UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA

A VISUALIZAÇÃO COMO MODO DE PENSAR A MATEMÁTICA E COMPREENSÕES DE UMA PROFESSORA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

ALESSANDRA HENDI DOS SANTOS

MARINGÁ 2021

ALESSANDRA HENDI DOS SANTOS

A VISUALIZAÇÃO COMO MODO DE PENSAR A MATEMÁTICA E COMPREENSÕES DE UMA PROFESSORA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática. Linha de pesquisa: História, Epistemologia e Cultura da Ciência.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

Coorientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes

MARINGÁ 2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

Santos, Alessandra Hendi dos

S237v A visualização como modo de pensar a matemática e compreensões de uma professora dos anos finais do Ensino Fundamental / Alessandra Hendi dos Santos. -- Maringá, PR, 2021.

195 f.: il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco.

Coorientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes.

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2021.

1. Educação - Ensino da matemática. 2. Matemática - Ensino fundamental II. 3. Prática docente. 4. Matemática - Estudo e ensino . I. Franco, Valdeni Soliani, orient. II. Cifuentes, José Carlos, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. IV. Título.

CDD 23.ed. 510.7

Rosana de Souza Costa de Oliveira - 9/1366

ALESSANDRA HENDI DOS SANTOS

A visualização como modo de pensar a Matemática e compreensões de uma professora dos anos finais do Ensino Fundamental

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em *Ensino de Ciências e Matemática.*

BANCA EXAMINADORA

Franco
____
Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Ana Paula Canavarro
____
Profa. Dra. Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora – UE

____
Profa. Dra. Lucimar Donizete Gusmão
Secretaria de Estado da Educação do Paraná – SEED/PR

Trivizoli
____
Profa. Dra. Lucieli Maria Trivizoli da Silva
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Michel Corci Batista
____
Prof. Dr. Michel Corci Batista
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Maringá, 09 de dezembro de 2021.

Dedico este trabalho a minha família, meus amigos, meus alunos e professores que me inspiram a buscar mais perguntas do que respostas.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde, força e oportunidade de estar aqui, viver e permanecer neste intercâmbio de enriquecimento científico.

Agradeço a minha família, pelo incentivo apoio e compreensão nos momentos em que me fiz ausente.

A minha mãe, por me inspirar enquanto mulher e me ensinar a lutar pelos meus objetivos.

A minha amiga, Luciane Chyczy, que sempre me apoiou enquanto professora, pessoa e pesquisadora.

Aos amigos que a vida e a profissão me trouxeram, em especial ao Anderson, pela força nos momentos difíceis e por acreditar nos meus objetivos.

A professora e amiga Alessandra Ferreira Ramos, que abriu sua sala, dedicou seu tempo e com certeza enriqueceu o olhar para a prática docente.

A todos meus amigos dessa jornada acadêmica, em especial ao Diego e sua esposa Dai, que me acolheram em sua casa nas idas até Maringá.

Ao professor Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco pela oportunidade, paciência e dedicação.

Ao Prof. Dr. José Carlos Cifuentes por todos os ensinamentos, conversas, inquietações, paciência e por compartilhar de momentos tão importantes para meu crescimento pessoal e profissional.

Aos professores (as) da banca, pela dedicação, atenção e todas as contribuições para a melhoria deste trabalho.

A Secretaria Municipal de Educação de Curitiba, na figura da escola, que abriu o espaço para que pudesse realizar a pesquisa em campo.

E a todos os que contribuíram de alguma forma para que eu aqui chegasse, o meu muito obrigado.

Somos do Tamanho dos Nossos Sonhos.

(Fernando Pessoa)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objeto de estudo a visualização matemática e a visualização no ensino de matemática, a qual consistiu em compor um solo de investigação e reflexão sobre a epistemologia desse modo dinâmico de pensar a matemática. O trabalho foi organizado em duas partes, uma primeira parte teórica, visando a explicitação de compreensões sobre a visualização matemática, e uma segunda parte de caráter prático, em que se analisou a experiência docente de uma professora em relação a temática da visualização. Essas partes se aproximaram nas análises, em que a concepção de visualização construída direcionou o olhar para a prática docente e, concomitantemente, os exemplos e elementos observados na prática ilustraram, convergiram ou aprofundaram as discussões sobre a concepção construída. A metodologia utilizada foi de abordagem qualitativa e natureza exploratória, a partir da qual se apresenta o que há de característico e particular na situação docente analisada por meio de um estudo de caso. A questão emergente nesta pesquisa foi: como se compreende a visualização matemática na prática docente de uma professora dos anos finais do ensino fundamental? Para ajudar a responder essa questão, este estudo teve por base o contexto das aulas de matemática em uma turma de 7.º ano do ensino fundamental, com objetivo de investigar quais as compreensões que a professora de matemática regente dessa turma constrói, na sua experiência docente, sobre a visualização (muitas vezes inconsciente) e como esse modo de pensar se revela no processo de ensino e aprendizagem e no despertar para a sensibilidade matemática. A visualização foi tratada a partir da sua interpretação como forma de pensamento, um modo de conhecer, sendo aprimorada pela intuição e a imaginação, e aperfeiçoada nos processos de criatividade matemática. Um dos resultados desse estudo foi o de construir uma concepção de visualização. Partindo-se dela, foi possível encontrar elementos na prática docente da professora, inserida num contexto, que reforçaram a perspectiva da visualização como um processo dinâmico de pensamento e que se relaciona mais com a sensibilidade matemática do que com sua racionalidade. Outro resultado evidenciado pela pesquisa foi o das inquietações e reflexões suscitadas pela professora no decorrer das observações e entrevistas, provenientes do exercício constante de reconstruir para construir sua prática docente.

Palavras-chave: Visualização, Experiência Matemática, Pensamento Visual, Sensibilidade Matemática, Ensino e Aprendizagem de Matemática.

ABSTRACT

This research has as its object of study the mathematical visualization and visualization in math teaching, in which it proposes to compose a ground for investigation and reflection on the epistemology of this dynamic way of thinking about mathematics. The work is organized in two parts, a first theoretical part, aiming to explain understandings about mathematical visualization, and a second one of practical nature, where the teaching experience of a teacher in relation to the subject is analyzed. The methodology has a qualitative approach and an exploratory nature, which presents what is characteristic and particular in the teaching situation analyzed through a case study. The emerging question in this research is: how the mathematical visualization is understood in the teaching practice of a teacher in the final years of elementary school? To help answer this question, this study is based on the context of mathematics classes in a 7th grade elementary school class, aiming to investigate the understandings that the mathematic teacher in charge of this class builds, in her teaching experience, about visualization (often unconscious) and how this way of thinking reveals itself in the teaching and learning process and in awakening to mathematical sensitivity. Visualization will be treated from its interpretation as a way of thinking, a way of knowing, being improved by intuition and imagination, and perfected in the processes of mathematical creativity. One of the relevant results of this study will be to show that visualization in the field of mathematics is a dynamic thought process that is more related to mathematical sensitivity than to its rationality. Another result evidenced by the research was the concerns and reflections raised by the teacher during the observations and interviews, resulting from the constant exercise of rebuilding to build her teaching practice.

Keywords: Visualization, Mathematical Experience, Visual Thinking, Mathematical Sensitivity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas

MMC Mínimo Múltiplo Comum

OBMEP Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PME Psicologia em Educação Matemática

PMC Prefeitura Municipal de Curitiba

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO: COMPREENDER E VER

“Para ver não basta olhar” (Mario Dionísio)
“Visualizar não é apenas ver o visível, é tornar visível”
(José Carlos Cifuentes, parafraseando Paul Klee)

A visualização é considerada nesse estudo como um modo de pensar na matemática. Para isso, é desenhado um percurso de compreensões e reflexões sobre o tema. Porém, antes de adentrar nesse percurso, é importante levantar o seguinte questionamento: qual a importância de se pesquisar sobre a visualização matemática na educação matemática e na própria matemática? Para essa questão, algumas respostas podem ser apresentadas, mas talvez a que melhor representa todas elas é a de que a visualização se revela como um meio para a compreensão, descoberta e criação matemática, no mesmo espírito sugerido pelas epígrafes iniciais.

A visualização não é arbitrária. Ela se desenvolve a partir dos conhecimentos pré-existentes, por meio da intuição, analogia, imaginação e generalização. Mas não é novidade de que o “ver”, sendo no sentido singular da visão, ou no sentido amplo da visualização, é considerado um modo legítimo de se pensar matemática.

> Um dos traços fundamentais do espírito do declínio da Idade Média é o predomínio do sentido da vista, predomínio que está intimamente ligado à atrofia do pensamento. O pensamento toma a forma de imagem visual. Para impressionar verdadeiramente o espírito um conceito tem de aparecer primeiro sob forma visível. A insipidez da alegoria pode suportar-se porque a satisfação do espírito reside na visão. A necessidade constante de exprimir o visível era mais bem realizada por meios picturais do que literários. (HUIZINGA, 1924, p. 211).

Na versão axiomática da geometria de Euclides, se adotavam procedimentos “construtivos” para dar concretude visual às propriedades geométricas que se pretendiam provar. Esse ímpeto do ser humano em dar concretude às coisas para fazê-las inteligíveis é natural. Porém, ao longo da história, com o advento do formal, especialmente na matemática, esses aspectos visuais foram deixados de lado como base da abstração. Um primeiro momento dessa formalização se deu pelos procedimentos de algebrização.

Nunca se deixou de lado a necessidade da concretização. Um exemplo foi a volta ao conteúdo da geometria no século XIX, especificamente a criação dos modelos artificiais das geometrias não euclidianas. É especialmente essa necessidade de revisualização da matemática que se faz necessária no ensino da matemática.

A experiência como professora de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental na Prefeitura Municipal de Curitiba (PMC) é o que move e desperta o interesse em propor a investigação sobre a visualização no ensino e no aprendizado desse componente curricular. Dessas vivências é que "brotam" – e se mantém – as inquietações sobre a matemática que é estudada na escola. Alguns questionamentos são latentes: qual o significado de um determinado conceito matemático? Quais as possíveis aplicações, relações que podem ser realizadas? Esse assunto poderia ser abordado de outra maneira? Quais são as diferentes estratégias para resolver um determinado problema?

A partir dessas indagações, aprecia-se a importância do ato de ensinar – que é indissociável do ato de aprender "dos" alunos – mas também do ato de aprender "com" os alunos, desvelando o prazer em suas conquistas, o brilho nos olhos quando despertam novas relações, quando pensam além do problema proposto e criam novas situações. Nesse aspecto, a função formativa da matemática escolar é fundamental para a aprendizagem desses alunos e é necessário que seja resgatada. É essencial extrapolar o paradigma do exercício, enquanto treino do algoritmo, ainda tão presente e que tem "limitado" a própria matemática, bem como estimulado os estudantes a serem "resolvedores" de exercícios matemáticos em série.

A graduação em licenciatura em matemática provocou diversas dúvidas, do que se sabe, não sabe, do que falta aprender, mas no emaranhado de tantas dúvidas, uma certeza é evidente: sempre há muito para aprender. O curso ofereceu teorias, as ferramentas para se formular um pensar matemático, porém os questionamentos sobre a prática docente são constantes. Tais inquietações não aparecem em um manual, não se encontram um *best-seller* de: como ser um professor. Ou então: como lidar com o pluralismo dentro de uma sala de aula? E a resposta para isso é simples: tratam-se de experiências vividas, ou seja, existem as teorias que dão um direcionamento e sustentam objetivos, porém existem experiências que precisam ser vivenciadas. São as experiências pedagógicas de um professor atuando.

Percebendo o quão frequente é a tentativa do uso de técnicas de visualização para tentar interpretar determinados conceitos, foi possível compreender que para construir um pensar matemático não basta somente ter as ferramentas, mas sim, saber utilizá-las, criar relações, estabelecer semelhanças e diferenças, ou seja, experienciar a matemática.

Durante o processo de planejamento das aulas, é importante levar em consideração como os alunos pensam, a diversidade de questionamentos que podem surgir. É necessário estar preparado para ajudá-los a formular perguntas e não apenas encontrar respostas. Segundo Lins e Gimenez (2001):

> A escola é, sim, lugar de tematizações, de formalizações. Esse é um papel importante que ela deve cumprir, o de introduzir as crianças em sistemas de significados que constituem o que Vygotsky chamou de conceitos científicos, e que correspondem a um corpo de noções sistematizadas. (LINS e GIMENEZ, 2001, p. 23).

No mestrado, Santos (2014), com o propósito de compreender a visualização como forma de pensamento, realizou diversas leituras sobre o tema. Então, novas inquietações despertaram, como a visualização geométrica, contextualizada e aritmético-algorítmica, a ser abordada posteriormente. Foi também parte da pesquisa o estudo sobre a cientificidade da visualização, assim como seus aspectos qualitativos e subjetivos.

Do ponto de vista pedagógico, com intuito de aprofundar sobre a visualização em diferentes conotações no ensino e aprendizagem de matemática, levanta-se a questão:

- **Como se compreende a visualização matemática na prática docente de uma professora dos anos finais do ensino fundamental?**

Enfatiza-se a prática docente, pois é nela que as relações, construções e reconstruções acontecem. Importante salientar que o entendimento que se faz de prática docente nesse contexto não é singular, pois envolve desde o entendimento do professor se percebendo enquanto educador até como ele faz para significar os conceitos matemáticos com seus alunos. Desse modo, a prática docente em si é uma ação em movimento, uma experiência pedagógica, sendo que algumas mediações são pré-estabelecidas, mas existem outras que vão sendo construídas conforme a aula vai acontecendo. É nesse cenário, em que nem tudo é previsível, em que manifestam-se mais perguntas que respostas, que a prática docente é observada na presente pesquisa.

Uma vez que a visualização é entendida como um modo de pensar a matemática, é importante levantar reflexões sobre a sensibilidade matemática, que se refere ao desenvolvimento da ação em se apreciar a matemática, ou seja, além de se pensar a matemática racionalmente, deve-se poder também pensá-la sensivelmente, isto é, apreciá-la. O fazer e o apreciar são, ou deveriam ser, indissociáveis. Esse conhecimento sensível, em contraposição ao conhecimento racional, acontece conscientemente ou inconscientemente através da percepção inteligível, que dá objetividade aos objetos matemáticos e pode ser manifestada pela intuição, imaginação, criatividade e visualização (CIFUENTES, 2003).

A motivação para a realização dessa pesquisa se deve à pretensão em equacionar de forma teórica e prática ações relativas ao ensino de matemática, trazendo reflexões necessárias para os professores em relação à sua prática educativa e tendo como base um saber epistemologicamente referenciado ao qual é dedicada a primeira parte, necessitando de estudos filosóficos e educacionais condizentes com essas inquietações. Não obstante a isso, mostrar a importância dos estudos que vem sendo realizados sobre a visualização nas experiências matemáticas, evidenciando o processo de ensino e aprendizagem na produção do conhecimento matemático na escola.

Para responder a questão pedagógica emergente, este estudo, na sua segunda parte, tem por base o contexto das aulas de matemática em uma turma de 7.º ano do ensino fundamental da Rede Municipal de Ensino de Curitiba, com o **objetivo de investigar quais as compreensões que a professora de matemática regente dessa turma constrói, na sua experiência docente, sobre a visualização (muitas vezes inconsciente) e como esse modo de pensar se revela no processo de ensino e aprendizagem e no despertar para a sensibilidade matemática.**

A visualização é um assunto que requer destaque em várias situações, tanto na construção do conhecimento matemático quanto no ensino e aprendizagem dessa ciência. Uma dessas situações é quando a visualização é pensada como forma de criar significados. A visualização traz ao estudante uma concretude, isto é, uma forma de concretização do pensamento e de seus objetos, tornando possível, por meio dos processos envolvidos na visualização, formular e compreender conceitos, formas, simetrias, semelhanças e também argumentar. Este último, inclusive, é um novo tipo de visualização, que será analisado para além dos três tipos já apresentados em Santos (2014) (algorítmica, geométrica e contextualizada) e será denominado como "visualização da forma do argumento" (a ser tratada com mais profundidade no capítulo 1).

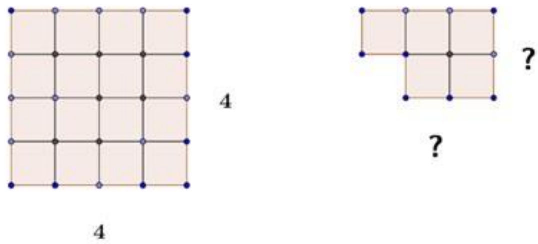
Um exemplo da abordagem visual de um conceito nos anos finais do ensino fundamental é o do quadrado da soma de dois termos positivos, um dos produtos notáveis que geralmente é apresentado exclusivamente com argumentos algébricos (

Figura *1*).

Outro exemplo é a construção do significado do número quadrado perfeito.

> Quando mencionamos problemas do seguinte tipo: em uma sala com o formato de um quadrado cabem 25 carteiras, quantas fileiras de carteiras ficarão dispostas? Neste caso, sabemos que basta calcular a raiz quadrada de 25 para concluir que serão 5 fileiras de carteiras, desta forma estamos utilizando a ideia geométrica espacial para fazer menção ao conceito de raiz quadrada. Assim como o número quadrado perfeito, além de apenas falar que o número quadrado perfeito é o que possuí raiz exata, podemos também fazer a construção desse quadrado. Por exemplo, o número 16 é quadrado perfeito, pois conseguimos com 16 um quadrado maior. Porém, o 5 não é um quadrado perfeito, pois não é possível construir um quadrado com 5 quadradinhos (SANTOS, 2014, p. 33).

Figura 1- Representação do número quadrado perfeito.



Fonte: Santos, 2014, p. 33.

Os exemplos citados são caracterizados pelo que se pode denominar como “visualização geométrica”, ou seja, traz o pensamento geométrico como forma de argumentação para a visualização. Porém, o caminho inverso também é possível, isto é, ver algebricamente algo geométrico. Isso acontece quando, por exemplo, não se consegue “ver” uma demonstração geométrica, tendo que partir assim para o uso de uma abordagem algébrica, a qual permite resolver um problema geométrico. É o caso do traçado da tangente em uma circunferência passando por um ponto dado na geometria analítica.

> Se a teoria de Descartes da geometria analítica tivesse visto a luz do dia num tempo menos agarrado à experiência sensorial e ao pensamento euclidiano, os matemáticos teriam naturalmente, sem constrangimento, reconhecido a lógica dum objeto em quatro dimensões, pois só se lhes exigiria o reconhecimento de que um tal objeto não mais é do que a entidade matemática que necessita de quatro coordenadas para ser adequadamente descrito (GUILLEN, 1987, p. 94).

A visualização no ensino e na aprendizagem de matemática vem sendo discutida por vários autores, como Arcavi (2003), Buratto (2012), Cifuentes (2003, 2005, 2010, 2011, 2013), Flores (2007, 2010) Flores, Wagner e Buratto (2012), Giaquinto (1992, 2015), Janzen (2011), Presmeg (1986a, 1986b, 1999, 2006), entre outros.

Porém, faz-se importante analisar outros aspectos desse termo polissêmico, principalmente compreender como a visualização se tornou uma forma de se pensar matematicamente, quais foram os obstáculos e que forma ganhou. Os textos de Duval (1999, 2003, 2004, 2012 e 2016), Pitkin (2006), Saes (2010) e Poincaré (1995) trazem subsídios para o aprofundamento do tema, assim como a própria obra de Euclides, em suas diversas versões, por tratarem da geometria pelo ponto de vista axiomático material ou concreto, consistindo no estudo do espaço “real” ou “natural”.

Diante dos diferentes modos de compreender o conceito de visualização, se inicia adotando a perspectiva que aponta para um entendimento da visualização como elemento estruturante na formação das imagens mentais para o desenvolvimento do pensamento visual, como forma de concretizar, consolidar o que está sendo construído.

Pensar na visualização como forma de concretização do pensamento matemático pode ser uma estratégia que vai além de utilizar os recursos visuais apenas como ferramenta metodológica em consonância com as epígrafes iniciais. O conceito de visualização não se resume ao simples ato sensível de ver, enxergar, mas ao ato de construir, reconstruir, movimentar, o que envolve também uma componente interpretativa.

Em referência ao ensino e a aprendizagem de matemática, a noção de experiência matemática se torna o principal diferencial. A "visualização é uma forma de experiência, sendo uma de suas funções a construção de significados e, principalmente, de sentidos, é um ato de interpretação". (CIFUENTES, 2010, p. 22).

Num universo tátil, sensitivo e visível é simples e direta a experiência do dia a dia, mas num universo, ou num espaço abstrato, de que forma é possível experienciar, compreender as relações, os movimentos, as transformações construindo significados e atribuindo sentido aos objetos matemáticos?

Por ser a visualização um ato de experiência matemática, nada mais belo e legítimo do que viver a matemática, "matematizar" (D'Ambrosio, 1999), estudá-la não pelo seu exterior, mas interior, tanto com um propósito epistemológico como pedagógico, analisando suas transformações, movimento e criações e observando como as relações acontecem, como a matemática se transforma.

A visualização, além de seus apelos construtivos relacionados ao pensamento visual, também se relaciona com a intuição, ao ponto de criar subsídios na formação de conceitos na aprendizagem da matemática. Em situações complexas, as intuições desempenham um papel importante na construção de ideias. De acordo com Cifuentes (2010), uma das funções da visualização é construir significados, dar sentido, pois a intuição permite ver "a forma do objeto estudado" (p. 655).

> Temos, pois, várias espécies de intuição; primeiro, o apelo aos sentidos e à imaginação; em seguida, a generalização por indução, por assim dizer calcada nos procedimentos das ciências experimentais; temos, enfim, a intuição do número puro, (...) e que pode engendrar o verdadeiro raciocínio matemático (POINCARÉ, 1995, p. 19).

O processo de construir significados, de atribuir sentido aos conceitos matemáticos com o apelo geométrico que a visualização possibilita pode ser trabalhado com o uso de *softwares* de geometria dinâmica, em que as possibilidades de visualização se multiplicam. A interface interativa, aberta à exploração e à experimentação disponibiliza experimentos de pensamento (GRAVINA, 2001).

> Nesse sentido, as figuras construídas em um ambiente dinâmico adquirem um estatuto diferente dos simples desenhos. Passam a ser exemplos genéricos, com a possibilidade da exploração dinâmica das propriedades envolvidas, já que a construção da figura utiliza explicitamente as duas propriedades, proporcionando a visualização de muitas e diferentes representações de uma mesma classe de figuras (JANZEN, 2011, p. 52).

A geometria dinâmica não é apenas um recurso para se concretizar um determinado conceito de natureza geométrica, mas também na concretização de conceitos de natureza algébrica.

> Ao desenvolver atividades com o auxílio do GeoGebra, por exemplo, é possível construir figuras, avaliar se suas propriedades estão sendo verificadas, fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios. As figuras podem ser arrastadas na tela do computador sem perder os vínculos estabelecidos na construção. Além disso, é possível realizar construções que com lápis, papel, régua e compasso seriam difíceis, ou no mínimo gerariam imprecisões (LOVIS e FRANCO, 2013, p. 153).

Além do possível uso dos *softwares* de geometria dinâmica, também se faz importante discutir o modo como o professor pode encaminhar suas aulas de forma a desenvolver o pensamento visual de seus estudantes sem o uso daquelas ferramentas, salientando que a visualização não é "ensinada", talvez, pelos elementos subjetivos e intrínsecos a cada pessoa, mas pode ser desenvolvida e aprimorada.

Uma sugestão apontada por Vale *et al.* (2014) é a utilização de tarefas que envolvem padrões em contextos visuais/figurativos, das quais exigem que o estudante relacione conceitos matemáticos por meio de diferentes representações e perspectivas, desenvolvendo dessa maneira a criatividade matemática. O estudante começa a refletir sobre diferentes maneiras de resolver um determinado problema. "A visualização pode não estar apenas relacionada com a mera ilustração, mas também pode ser reconhecida como uma componente do raciocínio profundamente relacionada com o conceptual e não apenas com a percepção" (VALE, BARBOSA e PIMENTEL, 2014, p. 123).

Assim, diante das questões delineadas, esse estudo traz uma perspectiva sobre o tema visualização, de viés epistemológico na sua fundamentação (primeira parte) e com um aporte teórico-metodológico no contexto pedagógico (segunda parte) que leva a outras interpretações da matemática, apresentando maneiras diferentes de se fazer e pensar a matemática.

No decorrer do texto é possível observar a escrita: pensar "na" matemática e pensar "a" matemática, em que o entendimento da primeira consiste no sentido de *estar entre, dentro*. Já a segunda diz respeito a *estar fora*, como um observador. Porém, para exemplificar o entendimento, ambas a denotações são tomadas no sentido de "entrar entre, dentro", pois é na relação entre os objetos que a visualização é discutida.

Importante salientar que o direcionamento desse estudo foi pensado para o professor, bem como a formação de professores e pesquisadores interessados nas compreensões que se fazem sobre a visualização dentro da prática docente.

A organização deste texto se dá no seguinte modo:

No capítulo 1, na introdução, foram apresentadas as ideias iniciais sobre a visualização matemática e a visualização no ensino da matemática. Na introdução também foi pontuada a questão norteadora da pesquisa: **como se compreende a visualização matemática na prática docente de uma professora dos anos finais do ensino fundamental?** Desse modo os objetivos elencados são**: investigar quais as compreensões que a professora de matemática regente dessa turma constrói, na sua experiência docente, sobre a visualização (muitas vezes inconsciente) e como esse modo de pensar se revela no processo de ensino e no despertar para a sensibilidade matemática.**

O capítulo 2 é destinado à abordagem da visualização em seus múltiplos espaços, contextos e concepções. Inicialmente, articula-se a visualização com as compreensões em relação à visão, percepção e representação, rompendo com algumas ambiguidades referentes ao termo. As diversas concepções sobre a visualização são apresentadas nesse capítulo com base nas pesquisas precursoras sobre o tema, mas também buscando compreender essa concepção nas pesquisas atuais.

Os trabalhos selecionados, que contribuem para as reflexões e discussões sobre o tema, são dos seguintes autores: Presmeg, Arcavi e Giaquinto. Entendendo que a visualização é um conceito aberto e tem várias dimensões, na perspectiva psicológica, fenomenológica entre outras, a perspectiva que direciona esse estudo é a perspectiva epistemológica, ou seja, a epistemologia da visualização. Portanto, esse capítulo finaliza com a construção de uma concepção de visualização, na perspectiva epistemológica, fundamentada nas pesquisas realizadas, mas principalmente do entendimento que se revela da visualização como modo de pensar a matemática. É essa concepção que vai orientar as próximas reflexões presentes neste estudo.

No capítulo 3, compreendendo a visualização como um modo de pensar, se fazendo presente no processo de construção do pensamento sobre determinado conceito, traz-se para discussão a "experiência matemática". Esta é construída com base em habilidades como a intuição, a imaginação e a criatividade e são essas habilidades que vão auxiliar a ver o que não está lá para ser visto, mas que é pensado por meio da visualização. Desviar o olhar para os objetos, começando a visualizar as relações entre esses objetos – pois em alguns casos os objetos não são representáveis – se faz possível quando a sensibilidade do olhar se desenvolve e isso se dá pela imaginação, pela intuição e pela criatividade. Neste capítulo é apresentado o resultado do estudo sobre a sensibilidade matemática, intuição, imaginação e criatividade matemática. As conexões com a visualização estão presentes na tessitura do próprio texto, mas também são explicitadas no último item do capítulo, numa perspectiva pedagógica: a visualização matemática na sala de aula, um modo de experiência matemática.

O quarto capítulo é destinado à apresentação da metodologia da pesquisa, iniciando pela justificativa da escolha do percurso metodológico traçado. Toda a organização desenhada tem por finalidade estruturar o roteiro da pesquisa prática, direcionando o olhar para o caso da pesquisa, que se configura na professora. Também é explicitado como, quando e onde a pesquisa foi realizada, bem como os participantes e o contexto.

No quinto capítulo é apresentada a análise do estudo de caso realizado, com base nas observações e tarefas desenvolvidas com os alunos e nas observações e entrevistas realizadas com a professora. Entendendo o ensino e aprendizagem como indissociáveis, na perspectiva de que se não há aprendizagem não ocorreu ensino, a intencionalidade em se trazer elementos da observação com os alunos é a de olhar como a prática docente dessa professora se faz presente no modo de pensar desses alunos. Importante ressaltar que as análises são realizadas de modo a relacionar alguns elementos discutidos no capítulo 2 e 3 com as ações e práticas docente observadas no estudo de caso.

No sexto e último capítulo são apresentadas as considerações finais do presente estudo, do qual se tecem algumas palavras que dão luz ao percurso desenhado para este trabalho, buscando não diretamente responder à questão norteadora, mas levantar reflexões que puderam ser consolidadas e que abrem possibilidades para futuras pesquisas.

2 A VISUALIZAÇÃO NA MATEMÁTICA E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 PALAVRAS INICIAIS

O presente capítulo e o próximo constituem o núcleo da pesquisa teórica sobre a visualização. Por esse motivo, identifica-se a necessidade em explicar o percurso escolhido para esta estruturação teórica.

O ponto de partida é o de trazer a visualização para o entendimento do leitor, mas para isso faz-se importante evidenciar o próprio termo, de modo a ir se construindo a ideia de que a visualização é algo a mais do que apenas ver, em seu sentido literal. Por isso o termo visualização é discutido em relação aos termos de visão, representação e percepção. Para alguns leitores, esse momento pode parecer o de desconstrução (e não deixa de ser), mas é diante essa desconstrução que a concepção de visualização vai se apresentando. Portanto, com essa discussão, pretende-se trazer reflexões sobre o que a visualização não é, já que em alguns contextos pode se confundir com a visão, ou se aproximar da representação, mas não são sinônimos.

Observa-se o uso da palavra concepção, que se difere de conceitualização, pois a concepção de algo ou alguma coisa está inserida num contexto e nas pré-concepções de quem a cria, ajustada a uma interpretação e levando em consideração a perspectiva adotada no estudo, neste caso, a epistemológica. Já o conceito não necessariamente é algo construído por quem o interpreta, pois pode já ter sido consolidado, requerendo apenas uma interpretação.

Portanto, essa construção que se faz sobre o termo visualização pode se aproximar ou distanciar de algumas já existentes. Por isso, é importante dialogar com outros estudos já realizados. Como o escopo de trabalhos sobre a visualização é abrangente, escolheu-se três pesquisadores para fundamentar esse diálogo, como está apresentado no subtítulo 1.2.

O primeiro autor é Arcavi, quem apresenta uma discussão de natureza pedagógica sobre o termo visualização. Dele, são estudados dois trabalhos, datados de 2003 e outro de 2015, pois considera-se a possibilidade de ampliações ou alterações nas concepções apresentadas nessa escala de tempo. Já ou autor Giaquinto apresenta um estudo de natureza filosófica, trazendo compreensões e levantando reflexões sobre a visualização em sua essência. Por último, Presmeg, autora referência quando se trata de visualização. Suas discussões também são de natureza pedagógica e em seus estudos a autora transita entre o ensino, quando realiza pesquisas com os professores, e aprendizagem, quando realiza pesquisas com os alunos.

Após essa base de discussões e reflexões, uma concepção de visualização é criada. Essa concepção é a que fundamenta todo o encaminhamento da tese bem como o olhar para as análises. A concepção construída traz a visualização como um modo de pensar a matemática, sendo ela um meio, um processo. Para se efetivar o processo, é necessário pensar nos modos de acesso aos objetos matemáticos que carecem de uma representação, uma concretude. Por isso, no capítulo 2 levantam-se discussões sobre a experiência matemática. São as habilidades emergentes da experiência matemática, como a intuição, a imaginação e a criatividade que se constrói acesso, junto com a visualização, às relações que constituem os objetos matemáticos. Ou seja, o olhar parou de ser direcionado para o objeto, mas sim, agora é direcionado para a estrutura dada pelas relações que as definem.

A intuição, imaginação e criação são discutidas em termos da descoberta, criação e originalidade, mas a visualização e o diálogo entre essas habilidades são construídos ao longo do texto. Certamente, antes de adentrar na segunda parte da pesquisa, é preciso estabelecer outro diálogo, entre a visualização e a escola, especificamente o da visualização e do ensino de matemática, sendo esse o ponto de partida para o capítulo 3 e 4 desse texto.

2.1.1 Do imediatismo do olhar a uma visão reflexiva

A visão pode ser interpretada, em um sentido primeiro, em diferentes perspectivas, como um evento anatômico, fisiológico, psicológico, físico, biológico e químico. Num outro sentido da palavra visão, existem denominações como: ponto de vista, aparição de algo sobrenatural, contemplação direta sem percepção sensível, imaginação, entre outras.

Do ponto de vista biológico, a visão funciona através do processamento de dados recebidos pelo encéfalo, por intermédio dos receptores sensoriais ativados pela luz. Pela física, o olho enxerga por intermédio das amplitudes de ondas eletromagnéticas. Pela química, o que estabelece a correlação entre o processamento físico da aquisição da luminosidade e a ação biológica da sensação são os processos químicos da visão (FILHO, 2007).

A partir do conhecimento da abrangência e dos diferentes sentidos atribuídos à palavra “visão”, é importante destacar que neste estudo a compreensão de visão se direciona ao olhar, enxergar, ver, num sentido que não se restringe ao biológico, de modo a se refletir sobre as limitações. Assim, a ideia do que é visão perpassa desde o que se vê em um momento imediato, até um olhar reflexivo, que é construído, educado, aprimorado.

Para exemplificar esse entendimento, apresenta-se a representação (conceito que será abordado amplamente adiante) de uma das iterações do fractal conhecido como triângulo de Sierpinski (Figura 2):

Figura 2 – Triângulo de Sierpinski Iteração 2.

Fonte: Autores, 2021.

Na figura acima pode-se “ver” um ou vários triângulos. Primeiramente, são vistos os triângulos pretos ou os brancos. Esse seria o imediatismo que a figura traria ao olhar. Dessa forma, não se está visualizando, apenas se está vendo o que a primeira impressão mostra de imediato. Somente quando esse ato de ver implica na busca de compreensões do que é visto é que se pode perceber alguns princípios da visualização, como a construção de um olhar reflexivo. Um exemplo disso é buscar as relações entre os triângulos, um padrão, uma generalização.

De acordo com Duval (1999):

> Assim, como texto ou raciocínio, o entendimento envolve apreender toda a sua estrutura; **não há entendimento sem visualização**. E é por isso que a visualização não deve ser reduzida à visão, ou seja: a visualização torna visível tudo o que não é acessível à visão (DUVAL, 1999, p. 13).

Pode-se ainda entender a expressão “…tudo o que não é acessível...” como uma paráfrase de Paul Klee: “a visualização não reproduz o visível, ela torna visível” (como mencionado na epígrafe desta tese).

Duval (1999, p. 12) aponta como uma das funções essenciais da visão a apreensão global, ou seja, quando se vê algo, não se vê apenas uma das partes, mas se vê o todo, porque o todo dá sentido às partes. “Nesse sentido, a visão é o oposto do discurso, da dedução, que requer uma sequência de inferências justificadas, numa cadeia de afirmações”, ou seja, não é um “processo lógico”.

O que seria ver o todo e não apenas as partes? Significa ver as partes e seu contexto. Desse modo, a visão é contextual, pois quando se vê algo, é preciso considerar que há um contexto ao seu redor. O sentido atribuído à palavra “contexto” é sobre “o que está ao redor, ou seja, que guarda alguma relação com o objeto, e não no sentido de contextualização que é sobre associar um conhecimento ao seu ponto de origem, aplicação, muito utilizado nas discussões de ensino e aprendizagem.

Porém, quando se vê apenas as partes, como se faz para se ver o todo? Por meio da visão discursiva, pela construção de uma sequência discursiva. Um cego, por exemplo, utiliza muitas vezes o tato para identificar as formas ou relações das partes que são “captadas” por ele. O cego reconstrói o todo em função das partes, num processo de composição discursiva.

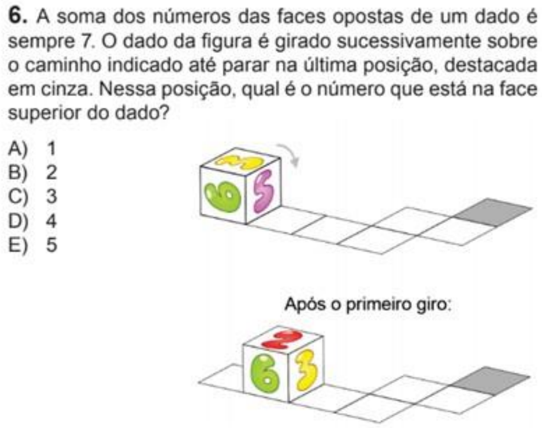
Importante destacar que a visão, por mais imediatista que seja, traz consigo as pré concepções de quem vê, não se reduzindo a um olhar estático. A dinamicidade encontrada no olhar envolve as práticas visuais no âmbito da história e da cultura (Flores, 2010). Portanto, o objeto sensível não envolve somente o sentido da visão, mas também o entendimento que se faz dele.

Na fenomenologia de Merleau-Ponty (2003, p. 224) “ver é sempre ver mais do que se vê”. Dentro dessa proposta, o visível e o invisível são indissociáveis. Sobre a perspectiva da “visão” discutida por Merleau-Ponty, Caminha (2014) afirma que:

> A visão não alcança uma visão plena do que aparece. Aquilo que é visível tem sempre aspectos invisíveis. Os olhos que se dirigem ao mundo para ver ganham uma relação de proximidade com as coisas visíveis, mas também ganham uma relação de distância daquilo que não se vê, revelando uma cegueira da visão. As limitações de nosso olhar atual não conseguem ver o visível na sua plenitude (CAMINHA, 2014, p. 64).

Essa questão da cegueira da visão perpassa a ideia do aparecimento da coisa visível, pois também considera o momento em que a pessoa que vê torna a coisa visível do seu modo. Para elucidar tal reflexão, apresenta-se o exemplo apresentado na Figura 3.

Figura 3 - Questão OBMEP 2016 – nível 1.



Fonte: OBMEP, 2021.

Na figura, é possível ver algumas faces de um cubo, mas quem o vê pode utilizar de diferentes modos do mundo visível para que o cubo se faça visível, ou seja, de fazer visível as outras faces do cubo. De acordo com Caminha (2014, p. 64), “A experiência de ver nos lança para o horizonte aberto do visível que não se reduz ao aparecimento de um objeto isolado”.

Essa ação de fazer visível as outras partes do cubo envolve o ato de experienciar, isto é, se faz um experimento mental para movimentar o cubo e fazer o que se pede. Assim realizam-se os experimentos mentalmente no intuito de “visualizar” os objetos matemáticos, configurados por certas relações e transformações. Percebe-se, assim, que a experiência é intrínseca na visão, no olhar reflexivo, assim como na visualização.

Mas, a que tipo de experiência se faz referência? Em Santos (2014) foi levantada a distinção entre experiência matemática e experiência nas ciências empíricas. Até certo ponto, tal distinção era imediata, pois na ciência supostamente se trabalha com objetos e fenômenos reais, enquanto na matemática se trabalha com objetos abstratos, ideais. Por essa razão parecia necessário estabelecer tal entendimento. Porém, na perspectiva da ciência, o que significa ver um fenômeno físico?

A física atual permite ver algumas coisas e não permite ver outras, por mais que elas existam. O sentido do que é visto em física está relacionado com a visão que as ondas eletromagnéticas permitem ver, seja com ou sem a ajuda de instrumentos físicos, é o que a luz, em suas diversas amplitudes, permite que se veja.

Atualmente, sabe-se que há coisas que fisicamente existem, mas não são “visíveis” com nenhum tipo de luz, ou seja, existe algum tipo de matéria, a chamada “matéria escura”, que não interage com a luz eletromagnética de nenhum tipo e só se sabe de sua existência porque além da força eletromagnética que faz visíveis as coisas, também existe a força gravitacional com a qual de fato interage. O fenômeno existe, mesmo que não ocorra interação com algum tipo de luz. Portanto, a experiência na física parece ser tão complexa como na matemática, porque existiriam outras formas de “ver” através de, por exemplo, ondas gravitacionais associadas à força gravitacional mencionada. Assim, temos uma aproximação entre as duas, que consiste, para efeitos da visualização, em estudar os objetos em transformação.

A concepção de figura em Duval é relacional, isto é, baseada em relações, propriedades, condições primárias dadas como hipóteses e, neste estudo, esse entendimento é adotado para constituição dos “objetos” que a visualização permite “ver”. Essa concepção possibilita diferenciar, nesse contexto, a ideia de imagem da ideia de figura, em que a primeira está atrelada a uma reprodução, enquanto a figura requer de propriedades para sua concretização.

A visão pode ser entendida também pela perspectiva da obra de Bachelard (2011), especificamente a partir dos obstáculos epistemológicos da experiência primeira. Essa experiência, assim denominada pelo autor, reflete a ideia de observação básica e opinião. Na área das ciências, pode-se entender esse obstáculo por uma experiência colocada antes e acima da crítica, de senso comum. “Ficará claro que a primeira visão empírica não oferece nem o desenho exato dos fenômenos, nem ao menos a descrição bem ordenada e hierarquizada dos fenômenos” (BACHELARD, 2011, p. 37).

Importante destacar que Bachelard (2011) considera por “fenômeno” a cadeia de relações em que a sua constituição se dá pelos processos de composição, ruptura, confrontos, acréscimos, contradições, etc. Ou seja, um fenômeno nunca está acabado, pois qualquer relação com ele estabelecida pode modificá-lo em maior ou menor grau de complexidade. Portanto, esse fenômeno se dá numa relação dialógica entre a desordem e a ordem, descontruir para reconstruir, sendo esse processo contínuo. De acordo com Silva (2000, p. 72) “a dinamicidade do fenômeno gera o seu desenvolvimento através de uma trama de coisas velhas e novas dando-lhe novo conteúdo, nova forma e novo sentido”.

Na matemática, a compreensão desse obstáculo pode se dar pelo uso ingênuo e primário da imagem representada. Ou seja, ao resolver uma tarefa matemática que contém uma figura, o aluno pode se basear na imagem nela representada, sem fazer posteriormente uma análise total e ampliada da figura e do enunciado que ela representa. “A primeira experiência ou também chamada de observação primeira é sempre um obstáculo inicial para a cultura científica. De fato, essa observação primeira se apresenta repleta de imagens; é pitoresca, concreta, natural e fácil” (BACHELARD, 2011, p. 25).

O exemplo da Figura 4 mostra que, em uma primeira observação, as cores se destacam e podem induzir a uma conjectura, como, por exemplo, a área do quadrado vermelho interno, ou a área total da figura, ou a contagem de quadradinhos, separando os vermelhos dos azuis, entre outras possibilidades. Porém, o enunciado já remete a outro olhar, que pode ser conflitante com um primeiro olhar, ou até mais abrangente. Significa que o primeiro olhar pode levantar hipóteses para a solução do problema, mas ao mesmo tempo pode não estabelecer relação alguma.

Figura 4 - Questão OBMEP 2019.

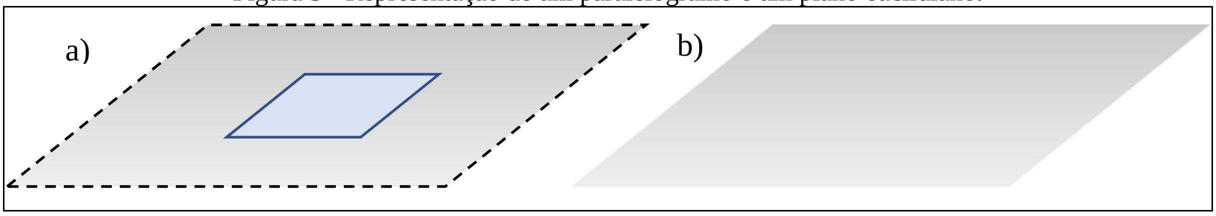
4. O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede 6 cm². Quanto mede a área pintada de azul?

A) 10 cm²
B) 12 cm²
C) 14 cm²
D) 16 cm²
E) 18 cm²

Fonte: OBMEP, 2021.

Outro exemplo que pode ser analisado é o apresentado na Figura 5 a seguir:

Figura 5 - Representação de um paralelogramo e um plano euclidiano.



Fonte: OBMEP, 2021.

A imagem “a” pode ser, numa experiência primeira, considerada um quadrilátero ou especificamente um paralelogramo. Já na imagem “b”, uma simples modificação através do “código” de deixar pontilhado o contorno para indicar que ele fica aberto altera o contexto, pois o que era um paralelogramo agora trata-se da representação de um plano euclidiano (infinito em extensão), onde está incluído um paralelogramo.

Portanto, após o levantamento de algumas abordagens e entendimentos sobre a visão, as compreensões se direcionam para “o sentido primário de proporcionar evidência a partir da observação, enquanto a visualização dá acesso aos sentidos não evidentes” (Paulo, 2010, p. 46)[1]. Dessa maneira, visão e visualização são termos que se relacionam, mas não são sinônimos. Pode-se dizer que a visualização vai além da imagem imediata, mas isso não despreza a visão, pelo contrário, como aponta Paulo (2010), em seu estudo sobre o significado epistemológico dos diagramas:

> (...) é o ver que dá acesso a um ser de latência, que mostra de si um lado, enquanto oculta outro. É o ver que impele o matemático à investigação, denunciando o que se mostra na própria ação de encobrir-se. É o ver que busca o avanço na produção de sentido que vai se dando com a experiência da visualização (PAULO, 2010, p. 49).

[1] Considerações da autora Rosa Paulo, com base no texto *Visualizing as a Means of Geometrical Discovery* (GIAQUINTO, 1992).

Na sequência, o estudo se desenvolve em direção às compreensões sobre o termo "representação", no intuito de refletir sobre as distinções e relações com a visualização.

2.1.2 A representação como forma de acesso aos objetos matemáticos

O termo "representação" vem do latim *representare,* isto é, colocar à frente, fazer presente, apresentar de novo, o que já sugere uma perspectiva de visão imediata. Para o sentido da palavra, encontram-se denominações de interpretação filosófica, teatral, jurídica entre outras. Para Pitkin (2006, p. 16) "a representação é, em grande medida, um fenômeno cultural e político, um fenômeno humano".

Pode-se perceber que na língua portuguesa a palavra "representar" direciona para diferentes significações, assim como no inglês "*represent"*. Porém, na língua alemã, são utilizadas três palavras. De acordo Pitkin (2006):

> (...) a língua alemã tem três palavras – *vertreten, darstellen e repräsentieren* – que geralmente são traduzidas pela palavra inglesa *"represent"*. Darstellen significa "retratar" ou "colocar algo no lugar de"; vertreten significa "atuar como um agente para alguém". O significado de repräsentieren é próximo ao de vertreten, mas é mais formal e possui conotações mais elevadas (teóricos alemães da política, às vezes, argumentam que meros interesses privados egoístas podem ser vertreten, mas o bem comum ou o bem do Estado devem ser repräsentiert). Entretanto, o significado de repräsentieren não é, de forma alguma, próximo àquele de darstellen. Então, para quem fala em inglês o modo pelo qual uma pintura, um pintor ou um ator de palco representam, e o modo pelo qual um agente ou um legislador eleito representam, obviamente, estão ligados ao mesmo conceito (PITKIN, 2006, p. 16).

No latim clássico, "*repraesentare"* tem seu uso designado para objetos inanimados, porém, a expansão da sua significação ocorre entre os séculos XIII e XIV, "quando se diz que o papa e os cardeais representam a pessoa de Cristo e dos apóstolos" em que o termo passa também a ser aplicado a "algo ou alguém" (SANTOS, 2011, p. 29).

O propósito em estudar algumas concepções sobre a representação reflete na necessidade em se conhecer sua significação elementar, as múltiplas abordagens e compreender que se trata de campo de discussão complexo. Então, para fazer um recorte do escopo de abrangência, o direcionamento dado nesta pesquisa é voltado para a representação no ensino e aprendizagem de matemática, o que também revela sua importância na compreensão da própria matemática. Por esse motivo, as discussões e reflexões serão desenvolvidas principalmente em torno das obras de Duval (1999, 2003, 2004, 2012). Porém, acrescentando às ideias apresentadas por Duval, são incorporadas considerações sobre a historicidade (evolução conceitual) da representação para consolidar seu significado na atualidade.

O substantivo "representação" refere-se a um objeto inanimado, uma imagem, uma escrita, um símbolo, como por exemplo um quadrado, um número, um gráfico, o plano cartesiano. Sobre o uso das representações no ensino e aprendizagem de matemática, (DUVAL, 2012b) aponta:

> Há uma palavra às vezes importante e marginal em matemática, é a palavra "representação". Ela é, na maioria das vezes, empregada sob a forma verbal "representar". Uma escrita, uma notação, uns símbolos representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz deles. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes" que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática (DUVAL, 2012b, p. 268).

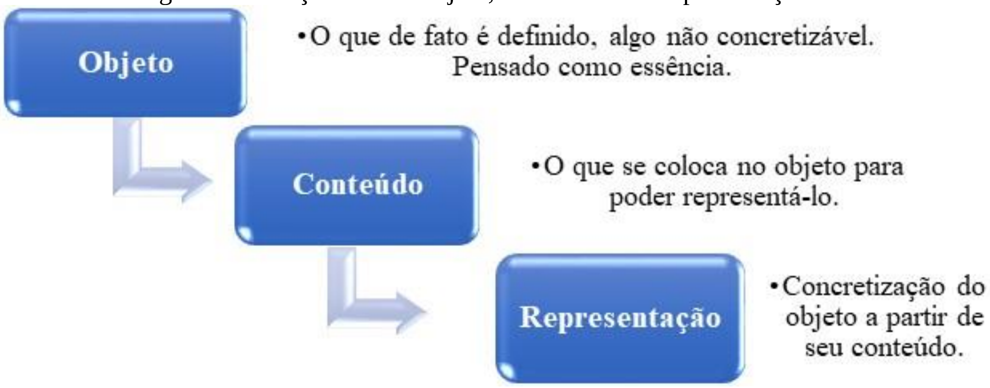
Um exemplo dessa distinção entre o objeto e sua representação pode ser dado pela conceitualização de reta. A representação da reta não apresenta a sua infinitude, podendo ser facilmente confundida com segmento de reta ou até mesmo semirreta, como no caso das distinções entre o plano euclidiano e um paralelogramo visto anteriormente. Pela definição de Euclides, "linha é comprimento sem largura", "extremidades de uma linha são pontos" e linha reta é "a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma" (EUCLIDES, 2009, p. 97). Desse modo, o objeto matemático "reta" não é o que está representado no papel, mas é o próprio conceito de reta.

Para que uma representação atue como tal, é necessário que ela dê acesso ao objeto representado ou pelo menos a uma perspectiva dele. Como forma de evitar a confusão entre o objeto e sua representação, Duval (2012b) sugere o uso de múltiplas formas de registros de representações (linguagem natural, registro figural, sistema escrito, gráficos cartesianos), registros que capturam algumas perspectivas do objeto. "O recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações" (DUVAL, 2012b, p. 270).

Uma discussão que pode ser desenvolvida em relação ao objeto e sua representação é o "ser" e o "aparecer". O "ser" é singular, é a essência, em termos de sua definição, é imutável. Mas esse "ser" não é visível. O que se vê na imediatez são as suas "aparências", que são tomadas em várias perspectivas, pois se vê de um jeito, de um determinado ângulo, com diferentes enfoques. A aparência é a manifestação do oculto, objetos da intuição sensível e da experiência.

O problema em confundir o objeto com a sua representação está no fato de se enfatizar a aparência e não a essência: "passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto" (DUVAL, 2003, p. 22). O objeto, entendido como essência, se baseia nas definições mínimas que o delimitam. Mas, além da essência, quando se faz aparecer o objeto em suas diversas representações, está se colocando nele diferentes conteúdos. Desse modo, conteúdo é o que se coloca no objeto (pensado como essência) para ser representado em diversas formas. Importante salientar que o verbo colocar, nesse contexto, não se refere a algo de fora para dentro, mas sim a algo intrínseco ao objeto, ou seja, parte da constituição do próprio objeto (Figura 6).

Figura 6 - Relação entre o objeto, o conteúdo e a representação.



Fonte: Autores, 2021.

Duval (2003) classifica os diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático. No quadro 1 são apresentados os tipos de representações utilizadas na matemática.

Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática).

Registros	Representação Discursiva	Representação não Discursiva
Registros Multifuncionais: os tratamentos não são algoritimizáveis	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configuração em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de Escritas • Numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais); • cálculo.	Gráficos cartesianos • Mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

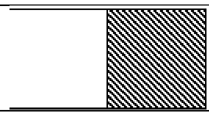
Fonte: Duval (2003, p. 14).

Quando se apresentam duas representações de um mesmo objeto em registros diferentes, tais representações apresentam diferentes conteúdos. De acordo com Duval (2016, p.7): "duas representações de um mesmo objeto produzidas por dois sistemas distintos têm conteúdos diferentes que podem até não ter semelhança alguma com o objeto representado.”

Por exemplo, os números racionais podem ser apresentados por meio de: frações, números decimais, percentuais, que estão (na classificação de Duval) no mesmo registro de representação (algébrico), além das representações por meio de figuras (registro figural) ou no registro da língua natural, podendo ser explorados diferentes conteúdos das representações apresentadas.

Contudo, como a representação contribui para a visualização? Por meio dessas representações é que se pode visualizar esse número racional. Mas, o que significa visualizar esse número racional através de suas representações? Significa selecionar essas representações e despi-las de suas concretudes, ficando apenas com a essência de todas elas, essa é a visualização. Aí se percebe a linha tênue que separa a ideia de representação e a ideia de visualização.

Tabela 1 - Representações de uma mesma fração.

Meio	$\frac{1}{2}$	0,5	50%	
Língua Natural	Fração	Decimal	Percentual	Figural

Fonte: Autores, 2021.

A condição de destaque está na importância em se diferenciar um objeto de sua representação, o que causa problemas de natureza epistemológica, como, por exemplo: de que forma entender a diferença entre um hipercubo (cubo de quatro dimensões) e sua representação? De acordo com Duval (2003), “A dificuldade se deve ao fato de que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível” (Duval, 2003, p. 21), sem que se leve em conta sua estruturação conceitual.

Tomando como motivação o caso do hipercubo, o que significam as representações semióticas de objetos de 4 dimensões em Duval? A primeira consideração se faz em relação ao conteúdo de uma representação primária que torna o hipercubo acessível, podendo ser pensado em relação ao seu número de vértices, número de lados, tentando obter relações por analogia com objetos que estão em 3 dimensões, levando para 4 dimensões.

Outra abordagem consiste em trazer uma espécie de recomposição, movimentação, uma dinamicidade do processo em geral, no intuito de obter uma ideia global do hipercubo, embora não se consiga vê-lo no sentido tradicional. No hipercubo há muitos elementos além do que se está colocando nele, sendo a visualização um modo de experienciar esse desconhecido, levando a novas conjecturas e descobertas.

Certamente, compreender e tentar concretizar um objeto de 4 dimensões é complexo, pois o mundo em que se vive é de 3 dimensões: comprimento, largura e altura. Mas, se o mundo fosse constituído num espaço bidimensional, essa dificuldade permaneceria ao se tentar concretizar o tridimensional a partir do bidimensional.

Se hipoteticamente imaginar-se vivendo num mundo tridimensional, observando os "moradores" de um mundo bidimensional, seria fácil de perceber que esses "moradores" são destituídos de altura, mas tem comprimento e largura. A mesma coisa acontece para quem observa, de um mundo quadridimensional, os objetos do mundo tridimensional. Por isso que um modo efetivo para se compreender os objetos na dimensão 4 é por meio da analogia e, por conseguinte, através da visualização das relações que se estabelecem pelas analogias.

O exemplo anterior revela que são as relações que constituem o objeto da "visualização". Novamente, a essência se faz presente, pois tentar enxergar a forma dos objetos de 4 dimensões não vai dar acesso aos objetos, mas buscar visualizar as relações nas passagens do espaço de 3 dimensões para o de 4 dimensões possibilitará concretizar os objetos nesse espaço.

Um outro exemplo é a representação do conceito de ponto. De acordo com Euclides, no livro I de 'Os Elementos', "ponto é aquilo de que nada é parte" (Euclides, 2009, p. 97), mas o que seria, então, a figura representativa do ponto utilizada, por exemplo, na representação de um par ordenado no plano cartesiano? Ou os pontos desenhados para delimitar um segmento de reta? O ponto utilizado para demarcar o encontro de duas semirretas no plano? Seria a representação de um ponto, e não o objeto matemático ponto. De acordo com Duval (1999), "essas conexões entre registros compõem a arquitetura cognitiva pela qual os alunos podem reconhecer o mesmo objeto através de diferentes representações e podem estabelecer conexões objetivas entre a matemática dedutiva e a empírica." (DUVAL, 1999, p. 12).

Porém, entre os diferentes modos de representar o objeto matemático ponto, quais deles correspondem ao objeto? "Do ponto de vista matemático, o que pode ser considerado o objeto em si é o enunciado de sua definição" (DUVAL, 2016, p. 16), apresentado no registro discursivo, ou seja, a definição proposta por Euclides.

Para se fazer ciência. há inúmeros instrumentos que dão suporte para os procedimentos que provocam novas descobertas. Porém, na matemática, quais seriam esses instrumentos? Não há um instrumento físico que dê acesso aos objetos matemáticos. Conforme aponta Duval

(2016, p. 17), “a matemática é a única disciplina em que se trabalha exclusivamente com representações semióticas [um dos tipos de representação estudados por Duval] haja vista que não existe outro modelo de acesso aos objetos matemáticos”

Mas não é exclusividade da representação esse acesso aos objetos matemáticos. A imaginação e a intuição também são meios para esse acesso. De acordo com Gusmão os objetos que são intuídos e imaginados não são os próprios objetos, ou seja, são os objetos enquanto entes

(...) a imaginação e a intuição são “mecanismos” que a experiência matemática nos dá para o acesso ao conhecimento dos objetos matemáticos, portanto, há um certo “empirismo” nesse processo que deve ser incorporado a essa concepção de matemática. Resumidamente, o empirismo que adotaremos para a matemática consiste em considerar a possibilidade de fazermos observações e experimentações com os objetos matemáticos mediadas pela imaginação e a intuição enquanto forma de experiência matemática.

Os objetos que são intuídos e imaginados não são os próprios objetos, ou seja, são os objetos enquanto entes relacionais e não enquanto entes concretos. São objetos dados por suas relações, suas definições, e essas podem ser apresentadas por meio de representações semióticas.

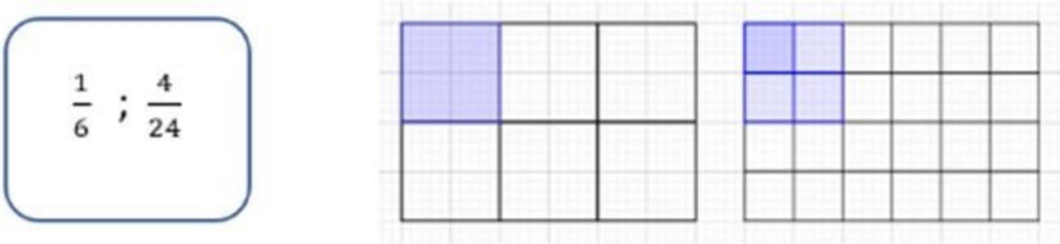
Retomando a proposta em se discutir e compreender a abrangência do termo representação, destacam-se suas aproximações e distanciamentos com a concepção de visualização. Nas discussões apresentadas, pode-se perceber que a representação envolve atividades cognitivas profundas, sendo nesse processamento das representações que a visualização se faz presente.

A visualização se relaciona a um modo de acesso não somente aos objetos por meio de suas representações, mas as relações entre objetos, propriedades e conceitos. Visualizar generalidades, quando se refere às sequências numéricas por exemplo, congruências quando se tratam das correspondências entre objetos geométricos enfim, “consiste em captar diretamente a configuração completa das relações e em discriminar o que é relevante nela.” (Duval, 1999, p. 13). Salienta-se que o que é visualizado não é o objeto ao todo e sim as relações que o definem, o que exige um certo grau de abstração (CIFUENTES E SANTOS, 2019).

A visualização não é o ponto de partida de um pensamento matemático nem o fim, mas é o processo. Se fosse considerada ponto de partida, estaria imediatamente se propondo na sua função de visão, ao olhar imediato.

A representação pode ser considerada em alguns momentos como o ponto de partida, quando se inicia uma abordagem por algum tipo de representação, ou ponto de chegada, quando se realiza uma transformação ou conversão semióticas na terminologia de Duval. Quando se trata de dois conjuntos numéricos, por exemplo, a representação geralmente é realizada conforme a Figura 7.

Figura 7 – Representação simbólica e geométrica dos números racionais.



Fonte: Autores, 2021.

Na Figura 7 consta a representação de números racionais em dois diferentes registros: um é o sistema escrito (numérico) o outro é o geométrico.

Na primeira representação da Figura 7, o que é possível visualizar além dos algarismos? Primeiramente, que não se trata do algarismo 1 e algarismo 6, e sim do número $\frac{1}{6}$, da mesma como ocorre para o número $\frac{4}{24}$. Além disso, o processo de visualização dá abertura em se pensar na relação entre as duas frações, um modo de conjecturar a equivalência.

Na segunda representação, pode-se extrair a fração que ela determina, mas, além disso, por meio da visualização, é possível pensar na sobreposição das duas figuras e conjecturar a equivalência. Obviamente que outros conteúdos podem ser explorados por meio de tais representações, mas o objetivo aqui é evidenciar o processo da visualização e não o objeto representado.

Um exemplo apontado por Duval (1999) é a construção do gráfico correspondente a uma função. Construir o gráfico não implica que o aluno esteja visualizando, mas sim representando, ao traduzir o registro escrito para o registro gráfico. Essa construção requer uma sucessão de passos e apreensões locais. A atenção está nas unidades e não na configuração final. Esse tipo de atividade da representação requer um passo a passo, uma forma de se fazer, diferentemente da visualização, que não requer um modelo ou uma regra de execução. Mas ambas, tanto a visualização como a representação podem ser entendidas como um processo, pois elas não se concretizam como ponto de chegada, mas sim como um "meio" para acesso ao conhecimento.

A representação tem a função de revelar o objeto matemático por meio de seus registros representacionais, enquanto que a visualização tem a função de dar acesso aos objetos matemáticos por meio de suas relações.

Neste momento, é importante destacar a relação entre a representação e visualização. Conforme a ideia apresentada por Duval (1999, p. 12), "a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica", dessa forma, a visualização é realizada pela atividade de representação, precisando dela para que a visualização se concretize como um produto.

Flores (2007, p. 20) aponta que: "[é] interessante destacar que querer se fazer entender utilizando representações gráficas exige, obviamente, por parte daquele que pretende entender, a atividade de visualização". Nesse caso, a representação precisa da visualização para ser compreendida, o que reforça a ideia de que não há entendimento somente pela representação, mas de que também se faz necessária a visualização.

De modo geral, a visualização dá acesso ao objeto matemático em sua dinamicidade conceitual, enquanto que a representação destaca apenas uma perspectiva do objeto. Seja num sentido ou em outro, é importante destacar que as relações apresentadas não esgotam as compreensões sobre a visualização, nem mesmo da representação.

Após apresentar algumas discussões a respeito desses conceitos importantes, na próxima seção apresenta-se a discussão a respeito da percepção.

2.1.3 Percepção: a relação entre a sensação e a inteligibilidade

Percepção é um conceito aberto, que possui várias dimensões. Assim como a visualização, sua concepção vai ao encontro da perspectiva adotada: a perspectiva epistemológica. Para este estudo, no entanto, se dissociou a percepção do olhar da psicologia, cognição e fenomenologia, com o objetivo de se trazer de modo específico as discussões essenciais para que se estabeleçam possíveis relações entre a percepção e a visualização no campo da matemática. Portanto, a percepção, para fins desta pesquisa, tem como uma de suas principais características a capacidade de distinguir (discernir) por meio dos sentidos ou da mente.

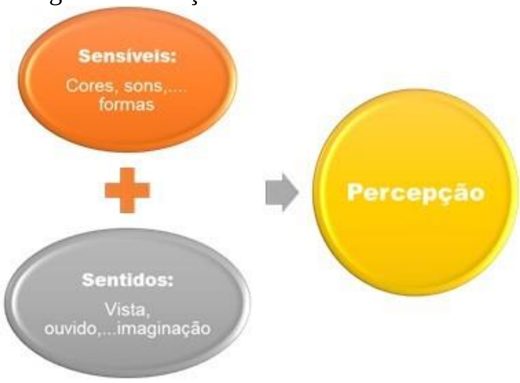
De acordo com Saes (2010, p. 9):

> A percepção, por exemplo, é um conceito que ora pende mais para a sensível, ora mais para o intelectual. Assim como aparece ligado às noções de sensação, sensibilidades ou intuição sensível, o conceito também envolve o campo das ideias e da intuição intelectual (SAES, 2010, p. 9).

Os objetos que são percebidos pelos sentidos são os que Aristóteles chama de "sensíveis", aos quais pode-se acrescentar agora os objetos percebidos pela imaginação, uma vez que se aceite a sugestão de que a imaginação é um sexto sentido para o acesso aos objetos matemáticos (Guillen, 1987). A intuição também agiria como um sexto sentido para tal acesso, o que será também importante para a compreensão que se fará sobre a visualização.

Portanto, o ato de perceber, nessa concepção ampliada, se concentra em acolher e assimilar a forma sensível dos objetos (Figura 8), ou seja, a "aparência", e não a matéria (SAES, 2010).

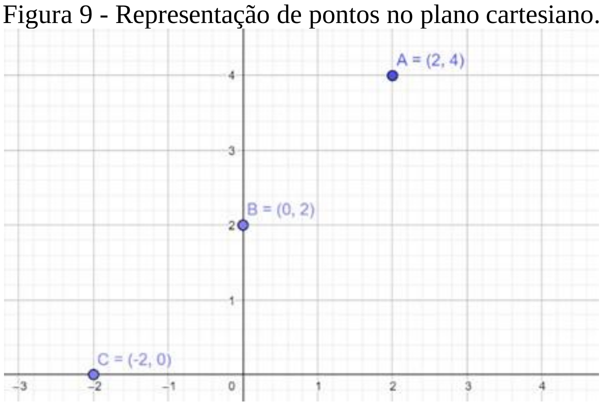
Figura 8 - Relação entre sensíveis e sentido.



Fonte: Autores, 2021.

A seguir, existem objetos sensíveis que podem ser percebidos pelo sentido da visão, como o plano cartesiano, seus eixos, os pontos representados bem como suas coordenadas cartesianas. Ouvir a descrição de um objeto já cria uma representação desse objeto, representação cuja existência é dada, neste caso, pela percepção correspondente ao ouvido. Por exemplo, ao escutar a sentença: "o ponto que correspondente à abscissa 2 e ordenada 4" evoca a representação dos eixos de um plano no sistema de coordenadas cartesianas e a localização do ponto em questão.

Figura 9 - Representação de pontos no plano cartesiano.



Fonte: Autores, 2021.

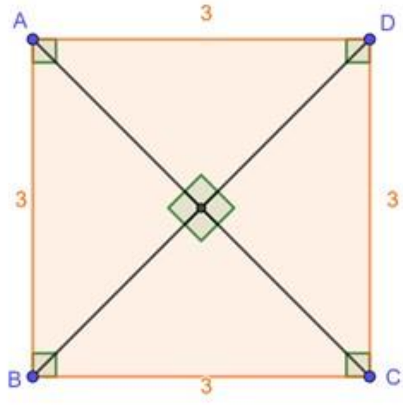
Sãs as representações que estimulam a percepção dos objetos pelos sentidos, pois o que se percebe são as representações dos objetos e não os próprios objetos. Porém, o processo inverso também é válido, isto é, o processo de perceber cria uma representação do objeto, ou seja, dá existência a uma tal representação.

Diferente dos pressupostos de Aristóteles, René Descartes (1596-1650) justifica que a percepção não é uma atividade específica dos sentidos. Para o filósofo, a percepção é intelectual.

> Descartes afirma que sentir é pensar; sendo a sensação uma atividade pressuposta na produção de qualquer ideia ou representação sensível. Na linguagem de Descartes, em vez de dizer que "vejo uma cor", o correto seria dizer que "penso que vejo uma cor", pois não basta o corpo ser afetado em seus órgãos. É preciso, além disso, que eu tenha a consciência de que ele foi afetado. Sentir implica, portanto, a consciência de sentir (SAES, 2010, p. 17).

Há um predomínio da inteligência sobre as sensações, em que os sentidos podem ser enganosos, não apresentando conteúdos confiáveis. Por exemplo, ao se enunciar a seguinte sentença: "um quadrilátero com lados congruentes, diagonais perpendiculares e ângulos internos adjacentes suplementares", a percepção estimulada pode ser a de um quadrado. Ela vem carregada de uma pré-concepção sobre a bagagem de figuras de quem percebe, incorporando nelas, por exemplo, simetrias que não estão necessariamente incluídas na descrição original (Figura 10).

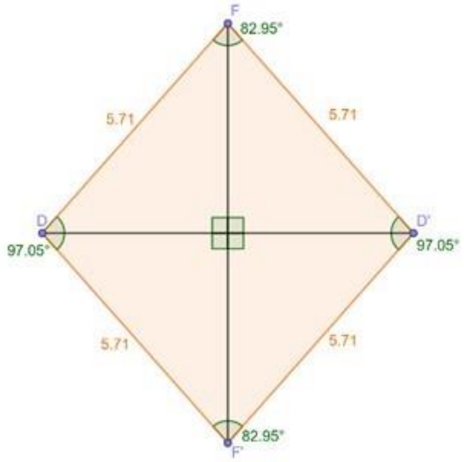
Figura 10 - Representação de um quadrado.



Fonte: Autores, 2021.

Tal percepção não seria enganosa, mas provavelmente excludente. Pelas descrições do quadrilátero: "lados congruentes, diagonais perpendiculares e ângulos internos adjacentes suplementares", outro polígono apresenta tais características, o losango (Figura 11).

Figura 11 - Representação de um losango.



Fonte: Autores, 2021.

Outro filósofo que traz também algumas considerações sobre a percepção é Immanuel Kant (1724-1804). Para Kant, a percepção deve manter a relação entre fenômeno e coisa-em-si. O fenômeno pode ser percebido, enquanto a coisa-em-si não, pois está acima da realidade sensível. O que aparece com a experiência são os fenômenos, genuínos da percepção.

A concepção de fenômeno para Kant corresponde a afirmar que a coisa se apresenta aos olhos de quem a vê. Desse modo, o fenômeno não é a coisa em si, mas sua aparência, pois o que se observa é apenas uma parcela, uma perspectiva, sendo por meio do fenômeno que percebemos a realidade. Mas, essa observação não é neutra. É composta por um entendimento de quem observa, o fator intelectual de Descartes. Ao contrário de Aristóteles, Kant considera a percepção como algo do intelecto e não dos órgãos do corpo. A "percepção é uma sensação acompanhada de consciência." (SAES, 2010, p. 23).

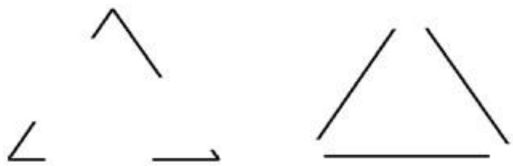
Sob outro ponto de vista, as discussões contemporâneas sobre a percepção são embasadas nas ideias de filósofos como Merleau-Ponty (1908-1961). Para este filósofo, a percepção é concebida numa perspectiva fenomenológica não Kantiana da seguinte maneira:

> Merleau-Ponty concebe a percepção como um acesso originário ao mundo, um conhecimento de existências pressuposto por todos os atos da consciência humana. Aos seus olhos, as empreitadas analíticas de algumas filosofias clássicas acabaram deixando de lado o próprio *fenômeno* perceptivo. Mas essa perda ocorreu porque, em vez de dar atenção à experiência perceptiva como um todo, tenderam a fazer do objeto percebido um alvo quase exclusivo (SAES, 2010, p. 28).

A percepção não pode ser separada em operações sensoriais e intelectuais, pois o fenômeno perceptivo acontece como um todo e não individualmente. Esse todo perceptivo está ligado ao seu contexto, incorporando afetos e valores não percebidos: "algo perceptivo está sempre no meio de outras coisas, em meio a coexistências que podem se agrupar em diferentes constelações de sentido" (SAES, 2010, p. 29).

Um exemplo para justificar essa relação do todo percebido é retirado da psicologia da Gestalt. A relação figura-e-fundo mostra que a percepção tem uma estrutura que não pode ser obtida e descrita separadamente (Figura 12).

Figura 12 - Triângulo incompleto



Fonte: Autores, 2021.

Na Figura 12 é possível perceber um triângulo mesmo não estando completo, ou seja, a percepção se dá pela totalidade. Não é projetado na figura nada que já não esteja lá desde o início (SAES, 2010). A figura em si é um triângulo incompleto, mas a percepção impele a completar o triângulo pela forma mais simples, o que se pode denominar por "completamento por simplicidade" (CIFUENTES, 2005).

De acordo com Merleau-Ponty, o que se sente e percebe são totalidades dotadas de sentido, sendo o todo significativo que confere o sentido à percepção. Além disso, o que é percebido é organizado em formas e estruturas. A diferença entre percepção e visualização é que esta última atinge a essência do objeto, enquanto a percepção atinge a aparência do objeto dada pela sua concretude representacional.

Com as diferentes abordagens sobre percepção, que variam desde a perspectiva da sensação gerada pelos sentidos (órgãos do corpo), a percepção intelectual e a percepção como totalidade do que é percebido, é possível levantar alguns questionamentos e compreensões sobre as relações e distinções entre a visualização e a percepção.

Diferente da percepção, a visualização não se limita a um dos cinco sentidos, como o da visão por exemplo. A visualização, pertencente ao campo da sensibilidade, é uma das formas do pensamento matemático caracterizado principalmente pela sua dinamicidade, enquanto que, na percepção, a representação percebida é estática.

Na percepção, alguns objetos matemáticos são entendidos como totalidade, assim como acontece na visualização. Ou seja, ambas estão no meio a coexistências, não há uma percepção das partes, assim como na visualização.

Como já mencionado, quando um objeto é visualizado, o é em sua essência, enquanto que a representação de um objeto lhe dá uma certa concretude que é o sujeito da percepção.

A visualização, assim como a percepção, traz as vivências de quem visualiza/percebe, sejam vivências visuais e até mesmo interpretações. Por esse motivo, não há um modo único e universal de visualizar/perceber, pois nesses processos, as pré-concepções também coexistem.

Portanto, com o objetivo de apresentar os diferentes olhares e entendimentos que existem sobre a visão, representação e percepção, encerra-se essa seção no ensejo de que se tenha compreendido que tais termos não são sinônimos da visualização, mas que existem relações importantes que os tornam significativas no seu processo.

Algumas abordagens iniciais foram direcionadas a visualização, possibilitando um entendimento prévio sobre o tema. Porém, para fundamentar o estudo e aprofundar sobre o assunto, na próxima seção serão apresentadas algumas compreensões sobre a visualização presentes na literatura correspondente, e na sequência será evidenciada a concepção de visualização construída para esta pesquisa.

2.2 ALGUMAS ABORDAGENS SOBRE A VISUALIZAÇÃO

Descortinar as múltiplas compreensões sobre a visualização – tanto nas pesquisas teóricas quanto nas pesquisas com escopo metodológico direcionado para a sala de aula em seus diferentes níveis – é uma ação que requer o estudo da visualização não apenas pontual, mas ampliado. A partir dessa compreensão, a atenção perpassa a investigação sobre o sentido de visualização adotado pelo pesquisador em um determinado momento e o escopo de análise se concentra na conceitualização da visualização construída, modificada e ampliada no decorrer de sua concretização.

As perspectivas sobre a visualização são estruturadas diante do seu desenvolvimento evolutivo, semelhante às ideias de percepção apresentadas no tópico anterior. Importante destacar que esse modo evolutivo não se estabelece na linearidade de datas ou períodos, pois, em alguns momentos, é possível perceber o recurso da visualização como argumento em algumas demonstrações, como na sistematização da geometria por Euclides e subsequente modo de pensar a matemática. Já em outros modos, a visualização aparece como uma ferramenta auxiliar. O objetivo da organização aqui apresentada é o de que o leitor possa perceber essas diferentes compreensões e o modo como elas estão, ou não, relacionadas.

Com a narrativa e estrutura sobre as compreensões de visualização consolidadas, torna-se possível delinear a perspectiva que será adotada nesta pesquisa, colocando-a em contexto.

As perspectivas levantadas serão, sempre que possível, estudadas por meio de exemplos, principalmente provenientes de conteúdos matemáticos da Educação Básica.

A seguir será realizada uma descrição sobre as concepções de visualização de três autores, sendo que dois deles direcionam seus estudos para o campo educacional, enquanto o terceiro faz uma abordagem do tema na perspectiva filosófica.

2.2.1 Arcavi (pesquisas de 2003 e 2015)

Dois artigos do autor Abraham Arcavi, um de 2003 e outro de 2015, foram estudados: *The role of visual representations in the learning of mathematics* (2003) e *Revisiting Aspects of Visualization in Mathematics Education* (2015), ambos com um viés pedagógico no campo da Educação Matemática. A ideia em selecionar esses dois trabalhos está na atenção em se olhar para como o autor interpretava a visualização em 2003 e, consequentemente, se teve alguma mudança ou ampliação dessa interpretação no trabalho de 2015.

No primeiro artigo, a discussão se inicia em torno do invisível, especificamente em "ver o invisível", sendo este um ponto importante pelo fato de fundamentar as ideias de visualização que vão se formando. Primeiramente, o invisível se relaciona ao que não é possível de ser visto devido à limitação do que o autor chama de "*hardware* visual", sendo necessário o uso de um recurso tecnológico que ajude a ver algo que seja extremamente pequeno, como microrganismos, por exemplo, ou algo que esteja muito longe.

Outro sentido de "ver o invisível" se refere ao abstrato, em que o recurso tecnológico físico não é efetivo, sendo necessário o que Arcavi chama de "tecnologia cognitiva". A matemática lida com entidades diferentes dos fenômenos físicos, em que os objetos não são reais, mas são representações que tornam suas transformações e concretizações possíveis. Portanto, "depende fortemente (possivelmente muito mais do que os matemáticos estariam dispostos a admitir) da visualização em suas diferentes formas e em diferentes níveis, muito além do campo visual da geometria e da visualização espacial" (ARCAVI, 2003, p. 216).

É interessante, na perspectiva do autor, que a atividade de visualização não é exclusiva da unidade temática[2] da geometria, mas pode estar atrelada a outras unidades da matemática, sendo comum no entendimento de visualização e da associação direta aos objetos geométricos, que são mais idôneos para uma abordagem visual.

[2] Antes denominados 4 eixos estruturantes nos PCNs (números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação) agora são as 5 unidades temáticas na BNCC (números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística).

Ao apresentar a visualização em duas diferentes formas e níveis, percebe-se a abrangência dada ao termo. Portanto, para o autor:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotos, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de descrever e comunicar informações, pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e avançar no entendimento (ARCAVI, 2003, p. 217)[3].

Essa concepção é complexa e geral, mas tal complexidade é especificada nas funções de visualização que o autor apresenta e são delineadas a seguir.

Na perspectiva apontada por Arcavi, percebe-se a visualização como tendo duas diferentes naturezas: produto e atividade. O produto está atrelado ao que uma representação, uma foto, uma imagem podem potencializar matematicamente. Já a atividade de visualização exige uma ação de buscar o que mais existe naquele produto, quais relações, o que mais é possível extrair.

Além das duas diferentes naturezas, a visualização também apresenta diferentes funções. Em relação ao argumento simbólico, ela tem a função de ajustar intuições primárias e equivocadas, harmonizando com os argumentos simbólicos. As soluções visuais permitem relacionar conceitos e significados que podem ser ignorados nas soluções exclusivamente simbólicas.

Na resolução de problemas, de acordo com o autor, a visualização se apresenta na função de fornecer mecanismos visuais, que registram lembretes para uma próxima ação. Nesse sentido, "a visualização é uma ferramenta para se livrar de situações nas quais pode estar incerto de como proceder" (Arcavi, 2003, p. 224)[4]. Como exemplo, pode-se pensar na construção gráfica de uma função após a determinação de vários pontos do plano cartesiano, obtido em uma tabela (como a tabela a seguir) em que ocorre uma "pista visual" da próxima etapa, a qual permite, por um processo de completamento, interpolar ou extrapolar dados. De uma forma mais simples, esses dados se ajustam à descrição parcial dada na tabela, obtendo-se uma reta, conforme o gráfico.

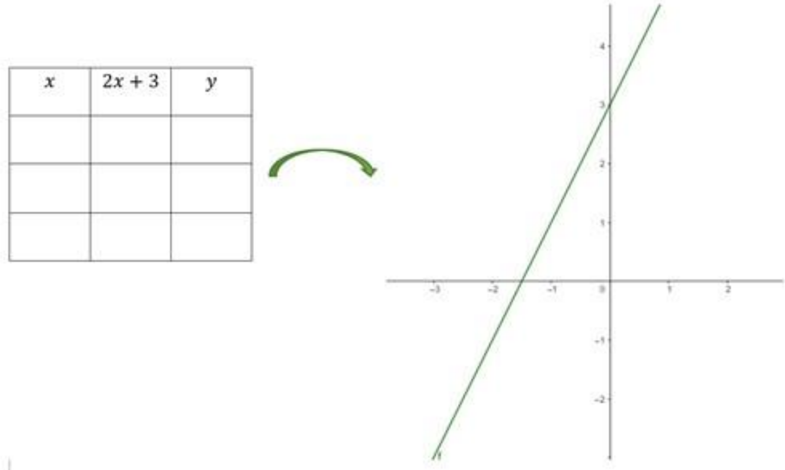
Dialogando com o autor, uma outra forma de entender o momento da visualização seria o de enxergar o gráfico em sua totalidade, se trata de um processo de visualização (Figura 13).

---

[3] No original: "Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings."

[4] No original: "In this case, visualization may function as a tool to extricate oneself from situations in which one may be uncertain about how to proceed."

Figura 13 - Exemplo da construção gráfica de uma função afim.



Fonte: Autores, 2021.

A visualização também é caracterizada por organizar os dados em estruturas significativas, para encaminhar o desenvolvimento analítico de uma solução. Porém, a visualização pode ser o próprio processo analítico, que finaliza com uma solução formal.

Há muitas ressalvas e inquietações, por parte de professores de matemática, pesquisadores e até mesmo estudantes, em aceitar a visualização como forma legítima de raciocínio, porém o objetivo não é dicotômico em se escolher o método formal ou visual de raciocínio. De acordo com Arcavi "A visualização como um processo não se destina a excluir a verbalização (ou símbolos, ou qualquer outra coisa), pelo contrário, pode muito bem complementá-la" (Arcavi, 2003, p. 227)[5]. O raciocínio visual que está por trás não é de caráter lógico e ainda deve ser estudado. Com essas interpretações e reflexões sobre a visualização é possível ter uma ideia da razão pela qual a concepção de visualização apresentada inicialmente é tão abrangente.

Em um segundo artigo (2015) de Arcavi, o autor retoma a compreensão de visualização, citada em seu trabalho de 2003, porém explicando-a mais detalhadamente. Nesse momento de sua produção, aparecem três alternativas para a visualização: uma habilidade, um processo e um produto. Sendo a visualização uma habilidade, processo ou produto, cabe o questionamento: do quê? As opções apresentadas são: criação, interpretação, uso e reflexão sobre figuras, imagens e diagramas.

Os questionamentos "o que é" e "do que" já foram levantados, sendo o próximo: visualização onde? Seria na mente, no papel ou com ferramentas tecnológicas. Por fim, a

[5] No original: "As to the first reservation, we may counter-argue that visualization as a process is not intended to exclude verbalization (or symbols, or anything else), quite the contrary, it may well complement it".

concepção finaliza com a questão: para que? Pode ser para a comunicação de informações, pensamento, aprendizado e compreensão (Figura 14).

Figura 14 – Síntese sobre a visualização de acordo com Arcavi.

Fonte: Arcavi, 2015, p. 146.

De acordo com os entendimentos apresentados, o que se pode perceber é que a visualização não aparece como papel principal nesse cenário, sendo empregada como uma ferramenta, um modo facilitador. Até mesmo quando se utiliza a terminologia "processo", a denotação é para um passo a passo, uma ideia visual do que vem a seguir.

Se considerar a visualização como habilidade de reflexão, interpretação ou criação, direciona sempre para um denominador comum, resultando num esboço, imagem, seja física ou mental. Do mesmo modo se pensar num processo ou produto.

Certamente, todas essas considerações são importantes para a construção da ideia que se faz de visualização, porém a ação central deveria ser o "pensar" e o entendimento de que a visualização seria um modo de pensar a matemática, integrando o processo de construção do saber matemático. A palavra "processo", por sua vez, ganha um sentido diferente nessa ocasião, não como método, mas como desenvolvimento dinâmico do pensamento. O modo de pensar pela visualização está no processo, nesse movimento entre o conhecido e o desconhecido. Vê-se, então, que a abordagem de Arcavi sobre a visualização é por uma perspectiva cognitiva, mais do que epistemológica.

Para dar prosseguimento às discussões apresentadas a respeito da visualização, apresenta-se na próxima seção os estudos de Marcus Giaquinto, estudioso que situa a visualização numa perspectiva diferente da dimensão da visualização como ferramenta ou instrumento de auxílio.

2.2.2 Marcus Giaquinto

Para a compreensão de visualização proposta por Giaquinto, dois artigos foram estudados: *Visualizing as a Means of Geometrical Discovery* (1992) e *The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics* (2015). Esses estudos são de natureza mais filosófica do que pedagógica. O que chama atenção em seus trabalhos é que o autor não apresenta uma conceitualização sobre visualização, mas busca compreender as possibilidades epistemológicas sobre o conceito, levantando questionamentos e trazendo exemplos que possibilitem ao leitor entender sua linha de pensamento.

Importante observar que o tempo de publicação dos textos dista em 23 anos. Certamente outros trabalhos foram encontrados, mas em contato com o próprio autor, essas foram as sugestões por ele apresentadas em relação à visualização matemática. Os olhares e entendimentos apontados em 2015 parecem em alguns momentos uma complementação dos que foram propostos em 1992. Para fins práticos, o primeiro artigo será denominado como “1” e o segundo artigo como “2”.

O artigo 1 traz algumas reflexões sobre a visualização na formação das conjecturas matemáticas, levantando o seguinte questionamento: a visualização pode ser um meio de descoberta na geometria? Para o autor, o sentido de descoberta diz respeito a: “descobre-se uma verdade passando a aceitá-la de forma independente e de maneira epistemicamente aceitável” (GIAQUINTO, 1992, p. 382)[6].

Já no artigo 2, o estudo se direciona para o pensamento visual e o seu papel epistemicamente significativo. As possíveis funções epistêmicas apresentadas pelo autor são: contribuições para sua ação na evidência, na demonstração, na descoberta e na compreensão de conceitos. Os indícios de que o pensamento visual apresenta algum papel epistêmico nas demonstrações matemáticas são os mais complexos, se é que existem na visão de Giaquinto.

Uma diferença observada entre os dois trabalhos está nas palavras “visualização” e “pensamento visual”, se estendendo em alguns momentos para o “raciocínio visual”. Diante

[6] No original: “One *discovers* a truth by coming to believe it independently in an epistemically acceptable way”.

dessas diferentes nomenclaturas, faz-se necessário entender em que sentido elas foram utilizadas.

Sem levar em consideração todo rigor filosófico e psicológico das palavras pensar e raciocinar, analisando-as apenas em algumas diferenças parciais entre o pensamento visual e raciocínio visual, pode-se observar que: ambos são processos mentais, porém o pensamento nem sempre é consciente, podendo ser um ato involuntário. Em contrapartida, no raciocínio há uma intencionalidade, uma racionalização na forma do pensar, consequentemente uma consciência. De forma bastante singular, raciocinar pode ser entendido como um subprocesso do pensamento, em que os argumentos constituídos pelo raciocínio são de caráter lógico, ligados aos raciocínios dedutivo e indutivo.

Desse modo, o pensamento visual se constitui em pensar por meio de uma figura, um gráfico ou um diagrama, sendo esse objeto físico ou mental. O raciocínio visual caracteriza-se pela intencionalidade em conjecturar, argumentar por meio de figuras, gráficos, diagramas, físicos ou mentais. De acordo com Giaquinto (2015):

> O pensamento visual inclui o pensamento com representações visuais externas (por exemplo: diagramas, matrizes de símbolos, imagens cinemáticas de computador) e o pensamento com imagens visuais internas. Frequentemente os dois são usados em combinação, como quando somos obrigados a imaginar visualmente uma certa transformação espacial de um objeto representado por um diagrama no papel ou na tela (GIAQUINTO, 2015, p. n.p)[7].

Mas então, qual a diferença entre pensamento visual e visualização? Ou melhor, qual a relação entre a visualização e o pensamento visual? A visualização e o pensamento visual são distintos, mas ao mesmo tempo indissociáveis. Em contrapartida ao pensamento visual, a visualização se estende para além da figura, gráfico, diagramas, enfim, representações dos objetos matemáticos. Como modo de pensar a matemática ela inclui visualizar relações, estabelecer associações, sintetizar e observar generalizações possíveis.

Se o foco do estudo é a visualização, então por que estudar o pensamento visual? Primeiramente para compreender as diferenças entre os termos e não os considerar como sinônimos. Em segundo, para observar as relações e limitações.

Realizada essa breve descrição das perspectivas empregadas sobre a visualização, o pensamento visual e o raciocínio visual, um questionamento preeminente nos trabalhos estudados é o seguinte: seria possível descobrir relações e propriedades matemáticas por meio

[7] No original: “Visual thinking includes thinking with external visual representations (e.g., diagrams, symbol arrays, kinematic computer images) and thinking with internal visual imagery; often the two are used in combination, as when we are required to visually imagine a certain spatial transformation of an object represented by a diagram on paper or on screen”.

da visualização? Caso seja possível, quais seriam os critérios de comprovação e confiabilidade da descoberta realizada? Para refletir sobre tais questionamentos, é apresentado a seguir o sentido da descoberta proposta pelo autor, especificamente na sua forma independente e sua aceitabilidade epistêmica.

A independência corresponde ao pensar por si só, ou seja, quando não é instruída para um pensamento específico. A aceitabilidade epistêmica se fragmenta em dois itens: a) "uma verdade é aceitável somente se ela for confiável"; b) uma verdade é epistemicamente aceitável somente se não for prejudicada ou derrotada por outra" (Giaquinto, 1992, p. 392)[8]. Essa questão da confiabilidade é o que desenha as reflexões e questionamentos seguintes sobre a visualização.

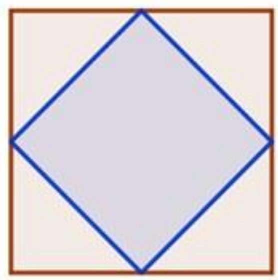
A justificativa tem um papel importante na confiabilidade de uma descoberta, em que ela é classificada por Giaquinto como demonstrável e padrão. Demonstrável é aquela justificativa que passa pelo desafio público, ou seja, é comunicada e posteriormente verificada e validada por terceiros. A justificativa padrão não é demonstrável, porém, não viola nenhuma racionalidade epistêmica.

Como forma de elucidar essa construção, é apresentado o seguinte exemplo:

> Imagine um quadrado. Cada um dos seus quatro lados tem um ponto médio. Agora visualize o quadrado cujos vértices coincidem com esses quatro pontos médios. Se você visualizar o quadrado original com uma base horizontal, o novo quadrado deverá parecer inclinado, sustentado por um dos vértices, "como um diamante", dizem algumas pessoas. Claramente, o quadrado original é maior que o quadrado inclinado contido nele. Quanto maior? (GIAQUINTO, 1992, p. 385)[9].

A imagem em si não é apresentada no artigo, mas pode ser exibida, como na Figura 15.

Figura 15 - Figura que apresenta o problema do quadrado.



Fonte: Autores, 2021.

[8] No original: "A way of coming to believe a truth is epistemically acceptable only if it is not undermined or defeated by other beliefs of the person concerned."

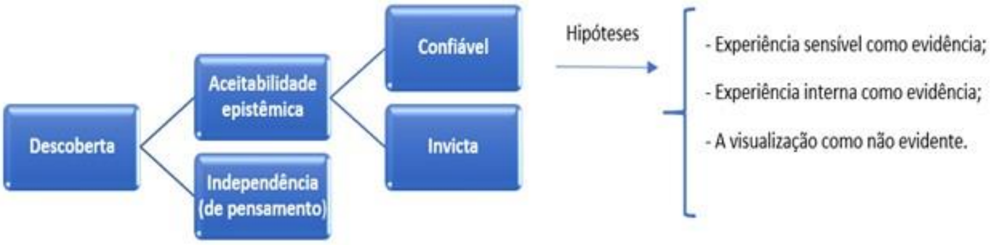
[9] No original: "Imagine a square. Each of its four sides has a midpoint. Now visualize the square whose corner-points coincide with these four midpoints. If you visualize the original square with a horizontal base, the new square should seem to be tilted, standing on one of its corners, 'like a diamond' some people say. Clearly, the original square is bigger than the tilted square contained within it. How much bigger?"

A partir da figura, para responder à pergunta de Giaquinto, pode-se formular a seguinte conjectura: dobrando ao interior do quadrado menor os quatros triângulos externos a ele, podemos cobrir totalmente o esse quadrado. Observa-se que essa conjectura é resultado de uma visualização por reconfiguração. Esse processo nos permite concluir que o quadrado original tem o dobro da área do quadrado interno.

O caminho para mostrar essa conjectura envolve um raciocínio verbal que complementa o processo de visualização anterior, ou seja, seria transcrever o pensamento visual, verbalizar. Porém, é a confiabilidade dessa conjectura que motiva algumas reflexões sobre a visualização e seu papel na descoberta matemática. Por sinal, o problema proposto na figura anterior, já havia sido abordado por Platão no seu diálogo Ménon.

Como mencionado anteriormente, para se chegar à uma descoberta, é necessário passar por dois julgamentos: independência do pensamento e aceitabilidade epistêmica. Essa última deve ser confiável e invicta (Figura 16).

Figura 16 - Critérios de validação para uma descoberta.



Fonte: Autores, 2021.

A questão da confiabilidade direciona para algumas hipóteses. A primeira delas é que a confiabilidade pode ser obtida por meio da experiência sensível como evidência e como experimento interno.

Ao considerar que visualizar os triângulos cobrindo o quadrado interno é uma experiência sensorial, o resultado não seria uma descoberta. Essa experiência sensorial pode estar relacionada com o uso de generalização de experiências passadas, como apontado por Platão no Ménon. Assim, por exemplo, os embrulhos de presentes se assemelham à ideia de dobrar os triângulos formando um quadrado. Quando a conjectura é atingida dessa maneira, nasce a ideia de que um contraexemplo para esse modo de ver é uma impossibilidade epistêmica, o que indica que não foi alcançada por meio de uma experiência sensorial.

Outro modo de experiência pode ser entendido da seguinte forma: se forem realizadas sucessivas dobras em um papel, na tentativa de cobrir o quadrado com os triângulos, teria que ser incluída uma confirmação muito extensa para a proposição, o que torna implausível que a visualização a partir das dobragens de papel seja válida.

Se a experiência sensível como evidência não direciona para confiabilidade requerida, a outra hipótese é a de que a evidência da própria experiência de visualização pode direcionar para essa confiabilidade.

A observação da experiência de visualização seria então um experimento interno? A visualização pensada dessa maneira se reflete num processo que incorpora a realização do experimento e a observação do resultado (Giaquinto, 1992). Porém, a observação está atrelada à intencionalidade e uma subjetividade de quem observa. Por exemplo, visualizando os triângulos sendo dobrados sobre o quadrado interno, uns podem concluir que o quadrado interno estava coberto completamente, no entanto, outros podem não observar isso.

Então, se a visualização for considerada como experimento interno, a conjectura parecerá clara ao visualizador antes que o raciocínio ocorra, sendo assim, redundante. Portanto, a experiência sensorial por evidência, seja interna ou externa, se relaciona ao que é visto de forma imediata.

A última hipótese apresentada reflete o papel não evidencial de visualizar. Desse modo, a visualização não teria como ponto de partida a evidência, mas sim as relações conceituais. Em outras palavras, a visualização não mostra o evidente, mas sim, torna evidente o que mostra, uma outra forma de parafrasear Paul Klee. De acordo com Giaquinto:

> Mas a ideia norteadora é clara: começamos a ver itens em certas imagens conceituais como relacionadas de uma certa maneira; visualizamos uma certa transformação desses itens, uma transformação no grupo conceitual relevante; como resultado, acabamos visualizando-os como relacionados de uma nova maneira. Nesse caso, o papel da visualização seria levar uma das crenças conceituais para uma nova crença por meios sancionados por alguns dos conceitos envolvidos. A hipótese atual é que, no caso em discussão, a visualização possa ter esse papel (GIAQUINTO, 1992, p. 396)[10].

Tomando a visualização na perspectiva de que ela não mostra o evidente, o autor quebra a dicotomia da visualização entendida como ver, relacionada a uma experiência sensorial, um senso de imediatismo do que é evidente. Mas isso não quer dizer que essa visualização não venha carregada de pré-concepções e conceitos, sendo uma maneira a priori de conjecturar e de tornar evidente.

---

[10] No Original: "But the guiding idea is clear: we start off viewing items in certain concept images as related in a certain way; we visualize a certain transformation of these items, a transformation in the relevant concept group; as a result we end up viewing them as related in a new way. If so, the role of the visualizing would be to take one from conceptual beliefs to a new belief by means sanctioned by some of the concepts involved. The present hypothesis is that, in the case under discussion, the visualizing can have this role".

Passando a utilizar o termo pensamento visual em busca do seu papel epistêmico na compreensão matemática, por meio de representações visuais externas e internas, faz-se importante distinguir as ações vinculadas a esse pensamento visual: o de acompanhar o processo de uma demonstração e o que é essencial para tal demonstração. É possível reparar que em nenhum momento o pensamento visual é tido como demonstração num sentido lógico, mas sim como ferramenta no primeiro caso e como indispensável no segundo. Geralmente isso acontece porque os argumentos visuais carecem do rigor lógico para ser confiáveis dentro dos critérios de validação propostos pelo autor.

Portanto, não obtendo um peso epistemológico para a demonstração, uma alternativa é o pensamento visual como uma maneira de descoberta. Para o autor "o pensamento visual pode ser mais valioso para a descoberta do que para a demonstração". Mas qual a distinção entre demonstração e descoberta de acordo com Giaquinto?

> A diferença entre descobrir uma verdade e demonstrar é uma questão de transparência: para demonstrar ou seguir uma demonstração, o sujeito deve estar ciente da maneira pela qual a conclusão foi alcançada e a solidez dessa maneira. Isso não é necessário para a descoberta (GIAQUINTO, 2015, p. n.p)[11].

Para Giaquinto, os três tipos importantes de descoberta matemática são: a) descoberta proposicional, b) descoberta de uma estratégia de demonstração, c) descoberta de uma propriedade ou tipo de entidade matemática.

A descoberta proposicional consiste em descobrir se uma proposição é verdadeira. Ou seja, é possível descobrir por meio do pensamento visual, usando o conhecimento de fundo, que resultará num argumento a partir do qual se pode constituir uma demonstração. (GIAQUINTO, 2015).

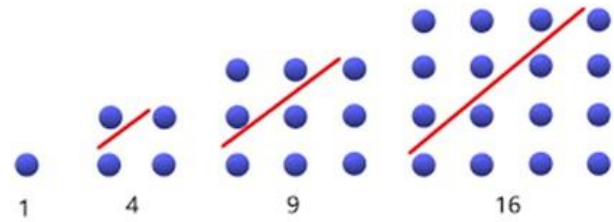
No caso da descoberta de uma estratégia de demonstração, o pensamento visual não é um meio de descobrir uma proposição, mas pode fornecer ideias para um roteiro de demonstração, o que mais adiante, no capítulo 2, será discutido como: a visualização da forma de um argumento.

Para o caso de descoberta de uma propriedade ou entidade matemática, Giaquinto apresenta um exemplo no contexto das geometrias não euclidianas, mas a mesma ideia é possível de ser ilustrada com o exemplo na teoria dos números poligonais de Pitágoras: podem ser descobertas e conjecturadas algumas propriedades aritméticas desses números, apelando, por visualização, as suas configurações geométricas. Assim, por exemplo, pode-se "ver" que

[11] No original: "The difference between merely discovering a truth and proving it is a matter of transparency: for proving or following a proof the subject must be aware of the way in which the conclusion is reached and the soundness of that way; this is not required for discovery."

todo número quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos. A visualização que não constitui uma demonstração (Figura 17).

Figura 17 - Relação entre os números quadrados e os números.



Fonte: Canal et al., 2018.

Portanto, mesmo que o pensamento visual possa não apresentar a confiabilidade requerida em uma demonstração matemática, ele ainda pode ter um papel importante na descoberta de uma ideia que possa servir como estratégia para uma demonstração.

Com tais discussões, questionamentos e reflexões apresentadas por Giaquinto, algumas considerações importantes devem ser feitas em relação à construção da concepção de visualização que está sendo realizada nesse trabalho.

A primeira delas trata-se da questão da confiabilidade da visualização enquanto demonstração e descoberta. A concepção construída deve levar em consideração que a visualização caminha junto com a racionalidade matemática, ou seja, não há a intenção de exclusão de uma para a permanência da outra. Pelo contrário, o objetivo é que essa relação entre os modos de pensar criem vínculos cada vez mais produtivos.

Em segundo plano, é importante levar em consideração as funções epistêmicas da visualização na aprendizagem matemática tais como: descoberta e compreensão de conceitos. A visualização como modo de pensar pode promover aqueles momentos do “aha!”, quando o estudante descobre uma nova relação, propriedade etc. (por mais que já exista, ela é nova para o estudante). Pode também orientar o pensamento do estudante para uma outra perspectiva de um conceito já existente para ele.

Na sequência, são apresentados alguns trabalhos realizados por Norma Presmeg, pesquisadora que vem realizando estudos sobre a visualização desde 1985, numa vertente metodológica, sendo uma referência para essa temática.

2.2.3 Norma Presmeg

A autora Norma Presmeg é uma das estudiosas que apresentam os trabalhos mais relevantes e referenciados em relação à visualização. Não é a primeira a tratar do tema no contexto da educação matemática, mas apresenta em seus estudos uma discussão que relaciona tanto o ensino quanto a aprendizagem. Suas primeiras publicações sobre o tema iniciam em 1985, mas ela continua a apresentar trabalhos nas décadas seguintes. Assim como Arcavi, é interessante observar essa trajetória de trabalhos e estudos realizados, pois é nesse percurso que se percebe como o tema vai se incorporando e ganhando novos elementos.

Nesta seção o que se pretende não é resenhar seus trabalhos, mas indicar o olhar direcionado para o entendimento da autora sobre visualização. Os artigos, nos quais se obteve o acesso durante esse estudo estão descritos no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 - Trabalhos de Presmeg que foram levantados.

Data de publicação	Título
1986(a)	*Visualization and mathematical giftedness*
1986(b)	*Visualization in high school mathematics* *Visualization and mathematical giftedness*
1999	*Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos*
2006	*Research on visualization in learning and teaching mathematics*
2014	*Contemplating visualization as an epistemological learning tool in mathematics*

Fonte: Autores, 2021.

Uma palavra que chama a atenção nos trabalhos de Presmeg é "imagem". Em uma conclusão precipitada, visualização poderia ser entendida como elaboração de imagens, portanto ligado ao sentido da visão. Certamente essa seria uma conclusão equivocada dos trabalhos por ela desenvolvidos. O que diferencia a imagem visual da imagem imediata é justamente a profundidade e detalhamentos apresentados sobre a imagem visual, que serão descritos na sequência.

Os primeiros trabalhos desenvolvidos pela autora trazem as componentes do pensamento como especificações iniciais. De acordo com Presmeg (1986b): "a força do componente verbal do pensamento determina o nível de habilidades matemáticas, enquanto o componente visual-espacial determina seu tipo." (p. 42)[12], o que pode ser esquematizado, conforme a

[12] **No original**: "(...) the strength of the verballogical component of thinking determines the level of mathematical abilities, while the visual-spatial componente determines their type**"**.

Figura *18* .

Figura 18 - Estruturação das componentes do pensamento.

Fonte: Presmeg, 1986b.

As concepções sobre os termos imagem visual, visualizadores, visualidade de ensino serão apresentadas, para permitir a composição das impressões iniciais sobre "o que" e "como" a autora entende por visualização matemática. Os termos são: imagem visual, métodos visuais e não visuais de solução, visualidade matemática, visualizadores e não visualizadores, apresentação visual, visualidade de ensino e, por fim, professores visuais e não visuais. Alguns tendem a ser autoexplicativos, porém, normalmente aparecem detalhes que precisam ser analisados.

Para Presmeg (1999), a imagem mental pode ser construída por diferentes modalidades, sendo elas: visual, auditiva, tátil e cinestésica. Dentro de cada modalidade existem diferentes tipos, como por exemplo, a imagem visual, considerada como um esquema mental que descreve informações visuais ou espaciais. Tais imagens podem descrever uma forma, um padrão, uma imagem mental, desenhos, diagramas, também símbolos verbais, numéricos e matemáticos que possam ser organizados espacialmente formando uma espécie de forma numérica e/ou algébrica. Com essa definição já é possível entender que a imagem visual, para a autora, não é somente algo que vem de imediato aos olhos, ou seja, não é acessada única e exclusivamente pelo sentido da visão.

Métodos visuais, nesse sentido, correspondem ao uso de imagens visuais como parte essencial do método de solução, sendo o método não visual o que não envolve imagens visuais. Os métodos visuais podem incluir na solução a utilização de gráficos, tabelas, desenhos, diagramas, que podem estar representados no papel ou na mente de quem a constrói. Destaca-se a palavra “essencial” para deixar perceptível que o método visual não exclui outros métodos, como o raciocínio lógico por exemplo, mas se apresenta como predominante.

Outro termo apresentado pela autora é “visualidade matemática”, que trata da extensão pela qual uma pessoa prefere utilizar métodos visuais para resolver problemas matemáticos que poderiam ser resolvidos por métodos visuais e não visuais (PRESMEG, 1986b).

Após a apresentação das concepções de imagem visual, métodos visuais, visualidade matemática, são classificadas as pessoas que preferem usar ou não os métodos visuais, denominadas de visualizadores e não visualizadores. Visualizadores são aqueles que preferem utilizar métodos visuais para problemas que podem ser resolvidos por métodos visuais ou não visuais. Os não visualizadores são aqueles que preferem utilizar métodos não visuais para esses tipos de problemas.

No uso da expressão “métodos visuais” e outros termos relacionados, pode-se observar o forte caráter metodológico da abordagem realizada pela autora. Ao mencionar o método visual já se supõe uma objetividade do que é visual, porém, como poderia ser mensurada a visualização, sendo ela um modo dinâmico de pensar?

Todos os termos apresentados indiretamente estão correspondendo ao aprendizado, a figura do aluno. Porém, os três termos a seguir se referem ao ensino: apresentação visual, visualidade de ensino, professores visualizadores e não visualizadores.

A apresentação visual é classificada como “uma forma de ensino que envolve a formação e utilização de imagens visuais pelo professor ou alunos ou ambos.” (Presmeg, 1986b, p. 42)[13]. Ou seja, está diretamente relacionada ao ensino.

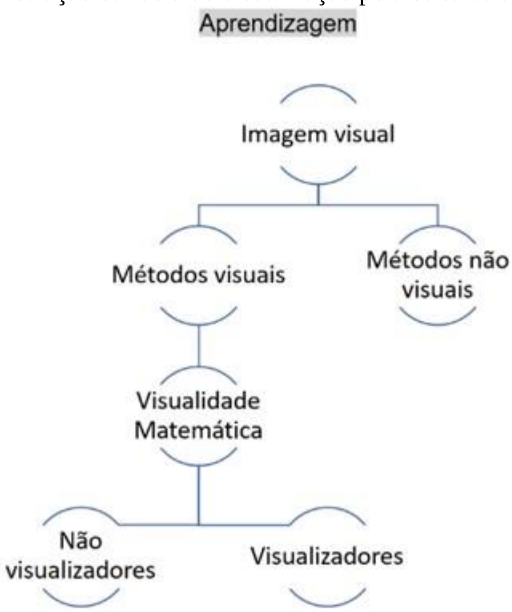
A visualidade de ensino é a extensão pela qual o professor utiliza de apresentações visuais ao ensinar matemática.

Por fim, professores visuais não estão relacionados diretamente a visualizadores ou não visualizadores, mas sim à sua prática visual ou não visual. Desse modo, professores visuais apresentam alta visualidade pedagógica, enquanto os não visuais são classificados como aqueles de baixa visualidade pedagógica.

Diante de todas essas definições, a visualização especificamente não é conceituada, porém, por meio do diagrama a seguir é possível compreender a abrangência dada pela autora (Figura 19 e Figura 20).

[13] No original: “A visual presentation is a way of teaching which involves formation and use of visual imagery by the teacher or pupils or both.”

Figura 19 - Construção da ideia de visualização pela ótica da aprendizagem.



Fonte: Presmeg, 1986a; Presmeg, 1986b.

Figura 20 - Construção da ideia de visualização pela ótica do ensino.

Fonte: Presmeg, 1986b.

De que forma é possível "mensurar" ou concluir que o aluno é ou não visualizador, que o professor é ou não visual? Nas duas pesquisas realizadas em 1986, Presmeg traz alguns elementos de discussão para realizar tais classificações, mas os pontos importantes desses estudos são as características e consequências de um modo de aprendizagem de ensino visual ou não visual.

Uma interpretação quase que imediata é: para os alunos em que o elemento visual é dominante, os problemas abstratos são resolvidos visualmente. Para os alunos em que o elemento abstrato é dominante, problemas geométricos são resolvidos por meio do raciocínio lógico. Nesse contexto, elemento visual é pensado como predominância do uso de imagens visuais. Esta classificação é apresentada por Poincaré no início do século XX, quando diferencia a mentalidade dos matemáticos em geômetras (mais intuitivos) e analíticos (mais lógicos). Além disso, também existem alunos para os quais esses elementos estão em equilíbrio, ou seja, não demonstram uma tendência para os elementos visuais ou para os elementos abstratos, sendo predominante o visual em alguns momentos e o abstrato em outros. Esse equilíbrio também chamado de pensamento ambidestro.

Em Presmeg (1986b), os alunos foram classificados como visualizadores e não visualizadores (a maioria), sendo interessante apresentar os argumentos dados pela autora sobre as possíveis razões para este último. Fatores externos, como a preferência por métodos não visuais, por exemplo, é um dos motivos.

A preferência por esses métodos pode ser definida pelo próprio aluno a partir de questões, como: maior facilidade, conseguir descrever de maneira mais ampla seus argumentos etc., mas esses fatores internos podem estar associados a fatores externos, como os currículos escolares, exames, a prática de um procedimento ou fórmula pode levar a habituação, ou seja, os métodos não visuais são os mais enfatizados no ensino.

Observando professores visuais e não visuais bem como alunos visualizadores e não visualizadores, Presmeg apresenta algumas considerações. A primeira delas é que os alunos visualizadores sentem a necessidade de interpretar um problema no seu plano geral, analisando o todo, um traço de caráter epistemológico. Por outro lado, para a maioria dos não visualizadores, essa necessidade não é observada. Além disso, segundo a autora:

> Também foi constatado que os métodos visuais costumam consumir mais tempo que os métodos não visuais. Outro aspecto que se mostrou característico da solução de problemas de muitos visualizadores nas entrevistas baseadas em tarefas foi a dificuldade de comunicar os conceitos de matemática. Os visualizadores tropeçaram na terminologia e não conseguiam se lembrar de termos-chave. Nesses estreitos, eles geralmente recorriam a gestos ou desenhavam diagramas (PRESMEG, 1999, p. 21).

No grupo classificado como professores não visuais, o aluno visualizador é levado a acreditar que a matemática dependia da memorização de regras e fórmulas. Já o grupo de professores classificado como intermediário, ou seja, entre os visuais e não visuais, os alunos visualizadores pareciam se beneficiar, uma vez que esses professores também incentivam o pensamento visual. Porém, um problema observado foi a dependência cognitiva desses alunos com seu professor, situação difícil de ser solucionada inclusive pelo grupo de professores visuais. Por fim, as considerações referentes aos professores visuais demonstram que eles buscam fazer conexões entre a matemática e outros componentes, contextualizando em alguns momentos e trazendo para que o aluno *experiencie*. Desse modo, "os professores visuais expressam em seu ensino muitos traços comumente associados à criatividade." (PRESMEG, 1986b, p. 46)[14].

No trabalho de 1999, intitulado *Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos*, mais elementos são apresentados para a discussão. Além de pontuar as possibilidades do pensamento baseado em imagens, o que poderia ser levado ao campo epistemológico, também são discutidos quais os perigos potenciais. Para tanto, são elencadas algumas sugestões para ajudar os professores a usarem as potencialidades das imagens, evitando esses perigos.

Antes de refletir sobre as potencialidades, é importante destacar a classificação das imagens visuais, pois ao fazer as transcrições das entrevistas realizadas, a autora observou que os alunos usavam tipos diferentes de imagens para resolver os problemas matemáticos. Essas imagens são classificadas como: a) imagens concretas (desenhos na mente); b) imagens de padrões (relações puras representadas em um esquema espaço-visual); c) imagens de memória de fórmulas; d) imagens cinestésicas (envolvendo atividade muscular); e) imagem dinâmica (em movimento).

As imagens concretas se relacionam com o uso metafórico de uma imagem para fins práticos, ou seja, a imagem concreta é a transmissora da informação abstrata. Por exemplo, a propriedade distributiva da multiplicação (denominada por alguns professores como metáfora do "chuveirinho"[15]), ou quando referência o nível do mar como uma linha que separam os valores positivos dos negativos. São algumas metáforas utilizadas no dia a dia da sala de aula, que passam despercebidas, e que devem ser planejadas de forma a não criar uma lacuna conceitual, como os casos mencionados anteriormente, que podem facilmente promover generalizações equivocadas.

[14] No original: "Visual teachers expressed in their teaching many traits commonly associated with creativity."
[15] Chuveirinho é uma metáfora utilizada em sala de aula quando o professor faz uma analogia a propriedade distributiva da multiplicação.

Imagens de padrões direcionam para a essência da estrutura, sem detalhes, ou seja, “a regularidade que apenas ajuda.” (Presmeg, 1986a, p. 304). Por exemplo, em alguns livros didáticos, as propriedades dos triângulos isósceles são apresentadas da seguinte maneira.

As imagens de memória de fórmulas, como a própria classificação aponta, é o recurso que se faz à memória para recordar uma fórmula, procedimento. É como lembrar a cor da capa de um livro, mas não lembrar o título. Ou então, saber que fez uma anotação em uma determinada posição do caderno, mas não recordar o texto na íntegra. No caso das fórmulas, significa “vê-las”, mas sem de fato ela estar escrita em algum local, a não ser na mente do aluno, um modo de “encapsular um procedimento” (PRESMEG, 1986a, p. 301).

Imagens cinestésicas são as que envolvem alguma atividade muscular, como, por exemplo, traçar com o dedo a representação mental de uma parábola. Na aritmética existe um exemplo muito comum, que é contar com os dedos, ou até mesmo quando o algoritmo da soma está formado na mente, a conta é realizada indicando com o dedo, incluindo o famoso “vai um”.

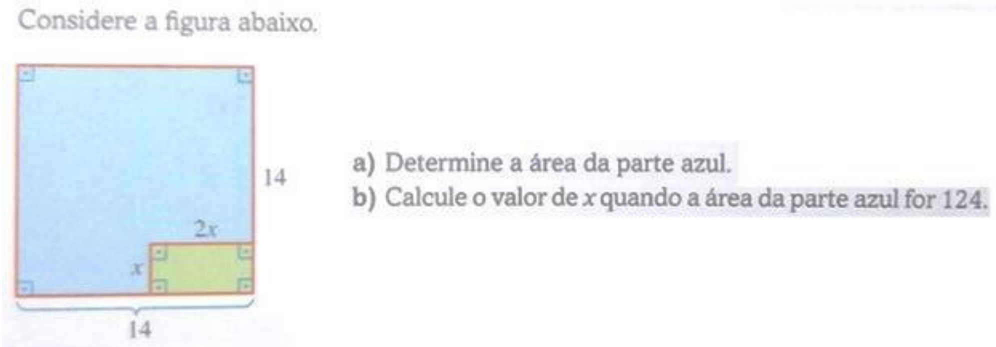
A última classificação refere-se às imagens dinâmicas, que vem ganhando cada vez mais notoriedade devido às tecnologias, como os softwares de geometria dinâmica entre outros. Translações, rotações, inversões são transformações que exigem, mesmo que mentalmente, essa movimentação das imagens.

Realizadas as considerações sobre as classificações de imagens apresentadas por Presmeg, retoma-se o pensamento sobre as possibilidades e perigos que elas podem causar. As possibilidades são os resultados dos diferentes tipos de imagens apresentadas, como o fato de que as imagens podem se apresentar como um recurso de memória, “uma combinação eficaz foi encontrada como imagens concretas alternando com modos abstratos não visuais, como análise, lógica ou uso fácil de fórmulas não visuais” (PRESMEG, 1986a, p. 302).

Os perigos potenciais se relacionam com os detalhes falsos que as imagens podem apresentar, por exemplo, a representação de dois polígonos que parecem congruentes, ou dois segmentos de reta que parecem paralelos.

Na imagem a seguir, num primeiro olhar, considera-se que o polígono azul é um quadrado. Porém, a única medida claramente especificada é a da base (comprimento do polígono azul com medida = 14). Não se pode afirmar que a altura tem a mesma medida da base, apesar de a imagem conduzir a essa interpretação. Se for considerado o quadrado com a medida do lado igual a 14, a interpretação do problema é totalmente diferente se for considerado um retângulo com medidas 14 e 14+x (Figura 21).

Figura 21 – Interpretação das imagens.



Fonte: Bianchini, 2015, p 110.

Um potencial problema é percebido com o uso da imagem padrão, que por sua vez pode acarretar uma inflexibilidade do pensamento, que fica condicionado a sempre realizar a atividade com aquele procedimento, restringindo o aparecimento de novas conjecturas ou modos de pensar. No contexto da sala de aula, este procedimento acontece quando o estudante lembra de uma fórmula ou processo e tenta, de todo modo, incluí-lo na resolução de um problema. O aluno se preocupa em aplicar a fórmula que foi memorizada e não em interpretar o problema em sua totalidade.

De acordo com Presmeg (1999):

> Todos esses perigos estão relacionados de uma maneira ou de outra com a dificuldade de generalizar uma imagem que é, por sua natureza, um caso concreto. Portanto, pode-se dizer que os perigos são problemas de generalização. Além de apresentar os diagramas em várias orientações, o que podemos fazer nós professores para ajudar os alunos a tornar mais eficaz o uso de suas imagens[16] (PRESMEG, 1999, p. 21).

Para que o uso das imagens se torne eficaz para os alunos, é importante que algumas ações dos professores sejam repensadas e reformuladas. Aguçar a intuição dos alunos é uma dessa ações, rompendo com o rigor metodológico que enrijece o modo de pensar, assim como o de ensinar. Usar de conflitos cognitivos para motivar o aluno pensar em outras estratégias e alternativas também é uma ação importante.

Com esse estudo sobre alguns trabalhos desenvolvidos por Presmeg, é notória a riqueza de informações e concepções apresentadas. Em um panorama geral, seus estudos trazem subsídios para uma formulação metodológica de visualização, mesmo não sendo explicita nas pesquisas por ela realizadas até os anos 1990. A visualização na sala de aula, em relação ao

[16] No original: "Todos estos peligros están relacionados de una u outra forma con la dificultad de generalizar una imagen que es, por su natureleza, un caso concreto. Por tanto, podría decirse que los peligros son problemas de generalización. Además de presentar los diagramas en orientaciones variadas, que podemos hacer los profesores para ayduar a los alumnos a hacer más efectivo el uso de su imaginería?".

aluno como em relação ao professor é um ponto importante, bem como as ações dos professores frente a esse pensamento visual.

Uma consideração direta da autora sobre a visualização é encontrada no artigo de 2006, intitulado *Research Visualization in Learning and Teaching Mathematics*, ao registrar que: "a visualização é indicada a incluir processos de construção e transformação de imagens mentais visuais e de todas as inscrições de natureza espacial que podem estar implicadas em fazer matemática." (PRESMEG, 2006, p. 206).

É nesse estudo que a autora aponta que há uma dificuldade em apresentar uma definição precisa para o termo "visualização". No início da sessão 2.3, serão apresentadas, a partir do trabalho de Presmeg, uma variedade de significados em seus diferentes contextos.

2.3 RUMO À CONSTRUÇÃO DE UMA CONCEPÇÃO

Os estudos sobre as imagens mentais tiveram seu ponto de partida no século XIX, porém uma interrupção acontece no século XX com a ascendência do behaviorismo. Até o final dos anos 1970, o estudo da visualização foi se desenvolvendo com base psicológica/cognitiva. Esse direcionamento foi se expandindo no momento em que o construtivismo começou a ganhar espaço, em oposição ao behaviorismo.

Em termos de pesquisa, metodologias qualitativas passam a ganhar notoriedade. Mas o que essa passagem traz para os estudos voltados para a visualização? O estudo dos processos de pensamento ganha corpo com a metodologia qualitativa, na qual o olhar também é direcionado para o processo de visualização de forma geral, à medida em que são associadas potencialidades e dificuldades.

No estudo de Presmeg (2014), a autora traz uma contextualização da visualização em seu aspecto histórico, o que não corresponde necessariamente a uma linearidade dos acontecimentos, mas às perspectivas em que as discussões foram se desenvolvendo numa tentativa de conceitualizar a visualização. Antecipa-se que uma consideração única não é encontrada, pois os diferentes "status" da visualização colaboram para múltiplos entendimentos. A autora também menciona essa dificuldade em articular uma definição precisa para a visualização, destacando a necessidade de mais pesquisas sobre o tema.

A base utilizada por Presmeg para a construção dessa contextualização são os estudos apresentados nas conferências internacionais de Psicologia em Educação Matemática (PME), desde a 12.ª conferência (1988) até a 24.ª (2000). Com a análise dessas pesquisas, é traçado um panorama da visualização em seus múltiplos contextos.

É possível perceber nesse levantamento os diferentes status conferidos à visualização. Algumas das interpretações observadas para o termo são: reconhecida pelo uso singular de imagens, instrumento para provar e aprender, pensamento geométrico e imagens, representação com a lente teórica da semiótica, visualização dinâmica. Mas, o que chama atenção é que a visualização parece não ser uma categoria dominante, ou seja, os elementos que a circundam ganham mais notoriedade e estudo do que a própria visualização em si.

Quando a visualização na educação matemática passou a ser considerada como um campo de pesquisa, na PME15 (1991), as discussões começam a ser endossadas com as possibilidades e dificuldades da visualização em sala de aula. É nesse ambiente que o processo de visualização parece ter mais foco do que propriamente o objeto visualizado. Nas discussões dos trabalhos, existiam duas categorias, uma era imagens e outra visualização. Essa categorização dá sinais de que a visualização se desprende, nesse momento, da ideia de imagem imediata. O currículo e o uso de computadores também viraram tema de discussão dentro da visualização.

Diante desse panorama teórico a respeito da visualização, incluindo os estudos realizados sobre as pesquisas de Arcavi, Giaquinto e Presmeg, percebe-se como o termo é polissêmico. Arcavi traz uma concepção pedagógica abrangente para o termo, direcionando-o para habilidade, processo e produto, na perspectiva cognitiva, enquanto que neste estudo o direcionamento será para o modo de pensar na vertente epistemológica.

Assim como Arcavi, Presmeg traz uma perspectiva pedagógica, porém a sua concepção de visualização, que tem um caráter fortemente metodológico, só pode ser construída por meio das ideias que ela traz sobre imagem visual, visualizadores, imagem mental, entre outras.

Por sua vez, os trabalhos de Giaquinto aqui estudados revelam-se na perspectiva da epistemologia, porém o direcionamento está no processo de confiabilidade e validade da visualização (o autor utiliza mais a palavra "pensamento visual") como possibilidade, ou não, de uma prova matemática. Por esse motivo, a perspectiva adotada sobre a visualização pelos diversos autores é importante de ser mencionada.

Neste estudo, contudo, a perspectiva adotada é a epistemológica. Quando se entende a visualização como um processo do modo de se pensar a matemática, é importante fazer uma análise da compreensão inicial sobre o entendimento que se faz desse termo. Na matemática, existem os objetos e existem os processos. Os objetos se referem, em seu sentido ontológico, aos objetos matemáticos e à representação como sendo simbólica, gráfica, figural, mental, assim como os números, as figuras, as estruturas, os espaços. Já os processos são associados a uma dinamicidade dos objetos, à movimentação.

Se utilizada a própria terminologia da lógica matemática, entende-se que um argumento é um objeto, pois o argumento por si só é estático. Já a demonstração, que envolve a movimentação dos argumentos, é um processo, pois ela envolve diversos pontos para possíveis variações, dinamizando essa estruturação dos argumentos. Ou seja, movimenta as ideias, o pensamento.

Uma analogia sobre o objeto e o processo pode ser observada, por exemplo, numa partida de jogo de xadrez. Os objetos são as regras, que são estáticas, fechadas, e a partida é o processo. Desse modo, por mais que exista a regra de movimentação para cada peça, há uma dinamicidade no processo como um todo, pois a escolha em qual orientação movimentar a peça, dentro se suas regras obviamente, é dinâmica.

Outro exemplo está associado à dificuldade de um aluno diferenciar $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{3}$. Tomando como base a compreensão de uma fração a partir da representação parte e todo, tem-se que $\frac{3}{4}$ é uma fração que pode ser tomada como um objeto facilmente identificado, mas como se entende o inverso, $\frac{4}{3}$? Essa fração não é apenas um objeto, ela envolve um processo, que pode ser entendido como $\frac{3}{3}+\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ entre outros processos, ou seja, como a adição de objetos como aquela parte do todo. Mas a adição não é objeto, e sim o processo. Adicionar é um processo.

Na matemática, esse processo é chamado de função. Antigamente, a função tinha aspecto dinâmico, não era pensada como hoje, um objeto matemático que pode ser visto como uma coleção de pares ordenados, o que tecnifica o conceito de função. Mas, em sua origem, a função era algo dinâmico. Esse aspecto dinâmico do conceito de função está na diferenciação entre o conceito e as noções de incógnita e o conceito de variável.

Uma função é a variação de uma variável. Então, há um aspecto dinâmico, algo está se movimentando ali. A soma, produto, qualquer operação algébrica vista como função tem essa dinamicidade. Para se decompor $\frac{4}{3}$ como $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$, é preciso movimentar dois objetos, parte e todo, compreensível, mas através da operação de soma, que é algo dinâmico, eles são somados, movimentados, então é um processo.

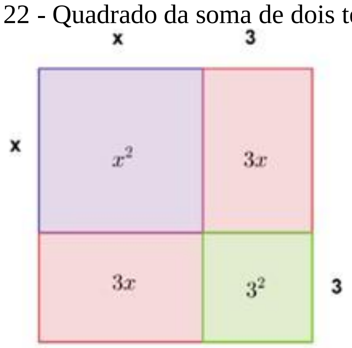
Isso também está na compreensão da ideia mais primitiva de produto. Por exemplo, o entendimento da expressão 3×4, é dado como $4+4+4$. Porém, outra relação diferente é 4×3 entendida como $3+3+3+3$. Em termos de processo as duas formas são diferentes, mas a ordem dos fatores não altera o produto, ou seja, o resultado das operações é o mesmo. O processo inclui a função de produto, essa dinamicidade do processo.

Um exemplo que torna possível extrair a ideia de objeto e processo é a de produto notável, para o qual são apresentadas duas construções a seguir:

$(x+3).(x+3) =$	$(x+y).(x+y) =$
Pela propriedade distributiva, tem-se que:	Pela propriedade distributiva, tem-se que:
$(x+3).(x+3) =$	$(x+y).(x+y) =$
$x^2 + 3x + 3x + 3^2 =$	$x^2 + xy + xy + y^2 =$
$x^2 + 6x + 3^2$	$x^2 + 2xy + y^2$

Ao se utilizar a propriedade distributiva para realizar a multiplicação de polinômios, visualiza-se o objeto em sua representação simbólica. Há uma movimentação ao se multiplicar, agrupar termos semelhantes, mas é externa. Porém, se considerar o termo $(x+3)$ como a medida do lado de um quadrado e partindo dessa ideia, se coloca uma dinamicidade no processo, resultante das relações entre os objetos ali presentes (Figura 22).

Figura 22 - Quadrado da soma de dois termos.



Fonte: Autores, 2021.

No caso apresentado na figura acima, perceber o “porquê” do múltiplo de 2, que nesse exemplo tem duas áreas de medida $3x$, seria visualizar o processo, uma vez que coloca em evidência a dinâmica interna da própria matemática.

Partindo das exemplificações anteriores, um questionamento se revela: o que são visualizados: os objetos ou os processos? Esse questionamento é importante para refletir sobre os contextos em que estão localizados esses objetos e processos.

Nos estudos sobre visualização, é comum a associação com os objetos em seu aspecto ontológico. O direcionamento para esses tipos de estudos está na utilização das diferentes representações dos objetos matemáticos, incluindo-se nesse escopo as classificações de imagens na concepção de Presmeg. Quando a palavra processo é encontrada nesse contexto, a relação estabelecida é com as habilidades de visualização, classificação de visualizadores e não visualizadores, ou seja, no aspecto psicológico, cognitivo. A unidade temática de predominância na visualização de objetos é a geometria.

Já a visualização de processos consistiria em visualizar a movimentação dos objetos. Quando se faz uma demonstração visual de um teorema, por exemplo, em que se visualiza o processo de reconfiguração, não é o resultado final em si, mas o processo que permite chegar ao teorema. Isso é a visualização de processos.

Essa relação entre objetos e processos está dentro da própria matemática. Na matemática há objetos e há processos. Certamente, essa relação também pode ser vista na perspectiva do ensino da matemática. No entanto, no momento em que são reconhecidos esses processos na matemática, em seu teor filosófico e epistemológico, consequências pedagógicas também são incorporadas.

Portanto, a visualização traz tanto um teor cognitivo, que é o mais presente nos estudos desenvolvidos, bem como um teor epistêmico, que exige um olhar para as relações dentro da própria matemática, além de um teor metodológico necessário para o ensino e aprendizagem da matemática.

O caso algébrico de uma fração é a sua decomposição em partes. A visualização que está por trás, que é análoga à representação geométrica, é a decomposição. Desse modo, há uma analogia entre uma reconfiguração geométrica e uma decomposição algébrica. O processo da decomposição é de natureza epistemológica, mas o modo como o ser humano capta essa reconfiguração é de natureza cognitiva.

Portanto, não existe uma resposta unilateral para o que é visualizado, se é o objeto ou o processo. O que se pode afirmar é que visualizar objetos é diferente de visualizar processos. Para visualizar um objeto é preciso movimentá-lo, o que significa atribuir-lhe uma certa dinâmica, mas seria uma dinâmica externa que não faz parte do próprio objeto. Porém, visualizar um processo é colocar em evidência sua dinâmica interna, intrínseca, pois essa visualização está atrelada ao contexto, uma não anula a outra, pelo contrário, completa.

Desse modo, a particularização ou concretização, generalização, idealização, representação, significação, ressignificação (é como olhar um mesmo objeto em outras perspectivas) são meios pelos quais se visualizam processos e objetos. Nesse estudo, em alguns momentos se observa a visualização do objeto, mas o foco está na visualização do processo como um recurso epistemológico para o acesso ao conhecimento matemático, salientando a dinamicidade desse modo de pensar a matemática.

Em linhas gerais, nesse estudo, entende-se a visualização como um modo de pensar a na matemática, pensamento esse que se fundamenta nas relações intrínsecas dos objetos, ou seja, no processo do pensar a matemática. Esse é o ponto de partida para a construção de uma concepção epistemológica de visualização, construção essa que será consolidada nas considerações finais.

3 EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA E VISUALIZAÇÃO

> *A matemática, do ponto de vista estético, é um campo de experimentação para a imaginação. O atributo mais importante da matemática como ciência não é o conhecimento que possui, mas a habilidade de adquirir conhecimento, e a intuição está intimamente ligada a essa habilidade.*

(Cifuentes, Negrelli e Estephan, 2000, p. 20)

3.1 A SENSIBILIDADE MATEMÁTICA

Em consonância com a epígrafe desse capítulo, a habilidade em adquirir o conhecimento se relaciona diretamente, pelo ponto de vista estético, com a sensibilidade para apreender a matemática. Falar em sensibilidade matemática parece um tanto quanto contraditório com o que se acredita ser característica própria da matemática, a saber, a racionalidade. Racionalidade esta que a torna exata, quantitativa e objetiva.

A estética, de acordo com (Cifuentes, 2003, p. 60), "é a ciência do conhecimento sensível em contraposição ao conhecimento racional". No caso da matemática, essa premissa permitiria abordar aspectos de caráter qualitativo, não exatos e por vezes subjetivos. Portanto, o conhecimento estético na matemática teria como fonte a emoção e a sensibilidade, que por sua vez é alcançada pela experiência estética[17].

Em nenhum momento pretende-se categorizar tipos de matemática ou algo do gênero, mas refletir sobre os modos de pensar na matemática, o modo racional e o modo estético. Um não anula o outro, muito pelo contrário, se complementam, se acrescentam.

De acordo com Cifuentes e Serenato (2006) "o estético não é apenas decorativo, é expressivo e toda forma de expressividade supõe uma linguagem, pois ela é captadora de conhecimentos" (p. 8). A linguagem matemática, dotada de seu conjunto de símbolos e operações, não se faz suficiente para desenvolver um olhar sensível para a matemática, é necessário outro tipo de linguagem, a linguagem visual, intimamente ligada à intuição e à imaginação e subjacente aos processos de visualização.

> No caso da matemática, a linguagem visual deve ser uma linguagem que possa lidar com o erro e a imprecisão. O paradigma da exatidão na matemática é só necessário para as aplicações, não para a apreciação estética, e a imprecisão é parte importante da apreensão dos entes matemáticos (CIFUENTES e SERENATO, 2006, p. 8).

A matemática é geralmente colocada como paradigma de rigor. Esta é uma exigência *a priori*, em que as definições são colocadas no início de seus desenvolvimentos formais. Porém,

---

[17] Na matemática, experiência estética se entende pela ação em transcender o objeto, ou seja, não é o olhar sobre a matemática, mas o que a transcende. Um "ver" inteligível, capaz de experienciar não apenas os objetos, mas as relações entre os objetos.

do ponto de vista do pensamento matemático, com sua dinamicidade que alimenta a sensibilidade, elas devem ser o ponto de chegada da construção de um objeto matemático. Então, se a definição já é apresentada como ponto de partida, o que acontece no processo de construção mencionado como sendo anterior à definição?

De acordo com Carlos Mathias e Nilson Machado, numa palestra proferida em seu canal "Matemática Humanista"[18], "a definição apenas dá o nome, ela não mostra o verbo [a ação]"**.** Desse modo, a sensibilidade matemática seria o combustível para deflagrar mais "perguntas" do que "respostas", mais "por quês?" do que "porquês", mais "explicações" do que "provas" puramente formais.

É inevitável abordar a dicotomia entre razão e emoção, compreendendo que essa discussão fundamenta o entendimento que se faz da racionalidade conjugada a uma sensibilidade matemática. A razão é algo inerente ao pensamento matemático, o que se manifesta nas suas características lógicas de objetividade e dedução. Mas, em que momento a sensibilidade pode se fazer presente nesse modo de pensar? Ou então, refletindo na relação entre cientifico e estético, a pergunta seria: qual a cientificidade do conhecimento estético da matemática, isto é, do conhecimento através da sensibilidade matemática? Quais características estéticas se fazem presentes nos contornos científicos da matemática?

De acordo com Cifuentes (2005), a emoção através da sensibilidade é fonte de conhecimento, o conhecimento sensível.

> Tradicionalmente, assume-se que o conhecimento matemático é, por natureza, puramente racional, o qual significa que, das principais capacidades do ser humano, a razão e a emoção, consideradas muitas vezes como incompatíveis, a única que lidaria com o conhecimento matemático é a razão. Essa tradição baseia-se na tese, que podemos chamar de platônico-cartesiana, de que os objetos matemáticos são ideias desligadas de toda experiência sensível e que à verdade matemática acede-se pela razão (CIFUENTES, 2005, p. 56).

Mesmo a matemática sendo insistentemente associada à razão, faz-se importante destacar que a emoção também é uma dimensão da aquisição do conhecimento matemático, e essa se dá pela experiência matemática.

Para essa concepção, de uma matemática regida pela razão, a sensibilidade pode parecer uma utopia, porém esse modo de acesso ao conhecimento matemático não é algo novo, pelo contrário, como um exemplo de destaque, pode-se apontar que na geometria grega era considerada um modo legítimo, traduzido em construtibilidade de se pensar e fazer matemática.

---

[18] Palestra Matemática e Língua Materna com Nilson José Machado e Carlos Mathias. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=f-OYxcGem_A&ab_channel=Matem%C3%A1ticaHumanista. Acesso em 22/09/2021.

Na geometria de Euclides, o estudo era do espaço real, natural, onde os objetos geométricos se concretizam, em que as verdades geométricas eram confrontadas com a realidade, ou seja, as verdades eram evidentes na medida em que elas poderiam ser "vistas" ou "realizadas" nesse espaço natural. Desse modo, palavras como: semelhança, congruência, construção, forma, imaginação entre outras já dão indicativos dessa sensibilidade. Há um forte apelo estético em sua axiomática. Um exemplo é a ideia de superposição de figuras, que solicita uma certa "visualização" dos objetos geométricos e sua possibilidade de "movimentação", tendo esse procedimento euclidiano um certo caráter experimental. Porém, a partir do século XVII, há uma ruptura entre esse apelo construtivo em prevalência do processo de aritmetização.

Conforme asseverado por Cifuentes:

> Antes do século XVII a ciência da geometria era a de Euclides, com seu enfoque axiomático baseado em demonstrações e construções. Na modernidade, a partir do século XVII, a geometria segue dois caminhos paralelos, ainda o axiomático, incorporando novos conceitos, por exemplo, os de perspectiva que já os artistas vinham utilizando, e o analítico, desenvolvido primeiro por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) que incorporam o uso de coordenadas, transformando assim a intuição geométrica do espaço físico numa intuição numérica de um espaço matemático "artificial": o plano cartesiano (CIFUENTES, SANTOS e CHYCZY, 2013, p. 5).

No século XIX, em sua obra *Fundamentos da Geometria*, Hilbert destaca que o método axiomático torna-se mais formal/abstrato e menos material/concreto, separando, assim, os aspectos formais dos visuais, priorizando a forma (de natureza relacional) e não o conteúdo, diferentemente do que fora feito por Euclides. "No caso das novas geometrias, a forma precede o conteúdo e o espaço de interpretação dessas geometrias [onde os conteúdos se concretizam] será dado, ou melhor, construído, a posteriori e de forma analítica." (CIFUENTES, SANTOS e CHYCZY, 2013, p. 6).

Essa ruptura pode ser também observada pela discussão que se faz sobre o infinito, especialmente o infinito em potência e o infinito em ato. Para Euclides, era evidente o fato da reta ser finita, embora arbitrariamente longa, mas não era evidente que fosse infinita como uma totalidade.

Desde a época dos gregos se consideram dois tipos de infinito: o potencial, como o infinito dos números naturais, um número depois do outro sem fim, e o infinito atual, ou seja, um infinito acabado, concretizado e captado em sua totalidade. A discussão sobre o infinito é complexa e, por vezes, se deu de modo problemático, passou por várias concepções e reformulações em diferentes épocas e contextos.

> Note-se que considerar algo infinito em potência significa considerar que uma sequência pode ser aumentada tanto quanto se queira por adições ou multiplicações sucessivas ou diminuída tanto quanto se queira por divisões sucessivas; o que é

totalmente diferente da consideração de uma totalidade formada por infinitas partes – um infinito atual (MACHADO, WAGNER, *et al.*, 2013, p. 290).

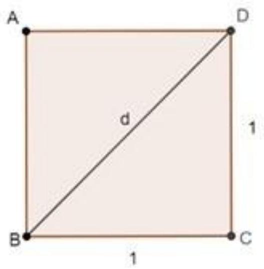
O infinito em ato era problemático, pois aceitá-lo envolvia também aceitar os números irracionais e as grandezas incomensuráveis. Na matemática grega, algumas estratégias foram utilizadas para não se evidenciar a existência de outro infinito que não fosse em potência.

O que fosse belo e perfeito era considerado bem determinado, imposição de *péras* (limitado) sobre *apeíron* (sem limite, forma), e deveria ser expresso através de proporções envolvendo números inteiros positivos. Contrariamente, o que fosse indeterminado - o *apeíron* ou o infinito - não poderia receber uma medida ou um número, corporificando o abominável, a imperfeição, o caos, a desordem e o horrendo (MACHADO, WAGNER, *et al.*, 2013, p. 286).

No pensamento matemático da época de Pitágoras, pensava-se que os números racionais eram suficientes para comparar dois segmentos de reta. Por exemplo, "dados dois segmentos AB e CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD." Nesse entendimento, EF é um submúltiplo comum de AB e CD. Tais segmentos, então, são ditos comensuráveis, já que existe a possibilidade de serem medidos com a mesma unidade EF. Porém, nem todos os segmentos AB e CD terão como unidade comum um segmento EF, ou seja, são segmentos incomensuráveis. "Esse é um fato que contraria a intuição geométrica e por isso a descoberta representou um momento de crise no desenvolvimento da matemática." (ÁVILA, 1984, p. 1).

Para exemplificar tal complexidade, apresenta-se o problema da diagonal do quadrado unitário, especificamente a incomensurabilidade entre o lado do quadrado unitário e sua diagonal (Figura 23).

Figura 23- Representação da diagonal do quadrado.



Fonte: Autores, 2021.

A grande discussão por trás desse problema está na questão em que a razão, no sentido de proporção, entre o lado e a diagonal do quadrado unitário, não pode ser representada por uma fração de dois números inteiros. Ao se utilizar a relação pitagórica para determinar a medida da diagonal do quadrado, o que se obtém é $d^2 = 1^2 + 1^2$, isto é $d^2 = 2$, donde $d = \sqrt{2}$ que já os gregos sabiam que era irracional.

Por esse motivo, a ideia do infinito em ato era inconcebível na geometria grega. Mas tal discussão continua com Bernard Bolzano (1781–1848), Richard Dedekind (1831–1916) e George Cantor (1845–1918), no século XIX. De acordo com Machado et al. (2013, p. 297), "Bolzano foi talvez o primeiro a considerar conjuntos infinitos como totalidades acabadas e não sucessões potencialmente infinitas." (MACHADO, WAGNER, *et al.*, 2013, p. 297).

Dedekind, por sua vez, levou seus estudos para a continuidade da reta. "Para ele, um conjunto será dito infinito se for semelhante [ou equipotente, isto é, que mantém uma correspondência biunívoca] a uma parte própria de si mesmo." Caso contrário, o conjunto "será finito" (Machado, Wagner, *et al.*, 2013, p. 297).

Cantor desenvolveu a teoria dos conjuntos infinitos, inserindo o infinito em ato, presente neles, como um objeto matemático. Cantor provou, pela relação de bijeção, que entre o conjunto dos números naturais e o dos números inteiros, e entre o conjunto dos números naturais e o dos racionais, há uma relação de equipotência, o que não acontece com o conjunto dos números irracionais.

> A partir desta constatação, Cantor empenhou-se em demonstrar sua conhecida *hipótese do continuum*: não existe um conjunto infinito cuja cardinalidade seja intermediária à cardinalidade dos números naturais e reais. O que implica afirmar que existem apenas duas classes de conjuntos infinitos [dentro dos números reais]: aquela cujos conjuntos são equipotentes ao conjunto dos números naturais; e aquela cujos conjuntos são equipotentes ao *continuum* – o conjunto dos números reais (MACHADO, WAGNER, *et al.*, 2013, p. 299).

Essa discussão sobre o infinito e os modos como ele foi concebido nos diferentes contextos é importante para se entender a ligação entre a razão matemática e a sensibilidade matemática. Para Hermann Weyl, dentre outros contemporâneos, a matemática é a ciência do infinito, ideia que pode ser complementada com o argumento de que "O infinito é o nexo entre a matemática e a estética, entre a racionalidade e a beleza, é a ponte entre o conhecimento científico e o conhecimento estético." (Cifuentes, 2005, p. 60). As questões sobre o infinito trazem para discussão uma matemática em movimento, em constante transformação. Portanto, é uma matemática viva. E é nessa dinamicidade matemática que a sensibilidade se manifesta.

> Uma abordagem da matemática levando em conta seus aspectos estéticos permitiria desenvolver a matemática do erro ou da imprecisão, a qual poderia ser considerada como a matemática do suficiente, complementar da matemática do necessário (CIFUENTES, 2005, p. 59).

Um raciocínio matemático teria um certo caráter estético se ele apela à liberdade de escolha escapando de toda necessidade lógica.

Isso pode ser exemplificado com o seguinte problema, cuja solução teria um certo caráter estético: o da continuidade de sequências. Por exemplo, considerando a seguinte sequência de números: 3, 5, 7, ... quais seriam os seguintes termos dessa sequência? São várias as possibilidades de escolha que são incompatíveis entre si, porém considera-se o número 9 se se pensar que os termos dados da sequência são suficientes para garantir que se trata de números ímpares consecutivos. Entretanto, poderia ser o número 11, se se pensar que esses termos apontam para números primos consecutivos.

Gierdien (2007), em *From 'proofs without words' to 'proofs that explain' in secondary mathematics,* traz uma discussão importante sobre as provas que provam e as provas que explicam. No primeiro caso, há um forte apelo lógico que se relaciona à ação de verificar, constatar, certificar. Já no caso da segunda, com um forte apelo estético, vem no sentido de esclarecer, explicando o "porquê" de a demonstração ser verdadeira.

Para Gierdien (2007), "certificar-se" é sinônimo de uma prova que prova ou verifica, enquanto que "construir um alicerce" é sinônimo de uma prova que explica ou esclarece. Por exemplo, em salas de aula, explicar uma prova torna-se uma forma de discurso em que a visualização como parte do processo de prova pode levar a *insights* e conexões entre ideias matemáticas. Por outro lado, uma prova que prova não ilumina o aparecimento de símbolos particulares, sejam literais ou numéricos (GIERDIEN, 2007, p. 56).

Um outro exemplo é discutir a chamada Identidade de Sophie Germain, que permite diferenciar as "provas que provam" e as "provas que explicam". A identidade trata da seguinte fórmula algébrica de fatoração: $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$.

A seguinte seria uma prova que "prova":

$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4) - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 - 2\text{ab})(a^2 + 2b^2 + 2\text{ab})$.

Essa prova, que é muito concisa, usa apenas o recurso do processo de completamento de quadrados, o que requer a intuição de qual termo deve ser acrescentado logo após uma breve manipulação algébrica, para aplicar-se a fórmula de fatoração de uma diferença de quadrados.

Pelo contrário, uma prova que "explica" deve ser uma prova que "ilumine" o caminho da própria descoberta dessa identidade, partindo da formulação de algum problema que, tomado como "contexto de discussão", motive esse desenvolvimento.

Observando que $a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2$, tem-se uma soma de dois quadrados que precisam ser fatorados.

Em geral, sabe-se que, para x e y quaisquer, um polinômio que é soma de dois quadrados da forma $x^2 + y^2$ só poderia ser decomposto como produto de dois polinômios do 1.º grau, usando números complexos, da seguinte maneira:

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$$

Porém, a própria fórmula de Germain ao ser demonstrada sugere que para certos x e y convenientes, neste caso, $x = a^2$ e $y = 2b^2$, seja possível tal fatoração. Então, como proceder? A resposta é partir da expressão $x^2 + y^2$ e tratar de seguir o caminho do completamento de quadrados, obtendo-se $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy$= $(x^2 + 2xy + y^2) - 2xy = (x + y)^2 - 2xy$.

Para transformar o segundo termo em um quadrado, para poder ter uma diferença de quadrados, usa-se a intuição algébrica para atribuir a x e y formas adequadas, inclusive exigindo a maior simplicidade, o que não é necessário que se faça. Assim, fazendo $x = a^2$ e $y = 2b^2$ obtém-se que $2xy = 4a^2b^2 = (2ab)^2$, donde $(a^2)^2 + (2b^2)^2 =$ $(a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 =$ $(a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$, que é a identidade de Germain.

Uma prova que "ilumina" deve ser inspiradora de desenvolvimentos semelhantes ou até de possíveis generalizações. Na prova anterior, pode-se fazer variações sobre uma das "escolhas" no caminho seguido, para se obter outras fórmulas semelhantes à de Germain. Por exemplo, se se considerar $x = 3a^4$ e $y = 6b^2$, obtém-se $2xy = 36a^4b^2 = (6a^2b)^2$ e $x^2 + y^2 = 9a^8 + 36b^4$, de onde segue a "nova" identidade $9a^8 + 36b^4$ = ($3a^4$ + $6b^2$ – $6a^2$b)($3a^4$ + $6b^2$ + $6a^2$b).

Uma observação posterior pode ser feita a respeito desta variação: $9a^8 + 36b^4$ = 9(a^8 + $4b^4$) = 9((a^2)^4+ $4b^4$), o que diz que a "nova" fórmula é, na realidade, uma consequência da própria identidade de Germain.

Quando o objetivo em relação à matemática consiste em compreender e não apenas aplicar, movimentam-se nesse processo capacidades relacionadas à sensibilidade, como a intuição, a imaginação e a visualização, capacidades que apoiam os processos de criatividade. Por esse motivo, faz-se importante pontuar e refletir sobre esse modo de aprender e conhecer a matemática, ou melhor, "apreciar" a matemática, resgatando sua historicidade e dinamicidade.

É nesse cenário que a visualização, sobre a qual foi se construindo uma concepção no capítulo 1, se apresenta. Assim, visualizar em matemática é uma faculdade movimentada pela sensibilidade, de um olhar não apenas imediato, mas um olhar voltado para a compreensão. A visualização abordada nesse estudo se compromete não com os objetos, mas com suas essências traduzidas em relações entre os objetos ou nas relações que os definem. Para visualizar essas relações, integram-se a imaginação, a intuição e a criatividade, ou seja, elas caminham juntas nesse processo de compreensão da matemática, em que se busca visualizar a essência e não apenas a aparência dos conceitos apresentados.

Associar um contexto a um determinado objeto matemático significa atribuir-lhe um entorno, um “espaço-ambiente” para que as suas relações ali se estabeleçam e se concretizem e, assim, permitindo que ele seja visualizado. Igualmente, quando o objeto é um argumento, pode-se pensar em inserir um “contexto de discussão” ou uma “teoria” para poder visualizá-lo. Exemplos disso serão discutidos ainda nesse capítulo.

No tocante ao contexto, Cifuentes (2005, p. 58) afirma que “todo espaço é um contexto e também todo contexto pode ser considerado uma certa forma de espaço”. Por exemplo, o algarismo 5 é um objeto abstrato, porém inseri-lo dentro de um conjunto numérico, como por exemplo, o conjunto dos números naturais ou atribuir-lhe um significado concreto, como medida de alguma grandeza, significa associar um contexto, num sentido amplo, a esse objeto.

> A contextualização dos objetos matemáticos é um fator importante nos processos ligados à sua apreensão pela intuição. Contextualizar um objeto é dar um referencial espaço-temporal, não necessariamente em um sentido físico, de modo que, do ponto de vista estético, o contexto passa a formar parte, como resultado de uma síntese, do próprio objeto (cf. Cifuentes, 2005). Por exemplo, uma forma de contextualizar uma sequência num contexto espaço-temporal é através de uma representação geométrica que permite evidenciar ou visualizar suas simetrias e seu padrão ou “moldura” [é o caso dos números poligonais de Pitágoras] (CIFUENTES, 2011, p. 656).

Portanto, para se viabilizar uma visualização das relações entre os objetos, que se caracterizam por uma visualização mais “fina”, “pura”, na perspectiva da essência, é importante identificar em que contexto esse objeto está sendo desenvolvido e observado.

Para construir o solo de interpretação e reflexão sobre as faculdades movidas pela sensibilidade matemática, utilizam-se como suporte Cifuentes, Negrelli e Estephan (2000), Cifuentes (2003, 2005, 2010, 2016), Gusmão (2018), Cifuentes e Santos (2019) em que os estudos trazem importantes contribuições e reflexões sobre a intuição, a imaginação e a visualização. Utiliza-se também Vale, Barbosa e Pimentel (2014), que traz contribuições significativas sobre a criatividade matemática.

Com o objetivo de olhar para o conhecimento matemático como um processo dinâmico do pensamento, na sequência é levantada uma discussão sobre a sensibilidade matemática movida pela a intuição, a imaginação e a criatividade. Por fim, avalia-se como essa sensibilidade propulsiona para o despertar da visualização.

3.2 O PAPEL DA INTUIÇÃO NA VISUALIZAÇÃO

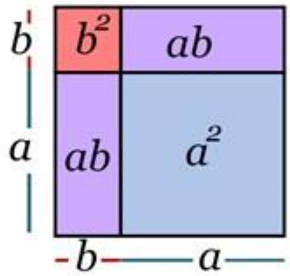
Quando se trata da intuição, algumas possibilidades de interpretação podem ser levantadas, tais como: misticismo, previsão, visão imediata, precisão em emitir julgamentos, entre outros. Porém, a intuição em tema de análise neste estudo é a que movimenta o pensamento matemático, isto é, a intuição matemática. Mas, para compreender o seu papel como modo de pensar, é preciso distinguir, seguindo Poincaré, dois tipos de pensamentos em matemática: o lógico (do analista) e o intuitivo (do geômetra). O primeiro estuda o objeto em suas partes, ou seja, geralmente parte do geral para o particular, enquanto o segundo traça o caminho inverso, ou seja, das partes para o todo, que se constrói num processo de síntese.

Essa dicotomia entre pensamento intuitivo e pensamento lógico é observada nas ideias de Platão e Aristóteles a respeito da abordagem do saber. Para Platão, os objetos são estudados "vivos", por meio de suas movimentações e relações estabelecidas, enquanto para Aristóteles os objetos são estudados "mortos", "para analisá-los em suas partes e classificá-los segundo certas categorias." (CIFUENTES, 2016, p. 6).

Mesmo a intuição e a lógica sendo distintas enquanto suas naturezas, enquanto formas de pensamento, elas se completam em relação às construções matemáticas. A intuição sozinha carece de rigor e de certeza, enquanto que a lógica sozinha carece de sentido, torna-se singular, em que o olhar se direciona para como resolver os problemas (ferramentas), mas não em analisar o "porquê" e o "como" eles surgem. Um exemplo é o produto notável chamado "quadrado da soma de dois termos": $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, geralmente interpretado na sua natureza algébrica. Essa propriedade admite uma demonstração algébrica tão "fria de sentido" como ela própria (usando a lei de distributividade do produto a respeito da soma). No entanto, ao acrescentar o olhar geométrico (pelo menos para a e b positivos, para atribuir-lhes o sentido de comprimento), as relações parecem adquirir um significado mais intuitivo. Elas são explicadas, sendo comum escutar dos estudantes a seguinte afirmação: "ah, agora entendi porque é sempre 2.", quando se referem ao monômio 2ab (

Figura *24*).

Figura 24 - Representação geométrica do quadrado da soma de dois termos.



Fonte: Autores, 2021.

De acordo com Poincaré (1995), "isso nos mostra que a lógica não basta; que a ciência da demonstração não é a ciência inteira, e que a intuição deve conservar seu papel como complemento, quase se poderia dizer como contrapeso ou como antídoto da lógica" (p. 20). E mais: "a lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis. A lógica, a única que pode dar a certeza, é o instrumento da demonstração: a intuição é o instrumento da invenção." (Poincaré, 1995, p. 22), da "invenção de caminhos para a descoberta."

É com essa consideração que se adota a concepção de intuição apresentada por Gusmão. O objetivo do estudo realizado pela autora foi o de desenvolver uma epistemologia da intuição e da imaginação. Destacando que a intenção não é trazer uma definição de intuição, pois para a autora tanto a intuição como a imaginação "são noções orgânicas, que estão em movimento na teia do pensamento matemático." (GUSMÃO, 2018, p. 147).

> A intuição é a ferramenta que permite o acesso às ideias, às descobertas e guia as escolhas. É na escrita de uma teoria matemática, de uma demonstração, em que é preciso cumprir regras lógicas e formais, que a intuição se reorganiza, porém, ela, na maioria das vezes, não é mencionada nas produções escritas. É a intuição que faz com que passemos de uma ideia a outra, é esta imensidão de associações de ideias que surgem quando fazemos as boas perguntas, que nos permitem iniciar, continuar e chegar ao fim de uma demonstração (GUSMÃO, 2018, p. 90).

De acordo com Cifuentes, Negrelli e Esthepan, (2000, p. 7) "O forte apelo à intuição não se limita à simples visão física da configuração, ao simples estímulo sensível, envolve uma percepção intelectual integrada da configuração, produzindo um conhecimento sensível". Quando um estudante escolhe, por exemplo, seguir uma determinada estratégia para resolução de um problema, a intuição é o que vai ajudá-lo a saber discernir o "porquê" de escolher tal caminho e não outro. Por essa razão, "necessitamos de uma faculdade que nos faça ver o fim de longe, e essa faculdade é a intuição" (Poincaré, 1995, p. 21), ou seja, a intuição permite prever.

Como hipótese de trabalho, Gusmão (2018), ao elaborar uma epistemologia da intuição e da imaginação, considera a intuição relacionada à descoberta, enquanto a imaginação à invenção/criação. A sua interpretação da palavra "descoberta" direciona um olhar para algo novo, o que era desconhecido até então, mas sempre esteve ali. Por esse motivo, "a descoberta privilegia o objeto, que está pronto em suas regularidades à espera de alguém que construa um caminho de acesso até ele." (GUSMÃO, 2018, p. 32).

> Sistematizando, podemos dizer que a intuição, como processo de descoberta e, em sua função heurística, tem como algumas de suas caraterísticas as seguintes: a universalidade no particular, o recurso à indução e à analogia, a generalização, a seletividade, o recurso à simplicidade e o "ver" ao longe. Para Poincaré, a intuição que nos permite "ver" ao longe é que acontece, por exemplo, no jogo de xadrez: para encontrar uma sequência de jogadas que nos conduza ao sucesso não basta conhecer apenas as regras do jogo (a lógica do jogo), é necessário ter a intuição da jogada "certa" ao longe. Tudo isso num marco ontológico relacional (GUSMÃO, 2018, p. 39).

Um exemplo que pode ser explorado em relação à descoberta é o estudo do número π, dado pela razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Certamente, essa "descoberta" pode ser incentivada por um professor, no momento em que solicita a seus alunos que meçam com um barbante o comprimento de objetos circulares e façam a divisão pelo diâmetro dessa medida encontrada. Mas, a descoberta em si, será concretizada pelo aluno.

Outro exemplo está na representação gráfica cartesiana de um sistema de equações lineares, em que a solução de tal sistema é a interseção das retas. Ou seja, levar os alunos a pensar na representação gráfica do sistema, fazer comparações geométricas com as soluções levantadas é um caminho para as possíveis descobertas que eles podem fazer sobre as soluções algébricas do sistema.

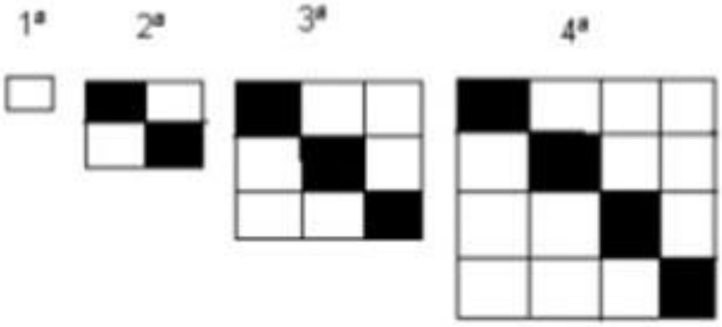
A intuição pode apresentar uma função heurística, conduzindo às hipóteses iniciais, ou até mesmo intuir competências mais elevadas. A ideia das potências inteiras de um número expressa bem essa situação. Por exemplo, as potências de expoente 1, 2 e 3 são movidas pela intuição, pois remetem a ideias geométricas de comprimentos, áreas ou volumes. Já a ideia de potências de expoente 4 se faz pela imaginação, pois é necessário um espaço geométrico artificial para que ela adquira algum significado "concreto".

Importante destacar que, segundo Gusmão (2018), as descobertas se fazem de algo que já existe, tanto de relações entre os objetos como os próprios objetos matemáticos, "mas que não se tem, necessariamente, acesso imediato", sendo a intuição possibilitadora desse acesso. Ainda, novamente de acordo com Gusmão (2018), há dois tipos de intuição, a intuição imediata e a intuição de longe.

> Na intuição imediata é possível encontrar o seguinte número da sequência, ou seja, temos a "intuição do seguinte"; e a intuição "ao longe" nos permite "ver o todo" da sequência [ver a forma da sequência] em cada um dos seus termos, ou seja, temos a intuição de uma totalidade, o que caracteriza o processo de generalização. Passar de um termo para outro é imediato, mas a intuição ao longe torna-se intuição generalizante e, para esse processo, a analogia configura-se como um dos principais ingredientes. (GUSMÃO, 2018, p. 36).

Os elementos que alimentam esses dois tipos de intuição são a analogia e a generalização. A analogia permite visualizar o próximo elemento de uma sequência, abre possibilidades para comparação entre o conhecido e o desconhecido. De acordo com Gusmão (2018), "a analogia tem a intenção de esclarecer, interagir, estruturar, ampliar e avaliar o desconhecido a partir de algo que se conhece" (Gusmão, 2018, p. 94). Já a generalização possibilita enxergar essa sequência como um todo. Por exemplo, um dos exercícios, que será apresentado no capítulo 3, foi utilizado para explorar a ideia de expressão algébrica (Figura 25).

Figura 25- Sequência geométrica.



Fonte: OBMEP, 2021.

Que "objeto" se visualiza quando a intuição ao longe revela o termo genérico da sequência? O objeto genérico só pode ser visto através das relações que o estruturam. A visualização pretende e permite ver (e talvez não possa ver mais do que) a forma dos objetos genéricos.

A intuição se faz presente na visualização da 1.ª etapa para a 2.ª, da 2.ª para a 3.ª e assim por diante. Essa seria a intuição "imediata". Já a intuição "ao longe" generaliza as relações e visualiza o todo, descobrindo assim uma expressão que representa a formação dessa sequência, a "forma genérica" dessa sequência. Nesse momento utiliza-se a palavra visualizar no sentido que foi construído no capítulo 1, ou seja, como modo de pensar para além do que os olhos podem ver. Olhar apenas para a 1.ª etapa, depois para a 2.ª, e assim sucessivamente, de forma individual, sem contemplar as relações que existem entre elas, traduz apenas a ato de enxergar, e não o de visualizar.

3.3 O PAPEL DA IMAGINAÇÃO PARA A VISUALIZAÇÃO

A imaginação, assim como a intuição, também pode apresentar diferentes interpretações, mas a maioria traz o verbo "criar" em suas concepções como, por exemplo, habilidades em: criar uma obra artística, criar imagens novas, criação literária entre outras. A compreensão de imaginação que se apresenta nessa pesquisa também passa pela criação, invenção, mas não deve ser considerada uma criação arbitrária.

A intuição, como visto anteriormente, abre possibilidades para a descoberta. A imaginação, por sua vez, abre possibilidades para a criação. Mas, qual a sutileza dessa diferenciação? A primeira vem de descobrir, se pensado no próprio significado da palavra, tirar o "manto" que está impossibilitando a observação do que está por trás. Porém, percebe-se que a "coisa" sempre esteve lá, esperando para ser descoberta. Já na imaginação, a "coisa" não está lá, ela é criada, não se trata de "trazer uma imagem à mente, mas sim criar um objeto abstrato através de suas determinações conceituais" (Gusmão, 2018, p. 31). Um exemplo clássico é a criação dos espaços artificiais das geometrias não-euclidianas, que possibilitam interpretar os objetos próprios dessas geometrias.

A realidade intuída se consolida de modo diferente da realidade imaginada. A primeira, acontece *a priori*, antecede a experiência. A intuição prevê o que vem a seguir, o próximo passo. Já a segunda é *a posteriori*, pois essa realidade ainda não existe e, para ser criada, é preciso que sejam estabelecidas relações com o que já se conhece, com as experiências já consolidadas para que essa criação não seja arbitrária, para que tenha uma certa racionalidade. Essa experiência mencionada não corresponde à experiência em sua conotação de experimento, de algo físico, manipulável, material, mas sim de uma experiência movida pelo pensamento, pelo campo das ideias, intelectual.

A imaginação, entendida como um modo de pensar, é um processo criativo movido pela construção, "coloca em movimento capacidades mentais de associação, configuração, ordenamento, harmonia, síntese, economia etc, e isso requer a liberdade não arbitrária." (GUSMÃO, 2018, p. 126).

> Nesse contexto, devemos ressaltar, mais uma vez, que a imaginação e a intuição são "mecanismos" que a experiência matemática nos dá para o acesso ao conhecimento dos objetos matemáticos, portanto, há um certo "empirismo" nesse processo que deve ser incorporado a essa concepção de matemática. Resumidamente, o empirismo que adotaremos para a matemática consiste em considerar a possibilidade de fazermos observações e experimentações com os objetos matemáticos mediadas pela imaginação e a intuição enquanto formas de experiência matemática (GUSMÃO, 2018, p. 111).

Pela imaginação é possível visualizar objetos em espaços (contextos) ainda não experenciados, ou seja, ver o que não está lá, como por exemplo, os objetos no espaço tetradimensional. Mas para que essa visualização se consolide, é necessário inserir esse objeto matemático num espaço-ambiente, criado para dar concretude aos objetos a serem visualizados e possibilitar a experiência matemática deles.

Nesse âmbito, para Cifuentes (2010), "a identificação do espaço facilita a visualização. Por exemplo os chamados modelos ou interpretações dos sistemas axiomáticos, como os das geometrias não-euclidianas, começam com a definição do espaço ambiente" (p. 24).

A constituição desses espaços se dá pela relação entre os objetos que neles se fazem presentes. Desse modo, se a imaginação cria um mundo não das coisas, mas de relações entre as coisas, então "ver" os construtos que a imaginação nos permite construir é ver não as coisas, mas as relações que as definem. E é exatamente essa ideia que foi apresentada no primeiro capítulo, em que a visualização se concretiza na relação entre os objetos ou nas relações que os estruturam, e não no olhar imediato para os objetos.

> A matemática do século XX incorpora aspectos qualitativos e exige, além da visão do olhar, uma visão da imaginação. No entanto, deve superar a visualidade bidimensional e tridimensional das representações do mundo que nos cercam e atingir uma visualização de ordem superior. Essa matemática vai além dos números e das fórmulas, incorporando novas geometrias, por exemplo, as geometrias não-euclidianas. Essa nova matemática lida com transformações, distorções, objetos que podem ser modificados sem perder certas qualidades, próprias da matemática. Essa nova matemática precisa ser capturada, por meio também da sensibilidade. Não pode ser vista com o olhar da visão, mas sim deve ser pensada, capturada pela imaginação. Essa nova matemática ultrapassa a tridimensionalidade e alcança a tetradimensionalidade. Para conhecê-la é necessária uma visão, um pensamento e uma imaginação mais refinados (CIFUENTES, 2013 *apud* GUSMÃO, 2018, p. 65).

Assim como na intuição, um dos combustíveis da imaginação é a analogia, o que conduz à generalização. O ponto de partida está na comparação entre o conhecido e o desconhecido, ou seja, usa o que se conhece para poder criar o que não se conhece. Um exemplo, é a hiperesfera quadridimensional, em que se inicia a análise pelo que é conhecido em dimensões menores, que seria a circunferência no espaço bidimensional e a esfera no espaço tridimensional, para se atingir o desconhecido, que é a hiperesfera no espaço quadridimensional.

Percebe-se a analogia presente nessas passagens: do espaço bidimensional para o tridimensional acrescenta-se uma coordenada. De modo análogo, para a passagem do tridimensional para ao quadridimensional "deve-se" acrescentar outra variável. Torna-se, assim, possível representar a hiperesfera na sua estrutura algébrica: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (w - w_0)^2 = r^2$. Desse modo, fica evidente que a imaginação não é arbitrária, pois utiliza-se de conceitos, relações e percepções já consolidadas, no intuito de se alcançar o inexplorado.

> A solução de um problema é uma forma de se manifestar a imaginação, e está mais próxima dos processos indutivos, com alto grau de intuitividade, do que dedutivos. A imaginação é capaz de formular contextos [ou até espaços-ambiente] a partir de dados concretos (CIFUENTES, NEGRELLI e ESTEPHAN, 2000, p. 9).

Para se conseguir "visualizar" coisas que não se veem, faz-se importante o olhar da imaginação, que por sua vez não se relaciona aos objetos matemáticos em suas representações, mas às relações que possibilitam experenciar a matemática dentro de um mundo abstrato.

Como já mencionado anteriormente, a intuição e a imaginação se consolidam pelas relações que determinam os objetos e do mesmo modo se consolida a visualização, em que a busca está na essência dessas relações e não na aparência. De acordo com Gusmão (2018, p.

136), “a ontologia da visualização, igual o caso da imaginação e da intuição, são as relações entre as coisas e não propriamente as coisas.”

Uma consideração importante a ser destacada é a de que a visualização é discutida nesta pesquisa pela sua esfera epistemológica, em consonância com a intuição e a imaginação, ou seja, como modos de acesso ao conhecimento, processos que são dinâmicos, são vivos, característica própria da dinâmica interna do pensar matemático. Não são partes do conhecimento matemático sistematizado, mas são formas de acesso, são ações, como afirmado por Gusmão (2018), “o que leva a conhecer já carrega em si (um processo epistemológico) uma epistemologia”.

Visualizar com as lentes da intuição e/ou da imaginação é o que enriquece a experiência matemática, pois esse modo de visualizar o que se concretiza com os olhos da mente, por meio das relações, é o que leva à percepção da beleza matemática. Em outros termos, é o que leva a apreciar a matemática, beleza traduzida em harmonia e ordem.

> Pela imaginação o homem ordena o mundo numa estrutura significativa e permite criar mundos possíveis e melhores possibilidades de ser e sentir-se parte integrante dele; por meio dela somos impelidos a visualizar aquilo que não temos a oportunidade de experienciar na vida cotidiana, rompendo com o espaço estreito que o cotidiano nos reserva. Ainda por meio da imaginação, o homem é estimulado a produzir conhecimento, particularmente em matemática (GUSMÃO, 2018, p. 65).

Na esfera pedagógica, a imaginação é a ação que propicia um olhar do estudante para a matemática diferente daquela estritamente calculista e técnica, manifestada muitas vezes em contextos numéricos e algébricos, pois a beleza não se apresenta nos resultados, mas sim, nos processos. Parafraseando Cifuentes, mais importante que as respostas, são as perguntas, pois elas transparecem a busca pela compreensão que o processo nos revela e não somente pelo resultado.

É a imaginação na atividade de produção do conhecimento que o olhar na esfera pedagógica se eleva. Para um professor, o que seria mais relevante de se constatar do que seu estudante criando, estabelecendo conexões entre o conhecido e o desconhecido, sendo ativo na produção de seu conhecimento? Ou seja, o aluno deixa de ser apenas espectador para se tornar protagonista.

Uma importante relação entre imaginação e visualização é destacada na citação anterior, em que a imaginação rompe com a ideia de que só se visualiza o que de algum modo se experiência no cotidiano (guiada pelo senso comum), ou seja, surge uma visualização de ordem superior, não atrelada apenas ao que é visto. Novamente, parafraseando Paul Klee, recorre-se à frase “visualizar não consiste em ver o visível, mas sim tornar visível.”

A interpretação geométrica das potências algébricas já era dada na época dos gregos, o que possibilitava sua inteligibilidade por meio de uma espécie de visualização, baseada no senso comum. Aliás, para os gregos, tudo o que era relacionado aos números tinha um significado geométrico. Assim, um número elevado a potência 1 era interpretado como um comprimento, um número elevado a potência 2, como uma área, um número a potência 3 como um volume. Isso pode sugerir uma interpretação análoga para potência 4 ou superior.

Desde o expoente 1 até o expoente 3 a intuição se faz presente, pois são conceitos e representações evidentes, visualizáveis geometricamente no espaço cotidiano, e que pela analogia são descobertos. Porém, quando se trata do expoente 4, é a imaginação que se faz presente, pois uma nova interpretação é necessária num um espaço de dimensão 4 para imaginar os objetos e suas estruturas nesse espaço.

Imaginar nesse contexto significa criar e, para criar, é preciso aprimorar a maturidade matemática e educar o olhar. Trabalhar com a matemática em suas diferentes perspectivas e possibilidades é um dos caminhos para o desenvolvimento dessa maturidade. Um exemplo simples, porém, importante de ser discutido, é o modo como se visualizam as figuras, especialmente os triângulos. Por hábito, os triângulos geralmente aparecem "apoiados" na base, ou em paralelo a um certo plano de referência. Mas, quando se levam as figuras em diferentes posições, se provoca uma verdadeira "educação do olhar", permitindo uma visualização mais dinâmica, em que as propriedades das figuras permanecem, mesmo que elas mudem de posição ou de configuração. Por sinal, falar de "base de um triângulo" supõe contextualizá-lo num certo espaço para poder visualizá-lo.

Exemplificar o contexto de imaginação não é tão imediato como na intuição, considerando a imaginação como um ato de criação matemática, ou seja, algo novo, que se utiliza de conhecimentos já estabelecidos para se construir uma nova estrutura, uma nova conjectura, uma nova definição.

Em sua tese, Gusmão (2018) traz alguns exemplos, como o da hiperesfera, o do hipercubo, em que ambas as construções partem de um pressuposto já existente, o espaço quadridimensional, para na sequência se conjecturar novas relações, imaginar uma construção nesse espaço e, assim, configurar novas propriedades.

3.4 A CRIATIVIDADE MATEMÁTICA E A PLURALIDADE DO PENSAMENTO

Ao se falar em estética da matemática, a criatividade – em consonância com a intuição, a imaginação e a visualização – também desperta para um modo dinâmico do pensar, sensível e qualitativo. Mas o que seria a criatividade na perspectiva da educação matemática? De que modo acontece? Qual a legitimidade desse modo de pensar a matemática? São essas questões que orientam as reflexões a seguir.

A criatividade, em seu sentido literal, pode ser entendida como capacidade em criar, inventar, inovar, ser original. No contexto da educação matemática, as ideias são similares, pois a ação de criar é movida principalmente pelas capacidades não lógicas do pensamento.

Na educação encontram-se pesquisas que relacionam a criatividade diretamente com a tecnologia[19], ou seja, a criatividade, nessa ocasião, está relacionada com uma ação do tipo "mãos na massa", em fazer com as próprias mãos, ganhando assim uma conotação de familiarização com o concreto, sendo essa uma ideia de criatividade que preconiza o que vem de fora para dentro, bem como as ferramentas que se utilizam no processo criativo. No entanto, a criatividade que será abordada nesse trabalho faz um movimento inverso, trazendo a criatividade, de dentro para fora, na dinâmica do pensar matemático e vivenciando um ingrediente que a deflagra.

Para melhor compreensão da ideia de criatividade adotada nesse estudo, apresenta-se a seguir um quadro, no qual estão elencadas algumas concepções prévias dessa ideia (Quadro 2).

Quadro 2- Concepções de criatividade.

Autor	Concepção
Barbeau (2009)	A criatividade começa com a curiosidade e envolve os alunos em tarefas de exploração e experimentação, nas quais podem se manifestar a sua imaginação e originalidade.
Alencar (1974)	A criatividade tem sido abordada de muitas maneiras diferentes. Algumas teorias dão ênfase aos traços motivacionais e de personalidade do indivíduo criativo (abordagem personológica), enquanto outras enfatizam os traços intelectuais e estilos cognitivos presentes na pessoa criativa (abordagem cognitiva).
Torrance (1966)	Criatividade é um processo de tornar-se sensível a problemas, deficiências, lacunas no conhecimento, elementos ausentes, desarmonias e assim por diante; identificar o difícil; buscar soluções, fazer suposições ou formular hipóteses sobre as deficiências; testar e testar novamente essas hipóteses e possivelmente modificá-las e testá-las novamente; e finalmente comunicar os resultados.
Guilford (1977)	Enfatizou que a resolução de problemas e pensamento criativo estão intimamente relacionados. As próprias definições dessas duas atividades mostram conexões lógicas. O pensamento criativo produz novos resultados e a resolução de problemas envolve a produção de nova resposta a uma nova situação, que é um novo resultado.

Fonte: Santos, Carli, et al., 2019.

[19] Entendendo por tecnologia todo e qualquer instrumento utilizado no processo de ensino e aprendizagem, seja eletrônico ou não (lousa, giz, computador, lousa digital...).

Da concepção de Barbeau destaca-se a “exploração” e a “experimentação” que serão essenciais nos processos de criação. Da concepção de Torrance salienta-se a sensibilidade como um fator que orienta os processos de formular hipóteses e pressupostos além de testá-los, no caminho da criação matemática.

Tais concepções mostram que a criatividade percorre diferentes áreas do conhecimento, como a psicologia, a educação, a arte, entre outras, porém existem pontos de convergência nessa diversidade de áreas. De modo comum, a criatividade coloca em evidência a sensibilidade de alguém frente aos problemas, de forma a identificar suas dificuldades, levando-o a conjecturar novas hipóteses e a propor novas soluções.

De acordo com Gontijo (2007),

> A capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de solução apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns (originalidade), tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma sequência de ações (GONTIJO, 2007b, p. 38).

É comum associar a criatividade matemática com a resolução de problemas, pois na citação anterior, Gontijo trata sobre as diferentes estratégias para resolução de problemas, e geralmente tais soluções levam a novos problemas, ideias ou desafios. Desse modo, esse contexto é potencialmente favorável para o desenvolvimento do pensamento criativo.

O pensamento criativo, que serve de base para esse estudo, se relaciona ao que transforma o contexto, produz o novo. De acordo com Pelaes (2010, p. 7), “a criatividade sugere a existência de novos fenômenos, através da capacidade de investigar possibilidades e não apenas reproduzir relações conhecidas”, desse modo se rompem as barreiras com o conhecido.

Pensando numa metáfora, para um melhor entendimento sobre o processo de criatividade nesse estudo, utiliza-se a culinária como um campo propício para tal efeito. Especificamente, discute-se brevemente a ação de se preparar uma receita, sendo esta considerada como um campo teórico prévio, em que a receita é apresentada como um passo a passo.

A criatividade põe-se em movimento ao identificar a variante possível nessa receita. Quando se decide substituir algum ingrediente, ou então modificar a ordem do preparo, vem a tona o ser capaz de fazer “variações” na receita (pano de fundo) para conseguir um novo sabor, um novo aroma. Por exemplo, ao preparar um suco utilizando diferentes combinações de frutas, uma variedade de sabores, texturas serão experimentadas, ou seja, um suco de morango com manga apresenta um sabor diferente de um suco de morango com kiwi, mas são duas variações possíveis. A escolha dos novos ingredientes é consequência de um processo de "visualização" não no campo do visual, é claro, mas no campo do olfato e do paladar. É um outro "ver" intelectual.

Vale (2012) também traz uma abordagem sobre criatividade relacionando-a com a resolução de problemas, à medida que faz uma reflexão sobre a importância na formulação de problemas que instiguem o pensamento a ir além do evidente, da reprodução. De acordo com a autora, "acreditamos que a criatividade pode ser desenvolvida se proporcionarmos aos alunos tarefas que, permitindo abordagens autônomas, possam gerar novas intuições sobre as ideias matemáticas subjacentes." (VALE, 2012, p. 193).

Ações como conjecturar, representar, fazer analogias, generalizar, bem como intuir, imaginar e visualizar (inclusive já manifestas nos processos culinários) compõem o pensamento criativo. Diante disso, pode-se dizer que o pensamento criativo na matemática também se constitui como uma forma de experiência matemática: as "ações propiciadas pela criatividade em matemática, como exploração de meios, manipulação de elementos, conceitos e objetos, escolhas e interpretações, constituem-se em formas de experiência matemática." (CIFUENTES e SANTOS, 2019, p. 19).

Para compreender ainda a criatividade no processo do pensar a matemática, no ambiente escolar, é interessante trazer à tona, como uma outra referência, a análise que se faz sobre suas dimensões, que nasceram pelo olhar da psicologia, nos estudos de Guilford e Torrence, mas que são atualmente discutidas no contexto da educação matemática, como nos trabalhos desenvolvidos por Isabel Vale. Essas dimensões são: fluência, flexibilidade e originalidade.

A fluência consiste em levantar uma variedade de tipos de soluções para um determinado problema proposto. Um exemplo simples consiste na resolução de uma equação do segundo grau, utilizando-se da técnica de soma e produto, completar quadrados, ou então a fórmula de resolução de equação do segundo grau. Mas, para além de conhecer diferentes técnicas, há também a diversificação de estratégias, umas algébricas, outras geométricas, etc.

Já a flexibilidade consiste na intencionalidade de discussão e análise das estratégias levantadas. Desse modo, qual seria a solução que melhor se encaixa para o problema proposto? Esse adjetivo "melhor" é subjetivo, pois no âmbito "pessoal" o que é melhor para um estudante pode não ser para outro. Entretanto, no âmbito matemático, "melhor" pode significar "mais ótimo" ou "mais simples" dentre uma variedade de soluções, qualificativos que precisam ser também devidamente definidos para sair do âmbito pessoal. Por isso se faz importante comunicar e argumentar a escolha, pois ao se promover tal diálogo não existe espaço para a reprodução, ou seja, na ação de comunicar estão inseridas as ações de intepretação e compreensão, sendo que a técnica faz "parte" do processo, mas não é o processo como um todo.

Dentro da dimensão da flexibilidade se faz presente uma qualidade da sensibilidade matemática chamada de "simplicidade", como já sugerido. A analogia, a generalização, têm em suas naturezas a simplicidade, uma vez que os próximos passos são tomados de acordo com os padrões anteriormente estabelecidos. Porém, a simplicidade não é sinônimo de comum, fácil, imediato, pois nem tudo que é simples é comum, como mostra, por exemplo, a aceitabilidade da infinitude em ato da reta euclidiana. Ela é aceita na matemática, dada sua natureza polêmica, por um ato de simplicidade.

Ainda de acordo com Cifuentes:

> A simplicidade também aparece no momento da escolha da "melhor" aproximação à solução de um problema, como no caso da predição de sequências ou na determinação das curvas de ajuste para coleções discretas de dados. A própria "conclusão" de um raciocínio por indução ou por analogia pode ser considerado um fenômeno de predição e, portanto, regido pelas leis da simplicidade (CIFUENTES, 2005, p. 70).

A escolha é o que estabelece a relação entre flexibilidade e simplicidade. Após a etapa da fluência, em que se levantam algumas possibilidades de resolução, é na flexibilidade que a escolha acontece, porém não é uma escolha arbitrária, mas guiada pelo recurso da simplicidade.

Por último, são apresentadas as discussões sobre a dimensão na qual será dada destaque nesse estudo, a originalidade. De acordo com Vale (2012), originalidade é a capacidade de pensar de forma diferente, produzindo ideias novas. É um pensar fora do óbvio. É ter uma ideia rara (Vale, 2012, p. 191). Uma estratégia é considerada original dentro de um grupo, por exemplo, dentro de uma turma, quando nenhuma outra solução igual tenha surgido.

Parece haver uma linearidade nas dimensões mencionadas, mas a originalidade é a dimensão de destaque, nesse tópico, pelo fato de ser a que mais se aproxima do processo de criação. Porém, a ideia de originalidade será extrapolada para além da problemática da resolução de problemas e, para isso, faz-se necessário compreender os processos argumentativos envolvidos e a possibilidade de variabilidade nesses processos.

3.5 O "PRINCÍPIO DE VARIABILIDADE" NA CRIATIVIDADE MATEMÁTICA

A metáfora da criatividade na culinária traz implícito um princípio que tem um certo caráter metodológico e que será denominado como "princípio de variabilidade". Ele foi sugerido por Cifuentes (2021, comunicação pessoal) e será discutido nesta seção por intermédio de um exemplo no âmbito do ensino elementar de matemática.

O que guia a originalidade na criatividade matemática é o "princípio da variabilidade", que consiste em identificar, dentro de um contexto teórico, os momentos em que podem acontecer alguma variação.

A seguir, é apresentada uma atividade de criatividade na matemática elementar, especificamente na álgebra elementar, permeada de momentos em que a intuição, a imaginação e a visualização agem.

Em todas as construções anteriores, podem-se observar a presença de alguns aspectos do pensamento matemático, tais como: generalização, analogia, contexto, simplicidade e abstração. O contexto, que se referia a uma geometria no triângulo retângulo, é extrapolado para uma nova geometria, um novo contexto, em que as relações já estabelecidas no espaço-ambiente do triângulo retângulo são utilizadas como alicerce para a formulação desse novo contexto e, consequentemente, para a nova geometria. Com a analogia, as ideias foram aplicadas para ângulo de medida igual a 45° e, na sequência, pela generalização, para ângulos agudos e obstusos quaisquer.

Para além dos aspectos citados, em todo o processo considera-se a liberdade de criação, a intuição como modo de prever a próxima sequência de relações, a imaginação como um modo de pensar a matemática para além dos espaços dados dos objetos e relações já conhecidos, porém utilizando-se destes "conhecidos" para se explorar o desconhecido.

No caso da construção da função tangente generalizada, a variação aconteceu com os ângulos. Em virtude disso, "novas" funções foram definidas, variando o ângulo que antes era somente de 90°, mas agora considerando-se ângulos quaisquer. É importante salientar que essa variabilidade não é arbitrária, uma vez que se constrói o "novo" usando como base o que já está estabelecido naquele contexto teórico.

A aplicação do critério de variabilidade começa, então, verificando-se em que momento um determinado conceito pode passar por variações de interpretação, a fim de se desenvolver novas análises e criar novas relações. A primeira etapa desse processo requer identificar um assunto que vai servir como pano de fundo, isto é, o contexto teórico. A segunda é verificar onde poderia haver a variabilidade de alguma hipótese ou pressuposto.

Como um exemplo de aplicação do princípio de variabilidade, propõe-se a análise do conhecido critério de divisibilidade por 3 em base 10, que será o pano de fundo teórico para sua aplicação.

Considera-se um número natural *m* em sua representação decimal, isto é, em base 10:

$$a = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_1.10 + a_0,$$

com $0 \leq a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \leq 9$

Usando a identidade $b^k - c^k = (b - c)(b^{k-1} + b^{k-2}c + \cdots + bc^{k-2} + c^{k-1})$ para b = 10 e c = 1, obtém-se, $10^k - 1 = (10 - 1)(10^{k-1} + 10^{k-2} + \cdots + 10 + 1) = 9F_k$, chamando de F_k o segundo fator.

Assim, tem-se, para k = 1, ... , n, as seguintes identidades:

$10^n - 1 = 9F_n,$

$10^{n-1} - 1 = 9F_{n-1},$

.

.

.

$10^2 - 1 = 9F_2,$

$$10 - 1 = 9F_1$$

Multiplicando pelos coeficientes a_k respectivos:

$$a_n.10^n - a_n = 9a_nF_n,$$

$$a_{n-1}.10^{n-1} - a_{n-1} = 9a_{n-1}F_{n-1},$$

.

.

.

$$a_2.10^2 - a_2 = 9a_2F_2,$$

$$a_1.10 - a_1 = 9a_1F_1.$$

Somando:

$$(a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_1.10 + a_0) - (a_n + a_{n-1}. + \cdots + a_1 + a_0) = 9(a_nF_n + a_{n-1}F_{n-1} + \cdots + a_1F_1)$$

isto é,

$$m - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) = 9(a_nF_n + a_{n-1}F_{n-1} + \cdots + a_1F_1).$$

Daí, como 3 é divisor do termo da direita, teremos que:

(3 é divisor de m) se e somente se (3 é divisor de $a_n + a_{n-1}. + \cdots + a_1 + a_0$),

que é o critério de divisibilidade por 3 desenvolvido de tal maneira a se constituir como o pano de fundo teórico, no qual serão identificados os pontos de variabilidade.

Nesse caso, a variação começa em observar que partes do argumento são preservadas se considerar-se qualquer base b, não apenas a decimal.

Como consequência, pode-se ver o seguinte:

1) Pela forma do argumento, o mesmo vale tomando 9 ao invés de 3, na base 10.
2) Igualmente, o anterior faz “ver” que a forma do argumento é a mesma, substituindo a base 10 por uma base b qualquer, e tomando um divisor d qualquer de $b - 1$, ao invés de 3 ou 9.
3) Isso permite obter o seguinte critério de divisibilidade por 2 em base 9, isto é, tomando a base $b = 9$ e $d = 2$ que é divisor de 8 (= 9 – 1): em base 9,

(2 é divisor de m) se e só se (2 é divisor de $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$)

Por exemplo, o número $341_{(9)}$ é divisível por 2, isto é, é par em base 9! pois 3 + 4 + 1 é divisível por 2 (de fato, $341_{(9)} = 2x165_{(9)}$).

Em toda a construção anterior, pode-se observar a presença de alguns aspectos do pensamento matemático, tais como: generalização, analogia, contexto, simplicidade e abstração. Mas, além dos aspectos citados, considera-se em todo o processo a liberdade de criação, a intuição como modo de prever a próxima sequência de relações, a imaginação como um modo de pensar a matemática para além dos objetos e relações já conhecidos, porém utilizando-se destes “conhecidos” para se explorar o desconhecido.

3.6 A VISUALIZAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA – UM MODO DE EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA

Retomando a proposta inicial desse capítulo, que se direciona a levantar reflexões sobre a experiência matemática ligada à criatividade matemática e o papel da visualização nesse processo, é possível perceber que para falar de experiência matemática faz-se necessário falar de sensibilidade matemática. Experenciar a matemática não é algo de fora para dentro, pelo contrário, está intrínseco ao modo de vivenciar essa matemática, carregada de percepções, pontos de vista, pré-concepções e diferentes modos de olhar, sendo movida pelo campo das ideias. Portanto, falar de experiência, significa também falar da intuição, da imaginação e do papel delas na visualização, todas envolvidas também nos processos de criatividade matemática, sendo esses de natureza sensível.

O propósito não foi apresentar alguma definição, ou até mesmo conceitualizar a experiência matemática, pois como já mencionado por Gusmão (Gusmão, 2018), esta é uma noção orgânica, que se move na dinamicidade do pensamento sensível no campo da matemática. O interesse se faz na inquietação de como se manifesta a experiência matemática, sendo uma das possíveis formas de manifestação os "lances de intuição", outra os processos de criação.

Há um exemplo histórico que ilustra o sentimento por trás da experiência. Santo Agostinho (filósofo) se referindo a sua experiência sobre a passagem do tempo, afirmou: “se me perguntam o que é o tempo eu não sei, mas se não me perguntam aí eu sei”. Em verdade, o que Santo Agostinho queria dizer é que o tempo não se sabe, mas se sente, isto é, o tempo não é objeto do conhecimento racional, mas sim, do conhecimento sensível.

Mas, como essas relações se dão na sala de aula? Certamente para se observar o desenvolvimento da sensibilidade matemática dos estudantes, como forma de experienciar a matemática. Esta não é uma tarefa fácil. Para isso é importante que o professor também “mergulhe” nessa dinamicidade. Um exemplo é a de explorar as estruturas das provas que explicam, pois essas iluminam o pensar matemático. Outro exemplo é a "manipulação" de objetos geométricos para capturar antes de qualquer propriedade sua "forma", o que alimenta a intuição sobre os objetos. É exatamente isso que se pretende com a visualização, ver a forma de objetos genéricos.

Portanto, incentivar a experienciação, descoberta e criação por meio da intuição, da imaginação e da visualização deve ser considerado pelo professor como modo legítimo para que seus estudantes acessem a matemática apreciando-a esteticamente, isto é, experienciando o conhecimento sensível na matemática.

Como o tema central desse estudo é a visualização matemática, uma outra reflexão importante a ser levantada é a de como a experiência matemática propulsiona o despertar da visualização. A intuição pode auxiliar na visualização do todo, por exemplo, ao se explorar uma determinada sequência, em que observando cada passo da sequência o pensamento matemático vá se revelando. A imaginação vem para criar novas relações, novos contextos e novos espaços-ambientes, de modo a tornar possível visualizar os objetos matemáticos.

A efetividade da experiência matemática na sala de aula é um dos pontos que norteiam as análises da pesquisa, frente ao material selecionado durante o estudo de caso proposto nessa tese, cujas análises serão apresentadas no capítulo 4.

4 PERCURSO METODOLÓGICO

A presente pesquisa é de abordagem qualitativa, à luz do paradigma interpretativo, uma vez que busca evidenciar as características dialéticas e dinâmicas do conhecimento matemático. O objeto de investigação é a ação humana, em que é interpretada dentro da realidade vivenciada. Para sua concretização, se propõe um levantamento bibliográfico, observações e entrevista com a pessoa envolvida com o problema de estudo, elementos que servem de base para a construção de hipóteses e tornar o problema mais explícito.

Esta pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública do município de Curitiba, em contato direto com os estudantes de uma turma de sétimo ano e com a professora regente de matemática, no intuito de compreender que ações podem ser interpretadas e discutidas no ambiente em que elas ocorrem.

Este campo e os participantes que fizeram parte da pesquisa são entendidos sob o ponto de vista da primeira característica da investigação qualitativa, dentre as cinco principais características da pesquisa qualitativa elencadas por Bogdan e Biklen e sob as quais se desenha e estrutura metodológica deste estudo, a qual aponta que "na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal." (Bogdan e Biklen, 1994, p. 47).

A segunda característica indica que a investigação qualitativa é descritiva, possibilitando que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita uma compreensão sobre nosso objeto de estudo (BOGDAN e BIKLEN, 1994). As observações realizadas no campo de pesquisa levam em consideração detalhes desde os mais simples até os mais complexos, que podem vir a direcionar a compreensão do objeto de estudo dentro de uma determinada situação, ação ou visão de mundo.

De acordo com autores, a terceira característica evidencia que "os investigadores qualitativos se interessam mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados dos produtos." (Bogdan e Biklen, 1994, p. 49). Essa afirmação direciona a ideia de que o processo tem muito mais a apresentar do que o produto final. A equipe diretiva da escola, a organização espacial da sala da aula, as expectativas do professor, são alguns elementos que influenciam no resultado final. Por isso, o processo deve ser tão importante quanto o resultado para as análises da pesquisa.

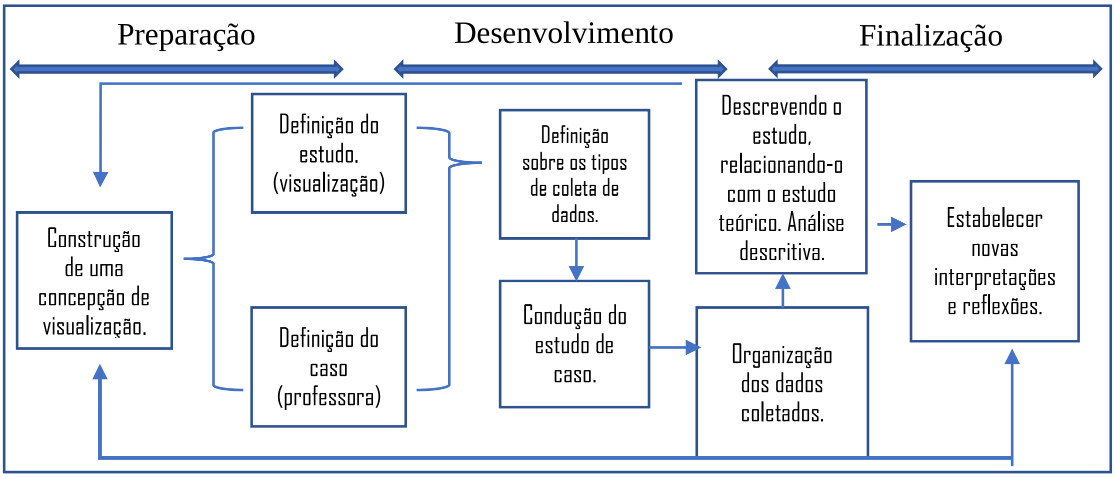
A quarta característica aponta que os investigadores qualitativos tendem a analisar seus dados de forma indutiva Bogdan e Biklen (1994). Nesse contexto, a construção da pesquisa acontece à medida em que são realizadas as coletas de dados, são examinadas as partes bem como o convívio com os envolvidos. É a partir desse estudo que podem surgir novas questões. De acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 50), "o processo de análise dos dados é como um funil, as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo."

A última característica mencionada pelos autores preza que "o significado é de importância vital na abordagem qualitativa." Bogdan e Biklen (1994, p. 50). No intuito de distanciar uma perspectiva subjetiva por parte do pesquisador quanto a análise e descrição dos dados da pesquisa, foi desenvolvida uma entrevista com o sujeito do estudo, a professora, de forma a considerar as experiências a partir de seu ponto de vista.

Propondo descobrir o que há de mais essencial e característico na situação desse estudo, a estratégia de investigação é o estudo de caso do tipo analítico. A característica desse tipo de estudo de caso é a de interrogar as situações, debater com teorias já existentes, no intuito de gerar novas inquietações e até mesmo novas teorias (Ponte, 2006). De acordo com Yin (2001, p. 32), "um estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro do seu contexto da vida real."

Nessa pesquisa, o sujeito é analisado dentro do contexto da sala de aula, considerando os fatores e elementos que o englobam. Nesse contexto, o "estudo" é a visualização e o "caso" é a professora. No quadro a seguir, são apresentadas as etapas do estudo de caso (Quadro 3).

Quadro 3 - Etapas do estudo de caso.



Fonte: Autores, 2021.

A pesquisa foi desenvolvida mediante observação direta e entrevistas com o propósito de trazer compreensões e descrever algumas experiências de ensino à luz do referencial teórico.

Além da observação e das entrevistas, utilizou-se o diário de pesquisa como forma de manter um registro escrito dos acontecimentos e observações diárias.

> Em um estudo de caso, análises e reflexões estão presentes durante os vários estágios da pesquisa, particularmente quando do levantamento das informações, dados e evidências, em situações em que os resultados parciais sugerem alterações, correções de rumo. A sistematização e organização de rascunhos, notas de observações, transcrições, registros de comentários, diários, opiniões etc. são coligidos em campos e indexados segundo algum critério definido no protocolo de estudo. Para tanto, o pesquisador deverá, cotidianamente, construir seu diário de campo, ou diário da pesquisa (MARTINS, 2008, p. 10).

A observação não consiste em apenas ver, mas implica um planejamento em relação ao que se deseja observar, levando em consideração os sujeitos, o contexto e o comportamento social. De acordo com Martins (2008, p. 25), "toda observação deve ser precedida de alguma teoria que lhe dê fundamentos e embasamento suficiente para que a técnica seja adequadamente aplicada aos propósitos do estudo". Portanto, os referenciais teóricos e leituras servirão de base para nossa observação.

A entrevista desenvolvida foi do tipo semiestruturada, em que um roteiro foi previamente estabelecido, porém houve uma flexibilidade que permitiu a inserção de novos questionamentos no decorrer da entrevista, motivados em sua maioria pelas respostas apresentadas pelo entrevistado.

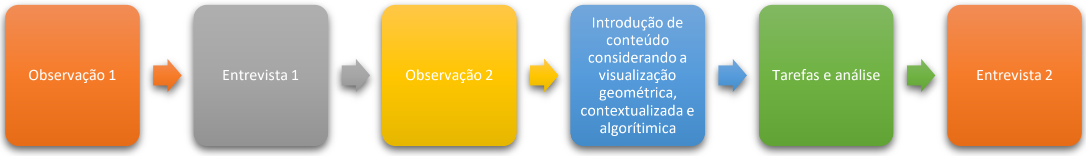
4.1 METODOLOGIA

Para compor um solo de investigação sobre o tema da visualização, tomou-se como ponto de partida leituras que trouxessem elementos de discussão e reflexão para a construção de uma concepção. Compreendendo a visualização como um modo de pensar a matemática (processo), fez-se importante buscar relações com a intuição e imaginação, entendidas como modo sensível de acesso aos objetos matemáticos.

Diante das questões delineadas, esse estudo traz uma perspectiva sobre o tema visualização em um viés epistemológico na sua fundamentação e como um aporte teórico-metodológico no contexto pedagógico, que leva a outras interpretações da matemática e a maneiras diferentes de se fazer e pensar a matemática.

Essa pesquisa se desenvolveu numa escola da Rede Municipal de Ensino de Curitiba/PR, em uma turma de 7.º ano do ensino fundamental. Ao todo, foram 28 encontros em que a metodologia foi dividida em seis etapas, conforme apresentado na Figura 26.

Figura 26 - Organização Metodológica.



Fonte: Autores, 2021.

As observações transitaram por todas as etapas e se dividiram em dois momentos:

- Observar o "processo" com o qual os estudantes desenvolvem o pensamento matemático no contexto de compreensão da prática docente da professora.
- Observar a presença dos recursos de visualização na prática docente da professora.

Antes de detalhar cada momento, é importante destacar o verbo que direciona essa ação na sala de aula: "observar". É no ato da observação que se analisa o processo "vivo", em movimento. Compreende-se que, para analisar o modo de conhecer por meio da visualização, faz-se importante observar a maneira como o aluno acessa o conhecimento e o modo como a professora cria possibilidades para esse acesso.

Essa escolha de caso se justifica no propósito de gerar inquietações para que professora reconheça que a visualização pode contribuir para o processo de aprendizado seu aluno.

O primeiro momento, a observação 1, teve como pano de fundo os estudantes no contexto de suas compreensões, interações e ações em sala de aula. É nesse contexto que o caso dessa pesquisa está inserido. Portanto, essa observação trouxe, de um modo singular, elementos da prática docente.

Utilizando-se da concepção de visualização construída no capítulo 1, é importante atribuir-lhe neste momento a palavra "processo", pois para compreender a visualização da forma como é proposta, o mais importante é observar o "processo" do que o resultado em si, ou seja, o "processo" que leva ao estudante visualizar, do que o objeto.

O segundo momento, observação 2, foi direcionado a observação da atividade docente, etapa em que se buscou destacar os recursos de visualização adotados pela professora, mesmo ela não tendo ciência sobre esse modo de pensar. Ou seja, o objetivo nessa situação foi o de analisar na fala, nas abordagens e nas explicações da professora os momentos em que a visualização como modo de pensar se apresenta.

Com intuito de entender as interpretações da professora em relação ao tema visualização e como seu percurso profissional pode delinear algumas dessas interpretações, realizou-se uma entrevista semiestruturada, inicialmente com 10 perguntas previamente elencadas, mas que no decorrer da entrevista finalizou-se com 22 perguntas. Essa entrevista foi realizada entre os momentos de observação.

Com as observações sendo realizadas e a entrevista inicial concluída, a próxima etapa foi a de incorporar, em conjunto com a professora, a visualização contextualizada, algorítmica e geométrica na introdução do conceito de equação. A pretensão foi a de analisar o processo percorrido pelo estudante para acessar àquele conhecimento matemático.

Por meio de uma seleção de tarefas que foram solucionadas pelos alunos, buscou-se categorizar as estratégias desenvolvidas. Essa análise das tarefas teve como objetivo principal observar como a professora interpreta, compreende e relaciona as estratégias apresentadas pelos alunos a partir da visualização matemática.

A segunda entrevista realizada com a professora teve por objetivo retomar a análise relacionada a sua compreensão sobre a visualização, elencando as diferenças de como ela entendia a visualização e como passou a compreender. Buscou-se também perceber se a professora concebe a visualização como um modo dinâmico de pensar e se esse modo tem relevância para seu modo de planejar, organizar e ensinar.

Importante salientar que tantos as observações quanto as entrevistas se deram de modo presencial. Além disso, a atuação da pesquisadora nas etapas descritas na sequência não se deu com o propósito de alterar o objeto de estudo, que eram as compreensões sobre a visualização da professora, mas sim de criar um contexto para investigação, na qual pudesse recolher dados mais fidedignos sobre essas compreensões. Ou seja, criar condições mais oportunas para que se registrassem dados importantes e significativos, de modo a perceber o objeto em estudo como elemento de constituição do corpus.

4.2 A INSTITUIÇÃO

No município de Curitiba, das mais de 180 escolas, 11 ofertam anos finais do ensino fundamental. A escola em que a pesquisa foi desenvolvida atende os iniciais e finais do ensino fundamental, além de turmas de integral. As turmas dos anos iniciais se concentram no período da manhã e as dos anos finais no período da tarde. Ao todo são 12 turmas pela manhã, 12 turmas a tarde e 4 turmas que frequentam a escola em período integral.

A instituição foi escolhida por ser conhecida pela pesquisadora, que já fez parte do corpo docente. Essa aproximação com a instituição possibilitou que a pesquisa fluísse de maneira natural, sem que os participantes diretos e indiretos se sentissem constrangidos ou incomodados.

O ano escolar escolhido para a realização da pesquisa foi o 7.º ano, propositalmente por ser o ano em que, de acordo com o currículo do município, o eixo álgebra e pensamento algébrico é mais predominante. Mas, porque não buscar uma turma em que a predominância seja o eixo de geometria? Justamente porque o entendimento que se faz de visualização não está atrelado ao que se vê, mas ao que se faz tornar visível. Deste modo, o pensamento algébrico parece mais desafiador enquanto visualização, o que exige um olhar mais direcionado para as relações entre os objetos.

A turma era composta por 30 alunos, com idade média entre 12 e 13 anos. A professora que ministrou as aulas no 7.º ano atendia três turmas: 7.° A, B e C, sendo selecionada a turma do 7.º C pelo motivo dos horários das aulas coincidirem com os horários disponíveis da pesquisadora. A seguir, são apresentados os sujeitos e o desenvolvimento de cada uma das etapas mencionadas anteriormente.

4.3 A PROFESSORA

A professora participante não foi escolhida de modo aleatório, mas vale ressaltar que este estudo de caso não se caracteriza pelo tipo intrínseco, e sim instrumental, posto que se objetiva a compreensão de algo maior, que é a visualização. Deste modo, este estudo também poderia ter sido realizado com outra professora de matemática regente da escola ou até mesmo de outra instituição.

O trabalho que a professora participante vinha desenvolvendo em suas turmas já era de conhecimento da pesquisadora, e o fator determinante para a realização do convite foi o modo como a docente mediava os conteúdos em relação aos seus alunos. A palavra mediação utilizada é proposital, pois será possível analisar nas observações descritas no próximo capítulo que em nenhum momento, durante sua prática, ela se coloca no papel de "expositora" de conteúdo, mas sim de mediadora, que em várias situações busca aprender com seus alunos.

Portanto, um(a) docente que pudesse trazer contribuições para solucionar o problema de pesquisa teria que ter esse olhar amplo, tanto para a matemática como para a docência. E levar a visualização para a sala de aula como modo de pensar requer um interesse em enriquecer sua metodologia, visando uma possibilidade a mais para seus alunos.

Sobre o planejamento da escola e da professora quanto as avaliações e os conteúdos, nenhuma alteração foi realizada, pois as tarefas e propostas inseridas na pesquisa foram construídas em conjunto da professora e pesquisadora, já pensando no conteúdo que estaria sendo abordado naquele momento.

4.4 OBSERVAÇÃO 1

O primeiro momento de observação se concentrou na prática docente pela observação no estudante, ou seja, o que o estudante, em suas ações, poderia revelar sobre a prática docente. O ato de observar aconteceu em todas as aulas assistidas, com todos os estudantes da turma, e o que diferencia as etapas de observação 1 e observação 2 é a perspectiva do olhar. Na primeira etapa, o olhar voltou-se para a prática docente, com o olhar para o estudante, na segunda, para a professora em sua prática.

As observações foram realizadas no decorrer de 28 encontros, em que o papel da pesquisadora era a de observadora participante, sendo o motivo de sua estadia na sala de aula revelado aos participantes da pesquisa. Além disso, a pesquisadora interagia, auxiliava e levantava questionamentos aos estudantes.

Entende-se que para realizar uma observação precisa estar claro ao pesquisador “o que” e “como” observar. Diante disso, o olhar e a atenção durante esses encontros estavam voltados para a fala, gestos e participação dos estudantes, na busca de identificar a professora. Para registro das observações foram realizadas notas de campo, gravações em vídeos e fotos.

Os momentos de observações que mais trouxeram elementos para a pesquisa foram de realizações das tarefas propostas pela professora, pois ocorreram mais questionamentos nessas situações, o que clarificava para a pesquisadora algumas ações da professora que refletiam no modo de aprender do estudante.

4.5 ENTREVISTA

Com as observações da primeira etapa em andamento, foi realizada com a professora uma entrevista semiestruturada, na qual o objetivo era o de analisar as compreensões que ela fazia sobre a visualização e, principalmente, o papel que esse modo dinâmico de conhecer poderia ter ou não na aprendizagem matemática.

A entrevista inicialmente era composta por 10 questões (em itálico) mas, no decorrer da fala da professora, novos questionamentos foram levantados, finalizando com 22 questões. Abaixo seguem as questões elencadas:

1) *Qual a sua formação?*
2) *Área de atuação?*

3) *Enquanto professora, o que mais te satisfaz, 6.º ao 9.º ou 1.º ao 5.º?*

4) *E o vice-versa também acontece?*

5) *Tempo de serviço dedicado aos anos finais do ensino fundamental?*

6) *Como você vê o ensino da matemática hoje?*

7) *E do 6.ª ao 9.º qual você vê?*

8) *Como você se percebe ensinando matemática?*

9) *Enquanto professora, quais são as maiores dificuldades encontradas no ensino de matemática?*

10) *Quais são as maiores realizações que você vivencia enquanto professora?*

11) Como você compreende a frase “visualização matemática”?

12) Você falou a palavra experimentar? Então você acha que a visualização está relacionada com o ato de “experienciação”?

13) Com a concepção que você tem sobre a visualização matemática, dada na última questão, fale sobre ela, como modo de conhecer.

14) De que forma você a vê como modo de conhecer?

15) E você sempre vê a necessidade de um registro escrito?

16) E esse registro que você fala da importância deles, seguindo do exemplo das réguas de frações que você mencionou, esse registro precisa ser em que tipo de linguagem?

17) Então são formas de representação?

18) Mas essa passagem da representação do objeto você vê necessária?

19) Isso causa erros conceituais inclusive no ato de comparações de frações, em que eles enxergam os algarismos e não o número certo?

20) Então você pensa que talvez para os professores do 6.º ao 9,º, que tem uma formação específica, falte conhecimento matemático, ou falte formas dele pensar e estruturar suas aulas pra que esse aluno acesse esse conhecimento matemática, ou os dois, ou alguma outra coisa?

21) O que me chamou atenção foi que você falou que os alunos se apegam ao visual, por exemplo, quando eles vão comparar frações. Você usou o termo visual. E em outros momentos você usou o termo visualização. Você esses termos como sinônimos, ou não, diferentes?

22) Você vê elementos da visualização matemática em sua prática em sala de aula? Cite exemplos.

Algumas questões foram realizadas de acordo com a resposta da pergunta anterior. O primeiro bloco de perguntas (de 1 à 10) é de abordagem geral, sobre a formação, experiências vividas, concepção sobre o ensino de matemática nos dias atuais bem como a aprendizagem. São questionamentos tão importantes quanto os que aparecem na sequência, pois as respostas dadas pela professora sobre sua base formativa e experiência profissional apresentam elementos que se direcionam para o modo de ensinar e é nessas falas que se iniciou a busca da visualização como acesso ao conhecimento matemático.

O segundo bloco de perguntas (11 a 22) foi direcionado à visualização e à compreensão que a professora faz sobre esse modo de conhecer. A transcrição completa da entrevista consta no material anexo a essa pesquisa.

4.6 OBSERVAÇÃO 2

Após a realização das duas primeiras etapas do percurso metodológico desenhado, observação 1 e entrevista 1, foi dado início a terceira etapa: observação 2. Nessa etapa, o olhar se direcionou para a prática docente, especificamente na busca por identificar a visualização na fala, nas tarefas, nas avaliações e nos diálogos proporcionados pela professora para com seus alunos.

Diante do modo de olhar proposto, essa etapa, juntamente com a etapa da observação 1, se estendeu por 28 encontros, nos quais ocorreram aulas voltadas a abordagem de novos conteúdos, aulas direcionadas a tarefas coletivas, aulas voltadas para avaliações e aulas em que a professora, em conjunto com a pesquisadora, aplicou uma atividade manipulativa sobre os números inteiros e suas operações.

Essa etapa aconteceu após a 1.ª entrevista com a professora, justamente por se pretender, antes da observação de sua prática, levantar as compreensões que ela trazia sobre a visualização. Por essa razão, o direcionamento das observações possibilitou essa compreensão de visualização da professora, a partir da qual foi possível buscar relações e associações com a ideia de visualização proposta no capítulo 1 da pesquisa.

Para coleta dos dados resultantes das observações, foram utilizados como instrumentos: notas de campo, gravações de vídeos e fotos.

4.7 INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE EQUAÇÃO

4.7.1 Parte 1

Com o intuito de instigar os alunos para a ideia inicial de equação, a abordagem foi dividida em duas partes: a primeira direcionou-se para o entendimento das expressões algébricas. A segunda para o entendimento específico de equações. Para esse planejamento, houve uma interação entre a professora e a pesquisadora de modo a criar contextos para as tarefas que, consequentemente, propiciassem o surgimento de ideias sobre a visualização. Portanto, o planejamento foi de construção coletiva, porém, a aula foi ministrada pela professora. Essas atividades foram realizadas com toda a turma.

Na primeira parte foram propostos quatro problemas em que os alunos teriam que refletir sobre o valor desconhecido e pensar como representá-lo. Portanto, não foi apresentado o conceito de equação, mas a noção de um valor desconhecido, dando-se ênfase primeiramente a expressão algébrica. Para provocar a dinamicidade do modo de conhecer, foram exploradas as ideias de padrão, ou seja, situações em que se faz necessária a visualização da parte para se concretizar o todo.

O primeiro problema explorado foi:

1) A assistência técnica de um determinado tipo de celular recebe da fábrica R$20,00 para cada celular consertado. Com base nessa informação, complete a Tabela 2 abaixo:

Tabela 2 – Exemplo da equação.

Celulares consertados	1	2	7	15	**90**	**140**	252
Valor recebido	20	40					

Fonte: Autores, 2021.

Com base na tabela que foi completada, responda:

a) Expresse, simbolicamente, a quantia em dinheiro que a assistência técnica vai receber se consertar “**uma quantidade desconhecida”** celulares.

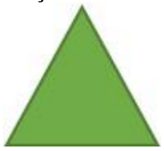
b) De acordo com a sentença respondida do item a, escreva qual será o lucro que a assistência técnica terá, se consertar 40 celulares.

Nota-se que o problema parte de algumas contextualizações simples, de algo visível (no sentido de ver) para algo abstrato. A elaboração da tabela sem a inserção de símbolos ou incógnitas foi propositalmente pensada e o preenchimento foi realizado com sucesso pelos alunos. No item “a” utilizou-se a sentença: “uma quantidade desconhecida” intencionalmente para que o aluno refletisse sobre o que viria a ser esse “desconhecido”. Nota-se que não foi mencionada nenhuma incógnita no enunciado, de forma que o aluno teve a livre escolha.

O segundo problema explorado foi:

2) A Figura 27 representa um triângulo equilátero, ou seja, um triângulo com três lados de mesma medida. Para calcular o perímetro desse triângulo precisamos somar as medidas dos lados.

Figura 27 – Representação de um Triângulo Equilátero.



Fonte: Autores, 2021.

Preencha a Tabela 3 que relaciona a medida dos lados do triângulo com o seu perímetro.

Tabela 3 – Relação da medida dos lados do triângulo com o perímetro.

Lado (cm)	1	4	7	12	23	39	x
Perímetro	3	12					

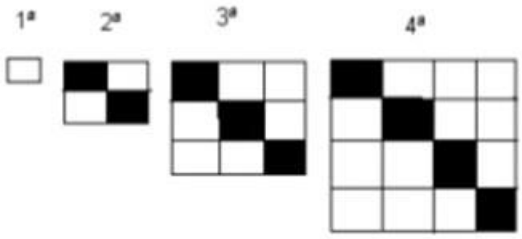
Fonte: Autores, 2021.

Nesse problema, o aluno teve que preencher a tabela, que contém além de valores numéricos, um valor desconhecido. Assim como a primeira tarefa proposta, a ideia de padrão torna-se evidente. Para visualizar o todo, o aluno teria que compreender as partes, ou seja, nesse tipo de tarefa, o processo de visualização acontece quando a generalização é concretizada. Especificamente nessa proposta, foi fixada a simbologia para a incógnita, a letra x.

O terceiro problema era mais complexo na finalidade da expressão algébrica.

3) Observe a Figura 28 abaixo:

Figura 28 – Expressão Algébrica.



Fonte: Autores, 2021.

a) Quantos quadradinhos pretos e brancos estão representados na 2.ª posição?

b) Quantos quadradinhos brancos estão representados na 4.ª posição?

c) Quantos quadradinhos pretos e brancos devemos ter na 6.ª posição?

d) Para n posições, como podemos representar a quantidade de quadradinhos brancos e pretos?

Os itens “a”, “b” e “c” foram pensados como forma de desenvolver a construção da expressão algébrica, portanto, foi-se direcionando parte por parte, para que na sequência o estudante conseguisse concretizar o todo, a enésima posição. A complexidade dessa questão relaciona-se com a busca pelo padrão, que não é tão evidente quanto nos problemas anteriores.

O último problema referente a abordagem sobre as expressões algébricas envolvia as noções geométricas, especificamente perímetro e área, porém foi apresentado somente o somente o seguinte enunciado:

4) Um loteamento vende terrenos retangulares cujo comprimento é 50 metros a mais que a largura.

a) Qual é a área desse terreno?
b) Qual é o perímetro desse terreno?
c) Se um terreno tem 10 metros de largura, qual será a sua área?
d) E qual é o seu perímetro?

A não utilização da imagem foi pensada no intuito de compreender o processo de resolução do aluno, se utilizam de uma imagem mental, partem para a representação ou apresentam outra forma de resolução.

Para finalizar essa primeira parte, foi solicitado aos alunos que escrevessem as expressões algébricas para as seguintes sentenças:

a) Luciana tem o dobro da quantia de João
b) Marta tem metade da quantidade de Camila
c) O triplo de um número a
d) O consecutivo de um número inteiro y

Essas expressões são algumas das quais serão utilizadas na abordagem de equação.

4.7.2 Parte 2

Realizada a introdução sobre as expressões algébricas, essa segunda parte corresponde diretamente a abordagem das equações. Para iniciar, foi proposta a resolução do problema do “tijolo”.

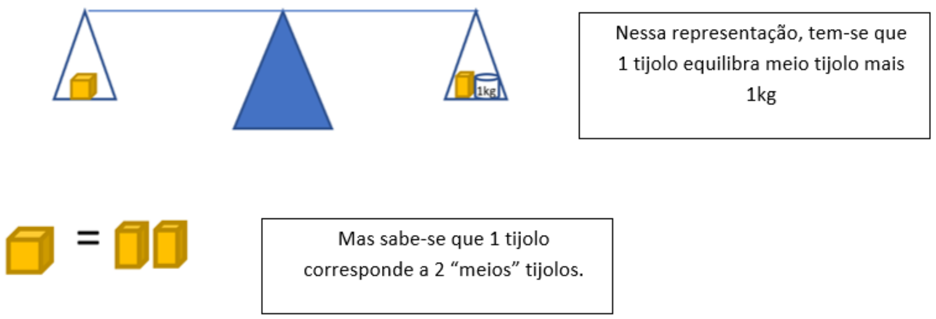
1) Um tijolo pesa 1kg mais meio tijolo. Qual é o peso de um tijolo?

Para explorar esse problema, a visualização contextualizada se faz presente, ao ponto de que a visualização do tijolo é imediata para a interpretação do enunciado, além de ser uma situação concreta, de um contexto físico real.

Com o problema proposto, foi dado um tempo para que os estudantes levantassem suas conjecturas, no intuito de elencar e organizar suas hipóteses na lousa.

Como recurso representativo, pode-se utilizar o desenho de uma balança ao lado o percurso que estava sendo realizado (Figura 29).

Figura 29 – Desenho de uma Balança ao lado do percurso.



Fonte: Autores, 2021.

Para o próximo problema, o objetivo é analisar a visualização algorítmica no seu contexto.

2) Um terreno com formato retangular tem o perímetro medindo 26m. A largura corresponde a 4m, porém o comprimento é desconhecido. Escreva a equação que representa essa situação.

A visualização algorítmica se caracteriza por um problema geométrico com uma solução de abordagem algébrica. Ou seja, o ponto de partida é geométrico e o ponto de chegada é algébrico. Esse problema se inicia pela abordagem do retângulo bem como o perímetro e encaminha para a álgebra ao solicitar a equação que representa a situação. Novamente, a não utilização de imagem foi proposital, com intuito de observar o processo de construção do raciocínio do aluno.

E por último, foi proposto um terceiro problema.

3) Qual é a medida do lado do quadrado se seu perímetro é igual ao perímetro do retângulo? Conforme apresentado na Figura 30.

Figura 30 - Representação do Terceiro Problema.

Fonte: Autores, 2021.

Nessa situação se faz novamente presente a ideia da visualização algorítmica, em que se parte do geométrico para se concluir com argumentos algébricos. Outra observação que se deve considerar é o fato da relação entre as figuras, que requer uma visualização total do que está representado e não se resume apenas ao ato de ver as figuras, mas de pensar por meio delas.

Todas as análises referentes ao desenvolvimento dos estudantes durante a realização dessa proposta de introdução ao conceito de equação estão descritas no próximo capítulo da tese.

4.8 TAREFAS

Após a introdução ao conceito de equações, os alunos passaram por um período de provas trimestrais, em fase de fechamento do ano letivo. Durante esse momento, foi possível perceber a estrutura e organização tomada pela professora na elaboração das avaliações, que será comentado com profundidade no capítulo seguinte, especificamente nas análises da observação 2.

Esse tópico foi nomeado de tarefas justamente porque, após as avaliações, foi realizada uma tarefa com nove alunos, pré-selecionados pela professora, de acordo com o nível de desenvolvimento. Então, desses nove alunos, três apresentavam muita dificuldade, três tinham um bom desenvolvimento, porém precisavam de estímulos para tal. Os outros três alunos estavam desenvolvendo sua própria forma de pensar a matemática.

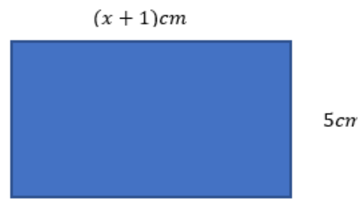
Para a escolha das tarefas, houve uma troca entre a professora e a pesquisadora, de modo a criar meios que propiciassem o surgimento de ideias sobre a visualização. Devido a carga horária completa que a professora regente tinha na escola, esta aplicação foi realizada pela pesquisadora, sem nenhuma interação entre pesquisadora e estudantes.

O objetivo da aplicação dessa tarefa se deu por dois motivos: compreender se a prática docente pode ou não refletir no modo em que os estudantes elaboram as estratégias de solução. O segundo e principal objetivo foi o de analisar o olhar da professora diante as resoluções apresentadas, observando a sua percepção da visualização presente ou não diante os raciocínios apresentados. Esse momento aconteceu entre a pesquisadora e a professora, na entrevista 2. Para registro de ambos os momentos foram utilizadas gravações de vídeo e áudio.

As tarefas aplicadas aos alunos foram as seguintes:

1) Observe a Figura 31 abaixo: Questão (adaptada do livro *Praticando Matemática*).

Figura 31 – Exemplo adaptado do livro Praticando Matemática.



Fonte: Autores, 2021.

Quanto ao retângulo, podemos escrever a equação:

$$2 \times (x + 1) + 2 \times 5 = 38$$

a) O que representa o número 38.

b) Qual o valor de *x*?

c) Será que o número 70 tem alguma relação com esse retângulo?

Essa tarefa foi pensada na busca por aliar o raciocínio matemático com a visualização algorítmica. Os itens a e c envolvem o pensar no significado da incógnita, que vai além do que se restringir ao seu valor.

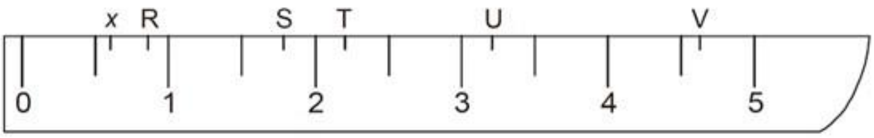
2) Uma maçã vale 6 bananas mais meia maçã. Meia dúzia de bananas custa 48 centavos. Quanto custa uma maçã? Questão (livro *Praticando Matemática*).

Essa questão envolve a ideia da visualização contextualizada, por ser tratar de objeto real, presente no contexto do aluno.

3) A figura representa parte de uma régua graduada de meio em meio centímetro, onde estão marcados alguns pontos, a saber, R, S, T, U e V. Qual deles melhor representa o número 2*x* + 1? Se um ponto W, fosse representado pelo número 3, qual deveria ser o valor de *x*? Questão (livro *Projeto Radix*).

Nessa questão, além de visualizar o todo, o estudante tem que pensar no processo inverso de solução. A visualização presente é a algorítmica, em que se inicia o raciocínio pela reta numérica, que é uma representação geométrica dos números, e se conclui com um algorítmico, nesse caso o valor da incógnita x, conforme apresentado na Figura 32.

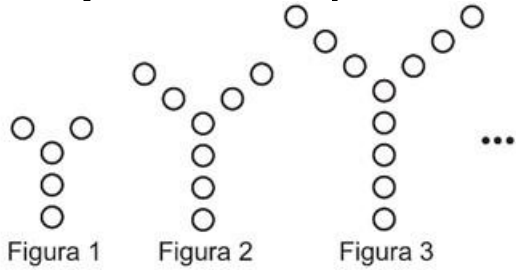
Figura 32 – Representação Geométrica dos Números.



Fonte: Autores, 2021.

4) Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão (Figura 33), quantas bolinhas terá a 15.ª figura? Questão (OMBEP nível 1 - 2019).

Figura 33 – Encontrando padrões.

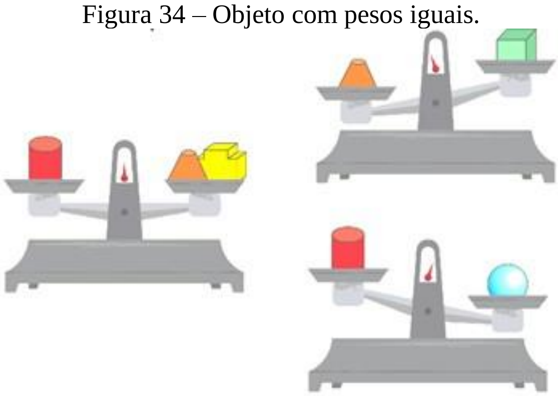


Fonte: OBMEP, 2019.

Novamente trabalhando com a ideia de padrões, essa tarefa envolve a visualização das partes para se concretizar o todo. A visualização algorítmica se faz presente, pois por meio da configuração geométrica apresentada pode-se encontrar o padrão solicitado.

5) Nas balanças da Figura 34, objetos iguais têm pesos iguais. Qual dos objetos é o mais pesado? Questão (OMBEP nível 1 - 2017).

Figura 34 – Objeto com pesos iguais.



Fonte: OBMEP, 2017.

Essa tarefa estabelece a relação de igualdade sem envolver números. Percebe-se aqui a visualização contextualizada, pois os objetos reais devem ser comparados a fim de se concluir qual é o mais pesado.

6) Na operação de adição especificada na Figura 35, cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo representado pela letra P? Questão (OMBEP nível 1 - 2018).

Figura 35 – Representação de Algarismos Diferentes.

$$\begin{array}{r} O\,B\,M\,E\,P \\ +\quad O\,B\,M \\ \hline 2\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

Fonte: OBMEP, 2018.

Nessa última proposta, a ideia é a visualização do todo para se conjecturar as partes, especificamente os valores das letras. Para isso, envolve-se a visualização algorítmica, em que a organização das letras na operação é essencial para descobrir o valor de cada uma.

As análises das resoluções dos estudantes bem como as observações da professora serão apresentadas no próximo capítulo.

4.9 ENTREVISTA 2

Nesse momento, faz-se importante lembrar que o estudo de caso se direciona para as compreensões da professora sobre a visualização. Para que essa proposta se efetivasse, foi imprescindível direcionar o olhar para a processo do desenvolvimento do pensamento matemático do aluno, pois essa observação traz elementos essenciais da prática docente da professora em questão.

No desenho da metodologia proposto nesse capítulo, a certeza era que seriam realizadas duas entrevistas com a professora, sendo a primeira antes das observações e a segunda depois. Porém, percebeu-se a necessidade de inserir mais etapas a esse processo, como a observação 1, observação 2 e a introdução do conceito de equação, sendo ainda inseridos elementos da visualização como forma de pensar a matemática e as tarefas pensadas e elaboradas com ideias pressupostas da visualização, com objetivo de serem analisadas junto com a professora. Portanto, essa estruturação metodológica foi colocada em prática durante todo segundo semestre de 2019, durante 28 encontros, e foi finalizada na segunda entrevista realizada com a professora.

A segunda entrevista tem por objetivo trazer um comparativo das compreensões iniciais da professora sobre a visualização com as compreensões após todo processo metodológico realizado. Para isso, foi realizada uma entrevista semiestruturada, que inicialmente contava com nove perguntas. Contudo, no decorrer da entrevista, novos questionamentos foram sendo realizados (em itálico), finalizando com 21 perguntas. Para fins de registro e análise, a entrevista foi gravada.

1) Você recorda a ideia de visualização que apresentou na 1.ª entrevista?

2) E se for destacar por palavras chaves, fica mais fácil para recordar?

3) Em relação a entrevista inicial, sobre a concepção de visualização enquanto professora, você percebe alguma mudança no seu entendimento sobre o tema?

4) Diante da análise das resoluções apresentadas pelos estudantes, você percebe, em alguma delas, a visualização como um modo que favorece o aprendizado?

5) E em alguma delas você consegue destacar que você viu a visualização como um modo que favoreceu o aprendizado dele para aquela questão específica?

6) Então, será que ela foi além de enxergar?

7) Será que ela saiu do patamar de enxergar, perceber, para daí conjecturar o processo, que seria visualizar?

8) Você percebe alguma relação da sua prática com as soluções apresentadas pelos estudantes?

9) E quando você se depara com respostas assim nas avaliações, o que você considera?

10) Você consegue perceber esse processo além das avaliações?

11) É possível observar nas avaliações que a professora elaborou, exercícios que retomam o conceito de área, como, por exemplo, descobrir o lado de um quadrado dada a área. Ou então a ideia de parte do todo, a área do quadrado interno é ¼ da área total. Qual era sua ideia trazendo o conceito de área para esse contexto?

12) Um dos exemplos observados foi na questão em que você pede para eles que, por meio das figuras, descubram geometricamente o valor de...Você acha que eles usam a figura, ou vão colocando direto o valor?

13) Você acha que é possível instigar o aluno a pensar pela a visualização nas avaliações? Se sim, de que forma?

14) Então você acha que uma questão, para possibilitar pensar pela visualização, não precisa necessariamente ter figuras?

15) A imagem não precisa estar no papel?

16) Você vê elementos da visualização em sua prática, desde a abordagem dos conceitos até a elaboração das tarefas e avaliações? Em caso afirmativo, de que forma você

pode inserir em sua prática a visualização como um modo de favorecer o aprendizado matemático de seu aluno?

17) É possível difundir, diante a comunidade de professores de matemática, a visualização como um modo que favoreça o aprendizado matemático? Em caso afirmativo, de que forma?

18) E se você fosse convidada para um curso de formação continuada e o tema desse curso fosse visualização, o que você gostaria de ver nesse curso, enquanto professora?

19) Você acha que é uma habilidade que pode ser desenvolvida para com o aluno?

Com os questionamentos acima, finalizou-se o percurso metodológico desenhado para a presente pesquisa, das quais as análises cada uma das etapas propostas pode ser observada na seção seguinte.

5 ANÁLISES

As análises da presente pesquisa foram construídas utilizando-se como eixo de discussão e reflexão cada uma das etapas apresentadas na metodologia. Desse modo, destacam-se os pontos principais observados e coletados em cada fase, desde a 1.ª observação até a 2.ª entrevista com a professora regente da turma.

Cabe nesse momento relembrar quais são as etapas mencionadas. A “observação 1” corresponde ao olhar direcionado ao estudante e seu modo de pensar a matemática. A “entrevista 1” refere-se à primeira entrevista realizada com a professora regente de matemática da turma de sétimo ano em que a pesquisa foi realizada. Nessa entrevista, o objetivo era conhecer a professora em relação a sua carreira profissional, seus ideais pedagógicos e, principalmente, buscar informações sobre o que ela entendia por visualização matemática.

Na “observação 2”, o foco passa a ser a professora na prática docente, em que se procurava por elementos da visualização na sua metodologia e didática em sala de aula. Na etapa correspondente a “introdução de conteúdo”, utilizando-se das ideias da visualização geométrica, contextualizada e algorítmica, tem-se a fase dedicada a trazer a visualização efetivamente para a sala de aula, como um modo de pensar a matemática. Todo esse planejamento foi realizado em conjunto com a professora regente.

Na sequência, na etapa das “tarefas e análises”, foram selecionados nove alunos da turma em que a pesquisa foi desenvolvida, alunos estes com diferentes níveis de aprendizagem. O objetivo dessa etapa foi o de compreender o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. E este material também se torna elemento de discussão para a última etapa, que é a “entrevista 2”. Nessa segunda entrevista com a professora foi realizada uma análise das soluções apresentadas pelos estudantes, buscando relações entre essas análises e a prática docente. Por fim, os questionamentos sobre a compreensão que a professora faz sobre a visualização retornam, a fim de entender se ocorreram mudanças ou foram incorporados novos elementos no modo como a professora concebe a visualização matemática em sala de aula.

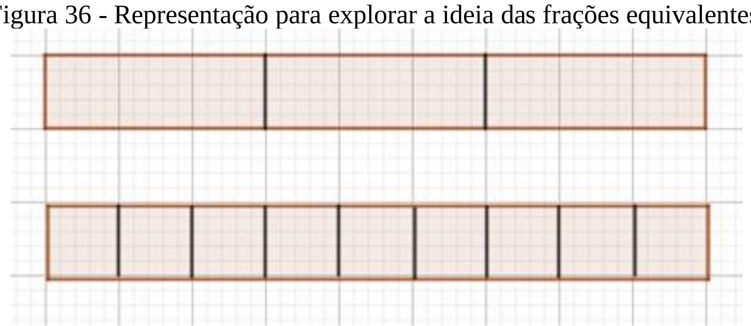
5.1 OBSERVAÇÃO 1

O caso desse estudo foi a professora, mas o objetivo dessa primeira observação com o olhar direcionado aos estudantes se justificou pela busca em compreender como os estudantes são instigados a pensar a matemática durante as aulas e como essa interação entre aluno, conteúdo e professora se desenvolveu nessa turma.

Na primeira observação, o conteúdo que a professora estava trabalhando em sala era sobre as operações com números inteiros e com números racionais. Desse modo, ela iniciava com as operações no conjunto dos números inteiros Z e depois encaminhava para o conjunto dos números racionais Q.

Importante ressaltar que as operações de soma e subtração com números inteiros já tinha sido trabalhada, então, neste momento, estava sendo desenvolvida a ideia de soma e subtração de números racionais em sua forma fracionária, tanto positivos como negativos. No canto da lousa constava um passo a passo: 1.º passo – M.M.C (denominadores), 2.º passo – obter frações equivalentes, 3.º passo – calcular a diferença entre numeradores e repetir denominador. Para explicação da operação $-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}$, a professora utilizou a seguinte representação geométrica apresentada na Figura 36.

Figura 36 - Representação para explorar a ideia das frações equivalentes.



Fonte: Autores, 2021.

Essa representação foi utilizada para explicar a equivalência das frações, numa tentativa de dar sentido ao uso do M.M.C mencionado no passo a passo. Mas o que chama a atenção é a tarefa seguinte, em que a professora retorna aos números inteiros no item (a): $-3+7+4$. Diante disso, uma aluna questiona: “tiro o m.m.c. de quem?” Essa aluna dirigiu sua atenção no “como fazer” e não no “por que fazer”, característica essa observada constantemente nessa turma, a busca incessante por regras, “receitas” e o olhar era quase que imediato nas partes do problema e não na interpretação do todo.

Como mencionado anteriormente, em sua organização didática, a professora trabalha as operações no conjunto dos números racionais concomitantemente com a dos números inteiros, uma vez que as operações em $\mathbb{Q}$ incluem as operações em $\mathbb{Z}$.

Outra situação de destaque se observou com a proposta do seguinte problema: Numa cidade, a temperatura mais fria do ano foi de -5ºC e a mais quente foi de 35ºC. Qual a diferença entre a temperatura mais quente e mais fria? A primeira hipótese apresentada por alguns alunos foi -40, resultado da operação $-5-(+35)$. Isso porque eles aprendem que a palavra "diferença" significa subtração. Novamente, o olhar está exclusivamente nas partes, ou seja, nas informações $-5°$C, $35°$C e na palavra diferença. Mas nesse contexto, qual a relação entre o -5 e o 35 além da diferença?

A questão é o entendimento sobre conceito de distância, em que é calculado em módulo. Mas como visualizar esse conceito? Para representação dessa situação, a professora desenhou no quadro um termômetro, que indicava as duas temperaturas. Poderia também ter utilizado como representação a reta numérica (Figura 37).

Figura 37- Representação de um termômetro.

Fonte: Autores, 2021.

Analisando o enunciado, a solicitação é de que se iniciem os cálculos partindo da temperatura mais quente para a mais fria. Desse modo teria $35-(-5)$, porém a ideia de $-(-5)$ não tinha sido trabalhada. E era esse o objetivo inicial da professora, chegar nesse questionamento.

Para abordar questões do tipo $+(+5)$, foi usado externamente o símbolo + para significar que o (+5) vai ser acrescentado, por exemplo, na expressão 35 + (+5), de modo análogo para $+(-5)$. Para o caso de $-(+5)$, é usada a nomenclatura oposta de 5 positivo, que no caso da expressão 35 – (+5) cumpre o papel de uma subtração, de modo análogo para $-(-5)$. Junto com os alunos, a professora construiu a seguinte Tabela 4.

Tabela 4 - Análise dos sinais.

$+(+5)$	$+5$
$+(-5)$	-5
$-(+5)$	-5
$-(-5)$	$+5$

Fonte: Autores, 2021.

A ideia dessa tabulação era de que os alunos percebessem as relações dos sinais. Mas antes da professora concluir, um aluno questionou: "+ com + era + né professora?" A professora respondeu que sim, e perguntou como ele conhecia tal "regra". O aluno respondeu que era a segunda vez que cursava o 7.º ano, por isso já tinha visto. Esse exemplo mostra que a formalização de um fato matemático pode ser justificada a partir da experiência do fato que gera as intuições necessárias, como no caso a do termômetro.

Esse questionamento leva a pensar na validade das inúmeras tentativas em se "concretizar" a ideia sobre as operações com números inteiros, se após apresentada a regra de sinal, ela parece sobrepor a essência conceitual antes concretizada, ou seja, fica apenas a aparência, o que é imediato.

Em continuidade ao trabalho com os números inteiros, a existência dos números negativos gera a seguinte inquietação: como visualizar os números inteiros? A resposta para essa pergunta tem relação direta com o que se entende por visualização. No primeiro capítulo desta pesquisa, muito se falou sobre a visualização como um processo, ou seja, não é um fim em si mesma. Um processo que movimenta o modo de pensar a matemática. Portanto, ao se tentar reduzir a visualização dos números inteiros a uma representação, essa concretização parece inviável.

Mas por meio da representação já é possível perceber, por analogia, que a representação geométrica de um número inteiro positivo é possível de se concretizar, enquanto a de um número inteiro negativo não, pelo simples motivo de não existir uma medida negativa, em se tratando de dimensões geométricas (lado, perímetro, área, volume).

Já a visualização contextualizada é possível de ser explorada e mesmo que a professora não utilize desse modo de pensar conscientemente (o que fica evidente na primeira entrevista que será descrita na sequência), o fato de se utilizar a temperatura para contextualizar o conceito é uma forma de visualização.

Com o entendimento da visualização como um processo, tem-se que (-5) nada mais é que a representação de um número inteiro negativo, mas o processo de visualização que se faz presente no pensar matemático é despir a representação da sua aparência e olhar para sua essência, revelada pela sua formalização.

Um modo de olhar para a essência de $-(-5)$ é estabelecer relações, nesse caso, com a noção de oposto (ou simétrico). O oposto de um número negativo resulta num número positivo, o oposto de um número positivo resulta num número negativo. Para os casos de $+(-5)$, esse sinal positivo que antecede os parênteses, foi ressignificado pela professora como "acréscimo", ou seja, "acréscimo" de 5 negativo.

Então, após uma aula destinada à prática de resolução de exercícios em que era necessário "tirar" o número de dentro dos parênteses utilizando a ideia de "oposto" ou do "acréscimo", a professora retomou essa ideia com as operações no conjunto dos números racionais.

Importante destacar que neste estudo é utilizada a palavra "exercício" compreendendo-a como um tipo de "tarefa", num contexto diferente da palavra "atividade". A tarefa é o que está prescrito para ser feito dentro do objetivo que se quer chegar, desse modo, ela é a condução mediada por questões, problemas e exercícios. Já a atividade é a ação de realizar a tarefa, é o caminhar do estudante no processo de aprendizagem. Por isso, a elaboração da tarefa é pensada em diferentes finalidades, como a tarefa de investigação, a tarefa de avaliação, entre outras. Mas, é na atividade que se desdobra a aprendizagem, por isso a tarefa proposta (objetivo) torna-se a objeto da atividade (ação) dos alunos.

De acordo com Ponte (2014), uma atividade pode incluir a execução de numerosas tarefas. Mais importante, a atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se aquilo que ele faz num dado contexto (...) as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade).

O primeiro exercício proposto foi: $-2-\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}$. A resistência de grande parte dos alunos quando observam a fração na operação é imediata. Algumas reclamações foram: "agora que eu estava entendendo, vem a fração", "estava demorando para ficar mais difícil", "nem sei por onde começar", dentre outras contestações. Certamente, essa relutância traz algumas inquietações, do tipo: por que os estudantes são tão relutantes em trabalhar com as frações? A própria professora, na primeira entrevista, apresenta algumas possibilidades para essa aversão às frações: "eles não visualizam o "número" $\frac{1}{2}$, eles visualizam os algarismos 1 e 2". Ou seja, o termo "visualizam" nesse contexto é imediato à ação de ver, mas não de visualizar como processo, pois eles não estabelecem a relação entre o 1 e o 2, por isso que não enxergam o $\frac{1}{2}$ como um número. Desse modo, o olhar novamente está na aparência dada pela notação e não na essência.

Numa segunda tentativa em dar sentido ao entendimento do mínimo múltiplo comum, utilizando-se da representação geométrica, a professora levou para sala de aula régua de frações (Figura 38 e Figura 39).

Figura 38- Régua de frações.

Fonte: Escola Online, 2021.

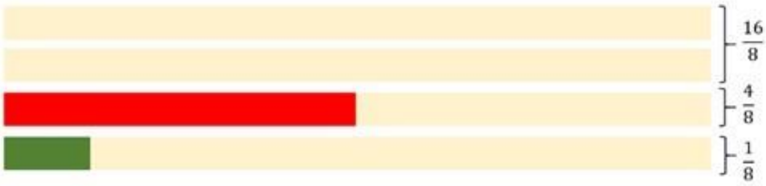
Figura 39 - Professora utilizando a régua de frações.

Fonte: Autores, 2021.

Para interpretar o exercício utilizando a régua de frações, primeiramente fez-se necessário pensar no valor absoluto de cada número. A expressão é $-2-\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}$, então a professora pegou uma barra, que estava dentro da caixa das réguas de frações, e disse que a barra correspondia a um inteiro. Porém, o primeiro número, em módulo, é 2 inteiros. Logo, um aluno respondeu “professora, vai precisar de duas barras dessa”.

Em continuidade, com a fração $\frac{1}{2}$, a professora pegou uma barra de cor vermelha que correspondia a metade de um inteiro, e fez o mesmo para a fração $\frac{1}{8}$, pegando uma barra de cor verde, que correspondia a um oitavo do inteiro (Figura 40).

Figura 40 - Representação da régua de frações.



Fonte: Autores, 2021.

Com essa ideia, a professora explica que é por isso que se utiliza cálculo do mínimo múltiplo comum, para que as três barras sejam divididas em tamanhos iguais. Com a menor barra, representada pela cor verde, é possível colocar quatro iguais a ela sobrepostas às barras vermelhas, e dezesseis correspondente as duas barras que representam o inteiro. Então, o menor múltiplo comum é o 8. Mas, além dessa análise, as frações equivalentes são imediatas, pois se dividir a barra em oito partes iguais, quanto representa a peça vermelha? Alguns alunos prontamente responderam: “quatro”. De forma análoga, se dividir as duas barras inteiras em oito partes iguais cada uma, quanto elas passam a representar? Dezesseis.

Com os questionamentos que a professora fez em sala, o que se observou foi a participação efetiva dos alunos, levantando hipóteses e fazendo outras indagações. Portanto, nesse momento, numa observação imediata, boa parte dos alunos demonstravam estar compreendendo a relação proposta pela professora.

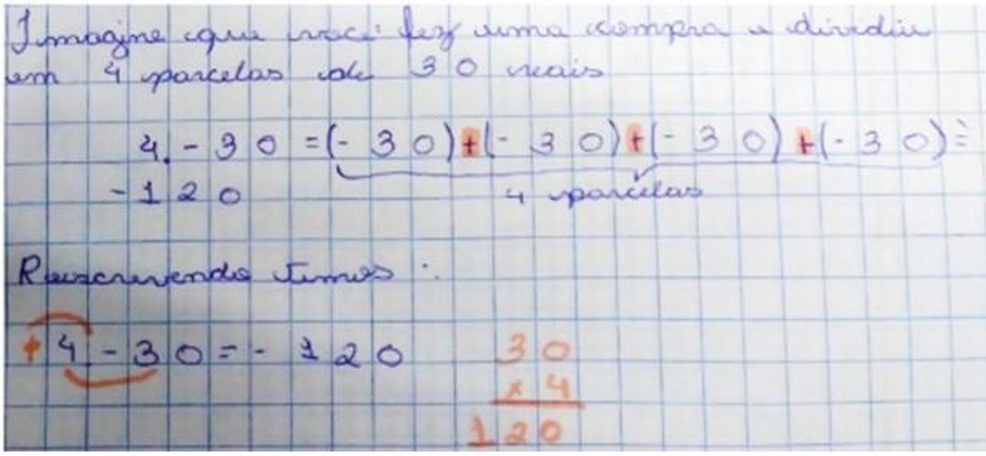
Nesse momento, além de mostrar por meio de um processo de sobreposição, a professora poderia expandir a discussão, na perspectiva da compreensão do significado da expressão linguística “mínimo múltiplo comum”, como sendo o “menor dos múltiplos comuns”. Percebe-se que uma simples releitura, substituição de palavras e a inserção a preposição “de” pode trazer mais sentido para a expressão “m.m.c”. Então, a visualização aqui não é a da sobreposição, mas a relação entre os múltiplos, que pode se dar por vias de registro ou estruturação mental.

O passo a passo, que anteriormente foi mencionado, se repete com algumas modificações: 1.º regra de sinal, 2.° m.m.c., 3.° frações equivalentes e 4.º soma ou diferença. Portanto, com o passo a passo e a ideia apresentada com a régua de frações, a resolução do exercício foi retomada. Somente após essa abordagem do m.m.c. feita a partir da régua de frações que o direcionamento se voltou para a operação dos numeradores, que eram números inteiros, ou seja, positivos e negativos.

Importante salientar que a professora não começou definindo o objeto, mas ela levou em consideração o processo, motivando os estudantes com questionamentos, e não com respostas. E o erro não era tido de modo negativo, pelo contrário, todas as hipóteses levantadas pelos estudantes eram válidas e, na sequência, analisadas com o contexto. Portanto, ao invés de usar a sentença: "está errado", buscava-se substituir por: "essa hipótese seria ideal para o contexto?".

A próxima operação que foi trabalhada em sala foi a multiplicação de números inteiros. Para introduzir essa ideia, a professora começou explicando a multiplicação com a ideia de soma de parcelas iguais (Figura 41).

Figura 41 - Multiplicação em Z.



Fonte: Autores, 2021.

Algo interessante em se observar é a diferenciação que os estudantes fazem sobre o sinal "-". Na própria leitura de um número, por exemplo (-3), lido como três negativo, ou seja, como representação de um número negativo, justamente para diferenciar da situação de quando o sinal representava uma diferença. Na multiplicação, como o exemplo na figura anterior, a leitura de $+4.(-30)$ corresponde a: quatro positivo multiplicado por trinta negativo.

Essa questão da leitura e entendimento dos símbolos é algo que a professora sempre retomava nas aulas. Desse modo, era perceptível o cuidado de alguns alunos ao utilizarem os símbolos e fazer a leitura dos mesmos. Na matemática é comum de se encontrar diferentes significados para um mesmo símbolo, o que pode tornar mais difícil a comunicação do pensamento matemático para alguns estudantes, o que também foi observado nessa turma em que a pesquisa era desenvolvida. A leitura compreendida de uma expressão da linguagem matemática traz uma espécie de visualização do significado do que está sendo lido. Por esse motivo, é importante que a professora explore essa leitura dos estudantes.

De modo geral, nesta observação inicial dos alunos e de seu modo de interação com o conteúdo ministrado, foi possível perceber que eles estavam habituados a serem desafiados pela professora, ou seja, eram instigados a pensar além do problema. Porém, em contrapartida, também foi observada a busca que alguns estudantes faziam pelo percurso mais rápido de resolver uma atividade, que se resumia à aplicação de uma regra, uma receita, ou modelo.

Se os estudantes ficam nessa procura, a matemática se torna apenas coleção de regras e algoritmos e não uma forma de pensar. Então, quando algo saia diferente do modelo que eles tinham, já não conseguiam fazer ou desistiam rapidamente. Alguns buscavam desenvolver a proposta com o conhecimento prévio que tinham, porém outros ficavam aguardando as indicações dadas pela professora, mostrando uma dificuldade em desenvolver um modo de pensar matemático independente.

Importante mencionar que essa articulação da professora em construir os conceitos e não apenas ditá-los é uma das atitudes docentes que pode direcionar o aluno para a experiência matemática, conduzida pela intuição, imaginação e visualização, promovendo a criatividade e saindo do tecnicismo

Na sequência, analisa-se a primeira entrevista realizada com a professora regente, em que o olhar se direciona para o modo como a professora compreende a visualização matemática.

5.2 ENTREVISTA 1

Após a primeira observação, o olhar se direcionou para o caso desse estudo: a professora. Por meio de uma entrevista semiestruturada, buscou-se por meio das compreensões pelo modo como a professora entendia a visualização matemática em sua formação e principalmente em sua prática docente.

A análise da entrevista buscou traçar um diálogo com as ideias sobre a visualização explicitadas no primeiro capítulo desta pesquisa. Para melhor discussão, as perguntas foram divididas em dois blocos: as perguntas de 1 a 10 corresponderam a formação da professora e um pouco sobre sua prática docente, até como forma de deixá-la mais confortável durante a entrevista. Já as perguntas de 11 a 22 corresponderam ao entendimento que a professora fez sobre a visualização.

A primeira formação da professora na área educacional foi o magistério, iniciando sua trajetória profissional com os anos iniciais do ensino fundamental (1.º ao 5.° ano) em um município da região metropolitana de Curitiba. Na sequência, se formou em matemática, passando a atuar também com os anos finais do ensino fundamental (6.º ao 9.º ano), no município de Curitiba. Em resposta a um dos questionamentos, referente à preferência de atuação, anos iniciais ou finais, ela respondeu que um complementa o outro, *"o que faz o diferencial da minha aula do 6.º ao 9.º é minha experiência do 1.º ao 5.º"* uma vez que a atuação do 1.º ao 5.º abre as possibilidades com o trabalho na matemática do 6.º ao 9.º.

Quais seriam essas possibilidades? Além dos conhecimentos em outras áreas, que o trabalho nos anos iniciais solicita, como português, artes, ciências etc., a matemática é mais concreta nessa fase escolar, pois muitos conceitos podem ser inicialmente explorados pelas vias concretas e também manipulativas. Então, quando a professora diz que o trabalho nos anos iniciais abre possibilidades para os anos finais, é devido ao fato de que ela traz esses subsídios que podem dar significado ao que é ensinado nos anos finais.

Um exemplo disso é uma contextualização do conceito de simetria de rotação através da geração de energia eólica, entrando inclusive para a questão de sustentabilidade, um dos eixos das ciências. Assim, pode-se trabalhar a ideia de simetria de rotação por meio da estrutura subjacente a geração de energia nas usinas (ou parques) eólicos, significa trazer esse apelo construtivo e a partir dele ir construindo generalizações, desse modo o processo não está oculto, ele é descoberto pelo próprio estudante, ou seja, a matemática não é o fim, é um meio.

As inquietações e anseios comentados pela professora trazem alguns subsídios sobre a sua prática docente. Em relação à perspectiva apontada sobre o ensino de matemática, uma palavra que resume sua fala é: "*falho*". Um dos pontos que foram indicados referente a essa falha, nos anos iniciais, é a falta em manipular materiais que possibilitem a concretização/visualização de alguns conceitos matemáticos, como por exemplo a ideia de comparação, coordenada, sobreposição, semelhança, congruência e tamanho. Nos anos finais, essa "falha" pode ser percebida, de acordo com a professora, pela grande quantidade de conteúdos a serem trabalhados, em que o professor não dá conta, tendo que, em geral, selecionar o que é essencial e importante que o aluno aprenda naquele momento.

Uma maneira encontrada pela professora para minimizar essa dificuldade em relação ao rol de conteúdos foi desenvolver a linguagem matemática de seus alunos visando uma adequada alfabetização matemática e o uso correto da simbologia matemática.

Em várias situações durante a primeira observação a professora estava sempre atenta à pronúncia correta da palavra, do símbolo ou da representação que estava sendo realizada. Num primeiro momento, parecia uma exigência sem objetivo, mas com o passar das aulas, o objetivo foi se desvelando.

A professora não pedia a pronúncia e escrita correta devido a uma exigência lógica a ser seguida, mas sim porque ela queria dar sentido à experiência dos anos iniciais para estabelecer a comunicação matemática procurada, e se essa escrita fosse "falha", a comunicação e possivelmente o entendimento sobre o conteúdo também seriam. *"O '+' é um símbolo e nem sempre ele é esse significado, como também o '+' do 7 já entra com o significado de positivo. Então, se eu falar que tudo aquilo '+', como meu aluno vai entender positivo e negativo, como meu aluno vai entender que eu estou adicionando um número negativo com outro, se não tem o sinal de '+' ali? É um "e" três negativos e quatro negativos, esse "e" no português significa o que? Acrescentar".*

Ao ser questionada sobre como ela se percebe ensinando matemática, a primeira palavra utilizada é "*frustrada".* Essa frustação relatada se deve aos alunos que ela diz não conseguir atingir. Outra palavra que chama atenção é "*confronto*", mas como ela mesma diz: "*não é uma guerra de confronto, não vou confrontar com meu aluno, me estressar. É um confronto de conhecimento".* Nesse aspecto, frustação e confronto se relacionam, pois há uma lacuna entre o aluno e o conhecimento que a professora não consegue fechar, isto é, a comunicação não se estabelece.

Em suas reflexões sobre tais lacunas, uma consideração mencionada é a busca incessante pelo imediatismo, pelo momentâneo e uma memória a curto prazo, a procura do tecnicismo sem compreensão. Alguns alunos são condicionados a reproduzir um modo de fazer, momento esse em que acontece o "confronto", pois a professora busca fundamentar e significar os conceitos, enquanto o aluno tem seu olhar direcionado apenas na busca por uma resposta. Contudo, ela não descaracteriza a importância em se resolver exercício no sentido de desenvolver a "técnica*", "memorizar é bom, memorizar ganha tempo, mas você também tem que saber aplicar aquilo. E eu fui condicionada a estudar aquilo por aquilo. E como professor, vejo que se eu estudo aquilo por aquilo, simplesmente resolver, fazer o exercício, colocar uma resposta e não trazer para o meu dia a dia, do que valeu?*

A frustação perde espaço para a realização enquanto docente quando a professora consegue *feedback* do estudante, fazer com que ele participe, questione. "*Então quando eu vejo que esse aluno com uma certa dificuldade começa a dar esse feedback na própria aula, participação, dar opinião, e começa também nas avaliações a ter um olhar diferente, aí sim eu digo, consegui!", "é o aluno brilhar os olhinhos: eu consigo. Não tem melhor satisfação do que: eu consigo".*

Para se chegar a esse resultado, há muito trabalho e como a própria professora aponta, ela constrói os conceitos juntos com os alunos, mobilizando o pensar matemático deles, considerando cada hipótese por eles levantada. Para isso, é necessário, de acordo com a professora, desmistificar a ideia de que o erro é um defeito ou algo ruim.

O erro pode ter mais a mostrar do que o próprio acerto, induz a pensar em alternativas. Questões podem ser levantadas a partir do erro. O que levou o aluno a pensar isso? Mas, se olhar desse modo, chegaria-se ao mesmo resultado? *"quando ele faz a reflexão do que levou ele a pensar aquilo, ele começa a olhar com outros olhos sobre as tentativas e erros, está crescendo".*

Com esse primeiro bloco da entrevista, algumas considerações importantes podem ser levantadas. Primeiramente, a formação e atuação da professora, sendo que a atuação num ciclo influencia e complementa a atuação no outro ciclo.

Sobre o ensino da matemática, a professora argumenta sobre as falhas por ela observadas, mas é importante destacar que para essas falhas a professora vem desenvolvendo ações no intuito de superá-las. Suas angústias e realizações parecem caminhar juntas, pois ela não transforma as angústias em reclamações, mas sim em ações para se chegar nas realizações. Então, ela está atenta ao modo de pensar do seu aluno e entende que seu papel enquanto docente não é transmitir alguma coisa, mas sim mediar, para que dessa forma o estudante desenvolva a autonomia em pensar a matemática.

Portanto, os pontos marcantes que foram percebidos nesse primeiro bloco dizem respeito ao fato de que a professora se coloca como uma mediadora, que busca constantemente trazer seu aluno para a construção coletiva do conceito, tornando-o ativo no processo, desmistificando o erro como passível de punição, pois este pode se apresentar como uma maneira de desconstruir para reconstruir.

Partindo para o segundo bloco da entrevista, o intuito foi o de buscar elementos da fala da professora que apontem para a compreensão que ela faz sobre a visualização matemática. A primeira pergunta foi: como você compreende a expressão "visualização matemática"? *Pelas experiências que eu estou tendo agora, nesse momento, talvez seja a questão mesmo de experimentar, pegar.* Com essa fala, a visualização para a professora parece estar relacionada ao que se pode manipular, ou seja, algo pronto no sentido físico ou mental, mas que pode promover a construção de significações por meio da experimentação. Percebe-se, desse modo, que a visualização é para a professora algo que pode ser visto, o que remete diretamente à manipulação visual.

Em continuação ao entendimento sobre a visualização, a professora exemplifica: “Então vou trabalhar fração, divisão de fração, então vou pegar a régua fracionária, vou pegar por exemplo o ½ dividido em duas partes, mas o que é ½? Primeiro, ele tem que visualizar que ½ é em relação ao inteiro. Então, não adianta eu ir lá e pegar só ½. Vou ter que pegar uma barra que é 1 inteiro, depois o ½, pra visualizar que aquele ½ é sempre em relação ao inteiro. Depois, se eu for trabalhar a divisão, eu vou repartir ele no meio, então tá, pego lá uma peça que cabe exatamente 2, mas o que é aquilo, o que representa? Então tá, agora você tem uma peça nova, tem três peças na mão, o que significa cada uma? Daí ilustrar, a materialização desse significado, que aquela peça menor que é ¼ representa a divisão da metade da metade, mas em relação ao inteiro, ela é ¼. E daí trazer isso para o dia a dia dele”. Conforme foi visto na observação 1, a professora utiliza da régua de frações, um material manipulável, para justificar o entendimento que ela tem sobre a visualização.

De acordo com o que foi apresentado nos estudos sobre visualização no primeiro capítulo, bem como a construção de uma concepção, é possível concluir que a visualização envolve mais que a visão, pois a ela está atrelada a uma dinamicidade do pensamento que deve ser expressa na linguagem matemática. Por exemplo, a fração 4/3 significa 4 partes de 3, sugere pela sua forma linguística tomar 3/3 + 1/3, razão pela qual se considera nesse estudo a visualização como um modo de pensar a matemática, na busca pela essência dos objetos matemáticos e não apenas a aparência.

Além da palavra “pegar” a professora também utilizou a palavra “experimentar”, o que motivou a próxima questão: Você falou a palavra experimentar? Então você acha que a visualização está relacionada com o ato de “experienciação”?

Em resposta, a professora argumenta: “Isso, e daí falha. Por exemplo, eu tentei fazer isso na minha turma de sétimo ano só que a escola tem no máximo duas caixas e meia, não tem como proporcionar uma experiência dessa pra um grupo de cada quatro alunos. Cada um deveria experimentar isso no máximo de quatro alunos em cada grupo. E esses alunos, já não tinham que ter experimentado isso já lá anteriormente? Já! Só que pergunta quantos experimentaram isso. Quase nada”. Essa fala reforça a ideia do entendimento da visualização associada ao manipulável.

Essa experiência relatada pela professora é algo que vem de fora para dentro, ou seja, é acessada pelos sentidos. “Quando você faz essas experiências você obtém um conhecimento, e aquele conhecimento ninguém te tira. Aquilo fica. É memória visual, auditiva, tátil. Isso vai além de colocar um registro escrito. Então, você até pode ir depois para o registro escrito, mas aí você já tem o conhecimento formado com todas aquelas experiências que teu corpo gravou". Observa-se que na frase "é memoria visual, auditiva e tátil" há embutida concepção de visualização generalizada.

Na fala da professora, é perceptível que o registro tem um papel fundamental nesse processo, mas o conceito não inicia com esse registro, e sim com as experiências que, segundo a professora, é tátil, visual e auditiva. Desse modo, a visualização por si só não é suficiente, mas é necessária para consolidar o pensamento matemático, e o registro estabelece o alicerce que uma prova matemática de fato exige, com o seu rigor lógico.

Ainda sobre a importância do registro enfatizado pela professora, uma palavra que é importante ser destacada em uma de suas falas é "memória visual*": "tem aluno que tem a memória visual, que é anotando, aí sim vai fazer aquele feedback".* Essa afirmação corrobora com Presmeg, ao classificar os tipos de imagens, a imagem de memória de fórmulas por exemplo, "significa vê-la, mas sem de fato ela estar escrita em algum local, a não ser na mente do aluno, um modo de 'encapsular' um procedimento" (Presmeg, 1986a, p. 301). Portanto, o registro escrito tem essa funcionalidade para a professora, de desenvolver uma memória visual, seja de um procedimento, um conceito etc.

Ao ser questionada sobre como era feito o registro quando se utilizava a régua de frações, ela diz que nesse momento era utilizado o registro geométrico, por meio do desenho. O cuidado com a construção desse desenho é essencial, para que o significado dado não equivocado. *"Ali era na forma de desenho, mas as vezes é tabela, tem outras formas de representar, até mesmo de desenho, agrupamento...".* Uma palavra em destaque nessa frase é representar, que direciona a pergunta seguinte da entrevista, em que foi questionado se esses desenhos seriam formas de representação. Ao responder, a professora afirma que sim, que são formas de representação, porém não necessariamente são algébricas.

Ao classificar os registros mobilizáveis no funcionamento matemático, Duval (2003) diferencia a representação discursiva (língua natural e sistemas de escrita) e a representação não discursiva (figuras geométricas e gráficos cartesianos). Portanto, na fala da professora pode-se perceber que o entendimento por representação não se direciona exclusivamente a figuras, mas que podem ser algébricas, ou seja, um sistema de representação escrito.

A importância da representação é reforçada na fala da professora, sendo que essa representação não pode estar dissociada de toda a construção conceitual que é realizada, isso significa que: "*ela tem que estar junto, então nas experiências com as réguas, vou para o desenho e depois eu já vou para a notação. O que aquela notação significa? Uma parte de* *dois. Adianta eu ensinar ele ler ½ e não ter significado? Isso é ½, e qual o significado para o aluno? Nada. Então eu, quando coloco no início uma parte de dois,* $[uma\ releitura\ de\ 1/2]$ *esse é o significado, esse 1 que está aqui, esse tracinho, esses dois, tudo tem um significado. O 2 significa em quantas partes o inteiro foi dividido, o 1 é quantas partes eu estou considerando disso. E que o ½ não são dois números, é um número. Desde coisas básicas, porque eles enxergam dois números, mas não é, e você vai, pergunta, reflete, é quanto? É um número só. Mas por que? O que ele significa? Uma parte de dois. Mas isso significa o que? É o meu inteiro? Não, não é inteiro, é metade".*

O esforço em dar significado ao que está se construindo é constante na abordagem da professora. Uma justificativa apontada para o equívoco que alguns alunos cometem em considerar os algarismos separadamente e não a fração toda como um número é devido ao fato de os alunos serem muito "visuais".

Na comparação de frações, por exemplo, a professora comenta: "daí eu digo pra eles assim, para os maiores né, 7.º, 8.º e 9.º (anos), vocês vão muito para o visual, visualmente vocês estão enxergando que eles são algarismos maiores que os outros, porém, na hora do conceito, eles são iguais. Por exemplo, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, mas eles estão só visualizando o 3 e comparando com o 2, e o 2 comparando com o 1, sendo que eles tivessem esse conceito que são 3 partes de 6 e que 3 partes é metade de 6, então é igual".

Essa análise traz a reflexão, realizada no capítulo 1 deste estudo, sobre aparência e essência. Quando a professora fala "vocês vão muito para o visual", retoma-se a ideia da aparência, ou seja, o que está visível de fato, porém a essência exige mais do que apenas observar o que aparece, e é isso que a professora traz para discussão, ficam os algarismos (aparência) mas a essência da fração como um número fica perdida.

Em alguns momentos de sua fala a professora usa o termo "visual" e em outros "visualização". Então foi questionado se ela utilizava esses dois termos como sinônimos ou se eram diferentes em seu entendimento. Em resposta, ela argumenta: *"A impressão que dá é serem iguais por questão da palavra, porém eu usei em significados totalmente diferentes. Eu digo assim também a questão do contexto, então na visualização ali, pegar é uma visualização, se ele entender que 3 partes de 6 é a metade e que 1 parte de 2 é a metade e que elas são iguais, ela teve uma visualização já que não precisou... ela foi além dos algarismos, ela foi para o significado. Agora quando o aluno olha o algarismo, ele está ainda sem o contexto do que é uma fração, ele visualiza sim o algarismo 3 e 1, no ato de ver, ele vê 3 e 1, então quem é maior? 3. Mas não é só o 3, né?, tem o 6 também, do outro lado tem o 2 e no outro denominador tem*

6. Então, quer dizer, "estou vendo professora, 3 e 6 é maior que 1 e 2. Ver, só ver, decodificar, e decodifica um algarismo, não o número, pois o número seria o todo, três sextos e um meio. E ele não consegue perceber isso, então esse aluno não percebe que existe um todo ali. Então são ideias sim diferentes. Portanto, mesmo entendendo a visualização como o resultado de uma ação movida pelos sentidos, é perceptível que ela diferencia a visualização do visual. Para ela, o visual é o imediato, enquanto a visualização envolve uma interpretação do que se vê. Neste trabalho, como apresentado no capítulo 1, todo olhar vem repleto de alguma interpretação.

O último questionamento realizado é se a professora percebia elementos da visualização em sua prática de sala de aula. Em resposta: "*Eu descobri que faço isso. Aquela coisa de tentar dar significado para as coisas, eu tento trazer o mais compreensível possível, que está dentro das relações que eles tiveram de experiências né. É assim, por exemplo, agora trabalhando com a divisão de números decimais, onde eu coloco essa visualização? Na tabela! Então eu não trabalho isso sem usar a tabela das ordens e classes".*

Essa resposta da professora completa a análise feita sobre o entendimento que ela faz sobre a visualização, que, num primeiro momento, se relaciona com a visão, a percepção e a representação, mas que direciona para a experiência num sentido de manipulável, cinestésico. Porém, é importante destacar que a essência desse entendimento, mesmo este não sendo o mesmo do adotado neste estudo, emerge na busca em dar significado aos conceitos, fazer com que seus alunos olhem para a essência e não apenas a aparência.

5.3 OBSERVAÇÃO 2

A primeira observação foi realizada com a intenção de analisar o modo como os estudantes realizam algumas construções e relações matemáticas. Porém, entendendo que o contexto do estudante não é dissociável do contexto da professora, bem como o ensino não deve ser dissociável da aprendizagem, observa-se que o modo de pensar a matemática do estudante reflete a prática docente. Ou seja, é a observação da prática docente pela perspectiva do estudante.

Já na observação 2, a análise da prática se desenvolve nela mesma, ou seja, com o olhar direcionado para a prática docente da professora regente. Mas qual a intencionalidade dessa etapa? O objetivo principal está em buscar os elementos da visualização na fala, planejamento e encaminhamento metodológico da professora.

Após a primeira observação e a primeira entrevista realizada, algumas compreensões iniciais sobre a formação, metodologia e entendimento que a professora faz sobre a visualização foram possíveis de serem levantadas.

O primeiro contato com a professora aconteceu no dia 24 de maio de 2019, no qual ocorreram algumas definições, como a turma em que a pesquisa seria desenvolvida bem como as datas. A professora comentou sobre o desenvolvimento de alguns estudantes e as dificuldades de outros. Mostrou a Prova Curitiba[20], que tinha recém sido aplicada nas turmas de 2.° até 9.° ano, as questões que os estudantes tiveram o maior índice de erro e explicou como fez a retomada de cada uma das questões. Sobre o conteúdo que estava trabalhando em sala de aula, disse que, no momento, estava em operações com números inteiros e racionais, em que utilizou a representação geométrica para as frações equivalentes, antes de utilizar o M.M.C. Também apresentou o planejamento anual, em que estavam sinalizados os conteúdos já trabalhados e os que ainda iriam ser trabalhados.

Fez-se importante salientar que algumas tarefas e encaminhamentos dados pela professora e já mencionados na primeira observação foram retomados nessa etapa da segunda observação, porém com um direcionamento para as metodologias e recursos utilizados pela professora, buscando reflexões em torno da concepção de visualização adotada nesse estudo.

No primeiro encontro efetivo em sala, a professora estava trabalhando com as operações de adição e subtração de números racionais na sua representação fracionária. No quadro, era possível observar o passo a passo por ela apresentado: 1.º passo: M.M.C (denominadores), 2.º passo: obter frações equivalentes, 3.º passo: calcular a diferença entre numeradores e repetir os denominadores. Como a observação iniciou nesse ponto, não foi possível verificar as construções anteriores até que se chegasse a esse passo a passo. Então, pode parecer mecânica essa organização, mas, na sequência, a professora retoma a ideia de mínimo múltiplo comum, frações equivalentes e justifica o porque optou por esse modo de resolução.

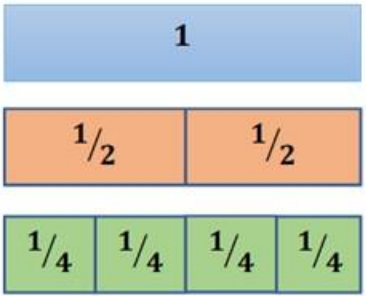
Como recurso para recordar as frações equivalentes, agora num contexto de operações de números fracionários, a professora levou para a sala a régua de frações. A abordagem feita está descrita na primeira observação, mas o ponto de discussão está na utilização do material e

[20] A Prova Curitiba é uma avaliação em larga escala de turmas de 2.° ao 9. ° ano do ensino fundamental, das 183 escolas da rede, elaborada pela Secretaria Municipal de Educação em parceria com os Núcleos Regionais. O objetivo é a de uma avaliação diagnóstica e não para ranquear ou classificar estudantes e escolas. A avaliação identifica os pontos fortes e as áreas em que é necessário reforçar ações para avançar na qualidade do ensino no município. Os dados são filtrados e apresentados por uma equipe de estatísticos, de modo que possam ser utilizados de parâmetros para um planejamento da ação docente, possibilitando reflexões sistemáticas quanto aos limites e avanços do processo de ensino e aprendizagem como um todo.

a intencionalidade com seu uso. A professora queria mostrar a equivalência quando ela fazia a sobreposição das partes sobre o todo, sendo esse um modo que ela pensou para dar significado para a equivalência de frações.

Certamente, ao observar o material e a manipulação feita pela professora, o estudante pode sim compreender o princípio da equivalência, mas a visualização não está na ação em ver o material em sua estrutura física, mas nas relações que podem ser estabelecidas, descobertas e criadas (Figura 42).

Figura 42- Representação da equivalência de frações.



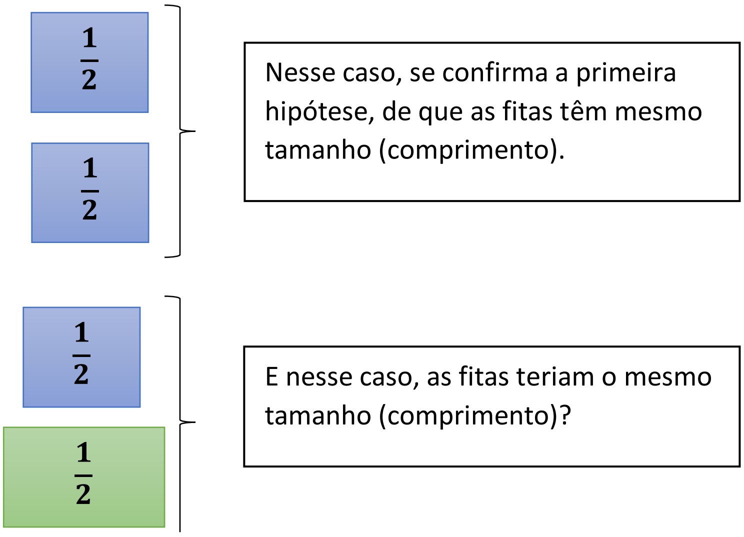
Fonte: Autores, 2021.

Antes dessa exploração com a régua de frações, poderia também explorar o termo “equivalência” em sua etimologia, que significa de mesmo valor, ou mesmo sentido. Quando o estudante escuta duas “coisas de mesmo valor”, talvez ele pense em dois objetos, que são diferentes, porém representam o mesmo valor. Aí já se faz a ideia de equivalência, que agora precisaria ser redirecionada para o estudo das frações. Então, o que o estudante pode perceber? A representação de dois objetos, sejam eles matemáticos ou não, que correspondem a um mesmo valor. Mas, como pode objetos diferentes representar um mesmo valor? Nesse caso, por meio da visualização, as relações entre os objetos se prevalecem, dando significado ao todo representado e não aos algarismo que compõe a fração. Essa exploração com os estudantes movimenta as percepções, representações e o olhar para as relações, ou seja, a visualização.

Retomando a ideia explorada pela professora, com a representação da figura sobre a equivalência de frações, é possível perceber as equivalências por sobreposição: $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$. A relação estabelecida está no inteiro e as subdivisões do inteiro.

Porém, o que mais se pode extrair dessa representação? Supondo que se tenham duas fitas, e ambas foram cortadas pela metade, qual fita é maior? Esse questionamento pode parecer trivial, porém há uma relação importante de ser observada, tal qual já poderia ter sido trabalhada na ideia com as réguas de frações. Uma resposta que pode ser esperada é de que as fitam tem o mesmo tamanho, mas a intuição pode exigir um pouco mais desse raciocínio, talvez até na tentativa de uma representação (Figura 43).

Figura 43 - Representação de equivalência e não equivalência.



Fonte: Autores, 2021.

Essa indagação pode levar os estudantes a perceberem que a metade é proporcional ao inteiro, ou seja, para se saber a metade, é necessário que antes se conheça o inteiro ao qual essa metade se refere. O mesmo acontece com as frações equivalentes, pois a equivalência acontece com referência ao mesmo inteiro. Portanto, olhar somente para o número não é suficiente para comparar duas frações. É necessário saber a qual referência se está solicitando essa parte do inteiro.

Na abordagem da professora com as réguas de frações, é possível perceber que ela, repetidas vezes, menciona que o inteiro representado na régua pode ser diferente de outro inteiro. Então, a utilização do material não é no sentido de ver, mas sim de visualizar as relações que por meio dele podem ser extraídas. Essa manipulação também conduz para a ideia de adição e subtração de frações que não estão divididas em partes iguais, que foi o assunto abordado pela professora na sequência.

Essa divisão em partes iguais é o que a professora utilizou como ponto de partida para explicar porque os numeradores mudam após o cálculo do m.m.c, pois se procura uma fração com o mesmo denominador, ou seja, com a mesma quantidade de partes iguais, logo se obtém uma fração equivalente. É perceptível que a professora organizou esse pensamento partindo da base para construir o todo, de modo a não tornar o processo mecânico, como por exemplo:

divide pelo que está debaixo e multiplica pelo que está acima. Esta é uma sentença tão mecânica que o sentido pode se perder nesse processo todo.

Importante ressaltar que a professora trabalha o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais simultaneamente, então, em alguns momentos, as operações com números racionais podem envolver tanto números fracionários quanto decimais, assim como números inteiros. É o que acontece na sequência da exemplificação da adição e subtração de números fracionários com o uso do m.m.c. A professora apresenta uma tarefa que envolve as operações com números inteiros: a) $-3+7+4$. O interessante de mencionar na realização dessa atividade é o questionamento de uma estudante sobre de quais números ela tira o m.m.c. Será que essa estudante não consolidou a ideia de frações, de frações equivalentes ou do m.m.c?

Como forma de contextualizar as operações com números inteiros, a professora explora a ideia de variação de temperatura. Numa cidade, a temperatura mais fria do ano foi de -5ºC e a mais quente foi de 35ºC. Qual a diferença entre a temperatura mais quente e mais fria? Esse problema já foi mencionado na observação 1, mas é interessante notar a antecipação da professora frente as possíveis soluções que podem ser apresentadas pelos estudantes, isso significa que eles são instigados a participar e levantar hipóteses o tempo todo. Alguns questionamentos realizados pela professora já são pensados anteriormente, mas outros são construídos, pode-se dizer até "costurados", junto às situações que os alunos vão levantando. É uma troca, um movimento de ida e volta.

Retomando a questão da temperatura, uma antecipação da professora foi a ideia de representar essa variação numa reta. Para isso era preciso consolidar o entendimento sobre módulo ou valor absoluto de um número, até mesmo porque a variação de – 5°C até 0°C resulta em 5°C, ou seja, o – 5°C é pensado em módulo. Já a variação de 0°C até 35°C foi de 35°C. Portanto, a variação de – 5°C até 35°C resulta numa variação total de 40°C. Mas, além disso, a professora também estava preparada para algumas alternativas que os alunos apontariam, como por exemplo: $-5-(+35) = -40$°C. A palavra diferença traz essa ideia de uma operação de subtração, o que não estaria equivocado, porém o resultado sim, pois esse deveria ser pensado em módulo.

A representação de situações como essa na reta numérica pode ser bem significativa e visível, mas novamente reforçando, não se trata especificamente da visualização, mas sim do ato de ver. Se o contexto dessa situação for modificado e passar a relacionar a variação do índice de inflação, por exemplo, será que a análise seria a mesma?

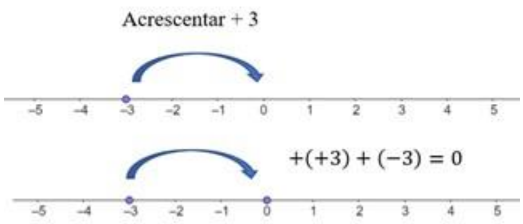
Um exemplo seria a interpretação das raízes de uma equação do segundo grau no conjunto dos números reais. No caso de uma das raízes ser negativa, por exemplo $x = -1$, para estabelecer uma relação entre a equação e suas raízes, o contexto deve ser analisado. Se o contexto se refere a medida de área e lado de uma determinada figura, o valor negativo não cabe nessa situação, agora se o contexto é sobre valores monetários, o valor negativo pode ter sentido.

Com a análise dessas primeiras aulas, muitas reflexões emergem, como a importância em provocar o estudante a ser parte do processo de construção de um conceito, seja a descoberta movida pela intuição, ou a criação movida pela imaginação, ou então estimular a participação por meio de inquietações levantadas pela professora. Sobre o contexto, antes de explorar a sua importância, é necessário que as propostas de tarefas sejam pensadas dentro de um contexto, e não apenas o cálculo pelo cálculo.

A nomenclatura correta dos termos é algo sempre citado pela professora, como por exemplo -3, ela solicita a leitura: três negativo, já $+3$, três positivo. Mas essa exigência faz sentido quando esses valores estão inseridos em alguma operação, como $+3 - (-3)$, que significa: três positivo subtraído de três negativo. Mas sem esse cuidado, uma leitura possível é: mais três menos, menos três, o que para uma abordagem inicial pode-se gerar conflito para o entendimento dessas operações.

Como forma de simplificar tais operações, a professora utiliza a notação $+(\pm 3)$ como acréscimo de + 3 ou -3. Numa reta numerada, a operação $+(+3) + (-3)$ ficaria do seguinte modo, conforme apresentado na Figura 44.

Figura 44 - Representação das operações na reta numérica.



Fonte: Autores, 2021.

E para os casos $-(\pm 3)$ a professora utiliza a notação oposta de + 3 ou -3. Numa reta numerada, a operação $-(+3) - (-3)$ ficaria do seguinte modo: $-3 + 3 = 0$. Com essa abordagem, a professora traz a tabela, já apresentada na observação 1 (Tabela 5).

Tabela 5 - Análise dos sinais.

$+(+5)$	$+5$
$+(-5)$	-5
$-(+5)$	-5
$-(-5)$	$+5$

Fonte: Autores, 2021.

Numa breve pesquisa nos livros didáticos, ao se procurar referências sobre a operação de adição e subtração de números inteiros, geralmente se encontra a tabulação pronta, ou então uma síntese: sinais iguais na soma ou na subtração, some os números e conserve o sinal, ou então: sinais diferentes: conserve o sinal do maior número e subtraia. Mas qual o significado dessas regras? Quais relações podem ser visualizadas de modo que o estudante chegue nas generalizações?

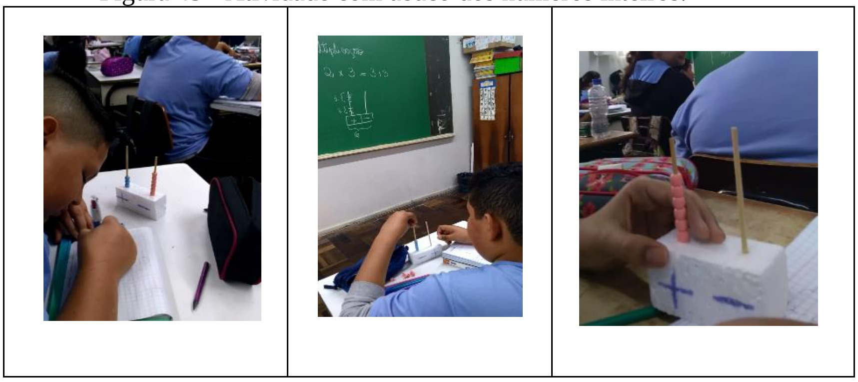
Percebendo a dificuldade de dar sentido as operações com números inteiros, principalmente quando encontravam números negativos, uma ideia sugerida para a professora foi o uso de uma espécie de ábaco dos números inteiros, em que se acrescentavam ou retiravam peças de acordo com a operação estipulada. Esse trabalho foi inspirado no estudo proposto por (Shintani, Paulo e Mondini, 2021): "Mais com mais dá mais?". Nesse trabalho, a ênfase é na resolução da operação de multiplicação de números inteiros utilizando-se o ábaco numérico.

No dia de desenvolver essa prática com os ábacos, a professora distribuiu um ábaco e algumas peças (miçangas) para cada estudantes. Um tempo foi deixado para que eles explorassem o material e levantassem hipóteses sobre a utilidade dele. O material era composto de duas hastes (palitos) fincados numa base de isopor. Nessa base estava demarcada a haste positiva e a haste negativa, que seriam preenchidas com peças de duas cores. Uma das cores representaria os números positivos e a outra os números negativos. A professora então solicitou que eles definissem a cor que representaria o valor negativo e o positivo.

De modo a explorar o material da melhor forma, a professor foi mencionando operações, uma a uma, sendo que a cada uma delas ela também montava a sua representação no ábaco (

Figura 45).

Figura 45 - Atividade com ábaco dos números inteiros.



Fonte: Autores, 2021.

De que forma o uso desse material pode ter ajudado na construção de significado das operações com números inteiros? Primeiramente, no modo de pensar as operações, como, por exemplo, o uso do material dourado, outra dinâmica do pensamento. A professora utiliza o instrumento como um processo e não um fim, ou seja, utiliza de uma base concreta de construção, para formalizar na sequência algumas generalizações decorrentes dela.

Importante destacar que a professora frequentemente levantava questionamentos, e quando eles são atribuídos a ela, ao invés de apresentar uma resposta, ela retoma a pergunta: o que você faria?

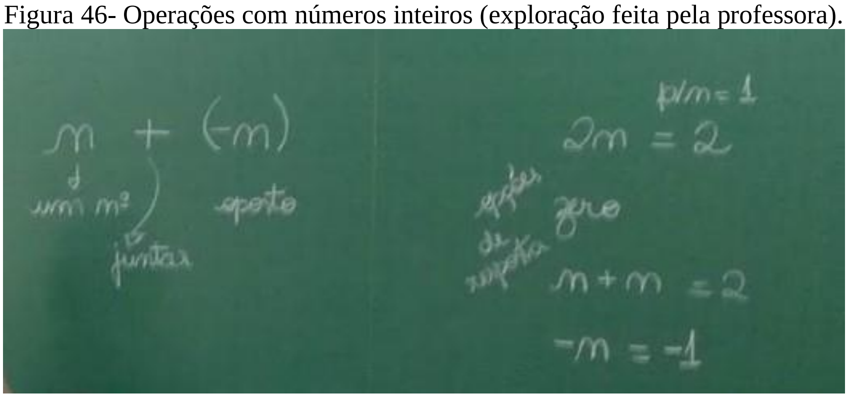
Primeiramente, a professora solicitou que eles representassem três maneiras distintas de zerar as hastes, como por exemplo: 3 peças no eixo negativo e 3 peças no eixo positivo, ou então, 1 peça no eixo positivo e 1 no eixo negativo, entre outras. Perceba que o questionamento solicita três maneira distintas. Pode parecer uma solicitação corriqueira em sala de aula, mas solicitar três maneiras distintas, não. Há uma riqueza nessa solicitação, pois o estudante que está "mecanizado" no modo como resolve problemas terá dificuldade em pensar nas outras duas. Já o estudante que não consegue iniciar uma estratégia talvez se sinta mais confiante em apresentar suas estratégias, uma vez que ela pode não ser a mais "tradicional". A professora não está em busca de uma única solução, mas diferentes estratégias pensadas pelos seus alunos.

Fazer com que diferentes estratégias sejam apresentadas é o princípio da criatividade, na dimensão da fluência. Em analogia ao aprendizado de outras línguas, o poliglota é fluente em 4 ou mais línguas, do mesmo modo o estudante pode ser fluente em matemática, isso significa, que ele consegue desenvolver diferentes maneiras de resolver um problema, seja por meio de diferentes formas de representação de um objeto (estático), como estudado em Duval no capítulo 1, ou seja por meio da visualização das relações entre os objetos (em movimento).

O material por si só não é suficiente para que o significado sobre as operações com números inteiros seja construído, pois os questionamentos, o encaminhamento ao levantar hipóteses, são precedentes que também se fazem importantes nesse processo. Talvez, para um melhor aproveitamento desse material, seria interessante utilizá-lo antes de se iniciar os algoritmos, ou seja, como modo de instigar e significar as operações com números inteiros para depois ir para as simbologias e generalizações. Assim, o material entra como ponto de partida, o conceito como processo e finaliza na utilização que o estudante faz desse conceito em seu dia a dia, concluindo-se que o aprendizado, de fato, aconteceu.

Após o uso do material, a professora deu sequência retomando o uso dos algoritmos. Na imagem a seguir destaca-se um dos registros realizados pela professora (Figura 46).

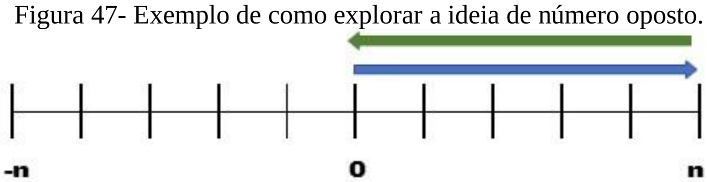
Figura 46- Operações com números inteiros (exploração feita pela professora).



Fonte: Autores, 2021.

Observe que ao lado esquerdo se observa o questionamento feito pela professora e ao lado direito as hipóteses levantadas pelos estudantes. Detalhando o processo, a professora evidencia $(-n)$ como oposto de n. Uma interpretação que auxiliaria nessa questão é a reta numérica, sendo que o oposto de um número na reta numérica é o número que está a mesma distância da origem, conforme apresentado na Figura 47.

Figura 47- Exemplo de como explorar a ideia de número oposto.



Fonte: Autores, 2021.

A representação anterior faz visível o sentido de cada seta. Quando se adiciona, a seta vai para o sentido positivo, quando se subtrai a seta vai para o sentido negativo. Quando se adiciona $-n$ de n, o resultado é nulo.

Observando as hipóteses que os estudantes levantaram: $2n$. Neste caso, a compreensão sobre o significado de $-n$ não foi construída, pois ao se considerar $2n$, o estudante desconsiderou que um dos valores representados pela incógnita é negativo. A hipótese $n + n = 2$, uma vez que a professora sugere o uso do valor numérico da incógnita $n = 1$, é análoga a anterior $2n$, uma vez que o produto é a soma de parcelas iguais. A alternativa $-n$ é a que mais se distancia, mas buscando compreender esse raciocínio, o estudante pode ter ignorado a existência do $+2$ que antecede o (-2), ou então aplicado a "regra de sinais", concluindo que "positivo com negativo resulta em negativo". Por último, a alternativa 0, que se apresenta como a solução que satisfaz a proposta.

Observe que a professora, talvez na tentativa de auxiliar na elaboração das conclusões dos estudantes, indica para se considerar o valor numérico da incógnita sendo igual a 1. A dúvida é, será que a professora fez essa indicação para que o estudante que respondeu 0 como resposta elaborasse argumentos para sua hipótese, ou será que essa indicação se deu pelo fato de que quando a linguagem algébrica é levada para uma linguagem numérica, o estudante consegue perceber melhor as relações?

Essa atividade, no sentido de ação em induzir a reflexão sobre o resultado alcançado é interessante, pois qual professor de matemática não escutou do estudante: "puxa professor, eu tinha certeza, agora não sei mais"? Quando a professora induz a essa reflexão, o aluno precisa fundamentar, reelaborar e comunicar os argumentos que tornam a sua solução válida. Essa prática vai edificando a construção do pensamento matemático do estudante, em que ele está ativo nesse processo de construção, e não apenas como expectador. Nesse processo de ida e volta, o aluno pode também encontrar outros caminhos que o levem a solução (fluência), e ainda comunicar o que melhor, na perspectiva dele, resolve a questão (flexibilidade).

Com a indicação da professora, em considerar a incógnita com valor numérico igual a 1, o olhar do aluno passa do algébrico para o numérico. Esse processo pode ser "frutífero" desde que na sequência se façam as generalizações, saindo do particular para o geral. Para o caso em que se finalize no cálculo numérico, o estudante pode utilizar esse raciocínio como um padrão, tentando reproduzi-lo para todas as tarefas nesse formato.

Diante disso, se evidencia a importância do diálogo, da troca, do questionamento. Esse movimento deve emergir da prática docente, fazendo com que o estudante explore a tarefa por várias perspectivas. Perguntas do tipo “e se fosse um valor negativo?”, “porque chegamos nesse resultado?”, “qual o significado dessa expressão?”, trazem a dinamicidade no modo de pensar a matemática.

Um exemplo é apresentar uma equação para o aluno e perguntar pra ele: o que é isso? Talvez, muitos respondam: uma equação. Mas o docente, não convencido dessa resposta rasa, deve exigir um pouco mais. O que essa equação representa? Modelem um problema que resulte nessa equação. Novamente, é o ato e ir e vir, brincar com enunciados, sugerindo outros valores, situações, e analisam o resultado que se chega. Por que foi diferente o resultado? O resultado se manteve, por quê?

5.4 INTRODUÇÃO AO CONTEÚDO

A visualização, no modo pelo qual é entendida nesta pesquisa, não é uma ação possível de ser mensurada, no sentido de quantificar quantas pessoas utilizaram a visualização para solucionar uma determinada tarefa. Ou seja, não há como instrumentalizar um modo de pensar dinâmico, como o caso da visualização.

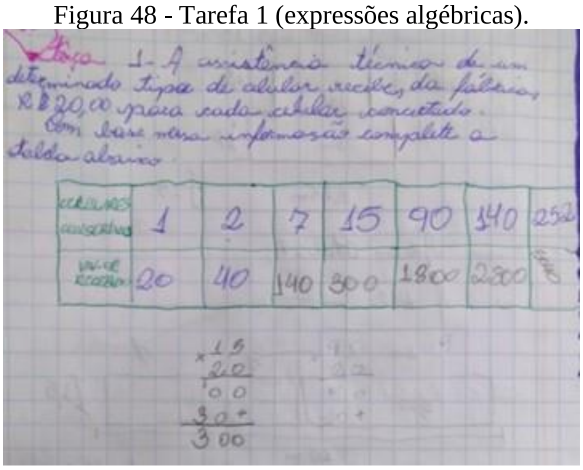
Pela resolução de uma tarefa proposta talvez se possa perceber algum indício ou até mesmo tendência para esse modo de pensar, mas o registro precisa de detalhes que até então raramente são apresentados e ainda assim configuram-se como indícios.

A comunicação, ou verbalização de como se chegou num determinado resultado pode trazer elementos mais relevantes, porém é necessário que o processo do pensar seja externalizado, o que não é uma tarefa fácil, até mesmo por não se praticar essa ação com frequência. O mais comum é esperar o produto (resposta) dos estudantes, do que o processo (percurso utilizado). Como já mencionado neste estudo, mais importante que as respostas são as perguntas, e é por meio delas que essa ação de externalizar e comunicar o modo no qual foi pensado pode se consolidar. É nesse cenário que as análises dessa etapa se configuram.

Em conjunto com a professora, foi elaborada uma sequência didática fundamentada nos tipos de visualização apresentadas em: visualização contextualizada, visualização algorítmica e visualização geométrica. Esse foi o primeiro momento em que, de fato, se dialogou sobre a visualização, especificamente os tipos de visualização, porém, sem mencionar a concepção de visualização construída nesse estudo. Desse modo, o olhar para prática da docente se dá pela escolha que a professora fez sobre as tarefas, bem como direcionamento dado em sala. Ressalta-se que cada tarefa por ela selecionada intercalava com a exploração dos conceitos, portanto não era algo isolado, mas intrínseco na própria abordagem do conceito.

Antes de entrar especificamente no conceito de equações, a professora iniciou uma abordagem sobre expressões algébricas e para isso utilizou as sequências numéricas e consequentemente as generalizações para um número “n” de casos. Os estudantes, segundo a professora, já são direcionados ao trabalho com valores desconhecidos nos anos iniciais, porém com uma simbologia diferente, sem utilizar a ideia de “incógnita” e “variável” (Figura 48).

Figura 48 - Tarefa 1 (expressões algébricas).

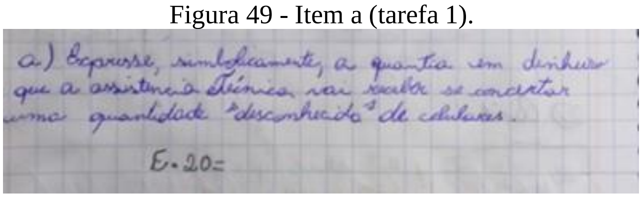


Fonte: Autores, 2021.

A primeira tarefa trazia o contexto sobre o valor recebido de acordo com a quantidade de celulares consertados. Há uma dependência de valores, em que o valor recebido depende da quantidade de celulares consertados. Então, o estudante precisava visualizar a relação entre o valor e quantidade consertada.

A ação de visualização se apresenta no processo, por mais que os algarismos sejam visíveis, em sua simbologia, as relações entre eles não é imediata (Figura 49).

Figura 49 - Item a (tarefa 1).

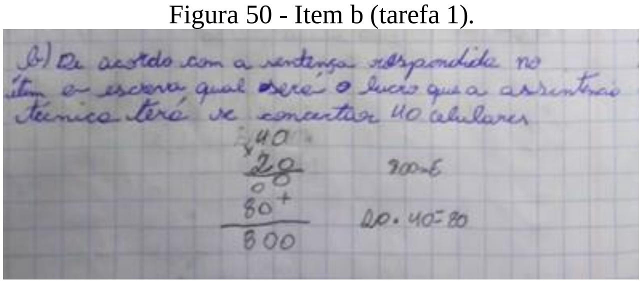


Fonte: Autores, 2021.

Importante observar a ordem em que os itens da tarefa são apresentados. Primeiramente, o estudante precisa visualizar as relações entre os números, depois, no item a ele precisa generalizar. Então, o que antes era a visualização da relação numérica, agora a visualização está no processo entre o conhecido (numérico) e a representação do desconhecido.

Por último, a abordagem retoma para o numérico, mas não sequencialmente, e sim no meio da sequência. Ou seja, a proposta não se finaliza numa expressão algébrica, mas sim no sentido de fazer com que o estudante perceba que a relação identificada no item “a” serve para qualquer quantidade de celular que for consertado (Figura 50).

Figura 50 - Item b (tarefa 1).

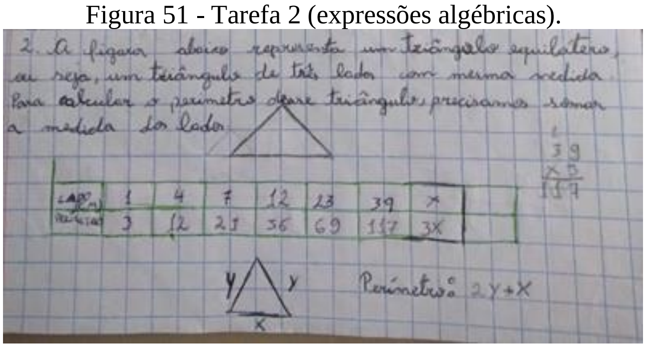


Fonte: Autores, 2021.

Uma sugestão, seria a de apresentar outra expressão e pedir para que o estudante contextualize, ou seja, interprete a expressão inserindo-a num determinado contexto.

A tarefa seguinte também se refere a uma sequência, porém agora relacionando-a com a geometria. A visualização requerida era a da relação entre a medida dos lados de um triângulo equilátero com a medida do seu perímetro (Figura 51).

Figura 51 - Tarefa 2 (expressões algébricas).



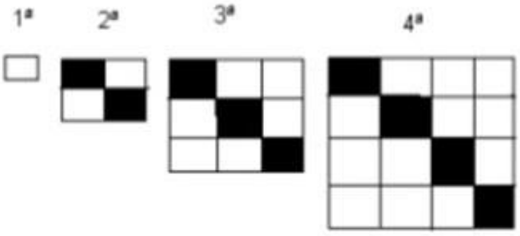
Fonte: Autores, 2021.

Na imagem anterior, o que pode se observar é que o estudante chegou na generalização da sequência, se considerar a medida do lado igual a x. A professora, no intuito de expandir as reflexões, questiona sobre como seria tal generalização se o triângulo fosse isósceles. É interessante esse questionamento, pois o que se percebe é a representação que o estudante faz do triângulo, e o modo como ele nomeia os lados. Nesse momento, a sequencialidade já não se fez necessária.

Uma outra ideia que pode ser explorada no contexto dessa tarefa é a de proporcionalidade do perímetro, ou seja, se aumentar-se a medida dos lados proporcionalmente, qual a relação que se obtém com o perímetro? E para o caso da área de um triângulo, qual a relação entre a medida do lado e a área? Novamente, a visualização das relações se faz presente, e o estudante pode ir intuindo, no sentido de descobrir novas relações, e visualizando outras, num processo em que uma atividade (ação) vai desencadeando outra.

A terceira tarefa sobre sequências envolveu uma composição geométrica, porém de interpretação algébrica (Figura 52).

Figura 52 - Tarefa 3 (expressões algébricas).



Fonte: Autores, 2021.

Para descobrir o padrão dessa sequência, visualiza-se o todo e depois relaciona-se as partes. Os questionamentos que a professora inseriu nos itens da tarefa vão direcionando o estudante para uma possível generalização, em que vão realizando a contagem de quadriláteros pretos e brancos e depois relacionando-os.

Após essa exploração inicial sobre as expressões algébricas, ressaltando que esse foi o primeiro momento em que os estudantes entraram em contanto com variáveis e incógnitas, é dado sequência ao trabalho com equações, em que as tarefas foram selecionadas com base nos tipos de visualização.

A visualização contextualizada foi a primeira que a professora considerou, com a seguinte proposta: 1) Um tijolo pesa 1kg mais meio tijolo. Qual é o peso de um tijolo?

Esse tipo de visualização é caracterizado por dar diferentes significados a um dado conceito matemático. A palavra “contextualizar”, no sentido da matemática, significa colocar um objeto em relação com outros objetos, não apenas no caminho da matemática para o real, mas da matemática para a própria matemática. Para contextualizar um determinado conceito, faz-se necessário descontextualizar o saber produzido, para assim analisar um conhecimento que nele possa ser reproduzido (SANTOS, 2014).

Um exemplo se revela na ideia das raízes de uma equação do segundo grau. Sabe-se que uma equação do segundo grau, no conjunto dos números reais, admite no máximo duas soluções (discriminante maior que zero), porém pode apresentar apenas uma (discriminante é igual a zero) ou até mesmo nenhuma (discriminante menor que zero). Mas, se o contexto de referência para um problema proposto for geométrico (medida de área, lado, perímetro etc.), as raízes no qual o valor é negativo não podem ser consideradas pelo contexto em que se está trabalhando.

Para as geometrias não euclidianas, o contexto gerado pelos espaços artificiais possibilitam visualizar as relações entre os objetos que neles estão inseridos.

Retomando a proposta da professora: um tijolo pesa 1kg mais meio tijolo, qual é o peso de um tijolo? Essa tarefa gera um conflito do ponto interpretativo, pois meio tijolo pode facilmente ser entendido como metade de 1kg. A professora trouxe essa proposta justamente para explorar a ideia de igualdade que uma equação pode representar.

Ela deu um tempo para que os estudantes elaborassem suas estratégias, seja por meio de representações figurais ou simbólicas. Novamente, a professora anotou todas as hipóteses levantadas no canto do quadro, e começou a explorar, uma a uma.

Interessante de se observar que o estudante não apresentava sinais de desconforto quando a sua hipótese não era validada. Pelo contrário, quando percebia seu equívoco, logo solicitava uma próxima tarefa, parecia se sentir parte do processo e não apenas um espectador.

Utilizando a ideia da balança, a professora representou a situação. Em um lado da balança, uma representação do tijolo e do outro lado, a representação de metade de um tijolo e um objeto representando a massa de 1kg. Desse modo, ela iniciou o que é denominado por princípio aditivo (Figura 53).

Figura 53 - Abordagem realizada pela professora (tarefa 1 sobre equações).

Fonte: Autores, 2021.

Na sequência, a tarefa foi elaborada com base na visualização aritmética-algorítmica. A visualização aritmética-algorítmica se caracteriza por um problema geométrico com uma solução de abordagem algorítmica. Ou seja, o ponto de partida é geométrico e o ponto de chegada é algorítmico.

Os exemplos que se revelam na perspectiva desse tipo de visualização são, geralmente, os que envolvem medidas, seja de área, perímetro, volume, medida de segmento etc. A simples tarefa sobre o cálculo de área já apresenta esse tipo de visualização, pois se inicia por uma problemática geométrica, que após é solucionada pelas vias algorítmicas.

A tarefa proposta pela professora foi a seguinte: Qual é a medida do lado do quadrado se seu perímetro é igual ao perímetro do retângulo? Na Figura 54 é apresentada a tarefa 3.

Figura 54 - Tarefa 3 (Equações).

Fonte: Autores, 2021.

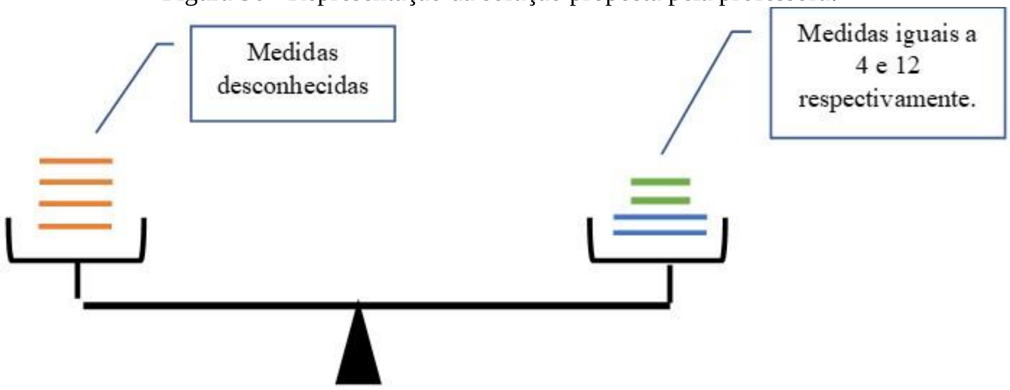
Esse problema se iniciou pelo conceito do perímetro do retângulo e após foi solucionado numa linguagem algébrica, que foi a equação (Figura 55).

Figura 55 - Abordagem realizada pela professora (tarefa 3 equações).

Fonte: Autores, 2021.

A professora utilizou a ideia da equação já na sua representação geométrica. Ela contornou o quadrado e o retângulo com pedaços de fita. Após isso, ela colou cada um desses pedaços que representavam os lados do quadrado e lados do retângulo, numa igualdade representada pela balança (Figura 56).

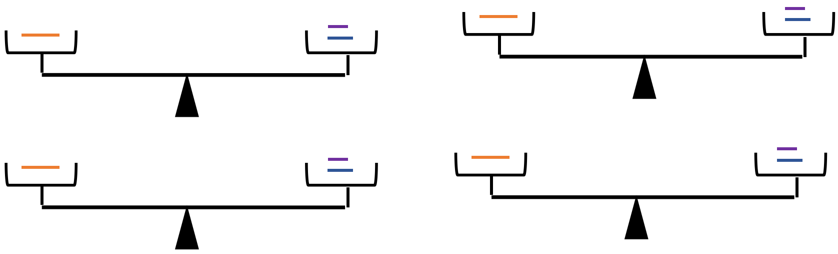
Figura 56 - Representação da solução proposta pela professora.



Fonte: Autores, 2021.

Na sequência, ela subdividiu essas medidas em 4 balanças. Em cada um dos "pratos" ao lado esquerdo da balança ficou apenas um segmento desconhecido,e em cada um dos "pratos" ao lado direito da balança ficaram um segmento de medida igual a 2 e outro segmento de medida igual a 6 (Figura 57).

Figura 57 - Representação da solução realizada pela professora.



Fonte: Autores, 2021.

Isso significa que a professora explorou a ideia da igualdade proporcionada pela analogia com a balança, e após isso foi transcrevendo para a linguagem algébrica. Logo, o apelo visual serviu de base para a generalização que ela fez na sequência.

Por último, a visualização geométrica consiste em "ver" geometricamente um problema aritmético ou algébrico, trazendo uma incumbência geométrica para o visual no intuito de utilizar dos preceitos da geometria como modo de visualização de conceitos aritméticos ou algébricos. Um exemplo é a representação no plano cartesiano de uma função afim. Quando trabalhada a função pela função, o significado pode ser dado pela contextualização, ou a modelagem de algum problema, porém, a visualização do gráfico possibilita uma interpretação ainda mais ampla para o conceito.

Outro exemplo é quando se tem uma tarefa de contar a quantidade de cadeiras de uma sala com formato quadrangular. Pode-se ir contando cadeira por cadeira, ou então, na composição geométrica retangular, multiplicar o número de cadeiras de uma coluna pelo número de cadeiras de uma linha. Nessa composição mental, relacionou-se o algoritmo da adição com a composição retangular.

Dentro desse entendimento de visualização geométrica, não foi possível estabelecer uma tarefa, que se iniciasse dentro do conceito de equação, em um problema estritamente algorítmico para se chegar numa solução geométrica. Se extrapolasse o conceito de fração, ampliando para o de função afim, poderia ser modelado um problema em que a solução poderia ser representada no plano cartesiano. Porém, como os estudantes estavam iniciando a linguagem algébrica, se optou por não estender esse entendimento até que o entendimento de equação fosse atingido.

5.5 TAREFAS

Este tópico tem o intuito de trazer uma breve análise sobre a realização das tarefas propostas para um grupo de estudantes pertencentes a turma em que a pesquisa foi desenvolvida. O objetivo da aplicação dessa tarefa se deu por dois motivos: compreender as estratégias de resolução do estudante, observando se nelas existiam alguns indícios da visualização e analisar o olhar da professora diante da resolução dos problemas pelos estudantes, o que será especificado na seção seguinte.

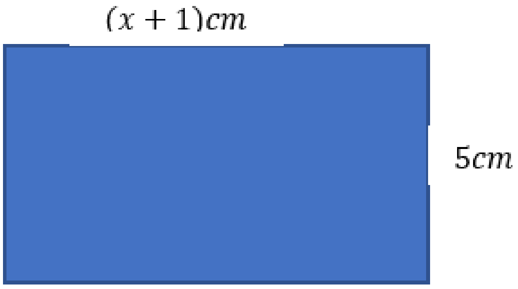
Conforme já descrito na metodologia, essa tarefa foi realizada com nove alunos pré-selecionados pela professora, de acordo com o nível de desenvolvimento. Então, desses nove alunos, três apresentavam muita dificuldade, três tinham um bom desenvolvimento, porém precisavam de estímulos para tal e os outros três alunos estavam desenvolvendo sua própria forma de pensar a matemática. Esse momento de aplicação da tarefa foi gravado e não houve interação entre os alunos e pesquisadora.

Cada tarefa será comentada em relação aos seus objetivos e apresentado o número de acertos. Mas, cabe ressaltar que o estudo não se faz sobre esses dados numéricos, e sim na análise da professora sobre as estratégias e respostas apresentadas pelos estudantes. Ou seja, é a análise do processo que se faz importante e será apresentado no próximo tópico com mais propriedade, na perspectiva da professora.

Para fins de organização dos dados, os estudantes serão classificados com a numeração de 1 a 9. Na Figura 58 a seguir, serão apresentadas as tarefas e o número de acertos.

Tarefa 1) Observe a figura abaixo: Questão (adaptado livro *Praticando Matemática*).

Figura 58 – Questão Adaptada do Livro Praticando Matemática.



Fonte: Autores, 2021.

Quanto ao retângulo, podemos escrever a equação:

$$2 \times (x + 1) + 2 \times 5 = 38$$

O que representa o número 38?

Qual o valor de *x*?

Será que o número 70 tem alguma relação com esse retângulo?

Essa tarefa foi pensada na busca por aliar o pensamento matemático com a visualização algorítmica. O ponto de partida é uma tarefa de natureza geométrica, e o de chegada, algorítmica. Os itens a e c envolvem o pensar no significado da incógnita, que vai além do que se restringir ao seu valor. Observe que o questionamento do item requer o entendimento sobre perímetro. Já o item b solicita o valor da incógnita, ou seja, a resolução da equação. No item c, utilizando o valor da incógnita x, o estudante precisava do entendimento sobre área.

Entre os nove estudantes, os que acertaram os itens serão assinalados com x.

Quadro 4 - Número de acertos para cada item da tarefa 1.

Item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A								x	x
B									x
C									

Fonte: Autores, 2021.

A alternativa "a" teve dois acertos, a alternativa "b" um acerto e nenhum acerto na alternativa "c". Quando o comando não foi claro, ou imediato para o estudante, a interpretação do enunciado como um todo parecia confusa. Alguns assinalaram a questão como se fosse verdadeiro ou falso. Outros se atentaram aos números do enunciado e em outros casos não se percebeu uma tentativa de resolução.

Tarefa 2) Uma maçã vale 6 bananas mais meia maçã. Meia dúzia de bananas custa 48 centavos. Quanto custa uma maça? Questão (livro *Praticando Matemática*).

Essa questão envolve a ideia da visualização contextualizada, por ser tratar de objeto real, presente no contexto do aluno. A tarefa também requer uma manipulação mental das relações, que poderiam ser representadas de modo figural, ou então na representação algébrica, pela interpretação da equação. Dos 9 estudantes, 3 fizeram a representação de uma balança e tentaram estabelecer a equivalência.

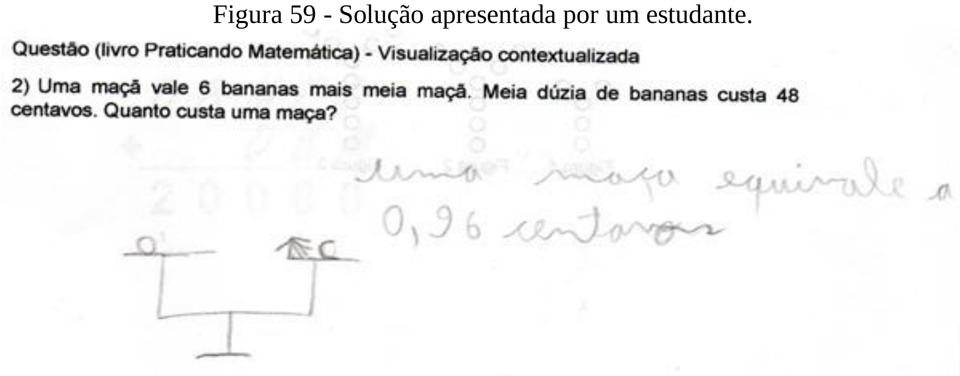
Quadro 5 – Número de acertos da tarefa 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
			x	x			x	x

Fonte: Autores, 2021.

Nessa tarefa, o número de acertos foi igual a 4. Destacam-se algumas soluções apresentadas na Figura 59.

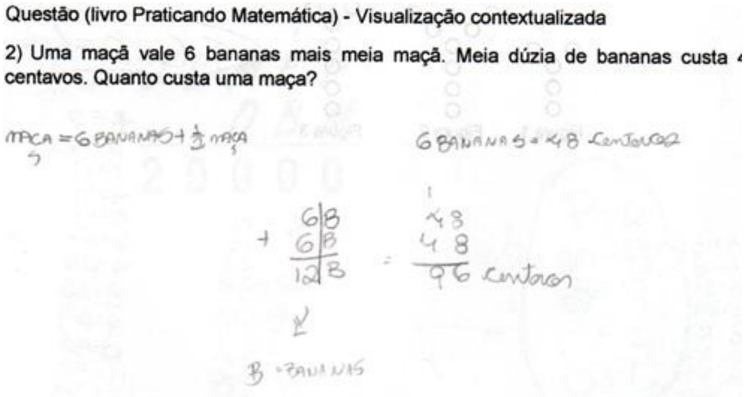
Figura 59 - Solução apresentada por um estudante.



Fonte: Autores, 2021.

Na solução anterior pode-se observar a utilização da analogia com a balança para representar uma equivalência, relação essa utilizada em sala pela professora. O estudante representou uma maçã no lado esquerdo da balança e meia maçã mais seis bananas no lado direito. Se ele retirar meia maçã em cada um dos lados da balança, o estudante conclui que meia maçã equivale a seis bananas, que custam R$ 0,48, logo uma maçã equivale ao dobro, R$ 0,96 (Figura 60).

Figura 60 - Solução apresentada por um estudante.

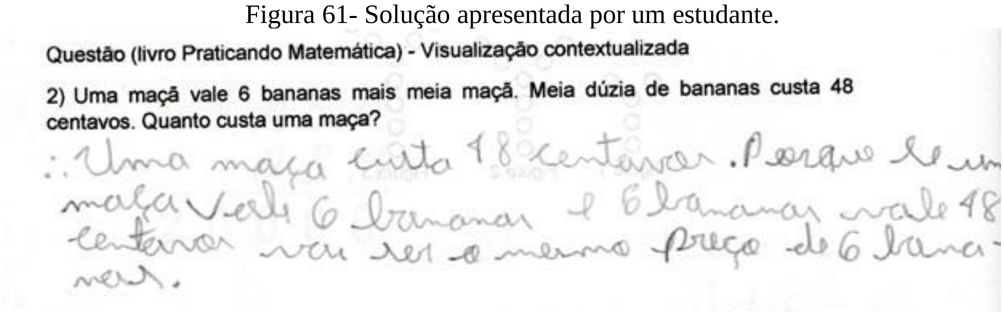


Fonte: Autores, 2021.

Já na solução anterior, o estudante usa da linguagem algorítmica para resolução. Interessante de se observar a organização em que se estrutura os dados da tarefa, sendo que do lado esquerdo constam alguns dados e do lado direito outros dados. Talvez, intrinsicamente, a ideia da balança também foi utilizada.

Na próxima solução destacada, pode-se perceber que o entendimento de "meia" maçã não foi consolidado na elaboração da estratégia. Desse modo se conclui que o valor de 1 maçã corresponde ao valor de 6 bananas (Figura 61).

Figura 61- Solução apresentada por um estudante.

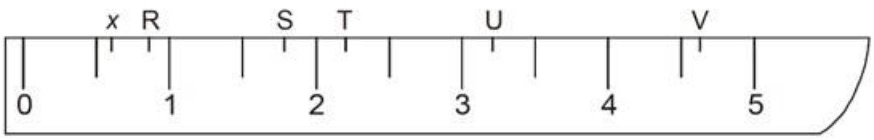


Fonte: Autores, 2021.

Tarefa 3) A

Figura 62 representa parte de uma régua graduada de meio em meio centímetro, onde estão marcados alguns pontos, a saber, R, S, T, U e V. Qual deles melhor representa o número $2x + 1$? Se um ponto W, fosse representado pelo número 3, qual deveria ser o valor de x? Questão (livro *Projeto Radix*).

Figura 62 – Representação de uma régua graduada.



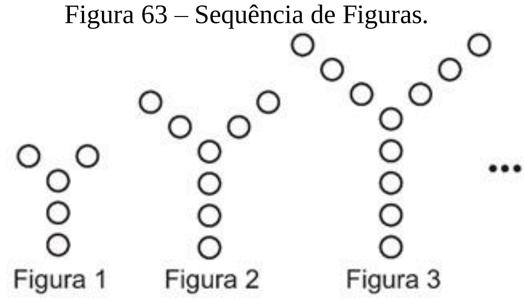
Fonte: Autores, 2021.

Nessa questão, além de visualizar o todo, o estudante tem que pensar no processo inverso de solução. A visualização presente é a algorítmica, em que se inicia o raciocínio pela reta numérica, que é uma representação geométrica dos números, e se conclui com um algorítmico, nesse caso o valor da incógnita x.

Nenhum estudante acertou a questão. Dentre os que mais se aproximaram, foi estimando o valor de x entre 0,5 e 1, porém não retomaram ao questionamento, que se referia a $2x+1$.

Tarefa 4) Observe a sequência de figuras apresentada na Figura 63 abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura? Questão (OMBEP nível 1 - 2019).

Figura 63 – Sequência de Figuras.



Fonte: Autores, 2021.

Novamente trabalhando com a ideia de padrões, essa tarefa envolve a visualização das partes para se concretizar o todo. A visualização algorítmica se faz presente pois, por meio da configuração geométrica apresentada, pode-se encontrar o padrão solicitado. A visualização das relações aqui se dá entre as figuras, ou seja, observar o comportamento de cada figura e relacioná-los.

Quadro 6 - Número de acertos da tarefa 4.

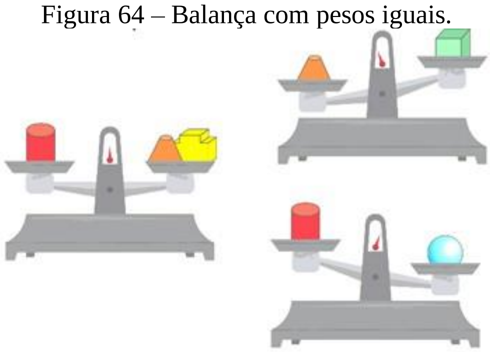
1	2	3	4	5	6	7	8	9
							x	x

Fonte: Autores, 2021.

Das soluções apresentadas, nenhuma utilizou da linguagem algébrica para descrever o padrão da sequência. As duas tarefas que apresentaram resolução correta foram solucionadas por meio de cálculos em sequência, ou seja, um a um. Alguns visualizaram parte do padrão, quando observaram que a relação entre uma e outra etapa resultava no acréscimo de 3. Um estudante tentou fazer a relação pela reconfiguração da própria figura, adicionando bolinhas, mas não concluiu o processo.

Tarefa 5) Nas balanças da Figura 64, objetos iguais têm pesos iguais. Qual dos objetos é o mais pesado? Questão (OBMEP nível 1 - 2017).

Figura 64 – Balança com pesos iguais.



Fonte: Autores, 2021.

Essa tarefa estabelece a relação de igualdade sem envolver números. Percebe-se aqui a visualização contextualizada, pois os objetos reais devem ser comparados a fim de se concluir qual é o mais pesado. É possível perceber que essa tarefa apresenta as ideias exploradas sobre equações, nas quais a professora se baseia para explorar a equivalência. Porém, nesse caso, a análise é gráfica, visual (Quadro 7).

Quadro 7 - Número de acertos da tarefa 5.

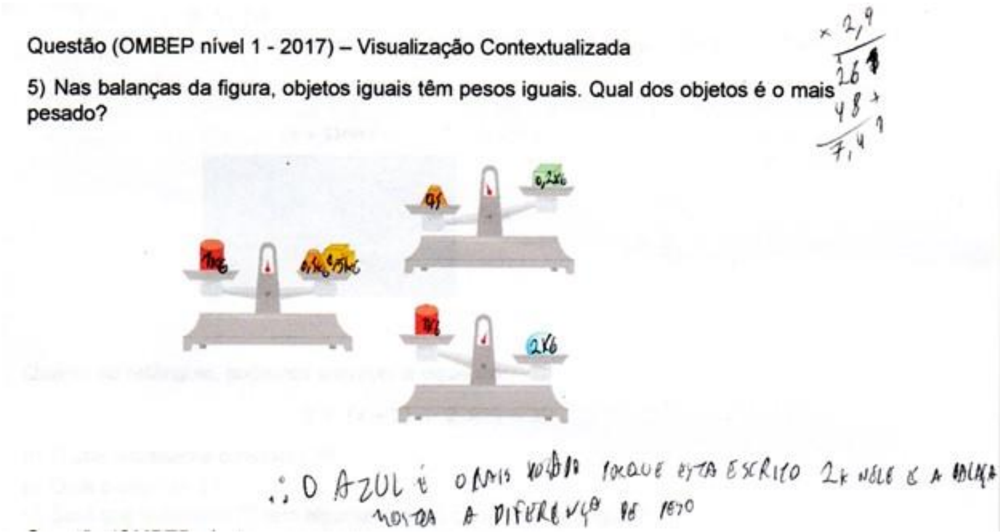
1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	x		x	x		x	x	x

Fonte: Autores, 2021.

Na solução apresentada a seguir, o estudante acrescenta valores para cada objeto da balança, para que de modo aritmético consiga fazer as devidas comparações em relação ao massa de cada objeto (

Figura 65).

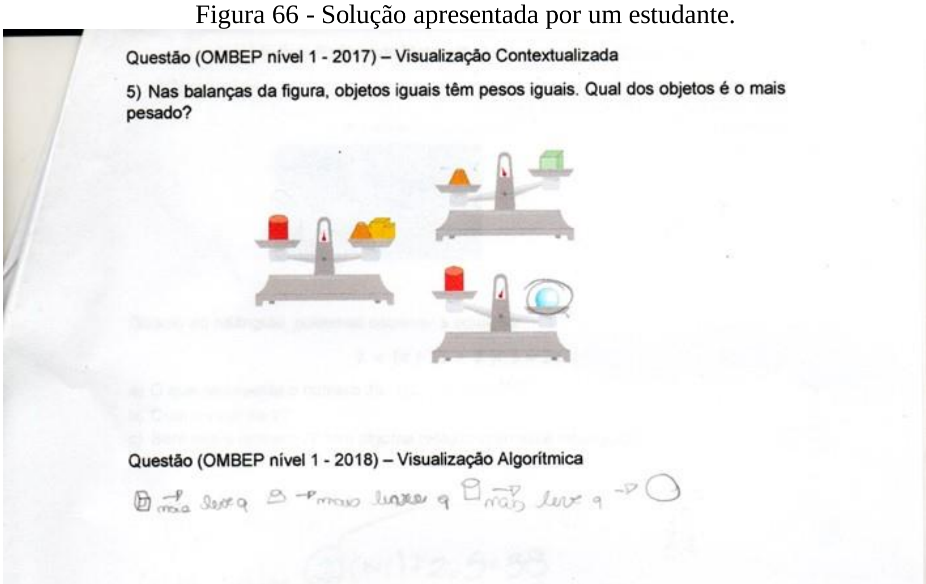
Figura 65 - Solução apresentada por um estudante.



Fonte: Autores, 2021.

Na imagem seguinte, percebe-se a visualização das relações que o estudante fez, comparando um a um. Por mais que tenha representado graficamente parte da solução, pode-se perceber que o raciocínio é aritmético (Figura 66).

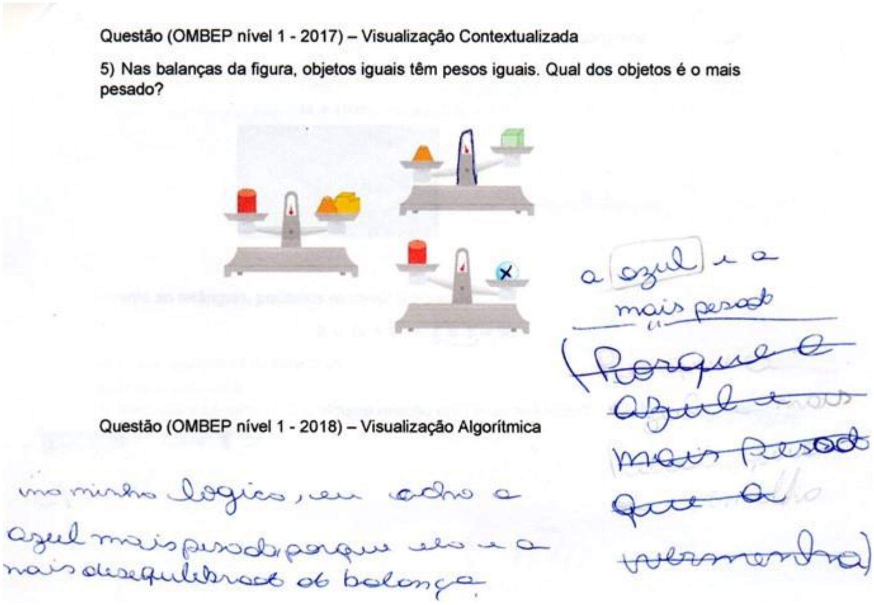
Figura 66 - Solução apresentada por um estudante.



Fonte: Autores, 2021.

Na Figura 67 a seguir, o estudante apresenta a solução esperada, porém, pela sua argumentação, não fica claro se ele chegou a esse resultado apenas olhando para a ultima balança (visualização do objeto) ou então pela visualização do todo (visualização da relação entre os objetos).

Figura 67 - Solução apresentada por um estudante.



Fonte: Autores, 2021.

Tarefa 6) Na operação de adição especificada na Figura 68 abaixo, cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo representado pela letra P? Questão (OMBEP nível 1 - 2018).

Figura 68 – Operação de adição especificada.

$$\begin{array}{r} O\,B\,M\,E\,P \\ +\quad O\,B\,M \\ \hline 2\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

Fonte: Autores, 2021.

Nessa última proposta, a ideia é a visualização do todo para se conjecturar as partes, especificamente os valores das letras. Para isso envolve-se a visualização algorítmica, em que a organização das letras na operação é essencial para descobrir o valor de cada uma (Quadro 8).

Quadro 8 - Número de acertos da questão 6.

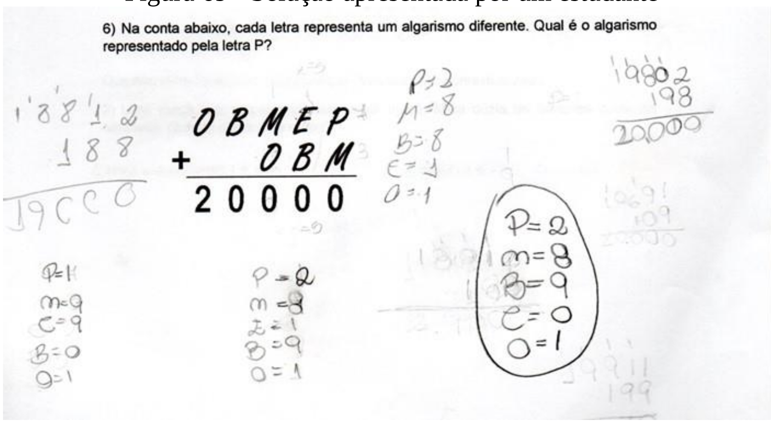
1	2	3	4	5	6	7	8	9
							x	

Fonte: Autores, 2021.

Ao realizar a tarefa, a maioria dos estudantes observou as partes, no caso $P + M = 0$, mas não visualizou o todo. Deste modo, a única solução possível para eles seria $P = 0$. Porém, na resolução da imagem abaixo, a estudante conseguiu visualizar o todo, percebendo que $P +$

M poderia também resultar em 10, na qual essas 10 unidades foram trocadas por 1 dezena, ficando então 0 unidades. Se ela não tivesse olhado para o todo, não consideraria a opção da adição resultar em 10 (Figura 69).

Figura 69 - Solução apresentada por um estudante



Fonte: Autores, 2021.

As análises de algumas resoluções dos estudantes, realizadas pela ótica da professora, serão apresentadas na próxima seção.

5.6 ENTREVISTA 2

Após todas as etapas do percurso metodológico apresentado no capítulo 3, que incluía observação 1, entrevista, 1, observação 2, introdução ao conceito de equações, tarefas, retoma-se agora para a última etapa, a entrevista 2.

Esta entrevista teve por objetivo trazer um comparativo das compreensões iniciais da professora sobre a visualização com as compreensões após todo processo metodológico realizado. Para isso, foi realizada uma entrevista semiestruturada, que inicialmente contava com nove perguntas, mas devido ao surgimento de novos questionamentos (em itálico), a entrevista finalizou com em 21 perguntas. Para fins de registro e análise, a entrevista foi gravada.

Essa última etapa teve por objetivo dialogar com a primeira e as demais etapas, de modo a buscar elementos na fala da professora em que a visualização fosse um ponto de discussão e reflexão.

A primeira pergunta realizada foi se a professora recordava a ideia de visualização que ela apresentou na primeira entrevista: (...) *eu acho que não estava bem formulado o que era visualização para mim. Eu poderia até usar, mas não o conceito. E também acho que não está ainda o conceito pronto para mim, é uma briga interna, do que seria visualização matemática.*

Realmente, a concepção de visualização, como discutida no capítulo deste estudo, já se apresenta polissêmica, em que várias perspectivas são tomadas como base para depois se apresentar uma ideia sobre a visualização. Devido a essa multiplicidade é que de imediato foi realizado um estudo que trouxesse reflexões sobre o fato de a visualização não ser sinônimo de visão, representação e percepção. Inclusive, na primeira entrevista, era forte esse aspecto da representação para a professora.

Foi questionado à professora se ela percebeu alguma mudança na concepção dela sobre a visualização. Ela afirmou que: *eu tenho me indagado mais e aí me deixo confusa. Eu acho que estou meio que nem aluno, você coloca algumas premissas, aí vem alguém e faz umas indagações e você diz pera aí, está me incomodando. Daí tira você do lugar, do cômodo, e agora eu estou tentando construir, parece que agora eu sei menos do que antes. A situação é essa, que estou realmente me sentindo incomodada.*

Quando foi pensado no estudo de caso, em que o caso é a professora, o que motivou essa escolha foi o fato do entendimento que se faz sobre o ensino, que é a partir dele que se pode transformar o modo de pensar e olhar para a matemática. Porém, quando se percebe que o estudo gerou uma inquietação na professora, em uma proporção que ela diz estar tentando se construir, é notório que talvez essa desconstrução não tenha acontecido apenas diante a concepção de visualização, mas principalmente enquanto professora.

Essa poderia ser uma ação constante do professor em sua prática, visitar e revisitar conceitos com outras metodologias, descontruir para construir, despir-se da matemática e buscar por novas roupagens. As novas ideias não apagam as já existentes, mas se incorporam, no sentido de ganhar corpo, ganhar vida e dinamicidade.

Sobre as tarefas apresentadas na seção anterior, a professora comenta se em algum momento percebeu, nas soluções dos estudantes, a visualização presente de modo a favorecer o aprendizado: *A da balança (tarefa 5) é visivelmente, talvez por figura, balança e tal. Porém as das letras (tarefa 6) para mim, visualizando já se percebe que as letras teriam valores diferentes e eles não viram isso. São letras diferentes, teriam valores diferentes. Então é o que? Só a questão matemática mesmo, algébrica? Ou de percepção do todo? Essa questão não sei dizer se seria só algébrica, para mim seria a percepção do todo. Seriam obviamente valores diferentes, mas eles não conseguiram enxergar isso. Só uma aluna conseguiu enxergar isso.*

Nessa fala da professora é perceptível que a visualização ainda se apresenta, em alguns momentos, como a ação de ver, porém, quando ela fala da percepção do todo, é sobre as relações entre as partes e o todo que se refere, ou seja, a visualização das relações.

Como comentado, ela disse que apenas uma estudante conseguiu visualizar o todo, aí se questiona se ela foi além de enxergar. A professora argumentou que o processo envolveu o olhar, perceber, formular conjecturas, visualizar. Os outros estudantes deixaram se levar pelo imediato, *isso, então dá zero, é zero, dá dois aqui, a letra ali de cima é dois. Os outros que recortaram lá, é o ver, vejo o 48, vejo o 6, ou 40 no 8, vejo 6, 6x48 ou 48+6.*

Sobre a tarefa 2, que também poderia estar relacionada a ideia da balança, *as estudantes 8 e 9 foram olhando item por item, foram conjecturando e teve escrita. Porque não adianta você fazer conjecturas, fazer as análises, mas não ter organização, não ter um parâmetro, que nem lá do aluno 3 que responder R$0,96, mas não fez nenhuma explicação, é só imediato, coloca uma resposta, a resposta é x, é tanto... e nem sempre é assim. É só quando são coisas muitos simples.* Essa situação foi observada nas resoluções, o estudante buscar por um comando direto, e ir agrupando os valores que aparecem no enunciado, sem compreender de fato o que responder.

A professora comenta sobre a dificuldade em conseguir avaliar o estudante quando é apresentada uma resposta direta, sem que se revele um meio pelo qual se chegou aquela conclusão. *Eu não sei qual o processo que está falho, porque uma ele colocou e acertou, a outra colocou a resposta imediata e errou. A maioria colocou respostas imediatas, então como eu vou avaliar de que forma devo fazer a interferência? Eu não sei o que fazer, porque eu não sei qual a linha a pensamento dele. A da aluna 4, mesmo ela desenhando, eu tenho como interferir, posso chegar ali: olha vamos ver 3 bananas mais 1/2 maçã, então ficou faltando isso. Então eu sei onde eu posso interferir.*

É nítida a preocupação que a professora traz sobre o processo percorrido e não o produto. Até porque é pelo processo que ela poderá pensar em estratégias para a lacuna apresentada pelo estudante, *(...) nem sempre me importa a resposta dele em si, mas o processo dele, ele pode ter até errado a resposta, mas o processo ele fez, uau, valeu!* Interessante observar como essa última fala da professora se assemelha a de visualização adotada nesse estudo, ou seja, a visualização do processo. Por ser um modo dinâmico de pensar, é complicado dizer que o estudante visualizou os processos analisando uma tarefa.

O que ser percebe são indícios, mas não uma constatação. Um outro modo de levantar mais indícios é pela oralidade em sala da aula. A professora afirma que *Que nem 1/5 e 1/2, para tentar explicar para alguns alunos, peguei assim: imagine R$1,00, um inteiro dividido na metade. Eu tive 3 alunas que eu peguei, não fiz com todos, porque elas vieram perguntar, aí eu tive que comparar 1/2 com 1/5. Então como que eu vou explicar 1/2 com 1/5? Então vamos pegar R$1,00, é meu inteiro, divida na metade, não consegui. Aí fui lá e emprestei um pacote de moedas, trouxe o pacote de moedas e dei na mão R$1,00 e falei: agora divide. Teve aluna* *que falou: posso quebrar no meio? E o pacote de moedas na frente. Ficou um tempão, até que perguntou: posso mexer no pacote? Pode. Aí ela pegou uma moeda de R$1,00 mais uma moeda de R$1,00. Eu pensei, ela vai trocar. Em nenhum momento eu usei a palavra troca porque eu não queria induzir, queria ver até que nível. Aí ela pegou uma moeda de R$1,00 para ela e deu uma moeda de R$1,00 para mim. Aí eu disse, não, você não dividiu R$1,00, você dividiu R$2,00.*

Por esse motivo, é importante essa troca em sala de aula, o estudante se tornando protagonista do seu modo de pensar a matemática, pois muitas das dificuldades se revelam nessas trocas.

Sobre algumas tarefas propostas pela professora, foi realizado o seguinte questionamento: é possível observar nas avaliações que a professora elaborou exercícios que retomam o conceito de área, como, por exemplo, descobrir o lado de um quadrado dada a área. Ou então, a ideia de parte do todo, a área do quadrado interno é 1⁄4 da área total.

Qual era sua ideia trazendo o conceito de área para esse contexto? *É que o processo inverso do pensamento matemática muitas vezes não é explorado, eu penso assim. Então a maioria faz a área achando que é só multiplicar ali e pronto, ele não consegue pensar no processo inverso. Não é só de área, de tudo. Pode ver, se é uma igualdade eu tenho o processo inverso, de tudo, porém os alunos tem essa dificuldade de fazer o processo inverso, desde a multiplicação, eles têm dificuldade de fazer a divisão e quando eu mostro pra eles que divisão é o processo inverso da multiplicação, eu só mudo a pergunta: quantas vezes cabe? É a divisão, mas eu faço, quantas vezes cabe, e ele: é tanto. É isso, divisão é o processo inverso da multiplicação. Eu não estou fazendo nada diferente, eu estou fazendo a multiplicação, porém retomando a pergunta ao contrário. E essa coisa do vai e volta parece que a matemática só tem um caminho, só a ida, e quando você indaga, você vê que não tem conhecimento aquilo, é só mecânico.* Esse ida e volta é um processo que dinamiza o pensar, dá movimento.

No questionamento sobre o que ela pensa sobre a possibilidade de instigar o aluno a pensar por meio da visualização nas tarefas, ela é pontual em dizer que vê essa possibilidade, estendendo para outras situações além das tarefas. Nesse momento, ela traz uma ideia da visualização reconstruída: Mas é que para mim a visualização não é só figuras né. Aí é que está. *É o entendimento daquilo, é a compreensão e ir além. Formar conjecturas e tal que dá o processo. Então na verdade é em tudo.* Ela entende que a visualização não requer uma imagem para que ela aconteça.

Sendo questionada sobre a sua prática diretamente, se ela, enquanto professora percebe a visualização, a docente é enfática em dizer que o “o tempo todo”, desde as correções, até as participações em sala. *Muitas vezes eu planejo mentalmente, já vou formulando e como eu falei lá na primeira entrevista, são coisas assim que são de acordo com as experiências que eu vou trazendo, as experiências do magistério, do 1.º ao 5.º que me ajudam muito, as experiências de frustações minhas.*

A visualização, no entendimento da professora, está em toda matemática, todo o dia. Ela não é ensinada, mas pode ser uma habilidade que precisa ser desenvolvida com os estudantes, de acordo com a professora: *eu acho que em todos, não talvez no mesmo patamar, são níveis diferentes, mas eu acho que em todos. Ele começa a olhar diferente, e não é só em matemática não, digo que é além. É além porque essa forma que eu trabalho, eu trabalho com todas as outras disciplinas no fundamental 1.*

Sobre a possibilidade de se levar a visualização como modo de pensar para a comunidade de professores, ela argumenta que antes será preciso o professor mudar sua postura de detentor do conhecimento: *mas tem que desconstruir tudo aquilo que eles acham que é ser professor, principalmente professor de matemática.*

6 CONSIDERAÇÕES

Esta tese traz no título a síntese da compreensão que se faz de “visualização matemática”: “A visualização como um modo de pensar na matemática” (e não “um modo de pensar a matemática”), isto é, um processo de pensamento interno à própria matemática e não externo, sobre a matemática, uma forma de pensar, com a dinamicidade de toda forma de pensamento, cuja “performance” está mais ligada aos processos não lógicos como os que caracterizam a intuição e a imaginação matemática.

A visualização, como foi concebida aqui, não necessariamente pretendeu explicitar a ontologia matemática para seu posterior conhecimento, e sim construir uma ontologia como consequência do conhecimento resultante da visualização, isto é, a ontologia é decorrente da epistemologia. Deste modo, a visualização possibilita atingir as relações que estão na essência dos objetos matemáticos, e não sua “real” constituição.

Para se construir a uma concepção de visualização, foi necessário um processo quase que indutivo, em que por meio das partes da pesquisa, o todo foi se revelando. E, um dos desafios foi o de costurar a parte teórica com a parte prática, pois teorizar essa relação é algo complexo, sendo que a abordagem epistemológica da visualização é intrínseca ao sujeito e, se constitui numa forma legítima de acesso ao conhecimento matemático.

Em alguns momentos durante a pesquisa, os capítulos pareciam ter vida própria, no sentido de que sozinhos respondiam alguns questionamentos. Porém, foi na relação entre eles que surgiram mais inquietações do que respostas. São dessas inquietações que emergem a curiosidade e o ímpeto de questionar e refletir sobre e na prática docente.

Retirando-se das partes da pesquisa para visualizar seu todo, as ideias iniciais já traziam uma pré-concepção de visualização, realizada em estudos anteriores. Desse modo, a proposta inicial era a de investigar o modo como pensam os estudantes em relação a visualização. Audacioso? Provavelmente. Como constatar se o estudante está ou não visualizando? Se a visualização fosse sinônimo de visão imediata, aí seria uma possibilidade, mediante a análise das tarefas por eles realizadas.

Porém, a partir da concepção de visualização como modo dinâmico do pensar, seria inviável sustentar um método para essa investigação, até mesmo, caso fosse possível, poder-se-ia então concluir que a visualização pode ser ensinada, existiria um passo a passo de como visualizar. Portanto, a pesquisa teria que mudar o foco ou a análise.

A visualização não é ensinada, mas ela pode ser aprimorada e quem pode fazer esse movimento é o professor. Por esse motivo que se decidiu que o caso da pesquisa seria o professor. Desse modo, reformulou-se o problema da pesquisa: **como se compreende a visualização matemática na prática docente de uma professora dos anos finais do ensino fundamental?** Para que essa compreensão não fosse singular, foi adotada como metodologia o estudo de caso, em que diferentes tipos de coleta de dados foram aplicados.

Mas, para que a análise não se restringisse a respostas do tipo sim ou não, um estudo mais aprofundado sobre visualização precisava ser desenvolvido, tanto para um esclarecimento para a pesquisadora, para a professora, como para o leitor.

Primeiramente, no intuito de esboçar uma compreensão de visualização, esta foi posta em questão com noções relacionadas como “visão”, “representação” e “percepção”, a fim de desconstruir possíveis pré-concepções para depois construir uma concepção adequada aos propósitos epistemológicos.

Discutiu-se a “visão” desde seu papel perceptivo diretamente relacionado com o olhar ou o enxergar, até a incorporação de compreensões, nesse ato, sobre o que é visto, constituindo-se num olhar reflexivo, pré-requisito para o processo de visualização. A isso pode-se acrescentar que, do ponto de vista epistemológico, “ver” o todo é ver as partes e seu contexto, ou melhor ver as partes e identificar o contexto onde elas estão inseridas. Assim, a visão reflexiva é contextual. Nesse caso, a visualização do todo consiste na "composição" das partes na tessitura de seu contexto. Essa composição é uma das formas mais importantes de construir o conhecimento do objeto matemático.

Qual o papel da representação na visualização? A visualização de um objeto pode ser "construída" partindo de diversas representações do mesmo e despindo-as de suas concretudes num processo dialético que permita revelar sua essência. A diferenciação entre um objeto e sua representação é um problema de natureza epistemológica e não cognitiva.

Uma possível abordagem para compreender como diversas representações de um objeto permitem sua visualização, é considerar um movimento de recomposição no intuito de obter uma "ideia" global do objeto (a dinamicidade do processo), embora não se consiga vê-lo no sentido tradicional. Um exemplo de destaque (que Duval não aborda) é a visualização de objetos quadridimensionais como o hipercubo ou a hiperesfera. Essa visualização requer, dentre outros, o recurso da analogia com objetos similares em dimensões menores, analogia que movimenta por comparação suas relações internas. Esse tipo de exemplos, revela que são as relações e não a materialidade os objetos da visualização.

Não é exclusividade da representação esse acesso aos objetos matemáticos. A imaginação e a intuição também são meios para esse acesso. De acordo com Lucimar Gusmão, "a imaginação e a intuição são 'mecanismos' que a experiência matemática nos dá para o acesso ao conhecimento dos objetos matemáticos, portanto há um certo 'empirismo' nesse processo que deve ser incorporado a essa concepção de matemática" (Gusmão, 2018, p. 111). De fato, Gusmão chama à atenção à necessidade de incorporar, numa concepção ampliada de matemática, ou melhor de pensamento matemático, os processos ligados à intuição, a imaginação, a visualização, etc.

Assim como na visualização, os objetos que são intuídos e imaginados não são os próprios objetos, ou seja, são os objetos enquanto entes relacionais e não enquanto entes concretos. São objetos dados por suas relações, suas definições, e essas podem ser apresentadas por meio de representações semióticas.

Como Duval aponta, a representação envolve atividades cognitivas profundas, sendo nesse processamento das representações que a visualização se faz presente como um meio intelectual de organização para, a partir dos dados cognitivos, construir o objeto da experiência. A visualização, para Duval, consiste em captar diretamente a configuração completa das relações e em discriminar o que é relevante nela.

No caminho de procurar as características epistemológicas da visualização, no campo da matemática, confrontando-as com a visão e a representação, buscou-se, na sequência, sua relação com a percepção. O fenômeno da percepção tem abordagens provenientes, dentre outras, da psicologia, da cognição e da fenomenologia. Uma de suas principais características é a capacidade de distinguir (discernir) por meio dos sentidos ou da mente. Assim, segundo Saes, a percepção é um conceito que ora pende mais para o sensível, ora mais para o intelectual.

São as representações as que estimulam a percepção dos objetos pelos sentidos (inclusive pelo sentido da imaginação). Porém, o processo inverso também é válido, isto é, o processo de perceber cria ou dá existência a uma representação do objeto. Isso pode ser entendido no contexto da ciência moderna, onde os aparelhos de observação e de medida dão concretude ao objeto observado, o que Bachelard chama de "fenomenotécnica".

Em contraposição a Aristóteles, René Descartes considera que a percepção não é uma atividade específica dos sentidos, sendo uma atividade intelectual. Ele afirma que "sentir é uma forma de pensar", o que vai ao encontro da nossa principal característica da visualização como sendo uma forma de pensamento. Kant reforça as ideias de Descartes afirmando que percepção é uma sensação acompanhada de consciência.

A percepção, em sua condição intelectual, cumpre também um papel de completamento do que é visto, o que a visualização vai herdar. Assim, quando se percebe uma figura, ela pode ser em si incompleta em algum sentido, mas a percepção impele a consciência para completar a figura pela forma mais simples, mostrando-a numa aparente "totalidade". A percepção vê uma totalidade compositiva que não necessariamente é a suma das percepções parciais de suas partes.

Apesar dessa similitude entre percepção e visualização, a principal diferença entre elas e que esta última dá acesso à essência do objeto, enquanto que a primeira, na medida em que não se pode desligar dos sentidos, dá acesso às aparências do objeto dadas pela sua concretude representacional. A percepção pertence ao campo dos sentidos, mesmo numa concepção ampliada como vimos, com sua forte carga cognitiva, enquanto que a visualização pertence ao campo da sensibilidade, uma das fases do epistêmico (a outra é a racionalidade).

Com o estudo da concepção de visualização de diferentes autores, percebeu-se o quão abrangente é o entendimento que se faz dela e que tem relação direta com a perspectiva em que se adota, seja metodológica como a Presmeg, epistemológica como o Giaquinto ou então pedagógico/didática, como a de Arcavi.

Para complementar este estudo foram revisadas, no capítulo 2, algumas abordagens da comunidade científica sobre suas concepções de visualização, a fim de evidenciar a polissemia do termo, e para esse efeito foram escolhidos três autores: Marcus Giaquinto, Abraham Arcavi e Norma Presmeg. A abordagem de Giaquinto revela-se numa perspectiva epistemológica, afim à nossa, enquanto que as de Arcavi e Presmeg trazem uma perspectiva pedagógica, numa vertente cognitiva a primeira e numa vertente metodológica a segunda. Com a narrativa dessas compreensões de visualização, foi possível delinear uma perspectiva colocando-a em contexto.

A abordagem de Giaquinto é mais filosófica do que pedagógica. Suas principais contribuições são suas reflexões sobre o papel da visualização na formação de conjecturas matemáticas, isto é, a identificação da verdade de um fato matemático questionando se a visualização é um meio de descoberta ou de demonstração. Sobre a descoberta, ele afirma que "descobre-se uma verdade passando a aceita-la de forma independente e de maneira epistemicamente aceitável". Esses estudos direcionam-se a uma discussão mais ampla sobre o "pensamento visual", estendendo-a para o "raciocínio visual" e seu papel epistêmico com a finalidade de atribuir também à visualização uma finalidade "demonstrativa" que não é de natureza lógica. Para ele, o raciocínio visual não é inconsciente como muitas vezes poderia ser o pensamento visual, naquele há uma intencionalidade, uma certa racionalidade na forma de pensar, consequentemente uma consciência (o que nos lembra Kant). Em palavras de Giaquinto: "A diferença entre descobrir uma verdade e demonstrar é uma questão de transparência: para demonstrar ou seguir uma demonstração, o sujeito deve estar ciente da maneira pela qual a conclusão foi alcançada e a solidez dessa maneira. Isso não é necessário para a descoberta" (GIAQUINTO, 2015, p. n.p).

A respeito da visualização como forma de descoberta de propriedades e relações matemáticas, Giaquinto pergunta sobre quais seriam os critérios de comprovação e confiabilidade correspondentes, propondo o concurso de uma experiência sensível que lhe atribua à descoberta uma "evidência epistêmica" (este último não é um termo utilizado por Giaquinto).

Finalmente, dentre os tipos importantes de descoberta que Giaquinto aponta, podem-se destacar a que ele chama de "descoberta de uma estratégia de demonstração". Segundo ele, o pensamento visual fornece ideias para um roteiro de demonstração o que nesta tese foi ampliado, no capítulo 3, para discutir como esse tipo de descoberta por visualização, a "visualização da forma de um argumento", pode estimular e propiciar a criatividade matemática. As discussões de Giaquinto sustentam o fato epistemológico de que "a visualização caminha junto com a racionalidade matemática", sendo indissociáveis.

Arcavi, de um ponto de vista cognitivo, trata de explicar o fenômeno de "ver o invisível" (incluindo o abstrato) pondo em evidência o que ele chama de "hardware visual" e a necessidade do uso de recursos tecnológicos que ampliem as nossas capacidades naturais de visão, complementando esse “ver” com um arcabouço teórico que denomina de “tecnologia cognitiva”.

Em Arcavi há ainda uma concepção restrita de visualização como extensão do visual, quando afirma que “Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre [...] imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas”. Nesse cenário, a visualização não aparece como personagem principal na ação de aquisição do conhecimento matemático nos processos educacionais, e sim como uma ferramenta, um modo facilitador.

Norma Presmeg, com o intuito de elaborar uma metodologia da visualização no campo educacional, começa introduzindo a noção de “imagem visual” diferenciando-a da de “imagem imediata” dada pela vista, noção que podemos entender como análoga à de “fato científico” introduzida por Poincaré em contraposição a “fato real” na pesquisa científica. No fato científico são incorporadas certas pré-concepções teóricas para delineá-lo, assim como na “imagem visual”, segundo Presmeg, deve-se identificar uma certa componente verbal subjacente que a estruture.

Nesse percurso metodológico de Presmeg, são introduzidos termos como “alunos visualizadores”, “professores visuais”, dentre outros, visando elaborar “métodos visuais” de solução de problemas. Essa classificação das pessoas (alunos e professores), como mencionado acima, o é em função do uso ou não dos métodos visuais considerados, o que já suporia uma objetividade do que é visual, objetividade que afasta-se da ideia de visualização como forma dinâmica de pensar. Aliás, Presmeg afirma que “Outro aspecto que se mostrou característico da solução de problemas de muitos visualizadores [...] foi a dificuldade de comunicar os conceitos de matemática. Os visualizadores tropeçaram na terminologia e não conseguiam se lembrar de termos-chave. Nesses estreitos, eles geralmente recorriam a gestos ou desenhavam diagramas”. Esse recurso a gestos e desenho de diagramas revela o ímpeto dinâmico (e subjetivo) dos visualizadores para solucionar o problema por visualização.

Aguçar a intuição dos alunos é uma dessas ações, rompendo com o rigor metodológico que enrijece o modo de pensar assim como o de ensinar.

Portanto, para esclarecer a concepção adotada nesse estudo, um percurso foi desenhado, de modo que levantasse reflexões para assim concretizar que a visualização é um modo para se pensar a matemática, mas está no processo, no ato de visualizar as relações entre os objetos, especialmente os que não são evidentes ou até mesmo não passíveis de um esboço.

Na seção final do capítulo 2, intitulada “Rumo à construção de uma concepção”, discute-se a que poderia ser o ponto de partida para uma tal concepção: o reconhecimento de que na ontologia do pensamento matemático existem os objetos e existem os processos, sendo a principal questão nesse contexto: como são visualizados os objetos e os processos? Exemplos de visualização de processos são os casos das “demonstrações visuais” de teoremas, como o foi, por exemplo, a prova original do teorema de Pitágoras na geometria. Nesse tipo de demonstração visualiza-se o teorema através de um processo dinâmico de reconfiguração geométrica.

Outro exemplo de visualização de um processo, é o da interpretação de uma fração do tipo 4/3. Nela há uma componente parte/todo e outra de decomposição em frações mais simples envolvendo o “processo” subjacente à operação (função) de soma: 3/3 + 1/3 ou 2/3 + 2/3. Ambas são soluções visualizáveis. Neste caso algébrico há uma analogia epistémica entre o processo da reconfiguração geométrica no teorema de Pitágoras e o processo de decomposição algébrica da fração.

Às vezes, para visualizar um objeto deve-se movimentá-lo, como o que permite, por exemplo, a geometria dinâmica, mas essa dinâmica de movimentação é uma atribuição externa ao objeto. No entanto, para visualizar um processo é necessário pôr em evidência sua dinâmica interna, intrínseca.

Porém, essa concepção de visualização ainda não se apresenta em sua totalidade, pois ao colocar a visualização como um modo dinâmico do ato de pensar, outros modos sensíveis de acesso ao conhecimento emergem, como a intuição e a imaginação, que em relação com a visualização “alimentam” a criatividade.

São as habilidades emergentes da experiência matemática, como a intuição, a imaginação e a criatividade que se constrói como acesso, junto com a visualização, para as relações que constituem os objetos matemáticos. Ou seja, o olhar parou de se direcionar para o objeto para voltar-se a sua estrutura dada pelas relações que as definem.

O capítulo 3 é dedicado a discutir o papel da sensibilidade matemática, como entendida nas seções anteriores, na visualização e sua relação com a experiência matemática. Começa-se colocando que, do ponto de vista do pensamento matemático, com sua dinamicidade que alimenta a sensibilidade, as definições, que delimitam os objetos matemáticos resultantes dos processos de visualização, devem ser o ponto de chegada da sua construção e não o ponto de partida. Nesse caso, a definição é resultante de uma síntese.

O conhecimento matemático obtido através da sensibilidade matemática, mediante processos de visualização, intuição, imaginação, pode ser entendido como um “conhecimento estético” e associado a um tipo de experiência, a experiência estética que, no caso da matemática entende-se como “experiência matemática”. Mesmo a matemática sendo insistentemente associada à razão, faz-se importante destacar que a emoção [traduzida em sensibilidade] também é uma dimensão da aquisição do conhecimento matemático, e essa se dá pela experiência matemática.

Do ponto de vista histórico, na geometria grega a sensibilidade matemática se faz presente (e formalizável) na sua metodologia axiomática traduzida em construtibilidade. Porém, a partir do século XVII, com o advento da geometria analítica, há uma ruptura com esse apelo construtivo da matemática dando prevalência aos processos de aritmetização (uso de coordenadas), em que as intuições geométricas transformam-se em intuições numéricas, modificando os mecanismos cognitivos de visualização.

No contexto das demonstrações matemáticas, apesar de seu apelo fortemente lógico, Gierdien faz reparar na diferença entre “provas que provam” e “provas que explicam”, tendo estas últimas um forte apelo estético, pois esclarece, ou melhor ilumina, o resultado que está sendo demonstrado. No ensino de matemática, uma prova que explica é uma forma de discurso formal em que a visualização, como parte do processo de prova, pode levar a insights e conexões entre as ideias matemáticas envolvidas. Uma prova que ilumina deve ser inspiradora de desenvolvimentos semelhantes ou até de possíveis generalizações.

Visualizar com as lentes da intuição e/ou da imaginação é o que enriquece a experiência matemática, pois esse modo de visualizar o que se concretiza com os olhos da mente, por meio das relações, é o que leva à percepção da beleza matemática, beleza traduzida em harmonia e ordem. Na esfera pedagógica, as nossas capacidades de intuição e de imaginação propiciam um olhar do estudante para a matemática diferente daquela estritamente calculista e técnica, manifesta muitas vezes em contextos numéricos e algébricos, pois a beleza não se apresenta nos resultados, mas sim nos processos.

A constatação, na prática, de que o desenvolvimento da sensibilidade matemática dos estudantes em sala de aula é uma forma de experienciar a matemática, não é tarefa fácil, para isso é importante que o professor também “mergulhe” nessa dinamicidade. Uma possibilidade é o de explorar pedagogicamente as estruturas das provas que explicam quando se faz uma abordagem formal, pois essas iluminam o pensar matemático. Outra possibilidade é a “manipulação” dos objetos geométricos para capturar sua forma antes de qualquer propriedade concreta, o que alimenta a intuição sobre esses objetos. É exatamente isso que se pretende com a visualização: “ver” a forma, mais do que o conteúdo.

Essas habilidades pensadas na perspectiva da visualização vão resultar nas descobertas realizadas pelos próprios estudantes, e eles, se sentindo parte do processo, estarão construindo base para as possíveis criações. Assim, a criatividade matemática ganha vida, posto que o poder argumentativo e criativo do estudante o torna apto para levantar hipóteses, conjecturar e pensar em diferentes modos de resolver um problema.

Logo, a concepção de visualização para esse estudo se amplia, pois passa a incorporar diversos elementos que também dão acesso ao pensamento matemático, como a intuição e imaginação, aperfeiçoando a criatividade matemática.

Como mencionado, para o estudo de caso, diferentes dados foram coletados. Apenas a entrevista não seria suficiente para trazer as compreensões que a professora faz sobre a visualização. Por esse motivo, foram realizadas observações, tanto com o olhar para os reflexos das ações da professora para com o aprendizado dos estudantes, como a prática docente de fato. A realizações das tarefas também deram um direcionamento para esse olhar da prática.

Em relação a primeira entrevista, a professora transitou, no entimento da visualização, entre a visão, a percepção e a representação, direcionando para a experiência num sentido de manipulável, cinestésico. Porém, é importante destacar que a essência desse entendimento, mesmo este não sendo o mesmo do adotado neste estudo, emerge na busca em dar significado aos conceitos, fazer com que seus alunos olhem para a essência e não apenas a aparência.

Esse diálogo e essa troca com a professora a fez refletir sobre a sua prática, como ela mesma menciona *(...) nem sempre me importa a resposta dele em si, mas o processo dele, ele pode ter até errado a resposta, mas o processo ele fez, uau, valeu!* Ela apresenta um olhar para o processo, e principalemnte para o significado. Inclusive, significado foi uma palavra muito usada por ela.

Na observação 1, que teve o propósito de analisar a prática docente pelas ações dos estudantes, foi possível observar a articulação da professora em construir os conceitos e não apenas ditá-los é uma das atitudes docentes que pode direcionar o aluno para a experiência matemática, conduzida pela intuição, imaginação e visualização, promovendo a criatividade e saindo do tecnicismo

Na observação 2, que teve o propósito de analisar a prática docente pelas ações dos estudantes, muitas reflexões emergiram, como a importância em provocar o estudante a ser parte do processo de construção de um conceito, seja a descoberta movida pela intuição, ou a criação movida pela imaginação, ou então estimular a participação por meio de inquietações levantadas pela professora.

Outra reflexão foi sobre a relação com o material utilizado para o trabalho com os números inteiros, em que ele, por si só não era suficiente para que o significado sobre as operações com números inteiros fosse construído, pois os questionamentos, o encaminhamento ao levantar hipóteses, são precedentes que também se fazem importantes nesse processo, e isso a professora realizava com maestria.

As análises das tarefas propostas aos estudantes é que dão corpo ao diálogo da segunda entrevista. Portanto, buscando levantar uma resposta para a pergunta norteadora desse estudo: *como se compreende a visualização matemática na prática docente de uma professora dos anos finais do ensino fundamental?* são tecidas algumas considerações.

Primeiramente, a professora entende como algo visual, de imediato aos olhos, e que pode ser construído ou desenhado no papel, logo, se confunde com a visão e a representação. Porém, com o caminhar de todo o período da pesquisa em campo, a professora expande essa compreensão, ou melhor dizendo, não tem uma concepção. Esse é o melhor resultado que poderia se esperar, pois como dito pela própria docente: *eu tenho me indagado mais e aí me deixo confusa. Eu acho que estou meio que nem aluno, você coloca algumas premissas, aí vem alguém e faz umas indagações e você diz pera aí, está me incomodando. Daí tira você do lugar, do cômodo, e agora eu estou tentando construir.*

Ela está descontruindo, se despindo das concepções que tinha. Ou seja, ela está refletindo sobre, percebendo como o resultado acaba levantando outras questões e esse é o processo da construção e reformulação de sua prática. Por último, ela faz o levantamento de algumas hipóteses: *É o entendimento daquilo, é a compreensão e ir além. Formar conjecturas e tal que dá o processo. Então na verdade é em tudo.* Ela entende que a visualização não requer uma imagem para que aconteça. Portanto, a visualização não é conceitualizável, mas sentida, vivenciada, experienciada, dinâmica e não podendo ser colocada numa definição.

As possibilidades de pesquisas futuras, com as compreensões de visualização criadas neste estudo podem ser ampliadas para ressignificação da visualização na formação de professores, evidenciando a validade desse modo de pensar a matemática. Também pode ser aprofundada sob a ótica para os estudantes, a partir de propostas que desenvolvam a sensibilidade matemática dentro da própria visualização.

Portanto, esse estudo não se esgota, pois se o ensejo está em gerar inquietações, questionamentos e o diálogo sobre a visualização matemática e a visualização no ensino de matemática, muitos caminhos e perspectivas podem ser consideradas nesse percurso.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. Tradução de Alfredo Bosi e Ivone Castilho Benedetti. 5ª. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007. 1014 p.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 52, n. 3, 2003. 215-241. Disponivel em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1023%2FA%3A1024312321077.pdf>. Acesso em: abril 2020.

ARCAVI, A. Revisiting Aspects of Visualization in Mathematics Education. **Rivista dell'Unione Matematica**, v. 8, n. 3, p. 143-160, 2015. Disponivel em: <http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3_143_0>. Acesso em: 2020.

ÁVILA, G. Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 5, p. 4, 1984.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. 9ª. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2011. 316 p.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação:** Uma intridução à teoria e aos métodos. [S.l.]: Porto Editora, 1994. 335 p.

BURATTO, I. C. **Historicidade e Visualidade: Proposta Para Uma Nova Narrativa na Educação Matemática**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 243. 2012.

CAMINHA, I. D. O. A cegueira da visão segundo Merleau-Ponty. **Revista de Estudos Fil[osicos** , São João del-Rei, n. 13, p. 63-72, 2014. Disponivel em: <https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/revistaestudosfilosoficos/art5%20rev13.pdf>. Acesso em: janeiro 2020.

CIFUENTES, J. C. Fundamentos Estéticos da Matemática: da habilidade à sensibilidade. In: BICUDO, M. A. V. **Filosofia da Educação Matemática**. Brasilia: Plano, 2003. p. 59-79.

CIFUENTES, J. C. Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 46, p. 55-72, 2005.

CIFUENTES, J. C. Do Conhecimento Matemático à Educação Matemática: Uma "Odisséia Espiritual". In: CLARETO, S. M.; DETONI, A. R.; PAULO, R. M. **Filosofia Matemática e Educação Matemática:** compreensões dialogadas. Juiz de Fora: UFJF, 2010. p. 13-31.

CIFUENTES, J. C. O "Salto Arquimediano": um processo de ruotura epistemológica no pensamento matemático. **Scientiae Studia USP**, São Paulo, v. 9, p. 645-667, 2011. Disponivel em: <https://www.scielo.br/pdf/ss/v9n3/v9n3a10.pdf>. Acesso em: Março 2019.

CIFUENTES, J. C. Dos conteúdos de ensino à dinâmica do conhecimento: uma aventura pedagógica na “Floresta Matemática”. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 11, n. Filosofia da Educação Matemática, p. 47-66, 2016.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G.; ESTEPHAN, V. M. **Apreciar la Matemática vs. Comprender la Matemática:** Un Debate Didáctico. V Reunión de Didáctica Matemática del Cono Sur. Santiago: Anales de la V Reunión de Didáctica Matemática del Cono Sur. 2000. p. 21.

CIFUENTES, J. C.; SANTOS, A. H. D. DA PERCEPÇÃO À IMAGINAÇÃO: ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS E ONTOLÓGICOS DA VISUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA. **Revista Educere Et Educare**, Cascavel, v. 15, n. 33, p. 21, 2019. Disponivel em: <file:///C:/Users/Alessandra/Desktop/22530-87783-1-PB.pdf>. Acesso em: abril 2020.

CIFUENTES, J. C.; SANTOS, A. H. D.; CHYCZY, L. **Da geometria de Eculides à geometria euclidiana:** a gênese das geometrias modernas. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: SBEM. 2013. p. 1-8.

CIFUENTES, J. C.; SANTOS, A. H. D.; CHYCZY, L. **DA GEOMETRIA DE EUCLIDES À GEOMETRIA EUCLIDIANA:** A GÊNESE DAS GEOMETRIAS MODERNAS. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: SBEM. 2013. p. 8.

CIFUENTES, J. C.; SERENATO, L. J. **A Interdisciplinaridade entre Matemática e Arte**. VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul. Águas de Lindoia: Anáis da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul. 2006. p. 13.

D'AMBROSIO, U. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. V. **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 97-115.

DUVAL, R. **Representation, vision and visualization:** Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Morelos: [s.n.]. 1999. p. 3-26.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreesão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano:** Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, p. 118-138, 2012a. Disponivel em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118>. Acesso em: fev. 2020.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b. Disponivel em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: mar. 2020.

DUVAL, R. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. **REVEMAT**, Florianópolis, p. 1-78, 2016. Disponivel em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p1>. Acesso em: Julho 2020.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FILHO, B. M. D. A. **PROCESSOS DE CONVERSÃO DE REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL PARA LINGUAGEM MATEMÁTICA: ANÁLISE COM BASE NA TEORIA DA RELEVÂNCIA**. Tubarão, p. 119. 2013.

FILHO, J. C. A construção do mundo através dos cinco sentidos. **Revistaplaneta**, 01 Junho 2007. Disponivel em: <https://www.revistaplaneta.com.br/a-construcao-do-mundo-atraves-dos-cinco-sentidos/>.

FLORES, C. R. **Olhar, saber, representar:** sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa, v. 4, 2007. 190 p.

FLORES, C. R. Cultura Visual, visualidade, visualização matemática: balanço provisório, propostas cautelares. **Zetetikê**, Campinas, v. 18, p. 271-294, 2010. Disponivel em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646665>. Acesso em: janeiro 2020.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Revista Edcuação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 14, p. 31-45, 2012. Disponivel em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/8008/6827>. Acesso em: abril 2018.

GIAQUINTO, M. Visualizing as a Means of Geometrical Discovery. **MInd & Language**, 7, 1992. 382-401.

GIAQUINTO, M. The epistemology of visual thinking in mathematics. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2015. Disponivel em: <http://plato.stanford.edu/archives/win2015/entries/epistemology-visual-thinking/>. Acesso em: abril 2020. Não paginada.

GIERDIEN, M. F. From ‘proofs without words’ to ‘proofs that explain’ in secondary mathematics. **Pythagoras**, p. 53-62, June 2007.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, p. 277. 2001.

GUILLEN, M. **Pontes para o infinito:** o lado humano das matemáticas.=. Tradução de Jorge da Silva Bramco. Lisboa: Gradiva, 1987.

GUSMÃO, L. D. **A elaboração de uma "epistemologia da imaginação e da intuição" no campo da matemática e implicações para a educação matemática : diálogos com Henri Poincaré e Gaston Bachelard**. Tese de doutorado (tese em educação matemática) - PCM UEM. Maringá, p. 159. 2018.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016. Disponivel em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1516-73132016000200465&lng=en&nrm=iso&tlng=pt>.

HUIZINGA, J. **O declínio da Idade Média.** 2.ª. ed. Lisboa/Portugal e Rio de Janeiro/Brasil: Editora Ulisseia, 1924.

JANZEN, E. A. **O Papel do Professor na Formação do Pensamento Matemático de Estudantes durante a Construção de Provas em um Ambiente de Geometria Dinâmica.** Universidade Federal do Paraná. Curitiba, p. 194. 2011.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Arimtmética e Álgebra para o século XXI**. 4ª. ed. Campinas: Papirus, 2001. 176 p.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o Ensino de Geometria Euclidiana. **Informática na educação: teoria e prática**, Porto Alegre, v. 16, p. 149-160, 2013. Disponivel em: <https://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/26104/25946>.

MACHADO, R. B. et al. Aporética do Infinito: [des]caminhos na matemática e na pintura. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 6, n. 1, p. 283-317, 2013.

MARTINS, G. A. Estudo de Caso: Uma reflexão sobre a aplicabilidade em pesquisas no Brasil. **RCO – Revista de Contabilidade e Organizações**, Ribeirão Preto, v. 2, p. 8-18, 2008.

MERLEAU-PONTY. **O visível e o invisível**. São Paulo: Perspectiva, 2003. 270 p.

PAULO, R. M. Diagramas: significado espistemológico e recurso na produção do conhecimento matemático. In: SÕNIA MARIA CLARETO, A. R. D. R. M. P. **Filosofia Matemática e Educação Matemática:** compreensões dialogadas. Juiz de Fora: UFJF, 2010. p. 41-51.

PELAES, M. L. W. Uma reflexão sobre o conceito de criatividade e o ensino da arte no ambiente escolar. **Revista Educação**, Guarulhos, v. 5, n. 1, p. 13, 2010.

PITKIN, H. F. Representação: palavras, instituíções e ideias. **Lua Nova: Revista de Cultura e Política**, São Paulo, p. 15-47, 2006. Disponivel em: <http://www.scielo.br/pdf/ln/n67/a03n67.pdf>. Acesso em: dezembro 2019.

POINCARÉ, H. **O Valor da ciência**. Tradução de Mari Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

PONTE, J. P. D. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, p. 1-22, 2006.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In: BOERO, A. G. &. P. **Handbook of research on the psychology of mathematics education**. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p. 205-235.

PRESMEG, N. Contemplating visualization as an epistemological learning tool in mathematics. **ZDM, The International Journal on Mathematics Education**, v. 46, n. 1, p. 151-157, 2014.

PRESMEG, N. C. Visualization and Mathematical Giftedness. **Educational Studies in**, v. 17, p. 297-311, Agosto 1986a. ISSN 3.

PRESMEG, N. C. Visualisation in High School Mathematics. **For the Larning of Mathematics: an international journal of mathematics education**, Montreal Quebec, v. 6, p. 42-46, Novembro 1986b. ISSN 3. Disponivel em: <https://flm-journal.org/index.php?do=show&lang=en&showMenu=6%2C3>. Acesso em: novembro 2017.

PRESMEG, N. C. Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos. **Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas SUMA**, Zaragoza, p. 17-22, 1999. ISSN 32. Disponivel em: <http://revistasuma.es/revistas/32-noviembre-1999/>. Acesso em: junho 2020.

SAES, S. F. D. A. Percepção e imaginação. In: CHAUI, M.; FILHO, J. S. **Filosofias:** O prazer do pensar. São Paulo: Martins Fontes, v. 6, 2010. p. 75.

SANTOS, A. H. D. **Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização**. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, p. 98. 2014.

SANTOS, A. H. D. et al. **UMA ANÁLISE DO PENSAMENTO MATEMÁTICO CRIATIVO**. Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM. Londrina: SBEM Paraná. 2019. p. 11.

SANTOS, D. V. C. D. Acerca do conceito de representação. **Revista de Teoria da História**, Goiânia, v. 6, n. 2, p. 27-53, 2011. Disponivel em: <https://www.revistas.ufg.br/teoria/article/view/28974>. Acesso em: novembro 2019.

SHINTANI, R. M.; PAULO, R. M.; MONDINI, F. Menos com menos dá mais? **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM PESQUISA: PERSPECTIVAS E TENDÊNCIAS**, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 546 - 560, 2021.

SILVA, V. R. D. A construção do fenômeno pela (re)construção do pensamento: uma relação de complexidade. In: DESAULNIERS, J. B. R. **Fenômeno:** Uma teia de relações. Porto Alegre: ediPUCRS, 2000. p. 69-85.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. **Interacções**, v. 8, n. 20, p. 181-207, 2012.

VALE, I.; BARBOSA, A.; PIMENTEL, T. **Tarefas para promover a criatividade em matemática**. Encontro de Investigação em Educação Matemática. Sesimbra: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. 2014. p. 121-134.

YIN, R. K. **Estudo de Caso:** Planejamento e Métodos. Tradução de Daniel Grassi. 2ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ANEXOS

ANEXO 1 - TRANSCRIÇÃO ENTREVISTA 1

1) Qual a sua formação?

Sou formada em Licenciatura em Matemática e fiz magistério.

2) Área de atuação?

Aqui na prefeitura de Curitiba eu atuo de 6º ao 9º com a área de matemática, porém em outro município em trabalho do 1º ao 5º ano com todas as disciplinas.

3) Enquanto professora, o que mais te satisfaz, 6º ao 9º ou 1º ao 5º?

Em área específica 6º o 9º porque estou trabalhando a minha área, porém, do 1º ao 5º abre meu leque de possibilidades, de não olhar simplesmente matemática como uma situação algébrica e ponto. O que faz o diferencial da minha aula do 6º ao 9º é minha experiência do 1º ao 5º. Então, eu não posso dizer que gosto mais de um ou mais de outro, querendo ou não, tudo o que eu passo na outra área para planejar, português, história, geografia abre meu leque, e eu tento levar para minha disciplina, outras áreas, a forma como que eu trabalho matemática. Primeiro eu trabalho conceito, a ideia, a estrutura e coloco isso nas outras disciplinas.

4) E o vice-versa também acontece?

Sim, eu não tenho como abandonar um com o outro, ou dizer, aqui não cabe isso. Pelo contrário, é isso que justamente enriquece as situações de sala ou até mesmo assim: meu aluno de 7º não entende tal coisa, mas por que ele não entende? Porque ele não tem o conceito formado. E por que ele não tem o conceito formado? Geralmente porque não foi trabalhado essa estrutura de construir o conceito. Então eu trabalho dentro das minhas disciplinas sempre tentando construir o conceito, tentando mostrar pra ele que aquilo não é simplesmente faz daquele jeito e ponto, tem o motivo, qual é a razão? Vamos atrás dessa razão. Primeiro eu mostro a razão, depois se puder fazer outro processo que facilite teu trabalho..., mas isso só o processo quando você percebe que existe certos padrões, se existem certos padrões, vamos facilitar o trabalho.

5) Tempo de serviço dedicado aos anos finais do ensino fundamental?

6º ao 9º são 15 anos. 1º ao 5º são 25 anos.

6) Como você vê o ensino da matemática hoje?

Falho. Falho em todos os sentidos. Falho na estrutura que num 1º e 2° ano não tem material manipulativo em sala para cada aluno, o que às vezes tem é uma, duas, três caixas para serem emprestadas. Uma sala de 1º e 2º ano devia ter uma parede inteira de materiais manipulativos, não só de alfabetização e não exclusivamente matemática. Porque a matemática está inclusa nas noções, coordenadas, tamanho, comparações... E esses alunos vem com essas falhas justamente por não terem manipulado certos materiais, então ele não tem aquele conceito construído. Eu posso falar divisão, algebricamente, ensino passo a passo, esse passo a passo ele até faz, mas no dia seguinte ele não lembra e não fez referência nenhuma. Porque, se você pergunta pra ele, ou fala pra ele dividir, o que que a maioria faz: diminui. Ele não tem a ideia que dividir é repartir em partes iguais. Ele ainda tem a coisa assim, vou dividir, vou ficar com menos. Não está totalmente errado, porém, o menos é o que te sobra, não o que ficou para cada um. Não existe só divisão exata, então você tem que estar trabalhando essa ideia de ter que ficar repartindo, quanto vai ficar para cada grupo, o que vai restar. Então assim, até quando você trabalha isso, não tem porque num primeiro ano trabalhar algebricamente, porém ele tem que ter essa noção, quantos grupos deu? O que sobrou? O que eu tinha? Mas se sobrou, eu usei quantos? É toda uma noção de vai e vem e isso está falho em todos os sentidos. É no português, é na matemática... Outra questão da falha também é um rol de conteúdos enorme, onde não se dá conta. Vou dar um exemplo, o de matemática do quarto ano de Curitiba: no primeiro trimestre está lá adição, subtração, multiplicação, divisão, noções de medida... entre outros. Tudo isso no 1º trimestre. O aluno não dá conta, e nem o professor dá conta. Aí você vai ver a ordem que tem que estar trabalhando no 4º ano, eles já têm que estar sabendo a centena de milhar, mas ele não está conseguindo entender nem a centena ainda no 4º ano. Então nós temos um rol de conteúdos...

7) E do 6ª ao 9º qual você vê?

O rol de conteúdos sempre pesou, e eu nunca pude olhar pra ele, pois se eu olhar pra ele eu entro em desespero, eu olho assim: não vou dar conta dele, o que é o principal? O principal é isso, então eu vou fazer isso. Qual a noção que ele tem que ter? E algumas delas eu vou tentando colocar “entre”, não especificamente vou parar e dar aquilo, mas eu vou tentando já a linguagem matemática correta, a simbologia correta, o uso do igual. Porque assim, o aluno chega com essa coisa que tudo na matemática é igual, e não é. Então são símbolos que ele nem entende. Se você colocar um “vezes” e “x” de repente é um x, é um número, mas por que? Porque já foi usado de maneira errada. E essas falhas vão aumentando. Nomenclatura errada, isso essa é uma coisa que tem em todas as disciplinas. O ensino já com a nomenclatura errada, uma palavra: continha. Eu não gosto de usar essa palavra, acho que é tão minimizar uma operação, você desabona a função da operação. Parece ridículo, mas eu gosto de usar a palavra operação. Mais quais são as operações que eu uso: adição, multiplicação, subtração, divisão. Aí alguém fala: +, isso não é operação, isso são símbolos usados para representar uma adição. O + um símbolo e nem sempre ele é esse significado, como também o + do 7º ano já entra com o significado de positivo. Então se eu falar que tudo aquilo +, como meu aluno vai entender positivo e negativo, como meu aluno vai entender que eu estou adicionando um número negativo com outro, se não tem o sinal de + ali? É um “e” três negativos e quatro negativos, esse “e” no português significa o que? Acrescentar.

8) Como você se percebe ensinando matemática?

Uma pessoa que quer ensinar, mas eu me frustro, porque parece que eu estou entrando numa batalha todos os dias, numa guerra todos os dias. E não é uma guerra de confronto, não vou confrontar com meu aluno, me estressar. É um confronto de conhecimento. (Continua)

9) Enquanto professora, quais são as maiores dificuldades encontradas no ensino de matemática?

10) Quais são as maiores realizações que você vivencia enquanto professora?

11) Como você compreende a frase “visualização matemática”?

Pelas experiências que eu estou tendo agora, nesse momento, talvez seja a questão mesmo de experimentar, pegar. Então vou trabalhar fração, divisão de fração, então vou pegar a régua fracionária, vou pegar por exemplo o $1/2$ divididos em duas partes, mas o que é $1/2$? Primeiro ele tem que visualizar que o $1/2$ é em relação ao inteiro. Então não adianta eu ir lá e pegar só $1/2$, vou ter que pegar uma barra que é 1 inteiro, o $1/2$, pra visualizar que aquele $1/2$ é sempre em relação ao inteiro. Depois, se eu for trabalhar a divisão, eu vou repartir ele no meio, então tá, pego lá uma peça que cabe exatamente 2, mas o que é aquilo, o que representa? Então tá, agora você tem uma peça nova, tem três peças na mão, o que significa cada uma? Daí ilustrar, a materialização desse significado, que aquela peça menor que é $1/_4$ representa a divisão da metade da metade, mas em relação ao inteiro, ela é $1/_4$. E daí trazer isso para o dia a dia dele.

12) Você falou a palavra experimentar? Então você acha que a visualização está relacionada com o ato de "experienciação"?

Isso, e daí falha. Por exemplo eu tentei fazer isso na minha turma de sétimo ano só que a escola tem no máximo duas caixas e meia, não tem como proporcionar uma experiência dessa pra um grupo de cada quatro alunos. Cada um deveria experimentar isso no máximo de quatro alunos em cada grupo. E esses alunos, já não tinham que ter experimentado isso já lá anteriormente? Já! Só que pergunta quantos experimentaram isso. Quase anda.

13) Com a concepção que você tem sobre a visualização matemática, dada na última questão, fale sobre ela, como modo de conhecer.

Pra mim ele já é um modo de conhecer, então...

14) De que forma você a vê como modo de conhecer?

De conhecimento, conhecer vem de conhecimento. Quando você faz essas experiências você obtém um conhecimento, e aquele conhecimento ninguém te tira. Aquilo fica. É memória visual, auditiva, tátil. Isso vai além de colocar um registro escrito. Então você até pode ir depois para o registro escrito, mas aí você já tem o conhecimento formado com todas aquelas experiências que teu corpo gravou.

15) E você sempre vê a necessidade de um registro escrito?

Com o tempo sim, dentro da minha formação aparentemente se dizia, as maneiras de aula, as linhas, que não teria necessidade de registrar, mas não, você tem que em algum momento registrar. Você pode fazer uma aula expositiva de qualquer matéria, por exemplo, geografia, trinta minutos de aula expositiva, se você não anotar nada daquilo, fazer uma anotação, orientar como fazer uma notação sobre aquilo, perdeu tudo. Tem que estar tudo junto, tem aluno que vai ter aquela memória auditiva, mas nem todo aluno tem a memória auditiva. Tem aluno que tem a memória visual, que é anotando, aí sim vai fazer aquele feedback. Tem aluno que tem a memória tátil. Então precisa de tudo isso, precisa anotar, sempre fazer um feedback. Na verdade, eu sou contra muita exposição e depois fazer a anotação porque daí dá a impressão que quebrou, que elas não fazem parte uma da outra. Então gosto de sempre trabalhar com a anotação, falou tal coisa, trouxe o conceito, anota, vamos para o exercício, anota, faz o cálculo mental, anota. São anotações, mas tem que ter alguma anotação.

16) E esse registro que você fala da importância deles, seguindo do exemplo das réguas de frações que você mencionou, esse registro precisa ser em que tipo de linguagem?

A gente registrou geometricamente, a gente fez o desenho. Então eu fiz o desenho, não vou fazer um monte, mas vou fazer um pra ter a noção. Então no desenho, uma das coisa que eu tomo cuidado é que não pode ser qualquer medida, eu via muito isso em fração e ainda vejo nos cadernos com outros professores que dá uma medida lá, nem fala a medida, e faz o aluno dividir, dividir ..., porém o meu inteiro tinha que ser padrão. Então se eu vou trabalhar com uma barra medindo doze, eu vou trabalhar só com divisões onde cabe aquele doze e ele consiga desenhar aquilo. Então eu tomo esse cuidado, o sétimo eu acabei não fazendo isso, mas com meu quinto e meu quarto eu faço isso. E digo, meu inteiro não pode ter qualquer tamanho, se eu comecei com aquele inteiro, eu tenho que terminar até o final com meu inteiro daquele, não importa quantas divisões tem. Então eu já separo exercícios onde aquelas divisões vão dar certinho no caderno quadriculado, que facilita pra ele, é um cuidado, que não bagunça a cabeça dele. Ali era na forma de desenho, mas as vezes é tabela, tem outras formas de representar, até mesmo de desenho, agrupamento.

17) Então são formas de representação?

Representação, e não necessariamente são algébricas.

18) Mas essa passagem da representação do objeto você vê necessária?

Sim, ela tem que ser natural, ela não tem que ser dolorida. Ela tem que estar junto, então assim as experiências com as réguas, vou para o desenho e depois eu já vou para a notação. O que aquela notação significa? Uma parte de dois. Adianta eu ensinar ele ler $1/2$ e não ter significado? Isso é $1/2$, e qual o significado para o aluno? Nada. Então eu, quando coloco no início uma parte de dois, esse é o significado, esse 1 que está aqui, esse tracinho, esse 2, tudo tem um significado. O 2 significa em quantas partes o inteiro foi dividido, o 1 é quantas partes eu estou considerando disso. E que o $1/2$ não são dois números, é um número. Desde coisas básicas, porque eles enxergam dois números, mas não é, e você vai, pergunta, reflete, é quanto?

É um número só. Mas por quê? O que ele significa? Uma parte de dois. Mas isso significa o que? É o meu inteiro? Não, não é inteiro, é metade.

19) Isso causa erros conceituais inclusive no ato de comparações de frações, em que eles enxergam os algarismos e não o número certo?

Isso, que daí eu digo pra eles assim, para os maiores né, 7º, 8º e 9º ano, vocês vão muito para o visual, visualmente vocês estão enxergando que eles são algarismo maiores que os outros, porém, na hora do conceito, eles são iguais. Por exemplo, $^{2}/_{4} = ^{1}/_{2}$, $^{3}/_{6} = ^{1}/_{2}$, mas eles estão só visualizando o 3 e comparando com o 2, e o 2 comparando com o 1, sendo que eles tivessem esse conceito que são 3 partes de 6 e que 3 partes é metade de 6, então é igual. Não precisava elaborar um monte de exercícios, um monte de coisas... Pois eu sou contra isso, um exagero de exercícios sem fundamentação. Aquela lista enorme de exercícios, para mim, isso é uma tortura. É uma tortura para mim e para o aluno, porque não vai levar a nada. Ele vai mecanizar o ato, e muitos alunos vem com esse ato mecanizado e não sabem o motivo. Eu estou passando por essas coisas por exemplo assim: colocar o zero no quociente. Ou colocar o zero para continuar a divisão. Mas eles têm significados diferentes. E muita gente ensina, eu venho percebendo isso, ensina assim: ah, coloca um zero aqui, deu um zero aqui, coloca lá, coloca lá no resultado né... não fala nem quociente, fala coloca lá no resultado. Mas no dia da prova quer que o aluno use a palavra quociente. Mas no dia a dia o professor não usa quociente. Aí coloca lá, mas aí você pergunta para o professor por que você está colocando lá? Ah não sei, me ensinaram assim eu coloco. Ele também não percebe, num ato por exemplo, ele não está ensinando centena, dezena e unidade, a quanto tempo para o aluno, desde o primeiro dia? Mas o professor também não tem consciência que se eu colocar aquele zero lá é porque talvez eu não dividi a unidade. Então se eu tinha zero unidade, eu também tinha que dividir a unidade, então eu vou continuar com zero unidade. Significado! Dar significado pra coisa. Então falta isso, falta também conhecimento específico para esses professores formados. E, posso estar falando a maior besteira do mundo, mas essas coisas, desde que foi intitulada que o professor que faz pedagogia, você faz só pedagogia e você está apto a dar aula do 1º ao 5º todas as matérias, não está não. Você tendo lá uma disciplina de matemática uma vez por semana né, nem lembro o nome das disciplinas que tem, mas vamos dizer metodologia da matemática, não fiz curso de pedagogia, mas geralmente eles colocam lá, metodologia da matemática, metodologia do português, vai dar base pra ele? Não. Ainda o que dá a base não é a faculdade, o que dá a base pra mim não é a faculdade de matemática, nas minhas aulas, o que dá base pra mim foi um conjunto, mas principalmente o magistério. Foi ele que me deu estrutura para perceber todas essas estruturas de pensamento, da ordem, a questão do erro, a questão assim não o erro simplesmente "ah então eu não vou corrigir", ele tem que ter esse feedback.

20) Então você pensa que talvez para os professores do 6º ao 9º, que tem uma formação específica, falte conhecimento matemático, ou falte formas dele pensar e estruturar suas aulas para que esse aluno acesse esse conhecimento matemático, ou os dois, ou alguma outra coisa?
Para específico do 6º ao 9º não falta conhecimento matemático, o que falta é: como estruturar isso para os alunos, como o conhecimento se forma para o aluno. Eu tenho que trazer o que é uma fração, o significado de uma fração, e não a fração em si. Não a potência em si. Ela tem um significado, é uma linguagem, mas ir além disso. Falta sim estrutura para esse professor de 6º ao 9º ano, mas uma estrutura que a faculdade não dá.

21) O que me chamou atenção foi que você falou que os alunos se apegam ao visual, por exemplo, quando eles vão comparar frações. Você usou o termo visual. E em outros momentos você usou o termo visualização. Você esses termos como sinônimos, ou não, diferentes?

A impressão que dá é serem iguais por questão da palavra, porém eu usei em significados totalmente diferentes. Eu digo assim também a questão do contexto, então na visualização ali, pegar é uma visualização, se ele entender que 3 partes de 6 é a metade e que 1 parte de 2 é a metade e que elas são iguais, ele teve uma visualização já que não precisou... ele foi além dos algarismos, ele foi para o significado. Agora quando o aluno olha o algarismo, ele está ainda sem o contexto do que é uma fração, ele visualiza sim o algarismo 3 e 1, no ato de ver, ele vê 3 e 1, então quem é maior? 3. Mas não é só o 3 né, tem o 6 também, do outro lado tem o 2 e no outro denominador tem 6. Então quer dizer, "estou vendo professora, 3 e 6 é maior que 1 e 2". Ver, só ver, decodificar, e decodifica um algarismo, não o número, pois o número seria o todo, três sextos e um meio. E ele não consegue perceber isso, então esse aluno não percebe que existe um todo ali. Então são ideias sim diferentes.

22) Você vê elementos da visualização matemática em sua prática em sala de aula? Cite exemplos.

Eu descobri que faço isso. Aquela coisa de tentar dar significado para as coisas, eu tento trazer o mais compreensível possível, que está dentro das relações que eles tiveram de experiências né. É assim, por exemplo, agora trabalhando com a divisão de números decimais, onde eu coloco essa visualização, na tabela, então eu não trabalho isso sem usar a tabela das ordens e classes. Então vou lá, centena, dezena, unidade, aí eles dizem “ah isso”. Não tem como eu não trabalhar divisão de número decimal, ou envolvendo resultado, as vezes assim, são números inteiros no meu dividendo e no meu divisor, porém o que eu obtenho é um número decimal. Mas por que eu coloquei aquela virgula? Por que eu tenho que continuar? Então eu vou pra tabela. Então, R$15,00, vou dividir R$15,00 por 2, e daí trago também o dinheiro. Então tá, R$15,00, estou dividindo em 2, vai dar quanto? Ah, 7. Vai sobrar quanto? 1. Tá, esse 1, eu não consigo dividir? Daí mostro o dinheiro. Dá pra dividir, daí troca por duas de 50 centavos. Mas como posso fazer aqui, volto para tabela. Então na verdade estou usando a tabela, no valor posicional, estou usando o dinheiro para ele perceber que tem como dividir, e estou no processo algébrico porque eu quero que ele entenda o porquê que a gente coloca aquela vírgula. Daí tá, processo algébrico, vou lá na tabela, até aqui é inteiro, aí existe o centésimo, o centésimo o que que é? O décimo, uma parte de 10 do inteiro. Meu inteiro é quem? O real. Então eu pego bem essa coisa assim, para trabalhar o décimo eu começo primeiro pela experiencia dele, que é o dinheiro. O centésimo, uma parte de cem. Aí já coloco assim, e se tivesse uma moedinha de um centavo, quantas delas eu precisaria para dar R$1,00? Aí tem aluno que diz 100. Então perceba, por isso que é uma parte de cem, então eu precisaria de quantos? De 100 delas para dar um inteiro. Daí reparto, daqui pra cá é inteiro, daqui pra lá é menor que um inteiro. Nosso dinheiro tem duas posições, então nós vamos até essa uma parte de cem, que é o centésimo. E observe a palavra, centavos, centavos vem de onde? Centésimos. Faz parâmetro. Aí vou mostrando pra eles. Chega lá, algebricamente e chega nos 5, 7 inteiros. Aí digo pra eles, registrem pra mim a resposta, quanto que deu para cada pessoa? No dinheiro ele sabe que deu R$7,50, ele falou isso pra mim, eles falaram, a turma toda. Mas na hora de registrar eles escrevem, sete reais e cinco centavos. Aí eu peço ainda pra não registrar com algarismo, porque com algarismo induz uma coisa. Que quero que eles registrem usando palavras. Usando letras, sem usar algarismos. Aí você percebe bem, eles escrevem, sete reais e cinco centavos. De uma turma toda, a pouco tempo eu passei por isso, um aluno acertou, sete reais e cinquenta centavos. E mesmo ele olhando aquilo, vendo, ele sabia que não era cinco, ele tinha um valor diferente. Aí volto na tabela, então vamos lá, vamos na tabela. Mas antes de ir na tabela, vamos aqui, vocês não me falaram que deu cinco centavos a resposta? Deu professora, deu cinco centavos. Vocês não escrevam isso, então tá. Agora aqui, duas moedas e cinco centavos. Não professora, não é isso. Ué, mas vocês não acabaram de escrever isso. Não, é aquelas de cinquenta. Ué, mas vocês escrevam cinco, está aqui as duas moedas de cinco. Não, não é, é cinquenta. Então vamos voltar na tabela? Onde que é o 7? É inteiro, então vamos colocar aqui. E o cinco? É a primeira posição depois da vírgula. Mas o que é a virgula, pra serve a virgula? Alguns já entenderam, que é pra separar o inteiro do menor que um inteiro. Nesse ponto eles já estão dando o feedback que eu preciso. Então vamos colocar o cinco na primeira posição, só que nosso dinheiro é duas posições, então eu não posso colocar nessa posição aqui. Eu tenho que olhar pra segunda. Se eu estou olhando a segunda, então eu posso mudar, daí ela vai ter valor diferente, então eu não posso mudar. O que devo colocar aqui pra olhar nessa posição e que não altere? Aí tem uma viva alma que diz, coloque o zero, aí eu coloco lá colorido.

ANEXO 2 - TRANSCRIÇÃO ENTREVISTA 2

1) Você recorda a ideia de visualização que apresentou na 1ª entrevista?

Professora: Não, mas eu acho que não estava bem formulado o que era visualização para mim. Eu poderia até usar, mas não o conceito. E também acho que não está ainda o conceito pronto para mim, é uma briga interna, do que seria visualização matemática.

2) E se for destacar por palavras chaves, fica mais fácil para recordar?

Professora: Eu não sei se vou recordar, eu tenho agora a minha concepção. É uma representação, representação daquelas informações, de uma forma visual, mais física, ou por meio de um instrumento, numa situação, numa fração. Que tem alguns que são bem visuais, fração eu posso ir para o visual, posso ir para material concreto, mas nem tudo tem essa possibilidade.

Pesquisadora: Foi isso mesmo que você utilizou, manipulação, experiência, experienciação, experimentação. Foram algumas palavras que você utilizou naquele momento. Só lembrando que não é a intenção falar que está errado ou não, a ideia é saber se teve alguma mudança nesse seu modo de pensar na visualização.

3) Em relação a entrevista inicial, sobre a concepção de visualização enquanto professora, você percebe alguma mudança no seu entendimento sobre o tema?

Professora: Eu tenho me indagado mais e aí me deixo confusa. Eu acho que estou meio que nem aluno, você coloca algumas premissas, aí vem alguém e faz umas indagações e você diz pera aí, está me incomodando. Daí tira você do lugar, do cômodo, e agora eu estou tentando construir, parece que agora eu sei menos do que antes. A situação é essa, que estou realmente me sentindo incomodada. Descontruindo para tentar construir argumentos, relações válidas num contexto de que sejam reais, e não somente hipóteses. Pois antes eu tinha hipóteses, minha hipótese é isso, minha hipótese é aquilo, beleza e agora? Será que essa hipótese reage?

Pesquisadora: Você acha consegue construir?

Professora: Eu estou tentando, mas estou engatinhando. Até os termos que você usou eu tento lembrar, então precisa estudar sobre isso.

4) Diante da análise das resoluções apresentadas pelos estudantes, você percebe, em alguma delas, a visualização como um modo que favorece o aprendizado?

Professora: Sim, se ele olhar, se ele ter pequenas observações.

5) E em alguma delas você consegue destacar que você viu a visualização como um modo que favoreceu o aprendizado dele para aquela questão específica?

Professora: A da balança (fig.1) é visivelmente, talvez por figura, balança e tal. Porém as das letras (fig. 2) para mim, visualizando já se percebe que as letras teriam valores diferentes e eles não viram isso. São letras diferentes, teriam valores diferentes. Estão é o que? Só a questão matemática mesmo, algébrica? Ou de percepção do todo? Essa questão não sei dizer se seria só algébrica, para mim seria a percepção do todo. Seriam obviamente valores diferentes, mas eles não conseguiram enxergar isso. Só uma aluna conseguiu enxergar isso.

6) Então será que ela foi além de enxergar?

Professora: Seria o que? Além de enxergar que seriam valores diferentes?

7) Será que ela saiu do patamar de enxergar, perceber para daí conjecturar o processo, que seria visualizar?

Professora: O que legal, qual que é o processo aí?

Pesquisadora: Olhar, o perceber, formular conjecturas, visualização.

Professora: É faz todo sentido né, é toda uma construção do pensamento.

Pesquisadora: Você mesmo falou na primeira entrevista que a visualização é diferente do ver, que ela traz mais elementos...

Professora: Que é o que os outros olharam, tinham a mesma perspectiva e não...

Pesquisadora: Eles se deixaram levar pelo ver, imediato, não foi?

Professora: Isso, então dá zero, é zero, dá dois aqui, a letra ali de cima é dois. Os outros que recortaram lá, é o ver, vejo o 48, vejo o 6, ou 40 no 8, vejo 6, 6x48 ou 48+6.

*Em referência a tarefa: Uma maçã vale 6 bananas mais meia maçã. Meia dúzia de bananas custa 48 centavos. Quanto custa uma maça?

Pesquisadora: É que nem o da balança também né, que tinha só os pesos. Assinalar uma coisa porque está pendendo mais para um lado do que para o outro, mas explicar o porquê...

Professora: A aluna 1, que avaliou o peso, escreveu de uma para outra, foi todo um caminhar. E teve aquele que precisou conjecturar pesos para chegar à análise, colocar valores nos pesos.

8) *Você percebe alguma relação da sua prática com as soluções apresentadas pelos estudantes?*

Professora: A aluna 2, a aluna 1. Primeiro elas foram olhando item por item, foram conjecturando e teve escrita. Porque não adianta você fazer conjecturas, fazer as análises, mas não ter organização, não ter um parâmetro, que nem lá do aluno 3, ele colocou lá R$0,96 mas não fez nenhuma explicação, é só imediato, coloca uma resposta, a resposta é x, é tanto... e nem sempre é assim. É só quando são coisas muitos simples.

9) E quando você se depara com respostas assim nas avaliações, o que você considera?

Professora: Se fosse só de marcar *x*, eu não aceitaria. Não tinha ninguém perto dele e ele fez, vou considerar, mas não vou saber qual o processo de pensamento dele. Mas tá, esse ele conseguiu, a outra não, como que eu vou comparar, o que eu posso ajudar no processo de pensamentos dele? É vago. Eu não sei qual o processo que está falho, porque uma ele colocou e acertou, a outra colocou a resposta imediata e errou. A maioria colocou respostas imediatas, então como eu vou avaliar de que forma devo fazer a interferência? Eu não sei o que fazer, porque eu não sei qual a linha a pensamento dele. A da aluna 4, mesmo ela desenhando, eu tenho como interferir, posso chegar ali: olha vamos ver 3 bananas mais $1/2$ maçã, então ficou faltando isso. Então eu sei onde eu posso interferir.

Nem sempre me importa a resposta dele em si, mas o processo dele, ele pode ter até errado a resposta, mas o processo ele fez, uau, valeu!

10) Você consegue perceber esse processo além das avaliações?

Professora: No dia a dia da sala, em alguns casos. Mas assim, não tem como estar o tempo todo, são recortes bem pequenos, por exemplo as vezes é uma ou duas situações no ano que eu consigo observar no dia a dia da sala de aula.

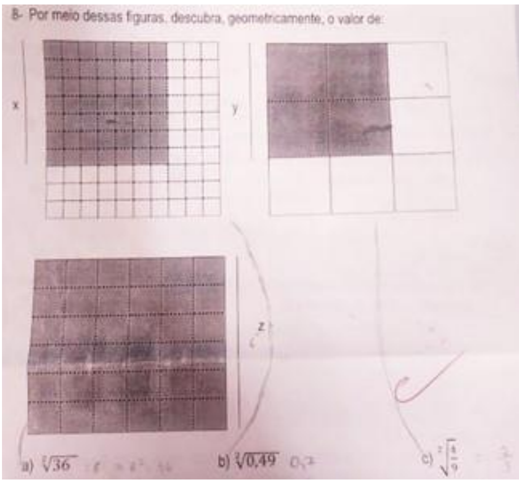
Pesquisadora: Para aqueles que verbalizam?

Professora: Isso! É pouco, pense, uma ou duas situações pontuais, em cada uma. São coisas assim marcantes, porque tem algumas que ele está tirando dúvida, ele está no caminhar, mas tem coisas assim que são muito marcantes, você tem dificuldade mesmo de explicar. Que nem $1/_5$ e $1/_2$, para tentar explicar para alguns alunos, peguei assim: imagine R$1,00, um inteiro dividido na metade. Eu tive 3 alunas que eu peguei, não fiz com todos, porque elas vieram perguntar, aí eu tive que comparar $1/_2$ com $1/_5$. Então como que eu vou explicar $1/_2$ com $1/_5$? Então vamos pegar R$1,00, é meu inteiro, divida na metade, não consegui. Aí fui lá e emprestei um pacote de moedas, trouxe o pacote de moedas e dei na mão R$1,00 e falei: agora divide. Teve aluna que falou: posso quebrar no meio? E o pacote de moedas na frente. Ficou um tempão, até que perguntou: posso mexer no pacote? Pode. Aí ela pegou uma moeda de R$1,00 mais uma moeda de R$1,00. Eu pensei, ela vai trocar. Em nenhum momento eu usei a palavra troca porque eu não queria induzir, queria ver até que nível. Aí ela pegou uma moeda de R$1,00 para ela e deu uma moeda de R$1,00 para mim. Aí eu disse, não, você não dividiu R$1,00, você dividiu R$2,00. Então quer dizer assim, 3 alunas que eu pude ter esse momento e não conseguiram fazer isso. Imagine quantos não conseguem fazer isso. Eu tive que ficar mais de meia hora construindo isso com cada uma delas e depois ainda construir o que era 1/5 de R$1,00 e eu achando que a construção de ½ de R$1,00...quer exemplo mais rápido que isso? Eu tive que pegar as moedas e mesmo assim foi super demorado, muito longo, a compreensão delas também no final não ficou clara. A gente chegou no final, que uma valia R$ 0,20, 1/5 de R$ 1,00 e ½ era R$ 0,50, mas não ficou claro, vou fazer de volta e vou dar conta? Não!

11) É possível observar nas avaliações que a professora elaborou, exercícios que retomam o conceito de área, como por exemplo descobrir o lado de um quadrado dada a área. Ou então a ideia de parte do todo, a área do quadrado interno é $1/_4$ da área total. Qual era sua ideia trazendo o conceito de área para esse contexto?

Professora: É que o processo inverso do pensamento matemática muitas vezes não é explorado, eu penso assim. Então a maioria faz a área achando que é só multiplicar ali e pronto, ele não consegue pensar no processo inverso. Não é só de área, de tudo. Pode ver, se é uma igualdade eu tenho o processo inverso, de tudo, porém os alunos tem essa dificuldade de fazer o processo inverso, desde a multiplicação, eles tem dificuldade de fazer a divisão e quando eu mostro pra eles que divisão é o processo inverso da multiplicação, eu só mudo a pergunta: quantas vezes cabe? É a divisão, mas eu faço, quantas vezes cabe, e ele: é tanto. É isso, divisão é o processo inverso da multiplicação. Eu não estou fazendo nada diferente, eu estou fazendo a multiplicação, porém retomando a pergunta ao contrário. E essa coisa do vai e volta parece que a matemática só tem um caminho, só a ida, e quando você indaga, você vê que não tem conhecimento aquilo, é só mecânico.

12) Um dos exemplos observados foi na questão em que você pede para eles que por meio das figuras descubra geometricamente o valor de...Você acha que eles usam a figura, ou vão colocando direto o valor?



Professora: A maioria tentou colocar o valor direto. Esse pensamento da figura eu tive que pontuar com eles, porque eles não viam isso como a parte de um todo. Então eu tive que realmente pontuar. Então vamos lá, quantos lados estão pintados? Ah, são 7. Mas são 7 de quantos? É o inteiro que está pintado? Não. Mas eles não viam isso parte de um todo, eles estavam vendo esse aqui como um inteiro. E assim, essa dificuldade não é só minha, é deles também. Principalmente essa coisa do processo inverso da raiz, de achar o lado... deu um “clique” acho que ano passado em mim: nossa, é tão óbvio, por que eu não cheguei nisso? Então provavelmente não foi construído isso comigo. Ah mais não sei calcular? Sei, mas não tinha uma função prática. Eu tentei trazer essa função prática para eles.

13) Você acha que é possível instigar o aluno a pensar pela a visualização nas avaliações? Se sim, de que forma?

Professora: Eu acho que o tempo todo né, não é só nas avaliações. É que algumas questões vão ficar mais claras, visíveis, e outras não. Mas é que para mim a visualização não é só figuras né. Aí é que está. É o entendimento daquilo, é a compreensão e ir além. Formar conjecturas e tal que dá o processo. Então na verdade é em tudo.

14) Então você acha que uma questão, para possibilitar pensar pela visualização, não precisa necessariamente ter figuras?

Professora: A visualização pelo que estou tentando formular é para ir além disso. Num primeiro momento era concreto, pegar o objeto, mas agora fazendo tudo essa análise é muito mais. Não precisa ter um objeto em si.

15) A imagem não precisa estar no papel?

Professora: Não, mentalmente. Que esta questão aqui, quadrado de um número. Você pode pensar, realmente em área, se você tiver isso né, área. Área e volume. E as vezes eu sinto dificuldade neles assim, eu coloco lá: calcule a área de um quadrado que mede 5. Eu coloquei num dos trabalhos "mede 5" e coloquei quatro opções de respostas. A primeira resposta: 10, e a maioria marcou 10. Então eles não imaginaram o quadrado, não colocaram a medida do lado, na cabeça deles não fizeram aquela representação que área é o que está dentro, que estou tentando mostrar isso para eles. Então veja, todo momento que vou falar de área eu desenho, coloco que é o espaço de dentro. E por que eu faço isso? Porque eles não têm isso abstraído. Toda vez que vou fazer o perímetro, aquela coisa da fita crepe né, mas precisava? No meu ver não. Quando que eu comecei essa história de fita crepe? Esse ano. Porque eu vi que eles não estavam conseguindo perceber que aquela distância mais aquela, mais aquela, mais aquela. Eu não faço nada diferente, eu só contorno e depois eu vou desmontando e colocando. Ele não consegue fazer esse desmonte e isso me choca. Eu estava tentando, daí disse: pera aí, essa fita crepe, vou dar a volta aqui, acho que eles vão entender eu cortando. E realmente, para alguns foi a luz. Como a da balança. Eu lembro do João, a hora eu falei vou pegar esse aqui, vou colocar na balança para equilibrar, mas agora eu tenho que dividir em quatro balanças, como que eu vou fazer? Aí ele disse assim: matemática é mágica! Ele disse: como eu não tinha pensado nisso! E foi tão simples, pegar a fita e vou dividir em quanto? Eu tenho duas peças iguais, mas eu tenho que dividir em quatro. Até isso alguns ficaram com aquela dificuldade, vou dividir no meio, e cada uma que eu dividir no meio vai dar quatro. Mas hora que fez, ah tá, achou o número, agora vamos fazer algebricamente. Aí eles olharam, eu disse volta na balança, eu não fiz a balança e a parte geométrica e achei que eles tinham conjecturado tudo, não, vamos voltar lá. Outra coisa, sempre gosto de voltar no enunciado. É uma proposta minha, sempre voltar, sempre fazer a reflexão e as vezes naquela ansiedade, poxa acho que eles entenderam, vamos pra frente e as vezes eu falho nisso também. Mas foi muito legal o João, isso é mágica, como que pode dar igual.

É nesse momento que eu digo, valeu.

O problema em que a professora se refere é o que está proposto na abordagem de equações, conforme abaixo:

1) Qual é a medida do lado do quadrado se seu perímetro é igual ao perímetro do retângulo?

16) Você vê elementos da visualização em sua prática, desde a abordagem dos conceitos até a elaboração das tarefas e avaliações? Em caso afirmativo, de que forma você pode inserir em sua prática a visualização como um modo de favorecer o aprendizado matemático de seu aluno?

Professora: O tempo todo eu faço essa análise. Não corrijo simplesmente a resposta. Eu demoro muito para corrigir justamente por causa disso, porque tento ver o processo. Quando o aluno não coloca o processo eu não sei por onde eu vou começar com esse aluno. Ai porque você grava tudo, não gravo tudo, não tem como gravar tudo. Eu não saio corrigindo, eu vejo assim, que sentido ele fez, aí volto lá no nome: fulano de tal, eu também estou formando meu pensamento sobre aquele aluno. Tem coisas que vou lembrar, tem coisas que vou esquecer e tem coisas que vão ficar guardadinhas na gaveta que na hora que precisar tiro. E talvez não precise para ele, mas preciso para o outro. Essa coisa das moedas e R$1,00 me deixou em choque, eu fiz esse teste no quinto ano, eles passaram, eles sabiam quanto que era metade de R$1,00, e não fiz com os melhores alunos, eu fiz com os alunos que tem deficiência intelectual, que tem uma ficha de deficiência intelectual, e não precisei pegar moeda, não precisei pegar nada. Eles já conseguiram abstrair. Daí você diz o que? Muitas vezes eu planejo mentalmente, já vou formulando e como eu falei lá na primeira entrevista, são coisas assim que são de acordo com as experiências que eu vou trazendo, as experiências do magistério, do 1º ao 5º que me ajudam muito, as experiências de frustações minhas. Ou por exemplo assim, as experiências de frustações de alguns alunos me marcaram muito e daí eu tento que isso não aconteça com outros. Então na verdade é um conjunto de coisas. Agora assim, está escrito isso? Não. A mesma coisa que comentei com você vou dar aula de reposição, então vou trazer para 6º, 7º e 8º fração. Vou começar com o que? Indagando. $1/2 + 1/2$ para fazer mentalmente, dando ênfase e a leitura isso e aquilo. Se eles não conseguissem, eu já estava esperando alguns não conseguirem eu ia puxar a caixa de frações, não ia deixá-los no erro. Então planejo mentalmente todos esses passos, mesmo que seja assim: ah, entra na turma agora, eu já vou pensando. Minha maior dificuldade é colocar isso no papel. Eu faço muitas indagações. Eu indago primeiro para ver que nível ele está, aí dou algumas premissas verdadeiras, pontuo algumas coisas, para ver se eles pegam no ar.

17) *É possível difundir, diante a comunidade de professores de matemática, a visualização como um modo que favoreça o aprendizado matemático? Em caso afirmativo, de que forma?*

Professora: É possível, porém a maioria não tem essa visualização. Para isso precisaria de uma formação muito boa em matemática, uma formação de professores, o que não acontece. O que acontece são disciplinas didáticas, e essas disciplinas didáticas não te mostram nada disso. Por isso quando você diz o que pretende, ter uma formação bacana, você faz toda essa análise, mas se estivesse escrito não ajudaria muito os professores a se formar?

Pesquisadora: Mas o estar escrito, estar guardado, faz eles buscarem?

Professora: A maioria não vai buscar esse material porque é cômodo do jeito que está. Eu passo, sou um mero detentor do conhecimento e só estou repassando conhecimento. Eu corrigindo não corrigindo, dando só uma orientação geral, na minha tentativa de formular isso e aquilo, é para tentar abarcar um maior número de alunos. É possível ter uma formação diferente de professores? É, mas tem que desconstruir tudo aquilo que eles acham que é ser professor, principalmente professor de matemática. Eu ouvi uma coisa de alguém que falou assim: você acho que é a única que tem um pensamento aberto da disciplina de matemática, e que tem contato com outros professores mas não da nossa cidade, que são extremamente formais, vão lá dão o conteúdo, corrigi o que está certo e o que está errado, fecha a nota e pronto.

18) E se você fosse convidada para um curso de formação continuada e o tema desse curso fosse visualização, o que você gostaria de ver nesse curso, enquanto professora?

Professora: Ir além desses parâmetros que é o físico, que é uma figura. Que estou quase chegando lá. É essa coisa de ir além do visual, além de bater o olho e "é isso". É um número que significa 45+3? Não, é além disso. Essa seria a ideia que estou tendo da visualização.

19) Você pensa que a visualização está no processo todo, ou seria do tipo: hoje vamos trabalhar com a visualização?

Professora: Não, ela está no processo todo, todos os dias. Só que enxergar isso?

Enxergar para você ou para o aluno?

O aluno vai enxergar se eu direcionar ele, se eu construir isso com ele. Porque ele sozinho é um ou outro que vai ter isso. Mas a maioria não vai ter isso. E mesmo assim eu trabalhando 3, 4 anos seguidos com esse aluno não é garantia. Pode acontecer só aquela coisa do imediato, visualizei 45+3 beleza, só visual, mas ele não formatou nada, não conjecturou nada sobre aquilo. E daí?

20) E você acha que é uma habilidade que pode ser desenvolvida no aluno, ou não?

Professora: Eu acho que em todos, não talvez no mesmo patamar, são níveis diferentes, mas eu acho que em todos. Ele começa a olhar diferente, e não é só em matemática não, digo que é além. É além porque essa forma que eu trabalho, eu trabalho com todas as outras disciplinas no fundamental 1.

Pera aí, o que tem aqui, vamos lá, e vou fazendo, vou indagando. Não é simplesmente fazer, fez e pronto tchau, virou a página e volta. Tudo eu trabalho conceitos em outras definições.

Então eu tento usar a minha linha de pensamento e raciocínio, ir para a definição e tudo mais. Quando eu vou fazer adição, vou primeiro para a definição, é a ideia de que? Primeiro a ideia, depois vou quebrando em partes. E sempre vou colando desafios. Quando eu acho que eles estão achando que é só isso, coloco um desafio super simples.

21) Você vai muito para questão da sensibilidade matemática né. Que é para além do próprio número somente, do próprio conceito somente. Vai para um lado sensível da matemática. Que é uma matemática não para sala de aula, mas uma matemática para a vida.

Professora: Sim, desde o exemplo: todo número multiplicado por zero dá zero. Aí eu faço lá 0x1, 10x0, aí coloca 10+0, ele entendeu? Não, porque ele coloca 0. Ele está olhando que aquilo é o símbolo do vezes ou do mais? Não, ele não está olhando, ele está apenas vendo números. Daí eles falam: "ah você está enganando a gente", eu não enganei, não está escrito aí? O que está escrito? "mais", então. A gente não está falando que é o elemento nulo da multiplicação? Então não é o elemento nulo. A gente acabou de falar que é elemento nulo na multiplicação na adição ele não é, ganha outra perspectiva. E o tempo todo eu faço isso, eu não deixo como, ah eles entenderam. Não, eles não entenderam. Para você saber se eles não entenderam é só lanças uma coisa assim no meio, bem simples, aí você vê que eles não entenderam.

Palavras finais...

Pesquisadora: Então assim, quando hoje você me perguntou: será que estou fazendo a diferença" a sua preocupação é fazer a diferença, então acho que você já deu um passo inicial que é fazer diferente. Você fazer diferente, agora falando como uma pessoa que te observou durante seis meses, eu vi que além de fazer diferente você está levando pra eles uma matemática que não é encaixotada, é uma matemática pra vida deles, que vai fazer eles pensarem não só na matemática, vai fazer eles pensarem em outras coisas.

Professora: E se eu te contar, que talvez uma das frustações foi o dia em que eu trouxe a Maria (nome fictício, filha da professora) e ela não conseguiu fazer o trabalho. Foi frustrante, sabe por quê? Eu sei que ela tem conceitos básicos. Eu trabalhei com ela há dois anos atrás, consegui trabalhar três meses com ela, eu sei que ela aprende rápido. Mas de toda aquela folha ela foi direto para as contas (figura 7), então ela está o que? Condicionada. Ela não está interpretando nada, está teoricamente num colégio bom, está tendo matéria, está tendo disciplina, mas não está visualizando além. Está tendo nota, mas não visualiza além. Então foi muito frustrante aquele dia. E ela está imediata, quer uma resposta. Ela ainda não está naquela coisa que tem todo um processo, e tal. Uma atividade, essa 10 aqui, é uma coisa super simples, quanto que dá? Só que eu coloquei numa forma algébrica, que nem todo mundo consegue ler. Teve aluno que veio me perguntar, a não entendi, aí eu disse: você está vendo que é um número dividido pelo outro. Daí eu falando ele diz, ah tá, é divisão. Então é um número dividido pelo outro e o resultado dá sempre 1, teve gente que ficou assim, mas teve gente que disse: ah, tem que ser igual! Mas ele não consegue ainda fazer essa analogia de que é um número dividido pelo outro porque é uma linguagem algébrica, está construindo e tal. Mas, vai né. E aquele que não pergunta? Que escreve qualquer coisa? Que eu vi a minha filha fazendo. Ela não tem capacidade? Tem, mas ela está condicionada. As questões que apareceram expressões ela está condicionada e fez, então quer dizer que tudo o que foi trabalhado ela também esqueceu? A escola tem esse poder de fazer esquecer tudo o resto? Tem! Você conduz de forma errônea.

Pesquisadora: Por isso que acho que é importante você dar sequência com eles né?

Essa é minha intenção. Eu quero ter essa oportunidade de ver, mesmo esses alunos com dificuldade, ver se vai mudar a forma deles olharem, escreverem.

Eu lembro uma questão da OBMEP que eu disse, nossa não sei como resolver isso, eu rabiscava e rabiscava, mas não queria ver o gabarito, pois era um desafio. Aí teve um nono ano que um menino resolver uma questão lá de uma forma bem simples. Da OBMEP a gente precisa corrigir o caderno de provas? Não, mas por que eu corrigi? Por que eu queria ver a linha de pensamento. Eu trouxe algumas questões elaboradas de uma forma diferente, mas assim, não vou lembrar a questão agora, mas foi de um jeito totalmente inusitado. Quando você via a folha de correção era quase uma folha inteira, e ele fez em duas linhas. Aí você diz assim, uau! Provavelmente nenhum professor teve essa visualização simples, e não estava errada, era simples. E o aluno foi além, ele viu aquilo como um todo e não em partes. Eu vejo que em alguns exercícios eu vou querer fazer em partes, aí vejo: nossa cresceu tanto, era uma coisa tão grande assim? As vezes a gente tira a simplicidade do exercício, como alguns alunos falaram: mas eu preciso fazer assim? Não, pode fazer mentalmente. Como das equações, pode fazer mentalmente, "ah, mas então por que estou fazendo assim?" É o seguinte, vão ter algumas mais elaboradas, que vou te dar agora, e você vai tentar fazer mentalmente, se der conta beleza. A gente tem que entender o processo, para que esse processo nos ajude nas elaboradas, mas não pode, em nenhum momento perder a visão do simples, do referencial, do significado. Se você perdeu a ideia do significado você se perde no meio daquelas simbologias, que era para te ajudar, mas as vezes te atrapalha.