

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MEIBI REGINA OLIVEIRA DA SILVA

UMA ANÁLISE CRÍTICA ÀS AFIRMAÇÕES
ASSOCIADAS À RAZÃO ÁUREA E À SEQUÊNCIA DE
FIBONACCI

MARINGÁ
2019

MEIBI REGINA OLIVEIRA DA SILVA

UMA ANÁLISE CRÍTICA ÀS AFIRMAÇÕES
ASSOCIADAS À RAZÃO ÁUREA E À SEQUÊNCIA DE
FIBONACCI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof^o.Dr^o. Eduardo de Amorim Neves

MARINGÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

S586a Silva, Meibi Regina Oliveira da
Uma análise crítica às afirmações associadas à Razão
Áurea e à sequência de Fibonacci / Meibi Regina
Oliveira da Silva. -- Maringá, 2019.
180 f. : il., color. fotos.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática, 2019.

1. Números irracionais. 2 Extrema e média razão. 3.
Pentagrama. 4. Compasso Áureo. 5. Espiral de Fibonacci.
I. Neves, Eduardo de Amorim, orient. II. Universidade
Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas.
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 510.9
510.1

MEIBI REGINA OLIVEIRA DA SILVA

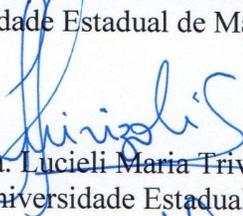
UMA ANÁLISE CRÍTICA ÀS AFIRMAÇÕES ASSOCIADAS À RAZÃO ÁUREA E À SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

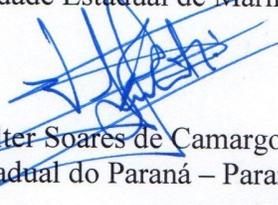
COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Profa. Dra. Lucieli Maria Trivizoli da Silva
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
Universidade Estadual do Paraná – Paranavaí

Aprovada em: 28 de junho de 2019.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*“Agradeço-vos, Senhor, nosso criador, por me haveres permitido contemplar a
beleza da Vossa criação; regozijo-me com as obras de Vossas mãos. Vede,
completei a tarefa a que me senti chamado; ganhei o juro do talento que me haveis
confiado. Proclamei a glória da Vossa obra àqueles que lerem estas demonstrações,
até onde me permitiram as limitações do meu espírito. ”*

Johannes Kepler

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho só se tornou possível porque junto a mim esteve Deus, o Criador e Senhor da minha vida, que até aqui têm me sustentado. O agradeço por ter colocado em meu caminho pessoas tão importantes que me apoiaram nesta longa jornada. Este é o momento de agradecer a cada uma delas.

Agradeço aos meus pais, Francisco e Josefinha, por todo amor e empenho que dedicaram em minha formação humana e aos meus irmãos, Henrique e Caio Eduardo. Minha família sempre acreditou e incentivou a concretização dos meus sonhos, ela é a minha base e inspiração diária.

Agradeço aos meus amigos por todo incentivo nesta caminhada. À amiga Eunice Barbosa dos Santos Oliveira que, mesmo distante, sempre esteve presente me motivando com muito amor e carinho. Ao amigo Diego Samuel Maciel Rodrigues pelo incentivo e pelas contribuições com os erros inesperados do *Látex*. Ao meu irmão Henrique e ao meu amigo André Rocha Cordeiro, ambos professores de história, pelos esclarecimentos prestados.

Agradeço aos meus professores do curso de graduação pelo incentivo na continuidade dos meus estudos. Ao meu professor e coordenador das monitorias ministradas na universidade, Me. Ricardo Vasques. À minha orientadora do trabalho de conclusão de curso, Dr^a. Cláudia Georgia Sabba. Aos meus professores Me. Maira Mendias Lauro e Dr^o. Carlos Juiti Watanabe por me inspirarem na busca do conhecimento.

Agradeço a todos os colegas e amigos conquistados durante o período do curso de mestrado PROFMAT e a todos os professores pelo conhecimento adquirido, em especial, ao meu professor orientador, Dr^o. Eduardo de Amorim Neves, pela atenção e pelas valiosas contribuições. Agradeço a banca examinadora, constituída pela professora Dr^a. Lucieli M. Trivizoli e pelo professor Dr^o. Valter Soares de Camargo,

pelas correções e sugestões que enriqueceram este trabalho.

“Pois a luz da sabedoria que eu derramo sobre todos é como a luz da manhã, e de longe eu a torno conhecida.”
Eclesiastes 24:44

RESUMO

Neste trabalho investigamos algumas clássicas afirmações acerca da presença da Razão Áurea e da sequência de Fibonacci em áreas distintas do conhecimento humano. Mais especificamente, nossas análises concentraram-se em averiguar a veracidade dos argumentos históricos e científicos acerca da utilização destes números na construção da Grande Pirâmide de Gizé e do Partenon de Atenas e, no âmbito artístico, nas obras *São Jerônimo*, *Uma cabeça de ancião*, *A Mona Lisa*, o *Homem Vitruviano* de Leonardo Fibonacci, e *O Sacramento da Última Ceia* de Salvador Dalí. Prosseguimos analisando afirmações acerca da manifestação da Razão Áurea e da sequência de Fibonacci nos padrões da natureza observados nas proporções do corpo humano, na filotaxia e na estrutura espiral da concha de *nautilus*. Procuramos distinguir tais afirmações entre teorias que revelam propriedades matemáticas na mais genuína manifestação destes números, daquelas que são apenas crenças sem fundamentos históricos e científicos. Para tanto, realizamos uma pesquisa bibliográfica dos contextos que deram origem a estas afirmações a fim de analisarmos os argumentos históricos que as sustentam. Para análise dos argumentos científicos, exploramos propriedades geométricas e algébricas da Razão Áurea, da sequência de Fibonacci e da espiral logarítmica cujo fator de expansão é igual a $\varphi \cong 1,618$. Deste modo, verificamos que algumas destas afirmações são histórica e cientificamente infundadas, entretanto continuam sendo reproduzidas na literatura por diferentes referências que tendem a aprimorá-las a cada nova publicação.

Palavras-chave: Números Irracionais. Extrema e média razão. Pentagrama. Compasso Áureo. Espiral de Fibonacci.

ABSTRACT

In this paperwork we investigated some affirmations classics about the presence of the Golden Ratio and the Fibonacci sequence in distinct areas of the human knowledge. More specifically, our analyzes focused on ascertaining the truthfulness of historical and scientific arguments about the use of these numbers in the construction of the Great Pyramid of Giza and the Parthenon of Athens and, in the artistic sphere, in works of *St. Jerome*, *Head of an old man*, *The Mona Lisa*, the *Vitruvian Man* by Leonardo Da Vinci, and *The Sacrament of the Last Supper* by Salvador Dalí. We continue analyzing affirmations about the manifestation of the Golden Ratio and the Fibonacci sequence in the patterns of nature observed in the proportions of the human body, in the phyllotaxis and in the spiral structure of the mollusk nautilus. We sought to distinguish such statements between theories that reveal mathematical properties in the most genuine manifestation of these numbers from those which are only beliefs without historical and scientific foundations. To do so, we performed a bibliographical research of the contexts that originated these statements in order to analyze the historical arguments that sustain them. For the analysis of the scientific arguments, we explored geometric and algebraic properties of the Golden Ratio, the Fibonacci sequence and the logarithmic spiral whose expansion factor is equal to $\varphi \cong 1,618$. Thus, we found that some of these statements are historically and scientifically unfounded, however they continue to be reproduced in the literature by different references that tend to improve them with each new publication.

Keywords: Irrational Numbers. Extreme and Medium Ratio. Pentagram. Golden Compass. Fibonacci Spiral.

Introdução

1	Um panorama histórico acerca da Razão Áurea	19
1.1	A matemática primitiva grega e a descoberta dos incomensuráveis . . .	19
1.1.1	O desenvolvimento da matemática primitiva grega	20
1.1.2	Pitágoras, a escola pitagórica e os incomensuráveis	24
1.1.3	Hipóteses acerca da descoberta dos incomensuráveis: uma possível crise da fé pitagórica nos inteiros	31
1.1.4	Os Elementos de Euclides	35
1.1.5	Teoria das proporções de Eudoxo	37
2	Representações geométricas e algébricas da Razão Áurea	39
2.1	Euclides e a secção de um segmento em extrema e média razão	39
2.2	Expressão algébrica da secção em extrema e média razão	42
2.3	A irracionalidade de φ	44
2.4	Construção de um segmento áureo com régua e compasso	45
2.5	O retângulo áureo	48
2.6	Propriedade iterativa do retângulo áureo	50
2.7	O pentágono estrelado ou pentagrama	52
2.7.1	O pentágono regular construído por Euclides	53
2.7.2	A Razão Áurea e o pentágono regular	58
2.7.3	A construção do pentágono regular a partir do raio da circun- ferência circunscrita	62
2.8	O triângulo áureo	63
2.9	Representações algébricas de φ	64

2.9.1	A expansão em frações contínuas do “mais irracional” dos irracionais	64
2.9.2	A expressão definida por infinitos radicais	66
3	Afirmações associadas à Razão Áurea	67
3.1	Há controversas	67
3.1.1	A Proporção Divina de Luca Pacioli e a Arte de Leonardo Da Vinci	69
3.1.2	Uma breve análise das mais famosas obras de Leonardo Da Vinci	71
3.1.3	A Grande Pirâmide de Gizé e a Razão Áurea: um conflito de teorias	78
3.1.4	O Partenon de Atenas	83
3.2	Utilização deliberada da Razão Áurea na arte	86
3.2.1	O Sacramento da Última Ceia de Salvador Dalí	87
3.2.2	Compasso áureo: um instrumento utilizado na estética facial	88
3.2.3	Johannes Kepler em busca da compreensão do universo e as intenções do seu criador	91
4	A sequência de Fibonacci e a Razão Áurea	94
4.1	Fibonacci e o problema dos coelhos	94
4.2	Uma intrínseca relação entre a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea	98
4.3	Algumas identidades dos números de Fibonacci	103
4.4	O limite da sequência de razões entre números consecutivos de Fibonacci	111
4.4.1	A relação entre a sequência de Fibonacci e a mais simples das frações contínuas	117
4.5	Sequências de Fibonacci generalizadas	118
4.6	A sequência de Fibonacci na Natureza	121
4.7	A relação entre as potências de φ e a sequência de Fibonacci	127
4.8	O teorema de Zeckendorf e a decomposição em números de Fibonacci por sequências binárias finitas	130
4.9	A corda dourada e os padrões na decomposição em números de Fibonacci	134
5	A espiral logarítmica e a Razão Áurea	139
5.1	Spira Mirabilis	139
5.2	A expressão analítica da espiral logarítmica	147

5.3	As notáveis propriedades da espiral logarítmica	149
5.4	A espiral logarítmica na Natureza	155
5.5	A espiral áurea - uma espiral logarítmica com fator de expansão igual a φ	157
5.6	Dedução da equação polar da espiral áurea	159
5.7	A estrutura da concha de <i>nautilus</i> é descrita pela espiral áurea. Será uma crença ou uma teoria fundamentada cientificamente?	165
5.8	O triângulo áureo, a espiral logarítmica e a sequência de Fibonacci . .	169
6	Considerações Finais	172

LISTA DE FIGURAS

1.1	(a) $a + b = 1$. (b) $a + b > 1$. (A autora)	29
1.2	Divisão do segmento AB em proporção geométrica: $a, b, a + b$. (A autora)	30
1.3	As diagonais do pentágono regular $ABCDE$. Adaptado de (BOYER, 1974, p. 38)	32
2.1	Figura usada por Euclides na determinação do ponto H de modo que o retângulo $HBDK$ tenha área igual a do quadrado $FGHA$. Adaptado de (EUCLIDES, 2009, p. 146)	40
2.2	O ponto H secciona o segmento AB em extrema e média razão. (A autora)	42
2.3	AH é o segmento áureo e HB é o complemento áureo de AB . Adaptado de (TAHAN, 1973, p. 232)	44
2.4	Determinação geométrica do segmento áureo. (A autora)	46
2.5	Justificativa da construção geométrica do segmento áureo. (A autora)	46
2.6	Construção geométrica do retângulo áureo. (A autora)	48
2.7	Justificativa da construção geométrica do retângulo áureo. (A autora)	49
2.8	Propriedade iterativa do retângulo áureo. (A autora)	51
2.9	(a) Decágono regular inscrito em uma circunferência. (b) Pentágono regular obtido unindo-se, dois a dois, os vértices do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio r . (A autora)	54
2.10	Construção do decágono inscrito em uma circunferência à partir do triângulo isósceles AOB . (A autora)	55
2.11	Construção de um triângulo isósceles em que cada ângulo junto à base é o dobro do ângulo restante. (A autora)	56

2.12	A construção do pentágono regular por Euclides. (A autora)	57
2.13	Em um pentágono regular, as diagonais determinadas sob dois ângulos consecutivos se interceptam em extrema e média razão. (A autora)	59
2.14	Triângulos isósceles CDF e AFD determinados pela bissetriz BD . (A autora)	60
2.15	Sequência de triângulos isósceles determinados pela bissetriz de um dos ângulos junto à base. (A autora)	61
2.16	Sequência infinita de pentágonos regulares. (A autora)	61
2.17	(a) Construção do pentágono regular inscrito na circunferência λ . (b) Pentagrama obtido pelas diagonais do pentágono regular. (A autora)	62
2.18	(a) Triângulo áureo. (b) Sequência infinita de triângulos áureos. (A autora)	63
3.1	<i>São Jerônimo</i> de Leonardo Da Vinci. (MARKOWSKY, 1992, p. 11) .	71
3.2	Uma cabeça de ancião de Leonardo Da Vinci. (MARKOWSKY, 1992, p. 10)	72
3.3	<i>A Mona Lisa</i> . (Enciclopédia Brasileira de Artes)	73
3.4	Sobreposições de retângulos áureos na obra <i>A Mona Lisa</i> . (<i>Google</i> Imagens)	74
3.5	<i>O Homem Vitruviano</i> . (SIMANEK, 2015, documento eletrônico) . . .	76
3.6	As Pirâmides de Gizé. (<i>Google</i> Imagens)	79
3.7	Esboço da Grande Pirâmide. (LÍVIO, 2009, p. 72)	80
3.8	Texto original em grego do historiador grego Heródoto. <i>Herodoti Historiae</i> , parágrafo 124, II, p. 16-20. (MARKOWSKY, 1992, p. 7) . .	81
3.9	(a) Partenon de Atenas. (<i>Google</i> Imagens) (b) Projeto do Partenon de Atenas. (MARKOWSKY, 1992, p. 9). “Quando seu frontão triangular ainda estava intacto, suas dimensões podiam ser encaixadas <i>quase</i> exatamente em um retângulo áureo.” (HUNTLEY, 1985, p. 69, <i>grifo nosso</i>).	85
3.10	O Sacramento da Última Ceia. (Enciclopédia Brasileira de Artes) . .	87
3.11	Sobre a <i>PhiAcademy</i> . (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico)	88
3.12	(a) Compasso <i>PhiAcademy</i> (b) Tebori <i>PhiAcademy</i> . (c) Traçado da sobancelha no papel. (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico)	90
3.13	(a) Utilização do compasso <i>PhiAcademy</i> . (b) Traçado da sobancelha nas proporções áureas. (c) O ponto alto da sobancelha. (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico)	90

3.14	(a) Antes e depois do <i>PhiContour</i> . (b) As proporções áureas aplicadas aos lábios. (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico)	91
3.15	Simulador <i>online</i> do compasso áureo. (WOLFRAM, documento eletrônico)	91
4.1	Crescimento da população de coelhos. (A autora)	96
4.2	Sofisma Geométrico. Adaptado de (Huntley, 1985, p. 56)	110
4.3	A disposição das folhas caracterizada por uma espiral. (LÍVIO, 2009, p. 130)	122
4.4	Margarida. (KNOTT, 1998, documento eletrônico)	124
4.5	Ângulo áureo. (PIERCE, 2018, documento eletrônico)	125
4.6	(a) π rotações. (b) $\frac{1}{\varphi}$ rotações. (c) φ rotações. (PIERCE, 2018, documento eletrônico)	125
4.7	Flores com 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 pétalas. (<i>Google</i> Imagens)	126
4.8	Interpretação geométrica. Adaptado de (HUNTLEY, 1985, p. 57)	130
5.1	Mesolábio. (BROUGHTON, 2011, p. 115)	141
5.2	Determinação da reta tangente à espiral. J. Vuillemin (1960, p. 39 <i>apud</i> RAMOS, 2013, p. 84)	143
5.3	A espiral logarítmica construída por Descartes. J. Vuillemin (1960, p. 41 <i>apud</i> RAMOS, 2013, p. 87)	144
5.4	A retificação da espiral logarítmica. (MAOR, 2008, p. 162)	146
5.5	A espiral $r = r_0\mu^\theta$. (A autora)	147
5.6	A espiral com θ variando positivamente. (A autora)	148
5.7	A espiral com θ variando negativamente. (A autora)	148
5.8	A espiral geométrica. (A autora)	150
5.9	Espiral no sentido anti-horário. (A autora)	151
5.10	Espiral no sentido horário. (A autora)	151
5.11	A espiral equiangular. (A autora)	152
5.12	A espiral logarítmica intercepta os raios vetores segundo um ângulo constante. Adaptado de (BATSCHELET, 1978, p. 150)	152
5.13	A manifestação das espirais logarítmicas na natureza. (SPIRA, 2018, p. 1)	156
5.14	Sequência infinita de retângulos áureos encaixantes. (A autora)	158
5.15	Processo de construção da espiral áurea. (A autora)	158
5.16	Diagonais do retângulo áureo ABEF. Adaptado de (ZAHN, 2017, p. 965)	160

5.17 (a) <i>Nautilus</i> (b) Seção longitudinal da concha de <i>nautilus</i> . (<i>Google</i> Imagens)	165
5.18 Espiral logarítmica com fator de expansão igual a φ : a espiral áurea. (A autora)	167
5.19 Espiral logarítmica com fator de expansão igual a 1,333. (A autora) .	167
5.21 A sequência infinita de triângulos áureos e a espiral logarítmica. (A autora)	170

INTRODUÇÃO

A complexidade na organização do universo tem sido, desde os primórdios da humanidade, uma fonte de inspiração para o homem em sua busca incansável por teorias que sejam capazes de explicar a harmonia do mundo à sua volta. Os seres humanos constantemente observam a natureza em busca de padrões e a ciência dos números tornou-se imprescindível em suas descrições. A natureza, por sua vez, nos oferece pistas dos padrões que utiliza em sua organização que se faz perceptível na quantidade de pétalas das flores e na disposição de suas folhas ao longo do caule, assim como no crescimento da estrutura espiral da concha de alguns moluscos que, mesmo submetida à transformações inerentes ao seu desenvolvimento, seguem preservando seu formato. As pistas avançam em direção às proporções de simetria observadas no corpo humano e ao voo dos falcões peregrinos em busca de suas presas, cuja trajetória é descrita por uma espiral geométrica, a mesma que pode ser apreciada no formato das galáxias.

A observação de tais padrões inspirou o homem a reproduzi-los em suas concepções que compreenderam diversas áreas do conhecimento humano, como por exemplo, a arquitetura e a arte, assim como expressões matemáticas que fazem inteligível a organização do universo. Em decorrência, a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci desempenharam papéis importantes na descrição de algumas observações e criações. O primeiro destes números teve sua definição enunciada por Euclides (séc.III a.C-?) em 300 a.C. ao descrever a secção de um segmento em duas partes desiguais de modo que a razão entre o segmento todo e a parte maior e a razão entre a parte maior e a parte menor fossem iguais, cuja solução única que fora denominada *extrema e média razão* aponta para um número algébrico irracional, pouco

menos prestigiado que o número π , e simbolizado pela letra grega φ . O segundo trata-se de uma sequência de números (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...) determinada pela solução de um problema, acerca da reprodução de coelhos, proposto por Leonardo Fibonacci (c.1180-1250) cerca de quinze séculos depois da definição da Razão Áurea dada por Euclides. Mas somente em 1608, ao escrever uma carta destinada a um professor, Johannes Kepler (1571-1630) descreve que a razão entre termos consecutivos desta sequência tendem para φ à medida que estes tornam-se cada vez maiores, revelando uma relação intrínseca entre estes conceitos, que só seria provada em 1753 pelo matemático escocês Robert Simson (1687-1768).

A influência destes números nas descrições de alguns padrões causou uma fascinação que não ficou restrita aos matemáticos, mas estendeu-se à arquitetos, artistas, biólogos, “psicólogos e até místicos tem examinado e debatido as bases de sua ubiquidade e seu apelo.” (LÍVIO, 2009, p. 16). A correlação entre estes números que insistem em aparecer nos mais inesperados lugares, cuja ocorrência é verificada com predominância no pentágono estrelado (ou pentagrama)¹ e em alguns retângulos, possuem propriedades geométricas e algébricas singulares que conduziram o homem à tentativa de explicar padrões observados nas plantas e animais, em seu próprio corpo e na descrição da harmonia do universo. Mas a história destes números também fora conduzida a um misticismo exacerbado à partir da publicação, em 1509, do livro de Frei Luca Pacioli (1445-1517) que a denominou de *A Proporção Divina* e, ao que parece, tal designação fez com que algumas análises se tornassem acríticas e acabaram gerando afirmações um tanto quanto subjetivas do ponto de vista matemático. Esta é a chave para a escolha da temática desta pesquisa, cujo principal objetivo é analisar as mais clássicas destas afirmações na intenção de distingui-las entre teorias fundamentadas e crenças sem fundamentos científicos, de modo que serão apresentadas algumas controversas assim como a utilização deliberada da Razão Áurea.

Para tanto, realizamos uma pesquisa bibliográfica dos contextos que deram origem a tais afirmações a fim de analisarmos os argumentos históricos que as sustentam. Dentre os autores das literaturas que direcionaram esta pesquisa, destacamos o matemático e cientista da computação George Markowsky, os matemáticos John Sharp, Keith Devlin e Clement Falbo, o astrofísico da NASA Mário Lívio e o professor de Física Donald E. Simanek. Posteriormente, exploramos propriedades geométricas e algébricas da Razão Áurea, da sequência de Fibonacci e da espiral lo-

¹O pentágono estrelado (ou pentagrama) é uma estrela de cinco pontas determinada pelas diagonais de um pentágono regular.

garítmica cujo fator de expansão é igual a φ com o intuito de averiguar a veracidade dos argumentos científicos.

Neste sentido, a organização deste trabalho resultou em seis capítulos. No primeiro apresentamos um panorama histórico acerca da Razão Áurea, em que nos reportamos ao desenvolvimento da matemática primitiva grega, responsável pela descoberta de grandezas que não admitem uma unidade comum de medida, as chamadas *grandezas incomensuráveis*, na qual a teoria de uma possível crise da fé pitagórica nos inteiros apresenta controvérsias. Fomos conduzidos pela história à mais famosa obra de Euclides na qual encontramos a primeira definição de um segmento seccionado em extrema e média razão. Em seguida, discorreremos sobre a teoria das proporções de Eudoxo que viera a resolver o problema dos incomensuráveis.

No segundo capítulo descrevemos a maneira pela qual podemos determinar a secção de um segmento em extrema e média razão através de procedimentos geométricos, os quais foram demonstrados por Euclides através da comparação de áreas. Detalhamos propriedades algébricas desta secção que obteve diferentes denominações na literatura como *Razão Áurea*, *Proporção Áurea*, *Divina Proporção* e *Número de ouro*. A expansão decimal infinita e não periódica da Razão Áurea, revela sua irracionalidade e através da expansão por frações contínuas percebemos o quão leniente é o processo para se obter uma aproximação racional para φ . Construimos geometricamente o retângulo em que a razão entre suas dimensões é aproximadamente φ e descrevemos sua propriedade iterativa de se obter retângulos semelhantes ao inicial extraindo-se dele sucessivos quadrados. Construimos também um triângulo isósceles que é a chave para a construção do pentágono regular dada por Euclides e as diagonais deste pentágono, por sua vez, determinam um pentágono estrelado ou pentagrama. Ambas figuras são repletas de propriedades relacionados à Razão Áurea.

No terceiro capítulo analisamos afirmações controversas associadas à Razão Áurea que surgiram após a publicação da obra *The divina proportione* do Frei Luca Pacioli em 1509, cujas ilustrações foram feitas por Leonardo Da Vinci (1452-1519). Em nossa análise, enfatizamos duas importantes obras da arquitetura. A primeira foi construída pela civilização egípcia antiga, a Grande Pirâmide de Gizé e a segunda pelos gregos da Antiguidade Clássica, o Partenon de Atenas. Em sequência, analisamos obras famosas de Leonardo da Vinci dentre as quais o *Homem Vitruviano* retrata a busca do homem pelas proporções do corpo humano. Finalizamos nossa análise artística com o *Sacramento da Última Ceia* do pintor surrealista Salvador Dalí. No âmbito das contribuições à ciência, consideramos a busca de Kepler pela

compreensão do universo que o conduziu a um modelo cosmológico em que utiliza os cinco sólidos platônicos inscritos em uma esfera, dentre os quais o dodecaedro e icosaedro possuem relação com a Razão Áurea. Por fim, contemplamos a academia de estética *PhiAcademy* que utiliza o compasso áureo em suas técnicas de design de sobancelhas bem como na correção e contorno labial.

No quarto capítulo descrevemos a resolução do problema de reprodução dos coelhos descrito por Fibonacci no século XIII. A solução de tal problema determina uma sequência cujas propriedades notáveis tornaram-se objeto de estudos da associação canadense *The Fibonacci Association* criada em 1963. Posteriormente, analisamos a maneira pela qual a Razão Áurea se revela através das razões obtidas entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci à medida em que estes assumem valores cada vez maiores. Enfatizamos a presença destes números na otimização da disposição das folhas ao longo do caule de algumas plantas, que é caracterizada por uma espiral na qual o número de voltas em torno do caule para passar pelos ramos e o número de ramos por onde a espiral passa, determinam a razão filotáxica das folhas. Estas razões são as convergentes de uma fração contínua que, quando prolongada um número infinito de termos, converge para o quadrado do recíproco da Razão Áurea. Evidenciamos a sutileza desta razão na representação de qualquer número natural como soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos, dando lugar à uma representação binária finita. Prosseguimos analisando a otimização das sementes do girassol que se justificam na leniência das convergentes da mais simples das frações contínuas.

No quinto capítulo descrevemos a interpretação de René Descartes (1596-1650) na resolução de um problema proposto por Galileu Galilei (1564-1642) que o conduziu a espiral logarítmica. Descartes fundamentou-se na formulação da espiral de Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) e, por meio de uma construção cinemática da curva, identificou propriedades singulares da espiral logarítmica. Encantado pela forma com a qual esta espiral se reproduz após ser submetida à várias transformações, cuja expressão analítica revela-nos uma função exponencial, Jakob Bernoulli (1654-1705) dedicou-se à estudar notáveis propriedades que até então não haviam sido observadas por Descartes. Com frequência, observamos na natureza um padrão de espirais que possuem características semelhantes à espiral logarítmica em diversas escalas, desde os girassóis às conchas marinhas, a cauda do camaleão e até mesmo na Via Láctea. Desta imensa família de espirais, enfatizamos um membro cujo fator de expansão é igual a Razão Áurea e pode ser aproximada à espiral de Fibonacci. Em consequência, até mesmo a mais simples das pesquisas nos conduz à

várias associações desta espiral áurea com a estrutura da concha do pequeno molusco *nautilus*. Será uma crença ou uma teoria fundamentada cientificamente? Respon- demos esta questão por meio de uma análise alicerçada nos estudos realizados pelos matemáticos George Markowsky, Clement Falbo e John Sharp.

No último capítulo descrevemos as considerações finais onde relatamos nossas concepções preliminares bem como os direcionamos durante a pesquisa e, por fim, as contribuições da mesma em nossa prática de sala de aula.

CAPÍTULO 1

UM PANORAMA HISTÓRICO ACERCA DA RAZÃO ÁUREA

“A matemática, desde os seus primórdios, entrelaça-se tão intimamente com a história da civilização, sendo mesmo uma das alavancas principais do progresso humano, que sua história não é só altamente motivadora em termos de ensino como também muito rica em aspectos culturais.”

Howard Eves

1.1 A matemática primitiva grega e a descoberta dos incomensuráveis

Nos últimos séculos, historiadores da matemática, diante da escassez de documentos que evidenciem alguns fatos, defendem hipóteses distintas acerca dos primeiros indícios da descoberta de grandezas que não admitem uma unidade comum de medida, as chamadas *grandezas incomensuráveis*. O fato é que estes historiadores comungam do ponto de vista que tal descoberta se deu no desenvolvimento da matemática primitiva grega, mais especificamente entre os pitagóricos. Neste sentido, aspiramos reconstruir tal contexto cuja história pode ser remontada ao final do terceiro milênio a.C., com a finalidade de compreendermos as distintas interpretações à história da descoberta dos incomensuráveis e, em consequência, da Razão Áurea;

ou mesmo, a descoberta da Razão Áurea e, em consequência, dos incomensuráveis.

1.1.1 O desenvolvimento da matemática primitiva grega

Nos últimos séculos do terceiro milênio a.C., povos provindos de algumas tribos indo-europeias, os chamados aqueus, foram os primeiros a entrarem na Grécia. Vindos da região sul do Mar Negro, migraram para o oeste e progressivamente foram se apropriando da região, onde atualmente é localizada a Grécia, chegando ao extremo sul. Por volta de 1600 a.C., na cidade de Micenas, que era um dos maiores centros da civilização grega, os aqueus consolidam um extenso império, a conhecida civilização micênica.

Mais tarde, ao fim do segundo milênio a.C., vieram do norte invasores nômades iletrados, conhecidos como dórios, que acabaram destruindo a cidade de Micenas, o que conduziu a Grécia à chamada Idade Negra, na qual todo progresso cultural grego sofreu uma ruptura até meados do oitavo século a.C.. Decorrente da invasão dos dórios, alguns aqueus migraram para as ilhas do mar Egeu e também para o litoral da península de Anatólia, onde estabeleceram colônias com um dialeto grego comum chamado jônio. Com o tempo, o número de colônias cresceu e ficaram conhecidas como Jônia, “o verdadeiro berço da Filosofia e da Matemática dedutiva” (GARBI, 2010, p. 19). “O comércio foi crescentemente incentivado e se fizeram muitas descobertas geográficas. O mundo estava pronto para um novo tipo de civilização” (EVES, 2004, p. 94) que se deu nas cidades comerciais às costas do Mar Negro, ao litoral da África e na parte sul da península italiana. O conjunto das várias colônias criadas pelos gregos formou o que passou a ser conhecido como *Magna Grécia*.

Com o consentimento dos egípcios, em meados do sétimo século a.C., comerciantes jônios estabeleceram um centro comercial promissor nas imediações do rio Nilo e,

ao colocar a Grécia em contato com uma civilização então muito mais

adiantada, permitiu que os jônios observassem os conhecimentos básicos de Geometria, Aritmética e Astronomia que, não só no país dos faraós mas, também, na Mesopotâmia, haviam se acumulado ao longo de muitos séculos. Este foi um acontecimento crucial no nascimento da ciência e da filosofia gregas. (GARBI, 2010, p. 19).

De acordo com a tradição, os gregos herdaram o conhecimento matemático, baseado na experiência e observação dos egípcios e babilônios. Mas seriam os gregos responsáveis pela transição da matemática empírica adquirida com os egípcios e babilônios para uma matemática dedutiva baseada em definições e axiomas. Embora este seja um capítulo da história pouco conhecido, ao que se presume, os primeiros passos desta transição pode ter ocorrido na cidade de Mileto (região que atualmente pertence à Turquia), localizada no sul da Jônia, muito provavelmente entre 624 a.C. e 548 a.C. onde viveu o primeiro filósofo e matemático grego, chamado Tales, um comerciante apaixonado pela Filosofia, Astronomia e Matemática que posteriormente fora considerado um dos Sete Sábios da Grécia Antiga.

À cerca de 50 km de Mileto, na ilha jônia de Samos, por volta de 572 a.C., nasceria Pitágoras, um matemático e filósofo grego que teve seu nome atrelado ao mais famoso teorema da matemática, o Teorema de Pitágoras. Alguns historiadores, dentre eles Eves (2004), acreditam que Tales e Pitágoras tiveram contato pessoal, mas Boyer (1974) discorda dessa possibilidade dada a diferença entre suas idades. E ainda justificam as semelhanças nos interesses desses matemáticos dado que os dois empreenderam viagens pelo Egito e Babilônia onde obtiveram conhecimentos de matemática e astronomia.

Durante muitos séculos dois povos distintos, os persas e os medos, habitaram a região do atual Irã. Até que, por volta de 550 a.C., os persas, sob o reinado de Ciro (560-530 a.C.) que principiou o chamado império persa, se rebelaram contra os medos e passaram a controlar a região. O então formado Reino da Pérsia prosseguiu conquistando vários territórios e expandindo-se em direção ao mundo grego. Diante deste cenário, Pitágoras deixou a ilha de Samos e residiu por um tempo no Egito e

ao retornar à Grécia se estabeleceu na cidade de Crotona, sul da península italiana. Por volta de 540 a.C. fundou, em Crotona, a escola pitagórica voltada ao estudo de filosofia, matemática e ciências naturais.

Após a morte de Ciro o controle Pérsia agora era de seu filho Dário I, que por volta de 490 a.C., invade a Grécia continental, mas os gregos tiveram uma vitória histórica. Dez anos mais tarde Xerxes, o filho de Dário I, inicia uma nova invasão na Grécia onde se estabeleceu uma das maiores batalhas do mundo antigo, e novamente os gregos saíram vitoriosos ao enfrentarem o maior império do mundo neste período e mantiveram sua liberdade. Atenas foi destruída pelo império Persa, mas após o conflito iniciou-se sua reconstrução e de 450 a.C. a 430 a.C.,

foi governada por um dos maiores estadistas de todos os tempos, o grande *Péricles*, que fortaleceu a democracia, estimulou a cultura e erigiu obras como o Partenon (projetado por Ictimo, construído por Calícrates e adornado por Fídias), o que fez com que todo o século V a.C. viesse a ser conhecido como *o século de Péricles*. (GARBI, 2010, p. 48).

Tal fato atraiu vários filósofos e Atenas se tornava um grande centro de cultura até que, em 431 a.C., um conflito entre Atenas e Esparta é iniciado. Nasceria no quarto ano deste conflito, o filósofo e matemático grego Platão (427 a.C.-347 a.C), um dos principais pensadores de sua época. Atenas foi derrotada por Esparta em 404 a.C. passando por um período de grande turbulência, fato que levou Platão à empreender uma longa viagem pelo Mediterrâneo onde obteve conhecimento de filosofia e geometria. Cerca de 12 anos depois Platão retorna à Atenas e por volta de 386 a.C. funda a Academia Platônica de Atenas que se tornou o centro matemático do mundo que, por meio dela, advieram os principais pesquisadores deste período e o mais preeminente matemático e astrônomo Eudoxo (408-355? a.C.), nascido na cidade de Cnidos (colônia de origem jônica). Destaca-se entre os discípulos de Platão o filósofo grego Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.), nascido na Macedônia (colônia de origem jônica), que aos 17 anos se estabeleceu em Atenas para estudar na Academia

de Platão e rapidamente destacou-se entre os acadêmicos e tornou-se professor da Academia. Dentre os grandes geômetras que passaram pela Academia de Platão, está o também filósofo Teeteto, nascido em Atenas, responsável pela descoberta do *octaedro* e *icosaedro* que compõem juntamente com o *tetraedro*, *cubo* e o *dodecaedro*, descoberto pelos pitagóricos, os *Poliedros de Platão*.

A época de Platão ficou marcada por drásticas mudanças na matemática grega, a álgebra aritmética utilizada pelos pitagóricos em que havia separação entre número e grandezas contínuas, outrora herdada dos babilônios, perde lugar para uma álgebra geométrica. “Os velhos problemas em que, dada a soma e o produto de dois lados de um retângulo se pediam as dimensões, tinha que ser tratado de modo diferente dos algoritmos numéricos dos babilônios.” (BOYER, 1974, p. 57). A interpretação de uma equação passaria a ter um caráter geométrico e as grandezas envolvidas deveriam ser homogêneas.

Algumas décadas após a derrota de Atenas, em 338 a.C., Filipe II da Macedônia consegue dominar o mundo grego. Mas, apenas dois anos depois, Filipe II foi assassinado e seu filho, Alexandre o Grande, ex-aluno de Aristóteles, assume o trono. Alexandre, o Grande, seria o maior general da Antiguidade conquistando a Pérsia até o Norte da Índia. O Egito foi tomado por ele em 332 a.C. e, no delta do Nilo, Alexandre fundaria a cidade de Alexandria que mais tarde seria o berço do desenvolvimento da ciência e cultura. Alexandre morreu em 323 a.C. e seu sucessor Ptolomeu por volta de 300 a.C., incentivado pelo filósofo Demétrio, fundou o *Museu de Alexandria*. Demétrio, nascido em Falero (um porto de Atenas), conheceu a Academia de Platão e, com o apoio de Ptolomeu, influenciou a vinda de muitos pensadores do mundo grego à Alexandria, dentre os quais destacamos Euclides que passou à ensinar geometria e assumiu a direção das discussões matemáticas. Pouco se sabe à respeito da vida de Euclides mas, acredita-se que ele foi aluno da Academia de Platão. Foi no Museu de Alexandria, por volta de 300 a.C., que Euclides escreveu

Os Elementos, que “não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos” (BOYER, 1974, p. 87) e fundamental à geometria.

1.1.2 Pitágoras, a escola pitagórica e os incomensuráveis

Infelizmente, a história da primitiva matemática grega “[...] quase não se dispõe de nenhuma fonte primária. [...] Somos forçados a nos apoiar em manuscritos e relatos escritos vários séculos depois de os originais terem sido produzidos.” (EVES, 2004, p. 96). Dentre os muitos trabalhos que foram perdidos, destaca-se o trabalho de Eudemo Rodes (c.320 a.C.-290 a.C.), um discípulo do filósofo grego Aristóteles (384 a.C-322 a.C.), que relata a história da geometria grega anterior ao período de 335 a.C.. Mas, um resumo de seu trabalho foi feito¹, antes que se perdesse, possibilitando ao filósofo neo-platônico² Proclus (410-485) o acesso ao sumário do trabalho de Eudemo mais de um milênio após os primeiros passos da matemática grega. Proclus incorporou tal sumário, que ficou conhecido como *Sumário Eudemiano*, nas primeiras páginas de seu “breve resumo do desenvolvimento da geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides” (EVES, 2004, p. 97) intitulado *Comentário sobre o primeiro livro de Os Elementos de Euclides*, nossa principal referência da primitiva matemática grega. Um ilustre matemático citado no *Sumário Eudemiano* foi Pitágoras que, segundo Boyer (1974), tudo que se sabe à respeito dele é baseado nas mais antigas referências gregas à história da matemática, que não sobreviveram, o que torna claro que tal base trata-se de tradições persistentes e não de documentos históricos, e o mais perto que se pode chegar de evidência digna de confiança é pela menção de Eudemo. É esta a razão pela qual, nas últimas décadas, alguns historiadores da matemática têm colocado em xeque a existência de Pitágoras, visto que todas as informações à respeito dele são provindas de séculos

¹Segundo Boyer (1974), a autoria deste resumo é desconhecida.

²A denominação *neo-platônicos* refere-se à um grupo de importantes geômetras em um período compreendido entre a fundação da escola pitagórica em Crotona e a Academia de Platão em Atenas.

posteriores, e por este motivo é tido por estes como relatos não fidedignos. “A escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático chamado Pitágoras.” (ROQUE, 2012, p. 104).

Contudo, segundo se presume, Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C., na ilha jônia de Samos, no leste do mar Egeu. Com o auxílio de grandes homens da época, Pitágoras aprendeu rapidamente matemática e filosofia empreendendo uma longa viagem em direção ao Oriente, passando pelo Egito e Babilônia onde obteve conhecimento da matemática mesopotâmica. Posteriormente, Pitágoras retornou ao mundo grego, na cidade de Crotona da Magna Grécia, onde começou a dar aulas de matemática e filosofia e rapidamente atraiu muitos seguidores que logo se tornaram seus discípulos fiéis aos quais lhe eram atribuídas rígidas doutrinas. Decorrente deste fato, surge a “famosa escola pitagórica, que, além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias.” (EVES, 2004, p. 97).

Se Pitágoras permanece uma figura muito obscura isto se deve em parte à perda de documentos daquela época. Várias biografias de Pitágoras foram escritas na antiguidade, inclusive uma de Aristóteles, mas se perderam. Uma outra dificuldade para caracterizar claramente a figura de Pitágoras provém do fato de que a ordem que ele fundou era comunitária além de secreta. Conhecimento e propriedade eram comuns, por isso a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola. É melhor, por isso, não falar na obra de Pitágoras mas antes das contribuições dos pitagóricos, embora na antiguidade fosse usual dar todo o crédito ao mestre. (BOYER, 1974, p. 36).

Os pitagóricos desenvolveram estudos matemáticos de qualidade inquestionáveis e muitas foram as contribuições para a história da civilização quando, no antigo mundo grego, despertaram o interesse de muitos adeptos pelo estudo da matemática ao qual se dedicavam intensamente. É atribuído ao próprio Pitágoras a criação das palavras “*filosofia*” (do grego: amor à sabedoria) e “*matemática*” (do grego: o que é

aprendido) como uma forma de descrever suas atividades intelectuais. “A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros”. (EVES, 2004, p. 97). Para eles,

apesar de ser a Matemática algo ideal e abstrato, sua presença no mundo físico era percebida por toda a parte, nos céus e na Terra. Isso levou-os a considerar Deus o Grande Geômetra do Universo, a dizer que o mundo era feito de números e a nutrir por eles uma veneração verdadeiramente religiosa. Essa visão pitagórica em relação à Matemática é, até os dias de hoje, tema de grande debate entre os filósofos que procuram responder à multimilenar e cândida pergunta: “Fazemos ou descobrimos a Matemática?” (GARBI, 2010, p. 27).

Segundo Boyer (1974), embora alguns historiadores atribuam aos pitagóricos um elevado grau de abstração da matemática, é muito provável que tal visão abstrata não tenha sido tão sofisticada como se relata. Os pitagóricos associavam toda grandeza (comprimento, área e volume) a um número inteiro ou uma razão entre inteiros. Acreditavam que ao comparar dois segmentos de reta existiria um segmento u , ainda que muito pequeno, que seria submúltiplo dos dois segmentos considerados. Desta forma, os segmentos podiam ser medidos com a mesma unidade, em consequência, seriam comensuráveis.

A escola pitagórica tornou-se muito influente com o tempo até que, em algum momento da história, a população crotonense se rebelou contra a irmandade devido às suas práticas de ritos e cerimônias. Destruíram os prédios da escola fazendo com que os pitagóricos se disseminassem e Pitágoras refugiou-se na cidade de Metaponto onde morreu, supostamente, assassinado. Ainda assim, a irmandade pitagórica sobreviveu dispersa por mais dois séculos. Acredita-se que Arquitas de Tarento (428 a.C.-365 a.C.), um dos últimos e mais ilustre pitagórico, estabeleceu uma divisão no estudo da matemática em quatro grupos de matérias que, na Idade Média, tornou-se conhecida como *quadrivium*, “a *aritmética* estudava as quantidades em si mesmas; a *música*, as relações entre quantidades; a *geometria*, as grandezas em repouso; e a

astronomia, as grandezas em movimento inerente.” (ROQUE, 2012, p. 109, *grifo nosso*).

Acerca das contribuições dos pitagóricos à civilização, segundo Eves (2004), há uma conformidade entre os historiadores da matemática quanto a atribuição da descoberta dos *números figurados* aos membros mais antigos da irmandade. Estes números descrevem a quantidade de pontos em determinadas composições geométricas (triangulares, quadradas, pentagonais, etc...) revelando uma conexão entre geometria e aritmética. Mas, apenas alguns destes historiadores atribuem a descoberta dos *números amigáveis*³ e dos *números perfeitos, deficientes e abundantes*⁴ aos pitagóricos. Outra importante contribuição atribuída à eles é a relação entre intervalos musicais e razões numéricas que os conduziu ao estudo de escalas musicais. Presume-se que foi Pitágoras quem deu a primeira demonstração geral do famoso teorema atribuído a ele, o qual enuncia que, *o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos*, embora tal relação já fosse conhecida pelos babilônios.

Proclus, talvez citando Eudemo, atribuiu à Pitágoras duas descobertas matemáticas específicas: (1) a construção dos sólidos regulares e (2) a teoria das proporcionais. Embora haja dúvida sobre até que ponto isso deve ser tomado literalmente, há forte probabilidade de que a afirmação esteja de acordo com a direção do pensamento pitagórico. A teoria das proporções claramente se ajusta ao esquema de interesses matemáticos dos gregos antigos, e não é difícil achar uma provável fonte de inspiração. Conta-se que Pitágoras soube na Mesopotâmia das três médias aritmética, geométrica e a subcontrária (mais tarde chamada harmônica) - e da “proporção áurea” que relaciona duas delas: o primeiro de dois números está para sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número. [...] O estudo das proporções ou da igualdade de razões presumivelmente formava de início uma parte da aritmética ou teoria dos números pitagórica. Mais tarde as quantidades a , b e c que

³“Dois números se dizem *amigáveis* se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro.” (EVES, 2004, p. 98).

⁴“Um número se diz *perfeito* se é igual à soma dos seus divisores próprios, *deficientes* se excede a soma de seus divisores próprios e *abundante* se é menor que a soma de seus divisores próprios. (EVES, 2004, p. 99).

entravam em tais proporções seriam provavelmente olhadas como grandezas geométricas; mas o período em que teve lugar essa mudança não é claro (BOYER, 1974, p. 41-42).

Para os pitagóricos uma relação de equivalência entre dois quocientes envolvendo três quantidades distintas a , b e c de maneira que $a : b :: b : c$ (a está para b assim como b está para c) era denominada *proporção contínua* de três termos. Nesta proporção, os extremos a e c estão unidos por um termo médio b . A proporção contínua relaciona “um grupo de três números desiguais tais que entre duas de suas diferenças a relação é a mesma que a de um destes números entre si mesmo ou entre um dos outros dois números.” (LAWLOR, 1996, p. 80). Trata-se de uma proporção média onde $a > b > c$, de maneira que: (1) $a - b : b - c :: a : a$, $b : b$, $c : c$ ou; (2) $a - b : b - c :: a : b$ ou; (3) $a - b : b - c :: a : c$. Isolando o termo médio b nas proporções (1), (2) e (3), obtém-se, respectivamente:

- a fórmula geral da proporção aritmética: $b = \frac{a + c}{2}$;
- a fórmula geral da proporção geométrica: $b^2 = ac$ ou $b = \sqrt{ac}$;
- a fórmula geral da proporção harmônica: $b = \frac{2ac}{a + c}$.

Esta é “a estrutura proporcional básica que contém os axiomas para nossas operações matemáticas primárias e também a estrutura proporcional básica das leis musicais.” (LAWLOR, 1996, p. 81).

Segundo Boyer (1974), conta-se que Pitágoras teve conhecimento de um tipo especial de proporção contínua de três termos em que o terceiro termo é igual a soma do termo maior e do termo menor, de outro modo $a : b :: b : (a + b)$, “o termo menor está para o termo maior da mesma forma que o termo maior está para o menor mais o maior. [...] O termo maior ($a + b$) deve ser um todo ou unidade composta da soma dos outros dois termos.” (LAWLOR, 1996, p. 45).

Na prática, esta proporção de três termos é construída à partir de apenas dois termos a e b . Esta divisão proporcional pode ocorrer de duas formas: (1) o termo maior ($a+b$) é igual a unidade de maneira que $b^2 = a$ é a única partição geométrica da unidade; (2) o termo maior ($a+b$) é maior que a unidade de maneira que $b^2 = a(a+b)$ é a única divisão proporcional com dois termos desiguais. Geometricamente,

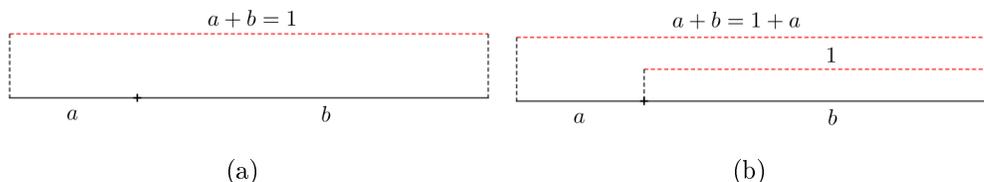


Figura 1.1: (a) $a + b = 1$. (b) $a + b > 1$. (A autora)

O mais interessante é que esta proporção é uma relação entre as proporções aritmética e harmônica. Segundo Boyer (1974), o primeiro de dois números a está para sua média aritmética assim como sua média harmônica está para o segundo número b . Mas, neste caso $c = a + b$. Logo,

$$a : \frac{2a + b}{2} = \frac{2a(a + b)}{2a + b} : b \Leftrightarrow ab = \frac{2a + b}{2} \cdot \frac{2a(a + b)}{2a + b} \Leftrightarrow ab = a(a + b) \Leftrightarrow b^2 = a(a + b)$$

Portanto, através da proporção contínua construída à partir de a e b obtemos a única proporção geométrica de dois termos que, historicamente, ficou conhecida como *proporção áurea*. Esta proporção é uma razão constante decorrente de uma relação geométrica que é irracional em termos numéricos.

Em certo sentido, a proporção áurea pode considerar-se supra-racional ou transcendente. Na verdade, o primeiro produto da unidade, a única dualidade criativa possível no interior da unidade. Poderia dizer que é a relação mais íntima que pode ter a existência proporcional - o universo - com a unidade, a divisão primeira ou primária do uno. Por este motivo, os antigos a chamavam de “áurea”, a divisão perfeita, e os cristãos relacionaram este símbolo proporcional com o filho de Deus. (LAWLOR, 1996, p. 46).

Ao que parece, segundo Boyer (1974), Arquitas em continuidade ao trabalho

1.1 A matemática primitiva grega e a descoberta dos incomensuráveis

aritmético dos pitagóricos, se deparou com tal proporção. Ao escrever sobre a aplicação das médias aritmética, geométrica e harmônica na música enunciou o seguinte teorema: *entre dois inteiros que estejam na razão $a : (a + 1)$ não pode existir um inteiro que seja meio proporcional entre eles*, ou seja, se considerarmos b como sendo o meio proporcional entre a e $a + 1$, teríamos $\frac{a}{b} = \frac{b}{a + 1} \Leftrightarrow b^2 = a(a + 1)$, em consequência, b é não inteiro. Em síntese, *um ponto divide um segmento de reta em extrema e média razão, quando o mais longo dos segmentos é a média geométrica entre o menor e o segmento todo*, de outro modo, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a + b} \Leftrightarrow b^2 = a(a + b)$.

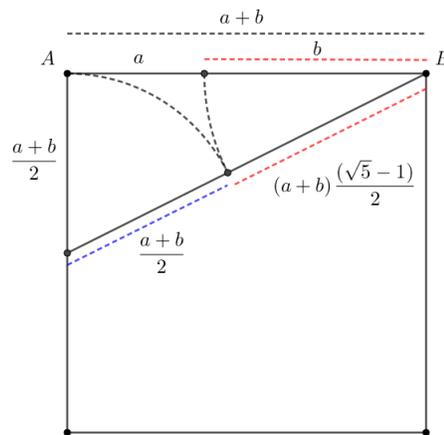


Figura 1.2: Divisão do segmento AB em proporção geométrica: $a, b, a + b$. (A autora)

Geometricamente, pode-se dizer que a área do quadrado construído sobre o segmento maior é equivalente à área do retângulo cujas dimensões são o segmento menor e o segmento todo. Talvez o fato das quantidades envolvidas na proporção não serem interpretadas por Pitágoras como grandezas geométricas tenha o impedido de descobrir a proporção áurea e, em consequência, os incomensuráveis.

Após a destruição dos prédios da escola pitagórica a irmandade permaneceu dispersa, de forma que seus membros estavam espalhados pelo mundo grego ampliando a influência intelectual da escola. Especula-se que Hipócrates de Chios, um geômetra nascido em Atenas, tenha sido um membro da irmandade ou, ao menos, fora influenciado com o pensamento pitagórico. Segundo Boyer (1974), Proclus relata

que Hipócrates antecedeu Euclides em mais de um século ao escrever a obra *Elementos de Geometria*, que se perdeu assim como outros tratados de matemática do quinto século. Mas, de acordo com uma cópia de um fragmento da *História da Matemática* de Eudemo, Hipócrates teria provado um teorema sobre áreas de círculos que enuncia:

Segmentos de círculos semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases. [...] O relato de Eudemo diz que Hipócrates provou isso, mostrando primeiro que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Aqui Hipócrates usa a linguagem e conceito de proporção que desempenhou papel tão grande no pensamento pitagórico. [...] A teoria das proporções provavelmente estava feita só para grandezas comparáveis. (BOYER, 1974, p. 49, grifo nosso).

Este relato mostra que a demonstração do teorema de Hipócrates exigia habilidade matemática para trabalhar com razões (nesta época, o conceito de razão não era equivalente a uma fração entre números) e proporções. Talvez tenha sido Hipócrates o primeiro a utilizar letras em figuras geométricas.

1.1.3 Hipóteses acerca da descoberta dos incomensuráveis: uma possível crise da fé pitagórica nos inteiros

“Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se.”

Euclides de Alexandria

Para os gregos, “a palavra número era usada só para os inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único mas como uma razão ou relação entre inteiros.” (BOYER, 1974, p. 39). Assim, a filosofia pitagórica de “que a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas da vida do homem, pode ser explicado em termos de *arithmos*⁵, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas

⁵*Arithmos* (do grego: números).

razões” (BOYER, 1974, p. 53), pode ter sido ameaçada pelo *Sumário Eudemiano* de Proclus que atribuiu aos pitagóricos a construção das “figuras cósmicas”, ou seja, de alguns dos sólidos regulares, muito provavelmente, o tetraedro (4 faces triangulares), o cubo (6 faces quadradas) e o dodecaedro (12 faces pentagonais). Acredita-se que os pitagóricos conheciam algumas propriedades do pentágono regular, que é a figura geométrica que representa as faces do dodecaedro, pois traçando-se as cinco diagonais de um pentágono regular obtém-se um pentágono estrelado ou pentagrama que era a insígnia da escola pitagórica.

Se começarmos com um polígono regular $ABCDE$ (Figura 1.3) e traçarmos as cinco diagonais, essas diagonais se cortam em pontos $A'B'C'D'E'$, que formam outro pentágono regular. Observando que o triângulo BCD' , por exemplo, é semelhante ao triângulo isósceles BCE e observando também os muitos pares de triângulos congruentes no diagrama, não é difícil ver que os pontos $A'B'C'D'E'$ dividem as diagonais de um modo notável. Cada um deles divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor. [...] Para os gregos antigos esse tipo de subdivisão logo se tornou tão familiar que não se achava necessário ter um nome especial para ela; por isso a designação “*divisão de um segmento em média e extrema razão*” em geral é substituída simplesmente pela palavra “*secção*”. (BOYER, 1974, p. 37, *grifo nosso*).

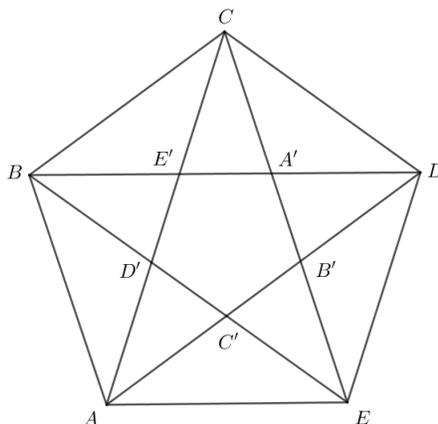


Figura 1.3: As diagonais do pentágono regular $ABCDE$. Adaptado de (BOYER, 1974, p. 38)

Tal subdivisão das diagonais tratava-se, possivelmente, da descoberta de que os

números inteiros e as razões entre eles não eram suficientes para representar propriedades básicas. Mas não se sabe ao certo quando e como se deu a descoberta da existência de segmentos que não admitem uma unidade de medida comum, mesmo que se considere uma unidade tão pequena quanto se queira, os chamados segmentos incomensuráveis. Segundo Boyer (1974), ao que se presume, Pitágoras não chegou a conhecer o problema da incomensurabilidade, mas tal descoberta pode ter ocorrido antes de 410 a.C. por Hipasus de Metapontum ao observar que as diagonais do pentágono regular determinam um pentágono regular menor e as diagonais deste segundo determinam um terceiro pentágono regular menor ainda, e tal processo pode ser repetido indefinidamente determinando pentágonos cada vez menores, tão pequeno quanto se queira, de forma que a razão da diagonal e o lado em um pentágono regular é não racional.

Existe uma incerteza envolta à incomensurabilidade, comumente a descoberta da existência de grandezas incomensuráveis é creditada à aplicação do Teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo isósceles de catetos unitários cuja hipotenusa é igual a $\sqrt{2}$, ou seja, a diagonal de um quadrado unitário não pode ser representada pela razão de dois números inteiros, mas esta possibilidade tem sido muito questionada dado o alto grau de abstração na demonstração de tal propriedade. De fato, não se sabe ao certo quando e como tal descoberta se deu, se o incomensurável $\sqrt{2}$ antecedeu a Razão Áurea ou se a Razão Áurea é a responsável pela descoberta dos incomensuráveis, tudo o que temos são apenas hipóteses que são frutos de estudos baseados nos escritos de comentadores que viveram séculos à frente da época dos pitagóricos.

Os incomensuráveis principiaram uma discussão que durou séculos e revelou reflexões distintas dada a escassez de documentos. Alguns historiadores da matemática relatam que a descoberta dos incomensuráveis causou uma crise lógica na comunidade que abalou a fé pitagórica nos inteiros e tal descoberta dizimaria a teoria

das proporções, atribuída aos pitagóricos, que só poderia ser aplicada para razões entre inteiros, ou seja, para segmentos comensuráveis. Esta teoria das proporções encontra-se em *Os Elementos*, na definição 21 do Livro VII, Euclides traz a definição de proporção atribuída aos pitagóricos. Em suas palavras, “números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes.” (EUCLIDES, 2009, p. 270).

Se de fato houve uma crise, a solução seria dada mais tarde por Eudoxo quando desenvolveu a teoria das proporções que se aplicaria tanto a grandezas comensuráveis quanto incomensuráveis. Porém, nas últimas décadas, historiadores têm questionado tal crise de fé nos inteiros devida aos incomensuráveis pois, ao que parece, os pitagóricos tendo ciência da incomensurabilidade tentaram expandir uma técnica que já era conhecida e utilizada para os números, a *antifairese*, para comparar grandezas incomensuráveis.

O método da *antifairese* (do grego: subtrações recíprocas) consiste no seguinte procedimento: “dados dois números (ou duas grandezas), em cada passo subtraíse, do maior, um múltiplo do menor, de modo que o resto seja menor do que o menor dos dois números considerados.” (ROQUE, 2012, p. 119). Atualmente, o procedimento da *antifairese* é utilizado na álgebra para determinar o máximo divisor comum entre dois naturais, o conhecido algoritmo de Euclides, tal procedimento pode ou não ser finito. Sendo finito, a semelhança pode ser verificada por meio de uma proporção aritmética, ou seja, através da igualdade de razões numéricas (neste caso as duas grandezas possuem a mesma *antifairese*). Quando o método da *antifairese* é infinito tem-se um caso de incomensurabilidade que não pode ser descrito pela igualdade de razões numéricas. A descoberta dos incomensuráveis proporcionou o desenvolvimento de “uma nova teoria das razões e proporções e um novo conceito de proporcionalidade, independente da igualdade entre números.” (ROQUE, 2012, p. 165), motivo pelo qual alguns historiadores acreditam não ter

havido uma crise nos fundamentos da matemática grega.

1.1.4 Os Elementos de Euclides

“Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto, para a geometria, que o estudo de Os elementos, e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria.”

Proclus Diadocus apud Carl B. Boyer

Os Elementos é a mais famosa obra de Euclides, um compêndio valioso do trabalho de grandes pensadores gregos de seu tempo, fragmentado em 13 livros, que trata de geometria elementar (da régua e do compasso) assim como capítulos sobre aritmética e, como a conhecemos hoje, sobre Álgebra (não no sentido simbólico, mas geométrico). “Proclus descreve *Os Elementos*, em relação com o resto da matemática, como as letras do alfabeto em relação com a linguagem.” (BOYER, 1974, p. 76).

A maior parte dos teoremas contidos em *Os Elementos* foram descobertas de outros geômetras, dentre eles, Eudoxo com o desenvolvimento da teoria das proporções. A genialidade de Euclides, na composição da obra, está na exposição lógica dos assuntos, pois acredita-se que as demonstrações de alguns teoremas foram feitas por ele, outras refeitas ou aprimoradas. A matemática anterior à Euclides baseava-se em questões práticas, e à partir de *Os Elementos* obtém-se um alto grau de abstração dessa ciência. Euclides foi pioneiro na utilização de um sistema axiomático, de forma que seu livro inicia-se com algumas definições, seguidas de axiomas ou postulados que, posteriormente, são usados para provar proposições e teoremas.

Mas a primeira versão impressa, uma tradução em latim de Campanus de Novara (1220-1296), ocorreu apenas em 1482 na cidade de Veneza, e à partir de então, mais de mil edições da mais antiga obra grega foram publicadas, perdendo apenas para a Bíblia no quesito número de edições. Todas as versões modernas da obra de

Euclides baseiam-se em uma revisão feita, 700 anos após a época de Euclides, pelo comentador grego Têon de Alexandria.

Porém, em 1808, quando Napoleão ordenou que fossem tomados de bibliotecas italianas e enviados a Paris os manuscritos de valor, F. Peyrard encontrou, na biblioteca do Vaticano, uma cópia do século X de uma edição da obra que é anterior à revisão de Têon. Um estudo dessa edição mais antiga e uma triagem cuidadosa de citações e notas feitas por comentadores antigos indicam que o material introdutório do tratado original de Euclides indubitavelmente sofreu alterações nas revisões que se seguiram, mas os teoremas e demonstrações, salvo acréscimos e supressões pequenas, permaneceram em essência como Euclides os escreveu. (EVES, 2004, p. 168).

Em *Os Elementos* de Euclides as grandezas são associadas a segmentos de reta e não a números. Nele, “o reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas.” (BOYER, 1974, p. 56). Apresentamos a tabela 1.1 com uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo de *Os Elementos*:

Livros	Assuntos tratados
I	Resultados básicos de geometria plana (figuras retilíneas)
II	A geometria do retângulo (“Álgebra geométrica”)
III	A geometria do círculo
IV	Polígonos regulares e o círculo
V	Teoria das Proporções de Eudoxo
VI	Semelhança de figuras planas
VII	Aritmética básica (Atualmente, teoria dos números)
VIII	Números em progressão aritmética e tipos especiais de números
IX	Números em progressão geométrica e a teoria dos pares e primos
X	Segmentos incomensuráveis (Estudo dos números irracionais)
XI	Resultados básicos de geometria espacial
XII	Áreas e volumes e o método da exaustão de Eudoxo
XIII	Os sólidos platônicos

Tabela 1.1: Estrutura de *Os Elementos* de Euclides. (A autora)

1.1.5 Teoria das proporções de Eudoxo

O Livro V de *Os Elementos* trata da teoria abstrata das razões e proporções de Eudoxo que viera a resolver o problema dos incomensuráveis, uma vez que ele reformulou a teoria das proporções levando em conta a existência dos números irracionais, de modo que a nova definição seria aplicável tanto a grandezas comensuráveis quanto incomensuráveis.

A palavra razão (em grego: *logos*) é frequentemente utilizada por Euclides e expressa um tipo de relação entre o tamanho de duas grandezas homogêneas, ou seja, dois comprimentos, duas áreas ou dois volumes. Para Euclides, na definição 3 do Livro V: “*Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero.*” (EUCLIDES, 2009, p. 205, *grifo nosso*). Faz-se necessário salientar que, mesmo a definição de razão referindo-se ao tamanho das grandezas, nem sempre será possível calculá-la da mesma forma que um número. A seguir, listamos as definições contidas no livro V relacionadas à teoria das proporções de Eudoxo a fim de compreendermos seu desenvolvimento.

A definição 4 do Livro V enuncia: “*Magnitudes são ditas estar na mesma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra.*” (EUCLIDES, 2009, p. 205, *grifo nosso*). Esta definição nos fornece um critério de comparação entre duas grandezas homogêneas. De maneira que as grandezas a e b possuem uma razão entre si, se houver inteiros m e n tais que $ma > b$ e $nb > a$. Este critério operatório nos permite comparar tais grandezas se uma delas torna-se maior que a outra quando multiplicada por um número inteiro.

A definição 5 do Livro V enuncia: “*Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes.*”

(EUCLIDES, 2009, p. 205, *grifo nosso*). Esta definição nos fornece um critério comparativo de razões distintas entre grandezas homogêneas. Para compararmos as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ poderíamos, a priori, considerar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, mas este argumento não é válido para a linguagem dos *Elementos*, pois para os gregos a razão $\frac{a}{b}$ não representava um número senão a comparação entre duas grandezas homogêneas. Segundo Roque (2012), podemos adaptar a definição 5 para nossa linguagem atual de maneira que, $\frac{a}{b} :: \frac{c}{d}$ (a está para b assim como c está para d) se, e somente se, para todos inteiros positivos m e n vale um dos casos:

- (i) se $ma < nb$ então $mc < nd$;
- (ii) se $ma = nb$ então $mc = nd$;
- (iii) se $ma > nb$ então $mc > nd$.

Observe que o caso (ii) só pode ocorrer se, por um lado, a e b e, por outro lado, c e d forem segmentos comensuráveis. Os casos (i) e (iii) ocorrem se, por um lado, a ou b e, por outro lado, c ou d forem segmentos incomensuráveis. Portanto, para que os segmentos a , b , c e d sejam proporcionais é necessário que, expandindo ou contraindo a e b de determinada quantidade, c e d sejam expandidos ou contraídos de igual quantidade. Assim como Euclides enuncia na definição 6 do livro V: “E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção.” (EUCLIDES, 2009, p. 205).

Na definição eudoxiana, a comparação das razões possui uma característica puramente geométrica e a homogeneidade de números e grandezas bem como suas razões só ocorrerá séculos à frente com o desenvolvimento dos números reais através dos matemáticos alemães Richard Dedekind (1831-1916) e Karl Weierstrass (1815-1897).

CAPÍTULO 2

REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS E ALGÉBRICAS DA RAZÃO ÁUREA

“A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro a Proporção Áurea. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa.”

Johannes Kepler

2.1 Euclides e a secção de um segmento em extrema e média razão

O Livro II de *Os Elementos* de Euclides é constituído por 14 proposições que tratam da chamada “álgebra geométrica” atribuída aos pitagóricos, que são construções geométricas que descrevem identidades algébricas. Mas, presume-se que a motivação de Euclides neste livro era de resolver problemas através da comparação de áreas, embora a solução de tais problemas sejam equivalentes à identidades algébricas.

Na proposição 11 do Livro II, Euclides resolve um problema que consiste em seccionar um segmento dado AB , de modo que o retângulo de dimensões AB e uma

2.1 Euclides e a secção de um segmento em extrema e média razão

das partes de AB tenha área igual a do quadrado construído sobre a outra parte de AB . Euclides enuncia, “*cortar a reta dada, de modo a o retângulo contido pela inteira e por um dos segmentos ser igual ao quadrado sobre o segmento restante.*” (EUCLIDES, 2009, p. 146, *grifo nosso*).

De acordo com a construção de Euclides em linguagem moderna, seja o quadrado $ABCD$ construído sobre o segmento dado AB de comprimento a e E o ponto médio de AC . Traçamos BE e sobre o prolongamento de AC determinamos o ponto F tal que $EF = BE$. Construímos o quadrado $FGHA$ de dimensões iguais a b e sobre o prolongamento de GH determinamos o ponto K sobre CD . Desta forma, os procedimentos geométricos descritos por Euclides determinam sobre o segmento AB o ponto H de modo que a área do retângulo $HBDK$ e do quadrado $FGHA$ sejam iguais, de outro modo, $a(a - b) = b^2$.

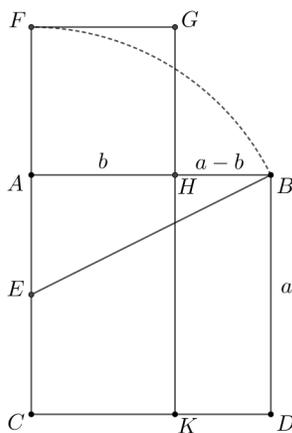


Figura 2.1: Figura usada por Euclides na determinação do ponto H de modo que o retângulo $HBDK$ tenha área igual a do quadrado $FGHA$. Adaptado de (EUCLIDES, 2009, p. 146)

A demonstração dada por Euclides, inicia-se mostrando que área do retângulo $CFGK$ acrescida da área do quadrado sobre $AE = EC$ é igual a área do quadrado sobre EF . Fato justificado pelo enunciado da proposição 6 do livro II:

caso uma linha reta cortada em duas, e seja adicionada a ela alguma reta sobre uma reta, o retângulo contido pela reta toda junto com a

adicionada e pela adicionada, com o quadrado sobre a metade, é igual ao quadrado sobre a composta tanto da metade quanto da adicionada. (EUCLIDES, 2009, p. 140).

Mas como $EF = EB$, o quadrado sobre EF possui área igual a do quadrado sobre EB . Portanto, a área do quadrado sobre EB é a soma das áreas do quadrado sobre AE e do retângulo $CFGK$. Mas, aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABE$ tem-se que a área do quadrado sobre EB é a soma das áreas dos quadrados sobre AE e AB . Logo, a área do quadrado sobre AB é igual a área do retângulo $CFGK$. Por fim, subtraindo-se a área comum do retângulo $AHKC$, obtém-se que o quadrado $AFGH$ e o retângulo $HBDK$ possuem áreas iguais, de outro modo, $b^2 = a(a - b)$.

Mais adiante, no livro VI, Euclides retoma tal demonstração na construção geométrica da secção de um segmento qualquer em extrema e média razão. No início do mesmo livro, na definição 3, Euclides descreve que “uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor.” (EUCLIDES, 2009, p. 231). Na proposição 30¹, Euclides descreve os argumentos geométricos para que a secção esteja em extrema e média razão.

Pela proposição 11 do livro II, sabemos que $AFGH$ e $HBDK$ possuem áreas iguais. Observe na figura 2.1 que $AFGH$ e $HBDK$ são figuras equiangulares e portanto possuem os lados, ao redor dos ângulos iguais, inversamente proporcionais. Assim, $\frac{HK}{GH} = \frac{AH}{HB}$. Mas, por um lado, $HK = AB$ e, por outro lado, $GH = AH$. Portanto, $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{HB}$, de outro modo, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b}$ onde b é a “média proporcional entre o segmento dado e a diferença entre ambos.” (GARBI, 2010, p. 64). Diz-se que o segmento AB está seccionado em extrema e média razão pelo ponto H .

¹“Cortar a reta finita dada em extrema e média razão.” (EULIDES, 2009, p. 263).

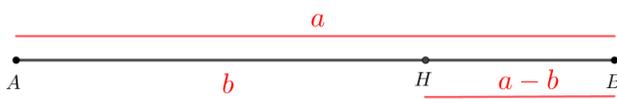


Figura 2.2: O ponto H secciona o segmento AB em extrema e média razão. (A autora)

Segundo Tahan (1973), a parte maior é uma *média* entre o segmento todo (a) e a parte menor (b); a razão é *extrema* porque não existe, no caso, outra solução da qual resulte a igualdade entre as razões segmentárias, ou seja, a razão entre o todo e a parte maior e a razão entre a parte maior e a parte menor. É, para o ponto H , uma posição extrema. Eis a origem da denominação extrema e média razão. Este ponto H que divide o segmento AB em extrema e média razão é chamado *ponto áureo* (ou *ponto de ouro*) do segmento AB . Como H é interno ao segmento AB , diz-se que H é o ponto áureo interno e, nesse caso, o maior segmento AH é chamado *segmento áureo interno* ou, apenas, *segmento áureo*.

Caso o ponto H seja sobre o prolongamento de AB dizemos que H secciona AB em partes subtrativas, ou seja, é o ponto áureo externo a AB . Neste caso, AH é o segmento áureo externo ao segmento AB .

2.2 Expressão algébrica da secção em extrema e média razão

Do problema de extrema e média razão decorre a equação algébrica do 2º grau $a(a - b) = b^2 \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0$ ao considerarmos a igualdade entre o produto dos meios e o produto dos extremos na proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b}$.

A equação, na variável a , possui duas raízes reais distintas iguais a $a = b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ e $a' = b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$, das quais a raiz negativa está associada ao ponto áureo externo ao segmento AB . E nosso principal objeto de estudo, será o ponto áureo interno ao segmento AB associado à raiz positiva da equação.

A divisão do segmento AB determinada pelo ponto áureo interno H foi chamada, pelo matemático alemão Martin Ohm (1792-1872) em 1835, de *Áurea*, e esta razão é tal que $\frac{a}{b} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. Note que tal razão é um número irracional², pois trata-se da metade do irracional $\sqrt{5}$ acrescido de uma unidade, o que faz da Razão Áurea um número irracional algébrico cuja expansão decimal infinita e não periódica é dada por $\frac{a}{b} = 1,61803398\dots$

Segundo Lívio (2009), na literatura matemática profissional, o símbolo habitual para a Razão Áurea é a letra grega tau (τ , do grego: *secção*). Mas, no início do século XX, o matemático americano Mark Barr (1871-1950) deu à Razão Áurea o nome φ (Fi), a primeira letra grega do nome do grande escultor grego Fídias (490-430 a.C.). O “Partenon de Atenas” e o “Zeus” no templo de Olímpia são os maiores feitos de Fídias.

Portanto, $\frac{a}{b} = 1,61803398\dots = \varphi$ é a Razão Áurea e $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ é chamada *Proporção Áurea* do segmento AB . Indicaremos a raiz negativa da equação por $\varphi' = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ cuja expansão decimal infinita não periódica é $\varphi' = -0,61803398\dots$

Note que razão obtida através da raiz negativa $\frac{a'}{b} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ é o conjugado da Razão Áurea, de outra forma, $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{1}{\varphi}$.

Neste contexto, sendo $AB = a$ e $AH = b$, o ponto H determina a Razão Áurea do segmento AB tal que $AB = \varphi AH$. Segundo Tahan (1973), feita a divisão áurea, AH é chamado *segmento áureo* e HB é o *complemento áureo* de AB .

Definição 2.1. *Seja AB um segmento de comprimento a e sobre AB um ponto H que determina o segmento AH de comprimento b . Dizemos que AH é o segmento áureo de AB se a razão entre o segmento todo a e a maior parte b é igual à razão entre a maior parte b e a menor parte $a - b$. De outro modo, $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{HB}$.*

²A irracionalidade de φ será demonstrada na seção 2.3.

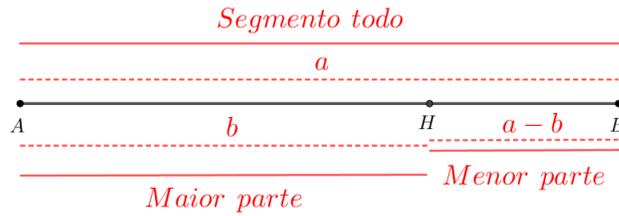


Figura 2.3: AH é o segmento áureo e HB é o complemento áureo de AB . Adaptado de (TAHAN, 1973, p. 232)

2.3 A irracionalidade de φ

Na seção 2.2, obtemos a solução algébrica do problema de extrema e média razão de um segmento qualquer AB de comprimento a , dada por $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \varphi$. Através de algumas manipulações algébricas, temos que:

$$\varphi = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \varphi = \frac{b+a-b}{b} \Leftrightarrow \varphi = \frac{b}{b} + \frac{a-b}{b} \Leftrightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Multiplicando ambos os membros da equação $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ por φ , temos que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Sabendo que todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$, provaremos a irracionalidade de φ .

Proposição 2.2. φ é irracional

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que φ é um número racional. Desta forma, $\varphi = \frac{a}{b}$. Substituindo $\varphi = \frac{a}{b}$ na equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 - ab}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a(a-b) = b^2$$

Temos que $(a-b) \in \mathbb{Z}$, então $a|b^2$. Logo, a e b possuem fator comum. Decorre que $\text{mdc}(a, b) \neq 1$. Portanto, φ é irracional.

□

2.4 Construção de um segmento áureo com régua e compasso

As construções aqui apresentadas foram embasadas no artigo de Lauro (2005).

Dado um segmento qualquer AB de comprimento a ,

1. Determinamos o ponto M sobre AB de maneira que $AM = MB$;
2. Traçamos uma reta r perpendicular ao segmento AB passando por B ;
3. Com centro em B e raio BM determinamos o ponto C sobre a reta r ;
4. Traçamos a semi-reta AC ;
5. Com centro em C traçamos uma circunferência de raio CB ;
6. Determinamos os pontos D e D' de intersecção entre a circunferência de raio CB e centro C e a semi-reta AC ;
7. Com centro em A e raio AD determinamos o ponto H sobre AB ;
8. Assim, AH é o segmento áureo interno de AB , ou seja, $AB = AH \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$;
9. Com centro em A e raio AD' determinamos o ponto H' sobre o prolongamento de AB ;
10. Assim, AH' é o segmento áureo externo de AB , ou seja, $AB = AH' \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

2.4 Construção de um segmento áureo com régua e compasso

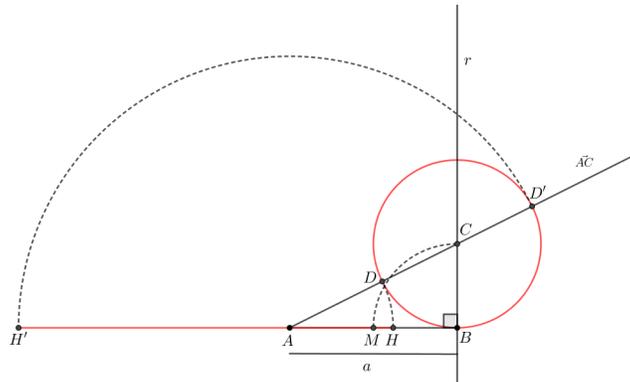


Figura 2.4: Determinação geométrica do segmento áureo. (A autora)

Com o objetivo de justificar a construção geométrica dos segmentos áureos interno e externo ao segmento AB , consideramos $AH = b$ e $HB = a - b$.

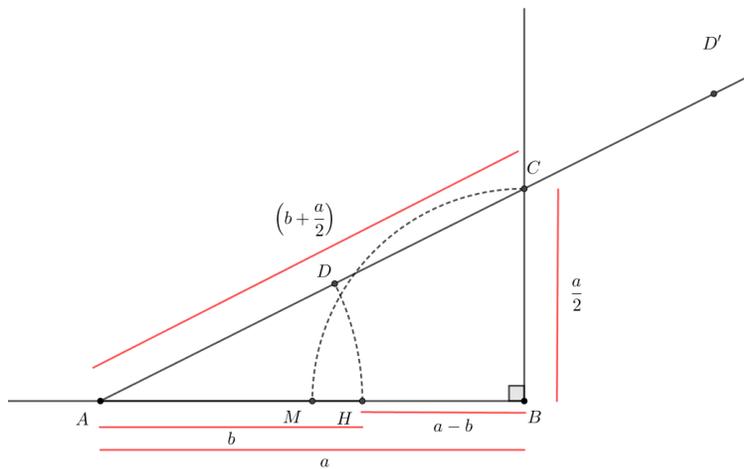


Figura 2.5: Justificativa da construção geométrica do segmento áureo. (A autora)

Como $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{HB}$, então

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Leftrightarrow a(a-b) = b^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + ab.$$

O termo $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ completa um quadrado perfeito ao lado direito da equação

$$a^2 = b^2 + ab$$

assim temos:

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + ab + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2$$

Decorre, geometricamente, o $\triangle ABC$ retângulo em B de hipotenusa $\left(b + \frac{a}{2}\right)$ e catetos a e $\frac{a}{2}$, conforme figura 2.5.

$$\text{Assim, } AC^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AC = a \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} AC = b + \frac{a}{2} &\Leftrightarrow b = AC - \frac{a}{2} \Leftrightarrow b = a \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} \Leftrightarrow \\ b = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) &\Leftrightarrow a = b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow AB = AH \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos, geometricamente, que $AH' = AD'$ e $CD' = CB = \frac{a}{2}$, então:

$$AH' = AC + CD' \Leftrightarrow AH' = b + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \Leftrightarrow AH' = b + a$$

Sendo $b = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$, então:

$$AH' = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + a \Leftrightarrow AH' = a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$AH' = AB \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow AB = AH' \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Portanto, $AB = \varphi.AH$ e $AB = \frac{1}{\varphi}.AH'$.

2.5 O retângulo áureo

Um retângulo qualquer $ABCD$ é denominado retângulo áureo (ou ainda, retângulo de ouro) se a razão entre as dimensões do maior lado e do menor é igual a φ , ou ainda, a razão entre as dimensões do menor lado e do maior é igual a $\frac{1}{\varphi}$. Obtemos um retângulo áureo à partir de traçados geométricos com régua e compasso através dos seguintes procedimentos:

1. Construimos um quadrado qualquer $ABCD$;
2. Determinamos o ponto médio M do lado AB ;
3. Traçamos um arco de circunferência com centro em M e raio MC , que determina no prolongamento do lado AB o ponto E ;
4. O segmento AE , assim determinado, é a base do retângulo áureo;
5. Obtemos a altura do retângulo ao traçarmos uma reta perpendicular ao segmento AE pelo ponto E ; que determina sobre o prolongamento do lado DC o ponto F ;
6. O retângulo $AEFD$ construído é áureo.

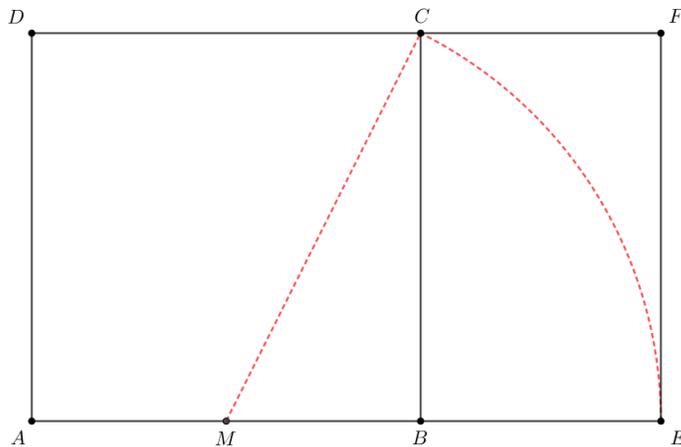


Figura 2.6: Construção geométrica do retângulo áureo. (A autora)

2.5 O retângulo áureo

Com o objetivo de justificar a construção geométrica do retângulo áureo, consideremos o quadrado $ABCD$ de dimensões iguais a a e o segmento BE igual a b .

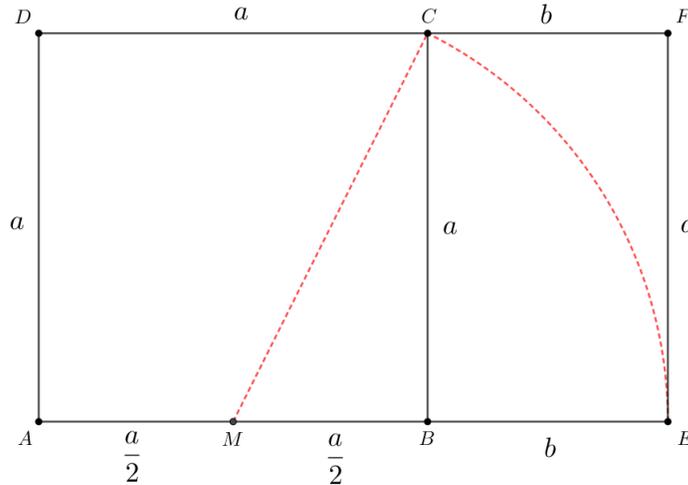


Figura 2.7: Justificativa da construção geométrica do retângulo áureo. (A autora)

Por construção, o $\triangle MBC$ é retângulo em B com catetos iguais a a e $\frac{a}{2}$, uma vez que, $AM = MB = \frac{a}{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 \Leftrightarrow MC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 \Leftrightarrow MC^2 = \frac{5a^2}{4} \Leftrightarrow MC = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Por construção, $MC = ME$. Logo,

$$AE = AM + ME \Leftrightarrow AE = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow AE = a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Portanto, temos:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

ou ainda,

$$\frac{AD}{AE} = \frac{a}{a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\varphi'$$

Portanto, o retângulo $AEFD$ é um retângulo áureo.

2.6 Propriedade iterativa do retângulo áureo

“[...] você pode não suspeitar, a menos que tenha alguma familiaridade com o retângulo áureo, que subtraindo-se dele um quadrado, sobra um resíduo que é outro retângulo áureo, e que este processo pode ser repetido indefinidamente até que se chegue a um “ponto retangular”, que possui situação única.”

H. E. Huntley

Outra propriedade interessante do retângulo áureo pode ser observada a partir de sua construção geométrica. Observe na figura 2.7 que o retângulo $BEFC$ também é áureo, uma vez que a razão entre suas dimensões $\frac{a}{b}$ é igual a φ . Portanto, sendo $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} = \varphi$ concluímos que os retângulos $AEFD$ e $BEFC$ são semelhantes. Decorre, de uma propriedade conhecida das proporções, que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{(a+b) - a}{a-b}$, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$. De outro modo, se seccionarmos o retângulo $BEFC$ de forma a obter o quadrado $CFGH$ de dimensões iguais a b e o retângulo $BEGH$ de dimensões iguais a b e $a-b$, o novo retângulo $BEGH$ obtido será áureo.

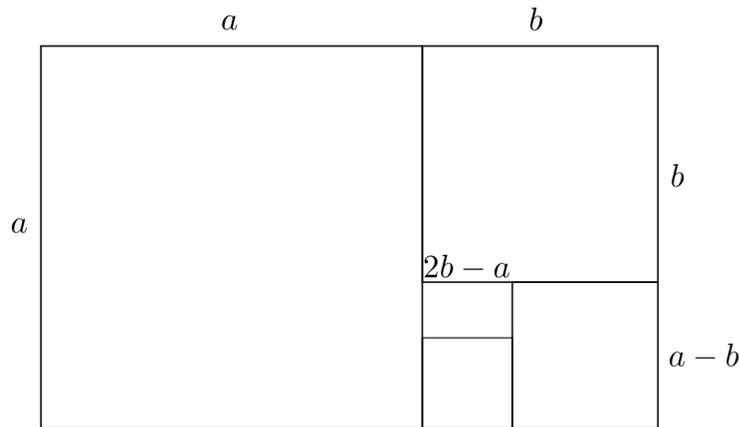


Figura 2.8: Propriedade iterativa do retângulo áureo. (A autora)

Pode-se usar o mesmo raciocínio para mostrar que os retângulos de lados b e $a - b$, $a - b$ e $2b - a$, etc., também são áureos, conforme figura 2.8. De outro modo, dados a e b números positivos tais que $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, obtemos a sequência

$$a + b, a, b, a - b, 2b - a, 2a - 3b, 5b - 3a, 5a - 8b, 13b - 8a, \dots \quad (2.6.1)$$

De modo geral, trata-se da sequência $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$. Em consequência, quaisquer dois termos consecutivos desta sequência correspondem às dimensões de um retângulo áureo. O que significa que “[...] o processo de retirar quadrados de retângulos áureos conduz a uma sequência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores e tendendo a zero.” (ÁVILA, 1985, p. 112). Decorre desta propriedade iterativa a proposição 2.3.

Proposição 2.3. *As dimensões de um retângulo áureo são grandezas incomensuráveis.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que as dimensões AB e AD de um retângulo áureo sejam comensuráveis. Assim, existe um submúltiplo comum α de AB e AD , ou seja, $AD = (a + b)\alpha$ e $AB = a\alpha$. O que implica que a e b são números inteiros e, em consequência, a sequência 2.6.1 tem todos os seus termos números

inteiros positivos. O que é um absurdo, uma vez que não existe sequência infinita e decrescente de números inteiros positivos. Portanto, as dimensões de um retângulo áureo são incomensuráveis.

□

2.7 O pentágono estrelado ou pentagrama

“Os pitagóricos [...] consideravam o dodecaedro digno de respeito especial. Estendendo-se os lados de uma de suas faces pentagonais até formar uma estrela, eles chegavam ao pentagrama ou triângulo triplo, que utilizavam como símbolo e emblema da Sociedade de Pitágoras. Por esta insígnia, reconheciam o membro associado.”

H. E. Huntley

O pentágono estrelado ou pentagrama, o qual simbolizava a irmandade pitagórica, é envolto por um misticismo que perdura por séculos. Segundo Contador (2007), na mitologia grega, os povos acreditavam que o Planeta Vênus, o mais brilhante depois do Sol e da Lua, que durante sua translação de 225 dias, descrevia no céu, a cada 40 anos, um pentágono perfeito, e este passou a representar o símbolo da beleza divina, da perfeição e do amor. Arqueólogos encontraram, em escavações recentes, escritos em artefatos babilônicos com o pentagrama que datam de 3000 a.C..

Na antiga Mesopotâmia, o pentagrama foi usado com inscrições reais, também foi usado como símbolo do poder imperial e entre os hebreus como símbolo da verdade inserido junto aos cinco livros do Pentateuco ou do velho testamento, atribuídos a Moisés. Os primeiros cristãos relacionaram o pentagrama às cinco chagas de Cristo e, desde então, até os tempos medievais, foi usado como um símbolo cristão. [...] O *Dia de Reis* ou a *Epifânia*, - data que se comemora a adoração por parte dos reis magos - à Jesus, assim como a missão da igreja de levar a verdade ou os

ensinamentos cristãos aos pagãos, tiveram como símbolo o pentagrama. (CONTADOR, 2007, p. 28).

No século XII, funda-se a *Ordem dos Cavaleiros Templários* com o objetivo de escoltar os peregrinos durante a caminhada em direção à Terra Santa com a intenção de recuperar documentos que afetariam as bases da igreja católica, bem como o Santo Graal³. Com isso, o papa Inocêncio II (1130-1143) concedeu aos Templários liberdade religiosa e política, o que os conduziu a riqueza e poder. Séculos mais tarde, não contente com a ascensão dos Templários, o papa Clemente V (1305-1314) e o rei Felipe IV tramaram um plano para destruírem os cavaleiros, aos quais o acusaram de práticas hereges e adoração ao demônio. Na sexta-feira do dia 13 de Outubro de 1307, o Grão Mestre dos Templários, Jacques DeMolay (1243-1314), foi preso e várias pessoas foram queimadas em praça pública sob acusação de heresias. Em 1312 o papa Clemente V aboliu a Ordem dos Cavaleiros Templários, e a história segue o percurso em direção ao período da inquisição que alastrou o terror em toda Europa e, em consequência, o pentagrama passou a ser considerado um símbolo pagão. Ao longo do tempo, o pentagrama foi adotado como símbolo representativo de algumas organizações como a Maçonaria⁴, a religião Wicca⁵ e pelo fundador da Igreja pagã, Anton La Vay (1930-1997), que utilizava o pentagrama invertido em seus cultos satânicos. O fato é que, segundo Huntley (1985), o pentagrama é a mais rica fonte de Razões Áureas.

2.7.1 O pentágono regular construído por Euclides

Existem maneiras distintas para se construir o pentágono regular e uma forma de obtê-lo facilmente é a partir de um decágono regular inscrito em uma circunferência

³“[...] cálice com o qual Jesus Cristo teria tomado vinho em sua última ceia com os apóstolos.” (CONTADOR, 2007, p. 30).

⁴“Sociedade onde homens denominam-se irmãos e cultuam a liberdade, a fraternidade e a igualdade. Seus princípios são a tolerância, a filantropia e a justiça e seu caráter secreto deve-se a perseguições, a intolerância e a falta de liberdade.” (CONTADOR, 2007, p. 37).

⁵“Religião pagã onde o pentagrama era desenhado nos altares dos rituais, fundada pelo britânico Gerald Gardner” (1884-1964). (CONTADOR, 2007, p. 37).

2.7 O pentágono estrelado ou pentagrama

de raio r . Este polígono de dez lados congruentes é composto por triângulos isósceles com vértice no centro da circunferência e cuja base é lado do decágono. Cada ângulo junto à base deste triângulo é o dobro do ângulo cujo vértice está no centro da circunferência. Assim, é imediato obter o pentágono regular unindo-se, dois a dois, os vértices do decágono conforme figura 2.9.

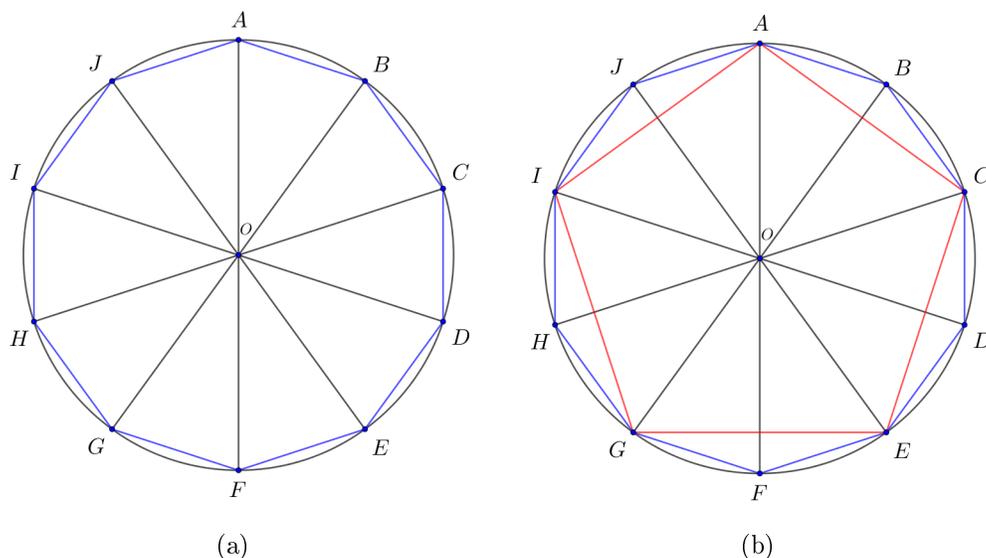


Figura 2.9: (a) Decágono regular inscrito em uma circunferência. (b) Pentágono regular obtido unindo-se, dois a dois, os vértices do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio r . (A autora)

Observe na figura 2.9 (a) que, por um lado, as medidas dos ângulos centrais do decágono regular \widehat{AOB} , \widehat{BOC} , \widehat{COD} , ..., \widehat{JOA} são iguais. Por outro lado, o ângulo \widehat{OAB} é igual ao ângulo \widehat{FAB} de modo que o ângulo inscrito \widehat{OAB} é igual à metade do arco \widehat{BDF} . Como $\widehat{BDF} = 4\widehat{AB}$ decorre que $\widehat{OAB} = 2\widehat{AOB}$. Portanto, se $\widehat{OAB} = 2\widehat{AOB}$ temos que, no triângulo isósceles OAB , cada ângulo junto à base é igual ao dobro do ângulo cujo vértice está sobre o centro da circunferência. Assim, para construirmos um decágono regular inscrito em uma circunferência de raio r , basta inscrevermos triângulos isósceles semelhantes ao triângulo AOB em que cada ângulo junto à base é igual ao dobro do ângulo restante conforme figura 2.10.

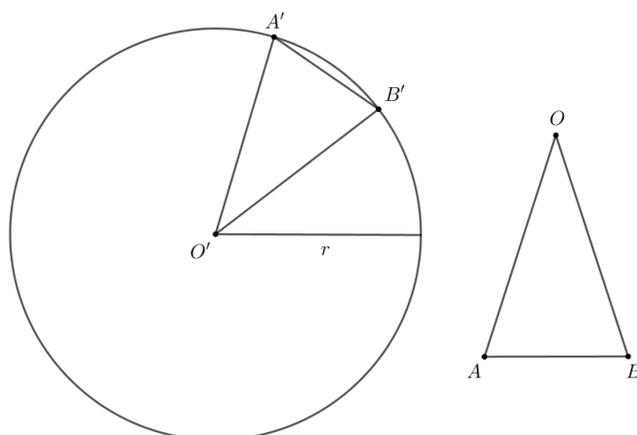


Figura 2.10: Construção do decágono inscrito em uma circunferência à partir do triângulo isósceles AOB . (A autora)

O triângulo isósceles com a propriedade descrita acima é a chave da demonstração dada por Euclides na construção do pentágono regular e, assim como em outros livros, o método utilizado por ele é o de equivalência de áreas. Euclides enuncia na proposição 11 do Livro IV: “*Inscrever, no círculo dado, um pentágono tanto equilátero quanto equiângulo.*”. (EUCLIDES, 2009, p. 196, *grifo nosso*). A demonstração de Euclides, da proposição enunciada acima, inicia-se considerando o triângulo isósceles cujo ângulo do vértice é igual a metade de cada ângulo junto à base, e sua construção é descrita na proposição 10 do Livro IV que enuncia: “*Construir um triângulo isósceles, tendo cada um dos ângulos junto à base o dobro do restante.*” (EUCLIDES, 2009, p. 195, *grifo nosso*). Note que Euclides constrói o triângulo isósceles com as propriedades dos triângulos observados no decágono regular. Para tanto, ele utiliza as proposições 6 do Livro II e a consequência desta proposição que se encontra na proposição 11 do mesmo livro, conforme descrevemos na seção 2.1, que descreve a divisão de um segmento em extrema e média razão pelo método da equivalência de áreas.

Deste modo, em uma circunferência de centro A e raio AB Euclides determina o ponto C de modo que a área do retângulo de dimensões AB e BC é igual a área do quadrado sobre AC , ou seja, o ponto C divide AB em extrema e média razão.

2.7 O pentágono estrelado ou pentagrama

Com centro em A e raio AB traça-se a circunferência BDE , em seguida traça-se o segmento BD que é igual ao segmento AC ; o segmento AD , CD e a circunferência ACD circunscrita ao triângulo ACD , conforme figura 2.11.

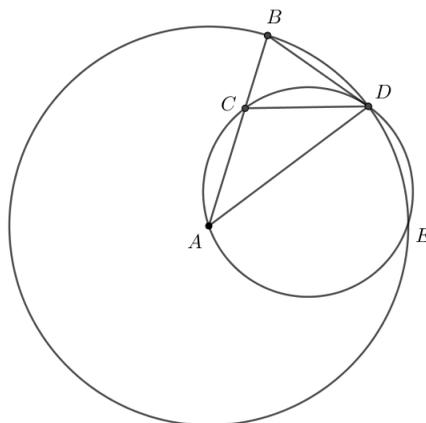


Figura 2.11: Construção de um triângulo isósceles em que cada ângulo junto à base é o dobro do ângulo restante. (A autora)

Euclides utiliza-se das proposições descritas a seguir para provar que o triângulo isósceles ABD da figura 2.11 goza da propriedade de que cada ângulo junto à base é o dobro do ângulo restante.

Proposição 36 do Livro III: “*Caso seja tomado algum ponto exterior a um círculo, e a partir dele, duas retas caiam sobre o círculo, e uma delas corte o círculo, e a outra seja tangente, o pela que corta toda e pela cortada exteriormente entre tanto o ponto quanto a circunferência convexa será igual ao quadrado sobre a tangente.*” (EUCLIDES, 2009, p. 183, *grifo nosso*). Esta proposição é utilizada por Euclides para mostrar que o ponto B exterior à circunferência ACD determina a reta BD tangente à circunferência e uma reta arbitrária que corta a circunferência nos pontos A e C de modo que a área do retângulo de dimensões AB e BC é igual a área do quadrado sobre $BD = AC$.

Proposição 37 do Livro III: “*Caso seja tomado algum ponto exterior a um círculo, e a partir do ponto, duas retas caiam sobre o círculo, e uma delas corte o círculo,*

2.7 O pentágono estrelado ou pentagrama

e a outra caia sobre, e o pela que corta toda e pela que é cortada exteriormente entre tanto o ponto quanto a circunferência convexa seja igual ao sobre a que cai sobre, a que cai sobre será tangente ao círculo.” (EUCLIDES, 2009, p. 184, grifo nosso)⁶. Esta proposição é utilizada para mostrar que BD é tangente ao círculo ACD no ponto D . Portanto, o lado BD do triângulo isósceles ABD obtido é lado do decágono regular inscrito na circunferência BDE .

Em sequência, Euclides considera o triângulo isósceles FGH em que cada ângulo junto à base é o dobro do ângulo restante e inscreve na circunferência $ABCDE$ um triângulo ABC equiângulo com o triângulo FGH .

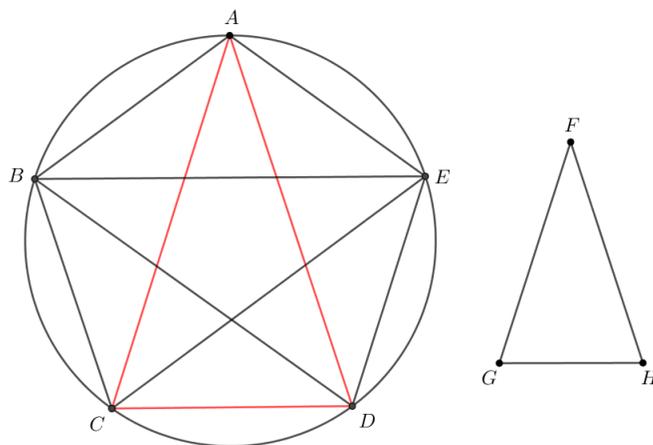


Figura 2.12: A construção do pentágono regular por Euclides. (A autora)

Assim, cada um dos ângulos \widehat{ACD} e \widehat{ADC} é igual ao dobro do ângulo \widehat{CAD} . Traça-se as bissetrizes CE e DE dos ângulos \widehat{ACD} e \widehat{ADC} , respectivamente; assim como os segmentos AB , BC , DE e EA obtendo o pentágono $ABCDE$. Como cada um dos ângulos \widehat{ACD} e \widehat{ADC} é o dobro de \widehat{CAD} e foram cortados ao meio pelas bissetrizes CE e DE tem-se que os ângulos \widehat{DAC} , \widehat{ACE} , \widehat{ECD} , \widehat{CDB} e \widehat{BDA} são iguais entre si. Mas, ângulos iguais situam-se sobre arcos iguais. Decorre que, os arcos \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} , \widehat{DE} e \widehat{EA} são iguais entre si e, portanto, os segmentos AB ,

⁶Para não nos delongarmos, apenas enunciamos as proposições 36 e 37 do Livro III usadas por Euclides, mas as demonstrações de tais proposições podem ser encontradas em (EUCLIDES, 2009, p. 183-184).

BC , CD , DE e EA são iguais entre si. Logo, o pentágono $ABCDE$ é equilátero.

Como o arco \widehat{AB} é igual ao arco \widehat{DE} adiciona-se a cada um deles o arco \widehat{BCD} comum; portanto, o arco \widehat{ABCD} é igual ao arco \widehat{EDCB} . Por um lado, tem-se o ângulo \widehat{AED} sobre o arco \widehat{ABCD} e, por outro lado, o ângulo \widehat{BAE} sobre o arco \widehat{EDCB} ; portanto, os ângulos \widehat{AED} e \widehat{BAE} são iguais. Analogamente, cada um dos ângulos \widehat{ABC} , \widehat{BCD} e \widehat{CDE} é igual a cada um dos ângulos \widehat{AED} e \widehat{BAE} . Logo, o pentágono $ABCDE$ é equiângulo. Portanto, fica inscrito, na circunferência dada, o pentágono regular $ABCDE$. E, traçando-se o segmento BE obtemos um pentagrama conforme figura 2.12.

O pentágono tanto equilátero quanto equiângulo construído por Euclides foi utilizado no Livro XIII de *Os Elementos* que descreve a construção, com régua e compasso, dos cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro e o dodecaedro. Destes cinco poliedros regulares, o dodecaedro possui doze faces descritas por pentágonos tanto equiláteros quanto equiângulos.

2.7.2 A Razão Áurea e o pentágono regular

Na proposição 8 do Livro XIII Euclides enuncia: “*Caso retas estendam-se sob dois ângulos consecutivos de um pentágono equilátero e equiângulo, cortam-se em extrema e média razão, e os segmentos maiores delas são iguais ao lado do pentágono.*” (EUCLIDES, 2009, p. 570, grifo nosso).

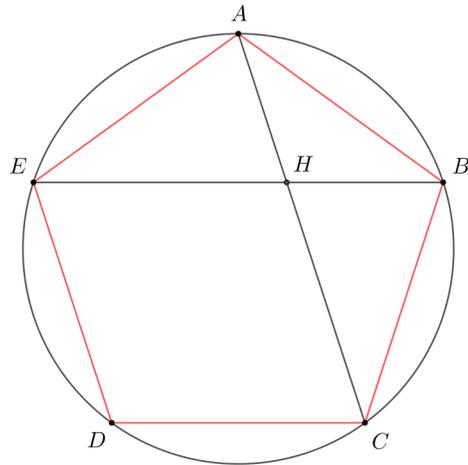


Figura 2.13: Em um pentágono regular, as diagonais determinadas sob dois ângulos consecutivos se interceptam em extrema e média razão. (A autora)

Em sua demonstração, Euclides considera inicialmente os segmentos AC e EB , estendidos sob dois ângulos consecutivos $E\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, que se interceptam no ponto H . Como os segmentos EA , AB são iguais aos segmentos AB , BC e os ângulos $E\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ são iguais, tem-se que as bases AC , BE dos triângulos EAB e ABC são iguais. Decorre que os triângulos EAB e ABC são isósceles e congruentes. Portanto, $B\hat{A}C$ sob \widehat{BC} é igual a $A\hat{B}E$ sob \widehat{AE} ; portanto, $A\hat{B}E$ sob \widehat{AE} é o dobro de $B\hat{A}H$ sob \widehat{BC} . Da mesma forma, $E\hat{A}C$ sob \widehat{EC} é o dobro de $B\hat{A}C$ sob \widehat{BC} , uma vez que \widehat{EDC} é o dobro de \widehat{CB} . Portanto $H\hat{A}E$ sob \widehat{EC} é igual a $A\hat{H}E$ sob \widehat{AE} ; assim, os segmentos HE , EA e AB são iguais. Como os segmentos AB e AE são iguais, então os ângulos $A\hat{B}E$ e $A\hat{E}B$ são iguais. Foi provado que $A\hat{B}E$ é igual a $B\hat{A}H$; portanto, $B\hat{E}A$ é igual a $B\hat{A}H$. O ângulo $A\hat{B}E$ é comum aos triângulos ABE e ABH ; portanto, $B\hat{A}E$ é igual a $A\hat{H}B$. Portanto, os triângulos ABE e ABH são equiângulos; decorre que EB está para BA , assim como AB está para BH . Como BA é igual a EH então BE está para EH assim como EH está para HB . Mas, como BE é maior do que EH ; portanto, EH é maior do que HB . Portanto, BE foi cortada em extrema e média razão pelo ponto H , e o segmento maior HE é igual ao lado do pentágono. Analogamente, AC foi cortado em extrema e média razão pelo

2.7 O pentágono estrelado ou pentagrama

ponto H , e o segmento maior CH é igual ao lado do pentágono.

Semelhantemente, considerando o triângulo isósceles ACD da figura 2.12, temos que a bissetriz BD divide o triângulo em dois triângulos isósceles CDF e AFD , conforme figura 2.14.

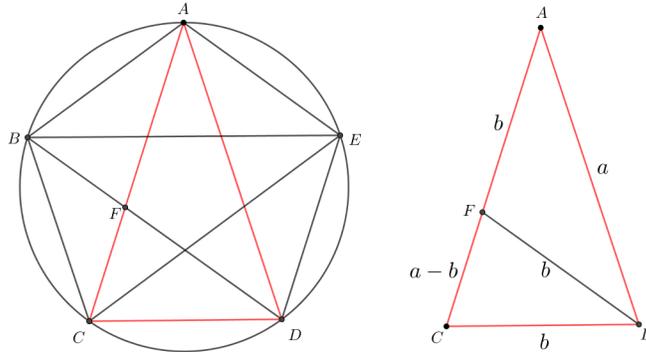


Figura 2.14: Triângulos isósceles CDF e AFD determinados pela bissetriz BD . (A autora)

Da figura 2.14 temos que os triângulos CDF e AFD são semelhantes, uma vez que possuem ângulos correspondentes congruentes. Logo, seus lados homólogos são proporcionais. Assim, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 \Leftrightarrow a = b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Analogamente, a bissetriz CE divide o triângulo CDF em dois triângulos isósceles de maneira que $\frac{c}{d} = \varphi$. Decorre que, ao traçarmos a bissetriz de um dos ângulos junto à base obtemos um novo triângulo isósceles em que a razão entre um dos lados congruentes e a base é igual a φ e, este processo pode ser repetido indefinidamente.

2.7 O pentágono estrelado ou pentagrama

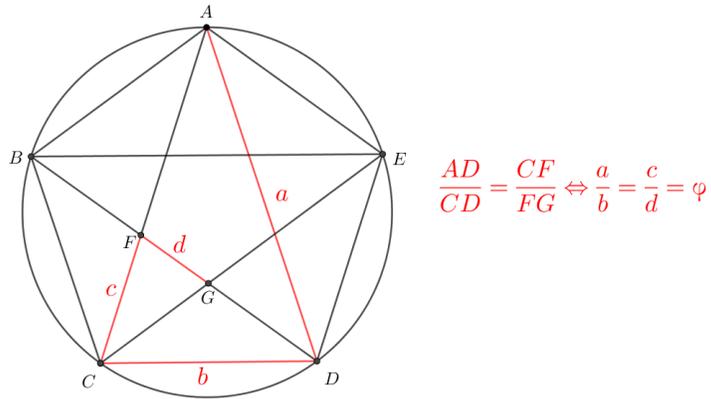


Figura 2.15: Sequência de triângulos isósceles determinados pela bissetriz de um dos ângulos junto à base. (A autora)

Note que as bissetrizes DB e CE consideradas acima são segmentos estendidos sob ângulos consecutivos $\hat{A}DC$ e $\hat{A}CD$ conforme descrito na proposição 8 do livro XIII de *Os Elementos* de Euclides. Observe ainda, na figura 2.16, que as diagonais do pentágono $ABCDE$ determinam um novo pentágono menor e, as diagonais deste, por sua vez, determinam outro pentágono regular ainda menor e este processo pode ser repetido indefinidamente.

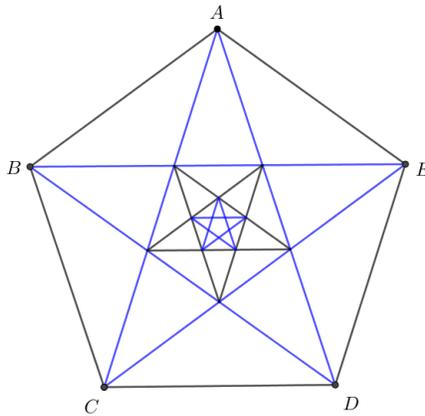


Figura 2.16: Sequência infinita de pentágonos regulares. (A autora)

2.7.3 A construção do pentágono regular a partir do raio da circunferência circunscrita

Nesta seção descrevemos os procedimentos geométricos habitualmente utilizados na construção do pentágono regular a partir do raio da circunferência circunscrita.

Seja λ uma circunferência de centro O e raio OD . Determine os diâmetros AB , CD e o ponto médio M do raio OD . Com centro em M e abertura AM determine o ponto E sobre o diâmetro CD . Trace o segmento AE que determina o lado do pentágono regular inscrito na circunferência λ . Com centro em A e abertura AE determine o ponto F ; com a mesma abertura e centro em F determine o ponto G ; analogamente, determine os pontos H e I . Obtemos, desta forma, o pentágono regular $AFGHI$. Traçando-se as diagonais do pentágono regular obtemos o pentagrama.

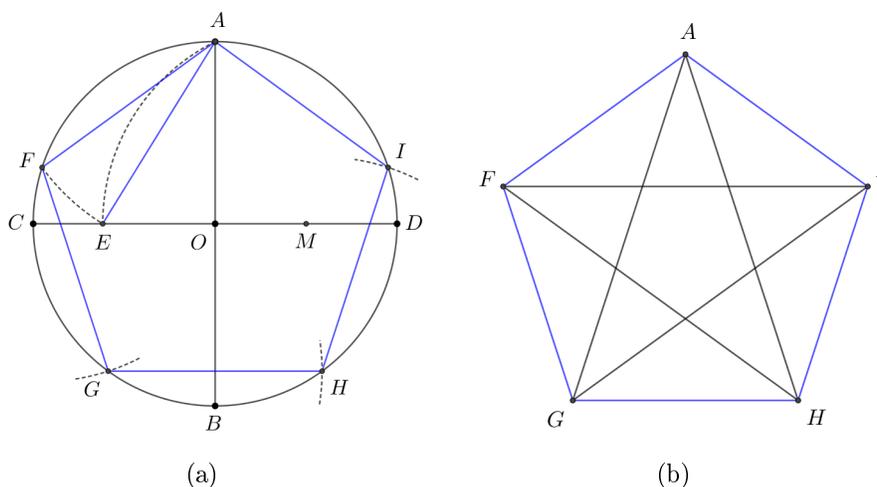


Figura 2.17: (a) Construção do pentágono regular inscrito na circunferência λ . (b) Pentagrama obtido pelas diagonais do pentágono regular. (A autora)

Na proposição 10 do Livro XIII que enuncia: “*Caso um pentágono seja inscrito em um círculo, o lado do pentágono serve para produzir tanto o do hexágono quanto o do decágono, dos inscritos no mesmo círculo*” (EUCLIDES, 2009, p. 572, grifo nosso), Euclides demonstra que os lados do decágono, pentágono e hexágono re-

gulares inscritos em uma mesma circunferência determinam o triângulo retângulo AOE obtido na construção descrita acima, conforme figura 2.17 (a), em que os segmentos OE , AE e AO são lados do decágono, pentágono e hexágono regulares, respectivamente.

2.8 O triângulo áureo

O triângulo isósceles, considerado por Euclides na construção do pentágono regular, é um triângulo “especial”, cada um de seus ângulos junto à base é igual a 72° e o ângulo restante igual a 36° . Como visto anteriormente, na subseção 2.7.2, a bissetriz de $\hat{A}BC$ que intercepta AC no ponto D determina um triângulo isósceles semelhante ao triângulo ABC inicial, de forma que, $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{CF} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$. De outra maneira, o ponto D divide AC em extrema e média razão. Por conseguinte, este triângulo ficou conhecido como *triângulo áureo*. Este processo pode ser repetido indefinidamente traçando-se a bissetriz de um dos ângulos junto à base de cada triângulo, obtendo-se triângulos cada vez menores que gozam da mesma propriedade do triângulo ABC junto à bissetriz BD .

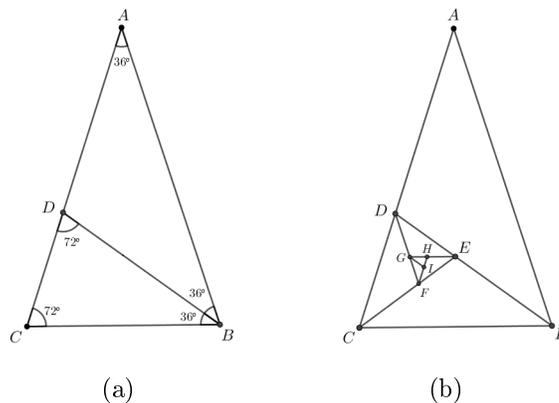


Figura 2.18: (a) Triângulo áureo. (b) Sequência infinita de triângulos áureos. (A autora)

2.9 Representações algébricas de φ

À partir de manipulações da solução algébrica de um segmento seccionado em extrema e média razão, podemos representar φ de maneiras distintas.

2.9.1 A expansão em frações contínuas do “mais irracional” dos irracionais

*“Como fração contínua escrito
É um, um, um, ..., indefinidamente
Em suma, o mais simples de seu tipo
(Isto não é um tanto surpreendente?)”*

Paul S. Bruckman apud Mário Lívio

À partir da equação $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ obtida em ??, podemos obter uma sequência infinita ao substituirmos sucessivamente φ por $1 + \frac{1}{\varphi}$, obtendo-se, desta forma, a expansão da Razão Áurea em frações contínuas.

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} \quad \text{de outro modo,} \quad \varphi = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$$

Deste modo, podemos obter aproximações racionais sucessivas de φ . Tais aproximações são comuns à todos os números irracionais, mas φ possui a mais simples das frações contínuas que é composta apenas por uns. Este fato, faz com que as aproximações sucessivas da fração contínua convirja muito lentamente para φ . “A Razão Áurea é, neste sentido, mais “difícil” de expressar como uma fração do que qualquer outro número irracional - é o “mais irracional” dos irracionais.” (LÍVIO, 2009, p. 103).

Proposição 2.4. *A expansão de φ por frações contínuas*

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Demonstração: Seja $\varphi(n)$ a sequência de frações contínuas que representa φ e n o número de parcelas. Então,

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1 \\ \varphi(2) &= 1 + \frac{1}{1} = 2 \\ \varphi(3) &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1,5 \\ \varphi(4) &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}} = 1,666\dots \\ &\vdots \\ \varphi(n) &= 1 + \frac{1}{\varphi(n-1)}\end{aligned}$$

Por hipótese, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = L$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n+1) = L$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi(n)} \right) = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(n)} = L \Rightarrow 1 + \frac{1}{L} = L.$$

Multiplicando os termos de $1 + \frac{1}{L} = L$ por L obtemos a equação $L^2 - L - 1 = 0$ cujas raízes são $\varphi = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ e $\varphi' = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$. Como $\varphi(n) \geq 1$ temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \geq 1$. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \varphi$.

□

2.9.2 A expressão definida por infinitos radicais

Seja a expressão $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$. Segundo Lívio (2009), há uma maneira, longa e trabalhosa, de determinar o valor numérico desta expressão calculando inicialmente $\sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{2}$, em seguida $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ e assim, sucessivamente, até se verificar a convergência da expressão para um determinado valor numérico. Mas, podemos calcular a expressão de uma maneira mais simples. Considere L como o valor numérico da expressão,

$$L = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$L^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

Note que:

$$L^2 = 1 + \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}_L$$

Portanto, temos a equação quadrática $L^2 = 1 + L$ cuja raiz positiva é a Razão Áurea. Segue que,

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

CAPÍTULO 3

AFIRMAÇÕES ASSOCIADAS À RAZÃO ÁUREA

“Para o matemático, dois e dois são quatro, apesar do lamento do amador por um três, ou do brado do crítico por um cinco.”

James McNeill Whistler apud Mário Lívio

Neste capítulo analisaremos as mais clássicas das afirmações associadas à Razão Áurea, dentre as quais serão apresentadas algumas controversas assim como, em alguns casos, a utilização deliberada da Razão Áurea.

3.1 Há controversas

Nas últimas décadas, algumas afirmações associadas à utilização descomedida da Razão Áurea tem sido questionadas por alguns pesquisadores. Questionamentos estes que se justificam diante da escassez de evidências históricas e rigor matemático. Em oposição, o que temos é a utilização de “malabarismo numérico” utilizado por alguns aficionados pela Razão Áurea. Diligentemente, o matemático britânico Keith Devlin¹, ressalta que “a questão aqui não é se você pode encontrar a propor-

¹“O Dr. Keith Devlin é diretor do *Stanford Mathematics Outreach Project* na *Graduate School of Education*, co-fundador e diretor executivo emérito do instituto *H-STAR* da universidade, co-

ção áurea em algum lugar. Se você olhar o bastante, você será capaz de encontrar qualquer número (razoável) em quase qualquer lugar. A questão é se há mais do que a simples numerologia.” (DEVLIN, 2004, documento eletrônico). Afinal, “estritamente falando, é impossível que qualquer coisa do mundo real caia na proporção áurea, porque é um número irracional” Keith Devlin (2007, documento eletrônico *apud* BROWNLEE, 2015, documento eletrônico), tudo que encontraremos são valores que flutuam em torno da Razão Áurea. Antes, contudo faça a pergunta:

Existe uma boa explicação científica para mostrar porque a razão áurea aparece? Há provas definitivas de que, por exemplo, um determinado artista fez uso deliberado da proporção áurea em seu trabalho? Se não, tudo que você tem é uma crença sem fundamento. (DEVLIN, 2004, documento eletrônico).

Precisamos de critérios muito bem fundamentados, para não cometer o erro de “*encaixar*” a Razão Áurea em lugares dos quais desejamos muito “encontrá-la”. O matemático e cientista da computação, atuante na Universidade do Maine, George Markowsky, em seu artigo *Equívocos sobre a Razão Áurea*² observa que,

A proporção áurea capturou a imaginação popular e é discutida em muitos livros e artigos. Geralmente, suas propriedades matemáticas são enunciadas corretamente, mas muito do que é apresentado sobre ele em artes, arquitetura e estética é falso ou seriamente enganador. Infelizmente, estas afirmações sobre o número de ouro alcançaram o status de senso comum e são amplamente repetidas. Mesmo livros escolares fazem afirmações incorretas sobre o número de ouro. Seria necessário um livro inteiro para documentar todos os equívocos sobre o número de ouro, muitos dos quais são simplesmente repetições dos mesmos erros por diferentes autores. (MARKOWSKY, 1992, p. 2, *tradução nossa*).

Desta forma, analisaremos, neste capítulo, as mais clássicas afirmações acerca da utilização da Razão Áurea na arte, na arquitetura e nas proporções de simetria

fundador da rede de pesquisa em *Stanford mediaX* e senior pesquisador emérito da *CSLI* (*Stanford University*, documento eletrônico), disponível em: <https://web.stanford.edu/~kdevlin/>.

²*Misconceptions about the Golden Ratio* publicado no *The College Mathematics Journal* em 1992.

do corpo humano a fim de distingui-las entre teorias fundamentadas histórica e cientificamente daquelas que são apenas crenças sem fundamentos científicos.

3.1.1 A Proporção Divina de Luca Pacioli e a Arte de Leonardo Da Vinci

“O Renascimento produziu uma importante mudança de direção na história da Razão Áurea. A partir de então, esse conceito deixou de ficar restrito à matemática. Agora, a Razão Áurea encontrava seu caminho nas explicações dos fenômenos naturais e nas artes.”

Mário Lívio

O Renascimento foi um movimento artístico e cultural responsável por conceber talentosos e influentes pintores como Leonardo da Vinci (1452-1519), que também favoreceu a matemática com importantes contribuições. Em 1482, o duque de Milão, Ludovico Sforza (1452-1508) com o objetivo de tornar a corte um lugar para estudiosos e artistas, convidou Da Vinci, o qual demonstrava interesse em geometria e suas aplicações em mecânica, para exercer a função de pintor e engenheiro. Em 1496, ao que se presume, Da Vinci incentivou o duque à convidar o frade franciscano Luca Pacioli (1445-1517), um promissor na matemática, para ser professor da corte com quem Da Vinci aprendeu mais sobre geometria.

Pacioli foi um grande admirador da Razão Áurea, assunto do qual dedicou seus estudos e, durante sua estadia em Milão, concluiu seu tratado de três volumes, publicado em 1509, *A Proporção Divina*³. No primeiro volume, Pacioli relaciona as propriedades da Razão Áurea com características divinas elencando cinco razões pelas quais fora conduzido a classificá-la como *Divina*. Inicialmente Pacioli compara a Razão Áurea que “é uma só e não mais” (1509 *apud* LÍVIO, 2009, p. 155) com a supremacia de Deus. Posteriormente, compara o fato de a definição geométrica

³*Divina Proportione.*

da Razão Áurea envolver apenas três segmentos com “a existência da Santíssima Trindade, do Pai, do Filho e do Espírito Santo” (LÍVIO, 2009, p. 155). Da mesma forma, sua irracionalidade pode ser comparada a impossibilidade de compreendermos Deus, pois “sempre permanecerá oculta e secreta” (1509 *apud* LÍVIO, 2009, p. 155). Prossegue afirmando que “seu valor é sempre o mesmo e não depende do comprimento da linha sendo dividida” (LÍVIO, 2009, p. 155) e tal característica é equiparada a onipresença e invariabilidade de Deus. Conclui, afirmando que “Deus conferiu todo o cosmo através da quinta essência, representado pelo dodecaedro, a Razão Áurea conferiu existência ao dodecaedro.” (LÍVIO, 2009, p. 155-156). No segundo volume, Pacioli fala sobre a aplicação da proporção na arquitetura e estrutura do corpo humano. A principal base de Pacioli foi o trabalho do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (70-25 a.C.) e o famoso *Homem Vitruviano* que, segundo Lívio (2009), representa o elo da essência orgânica e geométrica da beleza. O terceiro volume trata-se de uma tradução do latim de *Cinco sólidos regulares*, um trabalho do pintor italiano renascentista, Piero della Francesca (c.1412-1492).

As sessenta ilustrações contidas no tratado foram feitas por Da Vinci, e mesmo após a conclusão da obra, Da Vinci e Pacioli mantiveram um período de amizade. O livro de Pacioli foi o primeiro dedicado à Razão Áurea, o qual teve grande influência no percurso da história desta razão. Em consequência ao trabalho desenvolvido por Pacioli, cujas ilustrações são de Da Vinci, muitas afirmações associadas à utilização da Razão Áurea por Da Vinci em suas mais famosas pinturas foram feitas e, com grande frequência, são ainda difundidas. Neste contexto, analisaremos, na subseção 3.1.2, algumas dessas obras de Da Vinci.

3.1.2 Uma breve análise das mais famosas obras de Leonardo Da Vinci

São Jerônimo

São Jerônimo (Figura 3.1) é uma obra inacabada de Leonardo Da Vinci, que data de 1483, e atualmente faz parte da coleção de obras no museu do Vaticano. Frequentemente, esta obra é associada a um retângulo áureo em volta de São Jerônimo. Nitidamente, o retângulo áureo sobreposto ao quadro deixa de fora, quase que completamente, seu braço direito. Além disso, “[...] a afirmação feita em alguns livros (por exemplo, em David Bergamini e os editores da *Life Magazine’s Mathematics*) de que “um Retângulo Áureo se encaixa tão bem em volta de São Jerônimo” exige um excesso de imaginação.” (LÍVIO, 2009, p. 189).

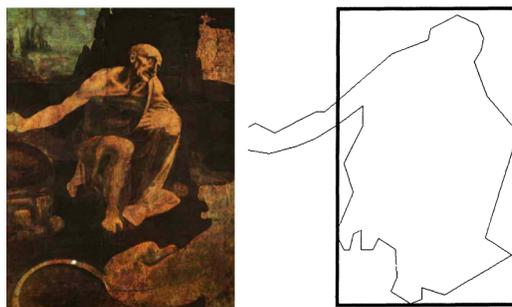


Figura 3.1: *São Jerônimo* de Leonardo Da Vinci. (MARKOWSKY, 1992, p. 11)

Na ausência de evidências históricas, a sobreposição do retângulo áureo ao quadro é o único argumento utilizado para justificar a afirmação de que Da Vinci utilizou a Razão Áurea na obra. Outro fator importante que deveria ser considerado é a data de produção da obra que antecede a estadia de Pacioli em Milão, onde Da Vinci aprendeu mais sobre geometria com o autor de *A Proporção Divina*.

Uma cabeça de ancião

Uma cabeça de ancião (Figura 3.2) é uma obra de Leonardo Da Vinci desenhada

à lápis por volta de 1490. Da Vinci retrata um homem de idade mais avançada, provavelmente um auto-retrato, no qual fora sobreposto um quadrado subdividido em retângulos.

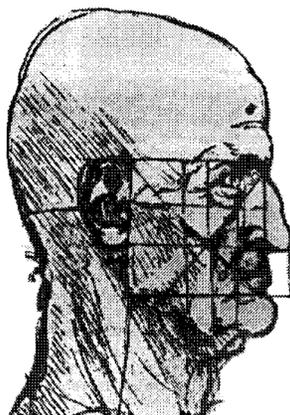


Figura 3.2: Uma cabeça de ancião de Leonardo Da Vinci. (MARKOWSKY, 1992, p. 10)

“[...] Há a alegação de que Leonardo Da Vinci acreditava que a Proporção Áurea é a razão entre a altura e a largura de um rosto humano “perfeito.” (DEVLIN, 2004, documento eletrônico) e que haveria utilizado retângulos que se “aproximam” de retângulos áureos. Entretanto, Markowsky (1992) argumenta que os retângulos são grosseiramente desenhados de tal modo que não possuem ângulos retos, o que torna difícil compreender a afirmação de que alguns destes retângulos se “aproximam” de retângulos áureos. Diante da dificuldade de se chegar a uma conclusão definitiva, Lívio (2009) declara que não podemos ter certeza, mas o retângulo ao meio, à esquerda, por exemplo, se aproxima de um retângulo áureo. Considera, portanto, que esta obra é, provavelmente, a que mais se aproxima da veracidade na afirmação de que Da Vinci utilizou retângulos áureos em sua arte.

A Mona Lisa

A *Mona Lisa* (Figura 3.3) é a mais famosa obra de Leonardo Da Vinci, que a desenvolveu entre os anos de 1503 e 1506. Trata-se de uma pintura em óleo sobre

3.1 Há controversas

madeira de álamo cujas dimensões são 77 cm x 53 cm e atualmente faz parte da coleção de obras expostas no Museu do Louvre, em Paris.



Figura 3.3: *A Mona Lisa*. (Enciclopédia Brasileira de Artes)

Com grande frequência, esta obra de Da Vinci é associada à Razão Áurea, mas esta utilização é muito discutível. Uma rápida busca no *Google* nos leva a inúmeras referências que relacionam a obra *A Mona Lisa* à Razão Áurea, sem falar nas diversas imagens do quadro em que são sobrepostos retângulos áureos em posições que variam de acordo com a referência. Analise a figura 3.4 com um olhar mais atento aos locais distintos em que estas figuras são sobrepostas ao quadro e perceberá que não há critérios pré-estabelecidos fundamentados que justifiquem a “escolha” dos pontos que determinam a posição destas figuras, o que coloca em xeque a veracidade de tais estudos.

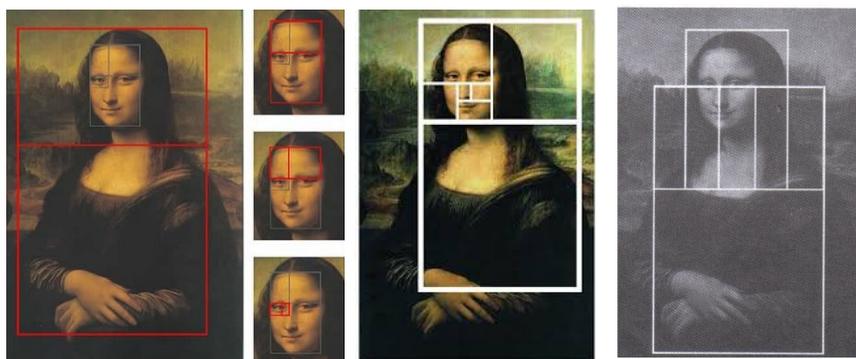


Figura 3.4: Sobreposições de retângulos áureos na obra *A Mona Lisa*. (*Google Imagens*)

Em relação a afirmação acerca da utilização da Razão Áurea na obra *A Mona Lisa*, Lívio (2009) comenta:

Ela foi tema de tantos livros de especulações contraditórias de estudiosos e populares que é praticamente impossível se chegar a qualquer conclusão inequívoca. E supõe-se que a Razão Áurea deveria ser encontrada nas dimensões de um retângulo em torno do rosto da Mona Lisa. Na falta de qualquer indicação clara (e documentada) do lugar exato onde esse retângulo deveria ser desenhado, essa ideia representa apenas outra oportunidade para malabarismos numéricos. (LÍVIO, 2009, p. 187).

“Isto significa que também é possível considerar outros retângulos, com outras proporções, associados ao quadro.” (TEIXEIRA, 2013, p. 8). Ao que parece, estamos diante de uma prestidigitação matemática visto que, além de não haver evidências históricas, a simples sobreposição de retângulos na obra não é suficiente para sustentar a afirmativa de que Da Vinci utilizou a Razão Áurea em *A Mona Lisa*.

O Homem Vitruviano

“É verdade que vários artistas flertaram com φ , mas novamente devemos ser cuidadosos para que consigamos separar fato de ficção. As tão propagadas afirmações de que Leonardo da Vinci [...] utilizou φ em sua famosa ilustração conhecida como *Homem Vitruviano* parecem ser infundadas.”

Keith Devlin

O *Homem Vitruviano* é um desenho feito à lápis e tinta sobre papel, uma das ilustrações feitas por Da Vinci no segundo livro do tratado de Pacioli. O desenho foi inspirado no conceito de Vitruvius:

... no corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se um homem for colocado deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e de seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito a partir desse ponto. E assim como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça e depois aplicarmos essa medida dos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas. (LÍVIO, 2009, p. 157).

Em analogia ao desenho, segundo Boyer (1974), Pacioli trata das proporções que podem ser encontradas no corpo humano. Em consequência, encontramos na literatura afirmações da Razão Áurea como um cânone de Pacioli para as proporções humanas e artísticas, bem como afirmações de que o *Homem Vitruviano* é uma pintura fundamentada na Razão Áurea e seria portanto um modelo ideal de beleza para o ser humano. Em oposição, o matemático canadense Roger Herz-Fischler afirma que “Pacioli “defendeu um sistema vitruviano clássico, que é um sistema baseado em proporções simples”, e não defendeu usar a razão áurea para a pintura.” (MARKOWSKY, 1992, p. 11, *tradução nossa*). As razões racionais simples consideradas por Pacioli, baseado na proposta vitruviana, trata-se da razão entre dois inteiros $\frac{8}{5} = 1,6$.

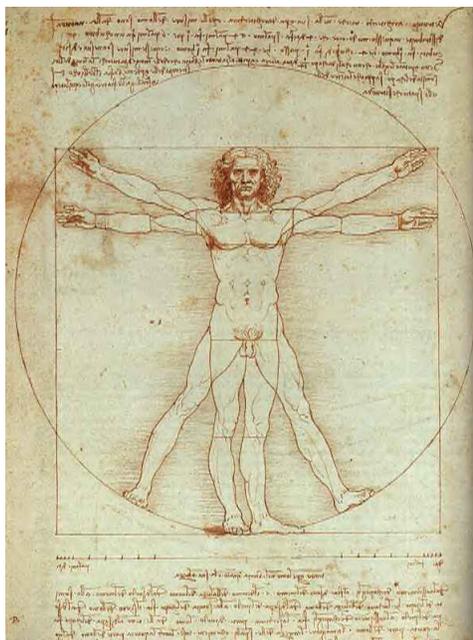


Figura 3.5: *O Homem Vitruviano*. (SIMANEK, 2015, documento eletrônico)

A razão umbigo/altura nesta imagem é 0,604, um pouco menor do que $\frac{1}{\phi} \cong 0,618$. Da Vinci escreveu um texto que acompanha a imagem, mas ele nada diz sobre essa relação, nem sobre a distância do umbigo até os pés. O texto não contém nenhuma menção de ϕ . Não há nenhuma sugestão na imagem de que Leonardo estava fazendo algo mais profundo do que relacionar o homem a um círculo e um quadrado [...]. Se Da Vinci quisesse incorporar ϕ na imagem, ele poderia facilmente ter mudado um pouco a posição do umbigo. O fato de que ele não fez isso sugere que ele não viu nenhum motivo para isso. (SIMANEK, 2015, documento eletrônico).

Segundo Boyer (1974), para Fischler a falácia da Razão Áurea como fator determinante para Pacioli nas proporções é devida aos matemáticos franceses Jean Etienne Montucla e Jérôme de Lalande em uma afirmação feita no livro *História da Matemática*, publicado em 1799. Diante disto, Huntley (1985) expressa sua indignação:

É uma pena que a divisão áurea tenha atraído a entusiástica atenção dos excêntricos. Um deles mediu as alturas de 65 mulheres e comparou os resultados com as alturas de seus respectivos umbigos, tendo obtido a

média de 1,618. Mas, quando este entusiasta acrescenta a este absurdo a afirmação de que o valor que se aceita para π (3,14159...) está incorreto e que deveria ser $\frac{6\phi^2}{5} = 3,141608...$ reconhecemos o tipo com quem estamos lidando! (HUNTLEY, 1985, p. 68).

Muito provavelmente o excêntrico, ao qual Huntley (1985) se refere, seja o psicólogo alemão aposentado Adolph Zeising (1810-1876), autor dos livros *A nova teoria das proporções no corpo humano, desenvolvida a partir de uma lei morfológica básica que permaneceu até então desconhecida, e que permeia toda a natureza e arte, acompanhada de um resumo completo dos sistemas vigentes* publicado em 1854 e *A seção áurea*⁴ publicado em 1884, quando já era falecido.

Segundo Brownlee (2015), para Zeising as proporções do corpo humano eram baseadas na Razão Áurea, ele a considerava uma lei universal para descrever a “beleza e perfeição nos domínios da natureza e da arte [...] que permeia, como ideal espiritual supremo, todas as estruturas, formas e proporções, sejam elas cósmicas ou individuais, orgânico ou inorgânico, acústico ou óptico.” Adolph Zeising (*apud* BROWNLEE, 2015, documento eletrônico). Zeising afirmou em seu livro que a razão entre a altura dos pés até o umbigo e a altura total de uma pessoa era igual a φ . Entretanto, “ao medir algo tão complexo como o corpo humano, é fácil chegar a exemplos de relações próximas de 1,6.” Keith Devlin (2007 *apud* BROWNLEE, 2015, documento eletrônico). “Não há nada especial sobre o 1,6 [...]. Se você passar meia hora fazendo medições de várias partes do corpo e tabulando os resultados, encontrará qualquer número cuja proporção seja próxima de 1,6 ou 1,5, ou o que você quiser.” (DEVLIN, 2004, documento eletrônico). Entretanto, Zeising acrescenta que para obter a mesma proporção basta dividir a altura do seu rosto por sua largura, tal afirmação é feita sob a alegação de que quanto mais próxima a razão estiver de φ , mais bela a pessoa será.

Para Devlin (2015), a ideia da existência de uma relação entre Razão Áurea e

⁴Em alemão: *Der Goldne Schnitt*.

estética, deve-se a duas pessoas. A primeira trata-se de Luca Pacioli que foi mal interpretado ao defender o sistema vitruviano baseado em proporções de razões racionais. A segunda pessoa é Zeising, “ele é o cara que você realmente quer queimar na fogueira pela reputação da proporção áurea.”, declara Devlin (2015), acompanhado de um riso, à revista americana *Fast Company*⁵. As ideias de Zeising criaram raízes tão profundas que mesmo diante de diversas evidências que as refutam, elas se tornaram extremamente populares e, como Devlin titula um de seus artigos, este é o mito que não irá embora.

3.1.3 A Grande Pirâmide de Gizé e a Razão Áurea: um conflito de teorias

“Então, rolem os dados e escolham sua própria teoria.”

R.S. Beard apud Mário Lívio

A Grande Pirâmide compõe a trilogia das Pirâmides de Gizé construída por volta de 2500 a.C. no Egito Antigo, sua edificação foi uma determinação do faraó Quéops que almejava abrigar seu sarcófago e toda sua riqueza na esperança de que a levaria para uma outra existência após a morte. A estrutura da Grande Pirâmide revela a formidável precisão dos egípcios nas observações astronômicas ao direcioná-la para o Norte, nela há cerca de 20 milhões de toneladas em pedra calcária empilhadas por cerca de 10 mil trabalhadores egípcios durante um período de, aproximadamente, 20 anos. Sua construção deu origem a muitas especulações na tentativa de compreender como os trabalhadores egípcios conseguiram suspender pedras que pesavam cerca de três toneladas, este tornou-se então o lado oculto da piramidologia⁶ e tem sido assunto de interesse do homem durante séculos.

⁵*Fast Company* é uma revista americana cujo foco é tecnologia, negócios e *design*.

⁶É o termo usado para referir-se ao estudo das pirâmides.



Figura 3.6: As Pirâmides de Gizé. (*Google Imagens*)

Em 1859, o editor inglês, John Taylor publicou o livro *A grande pirâmide: Por que foi construída e quem a construiu?* no qual concluiu que a Grande Pirâmide fora construída por intervenção divina e que a unidade de medida utilizada era o cúbito bíblico (aproximadamente 50 cm), a mesma provavelmente utilizada na construção da Arca de Noé e no Templo do rei Salomão. Em 1860, atraído por tal teoria, o astrônomo real da Escócia Charles Piazzi Smyth (1819-1900) publicou o livro *Nossa herança na grande pirâmide*, parte da motivação de Smyth deve-se à sua oposição pela introdução do sistema métrico inglês. Taylor e Smyth acreditavam que a construção da Grande Pirâmide era baseada na essência do número 5 e assim o buscavam obsessivamente na pirâmide. Convencido de que esta obsessão da essência do número 5 na Grande Pirâmide não passava de um absurdo, o escritor teísta Martin Gardner, publicou, em 1952, o livro *Modismos e falácias em nome da ciência* onde escreve que o historiador grego “Heródoto afirma que a Pirâmide foi construída de forma que a área de cada face fosse igual à área de um quadrado cujo lado fosse igual à altura da Pirâmide.” (LÍVIO, 2009, p. 71). Gardner comenta que, sendo esta afirmação verdadeira, a Razão Áurea teria sido de fato utilizada no projeto arquitetônico da Grande Pirâmide. Para Lívio (2009), este é o anúncio mais dramático com relação à Grande Pirâmide no contexto da Razão Áurea, e a mesma história é essencialmente repetida pelos matemáticos Herbert Westren Turnbull e

David M. Burton.

De acordo com a citação de Gardner, a declaração de Heródoto implica que $h^2 = s.a$, o que equivale a afirmativa de que a razão entre a altura da face triangular da pirâmide e metade da base é igual a Razão Áurea. De fato, considerando-se o esboço da Grande Pirâmide na figura 3.7 podemos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AOT , de modo que $s^2 = h^2 + a^2$. Como $h^2 = s.a$, temos que $s^2 = s.a + a^2$. Dividindo ambos os membros da equação por a^2 decorre que, $\left(\frac{s}{a}\right)^2 = \left(\frac{s}{a}\right) + 1$. Tomando $\frac{s}{a} = x$ obtemos a equação $x^2 - x - 1 = 0$ cuja raiz positiva é igual a Razão Áurea. Em consequência, $\frac{s}{a} = \varphi$.

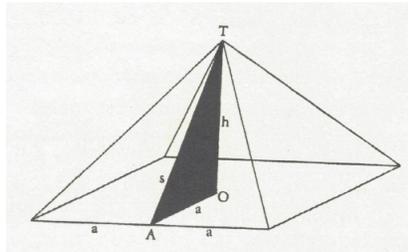


Figura 3.7: Esboço da Grande Pirâmide. (LÍVIO, 2009, p. 72)

A base da Grande Pirâmide não é de fato um quadrado perfeito, já que os comprimentos dos lados variam de 755,43 pés a 756,08 pés. A média dos comprimentos é $2a = 755,79$ pés. A altura da pirâmide é $h = 481,4$ pés. Desses valores, descobrimos (usando o Teorema de Pitágoras) que a altura s do lado triangular é igual a 612,01 pés. Assim, temos que $\frac{s}{a} = \frac{612,01}{377,90} = 1,62$, que é extremamente próximo (diferença de menos de 0,1%) da Razão Áurea. Portanto, essa evidência, aparentemente, significaria que os antigos egípcios realmente conheciam a Razão Áurea, pois não só esse número aparece na razão das dimensões da Grande Pirâmide, como sua presença parece ter suporte na documentação histórica das intenções de seus projetistas, na forma da afirmação de Heródoto. (LÍVIO, 2009, p. 73).

Parece-nos impressionante, mas será mesmo verdade? Segundo Markowsky (1992), Fischler defende que a interpretação de Heródoto não é legítima. Em busca de resposta Markowsky (1992), não havendo como contestar as dimensões da Grande

Pirâmide, uma vez que em todas as suas fontes de pesquisa as dimensões fornecidas estão dentro de 1% dos valores citados acima por Lívio (2009), decidiu então averiguar as traduções do livro *História* escrito por Heródoto a fim de encontrar a citação que sustentava a teoria de que os egípcios utilizaram a Razão Áurea na construção da pirâmide, uma vez que Gardner, Turnbull e Burton fazem a citação sem especificarem a localização desta passagem no livro de Heródoto. Nas traduções de George Rawlinson e Aubrey de Sélincourt, Markowsky encontrou apenas um trecho que se referia as dimensões da Grande Pirâmide em que Rawlinson, de forma similar à Sélincourt, a traduz no parágrafo 124 do livro II, conforme a seguir:

A Pirâmide tinha vinte anos de construção. É um quadrado, oitocentos pés cada lado, e a altura a mesma, construída inteiramente de pedras polidas colocadas juntas com o máximo cuidado. As pedras da qual foi composta, tem não menos que trinta pés em comprimento. (MARKOWSKY, 1992, p. 7, *tradução nossa*).

A figura 3.8 exibe o texto original em grego e uma tradução, em inglês, palavra por palavra, na qual o texto entre colchetes nos fornece uma leitura alternativa da palavra que o antecede.

τῆ δὲ πυραμίδι αὐτῇ χρόνον γενέσθαι εἴκοσι
 ἔτεα ποιευμένη, τῆς ἐστὶ πανταχῇ μέτωπον ἑκαστον ὀκτῶ
 πλέθρα ἐούσης τετραγώνου καὶ ὕψος ἴσον, λίθου δὲ ξέστου
 τε καὶ ἀρμοσμένον τὰ μάλιστα· οὐδεὶς τῶν λίθων τριήκοντα
 ποδῶν ἐλάσσων.

(a) The original Greek.

of which (the pyramid) is in each direction (the face; the front) each one 8 (100 feet; 10,000 square feet) of being (the pyramid) (of four equal angles; square) and the height the same.

(b) A word by word translation.

Figura 3.8: Texto original em grego do historiador grego Heródoto. *Herodoti Historiae*, parágrafo 124, II, p. 16-20. (MARKOWSKY, 1992, p. 7)

“Do qual (a pirâmide) está em cada direção [a face; a frente] cada um 8 [100 pés; 10.000 pés quadrados] sendo (a pirâmide) [de quatro ângulos iguais] e a altura a mesma.” (MARKOWSKY, 1992, p. 7, *tradução nossa*). Markowsky (1992) acrescenta que, mesmo considerando o fato das descrições contidas no livro *História* datarem de, aproximadamente, dois milênios após a construção da Grande

Pirâmide, a qual perdeu medida em sua altura ao longo do tempo, as figuras de Heródoto referentes às dimensões são excessivamente incomuns, pois ele cita 800 pés de altura e 800 pés quadrados na base. Além disso, as traduções de Rawlinson e Sélincourt são bem distintas da citação feita por Gardner, Turnbull e Burton, isto porque “Turnbull admite que a interpretação dele depende da “menor correção literal”.” (MARKOWSKY, 1992, p. 7, *tradução nossa*). Os mesmos autores que fizeram a citação distorcida de Heródoto não apresentam o motivo que haveria levado os egípcios à construírem a Grande Pirâmide de maneira que a altura fosse igual ao lado do quadrado da base cuja área fosse exatamente igual a área de uma face da pirâmide. Ao que parece, tais ideias são idealizações para se justificar a maneira pela qual as dimensões da pirâmide foram determinadas, uma vez que não existem evidências históricas de que os egípcios conheçam φ , tão pouco que o utilizaram em suas construções.

Segundo Markowsky (1992), uma grande variedade de teorias à respeito das proporções da Grande Pirâmide tem sido desenvolvidas, as quais variam desde manter uma perspectiva particular até o uso de rolos para medir distâncias horizontais e cordas para medir distâncias verticais. Segundo Lívio (2009), Fischler discorre sobre nove destas teorias com o objetivo de identificar o equívoco sobre a citação de Heródoto, que para ele, trata-se de uma interpretação equivocada de Taylor que inicia a tradução do trecho de Heródoto de forma muito parecida com as anteriores: “dessa Pirâmide, que tem quatro lados, cada face tem, em cada lado, oito plethra⁷, e altura igual” (LÍVIO, 2009, p. 74), mais à frente, segundo Lívio (2009), ele usa e abusa da imaginação para supor que Heródoto, na verdade, quis dizer que a área de cada face é igual à área de um quadrado cujo lado é igual à altura da Pirâmide. Não satisfeito, Taylor considera a medida errada de oitocentos pés gregos e sugere como solução para este problema que tal medida deve ser multiplicada pela área da base da pirâmide ao lado Leste da Grande Pirâmide, sem qualquer justificativa.

⁷Um plethron corresponde a 100 pés gregos.

A conclusão de tudo isso é que o texto de Heródoto dificilmente pode ser considerado como algo que documente a presença da Razão Áurea na Grande Pirâmide. A interpretação totalmente infundada do texto, instigada pelo livro de Taylor (e depois repetida inúmeras vezes), não faz sentido de fato e representa apenas mais um caso de prestidigitação numérica. (LÍVIO, 2009, p. 75).

Mas, as teorias acerca das dimensões da Grande Pirâmide não param por aqui, segundo Markovsky (1992) alguns autores notaram que a proporção do perímetro da base da Grande Pirâmide para a altura é de aproximadamente 2π . Com as dimensões dadas no início da seção obtemos $4 \cdot \frac{755,79}{481,4} \cong 6,28$, o qual está dentro de uma margem de $\pm 2\%$ de $2\pi = 6,2831853$. “Agora, é claro, devemos decidir se isso é uma coincidência ou se há alguma razão pela qual essa proporção estaria perto de 2π .” (MARKOWSKY, 1992, p. 8, *tradução nossa*).

Quando percebemos que a Grande Pirâmide rivaliza com a lendária cidade de Atlântida no número de livros escritos a respeito, não devemos ficar muito surpresos ao sabermos que φ não foi o único número especial a ser invocado na piramidologia - π também foi. (LÍVIO, 2009, p. 75).

Entretanto, não nos prolongaremos nesta última teoria, uma vez que nosso principal objetivo se concentrou na análise da afirmação acerca do uso da Razão Áurea nas dimensões da Grande Pirâmide. “Para nosso objetivo, temos de concluir que é bastante improvável [...] que os antigos egípcios tenham descoberto a Razão Áurea e suas propriedades.” (LÍVIO, 2009, p. 78). Ao que parece, a descoberta da Razão Áurea ocorreu posteriormente com os matemáticos gregos.

3.1.4 O Partenon de Atenas

“[...] tudo que é preciso é mais do que um olhar superficial em todas as fotos na web que pretendem mostrar a proporção áurea na estrutura, para ver que eles não fazem nada do tipo. (Olhe atentamente para onde e como o retângulo sobreposto -

geralmente vermelho ou amarelo - é desenhado e pergunte a si mesmo: porque colocá-lo exatamente lá e porque fazer linhas tão grossas?)”

Keith Devlin

O Partenon (do grego: “o lugar da virgem”), um templo dedicado à deusa grega Atena, foi construído na cidade de Atenas no século V a.C. pelos arquitetos Ítino e Calícrates e esculpido por Fídias e seus assistentes. Séculos mais tarde, no ano de 1687, houve um ataque da artilharia veneziana contra os turcos, que, naquele momento, dominavam a cidade de Atenas. O Partenon serviu como depósito de pólvora e foi parcialmente destruído restando-se apenas sua estrutura principal.

Há quem sustente que o retângulo áureo é a base do projeto de construção do Partenon, por acreditar que os gregos consideravam o retângulo áureo mais belo e harmonioso. Segundo Ávila (1985), não há evidências históricas para se afirmar que, os arquitetos de Péricles tenham usado conscientemente o retângulo áureo ao construírem uma das estruturas mais famosas do mundo. Entretanto, “várias tentativas foram feitas [...] para descobrir alguma base matemática ou geométrica supostamente empregada para se obter a grande perfeição do desenho de Partenon.” (LÍVIO, 2009, p. 90). Em consequência, várias afirmações à respeito foram e continuam sendo feitas com frequência. Em 1884, foi publicado um trabalho sobre a Razão Áurea intitulado *A seção áurea*, em que Zeizing afirma que “a altura da fachada, do alto de seu tímpano até a parte inferior do pedestal embaixo das colunas, também se divide numa Razão Áurea com a parte de cima das colunas” (LÍVIO, 2009, p. 91), Lívio (2009) ressalta que tal afirmação foi, posteriormente, repetida em diversos livros.

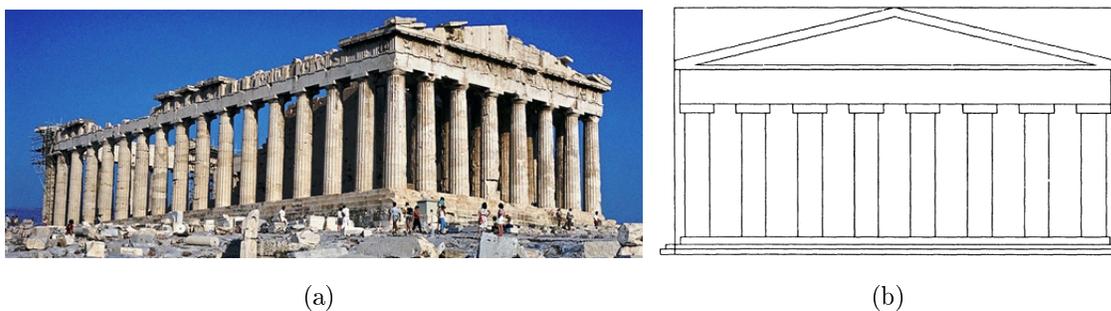


Figura 3.9: (a) Partenon de Atenas. (*Google Imagens*) (b) Projeto do Partenon de Atenas. (MARKOWSKY, 1992, p. 9). “Quando seu frontão triangular ainda estava intacto, suas dimensões podiam ser encaixadas *quase* exatamente em um retângulo áureo.” (HUNTLEY, 1985, p. 69, *grifo nosso*).

Markowsky (1992), assim como outros pesquisadores, questiona esta teoria sob o argumento de que partes do templo que ultrapassam o retângulo áureo são ignoradas pelos aficionados pela Razão Áurea. Prossegue dizendo que as dimensões variam de acordo com a fonte que as mediram, as quais lhe parecem arbitrárias e, em sua concepção, é o que julga ser um malabarismo numérico. Ele não está convencido de que a razão entre largura e altura do Partenon é Áurea, pois de acordo com o livro *Arquitetura da pré-história ao pós-modernismo*, de 1985, as dimensões do templo informadas pelos autores, Marvin Trachtenberg e Isabelle Hyman, são de 30,9 m de largura e 13,75 m de altura, o que nos dá uma razão próxima de 2,25, que difere demasiadamente de φ . Já no livro *Grécia*, de 1977, escrito por Stuart Rossiter, a altura dada é de 18m, o que nos conduz a uma razão próxima de 1,72, que também difere consideravelmente de φ . Diante das variações das dimensões do Partenon citadas por diferentes referências, Markowsky (1992) ressalta que

[...] é necessário especificar a precisão de qualquer medida e dar-se conta que imprecisões em medidas levam a imprecisões em proporções. Por exemplo, uma variação de $\pm 1\%$ da medida de dois comprimentos podem levar a uma variação de aproximadamente $\pm 2\%$ $\left(\frac{0,99}{1,01} \cong \frac{1,01}{0,99} \cong 1,02\right)$ na proporção que é calculada. Então, alguém ansioso para encontrar a razão áurea em algum lugar pode alterar dois números por $\pm 1\%$ e alterar sua proporção aproximadamente em $\pm 2\%$. (MARKOWSKY, 1992, p. 5, *tradução nossa*).

É suficiente considerarmos mais alguns degraus do Partenon para obtermos outro retângulo com proporções ainda mais distantes de φ . Portanto, ainda que muitos livros afirmem que a Razão Áurea foi utilizada no projeto do Partenon, esta teoria não pode ser amparada pelas dimensões do templo. Ao que parece, estamos diante de mais um caso de prestidigitação matemática, uma vez que não há evidências históricas e científicas que as sustentem.

3.2 Utilização deliberada da Razão Áurea na arte

Muitos trabalhos acadêmicos sobre a Razão Áurea foram produzidos no final do século XIX. Em consequência, a Razão Áurea tornou-se conhecida por muitos artistas que a utilizaram, deliberadamente, em algumas de suas obras. Provavelmente, o primeiro a utilizar a Razão Áurea foi o artista francês Paul Sérusier (1864-1927) por motivações filosóficas e especialmente para “verificar e ocasionalmente checar, suas invenções de formas e suas composições.” (LÍVIO, 2009, p. 193). O conceito da Razão Áurea se tornou manifesto no cubismo, um movimento artístico europeu iniciado na França no início do século XX, cuja principal característica é a utilização de formas geométricas, e alguns artistas deste movimento utilizaram a Razão Áurea em algumas de suas obras, dos quais enfatizamos os escultores Juan Cris (1887-1927) e Jacques Lipchitz (1891-1973) que utilizaram o triângulo de Kepler na escultura “Arlequim”⁸. Nas palavras de Lipchitz,

Naquele momento, eu estava muito interessado em teorias de proporções matemáticas, como os outros cubistas, e tentei aplicá-las às minhas esculturas. Todos nós tínhamos uma grande curiosidade pela ideia de uma regra áurea ou Seção Áurea, um sistema que se acreditava que condicionava a arte e a arquitetura da antiga Grécia. (LÍVIO, 2009, p. 194).

Dentre os artistas que utilizaram deliberadamente a Razão Áurea, destacamos o

⁸A escultura encontra-se no Museu de Arte da Filadélfia.

pintor espanhol surrealista⁹ Salvador Dalí (1904-1989).

3.2.1 O Sacramento da Última Ceia de Salvador Dalí

O *Sacramento da Última Ceia* (Figura 3.10) de Salvador Dalí, datada de 1955, trata-se de uma pintura à óleo sobre tela cujas dimensões são de, aproximadamente, 270 cm x 167 cm. Essas dimensões estão em uma Razão Áurea entre si, e acima da mesa em que Jesus e seus doze apóstolos cearam juntos pela última vez, observa-se parte de um dodecaedro¹⁰, o que representava para Dalí a simetria na comunhão. Além disso, “o dodecaedro, era atribuído por Platão ao universo como um todo, ou, em suas palavras, o dodecaedro é aquele “que deus usou para ornamentar as constelações de todo o céu.”” (LÍVIO, 2009, p. 85). Esse foi o principal motivo que conduziu Salvador Dalí à inserir o quinto sólido platônico em sua obra e, como visto na seção 3.2.3, o dodecaedro está intimamente relacionado com a Razão Áurea.



Figura 3.10: O Sacramento da Última Ceia. (Enciclopédia Brasileira de Artes)

Outros artistas fizeram uso da Razão Áurea, mas por outro lado “afirmações falsas a respeito de artistas que supostamente usaram a Razão Áurea continuaram a pulular quase como cogumelos depois da chuva.” (LÍVIO, 2009, p. 201). Apesar

⁹O surrealismo é um movimento artístico e literário que surgiu na França em 1920.

¹⁰Sólido regular constituído por 12 faces pentagonais.

3.2 Utilização deliberada da Razão Áurea na arte

da reconhecida importância da Razão Áurea para diversas áreas da matemática e das ciências, Lívio (2009) acredita que deveríamos desistir de tentar aplicá-la como padrão estético, seja no corpo humano ou na arte. Mas, como veremos na seção 3.2.2, atualmente têm-se buscado um padrão estético facial através da utilização deliberada da Razão Áurea nas proporções de simetria na morfologia da face.

3.2.2 Compasso áureo: um instrumento utilizado na estética facial

“[...] a fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. [...] De fato, provavelmente é correto dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do que qualquer outro número na história da Matemática.”

Mário Lívio

A academia de beleza *PhiAcademy* (Figura 3.11) foi fundada pelo *Grandmaster* Branko Babic¹¹ em 2011 na Sérvia. Segundo o fundador, “*Phiacademy* cria beleza através das proporções douradas (PHI-1,618). Nós vemos a perfeição na proporção áurea entre dois extremos.” (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico).

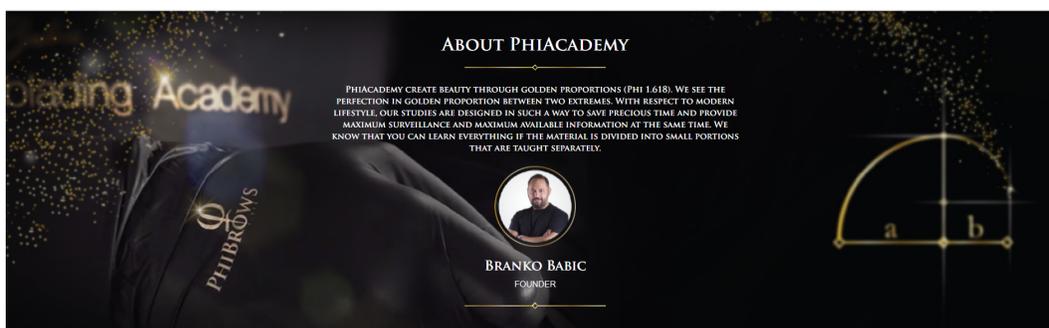


Figura 3.11: Sobre a *PhiAcademy*. (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico)

A *PhiAcademy* possui diversos segmentos, dentre eles está o *Phibrows* que,

¹¹Vídeo de Branko Babic: *Uma história sobre Phi*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=OQsCyR5qmGg>.

de acordo com a descrição do fundador, “*Phibrows* é uma técnica manual, semi-permanente do desenho da sobrancelha hiper-realista, na qual a forma das sobrancelhas é calculada de acordo com a morfologia facial e a proporção áurea (PHI-1, 618).” (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico).

Branko Babic aprimorou a técnica japonesa Tebori (do japonês: “tatuagem à mão”) de desenho manual de sobrancelhas fio-a-fio em que relata utilizar as proporções áureas e um padrão de linhas fractais. Sua técnica é conhecida como *Microblading*¹² e é utilizada para modelar a sobrancelha fio-a-fio hiper-realista que proporciona um aspecto de volume nos pelos da sobrancelha, deixando-as com uma aparência natural. De acordo com sua página oficial, Branko Babic introduziu a bússola (o compasso *PhiAcademy*) para a proporção de ouro na forma do desenho da sobrancelha, projetou o padrão das linhas fractais e introduziu o cálculo de simetria digital usando seu aplicativo *PhiBrows*¹³.

Em sua técnica, o ponto alto da sobrancelha é determinado pela divisão de um segmento em extrema e média razão através do compasso *PhiAcademy*¹⁴, fabricado em aço inoxidável, para determinar as medidas do traçado do molde da sobrancelha de acordo com φ . Em seguida, aplica-se um anestésico local e o profissional que realiza o procedimento utiliza o tebori que é um instrumento, similar ao bisturi, cuja ponta possui inúmeras micro agulhas. O tebori é utilizado para depositar a pigmentação, de acordo com o tom de pele da cliente, na segunda camada da pele (a derme), proporcionando um aspecto fio-a-fio que se tornou um sucesso no mundo feminino. A cicatrização da pele ocorre em torno de 30 dias após o procedimento.

¹²Vídeo de Branko Babic aplicando a técnica *Microblading*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=bcnK2XynXys>.

¹³O aplicativo *PhiBrows* foi desenvolvido por Branko Babic para determinar a simetria da sobrancelha de forma digital no momento em que os músculos faciais da cliente estiverem relaxados (quando os olhos estão fechados).

¹⁴Vídeo de instrução da divisão da sobrancelha com o compasso *PhiAcademy*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=eeYEYUrDFAI>.

3.2 Utilização deliberada da Razão Áurea na arte



Figura 3.12: (a) Compasso *PhiAcademy* (b) Tebori *PhiAcademy*. (c) Traçado da sobrancelha no papel. (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico)

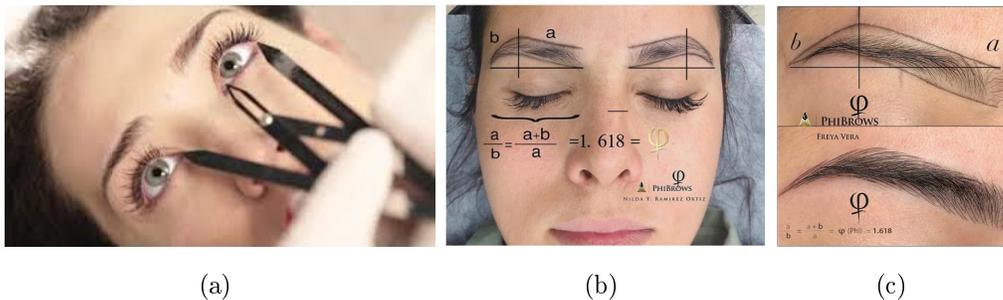


Figura 3.13: (a) Utilização do compasso *PhiAcademy*. (b) Traçado da sobrancelha nas proporções áureas. (c) O ponto alto da sobrancelha. (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico)

Com a ascensão da academia outras técnicas foram criadas, dentre elas

PhiContour que é uma habilidade de desenho semipermanente de pálpebras ou lábios. A forma é calculada com base na intersecção dourada (PHI 1,618) e na morfologia facial. A simetria dos lábios é obtida usando o aplicativo *PhiBrows*. O *PhiContour* oferece diferentes técnicas para corrigir defeitos naturais, mas também para destacar contornos. [...] Nosso objetivo é fazer correções na cor e na forma sem efeito pesado. (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico).



Figura 3.14: (a) Antes e depois do *PhiContour*. (b) As proporções áureas aplicadas aos lábios. (PHIACADEMY, 2011, documento eletrônico)

Atualmente, a *PhiAcademy* possui filiais na Áustria, Israel, USA, Alemanha e Rússia¹⁵. De fato, a técnica obteve sucesso no âmbito da estética, seja pela propaganda utilizada em torno de φ ou por realmente proporcionar simetria à morfologia facial. Em 2011, a plataforma computacional *Wolfram/Alpha* desenvolveu um simulador *online*¹⁶ de um compasso áureo que pode ser utilizado, por exemplo, no design gráfico, na odontologia e estética. Ele é utilizado para definir medidas em proporção áurea independentemente do ângulo de abertura considerado.

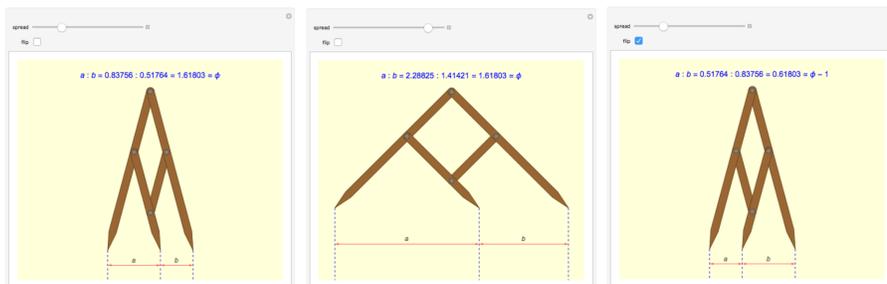


Figura 3.15: Simulador *online* do compasso áureo. (WOLFRAM, documento eletrônico)

3.2.3 Johannes Kepler em busca da compreensão do universo e as intenções do seu criador

“Acredito que essa proporção geométrica serviu de ideia para o Criador quando Ele introduziu a criação da semelhança usando a semelhança, que também continua

¹⁵ Site oficial *PhiAcademy*, disponível em: <http://www.phi-academy.com/treatment/phibrows/>

¹⁶ Compasso áureo, disponível em: <http://demonstrations.wolfram.com/GoldenRatioDividers/>.

indefinidamente.”

Johannes Kepler apud Mário Lívio

Johannes Kepler (1571-1630), um astrônomo e matemático alemão, pressupunha uma íntima relação entre teologia e matemática. “Kepler acreditava que o universo representa um reflexo do seu Criador.” (LÍVIO, 2009, p. 167), o que motivou sua busca incansável por uma teoria que fosse capaz de explicar a harmonia do universo. Fundamentado pelo princípio geral do sistema heliocêntrico de Nicolau Copérnico (1473-1543), sua busca o conduziu as três leis do movimento planetário que foram a base para Isaac Newton (1642-1727) formular a lei universal da gravidade.

Kepler, em seus estudos iniciais, publica seu primeiro tratado, *O mistério cósmico*¹⁷, em 1597 inspirado pela perspectiva de Platão na qual “Deus sempre geometrizava”. Ele utiliza os cinco sólidos platônicos inscritos em uma esfera no seu modelo cosmológico, dos quais o icosaedro e o dodecaedro estão intimamente relacionados com a Razão Áurea, pois

[...] um dodecaedro com aresta de comprimento um tem área total da superfície igual a $15\varphi\sqrt{3-\varphi}$ e um volume de $\frac{5\varphi^2}{6-2\varphi}$. De modo semelhante, um icosaedro com uma aresta de comprimento unitário tem um volume de $\frac{5\varphi^5}{6}$ [...], e a razão entre os comprimentos das arestas dos dois sólidos (um embutido no outro) assim obtidos pode novamente ser expressa em termos da Razão Áurea, como $\frac{\varphi^2}{\sqrt{5}}$. O tetraedro é auto-recíproco - a junção dos quatro centros das faces do tetraedro forma outro tetraedro. (LÍVIO, 2009, p. 88-89).

Entretanto, havia discrepância em seu modelo cosmológico e Kepler a justificava dizendo que haviam imprecisões nas medidas das órbitas mas, ainda assim, seu modelo foi fundamental para a história da ciência e para promover, em 1600, uma interação com o astrônomo dinamarquês, Tycho Brahe (1546-1601). Através das observações de Brahe sobre a órbita de Marte, Kepler foi conduzido às duas primeiras

¹⁷ *Mysterium Cosmographicum.*

leis do movimento planetário. Em 1619, na publicação do seu segundo tratado *A harmonia do mundo*¹⁸, Kepler enuncia, no quinto livro deste tratado, a terceira lei dos movimentos planetários. Para muitos pesquisadores, os esforços de Kepler indica o nascimento da ciência moderna. E a genialidade de Newton ao descobrir que os planetas se mantêm em órbita devido à gravidade faz válida as três leis de Kepler. “Um aspecto importante desta obra que é particularmente importante para a história da Razão Áurea é o trabalho de Kepler sobre *tiling* (ladrilharia), ou mosaico.” (LÍVIO, 2009, p. 179), no qual alguns conceitos estão relacionados com a Razão Áurea.

Durante seus estudos, a persistência de Kepler na Razão Áurea o conduziu ao seguinte teorema escrito por ele em uma carta destinada à seu antigo professor de astronomia Michael Mästlin,

Se numa linha dividida nas razões médias e extrema se constrói um triângulo retângulo, de modo que o ângulo reto esteja sobre a perpendicular colocada no ponto da secção, então o lado menor terá o mesmo valor do maior segmento da linha dividida. (LÍVIO, 2009, p. 173).

O triângulo descrito acima ficou conhecido na literatura como *triângulo de Kepler*. Segundo Lívio (2009), no ano de 1855, o piramidólogo Friedrich Röber, utilizou um triângulo semelhante ao triângulo de Kepler para justificar a falsa teoria de que a Razão Áurea fora usada na construção da Grande Pirâmide de Gizé.

¹⁸*Harmonice Mundi.*

CAPÍTULO 4

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA

4.1 Fibonacci e o problema dos coelhos

*“Quot paria coniculatorum in uno anno ex uno pario germinentur.” (do francês:
“Quantos pares de coelhos podem ser gerados em um ano a partir de um par.”)*

Leonardo Fibonacci apud Edouard Lucas¹

Mesmo em meio a um período da História, em que houve uma drástica queda na produção científica devido às restrições impostas pela Igreja Católica, a Idade Média concebeu o mais talentoso matemático da Europa Ocidental, Leonardo de Pisa (c.1180-1250). Nascido na cidade de Pisa, na Itália, é popularmente conhecido como Leonardo Fibonacci devido a uma referência feita pelo historiador da matemática Guilhaume Libri, em um livro publicado em 1838², no qual se referia ao matemático como Leonardo Fibonacci - *filius Bonacci*, em que *filius* (do latim: filho) e *Bonacci* (do italiano: plural do sobrenome de seu pai Bonaccio) cuja abreviação italiana originou Fibonacci.

Através de seu pai, um comerciante italiano que tinha negócios no norte da

¹Leonardo Fibonacci (1202, p. 128 *apud* LUCAS, 1891, p. 3).

²Para maiores detalhes veja (VIANA, 2017, documento eletrônico).

África, Fibonacci teve a oportunidade de estudar com um professor muçulmano e viajou pelo Egito, Síria e Grécia. Essas viagens o colocaram em contato com métodos algébricos árabes e com os numerais indo-árabicos. O conhecimento que adquiriu em suas viagens o permitiram publicar, em 1202, sua mais famosa obra *Liber abaci* (do latim: Livro do ábaco) “[...] que teve importância decisiva na tarefa de tornar conhecida na Europa a Matemática dos árabes e hindus. Foi esse livro que popularizou no Ocidente o uso dos algarismos arábicos e os métodos hindus de cálculo com números inteiros, frações e raízes.” (ÁVILA, 1985, p. 12). Apesar do título, o livro trata de conceitos e problemas algébricos dos quais houve um problema que mais despertou o interesse dos futuros matemáticos, o problema dos coelhos, descrito no capítulo XII do *Liber abaci*, que diz o seguinte:

Um homem pôs um casal de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos casais de coelhos podem ser gerados a partir desse casal em um ano se, supostamente, todo mês cada casal dá à luz a um novo casal, que é fértil a partir do segundo mês? (ZAHN, 2011, p. 5).

Considerando satisfeitas as condições previamente estabelecidas no problema e partindo da premissa de que, neste período, os coelhos nunca morrem, iremos analisar o crescimento da população destes coelhos durante os cinco primeiros meses para compreendermos o procedimento de obtenção da quantidade de casais nos meses subsequentes:

- I. Ao final do primeiro mês o casal de filhotes colocado no cercado torna-se adulto mas, ainda não está apto para a reprodução e portanto temos apenas um casal de coelhos.
- II. Ao final do segundo mês o casal de coelhos adulto, agora fértil, dá a luz um novo casal. Portanto, temos dois casais de coelhos.
- III. Ao final do terceiro mês o casal adulto dá a luz um novo casal e o casal nascido

4.1 Fibonacci e o problema dos coelhos

no mês anterior torna-se adulto de forma que temos dois casais adultos e um casal de filhotes. Portanto, temos três casais de coelhos.

IV. Ao final do quarto mês o primeiro casal adulto dá a luz um novo casal; o casal de filhotes nascido no terceiro mês torna-se adulto; o casal que se tornou adulto no terceiro mês dá a luz um novo casal, de forma que temos três casais adultos e dois casais filhotes. Portanto, temos cinco casais de coelhos.

V. Ao final do quinto mês o primeiro casal adulto dá a luz um novo casal; o casal que nasceu no quarto mês torna-se adulto; o casal que se tornou adulto no quarto mês dá a luz um novo casal; o casal que se tornou adulto no terceiro mês dá a luz um novo casal; o casal nascido no quarto mês torna-se adulto, de forma que temos cinco casais adultos e três casais filhotes. Portanto, temos oito casais de coelhos.

A análise do problema pode ser naturalmente compreendida pela representação gráfica genealógica dos coelhos (Figura 4.1):

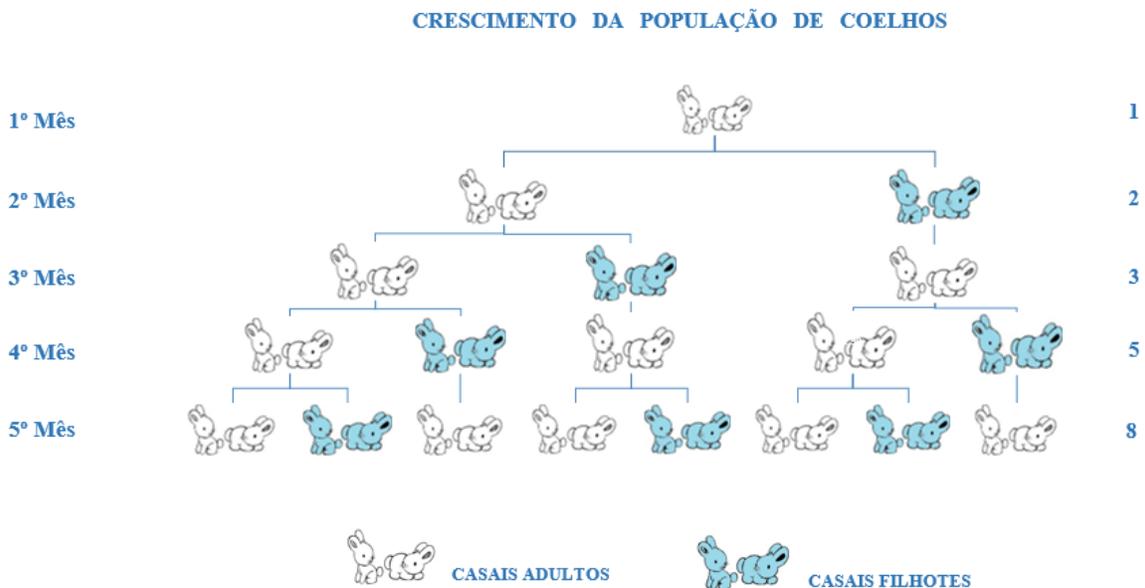


Figura 4.1: Crescimento da população de coelhos. (A autora)

Por meio desta representação genealógica podemos observar que, a partir do

4.1 Fibonacci e o problema dos coelhos

terceiro mês, a quantidade de coelhos a cada mês é obtida pela soma da quantidade de coelhos dos dois meses antecedentes. O raciocínio é análogo para os sete meses subsequentes, em concordância com os dados da tabela 4.1:

Meses	Casais adultos	Casais filhotes	Total de casais
1	1	0	1
2	1	1	2
3	2	1	3
4	3	2	5
5	5	3	8
6	8	5	13
7	13	8	21
8	21	13	34
9	34	21	55
10	55	34	89
11	89	55	144
12	144	89	233

Tabela 4.1: Crescimento da população de coelhos. (A autora)

Assim, o total de casais de coelhos gerados, mês após mês, é determinado pela sequência numérica (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233). Portanto, conclui-se que, a partir do primeiro casal de coelhos podem ser gerados 232 novos casais no período de 12 meses.

Ainda por meio da tabela 4.1 é possível verificar que a quantidade de casais de coelhos adultos, mês após mês, é obtida pela sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144), de forma que a quantidade de casais adultos a cada mês, a partir do segundo, é obtida pela quantidade de adultos do mês anterior acrescido da quantidade de filhotes nascidos também no mês anterior mas, que amadureceram no mês em questão. Da mesma maneira, a quantidade de casais de coelhos filhotes, mês após mês, é obtida pela sequência (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89), de forma que a quantidade de casais filhotes a cada mês é igual a quantidade de casais

adultos do mês anterior ao mês em questão.

Portanto, a quantidade de casais adultos, a cada mês, pode ser obtida pela soma da quantidade de casais adultos nos dois meses antecedentes ao mês em questão. Obtém-se de forma análoga a quantidade de casais filhotes a cada mês.

4.2 Uma intrínseca relação entre a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea

“A ligação entre a divisão áurea e a série de Fibonacci pode ser vista de um novo ângulo considerando o termo geral da série. Trata-se da fórmula de Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

H.E. Huntley

Ainda em análise ao problema dos coelhos de Fibonacci, se considerarmos a quantidade de casais de coelhos adultos em um período de n meses, a sequência determinada na solução do problema seguirá indefinidamente de modo que cada termo, a partir do terceiro, é obtido pela soma dos dois termos antecedentes. Denotando-se por F_n o número de casais de coelhos adultos após n meses, segue que

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 5$$

$$F_6 = F_5 + F_4 = 8$$

⋮

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{4.2.1}$$

Derivando, desta forma, a sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, ...). Esta sequência numérica, ainda que muito simples, é considerada uma das sequências mais famosas da Matemática e “foi apropriadamente chamada de *sequência de Fibonacci* no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891)” (LÍVIO, 2009, p. 117) e, cada termo desta sequência é conhecido como *número de Fibonacci*. “Muitas pessoas ouviram falar pela primeira vez dos números de Fibonacci no *best-seller* de Dan Brown, *O código Da Vinci*. Esses números têm uma longa e gloriosa história matemática [...] .” (STEWART, 2009, p. 107).

Do exposto em 4.2.1 decorre que a sequência de Fibonacci pode ser descrita recursivamente, conforme definição 4.1.

Definição 4.1. (A sequência de Fibonacci) *A sequência de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 1}$ é completamente definida pela relação de recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$ com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.*

“A sequência de Fibonacci foi a primeira sequência recursiva conhecida na Europa.” (LÍVIO, 2009, p. 117). Esta recursividade é devida à característica marcante de que cada termo da sequência, a partir do terceiro, é obtido pela soma dos dois termos antecedentes. Por este fato, a determinação de alguns termos pode tornar-se tediosa a medida em que n aumenta indefinidamente, pois para calcularmos F_{100} , por exemplo, precisamos de todos os termos que o antecedem. Nesse sentido, fez-se necessária a determinação de uma expressão para o termo geral da sequência de Fibonacci de forma que, para cada n , obtenhamos F_n explicitamente.

Na grande maioria das literaturas esta expressão é apresentada como fórmula de Binet, pois muitos autores acreditam que esta fórmula explícita foi descoberta em 1843 pelo matemático francês Jacques Phillippe Marie Binet (1786-1856). Apesar de, segundo Lívio (2009), Graham, Knuth e Patashnik acreditarem que Leonard Euler já havia publicado a fórmula em 1765 e Don Knuth a atribui a Abraham de Moivre³.

Podemos obter a conhecida fórmula de Binet, para o termo geral da sequência de Fibonacci, através da solução da relação de recorrência linear de segunda ordem $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, conforme definição 4.1. E para a solução desta recorrência utilizaremos o teorema 4.2 cuja demonstração pode ser vista em Lima (2006).

Teorema 4.2. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então, todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Observe que a equação característica da relação de recorrência que define a sequência de Fibonacci é dada por $r^2 = r + 1$ cujas raízes são $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$ e $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \varphi'$.

Assim, obtidas as raízes, pelo teorema 4.2, a expressão para o termo geral da sequência de Fibonacci é dada por

$$F_n = C_1 \varphi^n + C_2 (\varphi')^n$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Agora, para determinarmos $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, basta considerarmos o fato de que $F_1 = 1$

³Para mais informações, o leitor pode consultar as páginas da *web* de Ron Knott, disponível em: <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibFormula.html>.

e $F_2 = 1$. Dessa forma, obtemos o sistema 4.2 com duas equações lineares

$$\begin{cases} C_1\varphi^1 + C_2(\varphi') = 1 \\ C_1\varphi^2 + C_2(\varphi')^2 = 1 \end{cases}$$

De fato, o sistema possui solução única $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Logo,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi')^n$$

Ou seja,

$$F_n = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\sqrt{5}}$$

Como $\sqrt{5} = \varphi - \varphi'$, podemos escrever a solução da recorrência em termos de φ .

$$F_n = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\varphi - \varphi'} \quad [\text{Fórmula de Binet em termos de } \varphi]$$

Surpreendentemente, esta fórmula fechada que possibilita a determinação dos termos da sequência de Fibonacci de forma explícita, nos revela uma intrínseca relação entre a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea. Entretanto, parece-nos um tanto quanto intrigante que uma fórmula com termos irracionais seja utilizada para a determinação dos termos da sequência de Fibonacci, os quais são inteiros e positivos. Assim como Lívio (2009) enfatiza, “à primeira vista, esta é uma fórmula extremamente desconcertante, já que não é sequer óbvio que após a substituição dos vários valores de n ela produziria números inteiros (como são todos os termos na sequência de Fibonacci).” (LÍVIO, 2009, p. 128). Nesse contexto, vamos mostrar por indução em n que $F_n = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\varphi - \varphi'}$ determina todos os termos da sequência de Fibonacci.

Proposição 4.3. (Fórmula de Binet em termos de φ) *O n -ésimo termo da*

4.2 Uma intrínseca relação entre a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea

sequência de Fibonacci é determinado pela fórmula fechada $F_n = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\varphi - \varphi'}$ onde $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Demonstração: Vamos provar tal proposição pelo segundo princípio da indução matemática. Note que a expressão $F_n = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\varphi - \varphi'}$ é válida para $n = 1$ e $n = 2$ como segue

$$F_1 = \frac{\varphi^1 - (\varphi')^1}{\varphi - \varphi'} = 1 \quad \text{e} \quad F_2 = \frac{\varphi^2 - (\varphi')^2}{\varphi - \varphi'} = \frac{(\varphi - \varphi')(\varphi + \varphi')}{\varphi - \varphi'} = \varphi + \varphi' = 1.$$

Agora, suponhamos que, para todo natural $2 < n \leq k+1$, seja válida a expressão $F_n = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\varphi - \varphi'}$.

Por hipótese de indução, temos $F_k = \frac{\varphi^k - (\varphi')^k}{\varphi - \varphi'}$ e $F_{k+1} = \frac{\varphi^{k+1} - (\varphi')^{k+1}}{\varphi - \varphi'}$.

Queremos mostrar a validade de $F_{k+2} = \frac{\varphi^{k+2} - (\varphi')^{k+2}}{\varphi - \varphi'}$. Conforme a definição 4.1 temos que $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$. Então, substituindo F_k e F_{k+1} nesta expressão e considerando as seguintes identidades

$$\varphi^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \varphi'^2 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

temos

$$\begin{aligned} F_{k+2} &= F_{k+1} + F_k \\ &= \frac{\varphi^{k+1} - (\varphi')^{k+1}}{\varphi - \varphi'} + \frac{\varphi^k - (\varphi')^k}{\varphi - \varphi'} \\ &= \frac{(\varphi^k)(\varphi + 1)}{\varphi - \varphi'} - \frac{[(\varphi')^k](\varphi' + 1)}{\varphi - \varphi'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\varphi^k)}{\varphi - \varphi'} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) - \frac{[(\varphi')^k]}{\varphi - \varphi'} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \\
 &= \frac{(\varphi^k)}{\varphi - \varphi'} \varphi^2 - \frac{[(\varphi')^k]}{\varphi - \varphi'} (\varphi')^2 \\
 &= \frac{\varphi^{k+2}}{\varphi - \varphi'} - \frac{(\varphi')^{k+2}}{\varphi - \varphi'} \\
 &= \frac{\varphi^{k+2} - (\varphi')^{k+2}}{\varphi - \varphi'}
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo segundo princípio da indução, a expressão $F_n = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\varphi - \varphi'}$ é válida para todo n natural.

□

4.3 Algumas identidades dos números de Fibonacci

Desde a publicação do problema dos coelhos, em 1202, muitos matemáticos se dedicaram ao estudo da sequência de Fibonacci e inúmeras identidades foram descobertas, das quais algumas revelam padrões interessantes entre os números de Fibonacci e a Razão Áurea. Em 1963, fundou-se a *The Fibonacci Association*, a qual dedica-se na busca de novos resultados relacionados aos números de Fibonacci. Segundo Johnson (1987), a associação surgiu através do vínculo de amizade entre o professor de matemática americano Verner E. Hoggatt Jr. (1921-1980) do *San Jose State College* e o irmão Alfred Brousseau (1907-1988) do *St. Mary's College* que frequentemente se reuniam para discutir os números de Fibonacci.

Em dezembro de 1962, o grupo também incluía o professor Paul Byrd, I. Dale Ruggles, Stanley L. Basin e Terrance A. Brennan. Foi esse grupo de homens que fundou a Associação Fibonacci para proporcionar uma oportunidade aos que compartilham do interesse nos números de Fibonacci para trocar ideias. [...] Vern e irmão Alfred queriam um jornal para fornecer uma rápida disseminação da crescente pesquisa sobre

os números de Fibonacci e convidar professores e alunos para compartilharem seu entusiasmo pela matemática. (JOHNSON, 1987, p. 2, *tradução nossa*).

As publicações da *The Fibonacci Association* são reunidas no periódico *Fibonacci Quarterly* que representa o enfoque do interesse mundial na sequência de Fibonacci. Nesta seção, apresentaremos sete dessas identidades, das quais quatro delas (4.4, 4.5, 4.6 e 4.9) foram estudadas à partir das publicações de *Fibonacci Quarterly*. A proposição 4.7 e o corolário 4.8 foram estudadas em Zahn (2011) e a proposição 4.10 estudada em Costa (2015). Faz-se necessário ressaltar que cinco destas identidades possuem relação direta com a Razão Áurea, e algumas delas serão utilizadas posteriormente⁴.

Proposição 4.4. *A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices ímpares é igual ao número de Fibonacci subsequente de índice par. Simbolicamente,*
 $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ F_3 &= F_4 - F_2 \\ F_5 &= F_6 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2} \end{aligned}$$

Somando as equações, obtemos a identidade $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

□

Proposição 4.5. *A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares é*

⁴O leitor poderá encontrar inúmeras identidades de Fibonacci no “*Books and tables published by the Fibonacci Association*”, disponível em: <https://www.fq.math.ca/books.html>.

4.3 Algumas identidades dos números de Fibonacci

igual ao número de Fibonacci subsequente de índice ímpar subtraído de uma unidade.

Simbolicamente, $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

Demonstração: Observe que

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = F_3 - F_1$$

$$F_4 = F_5 - F_3$$

\vdots

$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

Somando as equações, obtemos a identidade $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

□

Proposição 4.6. *A soma das áreas dos quadrados de lados iguais à números consecutivos de Fibonacci é igual a área de um retângulo de ouro. Simbolicamente, $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, $n \geq 1$.*

Demonstração: Vamos provar esta identidade pelo princípio da indução matemática. Note que a expressão

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

é válida para $n = 1$ como segue

$$F_1^2 = F_1 F_2$$

Agora, suponhamos que, para todo natural $1 < n \leq k$, seja válida a expressão $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Por hipótese de indução temos $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_k^2 = F_k F_{k+1}$.

Queremos provar que $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} F_{k+2}$.

4.3 Algumas identidades dos números de Fibonacci

Assim, somando F_{k+1}^2 em ambos os membros da equação

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_k^2 = F_k F_{k+1}$$

obtemos

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} F_{k+2} \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução, a expressão $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ é válida para todo n natural.

□

Tal identidade pode ser interpretada, geometricamente, por meio da área de um retângulo, o qual é conhecido na literatura como retângulo de ouro, pois à medida que um novo quadrado é adicionado ao retângulo anterior, suas dimensões tornam-se cada vez maiores e, conseqüentemente, a razão entre estas dimensões tendem à φ , conforme provaremos na seção 4.4.

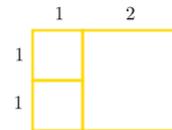
$$F_1^2 + F_2^2 = F_2 \cdot F_3$$

$$(1)^2 + (1)^2 = 1 \cdot 2$$



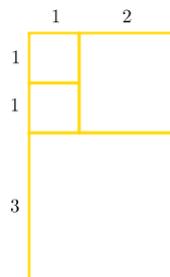
$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_3 \cdot F_4$$

$$(1)^2 + (1)^2 + (2)^2 = 2 \cdot 3$$



$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = F_4 \cdot F_5$$

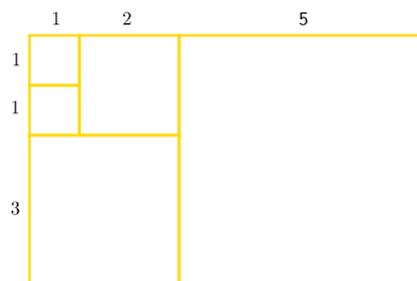
$$(1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 = 3 \cdot 5$$



4.3 Algumas identidades dos números de Fibonacci

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = F_5 \cdot F_6$$

$$(1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (5)^2 = 5 \cdot 8$$



Proposição 4.7. *Uma aproximação para os números de Fibonacci: Se F_n é um número de Fibonacci então $F_n \geq \varphi^{n-2}, \forall n \geq 1$.*

Demonstração: Vamos provar esta identidade pelo segundo princípio da indução matemática. Note que a desigualdade

$$F_n \geq \varphi^{n-2}$$

é válida para $n = 1$ e $n = 2$ como segue

$$\varphi^{1-2} = \varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} < \frac{2}{1 + 1} = 1 = F_1. \text{ Logo, } F_1 > \varphi^{-1}.$$

$$\varphi^{2-2} = \varphi^0 = 1 = F_2. \text{ Logo, } F_2 = \varphi^0.$$

Agora, suponhamos que, para todo natural $2 < n \leq k + 1$, a desigualdade $F_n \geq \varphi^{n-2}$ seja válida.

Por hipótese de indução temos $F_k \geq \varphi^{k-2}$ e $F_{k+1} \geq \varphi^{k-1}$.

Queremos provar que $F_{k+2} \geq \varphi^k$.

Assim, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \geq \varphi^{k-1} + \varphi^{k-2} = \varphi^{k-2}(\varphi + 1)$. Como $\varphi + 1 = \varphi^2$, temos:

$$F_{k+2} \geq \varphi^{k-2} \varphi^2 = \varphi^k$$

Portanto, pelo segundo princípio da indução finita, a desigualdade

$$F_n \geq \varphi^{n-2}$$

é válida para todo n natural.

□

Corolário 4.8. Se F_n é um número de Fibonacci então $\varphi^{n-2} \leq F_n \leq \varphi^n, \forall n \geq 1$.

Demonstração: De fato, pela fórmula de Binet, temos

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \frac{1}{\varphi} \right) \leq \varphi - \frac{1}{\varphi} \leq \varphi^n$$

E pela proposição 4.7 segue que

$$\varphi^{n-2} \leq F_n \leq \varphi^n$$

□

A próxima identidade é conhecida na literatura como identidade de Cassini e foi demonstrada em 1680 pelo astrônomo e matemático italiano Geovani Domênico Cassini (1625-1712). Mas, segundo Lívio (2009), em 1608 Kepler já havia descoberto esta interessante identidade em que o quadrado de um número qualquer de Fibonacci difere em uma unidade do produto de seus dois adjacentes na sequência. Retornemos à sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...) e observe que

$$1^2 = 1 \cdot 2 - 1$$

$$2^2 = 1 \cdot 3 + 1$$

$$3^2 = 2 \cdot 5 - 1$$

$$5^2 = 3 \cdot 8 + 1$$

$$8^2 = 5 \cdot 13 - 1$$

⋮

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n$$

diferem, alternadamente, de apenas uma unidade.

Proposição 4.9. *Identidade de Cassini:* $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n, \forall n > 1$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n &= \frac{[\varphi^{n-1} - (\varphi')^{n-1}][\varphi^{n+1} - (\varphi')^{n+1}]}{(\varphi - \varphi')^2} - (-1)^n \\
 &= \frac{\varphi^{2n} - (\varphi\varphi')^n\varphi^{-1}\varphi' - (\varphi\varphi')^n\varphi\varphi' + (\varphi')^{2n}}{(\varphi - \varphi')^2} - (-1)^n \\
 &= \frac{\varphi^{2n} - (\varphi\varphi')^n[\varphi^{-1}\varphi' + (\varphi')^{-1}\varphi] + (\varphi')^{2n}}{(\varphi - \varphi')^2} - (-1)^n \\
 &= \frac{\varphi^{2n} - (\varphi\varphi')^n(-\varphi'\varphi' - \varphi\varphi) + (\varphi')^{2n}}{(\varphi - \varphi')^2} - (-1)^n \\
 &= \frac{\varphi^{2n} + (\varphi\varphi')^n[(-\varphi')^2 + \varphi^2] + (\varphi')^{2n}}{(\varphi - \varphi')^2} - (-1)^n \\
 &= \frac{\varphi^{2n} + (\varphi\varphi')^n(\varphi' + 1 + \varphi + 1) + (\varphi')^{2n}}{(\varphi - \varphi')^2} - (-1)^n \\
 &= \frac{\varphi^{2n} + 3(\varphi\varphi')^n + (\varphi')^{2n}}{(\varphi - \varphi')^2} - (\varphi\varphi')^n \\
 &= \frac{\varphi^{2n} + 3(\varphi\varphi')^n + (\varphi')^{2n} - 5(\varphi\varphi')^n}{(\varphi - \varphi')^2} \\
 &= \frac{\varphi^{2n} - 2(\varphi\varphi')^n + (\varphi')^{2n}}{(\varphi - \varphi')^2} \\
 &= \frac{[\varphi^n - (\varphi')^n]^2}{(\varphi - \varphi')^2} \\
 &= \left[\frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\varphi - \varphi'} \right]^2 \\
 &= F_n^2
 \end{aligned}$$

Para tanto foram usadas as seguintes identidades: $\varphi^{-1} = -\varphi'$, $(\varphi')^{-1} = -\varphi$, $(\varphi')^2 = \varphi' + 1$, $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\varphi + \varphi' = 1$ e $\varphi\varphi' = -1$.

□

Decorre desta identidade um sofisma geométrico apresentado pelo matemático Sam Loyd (1841-1911) que se dedicou à matemática recreativa elaborando quebra-

4.3 Algumas identidades dos números de Fibonacci

cabeças⁵. Tal sofisma é obtido ao considerarmos um quadrado de lado igual a soma de dois números consecutivos de Fibonacci, no exemplo, o quadrado tem $5 + 8 = 13$ unidades e é dividido em quatro partes conforme figura 4.2, de modo que tais pedaços podem ser justapostos para a obtenção de um retângulo que possui dimensões iguais à 8 e 21. Observe que a área do quadrado é igual a 169 unidades enquanto a área do retângulo é igual a 168 unidades.

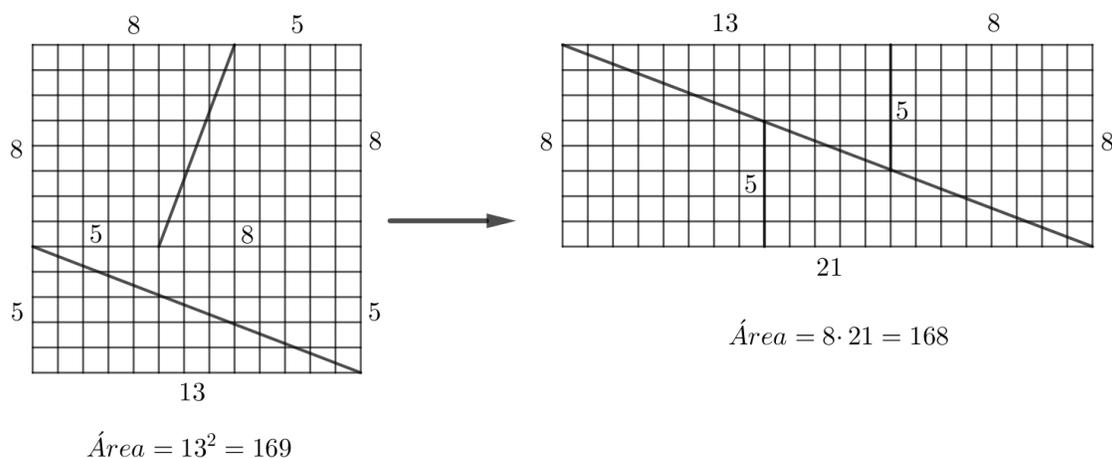


Figura 4.2: Sofisma Geométrico. Adaptado de (Huntley, 1985, p. 56)

Mas, porque a área do retângulo e do quadrado diferem em uma unidade? A justificativa para essa diferença das áreas é o fato de que as peças justapostas não se encaixam perfeitamente, porque existe uma folga de uma unidade ao longo das diagonais do retângulo. É importante observar que, dependendo da escolha dos números de Fibonacci, a área do quadrado será maior que a área do retângulo em uma unidade e esta diferença será sobreposta ao longo das diagonais do retângulo. Entretanto, veremos na seção 4.7 que existe uma e, somente uma, sequência de números de Fibonacci em que a área do quadrado e do retângulo são iguais.

Proposição 4.10. *A diferença entre o produto de dois números consecutivos de Fibonacci e o produto dos dois adjacentes à eles é sempre igual a uma unidade.*

Simbolicamente, $F_{2n+2}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+3} = 1, \forall n \geq 1$.

⁵Existem diversos quebra-cabeças de Sam Loyd, disponíveis em: <https://samloyd.com/>.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 F_{2n+2}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+3} &= \frac{[\varphi^{2n+2} - (\varphi')^{2n+2}]}{(\varphi - \varphi')^2} - \frac{[\varphi^{2n+1} - (\varphi')^{2n+1}]}{(\varphi - \varphi')^2} \\
 &= \frac{\varphi^{4n+3} + (\varphi')^{4n+3} - \varphi^{2n+2}(\varphi')^{2n+1} - (\varphi')^{2n+2}\varphi^{2n+1}}{(\varphi - \varphi')^2} \\
 &\quad - \frac{\varphi^{4n+3} + (\varphi')^{4n+3} - \varphi^{2n}(\varphi')^{2n+3} - (\varphi')^{2n}\varphi^{2n+3}}{5} \\
 &= \frac{[-\varphi^{2n+2}(\varphi^{-1})^{2n+1} - (\varphi')^{2n+2}\varphi^{2n+1} + \varphi^{2n}(\varphi')^{2n+3} + (\varphi')^{2n}\varphi^{2n+3}]}{5} \\
 &= \frac{[-(\varphi\varphi')^{2n+1}\varphi - (\varphi'\varphi)^{2n+1}\varphi' + (\varphi\varphi')^{2n}(\varphi')^3 + (\varphi'\varphi)^{2n}\varphi^3]}{5} \\
 &= \frac{\varphi + \varphi' + (\varphi')^3 + \varphi^3}{5} \\
 &= \frac{1 + 4}{5} = 1
 \end{aligned}$$

Para tanto foram usadas as seguintes identidades: $(\varphi - \varphi')^2 = 5$, $\varphi\varphi' = -1$, $\varphi + \varphi' = 1$, $(\varphi')^3 + \varphi^3 = 4$.

□

4.4 O limite da sequência de razões entre números consecutivos de Fibonacci

“Sobre esses números famosos e fascinantes, um amigo matemático me escreve: ‘Todo o romance das frações contínuas, relações de recorrência linear,...recai sobre eles, e eles são uma fonte de curiosidade inesgotável. Como é interessante vê-los se esforçando para atingir o inatingível, a Razão Áurea...”

D’Arcy Wentworth Thompson apud Mário Lívio⁶

A esta altura o leitor, provavelmente, já conjecturou mais uma relação entre a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea. É mesmo fascinante imaginar que uma sequência tão simples que surge do problema da reprodução dos coelhos tenha mais

⁶D’Arcy Wentworth Thompson (1945 *apud* LÍVIO, 2009, p. 123).

4.4 O limite da sequência de razões entre números consecutivos de Fibonacci

uma intrínseca relação com a Razão Áurea. E esta relação vai se revelando através das razões obtidas entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci à medida em que estes assumem valores cada vez maiores. Em concordância com a análise apresentada na tabela 4.2, onde $R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ e $\frac{1}{R_n} = \frac{F_n}{F_{n+1}}$.

R_n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\frac{1}{R_n}$	$\frac{F_n}{F_{n+1}}$
1,0000000000	1 : 1	1,0000000000	1 : 1
2,0000000000	2 : 1	0,5000000000	1 : 2
1,5000000000	3 : 2	0,6666666667	2 : 3
1,6666666667	5 : 3	0,6000000000	3 : 5
1,6000000000	8 : 5	0,6250000000	5 : 8
1,6250000000	13 : 8	0,6153846153	8 : 13
1,6153846154	21 : 13	0,6190476190	13 : 21
1,6190476190	34 : 21	0,6176470588	21 : 34
1,6176470588	55 : 34	0,6181818182	34 : 55
1,6181818182	89 : 55	0,6179775281	55 : 89
1,6179775281	144 : 89	0,6180555555	89 : 144
1,6180555556	233 : 144	0,6180257511	144 : 233
1,6180257511	377 : 233	0,6180371353	233 : 377
1,6180371353	610 : 377	0,6180327869	377 : 610
1,6180327869	987 : 610	0,6180344478	610 : 987
1,6180344478	1 597 : 987	0,6180338134	987 : 1 597
1,6180338134	2 584 : 1 597	0,6180340557	1 597 : 2 584
1,6180340557	4 181 : 2 584	0,6180339632	2 584 : 4 181

Tabela 4.2: Razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci com uma aproximação de dez casas decimais. (A autora)

Compare $\varphi \cong 1,6180339887$ e $\varphi^{-1} \cong 0,6180339887$ (até a décima casa decimal) com os quocientes da tabela 4.2 e observe que, à medida em que os termos da sequência assumem valores cada vez maiores, a razão entre esses termos se aproxima cada vez mais da Razão Áurea, alternadamente, por falta e por excesso.

Este fato nos leva a conjectura de que a sequência obtida pela razão entre termos

4.4 O limite da sequência de razões entre números consecutivos de Fibonacci

consecutivos da sequência de Fibonacci, denotada por $R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, ($n \geq 1$), tende para φ à medida que n tende à infinito, bem como $\frac{1}{R_n} = \frac{F_n}{F_{n+1}}$, ($n \geq 1$), tende para φ^{-1} à medida que n tende à infinito. Como veremos, esta conjectura foi provada, em 1753, pelo matemático escocês Robert Simson (1687-1768). Mas, pouco mais de um século antes, Kepler já havia observado esta relação, como a descreve em uma carta destinada a um professor da cidade de Leipzig que data de 1608:

[...] quanto mais avançarmos a partir do primeiro número, mais perfeito fica o exemplo. Sejam os menores números 1 e 1...some-os, e a soma será 2; some esse com o último dos uns, resultando 3. Some 2 a isso, e tenha 5. Some 3, e tenha 8; 5 e 8, 13; 8 e 13, 21. Assim como 5 está para 8, 8 está para 13, aproximadamente, e 8 está para 13, assim como 13 está para 21, aproximadamente. Johannes Kepler (1608 *apud* LÍVIO, 2009, p. 176).

Apresentaremos a demonstração dessa conjectura para o caso em que a sequência R_n se aproxima de φ . O caso em que $\frac{1}{R_n}$ se aproxima de φ^{-1} é totalmente análogo. Mas, para tanto, antes analisaremos duas subsequências de $(R_n) = (1; 2; 1,5; 1,\bar{6}; 1,6; 1,625; \dots)$. A subsequência de índices pares R_{2n} e a subsequência de índices ímpares R_{2n-1} . Por meio da tabela 4.2, observe que a subsequência de índices ímpares $R_{2n-1} = (1; 1,5; 1,\bar{6}; \dots)$ é estritamente crescente e limitada inferiormente por 1 e a subsequência de índices pares $R_{2n} = (2; 1,\bar{6}; 1,625; \dots)$ é estritamente decrescente e limitada superiormente por 2. Tal observação será demonstrada nas proposições 4.11 e 4.12.

Proposição 4.11. *A sequência R_n possui uma subsequência de índices ímpares R_{2n-1} estritamente crescente para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: A subsequência de índices ímpares R_{2n-1} é crescente se, e somente se, $R_{2n-1} < R_{2n+1}$, $\forall n \geq 1$ o que é equivalente a mostrar que $\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}$. Assim, dividindo a identidade $F_{2n+2}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+3} = 1$, referida na proposição

4.10, por $F_{2n-1}F_{2n+1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{F_{2n-1}F_{2n+1}} - \frac{F_{2n}F_{2n+3}}{F_{2n-1}F_{2n+1}} = \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{F_{2n+2}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+3}}{F_{2n-1}F_{2n+1}} = \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{F_{2n+2}F_{2n+1} - F_{2n}(F_{2n+1} + F_{2n+2})}{F_{2n-1}F_{2n+1}} = \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{F_{2n+2}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+2}}{F_{2n-1}F_{2n+1}} = \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{F_{2n+2}(F_{2n+1} - F_{2n}) - F_{2n}F_{2n+1}}{F_{2n-1}F_{2n+1}} = \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{F_{2n+2}F_{2n-1} - F_{2n}F_{2n+1}}{F_{2n-1}F_{2n+1}} = \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} = \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} > 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}
 \end{aligned}$$

Para tanto foi usada a seguinte identidade $F_{2n+1} - F_{2n} = F_{2n-1}$.

□

Proposição 4.12. *A seqüência R_n possui uma subseqüência de índices pares R_{2n} estritamente decrescente para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: A subseqüência de índices pares R_{2n} é decrescente se, e somente se, $R_{2n} > R_{2n+2}$, $\forall n \geq 1$ o que é equivalente a mostrar que $\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} > \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}$. Assim, dividindo a identidade $F_{2n+2}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+3} = 1$ por $F_{2n+2}F_{2n}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{F_{2n+2}F_{2n+1}}{F_{2n+2}F_{2n}} - \frac{F_{2n}F_{2n+3}}{F_{2n+2}F_{2n}} = \frac{1}{F_{2n+2}F_{2n}} \\
 \Leftrightarrow & \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} - \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}} = \frac{1}{F_{2n+2}F_{2n}} > 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} > \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}
 \end{aligned}$$

□

Na demonstração do limite da seqüência de razões entre números consecutivos

de Fibonacci, utilizaremos as proposições 4.11 e 4.12, da identidade de Cassini demonstrada da proposição 4.3 e do lema 4.13.

Lema 4.13. O Princípio dos Intervalos Encaixantes: *Se I_1, I_2, \dots é uma sequência de intervalos fechados e limitados tais que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$, e se o comprimento de $I_n, n \geq 1$, tende a zero quando n tende a infinito, então existe um, e somente um número real que pertence a todos os intervalos da sequência, ou seja, existe o limite.*

Teorema 4.14. O limite da sequência de razões entre números consecutivos de Fibonacci: *A sequência de Fibonacci é definida, recursivamente, por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \geq 1)$, com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Seja a razão entre números consecutivos de Fibonacci dada por $R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} (n \geq 1)$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.*

Demonstração: Seja $I_n = [R_{2n-1}, R_{2n}] (n \geq 1)$ uma sequência de intervalos fechados e limitados. Tal sequência é encaixante uma vez que a subsequência (R_{2n-1}) é estritamente crescente e limitada inferiormente por 1, assim como, a subsequência (R_{2n}) é estritamente decrescente e limitada superiormente por 2. Em consequência destas características, decorre que $[R_1, R_2] \supseteq [R_3, R_4] \supseteq [R_5, R_6] \supseteq \dots$. Agora, se mostrarmos que o limite do comprimento do n -ésimo intervalo tende a zero a medida que n tende a infinito, o lema 4.13 dos **intervalos encaixantes** nos garante que a sequência $[R_1, R_2], [R_3, R_4], [R_5, R_6] \dots$ possui um único número real que pertence a todos estes intervalos, de sorte que, o limite existe.

O comprimento de $I_n = [R_{2n-1}, R_{2n}], \forall n \geq 1$ é dado por $|I_n| = R_{2n} - R_{2n-1}$. A partir da identidade de Cassini $F_{2n}^2 = F_{2n-1}F_{2n+1} - (-1)^{2n}$, podemos obter uma expressão equivalente à $R_{2n} - R_{2n-1}$ para a análise do limite.

4.4 O limite da sequência de razões entre números consecutivos de Fibonacci

Dividindo $F_{2n}^2 = F_{2n} - 1F_{2n+1} - (-1)^{2n}$ por $F_{2n}F_{2n-1}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{F_{2n}^2}{F_{2n}F_{2n-1}} &= \frac{F_{2n-1}F_{2n+1}}{F_{2n}F_{2n-1}} - \frac{(-1)^{2n}}{F_{2n}F_{2n-1}} \\ \Leftrightarrow \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} &= \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} - \frac{(-1)^{2n}}{F_{2n}F_{2n-1}} && [2n \text{ é par para todo } n \in \mathbb{N}] \\ \Leftrightarrow \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} &= \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{2n}F_{2n-1}} \\ \Leftrightarrow \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} &= \frac{1}{F_{2n}F_{2n-1}} > 0 \end{aligned}$$

Como $\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} = R_{2n} - R_{2n-1}$, decorre que $R_{2n} - R_{2n-1} = \frac{1}{F_{2n}F_{2n-1}}$. Consequentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F_{2n}F_{2n-1}} = 0$. Segue que, o comprimento de $I_n, \forall n \geq 1$ tende a zero à medida que n tende a infinito. Portanto, visto que a sequência dos intervalos fechados $[R_1, R_2] \supseteq [R_3, R_4] \supseteq [R_5, R_6] \supseteq \dots$ é encaixante e $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$, pelo lema 4.13 temos que existe um único $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = L$.

Consideremos a relação de recorrência da sequência de Fibonacci dada por

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Dividindo-a por F_{n+1} , obtemos:

$$R_{n+1} = 1 + \frac{1}{R_n}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = L$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1} = L$ uma vez que (R_{n+1}) é uma subsequência de (R_n) . Decorre que,

$$L = 1 + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0$$

cujas raízes são iguais a

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Temos que a sequência (R_n) possui apenas termos positivos, logo não pode convergir para $\varphi' < 0$. Portanto, conclui-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

□

4.4.1 A relação entre a sequência de Fibonacci e a mais simples das frações contínuas

Como vimos na seção 2.9.1, φ pode ser representado pela mais simples das frações contínuas infinitas

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad (4.4.1)$$

O que sugere que o valor de φ pode ser obtido por meio de aproximações sucessivas da fração contínua 4.4.1.

$$1 = 1,000; \quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2,000; \quad 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1,500; \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3} = 1,666$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5} = 1,600; \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}} = \frac{13}{8} = 1,625; \dots$$

Observe que essas aproximações sucessivas, que convergem para a Razão Áurea, formam a mesma sequência das razões entre números consecutivos da sequência de Fibonacci: $1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$, e como vimos, essa sequência converge para φ . Segundo Huntley (1985), este resultado, belo em sua simplicidade clara, evidencia a mais íntima relação entre a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci.

4.5 Sequências de Fibonacci generalizadas

“[...] φ , em conformidade com sua característica de aparecer inesperadamente em locais estranhos, está relacionado com qualquer sequência de inteiros formada de acordo com a lei segundo a qual cada termo é a soma dos dois termos anteriores, quaisquer que sejam os dois primeiros termos [...]. A razão de termos sucessivos, aproxima-se cada vez mais de φ à medida que n aumenta.”

H.E. Huntley

Uma característica marcante das relações de recorrências lineares de segunda ordem é o fato de que a sequência só é unicamente determinada se forem conhecidos seus dois primeiros termos. Caso isso não ocorra, podemos obter, a partir da mesma relação de recorrência, infinitas sequências distintas entre si, bastando apenas escolher arbitrariamente seus termos iniciais. Decorre que a relação de recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1$, em que os dois primeiros termos não são pré-determinados, produz sequências de Fibonacci distintas, as quais são conhecidas na literatura como sequências de Fibonacci generalizadas. Cada termo dessa sequência generalizada é conhecido como número de Fibonacci generalizado e é denotado por $G_n, \forall n \geq 1$. Para as sequências generalizadas denotaremos a relação de recorrência por $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n, \forall n \geq 1$.

Considerando os termos iniciais $G_1 = p$ e $G_2 = q$ com $p, q \in \mathbb{R}$, todas as sequências de Fibonacci generalizadas são da forma

$$p, q, 1p + 1q, 1p + 2q, 2p + 3q, 3p + 5q, 5p + 8q, \dots \quad (4.5.1)$$

Note que na sequência 4.5.1, os coeficientes sucessivos de p e q são os termos da sequência de Fibonacci. Assim, podemos representar tal sequência pela relação de

recorrência

$$G_{n+2} = F_n p + F_{n+1} q \quad \text{ou ainda,} \quad G_{n+2} = F_n G_1 + F_{n+1} G_2 \forall n \geq 1$$

Outra propriedade interessante dessas sequências é a de preservar sua intrínseca relação com a Razão Áurea. Segundo Knott (1998), em todos os aspectos das sequências generalizadas, são os próprios números de Fibonacci e a Razão Áurea que novamente assumem os papéis principais. Como mostraremos na proposição 4.15, a expressão para o termo geral para as sequências generalizadas $G_n = \alpha\varphi^n + \beta(\varphi')^n$ possui solução para quaisquer que sejam seus termos iniciais.

Proposição 4.15. *Seja uma sequência de Fibonacci generalizada obtida pela relação de recorrência $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n, \forall n \geq 1$. Então, existem α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $G_n = \alpha\varphi^n + \beta(\varphi')^n$*

Demonstração: Vamos provar este fato pelo segundo princípio da indução matemática. Para $n = 1$ e $n = 2$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha\varphi + \beta(\varphi') = F_1 \\ \alpha\varphi^2 + \beta(\varphi')^2 = F_2 \end{cases}$$

De fato, α e β são unicamente determinados uma vez que

$$\begin{vmatrix} \varphi & \varphi' \\ \varphi^2 & (\varphi')^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = \sqrt{5} \neq 0$$

Em que $\alpha = \frac{\varphi' F_1 - F_2}{\varphi(F_2 - F_1)}$ e $\beta = \frac{\varphi F_1 - F_2}{\varphi'(F_1 - F_2)}$.

Agora, suponhamos que, para todo natural $2 < n \leq k+1$, seja válida a expressão $F_n = \alpha\varphi^n + \beta(\varphi')^n$.

Por hipótese de indução temos $F_k = \alpha\varphi^k + \beta(\varphi')^k$ e $F_{k+1} = \alpha\varphi^{k+1} + \beta(\varphi')^{k+1}$.

Queremos provar que $F_{k+2} = \alpha\varphi^{k+2} + \beta(\varphi')^{k+2}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
 F_{k+2} &= F_{k+1} + F_k \\
 &= \alpha\varphi^{k+1} + \beta(\varphi')^{k+1} + \alpha\varphi^k + \beta(\varphi')^k \\
 &= \alpha\varphi^k(\varphi + 1) + \beta(\varphi')^k(\varphi' + 1) \\
 &= \alpha\varphi^k(\varphi^2) + \beta(\varphi')^k[(\varphi')^2] \\
 &= \alpha\varphi^{k+2} + \beta(\varphi')^{k+2}
 \end{aligned}$$

□

Mais interessante ainda é supor que, quaisquer que sejam os dois termos iniciais da sequência, a razão entre dois termos consecutivos $\frac{G_{n+1}}{G_n}$ se aproxima da Razão Áurea à medida em que n tende para infinito. Demonstraremos essa propriedade no teorema 4.16.

Teorema 4.16. O limite da razão entre números consecutivos da sequência de Fibonacci generalizada: *Seja $G_n = \alpha\varphi^n + \beta(\varphi')^n$ uma sequência de Fibonacci generalizada não nula. Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ a sequência $\frac{G_{n+1}}{G_n}, \forall n \geq 1$ é constante com termos iguais a φ' e, portanto, possui limite igual a φ' . Se $\alpha \neq 0$, a sequência $\frac{G_{n+1}}{G_n}, \forall n \geq 1$, é convergente com limite igual à φ .*

Demonstração: Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ então $G_n = \beta(\varphi')^n$.

Logo, $\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{\beta(\varphi')^{n+1}}{\beta(\varphi')^n} = \varphi', \forall n \geq 1$. Portanto, a sequência é constante e possui limite igual a φ' .

Se $\alpha \neq 0$, observemos a priori que existe um único n tal que $G_n = 0$. De fato,

- se $\beta = 0$ então $G_n = \alpha\varphi^n \neq 0, \forall n \geq 1$.
- se $\beta \neq 0$, então $G_n = \alpha\varphi^n + \beta(\varphi')^n = 0 \Leftrightarrow \alpha\varphi^n = -\beta(\varphi')^n \Leftrightarrow \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Como $\varphi' \neq \varphi$, as potências $\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n$ são todas distintas. Decorre que a igualdade

$\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n = -\frac{\alpha}{\beta}$ se verifica para, no máximo, um valor n_0 . Portanto, a partir de um certo natural n pode-se construir a sequência $\frac{G_{n+1}}{G_n}$. Desse modo, por meio de algumas manipulações algébricas obtemos

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{\alpha\varphi^{n+1} + \beta(\varphi')^{n+1}}{\alpha\varphi^n + \beta(\varphi')^n} = \varphi \frac{(\alpha + \beta\theta^{n+1})}{(\alpha + \beta\theta^n)}$$

Em que $\theta = \frac{\varphi'}{\varphi} = -0,38196\dots$. Assim, pelo Teorema do Teste da Razão, como $|\theta| < 1$ então temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta^n = 0$. Utilizando as propriedades operatórias de limite, tem-se que $\frac{G_{n+1}}{G_n}$ é convergente com limite igual a φ .

□

Dentre essas sequências de Fibonacci generalizadas, uma em especial com termos iniciais iguais a 2 e 1, foi extensivamente estudada pelo matemático francês François Edouard Anatole Lucas (1842-1891) e após sua publicação, em 1877, ficou conhecida como sequência de Lucas (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...), a qual possui inúmeras identidades relacionadas aos números de Fibonacci.

Faz-se necessário ressaltar que, em nosso contexto, nos limitamos à índices naturais para a sequência de Fibonacci bem como suas generalizadas. Mas, segundo Dunlap (1997), Edouard Lucas mostrou que tais sequências podem ser estendidas à índices inteiros.

4.6 A sequência de Fibonacci na Natureza

“Vejo o número cinco em quase todas as flores que se tornam frutas, isto é, criação, e que existem não por sua própria razão, mas pela fruta que virá a seguir [...]. Na minha opinião, a propagação das plantas e os atos reprodutivos dos animais estão na mesma razão da proporção geométrica, ou proporção representada por segmentos de linhas, e a proporção expressa aritmética ou numericamente.”

Johannes Kepler apud Mário Lívio⁷

A filotaxia (*phyllotaxis*, do grego: arranjo das folhas) é o ramo da Botânica dedicado ao estudo dos padrões na disposição das folhas ao longo do caule das plantas. O principal interesse do botânico na disposição das folhas é a maneira como elas estão separadas entre si, pois este é um fator determinante para assegurar a exposição destas folhas à umidade do ar e à luz solar.

O crescimento do caule e do ramo de uma planta produz folhas que são distribuídas ao longo desse caule com um espaçamento regular. Tais folhas crescem em posições que otimizam sua exposição aos fatores ambientais essenciais para o seu desenvolvimento. A disposição dessas folhas é caracterizada por uma espiral que passa pelo ramo de cada folha até chegar no primeiro ramo diretamente acima do ramo inicial, conforme figura 4.3. Considerando p o número de voltas da espiral em torno do caule para passar pelos ramos e q o número de ramos por onde a espiral passou, então a fração $\frac{p}{q}$ representa a chamada razão filotóxica das plantas.

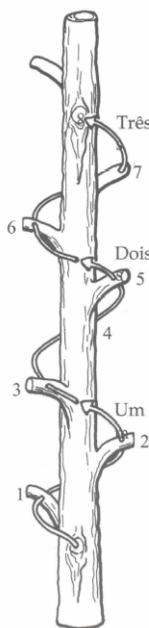


Figura 4.3: A disposição das folhas caracterizada por uma espiral. (LÍVIO, 2009, p. 130)

⁷Johannes Kepler (1608 *apud* LÍVIO, 2009, p. 178).

Huntley (1985) e Lívio (2009), elencam as razões filotáticas de algumas plantas conforme tabela 4.3:

Razão filotática	Tipo de plantas
$\frac{1}{2}$	gramíneas comuns; tílias americanas
$\frac{1}{3}$	ciperáceas; aveleira; amoreira; faia
$\frac{2}{5}$	macieira; carvalho; damasqueiro
$\frac{3}{8}$	tanchagens; pereira; salgueiro-chorão
$\frac{5}{13}$	liliáceas

Tabela 4.3: Razão filotática de algumas plantas. (A autora)

Essas razões filotáticas exibem a relação entre filotaxia e os números de Fibonacci. Segundo Huntley (1985), tais frações são as convergentes da fração contínua 4.6.1 que, quando prolongada um número infinito de termos, converge para o recíproco de φ^2 .

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad (4.6.1)$$

A regra geral de que estas razões filotáticas podem ser expressas por números da sequência de Fibonacci é o resultado de pesquisas realizadas no século XIX pelos botânicos Karl Friedric Schimper (1803-1867), Alexander Braun (1805-1877), Louis Bravais (1801-1843) e do cristalógrafo⁸ Auguste Bravais (1811-1863). Além disso, eles também observaram relações entre números de Fibonacci consecutivos e o conjunto de linhas espirais de pinhas e abacaxis.

Os irmãos Bravais descobriram que, conforme o caule das plantas cresce, as folhas prosseguem, em geral, sob o mesmo ângulo de, aproximadamente, $137,5^\circ$. Observe que $\frac{360^\circ}{\varphi} = 222,5^\circ$ é o replemento de $137,5^\circ$, ângulo este que ficou conhecido na

⁸Ciência que classifica e descreve os cristais.

4.6 A sequência de Fibonacci na Natureza

literatura como *ângulo áureo*. Logo após esta descoberta, um resultado muito importante também foi observado

num trabalho pioneiro em 1907, o matemático alemão G. van Iterson mostrou que, se considerarmos pontos sucessivos separados por $137,5^\circ$ em espirais firmemente enroladas, nossa vista iria perceber uma família de padrões espirais girando no sentido horário e uma no anti - horário. Os números de espirais nas duas famílias tendem a ser números consecutivos de Fibonacci, pois a razão desses números se aproxima da Razão Áurea. (LÍVIO, 2009, p. 132).

Um belo exemplo desse tipo de espirais é o arranjo das sementes dos girassóis que estão em um padrão de espirais tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário. A quantidade dessas espirais depende do tamanho do girassol, o mais comum é o girassol que possui 34 espirais em um dos sentidos e 55 no outro. Observe que a quantidade de espirais trata-se de números consecutivos de Fibonacci, assim como os girassóis com 89 e 55, 89 e 144 espirais em sentidos opostos.



Figura 4.4: Margarida. (KNOTT, 1998, documento eletrônico)

A otimização na disposição das sementes do girassol é justificada pelo ângulo, observado por Iterson, de $137,5^\circ$ que corresponde a $\frac{1}{\varphi} \cong 0,618$ rotações de $222,5^\circ$. Essa otimização está relacionada ao grau de irracionalidade do número de rotações

considerados, quanto maior for o grau de irracionalidade menor é a chance das sementes retornarem a posição inicial, evitando-se o alinhamento das sementes.

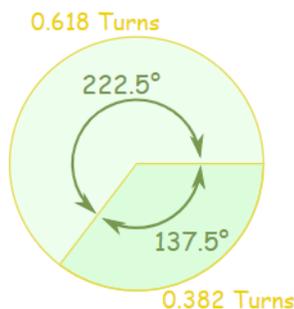


Figura 4.5: Ângulo áureo. (PIERCE, 2018, documento eletrônico)

Através de um simulador *online*⁹ podemos observar a disposição das sementes do girassol de acordo com o número de rotações que desejarmos. Uma vez que esta disposição depende do grau de irracionalidade, seria interessante considerarmos o número π que é um irracional transcendente. Porém, ao considerarmos π rotações, obtemos uma disposição que contém grandes lacunas, mas se considerarmos φ ou $\frac{1}{\varphi}$ rotações, a disposição das sementes do girassol é otimizada uma vez que consideramos o “mais irracional” dos irracionais.

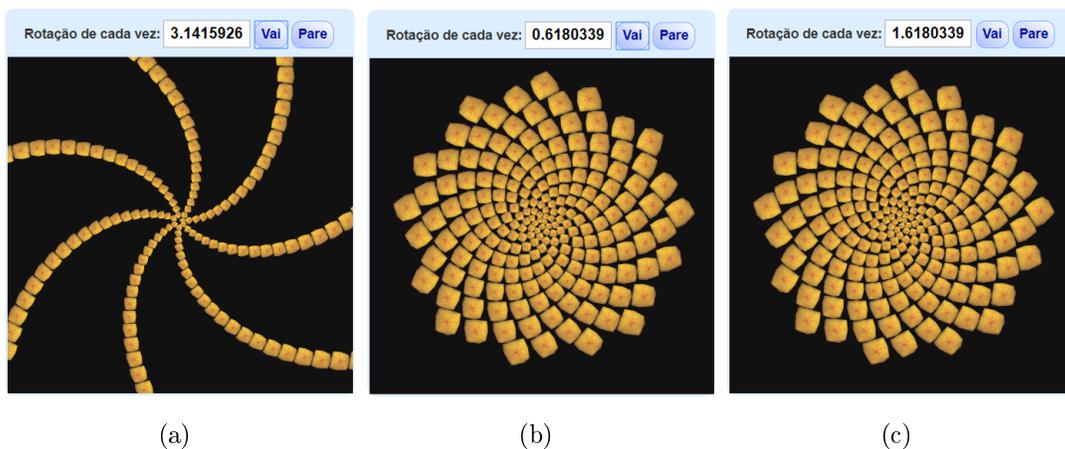


Figura 4.6: (a) π rotações. (b) $\frac{1}{\varphi}$ rotações. (c) φ rotações. (PIERCE, 2018, documento eletrônico)

⁹O simulador *online* da otimização na disposição das sementes de girassol está disponível em: <https://www.mathsisfun.com/numbers/nature-golden-ratio-fibonacci.html>.

4.6 A sequência de Fibonacci na Natureza

O número de pétalas de algumas flores também revelam números de Fibonacci, bem como alguns números de Lucas. Como mostra a figura 4.7.



Figura 4.7: Flores com 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 pétalas. (*Google Imagens*)

Observe que 2, 3, 5 e 8 são números de Fibonacci e 4 é um número de Lucas. Mas, é importante observar que muitos desses números que ocorrem na natureza, geralmente, são números de Fibonacci mas,

deve-se admitir francamente que em algumas plantas os números não pertencem à sequência de números de Fibonacci, mas à sequência de Lucas, ou mesmo às sequências ainda mais anômalas 3, 1, 4, 5, 9,... ou 5, 2, 7, 9, 16,... Assim, devemos encarar o fato de que a filotaxia não é realmente uma *lei* universal, mas apenas uma *tendência* fascinante e predominante. (COXETER, 1969, p. 172).

Portanto, as regras da filotaxia não é uma lei que se aplica a todas as circunstâncias e como observou Zahn (2011), em seu livro *A sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*, não podemos sair mundo à fora “fibonatizando” tudo que aparece em nossa frente.

4.7 A relação entre as potências de φ e a sequência de Fibonacci

As relações entre os números de Fibonacci e a Razão Áurea não se limitam às propriedades até aqui mencionadas, apresentaremos mais duas proposições que relacionam as potências de φ e a sequência de Fibonacci com base em Zahn (2011) e Contador (2007). Para tanto, consideremos a priori a equação característica da recorrência que define a sequência de Fibonacci $r^2 = r + 1$ e sua raiz positiva $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$. Obtemos assim a equação $\varphi^2 = \varphi + 1$ que se multiplicada sucessivamente por φ , produz a seguinte sequência

$$\begin{aligned}\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi \\ \varphi^4 &= \varphi^3 + \varphi^2 \\ \varphi^5 &= \varphi^4 + \varphi^3 \\ \varphi^6 &= \varphi^5 + \varphi^4 \\ &\vdots \\ \varphi^{n+2} &= \varphi^{n+1} + \varphi^n\end{aligned}$$

Tal sequência nos leva a conjecturar que $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n, \forall n \geq 0$. Provaremos esta conjectura na proposição 4.17.

Proposição 4.17 (Soma de potências de φ). *A soma de duas potências consecutivas de φ é igual a potência de φ subsequente $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n, \forall n \geq 0$*

Demonstração: Para o caso em que $n = 0$ basta observar que

$$\varphi^2 = \varphi^1 + \varphi^0 = \varphi + 1$$

Agora, para os casos em que $n \geq 1$, basta observar que

$$\varphi^{n+2} = \varphi^n \varphi^2 = \varphi^n (\varphi + 1) = \varphi^{n+1} + \varphi^n$$

□

À partir da validade da proposição 4.17, obtemos uma sequência interessante

$$(\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7, \varphi^8, \dots) \quad (4.7.1)$$

A priori, podemos classificá-la como uma sequência de Fibonacci generalizada com termos iniciais iguais a 1 e φ , uma vez que cada potência de φ é obtida pela soma de duas potências de φ antecedentes. Além disso, também podemos classificá-la como uma progressão geométrica de razão igual à φ , motivo pelo qual esta sequência é conhecida como *progressão geométrica áurea*. Nessas circunstâncias, temos uma sequência numérica simultaneamente geométrica e aditiva que, segundo Contador (2007), este é o motivo pelo qual esta sequência desempenha papel de grande importância no estudo do crescimento e da vida de organismos, em especial na botânica.

Pelo fato de 4.7.1 tratar-se de uma sequência de Fibonacci generalizada, uma vez que cada termo é obtido pela soma dos dois termos antecedentes, obtém-se de 4.5.1 que a progressão geométrica áurea também pode ser escrita da seguinte forma

$$(1, \varphi, 1 + \varphi, 1 + 2\varphi, 2 + 3\varphi, 3 + 5\varphi, 5 + 8\varphi, \dots, F_{n-1} + F_n\varphi)$$

ou seja, $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi, \forall n > 1$. Tal conjectura pode ser provada, novamente, pela indução matemática.

Proposição 4.18. (Potências de φ) $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi, \forall n > 1$.

Demonstração: Vamos provar tal proposição pelo princípio da indução matemática.

4.7 A relação entre as potências de φ e a sequência de Fibonacci

tica. Observe que a expressão $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi$ é válida para $n = 2$ como segue

$$\varphi^2 = F_1 + F_2\varphi = 1 + \varphi$$

Agora, suponhamos que, para todo natural $2 < n \leq k$, seja válida a expressão $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi$.

Por hipótese de indução, temos $\varphi^k = F_{k-1} + F_k\varphi$.

Queremos mostrar a validade de $\varphi^{k+1} = F_k + F_{k+1}\varphi$. Assim,

$$\begin{aligned}\varphi^{k+1} &= \varphi^k\varphi \\ &= (F_{k-1} + F_k\varphi)\varphi \\ &= F_{k-1}\varphi + F_k\varphi^2 \\ &= F_{k-1}\varphi + F_k(1 + \varphi) \\ &= F_{k-1}\varphi + F_k + F_k\varphi \\ &= F_k + (F_{k-1} + F_k)\varphi \\ &= F_k + F_{k+1}\varphi\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi, \forall n > 1$.

□

Agora estamos em condições favoráveis para retornarmos ao sofisma geométrico decorrente da identidade observada por Kepler, referente à proposição 4.3, que foi apresentada por Sam Loyd.

Considere um quadrado, como descrito no sofisma, cujo comprimento do lado seja igual a soma de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci generalizada 4.7. O retângulo formado pela justaposição das quatro peças terá encaixe perfeito, sem sobra ou excesso de área, ou seja, a área do quadrado será exatamente igual a área do retângulo. Podemos então concluir que o sofisma não ocorre quando a

4.8 O teorema de Zeckendorf e a decomposição em números de Fibonacci por sequências binárias finitas

sequência considerada for a sequência de Fibonacci generalizada cujos termos iniciais são iguais a 1 e φ . Em concordância com a figura 4.8.

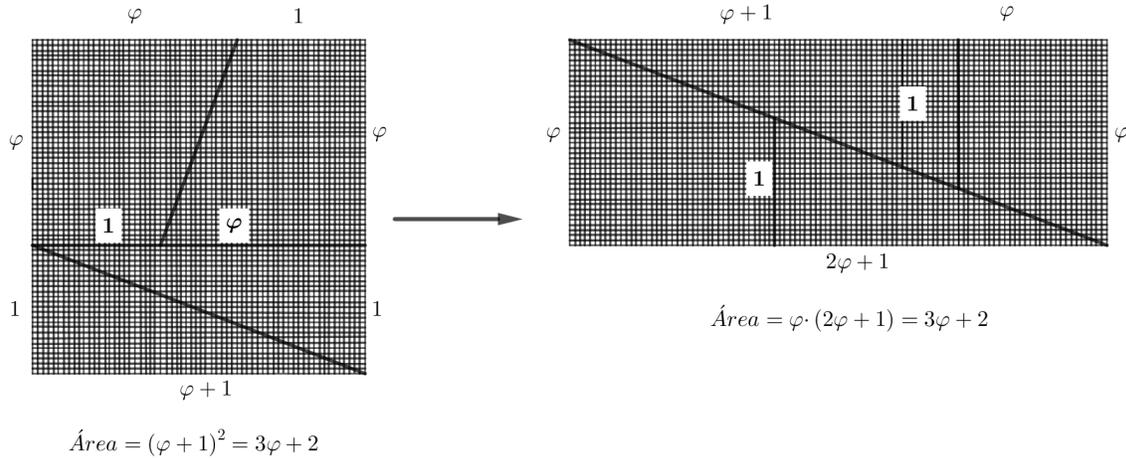


Figura 4.8: Interpretação geométrica. Adaptado de (HUNTLEY, 1985, p. 57)

4.8 O teorema de Zeckendorf e a decomposição em números de Fibonacci por sequências binárias finitas

Durante a II Guerra Mundial (1939-1945), conflito militar entre a maior parte das nações do mundo, um oficial do exército Belga concederia à Matemática um teorema que relaciona todo inteiro positivo com a sequência de Fibonacci. Segundo Kimberling (1998), Edouard Zeckendorf (1901-1983), nascido em Liège, na Bélgica, iniciou seus estudos logo após o fim da I Guerra Mundial e formou-se médico cirurgião em 1925, mesmo ano em que tornou-se oficial do exército Belga. Em 1939, eclode a II Guerra Mundial e, em 1940, o exército Alemão invade a Bélgica e Zeckendorf torna-se prisioneiro de guerra onde permaneceu até 1945 prestando assistência médica aos prisioneiros aliados. Neste período, Zeckendorf, um apreciador da matemática, desenvolveu seu trabalho em Teoria dos Números no qual enunciou o teorema que hoje é conhecido por seu nome. Zeckendorf mostrou que todo número inteiro positivo pode ser escrito, de forma única, como soma de números de

Fibonacci distintos e não consecutivos. Para tanto, considerou o conjunto de números de Fibonacci (F_2, F_3, F_4, \dots) um conjunto completo, uma vez que o interesse concentra-se em números de Fibonacci distintos.

Para compreendermos melhor o teorema, tomemos como exemplo o número 10 que pode ser escrito como $5 + 3 + 2$ ou $8 + 2$. Observe que na primeira representação temos três números de Fibonacci consecutivos, o que não pode ocorrer de acordo com o enunciado do Teorema de Zeckendorf, deste modo $10 = 8 + 2 = F_6 + F_3$. É interessante observar que na impossibilidade de utilizar-se de dois números de Fibonacci consecutivos, podemos utilizar o número subsequente que é exatamente igual à soma dos dois antecedentes, ou seja, $5 + 3 = 8$. Este fato garante a unicidade da escrita como soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos.

Provaremos esse teorema com base na demonstração de Cerioli (2003), para tanto, utilizaremos uma junção das identidades descritas nas proposições 4.4 e 4.5, da qual decorre a igualdade $F_{k-1} + F_{k-3} + \dots + F_c = F_k - 1$, onde $c = 3$ sempre que k for par e $c = 2$ sempre que k for ímpar.

Teorema 4.19. Teorema de Zeckendorf: *Todo inteiro positivo pode ser escrito de forma única como soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos.*

Demonstração: Por meio do método de indução, vamos provar que todo inteiro positivo pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos. A priori, observe que o teorema é válido para $n < 4$ pois, neste caso, n é um número de Fibonacci. Portanto, consideremos $n \geq 4$ e suponhamos que todo inteiro positivo menor que n pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos.

Tomemos o maior número de Fibonacci F_n tal que $F_n \leq n \leq F_{n+1}$, o que é sempre possível já que a sequência de Fibonacci é estritamente crescente. Desta forma, temos que $n = F_n + k$ sendo k inteiro tal que $0 \leq k < n$ e $k < F_{n-1}$. Se não fosse assim, teríamos uma contradição $n = F_n + k \geq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$.

4.8 O teorema de Zeckendorf e a decomposição em números de Fibonacci por sequências binárias finitas

Agora, se $k = 0$ então temos que $n = F_n$ e nada nos resta provar. Mas, se $k > 0$ e sendo $k < n$ temos, por hipótese de indução, que k pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos, não consecutivos e menores que F_{n-1} . Decorre que $n = F_n + k$ também pode ser escrito dessa forma, ou seja, tem-se uma decomposição de n em soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos.

Além disso, tal decomposição é única. Suponha, por absurdo, que existam duas decomposições distintas de n . Assim, teríamos duas sequências binárias distintas a e b tais que $n = b_2F_2 + \dots + b_nF_n = a_2F_2 + \dots + a_nF_n$. Sem perda de generalidade, seja $a_k = 1$ e $b_k = 0$, de forma que k seja o maior índice possível para o qual as sequências diferem. Assim, $a_2F_2 + \dots + a_kF_k = b_2F_2 + \dots + b_{k-1}F_{k-1}$.

Se $a_k = 1$ então $a_2F_2 + \dots + a_kF_k \geq F_k$. Por outro lado, observe que as possibilidades para a soma do tipo $b_{k-2}F_{k-2} + b_{k-1}F_{k-1}$ são as seguintes:

- se $b_{k-2} = 0$ e $b_{k-1} = 1$ então $b_{k-2}F_{k-2} + b_{k-1}F_{k-1} = F_{k-1}$;
- se $b_{k-2} = 1$ e $b_{k-1} = 0$ então $b_{k-2}F_{k-2} + b_{k-1}F_{k-1} = F_{k-2}$;
- se $b_{k-2} = b_{k-1} = 0$ então $b_{k-2}F_{k-2} + b_{k-1}F_{k-1} = 0$

Das hipóteses acima temos que F_{k-1} é o maior valor possível para a soma, ou seja, $b_{k-2}F_{k-2} + b_{k-1}F_{k-1} \leq F_{k-1}$. Analogamente, temos que $b_{k-4}F_{k-4} + b_{k-3}F_{k-3} \leq F_{k-3}$. Decorre, então, a desigualdade $b_2F_2 + \dots + b_{k-1}F_{k-1} \leq F_{k-1} + F_{k-3} + \dots + F_c$ onde $c = 3$ sempre que k for par e $c = 2$ sempre que k for ímpar. Assim, pelas proposições 4.4 e 4.5, temos que $b_2F_2 + \dots + b_{k-1}F_{k-1} \leq F_{k-1} + F_{k-3} + \dots + F_c = F_k - 1 < F_k$. O que implica em uma contradição.

□

Além da representação única de um número inteiro positivo como soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos, podemos representar esta soma por

4.8 O teorema de Zeckendorf e a decomposição em números de Fibonacci por sequências binárias finitas

sequências binárias finitas (0s e 1s), como por exemplo,

$$10 = 8 + 2 = F_6 + F_3 = \mathbf{1}F_6 + \mathbf{0}F_5 + \mathbf{0}F_4 + \mathbf{1}F_3 + \mathbf{0}F_2.$$

Tal representação pode ser denotada por $10 = (10010)_F$ que segue o padrão da representação de um número inteiro positivo na base binária. Segundo Dunlap (1997), o sistema binário têm como fundamento o fato de que as potências de base 2 formam um conjunto completo, o que significa que qualquer inteiro positivo M pode ser escrito como soma de um número finito de potências de base 2.

Essa representação é feita escolhendo-se adequadamente os coeficientes binários $\sigma_i = (0, 1)$. Simbolicamente,

$$M = \sum_{i=0}^n \sigma_i 2^i, \text{ sendo } n \text{ tal que } 2^n \leq M < 2^{n+1}$$

Por exemplo, a representação binária do número

$$10 = 8 + 2 = 2^3 + 2^1 = \mathbf{1}.2^3 + \mathbf{0}.2^2 + \mathbf{1}.2^1 + \mathbf{0}.2^0$$

tal que $2^3 \leq 10 < 2^4$ pode ser denotada por $10 = (1010)_2$.

Da mesma forma, todo número inteiro positivo N pode ser representado como uma soma finita de números de Fibonacci distintos e não consecutivos considerando apropriadamente os coeficientes binários $\sigma_i = (0, 1)$. Tal representação de N é chamada de decomposição de N em números de Fibonacci. Simbolicamente,

$$N = \sum_{i=2}^n \sigma_i F_i, \text{ sendo } n \text{ tal que } F_n \geq 1$$

Estabelecemos na tabela 4.4, um comparativo com a decomposição em números de Fibonacci, dos quinze primeiros inteiros positivos, e a decomposição binária dos mesmos. Observe que na decomposição em números de Fibonacci, não há ocorrência de 1s consecutivos, isso ocorre porque a decomposição garante que os números de

Fibonacci são não consecutivos.

Inteiro Positivo	Decomposição em números de Fibonacci	Decomposição binária
1	1	1
2	10	10
3	100	11
4	101	100
5	1000	101
6	1001	110
7	1010	111
8	10000	1000
9	10001	1001
10	10010	1010
11	10100	1011
12	10101	1100
13	100000	1101
14	100001	1110
15	100010	1111

Tabela 4.4: Decomposições em números de Fibonacci e binária dos quinze primeiros inteiros positivos. Adaptado de (DUNLAP, 1997, p. 75)

4.9 A corda dourada e os padrões na decomposição em números de Fibonacci

A corda dourada é obtida a partir da sequência determinada pelo problema dos coelhos. Se considerarmos a representação gráfica genealógica dos coelhos (Figura 4.1), apresentada no início deste capítulo, e simbolizarmos os casais de filhotes por 0s e os casais de adultos por 1s, obtemos a geração de coelhos a cada mês em cadeias de bits. Em concordância com os dados da tabela 4.5:

Mês	Geração de coelhos em cadeias de bits
1	1
2	10
3	101
4	10110
5	10110101
6	1011010110110
⋮	⋮
n	1011010110110...

Tabela 4.5: Geração de coelhos em cadeias de bits a cada mês. Adaptado de (KNOTT, 1998, documento eletrônico)

Segundo Knott (1998), a geração de coelhos em cadeias de bits a cada mês são chamadas de palavras finitas de Fibonacci e são obtidas considerando-se a junção das cadeias de bits dos dois meses antecedentes ao mês em questão. Por exemplo, no mês 4 temos a cadeia 10110 em que 101 é a cadeia referente ao mês 3 e 10 é a cadeia referente ao mês 2, e assim sucessivamente. À medida em que n cresce indefinidamente, obtemos uma sequência infinita de bits não-periódica (1011010110110...) chamada de palavra de Fibonacci, sequência de coelho, sequência de ouro, ou ainda, corda dourada, expressão que usaremos em nosso contexto.

Analisando a tabela 4.5 observe que a quantidade de 1s nas cadeias de bits, mês após mês, determina uma sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8,...). Analogamente, à partir do segundo mês a quantidade de 0s determina a mesma sequência. O mais interessante é que a razão entre a quantidade de 1s e a quantidade de 0s em cada cadeia de bits tende para a Razão Áurea à medida em que n tende à infinito, o que decorre do fato de que esta razão é determinada por dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Além disso, a corda dourada é auto-similar em diferentes escalas. A seguir, descreveremos um exemplo de auto-similaridade. Mas, antes

lembre-se de que “auto-similaridade” significa simetria através da escala

de tamanho. A espiral logarítmica mostra auto-similaridade¹⁰ porque parece exatamente a mesma sob qualquer ampliação, assim como a série de pentágonos e pentagramas. Toda vez que você vai a um cabeleireiro, você vê uma série infinita de reflexos auto-similares de você mesmo entre dois espelhos paralelos. (LÍVIO, 2009, p. 240).

Considere a corda dourada (10110101101101011...) e, começando pela esquerda, marcaremos um grupo de três símbolos a cada 1 que encontrarmos na sequência, e marcaremos um grupo de dois símbolos a cada 0 que encontrarmos. De maneira que, não haja sobreposição de elementos em grupos distintos. Obtemos assim, a seguinte marcação

$$\overbrace{101} \overbrace{10} \overbrace{101} \overbrace{101} \overbrace{10} \overbrace{101} \dots$$

Agora, retiramos os dois primeiros símbolos de cada grupo de três e o primeiro símbolo de cada grupo de dois.

$$\underline{101} \underline{10} \underline{101} \underline{101} \underline{10} \underline{101} \dots$$

Desta forma, determina-se a sequência (1011010110...) que é a própria corda dourada. Segundo Lívio (2009), podemos obter outras ampliações da corda dourada apenas identificando qualquer padrão ou subsequência, ou seja, cada padrão observado dentro da corda dourada será encontrado dentro da própria sequência em uma outra escala. Assim, a infinita corda dourada possui cópias de si mesma, tal propriedade a caracteriza como um fractal (*fractus*, do latim: fragmentado). O conceito de fractal é “fundamental na geometria da natureza” que “representa uma tentativa brilhante de descrever as formas e os objetos do mundo real.” (LÍVIO, 2009, p. 241).

Há também um padrão entre as colunas da decomposição em números de Fibon-

¹⁰A espiral logarítmica e sua auto-similaridade serão exploradas no capítulo 5.1.

4.9 A corda dourada e os padrões na decomposição em números de Fibonacci

nacci e a corda dourada e esse padrão foi explorado nas páginas de Knott (1998). Observe que os números da primeira coluna na decomposição em números de Fibonacci na tabela 4.6, da direita para a esquerda, determinam a sequência (100101001001010...) que pode ser obtida a partir da corda dourada (1011010110110...) substituindo-se cada 1 da sequência por 10. Assim, obtemos a sequência (1001010010010100100...). Analogamente, podemos obter a sequência da segunda coluna (1000010010000100001...) substituindo-se cada 1 da corda dourada por 100 e cada 0 por 00. Assim, obtemos a sequência (10001001000100010010001000...).

Decimal	Fibonacci
1	1
2	10
3	100
4	101
5	1000
6	1001
7	1010
8	10000
9	10001
10	10010
11	10100
12	10101
13	100000
14	100001
15	100010

Tabela 4.6: Decomposição em números de Fibonacci. (A autora)

Observe como procedemos para obter as sequências determinadas pelas demais colunas da tabela 4.6 a partir da corda dourada:

Coluna 1: trocamos cada 1 por 10 e cada 0 por 0;

Coluna 2: trocamos cada 1 por 100 e cada 0 por 00;

Coluna 3: trocamos cada 1 por 11000 e cada 0 por 000;

Coluna 4: trocamos cada 1 por 11100000 e cada 0 por 00000;

Coluna 5: trocamos cada 1 por 1111100000000 e cada 0 por 000000000;

⋮

Coluna i : trocamos cada 1 por F_i dígitos 1 seguidos de F_{i+1} dígitos 0

e cada 0 por F_{i+1} dígitos 0.

Nota-se um padrão que envolve os números de Fibonacci na obtenção das sequências determinadas nas colunas da decomposição em números de Fibonacci a partir da corda dourada. Segundo Knott (1998), a escolha de 0s e 1s na representação da população dos coelhos não é arbitrária, pois esta é a linguagem usada pelos computadores e a corda dourada pode ser obtida através da criação de um programa de computador para calcular os números de Fibonacci por meio da relação de recorrência que os define. Além de representar uma codificação binária da sequência de Fibonacci, a corda dourada também pode ser transmitida por via sonora. Casey Mongoven, um compositor especialista em sonificação (*sonus*, do latim: som), dedicou sua pesquisa de doutorado (2008) ao valor estético da sequência de Fibonacci e da Razão Áurea em sonificações¹¹. Seu principal objetivo era criar um estilo de música que possui suas raízes nos números de Fibonacci e na Razão Áurea. Assim, ele criou sonificações da corda dourada, da sequência de Fibonacci, da Razão Áurea e, em uma parceria com Knott (1998), criou também uma sonificação para a representação de Zeckendorf.

¹¹A página de Casey Mongoven está disponível em: <http://caseymongoven.com/index.php?lang=en>.

CAPÍTULO 5

A ESPIRAL LOGARÍTMICA E A RAZÃO ÁUREA

Neste capítulo iremos descrever a interpretação de René Descartes (1596-1650) na resolução de um problema, proposto por Galileu Galilei (1564-1642), no qual fora conduzido a uma curva que possui propriedades singulares, conhecida como espiral logarítmica. Essa notável curva possui uma imensa família de espirais que diferem apenas por um fator de expansão e, desta família, exploraremos um membro cujo fator de expansão é igual a Razão Áurea. Com frequência essa espiral, conhecida como *espiral áurea*, é associada a estrutura da concha do pequeno molusco *nautilus*. Neste sentido, objetivamos averiguar a veracidade dos argumentos científicos que sustentam tal afirmação, alicerçados em estudos realizados pelos matemáticos George Markowsky, Clement Falbo e John Sharp.

5.1 Spira Mirabilis

“Eadem mutata resurgo (do latim: Embora mudado, ressurjo o mesmo).”

Jakob Bernoulli

Spira Mirabilis (do latim: A Espiral Maravilhosa), era a expressão usada pelo

5.1 Spira Mirabilis

matemático suíço Jakob Bernoulli (1654-1705) para referir-se à sua curva favorita, a espiral logarítmica. Mas antes de Bernoulli se render aos encantos dessa curva, Descartes foi o precursor nos estudos da espiral logarítmica.

Em 1637 Descartes apresentou a Geometria Analítica, sua principal contribuição à Matemática, em *Geometria*¹, o terceiro apêndice do seu mais renomado tratado publicado na França, o *Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências*². Segundo Broughton (2011), Descartes em uma carta escrita a Isaac Beeckman³ dizia que estava buscando uma “ciência inteiramente nova” que trataria uniformemente das duas maiores áreas nas quais a matemática estava tradicionalmente dividida: a aritmética (que lida com grandezas discretas) e a geometria (que lida com grandezas contínuas).” (BROUGHTON, 2011, p. 115). Ele teve a ideia de localizar um ponto P no plano por meio de suas distâncias em relação a duas retas perpendiculares (o eixo x e o eixo y), proporcionando desta forma o estudo analítico de muitas curvas que viriam a intrigar a mente dos matemáticos.

No livro II de *Geometria*, Descartes classifica as curvas como curvas geométricas e curvas mecânicas. As curvas geométricas eram consideradas como descritas precisas e exatas e as curvas mecânicas descritas como não precisas e não exatas, uma vez que as últimas são definidas, em geral, por meio de comprimentos de arcos.

No entanto, parece-me muito claro que, se fizermos a suposição habitual de que a geometria é precisa e exata, ao passo que a mecânica não o é, e se pensarmos na geometria como a ciência que provê o conhecimento geral da medida de todos os corpos, então não temos mais direito de excluir as curvas mais complexas do que as simples, desde que elas possam ser concebidas como se fossem descritas por um movimento contínuo ou por diversos movimentos sucessivos, cada movimento sendo completamente determinado por aqueles que o precedem. Pois, deste modo, é possível obter o conhecimento exato da grandeza de cada um. René Descartes (1637 *apud* BROUGHTON, 2011, p. 124).

¹Em francês: *La géométrie*.

²Em francês: *Discours de la méthode pour bien conduire as raison et chercher la vérité dans les sciences*.

³Isaac Beeckman (1588-1637) matemático e físico neerlandês era amigo de René Descartes com quem mantinha correspondências.

5.1 Spira Mirabilis

Descartes reconhece como curvas geométricas aquelas obtidas por meio de movimentos regulares e contínuos. Para a construção dessas curvas, ele elabora compassos complexos como o mesolábio⁴ e destaca que este instrumento pode ser pensado como uma máquina composta por diversas régulas arranjadas em conjunto que descreve curvas através de movimentos regulares. Na figura 5.1, considere YZ uma régua fixa e Y como eixo. Conforme giramos YZ no sentido anti-horário, as régulas fixas BC , DE e FG impulsionam as régulas deslizantes CD , EF e GH , respectivamente, fazendo com que os pontos móveis B , D , F , H , etc., descrevam as curvas geometricamente através de raciocínio analítico, podendo estas serem descritas por equações algébricas.

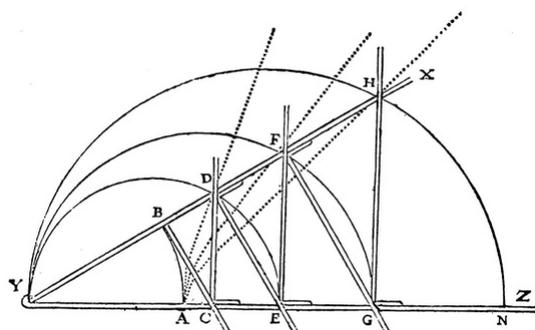


Figura 5.1: Mesolábio. (BROUGHTON, 2011, p. 115)

As curvas espirais eram classificadas por Descartes como curvas mecânicas que hoje são conhecidas como curvas transcendententes devido Leibniz (1646-1716), pois para ele essas curvas “devem ser concebidas como descritas por dois movimentos separados cuja relação não admite determinação exata” (BOYER, 1974, p. 250) e porque sua construção através de pontos determina apenas pontos particulares da curva e não todos os seus pontos, considerando assim que nenhuma curva mecânica poderia ser exatamente retificada.

é digno de nota que existe uma grande diferença entre esse método, no

⁴É um instrumento matemático dos antigos destinado a achar mecanicamente os meios proporcionais necessários para resolver geometricamente o problema da duplicação do cubo. (AULETE, documento eletrônico).

5.1 Spira Mirabilis

qual a curva é traçada pela descoberta de diversos de seus pontos, e aquele usado para a espiral e curvas semelhantes. Neste último, não se encontra indiferentemente todos os pontos da curva buscada, mas apenas aqueles pontos que podem ser determinados por um processo mais simples do que exigido para a composição da curva. Portanto, estritamente falando, não encontramos nenhum de seus pontos, isto é, nenhum daqueles que são tão particularmente pontos desta curva que não possam ser encontrados senão por intermédio dela. René Descartes (1637 *apud* BROUGHTON, 2011, p. 115).

Somente em 1638, através de um problema proposto no tratado *Dois novas ciências* de Galilei, publicado na França, que descreve a trajetória da queda de um objeto em queda livre sobre uma terra permeável que gira, Descartes se depara com uma “curva mecânica” retificável⁵ como a possível trajetória, a espiral logarítmica. Segundo Ramos (2013), a construção de Descartes para a determinação da espiral logarítmica é, em um primeiro momento, uma generalização da formulação que Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) utilizou para determinar a conhecida espiral de Arquimedes. Esta “espiral é definida como o lugar geométrico no plano de um ponto que se move, partindo da extremidade de um raio ou semirreta, uniformemente ao longo do raio enquanto esse por sua vez gira uniformemente em torno de sua origem.” (BOYER, 1974, p. 93).

Segundo Ramos (2013), Arquimedes, em seus estudos, parece ter determinado a tangente à espiral por meio de uma construção cinemática da curva e do paralelogramo de velocidades. Considerando um ponto P sobre a espiral sujeito a dois movimentos: um movimento radial uniforme, de modo que o ponto P afasta-se da origem das coordenadas e um movimento circular uniforme em torno da origem. Se a velocidade de afastamento de P em relação à origem for constante e igual a V_r (velocidade radial), e a velocidade da rotação em torno da origem também for constante e igual a ω (velocidade angular) então a é uma constante tal que $a = \frac{V_r}{\omega}$. Assim, a equação da espiral de Arquimedes, em coordenadas polares, é dada por

⁵Uma curva é retificável quando é possível encontrar a grandeza linear de um arco dessa curva.

5.1 Spira Mirabilis

$r = a\theta$, onde r é a distância de P ao pólo O , θ é o ângulo entre o eixo polar e o raio OP e a uma constante de proporcionalidade.

Arquimedes determina a tangente a esta espiral calculando a direção instantânea do movimento do ponto P através do resultante da composição dos dois movimentos: a velocidade radial V_r ao longo da linha OP (sendo O a extremidade do raio OP e a direção perpendicular da linha OP , “tal grandeza é dada pelo produto vetorial V_e da distância OP a partir da velocidade uniforme da rotação.” J. Vuillemin (1960, p. 39 *apud* RAMOS, 2013, p. 84).

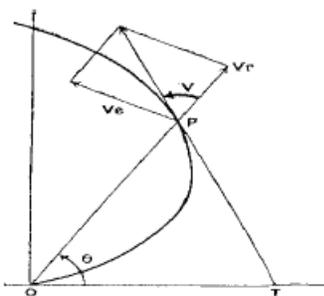


Figura 5.2: Determinação da reta tangente à espiral. J. Vuillemin (1960, p. 39 *apud* RAMOS, 2013, p. 84)

Segundo Vuillemin (1960 *apud* RAMOS, 2013, p. 83), assim como Arquimedes, Descartes compreende o movimento mecânico da espiral através dos logaritmos. Em sua construção, Descartes considera a terra como uma plataforma giratória que gira a uma velocidade angular ω constante e um objeto localizado em um raio inicial r_0 a uma distância r do centro da terra. Devido à rotação, o objeto é impulsionado com uma velocidade uniforme e afasta-se deste raio em uma trajetória perpendicular ao raio que fornece impulso e oblíqua ao raio seguinte. Este processo ocorre sucessivamente obtendo-se a espiral a partir dessas trajetórias.

O ângulo ν em que o objeto atinge o próximo raio é o ponto chave para a determinação da expressão analítica da trajetória do objeto, pois considerando como origem das coordenadas o ponto de origem do raio ou semirreta e representando por

5.1 Spira Mirabilis

ν o ângulo formado pelo raio vetor de um ponto qualquer da espiral (posição do objeto) e a tangente à curva neste mesmo ponto o ângulo ν será sempre constante, seja qual for a posição do objeto, pois considerando que a terra gira em velocidade angular ω constante, tem-se que os raios determinados pela trajetória do objeto são equidistantes entre si e a trajetória deste objeto é sempre perpendicular ao raio que o impulsiona, e portanto ν é constante.

Por meio do cálculo da tangente Descartes “admite que os valores da velocidade relativa e da velocidade da movimentação que correspondem àquelas que determinam o paralelogramo das velocidades dentro da espiral aritmética de Arquimedes são constituídas dentro da espiral mecânica.” (RAMOS, 2013, p. 85). Por esta construção cinemática de Descartes, a espiral é definida como o lugar de um ponto que se move sobre um raio vetorial através de uma velocidade proporcional à distância do centro. Em uma carta escrita à Mersenne em 1638, Descartes descreve as duas principais propriedades da espiral logarítmica:

Mas, essa espiral tem diversas propriedades que a tornam facilmente reconhecida. Ora, se A é o centro da terra e que $ANBCD$ é a espiral, havendo tirado as linhas retas AB , AC , AD , e semelhantes, tem-se a mesma proporção entre a curva ANB e a reta AB , que entre a curva $ANBC$ e a reta AC , ou $ANBCD$ e AD , e, assim as outras. E caso se obtendo as tangentes DE , CF , GB etc, os ângulos ADE , ACF , ABD etc, serão iguais. René Descartes (1638 *apud* RAMOS, 2013, p. 85-86).

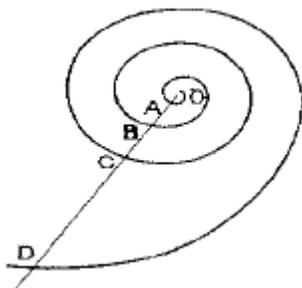


Figura 5.3: A espiral logarítmica construída por Descartes. J. Vuillemin (1960, p. 41 *apud* RAMOS, 2013, p. 87)

Desta forma, Descartes verifica que:

5.1 Spira Mirabilis

1. Os arcos da espiral são proporcionais aos raios, pois aumentando-se o ângulo θ em incrementos iguais, qualquer raio, traçado a partir da origem, aumenta em proporções iguais, ou seja, enquanto o ângulo θ aumenta em progressão aritmética, os raios, por sua vez, aumentam em progressão geométrica. Neste caso, a espiral logarítmica é também chamada de *espiral geométrica*.
2. Traçando um raio a partir de qualquer ponto da espiral até seu centro, o ângulo formado por esse raio e pela tangente à curva nesse ponto é constante. A espiral logarítmica é a única curva que possui esta propriedade, e por este motivo Descartes a nomeou como *espiral equiangular*.

Segundo Boyer (1974), se não fosse a rejeição pelas curvas mecânicas, Descartes teria antecedido Torricelli na descoberta da primeira retificação de uma curva não algébrica. Foi em 1645 que o discípulo de Galileu, Evangelista Torricelli (1608-1647), geômetra e físico, mostrou por métodos infinitesimais “que o comprimento do arco de P ao pólo é igual ao comprimento da linha tangente à espiral em P , medida entre P e o eixo dos y . Torricelli tratou a espiral como uma sucessão de raios, aumentando em progressão geométrica enquanto θ aumenta aritmeticamente.” (MAOR, 2008, p. 160-161). Isto significa que, se a partir de qualquer ponto sobre a espiral seguirmos em direção ao pólo, descreveremos um número infinito de rotações sem nunca chegarmos até ele, mas ainda assim o comprimento da espiral será finito.

5.1 Spira Mirabilis

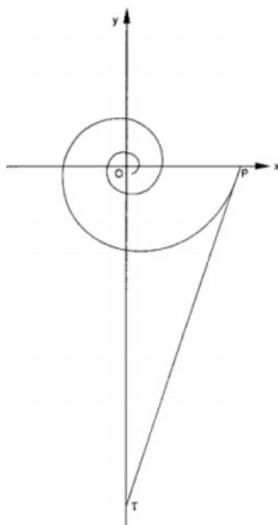


Figura 5.4: A retificação da espiral logarítmica. (MAOR, 2008, p. 162)

Neste momento, pode-se compreender porque Bernoulli tinha verdadeiro fascínio pela espiral logarítmica. Encantado com a forma como a espiral se reproduz após ser submetida à várias transformações, ele dedicou seus estudos a ela e mostrou notáveis propriedades que até então não haviam sido observadas antes. Segundo a descrição de Boyer (1974): (a) a evoluta de uma espiral logarítmica é uma espiral logarítmica igual; (b) a curva pedal de uma espiral logarítmica em relação ao seu pólo é uma espiral logarítmica igual; (c) a cáustica por reflexão para raios emanando do pólo é uma espiral logarítmica igual; (d) a cáustica por refração para raios emanando do pólo é uma espiral logarítmica igual. Entretanto, não adentraremos nesta seara, uma vez que nosso interesse se restringe às duas propriedades descritas acima de auto-semelhança e equiangularidade. Nas palavras de Bernoulli,

Como esta maravilhosa espiral, com sua peculiaridade tão singular e encantadora...sempre produz uma espiral semelhante a ela mesma, de fato precisamente a mesma espiral, não importa como tenha sido refletida, refratada ou involuída...ela pode ser usada como um símbolo, ou de constância na adversidade, ou do corpo humano, que depois de todas as suas mudanças, mesmo depois da morte, será restaurado à sua forma exata e perfeita. Thomas Hill (1875, p. 515-516 *apud* MAOR, 2008, p. 166).

Todas essas propriedades impressionou Bernoulli de tal forma que o levou a expressar o desejo de que em sua lápide fosse gravada uma espiral logarítmica com a inscrição, *Eadem mutata resurgo* (do latim: *Embora mudado, ressurjo o mesmo*).

5.2 A expressão analítica da espiral logarítmica

A espiral logarítmica é o lugar geométrico dos pontos no plano que descrevem a trajetória de um ponto que se move ao longo do raio vetor com velocidade proporcional à distância já percorrida neste raio, enquanto este por sua vez, gira em torno do pólo com velocidade angular constante.

Esta curva pode ser descrita por uma expressão analítica cujo raio r é definido em função do ângulo θ que é dada, em coordenadas polares, por $r = r_0\mu^\theta$.

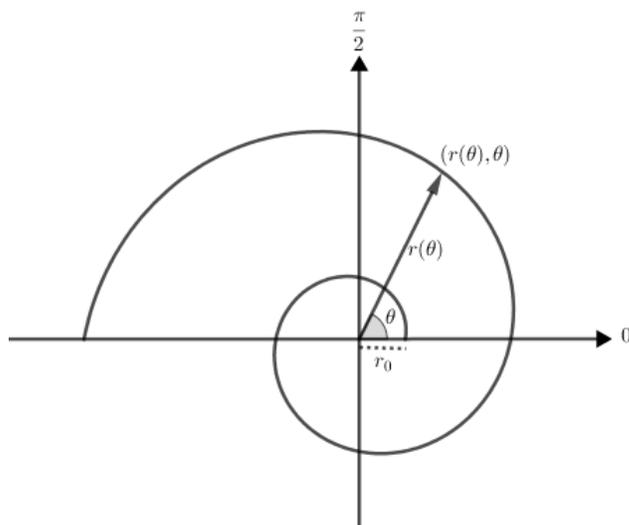


Figura 5.5: A espiral $r = r_0\mu^\theta$. (A autora)

em que r_0 é o raio do ponto inicial no eixo polar associado ao ângulo polar $\theta = 0$ e μ^θ representa a relação de expansão correspondente à rotação através de θ radianos, onde o ângulo polar θ varia continuamente de $-\infty$ a $+\infty$. À medida em que θ aumenta a curva estende-se para fora, afastando-se do pólo indefinidamente de forma que a distância entre as espirais também aumenta.

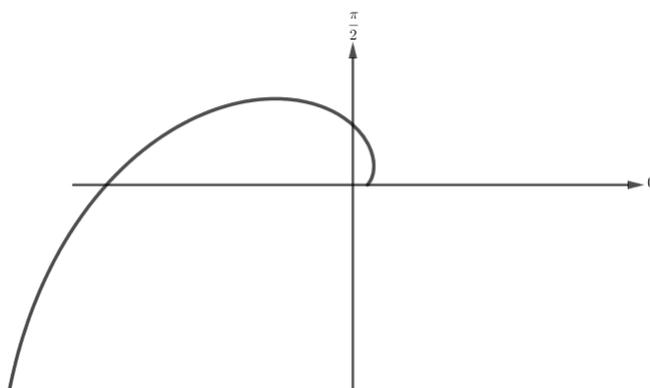


Figura 5.6: A espiral com θ variando positivamente. (A autora)

E a medida em que θ assume valores negativos cada vez maiores, em termos de valor absoluto, a curva se enrola em torno do pólo descrevendo um número infinito de rotações sem nunca alcançá-lo.

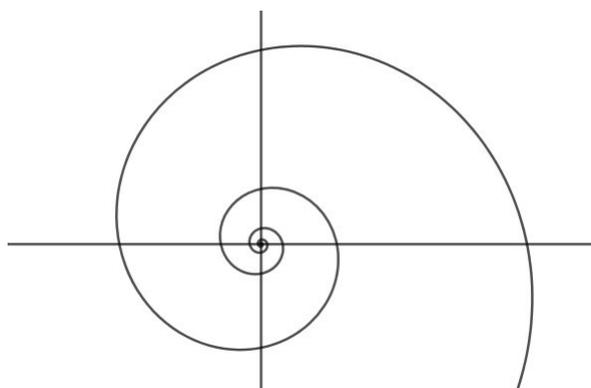


Figura 5.7: A espiral com θ variando negativamente. (A autora)

Note que a expressão analítica da espiral é dada por uma função exponencial e a denominação “espiral logarítmica” deve-se ao fato de que seus estudos iniciais se deram na forma $\ln r = \theta$ que é equivalente a $r = e^\theta$, diferindo de $r = r_0\mu^\theta$ apenas por uma questão de escala. Segundo Batschelet (1978), $\ln r$ é uma função linear de θ uma vez que,

$$r = r_0\mu^\theta \iff \ln r = \ln r_0\mu^\theta \iff \ln r = \ln r_0 + \theta \ln \mu.$$

Por meio de uma análise do gráfico da função exponencial $y = r_0\mu^x$ com $\mu > 1$,

em coordenadas cartesianas, observamos que quando x assume valores negativos cada vez menores a função tende à zero. Portanto, a espiral logarítmica se enrola indefinidamente em torno do pólo sem nunca alcançá-lo quando θ decresce por valores negativos.

5.3 As notáveis propriedades da espiral logarítmica

A máxima de Bernoulli *Eadem mutato resurgo* descreve uma característica individual da espiral logarítmica, a medida que seu tamanho aumenta seu formato permanece inalterado, a propriedade de *auto-semelhança*. De fato, a rotação expandida transforma o ponto inicial (r_0, θ) no ponto $(r_0\mu^{\theta+\alpha}, \theta + \alpha)$ de forma que aumentando-se o ângulo θ em incrementos iguais, qualquer raio, traçado a partir da origem aumenta em proporções iguais. Este fato decorre da identidade $\mu^{\theta+\alpha} = \mu^\theta \mu^\alpha$, sendo μ^α uma taxa comum.

Isso mostra que a espiral logarítmica é “uma curva gerada por dois movimentos, enquanto o raio gira em torno do pólo em progressão aritmética, numa sucessão de ângulos iguais, um ponto o percorre em progressão geométrica descrevendo a curva.” (CONTADOR, 2007, p. 113), motivo pelo qual esta curva também é conhecida como espiral *geométrica*. Se aumentarmos o ângulo θ indefinidamente e medirmos as distâncias ao longo de qualquer raio partindo do pólo, observaremos que este crescimento é exponencial.

Por meio da derivada primeira da equação polar $r = r_0\mu^\theta$, podemos obter a taxa da variação do raio r em relação ao ângulo θ . Assim,

$$\frac{dr}{d\theta} = r \ln \mu$$

em que obtemos a reta tangente à espiral em um determinado ponto.

5.3 As notáveis propriedades da espiral logarítmica

Sendo α o ângulo entre o raio vetor e a reta tangente, temos:

$$\cot \alpha = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \ln \mu$$

Podemos então reescrever a equação polar em termos de α . Assim,

$$r_0 \mu^\theta = r_0 (e^{\ln \mu})^\theta = r_0 e^{\theta \cot \alpha}$$

Considerando $\cot \alpha = a$, teremos a expressão analítica usual da espiral que é dada por

$$r = r_0 e^{a\theta}$$

em que r_0 e a são constantes arbitrárias.

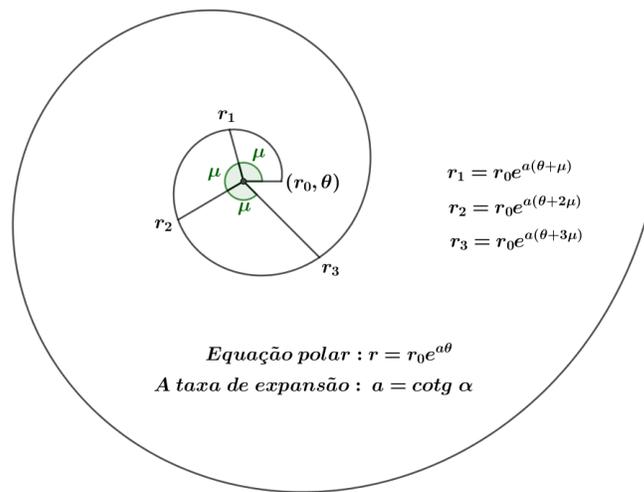


Figura 5.8: A espiral geométrica. (A autora)

Nesta expressão, a constante a determina a taxa de crescimento da espiral. Sendo a positivo, a distância do raio em relação ao pólo aumenta enquanto a espiral gira no sentido anti-horário e sendo a negativo, o raio diminui e a espiral gira no sentido horário. Para $a = 0$, a curva determinada será uma circunferência. Este foi outro fato que impressionou Bernoulli, verificando que o gráfico da curva $r = r_0 e^{-a\theta}$ é uma imagem invertida de $r = r_0 e^{a\theta}$. Desta forma, após uma transformação de inversão

5.3 As notáveis propriedades da espiral logarítmica

a espiral logarítmica permanece invariável, conforme as figuras 5.9 e 5.10.

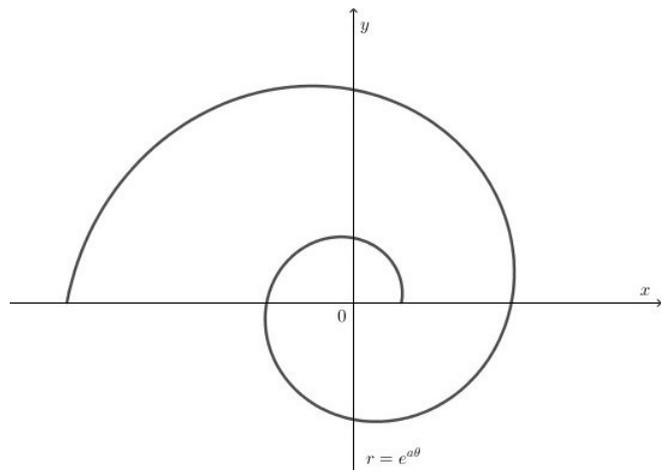


Figura 5.9: Espiral no sentido anti-horário. (A autora)

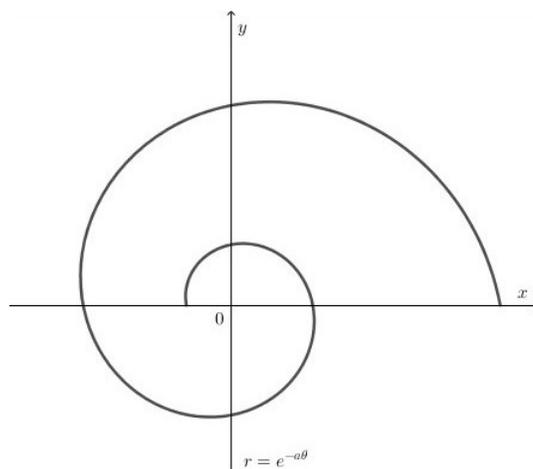


Figura 5.10: Espiral no sentido horário. (A autora)

Podemos também obter a espiral por meio da variação do raio escrevendo a expansão de θ em função de r , assim

$$\theta = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)$$

A espiral logarítmica é a única curva que corta os raios polares segundo um ângulo constante. Esta propriedade particular da espiral é o motivo pelo qual ela é também conhecida como espiral *equiangular*.

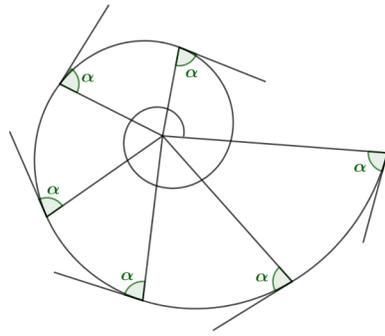


Figura 5.11: A espiral equiangular. (A autora)

Esta notável propriedade pode ser analisada a partir do triângulo OR_1R_2 representado na figura 5.12.

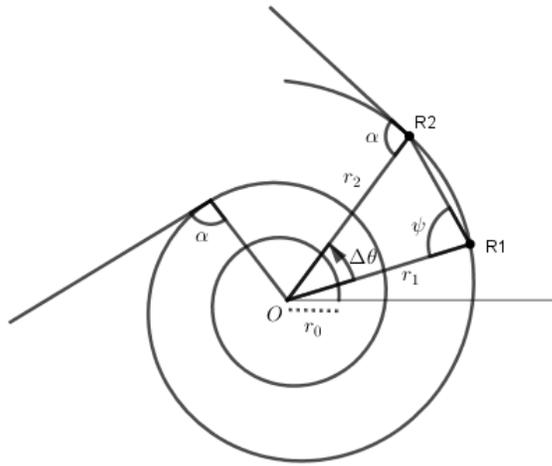


Figura 5.12: A espiral logarítmica intercepta os raios vetores segundo um ângulo constante. Adaptado de (BATSCHULET, 1978, p. 150)

Sejam os pontos $R_1(r_1, \theta_1)$ e $R_2(r_2, \theta_2)$, em coordenadas polares, sobre a espiral logarítmica de forma que $r_1 = OR_1$ e $r_2 = OR_2$. Considere a diferença constante $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e $\Psi = \widehat{OR_1R_2}$. A partir da equação polar $r = r_0e^{a\theta}$ temos que,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_0e^{a\theta_2}}{r_0e^{a\theta_1}} = (e^a)^{\theta_2-\theta_1} = (e^a)^{\Delta\theta}$$

De forma que a proporção $\frac{r_2}{r_1} = (e^a)^{\Delta\theta}$ é determinada pela $\Delta\theta$. Isto significa que mesmo que θ_1 e θ_2 assumam valores cada vez maiores, o triângulo OR_1R_2 sempre

5.3 As notáveis propriedades da espiral logarítmica

terá a mesma forma, e por consequência Ψ será constante.

Quando $\Delta\theta$ tende a zero, a reta que passa por R_1 e R_2 tende a tangente da espiral logarítmica e Ψ , por sua vez, tende a um valor limite representado por α . Ou seja, a tangente à espiral é a posição limite da secante R_1R_2 quando $\Delta\theta$ tende a zero. Como já determinado anteriormente, temos:

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta\theta} = \frac{dr}{d\theta} = ar$$

que é a equação da reta tangente à espiral.

Parametricamente, em coordenadas cartesianas, temos:

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sen\theta \end{cases}$$

Assim, o vetor direção da espiral é dado por $\rho = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sen\theta)$.

Para determinarmos o vetor tangente à curva, basta calcularmos a derivada de ρ . Logo,

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = (r'\cos\theta - r\sen\theta, r'\sen\theta + r\cos\theta)$$

Sendo α o ângulo formado pelo vetor direção ρ e pelo vetor tangente ρ' , podemos determinar o valor do $\cos\alpha$ através da fórmula do produto interno entre dois vetores.

Assim,

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{d\rho}{\|d\| \cdot \|\rho'\|} \\ &= \frac{r\cos\theta(r'\cos\theta - r\sen\theta) + r\sen\theta(r'\sen\theta + r\cos\theta)}{\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sen\theta)^2} \cdot \sqrt{(r'\cos\theta - r\sen\theta)^2 + (r'\sen\theta + r\cos\theta)^2}} \\ &= \frac{rr'}{r\sqrt{r'^2 + r^2}} \\ &= \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \end{aligned}$$

5.3 As notáveis propriedades da espiral logarítmica

$$\begin{aligned}
 &= \frac{r'}{r'\sqrt{r'^2 + r^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{r'^2 + r^2}{r'^2}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

Como $\frac{r}{r'} = \frac{r_0 e^{a\theta}}{r_0 a e^{a\theta}} = \frac{1}{a}$, temos:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 + 1}{a^2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}} \text{ é constante.}$$

Portanto, α é constante. Consequentemente, a espiral logarítmica corta os raios vetores segundo um ângulo constante.

Segundo Boyer (1974), Torricelli mostrou por métodos infinitesimais que o comprimento do arco de qualquer ponto sobre a espiral ao pólo é igual ao comprimento da reta tangente à espiral medida deste ponto até o eixo dos y . Assim, o comprimento do vetor tangente à espiral ρ' é dado por:

$$\begin{aligned}
 \|\rho'\| &= \sqrt{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^2 + (r'\sin\theta + r\cos\theta)^2} \\
 &= \sqrt{r'^2 + r^2} \\
 &= \sqrt{(r_0 a e^{a\theta})^2 + (r_0 e^{a\theta})^2} \\
 &= \sqrt{(r_0^2 e^{2a\theta})(a^2 + 1)} \\
 &= r_0 e^{a\theta} \sqrt{a^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Seja s o comprimento de arco de um ponto qualquer da espiral em um dado

intervalo $[\theta_1, \theta_2]$. Desta forma, o comprimento do arco s é dado por:

$$\begin{aligned} s &= r_0 \sqrt{a^2 + 1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{a\theta} d\theta \\ &= r_0 \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} (e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1}) \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} (r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Como determinado acima, temos $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$, e segue que $\sec \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$.

Logo, $s = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} (r_2 - r_1) = \sec \alpha (r_2 - r_1)$ determina o comprimento do arco de r_1 até r_2 .

Seja t o comprimento de arco partindo do pólo até o ponto (r, θ) . Assim, temos

$$t = r \sec \alpha$$

Portanto, a espiral logarítmica é uma curva cujo comprimento do arco entre o pólo e um ponto variável (r, θ) é proporcional ao raio com extremidade neste ponto.

5.4 A espiral logarítmica na Natureza

“Há uma grande beleza nas pistas que a Natureza nos oferece e todos nós a podemos reconhecer sem nenhum treino matemático. Também existe beleza nos enredos matemáticos que emanam dessas pistas e de onde se deduzem as regras e regularidades subjacentes, mas é um tipo de beleza diferente, mais aplicado a ideias do que as coisas. A matemática está para a natureza como Sherlock Holmes está para os indícios.”

Ian Stewart

A natureza certamente segue padrões em seu desenvolvimento e a Matemática

5.4 A espiral logarítmica na Natureza

é uma forma de organizar e sistematizar tais padrões. Ela nos dá pistas das regularidades que conduzem os processos naturais e uma destas pistas são as espirais que, na grande maioria, possuem características semelhantes a espiral logarítmica que é frequentemente observada na Natureza, desde os girassóis as conchas marinhas, a cauda de um camaleão e até mesmo na Via Láctea. A recorrência da espiral logarítmica em diversas escalas pode ser observada nas imagens da figura 5.13.



Figura 5.13: A manifestação das espirais logarítmicas na natureza. (SPIRA, 2018, p. 1)

A espiral logarítmica também pode ser observada na trajetória de voo dos falcões peregrinos, uma das aves mais rápidas do mundo, em direção à sua presa. Agora, a grande questão é: Porque os falcões não realizam seu voo em busca de suas presas em uma trajetória retilínea, já que esta é a menor distância a ser percorrida? Segundo Lívio (2009), o biólogo Vance A. Tucker da Universidade de Duke obteve esta resposta, através de seus estudos, na qual fora publicada no *Journal of Experimental*

*Biology*⁶ na edição de novembro de 2000. Ele notou que

como os olhos dos falcões ficam nas laterais de suas cabeças, para tirar vantagem de sua visão extremamente aguçada, eles precisavam inclinar 40° para um lado ou para outro [...] os falcões mantêm a cabeça em linha reta e seguem numa espiral logarítmica. (LÍVIO, 2009, p. 141).

uma vez que a espiral é equiangular, através desta trajetória os falcões conseguem manter sua presa à vista, pois o ângulo de visão é sempre o mesmo enquanto maximiza a velocidade do voo.

5.5 A espiral áurea - uma espiral logarítmica com fator de expansão igual a φ

A espiral áurea é um caso particular da espiral logarítmica quando esta amplia-se por um fator φ .

A espiral dourada é uma curva fascinante. Mas é apenas um membro de uma família maior de curvas espirais coletivamente conhecidas como espirais logarítmicas, e ainda existem outras espirais encontradas na natureza, como a espiral arquimediana. Cada espiral é o resultado de processos físicos que são dignos de estudo e não há nada místico sobre eles. (SIMANEK, 2015, documento eletrônico).

Podemos obter uma excelente aproximação da espiral áurea, por meio de uma construção geométrica, à partir de traçados de arcos de circunferência centrados nos vértices de cada um dos quadrados distintos que, justapostos, compõem o retângulo áureo. Contudo, faz-se necessário ressaltar que a curva obtida pela construção descrita a seguir possui descontinuidade de curvatura sempre que esta intercepta um quadrado sucessivo.

Seja uma sequência infinita de retângulos áureos encaixantes, conforme a figura 5.14.

⁶Revista de Biologia Experimental.

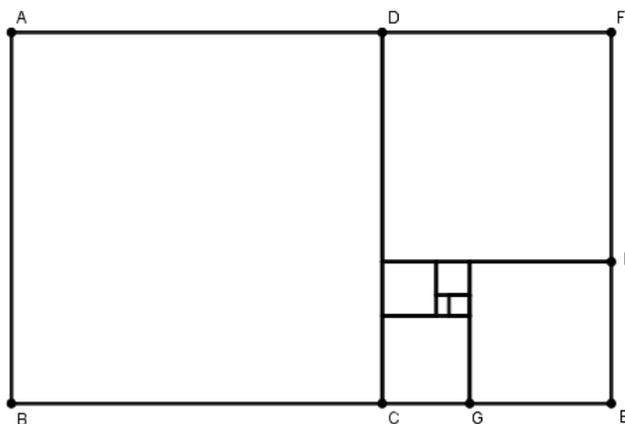


Figura 5.14: Sequência infinita de retângulos áureos encaixantes. (A autora)

Se traçarmos arcos de circunferência centrados em vértices dos sucessivos quadrados e raio igual ao lado de cada um deles, obtemos um caso especial da espiral logarítmica tangente aos lados dos retângulos, a espiral áurea. Conforme a figura 5.15.

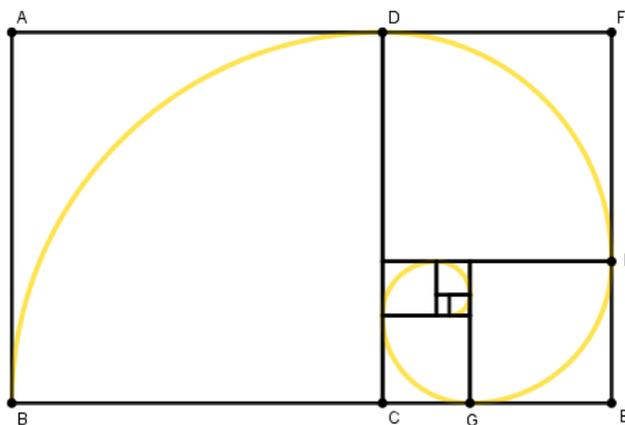


Figura 5.15: Processo de construção da espiral áurea. (A autora)

Na sequência de retângulos áureos encaixantes, um novo retângulo é obtido por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos do retângulo anterior e uma ampliação igual a φ . Desta forma, os arcos de circunferência que determinam a espiral áurea sofrem uma ampliação de φ unidades a cada $\frac{1}{4}$ de volta. Assim, a partir da equação da espiral logarítmica $r = r_0 e^{\theta \cotg \alpha}$, em coordenadas polares, determinaremos o valor da cons-

5.6 Dedução da equação polar da espiral áurea

tante $\cot g \alpha$ para que a espiral mantenha seu crescimento em proporções áureas. Desta forma, $r = r_0 e^{\frac{\pi}{2} \cot g \alpha}$ em que o fator de expansão é tal que $e^{\frac{\pi}{2} \cot g \alpha} = \varphi$.

Assim,

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{2} \cot g \alpha} &= \varphi \\ \Leftrightarrow \ln e^{\frac{\pi}{2} \cot g \alpha} &= \ln \varphi \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cot g \alpha &= \ln \varphi \\ \Leftrightarrow \cot g \alpha &= \frac{\ln \varphi}{\frac{\pi}{2}} \\ \Leftrightarrow \cot g \alpha &= \frac{2 \ln \varphi}{\pi} \cong 0,3063 \end{aligned}$$

Logo, $\cot \alpha \cong 0,3063$ radianos, o que implica que $\alpha = 73^\circ$.

Portanto, $r = r_0 e^{\theta 0,3063}$.

Neste caso, temos uma espiral logarítmica em que o raio cresce exponencialmente com o ângulo polar em proporções áureas, dependendo unicamente do raio inicial r_0 escolhido no eixo polar.

5.6 Dedução da equação polar da espiral áurea

À partir da sequência infinita de retângulos áureos encaixantes, deduziremos a equação da espiral áurea, em coordenadas polares, com referência no artigo de Zahn (2017).

Seja $ABEF$ a sequência de retângulos áureos desenhados anteriormente, de maneira que $\overline{BE} = \varphi$ e $\overline{AB} = 1$. Traça-se as diagonais AE e CF sendo O o ponto de interseção entre elas. Por construção, tem-se que $ABCD$ é um quadrado unitário.

5.6 Dedução da equação polar da espiral áurea

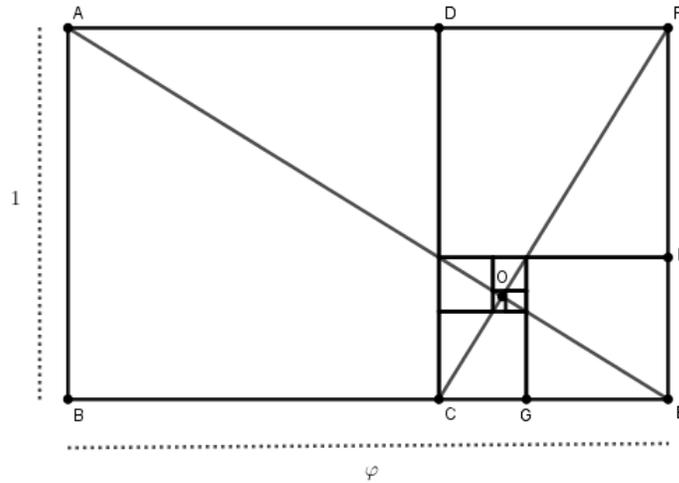


Figura 5.16: Diagonais do retângulo áureo ABEF. Adaptado de (ZAHN, 2017, p. 965)

Inicialmente, fixemos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais com origem em B , eixo horizontal \overline{BE} e eixo vertical \overline{AB} . Assim, teremos $B(0,0)$, $C(1,0)$, $E(\varphi,0)$, $A(0,1)$, $D(1,1)$, $F(\varphi,1)$ que são as coordenadas dos vértices do quadrado unitário e do retângulo áureo.

Sejam r e s as retas suportes às diagonais AE e CF respectivamente. Pela condição de alinhamento dos pontos podemos determinar as equações da reta r que passa pelos pontos A e E e da reta s que passa pelos pontos C e F . Assim,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \varphi & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + \varphi y - \varphi = 0$$

De forma que $r : y = -\frac{1}{\varphi}x + 1$.

Analogamente, $s : y = \frac{1}{\varphi - 1}x - \frac{1}{\varphi - 1}$.

Note que as retas r e s são ortogonais, uma vez que seus coeficientes angulares são, respectivamente $m_r = -\frac{1}{\varphi}$ e $m_s = \frac{1}{\varphi - 1}$. Portanto,

$$m_r \cdot m_s = -\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{\varphi - 1} = -\frac{1}{\varphi^2 - \varphi} = -1$$

5.6 Dedução da equação polar da espiral áurea

Resolvendo o sistema linear formado pelas equações das retas r e s , obtemos as coordenadas do ponto $O \left(\frac{\varphi^2}{2\varphi - 1}, \frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1} \right)$.

Agora, note que os pontos B , O e I , assim como os pontos D , O e G são colineares. De fato, observe inicialmente que o ponto I possui coordenadas $I \left(\varphi, \frac{1}{\varphi^2} \right)$. Por construção, temos que a abscissa de I é igual a φ . Agora vamos determinar a ordenada deste ponto.

Temos que $\frac{\overline{BE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{CE}}$ de forma que $\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\overline{CE}} \Leftrightarrow \overline{CE} = \frac{1}{\varphi}$.

Do mesmo modo, $\frac{\overline{EF}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EI}}$ de forma que $\frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \frac{\varphi}{\overline{EI}} \Leftrightarrow \overline{EI} = \frac{1}{\varphi^2}$ que é a ordenada do ponto I .

Verifica-se que os pontos $B(0, 0)$, $O \left(\frac{\varphi^2}{2\varphi - 1}, \frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1} \right)$ e $I \left(\varphi, \frac{1}{\varphi^2} \right)$ são colineares, uma vez que,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\varphi^2}{2\varphi - 1} & \frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1} & 1 \\ \varphi & \frac{1}{\varphi^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\varphi - 1} - \varphi \cdot \frac{(\varphi - 1)}{2\varphi - 1} = 0$$

Analogamente, vamos determinar as coordenadas do ponto G . Por construção, $G(1 + \overline{CG}, 0)$. Sabendo que $\frac{\overline{CE}}{\overline{EI}} = \frac{\overline{EI}}{\overline{CG}}$ de forma que $\frac{\frac{1}{\varphi}}{\frac{1}{\varphi^2}} = \frac{1}{\overline{CG}} \Leftrightarrow \overline{CG} = \frac{1}{\varphi^3}$.

Temos, como já visto, que o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ é determinado pela equação $\varphi^n = f_{n-1} + f_n \cdot \varphi$. Assim, $\varphi^3 = f_2 + f_3 \varphi = 1 + 2\varphi$.

Portanto, $\overline{CG} = \frac{1}{2 + \varphi}$.

Onde $G \left(1 + \frac{1}{\varphi^3}, 0 \right) = \left(\frac{\varphi^3 + 1}{\varphi^3}, 0 \right) = \left(\frac{1 + 2\varphi + 1}{1 + 2\varphi}, 0 \right) = \left(\frac{2 + 2\varphi}{1 + 2\varphi}, 0 \right)$.

Verifica-se que os pontos $D(1, 1)$, $O \left(\frac{\varphi^2}{2\varphi - 1}, \frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1} \right)$ e $G \left(\frac{2 + 2\varphi}{1 + 2\varphi}, 0 \right)$ são co-

5.6 Dedução da equação polar da espiral áurea

lineares uma vez que,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\varphi^2}{2\varphi-1} & \frac{\varphi-1}{2\varphi-1} & 1 \\ \frac{2+2\varphi}{1+2\varphi} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\varphi-1}{2\varphi-1} + \frac{2+2\varphi}{1+2\varphi} - \left(\frac{2+2\varphi}{1+2\varphi} \cdot \frac{\varphi-1}{2\varphi-1} \right) - \frac{\varphi^2}{2\varphi-1} = 0$$

Além disso, seja t a reta que passa por $B(0,0)$, $O\left(\frac{\varphi^2}{2\varphi-1}, \frac{\varphi-1}{2\varphi-1}\right)$ e $I\left(\varphi, \frac{1}{\varphi^2}\right)$ e u a reta que passa por $D(1,1)$, $O\left(\frac{\varphi^2}{2\varphi-1}, \frac{\varphi-1}{2\varphi-1}\right)$ e $G\left(\frac{2+2\varphi}{1+2\varphi}, 0\right)$ em que o ponto O é a interseção das retas t e u . Observe que, t e u são perpendiculares, uma vez que

$$m_t = \frac{y_D - y_G}{x_D - x_G} = \frac{1 - 0}{1 - \frac{2+2\varphi}{1+2\varphi}} = -(1+2\varphi)$$

$$m_u = \frac{y_I - y_A}{x_I - x_A} = \frac{\frac{1}{\varphi^2} - 0}{\varphi - 0} = \frac{1}{\varphi^3} = \frac{1}{1+2\varphi}$$

$$\text{E portanto, } m_t \cdot m_u = -(1+2\varphi) \cdot \frac{1}{1+2\varphi} = -1.$$

Para a dedução da equação da espiral áurea, em coordenadas polares (r, θ) , vamos considerar o ponto O a origem do sistema, o eixo real OI e o eixo imaginário OD , uma vez que os pontos D e I pertencem à espiral, pois esta é tangente ao retângulo áureo nestes pontos. Considerando as coordenadas polares temos, $D\left(\overline{OD}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $I(\overline{OI}, 0)$ sendo \overline{OD} e \overline{OI} determinados pela fórmula da distância entre dois pontos.

Assim,

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \sqrt{\left(\frac{\varphi^2}{2\varphi-1} - 1\right)^2 + \left(\frac{\varphi-1}{2\varphi-1} - 1\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\varphi-1)^4 + \varphi^2}{(2\varphi-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\varphi^4 - 4\varphi^3 + 7\varphi^2 + 4\varphi + 1}}{2\varphi-1} \\ &= \frac{\sqrt{6-2\varphi}}{2\varphi-1}\end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}\overline{OI} &= \sqrt{\left(\frac{\varphi^2}{2\varphi-1} - \varphi\right)^2 + \left(\frac{\varphi-1}{2\varphi-1} - \frac{1}{\varphi^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(2\varphi-1)^2} + \frac{1-2\varphi+\varphi^2}{\varphi^4(2\varphi-1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4+2\varphi}{(2+3\varphi)(4\varphi^2-4\varphi+1)}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\sqrt{2+3\varphi}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2}\end{aligned}$$

Portanto, $D\left(\frac{\sqrt{6-2\varphi}}{2\varphi-1}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $I\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2}, 0\right)$.

Temos, como já visto, que a equação da espiral logarítmica em coordenadas polares é dada por $r(\theta) = r_0 e^{a\theta}$ onde r_0 é o raio inicial.

Observe que o ponto $I\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2}, 0\right)$ é o ponto do sistema em coordenadas polares. Substituindo este ponto na equação, temos:

$$r_\theta = r_0 e^{a\theta} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2} = r_0 e^{a0} \Leftrightarrow r_0 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2}.$$

Logo, $r(\theta) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2} e^{a\theta}$.

5.6 Dedução da equação polar da espiral áurea

Como o ponto $D \left(\frac{\sqrt{6-2\varphi}}{2\varphi-1}, \frac{\pi}{2} \right)$ também pertence à espiral, temos:

$$\begin{aligned}
 r(\theta) &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2} e^{a\theta} \\
 \Rightarrow \frac{\sqrt{6-2\varphi}}{2\varphi-1} &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2} e^{a\frac{\pi}{2}} \\
 \Leftrightarrow e^{a\frac{\pi}{2}} &= \frac{\frac{\sqrt{6-2\varphi}}{2\varphi-1}}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}\sqrt{3-\varphi}}{(2\varphi-1)\sqrt{2+\varphi}} \varphi^2 \\
 &= \frac{\sqrt{5}\sqrt{3-\varphi}}{(2\varphi-1)\sqrt{2+\varphi}} \varphi^2 \\
 &= \frac{\sqrt{5}\sqrt{6+\varphi-\varphi^2}}{2\varphi^2+3\varphi-2} \varphi^2 \\
 &= \frac{1}{\varphi} \varphi^2 \\
 &= \varphi
 \end{aligned}$$

Assim temos, $e^{a\frac{\pi}{2}} = \varphi \Leftrightarrow a = \ln \left(\varphi^{\frac{2}{\pi}} \right)$. Portanto, $e^{\ln \left(\varphi^{\frac{2}{\pi}} \right) \theta}$.

Substituindo $e^{\ln \left(\varphi^{\frac{2}{\pi}} \right) \theta}$ a equação $r(\theta) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2} e^{a\theta}$, temos:

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2} e^{\ln \left(\varphi^{\frac{2}{\pi}} \right) \theta} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\varphi}}{\sqrt{5}\varphi^2} \varphi^{\frac{2}{\pi}\theta} = \sqrt{\frac{4+2\varphi}{5}} \varphi^{\frac{2}{\pi}\theta-2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5}} \varphi^{\frac{2}{\pi}\theta-2}$$

Portanto, $r(\theta) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5}} \varphi^{\frac{2}{\pi}\theta-2}$ é a equação polar da espiral áurea a partir do retângulo áureo com dimensões iguais a 1 e φ unidades de comprimento.

5.7 A estrutura da concha de *nautilus* é descrita pela espiral áurea. Será uma crença ou uma teoria fundamentada cientificamente?

5.7 A estrutura da concha de *nautilus* é descrita pela espiral áurea. Será uma crença ou uma teoria fundamentada cientificamente?

O *nautilus* (do grego: marinheiro) é um pequeno molusco que vive em uma concha marinha formada por uma sequência de câmaras separadas por divisórias, e à medida que ele cresce uma nova câmara maior é construída e as demais, cheias de gás, funcionam como flutuadores. Cada nova câmara é proporcional ao raio da anterior de modo que o crescimento da concha mantém sempre a mesma forma. À partir de uma seção longitudinal da concha pode-se identificar uma espiral logarítmica em que a cada nova câmara o ângulo formado pelo raio vetor e pela tangente a espiral em um mesmo ponto é constante.

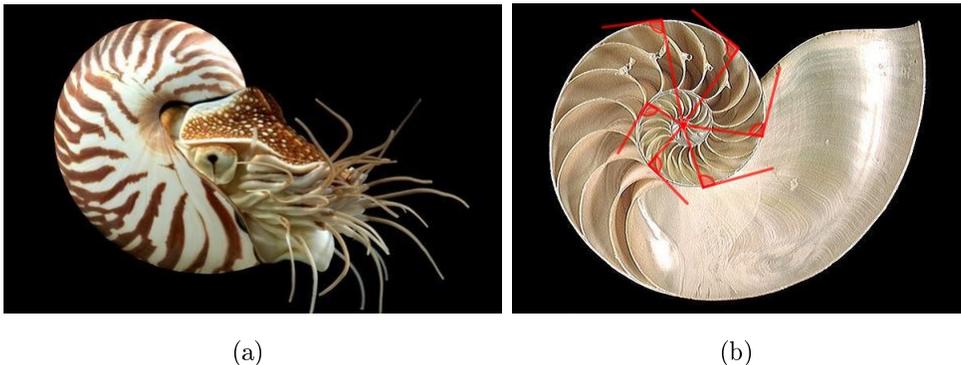


Figura 5.17: (a) *Nautilus* (b) Seção longitudinal da concha de *nautilus*. (Google Imagens)

Com frequência este pequeno molusco é associado à espiral áurea. Mas será mesmo que a concha de *nautilus* é modelada pela espiral áurea? Segundo John Sharp, um matemático que em 2002 publicou um artigo intitulado *Espirais e a Seção Áurea*⁷, existe um equívoco nesta associação que segue a seguinte lógica:

1. Espirais de conchas, em particular o *nautilus*, são espirais logarítmicas.

⁷*Spirals and the Golden Section* - Artigo publicado no *Nexus Network Journal*.

5.7 A estrutura da concha de *nautilus* é descrita pela espiral áurea. Será uma crença ou uma teoria fundamentada cientificamente?

2. A Razão Áurea pode ser usada como um fator de expansão da espiral logarítmica.
3. Portanto, espirais de conchas estão relacionadas à Razão Áurea e, em particular, a espiral da concha de *nautilus* é uma espiral áurea.

Acrescenta ainda que “uma das coisas mais surpreendentes sobre tais equívocos é que eles são tão difundidos até mesmo por matemáticos que deveriam conhecer melhor.” (SHARP, 2002, documento eletrônico).

Em 1999, o matemático aposentado Clement Falbo⁸ fez medições da concha de *nautilus* em uma coleção na Academia de Ciências da Califórnia, em San Francisco, cujos resultados foram publicados, em março de 2005, no artigo *A Proporção Áurea: um ponto de vista contrário*⁹. Suas medições, com uma margem de erro de $\pm 1\text{mm}$, o levaram a proporções que variam de 1,24 a 1,43, e uma média de 1,333, diferente da proporção da espiral áurea que é de aproximadamente 1,618. Falbo (2005) usou também a margem de Markowsky (1992) que, em seu artigo *Equívocos sobre a Proporção Áurea*, afirma: “eu considerarei uma reivindicação para a presença de φ ser pelo menos razoável se a relação calculada estiver dentro de aproximadamente 2% para φ ” (MARKOWSKY, 1992, p. 6), e mesmo considerando este erro, a espiral áurea teria uma proporção mínima de 1,56 que difere consideravelmente de 1.33. Falbo (2005) conclui: “parece altamente improvável que exista alguma concha de *nautilus* que esteja a 2% da proporção áurea, e mesmo se fosse encontrada, eu acho que seria raro em vez de típico.” (FALBO, 2005, p. 127).

Nas figura 5.18 temos uma espiral logarítmica com fator de expansão igual a φ , e na figura 5.19 temos uma espiral logarítmica com fator de expansão igual média de 1,333 encontrada por Falbo (2005).

⁸Clement Falbo é professor de matemática emérito na *Sonoma State University*, onde lecionou por 35 anos.

⁹O artigo *The Golden Ratio - A Contrary Viewpoint* foi publicado na edição de março de 2005 do *College Mathematics Journal*.

5.7 A estrutura da concha de *nautilus* é descrita pela espiral áurea. Será uma crença ou uma teoria fundamentada cientificamente?

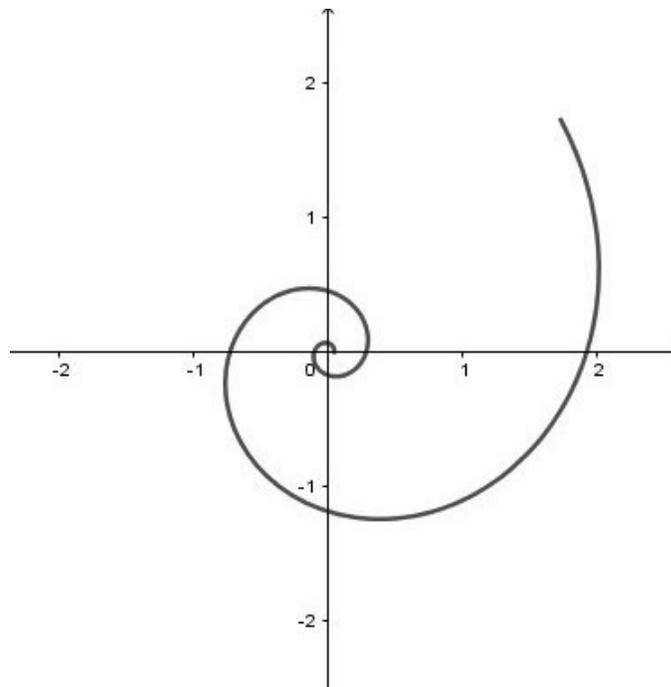


Figura 5.18: Espiral logarítmica com fator de expansão igual a φ : a espiral áurea. (A autora)

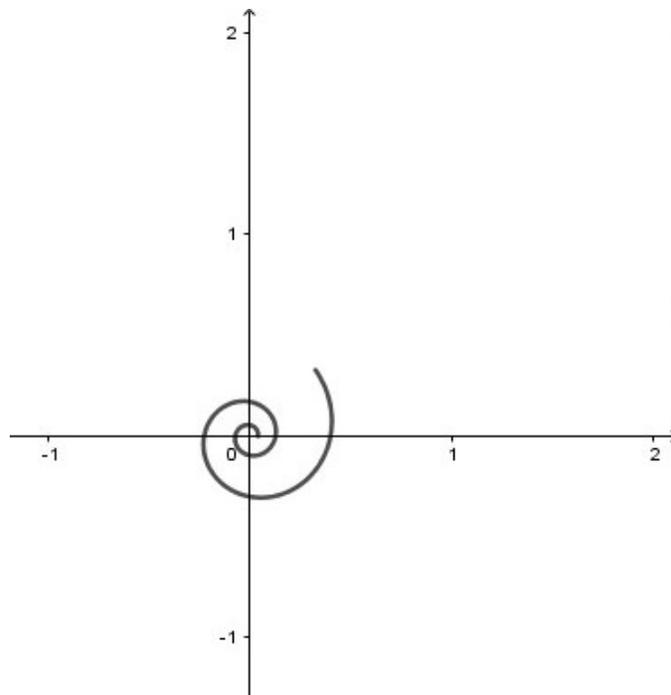


Figura 5.19: Espiral logarítmica com fator de expansão igual a 1,333. (A autora)

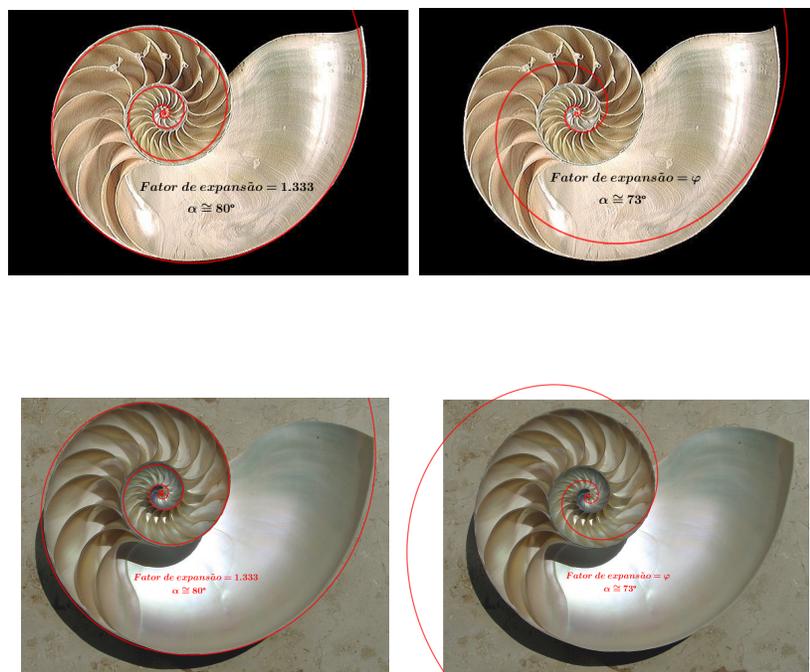
Podemos tentar medir uma concha de *nautilus* para determinar a forma da espiral

5.7 A estrutura da concha de *nautilus* é descrita pela espiral áurea. Será uma crença ou uma teoria fundamentada cientificamente?

a partir de uma fotografia, embora possam haver distorções na foto além de algumas dificuldades que podem ser encontradas como Sharp (2002) relaciona:

1. A seção pode não estar exatamente na direção correta;
2. Devido a espessura da casca pode haver um erro considerável ao decidir onde tomar a medida;
3. Não é uma tarefa fácil encontrar o pólo da espiral.

Considerando esses fatos, analisamos imagens distintas da concha de *nautilus* sobrepostas às espirais logarítmicas construídas no *software geogebra*¹⁰ e verificamos que a estrutura da concha possui uma excelente aproximação da espiral logarítmica com fator de expansão igual a 1,333 e, em contrapartida, difere consideravelmente da espiral logarítmica com fator de expansão igual a φ , conforme a figura 5.20.



¹⁰O *Geogebra* é um *software* de geometria dinâmica que une geometria, álgebra e cálculo.

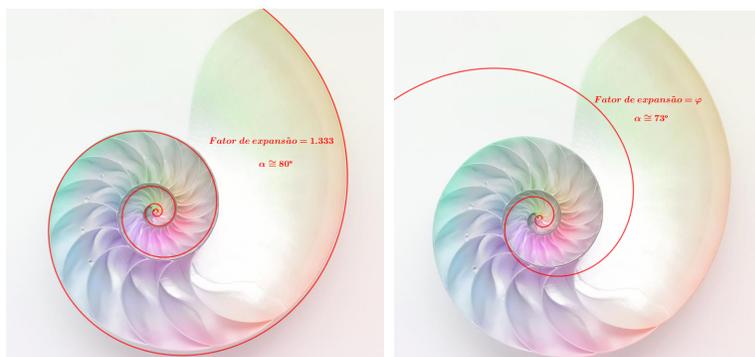


Figura 5.20: Conchas distintas de *nautilus* sobrepostas às espirais logarítmicas. (a) Fator de expansão igual a 1,333. (b) Fator de expansão igual a φ . (Adaptado de *Google Imagens*)

Para Stewart (2009),

outra falácia comum é supor que a razão áurea ocorre na concha espiralada de um náutilo. Essa bela concha é - para sermos mais precisos - um tipo de espiral chamada espiral logarítmica. Nela, cada volta sucessiva apresenta uma proporção fixa em relação à anterior. Há espiral desse tipo na qual a razão é áurea. Mas a proporção do náutilo *não* é a razão áurea. (STEWART, 2009, p. 106).

Portanto, o que podemos concluir com base nos estudos de Clement Falbo, John Sharp, George Markowsky e a partir das observações da imagem das conchas sobrepostas às espirais é que, de fato, a concha de *nautilus* tem sua estrutura descrita por uma espiral logarítmica, mas o fator de expansão desta espiral *não* é φ .

5.8 O triângulo áureo, a espiral logarítmica e a sequência de Fibonacci

Como vimos na seção 2.8, a partir do triângulo áureo ABC podemos obter, por meio da bissetriz de um dos ângulos junto à base, um triângulo isósceles BCD semelhante ao anterior de maneira que o ponto D divide AC em extrema e média razão. Este processo pode ser repetido indefinidamente produzindo uma série de

triângulos que “converge para um ponto-limite O , que é o pólo de uma espiral logarítmica que passa sucessivamente e na mesma ordem pelos três vértices de cada um dos triângulos da série, ... A, B, C, D, \dots ” (HUNTLEY, 1985, p. 167).

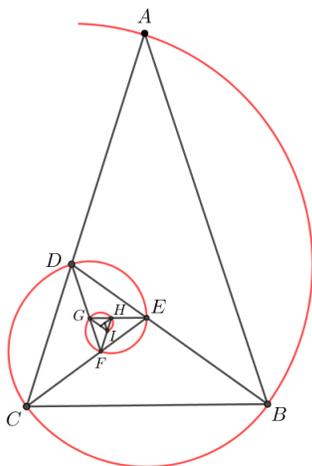


Figura 5.21: A sequência infinita de triângulos áureos e a espiral logarítmica. (A autora)

Outra característica interessante que pode ser observada no triângulo áureo está relacionada à sequência de Fibonacci. Se considerarmos o segmento $HG = 1$, temos que $GF = 1\varphi$. Conseqüentemente, $FE = 1\varphi + 1$. Repetindo-se o processo, de forma análoga, obtemos a sequência:

$$GF = 1\varphi$$

$$FE = 1\varphi + 1$$

$$ED = 2\varphi + 1$$

$$DC = 3\varphi + 2$$

$$CB = 5\varphi + 3$$

$$BA = 8\varphi + 5$$

Observe, na sequência de medidas dos segmentos GF, FE, ED, DC, CB e BA , que os coeficientes de φ bem como os termos independentes descrevem a sequência de Fibonacci. Portanto, podemos observar mais uma relação entre a sequência

5.8 *O triângulo áureo, a espiral logarítmica e a sequência de Fibonacci*

de Fibonacci, que está diretamente relacionada ao triângulo áureo, com a espiral logarítmica cujo fator de expansão é igual a φ .

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

“Eu poderia continuar, pois há muitos outros exemplos, [...] todos os quais, em estreito exame, acabam por ficar sem qualquer evidência de apoio. Apesar da falta de provas, no entanto, e em alguns casos, em face de provas o contrário, cada afirmação parece atrair seu próprio grupo de devotos, que não vão por um momento considerar a possibilidade de que suas crenças estimadas não sejam verdadeiras. Consequentemente, não apenas φ é um número muito especial matematicamente - todas as suas aparências genuínas na matemática e na Natureza mostram isso - ele também tem um enorme significado cultural como o número que a maioria das pessoas tem o maior número de falsas crenças.”

Keith Devlin

Nossos objetivos iniciais convergiam para a identificação de evidências da manifestação da Razão Áurea e da sequência de Fibonacci nas mais diversas áreas do conhecimento humano, assim como encontramos em diferentes literaturas que nos causaram um certo entusiasmo diante da diversidade de suas aplicações. Nesta perspectiva, iniciamos nossa pesquisa analisando afirmações acerca da utilização destes números em diferentes contextos e períodos históricos. Entretanto, ao analisarmos

minuciosamente as mais clássicas afirmações verificamos, em alguns casos, a inexistência de fundamentos que as sustentem dada a fragilidade de seus argumentos. Portanto, diante de algumas controversas fomos conduzidos à uma temática mais crítica, que teve por objetivo distinguir teorias que revelam propriedades matemáticas na mais genuína manifestação destes números daquelas que são apenas crenças sem fundamentos científicos.

Produzimos desta forma, um trabalho que representa um redirecionamento do artigo da própria autora desta pesquisa, escrito durante seu trabalho de conclusão de curso como exigência parcial para obtenção do grau de licenciado em Matemática, na qual a autora expõe a afirmativa de que a Razão Áurea fora utilizada na construção do Partenon de Atenas. Acrescenta à sua exposição a afirmativa de que a espiral áurea está presente na formação biológica das conchas e que as proporções do *Homem Vitruviano* de Leonardo Da Vinci estão em razões que tendem para φ , corroborando, desta forma, com afirmações um tanto quanto subjetivas do ponto de vista matemático. Contudo, o período decorrido na produção destas páginas, que aqui apresentamos, certamente foi um momento oportuno para a autora revisitar suas concepções iniciais acerca de tais afirmações.

Desta forma, a história da matemática não foi apenas fundamental para a análise dos contextos históricos das afirmações associadas à Razão Áurea e à sequência de Fibonacci, descritas em nosso trabalho, como também motivadora. Assim, a utilização da história como ferramenta nas aulas de matemática produz um efeito desmistificador da disciplina e a torna mais humana e acessível. Trata-se portanto de uma oportunidade em perceber a matemática como fruto de necessidades inerentes ao desenvolvimento humano que permanecerá em progressiva expansão, tornando-se possível fazer-se parte integrante deste processo. Neste sentido, almejamos propor aos nossos alunos a análise dessas afirmações, corroborando com a construção do pensamento crítico e independente tanto quanto evidenciando a existência de equí-

vocos no desenvolvimento da matemática.

Por fim, esta análise só se tornou possível mediante a oportunidade de ser parte integrante do curso de mestrado PROFMAT que proporcionou um aprendizado enriquecedor por meio das disciplinas ministradas que, sem dúvida, será refletida na qualidade de sua prática em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ÁVILA, Geraldo. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**, Brasília, n. 6, p. 9-14, 1985.
- [2] AZEVEDO, Alberto de. Sequência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 45, p. 44-47, 2001.
- [3] BABIÇ, Blanco. **PhiAcademy: Ultimate Beauty Skills**, Sérvia: PhiAcademy, 2017. Disponível em: <https://www.phi-academy.com/>. Acesso em: 18 set. 2018.
- [4] BATSCHELET, Edward. **Introdução à matemática para biocientistas**. Tradução de Vera Maria Abud Pacífico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete; Revisão técnica de Guilherme M. de La Penha. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1978.
- [5] BELINI, Marcelo Manechine. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- [6] BIEZUNER, Rodney Josué. Geometria Diferencial. Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2015. Notas de aula.

-
- [7] BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- [8] BROUGHTON, Janet; CARREIRO, John. **Descartes**. Tradução de Ethel Rocha e LiaLevy. Porto Alegre: Penso, 2011.
- [9] BROWNLEE, John. **The Golden Ratio: Design's Biggest Myth**, Nova York: Fastcompany, 2015. Disponível em: <https://www.fastcompany.com/3044877/the-golden-ratio-designs-biggest-myth>. Acesso em: 20 jan. 2019.
- [10] CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. A construção, por Euclides, do pentágono regular. *In: V BIENAL DA SBM*. Paraíba, Universidade Federal da Paraíba, 2010.
- [11] CERIOLI, Márcia R. Números de Fibonacci e representações de números inteiros positivos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 53, p. 30-32, 2003.
- [12] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **A matemática na arte e na vida**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- [13] COSTA, Gustavo Candeia. **Ordem de Aparição na Sequência de Fibonacci: um problema sobre divisibilidade**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.
- [14] COXETER, H.S.M. **Introduction to Geometry**. 2. ed. Canadá: Editora Canadá, 1969.
- [15] DARGENT, René Gastelumendi. Deducción de la Ecuación de la Exponencial por medio de un Análisis Mecánico. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Peru, 2011. Notas de aula.
- [17] DEVLIN, Keith. **O instinto matemático: Por que você é um gênio da matemática**. Rio de Janeiro: Record, 2009.

-
- [16] DEVLIN, keith. **Boas histórias, pena que não são verdades**, Mathematical Association of America, 2004. Disponível em: <https://www.maa.org/external-archive/devlin/devlin-06-04.html>. Acesso em: 31 jul. 2018.
- [18] DEVLIN, keith. **Fibonacci e a loucura da relação dourada**, Mathematical Association of America, 2017. Disponível em: <https://www.maa.org/external-archive/devlin/devlin-04-17.html>. Acesso em: 11 dez. 2018.
- [19] DUNLAP, Richard A. **The Golden Ratio and Fibonacci Numbers**. Canadá: Word Scientific, 1997.
- [20] EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [21] EVES, Howard. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. vol. 3. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.
- [22] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.
- [23] FALBO, Clement. The Golden Ratio-A contrary viewpoint. **The College Mathematics Journal**, Washington, v. 36, n. 2, p. 123-134, mar. 2005.
- [24] GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5. ed. rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- [25] HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção: um ensaio sobre a beleza na Matemática**. Tradução de Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.
- [26] JOHNSON, Marjorie Bicknell. A short history of the Fibonacci Quartely. **The Fibonacci Quartely**, Califórnia, p. 2-5, 1987.
- [27] JUNIOR, Ady Cambraia; FREITAS, Braz Moura. **Cálculo II**. Minas Gerais: Departamento de Matemática-Universidade Federal de Viçosa, 2013.

-
- [28] JUNIOR, Marco Aurélio Kistemann. Sobre a teoria das proporções, o método da exaustão e os incomensuráveis. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 11, n. 13, p. 47-62, 2008.
- [29] JUNIOR, Verner E. Hoggatt. Selected Identities Involving the Fibonacci and Lucas Numbers. **The Fibonacci Quartely**, Canadá, p. 52-61, 1969.
- [30] KIMBERLING, Clark. Edouard Zechendorf **The Fibonacci Quartely**, Canadá, p. 416-418, 1998.
- [31] KNOTT, Ron. **Páginas de Ron Knott na Matemática**, Reino Unido: Ron Knott, 1998. Disponível em: <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/contactron.html>. Acesso em: 10 out. 2018.
- [32] LAURO, Maira Mendias. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Revista Exacta**, São Paulo, v. 3, p. 35-48, 2005.
- [33] LAWLOR, Robert. **Geometria Sagrada: Filosofia e Prática**. Tradução de Maria José Garcia Ripoll. Rio de Janeiro: Edições Del Prado, 1996.
- [34] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [35] LÍVIO, Mário. **Razão Áurea: a história de Φ , um número surpreendente**. 4. ed. Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2009.
- [36] LOYD, Sam. **Sam Loyd Official Site**, Sam Loyd, 1868. Disponível em: <https://samloyd.com/>. Acesso em 21 ago. 2018.
- [37] LUCAS, Edouard. **Théorie Des Nombres**. 1. ed. Paris: Imprimerie Gauthier-Villars Et Fils, 1891.
- [38] MAOR, Eli. **e: A história de um número**. 4. ed. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- [39] MARKOWSKY, George. Misconceptions about the Golden Ratio. **The College Mathematics Journal**, Washington, v. 23, n. 1, p. 2-19, jan. 1992.

-
- [40] MONGOVEN, Casey. **Um Estilo de Música Caracterizado por Números de Fibonacci e a Proporção de Ouro**, Casey Mongoven, 2008. Disponível em: <http://caseymongoven.com/index.php?lang=en>. Acesso em: 03 set. 2018.
- [41] PETERSON, Ivars. Sea Shell Spirais. **Science News**, Washington, 1 abr. 2005.
- [42] PICADO, Jorge. A beleza matemática das conchas marinhas. **Gazeta de Matemática**, Coimbra, n. 152, p. 10-15, jan. 2007.
- [43] PIERCE, Rod. **Nature, The Golden Ratio and Fibonacci Numbers**, Math Is Fun: Ed. Rod Pierce, 2018. Disponível em: <https://www.mathsisfun.com/numbers/nature-golden-ratio-fibonacci.html>. Acesso em: 05 out. 2018.
- [44] RAMOS, José Portugal dos Santos. A constituição de uma teoria das proporções na Geometria de 1637: demonstrações geométricas versus construções de curvas mecânicas em Descartes. **Especiaria-Cadernos de Ciências Humanas**, Bahia, v. 16, n. 28, p. 78-100, jan./jun. 2016.
- [45] ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- [46] SHARP, John. Spirals and the Golden Section. **Nexus Network Journal**, Estados Unidos da América, v. 4, n. 1, mês. 2002.
- [47] SIMANEK, Donald E. **Mitos e mistérios da ciência: Fibonacci** FLim-Flam, Páginas de Donald Simanek, 2015. Disponível em: <http://www.lockhaven.edu/dsi-manek/pseudo/fibonacc.htm>. Acesso em: 28 abr. 2019.
- [48] SPIRA, Michel. Sobre o cartaz da OBMEP 2018. **Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais**. Minas Gerais: UFMG, 2018.
- [49] STEWART, Ian. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. Tradução de Diego Alfaro; Revisão técnica de Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

-
- [50] TAHAN, Malba. **As maravilhas da Matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1973.
- [51] TEIXEIRA, Ricardo Cunha. Retângulos de ouro: verdadeiros ou falsos? **Tribuna das Ilhas**, Açores, p. 8, 18 out. 2013.
- [52] TEIXEIRA, Ricardo Cunha. A Matemática da Natureza: *Spira Mirabilis*. **Atlântico Expresso**, Açores, p. 17, 6 nov. 2017.
- [53] VIANA, Marcelo. Fibonacci ensinou os europeus a contar. **Folha de S. Paulo**, São Paulo, 10 nov. 2017.
- [54] WOLFRAM, Stephen. **Wolfram-Demonstrations Project**, Wolfram Research, 2009. Disponível em: <https://www.wolframalpha.com/>. Acesso em: 07 mai. 2019.
- [55] ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2011.
- [56] ZAHN, Maurício. A deduction of the Golden Spiral equation via powers of the Golden Ratio φ . **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, p. 963-971, 31 mar. 2017.