)$ é uma P-posição, pois é uma posição terminal e

$$0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus\ 0 = 0.$$

Suponha que a posição $(n_1; n_2; n_3; \dots, n_k)$, é uma P-posição, ou seja,

$$n_1 \oplus n_2 \oplus\ n_3 \oplus \dots \oplus n_k = 0.$$

Considere uma pilha $n_i \neq 0$, que sofrerá uma redução para um valor $n_i{}'$, (neste momento vale observar que é claro que $n_i' < n_i$) e nesse caso, obrigatoriamente, não poderemos ter:

$$n_1 \oplus n_2 \oplus \dots\ \oplus n_i \oplus \dots \oplus n_k\ =\ 0\ =\ n_1 \oplus\ n_2 \oplus \dots \oplus n_i' \dots \oplus n_k$$

pois, pela Lei do Cancelamento, essa igualdade resulta em $n_i = n_i'$, o que contraria $n_i' < n_i$
Então, $(n_1, n_2, \dots, n_i', \dots n_k)$ é uma N-posição, pois

$$n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_i' \oplus \dots \oplus n_k \neq 0$$

Provamos assim que de uma P-posição só pode-se chegar a uma N-posição. Suponha agora que $(n_1, n_2, \dots, n_i', \dots n_k)$ é uma N-posição, daí

$$n_1 \oplus n_2 \oplus \dots\ \oplus n_i \oplus \dots \oplus n_k = S \text{ e } S \neq 0,$$

Como $S \neq 0$, então na representação binária de S existe pelo menos um algarismo igual a um. Considere o primeiro algarismo 1 que aparece da esquerda para a direita em $(S)_2$. Existe uma pilha com n_i peças tal que na sua representação binária também aparece um algarismo 1 na mesma coluna que aparece em S. Deve-se trocar esse algarismo 1 em n_i por 0 e para que a soma Nim seja igual a zero é importante verificar se é preciso trocar ou não os algarismos à direita deste 1. Os algarismos à esquerda não precisam ser modificados pois a soma de sua coluna já resulta em 0.

Essa mudança significa uma redução na pilha com n_i peças para uma pilha com $n_i{}'$ peças, pois quando um número é diminuído na escala binária é que algum 1, da esquerda para a direita passou a ser 0. Assim, a pilha com $n_i{}'$ peças tem menos peças que a pilha com n_i peças.

Logo, existe pelo menos uma quantidade de peças $n_i' < n_i$ tal que

$$n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_i' \oplus \dots \oplus n_k = 0$$

Assim, a posição $(n_1, n_2, \dots, n_i', \dots n_k)$ é uma P-posição. Concluímos que de uma N-posição é possível chegar em uma P-posição.

Portanto, o Teorema de Bouton garante que:

• se $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ com $n_1 \oplus n_2 \oplus\ n_3 \oplus \dots \oplus n_k = 0$ é a primeira posição do jogo, então o segundo jogador pode sempre ganhar.

• se a primeira posição for $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ com $n_1 \oplus n_2 \oplus\ n_3 \oplus \dots \oplus n_k\ \neq\ 0$ então o primeiro jogador pode sempre ganhar, se ao jogar tiver $n_i' < n_i$ de tal modo que $n_1 \oplus$

$n_2 \oplus \dots \oplus n_i' \oplus \dots \oplus n_k = 0$ assim $(n_1, n_2, \dots, n_i', \dots n_k)$ é uma P-posição.

Portanto, qualquer que seja o número de pilhas que tivermos em um Jogo de Nim, o vencedor será determinado pela posição encontrada na primeira jogada, desde que o mesmo faça os movimentos de acordo com a estratégia vencedora.

Para Raguenet e Barrêdo (1983), conforme o Teorema de Bouton, se o primeiro jogador deixar sobre a mesa uma combinação segura, o segundo jogador não conseguirá deixar uma combinação segura em sua vez de jogar. Uma combinação é chamada segura quando, na sua vez de jogar, o jogador conseguir deixar uma determinada configuração sobre a mesa, de tal forma que, independentemente da jogada, seu oponente não terá como vencer (NASCIMENTO, 2016). Ou seja, uma combinação segura é uma maneira que se tem de prever futuros movimentos, de modo a sempre vencer o jogo. Contudo, percebe-se que, se o primeiro jogador deixar uma combinação segura sobre a mesa, independentemente da quantidade de peças que o segundo jogador retirar, o primeiro jogador sempre conseguirá recompor o jogo de modo a manter uma combinação segura na mesa.

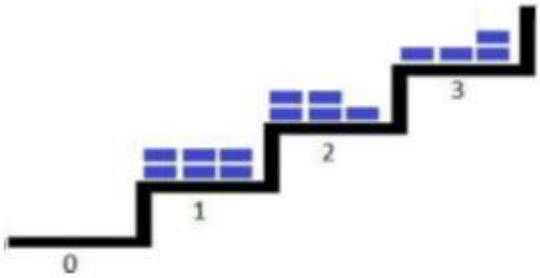
Num primeiro momento, o Nim é um jogo como qualquer outro. Mas, analisando de maneira mais aprofundada, nota-se que ele tem uma peculiaridade de que dada uma posição inicial é possível determinar uma estratégia para um dos jogadores de modo que ele sempre saia como vencedor. Num jogo do Nim, o primeiro jogador tem a estratégia vencedora se a soma Nim das quantidades de pedras em cada pilha for diferente de zero. Caso a soma seja zero, o segundo jogador possui a estratégia vencedora.

De acordo com Nascimento (2016), espera-se que o jogo Nim estimule os estudantes a realizar cálculos mentais, ou até mesmo a contagem antecipada com a tentativa de prever futuras jogadas de seu adversário, levando-o a vencer o jogo. Como se trata de um jogo é importante ressaltar o que os autores Rodrigues e Silva (2004), destacam que se devem diversificar os materiais utilizados, pois alguns alunos podem apresentar desinteresse frente a uma determinada maneira de jogar e diversificar o jogo é um fator importante para que todos possam ser atendidos.

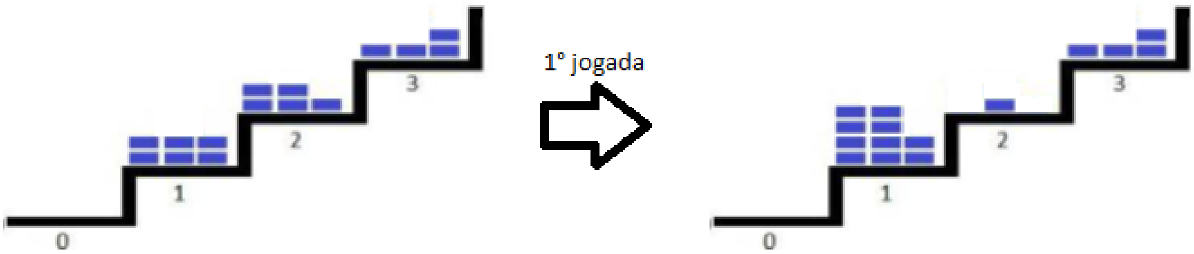
4.5 VARIAÇÕES DO JOGO DO NIM: ESCADARIA NIM

Vamos abordar outro exemplo de jogo Nim chamado escadaria Nim. O jogo consiste em uma escadaria de n degraus onde são colocados um número finito de fichas (pedras, feijões, etc.) em cada degrau. Dois jogadores, de maneira alternada, devem movimentar pelo menos uma ficha de um degrau para o degrau imediatamente abaixo. Quando todas as fichas que estavam nos degraus são levadas para o chão (início da escada) o jogo termina. O vencedor é o jogador que levar a última ficha para o chão, ou seja, que fizer o último movimento.

Exemplo: Considere uma escadaria com 3 degraus com 15 fichas distribuídas nas seguintes quantidades de fichas em cada degrau (da esquerda para direita): o primeiro degrau contém 6 fichas, o segundo degrau contém 5 fichas, e o terceiro degrau contem 4 fichas. A ilustração a seguir ajuda a entender melhor.



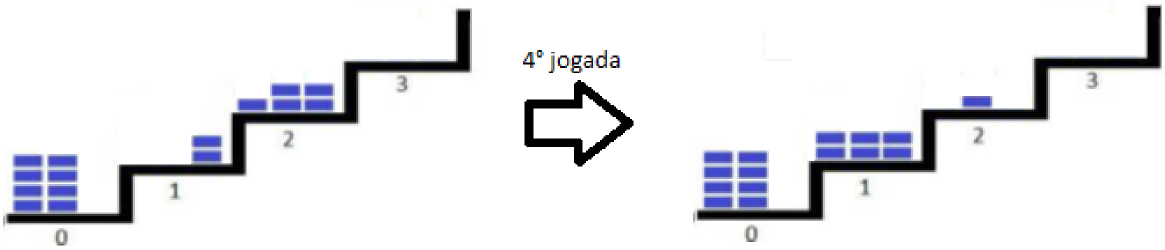
Os dois jogadores devem disputar alternadamente levando uma quantidade de fichas de um degrau para o imediatamente abaixo, sem pular degraus, até que todas as fichas estejam fora da escada ("degrau zero"). Aquele que levar a última ficha para o fim da escada vence. A titulo de exemplo vamos realizar algumas jogadas para melhor entendimento do jogo. Para isso considere dois jogadores A e B.



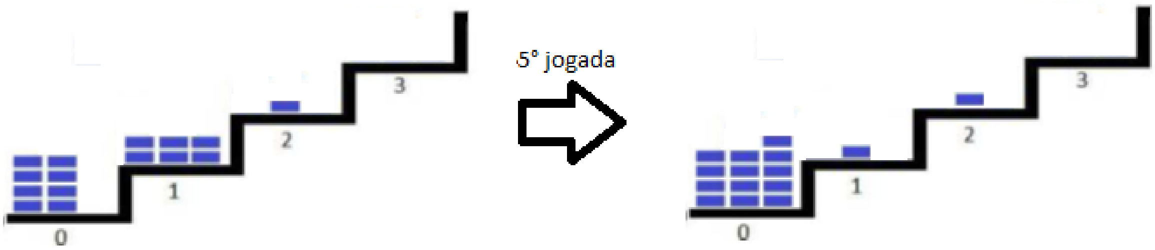
Na primeira jogada, o jogador A levou 4 fichas do segundo degrau para o primeiro degrau.

Na segunda jogada, o jogador B levou 6 fichas do primeiro degrau para fora da escada.

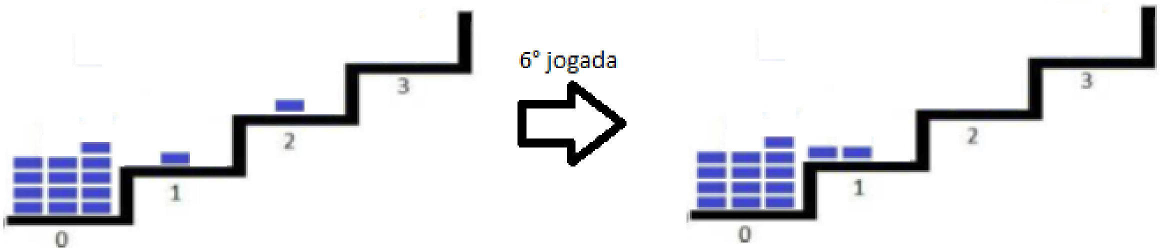
Na terceira jogada, o jogador A levou 4 fichas do terceiro degrau para o segundo degrau.



Na quarta jogada, o jogador B levou 4 fichas do segundo degrau para o primeiro degrau.



Na quinta jogada, o jogador A levou 5 fichas do primeiro degrau para fora da escada.



Na sexta jogada, o jogador B levou uma ficha restante no segundo degrau para o primeiro degrau. Neste momento, basta que o jogador A coloque as duas fichas restantes no primeiro degrau para fora da escada para que ele vença o jogo.

Para que possamos entender melhor a estratégia que o jogador deve executar a fim de se tornar o vencedor desse jogo, precisamos definir alguns critérios de organização para a escadaria.

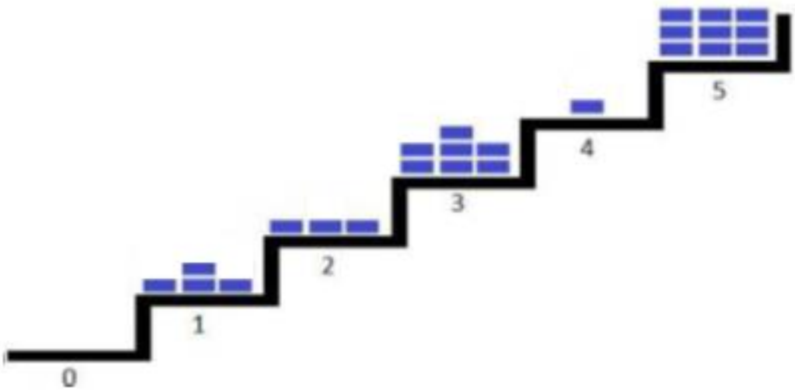
Para isto:

- Vamos numerar os degraus da escada de baixo para cima (esquerda para direita) de forma crescente, onde a partir do chão, que vai receber o número zero, a sequência dos degraus fique com os números 1, 2, 3, ..., n.
- A quantidade f de fichas em cada degrau será representado por $Q(n) = f$, onde n é o número do degrau.
- Uma posição na Escadaria Nim é dada pelas quantidades de fichas dos degraus de numeração ímpar: $(Q(1), Q(3), Q(5), Q(7), \dots, Q(2n-1))$. (Verifique que isso realmente acontece)
- Uma P -posição em Nim é um uma P -posição em Escadaria Nim.

Exemplo:

Numa escadaria de 5 degraus são distribuídas as seguintes quantidades de fichas em cada degrau, numerados de baixo para cima: $Q(1) = 5, Q(2) = 3, Q(3) = 7, Q(4) = 1\ e\ Q(5) = 9$.

Os dois jogadores, jogando alternadamente, devem levar uma quantidade de fichas quaisquer de um degrau para o imediatamente abaixo, sem pular degraus, até que todas as fichas estejam fora da escada. O vencedor é aquele que levar a última ficha para o fim da escada.



Obserque que o movimento de fichas de um degrau ímpar para um degrau par é o mesmo que diminuir o número de fichas de uma pilha Nim. Nesse sentido é que as posições na Escadaria Nim são definidas apenas com os degraus ímpares. Quando movimentamos as fichas de um degrau par para um degrau ímpar, estes não vão interferir na estratégia vencedora de um jogador (se não forem feitas por ele), pois assim esses movimentos apenas vão aumentar as fichas nas pilhas Nim, que podem ser reduzidos na próxima jogada restaurando a posição da jogada anterior.

Esse jogo começa com a posição (5,7,9) que é uma N-posição em Nim e também será na Escadaria, pois $5 \oplus 7 \oplus 9 \neq 0$, uma vez que, tranformando para binários, $(5)_{10} = (0101)_2$, $(7)_{10} = (0111)_2$ $(9)_{10} = (1001)_2$ e daí calculando a soma Nim, temos:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Neste caso, o primeiro jogador tem a oportunidade de deixar sobre a mesa uma P-posição. Observe que para essa quantidade de fichas, o jogo pode ser levado para a P- posição (5, 7, 2), basta movimentar 7 fichas do degrau 5 para o degrau 4. Desta forma, jogando adequadamente até o final do jogo ele poderá se tornar o vencedor. Assim, podendo escolher o jogador deve ser o primeiro a jogar.

5 PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA COM JOGOS COMBINATÓRIOS

5.1 AULA 1

Conteúdo: Jogos Combinatórios

Objetivo geral:

Fazer com que os alunos pratiquem os jogos combinatórios de maneira introdutória.

Objetivos específicos:

Desenvolver jogos combinatórios simples afim de que os alunos pratiquem e talvez possam apurar alguma estratégia vencedora.

Abordagem metodológica:

Aula prática, com atividades.

Desenvolvimento:

Para as atividades propostas vamos ter como base os jogos combinatórios a fim de nos levar aos jogos do tipo Nim.

Nessa primeira aula, vamos apresentar aos alunos o conceito de jogos combinatórios para que eles possam entender a teoria e vamos, também, exibir alguns exemplos de jogos combinatórios com o intuito de fazer com que os alunos pratiquem e procurem estratégias para vencer o jogo.

Apresentaremos os jogos combinatórios como um tipo de jogo que é praticado entre dois jogadores que fazem as jogadas alternadamente e que sempre ambos vão conhecer as regras e as possíveis jogadas a cada momento. Vale lembra-los que nesses jogos não podem existir elementos de sorte/azar, probabilidade de vencer ou algo do gênero.

Para tanto, vamos introduzir a seguinte atividade:

ATIVIDADE 1 – Considere uma pilha com 13 pedras (feijões, palitos, etc.) e podendo retirar, dessa pilha, no mínimo 1 e no máximo 3 pedras por vez. Ganha o jogador que fizer a última retirada.

Pilha com 15 pedras

Nesse momento, é importante deixar com que os alunos pratiquem por algumas vezes o mesmo jogo, com a mesma quantidade de peças na pilha, para que talvez já consigam encontrar alguma estratégia vencedora.

Para entendermos melhor a estratégia vencedora devemos fazer uma análise do jogo de trás para frente, pensando da posição final (que corresponde a ter zero pedras) até a posição inicial, que nesse exemplo contém 13 pedras. No caso em que, após algumas jogadas, o jogo se encontra na posição com um, dois ou três pedras o próximo jogador é quem vence, pois note que é só ele retirar todas as pedras restantes, em qualquer um dos casos. Se no caso o jogo está em um momento que possui quatro pedras o próximo jogador perde o jogo. Note que se este retirar uma pedra (restariam três), duas pedras (restariam duas) ou três pedras (restaria uma) o jogador a realizar a jogada seguinte é quem vence, pois, ao retirar três, duas ou uma pedra, respectivamente, deixará ao jogador que anteriormente jogou sem hipótese de jogada uma vez que quem retira as últimas pedras é quem vence.

Até este momento vale observar que deixar zero ou quatro pedras na pilha é uma boa estratégia, pois garante a vitória para quem realiza tal façanha.

Se no caso o jogo, em algum momento, estiver com cinco, seis ou sete pedras então o próximo jogador a jogar retirar, respectivamente, uma pedra (restariam quatro), duas pedras (restariam quatro) ou três pedras (restariam quatro) e o jogo irá retornar ao caso que explicamos anteriormente.

De maneira análoga, se verifica que se o jogo, em algum momento, estiver com oito pedras. Então, o próximo jogador a jogar retira uma pedra (restando sete), duas pedras (restando seis) ou três pedras (restando cinco) e o jogador a realizar a próxima jogada vence. Observe que ele, ao retirar três, duas ou uma pedra, respectivamente, deixarão jogador adversário numa posição perdedora, isto é, numa posição com quatro pedras e, portanto, sem chance de vencer.

Da mesma forma, se examina que as posições em que se tem nove, dez, onze ou treze pedras, são posições vencedoras, pois permitem ao jogador que vai jogar colocar o adversário numa posição perdedora, isto é, com oito pedras (nos três primeiros casos) e doze pedras (no último caso). Note que ter doze pedras na pilha é uma boa posição, como também quando se tem quatro ou oito pedras.

Conclui-se então que a estratégia vencedora, nesse caso, consiste em jogar sempre para uma posição em que o adversário fique com quatro, oito ou doze pedras, onde o primeiro a jogar sempre tenha acesso a estratégia.

Vale ressaltar que se o jogo não iniciar com treze pedras e se iniciar com um número que também não seja múltiplo de quatro, a estratégia vencedora é exatamente a mesma, isto é, se $n = 4 \cdot k$, $(k \in \mathbb{Z})$ é múltiplo de quatro e o jogo se iniciar com n+1, n+2 ou n+3 pedras, o jogador que irá jogar deverá retirar uma, duas ou três pedras respectivamente, de maneira a colocar o adversário numa posição perdedora, ou seja, numa posição que ficaria com n pedras, e portanto, o primeiro a jogar vence o jogo.

Embora, se o jogo começar com um número de pedras que seja múltiplo de quatro, o primeiro jogador nunca vencerá, pois observe que, após a sua jogada o adversário, numa posição vencedora, que terá a hipótese de aplicar a estratégia vencedora e colocar o jogador que iniciou o jogo novamente numa posição perdedora.

Depois de aplicada essa primeira atividade, vale fazer com que os alunos joguem com outras variações, tanto quando e quantidade de pedras iniciais, quanto a quantidade de pedras a serem retiradas, como por exemplo:

ATIVIDADE 2 - Considere uma pilha com 24 pedras (feijões, palitos, etc.) e podendo retirar, dessa pilha, no mínimo 1 e no máximo 3 pedras por vez. Ganha o jogador que fizer a última retirada.

ATIVIDADE 3 – Considere uma pilha com 17 pedras (feijões, palitos, etc.) e podendo retirar, dessa pilha, no mínimo 1 e no máximo 4 pedras por vez. Ganha o jogador que fizer a última retirada.

ATIVIDADE 4 – Considere uma pilha com 22 pedras (feijões, palitos, etc.) e podendo retirar, dessa pilha, no mínimo 2 e no máximo 4 pedras por vez. Ganha o jogador que fizer a última retirada.

Por último, vale indagar os alunos: “e se nessas atividades eu pudesse retirar a quantidade de pedras que eu quisesse? Quem teria a estratégia vencedora? O que eu faço para sempre vencer?”

É claro que, como vimos no trabalho, se tem uma única pilha e podendo retirar a quantidade de pedras sem distinção nenhuma, é sempre o primeiro jogador que pode vencer, basta retirar todas as pedras.

Avaliação:

A Avaliação ocorrerá através da observação das estratégias utilizadas e desenvolvimeno das atividades.

Referências:

Para as atividades propostas vamos ter como base o Jogo de Nim, um jogo formado por um conjunto de fichas arrumadas em pilhas, onde cada jogador em sua vez, deve retirar pelo menos uma ficha de uma única pilha, e na sequência o outro jogador procede da mesma maneira, até que não sobre mais nenhuma ficha. Vence o jogador que fizer a última retirada de fichas.

5.2 AULA 2

Conteúdo:

Jogos Combinatórios

Objetivo geral:

Fazer com que os alunos pratiquem os jogos combinatórios de maneira um pouco mais avançada.

Objetivos específicos:

Nesta segunda aula, a ideia é fazer com que os alunos pratiquem ainda mais alguns jogos combinatórios só que agora com duas pilhas para começar a entender um pouco mais da complexibilidade dos jogos mais adiante até que entendam que com três pilhas fica relativamente difícil. Contudo, buscando a estratégia vencedora.

Abordagem metodológica:

Aula prática, com atividades.

Desenvolvimento:

Visto que na primeira aula os alunos entenderam e praticaram um jogo combinatório com uma única pilha, nessa segunda aula vamos iniciar com um jogo combinatório com duas pilhas.

ATIVIDADE 1 – Considere um jogo combinatório de duas pilhas a primeira com 8 pedras e a segunda com 13 pedras. Podendo retirar dessas pilhas qualquer quantidade de pedras, desde que, seja de uma mesma pilha. Ganha quem fizer a última retirada.

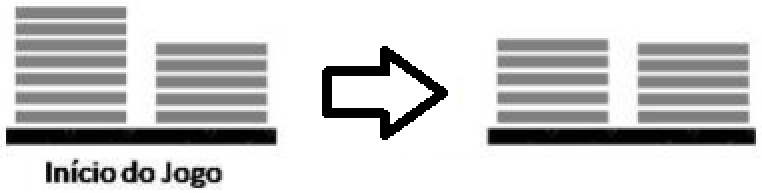
Nesse primeiro momento, é interessante que os alunos joguem de maneira ainda aleatória e busquem, talvez, encontrar alguma estratégia vencedora. Vale também mudar a quantidade de pedras em cada pilha e fazer com que eles joguem.

É claro que como já vimos no trabalho quando temos duas pilhas existe a estratégia vencedora.

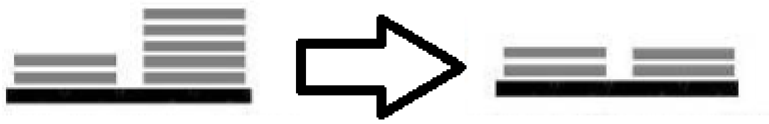
ATIVIDADE 2 – Considere um jogo combinatório de duas pilhas a primeira com 14 pedras e a segunda com 20 pedras. Podendo retirar dessas pilhas qualquer quantidade de pedras, desde que, seja de uma mesma pilha. Ganha quem fizer a última retirada.

ATIVIDADE 3 – Considere um jogo combinatório de duas pilhas ambas com 12 pedras. Podendo retirar dessas pilhas qualquer quantidade de pedras, desde que, seja de uma mesma pilha. Ganha quem fizer a última retirada.

ATIVIDADE 4 - Observe os movimentos feitos pelo jogador



Note que na primeira jogada, o jogador A retira duas peças da primeira pilha.



Nessa segunda jogada o jogador B retira 3 peças da primeira pilha e na terceira jogada o jogador A retira 3 peças da segunda pilha.

Pergunta: Se o jogador A continuar repetindo seu jeito de jogar ele vencerá a partida?

É interessante que os alunos percebam que existirá uma estratégia vencedora, porem que ela depende da maneira que o jogo vai se iniciar.

Como já vimos, com duas pilhas e sem restrição do número de pedras a retirar, o jogo não é relativamente difícil pois, se as pilhas tiverem:

- Um número diferente de pedras: o primeiro jogador a jogar sempre vence, pois poderá igualar o número de pedras existentes nas pilhas e então a partir daqui, independentemente da pilha que o jogador adversário escolher e o número de pedras que retirar, o primeiro jogador sempre copia a jogada do adversário, garantindo que fará a última jogada e vencendo o jogo.
- Um número igual de pedras: o Segundo jogador vencerá o jogo, pois repetira as jogadas do adversário.

Depois disso podemos indagar os alunos no sentido que: “e se tivéssemos 3 pilhas com pedras? Será que temos estratégia vencedora?”

Avaliação:

A Avaliação ocorrerá através da observação do avanço estratégias utilizadas no desenvolvimento das atividades.

5.3 AULA 3

Conteúdo: Jogo de Nim

Objetivo geral:

Apresentar aos alunos o jogo de Nim.

Objetivos específicos:

Nesta terceira aula, a ideia é fazer com que os alunos conheçam o jogo de Nim com três pilhas, suas regras e pratiquem. Ao final vamos apresentar um vídeo feito pelo canal “manual do mundo” onde apresentam uma estratégia para vencer o jogo.

Abordagem metodológica:

Aula prática, com atividades.

Desenvolvimento:

Visto que na segunda aula os alunos entenderam e praticaram um jogo combinatório com duas pilhas, e entenderam também, a estratégia vencedora para o caso, nessa terceira aula vamos iniciar apresentando o jogo Nim com três pilhas, e sua versão a misére, visto que mais adiante vamos apresentar vídeos de estratégias que a utilizam.

ATIVIDADE 1 - Considere um jogo de três pilhas a primeira com 8 pedras e a segunda com 13 pedras a terceira com 20 pedras. Podendo retirar dessas pilhas qualquer quantidade de pedras, desde que, seja de uma mesma pilha. Ganha quem conseguir deixar a última retirada para o oponente.

É importante, neste momento, deixar que os alunos pratiquem bastante tanto a atividade 1 quanto outras configurações com quantidades de pedras em cada monte diferente desta.

Após praticarem vamos apresentar um vídeo do canal “manual do mundo” onde os criadores Iberê e Piong Lee apresentam uma estratégia e dizem que ela é sempre vencedora. Veremos adiante que a estratégia apresentada por eles não é sempre vencedora.

O nome e o link do vídeo é "Jogo do Feijão Safado" - https://youtu.be/ObAZVpR-WZQ

No vídeo do manual do mundo, ele diz que “você não tem como perder”. Claro que sabemos que existe uma estratégia vencedora, sim. Mas a que eles vão utilizar no vídeo, não.

Eles apresentam um jogo combinatório (jogo Nim) com 3 montes de feijões, onde de cada pilha pode-se retirar quantos feijões quiser, desde que seja de um mesmo monte. Ganha quem conseguir deixar a última retirada para o oponente. Note que, no vídeo, com essa configuração, eles apresentem o jogo Nim em sua versão misére.

O Iberê, joga com diversos adversários e utilizando a sua estratégia sempre vence. A estratégia vencedora que eles utilizam é separada em duas regras:

1° regra: quem quer vencer o jogo deve sempre deixar os três montes com quantidades diferentes. Depois de algumas jogadas um dos montes deverá sumir naturalmente.

2° regra: depois de sumir um dos montes, quem está conduzindo e quer vencer o jogo deve sempre deixar os dois montes com quantidades iguais, pois assim, como já vimos no trabalho, sempre que o adversário fizer uma jogada, o jogador imitará a mesma, voltando o jogo para duas pilhas iguais. No final, sempre sobrará uma peça e como o jogo está sendo jogado na versão misére, o último a retirar realmente irá perder.

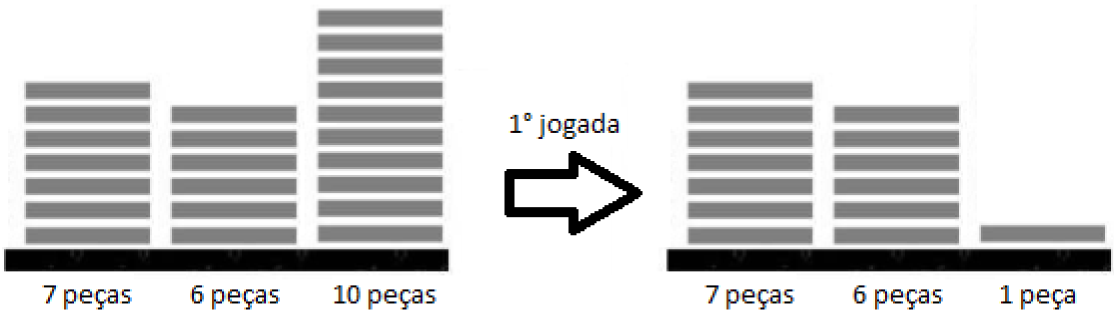
Ao final do vídeo, eles ainda apresentam uma outra regra do “1, 2 ,3”. Consiste em o jogador vencedor deixar o jogo em um estado que contém um monte com 1 peça, um monte com duas peças e terceiro monte com 3 peças. Note que qualquer movimento do adversário, o primeiro jogador sempre consegue deixar o jogo com dois montes com quantidades de peças iguais.

Depois de apresentar, o vídeo é interessante que coloquemos a eles atividades para que possam aplicar a “estratégia do Iberê”. Pode-se usar a mesma atividade 1, ou com outras configurações já jogadas. Exemplo:

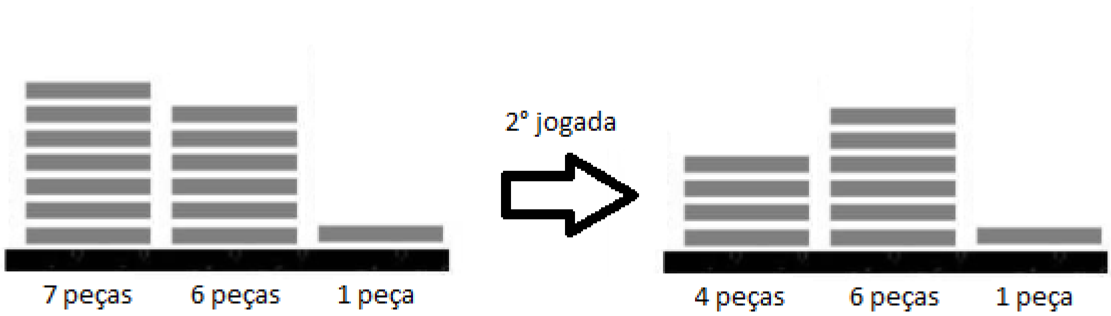
ATIVIDADE 2 - Considere um jogo de três pilhas a primeira com 10 pedras e a segunda com 15 pedras a terceira com 12 pedras. Podendo retirar dessas pilhas qualquer quantidade de pedras, desde que, seja de uma mesma pilha. Ganha quem conseguir deixar a última retirada para o oponente.

ATIVIDADE 3 - Considere um jogo de três pilhas a primeira com 6 pedras e a segunda com 8 pedras a terceira com 11 pedras. Podendo retirar dessas pilhas qualquer quantidade de pedras, desde que, seja de uma mesma pilha. Ganha quem conseguir deixar a última retirada para o oponente.

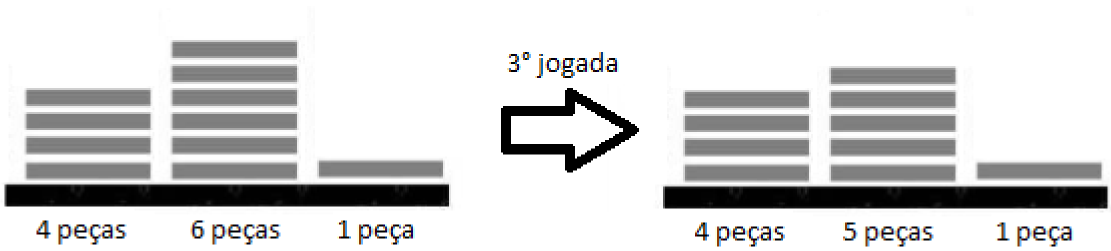
ATIVIDADE 4 – Considere um jogo de três pilhas com a configuração inicial de: a primeira pilha com 7 peças a segunda pilha com 6 peças e a terceira pilha com 10 peças. Observe os movimentos feitos pelos jogadores: (Considere que o jogador B vai usar a estratégia do Iberê)



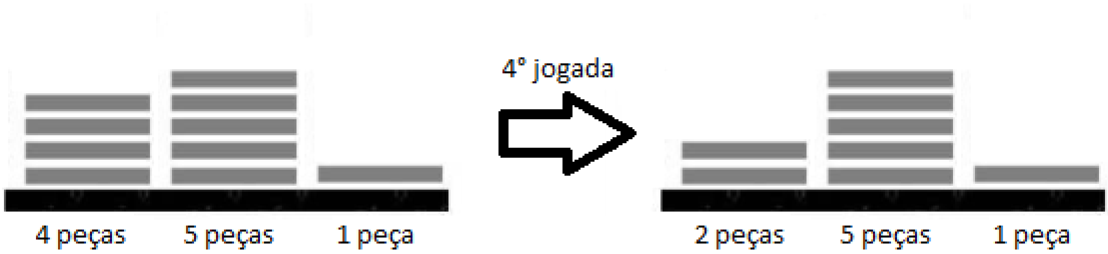
Na primeira jogada o jogador A retira 9 peças da terceira pilha.



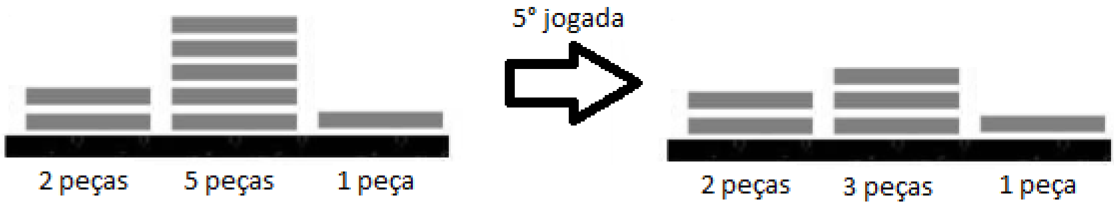
Na segunda jogada o jogador B retira 3 peças da primeira pilha. Note que visando utilizar a estratégia do Iberê, ele deixa as três pilhas com quantidades diferentes de peças.



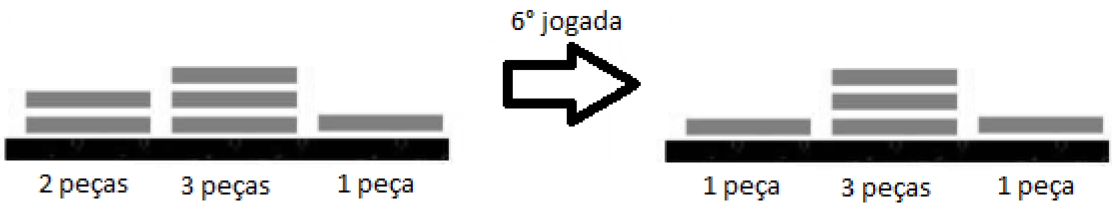
Na terceira jogada o jogador A retira 1 peça da segunda pilha.



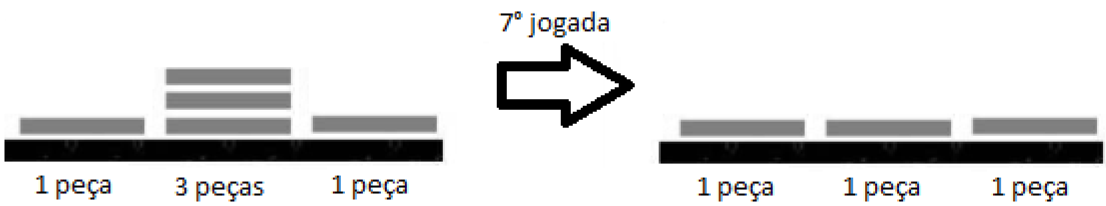
Na quarta jogada o jogador B retira 2 peças da primeira pilha, visando ainda manter as 3 pilhas com quantidades diferentes.



Na quinta jogada o jogador A retira 2 peças da segunda pilha.

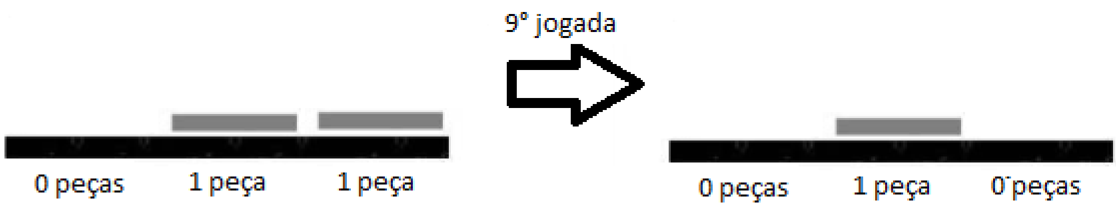


Na sexta jogada o jogador B retira 1 peça da primeira pilha.



Na sétima jogada o jogador A retira 2 peças da segunda pilha.

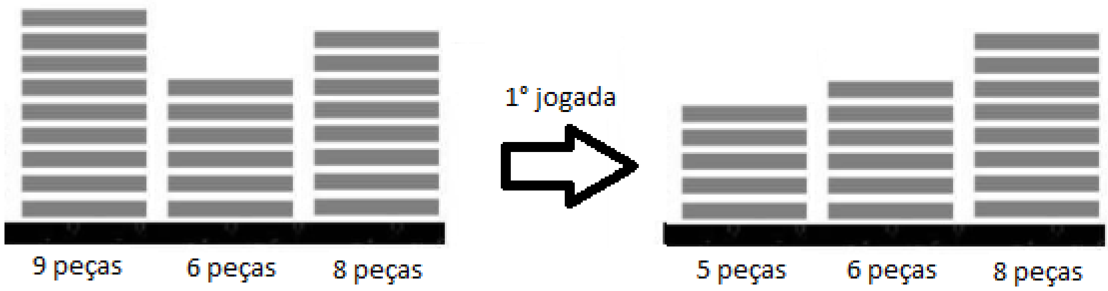
Na oitava jogada o jogador B retira 1 peça da primeira pilha.



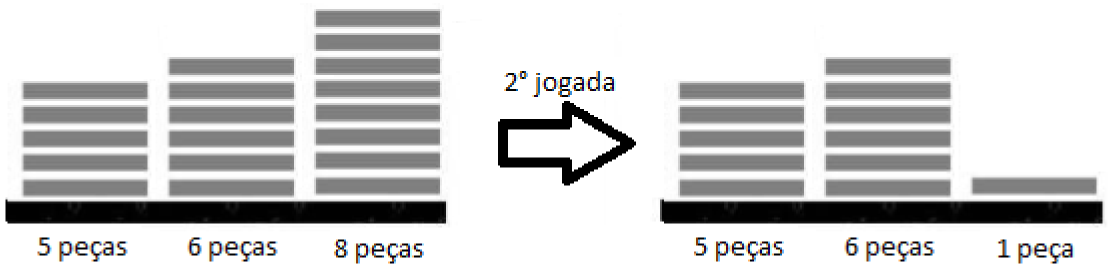
Na nona jogada o jogador A retira 1 peça da terceira pilha deixando uma única peça na segunda pilha, fazendo com que ela sobre para o jogador B retirá-la o que faz com que o jogador A vença o jogo.

Pergunta: A estratégia do Iberê e do Piong Lee sempre funciona? Será que a utilizando sempre venceremos o jogo?

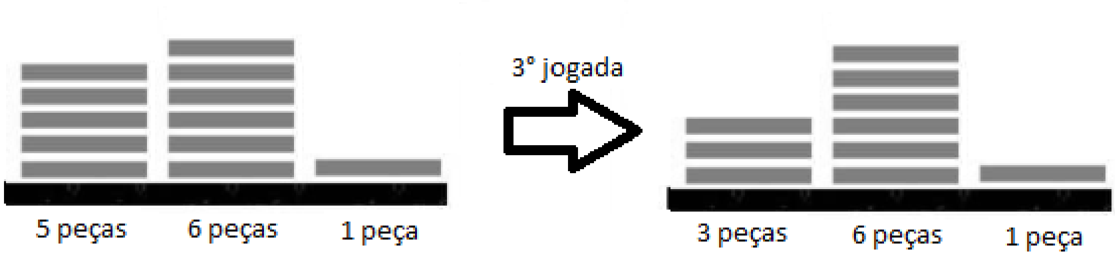
ATIVIDADE 5 – Considere um jogo de três pilhas com a configuração inicial de: a primeira pilha com 9 peças a segunda pilha com 6 peças e a terceira pilha com 8 peças. Observe os movimentos feitos pelos jogadores: (Considere agora que o jogador A vai usar a estratégia do Iberê)



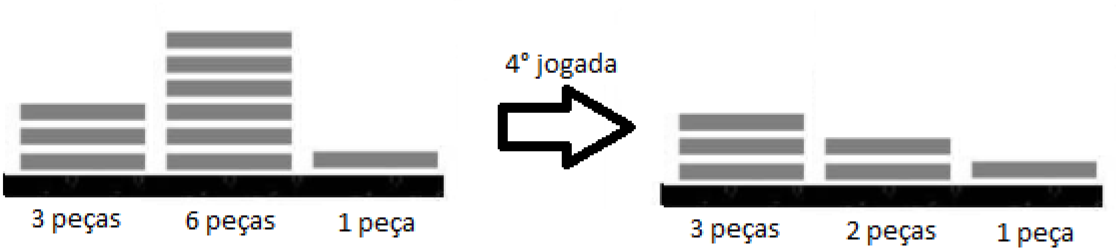
Na primeira jogada o jogador A retira 4 peças da primeira pilha.



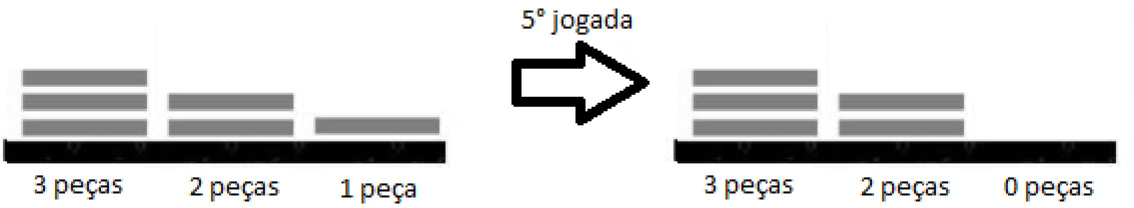
Na segunda jogada o jogador B retira 7 peças da terceira pilha.



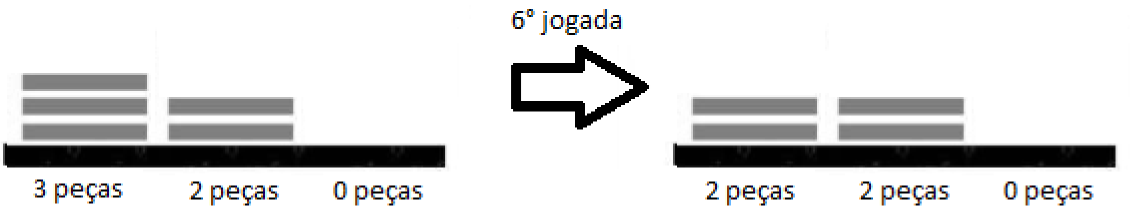
Na terceira jogada o jogador A retira 2 peças da primeira pilha.



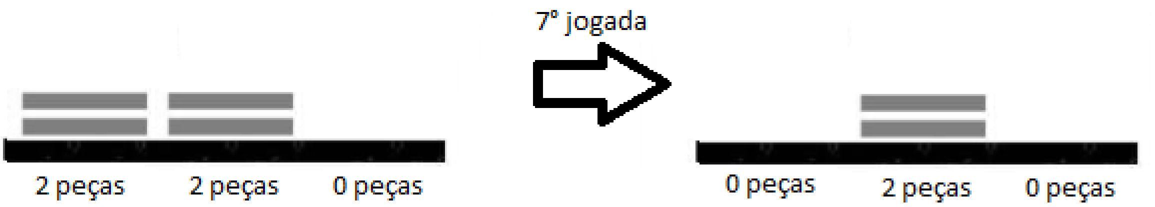
Na quarta jogada o jogador B retira 4 peças da segunda pilha.



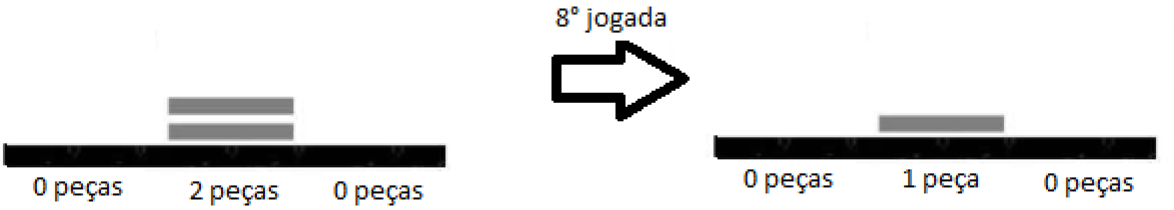
Na quinta jogada o jogador A retira 1 peça da terceira pilha.



Na sexta jogada o jogador B retira 1 peça da primeira pilha.



Na sétima jogada o jogador A retira 2 peças da primeira pilha



Na oitava jogada o jogador B retira 1 peça da segunda pilha deixando a única peça restante, fazendo com que o jogador A faça a última jogada e o jogador B vença o jogo.

Pergunta: Independentemente de quem comece jogando, a estratégia do Iberê é sempre válida? Sempre que usamos ela, vamos vencer?

Depois de os alunos praticarem a estratégia do Iberê, e realizarem a atividade 4 vale o professor jogar com os alunos e mostrar que a estratégia dele nem sempre é válida.

5.3 AULA 4

Conteúdo: Jogo de Nim, a estratégia vencedora.

Objetivo geral:

Apresentar aos alunos a estratégia vencedora do jogo de Nim com 3 pilhas.

Objetivos específicos:

Nesta quarta aula, o propósito é fazer com que os alunos conheçam a estratégia vencedora do jogo de Nim com três pilhas e pratiquem.

Abordagem metodológica:

Aula prática, com atividades.

Desenvolvimento:

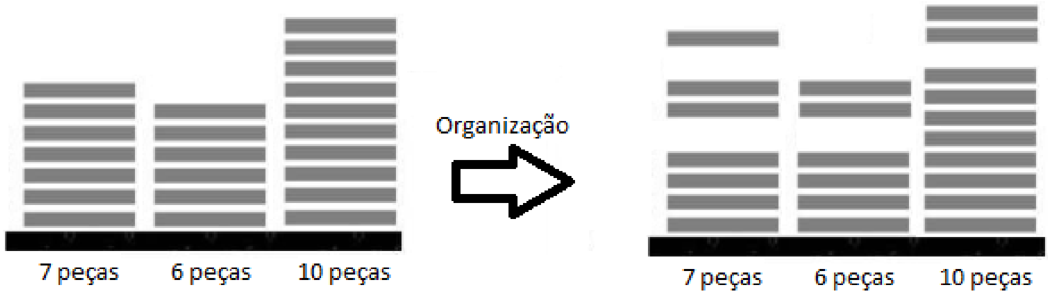
Visto que na terceira aula os alunos perceberam que a estretégia do Iberê e do Piong Lee não é vencedora sempre, nessa aula vamos apresentar realmente a estratégia vencedora.

No trabalho foi apresentado de maneira formal a estratégia vencedora utilizando os numeros binários, a soma Nim, o Teorema de Bounton, etc.

É claro que aqui, vamos usar uma linguagem mais acessível, para que fique relativamente mais facil a estratégia.

Para isso vamos utilizar a estratégia da “Mesa Equilibrada”, tem por trás, os números binários. Ela vai consistir em organizar e separar a quantidade de peças em uma pilha em grupos que contém quantidades de peças em potências de dois. É importante notar que o termo “Mesa Equilibrada” é o mesmo que dizer que a soma Nim da quantidade de peças em cada pilha é zero. Para que fique mais claro, vamos começar com o seguinte exemplo:

EXEMPLO: Considere um jogo de três pilhas com a configuração inicial de: a primeira pilha com 7 peças a segunda pilha com 6 peças e a terceira pilha com 10 peças.



Na primeira pilha, que possui sete peças, para que possamos separar em quantidades de base 2, vamos organizar em um grupo de quatro peças, um grupo de duas peças e um grupo de uma peça, uma vez que $7 = 1 + 2 + 4$.

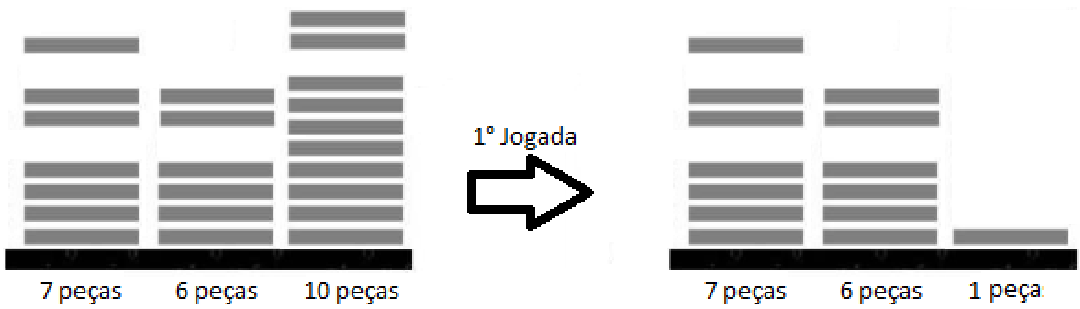
Na segunda pilha, que possui seis peças, vamos organizar em um grupo de quatro peças e um grupo de duas peças, visto que $6 = 2 + 4$.

Na terceira pilha, que possui dez peças, vamos organizar em um grupo de oito peças e um grupo de 2 peças, uma vez que $10 = 2 + 8$. A estratégia vencedora, "Mesa Equilibrada", consiste em balancear os grupos formando pares de quantidades de base 2.

Observe que no nosso jogo, temos um grupo com uma peça, três grupos com duas peças, dois grupos com quarto peças, e um grupo com oito peças.

Devemos fazer uma jogada, para que possamos balancear esses grupos ficando sempre com pares de quantidades de peças iguais.

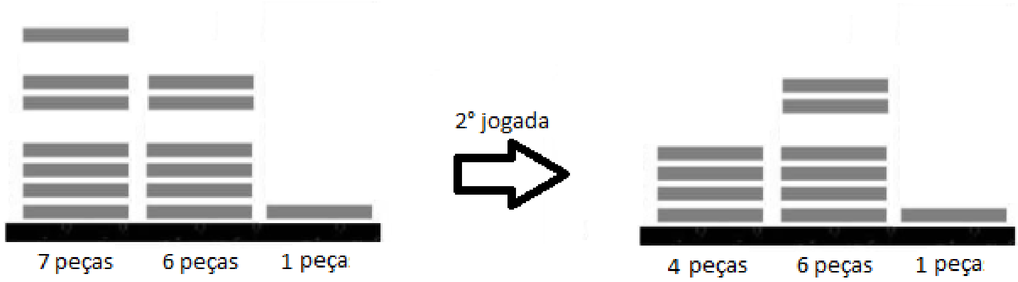
Nesse caso, se retirarmos nove peças da terceira pilha ficaríamos da seguinte forma:



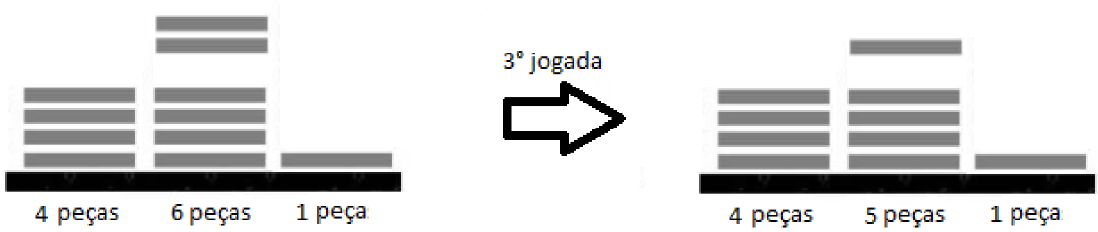
Observe que agora, no nosso jogo, temos dois grupos com uma peça, dois grupos com duas peça e dois grupos com quarto peças. Portanto deixamos a "mesa equilibrada" sempre com pares de grupos com quantidades iguais. Essa é portanto uma P- posição.

É claro que assim, podemos concluir que o primeiro jogador, a partir do momento, que vizualiza o início do jogo pode concluir se a mesa está equilibrada ou não, e decidir se deve começar jogando ou não.

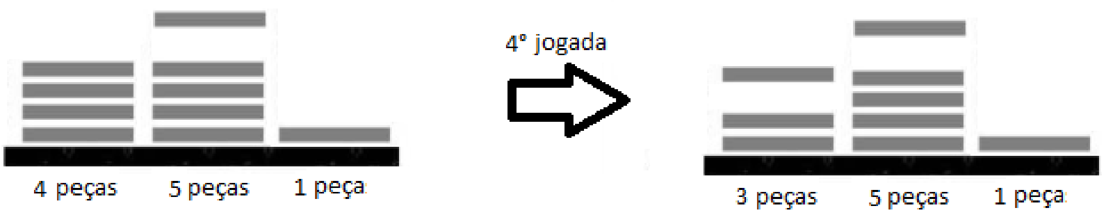
Após a primeira jogada, se ainda assim o segundo jogador, quiser utilizar a estratégia do Iberê e do Piong Lee, podemos retirar três peças da primeira pilha para que todas elas fiquem com quantidades diferentes. Assim:



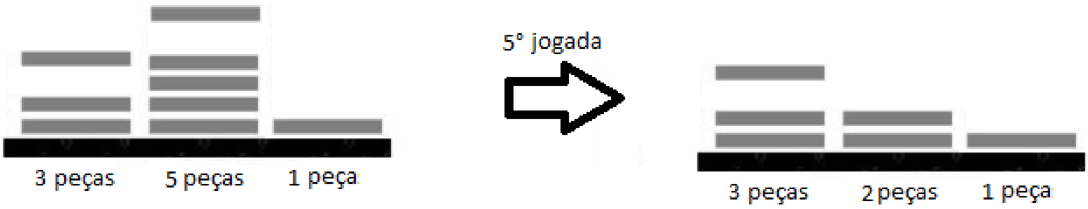
Note que a representação em base 2 (binária) mudou, pois agora temos, um grupo com uma peça, um grupo com duas peças e dois grupos com quarto peças. Portanto, o primeiro jogador deve realizar uma jogada para que possa equilibrar a mesa. Desta forma, basta retirar uma peça da segunda pilha. Pois assim, ficaríamos com dois grupos de uma peça, e dois grupos de quatro peças, observe:



Suponha que, o segundo retire uma pela da primeira pilha. Assim:



Mais uma vez, a representação binária mudou e a mesa está desequilibrada. Note que, agora temos três grupos de uma peça, um grupo de duas peças e um grupo de quatro peças. Portanto, mais uma vez, o primeiro jogador deve realizar uma jogada para que possa equilibrar a mesa. Desta forma, basta retirar três peças da segunda pilha, pois assim, ficaríamos com dois grupos de uma peça, e dois grupos de duas peças, observe:



É interessante observar que, neste momento, estamos com um jogo Nim do tipo (1, 2, 3) e já sabemos que é impossível o segundo jogador vencer, como já vimos no trabalho. Note que se ele esta usando a estratégia do Iberê e do Piong Lee, é impossível ele deixar as três pilhas com quantidades diferentes, exeto retirando todos de uma pilha. Ainda assim se o segundo jogador retirar todas as peças de uma pilha basta que o primeiro jogador deixe as outras duas pilhas com quantidades iguais e repetir todas as jogadas até que a última peça sobre para o adversário fazendo com que ele vença o jogo. Assim, qualquer que for o movimento do segundo jogador, o primeiro irá vencer.

Depois de apresentada a estratégia da "Mesa equilibrada" é interessante que os alunos possam praticar um pouco mais a título de que realmente entendam a estratégia. Para isso vamos propor as seguintes atividades:

ATIVIDADE 2 - Considere um jogo de três pilhas a primeira com 5 pedras e a segunda com 8 pedras a terceira com 12 pedras. Podendo retirar dessas pilhas qualquer quantidade de pedras, desde que, seja de uma mesma pilha. Ganha quem conseguir deixar a última retirada para o oponente.

ATIVIDADE 3 - Considere um jogo de três pilhas a primeira com 12 pedras e a segunda com 9 pedras a terceira com 3 pedras. Podendo retirar dessas pilhas qualquer quantidade de pedras, desde que, seja de uma mesma pilha. Ganha quem conseguir deixar a última retirada para o oponente.

ATIVIDADE 4 – Considere um jogo de três pilhas com a configuração inicial de: a primeira pilha com 4 peças a segunda pilha com 8 peças e a terceira pilha com 15 peças. Podendo retirar dessas pilhas qualquer quantidade de pedras, desde que, seja de uma mesma pilha. Ganha quem conseguir deixar a última retirada para o oponente.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos a história dos jogos, onde podemos perceber que esse tem uma grande importancia no processo de ensino e aprendizagem.

Com o estudo dos Jogos combinatórios do tipo Nim, assim como, suas especificidades, notou-se que o mesmo pode ser uma importante ferramenta para o conhecimento matemático.

O Jogo de Nim apresenta uma forma de jogar interessante e que envolve uma matemática simples e de fácil entendimento, o que permite o enriquecimento das aulas matemáticas através do uso desse jogo.

Em busca da vitória, o jogo exige muito o pensar e, com isso, o processo de cada jogada auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico e, ao desenvolver soluções para as jogadas, melhora o pensamento matemático e, consequentemente, os avanços de outros conteúdos desta disciplina. A procura da estratégia para vencer o jogo cria interesse e desperta a busca do conhecimento para, de fato, matematizar o jogo.

Além disso, percebe-se que o estudo da Teoria dos Jogos Combinatórios ainda é uma área relativamente nova no campo matemático e pouco conhecidas no brasil, tendo estes muitos campos de estudos em aberto.

Sendo assim, acredita-se que o uso do Jogo de Nim, bem como, de suas variações, pode e deve ser mais uma ferramenta de apoio do professor para melhorar o ensino e a aprendizagem de matemática em toda a Educação Básica.

Conclui-se, dessa forma, que seria de grande relevância que este conteúdo fosse mais abordado no currículo escolar, pois além da aquisição de diversas habilidades, promove também uma aprendizagem significativa aos educandos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, B. I; CARVALHO, R. B. de. **A matemática do jogo do Nim em uma abordagem investigativa.** 2016. 79 f. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campos dos Goytacazes, RJ, 2016.

BÖHM, O. **Jogo, brinquedo e brincadeira na educação**. 2015. 14 f. Il. Trabalho de Conclusão de Curso (Pós-Graduação Lato Sensu em Educação e a Interface com a Rede de Proteção Social) - Universidade Comunitária da Região de Chapecó – Unochapecó, Chapecó, 2015.

BUENO, E. **Jogos e Brincadeiras na educação infantil: ensinando de forma lúdica.** Londrina – PR, 2010.

CARNEIRO, M. B. **Brinquedos e Brincadeiras: formando ludoeducadores.** São Paulo: Articulação Universitária, 2003. Citado na página 12.

CHATEAU, J. **O jogo e a criança.** (Guido de Almeida, trad.). São Paulo: Summus Editorial, 1987.

EVES, H. **Introdução à historia da matemática.** Campinas – São Paulo: Editora Unicamp,
(2004).

FERREIRA, A. B., 1910-1989. **Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa.** 3. Ed. Totalmente revista e ampliada. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

GLASER, A. **History of Binary and other nondecimal numeration**. [S.l.]: Tomash Publishers, 1981.

GRANDO, R. C. **O Conhecimento Matem´atico e o uso de Jogos na sala de aula**. Tese de Doutorado. FE/UNICAMP, Campinas, (2000).

JOGO DO FEIJÃO SAFADO FT. PYONG LEE. Manual do Mundo. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ObAZVpR-WZQ> Acesso em 20 de janeiro de 2022.

JOGO DO NIM - RESPOSTA AO VÍDEO "JOGO DO FEIJÃO SAFADO" DO CANAL "MANUAL DO MUNDO". Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=oFCh7TAc-Uo> Acesso em 20 de janeiro de 2022.

MENDES, H. L**. Os números binários nas instituições transpositivas: o caso das diretrizes curriculares**. EBRAPEM XVIII. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Recife (PE), nov. 2014.

NALLIN, C. G. F. **Memorial de Formação: o papel dos jogos e brincadeiras na Educação Infantil.** Campinas, SP: [s.n.], 2005.

NASCIMENTO, H. A. do. **A utilização do Jogo do Nim para estimular o cálculo mental.** 2016. Monografia (Especialista em Ensino de Matemática)-Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, RN, 2016.

NETO, J. P.; SILVA, J. N. Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos. Gradiva Publicações, 2004.

KISHIMOTO, T. M. (Org.) **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 3ª Ed.São Paulo: Cortez 1993.

_______. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortês, 1994.

______. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 1997.

_______. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 7ª Ed. São Paulo: Cortez, 2003.

RAGUENET, I. F.; BARRÊDO, M. K. **A teoria matemática do jogo do Nim.** Revista do Professor de Matemática (RPM), [1983?]. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/6/13.htm Acesso em: 04 de dezembro de 2021.

RIZZI, L.; HAYDT, R. C. C. **Atividades lúdicas na educação da criança.** 6. ed. São Paulo: Ática, 1997.

RODRIGUES, H, O; SILVA, J, R. da. O jogo do Nim e os conceitos de MDC e MMC. **Encontro Nacional de Educação Matemática**. 8., 2004, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.

TEIXEIRA, R. C. **Jogos Combinatórios e Números Surreais**. Departamento de Matemática UFF, 2º Coloquio da regão Sudeste, Rio de Janeiro (2013).