CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Estéfano Gustavo Altieri Pereira

Regularidades em Poliedros: Platão, Arquimedes e Kepler-Poinsot

Maringá

2019

Estéfano Gustavo Altieri Pereira

Regularidades em Poliedros: Platão, Arquimedes e Kepler-Poinsot

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos André Verdi

Maringá

2019

ESTÉFANO GUSTAVO ALTIERI PEREIRA

REGULARIDADES EM POLIEDROS: PLATÃO, ARQUIMEDES E KEPLER-POINSOT

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Marcos A. Verdi

Prof. Dr. Marcos André Verdi
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Alexandre José Santana
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo Santos
UNIOESTE – Toledo/PR

Aprovado em: 29 de agosto de 2019.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Pereira, Estéfano Gustavo Altieri
P436r Regularidades em poliedros : Platão, Arquimedes e Kepler-Poinsot / Estéfano Gustavo Altieri Pereira. -- Maringá, 2019.
50 f. : il., color.

Orientador: Prof. Dr. Marcos André Verdi.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2019.

1. Poliedros de Platão. 2. Sólidos de Kepler-Poinsot. 3. Poliedros Arquimedianos. 4. Estrelação. 5. Plato´s Polyhedra. 6. Kepler-Poinsot Solids. 7. Archimedean Polyhedra. 8. Starling. I. Verdi, Marcos Andre, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 516.156

Edilson Damasio CRB9-1.123

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial meu orientador prof. Dr. Marcos, meus pais Luiz e Silvia, minha irmã Charlene, também dedico a minha esposa Simoni, pelo companheirismo e pela compreensão.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

Primeiramente à Deus e Santa Rita de Cássia por ter atendido às minhas orações nos momentos difíceis e de angústias.

Aos meus amigos da turma do PROFMAT, pelas rodas de estudos, trocas de conhecimento e motivação, em especial ao José Alves por sempre me socorrer nos mais aleatórios horários, ao Oldemir, Edson, Gilmar e Maikon pelas horas intermináveis de estudos para as provas e para a qualificação.

A todos os professores por passarem conhecimento necessário para alcançar meus objetivos.

Agradeço também aos meus grandes amigos que a vida me proporcionou, Douglas, Eduardo e Mário, afinal são mais de dez anos de amizade, pois sempre me apoiaram nos momentos difíceis.

Ao Philippe amigo de infância que mesmo a quilômetros de distância sempre esteve ao meu lado, apoiando e ajudando.

Em especial aos meus alunos, que sem eles jamais teria motivação para aperfeiçoar meu conhecimento.

Aos amigos dos locais onde trabalho pela compreensão e ajuda durante todo este tempo.

“Educação não transforma o mundo.

Educação muda as pessoas.

Pessoas transformam o mundo.”

Paulo Freire.

Resumo

Este trabalho é um estudo sobre algumas classes de sólidos que apresentam em sua definição um alto grau de regularidade: os sólidos de Platão, de Arquimedes e de Kepler-Poinsot. Descrevemos as construções desses sólidos e, com base na definição do tipo de regularidade em cada classe provamos, ou ao menos fornecemos um roteiro de prova, que cada classe contém cinco, treze e quatro sólidos, respectivamente. Também fazemos um pequena discussão sobre o conceito de regularidade e damos algumas caracterizações equivalentes do mesmo.

Palavras chave: Poliedros de Platão, Sólidos de Kepler-Poinsot, Poliedros Arquimedianos, Estrelação.

Abstract

This paper is a study of some classes of solids that present in their definition a high degree of regularity: The Platonic solids, the Kepler-Poinsot solids and the Archimedean solids. We will describe the constructions of these solids, and based on the definition of the type of regularity in each class we will prove, or at least provide a proof script, that each class contains five, thirteen, and four solids, respectively. We will also have a brief discussion about the concept of regularity and give some equivalent characterizations of it.

key words: Plato′s Polyhedra, Kepler-Poinsot Solids, Archimedean Polyhedra, Starling.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O interesse da humanidade por poliedros é muito antigo. Esse tipo de sólido aparece na natureza e também em diversas construções e obras artísticas da antiguidade. Com a sistematização do conhecimento matemático iniciado na Grécia, a busca por padrões passou a ser uma obsessão de estudiosos: sempre tentamos agrupar objetos em classes, de acordo com propriedades comuns a estes. Uma propriedade de grande interesse é a *regularidade*. Mas o que é regularidade? O uso cotidiano dessa palavra remete à uma repetição de alguma característica. Por exemplo, se afirmamos que os períodos chuvosos se distribuem regularmente ao longo do ano em certa região, estamos passando a ideia de que é possível dividir o ano em unidades de tempo menores, de mesma duração, de tal forma que em cada tal unidade a quantidade e intensidade das chuvas que ocorreram são iguais (ou pelo menos aproximadamente iguais). Sabemos que não é o caso em nossa região (Sul do Brasil): chove muito mais no verão do que no outono, por exemplo. Daí dizemos que a distribuição é *irregular*.

Uma ideia semelhante é aplicada aos polígonos. Os elementos básicos de um polígono são seus lados e seus ângulos. Desta forma,a definição natural é que o polígono é regular quando todos os lados têm o mesmo comprimento e todos os ângulos são congruentes. Passando aos poliedros, que podem ser construídos pela colagem de polígonos, podemos seguir uma ideia semelhante. A primeira exigência é que as faces sejam regulares e iguais entre si. A segunda vem da maneira que unimos tais faces para formar a fronteira do sólido. Podemos por exemplo exigir que todos os ângulos entre essas faces são iguais, ou que todas as faces são coladas de maneira a formar "bicos"iguais. Veremos nesse trabalho que essas exigências são equivalentes, e que também existem outras formas de garantir a tão procurada regularidade. Iremos estender o conceito de poliedros, permitindo que suas faces se encontrem em regiões distintas dos vértices e arestas, para incluir uma bela classe de sólidos chamada de *poliedros estrelados*, dentro da qual os regulares são conhecidos como sólidos de *Kepler-Poinsot*. Vamos também considerar sólidos nas quais a condição de as faces serem iguais não é imposta, obtendo uma interessante classe de sólidos chamados *semirregulares* (os arquimedianos).

Nessa dissertação, o estudo de cada uma dessas classes de sólidos é feito seguindo um mesmo roteiro. Primeiro, cada classe é apresentada sob uma perspectiva histórica. Depois, apresentamos as características que determinam cada classe. Por fim, mostramos também sob uma perspectiva histórica, que cada uma dessas classes tem um número finito e bem determinado de sólidos. A referência básica é o livro [2].

CAPÍTULO 1

UM PANORAMA HISTÓRICO DOS POLIEDROS

Segundo [3] não se sabe ao certo em que circunstancias históricas começou a se desenvolver o interesse pelos poliedros, conhecidos como sólidos de faces planas. Matematicamente existem fontes chinesas, babilônicas e egípcias contendo resoluções de problemas. Encontram-se vários problemas relacionados ao declive de faces de pirâmides no *Papiro de Rhind*. O declive de pirâmides era essencial para os construtores, e na realidade os valores concretos referidos nesses problemas são aproximadamente iguais aos declives das três pirâmides de Gizeth. A fórmula do tronco de pirâmide de base quadrada é apresentada no *Papiro de Moscovo*, embora nenhuma fonte egípcia apresenta a fórmula do volume de pirâmide. Não se sabe ao certo como os egípcios chegaram a tal fórmula. No texto que acompanha a figura 1.1 e os cálculos é dito (ver [3]):

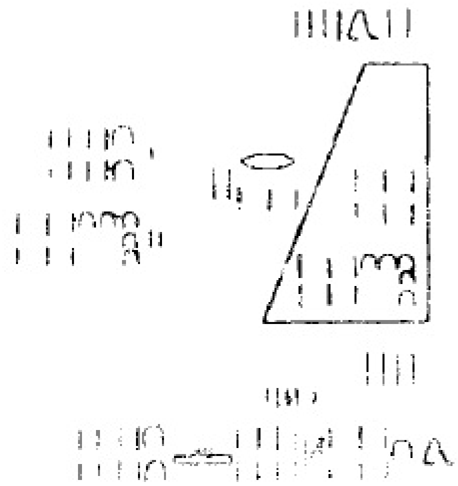


Figura 1.1: Extracto do Papiro de Moscovo com a resolução do problema do cálculo do volume do tronco de pirâmide

Fonte: `https://bit.ly/2jRomjo`

Se te é posto o problema, um tronco de pirâmide tem 6 cúbitos de altura, 4 cúbitos de base, por 2 cúbitos no topo.

Calcula com o 4, quadrando. Resultado 16.

Calcula 2 vezes 4. Resultado 8.

Calcula com o 2, quadrando. Resultado 4.

Adiciona este 16 com este 8 e com este 4. Resultado 28.

Calcula $\frac{1}{3}$ de 6. Resultado 2.

Calcula com o 28, vezes 2. Resultado 56.

É 56. Encontraste o resultado certo.

A fórmula descrita no texto acima, nos tempos atuais, é dada por

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

onde h é a altura da pirâmide, e a e b são os comprimentos dos lados das bases dos quadradas do tronco da pirâmide.

Tal fórmula aparece nos *Nove Capítulos da Arte Matemática (Jiuzhang Suanshu)* juntamente com a fórmula do volume da pirâmide. Em tabletes babilônicos também contavam com tais fórmulas e também fórmulas de outros sólidos, algumas fórmulas corretas e outras apenas aproximadas.

Todos estes documentos mostram o interesse natural pelas formas poliédricas.

Os matemáticos gregos retomaram a questão do volume da pirâmide. No livro *Método*, Arquimedes afirma que o primeiro a enunciar que o volume de um cone é $\frac{1}{3}$ do volume de um cilindro de mesma base e altura e também que o volume de uma pirâmide é $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma de mesma base e altura foi Demócrito. Arquimedes, atribui as demonstrações destas duas propriedades a Eudóxio, apoiando-se no método da exaustão (ver [3]).

CAPÍTULO 2

REGULARIDADE EM POLIEDROS CONVEXOS

Neste capítulo começamos um estudo dos poliedros. Assumiremos que o leitor tem familiaridade com polígonos, polígonos regulares e suas principais propriedades, que serão utilizadas livremente.

2.1 Poliedros

Desde os primeiros anos de nossa vida, pelo menos de nossa vida escolar, temos contato com poliedros. A primeira e mais intuitiva apresentação desses para nós é que poliedros são objetos geométricos de três dimensões construídos à partir de faces poligonais. As propriedades de poliedros fascinam matemáticos há milhares de anos, e para demonstrá-las com todo o rigor que a matemática exige é crucial termos uma definição precisa do termo. Por muitos séculos matemáticos operaram com poliedros usando definições que dão a ideia de que "você reconhecerá um poliedro quando vir um". Kepler, por exemplo, definia poliedros como figuras tridimensionais obtidas colando polígonos regulares ou losangos de maneira que eles formem ângulos sólidos, sem deixar espaços entre si (ver [2], p. 150). A demonstração de Euler de sua famosa fórmula $V - A + F = 2$, por volta de 1750, não satisfaz o rigor matemático atual, por carências de definições precisas, e uma demonstração rigorosa desta fórmula só foi feita por Legendre, aproximadamente 40 anos depois (ver [6], p. 67).

Para darmos uma definição rigorosa de poliedros, precisamos de algumas noções primitiva, isto é, conceitos que não podemos definir mas que se assume serem conhecidos.

I. Sólido Geométrico;

II. Interior de sólido geométrico;

III. Fronteira de sólido geométrico.

Vejamos agora as definições básicas. Num primeiro momento faremos a distinção entre o polígono, que será considerada como a figura formada somente pelos vértices e arestas e a *região poligonal*, que é o polígono com seu interior.

Definição 2.1. (Figura Poliédrica) *É a reunião finita de polígonos planos tais que:*

i. A interseção de quaisquer polígonos ou é vazia, ou é um vértice, ou é um dos lados dos polígonos;

ii. Dois polígonos contendo um lado em comum não estão no mesmo plano.

Denomina-se os vértices dos polígonos por **vértices da figura** e os lados dos polígonos por **arestas da figura**.

Vejamos alguns exemplos de figuras poliédricas.

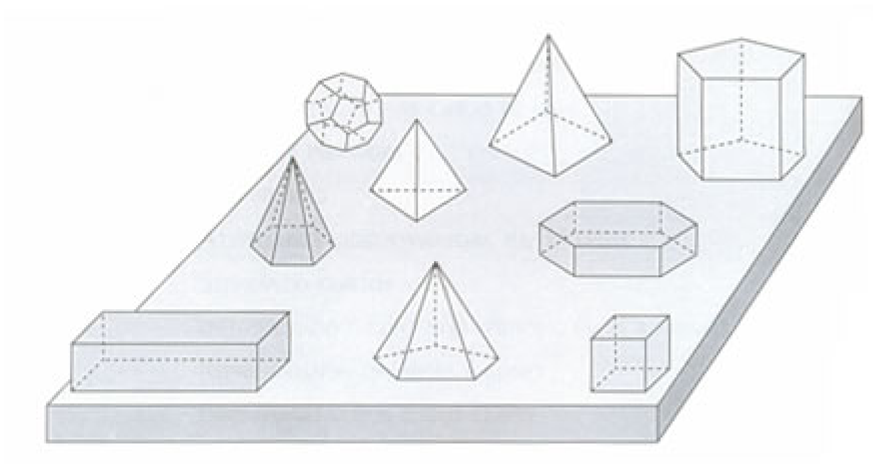


Figura 2.1: Exemplo de figuras poliédricas
Fonte: `https://bit.ly/2lP216H`

Definição 2.2. (Superfície Poliédrica) *É uma figura poliédrica reunida com as regiões poligonais (não necessariamente todas) determinadas pelos polígonos, denominadas por* ***faces*** *da superfície poliédrica, tais que:*

i. Cada aresta pertence a no máximo duas faces;

ii. Existindo arestas que pertençam a uma só face; elas determinam uma única poligonal fechada que denominaremos por ***contorno*** *.*

Definição 2.3. *Dizemos que uma superfície poliédrica é* ***convexa*** *se o plano de cada polígono deixa todos os outros polígonos em um mesmo semiespaço.*

Vale ressaltar que uma figura poliédrica determina polígono, enquanto que uma superfície poliédrica determina regiões poligonais.

Definição 2.4. (Poliedros) *É o sólido geométrico determinado por uma superfície poliédrica fechada com o seu interior. O poliedro será* ***convexo*** *se a superfície for convexa. Os pontos interiores à superfície poliédrica são chamados de* ***interior*** *do poliedro. A fronteira do poliedro é determinado pela superfície poliédrica.*

Um poliedro apresenta três elementos básicos, face, aresta e vértice. Observe a figura abaixo.

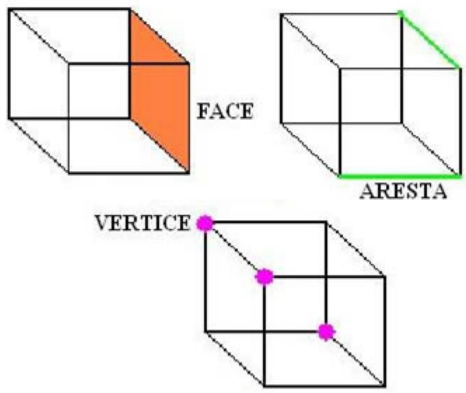


Figura 2.2: Elementos básicos do poliedro
Fonte: `https://bit.ly/2kqztA5`

A nomenclatura de alguns poliedros é dada conforme o número de faces ou conforme a superfície da base. Vejamos alguns exemplos.

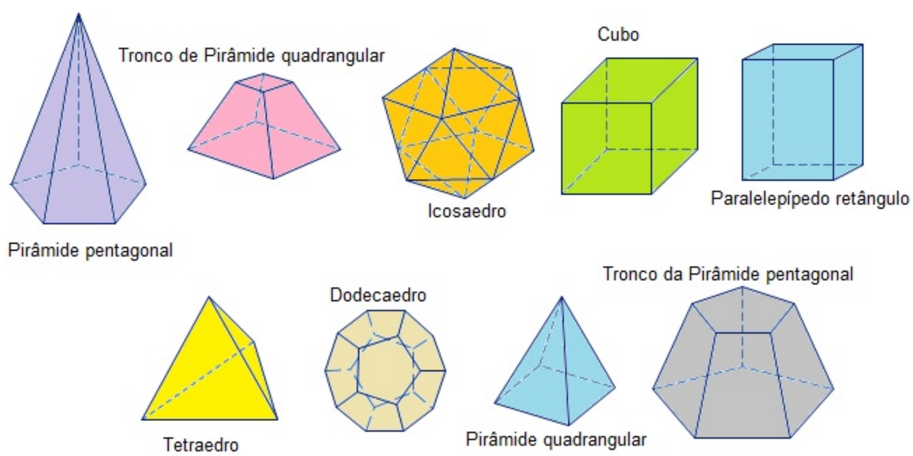
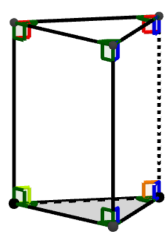


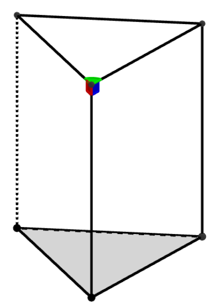
Figura 2.3: Nomenclatura de alguns poliedros
Fonte: `https://bit.ly/2lP1SAb`

No restante do texto, abandonaremos um pouco do formalismo das definições acima. Por exemplo, vamos nos referir às regiões poligonais simplesmente como polígonos.

Os ângulos dos polígonos que constituem o poliedro serão muitas vezes chamados de *ângulos planos*. Dois outros tipos de ângulos são importantes no poliedro. A região do poliedro próxima a um vértice é chamada um *ângulo sólido*. Observe que este é determinado por três ou mais ângulos planos com um vértice em comum. Além disso é intuitivamente claro que a soma dos ângulos rasos que compõem um ângulo sólido deve ser menor do que 360^o (observe que quando a medida é 360^o, os ângulos planos estão situados em um mesmo plano e assim não formam o ângulo sólido de um poliedro. Esse fato será utilizado em vários argumentos e pode ser provado de maneira rigorosa, mas somente enunciaremos o resultado.



(i) Exemplo de ângulos planos



(ii) Exemplo de ângulo sólido

Figura 2.4: Ângulos Planos e Ângulos Sólidos

Teorema 2.5. *A soma dos ângulos planos que formam um ângulo sólido em um poliedro é sempre menor do que* 360^o.

O ângulo entre duas faces adjacentes é chamado *ângulo diedral*. A medida desse ângulo é definida da seguinte maneira: considere um plano perpendicular às duas faces adjacentes e tome os segmentos de reta obtidos pela interseção deste plano com as faces. Esses segmentos determinam um ângulo plano, e a medida desse ângulo é definida como a medida do ângulo diedral.

Outro conceito que precisaremos no decorrer do texto é o de *figura de vértice*. Se O é um vértice do polígono, então a figura de vértice para o vértice O (ou relativa ao vértice O) é o polígono obtido ao ligar os pontos médios de todas as arestas que partem de O. Por exemplo, em um cubo a figura de vértice relativa à qualquer vértice é um triângulo.

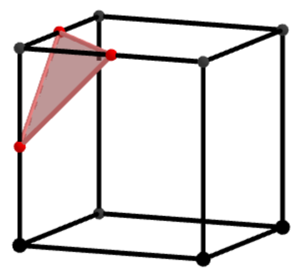


Figura 2.5: Exemplo de figura de vértice

2.2 Poliedros de Platão: partículas básicas e regularidade

Muito do que a humanidade produziu na matemática tem suas origens, ou pelo menos um estímulo para o avanço, a partir de problemas do mundo real. Conceitos geométricos elementares surgiram ligados à problemas de medição de terras, sistemas numéricos da necessidade de registrar e efetuar operações com quantidades e o cálculo diferencial se origina intimamente ligado com a física. Platão (348 a. c.) faz a construção dos hoje chamados *sólidos regulares* numa tentativa de descrever os elementos básicos que constituem o mundo. Naturalmente, sob a nossa moderna visão de mundo a discussão a seguir é bastante estranha, mas está na raiz dos trabalhos de Platão sobre tais sólidos. O filósofo grego Empedocle (490 a. c.) estabeleceu que os quatro elementos essenciais que fazem toda a estrutura do mundo são fogo, terra, água e ar. Platão sugere que tais elementos são corpos. Corpos são sólidos e sólidos são limitados por superfícies planas. Estas por fim são compostas por triângulos. Platão escolhe dois triângulos retângulos para começar a construção. Um é isósceles e outro é escaleno, com o comprimento da hipotenusa sendo o dobro do comprimento do cateto menor. Com seis desses triângulos escalenos ele constrói um triângulo equilátero, e com quatro triângulos isósceles um quadrado, como na figura abaixo.

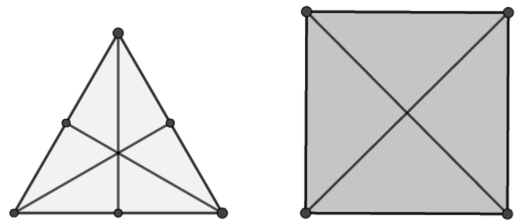


Figura 2.6: Triângulos básicos de Platão

Com esses polígonos Platão constrói os quatro primeiros sólidos: O tetraedro, formado por quatro triângulos equiláteros e tendo quatro ângulos sólidos, o octaedro, formado por oito triângulos equiláteros e tendo seis ângulos sólidos, o icosaedro, formado por vinte triângulos equiláteros e tendo doze ângulos sólidos e o cubo, formado por seis quadrados e tendo oito ângulos sólidos.

Platão associa a cada um desses quatro sólidos um elemento: Por ser o mais estável de todos ele associa o cubo à terra. O octaedro, que é melhor visualizado suspenso pelos ângulos opostos dá uma imagem de mobilidade e é associado ao ar. O tetraedro, por ter o menor número de faces, sendo mais "leve", e por ter os ângulos sólidos mais "afiados" é associado ao fogo. No outro extremo a água é associada ao icosaedro por este ter mais faces.

Resta um quinto sólido, o qual teria sido usado para "bordar as constelações em todo o céu"([2], p. 53). Este sólido é o dodecaedro e é formado por doze pentágonos regulares e conta com 20 ângulos sólidos. Esses pentágonos não podem ser construídos à partir dos triângulos básicos de Platão, mas é possível dividir cada um em 30 triângulos escalenos. O dodecaedro representaria as 12 casas do zodíaco com suas divisões de 30^o e os 12 meses do ano, divididos em seus 30 dias. Na figura abaixo, exibimos os sólidos de Platão.

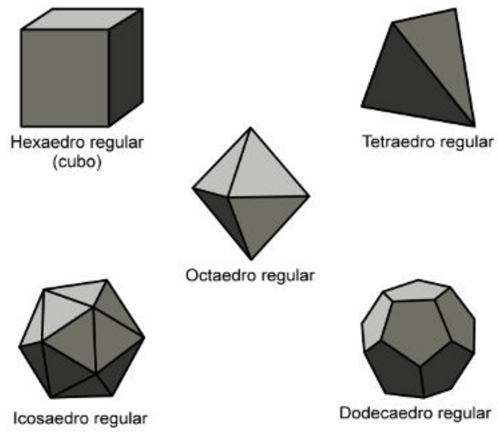


Figura 2.7: Sólidos de Platão
Fonte: `https://bit.ly/2ltDm7E`

Essas conexões soam estranho aos ouvidos atuais. O próprio Platão pontua que elas podem parecer frágeis e podem admitir outras interpretações, sobretudo por que *o número de elementos e se a Terra está em repouso são questões muito mais abertas à disputas do que é o número dessas figuras* (ver [2]).

Cabe também ressaltar que não foi efetivamente Platão que descobriu esses sólidos. Cubos e tetraedros são figuras geométricas tão simples que são conhecidas muito antes disso. Ornamentos usando o dodecaedro foram encontrados na Itália, datando de aproximadamente 500 a. c. (150 anos antes de Platão). Em uma nota no livro XIII do tratado *Elementos*, de Euclides (aproximadamente 300 a. c.), as construções do tetraedro e do icosaedro são atribuídas a Teatetus (417 a. c.). Aliás, na mesma nota é afirmado que os pitagóricos já consideravam os outros três sólidos. Decerto o fato de Platão tê-los primeiramente considerados como um conjunto os fizeram ser nomeados de *sólidos de Platão*.

Em sua obra, Euclides considera os cinco sólidos de Platão descrevendo o número e o tipo de faces de cada um deles. Ele então constrói cada um deles, mostrando que todos os seus vértices estão em uma esfera. Isto é feito mostrando que todos os vértices estão em semicírculos de mesmo diâmetro (Euclides utilizava uma definição de esfera diferente da usual, como a superfície obtida ao girar um semicírculo ao redor de seu diâmetro). Ele conclui seu trabalho fornecendo um ligação de natureza bem mais matemática entre esses sólidos do que as dadas por Platão: esses são os únicos sólidos que podem ser construídos usando polígonos regulares congruentes tais que os vértices estão sobre uma esfera (isto é, inscritíveis). A ideia dessa prova é bastante simples, baseada nos tipos de ângulos sólidos, e descrita no próximo parágrafo.

Primeiro, note que são necessários no mínimo três polígonos para determinar um ângulo sólido. Se usarmos triângulos regulares, podemos ter somente três, quatro ou cinco, já que para seis ou mais a soma dos ângulos planos é maior ou igual a 360^o. Estes são os ângulos sólidos do tetraedro, octaedro e do icosaedro. Se usarmos quadrados, estes devem ser em número de três, pela mesma razão anterior, obtendo o cubo. Usando pentágonos, novamente podemos tomar somente três, obtendo o dodecaedro. Por fim, não podemos usar polígonos regulares com 6 ou mais lados, pois a soma de seus ângulos planos excede 360^o.

A demonstração apresentada acima apresenta uma imprecisão. Nela se descreve os tipos de ângulos sólidos de cada poliedro, e não o poliedro em si. O fato de as faces serem polígonos regulares congruentes e todos os vértices do poliedro estarem sobre uma esfera implicam que todos os ângulos sólidos são congruentes (mostraremos isso no Teorema 2.9). No entanto, não poderiam existir outros poliedros convexos com os mesmos ângulos sólidos? Por exemplo será o icosaedro regular o único poliedro convexo formado somente por triângulos, de forma que em cada vértice se encontram 5 triângulos? A resposta para a última pergunta é sim, mas só pôde ser dada de maneira rigorosa em 1813 quando Cauchy mostrou seu Teorema da Rigidez: se dois poliedros convexos têm os mesmos tipos de faces e as adjacências entre elas são as mesmas, então eles são congruentes ([6], p. 48). Assumindo esse resultado, a demonstração de Euclides está completa e podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.6. *Os únicos poliedros cujas faces são polígonos regulares congruentes que podem ser inscritos em uma esfera são os poliedros de Platão.*

Com esse resultado podemos afirmar que os sólidos de Platão apresentam uma *regularidade*. Existem outra maneiras de definir poliedros regulares? Sim, e é o que estudaremos no restante deste capítulo.

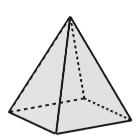
A condição mais natural é que as faces sejam polígonos regulares congruentes. No entanto, esta não é suficiente para caracterizar os sólidos descritos até aqui. A definição usual de poliedro regular utilizada nos livros didáticos do ensino fundamental e médio é a seguinte:

Definição 2.7. *Um poliedro convexo é denominado regular se:*

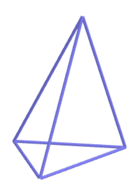
1. *Suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si.*

2. *De todos os seus vértices partem o mesmo número de arestas.*

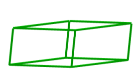
Por outro lado, os poliedros prismáticos e as pirâmides, são denominados, poliedros não regulares (ou, *irregulares*), por não satisfazerem as condições acima. Na figura abaixo exibiremos estes sólidos.



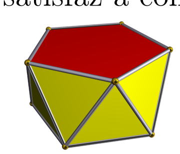
(i) Não satisfaz as condições (1) e (2)



(ii) Não satisfaz a condição (1)



(iii) Não satisfaz a condição (1)



(iv) Não satisfaz a condição (1)

Figura 2.8: Poliedros não regulares

Fonte: item (iv) disponível em `https://bit.ly/2k31GwU`

Mostraremos que os poliedros regulares são exatamente os sólidos de Platão. Para uma demonstração que não envolva uma vez mais o Teorema da Rigidez, precisaremos da famosa Fórmula de Euler, a qual afirma que se denotarmos por V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces, de um poliedro convexo, então

$$V - A + F = 2.$$

Esboçaremos uma interessante demonstração para a fórmula de Euler, adaptada de [1]. Para isso, precisaremos da ideia de *grafo*, que será dada de maneira bastante informal.

Um *grafo* pode ser visto como um conjunto de pontos, chamados vértices, alguns ou todos conectados por linhas, chamadas arestas, como na figura abaixo.

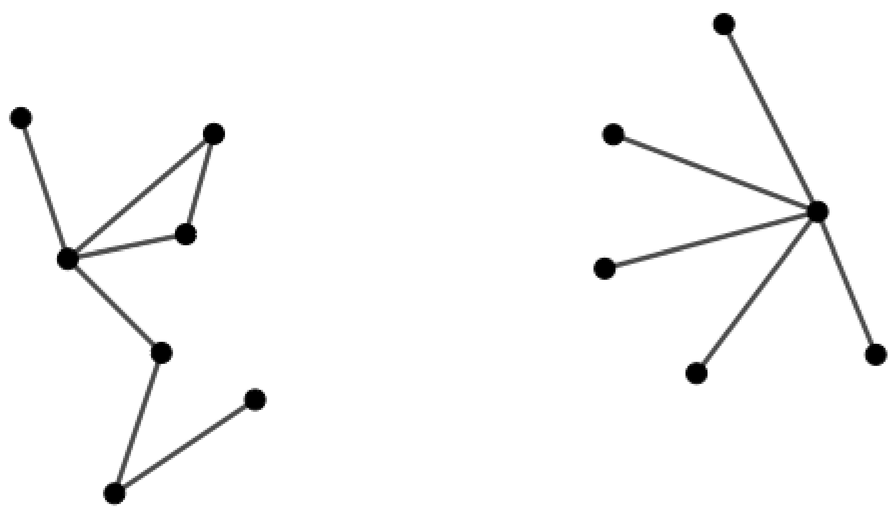


Figura 2.9: Exemplos de Grafos

Uma sequência de arestas que liga dois vértices é chamado de *caminho*. Quando quaisquer dois vértices são conectados por algum caminho, o grafo é dito ser *conexo*. Um *caminho fechado* ou *circuito* é um caminho que começa e termina no mesmo ponto. Quando o grafo não possui circuitos, ele é chamado de *árvore*. Se A denota o número de arestas e V o número de vértices de uma árvore conexa então $A = V - 1$.

É fácil verificar esse fato com um argumento indutivo sobre V. De fato, começando com dois vértices podemos ter somente uma aresta e a relação é válida. Cada novo vértice adicionado deve ser conectado a um único vértice existente por uma e somente uma aresta e assim a relação é mantida.

Podemos associar um grafo a um poliedro, representando seus vértices no plano e conectando-os com arestas, com as mesmas ligações existentes no poliedro. A figura resultante divide o plano em regiões, que serão denominadas faces. A região exterior ao grafo, que não é limitada pelas arestas, também será considerada uma face. A esse conjunto de vértices, arestas e faces daremos o nome de *mapa*.

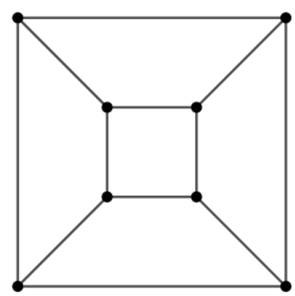


Figura 2.10: O mapa relativo a um cubo

Dado um mapa, definimos seu *mapa dual* como o mapa construído da seguinte maneira: coloca-se um vértice no interior de cada face no mapa original e ligue-os de maneira que cada aresta do dual intercepte uma, e somente uma, aresta do mapa original e que cada face do dual contenha em seu interior uma, e somente uma, aresta do mapa original. Com esta construção, se denotarmos por V, A e F os números vértices, arestas e faces do mapa original e por V', A' e F' os correspondentes no mapa dual então $F' = V$, $A' = A$ e $V' = F$.

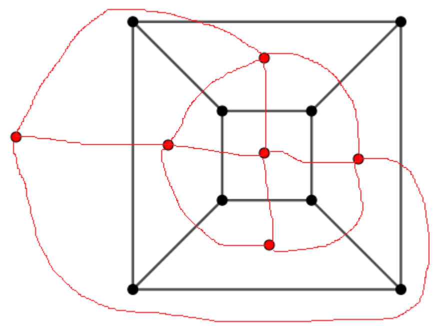


Figura 2.11: Um mapa e seu dual, representado pelas arestas em vermelho

Para demonstrar a fórmula de Euler, considere um mapa obtido a partir de um poliedro com V vértices, A arestas e F faces. Desse mapa, construa uma árvore Γ formada pelos V vértices e por quaisquer $V-1$ arestas quaisquer, desconsiderando as arestas restantes. Tome agora as arestas do grafo dual correspondentes àquelas que foram desconsideradas. Essas arestas do dual, juntamente com os vértices do dual, formam um novo grafo Γ'. Cada aresta de Γ' corta uma das arestas do mapa original que foi desconsiderada para a construção de Γ. Temos que Γ' é conexo, pois só não conseguiríamos conectar dois vértices do dual por algum caminho se um desses vértices fosse cercado por um conjunto de arestas da árvore tomada inicialmente, o que não é possível pois árvores não podem ter circuitos. Agora, Γ' também não tem circuitos, pois se tivesse então um dos vértices da árvore original estaria desconectado dos demais (novamente, lembramos que arestas do mapa original e do dual se cruzam). Portanto, Γ' também é uma árvore conexa. Por construção, Γ' tem F vértices e assim $F-1$ arestas. Além disso, a soma do número de arestas de Γ com o número de arestas de Γ' é A, isto é,

$$(V-1)+(F-1)=A,$$

de onde segue a fórmula de Euler.

Com o auxílio da fórmula de Euler, podemos mostrar que os poliedros regulares como definidos acima são exatamente os sólidos de Platão.

Teorema 2.8. *Todo poliedro convexo regular é um tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro ou icosaedro.*

Demonstração: Seja n o número de lados de cada face e seja p o número de arestas que concorrem em cada vértice. Temos então: $2A = nF = pV$, ou $A = \frac{nF}{2}$ e $V = \frac{nF}{p}$. Substituindo na relação de Euler, obtemos:

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = \frac{2nF - pnF + 2pF}{2p} = 2.$$

Logo, $2nF - pnF + 2pF = 4p$, o que implica em $nF(2-p) = 4p - 2pF$. Segue daí que

$$F(2-p) = \frac{4p - 2pF}{n} \Rightarrow 2F - pF = \frac{4p}{n} - \frac{2pF}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{2pF}{n} - pF = \frac{4p}{n} - 2F \Rightarrow \frac{2pF - 4p}{n} = pF - 2F$$

$$\Rightarrow \frac{2p(F-2)}{n} = F(p-2) \Rightarrow F - 2 = \frac{F(p-2)}{2p}n$$

$$\Rightarrow F = \frac{F(p-2)}{2p}n + 2 \Rightarrow F = \frac{F(p-2)n + 4p}{2p}$$

$$\Rightarrow 2pF = F(p-2)n + 4p \Rightarrow 2pF = Fpn - 2Fn + 4p$$

$$2pF - Fpn + 2Fn = 4p \Rightarrow F(2p + 2n - pn) = 4p$$

$$\Rightarrow F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

Como devemos ter $2p + 2n - pn > 0$, temos $\dfrac{2n}{n-2} > p$.

Como $p \geq 3$, chegamos a $n < 6$. Se $n = 3$, então

$$F = \frac{4p}{6-p}.$$

Atribuindo os possíveis valores de p, obtemos os valores de F correspondentes:

$$\begin{cases} p = 3 & \Rightarrow F = 4 & \text{(tetraedro)} \\ p = 4 & \Rightarrow F = 8 & \text{(octaedro)} \\ p = 5 & \Rightarrow F = 20 & \text{(icosaedro)} \end{cases}$$

Se $n = 4$, então

$$\Rightarrow F = \frac{2p}{4-p}.$$

Daí, só podemos ter $p = 3$ e $F = 6$ (cubo). Por fim, se $n = 5$ então

$$F = \frac{4p}{10-3p}.$$

Novamente, só podemos ter $p = 3$, obtendo $F = 12$ (dodecaedro). □

Combinando o resultado anterior com a caracterização dos sólidos platônicos dados por Euclides, concluímos que, sob a hipótese de as faces do poliedro serem polígonos regulares congruentes, ser inscritível e ter o mesmo número de arestas partindo de cada vértice são condições de regularidade equivalentes. Existem outras condições, que elencamos no teorema abaixo, adaptado de [2].

Teorema 2.9. *Seja P um poliedro convexo cujas faces são polígonos congruentes e regulares. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *Todos os vértices estão em uma esfera.*

2. *Todos os ângulos diedrais são iguais.*

3. *Todas as figuras de vértice são polígonos regulares.*

4. *Todos os ângulos sólidos são congruentes.*

5. *De todos os vértices partem o mesmo número de arestas.*

Demonstração: Vamos mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2) Se duas faces adjacentes de um poliedro têm seus vértices sobre a mesma esfera, então o ângulo diedral entre elas depende somente do raio dos círculos circunscritos das duas faces e do comprimento de seu lado comum. Como todas as faces do poliedro são polígonos regulares e congruentes, os raios de tais círculos e comprimentos dos lados são sempre idênticos. Logo, todos os ângulos diedrais têm mesma medida.

(2) $\Rightarrow$ (3) Considere um vértice O do poliedro e sejam V, V_1 e V_2 vértices da figura de vértice relativa a O tais que V_1, V e V_2 sejam vértices consecutivos dessa figura. Por definição, os segmentos OV, OV_1 OV_2 têm mesma medida. Sejam α e β os planos que contém O, V e V_1 e O, V e V_2, respectivamente. Como $V\hat{O}V_1$ e $V\hat{O}V_2$ são ângulos das faces do poliedro, eles são iguais. Assim, o triângulo OVV_1 no plano α é congruente ao triângulo OVV_2 no plano β, de onde se conclui que $\overline{VV_1} = \overline{VV_2}$. Aplicando o mesmo argumento a todos os vértices dessa figura de vértice, concluímos que tal figura é equilátera. Considere agora o plano γ que passa por V_1 e V_2 e é perpendicular à reta r que passa por O e V e seja $X = r \cap \gamma$. Então, $V_1\hat{X}V_2$ é exatamente o ângulo do diedro. Fazendo a mesma construção para todas as ternas Y_1 Y, Y_2 (que desempenham o papel de V_1, V e V_2, respectivamente) dessa figura de vértice se vê que, como os ângulos diedrais são todos congruentes, então os segmentos da forma Y_1Y_2 também o são. Logo, os triângulos da forma Y_1YY_2 são congruentes entre si. Mas os ângulos da forma $Y_1\hat{Y}Y_2$ são exatamente os ângulos da figura de vértice em consideração. Portanto, tal figura é também equiangular. Por definição, segue que ela é regular. Observe que revertendo esse argumento prova-se que se as

figuras de vértice são regulares então os ângulos diedrais são iguais.

(3) $\Rightarrow$ (4) A figura de vértice corta um ângulo sólido de um poliedro. Se as figuras de vértice são regulares, então os ângulos sólidos formam pirâmides retas, já que as arestas laterais destas pirâmides têm a metade da medida das arestas do poliedro e assim são congruentes. Do que foi dito no final da demonstração da implicação anterior, como as figuras de vértice são regulares todos os ângulos diedrais são iguais. Assim, as bases de todas as pirâmides têm necessariamente o mesmo número de lados, implicando por fim que os ângulos sólidos são congruentes.

(4) $\Rightarrow$ (5) Se todos os ângulos sólidos são congruentes, então de cada vértice do poliedro deve partir o mesmo número de arestas.

(5) $\Rightarrow$ (1) Conforme vimos no Teorema 2.8, os poliedros cujas faces são poligonos regulares congruentes e que satisfazem a propriedade (5) são exatamente os mesmos que são inscritos na esfera, concluindo a demonstração.

□

CAPÍTULO 3

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Neste capítulo vamos tratar de outra classe de poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares mas, nesse caso, não necessariamente congruentes. Estes são os sólidos de Arquimedes, que também tem uma certa regularidade: todos os ângulos sólidos são congruentes. Tais sólidos são também chamados atualmente de *semirregulares*

3.1 Descrição dos poliedros arquimedianos

Em sua obra "Coleções Matemáticas", o matemático grego Pappus (290 d.c.) atribui a Arquimedes a descoberta de 13 poliedros formados por polígonos regulares, mas não congruentes entre si. Em sua obra, Pappus descreve cada um destes poliedros, listando os tipos e número de faces de cada um.

Alguns desses poliedros foram descobertos e redescobertos várias vezes. Durante a renascença, para variar um pouco as suas construções, artistas retiravam pedaços dos ângulos sólidos dos poliedros regulares, obtendo os sólidos de Arquimedes. O processo de fazer esses cortes de maneira simétrica é conhecido como *truncamento*. Existem 4 operações com poliedros que permitem obter os poliedros arquimedianos a partir dos sólidos de Platão:

1. Truncamento do tipo 1: É feito um corte nos pontos médios das arestas que se encontram em um mesmo vértice.

2. Truncamento do tipo 2: É feito um corte de forma que a face do novo poliedro seja um polígono regular com o dobro do número de lados da face do poliedro original.

3. Expansão: As faces são afastadas paralelamente, de forma que os espaços vazios entre as arestas possam ser preenchidos com polígonos regulares.

4. Snubificação: As faces são afastadas paralelamente e rotacionadas em 45^o. Os espaços entre as arestas são preenchidos por polígonos regulares.

Na tabela a seguir apresentamos os 13 sólidos arquimedianos, os tipos e número de faces e o processo de construção que pode ser utilizado para obtê-lo. Observe que nos casos 8 e 9 o truncamento é feito sobre um sólido que já foi truncado. Usaremos as abreviações T1 e T2 para truncamentos do tipo 1 e 2, respectivamente, Ex para expansão e Sn para snubificação. Também usaremos somente as três primeiras letras do nome do polígono para designá-lo (tri para triângulo, qua para quadrado, dec para decágono, etc.) Mais detalhes podem ser obtidos no Capítulo 2 de [5]

	Nome	Faces	Construção
1	Cuboctaedro	8 tri, 6 qua	T1 no cubo
2	Icosidodecaedro	12 pen, 20 tri	T1 no dodecaedro
3	Tetraedro truncado	4 hex, 4 tri	T2 no tetraedro
4	Cubo truncado	6 oct, 4 tri	T2 no cubo
5	Octaedro truncado	8 hex, 6 qua	T2 no octaedro
6	Dodecaedro truncado	12 dec, 20 tri	T2 no dodecaedro
7	Icosaedro truncado	20 hex, 12 pen	T2 no icosaedro
8	Cuboctaedro truncado	6 oct, 8 hex, 12 qua	T2 no cuboctaedro
9	Icosidodecaedro truncado	20 hex, 12 dec, 30 qua	T2 no icosidodecaedro
10	Rombicuboctaedro	18 qua, 8 tri	Ex no cubo
11	Rombicosidodecaedro	12 pen, 30 qua, 20 tri	Ex no dodecaedro
12	Cubo snub	32 tri, 6 qua	Sn no cubo
13	Dodecaedro snub	80 tri, 12 pen	Sn no dodecaedro

Esses sólidos estão ilustrados nas figuras abaixo.

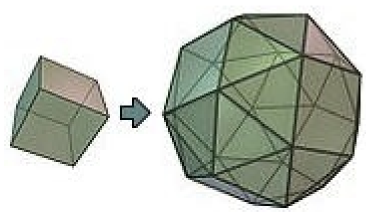


Figura 3.1: Da snubificação do cubo resulta o cubo snub.
Fonte: `https://bit.ly/2lTih6J`

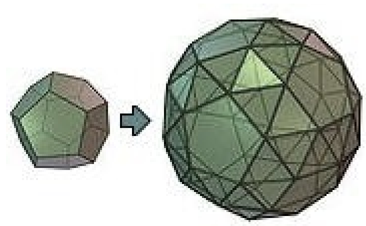
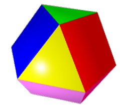


Figura 3.2: Da snubificação do dodecaedro resulta o dodecaedro snub.
Fonte: `https://bit.ly/2lTih6J`

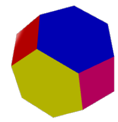
Na figura abaixo temos onze poliedros truncados de Arquimedes:

(i) Tetraedro Truncado

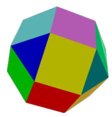


(ii) Cuboctaedro

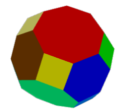
(iii) Cubo Truncado



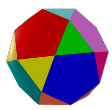
(iv) Octaedro truncado



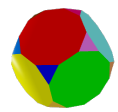
(v) Rombicuboctaedro



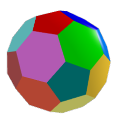
(vi) Cuboctaedro truncado



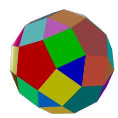
(vii) Icosidodecaedro



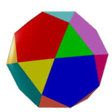
(viii) Dodecaedro truncado



(ix) Icosaedro truncado



(x) Rombicosidodecaedro



(xi) Icosidodecaedro truncado

Figura 3.3: Onze poliedros truncados de Arquimedes

Fonte: `https://bit.ly/2MFFoLc`

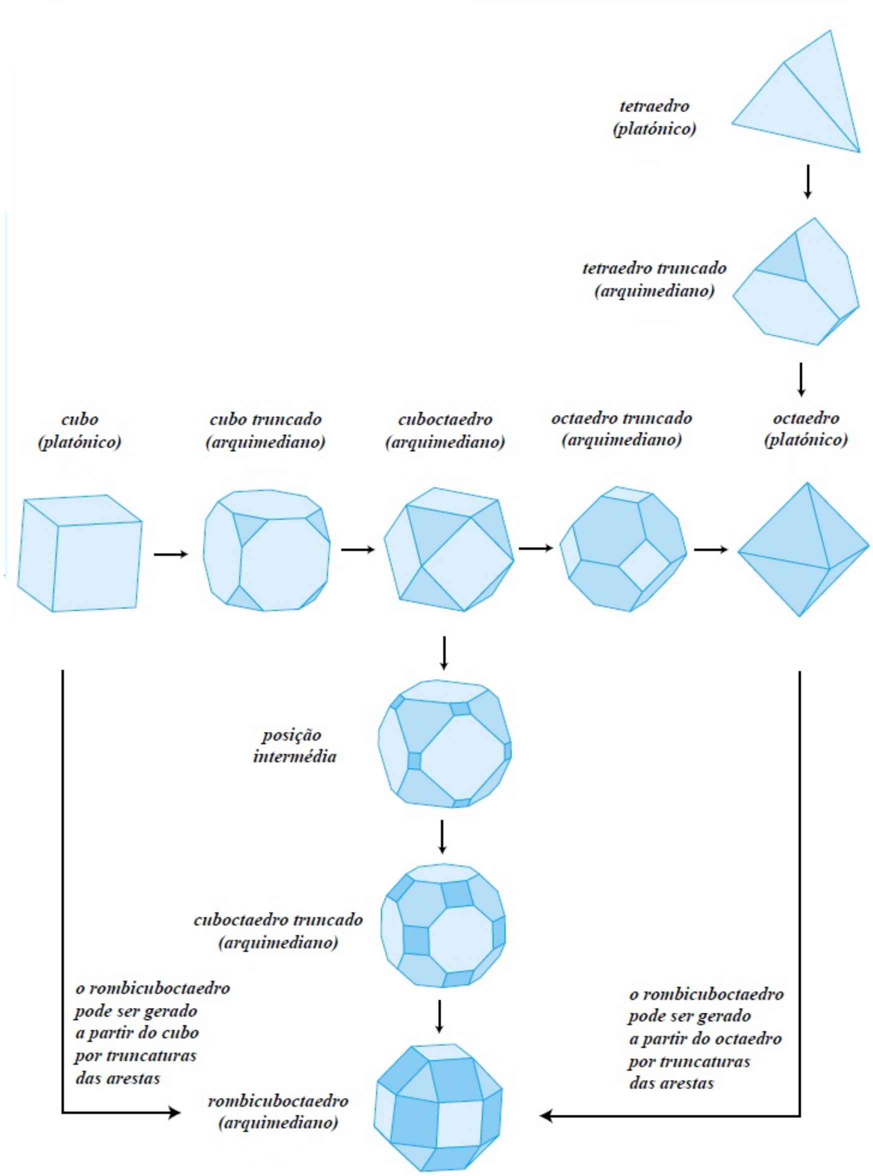


Figura 3.4: Formação de alguns sólidos Arquimedianos
Fonte: `https://bit.ly/2jRomjo`

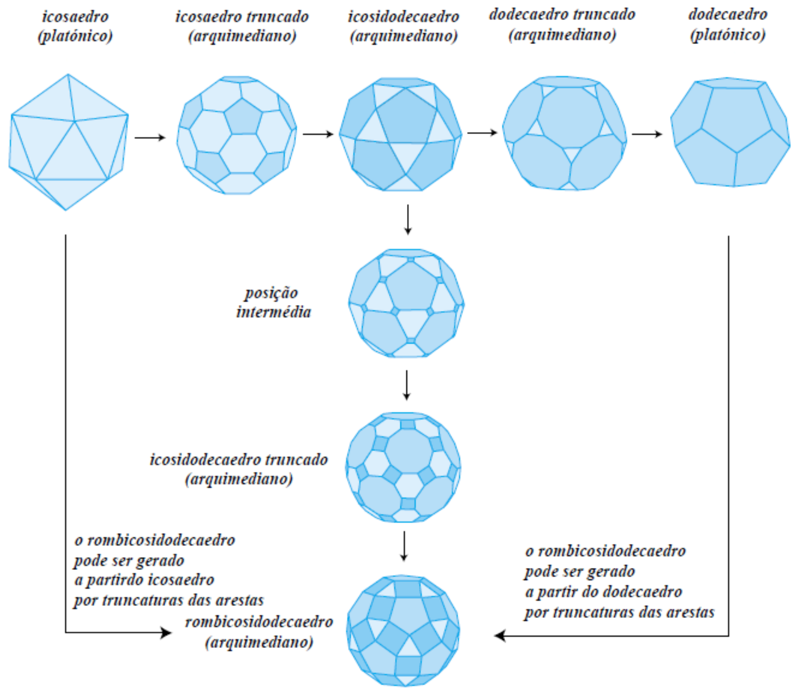


Figura 3.5: Formação de alguns sólidos Arquimedianos
Fonte: `https://bit.ly/2jRomjo`

3.2 Kepler e a Harmonia do Universo

Assim como Platão, Kepler também tentou utilizar os poliedros regulares para descrever o universo. Ele faz a construção de uma sequência de polígonos regulares inscritos em esferas, que por sua vez circunscrevem outras esferas, para justificar características de cada planeta conhecido na época no sistema solar: Em uma esfera que carrega Saturno ele inscreve um cubo e nesse cubo inscreve outra esfera que carrega Júpiter. Entre as esferas de Júpiter e Marte fica um tetraedro. Entre Marte e a Terra o dodecaedro, entre a Terra e Vênus o icosaedro, entre Vênus e Mercúrio o octaedro. A partir daí associa a cada planeta, exceto à Terra um dos sólidos platônicos e descreve características astrológicas dos planetas através dos sólidos. Como a astrologia é geocêntrica, a Terra não precisa ser associada a um sólido. Como no caso de Platão, a tentativa de usar sólidos para descrever a natureza dessa maneira é bastante sutil na nossa visão, mas provavelmente o motivou a estudar poliedros com muita profundidade.

Kepler define um polígono regular como o polígono que é equilátero e equiângulo, como é usual atualmente. Define também um polígono meio-regular como um polígono equilátero, e restringe sua atenção àqueles que possuem quatro lados, ou seja, só considera os losangos. Uma observação quanto a terminologia: em uma tradução correta, seria correto empregar a palavra semirregular no lugar de meio-regular. No entanto, a palavra semirregular é utilizada modernamente para indicar outra situação, incluindo os sólidos Arquimedianos. Assim, seguiremos a terminologia de [2] e continuaremos utilizando a palavra meio-regular. Para Kepler, um poliedro é a figura tridimensional construída colando polígonos regulares ou losangos de maneira que eles formem ângulos sólidos. Eventualmente podem ficar "lacunas" na construção, as quais devem ser preenchidas por polígonos do mesmo tipo que os que foram usados ou, pelo menos, por uma figura regular. Esse último tipo de poliedro ele chama de *semissólido*. Kepler usa a palavra *congruência* para se referir às figuras planas ou sólidas obtidas pela colagem de polígonos. Assim, um poliedro é as vezes chamado de uma congruência.

Seu maior interesse está no estudo do que ele chama de *poliedros perfeitos*: aqueles nos quais todos os vértices são *similares*, isto é, todos os ângulos sólidos são compostos pelos mesmos tipos e quantidades de faces. Ele os subdivide em duas classes: os *mais perfeitos*, nos quais todas as faces são congruentes, e os *perfeitos a um grau menor*, nos quais aparecem polígonos regulares de vários tipos. Cada uma dessas classes é ainda dividida em duas subclasses. Os mais perfeitos são chamados *regulares* quando todas as faces são polígonos regulares (ou seja, são os sólidos de Platão) e são meio-regulares quando as faces são losangos. Aqui vale observar os meio-regulares que Kepler considera não são necessariamente perfeitos, pois podem possuir ângulos sólidos diferentes. Ele faz a seguinte observação:

> *Não há razão pela qual não devemos chamar essa congruência de mais perfeita, pois sua imperfeição está nas faces e não é uma consequência de ser sólido mas, antes disso, uma característica acidental.*

Kepler coloca condições adicionais na definição de um sólido meio-regular. Além de as faces serem losangos congruentes, ele exige que não existam mais de dois tipos de ângulos sólidos, que seus vértices não estejam distribuídos em mais do que duas esferas de mesmo centro e que o número de ângulos sólidos de cada tipo seja o mesmo que o número de ângulos sólidos de um dos sólidos regulares. Com todas essas restrições, ele tenta provar que existem somente dois sólidos meio-regulares, que ele mesmo havia descoberto anteriormente: o dodecaedro rômbico e o triacontaedro rômbico, com 12 e 30 faces, respectivamente.

Aparentemente, Kepler listou várias propriedades desses dois sólidos, na esperança de que elas seriam suficientes para caracterizar essa classe de sólidos. Na verdade, existem outros 3 sólidos convexos cujas faces são losangos congruentes. Um deles é o romboedro, formado por 6 losangos e excluido por Kepler por violar a última condição imposta na definição dele. Um segundo é o icosaedro rombico, descoberto por Evgraf Stephanovich Fedorov em 1885. O último é chamado dodecaedro rombico do segundo tipo, descoberto por Stanko Bilinski em 1960, quando ele fez uma exaustiva enumeração dos sólidos rômbicos.

Antes de discutir a classe dos sólidos perfeitos a um grau menor, vamos dar a definição de prismas e antiprismas, que estão incluídos nessa classe. Um prisma é um sólido formado por duas faces poligonais paralelas e congruentes, com as faces laterais sendo paralelogramos. Um antiprisma é também formado por poligonais paralelas e congruentes, mas as faces laterais são triângulos. Prismas e anti-prismas formam famílias infinitas de poliedros, que chamaremos conjuntamente de *prismáticos*.

Voltando aos sólidos perfeitos a um grau menor, Kepler os divide em duas classes: os arquimedianos e os prismáticos, que são chamados *imperfeitos* (uma vez mais a terminologia utilizada não é a ideal para os dias modernos). Ele faz uma enumeração completa dos sólidos perfeitos a um grau menor, estudando as possibilidades para os ângulos sólidos. Essa enumeração é facilitada pelos dois lemas a seguir. No primeiro é limitado o número de tipos de faces distintas que podem ser ligadas a um vértice.

Lema 3.1. *Se as faces de um poliedro regular são todos polígonos regulares, então no máximo três diferentes tipos de faces podem aparecer ao redor de um ângulo sólido.*

Demonstração: Os quatro polígonos regulares tendo os menores ângulos internos são o triângulo (60^o), o quadrado (90^o), o pentágono (108^o) e o hexágono (120^o). A soma total desses quatro ângulos é maior do que 360^o e assim esses 4 polígonos não podem estar todos presentes ao redor de um vértice. Como essa já é a menor soma possível, não podemos ter conjuntos de 4 ou mais polígonos regulares distintos ao redor de um vértice. □

Para o segundo lema, é necessário o conceito de *tipo* de um ângulo sólido, que é uma lista ordenada do número de lados das faces que circundam o vértice. Por exemplo se um ângulo sólido é determinado por 2 triângulos e dois quadrados de forma que nem os dois triângulos nem os dois quadrados sejam adjacente, seu tipo pode ser escrito como $(3, 4, 3, 4)$. Observe que não existe uma face privilegiada para começar a enumeração, então o mesmo tipo poderia ser escrito como $(4, 3, 4, 3)$. Se por outro lado tivermos os 2 triângulos adjacentes entre si (valendo consequentemente o mesmo para os quadrados), então o tipo do ângulo pode ser escrito como $(3, 3, 4, 4)$, $(4, 4, 3, 3)$ ou ainda $(3, 4, 4, 3)$. Essas configurações podem ser vistas nas figuras esquemáticas abaixo.

Figura 3.6: Representação de ângulos de tipos $(3, 4, 3, 4)$ e $(3, 3, 4, 4)$

Lema 3.2. *Um poliedro no qual todos os ângulos sólidos são cercados da mesma maneira não pode ter ângulos sólidos dos seguintes tipos.*

1. (a, b, c), *com* a *ímpar e* $b \neq c$
2. $(3, a, b, c)$, *com* $a \neq c$.

Demonstração:

1. Como todos os ângulos sólidos devem ser cercados da mesma maneira, temos que se $b \neq c$ então os b-ágonos e os c-ágonos devem alternar-se ao redor do a-ágono. Assim, a quantidade de b-ágonos e c-ágonos ao redor de do a-ágono devem ser iguais, o que é impossível se a é ímpar. Veja a ilustração no caso em que $a = 5$.

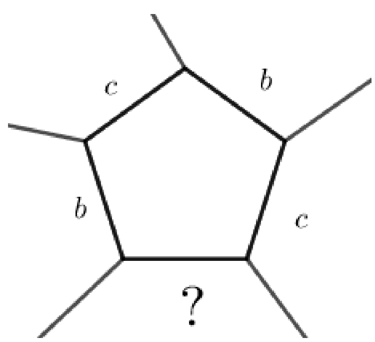


Figura 3.7: Caso em que $a = 5$

2. Nesse caso, olhamos as possíveis distribuições de faces ao redor do triângulo. Como os b-ágonos não são adjacentes ao triângulo, eles estão localizados como na figura abaixo.

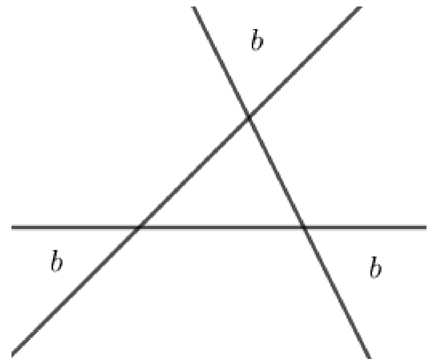


Figura 3.8: Distribuíção de faces ao redor do triângulo

Preenchendo as faces adjacentes ao triângulo, começando pela face à esquerda do mesmo, vemos que para que a sequência $(3, a, b, c)$ seja respeitada em cada vértice do triângulo devemos ter $a = c$ (veja a figura abaixo).

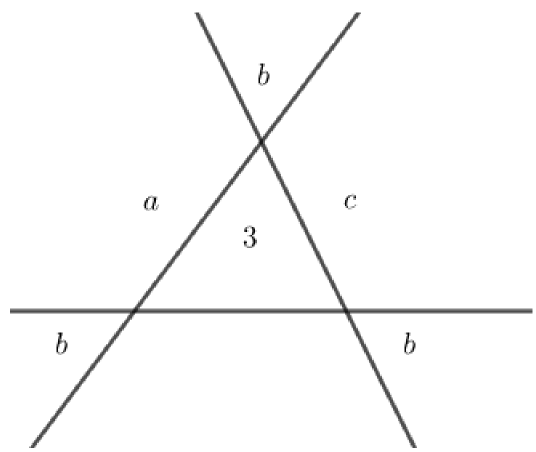


Figura 3.9: Preenchimento das faces adjacentes do triângulo

□

Com o auxílio desses lemas é possível caracterizar a classe dos sólidos regulares a um grau menor.

Teorema 3.3. *Suponha que um poliedro convexo seja formado por pelo menos dois tipos de faces regulares e que todos os ângulos sólidos tenham o mesmo tipo. Além das famílias de tipos* $(4, 4, n)$ *e* $(3, 3, 3, n)$*, existem treze tipos de ângulos sólidos* *que podem ocorrer. Essas possibilidades são realizadas pelas famílias de prismas, antiprismas e pelos sólidos arquimedianos, respectivamente.*

Demonstração: A demonstração é feita analisando todas as possibilidades para os ângulos sólidos. Em todos os casos, começamos usando o fato de que a soma dos ângulos das faces que formam um vértice sólido não pode ser maior ou igual a 360^o para limitar as possibilidades. Depois utilizamos o lema anterior para excluir os tipos que não podem ser realizados. Vamos tratar primeiro os casos em que existem exatamente dois tipos de faces.

1. **Triângulos e quadrados.** Suponha que existe exatamente um quadrilátero em cada ângulo sólido. Pela limitação da soma dos ângulos, podem existir no máximo quatro triângulos. Assim, poderíamos ter ângulos sólidos dos tipos $(3,3,3,3,4)$, $(3,3,3,4)$ ou $(3,3,4)$. O primeiro é realizado no cubo snub e o segundo pelo anti-prisma de base quadrada. Já o terceiro caso é excluído pelo item (ii) do lema anterior.

   Suponha agora que temos dois quadrados. Então podem existir no máximo dois triângulos. Se temos somente um triângulo, temos o tipo $(3,4,4)$, que é realizado pelo prisma de base triangular. Se temos dois triângulos, os tipos possíveis são $(3,3,4,4)$ e $(3,4,3,4)$. O primeiro é excluído pela parte (i) do lema anterior e o segundo corresponde ao cuboctaedro.

   Se existem mais do que dois quadrados, a única possibilidade é que o ângulo seja do tipo $(3,4,4,4)$, que é realizado no rombicuboctaedro.

2. **Triângulos e pentágonos.** Se existe um único pentágono, podemos ter no máximo 4 triângulos. Assim, os possíveis tipos são $(3,3,5)$, $(3,3,3,5)$ e $(3,3,3,3,5)$. O primeiro caso é excluído pelo lema anterior. O segundo e o terceiro são realizados no anti-prisma de base pentagonal e no dodecaedro snub, respectivamente.

Se existem dois pentágonos, podem um ou dois triângulos. No primeiro caso, temos o ângulo do tipo $(3, 5, 5)$, que é excluído pelo lema anterior. No segundo, os possíveis tipos são $(3, 3, 5, 5)$ e $(3, 5, 3, 5)$ o primeiro é excluído pelo lema e o segundo é realizado no icosidodecaedro truncado.

Por fim, não podemos ter três ou mais pentágonos, pois ao adicionarmos um triângulo a soma dos ângulos ultrapassa 360^o.

3. **Triângulos e hexágonos.** Se temos um único hexágono, podemos ter dois ou três triângulos, que fornecem ângulos dos tipos $(3, 3, 6)$ ou $(3, 3, 3, 6)$. O primeiro é excluído pelo lema e o segundo é realizado no anti-prisma hexagonal.

   Se temos dois hexágonos, podemos ter somente um triângulo, obtendo um ângulo do tipo $(3, 6, 6)$, que é realizado no tetraedro truncado. Como para 3 ou mais hexágonos a soma dos ângulos da face já é maior ou igual a 360^o, esse caso está concluído.

4. **Triângulos e n-ágonos, $n \geq 7$.** Se temos somente um n-ágono, poderíamos ter dois ou três triângulos, originando ângulos sólidos dos tipos $(3, 3, n)$ ou $(3, 3, 3, n)$. O primeiro é excluído pelo lema e o segundo é realizado por um anti-prisma.

   Para mais de um n-ágono, a única possibilidade é termos dois n-ágonos e somente um triângulo, originando ângulos sólidos do tipo $(n, 3, n)$. O caso em que n é ímpar é excluído pelo lema. Se n é par, então pela limitação da soma dos ângulos das faces só podemos ter $n = 8$ ou $n = 10$. Assim, só podem ocorrer os casos $(3, 8, 8)$ e $(3, 10, 10)$, que são realizados no cubo truncado e no dodecaedro truncado, respectivamente.

5. **Quadrados e n-ágonos, $n \geq 5$.** Se temos um único n-ágono, o ângulo sólido é do tipo $(4, 4, n)$, que é realizado em um prisma.

   Se temos dois n-ágonos, o único tipo possível é $(4, n, n)$. O caso em que n é ímpar é eliminado pelo lema anterior. Se $n \geq 8$, então a soma dos ângulos é maior ou igual a 360^o. Assim só podemos ter $n = 6$ e o ângulo sólido é realizado no octaedro truncado. Por fim, três ou mais n-ágonos junto com um quadrado não podem ocorrer, pois violaria a condição sobre a soma dos ângulos.

6. **Pentágonos e n-ágonos, $n \geq 6$.** Não podemos ter um único n-ágono, pois o caso $(5, 5, n)$ é eliminado pelo lema e se tivermos 3 ou mais pentágonos a soma dos ângulos das faces ultrapassa 360^o.

   Se tivermos dois n-ágonos, o ângulo deve ser do tipo $(5, n, n)$ com $n = 6$, que é realizado pelo icosaedro truncado. Mais do que dois n-ágonos não podem ocorrer pela condição da soma de ângulos.

Observe agora que não podemos ter outros ângulos sólidos formados por exatamente dois tipos de faces além das citadas acima. De fato, a menor soma dos ângulos possível ocorre no caso de 2 hexágonos e um heptágono e tal soma já excede 360^o. Passamos agora a analisar o caso em temos exatamente 3 tipos de faces formando o ângulo sólido.

1. **Triângulos, quadrados e n-ágonos,** $n \geq 5$. Assuma primeiro que temos exatamente um n-ágono. Se também temos somente um quadrado, então podemos ter um ou dois triângulos, que originam os ângulos sólidos dos tipos $(3, 4, n)$ e $(3, 3, 4, n)$. Mas ambos os casos são excluídos pelo lema. Se temos dois quadrados, então pela limitação da soma dos ângulos concluímos que só podemos ter mais um triângulo e que $n = 5$. Assim, os possíveis tipos são $(3, 4, 4, 5)$ e $(3, 4, 5, 4)$. O primeiro é eliminado pelo lema e o segundo é realizado no rombicosidodecaedro.

   Por fim, se temos dois ou maís n-ágonos e adicionarmos pelo menos um quadrado e pelo menos um triângulo a soma dos ângulos excede 360^o.

2. **Três tipos de faces, nenhuma das quais um triângulo.** Observe que não podemos ter quatro faces formando o ângulo sólido, pois a menor soma possível ocorre quando temos dois quadrados, um pentágono e um hexágono e essa soma já ultrapassa 360^o. Assim, o ângulo sólido é formado por exatamente 3 faces. Pela parte (i) do lema anterior, nenhuma delas pode ter um número ímpar de lados. A menor combinação possível é $(4, 6, 8)$, que é realizada pelo cuboctaedro truncado. A próxima combinação é $(4, 6, 10)$, realizada no icosidodecaedro truncado. Para todas as demais combinações, a soma dos ângulos das faces excede 360^o.

Finalmente, observe que pelo Lema 3.1 não podemos ter mais do que três tipos de faces distintas limitando o ângulo sólido. Portanto, exibimos todos os possíveis ângulos sólidos e os realizamos de acordo com o enunciado do teorema. □

CAPÍTULO 4

POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT

Polígonos estrelados foram estudados, sob o ponto de vista matemático, primeiro por Thomas Bradwardine (1290 d. C.) e posteriormente por Charles de Boulles (1470 d.C.). O matemático alemão Johannes Kepler também faz um estudo sobre esses polígonos em sua obra *Harmonices Mundis*, publicado em 1619. Como usual, ele define um polígono regular como a figura cujos lados são iguais e cujos ângulos são iguais. Ele distingue dois tipos de polígonos regulares: os *primários*, cujos lados não se cruzam, e os *estrelados*, que violam essa condição. Esses podem ser obtidos dos primários prolongando seus lados até que eles se cruzem. Ele inclui somente os polígonos estrelados que podem ser traçados por uma única linha, excluindo os que são compostos. Por exemplo, na figura abaixo o polígono obtido à partir do pentágono é considerado, enquanto que o obtido à partir do hexágono não. Observe que a figura da direita é na verdade obtida à partir de dois triângulos, sendo chamada uma figura composta.

(i) Prolongamento dos lados do pentágono (ii) Prolongamento dos lados do hexágono

Figura 4.1: Processo de estrelamento

Kepler então generalizou essa ideia para poliedros regulares. Nesse caso, ele considerou duas possibilidades: prolongar as arestas até que elas se cruzem ou prolongar as faces até que elas se cruzem. Os poliedros obtidos no primeiro caso foram denominados *echinus* (do Latim, ouriço-do-mar) e os do segundo *ostrea* (ostra, também do Latim). Quanto aos processos, o primeiro é chamado *aresta-estrelamento* e o segundo *face-estrelamento*.

Como os prolongamentos das arestas do tetraedro, do cubo e do octaedro não se cruzam novamente, a aresta-estrelamento não produz novos sólidos. Por outro lado, prolongando as arestas do dodecaedro e do icosaedro regulares, Kepler obteve dois novos sólidos. Esses sólidos também podem ser obtidos pelo segundo processo no dodecaedro de duas maneiras distintas e hoje são conhecidos como *o pequeno dodecaedro estrelado* e o *grande dodecaedro estrelado*. Na figura abaixo, temos os esboços produzidos pelo próprio Kepler, extraídas de [2].

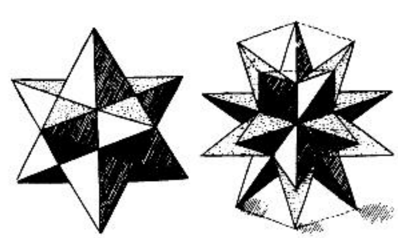


Figura 4.2: Esboços de Kepler

Um terceiro sólido foi obtido por Kepler aplicando o processo de face-estrelamento ao octaedro, obtendo o hoje chamado de *octaedro estrelado*.

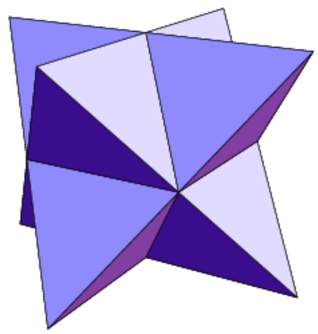


Figura 4.3: Octaedro Estrelado
Fonte: `https://bit.ly/2jYymHI`

Pensando no prolongamento das arestas, os dois primeiros sólidos podem ser mais facilmente visualizados como sendo obtidos à partir de poliedros convexos, colocando pirâmides de bases convenientes sobre as faces. Por exemplo, o pequeno dodecaedro estrelado é obtido adicionando uma pirâmide de base pentagonal em cada face. Mas um ponto de vista mais conveniente para este trabalho é o seguinte: pensando novamente no pequeno dodecaedro estrelado, as faces triangulares que o compõem estão organizados em conjuntos de 5 triângulos em um mesmo plano, cercando um pentágono regular. Os cinco triângulos e o pentágono formam um polígono estrelado regular, um pentagrama. Temos um total de doze pentagramas regulares, que se encontram nos vértices das pirâmides determinando ângulos sólidos congruentes. Algo semelhante ocorre com o grande dodecaedro estrelado: ele pode ser visto como sendo formado por 12 pentagramas regulares, unidos de maneira a formar vinte ângulos sólidos congruentes, todos com cercados por três faces. Do que foi discutido no Capítulo 2, esses dois sólidos não convexos se encaixam perfeitamente na categoria de regular. Eles só ainda não foram chamados de poliedros, pois para isso precisamos estender a definição dada no Capítulo 2.

Para fazer isso, observe que no início deste capítulo estendemos o conceito de polígono para incluir as figuras planas construídas com segmentos de reta que podem se intersectar em pontos que não sejam vértices. De qualquer forma, excluímos as figuras que são compostas. Com isso, incluímos algumas figuras estreladas como polígonos. Para poliedros o procedimento é semelhante. Definimos um *poliedro regular estrelado* como o sólido cujas faces são polígonos regulares, primários ou estrelados, todas congruentes entre si, no qual a interseção de duas faces pode ser um vértice comum as duas ou um segmento de reta distinto de uma aresta, e tal que em cada vértice concorrem o mesmo número de arestas. Por exemplo, ao olharmos o esboço de Kepler do pequeno dodecaedro estrelado, vemos que a face pentagonal horizontal é cortada por cinco outras faces, de forma que essas interseções determinam um pentágono. Exigimos ainda que o sólido não seja dado pela união de dois poliedros regulares. Observe que com essa restrição excluímos o octaedro estrelado, pois é dado pela união de dois octaedros de Platão.

Com a descoberta desses dois poliedros estrelados regulares, uma pergunta natural que surge é se existem outros. Kepler não aprofundou seus estudos nessa direção. Na verdade, ele nem mesmo se referiu a esses sólidos como regulares. Em 1809, o matemático francês Louis Poinsot retoma o estudo de poliedros estrelados. Após um estudo sobre polígonos estrelados e sobre convexidade, ele constrói um poliedro da seguinte maneira: considere um icosaedro regular. Ele pode ser dividido em duas pirâmides e um anti-prisma, todos com bases pentagonais. Assim, é possível inscrever pentágonos no icosaedro, dados por essas bases. Temos doze decomposições distintas, obtendo doze pentágonos. Dois desses pentágonos estão exibidos na figura abaixo (um em cinza e outro com as arestas mais destacadas).

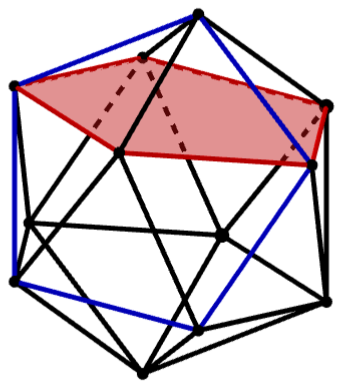


Figura 4.4: Pentágonos inscritos no icosaedro

Poinsot então considerou o poliedro estrelado que tem tais pentágonos como faces, chamado *grande dodecaedro*. Observe que seus vértices e arestas são os mesmos do icosaedro.

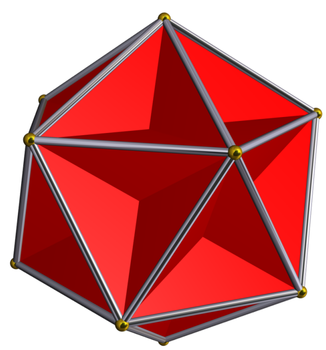


Figura 4.5: Grande Dodecaedro
Fonte: `https://bit.ly/2lOjeNI`

De uma maneira semelhante, Poinsot descobre um complexo quarto poliedro estrelado regular, o *grande icosaedro* da figura abaixo, formado por vinte faces triangulares.

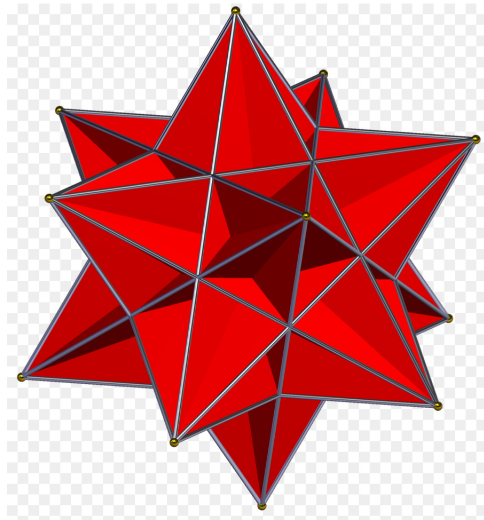


Figura 4.6: Grande Icosaedro
Fonte: `https://www.gratispng.com/png-cdylpx/`

Nas figuras abaixo, exibimos em conjunto os quatro poliedros estrelados visto até o momento, que são conhecidos como *poliedros de Kepler-Poinsot*. Na primeira, a região em tom destacado é a parte visível de cada face.

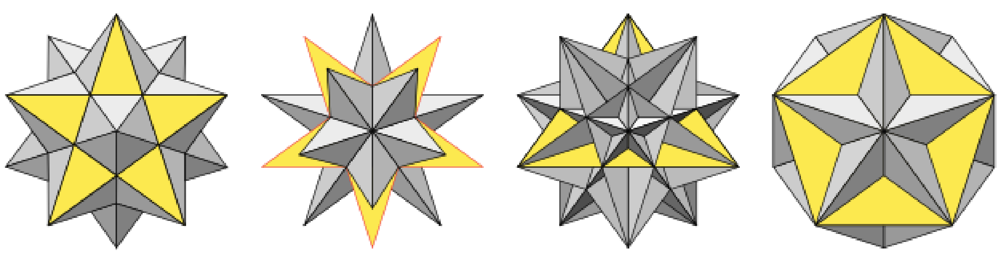


Figura 4.7: Visão das faces dos sólidos de Kepler-Poinsont
Fonte: `https://bit.ly/2luXeaB`

Nesta outra figura, uma construção das mesmas através do software *POV-ray*, uma ferramenta gratuita para construção de gráficos tridimensionais. *Destacamos que estas construções não são de nossa autoria e estão disponíveis no site http://www.povray.org.*

Figura 4.8: Poliedros de Kepler-Poinsot:
Fonte: `https://goo.gl/bnR4gj`

Conhecendo esses quatro poliedros estrelados regulares, Poinsot começou a pesquisar sobre quantos mais existem. Apesar de alguns avanços parciais, ele não conseguiu solucionar o problema. No entanto, a resposta foi dada pouco tempo depois, em 1812, pelo também matemático francês Augustin Louis Cauchy. Para isto, ele interpretou a regularidade em sólidos utilizando noções do que hoje chamamos de *simetria rotacional*, uma teoria que na época não estava completamente desenvolvida. A ideia intuitiva usada por Cauchy pode ser entendida com um exemplo. Tomando dois cubos de arestas congruentes, podemos escolher qualquer face de um para sobrepor com qualquer face do outro. Feito isso, podemos escolher um lado qualquer de cada face e sobrepor os cubos de tal forma que as faces e os lados escolhidos coincidam. Isso dá uma ideia dessa simetria: é possível rotacionar os sólidos regulares no espaço de várias maneiras, de forma que os conjuntos de pontos obtidos pela rotação sejam a figura original.

Daremos apenas o roteiro da demonstração de Cauchy de que existem apenas quatro poliedros estrelados regulares. Primeiramente, ele considerou o *núcleo convexo* de um poliedro estrelado, que é a região do espaço limitada pelos planos que contém suas faces. Por exemplo, para o pequeno dodecaedro estrelado o núcleo convexo é o dodecaedro de Platão. Cauchy mostrou que esses núcleos são poliedros de Platão. Para isso, é necessário o seguinte lema, que é uma consequência da relação de Euler.

Lema 4.1. *Se todas as faces de um poliedro convexo têm o mesmo número de lados, então tal número é 3, 4 ou 5.*

Demonstração: Denote por V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro. Podemos obter A contando o quantas arestas incidem em cada vértice, somando os resultados e dividindo por 2, pois cada aresta é contada duas vezes nesse processo. Como em cada vértice incidem pelo menos 3 arestas, concluímos que

$$2A \geq 3V. \tag{4.0.1}$$

Além disso, da relação de Euler temos

$$V + F = A + 2. \tag{4.0.2}$$

Multiplicando (4.0.2) por 3, obtemos $3V + 3F = 3A + 6$. Usando (4.0.1), concluímos que $2A + 3F \geq 3A + 6$, ou seja,

$$3F - A \geq 6.$$

Agora, denote por F_n o número de faces com n lados. Temos

$$F = F_3 + F_4 + \cdots + F_n + \cdots$$

e

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + \cdots nF_n \cdots .$$

Multiplicando a última desigualdade por 2 e substituindo pelas relações acima, obtemos

$$(6F_3 + 6F_4 + \cdots + 6F_n + \cdots) - (3F_3 + 4F_4 + \cdots + nF_n + \cdots) \geq 12,$$

ou ainda

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 - F_7 - \cdots - (n-6)F_n - \cdots \geq 12.$$

Desta forma, pelo menos um dos números F_3, F_4 ou F_5 deve ser não nulo. Com isso, concluímos todo poliedro convexo deve ter uma face com 3, 4 ou 5 lados. Se, como no enunciado do lema, todas as faces têm o mesmo número de lados, então tal número é 3, 4 ou 5. □

Voltamos agora ao esboço da prova de Cauchy. Ele considerou duas cópias de um mesmo poliedro estrelado, que naturalmente têm o mesmo núcleo convexo. Como qualquer face da primeira cópia pode ser sobreposta a qualquer face do segunda, segue que qualquer face do primeiro núcleo pode ser sobreposta a qualquer face do segundo. Desta forma, as faces do núcleo são congruentes entre si. Vamos denotar por p o número de lados dessas faces. Pelo lema anterior, $p < 6$. Como os ângulos diedrais do poliedro estrelado em consideração são todos iguais, segue que os ângulos diedrais de seu núcleo também o são. Resta mostrar que as faces do núcleo são polígonos regulares. Para isso, suponha que cada face do poliedro estrelado tenham n lados. Uma vez sobrepostas as cópias dos dois poliedros estrelados, podemos rotacionar uma face de um deles de n maneiras distintas mantendo a sobreposição.

Assim, a face correspondente no núcleo pode ser rotacionada de n maneiras distintas de forma a obter o mesmo polígono. Mas isso só é possível se p for múltiplo de n. Assim, $p = n$ ou $p \geq 6 = 2 \cdot 3$. Como já vimos que $p < 6$, concluímos que essa face tem n lados e pode ser rotacionada de n maneiras distintas sem alterar a figura. Logo, ela é regular, mostrando que o núcleo é um poliedro de Platão.

Desta forma, os poliedros estrelados regulares só podem ser obtidos através de prolongamento das faces dos poliedros regulares convexos. Cauchy então estudou todos os possíveis prolongamentos, conseguindo mostrar que somente o processo de face-estrelamento no dodecaedro e no icosaedro dão origem a poliedros estrelados regulares. Resumimos isso no seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Os únicos poliedros estrelados regulares são os poliedros de Kepler-Poinsot.*

Para finalizar esse trabalho, observamos que o teorema anterior juntamente com os resultados do Capítulo 2 no levam seguinte conclusão: Existem exatamente nove poliedros regulares: os cinco sólidos de Platão e os quatro poliedros de Kepler-Poinsot.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o que foi exposto neste trabalho, acreditamos que grande parte dos leitores possam aprofundar o seu conceito de regularidade em poliedros. Percebemos muitas vezes em livros didáticos que o adjetivo *regular* é acrescido à estruturas matemáticas de maneira um pouco mecânica, sem uma discussão do porquê essa estrutura merece tal adjetivo. Também apresentamos extensões do conceito de polígonos e poliedros, que raramente são vistas, mesmo no ensino superior, pelos nossos alunos. Por essas razões, acreditamos que nosso trabalho oferece subsídios aos professores do ensino médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] COXETER, Harold Scott MacDonald. **Regular Polytopes.** Londres: Methuen and Co, 1948.

[2] CROMWELL, Peter. **Polyhedra.** Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[3] CUNHA, Fernanda and RAPOSO, Maria Antonieta and ALMEIDA, Maria Dina Rego de and ALMEIDA, Maria Fátima P. de. **Poliedros.** Disponível em http://www.mat.uc.pt/ mat1131/Historias%20Geo.metria.pdf. Acessado em 27 de maio de 2019.

[4] GERÔNIMO,João Roberto; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria plana espacial:**um estudo axiomático. Maringá: Eduem, 2010.

[5] NEVES, José Ribamar de Souza. **Poliedros arquimedianos.** 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017.

[6] RICHESON, David. **Euler's gem.** Princeton: Princeton University Press, 2008.

[7] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria (Coleção PROFMAT)** SBM, 2013.

[8] CUJÓ, Silvana Realini. **Poliedros Regulares** Didactalia Disponível em https://didactalia.net/pt/comunidade/materialeducativo/recurso/poliedros-regulares/e963509a-df27-4562-860e-5148e7da0ce3. Acessado em 28 de maio de 2019.

[9] SILVA, Ederson Marcelino da and others. **Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o Sólido de Escher:** contribuíções para o ensino e aprendizagem de poliedros. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.

[10] LEMOS, Wellington Gonçalves and BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Recursos na internet e dobraduras para poliedros estrelados:** uma proposta para o trabalho no ensino médio. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, vol. 1, 2008.

[11] SARTOR, Nayara Longo. **O universo dos poliedros regulares**, 2013.