UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análise Combinatória:
Técnicas de resoluções de exercícios

FLÁVIO RIBEIRO BRAGA

Orientador

Prof. Dr. EMERSON VITOR CASTELANI

Maringá-PR

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análise Combinatória: Técnicas de resoluções de exercícios

FLÁVIO RIBEIRO BRAGA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador

Prof. Dr. EMERSON VITOR CASTELANI

Maringá

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

Braga, Flávio Ribeiro
B813a Análise combinatória: técnicas de resoluções de exercícios /Flávio Ribeiro Braga. -- Maringá, 2017.
121 p. f. : Il.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1. Matemática discreta. 2. Análise combinatória. 3. Ensino-Aprendizado. I. Castelani,Emerson Vitor, orient.
II. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática.Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.III.Título.

511.6 21.ed.

Cicilia Conceição de Maria
CRB9- 1066
CC-003893

FLÁVIO RIBEIRO BRAGA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: TÉCNICAS DE RESOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Emerson Vitor Castelani

Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
Universidade Estadual do Paraná - Paranavaí

Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 23 de fevereiro de 2017.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial a minha esposa, minha família e meus amigos.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

Ao professor Dr. Emerson Vitor Castelani, pela orientação e pelas dicas que enriqueceram o trabalho.

A minha esposa, pela motivação, sem ela não teria entrado nesse projeto.

A minha família e amigos por entenderem as ausências devido as horas de estudo.

A professora Dra. Maria Terezinha Bellanda Galuch pelo carinho e prestatividade.

A todos os professores e amigos do Profmat.

Ao Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco, por ter me mostrado o caminho.

A todos que, diretamente ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, meu muito obrigado.

“Os grandes feitos são conseguidos não pela força,

mas pela perseverança.”

Samuel Johnson.

Resumo

A análise combinatória pode ser entendida como a parte da matemática que lida com as técnicas de contar sem enumerar. Usando seus princípios de contagem, pode-se agrupar e ordenar elementos de um dado conjunto. A Análise combinatória é aplicada em diversas áreas, tais como criptografia, elaboração de horários, planejamento de rotas, análise de algoritmos, teoria de grafos, cálculos envolvendo probabilidades, estatística etc. Dada a importância da análise combinatória e levando-se em consideração a dificuldade apresentada por professores e alunos no ensino e aprendizagem desse conteúdo, o presente trabalho tem como objetivo buscar uma metodologia de ensino-aprendizado por meio da resolução de problemas, apresentando os principais conceitos de análise combinatória, quais sejam: fatorial, princípios fundamentais de contagem, permutações, arranjos e combinações. Em alguns casos, usando-se os problemas como ponto de partida e fazendo questionamentos sobre o que ocorre se realizarmos mudanças nos enunciados dos exercícios, podemos definir os conceitos, generalizar as fórmulas e tornar os alunos mais críticos e independentes.

Palavras chave: Resolução de problemas. Análise Combinatória. Fatorial. Princípios fundamentais de contagem. Permutações. Arranjos. Combinações. Ensino-Aprendizado. Ensino de matemática.

Abstract

The combinatorial analysis can be understood as the part of math that deals with counting techniques without enumerating. Using its counting principles, you can group and order elements of a given set. The combinatorial analysis is applied in several areas, such as encryption, preparation of schedules, route planning, algorithm analysis, graph theory, calculations involving probabilities, statistics, etc. Given the importance of combinatorial analysis and taking in consideration the difficulty presented by teachers and students in the teaching and learning of this content, the present work aims to seek a teaching-learning methodology through problem solving, presenting the main concepts of combinatorial analysis, which are: factorial, fundamental principles of counting, permutations, arrangements and combinations. In some cases, using the problems as a starting point and making questions about what happens if we make changes in the statements of the exercises, we can define the concepts, generalize the formulas and make the students more critical and independent.

key words: Troubleshooting. Combinatorial Analysis. Factorial. Fundamental principles of counting. Permutations. Arrangements. Combinations. Teaching-Learning. Mathematics teaching.

Lista de Siglas

UEM Universidade Estadual de Maringá

UEL Universidade Estadual de Londrina

UNIOESTE Universidade Estadual do Oeste do Paraná

UDESC Universidade do Estado de Santa Catarina

UNITAU Universidade de Taubaté

FUVEST Fundação Universitária para o Vestibular

FEI Fundação Educacional Inaciana

PUC Pontifícia Universidade Católica

ITA Instituto Tecnológico da Aeronáutica

IME Instituto Militar de Engenharia

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFPR Universidade Federal do Paraná

UFSC Universidade Federal de Santa Catarina

UFMG Universidade Federal de Minas Gerais

UnB Universidade de Brasília

UFF Universidade Federal Fluminense

UFU Universidade Federal de Uberlândia

UFRS Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UNIPAR Universidade Paranaense

UCSal Universidade Católica de Salvador

E.N Escola Naval

MACK Universidade Presbiteriana Mackenzie

CESGRANRIO Faculdade Cesgranrio

STA CASA Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo

OCM Olimpíada Campinense de Matemática

OMERJ Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro

CMO Olimpíada Canadense de Matemática

OBM Olimpíada Brasileira de Matemática

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Diariamente nos deparamos com situações que requerem tomadas de decisões: Que camisa escolher? Qual o melhor percurso para se chegar a um determinado lugar? Qual a melhor jogada para se fazer?

Agora, a escolha da melhor decisão muitas vezes depende de um processo de contagem, onde devemos saber de quantas maneiras podemos tomar certa decisão para definir um espectro de busca. Neste contexto, devemos recorrer à Análise Combinatória, que é um ramo da matemática que estuda os métodos de se realizar contagem.

O desenvolvimento da Análise Combinatória, de maneira sistematizada, teve início juntamente com o estudo das probabilidades. No século XVI, a sociedade se ocupava com jogos de azar, como cartas, dados e apostas em geral [3].

O matemático italiano Girolamo Cardano (1501 - 1576), jogador inveterado, escreveu o livro *Liber de Ludo Aleae* (Livro dos jogos de azar) no qual descreve técnicas envolvendo probabilidades aplicadas aos jogos cuja publicação da obra ocorreu somente em 1663 [4].

No século seguinte, na França, Chevalier de Méré, assim como Cardano, apaixonado por jogos, recorre ao matemático francês Blaise Pascal (1623 -

1662) para lhe ajudar na solução do seguinte problema: *"Dois jogadores de igual habilidade resolvem interromper o jogo antes do término. Sendo conhecido o número de pontos de cada um até essa altura, em que proporção devem ser divididas as apostas?"*. Pascal, entusiasmado com o problema, inicia correspondências sobre o assunto com o também francês, Pierre De Fermat [2].

Da troca dessas correspondências, surgem as bases para a moderna teoria das probabilidades e da análise combinatória. Em 1653, Pascal escreveu o livro *Traité du triangle arithmétique* (Tratado do triângulo aritmético), publicado após mais de uma década, em 1665. Com o uso desse triângulo, Pascal calculava os coeficientes binomiais que eram usados nos cálculos envolvendo probabilidades e combinações. Em 1657, O matemático e físico holandês Christiaan Huygens (1629 - 1695), que geralmente é lembrado pelos seus estudos sobre luz e cores, escreveu o primeiro tratado formal sobre a teoria das probabilidades a partir das correspondências de Pascal - Fermat [1].

O matemático suíço Jakob Bernoulli (1654 - 1705) escreveu a obra *Ars Conjectandi*, publicada em 1713, na qual consta a demonstração do teorema binomial $(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p \cdot x^{n-p}$ e as teorias de permutações e combinações. Após esses matemáticos, os estudos envolvendo probabilidades e análise combinatória foram continuados por Abrahan De Moivre (1667 - 1754), Daniel Bernoulli (1700 - 1782), Leonhard Euler (1707 - 1783), Pierre Simon Laplace (1749 - 1827) e muitos outros [4] [1].

Dada a relevância da análise combinatória e levando-se em consideração a dificuldade apresentada por professores e alunos para, respectivamente, ensinarem e aprenderem, é de suma importância utilizar uma metodologia eficaz no processo de ensino-aprendizado.

Segundo Talizina [12], no processo de ensino-aprendizado, a função principal do professor é garantir que o aluno tenha a motivação necessária para o êxito na aprendizagem. O professor pode ilustrar sua aula com alguma curiosidade ou desafio matemático, bem como com algum fato ligado à história da matemática. Em uma aula sobre fatorial, por exemplo, o professor poderia falar sobre o problema de Brocard. Na análise combinatória, porém, a motivação principal ocorre por meio da resolução de exercícios e problemas.

Nesse ponto, é interessante estabelecer que exercício é uma atividade de reprodução de um mecanismo de resolução ou fórmula, cuja finalidade é dar agilidade ao aluno, como por exemplo, calcular o valor da $C_{10,2}$, enquanto que problema é uma atividade que requer reflexão, questionamentos, tomadas de decisão e análise da solução encontrada, como por exemplo, calcular o número de cumprimentos que podem ser trocados entre 10 pessoas.

Feita essa distinção, Talizina [12] ressalta ainda que, além de motivar os alunos, o professor deve levar o aluno a compreender os conceitos e como podem ser aplicados nas resoluções dos problemas. Segundo a autora, a introdução de novos conceitos deve ser feita somente após os alunos terem dominado completamente os conceitos que são a base para esses novos. Sempre que possível, deve auxiliar os alunos com sugestões e questionamentos para o desenvolvimento do raciocínio. Como, geralmente, as turmas são heterogêneas em relação ao nível de aprendizagem dos alunos, é interessante que o professor apresente problemas que desafiem os alunos, exigindo e desenvolvendo raciocínios mais complexos.

George Polya, no livro A arte de resolver problemas [10], reforça a ideia segundo a qual o professor deve conduzir o ensino de modo que o aluno adquira independência mediante a apropriação dos conceitos. Além disso, o professor deve conduzir os questionamentos, desenvolver nos alunos o interesse em resolver problemas e, sempre que possível, procurar problemas correlatos. Em seu livro, o autor traça as quatro fases para a resolução de um problema, sendo elas:

1ª. Compreensão do problema

2ª. Como os dados do problema estão relacionados

3ª. Executar o plano de resolução

4ª. Fazer um retrospecto da resolução, revendo-a e discutindo-a.

Ainda em relação ao ensino, *Swanson e Sachse-Lee (2000)* constataram que um ensino contendo séries de exercícios práticos e revisões metódicas produzia efeitos de grande amplitude. Além disso, Brophy (1986) concluiu que o desenvolvimento dos conhecimentos básicos e habilidades necessárias para atingir níveis de desempenho altos, automatizados e sem erro exigia muitos exercícios. Os exercícios não devem ser considerados como de "nível fraco". Se realizados corretamente, eles parecem ser importantes tanto para um rendimento intelectual complexo e criativo quanto para a performance de um violinista virtuoso *(p.1076) (ARCHER & HUGHES, 2011, p.201). apud* ...[11].

É de comum acordo que seria impossível alguém com aspiração a ser um habilidoso guitarrista, como Jimi Hendrix, sem treinar horas a fio, ganhar agilidade e domínio completo da guitarra, das notas e escalas musicais. Da mesma forma, isso acontece no aprendizado de análise combinatória. Primeiro, os alunos têm de entender os conceitos básicos de fatorial, que são as ferramentas para a resolução de problemas mais complexos. Na sequência, é preciso que os alunos dominem os princípios fundamentais de contagem - a base de toda análise combinatória. Nessa etapa da aprendizagem, os alunos devem entender o que ocorre com as eventuais mudanças nos enunciados e, para isso, é necessário que o professor faça questionamentos que enriqueçam o exercício, estimulando assim o raciocínio e abrindo perspectivas para novos conhecimentos.

Dessa forma, o aluno terá os conhecimentos necessários para a compreensão dos novos conteúdos: permutação, arranjo e combinação. Nesse processo, é fundamental que o professor destaque as características de cada problema e as várias possibilidades de resolvê-lo, conduzindo e aprofundando os conteúdos até que o aluno adquira conhecimento e, portanto, autonomia suficiente para resolver os problemas.

Com base no que foi exposto, o presente trabalho tem como objetivo buscar um caminho metodológico para o processo de ensino-aprendizado da análise combinatória a partir da resolução de problemas, com questionamentos que tornem os alunos mais críticos e independentes.

Capítulo 1

Fatorial

Uma das ferramentas mais importantes no estudo da análise combinatória é o fatorial, que é utilizada nos cálculos envolvendo permutações, arranjos, combinações, números binomiais etc. O conceito do fatorial, desenvolvido pelo matemático francês Christian Kramp (1760 - 1820), apareceu pela primeira vez em 1808. A seguinte citação consta no prefácio da obra *Elements d'arithmétique universelle*:

"Eu uso a notação bastante simples $n!$ para designar o produto de números decrescentes desde n à unidade, ou seja, $n.(n-1).(n-2)...3.2.1$. O uso constante em análise combinatória, na maioria das minhas demonstrações, nas quais eu utilizo essa ideia, fez esta notação necessária [9]."

Neste capítulo vamos introduzir o conceito do fatorial de maneira formal, aprender a simplificar expressões e resolver equações envolvendo fatorial.

Definição 1.1. Dado um número natural $n \geq 2$, chamamos de fatorial de n ou n fatorial ao produto de todos os números naturais desde n até 1.

Indicamos o fatorial de n por $n!$.

Assim:

$$
\begin{aligned}
&2! = 2.1 = 2\\
&3! = 3.2.1 = 6\\
&4! = 4.3.2.1 = 24\\
&5! = 5.4.3.2.1 = 120\\
&\vdots\\
&n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots 3.2.1
\end{aligned}
$$

Percebe-se que à medida que n aumenta, o cálculo de $n!$ torna-se trabalhoso. Contudo, os cálculos podem ser simplificados se usarmos algumas técnicas, tal como: $n! = n.(n-1)!$.

Desta forma, como $5! = 120$, podemos escrever $6! = 6 \times 5! = 6 \times 120 = 720$, ou ainda, $6! = 6 \times 5 \times 4! = 6 \times 5 \times 24 = 720$, e assim por diante.

Definição 1.2. Temos que:

$$0! = 1, \qquad 1! = 1.$$

Com base no que foi exposto, percebe-se que $n!$ só existe para $n \in \mathbb{N}$.

1.1 Exercícios

1. Simplifique as expressões numéricas:

a) $\dfrac{50!}{48!}$ b) $\dfrac{8!}{6!2!}$

Resolução:

a) $\dfrac{50!}{48!} = \dfrac{50.49.48!}{48!} = 50.49 = 2450$;

b) $\dfrac{8!}{6!2!} = \dfrac{8.7.6!}{6!2.1} = \dfrac{8.7}{2} = 28$

2. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ b) $\dfrac{(n-4)!}{(n-2)!}$

Resolução:

Para simplificar expressões desse tipo, devemos reduzir o fatorial maior até o outro fatorial.

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} = n.(n-1) = n^2 - n$;

b) $\dfrac{(n-4)!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-4)!}{(n-2).(n-3).(n-4)!} = \dfrac{1}{(n-2).(n-3)} = \dfrac{1}{n^2-5n+6}$.

3. Simplifique a expressão numérica $\dfrac{7!+6!}{5!}$.

Resolução:

Primeiro, separamos em duas frações; depois, simplificamos.

$\dfrac{7!+6!}{5!} = \dfrac{7!}{5!} + \dfrac{6!}{5!} = \dfrac{7.6.5!}{5!} + \dfrac{6.5!}{5!} = 7.6 + 6 = 42 + 6 = 48$

4. Simplifique a expressão $\dfrac{n! + (n-1)!}{(n-2)!}$.

Resolução:

Primeiro, separamos em duas frações; depois, simplificamos.

$$\begin{aligned}
\frac{n! + (n-1)!}{(n-2)!} &= \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \\
&= \frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} + \frac{(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} \\
&= n.(n-1) + (n-1) \\
&= n^2 - n + n - 1 \\
&= n^2 - 1
\end{aligned}$$

5. Simplifique a expressão $\dfrac{(n!)^3}{[(n-1)!]^2}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\frac{(n!)^3}{[(n-1)!]^2} &= \frac{n!.n!.n!}{(n-1)!.(n-1)!} \\
&= \frac{n.(n-1)!.n.(n-1)!.n!}{(n-1)!.(n-1)!} \\
&= n.n.n! \\
&= n^2.n!
\end{aligned}$$

6. (FEI) Determine o valor de n na igualdade $\dfrac{(n+1)!}{n!.(n-2)!} = \dfrac{2}{(n-3)!}$.

Resolução:

Desenvolvendo $(n+1)!$ até $n!$ e $(n-2)!$ até $(n-3)!$ encontramos:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1).n!}{n!.(n-2).(n-3)!} = \frac{2}{(n-3)!} \;&\Rightarrow\; \frac{(n+1)}{(n-2)} = \frac{2}{1},\\
&\Rightarrow\; 2.(n-2) = (n+1),\\
&\Rightarrow\; 2n-4 = n+1,\\
&\therefore\; n = 5.
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{5\}$.

7. (PUC) A soma das raízes da equação $(5x-7)! = 1$ vale:

A) 5 B) 7 C) 12 D) 3 E) 4

Resolução:

Como $0! = 1$ e $1! = 1$, temos dois casos a considerar:

$$(5x-7)! = 1 \quad\Rightarrow\quad (5x-7)! = 0! \quad\Rightarrow\quad 5x-7 = 0 \quad\therefore\quad x = \frac{7}{5}.$$

$$(5x-7)! = 1 \quad\Rightarrow\quad (5x-7)! = 1! \quad\Rightarrow\quad 5x-7 = 1 \quad\therefore\quad x = \frac{8}{5}.$$

Dessa forma, temos que a soma das raízes é igual a $\dfrac{7}{5} + \dfrac{8}{5} = \dfrac{15}{5} = 3$.

8. Determine o conjunto solução da equação $\dfrac{(x+1)!-x!}{(x-1)!} = 17x$.

Resolução:

Primeiro, separamos em duas frações; depois, simplificamos.

$$\begin{aligned}
\frac{(x+1)!}{(x-1)!} - \frac{x!}{(x-1)!} = 17x \;&\Rightarrow\; \frac{(x+1)x(x-1)!}{(x-1)!} - \frac{x(x-1)!}{(x-1)!} = 17x,\\
&\Rightarrow\; (x+1)x - x = 17x,\\
&\Rightarrow\; x^2 = 17x.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação encontramos $x = 0$ e $x = 17$.

Contudo x = 0 não satisfaz a equação original, pois $x - 1 \geq 0$, dessa forma o conjunto solução é $S = \{17\}$.

9. Determine o conjunto solução da equação $(x+2)! + (x+1)! = 15x!$.

Resolução:

Para resolver uma equação desse tipo, dividimos todos os termos pelo menor fatorial, que nesse caso é $x!$, e obtemos:

$$\frac{(x+2)!}{x!} + \frac{(x+1)!}{x!} = \frac{15.x!}{x!}$$

Agora, procedemos como na resolução da questão anterior, encontrando

$$\begin{aligned}
(x+2)(x+1) + (x+1) = 15 \;&\Rightarrow\; x^2 + 3x + 2 + x + 1 - 15 = 0,\\
&\Rightarrow\; x^2 + 4x - 12 = 0,
\end{aligned}$$

Resolvemos então a equação e encontramos $x = -6$ e $x = 2$.

Contudo $x = -6$ não satisfaz a equação, pois $x + 1 \geq 0$, dessa forma o conjunto solução é S = $\{2\}$.

10. (UFF) O produto 20.18.16.14....6.4.2 é equivalente a:

A) $\dfrac{20!}{2}$ B) $2.10!$ C) $\dfrac{20!}{2^{10}}$ D) $2^{10}.10!$ E) $\dfrac{20!}{10!}$

Resolução:

Todos os termos da expressão 20.18.16.14....6.4.2 são pares, logo, podemos escrevê-los como

$$(10.2).(9.2).(8.2).(7.2)....(3.2).(2.2).(1.2).$$

que é o mesmo que

$$(10.9.8.7\ldots3.2.1).\underbrace{(2.2.2\ldots2.2.2)}_{10\ vezes} = 10!.2^{10}.$$

No processo de ensino-aprendizado o professor deve levar em conta que as turmas geralmente são heterogêneas, com alunos que tem maior facilidade de compreensão e alunos que requerem uma atenção especial, então para que as atividades não se tornem entediantes para as mentes mais aguçadas é interessante que se tenha sempre em mãos questões desafiadoras, aqui elas aparecem na seção: Problemas de Aprofundamento.

1.2 Problemas de Aprofundamento

11. (UnB) Seja u o último algarismo da soma $1! + 2! + 3! + ... + 99!$. Se $p(x) = x^5 - 3x^3 - 6x^2 - 12x + 1$, então $p(u)$ é igual a:

A) 70 B) 71 C) 72 D) 73 E) 74

12. (FUVEST) O valor de m na expressão:

$$9.(2m)! = 2^m.m!.1.3.5.7.....(2m+1)$$

é igual a:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. (O.C.M) Sabendo que o valor da expressão $\dfrac{1}{1!9!} + \dfrac{1}{3!7!} + \dfrac{1}{5!5!} + \dfrac{1}{7!3!} + \dfrac{1}{9!1!}$ é da forma $\dfrac{2^a}{b!}$ onde a e b são números primos entre si. Então o valor de $a+b$ é igual a:

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

14. (E.N) O valor da soma $S = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + ... + \dfrac{k-1}{k!}$ é igual a:

A) $1 - \dfrac{1}{k!}$ B) $1 + \dfrac{1}{k!}$ C) $k! - 1$ D) $k! + 1$ E) 1

15. Encontre o número de zeros em que termina o número 873!. [6]

Respostas dos problemas de aprofundamento

11. D **12.** D **13.** A **14.** A **15.** 215

Capítulo 2

Princípios Fundamentais de Contagem

Não é difícil conjecturar que o processo de contagem remete ao homem primitivo, que desde muito cedo percebeu a necessidade de fazer algum tipo de contagem, reconhecer o que ocorria quando eram acrescentados ou retirados objetos de uma determinada coleção. Podemos imaginar que para controlar a quantidade de ovelhas, por exemplo, fazia-se uma correspondência biunívoca, associando cada ovelha a uma pedrinha, ou faziam-se ranhuras em uma pedra ou nós em uma corda. No decorrer dos tempos, mediante muito estudo, foram sendo sistematizados os conceitos de grandeza, forma e número [1].

Neste capítulo serão apresentados os dois princípios básicos da análise combinatória, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. Por intermédio da resolução de uma série de problemas, aumentando gradualmente o nível de dificuldade e apontando as sutilezas nas mudanças de enunciados, mostraremos a possibilidade de se dominar as técnicas e de despertar no aluno o interesse pela análise combinatória.

2.1 Princípio Aditivo

Exemplo 2.1. Zildo mora em Maringá e decide passar as férias em São Pedro do Ivaí. Existem três companhias de aviação e cinco empresas de ônibus que fazem o percurso entre as duas cidades. Escolhendo um ônibus **ou** um avião, de quantas maneiras Zildo pode realizar a viagem?

Resolução:

Como Zildo deve escolher uma empresa de aviação ou uma empresa de ônibus, então, pelo princípio aditivo, existem $3 + 5 = 8$ maneiras distintas de realizar a viagem.

Exemplo 2.2. Numa padaria há 4 sabores de sorvete e 3 tipos de salgado. Suponhamos que Nilze só tenha permissão para tomar 1 sorvete **ou** comer 1 salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Nilze pode fazer?

Resolução:

Como Nilze deve escolher 1 sabor de sorvete dentre os 4 ou 1 tipo de salgado dentre os 3, então, pelo princípio aditivo, existem $4 + 3 = 7$ maneiras distintas de fazer o pedido.

Com base nos exemplos 2.1 e 2.2 podemos enunciar o Princípio Aditivo:

Se uma escolha pode ser feita de m ou de n maneiras distintas e independentes, então o número de maneiras de fazer tal escolha é $m + n$.

2.2 Princípio Multiplicativo

Exemplo 2.3. Zildo mora em Maringá e decide passar as férias em São Pedro do Ivaí, mas antes, vai fazer uma escala em Jandaia do Sul. Existem 4 companhias de aviação que fazem o trajeto de Maringá a Jandaia e 5 empresas de ônibus que fazem o trajeto de Jandaia a São Pedro. Escolhendo um avião e um ônibus, de quantas maneiras Zildo pode realizar a viagem?

Resolução:

Como Zildo deve escolher uma empresa de aviação para ir de Maringá até Jandaia do Sul **e** deve escolher, ainda, uma empresa de ônibus para ir de Jandaia do Sul até São Pedro do Ivaí, então, pelo princípio multiplicativo, existem $4 \times 5 = 20$ maneiras distintas de realizar a viagem.

Exemplo 2.4. Ramon possui 4 camisas, 3 calças, 3 pares de meias e 2 pares de sapatos. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, considerando que deve usar uma calça, uma camisa, um par de meias e um par de sapatos?

Resolução:

Como Ramon deve escolher uma calça, uma camisa, um par de meias e um par de sapatos, temos, pelo princípio multiplicativo, que existem $4\times3\times3\times2 = 72$ maneiras distintas de se vestir.

Com base nos exemplos 2.3 e 2.4 podemos enunciar o Princípio Multiplicativo:

Se uma decisão X_1 pode ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada a decisão X_1, a decisão X_2 puder ser tomada de n maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões X_1 e X_2 sucessivamente é $m.n$.

O Princípio Multiplicativo pode ser generalizado para mais de duas decisões. Assim, se a decisão X_1 pode ser tomada de x_1 maneiras, e se, depois de tomada a decisão X_1, a decisão X_2 puder ser tomada de x_2 maneiras, e se, depois de tomadas as decisões X_1 e X_2, a decisão X_3 puder ser tomada de x_3 maneiras, ... e se, depois de tomadas as decisões X_1, X_2, ..., X_{n-1} a decisão X_n puder ser tomada de x_n maneiras, então o número de maneiras de se tomar as decisões X_1 e X_2 e X_3 e ...e X_n é $x_1.x_2.x_3...x_n$.

Observação:

Sintetizando, temos que, no princípio aditivo você toma uma decisão **ou** outra, enquanto que, no princípio multiplicativo você toma uma decisão **e** outra.

2.3 Problemas

Para o aprendizado da análise combinatória, é necessário que o professor resolva muitos problemas com os alunos, busque sempre que possível problemas correlatos, faça generalizações, dê sugestões, e principalmente, deixe claro que *pequenas variações no enunciado podem mudar completamente a resolução da questão.*

16. Em uma sala há 6 portas de entrada (figura 2.1). De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar nesta sala e sair por uma porta diferente da que entrou?

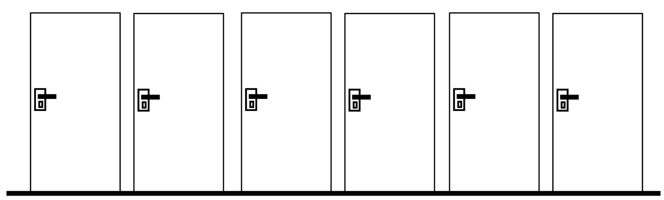


Figura 2.1: Ilustração do problema 16

Resolução:

Podemos perceber que a questão é dividida em duas etapas:

i. escolher a porta de entrada

ii. escolher a porta de saída

Para a porta de entrada são 6 possibilidades de escolha e para a porta de saída são 5, visto que a porta de saída tem que ser diferente da porta de entrada. Como a pessoa tem de entrar e sair da sala, temos, pelo princípio multiplicativo, $6 \times 5 = 30$ possibilidades.

17. Em uma sala há 6 portas de entrada (figura 2.2). De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar e sair da sala?

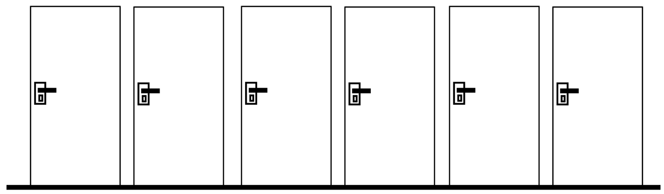


Figura 2.2: Ilustração do problema 17

Resolução:

Novamente a questão é dividida em duas etapas:

i. escolher a porta de entrada

ii. escolher a porta de saída

Agora, a pessoa pode entrar e sair pela mesma porta. Dessa forma, são 6 possibilidades para a escolha da porta de entrada e 6 possibilidades para a escolha da porta de saída. Assim, temos, pelo princípio multiplicativo, $6 \times 6 = 36$ possibilidades.

18. Em uma sala há 6 portas de entrada (figura 2.3). De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar na sala e sair pela mesma porta que usou para entrar?

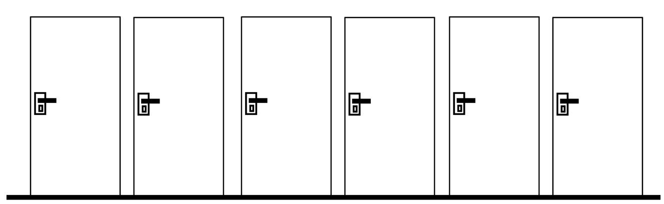


Figura 2.3: Ilustração do problema 18

Resolução:

Para resolver essa questão, temos de considerar que no momento em que a pessoa escolhe a porta de entrada, automaticamente, ela escolhe a porta de saída, que deve ser a mesma. Dessa forma, temos apenas 6 possibilidades.

19. Quantos números de três algarismos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução:

Organize a escolha da seguinte maneira.

$$\underbrace{\qquad}_{centena}\ \underbrace{\qquad}_{dezena}\ \underbrace{\qquad}_{unidade}$$

Temos 6 possibilidades de escolha para cada um dos algarismos: centena, dezena e unidade, visto que pode haver repetição. Como o número tem três algarismos, sendo um algarismo da unidade, um algarismo da dezena e um algarismo da centena, temos, pelo princípio multiplicativo, que podemos formar $6 \times 6 \times 6 = 216$ números de três algarismos.

20. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução:

Organize a escolha da seguinte maneira.

$$\underbrace{\qquad}_{centena}\ \underbrace{\qquad}_{dezena}\ \underbrace{\qquad}_{unidade}$$

Como os algarismos devem ser distintos, temos 6 possibilidades de escolha para o algarismo da centena, 5 possibilidades de escolha para o algarismo da dezena e 4 possibilidades para o algarismo da unidade. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, podemos formar $6 \times 5 \times 4 = 120$ números de três algarismos distintos.

Em problemas envolvendo análise combinatória, é comum situações nas quais ocorram restrições. Diante disso, o professor deve mostrar aos alunos como proceder. Por exemplo, na formação de um número de três algarismos, o algarismo da centena não pode ser zero enquanto na formação de uma senha com três algarismos essa restrição não existe.

21. Quantos números de três algarismos podemos formar com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

Resolução:

Organize a escolha da seguinte maneira.

$$\underbrace{\qquad\quad}_{centena}\ \underbrace{\qquad\quad}_{dezena}\ \underbrace{\qquad\quad}_{unidade}$$

Temos 5 possibilidades de escolha para o algarismo da centena, pois o número não pode começar com zero, e para os algarismos da dezena e unidade temos 6 possibilidades, visto que pode haver repetição. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, podemos formar $5 \times 6 \times 6 = 180$ números de três algarismos.

22. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

Resolução:

Organize a escolha da seguinte maneira.

$$\underbrace{\qquad}_{centena}\ \underbrace{\qquad}_{dezena}\ \underbrace{\qquad}_{unidade}$$

Temos 5 possibilidades de escolha para o algarismo da centena, pois o número não pode começar com zero. Escolhido esse dígito, para o algarismo da dezena, temos 5 possibilidades, visto que o zero agora pode ser escolhido, consequentemente, temos 4 possibilidades de escolha para o algarismo da unidade. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, podemos formar $5 \times 5 \times 4 = 100$ números de três algarismos distintos.

No estudo da análise combinatória, uma grande dificuldade enfrentada pelos alunos está ligada a ordem em que se devem tomar as decisões. Por exemplo, quando vamos formar um número par de 4 algarismos distintos, devemos garantir primeiro que o número vai ser par ou garantir que o algarismo do milhar não vai ser zero?

Diante disso, o professor deve fazer questionamentos de maneira que desperte o lado crítico dos alunos para que eles possam se tornar independentes.

23. Quantos números pares de quatro algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 8?

Resolução 1:

Organize a escolha da seguinte maneira.

$$\underbrace{\qquad}_{milhar}\ \underbrace{\qquad}_{centena}\ \underbrace{\qquad}_{dezena}\ \underbrace{\qquad}_{unidade}$$

Para um número ser par, o algarismo da unidade deve ser par, portanto temos 3 possibilidades: $\{2,\ 4,\ 8\}$. Escolhido um desses dígitos, sobram dois algarismos pares e quatro algarismos ímpares. Como os algarismos devem ser distintos, temos 6 possibilidades para a milhar, 5 possibilidades para a centena e 4 possibilidades para a dezena. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, podemos formar $3 \times 6 \times 5 \times 4 = 360$ números pares de quatro algarismos distintos.

Se tivéssemos começado na seguinte ordem: milhar, centena, dezena e unidade correríamos o risco de não sobrar algarismo par para entrar na unidade, e dessa forma o número não seria par.

Resolução 2:

Uma outra maneira de resolver o exercício seria dividir em casos:

1º caso:

$$\underbrace{\quad}_{milhar}\ \underbrace{\quad}_{centena}\ \underbrace{\quad}_{dezena}\ \underbrace{2}_{unidade}$$

Considerando que o número termina em 2, temos 6 possibilidades para a milhar: $\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Escolhido este dígito, para o algarismo da centena temos 5 possibilidades. Consequentemente, para o algarismo da dezena temos 4 possibilidades. Dessa forma, temos $6 \times 5 \times 4 = 120$ números pares terminados em 2.

2º caso:

$$\underbrace{\quad}_{milhar}\ \underbrace{\quad}_{centena}\ \underbrace{\quad}_{dezena}\ \underbrace{4}_{unidade}$$

Considerando que o número termina em 4, temos 6 possibilidades para a milhar: $\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$. Escolhido este dígito, para o algarismo da centena temos 5 possibilidades. Consequentemente, para o algarismo da dezena temos 4 possibilidades. Dessa forma, temos $6 \times 5 \times 4 = 120$ números pares terminados em 4.

3º caso:

$$\underbrace{}_{milhar}\ \underbrace{}_{centena}\ \underbrace{}_{dezena}\ \underbrace{8}_{unidade}$$

Considerando que o número termina em 8, temos 6 possibilidades para a milhar: {1, 2, 3, 4, 5, 7}. Escolhido este dígito, para o algarismo da centena temos 5 possibilidades. Consequentemente, para o algarismo da dezena temos 4 possibilidades. Dessa forma, temos $6\times5\times4 = 120$ números pares terminados em 8.

Agora, usando o princípio aditivo, temos $120 + 120 + 120 = 360$, pois os números ou terminam em 2, **ou** em 4 **ou** em 8.

24. Quantos números pares de 4 algarismos, sem repetir algarismos num mesmo número, podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 0?

Resolução:

Organize a escolha da seguinte maneira.

$$\underbrace{}_{milhar}\ \underbrace{}_{centena}\ \underbrace{}_{dezena}\ \underbrace{}_{unidade}$$

Para o número ser par, o algarismo da unidade deve ser par, logo temos três possibilidades: {2, 4, 0}. Agora, temos um impasse para a escolha do algarismo da milhar, pois, se o zero foi usado como algarismo da unidade, temos 6 possibilidades; se o zero não foi usado como algarismo da unidade, temos 5 possibilidades.

Para superar esse obstáculo, podemos dividir o problema em 3 casos:

1º caso:

$$\underbrace{}_{milhar}\ \underbrace{}_{centena}\ \underbrace{}_{dezena}\ \underbrace{0}_{unidade}$$

Considerando que o número termina em zero, temos 6 possibilidades para a milhar: $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Para a centena temos 5 possibilidades e para a dezena temos 4 possibilidades. Dessa forma, temos $6 \times 5 \times 4 = 120$ números pares terminados em zero.

2º caso:

$$\underbrace{}_{milhar}\ \underbrace{}_{centena}\ \underbrace{}_{dezena}\ \underbrace{2}_{unidade}$$

Considerando que o número termina em 2, temos 5 possibilidades para a milhar: $\{1, 3, 4, 5, 7\}$, pois o número não pode começar com zero. Definido esse dígito, para o algarismo da centena temos 5 possibilidades, visto que o zero agora pode ser escolhido. Consequentemente, para o algarismo da dezena, temos 4 possibilidades. Dessa forma, temos $5 \times 5 \times 4 = 100$ números pares terminados em 2.

3º caso:

$$\underbrace{}_{milhar}\ \underbrace{}_{centena}\ \underbrace{}_{dezena}\ \underbrace{4}_{unidade}$$

Considerando que o número termina em 4, temos 5 possibilidades para a milhar: $\{1, 2, 3, 5, 7\}$, pois o número não pode começar com zero. Definido esse dígito, para o algarismo da centena temos 5 possibilidades, visto que o zero agora pode ser escolhido. Consequentemente, para o algarismo da dezena, temos 4 possibilidades. Dessa forma, temos $5 \times 5 \times 4 = 100$ números pares terminados em 4.

Como o número deve terminar em 0, 2 ou 4, então, pelo princípio aditivo, temos $120 + 100 + 100 = 320$ números pares de quatro algarismos distintos.

Um tipo interessante de problema é o que envolve caminhos (rotas e ligações), aparece em praticamente todos os livros que abordam o estudo da análise combinatória. Aqui, se o professor achar oportuno, poderia falar sobre o problema das sete pontes de Königsberg, resolvido por Euler em 1736, e que está ligado a teoria de grafos.

25. (UNIOESTE) Considerando a figura 2.4, pode-se afirmar que o número de possíveis ligações distintas entre X e Y é igual a:

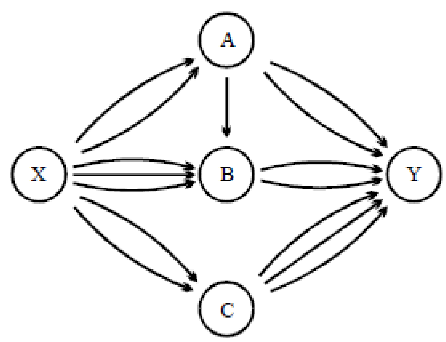


Figura 2.4: Ilustração do problema 25

Resolução:

Vamos dividir o problema em 4 casos.

1º caso: XAY

De X até A temos duas possibilidades de escolha; e de A até Y temos duas possibilidades. Portanto, o número de ligações é $2 \times 2 = 4$.

2º caso: XABY

De X até A temos duas possibilidades de escolha; de A até B temos uma possibilidade; e de B até Y temos duas possibilidades. Portanto, o número de ligações é $2 \times 1 \times 2 = 4$.

3º caso: XBY

De X até B temos três possibilidades de escolha; e de B até Y temos duas possibilidades. Portanto, o número de ligações é $3 \times 2 = 6$.

4º caso: XCY

De X até C temos duas possibilidades de escolha; e de C até Y temos três possibilidades. Portanto, o número de ligações é $2 \times 3 = 6$.

Desta forma, temos, pelo princípio aditivo, $4 + 4 + 6 + 6 = 20$ possíveis ligações distintas.

26. Em uma sala existem 6 lâmpadas que possuem 6 interruptores independentes (figura 2.5). Utilizando os interruptores, de quantas maneiras possíveis essa sala poderá ficar iluminada?

Figura 2.5: Ilustração do problema 26

Resolução:

Para cada lâmpada temos duas possibilidades, acesa ou apagada. Como são 6 lâmpadas, temos $2^6 = 64$ casos, entretanto devemos excluir o caso em que todas as lâmpadas estão apagadas. Dessa forma, a sala pode ficar iluminada de 63 maneiras distintas.

Uma dúvida que acompanha os alunos no aprendizado de análise combinatória é reconhecer quando são usados os princípios: aditivo e multiplicativo. Em vários casos, é interessante o professor reduzir a um problema menor, para depois generalizar o raciocínio. Por exemplo, no problema anterior, se considerássemos apenas 3 lâmpadas, teríamos 8 casos: {LLL, LLD, LDL, DLL, LDD, DLD, DDL, DDD} onde L representa uma lâmpada ligada e D representa uma lâmpada desligada. Dessa forma, fica fácil para o aluno entender que devemos usar o princípio multiplicativo e excluir um caso, que é o caso onde todas as lâmpadas estão apagadas.

E ainda, um problema correlato ao das lâmpadas que o professor poderia abordar com os alunos é o problema dos códigos de barras:

(UCSal-BA) Um código para leitura ótica é constituído por 6 barras, brancas ou pretas. Nenhum código tem barras de uma só cor. Quantos desses códigos, distintos entre si, podem ser formados?

27. (UFRJ) Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, azul e cinza) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Na figura 2.6 temos um exemplo de pintura:

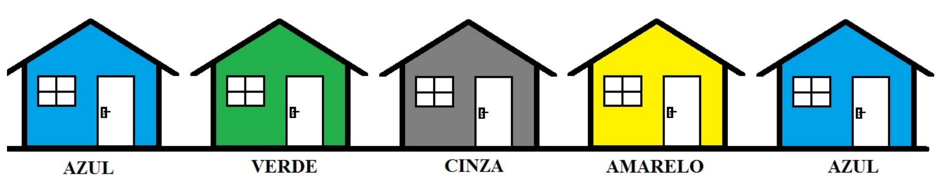
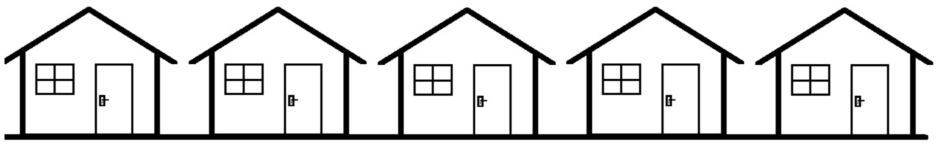


Figura 2.6: Ilustração do problema 27

Determine o número de possibilidades diferentes de pintura.

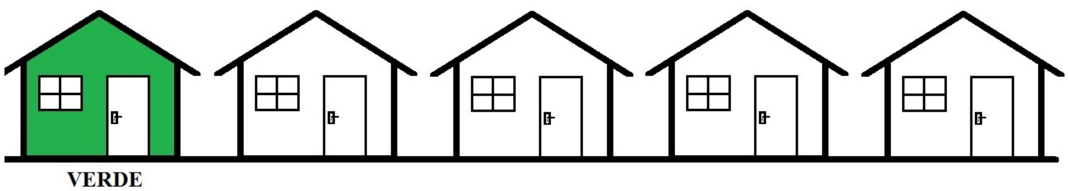
Resolução:

Considere as 5 casas:

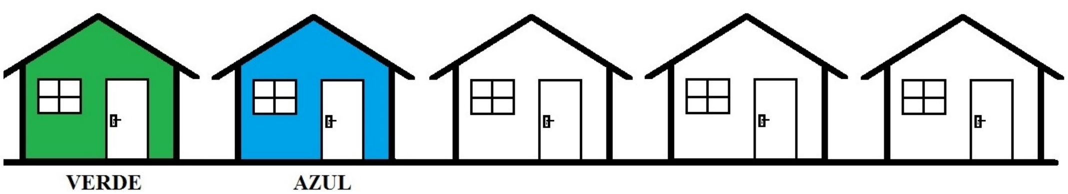


A primeira casa pode ser pintada de 4 maneiras (verde, amarelo, azul e cinza).

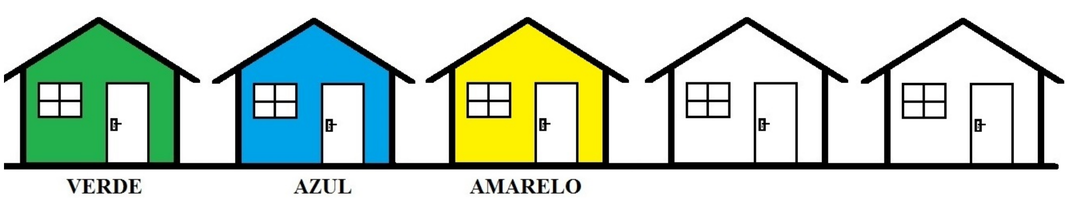
Escolhendo, por exemplo, a cor verde, sobram 3 possibilidades para a segunda casa (amarelo, azul e cinza).



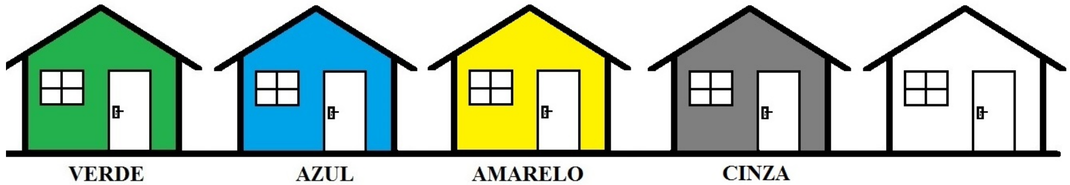
Escolhendo, por exemplo, a cor azul, sobram 3 possibilidades para a terceira casa (amarelo, cinza e verde).



Escolhendo, por exemplo, a cor amarela, sobram 3 possibilidades para a quarta casa (cinza, verde e azul).



Escolhendo, por exemplo, a cor cinza, sobram 3 possibilidades para a quinta casa (verde, amarelo e azul).



Como devemos pintar a primeira, a segunda, a terceira, a quarta e a quinta casa, temos, pelo princípio multiplicativo, $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$ possibilidades distintas de pintura.

Um questionamento que o professor poderia fazer aos alunos é: *E se fosse obrigatório usar as 4 cores?*

28. (IME) 5 rapazes e 5 moças devem posar para fotografia, ocupando os 5 degraus de uma escada, de modo que em cada degrau fique um casal. De quantas maneiras diferentes podemos dispor esse grupo?

A) 70400 B) 128000 C) 460800 D) 332000 E) 625

Resolução:

Considere os 5 degraus da escada (figura 2.7).

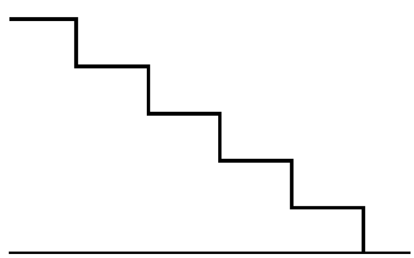


Figura 2.7: Ilustração do problema 28

Para o 1º degrau temos 5 possibilidades de escolha para o rapaz e 5 possibilidades de escolha para a moça. Escolhido o casal, eles podem trocar de posição entre si, assim temos $5 \times 5 \times 2 = 50$ maneiras. Para o 2º degrau temos 4 possibilidades de escolha para o rapaz e 4 possibilidades de escolha para a moça. Escolhido o casal, eles podem trocar de posição entre si, assim temos $4 \times 4 \times 2 = 32$ maneiras.

De modo análogo, para o 3º degrau temos $3 \times 3 \times 2 = 18$ maneiras, para o 4º degrau temos $2 \times 2 \times 2 = 8$ maneiras e para o 5º degrau temos $1 \times 1 \times 2 = 2$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo temos $50 \times 32 \times 18 \times 8 \times 2 = 460800$ maneiras.

Essa é uma questão interessante para se trabalhar, pois a maioria dos alunos ignora que a mudança de posição do casal em cada degrau altera a resolução.

Novamente, um questionamento seria: *Será que tem outra maneira de resolver essa questão?*

29. (OMERJ) Para marcar seus pássaros, um criador dispõe de fitas de 10 cores diferentes. Um pássaro marcado deve ter fita na pata esquerda, na pata direita, ou em ambas. Se, no máximo, se pode colocar uma fita em cada pata, e se dois pássaros não podem ser marcados de modo idêntico, então o maior número de pássaros que podem ser marcados é:

A) 99 B) 100 C) 120 D) 200 E) 1024

Resolução 1:

Temos três modos de marca um pássaro:

1º caso: Só a pata esquerda:

10 opções

2º caso: Só a pata direita:

10 opções

3º caso: Ambas as patas:

$10 \times 10 = 100$ opções

Portanto, temos $10 + 10 + 100 = 120$ maneiras.

Resolução 2:

Considerando que para cada pata há 11 opções, colocar uma fita de uma das 10 cores ou ainda não colocar fita, temos pelo princípio multiplicativo $11 \times 11 = 121$. Como o pássaro deve estar marcado com pelo menos uma fita, excluímos o caso em que o pássaro não tem fita nas duas patas, portanto $121 - 1 = 120$ maneiras.

30. (UEL) As peças usuais do dominó são construídas numerando-se cada uma de suas metades de 0 até 6. Um dominó diferente é construído, numerando-se cada metade de uma peça de 0 até 7. Com base nessas informações, é correto afirmar que o número de peças que esse dominó terá é:

A) 28 B) 36 C) 42 D) 49 E) 51

Resolução 1:

Temos duas maneiras de montar as peças do dominó:

1º caso: Peças com números iguais (figura 2.8)

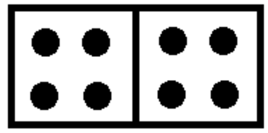


Figura 2.8: Ilustração do problema 30

Para esse caso, há 8 peças com números iguais: (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) e (7, 7).

2º caso: Peças com números diferentes (figura 2.9)

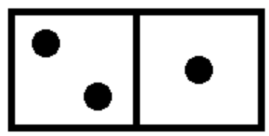
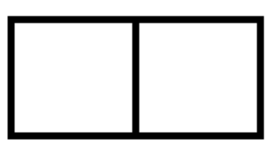


Figura 2.9: Ilustração do problema 30

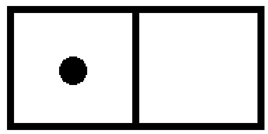
Para esse caso, há 8 possibilidades de escolha do número da esquerda e 7 possibilidades de escolha para o número da direita, portanto, pelo princípio multiplicativo temos $8 \times 7 = 56$ possibilidades. Entretanto, devemos dividir esse resultado por dois para excluirmos os casos obtidos pela rotação da peça em 180º. Sendo assim temos $56/2 = 28$ peças com números diferentes. Desse modo temos $8 + 28 = 36$ peças.

Resolução 2:

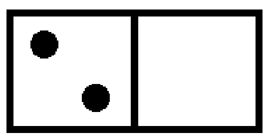
Fixando 0 do lado esquerdo, temos 8 possibilidades para o lado direito $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.



Fixando 1 do lado esquerdo, temos 7 possibilidades para o lado direito $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, pois a peça $\{1, 0\}$ já apareceu como peça $\{0, 1\}$.



Fixando 2 do lado esquerdo, temos 6 possibilidades para o lado direito $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, pois as peças $\{2, 0\}$ e $\{2, 1\}$ já apareceram, respectivamente, como peças $\{0, 2\}$ e $\{1, 2\}$.



De modo análogo, fixando do lado esquerdo os números 3, 4, 5, 6 e 7 temos para o lado direito, respectivamente, 5, 4, 3, 2 e 1 possibilidade. Dessa forma, o total de peças do dominó é $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

Nesse ponto é interessante que o professor faça comentários sobre situações que não se alteram devido a isometria (reflexão, rotação, translação).

31. Um tabuleiro possui 16 casas dispostas em 4 linhas e 4 colunas. Um jogador deseja colocar 4 peças diferentes no tabuleiro, de tal forma que, em cada linha e em cada coluna, seja colocada apenas uma peça. De quantas maneiras as 4 peças poderão ser colocadas?

Resolução:

Considere o tabuleiro 4x4 (figura 2.10) e as peças como sendo A, B, C e D.

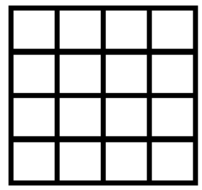
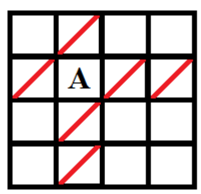


Figura 2.10: Ilustração do problema 31

A peça A pode ser colocada em 16 lugares. Escolhendo um desses lugares devemos eliminar a linha e a coluna que contém a peça A.



A peça B pode ser colocada em 9 lugares. Escolhendo um desses lugares devemos eliminar a linha e a coluna que contém a peça B. De modo análogo, a peça C pode ser colocada em 4 lugares e a peça D em um lugar. Usando o princípio multiplicativo temos $16 \times 9 \times 4 \times 1 = 576$ maneiras.

Essa questão pode ser resgatada quando os alunos aprenderem sobre permutações simples com repetição com o seguinte questionamento: *E se as 4 peças fossem iguais?*.

32. Quantos divisores positivos tem o número 72?

Resolução:

Usando decomposição temos que $72 = 2^3 \times 3^2$. Podemos perceber que os divisores de 72 são da forma $2^\alpha \times 3^\beta$ onde $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $\beta \in \{0, 1, 2\}$.

Como o valor de α pode ser escolhido de 4 modos e o valor de β pode ser escolhido de 3 modos, temos pelo princípio multiplicativo que o número de divisores positivos de 72 é $4 \times 3 = 12$.

Aqui o professor poderia fazer os seguintes questionamentos: *E se quiséssemos calcular todos os divisores de 72? E se quiséssemos os divisores de 72 que são divisíveis por 3? E se quiséssemos a soma de todos os divisores positivos? Tem como generalizar?*

33. (ITA) O número de divisores positivos de 17.640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

A) 24 B) 36 C) 48 D) 54 E) 72

Resolução:

Usando a decomposição, temos que $17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2$. Podemos perceber que os divisores de 17640 que são divisíveis por 3 são da forma $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\lambda$ onde $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $\gamma \in \{0, 1\}$ e $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Como os valores de α, β, γ e λ podem ser escolhidos, respectivamente, de 4, 2, 2 e 3 modos diferentes, temos, pelo princípio multiplicativo, que o número de divisores positivos de 17640 que são divisíveis por 3 é $4 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$.

34. Determine o número de divisores positivos de 17.640 que, por sua vez, são quadrados perfeitos.

Resolução:

Usando a decomposição, temos que $17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2$. Podemos perceber que os divisores de 17640, que são quadrados perfeitos, são da forma $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\lambda$ onde $\alpha \in \{0, 2\}$, $\beta \in \{0, 2\}$, $\gamma \in \{0\}$ e $\lambda \in \{0, 2\}$.

Como os valores de α, β, γ e λ podem ser escolhidos, respectivamente, de 2, 2, 1 e 2 modos diferentes, temos, pelo princípio multiplicativo, que o número de divisores positivos de 17640 que são quadrados perfeitos é $2 \times 2 \times 1 \times 2 = 8$.

35. (OBM) Um número de quatro dígitos é dito paladino se é múltiplo de 9 e nenhum de seus dígitos é nulo. Quantos números paladinos existem?

A)1284 B)1024 C)849 D)1109 E)729

Resolução:

Organize a escolha da seguinte maneira.

$$\underbrace{\qquad}_{milhar}\ \underbrace{\qquad}_{centena}\ \underbrace{\qquad}_{dezena}\ \underbrace{\qquad}_{unidade}$$

Para um número ser múltiplo de 9, a soma dos algarismos tem de ser um múltiplo de 9.

Temos 9 opções de escolha para o algarismo da milhar, 9 opções para o algarismo da centena e 9 opções para o algarismo da dezena. A soma destes 3 algarismos resulta em um número da forma $9k + r$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. A escolha do algarismo da unidade é o número que somado com r gera um múltiplo de 9, e isto ocorre de maneira única. Desta forma, pelo princípio multiplicativo, temos $9 \times 9 \times 9 \times 1 = 729$ números paladinos.

2.4 Problemas de Aprofundamento

36. (UDESC) É cada vez mais frequente o uso de dispositivos móveis tais como tablets e smartphones na realização das mais variadas atividades do dia a dia, tais como se relacionar, acessar notícias, trabalhar, realizar transações bancárias, etc. Diante disso também existe uma crescente preocupação com a segurança e a privacidade nesses dispositivos. Dentre as opções de segurança, uma ferramenta muito utilizada são os padrões de movimento, que são senhas formadas pela ligação de pontos por meio de toque na tela destes aparelhos. De modo geral são nove pontos distribuídos em três linhas com três pontos em cada linha, como mostra a Figura 2.11.

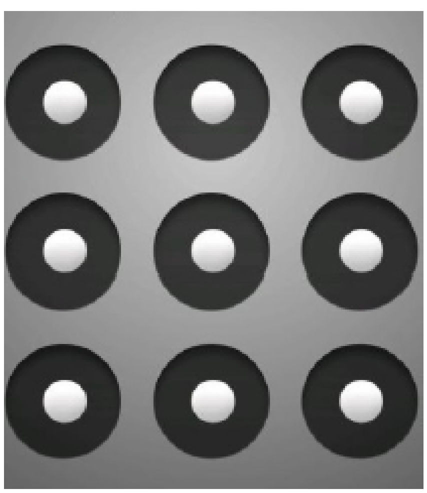


Figura 2.11:

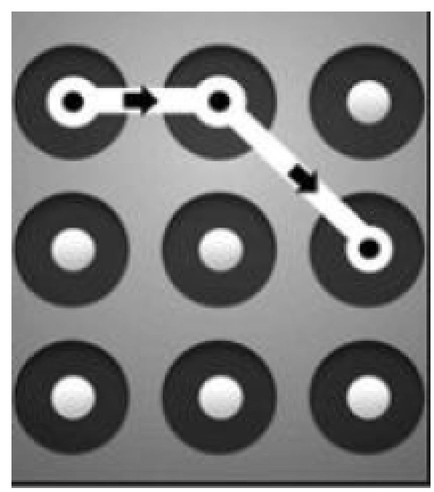


Figura 2.12:

Nestas condições, se a ligação entre os pontos se der sempre por dois pontos adjacentes, conforme exemplo dado na Figura 2.12, a quantidade de senhas formadas por exatamente três pontos diferentes é:

A) 152 B) 504 C) 84 D) 200 E) 160

37. De quantas maneiras possíveis podemos colocar um rei branco e outro rei preto em tabuleiro de xadrez de modo que eles não possam se atacar mutuamente? E se fossem dois reis brancos iguais? [13]

38. Usando a figura 2.13, determine de quantas maneiras é possível formar a palavra COMBINATÓRIA partindo-se de um C e indo sempre para a direita ou para baixo. [6]

											C
										C	O
									C	O	M
								C	O	M	B
							C	O	M	B	I
						C	O	M	B	I	N
					C	O	M	B	I	N	A
				C	O	M	B	I	N	A	T
			C	O	M	B	I	N	A	T	Ó
		C	O	M	B	I	N	A	T	Ó	R
	C	O	M	B	I	N	A	T	Ó	R	I
C	O	M	B	I	N	A	T	Ó	R	I	A

Figura 2.13: Ilustração do problema 38

39. De quantas maneiras diferentes é possível pintar as faces de um octaedro regular com as cores branca e preta? (**Obs.:** duas maneiras são consideradas idênticas se coincidirem por meio de um movimento rígido). [14]

40. (IME) A figura 2.14 é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1, 2, 3 e 4, de modo que um número não pode aparecer duas vezes em:

- uma mesma linha.
- uma mesma coluna.
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.

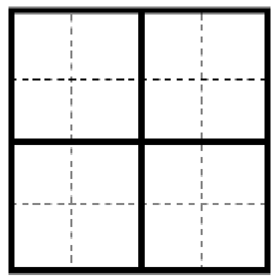


Figura 2.14: Ilustração do problema 40

Respostas dos problemas de aprofundamento

36. E

37. 3612 e 1806

38. 2048

39. 23

40. 288

Capítulo 3

Permutação

Depois que os alunos adquiriram confiança resolvendo os problemas envolvendo os princípios aditivo e multiplicativo, podemos passar para os problemas ligados às permutações, que são problemas que usam o conceito de fatorial. Entretanto, devemos antes trabalhar com os conceitos de permutação e anagrama.

As trocas de posições entre elementos de um mesmo conjunto recebem o nome de Permutação. Por exemplo, se considerarmos o número 12.345 e mudarmos a ordem entre seus algarismos, temos que uma possível permutação é 21.453.

É comum, no estudo de análise combinatória, problemas envolvendo palavras. Quando trocamos a ordem das letras de uma palavra, o ordenamento de letras resultante recebe o nome de anagrama. Por exemplo, um anagrama da palavra SENADOR é DESONRA.

Neste capítulo vamos buscar formas de organizar o ensino por meio de resolução de problemas dos três principais tipos de permutação que são conteúdo do currículo do ensino médio: as permutações simples, as permutações simples com repetição e as permutações circulares.

3.1 Permutação Simples

Exemplo 3.1. De quantas maneiras é possível ordenar os elementos do conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$? [4]

Solução:

Temos n maneiras de escolher o elemento que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ maneiras de escolher o elemento que ocupará o segundo lugar, ... , 1 maneira de escolher o elemento que ocupará o último lugar. Desta forma, o número de maneiras de ordenar os n elementos é dado por

$$n(n-1)...3.2.1 = n!,$$

.

Cada ordenação dos n elementos recebe o nome de permutação simples de n elementos e o número de permutações simples de n elementos distintos pode ser calculado pela fórmula $P_n = n!$.

Exemplo 3.2. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ROMA?

Resolução 1:

Organize a escolha da seguinte maneira:

1ª letra **2ª letra** **3ª letra** **4ª letra**

Como temos 4 letras {R, O , M, A}, a escolha da 1ª letra pode ser feita de 4 maneiras, a 2ª letra de 3 maneiras, a 3ª de duas maneiras e a 4ª de uma maneira. Assim, temos pelo princípio multiplicativo $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas, representados na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Anagramas da palavra ROMA.

ROMA	ROAM	RAMO	RAOM	RMAO	RMOA
OMAR	OMRA	ORAM	ORMA	OAMR	OARM
MARO	MAOR	MRAO	MROA	MOAR	MORA
AOMR	AORM	AROM	ARMO	AMRO	AMOR

Resolução 2:

Uma outra maneira de resolver o problema seria perceber que para obter todos os anagramas basta permutar as 4 letras, ou seja, $4! = 24$ anagramas.

3.2 Permutações Simples com Repetição

São as permutações que se podem formar com n elementos, nas quais alguns desses elementos, ou todos, aparecem repetidos. Considerando $P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\dots}$ como o número de permutações desses n elementos onde existem elementos repetidos nas quantidades $\alpha, \beta, \gamma, ...$ podemos calcular o número de permutações desses n elementos por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\dots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\dots}.$$

Exemplo 3.3. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ARARA?

Resolução 1:

Se as letras fossem todas diferentes, o total de anagramas seria 5!. Como têm 3 letras A, quando as trocamos de posições entre si obtemos o mesmo anagrama, isso faz com que tenhamos contado o mesmo anagrama $3! = 6$ vezes, o mesmo ocorre com a letra R, que aparece duas vezes, fazendo com que o mesmo anagrama seja contado $2! = 2$ vezes. Para excluir os anagramas repetidos, fazemos a divisão de 5! por 3!.2!, ou seja, o total de anagramas da palavra ARARA é $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$ e eles estão representados na tabela 3.2:

Tabela 3.2: Anagramas da palavra ARARA.

ARARA	ARAAR	ARRAA	AARRA	AARAR
AAARR	RAAAR	RAARA	RARAA	RRAAA

Resolução 2:

Como a palavra ARARA tem 5 letras, sendo que a letra A aparece 3 vezes e a letra R aparece 2 vezes temos que o total de anagramas é $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$.

Exemplo 3.4. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra MISSISSIPPI?

Resolução:

Como a palavra MISSISSIPPI tem 11 letras, sendo que a letra I aparece 4 vezes, a letra S aparece 4 vezes e a letra P aparece 2 vezes temos que o total de anagramas é $\dfrac{11!}{4!4!2!} = 34650$.

3.3 Permutações Circulares

São as permutações de n elementos distintos dispostos em volta de um círculo, considerando equivalentes as disposições que possam coincidir por meio de rotação. Considerando $(PC)_n$ como o número de permutações circulares, podemos calcular o número de maneiras de dispor n elementos em volta de um círculo por:

$$(PC)_n = (n-1)!.$$

Exemplo 3.5. De quantas maneiras 3 pessoas podem ser dispostas:

a) em fila indiana?

Resolução:

Como são 3 pessoas, elas podem se permutar de 3! maneiras, ou seja, podem ser dispostas em fila indiana de 6 maneiras distintas.

Supondo que as pessoas são Agnaldo, Berenice e Claudete, representadas, respectivamente, por A, B e C, temos os seguintes casos: {ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}.

b) em volta de uma mesa circular?

Resolução:

Como devemos distribuir 3 pessoas em volta de uma mesa circular, isto pode ser feito de $(PC)_3 = (3-1)! = 2! = 2$ maneiras distintas. Supondo que as pessoas são Agnaldo, Berenice e Claudete, representadas, respectivamente, por A, B e C, temos os seguintes casos, reprentados na figura 3.1.

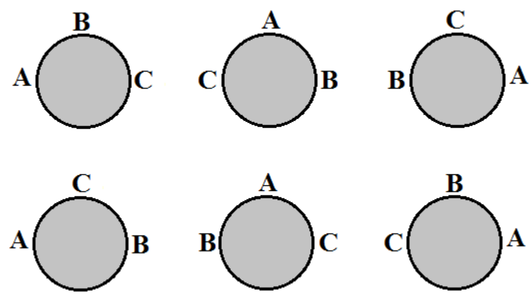


Figura 3.1: Ilustração do exemplo 3.5

Entretanto os três primeiros casos coincidem entre si por rotação, sendo que o mesmo ocorre nos três últimos casos. Dessa forma, 3 pessoas podem ser distribuídas em volta de uma mesa circular de 2 maneiras distintas.

Exemplo 3.6. De quantas modos 5 meninos e 5 meninas podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas? [4]

Resolução:

Considere o conjunto composto por 10 pessoas, sendo 5 meninos e 5 meninas: $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$.

Primeiro devemos distribuir os 5 meninos (figura 3.2), e isso pode ser feito de $(PC)_5 = 4!$ maneiras.

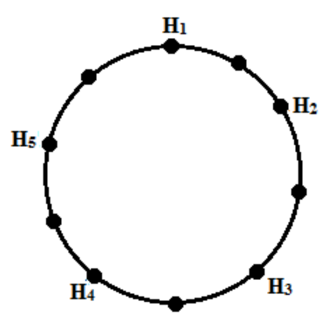


Figura 3.2: Ilustração do exemplo 3.6

Depois disso, as 5 meninas devem ser distribuídas nos 5 lugares entre os meninos. Isso pode ser feito de 5! maneiras. Dessa forma, temos, pelo princípio multiplicativo, que o número de possibilidades de se formar essa roda de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas é $4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$.

3.4 Problemas

Após formalizar os conceitos é interessante que o professor trabalhe com alguns exercícios básicos, para que os alunos adquiram confiança. Na sequência, como no capítulo anterior, deve-se trabalhar com questões que exigem certo grau de reflexão e ir, aos poucos, aumentando o grau de dificuldade.

41. (FEI) O número de anagramas da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições é:

A) 720 B) 360 C) 120 D) 60 E) 48

Resolução:

Organize a escolha da seguinte maneira:

$$\_\_\ \underline{\mathbf{E}}\ \_\_\ \underline{\mathbf{Ú}}\ \_\_\ \_\_\ \underline{\mathbf{I}}\ \_\_\ \underline{\mathbf{A}}$$

Fixadas as vogais, sobram as consoantes R, P, B, L, C, que podem ser permutadas de 5! maneiras. Dessa forma, temos que o número de anagramas formados é $5! = 120$.

42. (UNITAU) Numa estante existem 7 livros diferentes, sendo 3 livros de História, 3 de Matemática e 1 de Geografia. Deseja-se sempre um livro de História em cada extremidade, então o número de maneiras de se arrumar esses 7 livros é:

A) 720 B) 36 C) 81 D) 126 E) n.d.a.

Resolução:

Organize a escolha da seguinte maneira:

$$\underline{\mathbf{H}}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{\mathbf{H}}$$

Considerando que os livros são $\{H_1, H_2, H_3, M_1, M_2, M_3, G\}$ podemos escolher o livro de história da extremidade esquerda de 3 maneiras e o da extremidade direita de 2 maneiras. Feito isso, sobram 5 livros, que vão ser permutados nos 5 lugares que restaram de $5! = 120$ maneiras.

Desta forma, temos pelo princípio multiplicativo que os livros podem ser arrumados na estante de $3 \times 2 \times 120 = 720$ maneiras.

43. (UFU) De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 36 E) 48

Resolução 1:

Considere as famílias $A = \{M_1, F_1\}$, $B = \{M_2, F_2\}$ e $C = \{M_3, F_3\}$. Como cada mãe tem que estar com seu respectivo filho, permutamos as famílias de $3!$ maneiras e permutamos os membros de cada família de $2!$ maneiras. Dessa forma, temos pelo princípio multiplicativo $3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$ maneiras.

Resolução 2:

Considere que devemos distribuir as 6 pessoas: $\{M_1, F_1, M_2, F_2, M_3, F_3\}$ em 6 cadeiras. Para o 1º lugar temos 6 opções, escolhida essa pessoa, para o 2º lugar, temos 1 opção. Para o 3º lugar temos 4 opções, escolhida essa pessoa, para o 4º lugar, temos 1 opção. Para o 5º lugar, temos 2 opções, escolhida essa pessoa, para o 6º lugar, temos 1 opção. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo temos $6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$ maneiras.

44. (MACK) O número de filas diferentes que podem ser formadas com 2 homens e 3 mulheres, de modo que os homens não fiquem juntos, é:

A) 96 B) 72 C) 48 D) 84 E) 120

Resolução 1:

Considere que os homens são H_1 e H_2 e as mulheres são M_1, M_2 e M_3.

Podemos perceber que temos 6 casos que não possuem homens juntos: {HMHMM, HMMHM, HMMMH, MHMHM, MHMMH, MMHMH}.

Para cada caso, os homens podem se permutar de 2! maneiras e as mulheres podem se permutar de 3! maneiras, dessa forma, temos pelo princípio multiplicativo $6 \times 2! \times 3! = 6 \times 2 \times 6 = 72$ filas diferentes que não possuem os dois homens juntos.

Aqui é oportuno fazer um adendo. Geralmente esse é o caminho escolhido pela maioria dos alunos. Dessa forma é interessante fazer o seguinte questionamento: *E se fossem 2 homens e 8 mulheres?* ou ainda, *E se fossem m homens e n mulheres?*

Resolução 2:

Considere que os homens são H_1 e H_2 e as mulheres são M_1, M_2 e M_3. O número total de filas que podem ser formadas com estas 5 pessoas, sem restrições, é $5! = 120$. Porém devemos descontar o número de filas onde os homens ficam juntos, ou seja, $4! \times 2! = 48$. Logo, o número de filas onde os homens não ficam juntos é $120 - 48 = 72$.

E se a condição do problema fosse não ter duas mulheres juntas?

45. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine que lugar ocupa o número 62417. [4]

Resolução:

Para determinar a posição do número 62417 devemos descobrir quantos números são menores que ele.

Para isso vamos considerar os seguintes casos:

Fixado o 1, temos a permutação dos algarismos 2, 4, 6 e 7 nas outras posições:

1				

$4! = 24$ números

Fixado o 2, temos a permutação dos algarismos 1, 4, 6 e 7 nas outras posições:

2				

$4! = 24$ números

Fixado o 4, temos a permutação dos algarismos 1, 2, 6 e 7 nas outras posições:

4				

$4! = 24$ números

Fixado o 61, temos a permutação dos algarismos 2, 4 e 7 nas outras posições:

6	1			

$4! = 24$ números

Fixado o 621, temos a permutação dos algarismos 4 e 7 nas outras posições:

6	2	1		

$4! = 24$ números

Dessa forma temos $24 + 24 + 24 + 6 + 2 = 80$ números menores, logo o número 62417 ocupa o 81^o lugar.

46. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine que número ocupa o 66^o lugar.[4]

Resolução:

Para isso vamos considerar os seguintes casos:

Fixado o 1, temos a permutação dos algarismos 2, 4, 6 e 7 nas outras posições:

1				

$4! = 24$ números (1^o ao 24^o)

Fixado o 2, temos a permutação dos algarismos 1, 4, 6 e 7 nas outras posições:

2				

$4! = 24$ números (25^o ao 48^o)

Fixado o 41, temos a permutação dos algarismos 2, 6 e 7 nas outras posições:

4	**1**			

$3! = 6$ números (49^o ao 54^o)

Fixado o 42, temos a permutação dos algarismos 1, 6 e 7 nas outras posições:

4	**2**			

$3! = 6$ números (55^o ao 60^o)

Fixado o 46, temos a permutação dos algarismos 1, 2 e 7 nas outras posições:

4	**6**			

$3! = 6$ números (61^o ao 66^o)

Dessa forma, temos que o 66^o número é o maior número que começa com 46, ou seja, 46721.

47. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine qual o 167^o algarismo escrito.[4]

Resolução:

Como cada número é formado por 5 algarismos, temos:

$$\begin{array}{r|l} 167 & \ \ 5 \\ \cline{2-2} 2 & \ 33 \end{array}$$

O resto indica que o 167^o algarismo escrito corresponde ao segundo algarismo do 34^o número escrito.

Dessa forma:

Fixado o 1, temos a permutação dos algarismos 2, 4, 6 e 7 nas outras posições:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & & & & \\ \hline\end{array} \qquad 4! = 24 \text{ números } (1^{o} \text{ ao } 24^{o})$$

Fixado o 21, temos a permutação dos algarismos 4, 6 e 7 nas outras posições:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & & & \\ \hline\end{array} \qquad 3! = 6 \text{ números } (25^{o} \text{ ao } 30^{o})$$

Fixado o 241, temos a permutação dos algarismos 6 e 7 nas outras posições:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 1 & & \\ \hline\end{array} \qquad 2! = 2 \text{ números } (31^{o} \text{ ao } 32^{o})$$

Dessa forma, temos que o 33^{o} número é 24617, o 34^{o} número é 24671 e o 167^{o} algarismo escrito é o 4.

48. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine a soma de todos os números assim formados.[4]

Resolução:

O total de números formados é $5! = 120$ e como são 5 algarismos $\{1, 2, 4, 6, 7\}$, cada um deles aparece $4! = 24$ vezes como algarismo da unidade, da dezena, da centena, da unidade de milhar e da dezena de milhar. A soma desses algarismos é $24 \cdot (1+2+4+6+7) = 24 \times 20 = 480$. Portanto:

A soma das unidades dos números é $24 \cdot (1+2+4+6+7) = 24 \times 20 = 480$.

A soma das dezenas é $10 \cdot 24 \cdot (1+2+4+6+7) = 240 \times 20 = 4800$.

A soma das centenas é $100 \cdot 24 \cdot (1+2+4+6+7) = 2400 \times 20 = 48000$.

A soma das unidades de milhar é $1000 \cdot 24 \cdot (1+2+4+6+7) = 24000 \times 20 = 480000$.

A soma das dezenas de milhar é $10000 \cdot 24 \cdot (1+2+4+6+7) = 240000 \times 20 = 4800000$.

Dessa forma, temos que a soma de todos os números assim formados é igual a $480 + 4800 + 48000 + 480000 + 4800000 = 5333280$.

49. (UFRS) Na figura 3.3, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões.

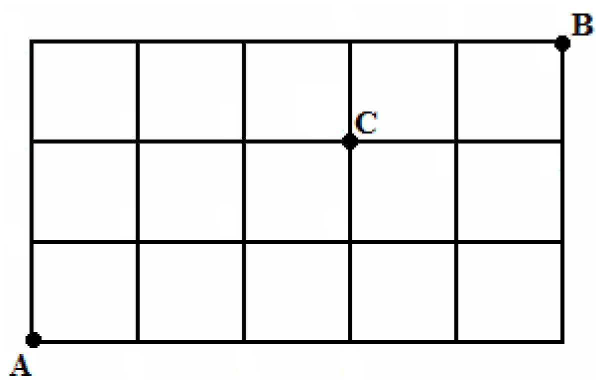


Figura 3.3: Ilustração do problema 49

A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A e B que passam por C é:

A) 12 B) 13 C) 15 D) 24 E) 30

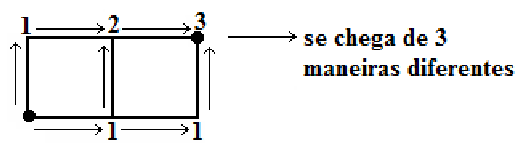
Resolução 1:

Como o exercício pede trajetos de comprimento mínimo, vamos considerar movimentos no sentido leste (L) e no sentido norte (N). Para ir de A até C devemos usar 3 movimentos para o leste e 2 movimentos para o norte, dessa forma, fazendo a permutação das letras LLLNN temos $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$ maneiras. Para ir de C até B devemos usar 2 movimentos para o leste e 1 movimento para o norte, dessa forma, fazendo a permutação das letras LLN temos $\dfrac{3!}{2!} = 3$ maneiras. Usando o princípio multiplicativo temos $10 \times 3 = 30$ trajetos ligando A e B que passam por C.

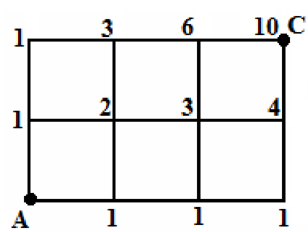
E se o problema pedisse: *O número de trajetos que ligam A e B e que não passam por C?*

Resolução 2:

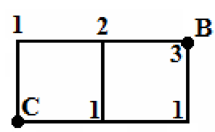
Considere que:



Fazendo a contagem de A até C temos: 10 maneiras.



Fazendo a contagem de C até B temos: 3 maneiras.



Usando o princípio multiplicativo temos $10 \times 3 = 30$ trajetos ligando A e B que passam por C.

50. (IME) É dado um tabuleiro quadrado 4x4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas (figura 3.4):

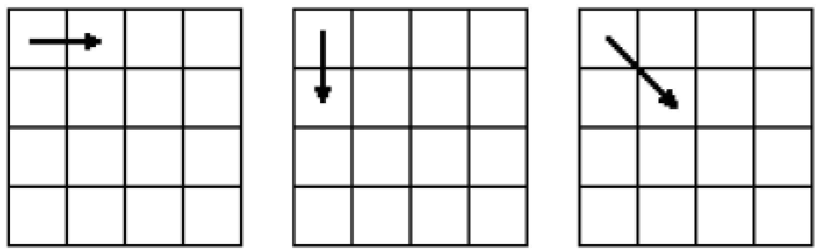


Figura 3.4: Ilustração do problema 50

De quantas maneiras isto é possível?

Resolução 1:

Considere a figura 3.5 e os movimentos na horizontal (H), vertical (V) e diagonal (D).

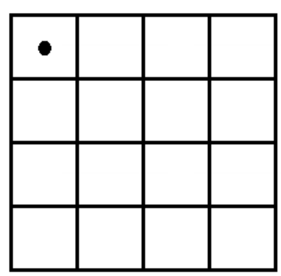


Figura 3.5: Ilustração do problema 50

1º caso:

Usando 3 horizontais e 3 verticais (HHHVVV) temos:
$\dfrac{6!}{3!3!} = 20$ maneiras.

2º caso:

Usando 1 diagonal, 2 horizontais e 2 verticais (DHHVV) temos:

$\dfrac{5!}{2!2!} = 30$ maneiras.

3º caso:

Usando 2 diagonais, 1 horizontais e 1 verticais (DDHV) temos:

$\dfrac{4!}{2!} = 12$ maneiras.

4º caso:

Usando 3 diagonais (DDD) temos:

$\dfrac{3!}{3!} = 1$ maneira.

Dessa forma temos $20 + 30 + 12 + 1 = 63$ maneiras.

Resolução 2:

Considere o tabuleiro e os movimentos na horizontal (H), vertical (V) e diagonal (D).

•			

Fazendo a contagem no tabuleiro temos:

•	1	1	1
1	3	5	7
1	5	13	25
1	7	25	63

63 maneiras.

51. (ITA) Quantos anagramas da palavra CADERNO apresentam as vogais em ordem alfabética?

A) 2520 B) 5040 C) 1625 D) 840 E) 720

Resolução:

O Número de anagramas da palavra CADERNO é $7! = 5040$. As vogais A, E e O podem ser permutadas de $3! = 6$ maneiras, gerando os grupos AEO, AOE, EAO, EOA, OAE e OEA. Como queremos apenas os anagramas que possuem as vogais em ordem alfabética devemos dividir 5040 por 6. Assim, existem 840 anagramas da palavra CADERNO em que as vogais estão em ordem alfabética.

52. (ITA) O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 5$ é:

A) 36 B) 48 C) 52 D) 54 E) 56

Resolução 1:

Podemos perceber que os valores que x, y, z e w podem assumir são os do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dessa forma, podemos dividir o problema nos seguintes casos:

1º caso: Soluções formadas com $\{5, 0, 0, 0\}$

Isso pode ser feito de $\dfrac{4!}{3!} = 4$ maneiras.

2º caso: Soluções formadas com $\{4, 1, 0, 0\}$

Isso pode ser feito de $\dfrac{4!}{2!} = 12$ maneiras.

3º caso: Soluções formadas com $\{3, 2, 0, 0\}$

Isso pode ser feito de $\dfrac{4!}{2!} = 12$ maneiras.

4º caso: Soluções formadas com $\{3, 1, 1, 0\}$

Isso pode ser feito de $\dfrac{4!}{2!} = 12$ maneiras.

5º caso: Soluções formadas com $\{2, 2, 1, 0\}$

Isso pode ser feito de $\dfrac{4!}{2!} = 12$ maneiras.

6º caso: Soluções formadas com $\{2, 1, 1, 1\}$

Isso pode ser feito de $\dfrac{4!}{3!} = 4$ maneiras.

Portanto, o total de soluções inteiras e não negativas da equação é $4 + 12 + 12 + 12 + 12 + 4 = 56$.

E se a equação fosse $x + y + z + w = 50$?.

Resolução 2:

Uma outra maneira de resolver a equação $x + y + z + w = 5$ seria escrever o 5 como cinco unidades $\{1, 1, 1, 1, 1\}$ e usar os três sinais de $+$ que separam as variáveis na equação $\{+, +, +\}$ obtendo assim o conjunto $\{1, 1, 1, 1, 1, +, +, +\}$. Observe que ao permutar os elementos desse conjunto obtemos soluções inteiras e não negativas da equação $x+y+z+w = 5$.

$$\underbrace{1 \quad 1}_{2} + \underbrace{\qquad}_{0} + \underbrace{\ 1\ }_{1} + \underbrace{1 \quad 1}_{2} = 5 \qquad (2, 0, 1, 2)$$

$$\underbrace{\qquad}_{0} + \underbrace{\qquad}_{0} + \underbrace{1 \quad 1 \quad 1}_{3} + \underbrace{1 \quad 1}_{2} = 5 \qquad (0, 0, 3, 2)$$

Dessa forma, podemos perceber que o total de soluções inteiras e não negativas é igual a $\dfrac{8!}{5!3!} = 56$.

53. (UEL) Numa competição internacional, um país obteve, no total, 10 medalhas dentre as de ouro, prata e bronze. Sabendo-se que este país recebeu pelo menos uma medalha de ouro, uma de prata e uma de bronze, quantas são as possibilidades de composição do quadro de medalhas deste país?

A) 10 B) 30 C) 36 D) 120 E) 132

Resolução 1:

Como o país recebeu pelo menos uma medalha de ouro, uma de prata e uma de bronze devemos descobrir as possibilidades das outras sete medalhas. Para resolver esse problema podemos montar a tabela 3.3.

Tabela 3.3: Quadro de medalhas

Número de medalhas de ouro (O)	Número de medalhas de prata e bronze (P, B)	Número de possibilidades
0	(7, 0), (6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6), (0, 7)	8
1	(6, 0), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (0, 6)	7
2	(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)	6
3	(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)	5
4	(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)	4
5	(2, 0), (1, 1), (0, 2)	3
6	(1, 0), (0, 1)	2
7	(0, 0)	1

Aumentando uma a uma a quantidade de medalhas de ouro, o número de possibilidades diminui um a um; logo, o total de possibilidades é dado pela soma $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

Resolução 2:

Como o país recebeu pelo menos uma medalha de ouro (O), uma de prata (P) e uma de bronze (B) devemos descobrir as possibilidades das outras sete medalhas. Perceba que o número de medalhas tem que ser um número inteiro não negativo, dessa forma podemos representar o problema pela equação $O + P + B = 7$, onde o número de soluções é obtido pela permutação dos elementos do conjunto $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, +, +\}$, ou seja, $\dfrac{9!}{7!2!} = 36$. Concluímos que o número de possibilidades do quadro de medalhas é igual a 36.

54. (IME) Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um destes passageiros irá desembarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção dentre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é:

A) 1.287 B) 14.112 C) 44.200 D) 58.212 E) 62.822

Resolução:

Primeiro vamos descobrir de quantas maneiras os homens podem desembarcar nas 6 estações. Como são 4 homens, a quantidade de maneiras distintas de desembarque é dada pelo número de soluções inteiras não negativas da equação $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 = 4$, que é igual a $\dfrac{9!}{4!5!} = 126$. Agora vamos descobrir de quantas maneiras as mulheres podem desembarcar nas 6 estações. Como são 6 mulheres, a quantidade de maneiras distintas de desembarque é dada pelo número de soluções inteiras não negativas da equação $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 = 6$, que é igual a $\dfrac{11!}{6!5!} = 462$.

Pelo princípio multiplicativo temos que o número de maneiras de desembarque dos passageiros nas 6 estações é $126 \times 462 = 58212$.

55. (PUC) Na última quinzena do mês de junho, Larry realizará um exame de final de semestre constituído de quatro provas. Ofereceram-lhe a oportunidade de escolher os dias para cada prova, que podem ser aplicadas, inclusive, em finais de semanas. De quantas formas é possível ele escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos?

A) 495 B) 1.365 C) 455 D) 32.760

Resolução:

Considere que **P** indica um dia que tem prova e **N** um dia que não tem prova. Desta forma, podemos fazer a seguinte distribuição

$$N_1 \;\; \mathbf{P} \;\; N_2 \;\; \mathbf{P} \;\; N_3 \;\; \mathbf{P} \;\; N_4 \;\; \mathbf{P} \;\; N_5$$

Como serão 11 dias sem provas temos a equação $N_1+N_2+N_3+N_4+N_5 = 11$, onde N_1 e N_5 são números inteiros não negativos e N_2, N_3 e N_4 são números inteiros positivos, pois não podemos ter provas em dias consecutivos. Fazendo $N_2 = X_2 + 1$, $N_3 = X_3 + 1$ e $N_4 = X_4 + 1$ podemos reescrever a equação $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 11$ como $N_1 + X_2 + X_3 + X_4 + N_5 = 8$, que possui $\dfrac{12!}{8!4!} = 495$ soluções inteiras e não negativas. Assim concluímos que o número de maneiras de escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos é 495.

56. (ITA) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

A) 144 B) 180 C) 240 D) 288 E) 360

Resolução 1:

O total de números que possuem 3 e 4 em posições adjacentes é igual a $5! \times 2! = 240$, pois podemos permutar os elementos do conjunto $\{1, 2, \mathbf{34}, 5, 6\}$ de $5!$ maneiras e ainda, 3 e 4 podem permutar entre si de $2!$ maneiras.

O total de números que possuem 3 e 4 em posições adjacentes e 1 e 2 em posições adjacentes é igual a $4! \times 2! \times 2! = 96$, pois podemos permutar os elementos do conjunto $\{\mathbf{12}, \mathbf{34}, 5, 6\}$ de $4!$ maneiras e ainda, 1 e 2 podem permutar entre si de $2!$ maneiras e 3 e 4 também podem permutar ente si de $2!$ maneiras.

Dessa forma, o total de números que possuem 3 e 4 em posições adjacentes e 1 e 2 nunca ocupam posições adjacentes é $240 - 96 = 144$.

Resolução 2:

Primeiramente pode se distribuir os números da seguinte maneira:

$$\underline{\quad}34\underline{\quad}5\underline{\quad}6\underline{\quad}$$

Os números 34, 5 e 6 podem ser permutados de $3! \times 2! = 12$ maneiras, pois temos que considerar a permutação entre si dos algarismos 3 e 4. Feito isso, devem-se distribuir os algarismos 1 e 2 nos quatro lugares disponíveis. O dígito 1 pode ser distribuído de 4 maneiras e o dígito 2, de 3 maneiras. Desta forma, 1 e 2 podem ser distribuídos de $4 \times 3 = 12$ maneiras distintas. Usando o princípio multiplicativo temos $12 \times 12 = 144$ números que possuem 3 e 4 em posições adjacentes e 1 e 2 em posições não adjacentes.

57. Quantos são os anagramas da palavra **BÚLGARO** que não possuem duas vogais adjacentes?

Resolução: A palavra BÚLGARO é formada pelas vogais {A, O, U} e pelas consoantes {B, L, G, R}.

Primeiramente pode se distribuir as consoantes da seguinte maneira:

__B__L__G__R__

As consoantes podem ser permutadas de $4! = 24$ maneiras. Feito isso, deve-se distribuir as vogais nos 5 lugares disponíveis. A letra A pode ser distribuída de 5 maneiras, a letra O, de 4 maneiras e a letra U, de 3 maneiras. Dessa forma, as vogais podem ser distribuídas de $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneiras distintas. Usando o princípio multiplicativo temos $24 \times 60 = 1440$ anagramas que não possuem duas vogais adjacentes.

58. Quantos são os anagramas da palavra **INSANAS** que não contêm duas letras iguais juntas? [6]

Resolução:

O total de anagramas da palavra INSANAS é igual a $\dfrac{7!}{2!2!2!} = 630$. Devemos agora calcular os casos que possuem letras iguais juntas, para depois excluí-los.

Para isso, considere os conjuntos:

$A = \{$anagramas que possuem duas letras A juntas$\}$

$N = \{$anagramas que possuem duas letras N juntas$\}$

$S = \{$anagramas que possuem duas letras S juntas$\}$

O total de anagramas dos conjuntos A, N e S é igual. Vamos calcular o número de anagramas do conjunto $A = \{\mathbf{AA}, \text{N}, \text{N}, \text{S}, \text{S}, \text{I}\}$.

Isto pode ser feito de $\dfrac{6!}{2!2!} = 180$ maneiras.

O número de anagramas dos conjuntos $A \cap N$, $A \cap S$ e $N \cap S$ é igual. Vamos calcular o número de anagramas do conjunto

$A \cap N = \{\mathbf{AA}, \mathbf{NN}, \text{S}, \text{S}, \text{I}\}$. Isto pode ser feito de $\dfrac{5!}{2!} = 60$ maneiras.

Vamos calcular o número de anagramas do conjunto

$A \cap N \cap S = \{\mathbf{AA}, \mathbf{NN}, \mathbf{SS}, \text{I}\}$.

Isto pode ser feito de $4! = 24$ maneiras.

Agora, usando o diagrama de Euler-Venn (figura 3.6) temos:

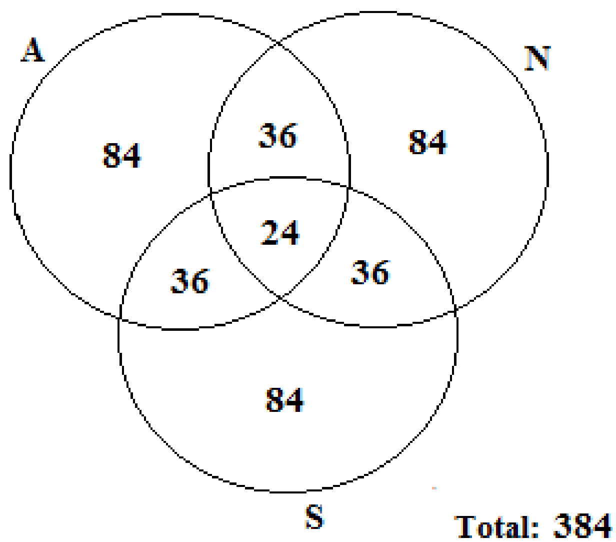


Figura 3.6: Ilustração do problema 58

Dessa forma, o número de anagramas da palavra INSANAS que não possuem duas letras iguais juntas é igual a $630 - 384 = 246$.

59. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas crianças não fiquem juntas. [4]

Resolução 1:

Considere que as 7 crianças são Agnaldo (A), Berenice (B), Claudete (C), Dinorá (D), Everaldo (E), Féster (F) e Geneci (G), e que essas duas últimas estão de mal, portanto não querem ficar juntas. As crianças A, B, C, D e E podem ser permutadas circularmente de $(PC)_5 = 4! = 24$ maneiras (figura 3.7).

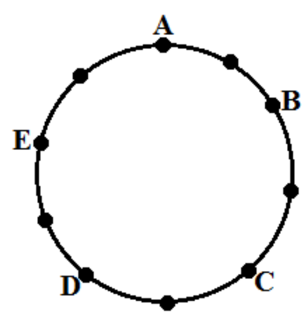


Figura 3.7: Ilustração do problema 59

Feito isso, podemos perceber que sobram 5 lugares para colocar a criança F (figura 3.8).

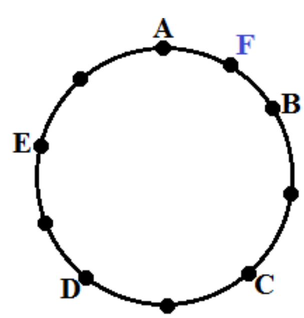


Figura 3.8: Ilustração do problema 59

Colocada a criança F, sobram 4 possibilidades para a criança G. Dessa forma, usando o princípio multiplicativo, temos que as 7 crianças podem ser distribuídas de $24 \times 5 \times 4 = 480$ maneiras diferentes sem que as crianças F e G fiquem juntas.

Resolução 2:

Considere que as 7 crianças são Agnaldo (A), Berenice (B), Claudete (C), Dinorá (D), Everaldo (E), Féster (F) e Geneci (G), e que essas duas últimas estão de mal, portanto não querem ficar juntas. As 7 crianças podem ser permutadas circularmente de $(PC)_7 = 6! = 720$ maneiras (figura 3.9).

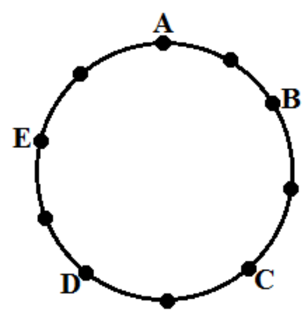


Figura 3.9: Ilustração do problema 59

Vamos calcular agora os casos em que as crianças F e G aparecem juntas (figura 3.10).

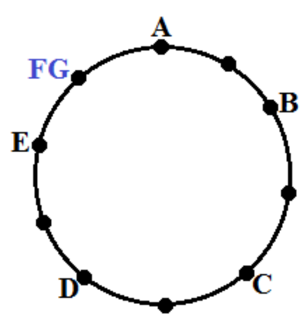


Figura 3.10: Ilustração do problema 59

Elas podem ser permutadas circularmente de $(PC)_6 = 5! = 120$ maneiras, entretanto, as crianças F e G podem trocar de posição entre si de

$2! = 2$ maneiras, logo podemos distribuir as 7 crianças de maneira que F e G estejam juntas de $5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$ maneiras.

Como queremos os casos em que as crianças F e G não estão juntas, temos $720 - 240 = 480$.

60. (ITA) Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguido dos demais, o maior valor possível de N é igual a:

A) 10 B)15 C) 20 D) 25 E) 30

Resolução:

Considere que as 6 cores são azul, amarelo, verde, vermelho, laranja e cinza. Como devemos usar as 6 cores, obrigatoriamente uma face vai ter a cor amarela (figura 3.11).

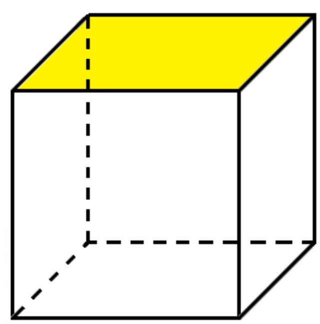


Figura 3.11: Ilustração do problema 60

Pintando a face superior de amarelo temos 5 opções para a face inferior. Escolhendo, por exemplo, a cor verde, sobram 4 cores, que vão ser permutadas circularmente em volta do cubo de $(PC)_4 = 3! = 6$ maneiras. Dessa forma, temos pelo princípio multiplicativo que o cubo pode ser pintado de $5 \times 6 = 30$ maneiras diferentes.

3.5 Problemas de Aprofundamento

61. (ITA) Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^9$.

62. (IME) Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são diferentes, portanto a figura 3.12 mostra duas soluções distintas.

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 96

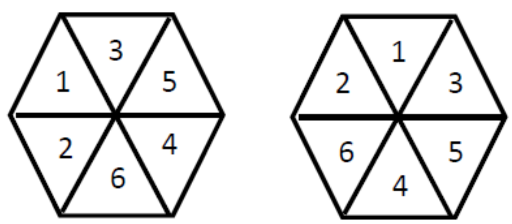


Figura 3.12: Ilustração do problema 62

63. (PROFMAT) Uma loja vende bombons de 7 sabores: avelã, chocolate branco, chocolate preto, coco, menta, morango e nozes. Eles são vendidos em caixas com 12 unidades.

a) Supondo que seja possível o cliente escolher o sabor de cada uma das 12 unidades, quantas são as escolhas possíveis para uma caixa?

b) Se um cliente quiser colocar na caixa pelo menos um bombom de cada sabor, quantas são as escolhas possíveis?

c) Se um cliente quiser comprar uma caixa com pelo menos três e no máximo cinco bombons de avelã, quantas são as escolhas possíveis?

(Não é necessário que haja todos os tipos nas caixas)

64. De quantas maneiras é possível colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos? [4]

65. (CMO) De quantas maneiras podem ser colocadas 8 torres em um tabuleiro de xadrez 9x9 (figura 3.13), em casas de mesma cor, de maneira que não se ataquem?

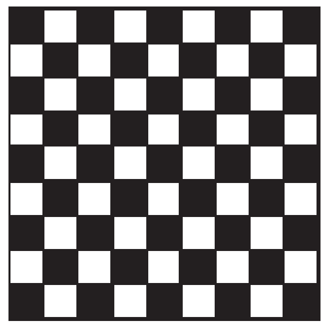


Figura 3.13: Ilustração do problema 65

Respostas dos problemas de aprofundamento

61. 414

62. D

63. a) 7956 b) 462 c) 4081

64. 60480

65. 40320

Capítulo 4

Arranjo e Combinação

No estudo da Análise Combinatória existem dois tipos de agrupamentos que podem ser formados com certo número de elementos: Arranjo e Combinação. O principal desafio é entender qual destes será utilizado. Antes de uma definição formal, vamos nos ater a dois exemplos:

Exemplo 4.1. Dado o conjunto A = {1, 2, 3}, determine todos os pares ordenados que podem ser formados com elementos distintos.

Resolução:

Dois pares ordenados são diferentes quando possuem elementos distintos, ou ainda, quando possuem os mesmos elementos ordenados diferentemente. Dessa forma, os pares ordenados (1, 2) e (2, 1) são diferentes. Então, os pares ordenados que podem ser formados com elementos distintos do conjunto **A** são:

$$(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)$$

Agrupamentos em que a mudança na ordem dos elementos gera agrupamentos diferentes recebem o nome de **Arranjo**.

Exemplo 4.2. Dado o conjunto A = {1, 2, 3}, determine todos os subconjuntos que podem ser formados com dois elementos.

Resolução:

Na formação dos subconjuntos a ordem dos elementos não é relevante, tendo em vista que o que diferencia dois conjuntos com o mesmo número de elementos são os elementos que os compõem. Dessa forma, os subconjuntos que podem ser formados com dois dos elementos pertencentes ao conjunto **A** são:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$

Agrupamentos em que a mudança na ordem dos elementos não altera o agrupamento recebem o nome de **Combinação**.

4.1 Arranjo Simples

Seja A um conjunto com n elementos e p um número natural, com $n \geq p$. Chama-se arranjo simples dos n elementos de A tomados p a p, a cada agrupamento onde a ordem e a natureza dos elementos importa e representamos por:

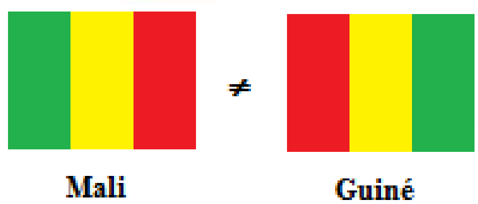
$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Observação. Alguns autores representam o arranjo por A_n^p.

Algumas situações onde a ordem dos elementos importa, ou seja, a mudança na ordem gera agrupamentos diferentes:

- Formação de placas de automóveis.

- Disposição das cores em uma bandeira.



- Distribuição de cargos em um grupo.

Zildo presidente e Ramon secretário é diferente de Zildo secretário e Ramon presidente

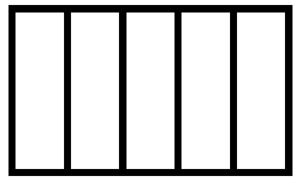
Exemplo 4.3. Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira com 5 listras verticais de mesma largura, cada listra com uma cor. De quantas maneiras isto pode ser feito se as cores devem ser distintas? [4]

Resolução 1:

Como a ordem das cores importa, temos um problema de arranjo. Dessa forma, o número de maneiras de pintar as 5 listras da bandeira usando 5 cores, dentre as 8, disponíveis, é $A_{8,5} = \dfrac{8!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.

Resolução 2:

Considere a seguinte bandeira com 5 listras.



A primeira listra pode ser pintada de 8 maneiras diferentes. A segunda, de 7 maneiras diferentes e assim sucessivamente até chegar na quinta listra, que poderá ser pintada de 4 maneiras diferentes. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, temos $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ maneiras.

Exemplo 4.4. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8 e 9?

Resolução 1:

Como a ordem dos algarismos importa, visto que $971 \neq 179$, temos um problema de arranjo. Dessa forma, podemos formar $A_{6,3} = \dfrac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 =$ 120 números com 3 algarismos distintos.

Resolução 2:

Como os algarismos devem ser distintos, temos 6 possibilidades de escolha para o algarismo da centena, 5 possibilidades de escolha para o algarismo da dezena e 4 possibilidades para o algarismo da unidade. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, podemos formar $6 \times 5 \times 4 = 120$ números de três algarismos distintos.

4.2 Combinação Simples

Seja A um conjunto com n elementos e p um número natural, com $n \geq p$. Chama-se combinação simples dos n elementos de A tomados p a p, a cada agrupamento onde a ordem dos elementos não importa e representamos por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Observação. Alguns autores representam a combinação por C_n^p.

Algumas situações onde a ordem dos elementos não importa, ou seja, a mudança na ordem não gera agrupamentos diferentes:

- A ordem dos fatores em um produto numérico

$$2 \times 3 = 3 \times 2$$

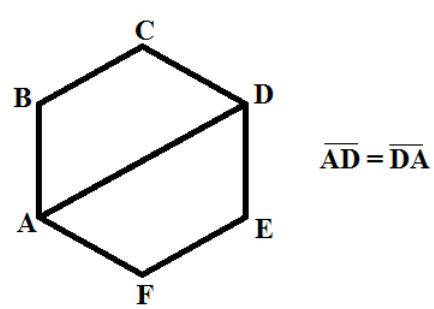
- A ordem das frutas em uma salada.

{jaca, kiwi, carambola} = {carambola, kiwi, jaca}

- Formação de um conjunto.

{a, b, c} = {b, a, c}

- A construção de diagonais em um polígono.



Exemplo 4.5. Quantos são os subconjuntos com 3 elementos que podemos formar com os elementos do conjunto das vogais?

Resolução 1:

Como a ordem dos elementos não importa, visto que $\{a, e, i\} = \{e, i, a\}$, temos um problema de combinação. Dessa forma, o número de subconjuntos com 3 elementos que podem ser formados usando os elementos do conjunto das vogais é $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!.2!} = \dfrac{5.4.3!}{3!.2.1} = 10$.

Resolução 2:

O primeiro elemento pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes, o segundo, de 4 maneiras diferentes e o terceiro, de 3 maneiras diferentes. Usando o princípio multiplicativo temos 5 x 4 x 3 = 60 maneiras.

Entretanto, podemos perceber que os conjuntos $\{a, e, i\}$, $\{a, i, e\}$, $\{e, a, i\}$, $\{e, i, a\}$, $\{i, a, e\}$ e $\{i, e, a\}$ são todos iguais e foram contados como se fossem diferentes. Como em cada combinação os elementos podem ser permutados de $3! = 6$ maneiras temos que cada combinação foi contada 6 vezes, dessa forma, devemos dividir 60 por 6, ou seja, $60/6 = 10$ subconjuntos.

Exemplo 4.6. Numa circunferência são marcados 8 pontos distintos. Determine o número de cordas que podem ser formadas com esses pontos.

Resolução:

Para formar uma corda são necessários dois pontos e como a ordem dos pontos não importa, visto que as cordas AB e BA são as mesmas, temos um problema de combinação. Dessa forma, o número de cordas que podemos formar é $C_{8,2} = \dfrac{8!}{2!.6!} = \dfrac{8.7.6!}{2.1.6!} = 28$.

4.3 Problemas

Nesse capítulo é interessante que o professor deixe claro que os problemas envolvendo arranjo ou combinação podem ser resolvidos usando os princípios de contagem e que as fórmulas devem ser usadas apenas com o objetivo de facilitar e organizar o raciocínio. E principalmente, fazer questionamentos para que os alunos consigam diferenciar os problemas de arranjo e combinação.

66. (UEL) Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

A)861 B)1722 C)1764 D)3444 E)242

Resolução 1:

Como são dois livros diferentes temos que a ordem na escolha dos livros importa, sendo assim, a premiação pode ocorrer de $A_{42,2} = \dfrac{42!}{40!} = 42 \times 41 = 1722$ maneiras.

Resolução 2:

Considere que os livros são Dom Casmurro, de Machado de Assis e Sagarana, de Guimarães Rosa. Como devemos premiar dois alunos, o primeiro livro pode ser distribuído de 42 maneiras e o segundo livro de 41 maneiras. Dessa forma, usando o princípio multiplicativo temos $42 \times 41 = 1722$ maneiras.

67. (UEM) Ao final de um bate-papo, 13 amigos, cumprimentam-se, um a um, com um aperto de mãos, uma única vez. O número de cumprimentos trocados é:

Resolução 1:

Para ter um aperto de mãos são necessárias duas pessoas e a ordem da escolha dentre as pessoas não importa, dessa forma o número de cumprimentos que essas 13 pessoas podem trocar é $C_{13,2} = \dfrac{13!}{2!.11!} = \dfrac{13.12.11!}{2.1.11!} = 78$.

Resolução 2:

A primeira pessoa cumprimenta 12 pessoas, a segunda cumprimenta 11, pois já foi cumprimentada pela primeira, a terceira cumprimenta 10 pessoas, pois já foi cumprimentada pela primeira e segunda e assim sucessivamente. Dessa forma, o total de cumprimentos trocados é dado pela soma $12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 78$.

Resolução 3:

Podemos pensar ainda que uma pessoa cumprimenta e a outra recebe o cumprimento. Desta forma, a pessoa que cumprimenta pode ser escolhida de 13 maneiras e a pessoa que recebe o cumprimento pode ser escolhida de 12 maneiras. Sendo assim, pelo princípio multiplicativo temos $13 \times 12 = 156$ maneiras. Entretanto, como a ordem não importa, devemos dividir o resultado por dois, ou seja, o número de cumprimentos trocados é $156/2 = 78$.

68. (UNIOESTE) Quatro amigos vão ao cinema e escolhem, para sentar-se, uma fila em que há seis lugares disponíveis. O número de maneiras como poderão sentar-se, é igual a:

Resolução:

Como a ordem das pessoas importa, temos que o número de maneiras de distribuir 4 pessoas em uma fila onde há 6 lugares disponíveis é igual a $A_{6,4} = \dfrac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

69. (UEM) Para a elaboração de uma prova, um professor coletou 6 questões de Análise Combinatória e 4 questões de Trigonometria. A prova deve conter 2 questões de Análise Combinatória e 2 questões de Trigonometria. Então, o número de provas distintas que o professor pode elaborar é:

Resolução:

A ordem das questões não modifica a prova, dessa forma o professor pode selecionar as duas questões de análise combinatória de $C_{6,2} = 15$ maneiras e pode selecionar as duas questões de trigonometria de $C_{4,2} = 6$ maneiras. Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de provas distintas que o professor poderá elaborar é $15 \times 6 = 90$.

70. (UNIOESTE) A diretoria de uma multinacional é constituída de sete diretores brasileiros e quatro diretores argentinos. Quantas comissões contendo seis membros, sendo três diretores brasileiros e três diretores argentinos, podem ser formadas sem repetição?

A)210 B)120 C)155 D)183 E)140

Resolução:

Como a ordem não importa temos que os diretores brasileiros podem ser selecionados de $C_{7,3} = 35$ maneiras e os diretores argentinos podem ser selecionados de $C_{4,3} = 4$ maneiras. Sendo assim, pelo princípio multiplicativo temos que podem ser formadas $35 \times 4 = 140$ comissões.

Perceba que os problemas 69 e 70 são correlatos.

71. (CESGRANRIO) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

A)69 B)2024 C)9562 D)12144 E)13824

Resolução:

É fácil perceber que existe uma ordem classificatória. Logo, o número de tampinhas distintas que podemos montar com os 24 países, escolhendo 3 para ocuparem os três primeiros lugares, é igual a $A_{24,3} = \dfrac{24!}{21!} = 24 \times 23 \times 22 = 12144$.

72. (UFMG) A partir de um grupo de 14 pessoas, quer-se formar uma comissão de oito integrantes, composta de um presidente, um vice-presidente, um secretário, um tesoureiro e quatro conselheiros. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se podem compor essa comissão?

A)$\dfrac{14!}{4!.6!}$ B)$\dfrac{14!}{4!.4!}$ C)$\dfrac{14!}{8!.6!}$ D)$\dfrac{14!}{4!.10!}$

Resolução:

Para a escolha dos cargos: presidente, vice-presidente, secretário e tesoureiro, temos que a ordem importa, pois existe uma hierarquia de cargos, dessa forma essa seleção pode ser feita de $A_{14,4}$ maneiras. Das 10 pessoas que sobram devemos escolher 4 para os cargos de conselheiros, como a ordem não importa, pois, os cargos são iguais, essa seleção pode ser feita de $C_{10,4}$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo temos que o número de maneiras distintas de se formar essa comissão é igual a $A_{14,4} \times C_{10,4} = \dfrac{14!}{10!} \times \dfrac{10!}{4!.6!} = \dfrac{14!}{4!.6!}$.

73. (UEM) Quinze garotas estão posicionadas numa quadra esportiva para uma apresentação de ginástica, de modo que não se encontram três em uma linha reta, com exceção das garotas que trazem uma letra estampada na camiseta e que estão alinhadas formando a palavra AERÓBICA. O número de retas determinadas pelas posições das quinze garotas é:

Resolução 1:

Vamos considerar as garotas na quadra como se fossem pontos em um plano (figura 4.1).

Figura 4.1: Ilustração do problema 73

Para formar uma reta são necessários dois pontos distintos, e como a ordem dos pontos não importa temos que o máximo de retas determinadas por 15 pontos em um plano é $C_{15,2} = 105$. Entretanto, desses 15 pontos, temos 8 que são colineares: {A, E, R, Ó, B, I, C, A} e estão determinando $C_{8,2} = 28$ retas coincidentes. Dessa forma, o número de retas determinadas pelas 15 garotas é $105 - 28 + 1$ (reta r) $= 78$.

Resolução 2:

Considerando a figura 4.2, onde os pontos representam as garotas na quadra temos os seguintes casos:

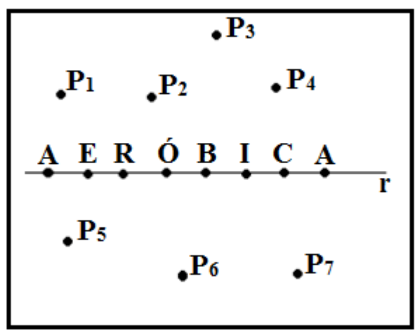


Figura 4.2: Ilustração do problema 73

1º caso:

Usando dois elementos do conjunto {P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7} podemos formar $C_{7,2} = 21$ retas.

2º caso:

Usando um elemento do conjunto {P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7} e um elemento do conjunto {A, E, R, Ó, B, I, C, A} podemos formar $7 \times 8 = 56$ retas.

Dessa forma, o número de retas determinadas pelas 15 garotas é $21 + 56 + 1$ (reta r) $= 78$.

74. Determine o número de diagonais de um polígono de n lados?

Resolução 1:

Considere um polígono com n lados (figura 4.3).

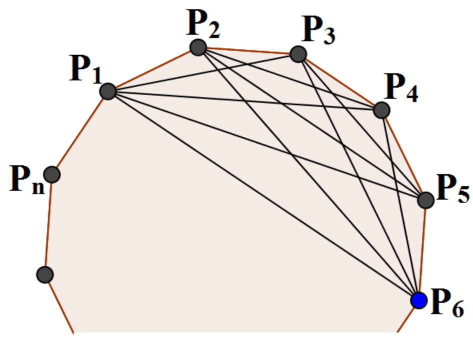


Figura 4.3: Ilustração do problema 74

Para formar uma diagonal ou um lado de um polígono são necessários dois pontos. Como a ordem dos pontos não altera o segmento, visto que $\overline{P_1P_3} \equiv \overline{P_3P_1}$, temos que o total de segmentos (lados e diagonais) determinados usando os n lados é $C_{n,2}$. Entretanto devemos excluir os n lados. Dessa forma, o total de diagonais de um polígono com n lados é $d = C_{n,2} - n$ lados, que pode ser escrito como $d = \dfrac{n.(n-3)}{2}$.

Resolução 2:

Considerando um polígono com n lados (n vértices). É fácil perceber que de cada vértice partem $n-3$ diagonais, e como o polígono possui n lados o total de diagonais deveria ser, pelo princípio multiplicativo, $n.(n-3)$, entretanto, estamos contando, por exemplo, a diagonal $\overline{P_1P_3}$ e a diagonal $\overline{P_3P_1}$ como se fossem diferentes. Dessa forma, devemos dividir o resultado por 2, logo o total de diagonais de um polígono com n lados é $d = \dfrac{n.(n-3)}{2}$.

75. (UNIPAR) De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma lanchonete onde há 5 marcas de refrigerante?

Resolução 1:

Considere que as marcas de refrigerantes são representadas por {B, F, T, C, G}.

1º caso: Três refrigerantes de marcas diferentes

Como a ordem não importa, as três marcas podem ser escolhidas de $C_{5,3} = 10$ maneiras diferentes.

2º caso: Três refrigerantes de mesma marca

Basta escolher a marca e comprar três refrigerantes, isto pode ser feito de 5 maneiras diferentes: {BBB, FFF, TTT, CCC, GGG}.

3º caso: Dois refrigerantes de mesma marca e um de marca diferente

Primeiro escolhemos as duas marcas, que pode ser feito de $C_{5,2} = 10$ maneiras, e em seguida multiplicamos o resultado por 2, pois podemos trocar as marcas que serão iguais (BBT ou BTT), dessa forma temos $10 \times 2 = 20$ maneiras.

Sendo assim, o número de maneiras de comprar 3 refrigerantes nessa lanchonete é igual a $10 + 5 + 20 = 35$.

Resolução 2:

Perceba que o número de refrigerantes tem que ser um número inteiro não negativo, dessa forma podemos representar o problema pela equação B + F + T + C + G = 3, onde o número de soluções é obtido pela permutação dos elementos do conjunto $\{1, 1, 1, +, +, +, +\}$, ou seja, $\dfrac{7!}{4!.3!} = 35$.

Dessa forma, temos que o número de maneiras de comprar os três refrigerantes é igual a 35.

Nesse ponto, se o professor achar oportuno pode generalizar uma fórmula para o cálculo do número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n$ e definir *Combinação com repetição.*

76. (UFSC) Um campeonato de futebol de salão é disputado por várias equipes, jogando entre si, turno e returno. Sabendo-se que foram disputadas 272 partidas, determine o número de equipes participantes.

Resolução:

Vamos considerar que o número de equipes participantes no campeonato é n. Para realizar uma partida de futebol são necessárias duas equipes e como é turno e returno (jogo de ida e de volta) temos que a ordem importa. Dessa forma temos que o total de jogos disputados é dado por $A_{n,2} = 272$, sendo assim temos:

$$\begin{aligned} A_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!} = 272 \;\; &\Rightarrow \;\; n(n-1) = 272, \\ &\Rightarrow \;\; n^2 - n - 272 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação encontramos $n = -16$ e $n = 17$.

Sendo assim, o total de equipes participantes é igual a 17.

77. (FUVEST) Numa primeira fase de um campeonato de xadrez cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores:

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Resolução:

Vamos considerar que o número de jogadores participantes do campeonato é n. Para realizar uma partida de xadrez são necessários dois jogares e como a ordem não importa temos que o total de jogos é dado por $C_{n,2} = 78$, dessa forma temos:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{2!.(n-2)!} = 78 \;\Rightarrow\; \frac{n.(n-1)}{2} = 78,$$
$$\Rightarrow\; n^2 - n - 156 = 0.$$

Resolvendo a equação encontramos $n = -12$ e $n = 13$.

Sendo assim, o total de jogadores participantes é igual a 13.

78. (FUVEST) Em uma classe de 9 alunos, todos se dão bem, com exceção de Andréia, que vive brigando com Manoel e Alberto. Nessa classe, será constituída uma comissão de cinco alunos, com a exigência de que cada membro se relacione bem com todos os outros. Quantas comissões podem ser formadas?

A) 71 B) 75 C) 80 D) 83 E) 87

Resolução:

Como a ordem na escolha das pessoas não importa, temos um problema de combinação. Temos dois tipos de grupos a considerar:

Grupos que tem a participação da Andréia:

{Andréia, ____ , ____ , ____ , ____ }

A escolha das outras 4 pessoas se dá de $C_{6,4} = 15$ maneiras, visto que Alberto e Manoel não podem participar.

Grupos que não tem a participação da Andréia:

$$\{\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_\}$$

A escolha das 5 pessoas se dá de $C_{7,5} = 56$ maneiras, visto que Andréia não participa.

Dessa forma, o total de maneiras de formar o grupo nas condições pedida é $15 + 56 = 71$.

79. (STA CASA) Uma organização dispõe de 6 administradores e 10 economistas. Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas, de modo que cada comissão tenha no mínimo 3 administradores?

Resolução:

Como a ordem na escolha das pessoas não importa, temos um problema de combinação. Sendo assim, podemos dividir o problema nos seguintes casos:

Grupos com 3 administradores e 3 economistas

$C_{6,3}.C_{10,3} = 20 \times 120 = 2400$.

Grupos com 4 administradores e 2 economistas

$C_{6,4}.C_{10,2} = 15 \times 45 = 675$.

Grupos com 5 administradores e 1 economista

$C_{6,5}.C_{10,1} = 6 \times 10 = 60$.

Grupos com 6 administradores

$C_{6,6} = 1$.

Dessa forma, o total de grupos que podem ser formados com 6 pessoas, sendo no mínimo 3 administradores é igual a $2400 + 675 + 60 + 1 = 3136$.

80. (PUC) Dadas duas retas paralelas r e s. Sobre a reta r marcam-se 7 pontos, e sobre e reta s, 5 pontos. Quantos triângulos podem ser formados ligando-se estes pontos indistintamente?

Resolução 1:

Considere as retas paralelas r e s (figura 4.4):

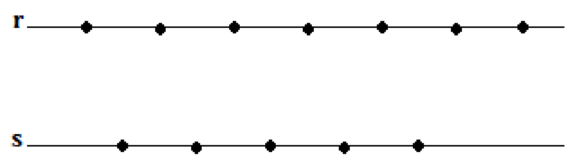


Figura 4.4: Ilustração do problema 80

Para forma um triângulo devemos usar 3 pontos não colineares e como a ordem dos pontos não altera o triângulo temos um problema de combinação. Perceba que temos dois casos a considerar:

Triângulos com a base em r

$C_{7,2}.C_{5,1} = 21 \times 5 = 105.$

Triângulos com a base em s

$C_{5,2}.C_{7,1} = 10 \times 7 = 70.$

Sendo assim, o total de triângulos formados é $105 + 70 = 175$.

Resolução 2:

Considere as retas paralelas r e s (figura 4.5):

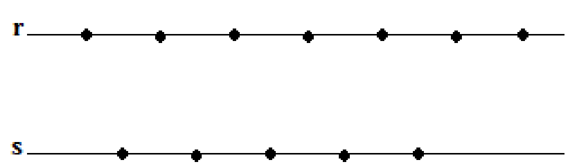


Figura 4.5: Ilustração do problema 80

Temos 15 pontos no total, dessa forma, o total de triângulos que podemos formar é $C_{12,3} = 220$. Entretanto devemos excluir os triângulos degenerados, que são $C_{7,3} = 35$ (3 pontos colineares de r) e $C_{5,3} = 10$ (3 pontos colineares de s). Dessa forma, o total de triângulos é $220 - 35 - 10 = 175$.

81. (PUC) Qual o número de diagonais internas de um dodecaedro regular (figura 4.6)?

A)100 B)130 C)148 D)160 E)190

Resolução:

O dodecaedro regular é um poliedro que possui 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices.

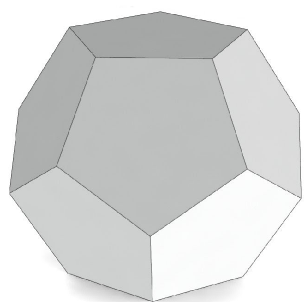


Figura 4.6: Ilustração do problema 81

O total de segmentos formados é igual a $C_{20,2} = 190$. Entretanto, devemos excluir as 30 arestas e as $5 \times 12 = 60$ diagonais formadas nos 12 pentágonos, dessa forma o total de diagonais internas é $190 - 30 - 60 = 100$.

82. (ITA) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham exatamente duas das letras A, B e C?

A)1692 B)1572 C)1520 D)1512 E)1392

Resolução:

Considere os dois conjuntos {A, B, C} e {D, E, F, G, H, I, J}, que juntos possuem as 10 primeiras letras do alfabeto. Primeiro devemos selecionar as 4 letras que devem figurar nos anagramas, e isso pode ser feito de $C_{3,2} \times C_{7,2} = 3 \times 21 = 63$ maneiras distintas. Após selecionar as letras, elas devem ser permutadas de $4! = 24$ maneiras. Dessa forma, o total de anagramas que podem ser formados pelas condições dadas é igual a $63 \times 24 = 1512$.

83. (ITA) Quantos anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham exatamente duas consoantes e que, entre essas consoantes, haja pelo menos uma vogal?

A)7200 B)7000 C)4800 D)3600 E)2400

Resolução 1:

A palavra QUEIMADO possui 3 consoantes {Q, M, D} e 5 vogais {A, E, I, O, U}. Primeiro devemos selecionar as letras que vão figurar nos anagramas e isso pode ser feito de $C_{3,2} \times C_{5,4} = 3 \times 5 = 15$ maneiras. Considerando que V representa uma vogal e C representa uma consoante temos 10 casos que possuem pelo menos uma vogal entre as consoantes: {CVCVVV, CVVCVV, CVVVCV, CVVVVC, VCVCVV, VCVVCV, VCVVVC, VVCVCV, VVCVVC, VVVCVC}. As consoantes podem ser permutadas de $2! = 2$ maneiras e as vogais podem ser permutadas de $4! = 24$ maneiras. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo temos $15 \times 10 \times 2 \times 24 = 7200$ anagramas que possuem pelo menos uma vogal entre as duas consoantes.

Resolução 2:

Primeiro vamos calcular o total de anagramas que podemos formar com as letras $\{Q, M, A, E, I, O\}$. Isto pode ser feito de $6! = 720$ maneiras. Agora vamos calcular os anagramas que possuem as duas consoantes Q e M juntas, isso pode ser feito considerando QM como sendo um caractere, desta forma permutamos os elementos do conjunto $\{QM, A, E, I, O\}$ de $5! = 120$ maneiras, entretanto Q e M podem trocar de posição entre si, o que nos leva a $120 \times 2 = 240$ anagramas. Sendo assim, os anagramas que não possuem vogais entre as consoantes é $720 - 240 = 480$. Para resolver o problema em questão devemos selecionar as duas consoantes e as 4 vogais que vão ser permutadas, e isso pode ser feito de $C_{3,2} \times C_{5,4} = 3 \times 5 = 15$ maneiras. Usando o princípio multiplicativo temos $15 \times 480 = 7200$ anagramas.

84. (IME) Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

Resolução:

Considere que n é o número de times que participam do campeonato, e é o número de empates e v o número de vitórias. Como cada equipe jogou exatamente uma vez contra cada adversário temos que o número de jogos disputados é $C_{n,2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Temos ainda que cada vitória vale 3 pontos e cada empate vale 1 ponto, assim podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3v + 2e = 35 \\ v + e = \dfrac{n(n-1)}{2}. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $v = -n^2+n+35$. Analisando a equação $3v + 2e = 35$ temos que $1 < v < 12$, ou seja $1 < -n^2 + n + 35 < 12$ cuja única solução inteira ocorre para $n = 6$. Dessa forma, substituindo n = 6 no sistema encontramos 5 vitórias e 10 empates.

85. (FUVEST) Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem. Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

Resolução:

Podemos montar a tabela 4.1 com as formas de cumprimentos.

Tabela 4.1: Formas de cumprimentos.

	CHEGADA	**SAÍDA**
Homem x Homem	Aperto de mãos	Aperto de mãos
Homem x Mulher	Aperto de mãos	Aceno
Mulher x Mulher	Aceno	Aceno

Vamos representar a quantia de homens por H e a quantia de mulheres por M, como o total de pessoas é 37 temos $H + M = 37$. Sabemos ainda que para ter um aperto de mãos são necessárias duas pessoas, sendo a ordem da escolha dessas, irrelevante. Dessa forma, o número de cumprimentos trocados é $2.C_{H,2} + C_{H,1}.C_{M,1} = 720$.

Fazendo os cálculos temos

$$
\begin{aligned}
2.\frac{H!}{2!.(H-2)!} + H.M = 720 \ &\Rightarrow \ H.(H-1) + H.(37-H) = 720, \\
&\Rightarrow \ H^2 - H + 37H - H^2 = 720, \\
&\Rightarrow \ 36H = 720, \\
&\therefore \ H = 20.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, o número de mulheres participantes é 17.

86. (IME) Um grupo de nove pessoas, sendo duas delas irmãos, deverá formar três equipes, com respectivamente dois, três e quatro integrantes. Sabendo que os dois irmãos não podem ficar na mesma equipe, o número de equipes que podem ser organizadas é:

A)288 B)455 C)480 D)910 E)960

Resolução 1:

Como a ordem na escolha das pessoas não importa, temos um problema de combinação. Sendo assim, considerando que os irmãos são A e B, podemos montar os seguintes casos, conforme a tabela 4.2.

Tabela 4.2: Distribuição dos irmãos.

	Grupos com 2 pessoas	**Grupos com 3 pessoas**	**Grupos com 4 pessoas**
1º caso	A	B	
2º caso	A		B
3º caso		A	B

Feita a distribuição dos dois irmãos sobram 7 pessoas para serem inseridas nos grupos:

1º caso

$C_{7,1} \times C_{6,2} \times C_{4,4} = 7 \times 15 \times 1 = 105.$

2º caso

$C_{7,1} \times C_{6,3} \times C_{3,3} = 7 \times 20 \times 1 = 140.$

3º caso

$C_{7,2} \times C_{5,2} \times C_{3,3} = 21 \times 10 \times 1 = 210.$

Como os irmãos podem trocar de posição entre si nos grupos, temos que o total de equipes que não possuem dois irmãos juntos é $2 \times (105 + 140 + 210) = 910$.

Resolução 2:

Como a ordem na escolha das pessoas não importa, temos um problema de combinação. Se não tivesse restrição o total de equipes seria igual a $C_{9,2} \times C_{7,3} \times C_{4,4} = 36 \times 35 \times 1 = 1260$, entretanto devemos retirar os casos em que os dois irmãos estão no mesmo grupo, que são:

Dois irmãos no grupo de duas pessoas

$C_{2,2} \times C_{7,3} \times C_{4,4} = 1 \times 35 \times 1 = 35.$

Dois irmãos no grupo de três pessoas

$C_{7,1} \times C_{6,2} \times C_{4,4} = 7 \times 15 \times 1 = 105.$

Dois irmãos no grupo de quatro pessoas

$C_{7,2} \times C_{5,2} \times C_{3,3} = 21 \times 10 \times 1 = 210.$

Dessa forma, temos que o número de equipes que não possuem dois irmão juntos é igual a $1260 - (35 + 105 + 210) = 910$.

87. (UFPR) Numa sala de aula, há 13 rapazes e 17 moças, sendo que quatro alunos atendem pelo nome de Eduardo e três alunas atendem pelo nome de Simone. De quantos modos diferentes podem ser formados grupos de 5 alunos, sendo 2 rapazes e 3 moças, com a participação de pelo menos um Eduardo e pelo menos uma Simone?

Resolução:

Como a ordem na escolha das pessoas não importa, temos um problema de combinação. Para formar o grupo com os 2 rapazes sendo pelo menos 1 Eduardo temos os seguintes casos:

Dois Eduardos	**Um Eduardo e um outro**
$C_{4,2}$	$C_{4,1}.C_{9,1}$

Para formar o grupo com as 3 moças sendo pelo menos 1 Simone temos os seguintes casos:

Três Simones	**Duas Simones e uma outra**	**Uma Simone e duas outras**
$C_{3,3}$	$C_{3,2}.C_{14,1}$	$C_{3,1}.C_{14,2}$

Dessa forma, pelo princípio multiplicativo temos que o número de grupos formados com 5 alunos, sendo 2 rapazes e 3 moças, com a participação de pelo menos um Eduardo e pelo menos uma Simone é igual a:

$(C_{4,2} + C_{4,1} \times C_{9,1}) \times (C_{3,3} + C_{3,2} \times C_{14,1} + C_{3,1} \times C_{14,2}) =$

$(6 + 4 \times 9) \times (1 + 3 \times 14 + 3 \times 91) = 42 \times 316 = 13272.$

88. (MACK) Na figura 4.7, o quadrado ABCD é formado por 9 quadrados congruentes.

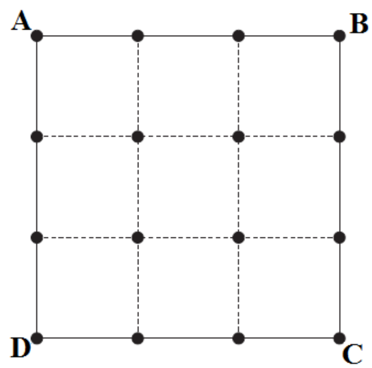


Figura 4.7: Ilustração do problema 88

O total de triângulos distintos, que podem ser construídos, a partir dos 16 pontos, é:

A) 516 B) 520 C) 526 D) 532 E) 546

Resolução:

Primeiro calculamos o número de maneiras de selecionar 3 pontos dentre os 16, isso pode ser feito de $C_{16,3} = 560$ maneiras. Agora devemos calcular os casos que não formam triângulos, que são:

I. Combinações dos 4 pontos em $\overline{AB}$ e nos segmentos paralelos a $\overline{AB}$ e, ainda, dos 4 pontos em $\overline{AD}$ e nos segmentos paralelos a $\overline{AD}$.

$8 \times C_{4,3} = 8 \times 4 = 32.$

II. Combinações dos 4 pontos em $\overline{AC}$ e em $\overline{BD}$.

$2 \times C_{4,3} = 2 \times 4 = 8.$

III. Combinações dos 3 pontos em segmentos paralelos à $\overline{AC}$ e em segmentos paralelos a $\overline{BD}$.

$4 \times C_{3,3} = 4 \times 1 = 4.$

Dessa forma, o número total de triângulos que podem ser construídos é igual a $C_{16,3} - (8 \times C_{4,3} + 2 \times C_{4,3} + 4 \times C_{3,3}) = 560 - (32 + 8 + 4) = 516.$

89. (IME) Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura 4.8. Em cada um dos seis pontos de luz do farol existem uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais que uma lâmpada acesa e que pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados. Determine o número total de configurações que podem ser obtidas.

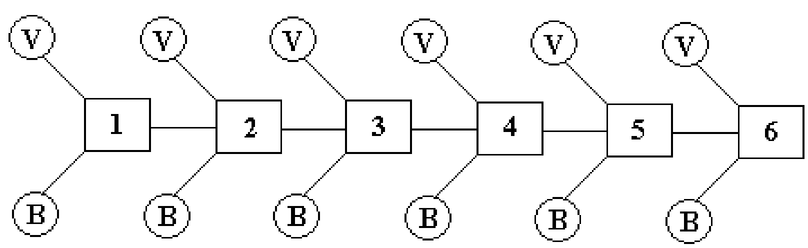


Figura 4.8: Ilustração do problema 89

Resolução:

Podemos perceber que a ordem nas escolhas dos pontos luminosos não importa e feita a escolha do ponto luminoso temos duas opções para a escolha da lâmpada (branca ou vermelha), dessa forma o total de configurações que podem ser obtidas é:

$C_{6,3} \times 2^3 + C_{6,4} \times 2^4 + C_{6,5} \times 2^5 + C_{6,6} \times 2^6 =$

$20 \times 8 + 15 \times 16 + 6 \times 32 + 1 \times 64 = 656.$

90. Determine o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra PIRACICABA?

Resolução 1:

Como a palavra PIRACICABA tem 10 letras, sendo que a letra A aparece três vezes, a letra I aparece duas vezes e a letra C aparece duas vezes temos que o total de anagramas é $\dfrac{10!}{3!2!2!} = 151200$.

Resolução 2:

Para formar anagramas com as letras da palavra PIRACICABA devemos arrumar três letras A, duas letras I, duas letras C, uma letra P, uma letra R e uma letra B em 10 lugares:

$$\underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}$$

O número de maneiras de escolher os lugares onde serão colocadas as letras A é $C_{10,3}$, o número de maneiras de escolher os lugares para as letras I é $C_{7,2}$ e o número de maneiras de escolher os lugares para as letras C é $C_{5,2}$. Sobram assim 3 lugares onde serão permutadas as letras P, R e B de 3! maneiras. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo temos um total de $C_{10,3} \times C_{7,2} \times C_{5,2} \times 3! = 120 \times 21 \times 10 \times 6 = 151200$ anagramas.

91. Listando os números inteiros de 1 a 100.000, quantas vezes o dígito 5 aparece?

Resolução:

Como no número 100.000 não consta o dígito 5 podemos considerar que os números procurados têm o seguinte formato:

$$\underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}\ \ \underline{\hspace{1cm}}$$

Considere que os algarismos que podemos utilizar são $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e casos como 00537, 01549 e 00085 são válidos pois representam, respectivamente, os números 537, 1549 e 85. Diante disso, podemos dividir o problema nos seguintes casos:

1º caso: O dígito 5 aparece exatamente uma vez

O número de maneiras de escolher o lugar onde será colocado o dígito 5 é $C_{5,1}$. Uma vez escolhida essa posição, as demais podem ser preenchidas por qualquer dígito diferente de 5. Então, são 9 opções para cada uma dessas 4 posições. Dessa forma, temos $C_{5,1}.9^4 = 5 \times 6561 = 32805$ números nos quais o dígito 5 aparece exatamente uma vez, portanto temos 32805 dígitos iguais a 5.

2º caso: O dígito 5 aparece exatamente duas vezes

O número de maneiras de escolher os dois lugares onde serão colocados os dois dígitos 5 é $C_{5,2}$. Uma vez escolhidas essas posições, as demais podem ser preenchidas por qualquer dígito diferente de 5. Então, são 9 opções para cada uma dessas 3 posições. Dessa forma, temos $C_{5,2} \times 9^3 = 10 \times 729 = 7290$ números nos quais o dígito 5 aparece exatamente duas vezes, portanto temos $7290 \times 2 = 14580$ dígitos iguais a 5.

3º caso: O dígito 5 aparece exatamente três vezes

O número de maneiras de escolher os três lugares onde serão colocados os três dígitos 5 é $C_{5,3}$. Uma vez escolhidas essas posições, as demais podem ser preenchidas por qualquer dígito diferente de 5. Então, são 9 opções para cada uma dessas 2 posições. Dessa forma, temos $C_{5,3} \times 9^2 = 10 \times 81 = 810$ números nos quais o dígito 5 aparece exatamente três vezes, portanto temos

$810 \times 3 = 2430$ dígitos iguais a 5.

4º caso: O dígito 5 aparece exatamente quatro vezes

O número de maneiras de escolher os quatro lugares onde serão colocados os quatro dígitos 5 é $C_{5,4}$. Uma vez escolhidas essas posições, a última posição deve ser preenchida por qualquer dígito diferente de 5 e isto pode ser feito de 9 maneiras distintas. Dessa forma, temos $C_{5,4} \times 9 = 5 \times 9 = 45$ números nos quais o dígito 5 aparece exatamente quatro vezes, portanto temos $45 \times 4 = 180$ dígitos iguais a 5.

5º caso: O dígito 5 aparece exatamente cinco vezes

Como há 5 posições e o dígito 5 deve aparecer 5 vezes, só há uma possibilidade, portanto temos $1 \times 5 = 5$ dígitos iguais a 5.

Sendo assim, concluímos que de 1 a 100.000 o dígito 5 aparece $32805 + 14580 + 2430 + 180 + 5 = 50.000$ vezes.

4.4 Problemas de Aprofundamento

92. (OBM) Esmeralda tem cinco livros sobre heráldica em uma estante. No final de semana, ela limpou a estante e, ao recolocar os livros, colocou dois deles no lugar onde estavam antes e os demais em lugares diferentes de onde estavam. De quantas maneiras ela pode ter feito isso?

A)20 B)25 C)30 D)34 E)45

93. (PROFMAT) Uma escola pretende formar uma comissão de 6 pessoas para organizar uma festa junina. Sabe-se que há 8 professores e 20 alunos que são candidatos a participar da comissão.

a) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor.

b) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor e dois alunos.

c) Um aluno resolveu o item (b) acima da seguinte maneira:

Devemos primeiramente selecionar um professor dentre os oito ($C_{8,1}$). Escolhido um professor, devemos, em seguida, escolher dois alunos dentre os vinte ($C_{20,2}$). Finalmente, escolhidos um professor e dois alunos, devemos escolher 3 pessoas quaisquer das 25 que restaram para formar a comissão de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos ($C_{25,3}$). Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos é igual a $C_{8,1} \times C_{20,2} \times C_{25,3}$."

A solução proposta por este aluno está correta? Caso não esteja, identifique e explique o erro deste aluno.

94. (PROFMAT)

a) Escrevendo todos os anagramas da palavra PROFMAT e distribuindo-os como se fosse num dicionário (ordem alfabética), teremos como primeira palavra "AFMOPRT", como segunda "AFMOPTR", e assim por diante. Que palavra ocupará a posição 2015 nessa lista?

b) Considere a palavra HOMOMORFISMO. Quantos anagramas podem ser escritos de modo que duas letras O nunca fiquem juntas?

95. De quantos modos podemos dividir 18 pessoas em: [5]

a) 3 grupos de 6 pessoas cada?

b) 2 grupos de 9 pessoas cada?

c) um grupo de 11 pessoas e um grupo de 7 pessoas?

96. Há um conjunto de 14 livros distintos alinhados numa prateleira de certa livraria. Quantas são as possíveis seleções de 6 livros que não incluam dois livros vizinhos? [6]

97. Doze cavaleiros devem assentar-se à Távola Redonda do Rei Artur. Apenas os dois vizinhos imediatos de cada um dos 12 cavaleiros são por ele considerados inimigos. Cinco cavaleiros devem ser escolhidos para salvar uma princesa. De quantas maneiras se pode selecionar um grupo compatível de cavaleiros, isto é, um grupo que não contenha cavaleiros inimigos? [6]

98. Considere (P) um polígono regular de n lados. Suponha que os vértices de (P) determinem $2n$ triângulos, cujos lados, não são lados de (P). O valor de n é:

99. (IME) Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

100. (Problema de Lucas) De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

Respostas dos problemas de aprofundamento

92. A

93. a) 337980 b) 336832 c) incorreta

94. a) MRPTOAF b) 846720

95. a) 2858856 b) 24310 c) 31824

96. 84

97. 36

98. 8

99. 2088960

100. $2n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!$

Considerações Finais

Embora a análise combinatória seja uma matéria considerada difícil pela maioria dos professores e alunos, seu ensino através da resolução de exercícios e problemas pode se dar de maneira bastante promissora. Para isso, primeiramente, o professor deve fazer um planejamento contendo seus objetivos e como vai proceder para colocá-los em prática.

No presente trabalho, tentou-se estabelecer uma ordem de ensino: Fatorial, Princípios Fundamentais de Contagem, Permutações e, simultaneamente, Arranjos e Combinações. Essa ordem não é unânime entre os professores da área. A maioria começa pelos princípios fundamentais de contagem e, após ter definido permutação, o conceito de fatorial é apresentado como uma ferramenta para facilitar os cálculos, deixando de lado as equações que envolvem fatorial. Com razão, pois perde-se um pouco o sentido simplificar expressões ou resolver equações envolvendo fatorial depois de mostrar os problemas envolvendo permutações.

Dessa forma, este trabalho mostrou que Fatorial funciona como um capítulo isolado e que deve ser trabalhado através da resolução de exercícios, para que os alunos possam assimilar os conceitos, e aprender a fazer simplificações e resolver equações.

O principal desafio do professor é ensinar os princípios fundamentais de contagem, já que os demais assuntos são decorrentes desses. Assim, é essencial e de grande importância que o professor resolva diversos problemas em sala de aula. Este, ainda, deve levantar questionamentos, apresentar problemas correlatos e, por fim, aumentar gradativamente o nível de dificuldade dos problemas.

Após os alunos adquirirem confiança e autonomia, o professor pode facilmente introduzir os conceitos de permutação simples, permutação simples com repetição e permutação circular. Novamente, sugerimos que o professor resolva junto com os alunos muitos problemas e evidencie algumas técnicas que podem auxiliá-los nas resoluções das questões.

Finalmente, o professor pode introduzir os conceitos de arranjo e combinação, evidenciando suas diferenças, mostrando para os alunos como estes podem aplicar os conceitos durante a resolução dos problemas e, sempre que possível, deve deixar claro que as fórmulas surgem naturalmente e que servem para facilitar os cálculos e organizar o raciocínio.

Gostaria ainda de salientar que o tema: ”aprendizado da análise combinatória através da resolução de exercícios e problemas”não se esgota aqui. Esses são os conceitos básicos que todos os alunos do ensino médio devem aprender. O professor pode, se achar pertinente, estender o aprendizado para outros métodos de contagem, tais como: Princípio da inclusão-exclusão, Permutações caóticas, Lemas de Kaplansky e Princípio da casa dos pombos.

Bibliografia

[1] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997. 843p.

[2] HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar, 5: combinatória, probabilidade*. 6. ed. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1996. 174p.

[3] MANZANILLA, A. M. *Análisis combinatorio, teoría y práctica*. Lima, Peru: Lumbreras Editores, 2012. 117p.

[4] MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P. de.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise combinatória e probabilidade*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 343p.

[5] SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à análise combinatória*. 3. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2002. 297p.

[6] SANTOS, J. P. O.; ESTRADA, E. L. *Problemas resolvidos de combinatória*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007. 202p.

[7] NETO, A. A.; SAMPAIO, J. L. P.; LAPA. N.; CAVALLANTTE, S. L. *Noções de matemática, 4: combinatória, matrizes e determinantes*. Fortaleza: Editora Vestseller, 2009. v.4. 428p.

[8] NETTO, S. L.; *A matemática no vestibular do Ita.* Fortaleza: Editora Vestseller, 2013. 523p.

[9] OCONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Christian Kramp, Scholl of Mathematics and Statiscs, University of St. Andrews, Scotland, 2012. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kramp.html. Acesso em: 15 dez.2016.

[10] POLYA, G.; *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995. 179p.

[11] GAUTHIER, C.; BISSONNETTE, S.; RICHARD, M.; *Ensino explícito e desempenho dos alunos: a gestão dos aprendizados.* Com a colaboração de Mireille Castonguay; tradução de Stephania Matousek. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2014. 335p.

[12] TALIZINA, N. F.; *La formacion de la actividad cognoscitiva de los escolares.* Havana, Cuba: Ministerio de Educacion Superior, Universidad de la Habana, 1987. 100p.

[13] FOMIN, D. GENKIN, S.; ITENBERG, I.; *Círculos matemáticos: a experiência russa.* Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 292p.

[14] MEGA, É.; WATANABE, R.; *Olimpíadas brasileiras de matemática - 1ª a 8ª (problemas e resoluções).* Rio de Janeiro: SBM, 2010. 255p.