

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DIEGO SAMUEL MACIEL RODRIGUES

DIAGRAMA DE VORONOI:
UMA ABORDAGEM SOBRE JOGOS

Maringá
2019

DIEGO SAMUEL MACIEL RODRIGUES

**DIAGRAMA DE VORONOI:
UMA ABORDAGEM SOBRE JOGOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof^o.Dr^o. Emerson Vitor Castelani

Maringá

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

R696d Rodrigues, Diego Samuel Maciel
Diagrama de Voronoi : uma abordagem sobre jogos /
Diego Samuel Maciel Rodrigues. -- Maringá, 2019.
80 f. : il., color.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática, 2019.

1. Diagrama de Voronoi. 2. Jogos de Voronoi. 3.
Geometria Computacional. 4. Voronoi Diagram. 5. Voronoi
Games. 6. Computational Geometry. I. Castelani, Emerson
Vitor, orient. II. Universidade Estadual de Maringá.
Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.
III. Título.

CDD 22.ed. 519.8

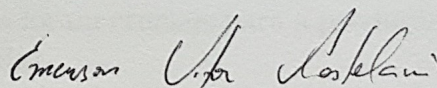
Edilson Damasio CRB9-1.123

DIEGO SAMUEL MACIEL RODRIGUES

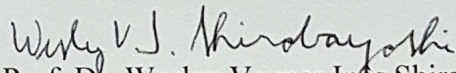
DIAGRAMA DE VORONOI: UMA ABORDAGEM SOBRE JOGOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

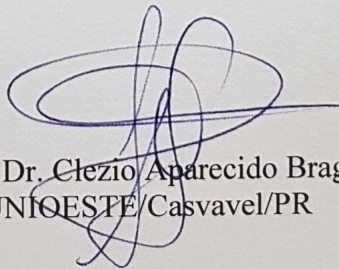
COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Prof. Dr. Wesley Vagner Ines Shirabayashi
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Clezio Aparecido Braga
UNIOESTE/Casvavel/PR

Aprovado em: 26 de agosto de 2019.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Agradeço integralmente ao meu orientador Emerson Castelani pelo apoio e encorajamento, principalmente pelas palavras ditas a mim como "confio no seu trabalho", "acredito que você irá produzir um bom trabalho" e "se precisar de algo, pode me avisar".

Pra mim, tais palavras foram cruciais para a produção do trabalho diante das dificuldades enfrentadas.

RESUMO

O Diagrama de Voronoi, um dos tópicos mais discutidos na área da Geometria Computacional, possui grande difusão em meio a vários estudos, porém pouco se sabe da abordagem deste tema em atividades de ensino. Propõem-se um suporte didático com utilização da temática, diante das dificuldades de abstração no campo da matemática, para metodologia mais dinâmica e interativa colaborando para compreensão objetiva do aprendizado e construção de conhecimentos. Tendo Teoria dos Jogos em evidência, Jogos de Voronoi, diagramas condicionados, despertaram interesse para o foco da pesquisa abordando 4 jogos, a saber, Tradicional Linear, Hotelling, Tradicional No Plano e Máxima Vizinhança, explanando suas jogabilidades e estratégias de vitória. A sequência da exposição das ideias, pela revisão bibliográfica, contribuiu para estabelecer a capacidade de aplicações da estrutura, principalmente com inserção de algoritmos e estruturas de dados, para a resolução computacional de problemas geométricos.

Palavras-chave: Diagrama de Voronoi; Jogos de Voronoi; Geometria Computacional.

ABSTRACT

The Voronoi Diagram, one of the most discussed topics in the area of Computational Geometry, is widely disseminated through several studies, but little is known about the approach of this topic in teaching activities. It is proposed a didactic support with the use of the thematic, faced with the difficulties of abstraction in the field of mathematics, for a more dynamic and interactive methodology collaborating for objective understanding of the learning and construction of knowledge. Having the Game Theory in evidence, Voronoi Games, conditioned diagrams, aroused interest in the research focus addressing 4 games, namely Traditional Linear, Hotelling, Traditional On A Plane and Maximum Neighborhood, explaining their gameplay and winning strategies. The sequence of the exposition of the ideas, through the bibliographic review, contributed to establish the capacity of applications of the structure, mainly with the insertion of algorithms and data structures, for the computational resolution of geometric problems.

Keywords: Voronoi Diagram; Voronoi Games; Computational Geometry.

Lista de Figuras

1	Mapa da Matemática.	9
1.1	Disposição da matéria no sistema solar por René Descartes. . .	12
1.2	Diagrama de Voronoi observados na natureza.	15
1.3	Cônicas pelo Diagrama de Voronoi.	16
1.4	Diagrama de Voronoi na Medicina - Análise da estrutura do tecido.	16
1.5	Diagrama Voronoi Centróide.	17
1.6	Diagrama de Voronoi no SIG - Ouro Preto - MG	17
1.7	Diagrama de Voronoi no SIG - Parte do mapa de Victoria, Australia, com suas subdivisões em relação as escolas públicas.	18
1.8	Diagrama de Voronoi no SIG - Rio de Janeiro - RJ	18
1.9	Diagrama Voronoi na Arquitetura.	19
1.10	Diagrama de Voronoi no Design.	20
1.11	Diagrama de Voronoi na Informática - Estrutura sobre a página do <i>The New York Times</i>	20
1.12	Diagrama de Voronoi na robótica.	21
2.1	Tesselações.	23
2.2	Definição Diagrama de Voronoi.	24
2.3	Diagrama de Voronoi - Semi-planos.	25
2.4	Elementos do Diagrama.	25
2.5	Circunferência centrada em um vértice do Diagrama.	26
2.6	Fronteira de um polígono.	26
2.7	Diagrama de Voronoi Linear.	28
2.8	Diagrama de Voronoi - Intuitiva.	29
2.9	Triangulação de Delaunay.	30
2.10	Propriedades da Triangulação de Delaunay.	31
2.11	Fecho Convexo de um conjunto de pontos.	32
2.12	Flip de Arestas.	33
2.13	Identificação de aresta ilegal.	34
2.14	Aplicação da Triangulação de Delaunay.	34

3.1	Construção Fundamental do Diagrama de Voronoi de A .	37
3.2	Construção Incremental do Diagrama Voronoi.	39
3.3	Plataforma com implementação da construção incremental.	40
3.4	Linha de Praia.	41
3.5	Ponto de Quebra e mudança dos arcos de parábola.	41
3.6	Evento de Ponto.	42
3.7	Evento de Círculo.	42
3.8	Plataformas com implementação da construção por Varredura.	43
4.1	Definições de termos para Estratégia Pontos Chave.	49
4.2	Estratégia Pontos Chave em uma circunferência com $n = 4$ rodadas, um gerador cada rodada (geradores enumerados de acordo com a sequência de jogadas).	51
4.3	Estratégia Pontos Chave em um segmento de reta com $n = 4$ rodadas, um gerador cada rodada (geradores enumerados de acordo com a sequência de jogadas).	53
4.4	Resultado Jogo de Hotelling Tradicional, J2 vencedor.	55
4.5	Resultado Jogo de Hotelling Derivado, J1 vencedor.	56
4.6	Contextualização Jogo de Hotelling - Carrinhos de sorvete na beira da praia.	57
4.7	Configurações Equilíbrio Global.	58
4.8	Jogo Tradicional para $n = 9$.	60
4.9	Redução da área de um polígono de J1 por 2 geradores de J2.	61
4.10	Estratégia para o Jogo Tradicional No Plano - Uma Rodada (Derivada) para espaço retângular com $n = 2$.	63
4.11	Jogo - Exemplo	65
4.12	J2 sempre consegue vizinhança com J1.	65
4.13	Vitória J2 com apenas 1 ponto - Critério 1	66
4.14	Condição Vizinhos Oponentes Distintos: p_1 possui 5 arestas sendo 3 delas com pontos de J2, p_2 com 2 e p_3 com 1. Assim sendo, $V_2 = 3$.	66
4.15	Estratégia Esconder um Ponto do Oponente.	67
4.16	Vitória J2 - Critério 2	68
4.17	Condição Vizinhos Oponentes Não Distintos: $v_1 = 3$, $v_2 = 1$ e $v_3 = 2$ implica em $V_2 = 6$.	69
4.18	Empate - Critério 3.	69
4.19	Estratégia de vitória para J2: $n = 2$.	70
4.20	Estratégia Região Segura.	71
4.21	Vizinhos Próprios Distintos.	72
4.22	Estratégia Região Segura Modificada.	73
4.23	Critério 5.	73

Sumário

Introdução	8
1 História e Aplicações	11
1.1 História	11
1.2 Aplicações e Utilizações	14
1.2.1 Visualizações Naturais	14
1.2.2 Cônicas	15
1.2.3 Medicina	15
1.2.4 Sistema de Informações Geográficas	16
1.2.5 Arquitetura e Design	18
1.2.6 Informática	19
2 Conceitos Básicos	22
2.1 Diagrama de Voronoi	22
2.2 Triangulação de Delaunay	28
3 Construção	35
3.1 Construção Fundamental	36
3.2 Construção Incremental	37
3.3 Construção por Varredura	40
4 Jogos de Voronoi	45
4.1 Jogo de Voronoi Linear	47
4.1.1 Jogo Tradicional Linear	47
4.1.2 Jogo de Hotelling	54
4.2 Jogo de Voronoi No Plano	59
4.2.1 Jogo Tradicional No Plano	59
4.2.2 Jogo Máxima Vizinhança	63
Considerações Finais	74
Referências Bibliográficas	76

Introdução

Estudar a classificação de padrões de dados pelo método do vizinho mais próximo, o crescimento de florestas ou microestruturas cristalinas, a capacidade de uma rede sem fio, o cálculo da precipitação das chuvas, a epidemia da cólera, entre muitas outras situações envolvendo análise de regiões, o Diagrama de Voronoi, uma estrutura com simples conceito de particionamento do espaço, está inserido diretamente nesses estudos. Porém, tal ferramenta não se encontra muito difundida no meio de ensino, mesmo com tantos conceitos matemáticos elementares e de grande utilidade.

De forma contextual, a formalização, [1], do Diagrama de Voronoi contribuiu para o início da Geometria Computacional, junção da área da Matemática e Ciência da Computação, que estuda algoritmos e estruturas de dados para resolução computacional de problemas geométricos.

Estabelecido o Diagrama de Voronoi como objeto de estudo, o interesse neste segmento provém da geometria se preocupar com questões de forma, tamanho e posição de figuras reproduzindo o mapeamento de espaços. Já a Ciência da Computação é relevante por contribuir como refinamento para resolver problemas geométricos de forma eficiente e por ser uma área bem difundida na tecnologia.

Além disso, a matemática que se aprende na escola não faz justiça ao real campo da matemática. Adquiri-se uma porção deste campo, mas a matemática, como um todo, é um assunto enorme e diverso [2] (Figura 1). Aliás, a matemática por muito tempo foi marcada pela sua “criação” sem muito propósito, com motivação apenas por curiosidade, e então, quando estudos são feitos no campo da matemática aplicada são encontradas utilidades para essas descobertas. Assim sendo, o Diagrama de Voronoi se encaixa inteiramente nessas situações que abrem espaço para solução com aplicação matemática.

Envolvendo diversos princípios matemáticos e a utilização do Diagrama de Voronoi, o qual fornece interdisciplinaridade com outras áreas de ensino, jogos foi a vertente selecionada para estudo, pois o sistema de aprendizado de matemática não é atrativo para alunos em razão de, geralmente, recair

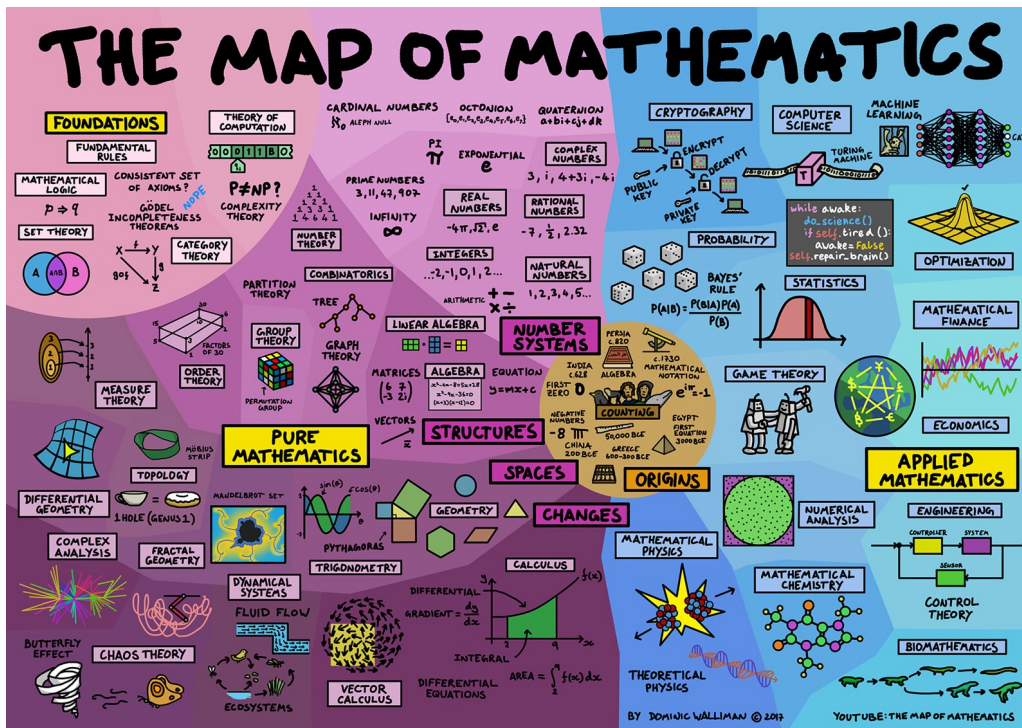


Figura 1: Mapa da Matemática.
 Fonte: Página Dominic Walliman [2].

em somente acumular exercícios dos livros. Assim, com intenção de gerar maior interesse, a ideia de jogo entra como uma atividade dinâmica com interações em meio ao estudo, incluindo iteração de conteúdo e exigindo raciocínio estratégico.

Jogos de Voronoi são modelagens de análises de aplicações onde existe algum tipo de restrição e/ou condição na construção do Diagrama de Voronoi. Assim, não só a jogabilidade e relação entre os jogadores são os principais pontos presentes no estudo, mas também o emprego dos objetivos alcançados após as jogadas, fornecendo continuidade no conhecimento. Ademais, perante as combinações de regras dos jogos, as publicações são majoritariamente trabalhos de configurações específicas que foi o que motivou a coleção dessas configurações para investigação.

Isto posto, tais tópicos foram chaves para o seleção da temática dessa pesquisa com propósito em gerar uma contribuição baseada na sintetização da abordagem dos jogos utilizando a estrutura de Voronoi além dos estudos das jogabilidades, apresentando os aspectos envolvendo o Diagrama de Voronoi para suporte de futuros materiais.

Para tanto, foram organizados quatro capítulos para o estudo. O pri-

meiro, é organizado uma cronologia das constatações da estrutura até sua formalização, seguida das aplicações em algumas áreas como medicina, geografia, arte, computação e na própria matemática. O segundo capítulo se resume a definições e propriedades da estrutura e de seu grafo-dual, a Triangulação de Delaunay. O próximo capítulo, terceiro, descreve três tipos de construção do Diagrama de Voronoi: fundamental, incremental e por varredura. Tais descrições são baseadas na introdução do algoritmo para cada tipo e citados algumas plataformas onde o Diagrama de Voronoi está implementado. O último capítulo, Jogos de Voronoi, é dividido nos jogos linear e no plano. No linear é apresentada a estratégia Pontos Chaves e Equilíbrio Global e no plano são apresentados dois jogos, sendo o Tradicional e o Máxima Vizinhaça, sendo o último analisado pela Triangulação de Delaunay, com análise das estratégias destes. Por fim, são descritas as considerações finais sobre a pesquisa, analisando as contribuições e projeto de trabalhos futuros.

Capítulo 1

História e Aplicações

Observações e constatações registradas ao longo do tempo geram eventos cronológicos onde podemos ter consciência da origem de um tema, que chamamos de história. Tais eventos podem ser classificados também como aplicações, onde toda informação coletada e utilizada para um propósito criam marcos que contribuem para evolução do conteúdo do objeto em foco. E, quanto mais dados, mais se pode agregar interesse a um estudo.

Com essa motivação, as seções a seguir tem o propósito de apresentar a relevância do Diagrama de Voronoi por suas contribuições em variados trabalhos, por intermédio de registros históricos e exemplos de empregos do diagrama.

1.1 História

Uma compilação de referências da história da estrutura Diagrama de Voronoi devem ser levados em consideração para dizer como ela foi descoberta ou utilizada.

Considerando a definição básica sendo o particionamento do espaço onde cada região é associada a um ponto de um conjunto, sendo essa associação gerada por locais mais próximos de um ponto do que de outro desse conjunto, ocorreu que entre as utilizações mais antigas, descobertas, redescobertas e observações na natureza, variações do diagrama em questão foram catalogados em campos da ciência para então, depois de muitos anos convergir para uma estrutura com nomenclatura definida.

Segundo Aurenhammer [3], o registro mais antigo da utilização do conceito do Diagrama de Voronoi é em *Principia Philosophiae* de René Descartes (1596-1650) publicado em 1644 [4]. Não é dito explicitamente sobre o diagrama, mas nele é possível encontrar imagens de desenhos da decomposição

do espaço em regiões convexas formada por massas influenciada pelas estrelas, como na imagem da Figura 1.1.

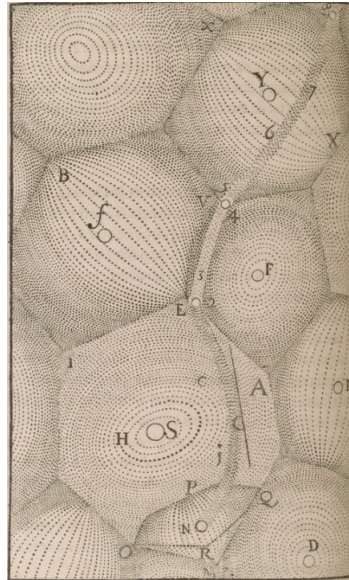


Figura 1.1: Disposição da matéria no sistema solar por René Descartes.

Fonte: DESCARTES, 1644, p. 78. [4].

Diversos são os trabalhos onde foram encontradas as definições e variações do Diagrama de Voronoi ao longo dos anos nos quais a maioria dos autores tomam autoria devido descobertas terem sido em áreas distintas e onde a informação era dificilmente propagada. O texto em sequência contém informações que são dadas em detalhes por Okabe em [5].

Os trabalhos do alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) e do russo Georgy Feodosevich Voronoy (1868-1908) são os primeiros registros a apresentar o conceito da estrutura que se tem ciência hoje. O tema do estudo envolvia as formas quadráticas definida positiva, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}^m; x \neq 0; Q(x) > 0$, onde Dirichlet seguiu os casos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 enquanto Voronoi tratou o caso \mathbb{R}^m . O objetivo do estudo envolvia a distribuição de pontos com coordenadas inteiras buscando valores mínimos de uma forma quadrática dada. Dessa forma, era considerado um conjunto de pontos posicionados regularmente em um espaço \mathbb{R}^m gerado pela combinação linear de m vetores linearmente independentes com coeficientes inteiros e então, realizava a construção do Diagrama de Voronoi neste conjunto, resultando em partição do espaço em poliedros mutuamente congruentes.

O primeiro a associar Dirichlet e Voronoi foi o russo Boris Nikolaevich Delone (1890-1980), quando utilizou o conceito dual do diagrama por Voronoi sobre as relações das vizinhanças e aplicou seu método da esfera vazia

(Triangulação de Delaunay) e foi ele também que criou o termo regiões Voronoi.

A partir daí, entre os séculos 19 e 20 várias estruturas começaram a ser descobertas na área das ciências naturais, cada uma com nomeações distintas, porém com mesmo conceito.

Em 1885, na área da cristalografia, Evgraf Fedorov, no estudo de combinação de preenchimento de espaço de cinco poliedros paralelos em \mathbb{R}^3 , chamou as regiões Voronoi de Estereoedros. Na mesma área, os termos área fundamental, esfera de influência, domínio de ação, campo de atividade e pleioedro foram utilizados também por outros pesquisadores alemães e russos para designar as regiões Voronoi.

Na meteorologia, geografia e disciplinas sociais foi criado o termo polígono Thissen, em 1911, onde o americano Alfred H. Thiessen computou estimativas precisas das médias regionais de precipitação conhecido até hoje como Método Thissen.

Em 1933, o húngaro Eugene Paul Wigner e o americano Frederick Seitz, no estudo das propriedades químicas do sódio metálico, descrevem as regiões Voronoi por pontos organizados em grade tridimensional e então nomeiam células Wigner-Seitz, os politopos regulares. Na mesma área, em 1958, o britânico Frederick Charles Frank e John S. Kasper focaram em vizinhanças dos poliedros Voronoi (regiões Voronoi tridimensionais) formados pelos átomos contíguos a um poliedro Voronoi de um átomo dado e chamaram eles de domínio de um átomo. Já em 1971, definiram também o crescimento das zonas de captura de cristais nos grafites iguais as regiões Voronoi.

O americano Claude Elwood Shannon, entre 1948 e 1949, desenvolveu um estudo num modelo de comunicação equivalente a um Diagrama de Voronoi de um conjunto de códigos onde a região Voronoi é a localização de uma mensagem transmitida e mais tarde, essas regiões foram chamadas regiões de máxima verossimilhança e, em 1992, Favo de Mel de Voronoi.

Em outro campo, na ecologia, o Diagrama de Voronoi foi observado e então redescoberto. Nos anos 60s, o britânico George Stewart Brown definiu a área potencialmente disponível, uma região Voronoi para uma árvore, para estimar a intensidade de árvores em uma floresta onde o inglês Roger Meado chamou de polígonos planta.

Uma das últimas relações a estrutura registrada foi por Louis Johan Charles Hoofd onde definiu, em 1985, as regiões Voronoi sendo os centros capilares em pedaços de tecidos, chamando-os de domínios capilares.

Por mais que várias descobertas de estruturas naturais estejam relacionadas ao Diagrama de Voronoi ao longo desses anos, o médico inglês John Snow, em 1855, publicou um mapa referente ao surto de cólera de 1854 que

ocorreu na rua Broad Street em Londres mostrando a incidência de mortes perto das bombas de água, provando que o contágio da doença estava ligado ao abastecimento de água. A estrutura montada por John Snow se compara ao Diagrama de Voronoi pois as bombas podem ser consideradas os geradores da estrutura onde os indicadores dos óbitos se expandiam radialmente.

Outra aplicação científica, foi a do alemão Carl Haag, em 1898, que utilizou um estrutura parecida com ao Diagrama de Voronoi para visualizar a variação dialética e identificar as divisões linguísticas no sudoeste da Alemanha.

Mas, nos anos 70s, com o avanço da ciência da computação, algoritmos foram desenvolvidos para construção do Diagrama, criando o que é hoje o ramo da Geometria Computacional. Foram os americanos Michael Ian Shamos e Dan Hoey, em 1975, que iniciaram essa formalização apresentando um algoritmo para construção (baseado na estratégia de divisão e conquista), além de utilizar esse algoritmo para encontrar a árvore geradora mínima, identificar o vizinho mais próximo de cada ponto e encontrar o maior círculo vazio cujo centro está dentro do fecho convexo.

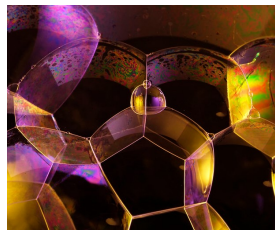
Assim, podemos dizer que em situações específicas, não em lato sensu, a natureza se comporta de uma forma que o Diagrama de Voronoi pode mapeá-las. Além disso, é possível adaptar a estrutura para inúmeros problemas, além de auxiliar em análise de comportamentos e como assumir uma previsão geralmente geográfica do objeto estudado. A próxima seção separa algumas dessas aplicações.

1.2 Aplicações e Utilizações

Por mais que o Diagrama de Voronoi já existisse dentre identificações e formalização, podemos citar algumas aplicações em várias áreas com objetivos específicos, demonstrando como o Diagrama de Voronoi pode ser usado como uma ferramenta poderosa e como as regiões Voronoi, representadas por polígonos, podem ser diversas.

1.2.1 Visualizações Naturais

Existem particionamentos naturais do espaço que são simples de relacionar com Diagramas de Voronoi. As fronteiras que bolhas de sabão adjacentes formam, o casco da tartaruga ou até mesmo a regularidade do favo de mel, são exemplos nítidos da divisão da superfície por polígonos onde é até mesmo possível identificar o gerador da região, como observado na Figura 1.2.



(a) Bolhas



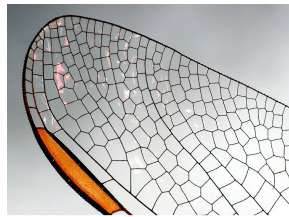
(b) Casco de Tartaruga



(c) Favo de Mel



(d) Girafa



(e) Asa da Libélula



(f) Pinha

Figura 1.2: Diagrama de Voronoi observados na natureza.
Fonte: Banco de Imagens *flickr* ¹.

1.2.2 Cônicas

Uma importante aplicação em geometria analítica, inspirada por [6], é a construção de esboços de cônicas, como a parábola e a hipérbole. Quanto maior for a quantidade de pontos, mais próximo ficará representada a curva. Para a construção, basta considerar os elementos básicos das parábolas e hipérbolas, o foco e a reta diretriz, então posicionar um gerador no foco e distribuir os outros geradores na reta diretriz dando forma ao Diagrama de Voronoi. Assim, a fronteira do gerador no foco com os outros geradores formarão a curva da cônica. É possível criar os casos degenerados, que são triviais, e além do mais, as propriedades dessas cônicas continuam sendo válidas.

1.2.3 Medicina

Uma aplicação do Diagrama de Voronoi na medicina [7] teve como objetivo o uso dos polígonos para mostrar que os tecidos naturais possuem distribuições diferentes e entender o desenvolvimento de uma doença pela estrutura quando alterado o equilíbrio das tensões e pressões dentro dos tecidos com uma patologia (Figura 1.4).

Nesse estudo foi usada uma condição do Diagrama de Voronoi, onde a

¹<https://www.flickr.com/photos> - Acessados em 15-07-2019

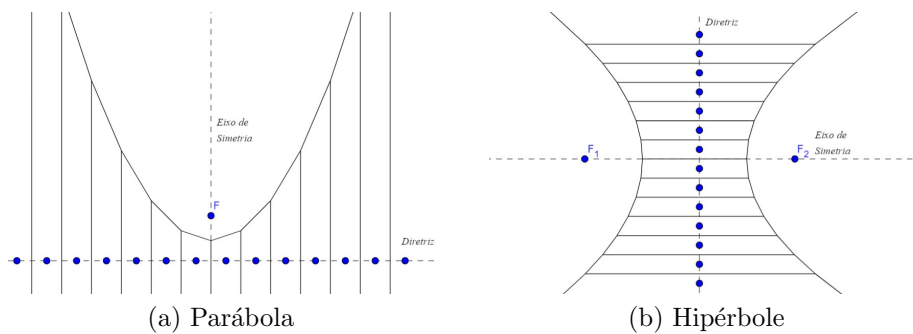
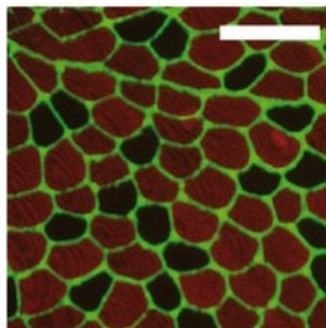
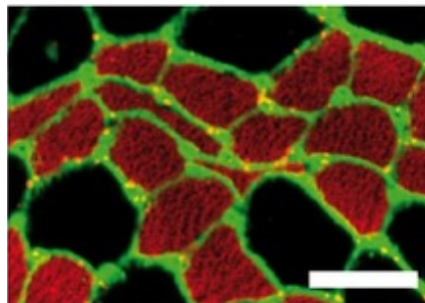


Figura 1.3: Cônicas pelo Diagrama de Voronoi.
 Fonte: Elaborado pelo autor.



(a) Biópsia do bíceps adulto.



(b) Biópsia de bíceps de adulto de paciente com patologia de atrofia neurogênica.

Figura 1.4: Diagrama de Voronoi na Medicina - Análise da estrutura do tecido.

Fonte: SÁNCHEZ-GUTIÉRREZ, Daniel et al, 2016, 77-88 [7].

organização das células se dão pelo Diagrama de Voronoi Centróide, ou seja, os geradores buscam ser o ponto de massa do polígono, resultando em uma estrutura regular. Essa estrutura é obtida pela iteração do algoritmo de Lloyd [8] (Figura 1.5).

1.2.4 Sistema de Informações Geográficas

As aplicações do Diagrama de Voronoi no Sistema de Informações Geográficas (SIG) geralmente estão ligadas aos problemas de proximidade.

Um trabalho desenvolvido [9] com esse intuito foi a utilização dos polígonos para determinação de áreas de influência de escolas públicas, considerando o número de vagas em cada uma. Como existe uma influência nas considerações de distâncias, a formação dos polígonos levam em consideração alguns atri-

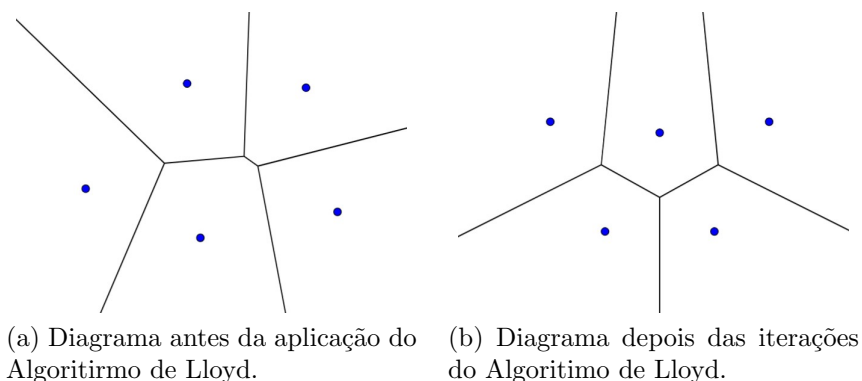


Figura 1.5: Diagrama Voronoi Centróide.

Fonte: Elaborado pelo autor.

butos no cálculo das suas áreas, gerando um ponderamento na formação dos polígonos originais.

Um dos objetivos do trabalho foi delimitar a área de influência das escolas públicas de Ouro Preto, além de verificar a relação do número de vagas e a localização das escolas na cidade (Figura 1.6).

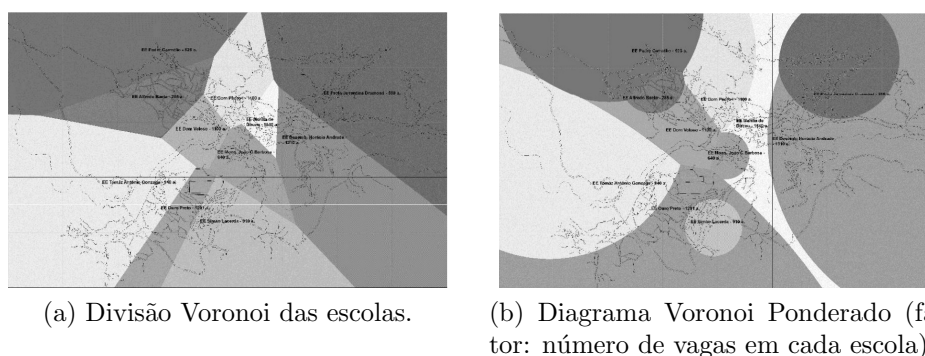


Figura 1.6: Diagrama de Voronoi no SIG - Ouro Preto - MG

Fonte: MOURA, 2009 [9].

Outra utilização do Diagrama de Voronoi com objeto similar de estudo, é a divisão da cidade Victoria, Austrália, para a criação de zonas de captação de escolas onde os alunos matriculados são os que moram dentro dessas zonas. Um site [10] é disponibilizado com um mapa particionado, sendo as escolas os geradores dessas regiões.

Uma aplicação semelhante as escolas de Ouro Preto, porém com os hospitais públicos do Rio de Janeiro - RJ, foi retratada em [11], onde não só levou em consideração a distância para criação das regiões mas também a capacidade real da unidade em relação a oferta de internações dos hospitais,

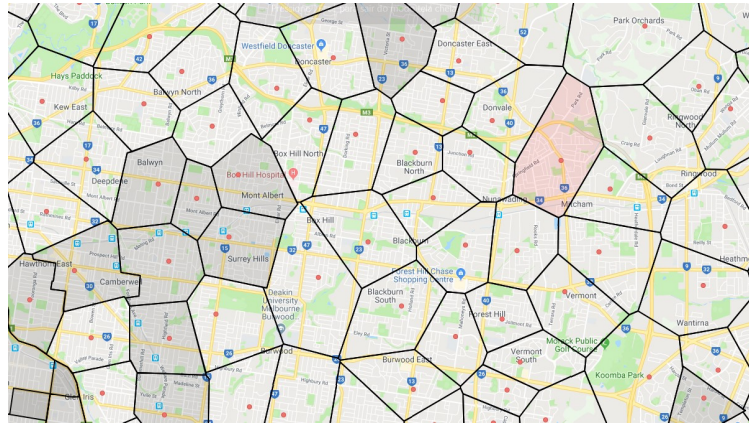
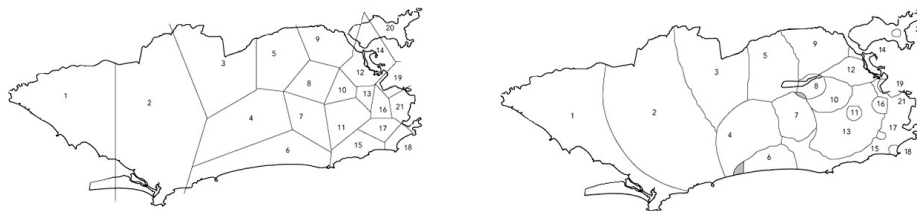


Figura 1.7: Diagrama de Voronoi no SIG - Parte do mapa de Victoria, Australia, com suas subdivisões em relação as escolas públicas.

Fonte: Página *Melbourne School Zones* [10].

dando aos responsáveis mais dados para um melhor planejamento na área da saúde (Figura 1.8).



(a) Diagrama Voronoi para os hospitais. (b) Diagrama Voronoi Ponderado (fator leitos disponíveis para internação)

Figura 1.8: Diagrama de Voronoi no SIG - Rio de Janeiro - RJ

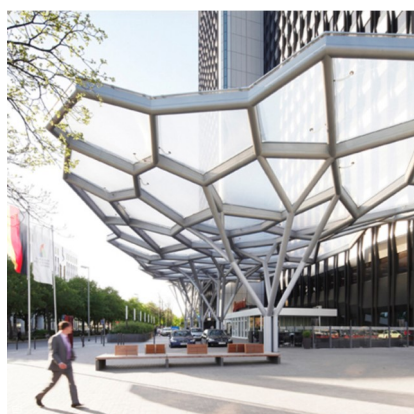
Fonte: REZENDE, ALMEIDA e NOBRE, 2000 [11].

1.2.5 Arquitetura e Design

No âmbito da arte, o Diagrama de Voronoi também tem seu lugar e com as novas tecnologias, ela é representada de forma bem explícita na arquitetura e no design com uma expressão contemporânea.

Em [12], os autores descrevem tecnicamente a estrutura construída em 2010 em frente ao edifício *WestendGate*, na Alemanha. Uma cobertura com design de polígonos de Voronoi foi erguida por *Just / Burgeff Architekten*, escritório de arquitetura, com intenção de estender o espaço urbano adjacente, com modelo arbóreo simulando o crescimento de árvores (Figura 1.9.a).

No mesmo artigo, é relatado um projeto onde é utilizada a estrutura de Voronoi. O escritório de arquitetura ACME, recebeu um prêmio na competição Parque da Paz da ONU, em 2009, por projetar um memorial das Nações Unidas onde este possuía design estrutural com os polígonos de Voronoi. Tal estrutura tinha o conceito de representar as nações individuais onde se unem em uma única entidade sem perder suas identidades (Figura 1.9.b).



(a) *WestendGate*



(b) Projeto Memorial das Nações Unidas.

Figura 1.9: Diagrama Voronoi na Arquitetura.

Fonte: LIMA, 2017 [12].

Com grande correlação, o Diagrama de Voronoi é bastante utilizado no design de um móvel ou do complemento de um cômodo. A pintura de uma parede, uma cadeira, uma estante, uma janela, uma luminária, um vaso, todos são elementos passíveis de uma modificação estrutural, sempre com ênfase em um objetivo de decoração. Uma delas é a prateleira desenhada pelo aplicativo de Alan Rorie em 2012 [13], onde é possível que o consumidor produza o design do item com a estrutura do Diagrama de Voronoi (Figura 1.10).

1.2.6 Informática

Não só visualmente o Diagrama de Voronoi pode ser empregado, mas sua utilização para atingir um objetivo ou auxiliar a finalidade de um projeto pode ser caracterizada como inovadora.

Um exemplo no ramo da informática é a aplicação na interface do usuário. O site do *The New York Times*, publicou uma página interativa onde era possível verificar as possibilidades de ganho nas eleições presidenciais entre Barack Obama e Mitt Romney [14]. As seleções dos objetos pela árvore

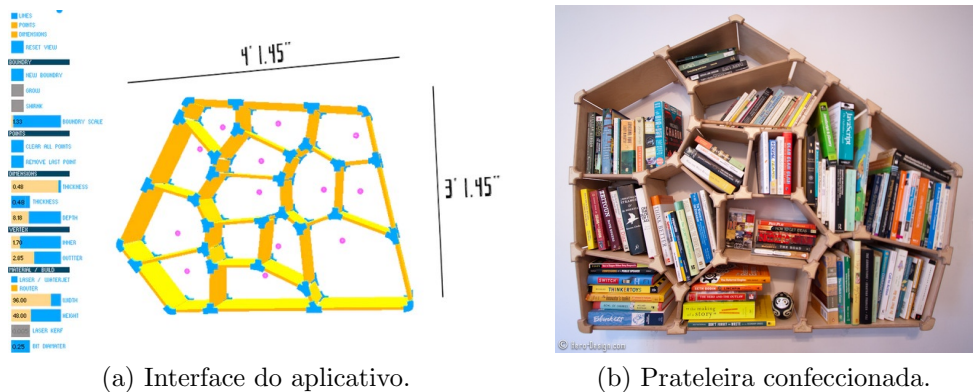


Figura 1.10: Diagrama de Voronoi no Design.
 Fonte: Página *Kickstarter* [13].

binária de possibilidades, tinham uma diferença entre seus campos de opção, onde não era necessário estar exatamente sobre o item, que era o ponto de decisão, e sim em uma região da página que pertencia ao mesmo.

Criado pelos americanos Mike Bostock e Shan Carter, Mike relata [15], que usou uma sobreposição invisível com a estrutura do Diagrama de Voronoi para melhorar a interação com o mouse sobre os itens onde o caminho mais próximo do mouse era destacado (Figura 1.11).

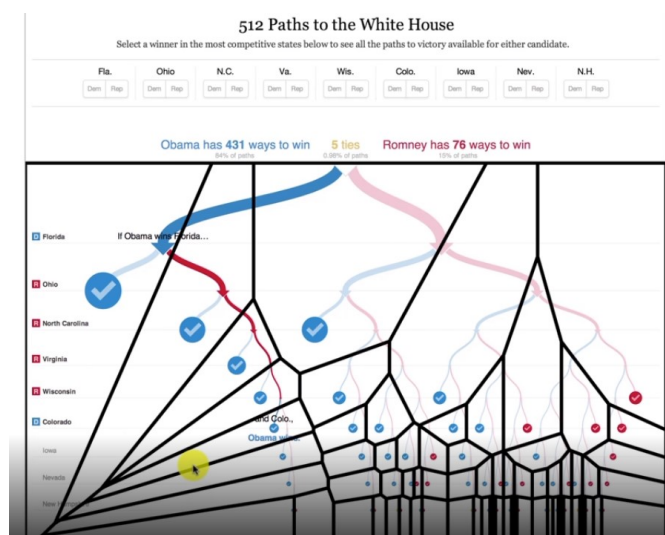


Figura 1.11: Diagrama de Voronoi na Informática - Estrutura sobre a página do *The New York Times*
 Fonte: Página *The New York Times* [15].

Em robótica, vários trabalhos sobre planejamento de movimento de robôs

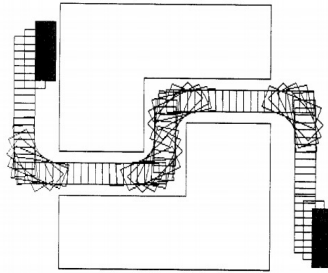


Figura 1.12: Diagrama de Voronoi na robótica.
Fonte: TAKAHASHI e SCHILLING, 1989 [16].

fundamentam o algoritmo que arquiteta um caminho livre de colisão para um retângulo em um plano preenchido com obstáculos poligonais [16]. Tal caminho é obtido pelo Diagrama de Voronoi Ponderado, criando vias distando o máximo possível dos obstáculos de forma que os pontos desse caminho são equidistantes da arestas desses polígonos que representam os obstáculos (Figura 1.12).

Desse modo, tanto a lógica ser muito parecida com os padrões orgânicos da natureza quanto a eficácia do uso da estrutura como ferramenta, inúmeras são as aplicações do Diagrama de Voronoi. E, portanto, a forma como a estrutura se encaixa nos objetivos ou como ela propulsiona um resultado, tem se revelado um grande benefício e relevância a sua utilização, merecendo uma atenção particular.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Para melhor compreensão de qualquer estrutura, definições são enunciadas para não só originar conceitos, mas para também sustentar qualquer desenvolvimento de um estudo. Dessa maneira, são impostas formalizações para que não ocorra margem para interpretações, determinando proposições exatas.

O presente capítulo segue apresentando definições matemáticas do Diagrama de Voronoi, exibindo uma concepção analítica da sua estrutura além de exibir os elementos que o compõe.

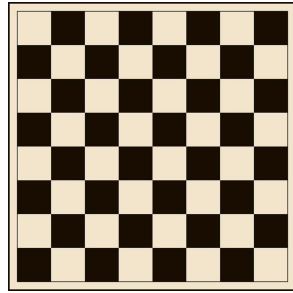
É retratado também, o diagrama complementar do Diagrama de Voronoi, a Triangulação de Delaunay, expondo uma definição e a sua particularidade em se diferenciar de outras triangulações pela maximização dos ângulos dos triângulos que compõem a partição do plano. É apresentado também o método Flip de Arestas para transformação de uma triangulação em Triangulação de Delaunay e então, destacando sua principal aplicação.

2.1 Diagrama de Voronoi

Apesar das definições matemáticas, generalizações e variações, o Diagrama de Voronoi é usualmente definido com um conjunto finito de pontos distintos sobre um plano onde cada região é designada ao ponto mais próximo desse conjunto, e assim cada ponto determina sua própria região.

Como é feita a divisão do plano em regiões, o Diagrama de Voronoi é considerado uma tesselação, ou seja, o cobrimento total de uma superfície por polígonos sem que existam espaços entre eles ou sobreposições [17]. Podemos citar exemplos de tesselação, como na Figura 2.1, o tabuleiro de xadrez e pavimentação por paralelepípedos, com polígonos regulares.

Dentre as definições existentes, algumas serão apresentadas para melhor



(a) Tabuleiro de Xadrez.



(b) Pavimentação por Paralelepípedos.

Figura 2.1: Tesselações.
Fonte: Banco de Imagens *pixabay* ¹.

compreensão da sua formalização, assim como suas propriedades. Consideraremos em algumas definições o conjunto de índices $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, subconjunto de \mathbb{N} limitado por n . Doravante, frequentemente trataremos a terminologia Diagrama de Voronoi somente por Diagrama.

Definição 2.1 (Diagrama de Voronoi) *Seja $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto de pontos onde $2 \leq n < \infty$.*

Chama-se região de Voronoi associada ao ponto p_i o conjunto

$$V(p_i) = \{p | d(p_i, p) \leq d(p_j, p); i \neq j, i, j \in I_n\},$$

onde d denota a distância euclidiana, e o conjunto formado por essas regiões

$$V(A) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\},$$

Diagrama de Voronoi.

A relação entre os pontos e o Diagrama de Voronoi sobre esse conjunto de pontos é ilustrada na Figura 2.2, demonstrando a tesselação tradicional.

Nesta definição a quantidade de pontos a ser considerada é maior que um, devido ao Diagrama de Voronoi com um ponto ser trivial, onde existe apenas uma região, que é o plano todo.

Outra variação que pode ser considerada é em relação a quantidade de pontos em um plano, podendo o Diagrama ser finito (utilizado na abordagem dos jogos) ou infinito.

Podemos considerar outra definição alternativa utilizando o conceito de semi-planos.

¹<https://pixabay.com/pt/vectors> - Acessado em 15-07-2019

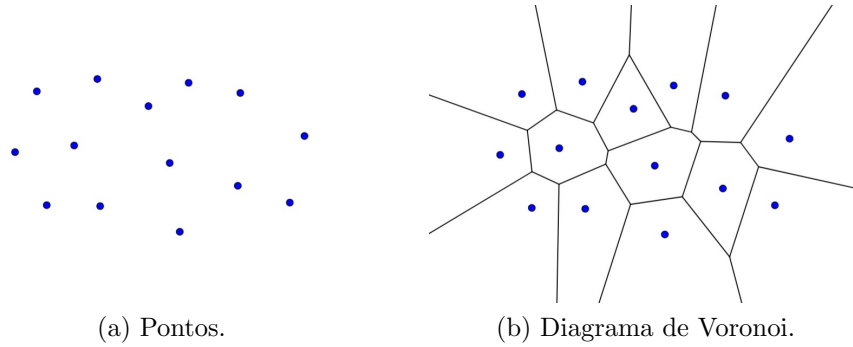


Figura 2.2: Definição Diagrama de Voronoi.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 2.2 (Diagrama de Voronoi - Semi-planos) *Seja um conjunto $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ onde $2 \leq n < \infty$. Chamaremos $b(p_i, p_j)$ a reta mediatriz ortogonal ao segmento $\overline{p_i p_j}$ e*

$$s(p_i, p_j) = \{p / d(p_i, p) \leq d(p_j, p); i \neq j, i, j \in I_n\},$$

o semi-plano contendo p_i delimitado por $b(p_i, p_j)$.

Definimos a região de Voronoi $V(p_i)$ como sendo a interseção dos $n - 1$ planos contendo p_i , ou seja,

$$V(p_i) = \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} s(p_i, p_j),$$

e o conjunto formado por essas regiões

$$V(A) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\},$$

o Diagrama de Voronoi.

Para ilustrar a Definição 2.2, temos na Figura 2.3a a construção do semi-plano $s(p_i, p_j)$ de um ponto p_i delimitada pela reta mediatriz $b(p_i, p_j)$ perpendicular ao ponto médio do segmento $\overline{p_i p_j}$ e na Figura 2.3b, a formação do polígono $V(p_i)$ do ponto p_i em relação a outros pontos.

Alguns elementos presentes na construção de um Diagrama de Voronoi devem ser destacados. Todo ponto do conjunto considerado no plano são chamados geradores onde cada região que é gerada por estes formam os polígonos. Além disso, se p é um gerador, a área do polígono formada por p será denotada por $|V(p)|$.

Pela Definição 2.2, pode-se verificar que é considerada a igualdade na distância euclidiana onde esta caracteriza a fronteira que o polígono faz com

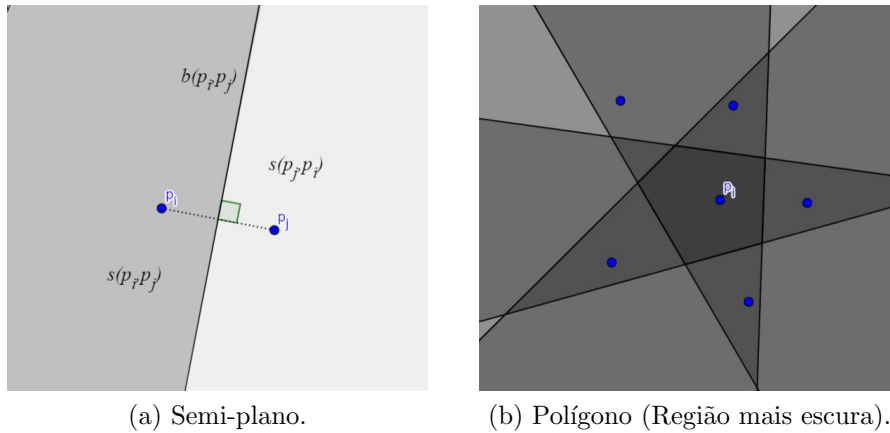


Figura 2.3: Diagrama de Voronoi - Semi-planos.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

outro polígono adjacente, chamada de aresta $a(p_i, p_j)$. Estas arestas são formadas por pontos que estão mais próximos de dois geradores, dos polígonos adjacentes, do que qualquer outro, conforme Figura 2.4a. Se uma aresta não tem fim, ou seja, uma semirreta, ou é delimitada pelo limite do plano considerado, ela é denominada infinita.

Outro elemento do Diagrama é o vértice definido pelo fim de um aresta. Vértices são comuns a 3 ou mais polígonos e seu grau é o número de arestas incidentes, como na ilustração da Figura 2.4b. Quando existe pelo menos um vértice de grau 4 ou maior, o Diagrama é chamado de degenerado.

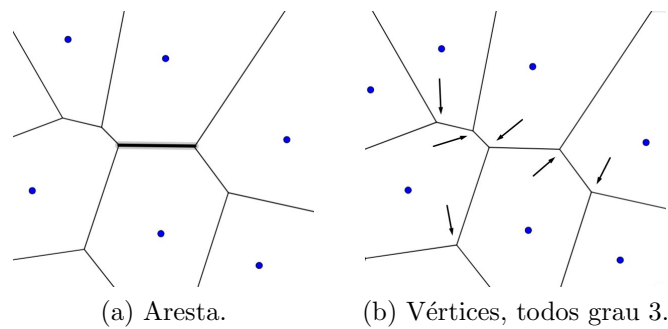


Figura 2.4: Elementos do Diagrama.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Propriedade 2.1 *Cada vértice v do diagrama é centro da circunferência $C(v)$ que passam pelos geradores cujas regiões são comuns a este vértice. Além disso, o interior de $C(v)$ não contém nenhum outro gerador (Figura 2.5).*

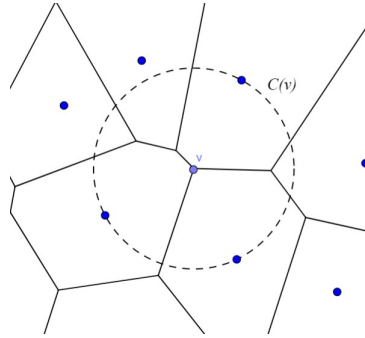


Figura 2.5: Circunferência centrada em um vértice do Diagrama.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando que um polígono é um conjunto fechado, suas fronteiras, vide Figura 2.6, podem ser determinadas da seguinte maneira

$$\partial V(p_i) = V(p_i) \cap V(p_j); i \neq j, i, j \in I_n.$$

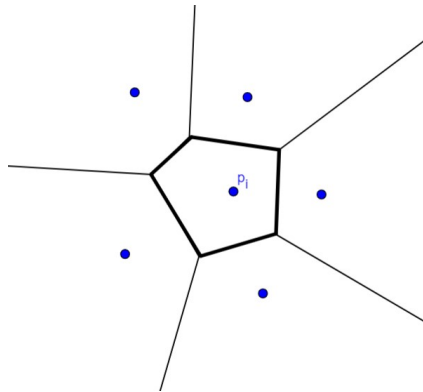


Figura 2.6: Fronteira de um polígono.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma definição alternativa para o Diagrama de Voronoi considera o conjunto das fronteiras, $V(A) = \{\partial V(p_1), \partial V(p_2), \dots, \partial V(p_n)\}$, porém não é muito usual essa definição, pois a estrutura deixaria de ser uma tesselação e passaria a ser uma rede.

Devido as definições usuais do Diagrama de Voronoi serem no espaço \mathbb{R}^2 , temos que com a definição alternativa por semi-planos é possível definir o diagrama em \mathbb{R}^m . Assim, consideremos a posição dos pontos por localização vetorial para a formalização, ou seja, para um ponto p em \mathbb{R}^m , suas coordenadas serão representadas por $p = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Definição 2.3 (Diagrama de Voronoi - \mathbb{R}^m [5]) *Seja um conjunto de pontos $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^m$, com representação vetorial, onde $2 \leq n < \infty$.*

Cada região de Voronoi $V(p_i)$ é determinada por

$$V(p_i) = \{p / \|p - p_i\| \leq \|p - p_j\| ; i \neq j, i, j \in I_n\} = \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} s(p_i, p_j),$$

e denominada poliedro de dimensão m .

Desse modo, definimos o Diagrama de Voronoi como a união dessas regiões

$$V(A) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}.$$

Com a abrangência da Definição 2.3, podemos definir o diagrama linearmente, ou seja, no \mathbb{R} , onde essa estrutura será usada para fundamentar alguns jogos.

Definição 2.4 (Diagrama de Voronoi - \mathbb{R} [18]) *Seja $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto de pontos onde $2 \leq n < \infty$ e os pontos p_i estão ordenados em ordem crescente $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Seja e_i o ponto equidistante entre o pontos consecutivos p_{i-1} e p_i , ou seja, $e_i = \frac{1}{2}(p_{i-1} + p_i)$, sendo $e_1 = -\infty$ e $e_n = +\infty$. Dessa forma, a região Voronoi de p_i será o intervalo*

$$V(p_i) = [e_i, e_{i+1}],$$

e a união destas regiões

$$V(A) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\},$$

o Diagrama de Voronoi.

Como a definição é linear, os elementos p_i , geradores, do conjunto A , são pontos da reta \mathbb{R} , ou seja, números reais. Desse modo, a construção do Diagrama se baseia em determinar quais pontos da reta real estão mais próximo ao número real p_i . Assim, as regiões Voronoi nessa dimensão são intervalos e não polígonos e as fronteiras são pontos coincidindo com os vértices, pois vértices são as extremidades das arestas. A Figura 2.7 demonstra o Diagrama de Voronoi Linear.

Por mais que seja possível formalizar as definições, existe uma definição intuitiva capaz de demonstrar a origem da formação das regiões de Voronoi construindo o diagrama pela definição chamada Ondas Expansíveis [3] ou Modelo de Crescimento Voronoi [5].

Consideremos o seguinte conceito: seja um conjunto A com geradores p_i e um ponto p arbitrário do plano. Centramos um círculo C em p crescendo seu raio a partir do zero e em certo momento C irá atingir um ou mais geradores p_i . Três casos podem ocorrer:

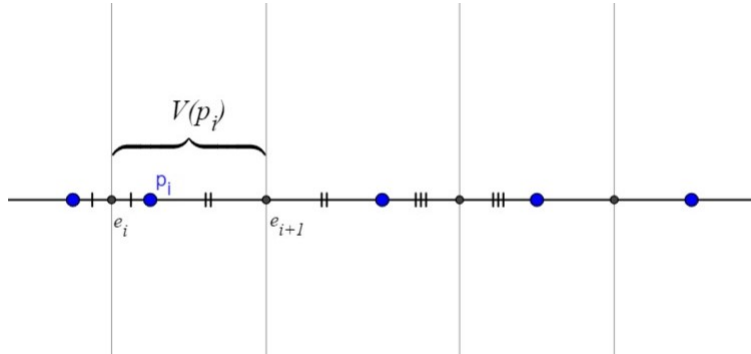


Figura 2.7: Diagrama de Voronoi Linear.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

- Se p atinge apenas um gerador p_i , então $p \in V(p_i)$;
- Se p atinge dois geradores p_i e p_j , então $p \in \partial V(p_i) = V(p_i) \cap V(p_j)$;
- Se p atinge três ou mais geradores, então p é um vértice adjacente a esses geradores.

Desse modo, seguindo esse raciocínio, porém com os geradores, temos outra definição do Diagrama de Voronoi.

Definição 2.5 (Diagrama de Voronoi - Intuitiva) *Seja o conjunto de geradores $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ e a expansão de um círculo C de cada um dos n geradores do plano, a mesma velocidade.*

Os pontos do plano pertencerão as regiões dos geradores cujos círculos os atingirem primeiro, formando os polígonos $V(p_i), i \in I_n$ até os círculos atingirem outros círculos (e as delimitações do plano).

O Diagrama de Voronoi será formado pelo conjunto de todos $V(p_i)$.

A Figura 2.8 apresenta o comportamento do Modelo de Crescimento Voronoi para a Definição 2.5, crescendo discretamente o raio dos geradores até a formação completa do Diagrama de Voronoi.

2.2 Triangulação de Delaunay

O Diagrama de Voronoi e a Triangulação de Delaunay são comumente discutidas em paralelo, principalmente pela obtenção de um diagrama a partir do outro e pelas várias análises que cada um traz para cada situação.

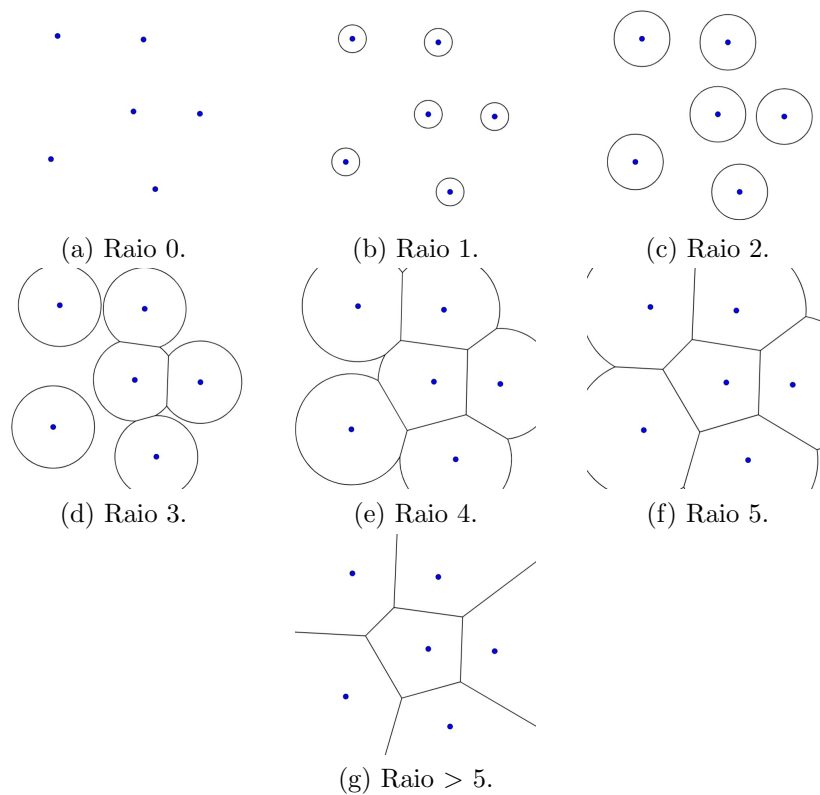


Figura 2.8: Diagrama de Voronoi - Intuitiva.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo disso é a jogabilidade de alguns Jogos de Voronoi serem melhor discutidas pela Triangulação de Delaunay quando o critério envolve quantidade de fronteiras de uma região Voronoi.

Para conceituar o novo diagrama, tomemos um Diagrama de Voronoi e consideramos as arestas infinitas e ligamos estas a um único ponto, um vértice extra. Com essa estrutura teremos um conjunto de pontos, os vértices do Diagrama de Voronoi, e um conjunto de arestas caracterizando um grafo, ou seja, todos os vértices têm alguma ligação, arestas, e nenhuma cruza com a outra. Além disso, todo grafo planar possui seu grafo-dual, isto é, cria-se um vértice para cada região do planar e para cada aresta do planar que separa duas regiões, uma aresta ligando os vértices que representam essas regiões adjacentes do planar [19].

Assim sendo, seja o grafo planar a partir do Diagrama de Voronoi e fazendo a ligação de cada dois geradores que fazem fronteira pelas regiões que cada um representa, temos como resultado outra tesselação, esta conhecida como Triangulação de Delaunay [20] (Figura 2.9).

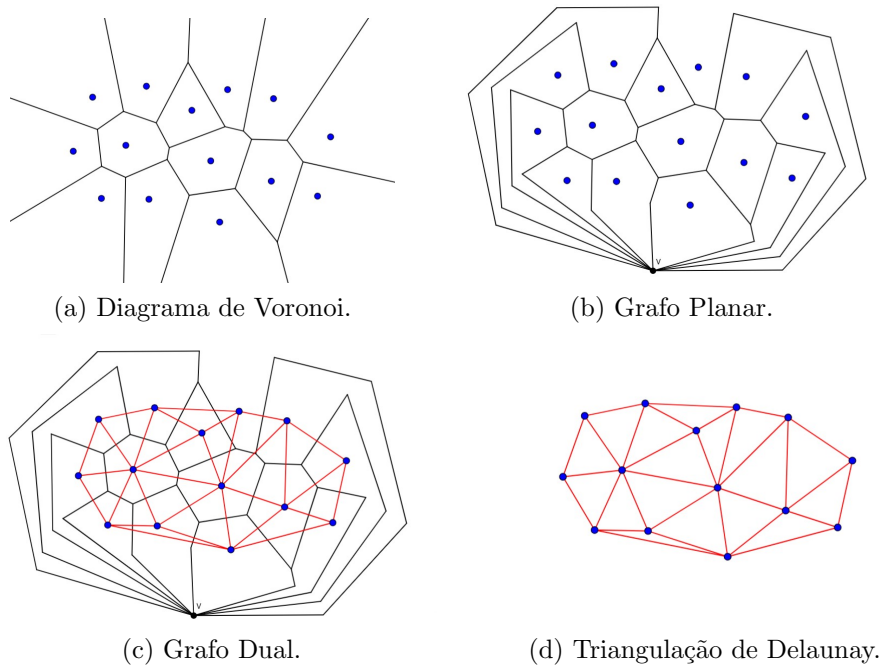


Figura 2.9: Triangulação de Delaunay.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 2.6 (Triangulação de Delaunay) *Seja $V(A)$ o Diagrama Voronoi (não degenerado) definido por um conjunto $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ de pontos não-colineares onde $3 \leq n < \infty$.*

Ligando todos os pares de geradores cujas regiões compartilham uma aresta comum, obtemos como resultado uma tesselação. Os polígonos formados serão somente triângulos, definindo uma Triangulação de Delaunay dada por $D(A)$ [5].

A restrição de que o número de pontos seja maior que 3 implica na condição de que também não sejam colineares, já que 2 geradores sempre são colineares. Mas o principal motivo é que, se a quantidade de pontos no conjunto for menor que 3 ou colineares, não é possível construir um triângulo. Desse modo, a Triangulação de Delaunay será utilizada em Jogos onde a estrutura é bidimensional e frequentemente denotaremos apenas por Triangulação.

Os triângulos formados na estrutura são denominados faces e suas envoltórias formadas, arestas e a conexão destas, vértices. Conhecidos os elementos da estrutura de Delaunay consideremos as seguintes propriedades obtidas a partir de [21]:

- P1*: Três pontos p_i, p_j e p_k são vértices de uma face da Triangulação se, e somente se, a circunferência formada por estes pontos não contém nenhum outro ponto em seu interior (Figura 2.10a).
- P2*: Dois pontos p_i e p_j formam uma aresta da Triangulação se, e somente se, uma circunferência que passa por estes pontos não contém nenhum outro ponto em seu interior. (Na Figura 2.10b-c pode ser observado os dois casos).

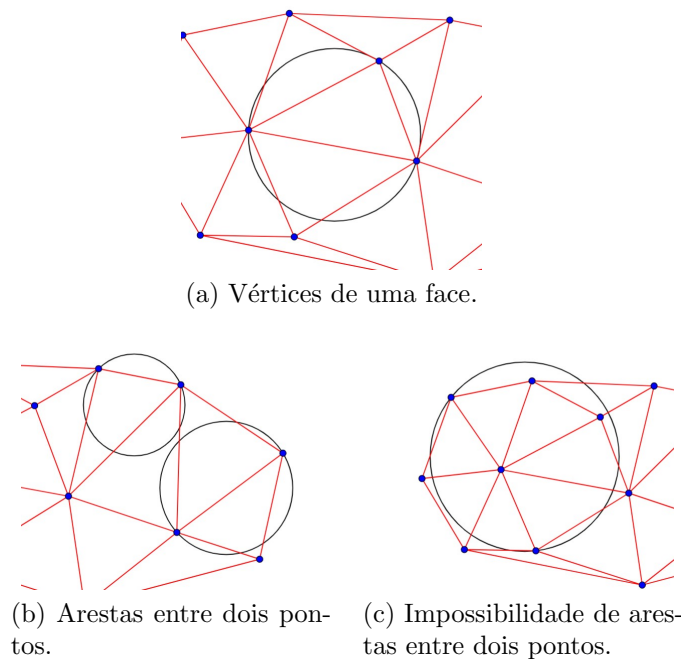


Figura 2.10: Propriedades da Triangulação de Delaunay.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma definição bastante utilizada na análise da Triangulação é a do fecho convexo (Figura 2.11). Ele é uma delimitação do plano estabelecido por alguns pontos de um conjunto, tal que forma um perímetro contendo todos os outros em seu interior, construindo um polígono convexo. De uma outra forma, seja um elástico envolvendo todos os pontos de um conjunto, de modo que ele se ajuste. A região que o elástico forma pode ser considerada o fecho convexo desse conjunto de pontos [5].

Durante a construção da Triangulação pode ocorrer uma anomalia, contendo faces de quatro ou mais vértices provenientes do Diagrama de Voronoi (degenerado) conter vértices com mais de 3 arestas. A solução para obter

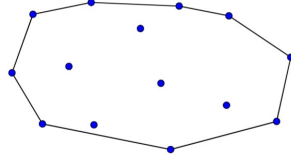


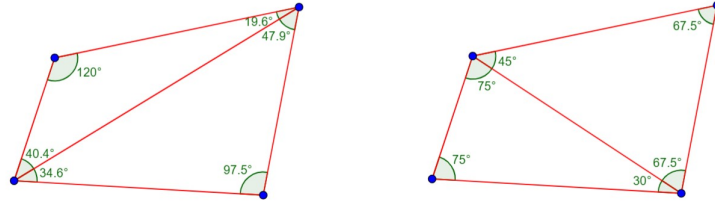
Figura 2.11: Fecho Convexo de um conjunto de pontos.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

somente triângulos é particionar as faces anômalas em triângulos, por exemplo, tomando uma face anômala, escolher um de seus vértices e ligá-lo aos outros vértices dessa mesma face, exceto aos dois vértices adjacentes.

Casos como estas anomalias contidas nas Triangulações resultantes de Diagramas de Voronoi Degenerados ou triangulações quaisquer que não são obtidas pelo Diagrama de Voronoi, podem não ser Triangulações de Delaunay, pois esta possui uma propriedade que otimiza sua estrutura buscando triângulos mais uniformes. Mas com a utilização da propriedade $P1$ é possível obter uma Triangulação de Delaunay. O método Flip de Arestas garante esta propriedade analisando os triângulos obtidos ou quando são inseridos novos pontos na estrutura, movendo as arestas e criando novos triângulos no lugar.

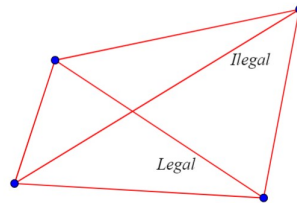
Flip de Aresta:

- Seja a uma aresta de $D(A)$ e o quadrilátero H formado por dois triângulos, T_1 e T_2 , tendo a como aresta comum, ou seja, $a = T_1 \cap T_2$. O Flip de Aresta ocorre ao trocar os vértices que formam a pelos outros 2 vértices de H , criando novos triângulos, T_3 e T_4 ;
- Ordenando os ângulos dos triângulos que formam H , antes e depois do flip de a , em ordem crescente. Se o menor ângulo antes do flip for menor que o menor ângulo após o flip, chamamos a , antes do seu flip, de aresta ilegal. O método Flip de Aresta é ilustrado pela Figura 2.12, com as comparações dos menores ângulos, antes e depois do método.
- Uma triangulação é legal quando não possui arestas ilegais. Além disto, uma triangulação é uma Triangulação de Delaunay se, e somente se, a triangulação é legal.



(a) Menor ângulo: $19,6^\circ$

(b) Menor ângulo: 30°



(c) Aresta Legal e Illegal

Figura 2.12: Flip de Arestas.

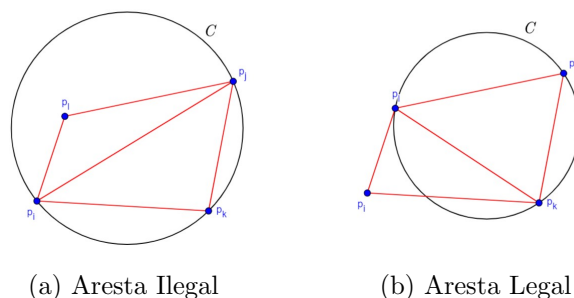
Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, o Flip de Aresta faz com que arestas ilegais se tornem legais, ou seja, o menor ângulo dos triângulos é aumentado trocando os vértices da aresta comum desses triângulos.

Uma maneira de identificar se uma aresta é ilegal para fazer o flip, é usar a própria propriedade $P1$ da seguinte forma: seja $\overline{p_i p_j}$ a aresta comum aos triângulos $p_i p_j p_k$ e $p_i p_j p_l$ e C a circunferência formada pelos pontos $p_i p_j p_k$. O segmento $\overline{p_i p_j}$ será uma aresta ilegal se, e somente se, p_l estiver no interior de C . Desse modo, se todos os quatro pontos pertencem a C , ambas as arestas $\overline{p_i p_j}$ e $\overline{p_k p_l}$ são legais (Figura 2.13).

Desse modo, podemos dizer que a flip de arestas maximiza o ângulo mínimo por toda a triangulação de um conjunto de pontos. Essa propriedade da Triangulação pode ser analisada em uma das suas principais utilizações: a construção de uma malha [20], mais especificamente a de uma superfície terrena com relevo ou depressão.

A construção da malha ocorre da seguinte forma: tomemos um conjunto discreto de pontos de uma região tridimensional sendo uma das coordenadas a altura da região. Considerando somente as outras coordenadas, do plano,



(a) Aresta Ilegal

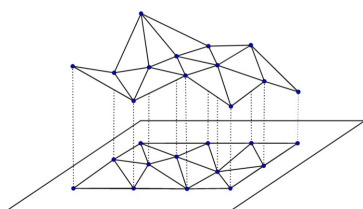
(b) Aresta Legal

Figura 2.13: Identificação de aresta ilegal.

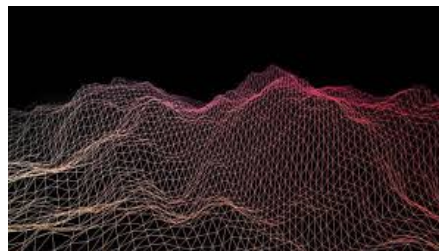
Fonte: Elaborado pelo autor.

constrói-se a Triangulação e então inclui as coordenadas da altura. Esse uso da tesselação reconstrói a superfície de forma que seja possível identificar aproximadamente os desníveis da superfície real (Figura 2.14a).

A Triangulação de Delaunay faz com que a malha seja mais próxima da superfície do que outra triangulação devido o flip de aresta maximizar os ângulos dos triângulos evitando estes com formas alongadas criando assim bifurcações nas superfícies que geralmente não condiz com a continuidade de um relevo, exemplo disso é a reconstrução de uma superfície na Figura 2.14b.



(a) Malha.



(b) Reconstrução de superfície.

Figura 2.14: Aplicação da Triangulação de Delaunay.

Fonte: a) Elaborado pelo autor e b) Página da USP².

Portanto, devido ao Diagrama de Voronoi e a Triangulação de Delaunay possuírem uma dualidade em suas estruturas, cada uma contém, de certa forma, a mesma informação que a outra, porém são representadas de formas diferentes [22]. Conseqüentemente, a Triangulação será utilizada para jogos que exijam alguma análise ou discussão particular de acordo com a jogabilidade apresentada.

²https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2027283/mod_resource/content/0/PMI3331%20-MDE.pdf - Acessados em 15-07-2019.

Capítulo 3

Construção

A parte da construção do Diagrama de Voronoi é o enlace que a geometria e a computação se conectam, pois como dito no Capítulo 1, sua construção teve maior atenção com o desenvolvimento de áreas da Ciência da Computação, onde a maior influência foi no campo da Geometria Computacional.

Por mais que houvessem formas de construção do Diagrama, os métodos eram manuais, envolvendo régua e compasso, e por mais que fundamentalmente seja esse o método, gera-se erros devido a aproximações de medidas e cria-se um trabalho bem custoso.

Sendo as classificações dos Jogos de Voronoi serem diversificadas, o conceito para a construção do Diagrama de Voronoi, se torna crucial para o entendimento dessa tesselação e assim abrir portas para trabalhos didáticos, já que envolvem uma coleção de elementos matemáticos.

Além disso, é a inserção do conceito de algoritmos, elemento principal da computação, que eleva a relevância da abordagem da construção do Diagrama. Por definição, algoritmo é uma sequência finita de regras que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas [23]. Logo, tal elemento é um ponto de partida para o campo da computação, sendo sua extensão extremamente associada a soluções de problemas matemáticos.

Quando é construído o Diagrama no plano podemos considerar duas situações em relação aos Jogos com 2 jogadores cada um com n geradores: jogos de uma rodada ou de n rodadas. Quando o jogo é de uma rodada, o Diagrama é construído integralmente, ou seja, todos os $2n$ pontos já estão no plano e o Diagrama é feito considerando $2n$ pontos. Já o jogo com n rodadas, o Diagrama pode ser construído incrementalmente, quando a regra do jogo exige a tesselação construída a medida que são feitas as jogadas, pois nesse caso o jogo é interativo entre os jogadores, ou seja, jogadas intercaladas.

Para todas as construções será considerado o espaço de um plano onde, primeiramente, será introduzida a construção fundamental para conceituar a estrutura básica do Diagrama, seguida da seção que apresenta a construção interativa para as situações de jogos de n rodadas baseado no algoritmo interativo e então, explanados todos os conceitos dos objetos que colaboram para o algoritmo por varredura que constrói o Diagrama em situação de jogos de uma rodada.

3.1 Construção Fundamental

Consideremos o caso trivial de construção do Diagrama do conjunto A com três geradores, $A = \{p_1, p_2, p_3\}$. Tal construção é destinada para fins de entendimento da geração das arestas de forma fundamental.

Os elementos para construção são bem simples e são provenientes da Definição 2.2, seguindo Algoritmo 1 - Algoritmo Fundamental.

Algoritmo 1: ALGORITMO FUNDAMENTAL

Entrada: $A = \{p_1, p_2, p_3\}$

Saída: Diagrama de Voronoi de A

```

1 início
2   Construir os segmentos  $\overline{p_1p_2}$ ,  $\overline{p_2p_3}$  e  $\overline{p_3p_1}$ ;
3   Construir as retas mediatrizes  $b(p_1p_2)$ ,  $b(p_2p_3)$  e  $b(p_3p_1)$  ortogonais
   aos segmentos  $\overline{p_1p_2}$ ,  $\overline{p_2p_3}$  e  $\overline{p_3p_1}$ , respectivamente;
4   Inserir o ponto  $v$  na interseção das retas mediatrizes  $b(p_1p_2)$ ,
    $b(p_2p_3)$  e  $b(p_3p_1)$ ;
5   Inserir os pontos médios  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  dos segmentos  $\overline{p_1p_2}$ ,  $\overline{p_2p_3}$  e
    $\overline{p_3p_1}$ , respectivamente;
6   if  $v$  é exterior ao polígono  $p_1p_2p_3$  then
7     Construir a semirreta  $\overrightarrow{m_i v} - \overline{m_i v}$ , sendo  $m_i$  o ponto médio
     pertence ao maior lado do polígono  $p_1p_2p_3$ .
8     Construir as semirretas  $\overrightarrow{vm_j}$ ;  $j \in \{1, 2, 3\}$  e  $j \neq i$ .;
9
10  else
11    Construir as semirretas  $\overrightarrow{vm_1}$ ,  $\overrightarrow{vm_2}$  e  $\overrightarrow{vm_3}$ ;
12  end
13  Remover as retas mediatrizes.
14 fim
15 retorna  $V(A)$ 

```

Pela Propriedade 2.1, o ponto v é o vértice, pois o interior de $C(v)$ não

contém nenhum outro gerador. Desse modo, v é a interseção das 3 semirretas construídas, que são as arestas, as quais delimitam as regiões dos geradores que formam o Diagrama de Voronoi do conjunto A . Podemos verificar o Algoritmo 1 aplicado ao conjunto A pela Figura 3.1.

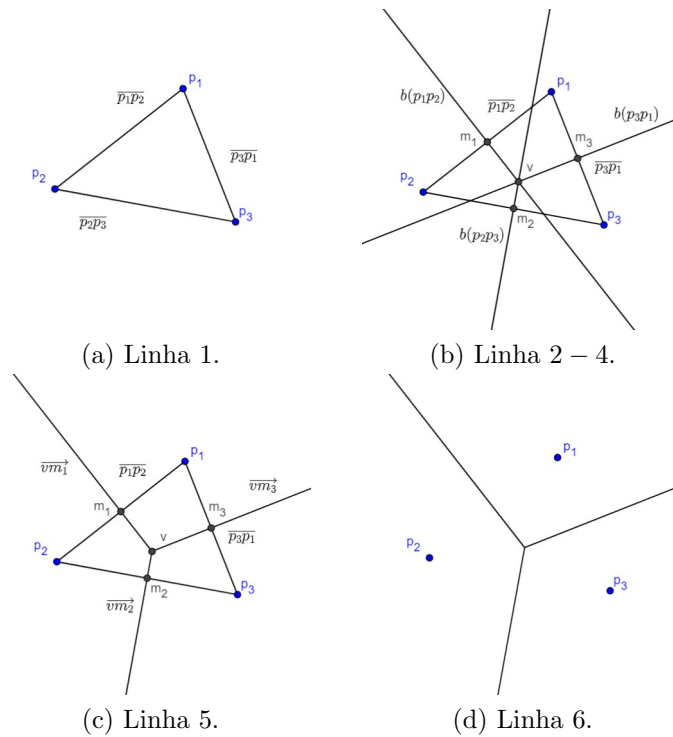


Figura 3.1: Construção Fundamental do Diagrama de Voronoi de A .
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso seja tomado esta construção para conjuntos com mais elementos, seriam necessárias adaptações tomando como base a propriedade 2.1 ocasionando maior custo para sua construção. Desse modo, o propósito desta construção se restringe apenas ao conjunto A .

3.2 Construção Incremental

Quando há a regra no Jogo de Voronoi de que o Diagrama seja construído a medida que são feitas as jogadas, é preciso refazer o diagrama com um gerador a mais no conjunto de pontos já inseridos no plano.

Como há o acréscimo de geradores a medida que são feitas as jogadas, um algoritmo com técnica incremental seria o mais apropriado para que não fosse necessário refazer todo o Diagrama com os gerados do conjunto todo.

O algoritmo de complexidade $O(n^2)$ apresentado por Peter Green e Robin Sibson em 1977 [24] atende essa necessidade, onde é considerado o Diagrama construído adicionando um polígono para o novo gerador inserido.

Seja $V(A)$ o Diagrama de Voronoi construído do conjunto $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e a inserção do gerador p ao plano. Para construir o polígono desse novo gerador p , basta seguir os passos do Algoritmo 2 - Algoritmo Incremental [25].

Algoritmo 2: ALGORITMO INCREMENTAL

Entrada: p, A
Saída: $V(A'); A' = A \cup \{p\}$

1 **início**
2 Identificar o gerador p_1 cujo polígono $V(p_1)$ contém p ; Seja $i = 1$,
 índice auxiliar; **repita**
3 Construir a mediatriz $b(p_i, p)$ até as interseções x_i e x_j que
 $b(p_j, p)$ faz com a fronteira de $V(p_i)$;
4 **if** $V(p_j)$ é o polígono adjacente a $V(p_i)$ de modo que
 $x_j \in \partial V(p_j)$ **then**
5 Construir a mediatriz $b(p_j, p)$
6 Determinar a interseção x_k que $b(p_j, p)$ faz com a fronteira
 $V(p_j)$;
7 Fazer $i = j$ e $j = k$;
8 **até** que o ponto x_1 seja visitado;
9 Remover a subestrutura dentro do polígono criado $V(p)$.
10 **fim**
11 **retorna** $V(A')$

Para exemplificar o funcionamento do Algoritmo 2, considere a inserção do gerador p em um Diagrama $V(A)$ de um conjunto A . Temos que $p \in V(p_1)$, então construímos a aresta $b(p_1, p)$ de modo que determinamos os pontos de interseção x_1 e x_2 . Como $x_2 \in \partial V(p_2)$, fazemos a mediatriz $b(p_2, p)$, encontrando a interseção x_3 e por conseguinte construímos a mediatriz $b(p_3, p)$. Como é obtido x_4 de forma que $x_4 \in b(p_3, p) \cap \partial V(p_4)$, tracemos $b(p_4, p)$ revisitando x_1 pois $x_1 \in \partial V(p_4)$. Portanto, é obtido $V(p)$ e o novo Diagrama $V(A'); A' = A \cup \{p\}$ é obtido removendo a subestrutura no interior de $V(p)$. Tais procedimentos são ilustrados pela Figura 3.2.

Não é incomum que existam várias implementações que computam tal método, programado dentre várias linguagens e plataformas, onde algumas são desenvolvidas especificamente para um certo objetivo em uma área

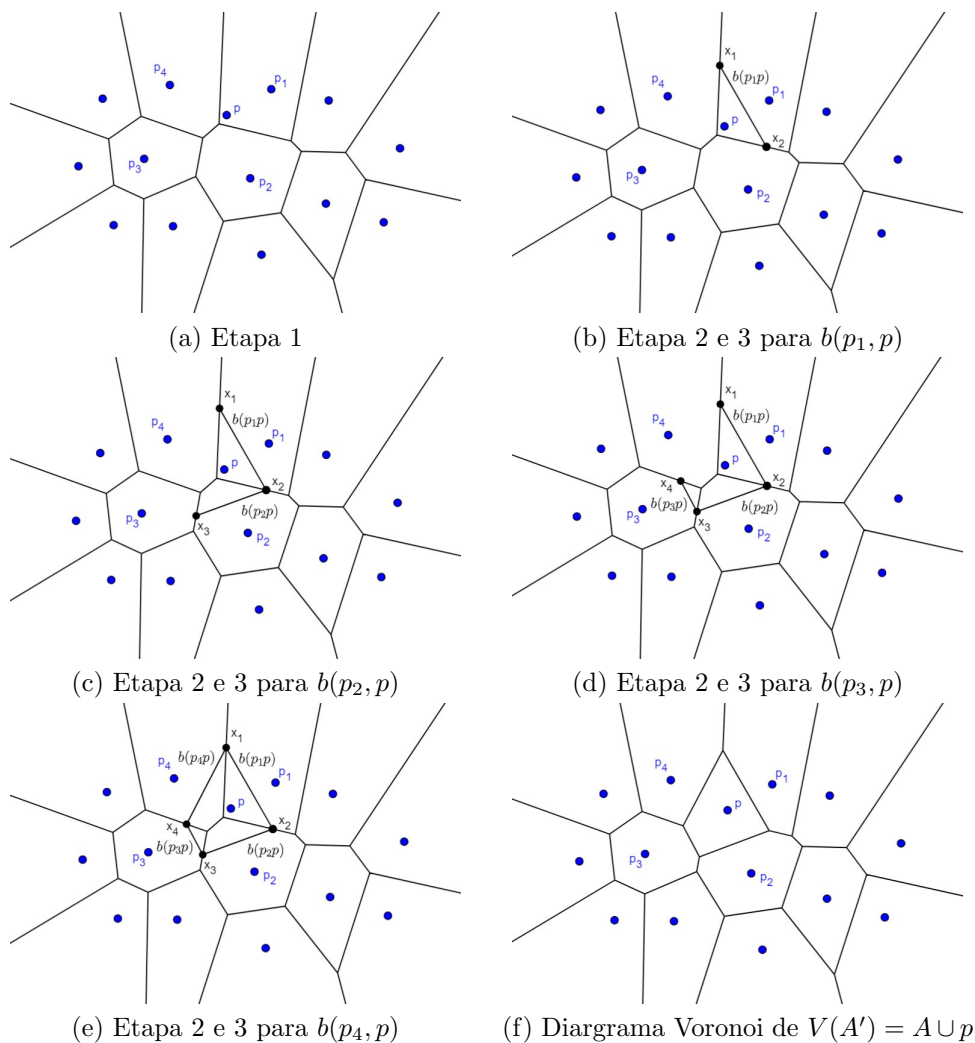
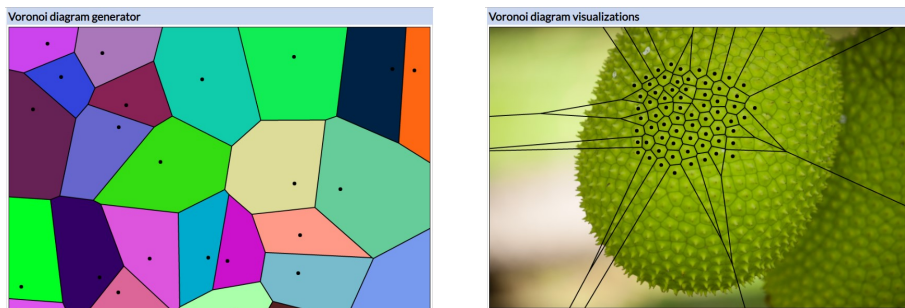


Figura 3.2: Construção Incremental do Diagrama Voronoi.

Fonte: Elaborado pelo autor.

de atuação. Um exemplo dessa implementação é o encontrado no repositório disponibilizado pelo americano Frederik Brasz [26], onde é possível de forma dinâmica e parametrizável, investigar a inclusão de novos geradores no Diagrama. Com várias modalidades de visualização do Diagrama, existe uma configuração onde é possível construir incrementalmente o Diagrama de forma livre com base em uma imagem informada na ferramenta, criando uma confirmação ou não da estrutura sobre a imagem. A Figura 3.3 apresenta exemplos da utilização desta plataforma.



(a) Diagrama Voronoi onde é possível adicionar geradores.

(b) Exemplo de imagem com Diagrama de Voronoi.

Figura 3.3: Plataforma com implementação da construção incremental.

Fonte: Página Frederik Brasz [26].

3.3 Construção por Varredura

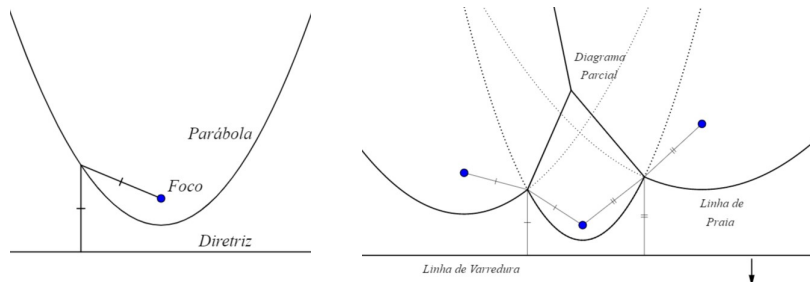
Para a construção estática do Diagrama de Voronoi, um algoritmo de tempo de execução $O(n \log(n))$ foi apresentado por Steven Fortune em 1987 [27]. Tal algoritmo utiliza uma técnica de varredura percorrendo o plano com uma linha (*Sweep Line*) horizontalmente ou verticalmente, traçando as arestas do Diagrama.

A construção não ocorre exatamente quando a linha intersecta o ponto do plano, pois pontos à frente da linha podem afetar o Diagrama previamente traçado, por isso a área percorrida pela linha contém o Diagrama parcialmente construído.

Para a completa construção, o algoritmo utiliza um artifício de uma frente intermediária composta por arcos de parábola, chamada linha de praia (*beachline*), que se utiliza do fato do arco de parábola conter todos os pontos equidistantes de uma reta e de um ponto dado. Assim, a linha de varredura se comporta como a reta diretriz e os geradores, os focos das parábolas (Figura 3.4).

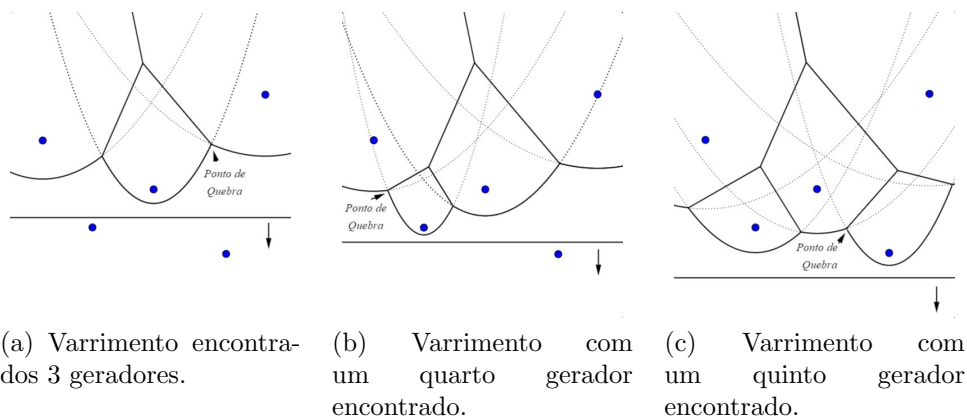
Assim, quando um arco de parábola proveniente de um gerador encontra outro arco de parábola de outro gerador, na linha de praia, pontos de interseção, chamados pontos de quebra (*breakpoints*), são obtidos e equidistantes desses geradores. Aliás, tais pontos de quebra são pontos pertencentes a fronteira dos polígonos que irão se formar e à medida que a linha varre o plano, a forma das parábolas vão mudando e esses pontos de quebra vão delineando as arestas do Diagrama (Figura 3.5).

Dois acontecimentos, chamados eventos, ocorrem durante a varredura do plano na linha de praia: o surgimento e o desaparecimento de um arco de parábola [21].



(a) Parábola. (b) Pontos Equidistantes.

Figura 3.4: Linha de Praia.
 Fonte: Elaborado pelo autor.



(a) Varrimento encontrados 3 geradores. (b) Varrimento com um quarto gerador encontrado. (c) Varrimento com um quinto gerador encontrado.

Figura 3.5: Ponto de Quebra e mudança dos arcos de parábola.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando a linha de varredura intersecta um gerador, conhecido como evento de ponto, uma parábola degenerada é formada pois a distância do foco a diretriz ser zero. Desse modo, uma reta perpendicular a linha de varredura, com origem no gerador, até a linha de praia é traçada para representar essa parábola degenerada. Assim, ao passo que a linha de varredura continua percorrendo o plano, dois pontos de quebra surgem e o arco vai ficando mais largo caracterizando o surgimento do arco de parábola.

O evento do desaparecimento do arco de parábola deve-se ao evento de círculo, no qual este arco, na linha de praia, se reduz a um ponto. Essa redução é resultante da aproximação de dois outros arcos adjacentes até se encontrarem no ponto de desaparecimento do arco entre eles. Esse ponto de encontro dos 3 arcos equidista dos 3 geradores das respectivas parábolas e traçando uma circunferência passando por estes 3 geradores, tal ponto de encontro coincide com o centro da circunferência. Se após a linha de

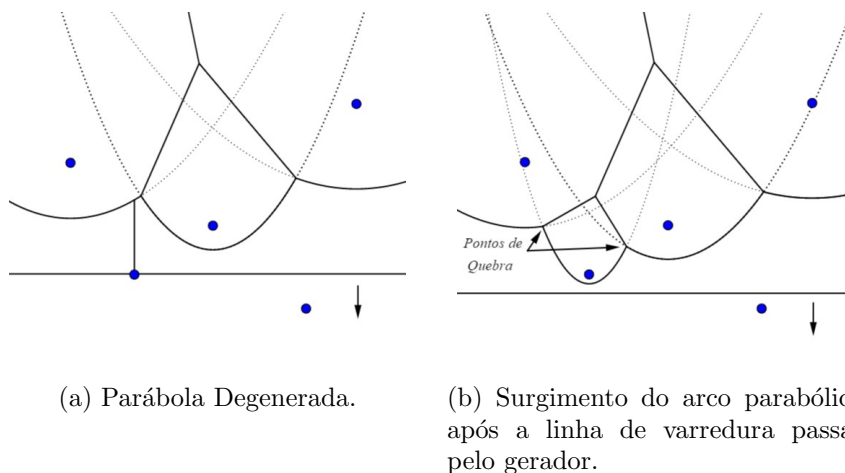


Figura 3.6: Evento de Ponto.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

varredura passar pelo último ponto desta circunferência e não interceptar nenhum outro gerador, o centro coincide com um vértice do Diagrama, caso contrário o evento de círculo é desconsiderado (Figura 3.7).

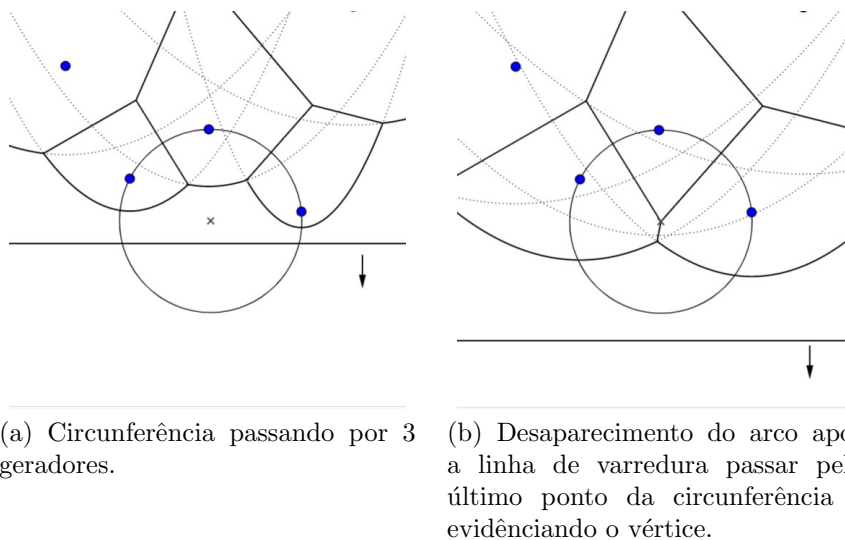
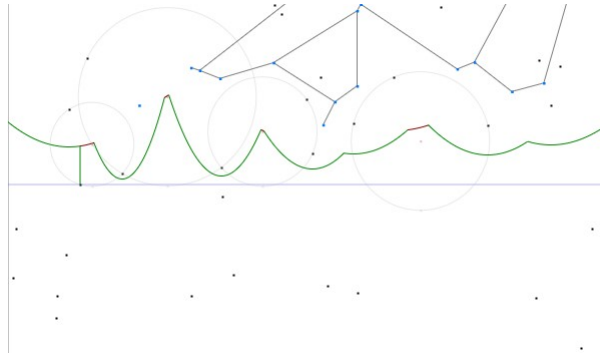


Figura 3.7: Evento de Círculo.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

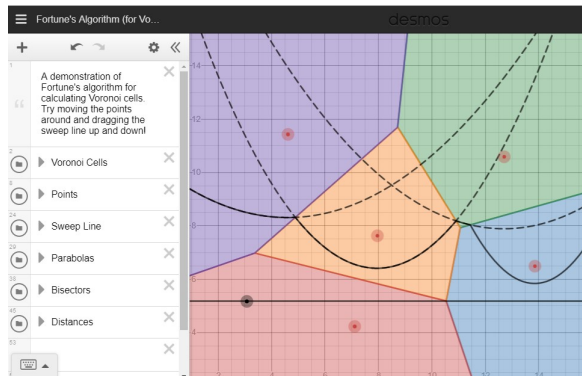
O algoritmo apresentado por Fortune, por ser um varrimento direcional do plano até o último gerador, necessita de uma estrutura de dados para armazenar as informações referentes ao Diagrama à medida que ele vai sendo construído. Por isso, apenas os elementos de construção foram descritos

para compreensão da lógica do procedimento que o algoritmo executa, que se baseia no encontro da linha de varredura com cada gerador.

Por causa do método de Fortune ser bem conhecido, as implementações se tornam diversas, consolidando o método na literatura. Raymond Hill disponibiliza em seu site [28] uma implementação totalmente parametrizável do Algoritmo de Fortune, que possui uma animação da linha de varredura, passando pelos pontos do plano de modo que é possível identificar as arestas sendo construídas, os eventos de ponto e de círculo, além da linha de praia (Figura 3.8.a). Já na plataforma Desmos [29], uma implementação do algoritmo disponibiliza um gráfico com o Diagrama já construído e em razão da ferramenta ser dinâmica, a linha de varredura é controlável de modo que é possível analisar como os arcos parabólicos acompanham as arestas da estrutura previamente estabelecida (Figura 3.8.b).



(a) Implementação Raymond Hill.



(b) Implementação na Plataforma Desmos.

Figura 3.8: Plataformas com implementação da construção por Varredura.

Fonte: a) Página Raymond Hill [28] e b) Página Desmos [29].

Portanto, tomando como base as várias aplicações do Diagrama de Voronoi, problemas geométricos surgem e o Diagrama de Voronoi se prova uma poderosa ferramenta para solução destes. Isto posto, com a necessidade latente

da tecnologia entrelaçada em qualquer atividade, soluções computacionais acabam se tornando necessárias para não só sanar questões diversificadas, mas também automatizá-las e elevar a sua eficiência.

Capítulo 4

Jogos de Voronoi

Em virtude da grande aplicabilidade do Diagrama de Voronoi, várias análises são discutidas, dentre elas a construção do diagrama. Quando nos referimos a construção podemos considerar tanto com os pontos já dispostos no espaço assim como a inclusão de novos no Diagrama já construído.

Essas análises motivaram a inserção de regras no processo de construção do Diagrama, que combinadas estabelecem restrições nos fatores que contribuem para a geração dos polígonos e as considerações sobre o resultado caracterizando o que chamamos de Jogos de Voronoi.

Existem variações de Jogos de Voronoi, entre elas, regras, interações, objetivos, estruturas, onde tais jogos servem como modelos utilizados para análise de um projeto administrativo, por exemplo, ou para análise de interações entre entidades, como a competição de mercado.

As análises que serão apresentadas no presente capítulo são direcionadas à interação entre dois jogadores utilizando como estrutura o Diagrama de Voronoi. Desse modo, os modelos Jogos de Voronoi tem como base a Teoria dos Jogos [30], pois este estuda decisões que são tomadas em um ambiente onde vários jogadores interagem, ou seja, estuda as escolhas de comportamentos ótimos quando o custo e benefício de cada opção não é fixo, mas depende da escolha dos outros indivíduos [31].

Nos Jogos de Voronoi, as decisões são tomadas de acordo com a situação do ambiente e, como existe a interação, cada movimento para seu objetivo trará uma resposta. Neste estudo, serão apresentadas estratégias encontradas para atingir um ou mais objetivos que são situações estratégicas onde jogadores escolhem diferentes ações na tentativa de melhorar seu retorno. Assim sendo, temos que a Teoria dos Jogos contribui para se conhecer, previamente, o melhor resultado para os jogadores à frente das estratégias praticadas.

Os primeiros trabalhos sobre Jogos de Voronoi [32, 33] são baseados no Problema de Localização de Instalações Competitivas - PLIC (do inglês,

Competitive Facility Location Problem - CFLP) onde o objetivo era maximizar a área de duas franquias de lojas que seriam instaladas ao longo de uma avenida. Com essa aplicação e sua evolução, pode-se dizer que as áreas da economia e negócios tiveram bastante influência para fundamentar o Jogo de Voronoi já que o Diagrama de Voronoi gera uma tesselação que contribui visualmente para as estratégias de mercado de forma bem apurada.

Por mais que, alguns Jogos de Voronoi apresentados possuam como base o PLIC, devido a impulsão dos trabalhos nesse contexto, esses possuem categorias que os diferem. Cada jogo possui sua regra, jogabilidade, objetivo, além da sua estrutura no espaço.

As classificações dos Jogos de Voronoi estão diretamente ligadas as suas regras, o que contribui mais para sua aplicação já que é possível implementá-los de formas distintas. Tais categorias consideram;

1. Dimensão:
 - (a) Linear: estudos no espaço \mathbb{R} ;
 - (b) No Plano: estudos no espaço \mathbb{R}^2 ;
2. Jogabilidade:
 - (a) Uma rodada: o primeiro jogador joga todos seus pontos, depois o segundo jogador, os seus;
 - (b) n rodadas: cada jogador joga a mesma quantidade de pontos, um depois do outro, em n rodadas;
3. Objetivo:
 - (a) Maximizar Região: obter maior área total;
 - (b) Maximizar Vizinhaça: obter um total maior de quantidade de vizinhos (regiões fronteira);
4. Critérios: Particularidades que devem ser seguidas para atingir o objetivo.

Comumente, no presente estudo, os jogadores serão identificados por J1 para o primeiro jogador a jogar e J2 para o jogador que joga após o primeiro. E, será denominado Jogo, o tipo de Jogo de Voronoi pertinente a cada seção.

4.1 Jogo de Voronoi Linear

Quando condicionamos por regras a construção de um Diagrama de Voronoi em \mathbb{R} , definimos o Jogo de Voronoi Linear, o qual pode ser apresentado como fundamental para o contexto de Jogos de Voronoi. Por mais que tenham uma estrutura simples, possuem grande utilização, no caso, para introduzir o conceito do jogo.

4.1.1 Jogo Tradicional Linear

Uma formalização apresentada por Ahn et. al [32, 33], descreve estratégias de ganho para J2, de turnos alternados em uma estrutura linear com formato segmento de reta ou circunferência. Esse Jogo, segue como base contextual o PLIC, que determina a área de mercado de acordo com a atração que o cliente tem pela instalação em relação à distância.

O Jogo é disputado por 2 jogadores, J1 e J2, cada um com $n > 1$ geradores, em turnos com jogadas alternadas. Então, é construído o Diagrama de Voronoi para $2n$ geradores, onde cada região é atribuída a um jogador de acordo com o gerador que lhe pertence, e o ganhador é o jogador que possui maior comprimento total da curva.

Chamaremos de L uma porção contínua de uma curva onde serão feitas as jogadas e construído o Diagrama, sendo seu formato indiferente para o jogo.

Serão desconsiderados jogos degenerados em que $n = 1$, pois se L for uma circunferência, o jogo empata independentemente da disposição dos pontos, e se L for um segmento de reta, J1 sempre ganha colocando o ponto gerador no ponto médio do segmento.

É estabelecido um conjunto dos pontos de cada jogador, assim seja $G1$ os geradores de J1 e $G2$, os de J2.

Uma variação interessante desse Jogo é a quantidade de geradores que cada jogador pode posicionar em cada rodada. Os Jogos clássicos com turnos alternados são posicionados um gerador por vez, neste é possível determinar um lote de geradores a ser jogado em cada rodada.

Suponhamos um jogo com $k \leq n$ jogadas sendo α_i e β_i o número de geradores que J1 e J2 posicionam, respectivamente, na jogada i . Essa variação possui as seguintes restrições:

$$R1 \quad \forall 1 \leq i \leq k, \alpha_i, \beta_i > 0;$$

$$R2 \quad \forall 1 \leq j \leq k, \sum_{i=1}^j \alpha_i \leq \sum_{i=1}^j \beta_i;$$

$$R3 \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = \sum_{i=1}^k \beta_i = n;$$

R4 $\alpha_i < n$ (no jogo circular);

R5 $\alpha_i = 1$ (no jogo na linha);

Essa generalização de posicionamento em lote, além de incluir o Jogo clássico, quando $\alpha_i = \beta_i = 1$, obriga também que os jogadores joguem a mesma quantidade (≥ 1) em cada turno. Antes do início do Jogo, deve ser estabelecido os valores dos parâmetros k , α_i e β_i . Eles precisam ser fixados antecipadamente para que a jogabilidade não seja dependente do J1, pois J2 terá que jogar a mesma quantidade que J1 jogar.

Considerando uma curva L , definimos alguns termos para explanação da estratégia do jogo, ilustrados pela Figura 4.1:

- Intervalo: arco entre dois geradores sem nenhum gerador entre eles;
- Intervalo Uniforme (IU): intervalo com geradores do mesmo jogador sendo suas extremidades;
- Intervalo Quebrado (IQ): intervalo com geradores de jogadores distintos sendo suas extremidades;
- Intervalo J1 (IJ1): IU tendo como extremidades geradores do J1;
- Intervalo J2 (IJ2): IU tendo como extremidades geradores do J2;
- Pontos Chave (PC): n posições pré-determinadas em L ;
- Intervalo Chave (IC): Intervalo com suas extremidades com geradores posicionados em PC;
- Intervalo Chave Quebrado (ICQ): IC com suas extremidades sendo geradores de jogadores distintos;
- Intervalo Chave J1 (ICJ1): IC com suas extremidades sendo geradores de J1;
- Intervalo Chave J2 (ICJ2): IC com suas extremidades sendo geradores de J2.

Com os termos definidos, apresentamos a versão genérica da Estratégia Pontos Chave, que será utilizada em ambas variações, na linha e circular, para as jogadas de J2.

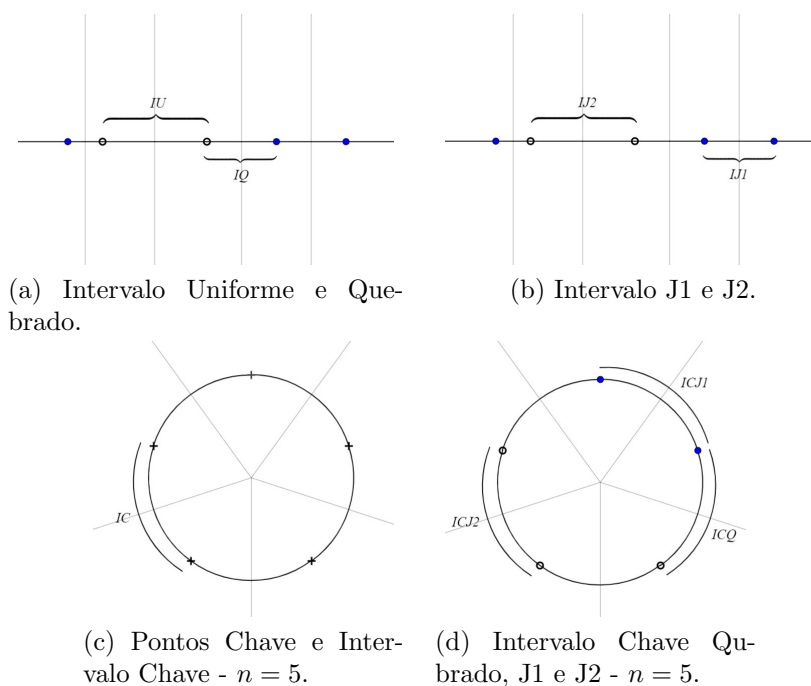


Figura 4.1: Definições de termos para Estratégia Pontos Chave.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Estratégia Pontos Chave:

- *Etapa 1:* J2 posiciona seu gerador em um PC vazio; Esta etapa encerra quando todos PC são preenchidos, tanto por J1 ou J2.
- *Etapa 2:* J2 posiciona seu gerador em um ICJ1, quebrando o ICJ1. Esta etapa encerra quando todos ICJ1 são quebrados antes da última jogada de J2.
- *Etapa 3:* J2 quebra um IJ1. Esta etapa termina com o último gerador de J2 posicionado.

Com a Estratégia de Pontos Chave podemos garantir que depois da Etapa 3 não exista mais ICJ1 e que todos IJ2 sejam ICJ2.

Na primeira garantia, seja $j > 1$ o número de geradores posicionados em PC por J1. Pela restrição R4, J2 tem pelo menos um PC com seu gerador, então $j < n$ e J1 pode formar no máximo $j - 1$ ICJ1. No fim da Etapa

1, sobra $n - j$ PC para J2 posicionar seus geradores e nas etapas seguintes, possui $j - 1$ geradores disponíveis para quebrar os ICJ1.

Já na segunda garantia, na Etapa 1, J2 só posiciona em PC, e nas etapas seguintes J2 transforma IJ1 em IQ, assim se houver algum IJ2, estes serão ICJ2. Este caso ocorre quando J1 ou J2 não quebra um IJ2 ocupando um IC.

Jogo de Voronoi Circular

Nessa variação da estrutura a curva L é uma curva fechada, uma circunferência C , com tamanho do intervalo $[0, 1]$. A soma dos IJ1 e IJ2 de J1 e J2 são denominados $G1_c$ e $G2_c$, respectivamente. O comprimento dos IQ são divididos ao meio e distribuídos para cada jogador a parte que lhe pertence. Ganha quem possuir maior soma do comprimento de C , ou seja, J2 ganha se $G2_c - G1_c > 0$.

Os PC são distribuídos por C da seguinte forma: $u_i = i/n, i = 0, 1, \dots, n - 1$. Supondo que J1 posiciona o gerador em 0, a Estratégia Pontos Chave para o jogo circular segue da seguinte maneira (Figura 4.2):

- *Etapa 1:* J2 posiciona seu gerador em um PC vazio.
Esta etapa encerra quando todos PC são preenchidos, tanto por J1 ou J2.
- *Etapa 2:* J2 quebra o maior IJ1.
Esta etapa encerra antes da última jogada de J2.
- *Etapa 3:* J2 quebra um IJ1:
 - i)* Se existe mais de um IJ1, J2 quebra o maior.
 - ii)* Se existe apenas um IJ1, seja d seu comprimento, então J2 posiciona seu gerador em um ICQ a uma distancia menor que $1/n - d$ da extremidade de J1 desse ICQ.

A restrição R4, $\alpha_i < n$, deve ser declarada permitindo que J2 possa posicionar um gerador em um PC, pois caso contrário, J1 tomaria todos PC e conseguiria um empate.

A Estratégia Pontos Chave é valida para essa variação circular, pois na Etapa 1, J1 posiciona seu primeiro gerador em um PC, logo J2 pode posicionar em até $n - 1$ PC. Na Etapa 2, antes de cada jogada de J2, a quantidade de geradores de J2 posicionados é menor que os de J1, assim sempre pode existir pelo menos um IJ1, podendo ser um ICJ1 ou IJ1 menor que $1/n$, os quais podem ser quebrados. Na Etapa 3, que é a última jogada de J2, se tem mais de um IJ1, quebra-se o maior e como os IJ2 são ICJ2, $G2_c > G1_c$. Se, se

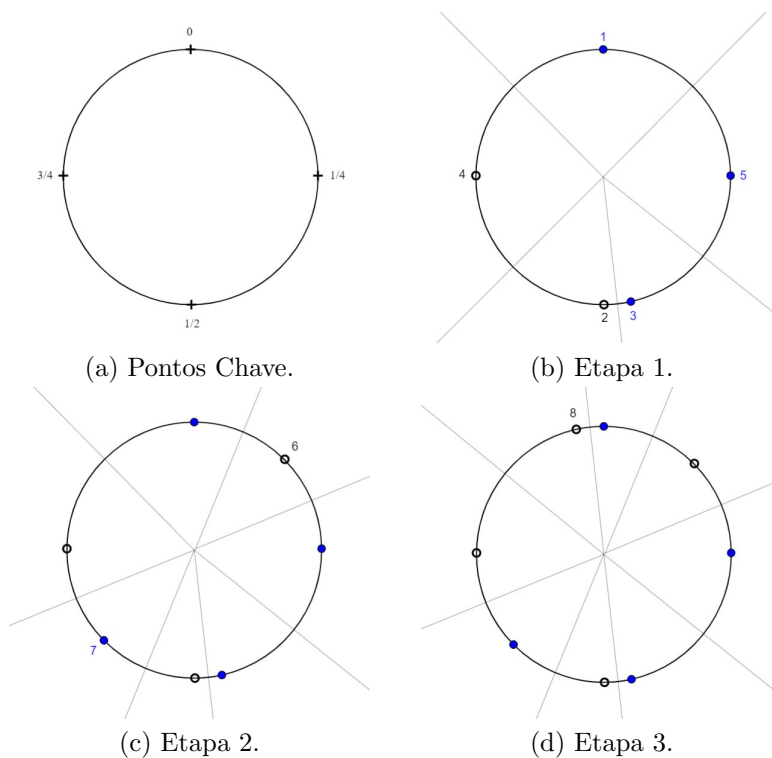


Figura 4.2: Estratégia Pontos Chave em uma circunferência com $n = 4$ rodadas, um gerador cada rodada (geradores enumerados de acordo com a sequência de jogadas).

Fonte: Elaborado pelo autor.

tem somente um IJ1, este possui tamanho $d < 1/n$ e J2 posiciona seu gerador em um ICQ criando um IJ2 maior que d , fazendo com que $G2_c > d = G1_c$.

Jogo de Voronoi Na Linha

Neste jogo, L é um segmento de reta no intervalo $[0, 1]$. A região de comprimento do ponto 0 até ao primeiro gerador pertence ao jogador que posicionou este gerador, onde o caso para região da direita que termina no ponto 1 é análogo.

Para a Estratégia Pontos Chave, estende-se L para uma curva fechada C' conectando os pontos 1 e 0 usando uma curva B chamada arco de borda. Os geradores de J1 e J2 em L particionam C' em intervalos onde um desses contem B e esse é chamado Intervalo de Borda (IB). Desse modo, podemos definir IBQ, IBJ1, IBJ2 sendo IB de extremidades com geradores de jogadores distintos, com geradores de J1 e com geradores de J2, respectivamente.

Os intervalos IJ1 e IJ2 dos geradores de J1 e J2 são $G1_c$ e $G2_c$, respec-

tivamente, onde só é considerado o comprimento de L . No caso de IBQ, o intervalo não é dividido igualmente, $G1_b$ e $G2_b$ denominam o tamanho de IB que pertence aos jogadores J1 e J2 e se IB é IBJ1 ou IBJ2, então $G1_b = G2_b = 0$. O vencedor é quem possuir o maior comprimento da L com soma dos seus intervalos, ou seja, J2 ganha se $(G2_c + G2_b) - (G1_c + G1_b) > 0$.

Os PC nessa variação do jogo são marcados de acordo com a expressão $u_i = 1/2n + i/n, i = 0, 1, \dots, n - 1$. Supondo que J1 posiciona seu primeiro gerador em um PC, a Estratégia Pontos Chave para o jogo na linha exige uma adaptação da apresentada para o circular (Figura 4.3):

- *Etapa 1:* J2 posiciona seu primeiro gerador no PC u_0 ou u_{n-1} .
- *Etapa 2:* J2 posiciona seu gerador em um PC vazio.
Etapa 2 encerra quando todos PC são preenchidos, tanto por J1 ou J2.
- *Etapa 3:* Casos a considerar:
 - i)* Se existe pelo menos um IJ1, J2 quebra o maior.
 - ii)* Se existe apenas IBJ1 para intervalos de J1:
 - a)* Uma das extremidades de IBJ1 é um PC. Assumindo que seja u_0 e que a outra extremidade esteja no ponto $1 - d$, J2 posiciona seu gerador em qualquer lugar do intervalo (d, u_0) . Se u_{n-1} , J2 posiciona seu gerador em qualquer lugar do intervalo $(u_{n-1}, 1 - d)$.
 - b)* Nenhuma das extremidades de IBJ1 é um PC. Seja d o comprimento de IBJ1. J2 posiciona seu gerador em um ICQ a uma distância menor que $1/n - d$ da extremidade de J1 desse ICQ.

Etapa 3 encerra antes da última jogada de J2.

- *Etapa 4:* J2 posiciona seu último gerador se acordo com um dos casos (nesta etapa não existe mais IBJ1):
 - i)* Se existe pelo menos um IJ1, J2 quebra o maior.
 - ii)* Se existe um IJ1, seja d o comprimento de IJ1, então J2 posiciona seu gerador em um ICQ a uma distância menor que $1/n - d$ da extremidade de J1 desse ICQ.

A restrição R5, $\alpha_i = 1$, foi necessária para que J2 possa posicionar em um dos PC, u_0 ou u_{n-1} , devido a estratégia requerer pelo menos um gerador de J2 em u_0 ou u_{n-1} para jogada do arco de borda na Etapa 3, caso contrário, J1 possuiria maiores chances de ganho.

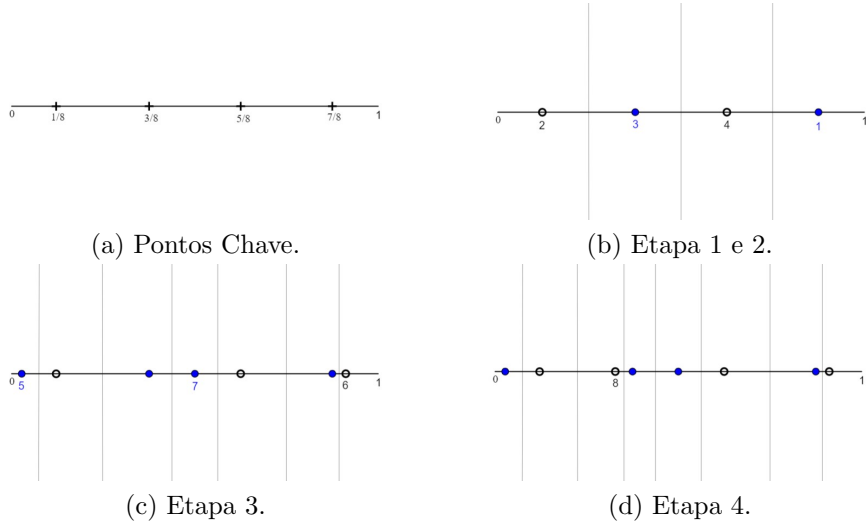


Figura 4.3: Estratégia Pontos Chave em um segmento de reta com $n = 4$ rodadas, um gerador cada rodada (geradores enumerados de acordo com a sequência de jogadas).

Fonte: Elaborado pelo autor.

A estratégia na linha é também válida:

Na Etapa 1, J1 não pode tomar ambos PC u_0 e u_{n-1} . Na Etapa 3 é garantido pelo menos um IJ1, mesmo que seja IBJ1, e se IBJ1, u_0 ou u_{n-1} tem o gerador de J2 e $d < 1/2n$, caso contrário, existirá um ICQ. A validação estratégia continua seguindo duas condições:

- Como na linha não traz a simetria dos PC que tem na circunferência, pode ocorrer do J1 não conseguir colocar nenhum gerador nos PC e J2 conseguir, assim os IJ1 serão menores que $1/n$.
 - ◊ Se o número de IJ1 e IJ2 forem iguais, $G2_c > G1_c$;
 - ◊ Se houver IBJ1 ou IBJ2, $G1_b = G2_b = 0$ e $G2_c > G1_c$;
 - ◊ Se houver IBQ, um dos PC u_0 ou u_{n-1} e pertence a J2, então $1/2n = G2_b < G1_b$ e $G2_c > G1_c$.
- Caso J1 consiga pelo menos posicionar em um PC, após Etapa 2 assume-se que todos PC foram preenchidos e então chegamos na Etapa 4.
 - ◊ Se (ii) da Etapa 3 não ocorrer, não existirá ICJ1 antes da Etapa 4 e se existir ICQ, este poderá ser um IB.
 - * Se ocorrer (ii) da Etapa 4, então $G2_c > G1_c$;

- * Se ocorrer (i) da Etapa 4, IJ1 terão tamanhos menores $1/n$ e IJ2 serão ICJ2 e $G2_c > G1_c$; Se ainda nesta condição houver IBJ1 ou IBJ2, $G1_b = G2_b = 0$ e $G2_c > G1_c$; e se houver IBQ, um dos PC u_0 ou u_{n-1} e pertence a J2, então $1/2n = G2_b < G1_b$ e $G2_c > G1_c$ somente se ocorrer (i) da Etapa 3.
- ◇ Se (ii) da Etapa 3 ocorrer, não haverá ICJ1 na Etapa 4;
 - * Se ocorrer (ii) da Etapa 4, então $G2_c > G1_c$;
 - * Se ocorrer (i) da Etapa 4, considera-se a última ocorrência de (ii) da Etapa 3, onde IB é o único IJ1.
 - Se a), não haverá IBJ1 ou IBJ2 depois da jogada de J2, assim até o fim do jogo, J2 apenas quebra IJ1. Assim, restará apenas IQ e IBQ e conseqüentemente $G1_c = G2_c = 0$ e $G2_b < G2_1$.
 - Se b), haverá um IJ2 e um IBJ1 tal que $IJ2 > IBJ1$ e como nessa Etapa J2 só quebra IJ1 e não IBJ1 além de não ser possível criar mais IJ2, então $G2_c > G1_c$ pois $G1_b = G2_b = 0$.

Portanto, por mais que seja possível empatar no Jogo onde J2 jogue em posições opostas em R em que J1 jogue, garantindo regiões de mesmo tamanho, a Estratégia de Pontos Chave por [33] pode garantir a vitória de J2, mesmo que com margem pequena.

Além disso, com variações de estrutura, circular e segmento de reta e com adaptações da estratégia para cada uma, foi analisada a jogabilidade de uma forma generalizada onde é possível escolher a quantidade de geradores a serem posicionados por vez, os geradores em lote, que é um diferencial de Jogos de Voronoi, já que a interatividade usualmente ocorre uma "vez" para cada.

4.1.2 Jogo de Hotelling

Nos Jogos de Voronoi, quando um gerador é posicionado, majoritariamente ele fica fixo para que o Diagrama seja construído. Porém, uma variação dos Jogos de Voronoi existente, Jogo de Hotelling, permite que o gerador posicionado seja realocado, ou seja, é possível refazer uma jogada com o mesmo gerador.

O Jogo de Hotelling é baseado no artigo do estatístico matemático Harold Hotelling [34], onde ele discute a influência das estratégias de comércio por

empreendedores, analisando o interesse de clientes em relação aos preços de produtos ofertados e a distância entre o comprador e vendedor.

O Jogo, é em uma linha com 2 jogadores onde cada um posiciona apenas um gerador e o reposiciona k vezes, a fim de maximizar sua região. O jogador garante vitória quando possuir a maior região linear, magnitude do intervalo, após as k rodadas pela construção do Diagrama de Voronoi.

A estratégia de ganho é bem simples: posicionar o gerador no ponto médio da linha ou finalizar a jogada k posicionando o gerador no centro garantindo metade da curva.

Por mais que não tenha sido encontrada uma estratégia elaborada para este jogo, combinações de regras podem ser estabelecidas para incrementar sua jogabilidade, como exemplo, um Jogo derivado, somar todas as regiões, $\Sigma|V_k(p)|$, de cada jogador em cada jogada onde o vencedor é quem obter a maior soma. Assim, posicionando o gerador sempre perto do gerador do adversário, na maior porção lateral da região do oponente, que vai de uma extremidade ao gerador adversário, garante regiões sempre maiores.

Sendo J1 o primeiro a posicionar seu gerador p seguido do gerador q de J2 podemos observar, na Figura 4.4, jogadas do Jogo de Hotelling com o resultado J2 vencedor para o primeiro jogo com maior comprimento de um segmento de reta de tamanho 1 após 2 rodadas, e na Figura 4.5, com resultado J1 vencedor, no Jogo de Hotelling derivado, com o maior somatório de comprimentos após 2 posicionamentos, sendo $\Sigma|V_2(p)| = 1,01 > \Sigma|V_2(q)| = 0,99$.

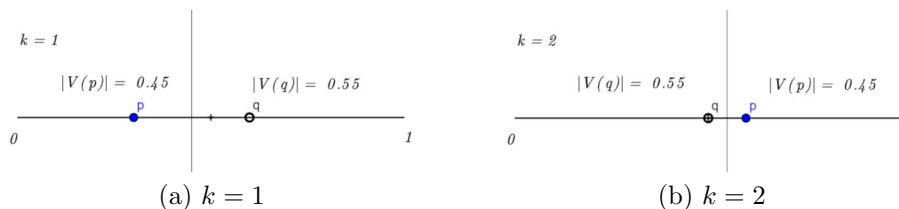


Figura 4.4: Resultado Jogo de Hotelling Tradicional, J2 vencedor.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Contudo, o Jogo de Hotelling geralmente é contextualizado pela competição de 2 empreendedores em um espaço linear contabilizando tanto o custo de um cliente para se ter acesso a cada uma das lojas de cada empreendedor quanto o preço de venda do item de desejo do cliente. Kyle Woodward [35] e Presh Talwalkar [36], são alguns dos pesquisadores que descrevem o processo de Hotelling usando o exemplo de dois carrinhos de sorvetes, de marcas distintas, na beira da praia.

Cada carrinho, $C1$ e $C2$, quer ficar perto dos clientes pois ficam mais acessíveis, então se espalham, cada um criando sua margem de contato ge-

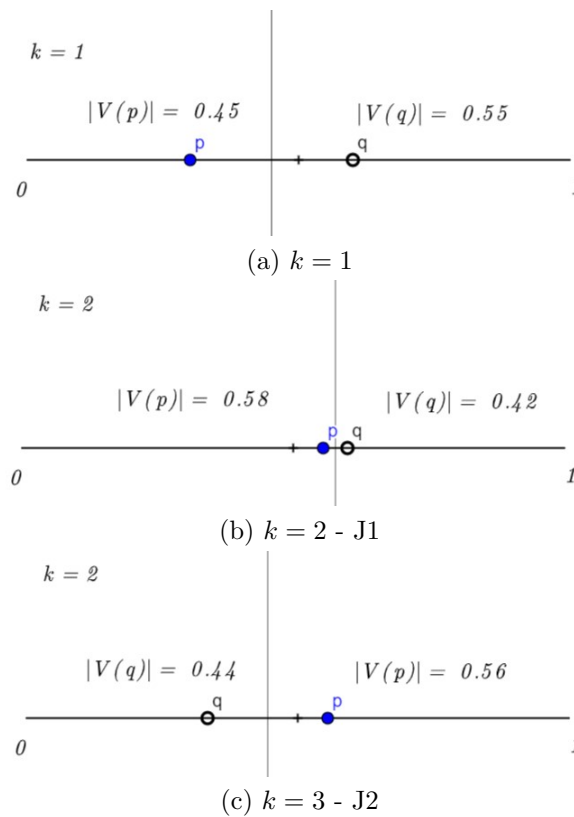


Figura 4.5: Resultado Jogo de Hotelling Derivado, J1 vencedor.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

ogrficamente. Se considerar um segmento de reta de tamanho 1, $C1$ se posiciona no ponto 0,25 e $C2$ no ponto 0,75 e após a divisão do espaço (pelo Diagrama de Voronoi), cada um teria a mesma quantidade de espaço. Porém, cada carrinho busca maior território, então um carrinho se aproxima do outro para conseguir maior região da praia diminuindo a do concorrente. Desse modo, na busca de maximizar o território, acabam se encontrando no centro da praia, tendo, ambos, mesma quantidade territorial da praia, igual a 0,5 na reta (Figura 4.6).

Porém, se após atingirem o centro, se um dos carrinhos se mover, este terá seu território reduzido, pois o adversário já terá garantido metade da região por se situar no centro da praia e irá dividir somente metade dela após mudança de localização do primeiro carrinho. Okabe [5], chamou essa configuração central de Equilíbrio Global, onde as lojas não possuem nenhum incentivo em se reposicionar. No Jogo de Hotelling, o Equilíbrio Global se caracteriza como empate.

Diferentemente do sentido de geradores equidistantes do centro, a es-

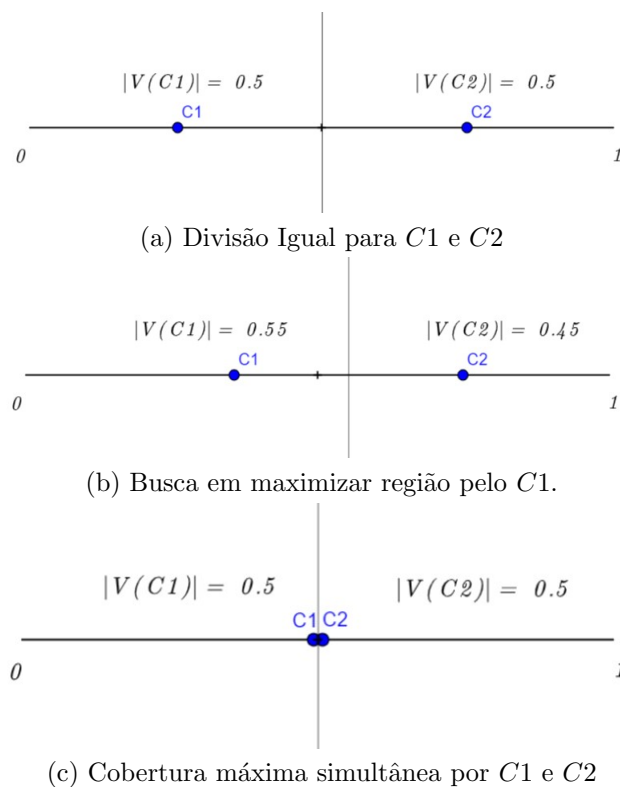


Figura 4.6: Contextualização Jogo de Hotelling - Carrinhos de sorvete na beira da praia.

Fonte: Elaborado pelo autor.

estratégia Equilíbrio Global segue o conceito do Equilíbrio de Nash [37], que busca a melhor solução onde conduz o jogo a um resultado de estabilidade, não tendo incentivo para que os jogadores façam algum reposicionamento, assim, a estratégia de cada jogador é a melhor possível para ele próprio. Para exemplificar essa diferença, as Figuras 4.6a e 4.6c possuem o mesmo resultado, porém o Equilíbrio ocorre apenas em 4.6c, pois pela Figura 4.6a é possível atingir o estado da Figura 4.6b.

O caso é análogo se ambos jogadores posicionam seus geradores no mesmo local que não seja o centro, um dos geradores pode ser reposicionado para o centro e conseguir metade da região. Desse modo, para 2 geradores, o Equilíbrio Global ocorre no ponto 0,5 do segmento de reta de tamanho 1.

Ao definir Equilíbrio Global, Okabe considerou a competição de n instalações, p_i , onde o lucro destas são proporcionais aos comprimentos das suas regiões $V(p_i)$, suas áreas de mercado. Assim, Eaton e Lipsey (1975, p. 27-49) são citados por Okabe atestando as únicas configurações dos Equilíbrios

Globais para $n = 2, 4$ e 5 , onde 3 não tem Equilíbrio Global e para $n \geq 6$, existem infinitas configurações para Equilíbrio Global.

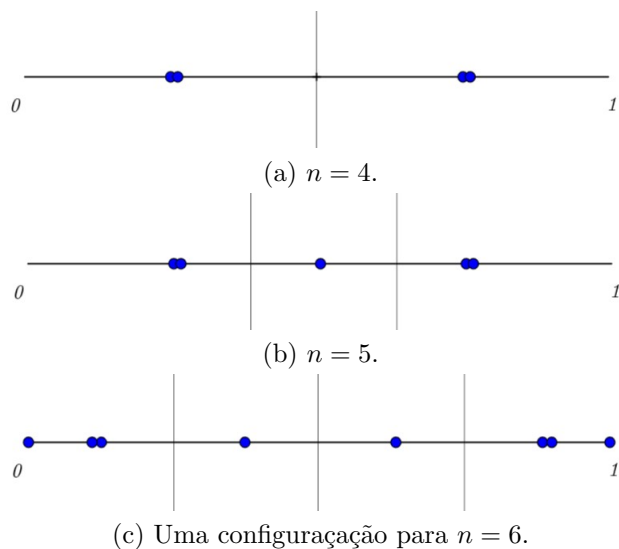


Figura 4.7: Configurações Equilíbrio Global.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Mas Willian Spaniel [38], descreve o Equilíbrio Global para n par, onde cada 2 jogadores ocupam as localizações $1/n, 3/n, \dots, (n-1)/n$, e os locais centrais são ocupados apenas por metade dessas configurações dos geradores no segmento de reta. Porém, para n ímpar os estudos devem ser analisados caso a caso pois não seguem uma regra padrão [39].

Tal comportamento em se manter no centro explica o por quê de muitas lojas do mesmo segmento se mantém muito próximas, como postos de gasolina e redes de supermercados. Empreendedores se mantém mais equipados em diversidade quando próximo da concorrência e para o consumidor a competição comercial lhe gera economia e a busca do item fica mais fácil, diferentemente se tais pontos fossem isolados.

Uma análise sobre o Equilíbrio Global no Jogo de Hotelling é na área política onde dois candidatos de partidos distintos disputam a presidência, por exemplo. Cada um possui uma plataforma com posição política diferente, se eleitores estão dispostos em um espectro de posições políticas onde cada candidato está propenso a posições contrárias, extremos desse espectro, candidatos tendem a se manter no meio desse espectro cativando o maior número de eleitores na busca dos votos médios, fazendo eleitores mais propensos a um candidato que outro por quê estão mais próximos as suas posições políticas.

Por fim, uma outra aplicação desse processo de Hotelling, são as matérias televisivas que são transmitidas. Devido a competição entre canais, ocorre

que várias emissoras concorrem pela mesma notícia ao invés de reportar notícias variadas, isso por quê, tendem a se posicionar no centro do espectro de interesse de uma manchete, chamando atenção do máximo de telespectadores possível.

A título de complemento, existe um estudo sobre o processo de Hotelling bidimensional [5], porém não como jogo, apenas uma análise dos polígonos e suas propriedades, usados para otimização de localização.

4.2 Jogo de Voronoi No Plano

Quando consideramos as regras de jogos em um plano e não mais em uma curva, definimos os Jogos de Voronoi No Plano. Estes são os jogos mais comuns entre os Jogos de Voronoi, devido sua aplicabilidade em determinar áreas geográficas e, por esse motivo, os mais comuns em atividades geométricas.

4.2.1 Jogo Tradicional No Plano

O Jogo Tradicional No Plano se resume a jogadas de n rodadas com dois jogadores tendo como objetivo a maximização da região de um espaço bidimensional, especificamente de um quadrado.

Ainda é difícil encontrar registros para estratégia de ganho para os jogadores com os requisitos citados. Por mais que exista uma forma para encontrar a maior região a ser construída [40, 41], ou seja, posicionar o gerador no Diagrama a fim de construir o maior polígono, podendo maximizar a área total do competidor, uma estratégia completa não foi apresentada devido sua complexidade.

Porém, uma sugestão de estratégia bem simples, no estudos de algoritmos, foi relatada em [42] de forma que as jogadas fossem uma mistura de ataques e defesas. Assim, o ataque seria a divisão do maior polígono do oponente, diminuindo a região total do oponente e conseguindo a mesma quantia para a própria região total. Tal método possui sua validade, pois caso fosse feita a divisão em uma área com várias fronteiras, a região criada perderia abrangência nas próprias vizinhanças e também não alcançaria uma aglutinação máxima dos polígonos do oponente. Já as defesas se baseiam em dividir os próprios polígonos em áreas aproximadamente iguais, assim evita-se grandes perdas provenientes da divisão das jogadas do oponente.

O Jogo implementado por Frederik Brasz [43], tem exatamente os requisitos exigidos com J1 sendo o jogador Red e J2, Blue. Na plataforma é indicada, a quantidade de geradores posicionados, qual é o jogador a po-

sicionar o próximo gerador assim como a porcentagem da área total que cada competidor conquistou, sendo a critério dos jogadores o valor de n para finalização, pois o jogo é contínuo (Figura 4.8).

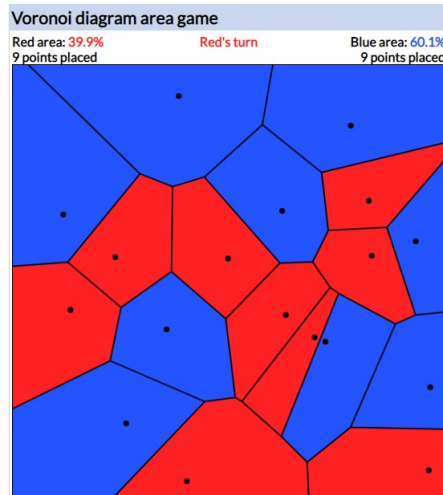


Figura 4.8: Jogo Tradicional para $n = 9$.
 Fonte: Página Frederik Brasz [43].

Jogo Tradicional No Plano - Uma Rodada

Dentre as estratégias para Jogos de Voronoi no plano com objetivo de maximização de área, um estudo [44] com jogabilidade de uma rodada foi apresentada uma estratégia de ganho para J2, sendo n suficientemente grande, onde o espaço é um quadrado de dimensões \sqrt{n} e área igual a n .

Como o jogo é de uma rodada, todos os n geradores de J1 são posicionados, assim, este possui uma proporção de $n/n = 1$ da área total do quadrado. Para J2 ganhar, este precisa que seus n geradores possuam $1/2 + \alpha; \alpha > 0$ da área total. Tal estratégia mostra que é possível fazer isso com um gerador a qual é induzida para o conjunto todo de geradores de J2.

O método utilizado parte de que, se existe uma quantidade de polígonos de J1 menor ou igual a $\lfloor n/2 \rfloor$ cobrindo um total de área do quadrado maior que $1/2 + \alpha; \alpha > 0$, J2 pode tomar boa parte dessa área atacando cada gerador de J1, posicionando seus geradores, dois a dois, em cada lado dos geradores de J1, sendo este o centro de simetria dos outros 2 (Figura 4.9), sendo $\lfloor n/2 \rfloor$ o número inteiro do resultado da divisão $n/2$. O método falha quando os polígonos de J1 possuem quase o mesmo tamanho, remetendo a estratégia simples das combinações de ataques e defesas, porém se mais de

εn polígonos de J1 têm área menor que $1 - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$, a estratégia ainda é válida.

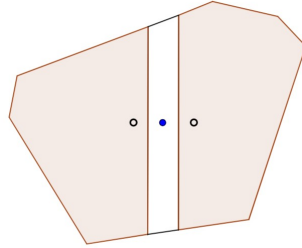


Figura 4.9: Redução da área de um polígono de J1 por 2 geradores de J2.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Jogo Tradicional No Plano - Uma Rodada (Derivada)

Em [45] é apresentada uma derivação do estudo de [44] onde considera um retângulo Q no lugar do quadrado e o índice ρ , que é a razão do comprimento menor pelo comprimento maior de Q , caracterizando a proporção das dimensões do plano do jogo. A primeira análise de ganho para J2 é que J1 não comece posicionando seus geradores de modo que forme uma grade regular de polígonos, onde grade regular é definida de forma que todos os polígonos sejam retângulos congruentes e os geradores se encontram no centro desses polígonos.

Desse modo, J1 sempre tem chances para vencer quando posiciona seus geradores em grade regular. Tais chances provêm do complemento da condições de vitória para J2: para $n \geq 3$ e $\rho > \sqrt{2}/n$ ou quando $n = 2$ e $\rho > \sqrt{3}/2$, somente para retângulo de $\rho \leq 1$. Assim, os casos restantes J1 garantem vitória.

A estratégia de ganho para J2 é formulada partindo de que J2 ganha se, e somente se, for posicionado um dos seus geradores e conseguir uma área estritamente maior que $1/(2n)$ da área de J1. Então, após posicionar o primeiro gerador, aplicar o método redução da área de um polígono de J1 por 2 geradores de J2, do estudo original, garante-se a J2 área final maior que $|Q|/2$.

Assim, para $n = 1$, J2 ganha se J1 não posicionar no centro de Q , pois J1 garante vitória se posicionar seu gerador em grade regular. Desse modo, J2 consegue atingir área maior que $|Q|/2$ somente se J1 não posicionar seu gerador no centro da área de jogo Q .

Para $n = 2$, sem perda de generalidade, suponhamos o jogo em um quadrado Q de lado 1, ocorrendo $\rho = 1$, e o canto inferior esquerdo de Q na

origem do plano cartesiano. J1 posiciona os pontos de modo grade regular, ou seja, nas coordenadas $(1/2, \rho/4)$ e $(1/2, 3\rho/4)$ ou $(1/4, \rho/2)$ e $(3/4, \rho/2)$, e consideremos a segunda configuração onde a primeira possui análise análoga.

Para J2 ganhar, como dito anteriormente, J2 tem que conseguir um total de $1/(2.2) = 1/4 = \rho/4$ da área de J1 com o seu primeiro gerador. Seja q o gerador posicionado de J2, se $y_q = \rho/2$, J2 consegue área no máximo $\rho/4$, logo suponhamos $y_q > \rho/2$. Além disso, se $x_q > 3/4$, a área de J2 é reduzida, pois quando q move em direção ao ponto $(1/2, \rho/2)$, $|V(q)|$ aumenta. Ainda, se $x_q = 3/4$, J2 não adquire área de tamanho $\rho/4$. Portanto, suponhamos $1/2 \leq x_q < 3/4$ e $y_q \geq \rho/2$.

Considere as retas mediatrizes $b_1 = b(q, (1/4, \rho/2))$ e $b_2 = b(q, (3/4, \rho/2))$ e a interseção $b_1 \cap b_2 = t$ pertencente à reta $x = 1/2$. Se t se encontra fora de Q , então $|V(q)| < \rho/4$, logo suponhamos t no interior de Q . Sejam f_1 e f_2 os segmentos de t até as extremidades de Q sobre b_1 e b_2 , respectivamente, e seja também C a circunferência passando por t , b_1 e b_2 .

Se b_1 não intersecta o topo de Q , nem b_2 , e assim, movendo q para a esquerda sobre C , $|V(q)|$ irá aumentar porém até um limite $< \rho/4$. Além do mais, se b_1 e b_2 intersectam o topo de Q , então $f_1 \leq f_2$. Tal constatação provem do fato de que se mover q para a direita por C , podemos aumentar $|V(q)|$ de modo que f_1 vá diminuindo e f_2 aumentando até que b_2 intersecte o canto superior direito de Q . Assim, se b_1 intersecta o topo de Q e b_2 intersecta o topo direito de Q , obtemos $f_1 \leq f_2$. Se continuar movendo q por C , ambos f_1 e f_2 irão diminuir.

Com isso, $|V(q)|$ cresce enquanto $f_1 < f_2$ e atinge valor máximo quando $f_1 = f_2$, e o máximo existe à medida que q se aproxima de $(3/4, \rho/2)$ quando $f_1 > f_2$. Assim, se $q = (3/4, \rho/2)$, temos $f_1 = \rho - y_q$ e $f_2 = \sqrt{1/4 + (\rho - 2y_q)^2}$. Por derivada, $f_1 > f_2$ somente se $\rho > \sqrt{3}/2$.

Por fim, o segundo gerador de J2 garante uma área de tamanho $1/4 - \epsilon$, onde ϵ é um valor arbitrário positivo pequeno, posicionando esse perto de $(1/4, \rho/2)$, conseguindo mais da metade de Q .

A Figura 4.10 apresenta um exemplo do posicionamento do primeiro gerador de J2 com os elementos da prova da estratégia de vitória para J2, apresentando a região sobre a linha circular dentro do retângulo pontilhado que o gerador de J2 precisa posicionar para conseguir $1/4$ de Q .

Maiores detalhes da prova do caso $n \geq 3$ em [45].

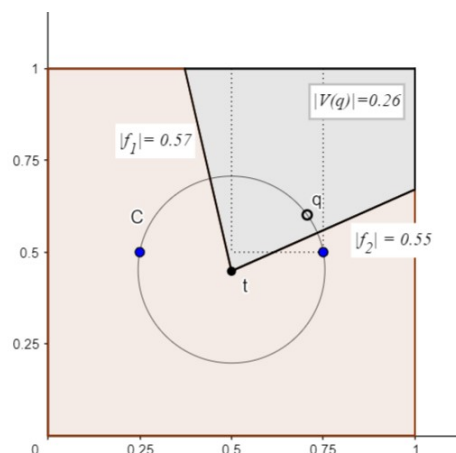


Figura 4.10: Estratégia para o Jogo Tradicional No Plano - Uma Rodada (Derivada) para espaço retângular com $n = 2$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.2 Jogo Máxima Vizinhaça

A variação Jogo de Voronoi Máxima Vizinhaça estudada por Rasheed et al.[46] não leva em consideração a maximização da área e sim, a maximização da vizinhaça, ou seja, a quantidade de regiões vizinhas dos geradores de um jogador.

A análise feita para esse Jogo teve como objetivo a criação de estratégias para o Problema de Localização de Instalações Competitivas - PLIC, que compara o melhor lugar para se abrir um negócio, como uma filial de uma franquia, sem que concorrentes pré-existentes o interfiram e, além disso, que consiga também interferir no máximo de lojas dos concorrentes. A análise não leva em consideração a qualidade do produto ou atendimento de uma instalação e sim, a suposição de que clientes têm preferência por instalações geograficamente mais próximas a eles.

Neste Jogo de uma rodada, cada jogador posiciona todos seus n geradores em estrutura em duas dimensões, tendo como objetivo maximizar o número de regiões vizinhas. Como J1 não sabe onde J2 irá posicionar seus geradores, as estratégias de ganho são para J2. Assim, com os geradores do J1 posicionados, J2 tem a vantagem de implementar estratégias para vencer.

Algumas exigências são pré-estabelecidas para que ocorra a investigação: três geradores do Diagrama de Voronoi não podem ser colineares, quatro geradores não podem ser cocirculares e o máximo do grau de um vértice é 3.

Em relação a análise pela estrutura, o jogo leva em consideração a vizinhaça dos geradores para atingir o objetivo do jogo, assim todas as análises

de vitória foram feitas pela Triangulação de Delaunay, do Diagrama de Voronoi, necessitando da atualização da estrutura incrementalmente em relação as jogadas de J2, ou seja, a cada inserção de geradores de J2.

Dito isso, definimos que dois polígonos do Diagrama de Voronoi são vizinhos um do outro se são adjacentes, isto é, compartilham uma aresta da fronteira. Logo, como as arestas da Triangulação de Delaunay conectam regiões que compartilham uma aresta comum no Diagrama de Voronoi, estas serão vizinhas uma da outra.

Nesta variação Jogo Máxima Vizinhança foram analisados 5 critérios para vencer, discutindo estratégia de ganho para cada um, que abordam situações diretas do PLIC. Tais critérios são:

- Critério 1: Conseguir todos pontos do oponente como vizinhos;
- Critério 2: Além de considerar o Critério 1, conseguir mais pontos oponentes como vizinhos do que o oponente conseguir com nossos pontos;
- Critério 3: Atingir Critério 2 considerando a vizinhança não distinta (considerar vizinhança com um ponto mesmo que este já tenha sido contado como vizinho de outro ponto);
- Critério 4: Seguir Critério 2 e evitar vizinhança própria (vizinhos do mesmo jogador);
- Critério 5: Alcançar Critério 4 considerando vizinhança própria não distinta.

Com o objetivo de maximizar o número de vizinhos segue para cada critério: a jogabilidade, o estudo da estratégia vencedora, um exemplo e a equivalência no PLIC. Além do mais, com a finalização das jogadas de J1 e J2, seja o jogo da Figura 4.12, o exemplo a ser analisado onde os pontos fechados são os pontos de J1 e os abertos, de J2. Durante as análises, no exemplo, representaremos as vizinhanças por setas de acordo com as considerações de cada critério.

Critério 1: Maximização de Vizinhos Oponentes

Com objetivo simples, tenta-se conseguir todos os pontos do oponente como seus vizinhos, ou seja, maximizar a quantidade de vizinhos.

Pode-se dizer que J2 sempre consegue pontos de J1 como vizinhos, prova disso é considerar uma face com um ponto de J1 em um dos vértices. Se J2 inserir um ponto no interior dessa face e atualizar a Triangulação, esse ponto de J1, da face, será vizinho do ponto de J2. Desse modo, se J1 tem n

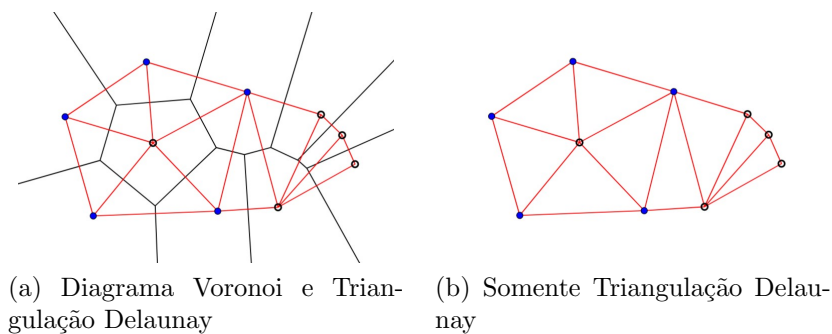
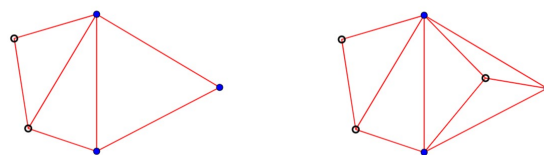


Figura 4.11: Jogo - Exemplo

Fonte: Elaborado pelo autor.

pontos, J2 consegue os n pontos de J1 como vizinhos. A Figura 4.12 ilustra essa maximização de J2.



(a) Um ponto de J1 sem ponto de J2 como vizinho.

(b) Todos pontos de J1 vizinhos dos pontos de J2.

Figura 4.12: J2 sempre consegue vizinhança com J1.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Aliás, nesse critério é possível vencer inserindo um número menor que o total n de pontos do jogador. É possível vencer utilizando até $\frac{2n+2}{3}$ pontos apenas, sendo este valor uma cota superior para a quantidade de pontos necessários para vencer neste critério.

No exemplo da Figura 4.13, J2 vence devido todos pontos de J1 serem seus vizinhos onde o mesmo não ocorreu para os pontos de J2. Além do mais, J2 vence com apenas um gerador, ou seja, $1 < 4 = \frac{2(5)+2}{3}$ pontos que precisaria no máximo para vencer.

No PLIC, o Jogo corrobora com situações onde novas instalações podem afetar todas as instalações concorrentes já existentes.

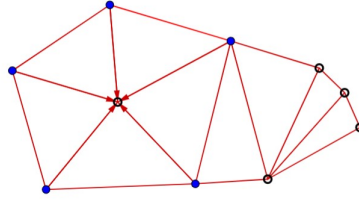


Figura 4.13: Vitória J2 com apenas 1 ponto - Critério 1
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Critério 2: Vizinhos Oponentes Distintos

Adicionando uma exigência ao Critério 1, tenta-se impedir que os pontos do oponente consiga vizinhos. A condição de distinção provém quando consideramos apenas vizinhanças distintas, ou seja, é feita a contagem da vizinhança somente quando um ponto do oponente possui um ou mais pontos do adversário como vizinhos.

Após os dois jogadores posicionarem seus pontos, J1 terá no total V_1 vizinhanças de J2 e J2, V_2 de J1. Como é considerada a distinção no relacionamento de vizinhança, para a contagem, é verificado cada ponto do oponente se este possui pontos do outro jogador como vizinhos. Uma forma de fazer essa contagem é considerando as arestas incidentes em cada ponto do jogador oponente. Seja um ponto do oponente p e as arestas a_i incidente no mesmo, se uma destas arestas possui um dos pontos q_i do outro jogador na outra extremidade, p é contado no total de vizinhanças com o jogador oponente (Figura 4.14). Portanto, se $V_1 > V_2$, J1 será vencedor, se $V_2 > V_1$, J2 será o vencedor e se $V_1 = V_2$ será empate.

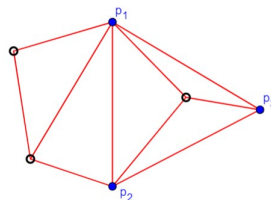


Figura 4.14: Condição Vizinhos Oponentes Distintos: p_1 possui 5 arestas sendo 3 delas com pontos de J2, p_2 com 2 e p_3 com 1. Assim sendo, $V_2 = 3$.
 Fonte: Elaborado pelo autor.

Já que é possível conseguir o Critério 1, para vencer, seguindo este Critério 2, basta que J2 consiga que pelo menos um dos seus pontos não seja vizinho de nenhum ponto de J1. Para que isso aconteça, “escondemos” de J1 pelo menos um ponto de J2. O termo esconder utiliza o mesmo resultado da estratégia de defesa do Jogo Tradicional No Plano da Seção 4.2.1, onde é feita a divisão dos próprios polígonos. Como as jogadas de J2 são feitas após as de J1, é possível “esconder” um ponto de J2 dividindo seus próprios polígonos criando vizinhos próprios.

De forma genérica, para esconder um ponto de todos pontos existentes, é necessário de pelo menos 2 pontos extras. Desta maneira, para que nenhum ponto de J1 consiga ser vizinho de um ponto q de J2, J2 precisa que 2 de seus pontos “escondam” q .

Essa estratégia é chamada Esconder um Ponto do Oponente: sejam os pontos p_1 e p_2 do fecho convexo F e um ponto x fora de F de modo que a união da Triangulação de Delaunay com o triângulo p_1p_2x continue convexa. Colocamos os pontos q_1 e q_2 em algum lugar sobre p_1x e p_2x , respectivamente, a uma distância d de x , tal que $d < \overline{p_1x}$, $d < \overline{p_2x}$ e não sobreponha x , e colocamos também q_3 dentro do triângulo q_1q_2x perto de x . Assim, na Triangulação de Delaunay resultante, qualquer circunferência passando por q_3 , além de q_1 e q_2 , conterá q_1 e/ou q_2 em seu interior, escondendo o ponto q_3 . A Figura 4.15 representa o resultado da estratégia de esconder um ponto.

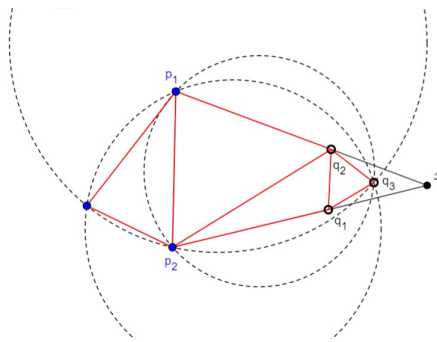


Figura 4.15: Estratégia Esconder um Ponto do Oponente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Se são necessários m pontos para J2 atender o Critério 1, desse modo serão necessários $m + 3$ pontos de J2 para esconder um de seus pontos de J1. Como existe uma cota superior para vitória no Critério 1 onde $m < n$, logo é possível atender o Critério 2 com os n pontos e J2 vencer, pois $m + 3 \leq n$. Se $n < 3$, J2 não possui pontos suficientes para esconder um ponto do oponente e o jogo empata.

Na Figura 4.16, $V_1 = 3$ e $V_2 = 5$, portanto, J2 vence.

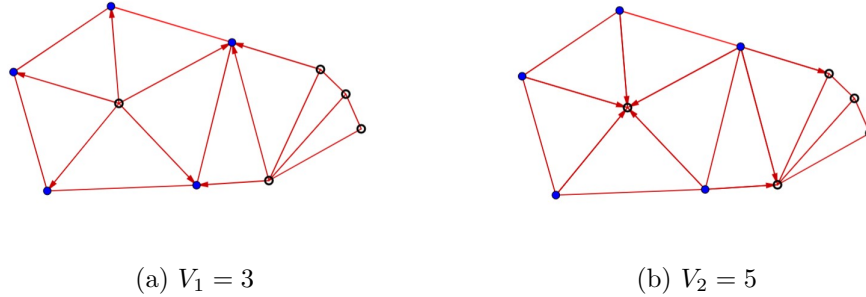


Figura 4.16: Vitória J2 - Critério 2

Fonte: Elaborado pelo autor.

No PLIC, esse critério mostra que, além de interferir no negócio do concorrente, é tentado que o próprio negócio seja afetado o mínimo possível pelas instalações do concorrente.

Critério 3: Vizinhos Oponentes Não Distintos

Considerando o Critério 2, não é feita mais a distinção da vizinhança, ou seja, se um ponto possui k pontos do outro jogador como vizinhos, então sua vizinhança é contada como k ao invés de uma só. Portanto, se um ponto possui arestas com pontos oponentes nas outras extremidades, o total da vizinhança com o oponente considerará na contagem todas as extremidades com pontos oponentes.

Cada ponto p_i de J1 terá u_i pontos de J2 como vizinhos, então temos que $V_1 = \sum_{i=1}^n u_i$ será o total da vizinhança de J2 com J1 e v_i sendo os pontos de J1 vizinhos de q_i de J2, a quantidade $V_2 = \sum_{i=1}^n v_i$ será o total da vizinhança de J1 com J2. Desse modo, diferentemente do Critério 2, se p_1, p_2 e p_3 de J1 são vizinhos de q_1 de J2, então $v_1 = 3$, considerando desta forma a quantidade de pontos de J1 que fazem vizinhança com q_1 . A Figura 4.17 exemplifica graficamente uma contagem das vizinhanças não distintas.

Neste critério, o Jogo sempre resulta em empate, pois como não são considerados vizinhos oponentes distintos, cada ponto contará a vizinhança com os pontos do oponente onde estes os considerarão também como vizinho. Isto é, se p_i de J1 possui u_i pontos de J2 como vizinhos, estes u_i pontos de J2 farão vizinhança com p_i também e p_i será contado u_i vezes como vizinho. Empregando a mesma contagem para todos os pontos de ambos os jogadores ocorrerá $V_1 = V_2$.

No exemplo da Figura 4.18, $V_1 = V_2 = 8$, logo o Jogo resulta em empate.

No PLIC, o motivo de não fazer distinção das instalações vizinhas é querer

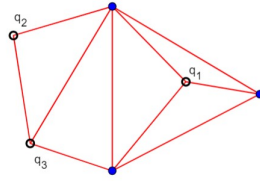
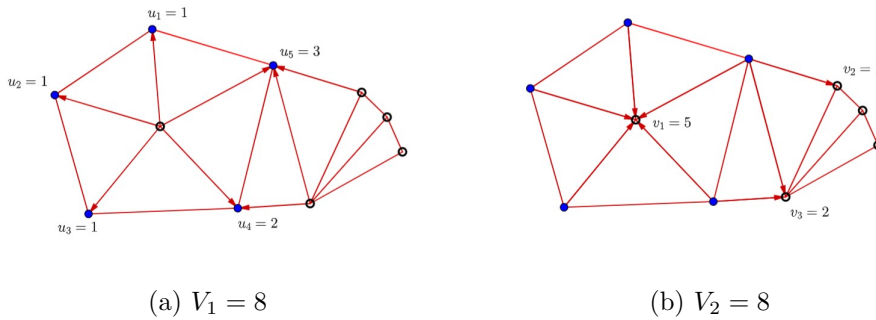


Figura 4.17: Condição Vizinhos Oponentes Não Distintos: $v_1 = 3$, $v_2 = 1$ e $v_3 = 2$ implica em $V_2 = 6$.

Fonte: Elaborado pelo autor.



(a) $V_1 = 8$

(b) $V_2 = 8$

Figura 4.18: Empate - Critério 3.

Fonte: Elaborado pelo autor.

interferir em cada instalação do concorrente o máximo de vezes possível. Por mais que cada instalação sofrerá uma interferência do oponente, neste critério, instalações do competidor adversário podem ser mais prejudicadas pela convergência de vários vizinhos.

Critério 4: Vizinhos, Oponentes e Próprios, Distintos

O Critério 4 segue o Critério 2 porém evitando vizinhos próprios. Aqui, tenta-se conseguir ser vizinho de todos pontos oponentes, impedindo que o oponente consiga o mesmo e conjuntamente tenta minimizar a geração de próprios pontos como vizinhos. A distinção na vinhança própria é verificada se nas extremidades das arestas incidentes em um ponto possui pelo menos um ponto do mesmo jogador.

Assim, como no Critério 2, seja V_1 a quantidade de vizinhanças distintas de J2 com J1 e V_2 a de J1 com J2. Consideremos também P_1 o número de vizinhos próprios de J1, também distintos, e analogamente P_2 para J2.

Fazemos o cálculo $T_1 = V_1 - P_1$ e $T_2 = V_2 - P_2$ atribuindo T_1 e T_2 a pontuação de J1 e J2, respectivamente. Na Figura 4.12.b temos $P_1 = 2$, assim sua pontuação será igual a $T_1 = V_1 - P_1 = 3 - 2 = 1$. Após atualização da Triangulação, J2 será vencedor se $T_1 > T_2$, J2 será o vencedor se $T_2 > T_1$ e será empate se $T_1 = T_2$.

A estratégia de J2 para este critério, é garantir que seus pontos fiquem completamente cercados por pontos de J1. Desse modo, J2 evita que seus pontos sejam vizinhos com outros dos seus pontos e ao mesmo tempo os pontos de J1 fazem vizinhança com pelo menos um de seus próprios pontos, criando várias vizinhanças próprias.

No caso de $n = 1$, $V_1 = V_2 = 1$ e $P_1 = P_2 = 0$, logo, o Jogo termina em empate, pois $T_1 = T_2$. Para $n = 2$, antes da última jogada de J2, seja a aresta formada pelos pontos de J1. O primeiro ponto de J2 está em um semiplano dividido pela reta formada pelos pontos de J1. J2 vence quando posiciona seu segundo ponto no semiplano que não contém seu primeiro e exterior a circunferência formada pela pontos de J1 e o primeiro ponto de J2 (Figura 4.19). Com essas condições de região para o último ponto de J2, a aresta formada pelos pontos de J1 se mantém legal e os pontos de J2 não serão vizinhos próprios e com isso $P_1 = 1$, $P_2 = 0$ e $T_2 > T_1$ garantindo a vitória de J2.

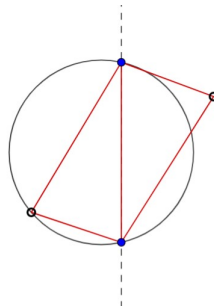


Figura 4.19: Estratégia de vitória para J2: $n = 2$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para casos onde $n \geq 3$ seguimos a Estratégia Região Segura: Consideremos marcas nos pontos de J1 onde começam todos desmarcados. De forma, iterativa, considere um ponto p desmarcado de J1 e então J2 posiciona seu ponto q em um triângulo onde um de seus vértices seja p . Pela estratégia do Critério 1, todos os pontos desse triângulo serão vizinhos de q e todos pontos que forem de J1 nesse triângulo são marcados. Então, considerado outro ponto desmarcado é feito o mesmo procedimento até que todos estejam marcados. Supomos que foram posicionados k pontos de J2, assim que o último ponto de J1 foi marcado. Sejam todas as circunferências da Triangulação,

então todos os $n - k$ pontos restantes de J2 são posicionados exteriormente a todas as circunferências evitando que os k pontos sejam vizinhos dos $n - k$ pontos restantes (Figura 4.20).

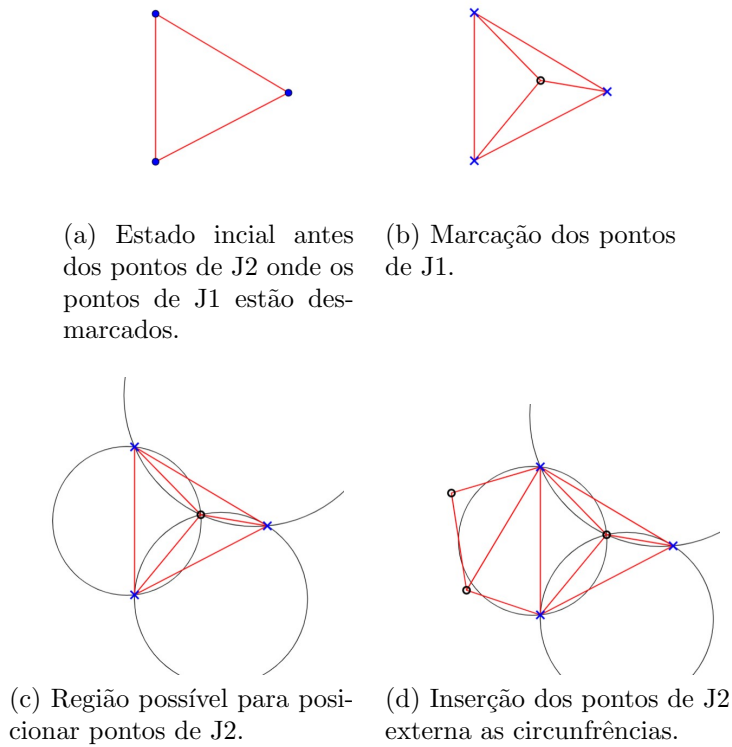


Figura 4.20: Estratégia Região Segura.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O termo Região Segura advém de que quando é posicionado um ponto de J2, é garantido que este não criará uma região adjacente a uma outra região sua, ou seja, criar vizinhança própria. Então, quando é selecionado um ponto p de J1 desmarcado, é determinado que este não possui vizinhança com algum ponto q de J2. Logo, denominamos que a vizinhança de p é uma região segura para q .

Ao final, após as jogadas de J2, é que garantido que os pontos de J2 são vizinhos de todos os pontos de J1; todos pontos de J1 possuem vizinhança própria com pelo menos um de seus pontos (isto ocorre no momento que o último ponto de J1 é marcado) e; pelo menos um dos pontos de J2 não possui vizinhança própria. Assim, $V_2 = n$, $P_1 = n$ e $P_2 \leq n - 1$ e se usarmos a estratégia Esconder um Ponto do Oponente, do Critério 2, para os pontos ($n - k \geq 3$) posicionados após os pontos de J1 estarem todos

marcados, teremos $V_1 \leq n$ garantindo a possibilidade de vitória de J2 pois como $T_1 = V_1 - P_1 \leq n - n = 0$ e $T_2 = V_2 - P_2 \leq n - (n - 1) = 1$ implica em $T_2 > T_1$.

No exemplo, pelas Figuras 4.16 e 4.21 temos $V_1 = 3$, $V_2 = 5$, $P_1 = 5$ e $P_2 = 4$. Logo, $T_1 = -2 < 1 = T_2$ e J2 vence.

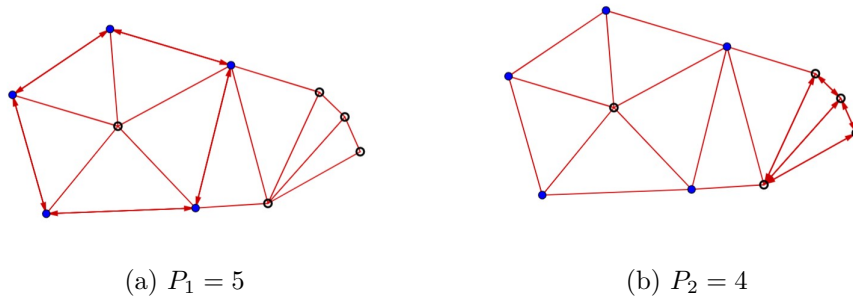


Figura 4.21: Vizinhos Próprios Distintos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

No PLIC, esta estratégia adicional é motivada em não atrair o cliente a sair da própria loja. Exemplo dessa situação é que quando há instalações vizinhas da mesma empresa pode ocorrer do cliente sair e checar instalações vizinhas, conseqüentemente, da mesma empresa, abrindo margem para o cliente mudar de ideia e então desistindo de algo que se interessou a princípio. Outra situação, é a criação de concorrência consigo mesmo e, com a inexistência de competitividade, gera diminuição da publicidade prejudicando a visibilidade da marca.

Critério 5: Vizinhos, Oponentes e Próprios, Não Distintos

Como no Critério 4, o Critério 5 segue as mesmas regras para atingir o objetivo do jogo, porém é levado em consideração a não distinção dos vizinhos.

Nesta variação, é aplicada a mesma ideia da não distinção de vizinhança com pontos do oponente, vista no Critério 3, para a vizinhança própria, com v'_i e u'_i indicando a quantidade de vizinhos próprios de p_i , pontos de J1, e q_i , de J2, respectivamente. Como foi constatado que o número de vizinhos oponentes não distintos é igual para J1 e J2, isto é, $V_1 = V_2$, o fator para vitória está relacionado ao vizinhos próprios não distintos, pois estes podem ser diferentes.

A estratégia de ganho para J2 é a mesma utilizada no Critério 4, porém com uma alteração na distribuição dos pontos de J2 após as marcações dos

pontos de J1. A etapa onde são postos os $n - k$ restantes pontos de J2, dependendo de como forem posicionados, eles podem gerar muitos vizinhos próprios, exemplo disso é a disposição dos pontos de forma aproximada um do outro criando um arranjo denso com grande número de vizinhos próprios.

Portanto, os $n - k$ pontos devem ser posicionados fora de todas as circunferências existentes da Triangulação de forma uniforme criando um novo fecho convexo somente com esses pontos. Assim, cada ponto de J2 do fecho convexo terá somente 2 vizinhos próprios cada, que são os pontos adjacentes no fecho (Figura 4.18b).

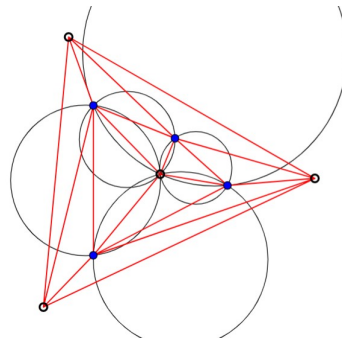
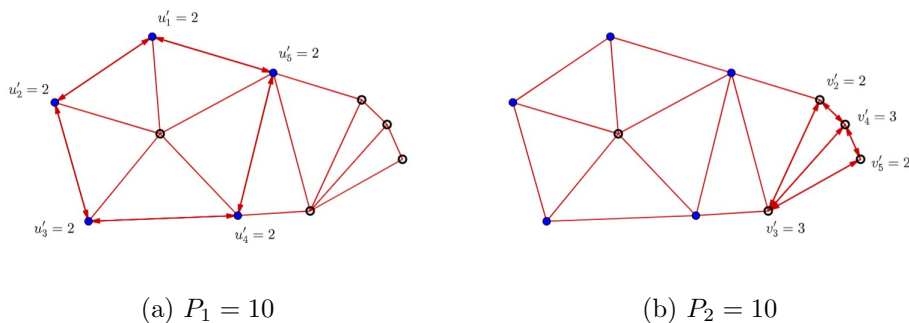


Figura 4.22: Estratégia Região Segura Modificada.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a estratégia neste critério, podemos dizer que $P_2 \geq 2n$ e desde que J2 gerará somente vizinhança própria com os $n - k$ pontos do fecho convexo resultante, temos que $P_2 \leq 2(n - k)$. Logo, J2 pode vencer pois $k \geq 1$ e implica em $P_2 \leq 2(n - 1)$.

Pela Figura 4.23, temos que no jogo do exemplo $V_1 = V_2 = 8$ e $P_1 = P_2 = 10$. Desse modo, $T_1 = T_2 = -2$ e, nesse caso, o jogo empata.



(a) $P_1 = 10$

(b) $P_2 = 10$

Figura 4.23: Critério 5.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Com todas as estratégias descritas e analisadas suas aplicações podemos dizer que os Jogos de Voronoi são ferramentas poderosa para análise e implementação de estratégias mercadológicas cobrindo planos quando questões geográficas são diferenciadas em estudo.

O termo jogo cabe muito bem na aplicação do Jogo de Voronoi - Máxima Vizinhança, pois cada competidor pode usar a estrutura de forma interativa, para investigar o impacto que cada concorrente gerou em suas jogadas finais na utilização do jogo anteriormente e tentar se destacar com um novo estudo.

Por fim, podemos afirmar que a utilização de ambas as estruturas somente reforça a utilidade dessas tesselações e adaptabilidade de seu uso em áreas que exijam abstração para planejamento.

Considerações Finais

Com objetivo de apresentar o Diagrama de Voronoi e Jogos de Voronoi, foi reunido nesta pesquisa os aspectos principais da estrutura, categorizando as jogabilidades dos segmentos selecionados, tanto linear quanto no plano. Fundamentado com dedicação aos detalhes da maneira que foi exposta, cada seção descrita teve a intenção de despertar interesse por cada ponto de vista que era discutido.

Considerando as formas básicas do Diagrama, passamos pela concepção inicial, integração com outros contextos, apresentação de suas definições, pelas maneiras de elaboração e pela forma de competição baseada na partição do espaço onde podemos afirmar que foi construído um panorama do tema capaz de gerar conteúdos para fins didáticos. Ainda mais que, durante toda pesquisa, conseguimos dizer que o Diagrama pode ser considerado de certa forma um espectro, onde à medida que é abordado, um leque de aplicações é aberto nas mais distintas áreas exemplificados tanto na história, aplicação e nos propósitos dos jogos.

Esse entrelace da matemática e ciência da computação, reforça mais ainda o atrativo que gera ao trabalhar com objeto de estudos em meio as duas áreas. Os conceitos primordiais que a geometria fornece para estabelecer os elementos matemáticos de forma a desenhar o espaço, combinada com o apuro e influência da computação, mune num simples tópico de estudo, conteúdo para se adequar as mais diferentes situações problemas. Caso esse, é onde os Jogos de Voronoi tomam protagonismo em projetos de estudo envolvendo análises e decisões nas ciências que não são exatas também.

Mesmo que alguns pontos na parte de Jogos não fossem muito claros a primeiro momento, isto é justificado pela discussão das jogadas, as quais são difundidas na Teoria dos Jogos, definidas pela escolha de decisões, provenientes de estratégias que podem atingir grandes possibilidades.

Baseado na revisão bibliográfica concluída, diante da ampla quantidade de publicações envolvendo a tesselação, poucas são as pesquisas envolvendo os Jogos de Voronoi. Então, foi abordado basicamente 4 jogos diferentes, os quais se abriam mais condições que se faziam necessárias, ou por representa-

rem alguma situação que exigia algum mapeamento ou era direcionado a um objetivo particular. Um desses casos é o caso do jogo Máxima Vizinhança com variações em 5 critérios aplicados ao PLIC.

Por fim, o estudo abordado pode servir como base para materiais futuros como Jogos de Voronoi tridimensionais, os quais são pouco propagados, além de novos critérios ou novas áreas dos jogos discutidos, ainda mais que alguns dos jogos não estão totalmente completos em seu estudo, como é o caso do Jogo Tradicional No Plano, além do estudo do Jogo de Hotelling bidimensional. Outras métricas, como a de Manhattan, seriam possíveis introdução para criação de novos objetivos além de novas análises com a definição Diagrama Voronoi Generalizada. Desse modo, são vastas as possibilidades de sucessão do conteúdo devido as adaptações do diagrama.

Referências Bibliográficas

- [1] M. I. Shamos and D. Hoey, “Closest-point problems,” in *16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1975)*, pp. 151–162, IEEE, 1975.
- [2] “Dominic walliman - website.” <https://dominicwalliman.com/>. Acessado em 2019-07-14.
- [3] F. and R. Klein, “Voronoi diagrams,” *Handbook of computational geometry*, vol. 5, pp. 201–290, 2000.
- [4] R. Descartes, “Principia philosophiae; ludovicus elzevirius: Amsterdam, the netherlands, 1644,”
- [5] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu, *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*, vol. 501. John Wiley & Sons, 2009.
- [6] “Math: The voronoi game.” <http://www.antiquark.com/2005/02/math-voronoi-game.html>. Acessado em 2019-07-14.
- [7] D. Sánchez-Gutiérrez, M. Tozluoglu, J. D. Barry, A. Pascual, Y. Mao, and L. M. Escudero, “Fundamental physical cellular constraints drive self-organization of tissues,” *The EMBO journal*, vol. 35, no. 1, pp. 77–88, 2016.
- [8] Q. Du, V. Faber, and M. Gunzburger, “Centroidal voronoi tessellations: Applications and algorithms,” *SIAM review*, vol. 41, no. 4, pp. 637–676, 1999.
- [9] A. C. M. Moura, “Aplicação do modelo de polígonos de voronoi em estudos de áreas de influência de escolas públicas: estudo de caso em ouro preto-mg,” *Revista Brasileira de Estudos Regionais e Urbanos*, vol. 3, no. 2, 2009.

- [10] “Melbourne school zones.” <http://melbourneschoolzones.com>. acessado em 2019-06-21.
- [11] F. A. V. S. Rezende, R. M. V. Almeida, and F. F. Nobre, “Diagramas de voronoi para a definição de áreas de abrangência de hospitais públicos no município do rio de janeiro,” *Cadernos de Saúde Pública*, vol. 16, pp. 467–475, 2000.
- [12] F. F. Lima, “Arquiteturas digitais a partir do diagrama de voronoi e triangulação de delaunay,” *Revista Projetar-Projeto e Percepção do Ambiente*, vol. 2, no. 2, pp. 52–60, 2017.
- [13] “Voronoi bookshelf.” <https://www.kickstarter.com/projects/AlmostScientific/voronoi-bookshelf>. Acessado em 2019-06-21.
- [14] “512 paths to the white house.” http://archive.nytimes.com/www.nytimes.com/interactive/2012/11/02/us/politics/paths-to-the-white-house.html?utm_campaign=Feed%253A+NerdcoreRSS2+%2528Nerdcore%2529&utm_medium=feed&utm_source=feedburner. Acessado em 2019-06-22.
- [15] “The nyt’s visual election outcome explorer.” <https://source.opennews.org/articles/nyts-512-paths-white-house>. Acessado em 2019-06-22.
- [16] O. Takahashi and R. J. Schilling, “Motion planning in a plane using generalized voronoi diagrams,” *IEEE Transactions on robotics and automation*, vol. 5, no. 2, pp. 143–150, 1989.
- [17] D. Seymour and J. Britton, *Introduction to Tessellations*. ERIC, 1989.
- [18] P. J. de Rezende and J. Stolfi, *Fundamentos de geometria computacional*. Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Informática, 1994.
- [19] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *et al.*, *Graph theory with applications*, vol. 290. Citeseer, 1976.
- [20] S. L. Devadoss and J. O’Rourke, *Discrete and computational geometry*. Princeton University Press, 2011.
- [21] M. De Berg, M. Van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf, “Computational geometry,” in *Computational geometry*, pp. 1–17, Springer, 1997.

- [22] J. o'Rourke, *Computational geometry in C*. Cambridge university press, 1998.
- [23] "Definição algoritmo - dicionário michaelis." <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/algoritmo/>. Acessado em 2019-06-24.
- [24] P. J. Green and R. Sibson, "Computing dirichlet tessellations in the plane," *The computer journal*, vol. 21, no. 2, pp. 168–173, 1978.
- [25] N. R. Adam and A. Gangopadhyay, *Database issues in geographic information systems*, vol. 6. Springer Science & Business Media, 2012.
- [26] "Frederik brasz - programming projects." <http://cfbrasz.github.io/index.html>. Acessado em 2019-06-26.
- [27] S. Fortune, "A sweepline algorithm for voronoi diagrams," *Algorithmica*, vol. 2, no. 1-4, p. 153, 1987.
- [28] "Raymond hill - steven j. fortune's algorithm to compute voronoi diagrams." <http://www.raymondhill.net/voronoi/rhill-voronoi.html>. Acessado em 2019-06-27.
- [29] "Fortune's algorithm (for voronoi diagrams)." <https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4>. Acessado em 2019-06-27.
- [30] M. J. Osborne and A. Rubinstein, *A course in game theory*. MIT press, 1994.
- [31] "Teoria dos jogos no planejamento estratégico." <https://www.tiespecialistas.com.br/teoria-dos-jogos-no-planejamento-estrategico/>. Acessado em 2019-07-25.
- [32] H.-K. Ahn, S.-W. Cheng, O. Cheong, M. Golin, and R. van Oostrum, "Competitive facility location along a highway," in *International Computing and Combinatorics Conference*, pp. 237–246, Springer, 2001.
- [33] H.-K. Ahn, S.-W. Cheng, O. Cheong, M. Golin, and R. Van Oostrum, "Competitive facility location: the voronoi game," *Theoretical Computer Science*, vol. 310, no. 1-3, pp. 457–467, 2004.
- [34] H. Harold, "Stability in competition," *Economic Journal*, vol. 39, no. 153, pp. 41–57, 1929.

- [35] “Kyle woodward - economics notes.” <https://kylewoodward.com/economics-notes/>. Acessado em 2019-07-14.
- [36] “Hotelling’s game, or why gas stations have competitors nearby.” <https://mindyourdecisions.com/blog/2008/03/25/game-theory-tuesdays-hotelling%e2%80%99s-game-or-why-gas-stations-have-competitors-nearby/>. Acessado em 2019-07-27.
- [37] “Infopédia - equilibrio de nash.” [https://www.infopedia.pt/apoio/artigos/\\$equilibrio-de-nash](https://www.infopedia.pt/apoio/artigos/$equilibrio-de-nash). Acessado em 2019-07-14.
- [38] “Game theory 101: The complete textbook - willian spaniel.” <http://gametheory101.com/tag/hotellings-game/>. Acessado em 2019-07-14.
- [39] C. Ewerhart, “Mixed equilibrium in a pure location game: The case of $n \geq 4$ firms,” *The BE Journal of Theoretical Economics*, vol. 15, no. 2, pp. 457–472, 2015.
- [40] F. Aurenhammer, R. Klein, and D.-T. Lee, *Voronoi diagrams and Delaunay triangulations*. World Scientific Publishing Company, 2013.
- [41] F. Dehne, R. Klein, and R. Seidel, “Maximizing a voronoi region: The convex case,” *International Journal of Computational Geometry & Applications*, vol. 15, no. 05, pp. 463–475, 2005.
- [42] “Voronoi game - dennis shasha - computer science.” <https://cs.nyu.edu/courses/fall12/CSCI-GA.2965-001/voronoi.html>. Acessado em 2019-07-08.
- [43] “Voronoi coloring - frederik brasz.” <http://cfbrasz.github.io/VoronoiColoring.html>. Acessado em 2019-07-08.
- [44] O. Cheong, S. Har-Peled, N. Linial, and J. Matousek, “The one-round voronoi game,” *Discrete & Computational Geometry*, vol. 31, no. 1, pp. 125–138, 2004.
- [45] S. P. Fekete and H. Meijer, “The one-round voronoi game replayed,” *Computational Geometry*, vol. 30, no. 2, pp. 81–94, 2005.
- [46] M. M. Rasheed, M. Hasan, and M. S. Rahman, “Maximum neighbour voronoi games,” in *International Workshop on Algorithms and Computation*, pp. 93–104, Springer, 2009.