



Edson da Silva Augusto

**A Matemática como instrumento indispensável  
para o estudo da Física: Uma proposta de  
Metodologia de Ensino**

Maringá-PR, Brasil

24/07/2019



Edson da Silva Augusto

**A Matemática como instrumento indispensável para o  
estudo da Física: Uma proposta de Metodologia de  
Ensino**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Universidade Estadual de Maringá- UEM

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Cícero Lopes Frota

Maringá-PR, Brasil

24/07/2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

A923m Augusto, Edson da Silva  
A matemática como instrumento indispensável para o estudo da física: uma proposta de metodologia de ensino. / Edson da Silva Augusto. -- Maringá, 2019. 79 f. : il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Cícero Lopes Frota.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2019.

1. Matemática. 2. Física. 3. Metodologia de Ensino. I. Frota, Cícero Lopes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 21.ed. 510.07

AHS - CRB 9/1065

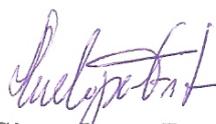


## EDSON DA SILVA AUGUSTO

### A MATEMÁTICA COMO INSTRUMENTO INDISPENSÁVEL PARA O ESTUDO DA FÍSICA: UMA PROPOSTA DE METODOLOGIA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

#### COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Cícero Lopes Frota  
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Prof. Dr. Ademir Pastor Ferreira  
UNICAMP – Campinas/SP



Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani  
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovado em: 24 de julho de 2019.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*Dedico este trabalho à minha noiva Karen,  
por sempre acreditar em mim e nunca duvidar da minha capacidade.  
Sem ela jamais teria conseguido.*



# Agradecimentos

Dedico este trabalho primeiramente à Deus, o Senhor de todas as coisas possíveis e impossíveis.

A minha noiva Karen, por sua paciência, dedicação, amor e apoio incondicional, alicerces fundamentais para a conclusão dessa dissertação.

A minha família, por me incentivar a ser uma pessoa melhor e não desistir dos meus sonhos.

Ao meu orientador Cícero, pelo suporte, correções e incentivos.

Agradeço a Meire, amiga e diretora no Colégio Helena Kolody, por sua amizade e sua imensa contribuição para que esse mestrado fosse concretizado.

Meus agradecimentos aos amigos de curso, em especial José, Gilmar, Estéfano, Maikon, Oldemir e Marcelo, companheiros de trabalho que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida.

Agradeço a todos os professores por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do carácter e afetividade da educação no processo de formação profissional.

E a todos que contribuíram, de forma direta ou indireta, na finalização desta etapa em minha formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001



*"E então fiz a descoberta mais importante da minha carreira.  
A descoberta mais importante da minha vida.  
É somente nas misteriosas equações do amor  
que alguma lógica pode ser encontrada.  
Só estou aqui por sua causa. Você é a razão pela qual existo.  
Você é toda minha razão."  
(Trecho do filme Uma mente brilhante - 2002)*



# Resumo

Nesta dissertação apresentamos uma metodologia de ensino, alternativa, para a disciplina de Física, que pode contribuir significativamente para que os estudantes passem a enxergar a Matemática como uma ferramenta essencial para as ciências, em particular, essencial para o estudo de Física. Por meio de um estudo introdutório de mecânica, apresentamos uma proposta metodológica para o ensino do movimento retilíneo uniforme (M.R.U.) e do movimento retilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.). Esta proposta pode ser ampliada e aplicada para todos os demais conteúdos. Evidenciamos com este trabalho que a Física é plenamente dependente da Matemática, mostrando que não é possível ter o conhecimento do M.R.U. e do M.R.U.V. sem entender os conceitos matemáticos que os mesmos exigem.

**Palavras-chave:** Matemática; Física; Metodologia de Ensino.



# Abstract

In this dissertation we present a teaching methodology, alternative, a physics method, that can contribute in a significant way so that the students come to see as an essential discipline for the sciences, in particular, essential for the study of Physics. Through an introductory mechanics study, we present a methodological proposal for the teaching of uniform rectilinear movement (M.R.U.) and uniformly varied rectilinear movement (M.R.U.V.). This proposal can be extended and applied to all others. We show with this work that Physics is dependent on Mathematics, showing that it is possible to have the knowledge of M.R.U. and M.R.U.V. without the mathematical senses that they require.

**Keywords:** Mathematics. Physics. Teaching Methodology.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de uma reta numérica. . . . .	32
Figura 2 – Representação do ponto $P(x, y)$ . . . . .	38
Figura 3 – Gráfico de uma função $f$ . . . . .	39
Figura 4 – Pontos $P_1, P_2$ e $P_3$ no gráfico de $f$ . . . . .	40
Figura 5 – Gráfico de uma função afim. . . . .	41
Figura 6 – Gráficos com $a > 0$ e $a < 0$ . . . . .	41
Figura 7 – Gráficos: M.R.U. Progressivo (a) e Retrógrado (b). . . . .	45
Figura 8 – Gráfico de $v(t)$ versus $t$ para $a > 0$ . . . . .	50
Figura 9 – Gráfico de $v(t)$ versus $t$ para $a < 0$ . . . . .	50
Figura 10 – Velocidade constante . . . . .	52
Figura 11 – Região trapezoidal . . . . .	52
Figura 12 – Partição do intervalo $[\alpha, \beta]$ . . . . .	53
Figura 13 – Velocidade constante no $i$ -ésimo intervalo . . . . .	54
Figura 14 – Aproximação geométrica para $\Delta S$ . . . . .	54
Figura 15 – Representação gráfica de uma parábola em termos de foco e reta mediatriz. . . . .	64
Figura 16 – Sistema de coordenadas cartesianas $OXY$ com origem sobre o vértice da parábola. . . . .	65
Figura 17 – Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ . . . . .	66
Figura 18 – Gráficos das funções quadráticas $f(x) = ax^2$ . . . . .	67
Figura 19 – Gráfico com o ponto $P$ deslocado para cima com $k > 0$ . . . . .	67
Figura 20 – Gráfico com o ponto $P$ deslocado para direita com $c > 0$ . . . . .	68
Figura 21 – Gráficos de funções quadráticas. . . . .	70
Figura 22 – Exemplo de objeto em queda livre. . . . .	71
Figura 23 – Exemplo de lançamento vertical. . . . .	72
Figura 24 – Gráfico da velocidade versus tempo. . . . .	73
Figura 25 – Gráfico da função $s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t$ . . . . .	74

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Velocidade média para diferentes intervalos à direita de $t = 5$ . . . . .	49
Tabela 2 – Velocidade média para diferentes intervalos à esquerda de $t = 5$ . . . . .	49



# Lista de símbolos

$\rightarrow$	de ... para
$\Rightarrow$	implica
$\in$	Pertence
$\subset$	Está contido
$\forall$	Para todo
$\Delta$	Delta
$\Sigma$	Somatório
$\int$	Integral
$\cong$	Aproximadamente
$\neq$	Diferente
$>$	Maior
$<$	Menor
$\leq$	Menor ou igual
$\geq$	Maior ou igual
$\alpha$	Alfa
$\beta$	Beta
$\gamma$	Gamma
$\theta$	Theta
$\xi$	Xi
$\pi, \Pi$	Pi
$\phi, \varphi$	Phi
$\psi$	Psi
$\infty$	Infinito



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>1</b>	<b>MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME - M.R.U.</b> . . . . .	<b>25</b>
1.1	A história da Mecânica . . . . .	25
1.2	Definição do M.R.U. . . . .	30
1.3	Caracterização das funções afins . . . . .	33
1.4	Gráfico da função afim . . . . .	37
1.5	Retorno à função horária do M.R.U. . . . .	42
<b>2</b>	<b>MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO - M.R.U.V.</b> <b>47</b>	
2.1	Velocidade instantânea . . . . .	47
2.2	O M.R.U.V. e sua função horária . . . . .	50
2.3	Funções quadráticas . . . . .	56
2.4	O gráfico da função quadrática . . . . .	63
2.5	Retorno à função horária do M.R.U.V. . . . .	70
2.6	Exemplos . . . . .	70
<b>3</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>77</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>79</b>



# Introdução

É habitual encontrar na rotina das salas de aula, alunos que consideram a Matemática uma ciência à parte, desligada das demais e sem qualquer aplicação em suas vidas. Isso causa, no geral, um desapontamento e total desinteresse pela disciplina. É óbvio que a Matemática não é desconexa das aplicações e o ponto crucial é então identificar porque os estudantes da educação básica a veem desta forma? Onde está o problema? É possível apresentar algum caminho para o enfrentamento deste quadro adverso?

Um ponto interessante a se frisar é que a ciência de fato não se fraciona e assim deve ser tratada. É preciso ter clareza de que o fracionamento se deve para facilitar a compreensão de conceitos particulares e permitir um aprofundamento em determinadas áreas específicas. Entretanto, no sentido oposto ao da simplificação, o fracionamento da ciência em diversas áreas também pode contribuir para a perda da noção do “todo” e para a visão distorcida de que as diversas áreas do conhecimento como Matemática, Física, Química e Biologia, por exemplo, sejam “coisas” disjuntas.

A construção da Matemática, ao longo dos anos sempre esteve fundamentada na necessidade do homem em resolver problemas, entretanto, normalmente relacionados às ciências naturais e a tecnologias, estes problemas usualmente são tratados por outras componentes curriculares e, num primeiro momento sem a devida atenção induz ao raciocínio simplista de que a Matemática está fora deste contexto. A interdisciplinaridade comumente leva os alunos ao encontro de situações e problemas reais nos quais utilizam a Matemática sem nem mesmo perceberem. Um dos exemplos mais relevantes dessa interdisciplinaridade é a Física, ciência que estuda o Universo, sua evolução, transformações e interações que obedecem modelos e equações matemáticas. Desta forma, a Matemática representa um alicerce fundamental para o estudo e representação dos fenômenos físicos. Nela estão contidas as ferramentas que possibilitam o entendimento de fatos comuns ao nosso redor, como por exemplo a movimentação dos corpos.

Os conceitos e as leis da Física explicam os fenômenos naturais e nos fazem entender desde o funcionamento das máquinas e das ferramentas utilizadas diariamente, como uma simples lente de aumento, um abridor de latas, até uma complexa usina nuclear ou um microscópio eletrônico. Todos esses conceitos a que nos referimos só podem ser realizados por meio da Matemática, responsável por ser o instrumento formal de expressão e comunicação para esta área. A Matemática está ligada de forma tão intrínseca com a Física que ao longo da história muitos físicos foram também matemáticos, desenvolvendo ferramentas matemáticas para descrever fenômenos da natureza. Por exemplo, esse foi o caso de Isaac Newton que formalizou e estabeleceu várias notações que compõem o Cálculo

Diferencial e Integral moderno.

Segundo Galileu (1623), um dos maiores cientistas da história, não se trata apenas de quantificar as grandezas físicas, mas de compreender a importância da Matemática na expressão das leis físicas. Com suas próprias palavras ele afirmou:

O livro da natureza não pode ser lido até aprendermos sua linguagem e nos tornarmos familiares com os símbolos no qual está escrito. E ele está escrito em linguagem matemática, e suas letras são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra e há apenas um vagar perdido em um labirinto escuro (BONJORNO et al., 2013, 150).

Em virtude dos fatos apresentados, é essencial mostrar aos alunos a Matemática presente na Física. E ainda mais, mostrar como a Física não existe sem a utilização da Matemática, isto é, além da necessidade da modelagem matemática, seus conceitos são imprescindíveis para o real entendimento da Física, de seus princípios e por fim, de suas conclusões.

Analisando as grades curriculares dos cursos de Licenciatura em Física observa-se que os mesmos contemplam as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Estágio Supervisionado. Entretanto a abordagem do Cálculo inclui ferramentas adicionais às usadas no ensino médio e os estágios, muitas vezes realizados em grupos e em curto período de tempo, geralmente não propiciam preparação suficiente para atuação profissional em sala de aula. Quando o recém graduado inicia o trabalho com alunos do ensino básico, ele recebe, de cada colégio, um livro didático a ser seguido durante o ano letivo, que se tornam “muletas” do professor, tornando-o refém sobre o que e como trabalhar com os alunos. No geral, os livros didáticos de Física do ensino básico apresentam a matemática existente em cada conteúdo físico de maneira mecanizada, como regras a serem decoradas pelos alunos para a realização de atividades, sem ao menos mencionar que a matemática que está sendo ali aplicada é a mesma vista na própria disciplina de matemática. Na prática, quase sempre a interdisciplinaridade é negligenciada.

Meu primeiro contato com a sala de aula no ensino básico foi com a disciplina de Física, porém minha formação acadêmica é Licenciatura em Matemática. No entanto aceitei o desafio, uma vez que minha graduação proporcionava também a habilitação em Física. Nos primeiros anos encontrei muita dificuldade, pois me faltava o entendimento de que para o aluno compreender qualquer conceito físico é necessário que ele entenda a matemática presente no mesmo. No início da minha experiência profissional também fui refém dos livros didáticos, como citado anteriormente. Apenas com o passar do tempo pude perceber que minhas aulas poderiam ser mais independentes dos livros didáticos e se tornarem mais transparentes para os alunos, deixando claro a matemática presente em cada conceito físico.

Retomando o problema formulado no início desta introdução, tendo apresentado

as argumentações acima, reforçamos a afirmação de que a Física traz a Matemática em sua essência e com isto não é razoável a existência de um enorme contingente de estudantes com a visão contrária. Salvo melhor juízo, focando nossa atenção em uma direção, o problema está em como se dá o ensino de ambas disciplinas, geralmente de modo isolado: a Física é “ensinada” por meio de um receituário de fórmulas enquanto que a Matemática é “ensinada” de forma abstrata, distante da realidade. Assim, este trabalho está baseado na tese, muito debatida entre educadores, de que a Matemática é um instrumento indispensável para o estudo da Física e o objetivo principal é apresentar, por meio de uma situação concreta, uma metodologia de ensino que de fato discuta os conceitos e deixe claro a presença da Matemática. Apresentamos nossa proposta com um estudo introdutório sobre movimentos: Movimento Retilíneo Uniforme (M.R.U.) e o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.), ambos conteúdos estudados no primeiro ano do ensino médio. Esperamos que a metodologia apresentada seja um caminho interessante onde os conceitos são abordados de forma a evidenciar a importância da Matemática para o estudo de Física, demonstrando com isto que não é possível se apropriar deste conhecimento sem entender as bases matemáticas que o mesmo exige.

Esta dissertação está dividida em três partes. No primeiro capítulo estudamos o movimento retilíneo uniforme (M.R.U.). Iniciamos com uma pequena abordagem histórica sobre Mecânica e em seguida definimos o M.R.U. e o associamos ao conceito de função, de modo que sua completa descrição (modelagem) seja dada por meio de uma função  $s = s(t)$ , chamada função horária do movimento, que determina a posição do objeto em cada instante de tempo  $t$ . Em seguida estudamos o teorema fundamental da proporcionalidade e o aplicamos para estabelecer uma caracterização das funções afins, bem como provamos que o gráfico de toda função afim é uma reta. De posse da caracterização das funções afins retornamos ao estudo do M.R.U., obtemos sua função horária e discutimos suas principais propriedades, as quais comumente são apresentadas nos livros didáticos de Física para o ensino médio sem qualquer justificativa plausível.

No segundo capítulo, tratamos do movimento retilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.). Introduzimos o assunto com uma discussão sobre o conceito de velocidade instantânea, responsável pela criação da derivada de uma função e conseqüentemente do cálculo diferencial, essencial para a definição do M.R.U.V.. Na sequência definimos o M.R.U.V. e demonstramos que quando a aceleração e a velocidade inicial são positivas o deslocamento do móvel, em um intervalo de tempo, coincide com a área da região (trapezoidal) abaixo do gráfico da função velocidade. Neste raciocínio, que contém o conceito de limite, está o germe da definição de área de regiões planas não regulares e o conceito de integral definida. A partir da caracterização do deslocamento em termos de área podemos generalizar este raciocínio e concluir que no M.R.U.V., a velocidade média em qualquer intervalo de tempo é a média aritmética entre as velocidades assumidas no início e no final do intervalo. De posse desta propriedade determinamos a função horária do M.R.U.V.,

dada por uma função quadrática. A partir deste ponto desenvolvemos um estudo completo sobre funções quadráticas onde, dentre vários resultados, mostramos que o gráfico de toda função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma parábola de foco  $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - (b^2 - 4ac)}{4a}\right)$  e diretriz  $y = -\left(\frac{1 - (b^2 - 4ac)}{4a}\right)$ . Adicionalmente demonstramos que se o coeficiente  $a > 0$  a parábola tem a concavidade voltada para cima, enquanto que se  $a < 0$  a concavidade é para baixo. Tendo nos apropriado do estudo sobre funções quadráticas retornamos ao M.R.U.V. e discutimos suas propriedades. Também apresentamos duas aplicações: queda livre e lançamentos verticais.

A terceira parte da dissertação é a última seção do capítulo dois, onde apresentamos nossas considerações finais.

# 1 Movimento Retilíneo Uniforme - M.R.U.

Neste primeiro capítulo iniciamos com uma breve abordagem histórica sobre a Mecânica, área da Física responsável pelo estudo dos movimentos. Em seguida introduzimos a definição do Movimento Retilíneo Uniforme (M.R.U.) e estudamos suas propriedades.

## 1.1 A história da Mecânica

Como mencionamos na introdução, nesta dissertação, por meio do estudo de alguns tipos de movimentos, abordamos uma metodologia de ensino que evidencia a Matemática como uma ferramenta essencial para o estudo de Física. O estudo dos movimentos é uma parte importante da Física, chamada Mecânica. Nesta seção apresentamos uma breve contextualização sobre a história desta área.

Definir ao certo quando a Mecânica teve início é uma tarefa um tanto quanto complexa. Sabe-se que as primeiras relações do homem com esse tema foram através de observações da natureza, principalmente no que diz respeito à Astronomia. A periodicidade na qual alguns eventos ocorriam e as observações do céu, como o movimento do Sol, as fases da Lua e as estações do ano, auxiliavam na tentativa de compreender a origem do Universo. Isso pode ser evidenciado com o surgimento de marcadores do tempo, como é o caso dos calendários e relógios. Assim sendo, o início da Mecânica pode ser definido como o estudo dos movimentos dos corpos celestes. Durante a Grécia Antiga, as várias áreas do conhecimento eram englobadas pelo saber filosófico, o que posteriormente se tornariam os diversos ramos como a Física e a Matemática.

Muitos autores consideram que o início da história da Mecânica tenha ocorrido com Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), uma vez que ele foi um dos primeiros, em relação aos registros em livros, a formalizar as primeiras leis do movimento. Aristóteles, filósofo e cientista, dividiu o movimento em duas grandes classes: a do Movimento Natural e a do Movimento Violento (HEWITT, 2011). O Movimento Natural era motivado pela natureza, isto é, cada objeto possuía seu lugar apropriado e buscava sempre alcançá-lo. Essa busca pelo equilíbrio era controlada pela combinação dos elementos que o mesmo era formado, sendo eles terra, água, ar e fogo. Assim, ele afirmava que objetos mais pesados deveriam se movimentar mais rapidamente, como por exemplo a rapidez com que um pedaço de barro caía na terra comparado com a velocidade de um pena. Ainda segundo Hewitt (2011), Aristóteles defendia que o Movimento Natural poderia ser diretamente para cima ou para baixo, aplicado para as coisas na Terra, ou circular, aplicado para os objetos celestes. Segundo o filósofo, o movimento circular não possuía começo e fim, e nem mesmo desvio. Os corpos celestes eram esferas perfeitas e formadas pela substância

quintessência, denominada por ele com a quinta essência além da terra, água, ar e fogo. Já o Movimento Violento, segundo Aristóteles, era resultado de forças impostas que puxavam ou empurravam o objeto. Deste modo, era necessário uma causa externa para gerar o movimento no objeto e não apenas a dependência de sua natureza. De forma resumida, Aristóteles pensava que os movimentos ocorridos eram devido à natureza do objeto movido ou devido a empurrões ou puxões mantidos. Caso o objeto esteja em seu local correto, ele não deverá se mover até que seja aplicada uma força externa, pois o estado normal é o repouso, exceto para os corpos celestes.

Por outro lado, segundo [Marques e Bechara \(2017\)](#), alguns autores atribuem o início da Mecânica a Arquimedes (297 a.C. – 212 a.C.), que além de estabelecer os princípios básicos da estática, utilizou em seu método de análise deduções matemáticas precisas. Isso se deve ao fato do formalismo matemático incorporado por ele, descrevendo os fenômenos observado e permitindo a sua quantificação. Arquimedes introduziu, dessa forma, o método científico aliando em certo sentido o empirismo à formulação das leis e demonstrações de teoremas, usando conceitos de geometria. O pensamento científico de Arquimedes era parte essencial de sua Matemática. Desenvolveu a estática, hidrostática e o estudo de sólidos mais complexos. Entre suas importantes invenções estão roldanas e alavancas, bomba d'água e uma forma elementar de laser ([STRATHERN, 1998](#)).

Até a Idade Média, a ciência se resumia na Física aristotélica e na Astronomia geocêntrica. Já durante esse período da história (século V a XV), existia um grande poder e influência da Igreja, sendo o saber intelectual concentrado nas mãos do clero e as buscas científicas voltadas para a religião. Assim, o significado amplo da ciência da Grécia Antiga foi substituído pela busca das verdades da fé. Com o surgimento do Renascimento (século XV a XVI), nasceu simultaneamente uma nova forma de ver e explicar o universo, baseada na observação e experimentação sistemática. Nesta fase a explicação do mundo era voltada para verdades estabelecidas pela razão e não mais pela fé.

Foi neste período histórico que surgiu a primeira grande revolução do pensamento, no que tange ao Universo, formulada pelo astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473 – 1543). Ele considerou que a maneira mais simples de explicar os movimentos observados do Sol, da Lua e dos planetas no céu era supor que a Terra (e outros planetas) circulassem em torno do Sol ([HEWITT, 2011](#)). No modelo heliocêntrico de Copérnico a simplificação decorrente no tratamento matemático do movimento dos planetas facilitou a descrição de alguns fenômenos conhecidos da observação astronômica ([MARQUES; BECHARA, 2017](#)). Copérnico propôs um modelo que continha sete premissas, por ele admitidas como verdadeiras, que acabaram produzindo uma revolução no pensamento científico da época ([FILHO; TOSCANO, 2016](#)) :

1. Nem todas as esferas celestes giram em torno de um único centro.

2. O centro da Terra não é o centro do Universo, mas apenas o centro de sua própria gravidade e o da órbita da Lua.
3. Todas as esferas giram em torno do Sol e, conseqüentemente, o Sol é o centro o Universo.
4. A distância entre a Terra e as estrelas fixas é tão grande que, em comparação, a da Terra ao Sol é insignificante.
5. Os movimentos que aparecem no firmamento não provêm do movimento dele, e sim da Terra, que, a cada dia, gira em torno do seu próprio eixo.
6. O que nos parece o movimento do Sol é apenas o movimento da Terra, que, como os outros planetas, gira em torno do Sol.
7. Os movimentos aparentemente retrógrados dos planetas devem-se apenas ao movimento da Terra, que, como os outros planetas, gira ao redor do Sol.

Segundo [Hewitt \(2011\)](#), Copérnico preferiu não publicar seus estudos durante anos, isso por temer perseguições associadas aos pensamentos contrários dos estabelecidos em sua época, e também, por não conseguir conciliar suas ideias com os conceitos prevalecentes sobre o movimento neste período da história. Apenas em seus últimos dias de vida, ele submeteu para publicação seu trabalho "*De Revolutionibus*". O modelo de Copérnico teve ainda que esperar quase um século para ser aceito como o preferível para descrever o movimento dos planetas. Embora as ideias de Copérnico não tenham sido aceitas completamente por todos os estudiosos da época, sua obra fez surgir uma nova interpretação do mundo baseada em argumentos matemáticos e na Antiguidade clássica.

O novo modelo proposto implicou em uma mudança radical de visão do mundo, que começou a ser estudada mais profundamente pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546 – 1601), sobre o movimento do planeta Marte, que levou o alemão Johannes Kepler (1571 – 1630) a pesquisar e formular leis que mostravam a validade do heliocentrismo ([BONJORNO et al., 2013](#)). Foi Johannes Kepler o astrônomo que aperfeiçoou as ideias de Copérnico, com auxílio dos registros de Brahe. Uma de suas maiores descobertas foi a constatação de que as órbitas descritas pelos planetas eram elípticas e não eram circulares, como acreditava-se até então pelo modelo geocêntrico de Aristóteles e heliocêntrico de Copérnico ([BONJORNO et al., 2013](#)). A partir da grande quantidade de dados obtidos por Brahe, Kepler sintetizou as principais características do movimento planetário, enunciando três leis, que passaram a ser conhecidas como as Leis de Kepler, como apresentado por [Martini et al. \(2016\)](#):

Primeira Lei: Os planetas movem-se ao redor do Sol descrevendo órbitas elípticas nas quais o Sol ocupa um dos focos.

Segunda Lei: As áreas "varridas" pelo raio vetor que liga o planeta ao Sol são iguais em intervalos de tempo iguais durante o movimento do planeta.

Terceira Lei: Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas ao redor do Sol são diretamente proporcionais aos cubos dos raios médios de suas órbitas ([MARTINI et al., 2016](#), 149-155).

No final do século XVI, com o surgimento da burguesia na Inglaterra, as ciências foram alavancadas com o surgimento de uma sociedade mais empreendedora e menos presa à Igreja. Em defesa do modelo heliocêntrico de Copérnico, surgiu Galileu Galilei (1564 – 1642), nascido em Pisa, Itália. Galileu era adepto do experimentalismo e fazia uso deste em seus estudos. Sua criatividade e engenhosidade levaram-no a desenvolver e aprimorar equipamentos que utilizava em suas observações da natureza. Desta forma, construiu sua própria luneta, e apontando-a para o céu noturno, foi capaz de descrever os detalhes das observações celestes. Entre elas merecem destaque as observações acerca do relevo da Lua, das manchas solares, das fases de Vênus, de Júpiter e seus satélites e também da Via Láctea (STEFANOVITS, 2013).

Outras expressivas teorias foram comprovadas por Galileu através da experimentação. Um de seus maiores marcos para história certamente foi o experimento da Torre inclinada de Pisa, no qual conta-se que Galileu deixou cair objetos de diferentes pesos comparando suas respectivas quedas, comprovando que vários objetos, de diferentes pesos, quando soltos juntos caem e atingem o chão ao mesmo tempo, exceto pelo efeito da resistência do ar, ao contrário que afirmava Aristóteles (HEWITT, 2011). Galileu acreditava ser impossível a existência de um vácuo, desse modo afirmou que, se não houvesse interferência sobre um objeto móvel, este deveria se mover em linha reta infinitamente, não sendo necessário nenhum puxão ou empurrão, como acreditava Aristóteles. Galileu testou sua hipótese através da observação do movimento de diferentes objetos sobre planos inclinados em vários ângulos. Por meio de experimentos, ele constatou que o movimento de descida, para baixo, tornava o objeto mais veloz, enquanto movimentos de subida, para cima, tornava menos veloz. Portanto, se o plano fosse horizontal, o objeto atingiria o repouso devido ao atrito, e não por causa de sua natureza. Para sustentar esta ideia, ele utilizou superfícies distintas para verificar a rapidez do movimento. Desta forma, Galileu demonstrou que na ausência de forças opostas ou do atrito, um objeto movendo-se na horizontal continuaria seu movimento de forma indefinida.

Outro experimento realizado por Galileu foi o de utilizar dois planos inclinados, um de frente para o outro. Neste caso, uma bola era liberada do topo de um plano, a partir de uma altura inicial, descia, e então subia no outro plano, atingindo uma altura final. Ele observou que a altura final era menor do que a altura inicial, porém mais próximas ambas ficavam se a superfície utilizada fosse mais lisa ou se o ângulo do plano da subida fosse menor. Assim, se houvesse um plano horizontal longo, a bola jamais atingiria a sua altura inicial, logo se moveria para sempre. Através dos experimentos com planos inclinados, Galileu chegou ainda em outra grande dedução, onde na ausência de forças retardadoras, a tendência da bola é mover-se eternamente sem torna-se mais lenta. Essa propriedade do objeto permanecer em movimento em linha reta foi chamada de inércia. O conceito da inércia de Galileu negou a teoria de Aristóteles, uma vez que o mesmo não imaginou o movimento sem o atrito, o que causou a estagnação da física por quase 2000 anos.

Coube a Galileu ainda ter sido o primeiro a medir velocidades levando em conta a distância percorrida e o tempo decorrido. Ele definiu como rapidez a distância percorrida por unidade de tempo (HEWITT, 2011). Galileu também desenvolveu o conceito de aceleração em seus experimentos com planos inclinados. Ele descobriu que quanto mais inclinado o plano, maior era a aceleração, sendo máxima quando a rampa fosse vertical (aceleração igual de um objeto em queda livre). Descobriu também que todos os objetos caem com a mesma aceleração invariável, desde que a resistência do ar seja pequena ao ponto de ser desprezada, não importando o peso ou tamanho do objeto.

Meses após a morte de Galileu nasceu Isaac Newton (1642 – 1727). Newton foi responsável pelo desenvolvimento de famosas leis do movimento, que superaram em definitivo as ideias de Aristóteles, que dominaram durante um longo período da história.

A visão de uma maçã que caiu sobre o solo o inspirou a considerar que a força da gravidade se estendesse até a Lua e além. Newton formulou a lei da gravitação universal e a aplicou para resolver mistérios de séculos a respeito do movimento dos planetas e das mares oceânicas; inventou o cálculo, uma ferramenta matemática indispensável da ciência. Ele estendeu o trabalho do cientista italiano Galileu e formulou as três leis fundamentais do movimento (HEWITT, 2011, 18)

Até o final da Idade Média, os fenômenos físicos eram discutidos sem o auxílio de recursos matemáticos que pudessem ajudar a descrevê-los e comprovar as hipóteses formuladas. Newton se baseou na matemática para fazer que a Física alcançasse o status de ciência no sentido moderno (FUKE; KAZUHITO, 2010). Newton reafirmou a ideia da inércia de Galileu, formulando sua primeira lei, denominada Lei da Inércia. Ela foi publicada em um dos livros mais importantes da ciência, o *Principia*, de Newton:

Todo objeto permanece em seu estado de repouso ou de rapidez uniformemente em uma linha reta a menos que uma força resultante não nula seja exercida sobre ele (HEWITT, 2011, 23).

A primeira lei de Newton fortalece a teoria de Galileu, em que um objeto em movimento se moverá indefinidamente ao longo de uma trajetória retilínea, na ausência de uma força resultante. Já um objeto em repouso, deve permanecer em repouso na ausência de força resultante exercida sobre ele. Esta propriedade dos objetos em resistir a alterações no movimento foi chamada de inércia.

Newton foi o primeiro a descobrir a relação entre os três conceitos físicos básicos: aceleração, força e massa. Em seu livro *Principia*, Newton enunciou assim sua segunda lei:

A mudança do movimento é proporcional à força motriz impressa, e se faz segundo a linha reta pela qual se imprime essa força (BONJORNO et al., 2013, 147).

Com a segunda lei, Newton evidencia que uma mesma força produzirá diferentes acelerações sobre corpos com diferentes massas. Uma mesma força provoca uma aceleração maior em uma bola de futebol do que numa bola de boliche, assim sendo maior a massa do corpo, mais força será necessária para produzir determinada aceleração.

Por fim, em sua terceira lei, Newton afirma:

A uma ação sempre se opõe uma reação igual, ou seja, as ações de dois corpos um sobre o outro sempre são iguais e se dirigem a partes contrárias (BONJORNO et al., 2013, 155).

Essas forças ficaram conhecidas como forças de ação e reação, sendo que para cada ação, existe sempre uma reação de mesmo módulo e de orientação oposta. Essas forças são partes conjugadas de uma única interação, e nenhuma das duas existe sem a outra.

Um dos feitos mais importantes de Newton está no fato de ter construído uma formulação teórica de leis e definições bem estruturada, contemplando todos os aspectos do movimento. Com a introdução do cálculo diferencial na descrição de fenômenos físicos, ele descreveu quantitativamente os fenômenos e previu outros com grande precisão, causando um grande impacto na cultura científica (MARQUES; BECHARA, 2017). Outra contribuição de Newton à ciência foi a lei da Gravitação Universal, uma das leis fundamentais de interação no universo físico. Com essa lei foi possível formular a mecânica celeste, possibilitando a compreensão dos movimentos dos planetas em torno do Sol.

Os conceitos desenvolvidos por Galileu e Newton apresentavam pontos obscuros para os cientistas até o século XVII. A partir do século XVIII novas formulações foram desenvolvidas e denominadas de Mecânica Analítica ou Mecânica Racional. Pode-se dizer que elas partiram de princípios estabelecidos como gerais no universo físico, sobre os quais repousa a teoria da Mecânica Clássica, e se desenvolveram de forma coerente e matematicamente rigorosa.

Com o surgimento de novas metodologias e técnicas para observação do universo, houve a possibilidade de explorar novos fenômenos físicos. A partir desta revolução surgiram na mecânica a Teoria da Relatividade, de Einstein, e a Física Quântica. Outra área desenvolvida foi o estudo do movimento dos fluidos, que ficou conhecido como dinâmica dos fluidos ou hidrodinâmica.

## 1.2 Definição do M.R.U.

O movimento retilíneo uniforme, que abreviadamente escrevemos M.R.U., é o movimento mais simples possível e exatamente por isso é dificilmente encontrado na natureza, a menos de situações especiais e em curtos intervalos de tempo. Por definição

M.R.U. é todo movimento que se dá numa reta (a trajetória é uma linha reta), sempre num mesmo sentido e de modo que em tempos iguais percorre-se espaços iguais.

Supondo que um móvel esteja em M.R.U. a descrição deste movimento deve ser um modelo matemático que determina a posição do móvel em cada instante de tempo, ou seja, devemos encontrar uma função  $s = s(t)$  que dá a posição do móvel, em relação a um referencial fixado, em cada instante de tempo  $t \geq 0$ . Esta função  $s = s(t)$  é chamada a função horária do movimento ou ainda a equação horária.

Aqui nos deparamos com o conceito matemático de função, conceito este de extrema importância, essencial em diversas situações do cotidiano, normalmente introduzido aos estudantes no primeiro ano do ensino médio.

**Definição 1.2.1** *Dados dois conjuntos quaisquer, não vazios,  $A$  e  $B$ , uma função  $s$  de  $A$  em  $B$  é uma regra que a cada elemento  $t \in A$  associa um único elemento  $s(t)$  em  $B$ . O conjunto  $A$  é chamado o domínio da função  $s$ , o conjunto  $B$  é chamado o contradomínio de  $s$  e o conjunto  $\{y \in B; y = s(t) \text{ para algum } t \in A\}$  é chamado conjunto imagem da função  $s$ .*

É comum usarmos a notação:

$$\begin{aligned} s : A &\rightarrow B \\ t &\longrightarrow y = s(t) \end{aligned}$$

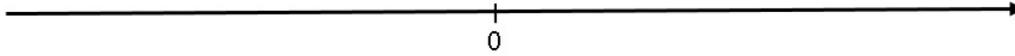
para representar uma função  $s$  de  $A$  em  $B$ . Em particular, quando  $A$  é um subconjunto de números reais ( $A \subset \mathbb{R}$ ) e  $B = \mathbb{R}$  a função  $s : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma função real de uma variável real.

No caso do M.R.U. a função horária do movimento  $s = s(t)$  é uma função real de uma variável real cujo domínio é o conjunto dos números reais não negativos ( $t$  representa o tempo) ou seja, temos

$$\begin{aligned} s : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow s(t) \end{aligned}$$

Representamos a trajetória retilínea por meio de uma reta numérica, onde fixamos uma origem e um sentido (positivo). Seja  $s_0$  a posição inicial do móvel, isto é,  $s_0 = s(0)$ .

Figura 1 – Representação de uma reta numérica.



Desde que o no M.R.U. o movimento se dá em um único sentido, devemos ter uma das possibilidades satisfeitas: ou a função  $s$  cresce ou decresce, a partir de  $s_0$ . Ou seja, a função horária do M.R.U. é uma função monótona e injetiva. Novamente estamos diante de conceitos matemáticos, relativos a uma função, que devem ser previamente conhecidos, de acordo com as definições abaixo.

**Definição 1.2.2** *Seja  $s : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de uma variável real.*

- i) Dizemos que  $s$  é crescente se  $s(t_1) < s(t_2)$  sempre que  $t_1 < t_2$ .*
- ii) Dizemos que  $s$  é decrescente se  $s(t_1) > s(t_2)$  sempre que  $t_1 < t_2$ .*
- iii) Dizemos que  $s$  é não decrescente se  $s(t_1) \leq s(t_2)$  sempre que  $t_1 < t_2$ .*
- iv) Dizemos que  $s$  é não crescente se  $s(t_1) \geq s(t_2)$  sempre que  $t_1 < t_2$ .*
- v) Quando  $s$  satisfaz a qualquer um dos itens anteriores dizemos que  $s$  é uma função monótona.*

**Definição 1.2.3** *Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita:*

- (a) Injetora ou injetiva, ou uma injeção, se para todo  $y \in Y$ , existir somente um  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ .*
- (b) Sobrejetora ou sobrejetiva, ou uma sobrejeção, se sua imagem for todo o conjunto  $Y$ , i.e., se, para todo  $y \in Y$ , existir pelo menos um  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$ .*
- (c) Bijetora ou bijetiva, ou uma bijeção, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.*

Resta ainda interpretarmos que no M.R.U., em tempos iguais, sempre percorremos espaços iguais. Matematicamente falando, isto significa que a função horária do M.R.U. deve satisfazer à seguinte propriedade: "o espaço percorrido num tempo  $h$  a partir da posição  $s(t)$ , que é dado pela diferença  $s(t+h) - s(t)$ , depende apenas de  $h$  e não do  $t$ ". Resumindo a argumentação acima vemos que se  $s : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é a função horária de um M.R.U. então  $s$  satisfaz as duas propriedades abaixo:

$$s \text{ é monótona e injetiva (equivalentemente, crescente ou decrescente);} \quad (1.1)$$

$$\phi(h) = s(t+h) - s(t) \text{ depende apenas de } h \text{ mas não de } t. \quad (1.2)$$

Na próxima seção faremos a caracterização das funções afins e veremos que as duas propriedades (1.1) e (1.2) caracterizam a função  $s$  como uma função afim

$$s(t) = a \cdot t + b$$

onde  $a = s(t+1) - s(t)$  é o espaço percorrido na unidade de tempo (chamado velocidade do móvel) e  $b = s_0 = s(0)$  é a posição inicial do móvel.

### 1.3 Caracterização das funções afins

Nesta seção introduzimos o conceito de função afim e demonstramos um resultado sobre a caracterização destas funções. Também demonstramos que o gráfico de qualquer função afim é uma reta no plano cartesiano. Nossa apresentação segue as ideias de [Lima \(2014\)](#).

**Definição 1.3.1** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se afim quando existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

A constante  $b$ , na definição acima, é determinada quando se calcula o valor da função para  $x = 0$ , ou seja  $f(0) = a \cdot 0 + b = b$ . Por outro lado, a constante  $a$  é determinada quando se calcula o valor da função para dois valores arbitrários  $x_1 \neq x_2$ , como segue abaixo:

$$f(x_2) - f(x_1) = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b = a \cdot (x_2 - x_1),$$

então

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}, \text{ onde } x_1 \neq x_2 \text{ são arbitrários};$$

na função afim  $f(x) = ax + b$ , a constante  $a$  é denominada de taxa de variação ou taxa de crescimento.

#### Exemplos de funções afins:

- A função identidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$  é afim.
- As translações  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x + b, \forall x \in \mathbb{R}$  são funções afins.
- As funções lineares  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$  são funções afins, com  $b = 0$ .
- As funções constantes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = b, \forall x \in \mathbb{R}$  são funções afins, com  $a = 0$ .

Para demonstrar um teorema muito importante pois caracteriza as funções afins precisamos antes demonstrar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade .

**Teorema 1.3.1 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (2)  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  onde  $a = f(1) > 0$ . (Logo  $f(cx) = cf(x)$  para quaisquer  $c, x \in \mathbb{R}$ .)
- (3)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Para mostrar que as afirmações são equivalentes provamos as seguintes implicações: (1)  $\Rightarrow$  (2), (2)  $\Rightarrow$  (3) e (3)  $\Rightarrow$  (1).

Primeiramente, mostramos que (1)  $\Rightarrow$  (2): Inicialmente provamos a implicação para todo número racional  $r = \frac{p}{q}$ . Pela hipótese (1) e como  $p = rq$  temos:

$$q \cdot f(r) = f(q \cdot r) = f(p) = f(p \cdot 1) = p \cdot f(1) = a \cdot p, \text{ onde } a = f(1).$$

Logo  $f(r) = a \cdot \frac{p}{q} \Rightarrow f(r) = ar$  para todo  $r \in \mathbb{Q}$ .

Além disso, usando a hipótese (1) temos:  $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$  e pelo fato de  $f$  ser crescente temos ainda que  $a = f(1) > f(0) = 0 \Rightarrow a = f(1) > 0$ .

Para demonstrar o resultado no caso geral, isto é, que  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , raciocinamos por contradição. Logo, seja  $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$  e suponha que  $f(x) \neq ax$ . Assim temos dois casos a considerar.

*Primeiro caso:*  $f(x) < ax \Rightarrow x > \frac{f(x)}{a}$ .

Tomemos um número racional  $r$  no interior do intervalo  $[\frac{f(x)}{a}, x]$ . Assim,

$$\frac{f(x)}{a} < r < x \Rightarrow f(x) < ar < ax, \text{ pois } a > 0.$$

Desde que  $r \in \mathbb{Q}$  pelo que já provamos  $f(r) = ar$ . Logo  $f(x) < f(r)$ , o que é um absurdo, pois  $r < x$  e  $f$  é crescente.

*Segundo caso:*  $f(x) > ax \Rightarrow x < \frac{f(x)}{a}$ .

Tomemos um número racional  $r$  no interior do intervalo  $[x, \frac{f(x)}{a}]$ . Assim,

$$\frac{f(x)}{a} > r > x \Rightarrow f(x) > ar > ax, \text{ pois } a > 0.$$

Do mesmo modo que no caso anterior  $f(r) = ar$  e portanto  $f(x) > f(r)$ , o que é um absurdo, pois  $r > x$  e  $f$  é crescente.

Portanto,  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , com  $a = f(1)$  e isto conclui a prova da implicação (1)  $\Rightarrow$  (2).

Agora, mostramos que (2)  $\Rightarrow$  (3): Pela hipótese (2) dados quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  temos:

$$f(x + y) = a \cdot (x + y) = ax + ay = f(x) + f(y),$$

o que prova (3).

Por fim, mostramos que (3)  $\Rightarrow$  (1): Vejamos inicialmente que pela hipótese (3)

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$

Também vemos que para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

de onde resulta que

$$f(-x) = -f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Dado  $x \in \mathbb{R}$  podemos escrever

$$f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x)$$

ou seja, a igualdade (1) é válida para  $n = 0$ .

Sejam  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 0$ . Aplicando a hipótese (3)  $n$  vezes obtemos

$$f(nx) = f(x + x + \dots + x) = f(x) + f(x) + \dots + f(x) = n \cdot f(x),$$

o que prova (1) para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 0$ .

Agora sejam dados  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < 0$ . Neste caso  $-n > 0$  e portanto:

$$f(nx) = f(-(-n)x) = -f((-n)x) = -(-n)f(x) = nf(x)$$

o que prova (1) para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < 0$ , e concluímos a demonstração do teorema (1.3.1). □

O caso análogo para funções decrescentes é dado pelo corolário a seguir.

**Corolário 1.3.1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função decrescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (2)  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  onde  $a = f(1) < 0$ .
- (3)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Basta considerar  $\varphi(x) = -f(x)$  e aplicar o teorema (1.3.1). □

Agora estamos aptos para demonstrar o resultado principal desta seção sobre a caracterização das funções afins.

**Teorema 1.3.2 (Caracterização das funções afins)** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona injetiva (crescente ou decrescente) e o acréscimo  $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$  depende apenas de  $h$  (e não de  $x$ ) se, e somente se,  $f$  é uma função afim  $f(x) = ax + b$ , com  $a = f(1) - f(0) \neq 0$  e  $b = f(0)$ .

**Demonstração:** Suponhamos que a função  $f$  é crescente. Seja  $x \in \mathbb{R}$  arbitrariamente fixado e definimos  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\varphi(h) = f(x+h) - f(x).$$

Então  $\varphi$  também é crescente e  $\varphi(0) = f(x+0) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$ . Pela hipótese, para todo  $h, k \in \mathbb{R}$  temos que:

$$\begin{aligned} \varphi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x) = [f((x+k)+h) - f(x+k)] + [f(x+k) - f(x)] \\ &= \varphi(h) + \varphi(k). \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos que  $\varphi(h) = a \cdot h$  para todo  $h \in \mathbb{R}$  onde  $a = \varphi(1) > 0$ . Logo:

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h.$$

Tomando  $f(0) = b$  e fazendo  $x = 0$  na igualdade acima, temos:

$$f(h) = ah + b, \text{ para todo } h \in \mathbb{R},$$

ou ainda

$$f(x) = ax + b \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ onde } a = f(x+1) - f(x) > 0.$$

Suponhamos agora que  $f$  é decrescente. De modo análogo, definimos  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$  a qual também é decrescente,  $\varphi(0) = 0$  e satisfaz  $\varphi(h+k) = \varphi(h) + \varphi(k)$  par quaisquer  $h, k \in \mathbb{R}$ . Aplicamos o corolário do Teorema Fundamental da Proporcionalidade e obtemos que  $\varphi(h) = ah, \forall h \in \mathbb{R}$ , onde  $a = \varphi(1) < 0$ . Desta forma, concluímos que  $f(x) = ax + b$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  onde  $a = f(x+1) - f(x) < 0$  e  $b = f(0)$ .

Reciprocamente suponhamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja dada por  $f(x) = ax + b$ , com  $a \neq 0$ . Para fixar as ideias admitimos  $a > 0$ . Então se  $x_1 < x_2$  temos que:

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b = a \cdot (x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1),$$

ou seja  $f$  é monótona crescente. Portanto injetiva.

Além disso, para  $x \in \mathbb{R}$  e  $h \in \mathbb{R}$  temos:

$$f(x+h) - f(x) = a(x+h) + b - ax - b = ah,$$

ou seja, o acréscimo  $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$  só depende de  $h$  (e não de  $x$ ). Se tivéssemos  $a < 0$  então  $f$  seria decrescente e o resultado é válido.

□

No teorema fundamental da proporcionalidade e também no teorema de caracterização das funções afins consideramos funções definidas em toda reta, isto é,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . É claro que resultado análogo ainda é válido para funções definidas somente para valores não negativos, ou seja, funções do tipo  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . As demonstrações são praticamente as mesmas e por isso as omitimos.

**Teorema 1.3.3** *Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  um função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$  e todo  $x \in [0, \infty)$ .
- (2)  $f(x) = ax$  para todo  $x \in [0, \infty)$  onde  $a = f(1) > 0$ .
- (3)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in [0, \infty)$ .

**Corolário 1.3.2** *Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função decrescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$  e todo  $x \in [0, \infty)$ .
- (2)  $f(x) = ax$  para todo  $x \in [0, \infty)$  onde  $a = f(1) < 0$ .
- (3)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in [0, \infty)$ .

**Teorema 1.3.4** *Uma função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona injetiva (crescente ou decrescente) e o acréscimo  $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$  depende apenas de  $h$  (e não de  $x$ ) se, e somente se,  $f$  é uma função afim  $f(x) = ax + b$ , com  $a = f(1) - f(0) \neq 0$  e  $b = f(0)$ .*

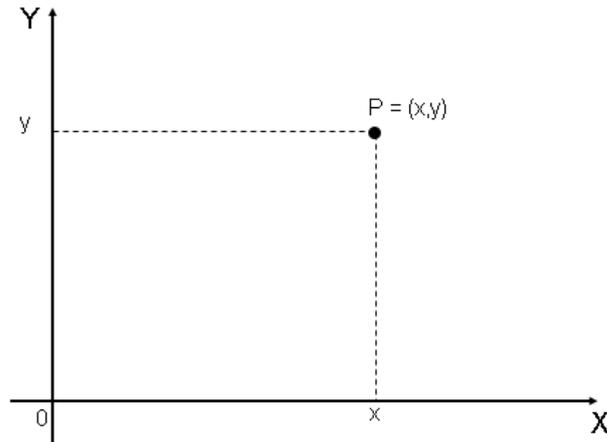
## 1.4 Gráfico da função afim

Um conceito extremamente importante para o estudo de funções é o que chamamos de gráfico de uma função. Se conhecemos o gráfico de uma determinada função é como se tivéssemos uma "foto" desta função. Ao visualizarmos o gráfico de uma função temos todas as informações sobre ela, como por exemplo, intervalos de crescimento ou decrescimento, máximos e mínimos, comportamento assintótico, raízes e intercepto com eixos coordenados. O conceito de gráfico de uma função é um conceito matemático crucial para compreensão de fenômenos naturais e aqui estamos diante de mais um exemplo que corrobora a nossa tese de que a matemática é um instrumento indispensável para o estudo da Física.

Em toda esta seção identificamos o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  com um plano  $\Pi$ , por meio de um sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$ , fixado, formado por uma origem

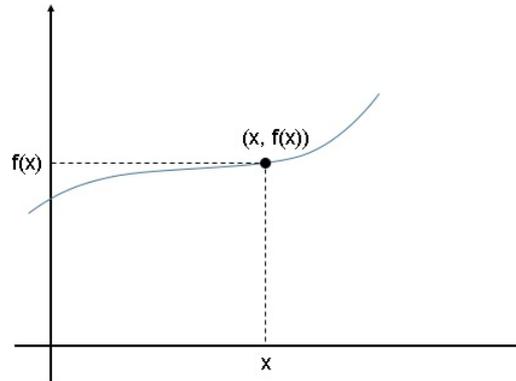
$O \in \Pi$  e dois eixos (retas) perpendiculares  $OX$  e  $OY$ . Via esta identificação todo ponto  $P \in \Pi$  é um par ordenado  $(x, y)$ , onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas da projeção ortogonal de  $P$  sobre os eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Reciprocamente, todo par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  determina um ponto  $P \in \Pi$ .

Figura 2 – Representação do ponto  $P(x, y)$ .



O objetivo desta seção é provar que o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical (isto é, não paralela ao eixo  $OY$ ) e reciprocamente toda reta não vertical é gráfico de uma função afim. Da geometria euclidiana, os conceitos de ponto, reta e plano são tidos como "conceitos primitivos", ou seja, prescindem de definições formais. De fato, com os elementos primitivos (ponto, reta e plano) são fixados um conjunto de axiomas e todas propriedades são deduzidas através do raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados (BARBOSA, 1995). Iniciamos a discussão com a definição seguinte.

**Definição 1.4.1** Dada uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o gráfico de  $f$  é o conjunto do plano definido por  $G(f) = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 ; x \in D \}$ .

Figura 3 – Gráfico de uma função  $f$ .

Para nosso propósito, segundo a Geometria Euclidiana, especificamente o resultado conhecido como desigualdade triangular (veja teorema 5.11 - página 56 da referência [Barbosa \(1995\)](#)), temos que o  $G(f)$  é uma reta se, e somente se, dados quaisquer  $x_1 < x_2 < x_3$  tem-se que:

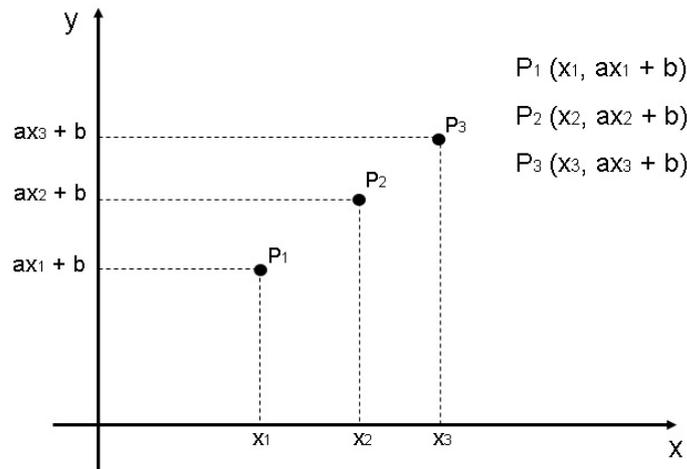
$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3),$$

onde  $P_1 = (x_1, f(x_1))$ ,  $P_2 = (x_2, f(x_2))$ ,  $P_3 = (x_3, f(x_3))$  e  $d(P, Q) = \overline{PQ}$  é a distância do ponto  $P$  ao ponto  $Q$ .

**Teorema 1.4.1** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função afim então o gráfico de  $f$  é uma reta não vertical.*

**Demonstração.** Para provarmos o resultado basta mostrar que três pontos quaisquer do gráfico de  $f$  sempre são colineares, isto é, estão numa mesma reta. Logo, como  $f$  é uma função afim, temos que  $f$  é da forma  $f(x) = ax + b$ , com  $a$  e  $b$  constantes. Sejam  $P_1, P_2, P_3 \in G(f)$ . Então existem números reais  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , para os quais sem perda de generalidade podemos supor que  $x_1 < x_2 < x_3$ , e

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b), \quad P_2 = (x_2, ax_2 + b) \quad \text{e} \quad P_3 = (x_3, ax_3 + b).$$

Figura 4 – Pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  no gráfico de  $f$ 

Neste caso,  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são colineares se, e somente se,

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3),$$

onde  $d(P, Q)$  denota a distância do ponto  $P$  ao ponto  $Q$ . Usando a fórmula da distância entre dois pontos, obtemos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} = \sqrt{1(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(1 + a^2)(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}. \end{aligned}$$

De modo análogo, observamos que:

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \quad \text{e} \quad d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) &= (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \\ &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = d(P_1, P_3), \end{aligned}$$

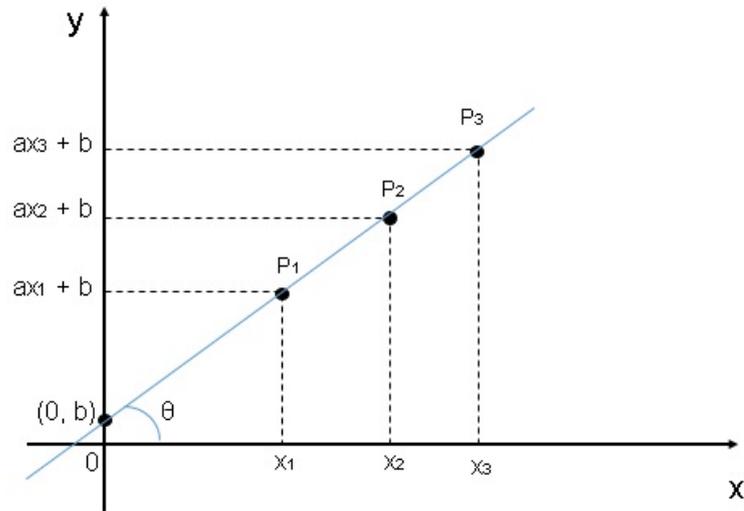
ou seja,

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3),$$

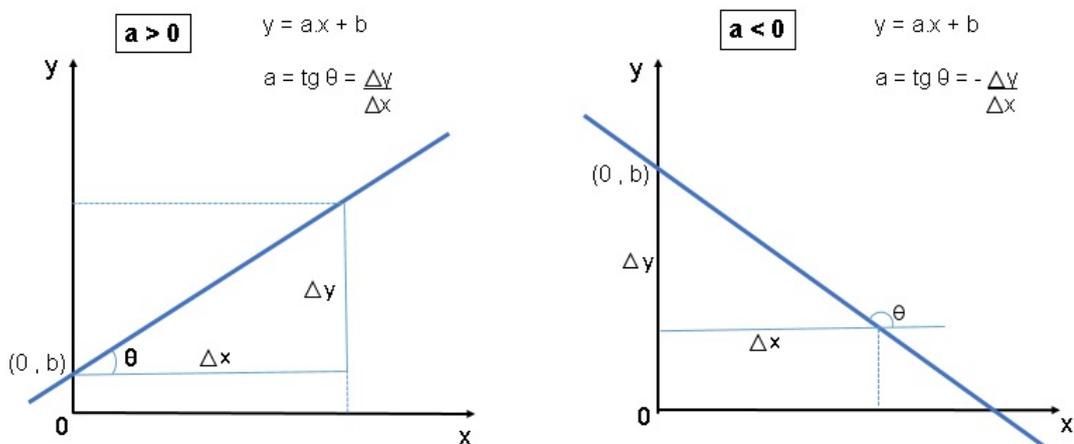
o que completa a demonstração do teorema.

□

Figura 5 – Gráfico de uma função afim.



**Observação:** Dada uma função afim  $f(x) = ax + b$ , o número  $b$  é chamado coeficiente linear da reta e geometricamente ele é a ordenada do ponto  $(0, b)$  onde o gráfico da função  $f$  intersecta o eixo  $OY$ . Por outro lado, o número  $a$  é denominado coeficiente angular (ou inclinação) da reta, e geometricamente este coeficiente é a tangente do ângulo  $\theta$  que a reta (gráfico de  $f$ ) faz com o eixo  $OX$  (no sentido anti-horário). Logo este coeficiente mede o quão inclinada a reta (gráfico de  $f$ ) está em relação à posição horizontal. Quanto maior o valor de  $a$  mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando  $a > 0$  o gráfico de  $f$  é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando  $a < 0$ , a reta é descendente.

Figura 6 – Gráficos com  $a > 0$  e  $a < 0$ .

**Teorema 1.4.2** *Toda reta não vertical no plano é gráfico de uma única função afim.*

**Demonstração.** Seja  $r$  uma reta não vertical no plano  $\Pi$  e provemos que existe uma única função afim  $f$  cujo gráfico é a reta  $r$ . Para construirmos a função afim  $f$  desejada, observamos que  $f$  deve ser da forma  $f(x) = ax + b$  e portanto  $f$  estará inteiramente determinada se encontramos os valores das constantes  $a$  e  $b$ . Dados  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  dois pontos quaisquer na reta  $r$ , temos obviamente que  $x_1 \neq x_2$ , pois a reta é não vertical, e assim o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 a + b = y_1 \\ x_2 a + b = y_2 \end{cases}$$

admite uma única solução dada por

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}. \quad (1.3)$$

Logo a função afim  $f(x) = ax + b$ , com  $a$  e  $b$  dados por (1.3), é única função cujo gráfico é a reta  $r$ .

□

## 1.5 Retorno à função horária do M.R.U.

Na Seção 1.2 introduzimos o M.R.U. e vimos que sua função horária  $s : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as duas propriedades abaixo:

$s$  é monótona e injetiva (equivalentemente, crescente ou decrescente);

$\phi(h) = s(t + h) - s(t)$  depende apenas de  $h$  mas não de  $t$ .

Portanto, pelo Teorema (1.3.4), de caracterização das funções afins, devemos ter que

$$s(t) = v \cdot t + s_0, \quad t \geq 0,$$

onde a constante  $v = s(1) - s(0) \neq 0$  é o espaço percorrido na unidade de tempo e  $s_0 = s(0)$  é a posição inicial. Ainda pelo teorema de caracterização temos que  $v > 0$  quando  $s$  é crescente, o movimento é na direção positiva da trajetória (chamado de movimento progressivo). Analogamente  $v < 0$  quando  $s$  é decrescente, o movimento é na direção contrária da orientação positiva da trajetória (chamado movimento retrógrado).

Alternativamente, podemos deduzir a função horária do M.R.U. usando o conceito de velocidade. Esta é a abordagem adotada pela imensa maioria dos livros didáticos de física usados no ensino médio. Entretanto, os livros didáticos assumem uma certa simplificação, uma espécie de atalho, que ao invés de ajudar a compreensão do assunto compromete a eficácia de seu real entendimento. Concretamente nos referimos à discussão dada pelo Teorema (1.5.1) que geralmente é omitida dos textos didáticos do ensino médio.

O conceito de velocidade de um móvel está relacionado à rapidez com que este varia sua posição, ao longo do tempo. Suponha que um móvel se desloque em uma linha reta (movimento retilíneo) e que sua posição  $s$  em cada instante de tempo  $t$  seja dada por uma função  $s = s(t), t \geq 0$ . Portanto, num instante de tempo  $t_1$  a posição do móvel é  $s(t_1)$  enquanto que num instante subsequente ( $t_2 > t_1$ ) a posição é  $s(t_2)$ . Assim a variação da posição do móvel no intervalo de tempo de  $t_1$  a  $t_2$ , chamada de **deslocamento do móvel no intervalo de tempo**  $[t_1, t_2]$  é o número  $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ . Observe que o deslocamento é uma variação de posição portanto uma grandeza que pode ser positiva, negativa ou até mesmo nula, dependendo se  $s(t_2) \geq s(t_1)$  ou  $s(t_1) \geq s(t_2)$ . Um dado interessante na descrição do movimento do móvel é saber como a posição deste varia em função do tempo, ou seja, o quociente entre o deslocamento e o tempo decorrido nos dá alguma informação sobre o movimento. Assim chegamos a definição de velocidade média do móvel no intervalo de tempo de  $t_1$  a  $t_2$ .

**Definição 1.5.1** *A velocidade média do móvel no intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$  é o número*

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Note que a velocidade média em geral depende de um intervalo de tempo considerado, é positiva se o móvel se deslocou no sentido positivo do eixo (da trajetória) e negativa quando o móvel se desloca no sentido contrário da orientação positiva da trajetória. Além disso a velocidade média não dá qualquer informação sobre o movimento nos tempos intermediários do intervalo  $[t_1, t_2]$ . Entretanto quando afirmamos que o móvel se desloca com M.R.U. a situação é simplificada, ou seja temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.5.1** *Um móvel se desloca em M.R.U. se, e somente se, se movimenta numa trajetória retilínea, sempre num mesmo sentido e a velocidade média sobre qualquer intervalo de tempo é constante.*

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que um móvel se desloque em M.R.U.. Então, por definição, o móvel se movimenta numa trajetória retilínea, sempre num mesmo sentido e em tempos iguais percorre espaços iguais. Desta última afirmação vemos que a diferença  $[s(t+h) - s(t)]$  depende somente de  $h$  e não de  $t$ . Para fixar as ideias admitimos que o deslocamento seja no sentido positivo da trajetória, então a função

$$\phi(h) = s(t+h) - s(t), \quad h \geq 0$$

é monótona crescente (no caso contrário, ou seja se o deslocamento fosse no sentido contrário à orientação da trajetória, teríamos uma função monótona decrescente e a argumentação seria análoga). Além disso  $\phi(0) = 0$  e

$$\begin{aligned}\phi(h+k) &= s(t+h+k) - s(t) = s((t+k)+h) - s(t+k) + s(t+k) - s(t) \\ &= [s((t+k)+h) - s(t+k)] + [s(t+k) - s(t)] = \phi(h) + \phi(k), \quad \forall h, k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Portanto o teorema fundamental da proporcionalidade resulta que  $\phi(h) = \phi(1) \cdot h$  ou ainda,

$$\frac{\phi(h)}{h} = \phi(1) = \text{constante}.$$

Logo, dados  $0 \leq t_1 < t_2$  quaisquer, denotamos por  $h = t_2 - t_1$  e resulta que a velocidade média no intervalo  $[t_1, t_2]$  é

$$V_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_1+h) - s(t_1)}{h} = \frac{\phi(h)}{h} = \phi(1) = \text{constante}.$$

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente suponha que um móvel se movimente numa trajetória retilínea, sempre num mesmo sentido e que a velocidade média sobre qualquer intervalo de tempo é constante. Então dados  $t$  e  $h$  temos que a velocidade média no intervalo  $[t, t+h]$  é

$$\text{constante} = v = V_m = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \Rightarrow s(t+h) - s(t) = h \cdot v,$$

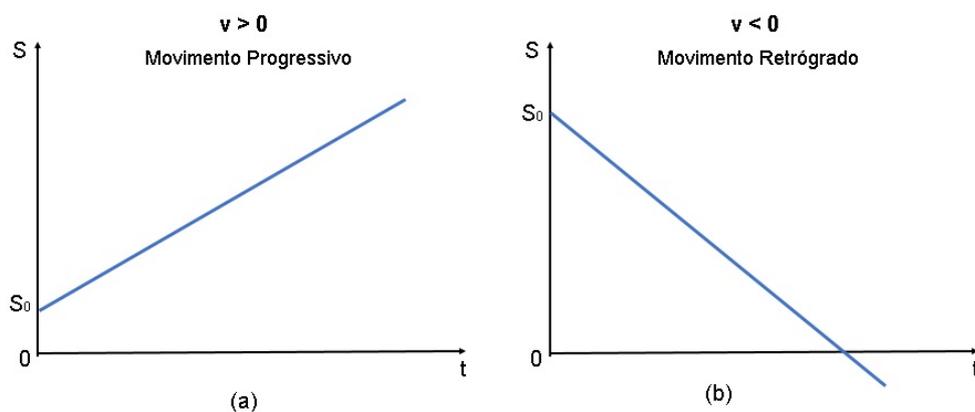
ou seja, a diferença  $s(t+h) - s(t)$  depende somente de  $h$  e não de  $t$ , o que conclui a demonstração do teorema. □

De posse deste teorema podemos facilmente deduzir a função horária do M.R.U.. De fato, desde que a velocidade média em qualquer intervalo de tempo é sempre uma constante  $v$ , dado um tempo  $t$  qualquer temos que a velocidade média no intervalo  $[0, t]$  é:

$$v = \frac{s(t) - s_0}{t} \Rightarrow s(t) = v \cdot t + s_0, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (1.4)$$

Normalmente somente este último parágrafo é apresentado nos livros didáticos de Física, do ensino médio, o que deixa muito a desejar sobre os aspectos matemáticos envolvidos na teoria. Também, de (1.4), levando-se em conta que o gráfico de qualquer função afim é uma reta, de modo análogo à Figura 5 temos as seguintes possibilidades para o gráfico da função horária do M.R.U.:

Figura 7 – Gráficos: M.R.U. Progressivo (a) e Retrógrado (b).



Um fato interessante é que se um móvel se desloca num M.R.U e conhecemos a constante  $v$  (velocidade média em qualquer intervalo de tempo) então podemos facilmente obter o deslocamento  $\Delta S$  do móvel em qualquer intervalo de tempo  $\Delta t$ , de um instante  $t_1$  até um instante  $t_2$ , por:

$$\Delta S = S(t_2) - S(t_1) = v \cdot (t_2 - t_1) = v \cdot \Delta t,$$

isto é,

$$\Delta S = v \cdot \Delta t. \quad (1.5)$$



## 2 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado - M.R.U.V.

Neste segundo capítulo da dissertação foi introduzido o conceito de velocidade instantânea, essencial para definirmos o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado. Na sequência, definimos o M.R.U.V., bem como os conceitos matemáticos fundamentais para o entendimento deste movimento.

### 2.1 Velocidade instantânea

No capítulo anterior discutimos o conceito de velocidade média de um móvel em um determinado intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$  e observamos que este conceito nada informa sobre como se dá o movimento nos instantes de tempo intermediários, exceto se o móvel estiver em M.R.U. onde a velocidade média em qualquer intervalo de tempo é sempre a mesma constante. Por exemplo, se um carro percorre o trajeto de 80 km, entre as cidades de Cianorte e Maringá, no tempo de 1 hora, sua velocidade média durante a viagem foi de 80 km/h. Porém, isso não quer dizer que o carro manteve, durante todo o trajeto, o velocímetro marcando a velocidade de 80 km/h. É provável que em alguns momentos o velocímetro tenha marcado 120 km/h, 100 km/h, 60 km/h, ou até mesmo zero, caso o veículo tenha parado. A velocidade média só fornece a informação de que em 1 hora o carro percorreu 80 quilômetros, mas não diz mais nada sobre a viagem. Se um segundo veículo percorresse o mesmo trajeto e gastasse 30 minutos, isso implicaria que sua velocidade média seria igual a 160 km/h, o que também não diz coisa alguma sobre a viagem, exceto que o percurso de 80 km foi realizado em 30 minutos.

Pela situação acima exemplificada e a observação do velocímetro dos automóveis podemos notar que estes possuem uma velocidade em cada instante de tempo a qual é denominada velocidade instantânea. O ponto crucial desta discussão é: Como definir (calcular) a velocidade instantânea? Observe que para o cálculo da velocidade instantânea não temos mais um intervalo de tempo como tínhamos no cálculo da velocidade média, agora precisamos levar em conta somente um determinado instante  $t_0$ . Nos deparamos com uma situação análoga quando desejamos determinar o movimento de um objeto em queda livre, isto é que cai de uma certa altura somente pela ação da força gravitacional (aqui desprezamos os efeitos da resistência do ar). Neste caso, experiências mostram que se dividirmos o tempo de queda em intervalos de tempos iguais, digamos para ilustrar, intervalos de 10 segundos cada, vemos que as velocidades médias em cada um destes intervalos vai aumentando à medida em que o tempo aumenta. Ou ainda, a velocidade

media no intervalo de 0 a 10 segundos é menor do que a velocidade média no intervalo de 10 a 20 segundos e assim sucessivamente. Assim as velocidades médias não são constantes e com isso o movimento não é uniforme (em que tempos iguais percorre-se espaços iguais). Novamente a questão crucial é como mensurar o quão rápido o objeto está se movendo aos exatos 8 segundos ?

Este problema de se definir a velocidade de um móvel em um instante de tempo foi crucial para o desenvolvimento da ciência e foi o responsável pela criação do Cálculo Diferencial e Integral, a maior e mais importante criação da mente humana. Vejamos então como podemos definir a velocidade instantânea. Suponhamos, por simplicidade, que um móvel se movimenta em uma trajetória retilínea representada por meio de uma reta numérica, onde fixamos uma origem e um sentido (positivo) e seja  $s = s(t)$ ,  $t \geq 0$ , a função posição do móvel no instante de tempo  $t$ . Dado um instante  $t_0 > 0$  desejamos definir a velocidade (instantânea) neste ponto  $t_0$ . Para isto calculamos as velocidades médias em intervalos de tempo imediatamente à direita do ponto  $t_0$ , isto é, intervalos do tipo  $[t_0, t]$  com  $t > t_0$  e também calculamos as velocidades médias em intervalos imediatamente à esquerda do ponto  $t_0$ , intervalos do tipo  $[t, t_0]$  com  $t < t_0$ . Assim definimos:

**Definição 2.1.1** *A velocidade (instantânea) no ponto  $t_0$ , que denotamos por  $v(t_0)$ , é o número real (o valor numérico) para o qual se aproximam as velocidades médias nos intervalos cada vez menores, em torno do ponto  $t_0$ , tanto à direita quanto à esquerda do ponto  $t_0$ . É comum usarmos a notação abaixo para representar a velocidade instantânea no ponto  $t_0$ :*

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} V_m([t_0, t]) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

A expressão (2.1) é lida da seguinte forma: "a velocidade no ponto  $t_0$  é o limite das velocidades médias nos intervalos cada vez menores, em torno do ponto  $t_0$ , tanto à direita quanto à esquerda do ponto  $t_0$ ". Também é comum interpretar o limite acima dizendo que a velocidade instantânea é a taxa de variação instantânea do espaço em relação ao tempo.

Vejamos um exemplo: suponha que a posição de um móvel que se desloca em uma trajetória retilínea seja fornecida pela função horária  $S(t) = 1 + 2t + t^2$  onde  $S$  é dado em metros e  $t$  é dado em segundos. Calculando-se as velocidades média em diferentes intervalos de tempo, cada vez menores à direita do instante  $t = 5$  temos a tabela:

Intervalo ( $5 \leq t \leq t_i$ )	$S(t_i)$	$S(5)$	$v_m = \frac{S(5)-S(t_i)}{5-t_i}$
$(5,00 \leq t \leq 9,00)$	100,00	36,00	8,00
$(5,00 \leq t \leq 8,00)$	81,00	36,00	9,00
$(5,00 \leq t \leq 7,00)$	64,00	36,00	10,00
$(5,00 \leq t \leq 6,00)$	49,00	36,00	11,00
$(5,00 \leq t \leq 5,50)$	42,25	36,00	11,50
$(5,00 \leq t \leq 5,20)$	38,44	36,00	11,80
$(5,00 \leq t \leq 5,10)$	37,21	36,00	11,90
$(5,00 \leq t \leq 5,01)$	36,12	36,00	11,99

Tabela 1 – Velocidade média para diferentes intervalos à direita de  $t = 5$ .

Analogamente, para intervalos à esquerda de  $t = 5$  temos a tabela:

Intervalo ( $t_i \leq t \leq 5$ )	$S(t_i)$	$S(5)$	$v_m = \frac{S(5)-S(t_i)}{5-t_i}$
$(1,00 \leq t \leq 5,00)$	4,00	36,00	16,00
$(2,00 \leq t \leq 5,00)$	9,00	36,00	15,00
$(3,00 \leq t \leq 5,00)$	16,00	36,00	14,00
$(4,00 \leq t \leq 5,00)$	25,00	36,00	13,00
$(4,50 \leq t \leq 5,00)$	30,25	36,00	12,50
$(4,80 \leq t \leq 5,00)$	33,64	36,00	12,20
$(4,90 \leq t \leq 5,00)$	34,81	36,00	12,10
$(4,99 \leq t \leq 5,00)$	35,88	36,00	12,01

Tabela 2 – Velocidade média para diferentes intervalos à esquerda de  $t = 5$ .

Analisando as tabelas acima podemos ver que quanto menor a amplitude do intervalo de tempo considerado, tanto à direita quanto à esquerda do ponto  $t = 5$ , mais próximo do valor 12 estão as respectivas velocidades médias. Ou ainda as velocidades médias se tornam arbitrariamente próximas de 12 à medida em que a amplitude do intervalo de tempo, tanto à direita quanto à esquerda de  $t = 5$  se torna arbitrariamente pequena. Portanto pela definição concluímos que a velocidade (instantânea) do móvel no instante de tempo  $t = 5$  segundos é 12 m/s, isto é:

$$v(5) = 12.$$

Por meio da definição (2.1.1) faz sentido calcular a velocidade do móvel em cada instante de tempo  $t \geq 0$  e com isto obtemos a função velocidade  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  onde em cada ponto  $t \geq 0$  tem-se:

$$v(t) = \lim_{\xi \rightarrow t} V_m([t, \xi]) = \lim_{\xi \rightarrow t} \frac{s(\xi) - s(t)}{\xi - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

## 2.2 O M.R.U.V. e sua função horária

O movimento retilíneo uniformemente variado que abreviadamente escrevemos M.R.U.V., por definição, é todo movimento que se dá numa reta (a trajetória é uma linha reta), com velocidade não constante, de modo que para intervalos de tempos iguais as variações da velocidade são iguais. Logo de acordo com a caracterização das funções afins, significa dizer que **o M.R.U.V. é um movimento em uma reta com velocidade dada por uma função afim  $v(t) = a \cdot t + v_0$  onde  $a$  e  $v_0$  são constantes, com  $a \neq 0$** . Ainda pelo que estudamos sobre as funções afins, a constante  $a = v(1) - v(0)$  é a variação da velocidade por unidade de tempo que recebe o nome de "aceleração" (taxa de variação da velocidade). Portanto equivalentemente podemos dizer que o M.R.U.V. é um movimento em uma reta com aceleração constante não nula.

Uma simples análise dos sinais das constantes  $a$  e  $v_0$  que aparecem na função velocidade  $v(t) = a \cdot t + v_0$  nos permite concluir algumas características interessantes do movimento. De fato, graficamente temos:

Figura 8 – Gráfico de  $v(t)$  versus  $t$  para  $a > 0$ .

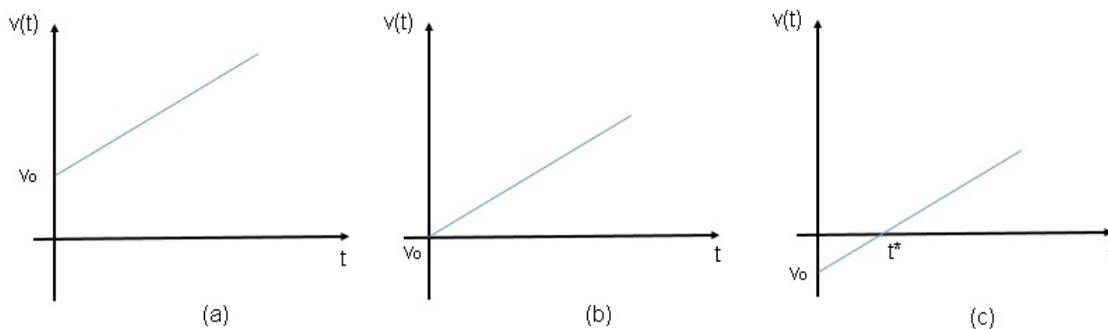
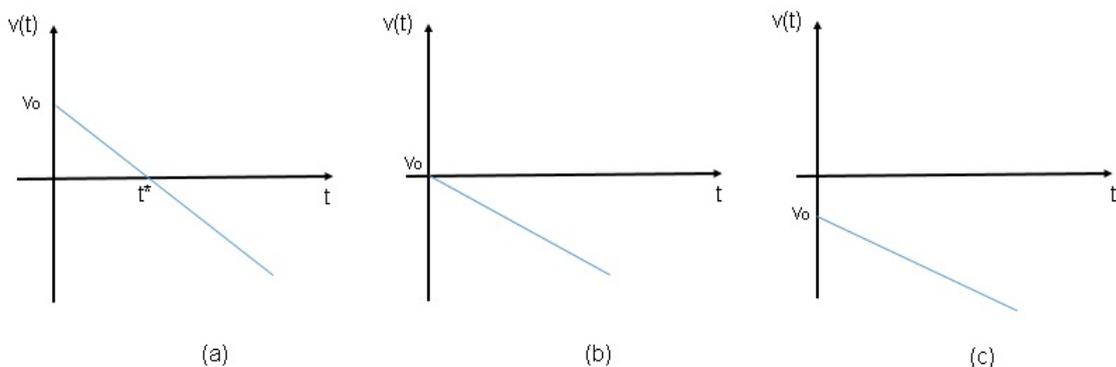


Figura 9 – Gráfico de  $v(t)$  versus  $t$  para  $a < 0$ .



Logo podemos afirmar que:

i) Somente quando  $a$  e  $v_0$  tem sinais contrários é que teremos troca de sinal na velocidade,

ou seja, haverá inversão do sentido no movimento. No caso em que  $a > 0$  e  $v_0 < 0$  (veja figura 8(c)) existe um instante  $t^* > 0$  tal que

$$\begin{cases} v(t) < 0 & \text{se } t \in (0, t^*); \\ v(t^*) = 0; \\ v(t) > 0 & \text{se } t \in (t^*, \infty); \end{cases} \quad (2.2)$$

de onde vemos que o móvel inicia seu movimento, com velocidade  $v_0 < 0$ , a partir de uma posição inicial  $s_0$ , no sentido contrário à orientação positiva da trajetória, até parar no instante de tempo  $t^*$ , onde inverte o sentido do movimento e segue aumentando a velocidade linearmente. Por outro lado quando  $a < 0$  e  $v_0 > 0$  (veja figura 9(a)) existe um instante  $t^* > 0$  tal que

$$\begin{cases} v(t) > 0 & \text{se } t \in (0, t^*); \\ v(t^*) = 0; \\ v(t) < 0 & \text{se } t \in (t^*, \infty); \end{cases} \quad (2.3)$$

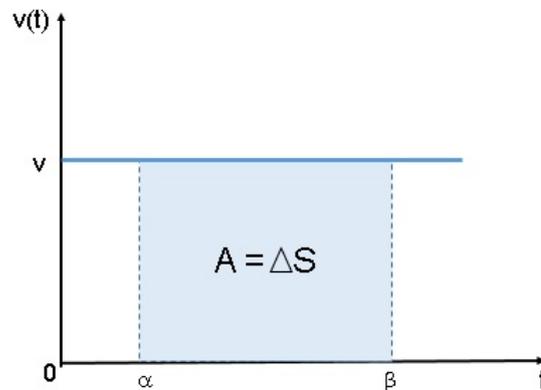
de onde vemos que o móvel inicia seu movimento, com velocidade  $v_0 > 0$ , a partir de uma posição inicial  $s_0$ , no sentido da orientação positiva da trajetória, até parar no instante de tempo  $t^*$ , onde inverte o sentido do movimento e segue aumentando o valor absoluto da velocidade (velocidade escalar =  $|v(t)|$ ) linearmente.

ii) Se  $a > 0$  e  $v_0 \geq 0$  (veja figuras 8(a) e 8(b)) o móvel inicia seu movimento, com velocidade  $v_0$ , a partir de uma posição inicial  $s_0$ , no sentido da orientação positiva da trajetória e segue aumentando-a linearmente.

iii) Se  $a < 0$  e  $v_0 \leq 0$  (veja figuras 9(b) e 9(c)) o móvel inicia seu movimento, com velocidade  $v_0$ , a partir de uma posição inicial  $s_0$ , no sentido contrário ao da orientação positiva da trajetória e segue aumentando o valor absoluto da velocidade (velocidade escalar =  $|v(t)|$ ) linearmente.

A questão essencial que resta para o completo entendimento do M.R.U.V. é: como obter a função horária deste movimento? Observamos que no M.R.U., estudado no capítulo anterior, as velocidades médias são iguais a uma mesma constante em qualquer intervalo de tempo considerado. Portanto, neste caso, a função velocidade (instantânea) é constante igual a velocidade média, isto é,  $v(t) = v, \forall t \in [0, \infty)$ . Logo, de acordo com (1.5), temos que o deslocamento  $\Delta s$  do móvel, relativo a um intervalo de tempo  $[\alpha, \beta]$  é  $\Delta s = v \cdot \Delta t = v \cdot (\beta - \alpha)$ . Observando o gráfico da função velocidade, que neste caso é uma função constante, supondo  $v > 0$ , geometricamente vemos que  $\Delta s$  é a área  $A$  da região (retangular) delimitada pelo gráfico da função velocidade, as retas  $t = \alpha$ ,  $t = \beta$  e o eixo  $t$  (veja a figura abaixo). Analogamente se  $v < 0$  então  $\Delta s = -A$ .

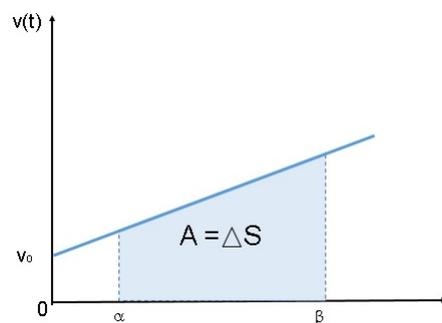
Figura 10 – Velocidade constante



O fato crucial para a dedução da função horária do M.R.U.V. é que a interpretação acima, para o deslocamento  $\Delta s$  como área abaixo do gráfico da função velocidade continua válida no caso do M.R.U.V., quando  $v(t) \geq 0$ . Isto é o que estabelecemos no resultado que segue.

**Teorema 2.2.1** *Suponha que um móvel se desloca em M.R.U.V. e  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $v(t) = at + v_0$  seja sua função velocidade. Se  $a > 0$  e  $v_0 \geq 0$ , então o deslocamento do móvel  $\Delta s = s(\beta) - s(\alpha)$ , em um intervalo de tempo  $[\alpha, \beta]$ , é igual a área  $A$  da região trapezoidal delimitada pelo gráfico de  $v$ , o eixo  $t$  e as retas  $t = \alpha$  e  $t = \beta$ .*

Figura 11 – Região trapezoidal



**Demonstração.** Nas hipóteses do teorema temos que  $v$  é uma função crescente e não negativa. Para cada número natural  $n$  dividimos o intervalo de tempo  $[\alpha, \beta]$  em  $n$  partes iguais, ou seja, tomamos uma partição do intervalo  $[\alpha, \beta]$  dada pelos pontos:

$$\mathcal{P} = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta\},$$

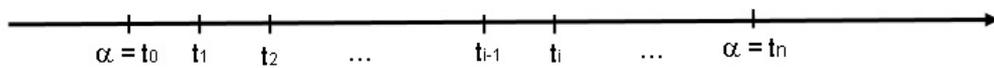
que dividem o intervalo  $[\alpha, \beta]$  em  $n$  subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$  de igual comprimento dado por

$$\Delta t = \frac{\beta - \alpha}{n} = (t_i - t_{i-1}). \quad (2.4)$$

Notamos que quanto maior o número  $n$ , menor será comprimento  $\Delta t$  dos subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t = 0.$$

Figura 12 – Partição do intervalo  $[\alpha, \beta]$ .

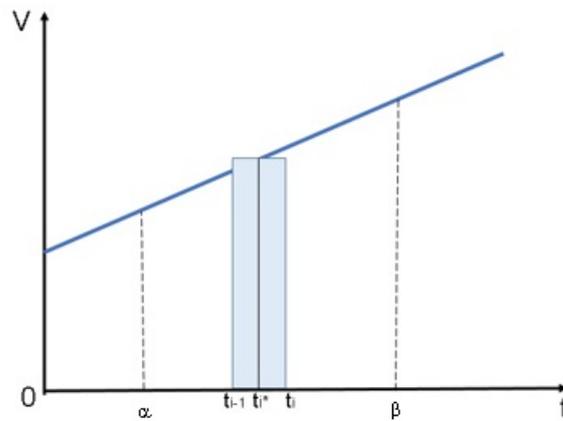


Agora denotamos por  $t_i^*$  o ponto médio de cada um dos subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , isto é:

$$t_i^* = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n;$$

e fazemos a seguinte hipótese de simplificação: **suponha que durante todo o intervalo de tempo  $[t_{i-1}, t_i]$  a velocidade do móvel seja constante igual ao valor registrado no ponto médio do intervalo, isto é,  $v(t_i^*)$ .** É claro que no movimento real a velocidade **não foi constante** mas se o intervalo de tempo é bem pequeno (alguns milésimos de segundos, por exemplo), o deslocamento real fica muito próximo do deslocamento quando se supõe a velocidade constante, ou ainda, a distância percorrida pelo móvel durante o intervalo de tempo  $[\alpha, \beta]$  pode ser aproximada (estimada) pela soma das distâncias percorridas em cada um dos subintervalo, com velocidades constantes  $v(t_i^*)$ . Esta hipótese de simplificação é chave para a solução do problema.

Figura 13 – Velocidade constante no i-ésimo intervalo



Por meio deste raciocínio podemos escrever:

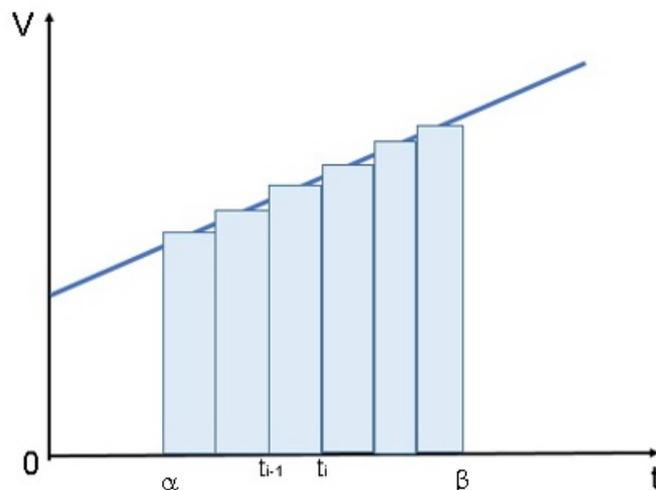
$$\Delta s = s(\beta) - s(\alpha) \cong \sum_{i=1}^n \Delta s_i, \quad (2.5)$$

onde

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = v(t_1^*) \Delta t + v(t_2^*) \Delta t + \dots + v(t_n^*) \Delta t = \sum_{i=1}^n v(t_i^*) \Delta t, \quad (2.6)$$

e a aproximação (2.5) é tão melhor quanto maior for o número  $n$ , o que significa que

$$\Delta s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta s_i. \quad (2.7)$$

Figura 14 – Aproximação geométrica para  $\Delta S$ 

Por outro lado, observamos que geometricamente  $\Delta s_i = v(t_i^*) \Delta t$  é a área  $A_i$  do retângulo de altura  $v(t_i^*)$  e base  $[t_{i-1}, t_i]$ , conforme a Figura 11, logo acima. Portanto, intuitivamente é de se esperar que o limite (2.7) seja igual a área da região trapezoidal delimitado pelo gráfico de  $v$ , o eixo  $t$  e as retas  $t = \alpha$  e  $t = \beta$ . Provemos analiticamente tal afirmação. Para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  temos que

$$t_{i-1} = \alpha + (i-1)\Delta t \quad \text{e} \quad t_i = \alpha + i\Delta t,$$

então

$$t_i^* = \frac{t_{i-1} + t_i}{2} = \alpha + i\Delta t - \frac{\Delta t}{2}.$$

Consequentemente

$$v(t_i^*) \cdot \Delta t = [a\alpha + v_0] \Delta t + ia(\Delta t)^2 - \frac{a}{2}(\Delta t)^2. \quad (2.8)$$

Somando em  $i$  a expressão (2.8) e usando (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v(t_i^*) \cdot \Delta t &= [a\alpha + v_0] \Delta t n + a(\Delta t)^2 \sum_{i=1}^n i - \frac{a}{2}(\Delta t)^2 n \\ &= [a\alpha + v_0] (\beta - \alpha) + a \frac{(\beta - \alpha)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{a}{2} \frac{(\beta - \alpha)^2}{n} \\ &= [a\alpha + v_0] (\beta - \alpha) + \frac{a}{2} (\beta - \alpha)^2 \left( \frac{n+1}{n} \right) - \frac{a}{2} \frac{(\beta - \alpha)^2}{n}. \end{aligned}$$

De (2.7), passando ao limite na igualdade acima quando  $n \rightarrow \infty$ , resulta que

$$\begin{aligned} \Delta s &= [a\alpha + v_0] (\beta - \alpha) + \frac{a}{2} (\beta - \alpha)^2 = \left[ (a\alpha + v_0) + \frac{a}{2} (\beta - \alpha) \right] (\beta - \alpha) \\ &= [(a\alpha + v_0) + (a\beta + v_0)] \frac{(\beta - \alpha)}{2} = [v(\alpha) + v(\beta)] \frac{(\beta - \alpha)}{2} = A, \end{aligned}$$

onde  $A$  é a área da região trapezoidal delimitado pelo gráfico de  $v$ , o eixo  $t$  e as retas  $t = \alpha$  e  $t = \beta$ . Isto completa a demonstração do teorema.

□

Observe com atenção que em toda a demonstração do teorema (2.2.1) só usamos a hipótese de que  $a > 0$  e  $v_0 \geq 0$  na última igualdade, onde afirmamos que a área  $A$  da região trapezoidal descrita no enunciado do teorema é dada por

$$A = [\text{base menor} + \text{base maior}] \frac{(\text{altura})}{2} = [v(\alpha) + v(\beta)] \frac{(\beta - \alpha)}{2}.$$

No mais, toda argumentação continua válida, mesmo quando não se supõe que  $a > 0$  e  $v_0 \geq 0$ . Desta forma, de modo geral provamos que se um móvel se desloca em M.R.U.V. com velocidade  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $v(t) = at + v_0$ , então o deslocamento do móvel, em um intervalo de tempo qualquer  $[\alpha, \beta]$  é dado por

$$\Delta s = s(\beta) - s(\alpha) = \left[ \frac{v(\alpha) + v(\beta)}{2} \right] (\beta - \alpha). \quad (2.9)$$

Bem observado, a igualdade (2.9) nos diz que **no M.R.U.V. a velocidade média em qualquer intervalo de tempo  $[\alpha, \beta]$  é a média aritmética da velocidade no início do intervalo  $v(\alpha)$  com a velocidade no final do intervalo  $v(\beta)$** , isto é:

$$V_m([\alpha, \beta]) = \frac{s(\beta) - s(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{v(\alpha) + v(\beta)}{2}. \quad (2.10)$$

Aplicando (2.10) podemos deduzir a função horária para o M.R.U.V.

**Teorema 2.2.2** *Suponha que um móvel se desloca em M.R.U.V. e  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $v(t) = at + v_0$  seja sua função velocidade. Então a função horária do móvel é dada por*

$$s(t) = \left(\frac{a}{2}\right)t^2 + v_0 t + s_0, \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (2.11)$$

onde  $s_0$  é uma contante que representa a posição inicial do móvel ( $s(0) = s_0$ ).

**Demonstração.** Seja  $t > 0$  arbitrariamente escolhido. De (2.10) a velocidade média no intervalo de tempo  $[0, t]$  é dada por:

$$\frac{s(t) - s(0)}{t - 0} = \frac{v(0) + v(t)}{2} \quad \Rightarrow \quad s(t) - s_0 = \frac{1}{2} [v_0 t + v(t) t].$$

Substituindo  $v(t) = at + v_0$  na expressão acima obtemos

$$s(t) - s_0 = \frac{1}{2} [at^2 + 2v_0 t] \quad \Rightarrow \quad s(t) = \left(\frac{a}{2}\right)t^2 + v_0 t + s_0,$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Em (2.11) nos deparamos com uma função do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes com  $a \neq 0$ , denominada função quadrática. Portanto, para que possamos compreender o M.R.U.V. é indispensável conhecer as propriedades deste tipo de função. Mais uma vez temos uma situação em que a Matemática se apresenta como ferramenta crucial para o entendimento de um fenômeno físico. Na próxima seção nos dedicamos ao estudo das funções quadráticas e depois retornamos com o M.R.U.V..

## 2.3 Funções quadráticas

Nesta seção introduzimos o conceito de função quadrática e demonstramos vários resultados importantes sobre estas funções, como cálculo de raízes da função, intervalos de crescimento e decréscimo, valores de máximo e mínimo, entre outros. Também demonstramos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola no plano cartesiano. Iniciamos por definir função quadrática.

**Definição 2.3.1** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é denominada quadrática quando existem constantes  $a, b$  e  $c$ , com  $a \neq 0$ , tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

De acordo com a definição acima vemos claramente que para toda terna de números reais  $(a, b, c)$ , com  $a \neq 0$ , está naturalmente associada uma função quadrática  $f$  dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Reciprocamente se  $f$  é uma função quadrática então existe uma, e somente, uma terna de números reais  $(a, b, c)$ , com  $a \neq 0$ , tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . De fato, suponha que  $(a, b, c)$  e  $(a', b', c')$  sejam tais que  $a \neq 0$ ,  $a' \neq 0$  e

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Então fazendo  $x = 0$  em (2.12) resulta que  $c = c'$ . Desta forma, eliminando  $c$  e  $c'$  em (2.12) obtemos que

$$ax^2 + bx = a'x^2 + b'x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Assim, para  $x \neq 0$  podemos dividir ambos os membros de (2.13) e teremos que

$$ax + b = a'x + b' \quad \text{para todo } x \neq 0. \quad (2.14)$$

Escolhendo ora  $x = 1$  e depois  $x = -1$  em (2.14) concluimos que

$$\begin{cases} a + b = a' + b' \\ -a + b = -a' + b' \end{cases}$$

de onde resulta que  $b = b'$  e  $a = a'$ .

A argumentação acima mostra que denotando

$$\mathcal{A} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; \quad a \neq 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é função quadrática}\},$$

existe uma bijeção

$$\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

dada por  $\psi(a, b, c) = f$  onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Em palavras, **toda terna de números reais cuja primeira coordenada seja não nula é uma função quadrática e reciprocamente, toda função quadrática é uma terna de números reais cuja primeira coordenada é não nula.**

Quando tratamos das funções afim, no capítulo anterior, vimos que seu gráfico é uma reta no plano e portanto toda função afim fica inteiramente determinada conhecendo-se seus valores em somente dois pontos distintos (dois pontos do gráfico). Agora para as funções quadráticas temos também um resultado análogo. Inicialmente verificamos que toda função quadrática é unicamente determinada pelos seus valores em três pontos distintos.

**Teorema 2.3.1** *Sejam  $f$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções quadráticas. Se existem três números reais distintos  $t$ ,  $y$  e  $z$  tais que  $f(t) = g(t)$ ,  $f(y) = g(y)$  e  $f(z) = g(z)$  então  $f = g$  (isto é,  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ).*

**Demonstração.** Desde que  $f$  e  $g$  são funções quadráticas temos que

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{e} \quad g(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

com  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ;  $a \neq 0$  e  $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ ;  $a' \neq 0$ . Então denotando  $h = f - g$  temos que

$$h(x) = f(x) - g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \text{com} \quad \alpha = a - a', \beta = b - b' \text{ e } \gamma = c - c'.$$

Pela hipótese vemos que  $h(t) = h(y) = h(z) = 0$ , ou seja, a terna  $(\alpha, \beta, \gamma)$  é solução do sistema linear homogêneo

$$(S) : \begin{cases} t^2 \alpha + t \beta + \gamma = 0 \\ y^2 \alpha + y \beta + \gamma = 0 \\ z^2 \alpha + z \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

cuja matriz ampliada é

$$M = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 & 0 \\ y^2 & y & 1 & 0 \\ z^2 & z & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

Usando a hipóteses de que os pontos  $t$ ,  $y$  e  $z$  são distintos temos que  $(y - t) \neq 0$ ,  $(z - t) \neq 0$  e  $(z - y) \neq 0$ . Portanto, por meio das seguintes operações elementares sobre as linhas da matriz  $M$ :

- (1)  $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$  e  $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1$
- (2)  $L_2 \leftrightarrow \left(\frac{1}{y-t}\right)L_2$  e  $L_3 \leftrightarrow \left(\frac{1}{z-t}\right)L_3$
- (3)  $L_3 \leftrightarrow L_2 - L_3$

obtemos a matriz equivalente

$$M' = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 & 0 \\ (y+t) & 1 & 0 & 0 \\ (z-y) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

de onde resulta que o sistema (S) possui uma única solução  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Consequentemente  $a = a'$ ,  $b = b'$  e  $c = c'$  ou ainda  $f = g$ .

□

**Corolário 2.3.1** *Dados três pontos  $P = (t, u)$ ,  $Q = (y, v)$  e  $R = (z, w)$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $t$ ,  $y$  e  $z$  sejam números distintos e  $P$ ,  $Q$  e  $R$  sejam não colineares existe uma, e somente uma função quadrática  $f$  com o gráfico passando pelos três pontos (ou seja, tal que  $f(t) = u$ ,  $f(y) = v$  e  $f(z) = w$ ).*

**Demonstração.** A existência de uma terna de números reais  $(a, b, c)$  tal que definindo  $f(x) = ax^2 + bx + c$  se tenha  $f(t) = u$ ,  $f(y) = v$  e  $f(z) = w$  equivale a afirmar que a terna  $(a, b, c)$  é solução do sistema linear

$$(*) : \begin{cases} t^2 a + t b + c = u \\ y^2 a + y b + c = v \\ z^2 a + z b + c = w \end{cases}$$

Desde que  $t, y$  e  $z$  são distintos um raciocínio idêntico ao utilizado na demonstração do teorema (2.3.1) nos garante que  $(*)$  tem uma única solução e, em particular, tem-se que

$$a = \frac{1}{z - y} \left( \frac{w - u}{z - t} - \frac{v - u}{y - t} \right). \quad (2.15)$$

De (2.15) podemos ver que  $a = 0$  se, e somente se

$$\frac{w - u}{z - t} = \frac{v - u}{y - t}.$$

Entretanto esta igualdade equivale a afirmar que as retas  $PR$  e  $PQ$  possuem a mesma inclinação, ou seja, os pontos  $P, Q$  e  $R$  são colineares.

Logo como por hipótese  $P, Q$  e  $R$  são não colineares resulta que  $a \neq 0$ . Resumindo existe uma única terna  $(a, b, c)$  solução do sistema linear  $(*)$  com  $a \neq 0$ . Isto prova que existe uma única função quadrática  $f$  nas condições do enunciado. □

Agora discutimos como obter os interceptos do gráfico da função quadrática com o eixo  $OX$  ou seja como obter os pontos onde a função quadrática se anula (os zeros da função). Dada uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , note que encontrar os números reais onde  $f$  se anula equivale a resolver a equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (2.16)$$

Observamos que se  $a \neq 0$  podemos reescrever o primeiro membro da equação (2.16) numa forma conveniente, chamada forma canônica:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]. \end{aligned}$$

Logo desta igualdade podemos afirmar que se  $a \neq 0$  a equação (2.16) é equivalente à equação

$$\left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0,$$

ou ainda

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (2.17)$$

A argumentação acima provou o seguinte lema:

**Lema 2.3.1** *Sejam  $a, b$  e  $c$  números reais dados, com  $a \neq 0$ . Um número real  $\alpha$  é raiz da equação (2.16) se, e somente se, é raiz da equação (2.17).*

Com o lema acima para discutirmos a existência e o cálculo de raízes para a equação do segundo grau (2.16) consideramos a equação equivalente (2.17). Como consequência imediata temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.3.2** *Sejam  $a, b$  e  $c$  números reais dados, com  $a \neq 0$ , e  $\Delta = b^2 - 4ac$ .*

a) *A equação (2.16) tem raiz real se, e somente se,  $\Delta \geq 0$ .*

b) *Se  $\Delta > 0$  a equação (2.16) possui duas raízes reais distintas dadas por*

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad (2.18)$$

*cuja soma e o produtos são, respectivamente, dados por:*

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad e \quad p = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}. \quad (2.19)$$

*Além disso a média aritmética (o ponto médio) das raízes  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por*

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{b}{2a}. \quad (2.20)$$

c) *Se  $\Delta = 0$  a equação (2.16) possui uma única raízes real dada por*

$$\gamma = -\frac{b}{2a}. \quad (2.21)$$

**Demonstração.** Basta considerar o lema (2.3.1) e efetuar cálculos simples.

□

Conforme vimos anteriormente toda função quadrática  $f$  pode ser escrita na forma canônica, de onde podemos ver que dada uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é sempre possível escreve-la na forma

$$f(x) = \left[ a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right] + \left[ \frac{4ac - b^2}{4a} \right], \quad (2.22)$$

ou ainda

$$f(x) = at^2 + K, \quad (2.23)$$

onde

$$t = \left(x + \frac{b}{2a}\right) \quad \text{e} \quad K = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}\right] \quad \text{é uma constante.} \quad (2.24)$$

Em outras palavras a identidade (2.23) diz que  $f$  é a soma de duas parcelas, uma constante e outra variável, sendo a parte variável não negativa ( $\geq 0$ ) se  $a > 0$  e não positiva ( $\leq 0$ ) se  $a < 0$ . Deste fato segue o teorema:

**Teorema 2.3.3** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função quadrática dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .*

a) *Dados  $r \neq s$  temos que  $f(r) = f(s)$  se, e somente se,  $\frac{r+s}{2} = \frac{-b}{2a}$ , ou seja, os pontos  $r$  e  $s$  são equidistantes do ponto  $x_v = \frac{-b}{2a}$ .*

b) *Se  $a > 0$  o valor mínimo de  $f$  é atingido no ponto  $x_v = \frac{-b}{2a}$  e este referido valor mínimo é  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ . Neste caso  $f$  não assume valor máximo, ou seja,  $f$  é ilimitada superiormente.*

c) *Se  $a < 0$  o valor máximo de  $f$  é atingido no ponto  $x_v = \frac{-b}{2a}$  e este referido valor máximo é  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ . Neste caso  $f$  não assume valor mínimo, ou seja,  $f$  é ilimitada inferiormente.*

**Demonstração.** De (2.23) e (2.24) vemos que

$$f(r) = f(s) \Leftrightarrow \left(r + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(s + \frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow r + \frac{b}{2a} = -\left(s + \frac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow \frac{r+s}{2} = \frac{-b}{2a},$$

onde na penúltima equivalência usamos que  $r \neq s$  e portanto  $\left(r + \frac{b}{2a}\right) \neq \left(s + \frac{b}{2a}\right)$ .

Agora demonstramos (b). Supondo  $a > 0$ , novamente de (2.23) e (2.24) vemos que o menor valor de  $f$  é atingido quando  $t = 0$ , o que demonstra que o mínimo de  $f$  é atingido em  $x_v = \frac{-b}{2a}$  e o valor mínimo é  $y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ . Observamos também que quando  $x \rightarrow \pm\infty$  temos que  $t \rightarrow \pm\infty$  e, conseqüentemente  $t^2 \rightarrow \infty$ , o que prova que os valores de  $f$  ficam arbitrariamente grandes, ou seja,  $f$  não é limitada superiormente.

A prova de (c) é inteiramente análoga e a omitimos.

□

**Corolário 2.3.2** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função quadrática dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .*

a)  $f(x) = \frac{-\Delta}{4a} = y_v \Leftrightarrow x = x_v = \frac{-b}{2a}$ .

b)  $f$  não muda de sinal se, e somente se,  $\Delta \leq 0$ . No caso afirmativo (quando  $\Delta \leq 0$ ) temos que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  se  $a > 0$  e  $f(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  se  $a < 0$ .

**Demonstração.** (a) É claro que  $f(x_v) = y_v$ . Além disso, do item (a) do teorema,  $f$  não pode assumir o valor  $y_v$  em outro ponto distinto de  $x_v$ . Agora para verificar o item (b) vejamos cada caso:

- i)  $\Delta > 0$  e  $a > 0$ . Neste caso o valor mínimo assumido  $y_v = \frac{-\Delta}{4a} < 0$  e  $f$  não é limitada superiormente. Logo deve assumir também valores positivos. Ou seja,  $f$  muda de sinal.
- ii)  $\Delta > 0$  e  $a < 0$ . Neste caso o valor máximo assumido  $y_v = \frac{-\Delta}{4a} > 0$  e  $f$  não é limitada inferiormente. Logo deve assumir também valores negativos. Ou seja,  $f$  muda de sinal.
- iii)  $\Delta \leq 0$  e  $a > 0$ . Neste caso o valor mínimo assumido  $y_v = \frac{-\Delta}{4a} \geq 0$ . Logo  $f$  não muda de sinal.
- iv)  $\Delta \leq 0$  e  $a < 0$ . Neste caso o valor máximo assumido  $y_v = \frac{-\Delta}{4a} \leq 0$ . Logo  $f$  não muda de sinal.

□

Sobre intervalos de crescimento e decrescimento das funções quadráticas temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.3.4** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função quadrática dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .*

a) *Se  $a > 0$  a função  $f$  é decrescente no intervalo  $(-\infty, \frac{-b}{2a})$  e crescente no intervalo  $(\frac{-b}{2a}, \infty)$ .*

b) *Se  $a < 0$  a função  $f$  é crescente no intervalo  $(-\infty, \frac{-b}{2a})$  e decrescente no intervalo  $(\frac{-b}{2a}, \infty)$ .*

**Demonstração.** Dados  $x_1$  e  $x_2$  em  $\mathbb{R}$  é fácil ver que

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) \\ &= a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1) \\ &= a(x_2 - x_1) \left( x_2 + x_1 + \frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para provar (a) suponhamos que  $a > 0$ . Se  $x_1 < x_2 < \frac{-b}{2a}$  temos que  $(x_2 - x_1) > 0$  e  $\left( x_2 + x_1 + \frac{b}{a} \right) < 0$ . Destas desigualdades e (2.25) concluímos que  $f(x_2) < f(x_1)$  e isto prova que  $f$  é decrescente no intervalo  $(-\infty, \frac{-b}{2a})$ . Se por outro lado tomamos  $\frac{-b}{2a} < x_1 < x_2$  então  $(x_2 - x_1) > 0$  e  $\left( x_2 + x_1 + \frac{b}{a} \right) > 0$ . Destas desigualdades e (2.25) concluímos que  $f(x_2) > f(x_1)$  e isto prova que  $f$  é crescente no intervalo  $(-\infty, \frac{-b}{2a})$ .

A demonstração de (c) é inteiramente análoga e a omitimos.

□

É possível caracterizarmos o conjunto imagem das funções quadráticas. De fato, observamos que dada uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , um ponto  $y \in Im(f)$

se, e somente se, existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$ . Equivalentemente,

$$y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \text{existe raiz para a equação } ax^2 + bx + (c - y) = 0.$$

Então pelo teorema (2.3.2) podemos afirmar que

$$y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow b^2 - 4a(c - y) \geq 0 \Leftrightarrow 4ay \geq -\Delta. \quad (2.26)$$

**Teorema 2.3.5** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função quadrática dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .*

a) *Se  $a > 0$  então  $\text{Im}(f) = [\frac{-\Delta}{4a}, \infty)$ .*

b) *Se  $a < 0$  então  $\text{Im}(f) = (-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$ .*

**Demonstração.** Suponha que  $a > 0$ . Então de (2.26) resulta que  $y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow y \geq \frac{-\Delta}{4a}$

o que prova (a). Por outro lado se  $a < 0$  então  $y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow y \leq \frac{-\Delta}{4a}$  o que prova (b). □

## 2.4 O gráfico da função quadrática

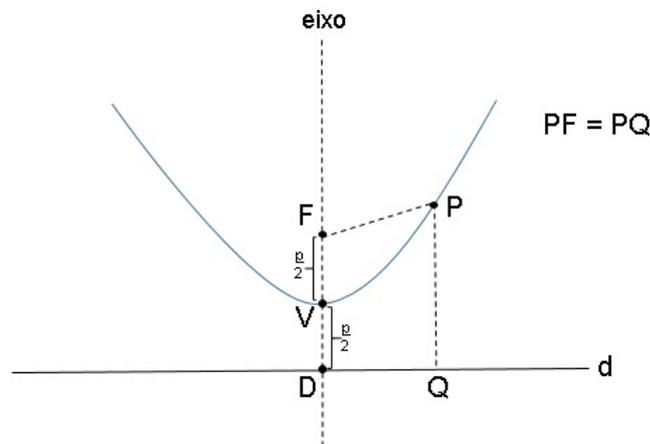
O objetivo central desta seção é mostrar que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Portanto antes de qualquer encaminhamento é necessário deixar bem claro o que é uma parábola. Geometricamente falando a parábola é uma curva plana definida a partir de uma reta  $d$  e um ponto  $F \notin d$ , ou seja, fixado um plano  $\Pi$ , para cada par de objetos  $(d, F)$ , onde  $d$  é uma reta no plano  $\Pi$  e  $F$  um ponto de  $\Pi$  que não pertence a reta  $d$  está definida uma parábola, chamada parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ . Formalmente temos a seguinte definição geométrica da parábola.

**Definição 2.4.1** *Sejam  $\Pi$  um plano,  $d$  uma reta no plano  $\Pi$  e  $F$  um ponto de  $\Pi$  que não pertence à reta  $d$ . Para cada ponto  $P$  do plano  $\Pi$  denotamos por  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a reta  $d$ . A parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ , denotada por  $\wp(d, F)$ , é o conjunto de pontos  $P$  do plano  $\Pi$  que satisfazem  $d(P, F) = d(P, Q)$ . Em símbolos*

$$\wp(d, F) = \{ P \in \Pi; \quad d(P, F) = d(P, Q) \}. \quad (2.27)$$

A reta que passa pelo foco  $F$  e é perpendicular à diretriz  $d$  é chamada o eixo da parábola, enquanto que o ponto  $V$  (da parábola) mais próximo (que tem a menor distância) da diretriz  $d$  é denominado o vértice da parábola. O valor numérico da distância do foco  $F$  à reta diretriz  $d$  é chamado o parâmetro da parábola, comumente denotado por  $p$ . Se  $D$  é a interseção do eixo da parábola com a diretriz  $d$  (isto é,  $D$  é o pé da perpendicular baixada de  $F$  sobre a reta  $d$ ), é fácil ver que o vértice da parábola é o ponto médio do segmento  $FD$  e  $p = d(F, D)$ . Também temos que  $d(V, F) = d(V, D) = \frac{p}{2}$ .

Figura 15 – Representação gráfica de uma parábola em termos de foco e reta mediatriz.



Identificando o plano  $\Pi$  com o espaço  $\mathbb{R}^2$ , exatamente como fizemos na seção (1.4) é possível descrever a parábola por meio de uma equação algébrica.

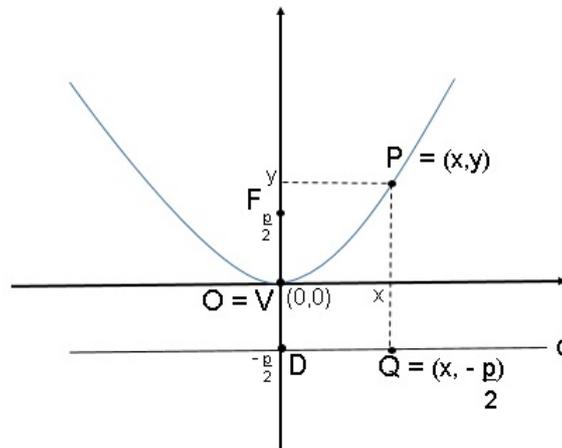
**Teorema 2.4.1** *Seja  $\wp(d, F)$  a parábola definida por (2.27). Então é possível escolher um sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$  no plano  $\Pi$  tal que*

$$\wp(d, F) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad y = \frac{x^2}{2p} \right\}, \quad (2.28)$$

aqui  $p$  é o parâmetro da parábola. (Observe que (2.28) equivale afirmar que a parábola  $\wp(d, F)$  é o gráfico da função quadrática  $f(x) = \frac{1}{2p} x^2$ ).

**Demonstração.** Escolhemos o sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$  tal que a origem  $O$  esteja sobre o vértice  $V$  da parábola ( $O = V$ ), o eixo  $OX$  seja paralelo a reta diretriz  $d$  e o eixo  $OY$  coincida com o eixo da parábola. É simples ver que segundo este sistema de coordenadas os pontos são expressos em termos de coordenadas como segue:  $F = (0, \frac{p}{2})$ ,  $V = (0, 0)$ ,  $D = (0, \frac{-p}{2})$  e se  $P = (x, y)$  é um ponto genérico da parábola, o respectivo ponto  $Q$ , pé da perpendicular sobre a diretriz é  $Q = (x, \frac{-p}{2})$ .

Figura 16 – Sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$  com origem sobre o vértice da parábola.



De (2.27) e a fórmula da distância entre pontos do plano, podemos afirmar que um ponto  $P = (x, y)$  pertence à parábola  $\wp(d, F)$  se, e somente se,  $d(P, F) = d(P, Q)$ , ou seja

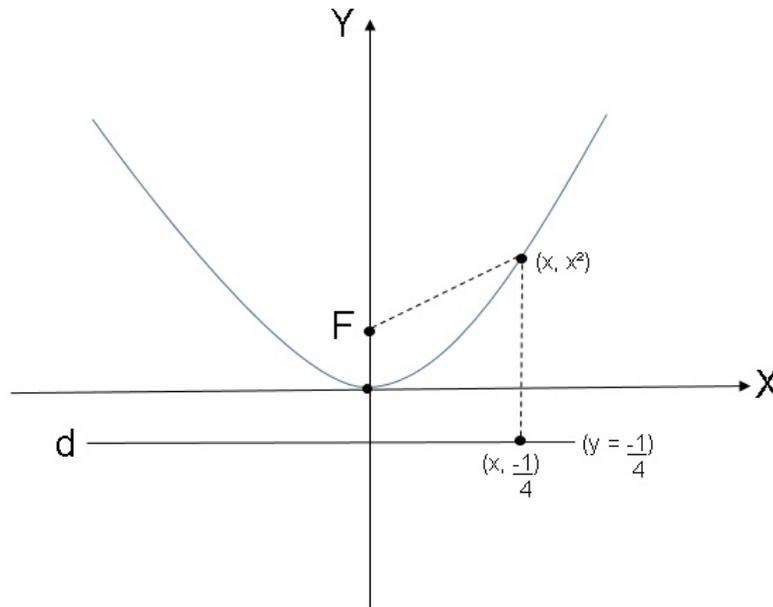
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} &= y^2 + py + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + (-2p)y = 0, \end{aligned}$$

o que demonstra (2.28).

□

Segue do teorema (2.4.1) que o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$  é uma parábola. Temos os corolários:

**Corolário 2.4.1** *O gráfico da função quadrática  $f(x) = x^2$  é a parábola de foco  $F = (0, \frac{1}{4})$  e diretriz a reta horizontal  $y = -\frac{1}{4}$ . (Observe que neste caso o parâmetro da parábola é  $p = \frac{1}{2}$ .)*

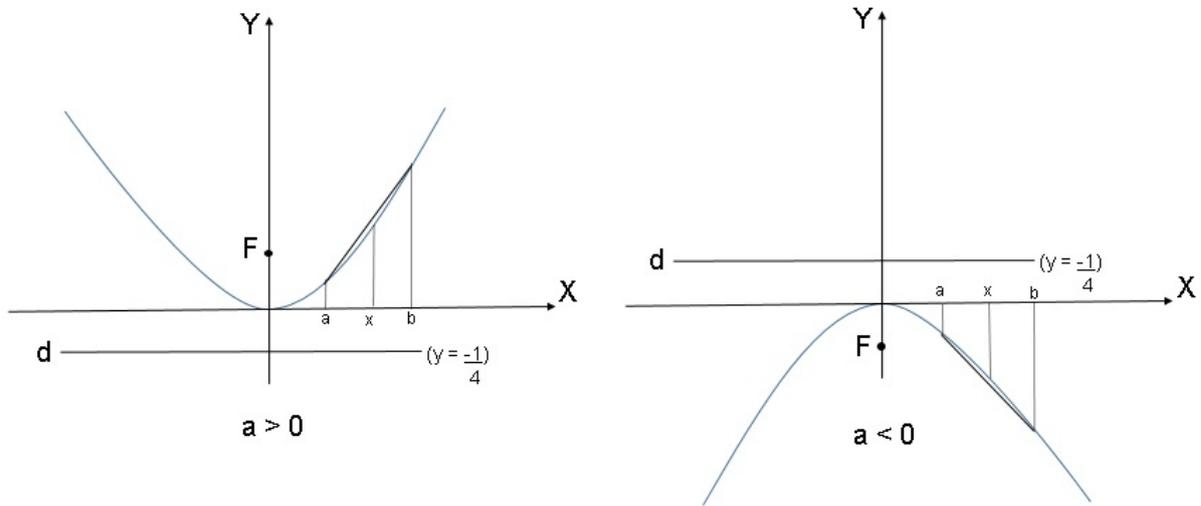
Figura 17 – Gráfico da função quadrática  $f(x) = x^2$ .

**Corolário 2.4.2** O gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$  é a parábola de foco  $F = (0, \frac{1}{4a})$  e diretriz a reta horizontal  $y = -\frac{1}{4a}$ .

Observe que neste caso o parâmetro da parábola é

$$p = \frac{1}{2|a|} = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{se } a > 0 \\ -\frac{1}{2a} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

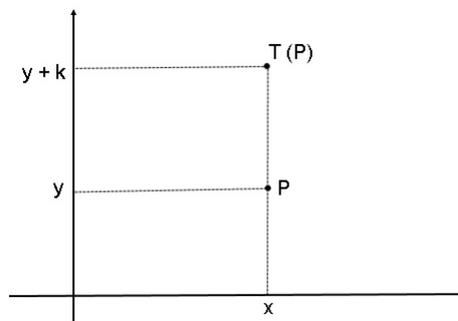
Também observamos que se  $a > 0$  a parábola gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$  tem sua concavidade voltada para cima. Por outro lado, se  $a < 0$  a parábola tem sua concavidade voltada para baixo. Aqui estamos dizendo que a parábola, gráfico da função quadrática  $f$ , tem concavidade voltada para cima quando para quaisquer  $a < x < b$  tem-se que o ponto  $(x, f(x))$  do gráfico está abaixo da secante que liga os pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . Por outro lado, dizemos que a parábola tem concavidade voltada para baixo se para quaisquer  $a < x < b$  tem-se que o ponto  $(x, f(x))$  do gráfico está acima da secante que liga os pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . Veja a figura:

Figura 18 – Gráficos das funções quadráticas  $f(x) = ax^2$ .

Dentre as transformações do plano temos as translações verticais, que consistem em deslocar todo ponto  $P$  do plano para o ponto  $T(P)$  obtido a partir de  $P$  pela soma de um vetor vertical fixo. Ou seja, dada uma constante  $K$  a translação vertical de  $K$  é a função  $T_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$T_K(x, y) = (x, y) + (0, K) = (x, y + K)$$

Note que se a constante  $K > 0$  o ponto  $P$  é deslocado para cima, caso contrário, se  $K < 0$  o ponto  $P$  é deslocado para baixo.

Figura 19 – Gráfico com o ponto  $P$  deslocado para cima com  $k > 0$ .

Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definindo  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x) = f(x) + K$  é simples ver que o gráfico da função  $g$  é o gráfico da função  $f$  transladado  $K$  unidades verticalmente (para cima ou para baixo, dependendo do sinal de  $K$ ). Em outras palavras, temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.4.2** *Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $K \in \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $g(x) = f(x) + K$ . Então  $G(g) = T_K(G(f))$ .*

**Demonstração.** Basta ver que

$$P \in G(g) \Leftrightarrow P = (x, g(x)) \Leftrightarrow P = (x, f(x) + K) \Leftrightarrow P = T_K(x, f(x)) \Leftrightarrow P \in T(G(f)).$$

□

Como consequência do corolário (2.4.2) e do teorema (2.4.2) temos seguinte corolário:

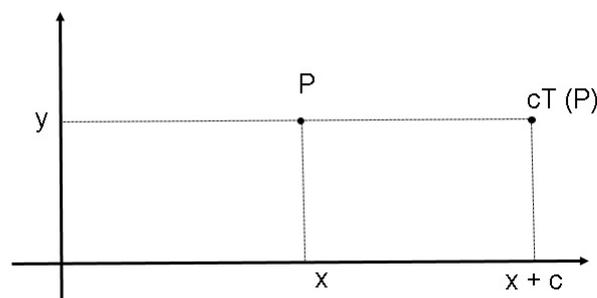
**Corolário 2.4.3** *O gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + K$  é a parábola de foco  $F = (0, \frac{1}{4a} + K)$  e diretriz a reta horizontal  $y = -\frac{1}{4a} + K$ .*

Ainda sobre translações, temos as translações horizontais que consistem em deslocar todo ponto  $P$  do plano para o ponto  $T(P)$  obtido a partir de  $P$  pela soma de um vetor horizontal fixo. Ou seja, dada uma constante  $C$  a translação horizontal de  $C$  é a função  ${}_cT : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$${}_cT(x, y) = (x, y) + (C, 0) = (x + C, y)$$

Note que se a constante  $C > 0$  o ponto  $P$  é deslocado para a direita, caso contrário, se  $C < 0$  o ponto  $P$  é deslocado para a esquerda.

Figura 20 – Gráfico com o ponto  $P$  deslocado para direita com  $c > 0$ .



Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definindo  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x) = f(x + C)$  é simples ver que o gráfico da função  $g$  é o gráfico da função  $f$  transladado  $C$  unidades horizontalmente (para esquerda ou para direita, dependendo do sinal de  $C$ ). Em outras palavras, temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.4.3** *Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $C \in \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $g(x) = f(x + C)$ . Então  $G(g) = ({}_C T)(G(f))$ .*

**Demonstração.** Basta ver que

$$P \in G(g) \Leftrightarrow P = (x, g(x)) \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P = (x, f(x + C)) \text{ para algum } x \in \mathbb{R}.$$

Denotando  $u = x + C$  ( $\Leftrightarrow x = u - C$ ) segue que

$$\begin{aligned} P \in G(g) &\Leftrightarrow P = (u - C, f(u)) \text{ para algum } u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P = {}_{(-C)}T(u, f(u)) \\ &\Leftrightarrow P \in {}_{(-C)}T(G(f)). \end{aligned}$$

□

Finalmente aplicando os resultados acima podemos provar que o gráfico de qualquer função quadrática é uma parábola.

**Teorema 2.4.4** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função quadrática dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Então o gráfico de  $f$  é a parábola de foco  $F = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$  e diretriz a reta horizontal  $y = -\left(\frac{1 + \Delta}{4a}\right)$ . Além disso, esta parábola tem concavidade para cima se o coeficiente  $a > 0$  e concavidade para baixo se  $a < 0$ .*

**Demonstração.** Pelo corolário (2.4.3) o gráfico da função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x) = ax^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

é uma parábola de foco  $F' = \left(0, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$  e diretriz a reta horizontal  $y = -\left(\frac{1 - \Delta}{4a}\right)$ .

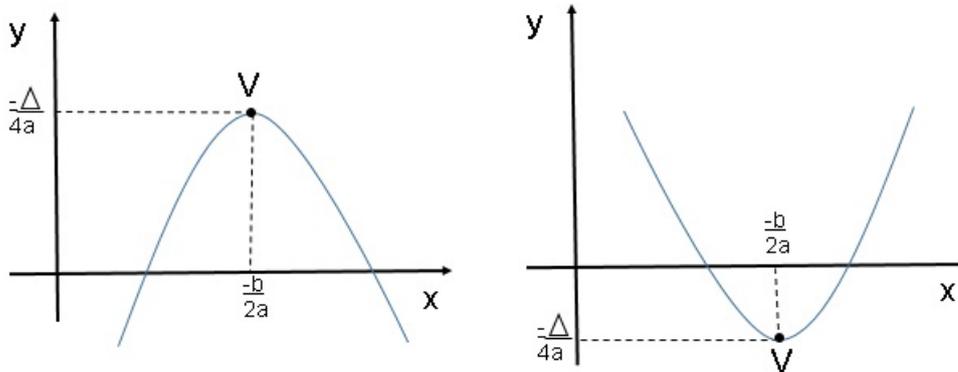
Por outro lado, de (2.22) vemos que para todo  $x \in \mathbb{R}$  segue a igualdade

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[ a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right] + \left[ \frac{4ac - b^2}{4a} \right] = \left[ a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right] - \frac{\Delta}{4a} \\ &= g \left( x + \frac{b}{2a} \right) \end{aligned}$$

Desta identidade e o teorema (2.4.3) resulta que o gráfico de  $f$  é a parábola de foco  $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$  e diretriz a reta horizontal  $y = -\left(\frac{1 - \Delta}{4a}\right)$ . Também temos pelo corolário (2.4.2) que se  $a > 0$  a concavidade da parábola está para cima e se  $a < 0$  a concavidade é para baixo.

□

Figura 21 – Gráficos de funções quadráticas.



## 2.5 Retorno à função horária do M.R.U.V.

O teorema (2.2.2) estabeleceu que a função horária do M.R.U.V. é a função quadrática

$$s(t) = \left(\frac{a}{2}\right)t^2 + v_0 t + s_0, \quad t \geq 0, \quad (2.29)$$

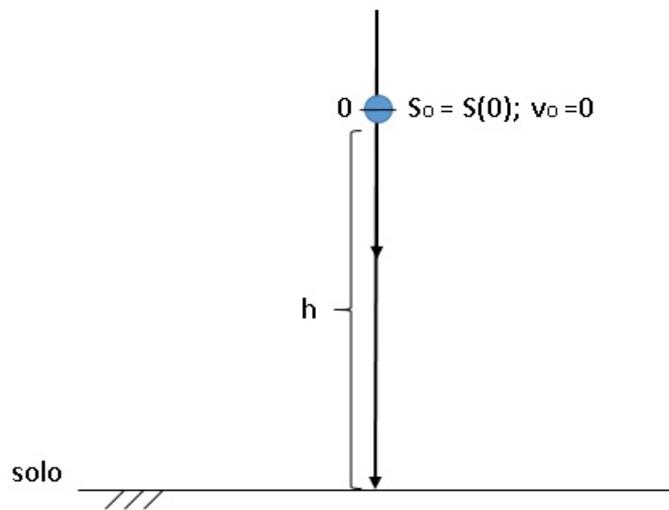
onde  $a \neq 0$  é a taxa de variação da velocidade ( $v(t) = at + v_0$ ),  $v_0 = v(0)$  é a velocidade no instante inicial  $t = 0$  e  $s_0 = s(0)$  é a posição inicial do móvel. Nas duas seções anteriores desenvolvemos um estudo sobre funções quadráticas e seus gráficos. Portanto aplicando os resultados ali obtidos podemos ter total entendimento sobre o M.R.U.V.. Para completar esta seção apresentamos dois exemplos interessantes.

## 2.6 Exemplos

**QUEDA LIVRE** - A título de ilustração e também dado a importância prática e histórica do problema vamos considerar um exemplo concreto de um movimento retilíneo uniformemente variado, precisamente o movimento de um objeto em queda livre, ou seja, o movimento de um objeto que é largado, a partir do repouso, de uma altura  $h$  metros da superfície terrestre e cai devido a ação da força gravitacional, desprezado qualquer resistência do ar. Este é um típico problema de movimento vertical próximo a superfície terrestre. Por volta do ano 1609, Galileo Galilei (1564 – 1642) um filósofo natural, astrônomo e matemático italiano, obteve o seguinte princípio físico básico: "desprezando-se a resistência do ar, todo objeto cai para a terra com uma mesma aceleração, a qual é constante". Especificamente falando, todo objeto próximo à superfície da terra está sujeito uma aceleração constante  $g \text{ m/s}^2$ , para baixo (voltada para o centro da terra),

chamada aceleração da gravidade. Portanto os experimentos de Galileo demonstraram que o movimento de queda livre é um M.R.U.V.. Como referencial escolhemos um eixo retilíneo vertical (a trajetória do objeto em queda), orientado positivamente para baixo, com a origem fixada no ponto onde o objeto é abandonado, no instante inicial  $t = 0$ , isto é  $s(0) = s_0 = 0$ . Note ainda que desde que o objeto é abandonado do repouso, sua velocidade inicial é  $v_0 = 0$ . Veja a Figura 22:

Figura 22 – Exemplo de objeto em queda livre.



Pelos dados fornecidos e (2.29) temos então que a equação horária do movimento, que determina a posição do objeto (segundo o referencial fixado) em qualquer instante de tempo  $t$  é

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2, \quad t \geq 0. \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é conhecida como Lei da queda dos corpos, devido a Galileu Galilei, que afirma: **"a distância da queda de um corpo é proporcional ao quadrado do tempo decorrido"**. Usando (2.30) podemos facilmente determinar o tempo necessário para que objeto em queda livre atinja o solo. De fato, lembramos que o objeto foi posto em queda a uma altura de  $h$  metros do solo, então basta determinar o instante  $t_q$  tal que  $s(t_q) = h$ , ou seja, encontramos

$$t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Até a presente data o maior edifício construído pelo ser humano é o arranha-céu Burj Khalifa Bin Zayid, localizado em Dubai, nos Emirados Árabes Unidos, com 828 metros de altura e 160 andares. Imagine por exemplo que um objeto caia do topo deste edifício e que os efeitos de resistência do ar sejam desprezados. Qual o tempo necessário para o objeto atingir o solo? Qual será sua velocidade neste instante? Experimentos mostram que

uma boa aproximação para a aceleração da gravidade é  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Logo o tempo de queda é

$$t_q = \sqrt{\frac{2(828)}{9,8}} \cong 13 \text{ s}$$

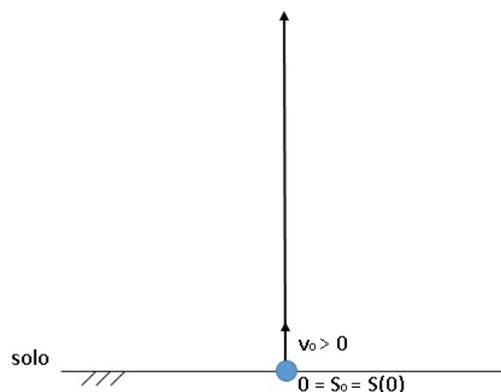
e a respectiva velocidade é

$$v_q = v(t_q) = (9,8) 13 \cong 127,4 \text{ m/s}.$$

Aqui temos a oportunidade de comentar sobre um interessante aspecto da lei da quedas dos corpos, descoberta por Galileu. Se a pena de uma ave (um objeto extremamente leve) e uma bola de aço com diâmetro de 30 cm (um objeto muito mais pesado do que a pena) são abandonados do alto do edifício, e não houvesse resistência do ar (vácuo), ambos atingiriam o chão no mesmo instante! Neste momento do estudo também é interessante propor o estudo do movimento em queda livre quando o objeto, ao invés de ser largado ( $v_0 = 0$ ), ele é atirado para baixo, ou seja, no início do movimento existe uma velocidade inicial  $v_0 \neq 0$ .

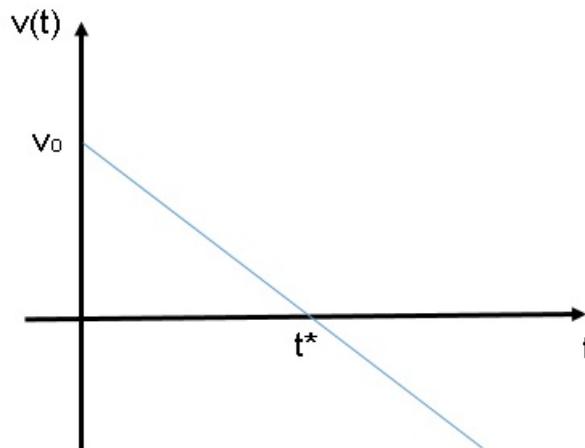
**LANÇAMENTO VERTICAL** - Dentre os movimentos retilíneos tem importante destaque aqueles em que um determinado objeto é lançado verticalmente para cima. Novamente admitimos que tais movimentos sejam próximos a superfície da terra e que os efeitos de resistência do ar sejam desprezados. Com isto, temos que a aceleração da gravidade é constante  $g \text{ m/s}^2$ . Neste caso, diferentemente da queda livre, é mais apropriado medir as distância a partir do solo e portanto fixamos como referencial um eixo retilíneo vertical (a trajetória do objeto), orientado positivamente para cima, com a origem fixada no solo, ponto onde o objeto é projetado para cima no instante inicial  $t = 0$ , isto é  $s(0) = s_0 = 0$ , com uma velocidade positiva  $v_0$ . Veja a figura abaixo:

Figura 23 – Exemplo de lançamento vertical.



Observamos que com esta escolha de referencial, nos instantes logo após o lançamento, enquanto o objeto sobe, a velocidade diminui, ou seja, a taxa de variação da velocidade (aceleração) deve ser negativa. Ainda fisicamente vemos que após atingir o ponto mais alto, onde a velocidade se anula, imediatamente na sequência o objeto cai em queda livre, portanto se move na direção contrária a orientação positiva, logo a velocidade é negativa e decrescente (aumenta em valor absoluto) e portanto novamente a taxa de variação da velocidade é negativa. Desta forma independentemente se objeto esta subindo ou descendo, a aceleração constante é sempre negativa, ou seja  $a = -g \text{ m/s}^2$ . Consequentemente a velocidade é dada por  $v(t) = -gt + v_0, t \geq 0$ .

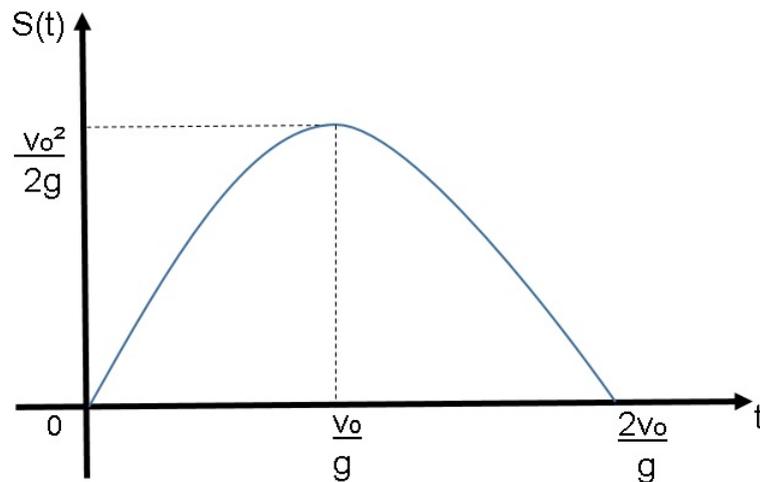
Figura 24 – Gráfico da velocidade versus tempo.



Note que a aceleração e a velocidade inicial tem sinais contrários e estamos exatamente na mesma situação descrita em (2.3), onde já havíamos comentado que o objeto inicia seu movimento, com velocidade  $v_0 > 0$ , a partir de uma posição inicial  $s_0$ , que neste caso é o solo  $s_0 = 0$ , no sentido da orientação positiva da trajetória, até parar no instante de tempo  $t^*$ , onde inverte o sentido do movimento e segue aumentando o valor absoluto da velocidade (velocidade escalar =  $|v(t)|$ ) linearmente. Pelos dados fornecidos e (2.29) temos então que a equação horária do movimento, que determina a posição do objeto (segundo o referencial fixado) em qualquer instante de tempo  $t$  é

$$s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t, \quad t \geq 0. \quad (2.31)$$

Matematicamente sabemos que o gráfico desta função é a parábola com concavidade para baixo:

Figura 25 – Gráfico da função  $s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t$ .

Portanto o movimento total do objeto lançado verticalmente para cima se dá no intervalo de tempo  $[0, \frac{2v_0}{g}]$ , sendo que na primeira metade deste intervalo de tempo o objeto sobe até atingir a altura máxima  $s_M = \frac{v_0^2}{2g}$ , no instante de tempo  $t^* = \frac{v_0}{g}$ , quando a velocidade é nula ( $v(\frac{v_0}{g}) = 0$ ), depois, na segunda metade do intervalo de tempo o objeto cai (desce) até atingir o solo no instante de tempo  $t = \frac{2v_0}{g}$ , com velocidade  $v(\frac{2v_0}{g}) = -v_0$ , ou seja, atinge o solo com uma velocidade de mesma intensidade da que foi lançado porém no sentido contrário. É interessante observar a simetria do movimento (subida e descida).

Sabe-se que uma bala (projétil) atirada de um fuzil AR-15 é extremamente veloz e parte à velocidade de 3.500 km/h. Suponha que seja feito um disparo precisamente para cima, num ângulo de 90 graus. Desprezando a resistência do ar e também a altura de onde parte o tiro (suponha que o tiro parte do solo), depois de converter o valor de  $g = 9,8 \text{ m/s}^2 = 127.008 \text{ km/h}^2$ , os cálculos acima nos dá que a altura máxima atingida pelo projétil é

$$s_M = \frac{(3.500)^2}{2(127008)} = \frac{12.250.000}{254.016} \cong 48,23 \text{ km},$$

e o tempo gasto para atingir esta altura é dado por

$$t = \frac{2(3.500)}{127.008} \cong 0,056 \text{ h}$$

que equivale a 3,36 minutos! Além disso, pela teoria acima, após o dobro deste tempo, ou seja após 6,72 minutos do disparo a bala atinge o solo com a velocidade escalar de 3.500 km/h. Imagine o impacto que um tiro dado para cima pode provocar quando este projétil retorna ao solo.

---

Com um raciocínio semelhante é possível estudar os movimentos retilíneos ao longo de um plano inclinado, os quais modelam os movimentos de automóveis e trens ao subir ou descer montanhas (rampas), bem como de aviões ao decolarem ou aterrissarem.



### 3 Considerações Finais

Esta dissertação foi motivada por um problema real, extremamente complexo, com o qual deparam professores e estudantes da educação básica. O problema, já formulado na introdução deste trabalho, consiste em entender porque os estudantes não enxergam a Matemática como uma ferramenta essencial para as Ciências, em particular, essencial para o estudo de Física. Nossa experiência, como professor de Física da educação básica, com formação em Licenciatura em Matemática, tem nos mostrado uma triste realidade na qual os alunos consideram a Matemática uma ciência à parte, desligada das demais e sem qualquer aplicação em suas vidas, a ponto de até mesmo nas aulas de Física não realizarem conexão dos conteúdos ali estudados com aqueles estudados na disciplina de Matemática. Uma consequência imediata desta realidade distorcida são alunos totalmente desmotivados para as aulas das disciplinas de Matemática e Física, alunos que de um modo geral não entendem os conceitos fundamentais de ambas matérias.

Como afirmamos, o problema posto é muito abrangente e não tivemos aqui a pretensão de dar uma resposta completa. Claro que são muitas as variáveis envolvidas, como por exemplo, a formação dos professores (conteúdos específicos, pedagógicos e realização dos estágios supervisionados), a valorização profissional do professor (salário), a estrutura das escolas, a carga horária laboral dos professores, as diretrizes curriculares nacionais para as disciplinas de Matemática e Física, o investimento social em educação e cultura, dentre outras mais. Assim ao invés de tentar uma abordagem global da questão, o que nos parece impossível, imaginamos com esta dissertação, dar alguma contribuição levando-se em conta somente um aspecto: a metodologia de ensino. Restrito a este aspecto, achamos que é possível apresentar algum caminho para o enfrentamento deste quadro adverso, ou seja, é possível aplicar uma metodologia de ensino que de fato discuta os conceitos, que deixe clara a presença da Matemática nas Ciências Naturais, em especial na Física, bem como que demonstre a essencialidade do aprendizado da Matemática.

Reafirmando nosso foco na "Metodologia de Ensino", a observação nos permite afirmar que o ensino de ambas as disciplinas (Matemática e Física), na educação básica, se desenvolvem de modo isolado, sem interação entre os professores responsáveis pelas disciplinas e muitas vezes com conteúdos programáticos fora de sintonia, em desacordo. Nesta realidade desconexa, a Física é "ensinada" por meio de um receituário de fórmulas enquanto que a Matemática é "ensinada" de forma abstrata, distante da realidade. Está é uma opção pela simplificação que na verdade impede que aos alunos aprendam. É muito grave constatar que a Escola atual, ao invés de ensinar, retira do estudante a oportunidade deste se desenvolver, pensar e adquirir um conhecimento crítico e consistente. O mundo atual dos computadores, celulares, tablets e redes sociais, inseriram um imediatismo no

comportamento social das pessoas, e tudo tem de ser muito rápido. Porque gastar longo tempo com deduções de fórmulas, caracterizações de funções, estudos de gráficos e etc se podemos resumir isto tudo em uma página, ou num vídeo de 5 minutos?

Nesta dissertação apresentamos os estudos do M.R.U. e do M.R.U.V., por meio de uma metodologia distinta da usual, que contraria o imediatismo e a “simplificação”. Observe que toda nossa apresentação é perfeitamente possível para os estudantes do ensino médio. Não há qualquer conceito, cálculo ou raciocínio incompatível com o nível dos estudantes. A metodologia que propomos, tem caráter interdisciplinar podendo ser aplicada nas aulas de Física e também de Matemática, para todos os demais conteúdos destas disciplinas, não somente para M.R.U. e M.R.U.V. Também é claro que é necessário acrescentar à nossa apresentação, exercícios, exemplos e atividades experimentais. Existe então um enorme trabalho a ser feito que começa pela conscientização dos professores, quanto à necessidade de se mudar a forma de ensino, e se estende ao desenvolvimento de livros didáticos e materiais de apoio para as aulas. Acreditamos que esta ação de mudança da metodologia pode, no futuro, influenciar os cursos de Licenciatura (em Matemática e Física), bem como, aumentar a demanda de jovens que buscam o estudo em nível superior nas áreas das Ciências Exatas e Engenharias.

## Referências

- BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 1. ed. [S.l.]: Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- BONJORNO, J. R. et al. *Física: Mecânica, 1º ano*. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013. 228-232 p. Citado 4 vezes nas páginas 22, 27, 29 e 30.
- FILHO, A. G.; TOSCANO, C. *Física: interação e tecnologia*. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 1. 90-91 p. Citado na página 26.
- FUKE, L. F.; KAZUHITO, Y. *Física para o Ensino Médio*. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. Citado na página 29.
- HEWITT, P. G. *Física Conceitual*. 11. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 25, 26, 27, 28 e 29.
- LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. Citado na página 33.
- MARQUES, G. da C.; BECHARA, M. J. *História da Mecânica*. 2017. Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada. Disponível em: <<http://efisica.if.usp.br/mecanica/curioso/historia/>>. Acesso em: 25 out. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 30.
- MARTINI, G. et al. *Conexões com a Física*. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. 149-155 p. Citado na página 27.
- STEFANOVITS, A. *Ser protagonista: Física, 1º ano*. 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2013. Citado na página 28.
- STRATHERN, P. *Arquimedes e a Alavanca em 90 minutos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998. Citado na página 26.