UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

# PROBLEMAS DE VALOR INICIAL E DE CONTORNO PARA EQUAÇÃO GENERALIZADA DE ZAKHAROV-KUZNETSOV

**MARCOS CASTELLI**

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Número do processo 88882.168059/2018-01

Maringá - PR
2021

# PROBLEMAS DE VALOR INICIAL E DE CONTORNO PARA EQUAÇÃO GENERALIZADA DE ZAKHAROV-KUZNETSOV

**MARCOS CASTELLI**

Tese de Doutorado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Gleb Germanovitch Doronin.

Banca examinadora:

Gleb Germanovitch Doronin/Presidente (UEM)
Ademir Pastor Ferreira (IMECC – UNICAMP)
Ademir Fernando Pazoto (IM – UFRJ)
Luiz Gustavo Farah Dias (DM – UFMG)
Fábio Matheus Amorin Natali (DMA – UEM)
Marcos Roberto Teixeira Primo/Suplente (UEM)
Marcos Vinicius Fagundes Padilha/Suplente (UEM/UFPR)

Maringá - PR
2021

**MARCOS CASTELLI**

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL E DE CONTORNO PARA EQUAÇÃO GENERALIZADA DE ZAKHAROV-KUZNETSOV

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali - UEM
Prof. Dr. Ademir Pastor - IMECC/UNICAMP
Prof. Dr. Luiz Gustavo Farah Dias - UFMG
Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto - UFRJ

Aprovada em: 06 de maio de 2021.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Castelli, Marcos
C348p Problemas de valor inicial e de contorno para equação generalizada de Zakharov-Kuznetsov / Marcos Castelli. -- Maringá, 2021.
viii, 97 f. : il.

Orientador: Profº. Drº. Gleb Germanovitch Doronin.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2021.

1. Equações diferenciais parciais dispersivas. 2. Existência e unicidade. 3. Comportamento assintótico. 4. Dispersive partial differential equations. 5. Existence and uniqueness. 6. Asymptotic behavior. I. Doronin, Gleb Germanovitch, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353
Edilson Damasio CRB9-1.123

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**ATA DE DEFESA DE TESE – Nº. 060 (SESSENTA) – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM NÍVEL DE DOUTORADO.**

Ata da banca examinadora da tese de doutorado a que se submeteu o Sr. MARCOS CASTELLI, aluno regularmente matriculado no Programa de Pós-graduação em Matemática em nível de Doutorado do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá. Aos seis dias do mês de maio de dois mil e vinte um, com início às quinze horas e trinta minutos por videoconferência, via https://meet.google.com/wtq-dhdy-rqf, reuniu-se a banca examinadora da tese em epígrafe, composta pelos seguintes membros: Professor Dr. Gleb Germanovitch Doronin (UEM - Universidade Estadual de Maringá / Orientador); Professor Dr. Fábio Matheus Amorin Natali (UEM - Universidade Estadual de Maringá); Professor Dr. Ademir Pastor (IMECC/UNICAMP - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica); Professor Dr. Luiz Gustavo Farah Dias (UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais) e Professor Dr. Ademir Fernando Pazoto (UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro) sob a presidência do primeiro. Os trabalhos foram abertos pelo presidente, que prestou esclarecimento de como o candidato deverá proceder à apresentação da tese, informando que terá no máximo 50 (cinquenta) minutos para a exposição. A seguir o senhor presidente passou a palavra ao candidato para que fizesse a exposição de seu trabalho que versa sobre: “Problemas de Valor Inicial e de Contorno para Equação Generalizada de Zakharov-Kuznetsov”. Terminada a exposição, o candidato foi arguido pelos membros da banca examinadora. Após as arguições, foi determinado um intervalo de tempo, sem a presença do candidato e do público, para que os membros da banca examinadora procedessem ao julgamento. O resultado foi o seguinte:

| | |
|---|---|
| Professor Dr. Gleb Germanovitch Doronin | Resultado: Aprovado |
| Professor Dr. Fábio Matheus Amorin Natali | Resultado: Aprovado |
| Professor Dr. Ademir Pastor | Resultado: Aprovado |
| Professor Dr. Luiz Gustavo Farah Dias | Resultado: Aprovado |
| Professor Dr. Ademir Fernando Pazoto | Resultado: Aprovado |

A seguir, com a presença do público e do candidato, o senhor presidente anunciou que o Sr. Marcos Castelli, candidato ao título de Doutor em Matemática, na Área de Concentração: Análise, foi considerado: **APROVADO**. Nada mais havendo a tratar, o senhor presidente encerrou os trabalhos, e para constar lavrou a presente Ata, lida e aprovada por todos os membros.

Professor Dr. Gleb Germanovitch Doronin

# Agradecimentos

Agradeço a minha família e todos os integrantes do DMA-UEM que contribuiram para minha formação e elaboração deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Número do processo 88882.168059/2018-01

Marcos Castelli.

# Resumo

Este trabalho trata da equação generalizada de Zakharov-Kuznetsov. Estudamos três situações: equação subcrítica, crítica e supercrítica. Estão apresentados os resultados sobre existência, unicidade e comportamento assintótico.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais parciais dispersivas, Existência e unicidade, Comportamento assintótico.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Número do processo 88882.168059/2018-01

# Abstract

This work deals with the generalized Zakharov-Kuznetsov equation. We study three situations: subcritical, critical and supercritical cases. The results on existence, uniqueness and asymptotic behavior are presented.

**Keywords**: Dispersive partial differential equations, Existence and uniqueness, Asymptotic behavior.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance 001. Grant number 88882.168059/2018-01

# Sumário

# Introdução

A equação de Zakharov-Kuznetsov foi deduzida pela primeira vez no ano de 1974 [50], para descrever o comportamento de ondas íon-acústicas fracamente não lineares no plasma que compreende íons frios e elétrons isotérmicos quentes quando há um campo magnético uniforme.

Zakharov e Kuznetsov [50], fizeram a primeira tentativa para modelar um sóliton em um sistema tridimensional. Para um plasma magnetizado não relativístico com a suposição de que a temperatura do íon é zero, eles obtiveram uma equação diferencial tridimensional,

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0, \tag{0.0.1}$$

que é conhecida como a equação ZK. A equação (0.0.1) é uma extensão tridimensional da conhecida equação de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{0.0.2}$$

que é modelo que governa a propagação unidimensional de ondas fracamente dispersivas e de pequena amplitude (Infeld e Rowlands 1990, [35]). A KdV possui soluções de onda solitária e de onda periódica, sendo que ambas mostraram ser estáveis (Benjamin 1972, [36]; Drazin 1977, [37]). Em 1970, Kadomtsev e Petviashvilli fizeram a primeira tentativa de modelar um sóliton em um sistema bidimensional [48], e derivaram uma fraca extensão bidimensional da equação KdV, conhecida como equação KP, para ondas de pequena amplitude e fracamente dispersivas. A estabilidade das soluções da equação KP para perturbações bidimensionais de comprimento de onda longo foram investigadas (Infeld, Rowlands e Hen 1978, [33]).

No contexto de ondas iônicas acústicas em um plasma não magnetizado compreendendo íons frios e elétrons isotérmicos quentes, ondas de pequena amplitude e fracamente não lineares são regido pela equação KP (Kako e Rowlands 1976,[38]). Na situação mais realista em que os elétrons são não isotérmicos, O'Keir e Parkes (1997) [41] mostraram que a equação governante equivalente é uma forma modificada da equação KP (ou equação mKP). A versão unidimensional correspondente da equação mKP foi derivado por Schamel (1973) e agora é conhecido como a equação de Schamel [39]. O'Keir e Parkes (1997) investigaram a estabilidade de soluções de ondas de viagens planas-periódicas e solitárias de mKP para perturbações bidimensionais de comprimento de onda longo.

Se o plasma é magnetizado, a equação governante quando os elétrons são isotérmico é a equação de Zakharov-Kuznetsov (ZK) (Zakharov e Kuznetsov 1974). Assim, a equação ZK também pode ser usada para um sistema magnetizado bidimensional

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0. \tag{0.0.3}$$

Em contraste com o plasma normal que consiste em elétrons e íons positivos $(e - i)$, foi observado que as ondas não lineares em plasmas tem um componente adicional de pósitrons que se comportam de maneira diferente, assim o plasma $(e-i)$ de dois componentes torna-se um $(e - i - p)$ de três componentes. O plasma elétron-íon-pósitron tem um papel importante na compreensão dos plasmas no Universo Primitivo, nos núcleos galácticos ativos, na magnetosferas de pulsar, e na atmosfera solar.

A Equação (0.0.3) é a equação ZK para o sóliton íon-acústico bidimensional, magnetizado, rotativo e sem colisão fracamente relativístico de três componentes $(e - i - p)$ do plasma [45]. Infeld 1985, [34]; Laedke e Spatschek 1982, [40] investigaram a estabilidade de soluções de ondas viajantes planas-periódicas e solitárias da equação ZK para perturbações bidimensionais de comprimento de onda longo.

Munro e Parkes 1999 [49], mostraram que se os elétrons são não isotérmicos, a equação governante é uma forma modificada da equação ZK, que eles chamaram de equação mZK[1]. Eles investigaram a estabilidade das soluções de ondas viajantes planas-periódicas e solitárias da equação mZK para perturbações bidimensionais de comprimento de onda longo usando o método de Infeld e Rowlands (1990) (ver também Infeld 1985).

Análise mais precisa e significativa da boa colocação e propriedades qualitativas de soluções para equação do tipo ZK e suas generalizações inicia-se, basicamente[2], no século XXI.

Faminskii em 2008 [10] estabeleceu resultados de boa colocação local e global para o Problema de Valor Inicial e de Contorno para a equação ZK bidimensional em espaços do tipo Sobolev sob suposições naturais sobre os dados iniciais e de contorno inicial. Faminskii considerou a seguinte equação

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = f, \tag{0.0.4}$$

nos domínios

$$\begin{aligned} (0,T)\times\mathbb{R}^2_+ &\equiv \{(t,x,y); t\in(0,T), x>0, y\in\mathbb{R}\}, && (0.0.5)\\ (0,T)\times\Sigma &\equiv \{(t,x,y); t\in(0,T), x\in(0,1), y\in\mathbb{R}\}, && (0.0.6)\end{aligned}$$

onde $T > 0$. Em ambos os casos com a condição inicial

$$u(0,x,y) = u_0(x,y) \tag{0.0.7}$$

[1]é preciso ressaltar que a equação encontrada em [49] tem não linearidade da forma $u^{1/2}u_x$, ver fórmula (2.24) pg. 308.

[2]Faminsk em 1995 [9] estudou o problema de Cauchy para a equação de Zhakarov-Kuznetsov.

(onde $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ ou $(x,y) \in \Sigma$ respectivamente) e as seguinte condições de fronteira para $(t,y) \in B_T = (0,T) \times \mathbb{R}$ :

(1) se o problema for em $(0,T) \times \mathbb{R}^2_+$ adicione uma condição ao problema

$$u(t,0,y) = u_1(t,y). \tag{0.0.8}$$

(2) se o problema for em $(0,T) \times \Sigma$ acrescente três condições

$$u(t,0,y) = u_1(t,y), \quad u(t,1,y) = u_2(t,y), \quad u_x(t,1,y) = u_3(t,y), \tag{0.0.9}$$

Denotando $C_w(\overline{I};\mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach, como o espaço das funções fracamente contínuas de $\overline{I}$ para $\mathcal{B}$, por

$$\lambda^+(u;T) = \sup_{m \geq 0} \int_0^T \int_m^{m+1} \int_{\mathbb{R}} (u_x^2 + u_y^2)\, dydxdt,$$

e para $s_1, s_2 \geq 0$

$$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = H^{s_1,s_2}_{ty}(\mathbb{R}^2) = \{\mu(t,y); \mathcal{F}^{-1}[(1+|\lambda|^{s_1} + |\eta|^{s_2})\hat{\mu}(\lambda,\eta)] \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

Faminskii estabeleceu que se o problema for considerado como em (1) e se o dado inicial $(1+x)^\beta u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$ para alguma constante $\beta \geq 0$, $u_1 \in H^{s/3,s}(B_T)$, $s > 3/2$, $T > 0$ e $(1+x)^\beta f \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^2_+))$. Então existe uma solução $u(t,x,y)$ do problema (0.0.4)-(0.0.8) tal que

$$(1+x)^\beta u \in C_w([0,T];L^2(\mathbb{R}^2_+)), \qquad \lambda^+(u;T) < \infty.$$

Se, $\beta > 0$ então

$$(1+x)^{\beta-1/2} u \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^2_+)).$$

O problema (0.0.4)-(0.0.8) é bem posto nesta classe se $\beta \geq 1$. ([10] pg. 21 Teorema 6.1).

Agora, se o problema for considerado como em (2), se $u_0 \in L^2(\Sigma)$, $u_1, u_2 \in H^{s/3,s}(B_T), s > 3/2$, $T > 0$, $u_3 \in L^2(B_T)$ e $f \in L^1(0,T;L^2(\Sigma))$. Então o problema (0.0.4)-(0.0.9) é bem posto na classe $C_w([0,T];L^2(\Sigma)) \cap L^2(0,T;H^1(\Sigma))$, ([10] pg. 22 Teorema 6.2).

Outros resultados com uma análise mais profunda sobre o problema de valor inicial e de contorno para a equação ZK é considerado por J.-C. Saut e R. Temam [26] em 2010. Provavelmente, devido ao seu caráter pioneiro, esse PVIC foi nomeado em [14] como Problema de Saut-Temam. Continuando este estudo, [27] (2012), os autores consideram a equação de Zakharov-Kuznetsov

$$u_t + cu_x + \Delta u_x + uu_x = f,$$

onde $u = u(x,x^\perp,t)$ e $(x,x^\perp) \in (0,1)\times(-\pi/2,\pi/2)^d, d = 1,2$, com condições de contorno de Dirichlet ou condições de fronteira periódicas. Depois de estudar alguns espaços especiais de funções, eles mostram a existência e unicidade de soluções para um problema linearizado usando a teoria de semigrupos e derivam por argumentos de compacidade e regularização um resultado de existência de soluções fracas globais nas dimensões espaciais 2 e 3 ($d = 1, 2$, respectivamente), e um resultado da unicidade de tal solução no caso bidimensional.

Em [7] G. Doronin e N. Larkin (2015) consideram a equação de Zakharov-Kuznetsov

$$u_t + (\beta + u)u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0$$

no domínio $Q_T = D \times (0, T)$, onde $D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, L), y \in (-B, B)$. Aqui, $\beta = 0$ ou $\beta = 1$, $T > 0$ é arbitrário, $L, B > 0$, e pode ser que $B = +\infty$. Eles fornecem esta equação com as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$u(0, y, t) = u(L, y, t) = u_x(L, y, t) = 0,$$

$$u(x, -B, t) = u(x, B, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y),$$

e condições de contorno análogas para o caso em que $B = \infty$. Os autores provam primeiro, no caso em que $\beta = 1$, a existência e unicidade de uma solução forte para o problema considerado, ou seja, uma solução $u$ tal que, em particular, $u \in L^2(0, T; H^3(D))$ com $\Delta u_x \in L^2(0, T; H^1(D))$. Em seguida, eles estabelecem condições para que um problema linear semelhante tenha soluções que não decaiam com o tempo $t \to \infty$, tal condição aparece devido a análise espectral para o caso $\beta = 1$, ou seja, na presença do termo de transporte linear $u_x$. A condição diz que se o problema linear for considerado sobre o domínio $D = (0, L) \times (-B, B)$, $L, B > 0$, e se os números $L$ e $B$ satisfazem a igualdade

$$\left(\frac{2\pi}{L\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2B}\right)^2 = 1$$

onde $k, l, n \in \mathbb{N}$, então as soluções não podem decair com o tempo. Posteriormente, apresentam condições suficientes para o decaimento exponencial das normas$-L^2(D)$ das soluções do problema original, em ambos os casos quando $\beta = 0$ e $\beta = 1$.

Resumindo, no que diz respeito à ZK clássica, os resultados tanto de Problemas de Valor Inicial (PVI's) quanto de Problemas de Valor Inicial e de Contorno (PVIC's) podem ser encontrados em [7, 9, 10, 14, 19, 20, 22, 25, 26, 27]. Na Seção 2.2.1 seguimos principalmente J.-C. Saut, R. Temam e Weng [27]. Para o PVIC bidimensional colocada sob uma $y-$faixa, problema encontrado na Seção 2.2, nos baseamos no trabalho de Larkin e Padilha [14] para a equação ZK tridimensional. Na Seção 3.2 usamos os resultados encontrados em [27] para validar a existência de um semigrupo de contração para a equação ZK. Para as estimativas com decaimento encontradas na Seção 3.3, nós adotamos os métodos de Doronin e Larkin [7].

Nesta tese vamos estudar a generalização da equação de Zakharov-Kuznetsov bidimensional [17]. Estamos interessados em problemas de valor inicial e de contorno (PVIC's) em domínios limitados e não limitados para a equação de Zakharov-Kuznetsov generalizada (gZK) escrita na forma

$$u_t + u_x + |u|^\alpha u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0, \tag{0.0.10}$$

que é um análogo bidimensional em domínios alterados[3] (não sendo a reta real) da equação de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV)

$$u_t + u_x + |u|^\alpha u u_x + u_{xxx} = 0, \tag{0.0.11}$$

ver [1]. Quando $\alpha = 0$, a equação (0.0.10) torna-se a ZK clássica. Nosso estudo abrange os casos $\alpha \in (0, 1]$ e $\alpha > 1$, inteiro. Quando $\alpha \in \mathbb{N}$, assumiremos que a não linearidade terá a forma $u^{1+\alpha}u_x$, para não haver estudos separados do sinal que acompanha o termo. No caso $\alpha = 1$, a equação gZK usualmente chama-se de ZK modificada, ou então de mZK (de maneira análoga a mKdV).

Linares e Pastor 2009 [18], estudaram o problema de Cauchy (ou PVI, equivalentemente) em todo[4] $\mathbb{R}^2$, para a equação ZK modificada bidimensional (mZK), não linearidade com a forma $u^2u_x$, os autores provaram que o problema é localmente bem posto para dados em $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 3/4$. Mesmo que o espaço $L^2(\mathbb{R}^2)$ seja crítico para esta equação, eles estabeleceram que não é possível a boa colocação em tal espaço. O posicionamento global e uma estimativa de função máxima também são estabelecidos.

Farah, Linares e Pastor 2012 [11], consideraram o Problema de Valor Inicial[5] para equação generalizada ZK bidimensional $u_t + \partial_x(u^{k+1}) + u_{xxx} + u_{xyy} = 0$, onde $k \geq 3$ é um inteiro. Provaram para $k \geq 8$ a boa colocação local em espaços $H^s(\mathbb{R}^2)$ de Sobolev baseados em $L^2$, onde $s$ é maior do que o índice da escala crítica $s_k = 1 - 2/k$. Para $k \geq 3$, estabeleceram um critério para obter soluções globais $H^1(\mathbb{R}^2)$. Provaram também um resultado de espalhamento não linear em $H^1(\mathbb{R}^2)$ assumindo que os dados iniciais são pequenos e pertence a um espaço de Lebesgue adequado.

Assim, podemos dizer que o estudo do PVI no $\mathbb{R}^2$ para gZK chegou a um nível satisfatório. No entanto, no momento de obtenção dos resultados desta tese, não foram encontrados resultados sólidos relativos à PVIC's em domínios limitados (ou ilimitados) para mZK ou para a ZK mais geral.

Dificuldades e desafios a serem atacados no decorrer da a tese são seguintes:

- A principal diferença entre os problemas de valor inicial puro e o de valor inicial e de contorno é que o PVI em $\mathbb{R}^2$ fornece (quase que imediatamente) boas estimativas em $H^1(\mathbb{R}^2)$ pelas leis de conservação [18], enquanto o PVIC não possui essa vantagem. Isso é um forte desafio, pois não é claro como obter as estimativas de $u_x$ ou de $u_t$ em $L^2$ nas variáveis $x, y$ no caso de problemas com condições de contorno.

- Outro desafio é que a 2ª potência do termo não linear da mZK é crítica [17, 18], em contraste com a mKdV. A abordagem usual neste caso não fornece bons resultados. Mais ainda, a análise do PVI no caso crítico levanta a hipótese de que a solução pode se quebrar se os dados iniciais não forem suficientemente pequenos em algum

[3] Se o corte de domínios for levado em consideração, o termo de transporte $u_x$ deve ser considerado ver, por exemplo, [2, 32].

[4] vale a pena citar que a equação ZK e suas generalizações estudadas em todo o plano $\mathbb{R}^2$ não contém o termo $u_x$.

[5] mesma observação feita acima.

sentido. Observe que modelos dispersivos unidimensionais com não linearidades críticas foram estudados recentemente em [15].

- Outro detalhe a ser notado é que restrições ao domínio para as propriedades de decaimento de soluções das equações dispersivas aparecem naturalmente devido à presença de um termo de transporte linear $u_x$, ver [7, 24] para detalhes.[6]

Não estamos detalhando aqui, na introdução, as dificuldades e os métodos de abordagem dos problemas correspondentes. Deixamos essas explicações para o início de cada capítulo.

O primeiro capítulo contém os resultados preliminares necessários.

No segundo capítulo, inicialmente consideramos a gZK com $\alpha \in (0, 1)$, o que chamamos de caso subcrítico. Mostramos alguns resultados e dificuldades que já aparecem para o problema posto em um retângulo. Em seguida, iremos abordar a mZK ($\alpha = 1$) numa faixa infinita na direção $y$. Usamos uma regularização parabólica para obter estimativas a priori globais e então mostrar a existência e decaimento exponencial das normas da solução e suas derivadas em espaços baseados no $L^2$ quando $t \to \infty$. Ressaltamos que foi possível fazer isso apenas para dados iniciais suficientemente pequenos e sob restrições de largura da faixa.

No terceiro capítulo da Tese, iremos tratar a gZK posta em um retângulo limitado. Para $\alpha \geq 1$, inteiro, utilizamos argumentos de ponto fixo para construir a única solução forte local. Depois o estudo se divide em dois casos: caso crítico ($\alpha = 1$) e o supercrítico ($\alpha > 1$, inteiro). Esses são os resultados principais da tese. As abordagens seguem as mesmas ideias, mas se diferem tecnicamente.

Os resultados encontrados neste trabalho foram publicados em forma de três artigos em periódicos internacionais de alto índice Qualis da CAPES, à citar:

• Modified and subcritical Zakharov-Kuznetsov equations posed on rectangles, Journal of Differential Equations, 2021, Qualis A1.

• Modified Zakharov-Kuznetsov equation posed on a strip, Applicable Analysis, 2020, Qualis A2 (antigamente B2).

• Supercritical Zakharov-Kuznetsov equation posed on bounded rectangles, Z. Angew. Math. Phys, 2021, Qualis A2.

[6]Este termo não está presente em [16] que facilita a abordagem. Além disso, o trabalho [16] se baseia num outro método e, mais ainda, apareceu na etapa final da tese, quando os nossos resultados já foram expostos em arXiv e o artigo correspondente já foi submetido na sua versão final revisada em JDE.

CAPÍTULO 1

# Resultados Preliminares

Ao longo desta tese, $n \in \mathbb{N}^*$ será a dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$ (em nosso caso $n = 2$). A norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é denotada por $x \to |x|$ e o produto interno associado por $(x, y) \to x \cdot y$. Para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, denotamos $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$

Para qualquer conjunto aberto $\Omega \subset R^n$, usamos as seguintes definições para os espaços de funções:

- O conjunto $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, das funções om derivadas contínuas até a ordem $k$.
- O subconjunto $C_b^k(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ das funções om derivadas contínuas e limitadas até a ordem $k$.
- O conjunto $C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1]$, das funções $\alpha-$Hölder contínuas. Para o caso $\alpha = 1$, $C^{0,1}(\Omega)$ é o conjunto das funções Lipschitz. A Lipschitz seminorma de cada função é definida como

$$Lip(f) \doteq \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

- O conjunto $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ de funções em $C^k(\Omega)$ cuja as derivadas parciais de ordem $k$ são $\alpha-$Hölder contínuas.
- O conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ das funções em $C^\infty(\Omega)$ que tem suporte compacto em $\Omega$. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da topologia do limite indutivo é denominado o espaço das funções testes, e é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.
- O conjunto $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é a restrição para $\Omega$ das funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para qualquer espaço vetorial normado $E$, denotamos seu dual topológico por $E^{'}$, que é o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $E$. Para qualquer $f \in E^{'}$ e $x \in E$ introduzimos a dualidade.

$$\langle f, x \rangle_{E' E} \doteq f(x)$$

**Definição 1.0.1.** *Seja $E$ um espaço de Banach e $E^{'}$ seu espaço dual.*

- *Dizemos que um sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemento de $E$ converge fracamente para $u \in E$, se para qualquer $f \in E'$ tivermos*

$$f(u_n) = \langle f, u_n \rangle_{E'E} \longrightarrow \langle f, u \rangle_{E'E} = f(u).$$

- *Dizemos que um sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemento de $E'$ converge fraco$-\star$ para $f \in E'$, se para qualquer $u \in E$ valer*

$$f_n(u) = \langle f_n, u \rangle_{E'E} \longrightarrow \langle f, u \rangle_{E'E} = f(u).$$

**Definição 1.0.2.** *Sejam $E$ e $F$ dois espaços de Banach. Dizemos que a aplicação $S$ de $E$ em $F$ é compacta se a imagem de todo subconjunto limitado de $E$ por $S$ é um conjunto relativamente compacto de $F$, ou seja, é um conjunto com fechamento compacto em $F$.*

## 1.1 Espaços $L^p$ e Espaços de Sobolev

Esta notação é usada no decorre do nosso trabalho.

- Sejam $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis a Lebesgue sobre o conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com valores reais, para o qual $p^{\text{a}}$ potência do valor absoluto é integral para a medida de Lebesgue. Para cada $f \in L^p(\Omega)$, definimos

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- O espaço $L^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis a Lebesgue que são essencialmente limitadas em $\Omega$. Para cada $f \in L^\infty(\Omega)$, definimos

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := ess \sup_{\Omega} |f| < \infty.$$

Pode-se provar que $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com as normas descritas acima, ainda mais

- Para $1 < p < \infty$, o espaço $L^p(\Omega)$ é separável e reflexivo. Mais ainda, o espaço dual é isomorfo a $L^{p'}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
- O espaço $L^1(\Omega)$ é separável mas não é reflexivo. O espaço dual é isomorfo a $L^\infty(\Omega)$.
- O espaço $L^\infty(\Omega)$ não é separável e nem reflexivo. O espaço dual é estritamente maior que $L^1(\Omega)$.

**Proposição 1.1.1.** *Para qualquer conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$, o conjunto $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para qualquer $1 \leq p < \infty$.*

Para a demonstração ver [30] pg. 63, Teorema II.2.26.

**Proposição 1.1.2.** *Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Então podemos extrair uma subsequência fracamente convergente de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; tal que*

$$\exists\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \exists u \in L^p(\Omega), \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_{n_k}\varphi \, d\Omega = \int_\Omega u\varphi \, d\Omega, \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

Para a demonstração ver [30] pg. 63, Proposição II.2.27.

**Lema 1.1.1.** *Seja $\Omega$ qualquer conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$. Então, para todo $r$ tal que*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, \ 0 \leq \theta \leq 1,$$

*nós temos $u \in L^r(\Omega)$, com*

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}^\theta \|u\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

A prova deste resultado pode ser encontrada em [30] pg. 66, Lema II.2.33.

**Lema 1.1.2** (Desigualdade de Hölder)**.** *Considere $\Omega$ um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Sejam $1 < p_1, \ldots, p_l < \infty$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{p_i} = 1$. Se $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, \ldots, l$, então*

$$\int_\Omega \prod_{i=1}^{l} |u_i| \, d\Omega \leq \prod_{i=1}^{l} \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Para a demonstração ver [30] pg. 58, Proposição II.2.18.

**Proposição 1.1.3.** *Sendo $\Omega$ um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se $u \in L^q(\Omega)$ então $u \in L^p(\Omega)$ valendo a desigualdade*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

*Demonstração.* O caso $p = q$ é imediato. Para o caso $p < q$ basta aplicar a desigualdade de Hölder para $u^p \in L^{\frac{q}{p}}(\Omega)$ e $1 \in L^{\frac{q}{q-p}}(\Omega)$. Pois, $q/p > 1$ e

$$\frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = 1.$$

Então,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega 1 \cdot u^p \, d\Omega \leq \|1\|_{L^{\frac{q}{q-p}}} \|u^p\|_{L^{\frac{q}{p}}} \leq |\Omega|^{1-\frac{p}{q}} \|u\|_{L^q}^p.$$

$\square$

**Definição 1.1.1.** *Para todo conjunto aberto $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ e para todo $1 \leq p < \infty$, denotamos como $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis para o a qual a $p^a$ potência do valor absoluto é localmente integrável, isto é, a integral sobre todos os subconjuntos compactos de $\Omega$ é finito. Similarmente, denotamos $L^\infty_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis essencialmente limitadas sobre todos os compactos de $\Omega$.*

Dizemos que uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $u$ em $L^\infty_{loc}(\Omega)$, se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $u$ em $L^\infty(\omega)$, para qualquer conjunto aberto e limitado $\omega$ tal que $\overline{\omega} \subset \Omega$.

**Proposição 1.1.4.** *Sejam $\Omega$ um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, $q > 1$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^q(\Omega)$. Assuma que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, com $1 \leq p < q$; então nós temos*

$$u \in L^q(\Omega)$$

*e*

$$u_n \to u \quad em \quad L^p(\Omega).$$

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 68, Proposição II.2.36.

Considere $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice. Para qualquer função $f$ defina o operador diferencial $D^\alpha$ por

$$D^\alpha f := \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\right)\cdots\left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right) f, \tag{1.1.1}$$

assim que esta derivada parcial existe (em um sentido clássico ou fraco). Também usamos a notação $\partial^\alpha$ para designar o operador $D^\alpha$.

Uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ é dita convergente para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se existe um compacto $K$ de $\mathbb{R}^n$ que contém o suporte de $\varphi$ e de todas as funções $\varphi_n$, e se para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $\{\partial^\alpha\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\partial^\alpha\varphi$.

**Definição 1.1.2** (Distribuição)**.** *Um operador linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é chamado de distribuição se ele é contínuo no seguinte sentido, $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ para qualquer sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

*O conjunto das distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Mesmo que $\mathcal{D}(\Omega)$ não seja um espaço de Banach, por semelhança com a usual teoria da dualidade, também adotamos a notação

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \doteq T(\varphi).$$

**Definição 1.1.3.** *Uma sequência de distribuições $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ é dita convergente para $T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, se para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nós tivermos*

$$\langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}, \quad quando \quad n \to \infty.$$

**Definição 1.1.4.** *Para qualquer distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a derivada de $T$ no sentido das distribuições é a distribuição $\partial^\alpha T$ definida como*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Para cada função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ podemos associar a distribuição $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definida por

$$\langle T_f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

O próximo resulta identifica $L^1_{loc}(\Omega)$ como um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Proposição 1.1.5.** *A aplicação*

$$\mathcal{T} : f \in L^1_{loc}(\Omega) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

*é injetiva e sequencialmente contínua.*

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 72, Proposição II.2.42.

Graças ao resultado anterior, vemos que a aplicação $\mathcal{T}$ nos permite identificar $L^1_{loc}(\Omega)$ como um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Por abuso de notação, dizemos que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ e identificamos sistematicamente $f$ e a distribuição $T_f$. Reciprocamente, se uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $T = T_f$ para alguma $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ dizemos que $T \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Observe também que, assim que se $f$ é uma função suave o suficiente, uma simples integração por partes mostra que temos

$$\partial^\alpha(T_f) = T_{\partial^\alpha f}, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Proposição 1.1.6.**

- *Seja $1 \leq p < \infty$, e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ que converge fraco para $f$ em $L^p(\Omega)$. Então nós temos*

$$f_n \longrightarrow f, \quad \textit{em} \;\; \mathcal{D}'(\Omega), \quad \textit{quando} \;\; n \to \infty.$$

- *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^\infty(\Omega)$ que converge fraco$-\star$ para $f$ em $L^\infty(\Omega)$. Então nós temos*

$$f_n \longrightarrow f, \quad \textit{em} \;\; \mathcal{D}'(\Omega), \quad \textit{quando} \;\; n \to \infty.$$

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 73, Proposição II.2.43.

**Lema 1.1.3.** *Seja $\Omega$ um conjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$ e seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma distribuição tal que $\nabla T = 0$ (em outras palavras $\partial T/\partial x_i = 0$, em $\mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $i$). Então $T$ é constante, isto é, existe uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$T = \alpha.$$

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 73, Lema II.2.44.

**Definição 1.1.5.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dadas $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\alpha$ um multi-índice. Dizemos que $v$ é $\alpha$-ésima derivada fraca de $u$ e escrevemos*

$$D^\alpha u = v,$$

*se*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^\alpha \int_\Omega v\phi \, dx \tag{1.1.2}$$

*para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

**Lema 1.1.4.** *A $\alpha$-ésima derivada fraca, se existe, é única a menos de um conjunto de medida nula.*

Para a prova ver [8] pg. 257.

**Definição 1.1.6.** *Seja $\Omega$ um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, seja $k$ um inteiro não negativo, e seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev por*

$$W^{k,p}(\Omega) \doteq \{f \in L^p(\Omega) \ ; \ D^\alpha f \in L^p(\Omega) \ , \ \forall |\alpha| \leq k\},$$

*onde $D^\alpha$ são as derivadas de $f$, com norma natural*

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \ , \ para \ \ p < \infty,$$

*e*

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sup_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \ , \ para \ \ p = \infty.$$

**Proposição 1.1.7.** *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Para a demonstração ver [8] pg. 262, Teorema 2.

**Notação:** Se $p = 2$ usualmente escrevemos $W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$, note que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. O fecho do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ é denotado por $W_0^{k,p}(\Omega)$, se $p = 2$ denotamos $H_0^k(\Omega)$. O espaço dos operadores lineares limitados $f : W_0^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é denotado por $W^{-k,p'}(\Omega)$, ou $H^{-k}(\Omega)$ se $p = 2$.

**DOMÍNIOS**

Neste momento, $k$ designa um inteiro não negativo e $\alpha$ um número real no intervalo $[0, 1]$. Além disso, assumimos que $k+\alpha > 1$, o que implica que funções da classe $C^{k,\alpha}$ são pelo menos localmente Lipschitz contínuas.

Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio da classe $C^{k,\alpha}$ se sua fronteira $\partial\Omega$ é localmente o gráfico de uma função da classe $C^{k,\alpha}$ tal que $\Omega$ está situado em um único lado deste gráfico. Vamos enfatizar o fato de que esta última condição é crucial (particularmente para nos permitir definir o conceito de um normal para fora do domínio e, portanto, uma orientação em $\partial\Omega$ como definimos abaixo).

**Definição 1.1.7.** *Para qualquer aplicação $a : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, de classe $C^{k,\alpha}$ e suportada compactamente nós definimos o seguinte conjunto aberto*

$$\mathcal{H}_a \doteq \{(\overline{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n > a(\overline{x})\},$$

*que é chamado um meio-espaço $C^{k,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$.*

*O conjunto $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+_* = \mathcal{H}_0$ é chamado de meio-espaço plano.*

**Definição 1.1.8.** *Um conjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é dito ser um domínio de classe* $C^{k,\alpha}$, *se para todo ponto* $\sigma \in \partial\Omega$, *existe uma vizinhança aberta* $U_\sigma$ *de* $\sigma$ *em* $\mathbb{R}^n$, *uma rotação* $R_\sigma \in O_n^+(\mathbb{R})$[1], *e um meio-espaço* $C^{k,\alpha}$ *denotado por* $\mathcal{H}_{a_\sigma}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \Omega \cap U_\sigma &= (R_\sigma \mathcal{H}_{a_\sigma}) \cap U_\sigma, \\ \partial\Omega \cap U_\sigma &= (R_\sigma \partial\mathcal{H}_{a_\sigma}) \cap U_\sigma, \\ \Omega^c \cap U_\sigma &= (R_\sigma \mathcal{H}^c_{a_\sigma}) \cap U_\sigma. \end{aligned}$$

*No caso em que* $k = 0$ *e* $\alpha = 1$ *nós simplesmente dizemos que o domínio* $\Omega$ *é Lipschitz. Se* $\alpha = 0$ *simplesmente dizemos que* $\Omega$ *é de classe* $C^k$.

Para mais detalhes sobre domínios de classe $C^{k,\alpha}$ ver [30] Capítulo III e também [43]. Mencionamos, sem prova, que a classe dos domínios de Lipschitz contém, por exemplo, todos os conjuntos abertos convexos, ver [43] pg. 12, Corolário 1.2.2.3.

**Teorema 1.1.1.** *Seja* $\Omega$ *um domínio Lipschitz em* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira compacta e* $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}^*$. *O conjunto* $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ *é denso em* $W^{k,p}(\Omega)$.

Para a demonstração ver [30] pg. 144, Teorema III.3.11.

**Teorema 1.1.2.** *Seja* $k_1 > k_2 \geq 0$ *e* $\Omega$ *um domínio Lipschitz limitado de* $\mathbb{R}^n$. *Então a imersão de* $W^{k_2,p}(\Omega)$ *em* $W^{k_1,p}(\Omega)$ *é compacta.*

Para a demonstração ver [43] pg. 26 , Teorema 1.4.3.2.

**Teorema 1.1.3.** *Seja* $\Omega$ *um domínio Lipschitz de* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira compacta e considere* $1 \leq p < \infty$. *Então, existe uma constante* $C > 0$ *tal que para qualquer* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *nós temos*

$$\|\varphi|_{\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|\varphi\|^{1-1/p}_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|^{1/p}_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

*Como consequência, existe um único operador linear contínuo*

$$\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

*tal que* $\gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega}$ *para qualquer* $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$. *Este operador é chamado de operador traço sobre* $W^{1,p}(\Omega)$.

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 155, Teorema III.2.19.

**Observação 1.1.1.** *É possível mostrar ( [30], Teorema III.2.46) que o núcleo do operador traço* $\gamma_0$ *é nada mais que o espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$. *Esta é a razão que dizemos que* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *é exatamente o conjunto de funções em* $W^{1,p}(\Omega)$ *que desaparece na fronteira* $\partial\Omega$.

[1] orientação positiva em $\mathbb{R}^n$.

**Definição 1.1.9.** *Seja $\Omega$ um domínio Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ com fronteira compacta e considere $1 < p < \infty$. A imagem do operador traço é referida como*

$$W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) = \gamma_0(W^{1,p}(\Omega)).$$

*Isto é um espaço de Banach na seguinte norma,*

$$\|v\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(\Omega) \\ \gamma_0(u)=v}} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

**Teorema 1.1.4.** *Com a mesma notação que a Definição 1.1.9 e $1 < p < \infty$, nós temos a seguintes propriedades.*

- *O operador traço $\gamma_0$ é contínuo de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.*
- *O espaço $C^{0,1}(\partial\Omega)$ está incluído e denso em $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.*
- *O espaço $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ é denso em $L^p(\partial\Omega)$.*

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 156, Teorema III.2.21.

**Proposição 1.1.8.** *Seja $\Omega$ um domínio Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ com fronteira compacta. Então $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{-1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 162, Observação III.2.14.

**Definição 1.1.10.** *Para todo $1 \leq p \leq \infty$, definimos $p^*$, o expoente crítico associado a $p$ por*

- $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, *para $p < n$;*
- *qualquer $p^*$ tal que $1 \leq p^* < \infty$, se $p = n$;*
- *$p^* = \infty$, para $p > n$.*

*onde $n$ é a dimensão do espaço.*

**Teorema 1.1.5** (Imersão de Sobolev). *Seja $\Omega$ um domínio limitado e Lipschitz de $\mathbb{R}^n$,*

- *Para $1 \leq p < \infty$, e $1 \leq q \leq p^*$, então*

  $$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

  *com imersão compacta se $1 \leq q < p^*$.*

- *Para todo $p \geq n$, temos*

  $$L^p(\Omega) \subset W^{-1,\infty}(\Omega),$$

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 167, Teorema III.2.34.

**Observação 1.1.2.** *A primeira parte do resulta acima continua válido para domínios não limitados, desde que seja restrito a expoentes $q$ satisfazendo $p \leq q \leq p^*$. Além disso, perdemos a compactação das imersões. Deixe-nos mostrar, por exemplo, que a imersão de $H^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ não é compacta. Considere uma função $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ não nula, defina uma sequência de funções transladadas $f_k(x) = (x - ke)$, onde $e$ é um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$. É óbvio que o a sequência $\{f_k\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^n)$ e que $\|f_k\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = const. \neq 0$. Além disso, podemos facilmente mostrar que $\{f_k\}$ converge fracamente para 0 em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Isso prova que a incorporação de $H^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ não pode ser compacta. A segunda parte continua válida para domínios ilimitados.*

*No caso $p < n$ e consequentemente $p^* < \infty$, a imersão de Sobolev de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$ nunca é compacta. Ver [30] pg. 172, Observação III.2.16.*

Em nosso trabalho, estamos principalmente interessados em domínios espaciais de dimensão 2. Assim, vamos analisar as imersões de Sobolev para o caso em que $\Omega$ é um domínio limitado e Lipschitz de $\mathbb{R}^2$. Se $p = 2$ então teremos que $p^*$ pode ser qualquer número no intervalo $[1, \infty)$. Escolhendo $p^* > 2$, podemos afirmar que a seguinte imersão é compacta

$$H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

Compare com o Teorema de Rellich-Kondrachov para $\Omega$ sendo um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $\Omega$ de classe $C^1$. O resultado afirma que para $1 \leq p \leq \infty$, a imersão

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \ 1 \leq q < \infty, \text{ se } p = n,$$

é compacta. Ver [42], pg. 79, Teorema 2.19.

**Teorema 1.1.6** (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega$ um domínio conexo limitado e Lipschitz de $\mathbb{R}^n$. Seja $\Gamma_1$ uma parte da fronteira de $\Omega$ com uma medida de superfície diferente de zero. Para $1 \leq p < \infty$, defina*

$$W^{1,p}(\Omega)_{0,\Gamma_1} \doteq \{u \in W^{1,p}(\Omega) \ ; \ \gamma_0(u)|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

*Existe uma constante $C > 0$ tal que, para todas as funções $f \in W^{1,p}(\Omega)_{0,\Gamma_1}$ nós temos*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p};$$

*em outras palavras,*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C'\|\nabla u\|_{L^p}.$$

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 179, Proposição III.2.38.

**Teorema 1.1.7.** *Seja $\Omega$ um domínio conexo limitado e Lipschitz de $\mathbb{R}^n$. Considere $f \in H^{-1}(\Omega)$ e seja $u_b \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Então, existe uma única solução $u \in H^1(\Omega)$ do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega, \ , \\ u = u_b, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

*e satisfaz,*

$$\|u\|_{H^1} \leq C\big(\|f\|_{H^{-1}} + \|u_b\|_{H^{1/2}}\big),$$

*para alguma constante $C > 0$ dependendo somente de $\Omega$.*

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 222, Teorema III.4.1.

**Teorema 1.1.8.** *Assuma para $k > 0$, $\Omega$ é de classe $C^{k+1,1}$, Considere $f \in H^k(\Omega)$ e seja $u_b \in H^{k+\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$. Então, existe uma única solução $u \in H^{k+2}(\Omega)$ do problema (1.1.3) e satisfaz,*

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C\big(\|f\|_{H^k} + \|u_b\|_{H^{k+3/2}}\big),$$

*para alguma constante $C > 0$ dependendo somente de $\Omega$.*

A demonstração pode ser encontrada em [30] pg. 223, Teorema III.4.2.

Para provar os resultados de decaimento, vamos aplicar

**Lema 1.1.5.** *(V. A. Steklov) Sejam $L, B > 0$ e $\omega \in H_0^1(\Omega)$, onde $\Omega = (0, L) \times (-B, B)$. Então*

$$\int_0^L \int_{-B}^B \omega^2(x, y)dxdy \leq \frac{4B^2}{\pi^2} \int_0^L \int_{-B}^B \omega_y^2(x, y)dxdy, \tag{1.1.4}$$

*e também*

$$\int_0^L \int_{-B}^B \omega^2(x, y)dxdy \leq \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L \int_{-B}^B \omega_x^2(x, y)dxdy. \tag{1.1.5}$$

*Agora, se $\omega \in H_0^1(0, L; L^2(\mathbb{R}))$, então*

$$\int_0^L \int_{\mathbb{R}} \omega^2(x, y)dxdy \leq \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L \int_{\mathbb{R}} \omega_x^2(x, y)dxdy. \tag{1.1.6}$$

Para a demonstração de (1.1.4)-(1.1.5) ver [7] Proposição 7.2 pg. 678. Para a prova de (1.1.6) ver [14], Lema 2.2 pg. 256.

Agora, por conveniência, denotaremos a $m^{\text{a}}$ derivada parcial de uma função $u$ por $D^m$, onde $m$ é a ordem total do operador diferencial definido em 1.1.1, ou seja $m = m_1 + \ldots + m_n$, com $m_i's \in \mathbb{N}$ e

$$D^m u := \left(\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}}\right)\left(\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}}\right)\cdots\left(\frac{\partial^{m_n}}{\partial x_n^{m_n}}\right)u.$$

Se $m = 0$ definimos $D^0 u := u$. Se $n = 1$, por exemplo

$$\|D^1 u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}u\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O Teorema de Nirenberg (também por vezes chamado de desigualdade de Gagliardo-Nirenberg) será usado na seguinte forma,

**Lema 1.1.6.** *(L. Nirenberg) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado e Lipschitz e $u \in L^q(\Omega)$ e $D^m u \in L^r(\Omega)$, $1 \leq q, r \leq \infty$. Para $0 \leq j \leq m$, a seguinte desigualdade vale para quaisquer $\tilde{q} > 0$:*

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|D^m u\|_{L^r(\Omega)}^\alpha \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} + c_\Omega \|u\|_{L^{\tilde{q}}(\Omega)}. \tag{1.1.7}$$

*onde*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{q},$$

*para todos os $\alpha$ do intervalo*

$$\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1.$$

*As constantes $C_\Omega, c_\Omega$ dependem de $n, m, j, q, r, \alpha$ e $\Omega$, exceto o caso: se $1 < r < \infty$ e $m - j - \frac{n}{r}$ é um inteiro não-negativo, então (1.1.7) vale somente para $\alpha$ satisfazendo $\frac{j}{m} \leq \alpha < 1$.*

Para a prova deste resultado ver [44] pg. 125. Note que para $\alpha = 1$, a inclusão $u \in L^q$ não entra na (1.1.7), e a estimativa é equivalente aos teoremas de imersão de Sobolev. Em nosso trabalho estamos interessados nos casos $n = 2,\ m = 1,\ j = 0,\ r = q = 2,\ p \in \mathbb{N}$, assim a condição sobre $\alpha$ e $p$ fica da seguinte maneira

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{2}. \tag{1.1.8}$$

A igualdade (1.1.8) é bastante usada no decorrer de nossos estudos, e devido a isso, enunciamos o seguinte corolário

**Corolário 1.1.1.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto limitado, com $u \in H^1(\Omega)$. Então*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega\Big(\|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{p-2}{p}}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\Big). \tag{1.1.9}$$

*E se $u \in H_0^1(\Omega)$.*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega\|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{p-2}{p}}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}}. \tag{1.1.10}$$

De agora em diante, devido ao constante aparecimento de normas baseadas no espaço $L^2(\Omega)$, com $\Omega$ um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, adotaremos a notação $\|\cdot\|$ para a norma em $L^2(\Omega)$. E como vamos trabalhar com o caso bidimensional da gZK, usaremos as notações $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}, \|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{L^p_{xy}}$ para a norma em $L^p(\Omega)$.

Seja $\Omega$ um retângulo aberto e limitado de $\mathbb{R}^2$, se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $p$ é um número inteiro positivo maior ou igual a 2, o próximo corolário fornece uma estimativa um pouco melhor que (1.1.9); podemos eliminar a última norma e mais ainda, ela nós dá o valor exato de $C_\Omega$.

**Corolário 1.1.2.** *Sejam $L, B > 0$ e defina $\Omega = (0, L) \times (-B, B)$, se $u \in H_0^1(\Omega)$. Então, para todo $p \in \mathbb{N}$ têm-se*

$$\|u\|_{L^{2p}(\Omega)} \leq C_{2p}\|\nabla u\|^{\frac{p-1}{p}}\|u\|^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1.11}$$

$$\|u\|_{L^{2p+1}(\Omega)} \leq C_{2p+1}\|\nabla u\|^{\frac{2p-1}{2p+1}}\|u\|^{\frac{2}{2p+1}} \tag{1.1.12}$$

*onde*

$$C_{2p} = \left(\frac{p!}{\sqrt{2}^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad C_{2p+1} = (C_{4p})^{\frac{2p}{2p+1}}. \tag{1.1.13}$$

*Demonstração.* Mostramos o resultado por indução: seja $p \in \mathbb{N}$. Caso $p = 1$ é trivial. Quando $p = 2$ temos a desigualdade de Ladyzhenskaya, ver [28] pg. 291, Lema 3.3, fórmula (3.48). Suponhamos a desigualdade (1.1.11) válida para $p \in \mathbb{N}$, i.é,

$$\|u\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \leq \frac{(p!)^2}{2^{p-1}} \|\nabla u\|^{2(p-1)} \|u\|^2.$$

Então

$$\begin{aligned} u^{p+1}(x,y) = \int_0^x \frac{d}{ds}\left(u^{p+1}(s,y)\right) ds &= (p+1)\int_0^x u^p(s,y) u_s(s,y)\, ds \\ &\leq (p+1)\int_0^L |u^p(x,y)u_x(x,y)|\, dx := v(y). \end{aligned}$$

Do mesmo jeito $u^{p+1}(x,y) \leq (p+1)\displaystyle\int_{-B}^{B} |u^p(x,y)u_y(x,y)|\, dy := g(x)$. Portanto,

$$u^{2(p+1)}(x,y) \leq v(y)g(x), \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Observe que $v \in L^1(-B,B)$ e $g \in L^1(0,L)$. Logo, pelo teorema de Tonelli, $vg \in L^1(\Omega)$, e a hipótese da indução, a desigualdade de Hölder e o teorema de Fubini asseguram

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^{2(p+1)}(x,y)\, d\Omega &\leq \left(\int_{-B}^{B} v(y)\, dy\right)\left(\int_0^L g(x)\, dx\right) \\ &= (p+1)^2 \left(\int_{-B}^{B}\int_0^L |u^p u_x|\, dxdy\right)\left(\int_0^L\int_{-B}^{B} |u^p u_y|\, dydx\right) \\ &\leq (p+1)^2 \|u\|^{2p}_{L^{2p}} \|u_x\| \|u_y\| \\ &\leq \frac{(p+1)^2}{2}\frac{(p!)^2}{2^{p-1}} \|\nabla u\|^{2(p-1)}\|u\|^2 \left(\|u_x\|^2 + \|u_y\|^2\right) \\ &\leq \frac{[(p+1)!]^2}{2^p}\|\nabla u\|^{2p}\|u\|^2 = C^{2(p+1)}_{2(p+1)}\|\nabla u\|^{2p}\|u\|^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, $C_{2(p+1)} = \left(\frac{(p+1)!}{\sqrt{2^p}}\right)^{\frac{1}{p+1}}$. Para a desigualdade (1.1.12), utilizando Hölder escrevemos

$$\|u\|^{2p+1}_{L^{2p+1}(\Omega)} = \int_\Omega u^{2p}|u|\, d\Omega \leq \|u\|^{2p}_{L^{4p}(\Omega)}\|u\|$$

e aplicamos (1.1.11) para $u \in L^{4p}(\Omega)$. E o Corolário 1.1.2 está provado. □

**Observação 1.1.3.** *Note que para $L > 0$ se definirmos $\Omega = (0,L) \times \mathbb{R}$, e impomos a condição de que $\lim_{|y| \to \infty} u(x,y) = 0$. Se $u \in H^1_0(0,L;H^1(\mathbb{R}))$ o Corolário 1.1.2 também é válido. Com efeito, basta observar que também podemos escrever*

$$u^{p+1}(x,y) \leq (p+1)\int_0^L |u^p(x,y)u_x(x,y)|\, dx := v(y)$$

*e*

$$u^{p+1}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{d}{ds}\left(u^{p+1}(x,s)\right) ds \leq (p+1)\int_{\mathbb{R}} |u^p(x,y)u_y(x,y)|\, dy := g(x),$$

*e podemos prosseguir da mesma maneira que na demonstração.*

Quando $p = \infty$, a constante $\alpha$ em (1.1.7) é igual a 1, o que significa que a desigualdade é falsa. Para ganharmos a estimativa de $u \in L^\infty(\Omega)$, usamos os Lemas a seguir:

**Lema 1.1.7.** *Sejam $L, B > 0$, defina $\Omega = (0, L) \times (-B, B)$, e considere $u \in L^m(\Omega)$ onde $1 < m \leq \infty$. Suponha que a derivada $u_{xy}$ pertença ao espaço $L^q(\Omega)$ com $1 \leq q \leq \infty$. Então, as seguintes consequências são verificadas:*

*(i) Se $q > 1$ então $u \in C(\overline{\Omega})$.*

*(ii) Se $q = 1$ então $u \in L^\infty(\Omega)$.*
*Em ambos os casos temos a estimativa*

$$|u(x, y)| \leq \|u_{xy}\|_{L^1(\Omega)} + |\Omega|^{-1}\|u\|_{L^1(\Omega)}. \tag{1.1.14}$$

*Demonstração.* Considere uma sequência $\phi_n$ no espaço das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ de modo que $\phi_n \to u$ em $L^m(\Omega)$. Assim, podemos escrever a identidade para $\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n(x, y) = \int_0^x \int_{-B}^y \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\gamma}\phi_n(\gamma, \tau)\, d\tau d\gamma. \tag{1.1.15}$$

Seja $\delta > 0$, fixe $(x, y) \in \overline{\Omega}$, e defina a seguinte vizinhança aberta de $(x, y)$ em $\overline{\Omega}$

$$B_\delta(x, y) := \left(x - \frac{\sqrt{\delta}}{2}, x + \frac{\sqrt{\delta}}{2}\right) \times \left(y - \frac{\sqrt{\delta}}{2}, y + \frac{\sqrt{\delta}}{2}\right) \cap \overline{\Omega}.$$

Tomando $(x_1, y_1) \in B_\delta$, obtemos da igualdade (1.1.15) que

$$\begin{aligned} |\phi_n(x, y) - \phi_n(x_1, y_1)| &= \left| \int_0^x \int_{-B}^y \phi_{n\gamma\tau}\, d\tau d\gamma - \int_0^{x_1} \int_{-B}^{y_1} \phi_{n\gamma\tau}\, d\tau d\gamma \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y \phi_{n\gamma\tau}\, d\tau d\gamma \right| \leq \int_{B_\delta} |\phi_{n\gamma\tau}|\, d\tau d\gamma \\ &= \int_\Omega \chi_{B_\delta} |\phi_{nxy}|\, d\Omega. \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Como $\phi_n$ converge forte para $u$ no espaço reflexivo $L^m(\Omega)$, temos que $\phi_n \to u$ *q.s.* em $\Omega$. E do fato que $u_{xy}$ pertence ao menos a $L^1(\Omega)$, graças ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, calculamos o limite quando $n \to \infty$ em (1.1.16) e obtemos a desigualdade para $u$

$$|u(x, y) - u(x_1, y_1)| \leq \int_\Omega \chi_{B_\delta} |u_{xy}|\, d\Omega, \quad q.s. \tag{1.1.17}$$

Para comprovar o item *(i)*. Quando $1 < q < \infty$ defina $q^* = \frac{q}{q-1}$, se $q = \infty$ então $q^* = 1$. Utilizando a desigualdade de Hölder (ou extraindo o supremo essencial de $u_{xy}$) em (1.1.17), podemos averiguar para todo $1 < q \leq \infty$ a seguinte estimativa

$$|u(x, y) - u(x_1, y_1)| \leq \|\chi_{B_\delta}\|_{L^{q^*}(\Omega)}\|u_{xy}\|_{L^q(\Omega)} = \delta^{\frac{1}{q^*}}\|u_{xy}\|_{L^q(\Omega)}, \quad q.s. \tag{1.1.18}$$

Após uma possível redefinição de $u$ em um conjunto de medida nula em $\Omega$, podemos supor que a estimativa (1.1.18) verifica-se sobre $\overline{\Omega}$ (observe que med$\partial\Omega = 0$). Logo, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \left(\dfrac{\varepsilon}{\|u_{xy}\|_{L^q(\Omega)}}\right)^{q^*}$ para concluir que

$$|u(x,y) - u(x_1,y_1)| \leq \varepsilon,\ \forall (x_1,y_1) \in B_\delta(x,y); \forall (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{1.1.19}$$

Segue que a desigualdade (1.1.19) acarreta $u \in C(\overline{\Omega})$ quando $1 < q \leq \infty$. Para finalizar, a estimativa (1.1.14) segue de (1.1.17), observando que $u_{xy} \in L^1(\Omega)$ implica

$$\begin{aligned} |u(x,y)| &\leq \left| u(x,y) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(\gamma,\tau)\, d\tau d\gamma \right| + \frac{1}{|\Omega|}\left|\int_\Omega u(\gamma,\tau)\, d\tau d\gamma\right| \\ &\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x,y) - u(\gamma,\tau)|\ d\tau d\gamma + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(\gamma,\tau)|\ d\tau d\gamma \\ &\leq \|u_{xy}\|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{|\Omega|}\|u\|_{L^1(\Omega)}, \qquad q.s. \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

O item *(ii)* é uma consequência imediata de (1.1.20). Com isso a prova do Lema 1.1.7 está completa. □

No Lema 1.1.7, se adicionarmos a informação de que $u$ cumpre a condição de ser nula na fronteira de $\Omega$, podemos obter uma estimativa mais simples para $|u|$, i.é., fazendo $x_1 = 0$ e $y_1 = -B$ em (1.1.17) e observando que $\delta$ pode ser substituído por $|\Omega|$ em (1.1.18), conseguimos eliminar o segundo termo do lado direito de (1.1.14), que possui uma constante inversamente proporcional a medida de $\Omega$. Portanto, o seguinte Corolário é um resultado imediato da demonstração do Lema anterior.

**Corolário 1.1.3.** *Sejam $L, B > 0$ e defina $\Omega = (0,L) \times (-B,B)$. Assuma $u \in L^m(\Omega)$, $1 < m \leq \infty$, com $u_{xy} \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$. Se $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$, então*

*(i) Se $q > 1$ então $u \in C(\overline{\Omega})$ com $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq |\Omega|^{\frac{q-1}{q}}\|u_{xy}\|_{L^q(\Omega)}$.*

*(ii) $q = 1$ então $u \in L^\infty(\Omega)$ com estimativa $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_{xy}\|_{L^1(\Omega)}$.*
*No caso $q = \infty$ a potência de $|\Omega|$ em (i) é entendida como 1.*

Ainda nas hipóteses do Corolário 1.1.3, se tivermos um pouco mais de regularidade para $u$, ou seja, além de exigir que $u$ e $u_{xy}$ pertençam ao espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, a função $u$ ser nula na fronteira de $\Omega$ e incluirmos informações sobre as primeiras derivadas, mais precisamente $u \in H^1(\Omega)$, logramos uma estimativa de continuidade para $u$ independente da medida de $\Omega$. Como veremos no próximo resultado.

**Lema 1.1.8.** *Sejam $L, B > 0$ e defina $\Omega = (0,L) \times (-B,B)$. Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_{xy}$ esteja definida em $L^2(\Omega)$. Então*

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y) \leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u_{xy}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.1.21}$$

*Demonstração.* Para um $x \in (0, L)$ fixado e para qualquer $y \in (-B, B)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} u^2(x,y) &= \int_{-B}^{y} \partial_\tau u^2(x,\tau)\, d\tau = 2\int_{-B}^{y} u(x,\tau)u_\tau(x,\tau)\, d\tau \\ &\leq \int_{-B}^{B} \left[u^2(x,y) + u_y^2(x,y)\right]\, dy \equiv \rho(x). \end{aligned} \tag{1.1.22}$$

Repetindo o argumento acima para $\rho(x)$ em vez de $u^2(x,y)$, a seguinte desigualdade é verificada:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int_0^x \partial_\gamma \rho(\gamma)\, d\gamma = 2\int_0^x \int_{-B}^{B} \left[uu_\gamma(\gamma,y) + u_y u_{y\gamma}(\gamma,y)\right]\, dy d\gamma \\ &\leq \int_0^x \int_{-B}^{B} \left[u^2 + u_\gamma^2 + u_y^2 + u_{\gamma y}^2\right]\, dy d\gamma \leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u_{xy}\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

Unindo (1.1.22) e (1.1.23) a prova está completa. □

**Lema 1.1.9.** *Seja $\omega(t)$ uma função contínua e positiva. Suponha que $\frac{d}{dt}\omega(t)$ satisfaz a desigualdade diferencial*

$$\frac{d}{dt}\omega(t) + \left(\alpha - \sum_{i=1}^{k} d_i \omega^i(t)\right)\omega(t) \leq 0, \tag{1.1.24}$$

$$\alpha - \sum_{i=1}^{k} d_i \omega^i(0) > 0, \tag{1.1.25}$$

*onde $\alpha$ e $d_i \in \mathbb{R}$ são constantes positivas e $k \in \mathbb{N}$ é finito, e $\omega^i(t) = [\omega(t)]^i$. Então*

$$\omega(t) < \omega(0), \qquad \forall t > 0. \tag{1.1.26}$$

*Demonstração.* Desde que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} d_i \omega^i(0) < \alpha$ e $\omega$ é contínua, existe $T^* > 0$ tal que

$$\alpha - \sum_{i=1}^{k} d_i \omega^i(t) > 0, \qquad t \in [0, T^*].$$

$\omega(t)$ ser positiva, implica

$$\left(\alpha - \sum_{i=1}^{k} d_i \omega^i(t)\right)\omega(t) > 0, \qquad t \in [0, T^*].$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\omega(t) < 0, \qquad t \in (0, T^*).$$
$$\omega(t) < \omega(0), \qquad t \in (0, T^*].$$

Suponha que existe $t > 0$ tal que $\omega(t) > \omega(0)$. Pela continuidade de $\omega$ deve existir $\tau > T^*$, o primeiro número que cumpre $\omega(\tau) = \omega(0)$. Observe que $\omega(t) < \omega(0)$ para $t \in (0, \tau)$, e isto implica

$$\int_0^\tau \left(\alpha - \sum_{i=1}^k d_i \omega^i(t)\right) \omega(t)\, dt > 0.$$

Mas, integrando a desigualdade (1.1.24) sobre $(0, \tau)$, obtemos

$$\int_0^\tau \left(\alpha - \sum_{i=1}^k d_i \omega^i(t)\right) \omega(t)\, dt \leq 0,$$

o que é uma contradição. $\square$

**Teorema 1.1.9** (Versão diferencial do Lema de Grönwall)**.** *Seja $\eta(t)$ não negativa, absolutamente continua sobre $[0, T]$ e cumpra para quase todo $t$ a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \tag{1.1.27}$$

*onde $\phi$ e $\psi$ são funções somáveis sobre $[0, T]$. Então*

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(\tau) d\tau} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) e^{-\int_0^s \phi(\tau) d\tau} ds\right] \tag{1.1.28}$$

*para todo $t \in [0, T]$. Em particular, se*

$$\eta'(t) + \theta\eta(t) \leq 0 \text{ sobre } [0, T] \text{ onde } \theta > 0,$$

*então*

$$\eta(t) \leq \eta(0) e^{-\theta t} \text{ sobre } [0, T].$$

*Demonstração.* Multiplicando a desigualdade (1.1.27) pelo fator integrante $e^{-\int_0^t \phi(\tau) d\tau}$, podemos escrever para quase todo $t \in [0, T]$ a desigualdade

$$\eta'(t) e^{-\int_0^t \phi(\tau) d\tau} - \eta(t)\phi(t) e^{-\int_0^t \phi(\tau) d\tau} \leq \psi(t) e^{-\int_0^t \phi(\tau) d\tau}. \tag{1.1.29}$$

Note que (1.1.29) pode ser reescrita como

$$\left(\eta(t) e^{-\int_0^t \phi(\tau) d\tau}\right)' \leq \psi(t) e^{-\int_0^t \phi(\tau) d\tau}. \tag{1.1.30}$$

Portanto, integrando de 0 a $t$ a desigualdade (1.1.30), concluímos que

$$\eta(t) e^{-\int_0^t \phi(\tau) d\tau} \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s) e^{-\int_0^s \phi(\tau) d\tau}\, ds. \tag{1.1.31}$$

A estimativa acima garante a desigualdade (1.1.28), e o Teorema está provado. $\square$

**Teorema 1.1.10** (Forma integral do Lema de Grönwall)**.** *Seja $\xi(t)$ não negativa, somável sobre $[0,T]$ e cumpra para quase todo $t$ a desigualdade*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2$$

*para constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Então*

$$\xi(t) \leq C_2 \left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

*para quase todo $t \in [0,T]$. Em particular, se*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds$$

*para quase todo $t$. Então*

$$\xi(t) = 0 \quad q.s.$$

Para a demonstração ver [8] pg. 709.

**Definição 1.1.11.** *Seja $X$ um espaço de Banach, com norma $\|.\|_X$. O espaço $L^p(0,T;X)$ consiste de todas as funções fortemente mensuráveis $u : [0,T] \to X$ com*

*(i)*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u\|_X^p(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

*para $1 \leq p < \infty$, e*

*(ii)*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := ess \sup_{0 \leq t \leq T} \|u\|_X(t) < \infty.$$

**Definição 1.1.12.** *O espaço $C([0,T];X)$ consiste de todas as funções contínuas $u : [0,T] \to X$ com*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_X(t) < \infty.$$

**Proposição 1.1.9.** *Se $p < \infty$, o conjunto das funções contínuas sobre $(0,T)$ com valores em $X$ é denso em $L^p(0,T;X)$.*

A prova pode ser encontrada em [30] pg. 92, Proposição II.5.3. Agora, se $X$ sendo um espaço $L^q$, temos a seguinte identificação[2]

$$\left(L^p(0,T;L^q(\Omega))\right)' \equiv L^{p'}(0,T;L^{q'}(\Omega)).$$

[2]ver [30] pg. 93.

**Teorema 1.1.11.** *Sejam $T>0$, $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$, e $p_1, p_2, q_1, q_2$ quatro números em $[1,\infty]$. Se $f \in L^{p_1}(0,T;L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(0,T;L^{q_2}(\Omega))$, então para todo $0<\theta<1$ a função $f$ pertence a $L^p(0,T;L^q(\Omega))$, onde $p$ e $q$ são definidos como*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2},$$

*e temos*

$$\|f\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))} \leq \|f\|^{\theta}_{L^{p_1}(0,T;L^{q_1}(\Omega))} \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2}(0,T;L^{q_2}(\Omega))}.$$

Para demonstração ver [30] pg. 93, Teorema II.5.5.

**Definição 1.1.13.** *Seja $u \in L^1(0,T;X)$. Dizemos que $v \in L^1(0,T;X)$ é a derivada fraca de $u$, e escrevemos $u' = v$, se para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ vale a igualdade*

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)\,dt = -\int_0^T \phi(t)v(t)\,dt$$

**Definições 1.1.1.** *(i) O espaço de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ consiste de todas as funções $u \in L^p(0,T;X)$ tal que $u'$ existe no sentido fraco e pertence ao espaço $L^p(0,T;X)$. Ainda mais,*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^T \|u\|_X^p(t) + \|u'\|_X^p(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, & (1 \leq p < \infty) \\ ess \displaystyle\sup_{0\leq t\leq T} \left(\|u\|_X(t) + \|u'\|_X(t)\right), & (p=\infty). \end{cases} \tag{1.1.32}$$

*(ii) Escrevemos $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$.*

**Teorema 1.1.12** (Cálculo em um espaço abstrato)**.** *Se $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então segue as consequências:*

*(i) Então $u \in C([0,T];X)$ (após uma possível redefinição sobre um conjunto de medida nula).*

*(ii) $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)\,d\tau$ para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.*

*(iii) Temos a estimativa*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u\|_X(t) \leq C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}, \tag{1.1.33}$$

*com constante $C$ dependendo somente de $T$.*

Para a prova deste teorema ver [8] pg. 302.

**Teorema 1.1.13.** *Suponha $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$.*

*(i) Então $u \in C([0,T];L^2(U))$ (após uma possível redefinição sobre um conjunto de medida nula).*

*(ii) A aplicação $t \to \|u\|^2(t)$ é absolutamente contínua, com*

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2(t) = 2\langle u', u\rangle(t) \quad q.s. \quad [0,T].$$

*(iii) Ainda mais, temos a estimativa*

$$\max_{0\le t\le T} \|u\|(t) \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right), \tag{1.1.34}$$

*onde a constante $C$ depende somente de $T$.*

Para a prova deste teorema ver [8] pg. 303.

**Teorema 1.1.14** (Aubin-Lions)**.** *Sejam $A, B$ e $X$ espaços de Banach tais que $A \subset X \subset B$. Suponha que $A$ e $B$ são espaços reflexivos; a inclusão $A \subset X$ é compacta; a continência $X \subset B$ é contínua. Defina*

$$W \doteq \{v \in L^a(0,T;A), v' \in L^b(0,T;B)\}.$$

*Então, para quaisquer $1 < a, b < \infty$, a inclusão $W \subset L^a(0,T;X)$ é compacta.*

A prova deste resultado pode ser encontrada em [30] pg.102, Teorema II.5.16.

**Notação:** Como estaremos trabalhando em espaços $L^p$'s, escreveremos as normas no espaço $L^p(0,T;L^q(\Omega))$, onde $\Omega$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma, $\|\cdot\|_{L_t^p L_{xy}^q}$. Bem como designaremos a notação $L_t^p L_{xy}^q$ para o espaço $L^p(0,T;L^q(\Omega))$. De modo geral, se $X$ é um espaço normado de funções de $\mathbb{R}^2$ na reta, e $Y$ é um espaço de função de $\mathbb{R}$ em $X$, quando escrevermos $Y_t X_{xy}$, significa que uma função $u \in Y_t X_{xy}$, se para todo $t$ no domínio temporal $u(\cdot, x, y) \in X$, com $\|u\|_X(t) \in Y$.

**Teorema 1.1.15** (Desilgualdade de Young)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\xi > 0$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \le \ \xi a^p + C(\xi) b^q,$$

*onde $C(\xi) = \dfrac{1}{q(\xi p)^{\frac{q}{p}}}$.*

Para a demonstração ver [30], pg. 58, Proposição II.2.16.

**Lema 1.1.10.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. então*

$$a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} b^i \tag{1.1.35}$$

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \beta_{k,i} a^{k-i} b^i, \tag{1.1.36}$$

*onde $\beta_{k,i} = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.*

Capítulo 2

# Equação modificada e subcrítica de Zakharov-Kuznetsov via Regularização Parabólica

Neste capítulo, iremos abordar dois problemas distintos para a equação de Zakharov-Kuznetsov generalizada. Iniciamos, fazendo (por conveniência) uma mudança na não-linearidade $\alpha = \delta$, $\delta \in (0,1]$, e dividimos o estudo em dois casos. O primeiro, o qual chamamos de caso subcrítico, quando $\delta \in (0,1)$, e o domínio espacial $\Omega$, é um retângulo limitado. Neste problema, seguimos as técnicas e as ideias de [27] e [13]. De posse dessas ferramentas, mostramos para o caso subcrítico da equação gZK, a existência de solução fraca em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, para dados iniciais em $L^2(\Omega)$. Porém, a unicidade da solução foi confirmada apenas para a ZK clássica (caso $\delta = 0$), ver [27], pois as estimativas de interpolação que usamos nos levaram a espaços não-reflexivos, culminando em um obstáculo que não pudemos solucionar.

O próximo problema deste capítulo, encontra-se na segunda seção. É o caso crítico da gZK, isto é quando $\delta = 1$, ou seja, a equação mZK. Consideramos essa equação agora sob a faixa espacial $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in (0,L), \ y \in \mathbb{R}\}$. O método de resolução deste problema, pode ser encontrado em [4, 14]. Regularizando a mZK pelo um problema parabólico de quarta ordem e, exigindo dados iniciais com mais regularidade e suficientemente pequenos, mostramos a existência e unicidade da solução regular com decaimento exponencial. Mais ainda, verificamos o efeito de Kato, observando que no caso estacionário, a solução encontrada resolve também uma certa EDP elíptica.

## 2.1 Existência de solução para o caso subcrítico da gZK num retângulo

Nesta seção, mostramos o resultado de existência de solução para o caso subcrítico, ou seja, para $\delta \in (0,1)$. Tecnicamente, seguimos [27].

Sejam $L, B, T$ números positivos finitos. Defina $\Omega$ e $Q_T$ como

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in (0,L), \ y \in (-B,B)\}, \quad Q_T = \Omega \times (0,T).$$

Em $Q_T$ consideramos o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$Pu \equiv u_t + u_x + |u|^\delta u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0, \quad \text{em } Q_T; \tag{2.1.1}$$
$$u(x,-B,t) = u(x,B,t) = 0, \quad x \in (0,L), \ t > 0; \tag{2.1.2}$$
$$u(0,y,t) = u(L,y,t) = u_x(L,y,t) = 0, \quad y \in (-B,B), \ t > 0; \tag{2.1.3}$$
$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{2.1.4}$$

onde $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

### 2.1.1 Não linearidade subcrítica

**Teorema 2.1.1.** *Seja $\delta \in (0,1)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$ uma função dada. Então para todos números positivos $B$, $L$, $T$ existe uma solução fraca de* (2.1.1)-(2.1.4) *tal que*

$$u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

*Demonstração.* Consideramos para todo número real $\varepsilon > 0$ a seguinte regularização parabólica de (2.1.1)-(2.1.4):

$$P^\varepsilon u_\varepsilon \equiv u_{\varepsilon t} + u_{\varepsilon x} + |u_\varepsilon|^\delta u_\varepsilon u_{\varepsilon x} + \Delta u_{\varepsilon x} + \varepsilon(\partial_x^4 u_\varepsilon + \partial_y^4 u_\varepsilon) = 0 \ \text{ em } Q_T; \tag{2.1.5}$$
$$u_\varepsilon(x,-B,t) = u_\varepsilon(x,B,t) = \partial_y^2 u_\varepsilon(x,-B,t) = \partial_y^2 u_\varepsilon(x,B,t) = 0, \ x \in (0,L), \ t > 0; \tag{2.1.6}$$
$$u_\varepsilon(0,y,t) = u_\varepsilon(L,y,t) = \partial_x^2 u_\varepsilon(0,y,t) = \partial_x u_\varepsilon(L,y,t) = 0, \ y \in (-B,B), \ t > 0; \tag{2.1.7}$$
$$u_\varepsilon(x,y,0) = u_0(x,y), \ (x,y) \in \Omega. \tag{2.1.8}$$

Para todo $\varepsilon > 0$, (2.1.5)-(2.1.8) admite uma única solução regular em $Q_T$ [6, 13, 29]. A seguir, omitimos o índice $\varepsilon$ sempre que não for ambíguo.

Primeiro, considere a não-linearidade $|u_\varepsilon|^\delta u_\varepsilon u_{\varepsilon x}$. Defina $F(\lambda) = |\lambda|^\delta \lambda^2, \ \lambda \in \mathbb{R}$, com $F'(\lambda) = (2+\delta)|\lambda|^\delta \lambda$. Então, para $u \neq 0$ tem-se

$$\left(|u|^\delta u^2\right)_x = \partial_x F(u) = (2+\delta)|u|^\delta u u_x.$$

Isto implica que $\partial_x \left(|u|^\delta u^3\right) = (3+\delta)|u|^\delta u^2 u_x$. Portanto, integrando sobre $\Omega$, temos por (2.1.7) que

$$\int_\Omega u|u|^\delta u u_x \, d\Omega = \frac{1}{3+\delta} \int_\Omega \left(|u|^\delta u^3\right)_x \, d\Omega = 0.$$

Multiplicando (2.1.5) por $u_\epsilon$ e integrando sobre $\Omega$ obtemos

- $\displaystyle\int_\Omega u_t u\, d\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2(t),$
- $\displaystyle\int_\Omega u_x u\, d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega (u^2)_x\, d\Omega = \int_{-B}^{B} u^2\Big|_0^L dy = 0,$
- $\displaystyle\int_\Omega u|u|^\delta u_x u\, d\Omega = \frac{1}{3+\delta}\int_\Omega (|u|^\delta u^3)_x\, d\Omega = 0,$
- $\displaystyle\int_\Omega u_{xxx} u\, d\Omega = -\int_\Omega u_{xx}u_x dy = -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_x^2)_x\, d\Omega = -\frac{1}{2}\int_{-B}^{B} u_x^2\Big|_0^L dy = \frac{1}{2}\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\, dy,$
- $\displaystyle\int_\Omega u_{xyy} u\, d\Omega = -\int_\Omega u_{xy}u_y\, d\Omega = -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_y^2)_x\, d\Omega = -\frac{1}{2}\int_{-B}^{B} u_y^2\Big|_0^L dy = 0,$
- $\displaystyle\epsilon\int_\Omega (\partial_x^4 u)u\, d\Omega = -\epsilon\int_\Omega (\partial_x^3 u)u_x\, d\Omega = -\epsilon\int_{-B}^{B}\left[u_{xx}u_x\Big|_0^L - \int_0^L u_{xx}^2\, dx\right] dy = \epsilon\|u_{xx}\|^2(t),$
- $\displaystyle\epsilon\int_\Omega (\partial_y^4 u)u\, d\Omega = -\epsilon\int_\Omega (\partial_y^3 u)u_y\, d\Omega = -\epsilon\int_0^L\left[u_{yy}u_y\Big|_{-B}^{B} - \int_{-B}^{B} u_{yy}^2\, dy\right] dx = \epsilon\|u_{yy}\|^2(t).$

Assim, multiplicando $P^\varepsilon u_\varepsilon$ por $2u_\varepsilon$ e integrando sobre $Q_T$, o resultado lê-se

$$\|u\|^2(t) + \int_0^t\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,\tau)\, dyd\tau + 2\varepsilon\int_0^t \big(\|u_{xx}\|^2(\tau) + \|u_{yy}\|^2(\tau)\big)d\tau = \|u_0\|^2. \quad (2.1.9)$$

Multiplicando $P^\varepsilon u_\varepsilon$ por $2xu_\varepsilon$ e integrando em $\Omega$, com o uso da desigualdade (1.1.10) com $p = 3+\delta$, juntamente com a desigualdade de Hölder e o Teorema 1.1.15 podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\sqrt{x}u\|^2(t) + \|\nabla u\|^2(t) + 2\|u_x\|^2(t) + 2\varepsilon\Big(\|\sqrt{x}u_{xx}\|^2(t) + \|\sqrt{x}u_{yy}\|^2(t)\Big)\\
&= \|u\|^2(t) + 2\varepsilon\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\, dy + \frac{2}{3+\delta}\int_\Omega |u|^\delta u^3\, d\Omega\\
&\le \|u\|^2(t) + 2\varepsilon\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\, dy + \frac{2C_\Omega^{3+\delta}}{3+\delta}\|\nabla u\|^{1+\delta}(t)\|u\|^2(t)\\
&\le \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2(t) + \|u\|^2(t) + 2\varepsilon\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\, dy + C(\delta,\Omega)\|u\|^{\frac{4}{1-\delta}}(t).
\end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Integrando a respeito de $t > 0$ e tomando $\varepsilon < 1/2$ na desigualdade (2.1.10) temos por (2.1.9) que

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{x}u\|^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla u\|^2(\tau)\, d\tau + 2\varepsilon\int_0^t \Big(\|\sqrt{x}u_{xx}\|^2(\tau) + \|\sqrt{x}u_{yy}\|^2(\tau)\Big)\, d\tau\\
&\le \int_0^t \|u_0\|^2\, d\tau + C(\delta,\Omega)\int_0^t \|u_0\|^{\frac{4}{1-\delta}} d\tau + \|\sqrt{x}u_0\|^2\\
&\le (T+L)\|u_0\|^2 + TC(\delta,\Omega)\|u_0\|^{\frac{4}{1-\delta}}.
\end{aligned} \quad (2.1.11)$$

**Observação 2.1.1.** *Note que* (2.1.11) *não é verdadeira para o caso crítico, i.e., quando* $\delta = 1$.

As estimativas (2.1.9) e (2.1.11) garantem que

$$\begin{array}{lll} u_\varepsilon & \text{é limitada em} & L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big)\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \sqrt{\varepsilon}\Delta u_\varepsilon & \text{é limitada em} & L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big), \\ u_{\varepsilon x}(0,y,t) & \text{é limitada em} & L^2\big(0,T;L^2(-B,B)\big), \end{array} \tag{2.1.12}$$

onde as limitações não dependem de $\varepsilon$ mas dependem somente de $T$, $\delta$, $\Omega$ e $\|u_0\|$.

Graças a (2.1.12) temos a limitação de $|u_\varepsilon|^\delta u_\varepsilon u_{\varepsilon x}$ para todo $\delta\in(0,1)$. De fato, dado $\delta\in(0,1)$, tome $m=\frac{4}{3+\delta}$ e note que

$$q \doteq \frac{2}{m} = \frac{3+\delta}{2} < 2, \quad \forall\delta\in(0,1).$$

Então, a desigualdade de Hölder implica

$$\begin{aligned} \||u|^\delta u u_x\|^m_{L^m(0,T;L^m(\Omega))} &= \int_0^T\int_\Omega |u|^{(1+\delta)m}|u_x|^m\,d\Omega dt \\ &\le \int_0^T \|u\|^{(1+\delta)m}_{q^*(1+\delta)m}(t)\|u_x\|^m_{qm}(t)\,dt \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

onde $q^*=\frac{2}{2-m}$. Tomando $p=q^*(1+\delta)m$ na desigualdade (1.1.10) obtemos

$$\alpha = \frac{q^*(1+\delta)m-2}{q^*(1+\delta)m},$$

e aplicando em (2.1.13) temos

$$\begin{aligned} \||u|^\delta u u_x\|^m_{L^m(0,T;L^m(\Omega))} &\le C_\Omega^{(1+\delta)m}\int_0^T \|u\|^{\frac{2}{q^*}}(t)\|\nabla u\|^{(1+\delta)m-\frac{2}{q^*}}(t)\|\nabla u\|^m(t)\,dt \\ &= C_\Omega^{(1+\delta)m}\int_0^T \|u\|^{\frac{2}{q^*}}(t)\|\nabla u\|^{(2+\delta)m-(2-m)}(t)\,dt \\ &= C_\Omega^{(1+\delta)m}\int_0^T \|u\|^{\frac{2}{q^*}}(t)\|\nabla u\|^{(3+\delta)m-2}(t)\,dt \\ &\le C_\Omega^{(1+\delta)m}\|u\|^{2-m}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\nabla u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Consequentemente, de posse de (2.1.12) e (2.1.14) concluímos que $|u|^\delta u u_x$ é limitada em $L^m(0,T;L^m(\Omega))$. Como $L^{\frac{4}{1-\delta}}$ é o espaço dual de $L^{\frac{4}{3+\delta}}$ e $H^1\subset L^{\frac{4}{1-\delta}}$ em dimensão 2, nós temos também que

$$|u_\varepsilon|^\delta u_\varepsilon u_{\varepsilon x} \quad \text{é limitada em} \quad L^{\frac{4}{3+\delta}}(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.1.15}$$

Devido a (2.1.12) e (2.1.15) juntamente com a equação (2.1.5) , temos pelo menos

$$\partial_t u_\epsilon \quad \text{é limitada (independente de } \varepsilon\text{) em} \quad L^{\frac{4}{3+\delta}}(0,T;H^{-2}(\Omega)). \tag{2.1.16}$$

### 2.1.2 Passagem ao limite

De (2.1.12), (2.1.14) e (2.1.16) e como os espaços $L_t^2 H_{xy}^1, L_t^m L_{xy}^m, L_t^m H_{xy}^{-2}$ são reflexivos, considerando $\varepsilon = \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}$, conclue-se que existe uma subsequência, a qual denotaremos por $u_n$, tal que

$$\begin{array}{lll} u_n \rightharpoonup u & \text{fraco em} & L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \sqrt{\frac{1}{2n}}\Delta u_n \rightharpoonup v & \text{fraco em} & L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big), \\ |u_n|^\delta u_n u_{nx} \rightharpoonup \chi & \text{fraco em} & L^m\big(0,T;L^m(\Omega)\big), \\ u_{nt} \rightharpoonup w & \text{fraco em} & L^m\big(0,T;H^{-2}(\Omega)\big). \end{array} \tag{2.1.17}$$

Considere a cadeia de imersões

$$H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$$

e defina

$$W \doteq \{u \in L^2(0,T;H^1(\Omega))\ ;\ u_t \in L^m(0,T;H^{-2}(\Omega))\}.$$

Novamente por (2.1.12), e agora também por (2.1.16), temos que $u_n \in W$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como decorrência do Lema de Aubin-Lions, a família $u_n$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, ou seja

$$u_n \to u \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.1.18}$$

Dessa convergência, podemos extrair uma subsequência, que ainda chamaremos de $\{u_n\}$, tal que

$$|u_n|^\delta u_n^2 \to |u|^\delta u^2 \quad \text{q.s. em} \quad Q_T,$$

e, de modo análogo ao que fizemos em (2.1.14), temos a limitação

$$\| |u_n|^\delta u_n^2 \|_{L^m(Q_T)} \le C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considere $\varphi \in C_c^\infty(Q_T)$ uma função no espaço da funções testes em $Q_T$. Temos,

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (|u_n|^\delta u_n u_{nx} - |u|^\delta u u_x)\varphi\, dQ_T &= \frac{1}{2+\delta}\int_{Q_T} (|u_n|^\delta u_n^2 - |u|^\delta u^2)_x \varphi\, dQ_T \\ &= -\frac{1}{2+\delta}\int_{Q_T} (|u_n|^\delta u_n^2 - |u|^\delta u^2)\varphi_x\, dQ_T \\ &\le \frac{1}{2+\delta}\Big|\int_{Q_T} (|u_n|^\delta u_n^2 - |u|^\delta u^2)\varphi_x\, dQ_T\Big| \\ &\le \frac{\|\varphi_x\|_{L^\infty(Q_T)}}{2+\delta}\int_{Q_T} \big||u_n|^\delta u_n^2 - |u|^\delta u^2\big|\, dQ_T, \end{aligned}$$

que converge para 0 quando $n \to \infty$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(Q_T)$. Pela densidade de $C_c^\infty(Q_T)$ no espaço dual de $L^m\big(0,T;L^m(\Omega)\big)$, podemos concluir que

$$|u_n|^\delta u_n u_{nx} \rightharpoonup |u|^\delta u u_x \quad \text{fraco em} \quad L^m(Q_T), \tag{2.1.19}$$

pela unicidade do limite, temos por (2.1.17) que $\chi = |u|^\delta u u_x$.

Da convergência fraca de $\{u_n\}$ para $u$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, significa que $\{\nabla u_n\}$ converge fraco para $\nabla u$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Isso nos permite entender $\{\Delta u_n\}$ e $\Delta u$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. De fato, $\{\Delta u_n\}$ converge fracamente para $\Delta u$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \Delta u_n \varphi \, d\Omega dt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, d\Omega dt \longrightarrow -\int_0^T \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, d\Omega dt \\ = \int_0^T \int_\Omega \Delta u \varphi \, d\Omega dt,\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$. Pela densidade de $\mathcal{D}(Q_T)$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, concluímos que $\Delta u_n \rightharpoonup \Delta u$ fraco em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Por (2.1.17), também temos que $\frac{1}{\sqrt{2n}}\Delta u_n$ converge fracamente em $L^2(Q_T)$. Assim, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$ temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\int_{Q_T} \Delta u_n \varphi \, dQ_T\right) \rightharpoonup \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\int_{Q_T} \Delta u \varphi \, dQ_T = 0.$$

Pela densidade de $\mathcal{D}(Q_T)$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e a unicidade do limite, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\Delta u_n \rightharpoonup 0, \quad \text{fraco em} \quad L^2(Q_T). \tag{2.1.20}$$

Para verificar o último limite em (2.1.17), observe a priori que o Teorema de Cálculo em um espaço abstrato (Teorema 1.1.12), junto com $u_n \in W$, fornece

$$u_n, u_{nt} \in L^m(0,T;H^{-2}(\Omega)) \quad \text{então} \quad u_n \in C([0,T];H^{-2}(\Omega)),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

após uma possível redefinição de $u$ em um conjunto de medida nula em $[0,T]$. Assim, podemos entender $u_{nt} \in \mathcal{D}'\left(0,T;H^{-2}(\Omega)\right)$. Logo, para toda $\phi \in C_c^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ no espaço das funções teste, temos por (2.1.18),

$$\int_0^T \int_\Omega u_{nt}\phi \ d\Omega dt = -\int_0^T \int_\Omega u_n \phi' \ d\Omega dt \longrightarrow -\int_0^T \int_\Omega u \phi' \ d\Omega dt = \int_0^T \int_\Omega u_t \phi \ d\Omega dt.$$

Pela densidade de $C_c^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ em $L^{\frac{4}{1-\delta}}(0,T;H_0^2(\Omega))$, dual de $L_t^m H_{xy}^{-2}$, podemos concluir

$$\int_0^T \int_\Omega u_{nt}\xi \ d\Omega dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u_t \xi \ d\Omega, dt \quad \forall \xi \in L^{\frac{4}{1-\delta}}(0,T;H_0^2(\Omega)).$$

A última convergência implica que

$$u_{nt} \rightharpoonup u_t, \text{ fraco em } L^m(0,T;H^{-2}(\Omega)), \tag{2.1.21}$$

e a unicidade do limite nos permite concluir que $w = u_t$.

Resumindo, das convergências fracas em (2.1.17), (2.1.19), (2.1.20) e (2.1.21), de acordo a Definição 1.0.1 e usando a notação de dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E,E'}$, podemos afirmar as seguintes convergências

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\int_0^T (\Delta u_n(t),\psi(t))\ dt \longrightarrow 0, \quad \forall\psi\in L^2(Q_T)$$

$$\int_0^T (u_n(t),\eta(t))\ dt \longrightarrow \int_0^T (u(t),\eta(t))\ dt, \quad \forall\eta\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

$$\int_0^T \langle u_n(t),\vartheta(t)\rangle_{H_0^1,H^{-1}}\ dt \longrightarrow \int_0^T \langle u(t),\vartheta(t)\rangle_{H_0^1,H^{-1}}\ dt, \quad \forall\vartheta\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

$$\int_0^T \langle u_{nt}(t),\xi(t)\rangle_{H^{-2},H_0^2}\ dt \longrightarrow \int_0^T \langle u_t(t),\xi(t)\rangle_{H^{-2},H_0^2}\ dt, \quad \forall\xi\in L^{\frac{4}{1-\delta}}(0,T;H_0^2(\Omega))$$

$$\int_0^T \left\langle |u_n|^\delta u_n u_{nx}(t),\varphi(t)\right\rangle_{L^m,(L^m)'} dt \longrightarrow \int_0^T \left\langle |u|^\delta u u_x(t),\varphi(t)\right\rangle_{L^m,(L^m)'} dt, \quad \forall\varphi\in L^{\frac{4}{1-\delta}}(Q_T)$$

Dados $v\in H_0^2(\Omega)$ e $\phi\in\mathcal{D}'(0,T)$, defina

$$\psi \doteq \phi\Delta v, \quad \vartheta\doteq -\phi v_x, \quad \xi\doteq\phi v \quad \text{e} \quad \varphi\doteq\phi v$$

nos limites acima. Assim, utilizando a equação (2.1.5), após passar $n$ para $\infty$, podemos constatar a seguinte identidade

$$\begin{aligned}&\int_0^T \langle u_t(t),v\rangle_{H^{-2},H_0^2}\,\phi(t)\ dt + \int_0^T \langle u_x(t),v\rangle_{L^2,L^2}\,\phi(t)\ dt\\ &+\int_0^T \langle \Delta u_x(t),v\rangle_{H^{-2},H_0^2}\,\phi(t)\ dt + \int_0^T \left\langle |u|^\delta u u_x(t),v\right\rangle_{L^m,(L^m)'}\phi(t)\ dt = 0.\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Considere a seguinte sequência de imersões

$$\begin{aligned}&H_0^2(\Omega)\cap(L^m)'(\Omega)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-2}(\Omega)\hookrightarrow H^{-2}(\Omega)+L^m(\Omega),\\ &H_0^2(\Omega)\cap(L^m)'(\Omega)\hookrightarrow (L^m)'\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow L^m(\Omega)\hookrightarrow H^{-2}(\Omega)+L^m(\Omega).\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Em virtude da identificação acima, podemos escrever (2.1.22) da seguinte forma

$$\begin{aligned}&\left\langle\int_0^T u_t(t)\phi(t)\ dt, v\right\rangle + \left\langle\int_0^T u_x(t)\phi(t)\ dt, v\right\rangle\\ &+\left\langle\int_0^T \Delta u_x(t)\phi(t)\ dt, v\right\rangle + \left\langle\int_0^T |u|^\delta u u_x(t)\phi(t)\ dt, v\right\rangle = 0,\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

onde a dualidade é entendida em $H^{-2}(\Omega)+L^m(\Omega)$, $H_0^2(\Omega)+(L^m)'(\Omega)$. E isto implica que $u$ é a solução de

$$u_t+u_x+\Delta u_x+|u|^\delta u u_x = 0, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;H^{-2}(\Omega)+L^m(\Omega)). \tag{2.1.25}$$

No entanto, como cada termo do lado esquerdo de (2.1.25) pertence a $L_t^m(H^{-2}+L^m)_{xy}$, a solução fraca da equação subcrítica de Zakharov-Kuznetsov está em

$$L^m(0,T;H^{-2}(\Omega)+L^m(\Omega)),\ m=\tfrac{4}{3+\delta},\ \forall\delta\in(0,1). \tag{2.1.26}$$

Verifiquemos que a condição inicial $u(x,y,0) = u_0(x,y)$ está satisfeita; de fato, devido (2.1.16) $u_\varepsilon$ converge para $u$ em $C\big([0,T]; H_w^{-2}(\Omega)\big)$, onde $H_w^{-2}$ é $H^{-2}$ munida da topologia fraca.

De modo análogo, a condição $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ está satisfeita, pois $u_\varepsilon$ converge para $u$ fracamente em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Resta mostrar que $u_x(L,y,t) = 0$, o que está feito pelos dois lemas a seguir. (Compare com [26, 27]).

**Lema 2.1.1.** *Se $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ resolve (2.1.1), então*

$$u_x, u_{xx} \in C_x(0,L;V)^1 \quad \textit{onde} \quad V = H^{-2}\big((0,T)\times(-B,B)\big), \tag{2.1.27}$$

*e, em particular,*

$$u_x\big|_{x=0,L}, \quad u_{xx}\big|_{x=0,L} \tag{2.1.28}$$

*são bem definidas em $V$. Mais ainda, esses traços dependem continuamente de $u$ no sentido apropriado.*

*Demonstração.* Para provar este lema, escreva (2.1.1) na forma

$$u_{xxx} = -u_x - u_{xyy} - |u|^\delta u u_x - u_t, \tag{2.1.29}$$

e observe que

$$\begin{aligned} u_t &\in L^2(0,L;H^{-1}\big(0,T;L^2(-B,B)\big), \\ u_{xyy} &\in L^2(0,L;L^2\big(0,T;H^{-2}(-B,B)\big). \end{aligned}$$

De acordo com (2.1.14) e com a definição de $V$ em (2.1.27), da imersão $L^{\frac{4}{3+\delta}} \hookrightarrow V$, temos como resultado que

$$|u|^\delta u u_x \in L^{\frac{4}{3+\delta}}\big(0,L;L^{\frac{4}{3+\delta}}((0,T)\times(-B,B))\big) \hookrightarrow L^{\frac{4}{3+\delta}}\big(0,L;V\big). \tag{2.1.30}$$

Assim, chegamos a conclusão que

$$u_{xxx} \in L^{\frac{4}{3+\delta}}\big(0,L;V\big) \tag{2.1.31}$$

e (2.1.27) bem como (2.1.28) seguem. □

**Lema 2.1.2.** *Seja $U$ um espaço de Banach reflexivo e $p \geq 1$. Suponhamos que duas sequências de funções $u_\varepsilon,\ g_\varepsilon \in L^p(0,L;U)$ satisfazem*

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon xxx} + \varepsilon u_{\varepsilon xxxxx} &= g_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = u_{\varepsilon x}(L) &= u_{\varepsilon xx}(0) = 0, \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

*com $g_\varepsilon$ limitada em $L^p(0,L;U)$ quando $\varepsilon \to 0$. Então, $u_{\varepsilon xxx}$ (consequentemente $u_{\varepsilon x}$, e $u_\varepsilon$) é limitada em $L^\infty(0,L;U)$ quando $\varepsilon \to 0$. Mais ainda, como uma subsequência $u_\varepsilon \to u$ converge (forte ou fracamente) em $L^q(0,L;U)$, $1 \leq q < \infty$, segue que $u_{\varepsilon x}(L)$ converge para $u_x(L)$ em $U$ (pelo menos fraco), e portanto $u_x(L) = 0$.*

[1] O espaço $C_x(0,L;V)$ é o conjunto das funções contínuas na variável $x$ com valores em $V$.

Ver [27] pg. 26, Lema A.2 para demonstração.

Para finalizar a prova do Teorema 2.1.1, só falta verificar que $u_x(L, y, t) = 0$. Para isso aplicamos os dois Lemas acima. O primeiro resultado nos diz que o traço da solução (2.1.25) está bem definido para $u_x$ na linha $x = L$. E como tal solução foi obtida como limite de uma família $u_\varepsilon, \varepsilon > 0$, aplicando o segundo resultado , Lema 2.1.2 com

$$g_\varepsilon := -u_{\varepsilon t} - \varepsilon u_{\varepsilon x} - u_{\varepsilon xyy} - |u_\varepsilon|^\delta u_\varepsilon u_{\varepsilon x} - \varepsilon u_{\varepsilon yyyy},$$

$$U = H^{-1}(0, T; L^2(-B, B)) + L^2(0, T; H^{-4}(-B, B)) + L^{\frac{4}{3+\delta}}(0, T; L^{\frac{4}{3+\delta}}(-B, B)),$$

e

$$p = \frac{4}{3+\delta}$$

temos $u_x(L) = 0$, e a demonstração está completa. □

### 2.1.3 Motivação e comentários da maior dificuldade no caso crítico

Observe que as inclusões (2.1.12) podem ser obtidas também para $\delta = 1$ com $\|u_0\| < 1$. Utilizando os teoremas de imersão e a teoria de interpolação, também podemos passar ao limite quando $\varepsilon \to 0$. Com efeito, seja $\delta = 1$. Multiplicando $P^\varepsilon u_\varepsilon = 0$ por $2(1 + x)u_\varepsilon$ e integrando sobre $\Omega$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(1 + x, u^2\right)(t) + \|\nabla u\|^2(t) + 2\|u_x\|^2(t) + (1 - 2\varepsilon)\int_{-B}^{B} u_x^2(0, y, t)\, dy \\ \leq \|u\|^2(t) + \frac{1}{2}\|u\|^4_{L^4_{xy}}(t) \leq \|u\|^2(t) + \|\nabla u\|^2(t)\|u\|^2(t).\end{aligned}$$

Levando em consideração que $\|u\|(t) \leq \|u_0\|(t) < 1$ e integrando em $t > 0$, o Lema de Grönwall nos dá

$$u \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; H^1_0(\Omega)\right)$$

com ambas as estimativas independentes de $\varepsilon < 1/4$. Agora observamos que

$$\int_0^T \int_\Omega |u^3|^{\frac{4}{3}}\, d\Omega dt \leq 2\|u_0\|^2\|\nabla u\|^2_{L^2_t L^2_{xy}}$$

e, pela estimativa acima, isso implica $u^3 \in L^{\frac{4}{3}}(Q_T)$. Como $L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, conclue-se que

$$u^2 u_x = \frac{1}{3}\partial_x(u^3) \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; H^{-2}(\Omega)),$$

donde $u_t \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; H^{-3}(\Omega))$. Pelo Teorema de Aubin-Lions, podemos extrair uma subsequência que tem limite quando $\varepsilon \to 0$.

É difícil, entretanto, mostrar que a função limite de $u_\varepsilon$ resolva o problema original. Mais precisamente, não é claro como obter estimativas do tipo (2.1.13) com $m > 1$ para $\delta = 1$. De fato, sejam $r, s \geq 1$. Queremos agora determinar condições sobre $r$ e $s$ tais que o produto $u^2 u_x$ esteja em $L^r\left(0, T; L^s(\Omega)\right)$. Consideramos $p, q > 1$ com $1/p + 1/q = 1$. Então

$$\|u^2 u_x\|^r_{L^r_t L^s_{xy}} = \int_0^T \left( \int_\Omega u^{2s} |u_x|^s \, d\Omega \right)^{\frac{r}{s}} dt \leq \int_0^T \|u\|^{2r}_{L^{2sp}_{xy}}(t) \|u_x\|^r_{L^{sq}_{xy}}(t) \, dt. \qquad (2.1.33)$$

Usamos a desigualdade de Nirenberg com $2sp$ ou seja $\alpha = \frac{sp-1}{sp}$. Logo,

$$\|u\|^{2r}_{L^{2sp}_{xy}}(t) \leq C \|\nabla u\|^{2r\alpha}(t) \|u\|^{2r(1-\alpha)}(t).$$

Supondo $sq \leq 2$, em (2.1.33),

$$\|u^2 u_x\|^r_{L^r_t L^s_{xy}} \leq C \|u\|^{2r(1-\alpha)}_{L^\infty_t L^2_{xy}} \int_0^T \|\nabla u\|^{2r\alpha}(t) \|u_x\|^r(t) \, dt \leq C \|u\|^{2r(1-\alpha)}_{L^\infty_t L^2_{xy}} \|\nabla u\|^{r(2\alpha+1)}_{L^{r(2\alpha+1)}_t L^2_{xy}}.$$

Para atingir $r(2\alpha + 1) = 2$, tem que ser $\alpha = 1/r - 1/2$. Portanto, $\frac{1}{sp} = \frac{3}{2} - \frac{1}{r}$, que implica

$$sq = \frac{2rs}{2(r+s) - 3rs}.$$

Como $sq \leq 2$, segue que $\frac{2rs}{2(r+s)-3rs} \leq 2$ o que significa $sr \leq \frac{r+s}{2}$. Observe que para $r, s > 1$ essa condição não vale. A única possibilidade que resta é $r = s = 1$, isto é,

$$u^2 u_x \in L^1\left(0, T; L^1(\Omega)\right).$$

O espaço não reflexivo $(L^1_t; L^1_{xy})$ é conhecido como uma classe difícil e complicada para ser usado com eficácia. Por exemplo, não se sabe até mesmo se a condição $u_x(L, y, t) = 0$ está satisfeita. Deixamos essas observações aqui para ilustrar as dificuldades que aparecem no caso crítico, e como possível desafio para futuros estudos.

## 2.2 Equação Crítica de Zakharov-Kuznetsov posta em uma $y$-faixa

Nesta seção iremos tratar a equação modificada de Zakharov-Kuznetsov (mZK) [4, 17]. Mais precisamente, estamos resolvendo o problema de valor inicial e de contorno (PVIC) posto na faixa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in (0, L), \; y \in \mathbb{R}\}$ para a equação modificada de Zakharov-Kuznetsov (mZK)

$$u_t + u_x + u^2 u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0, \qquad (2.2.1)$$

que é um análogo bidimensional da conhecida equação modificada de Korteweg-de Vries (mKdV)

$$u_t + u_x + u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \qquad (2.2.2)$$

ver [1].

Sejam $L$ e $T$ números positivos finitos. Defina $\Omega$ e $Q_T$ como

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in (0, L), \; y \in \mathbb{R})\}, \quad Q_T = \Omega \times (0, T).$$

Em $Q_T$ consideremos o seguinte PVIC para a equação modificada de Zakharov-Kuznetsov:

$$Pu \equiv u_t + u_x + u^2 u_x + \Delta u_x = 0, \quad \text{em } Q_T; \tag{2.2.3}$$

$$u(0, y, t) = u(L, y, t) = u_x(L, y, t) = 0, \quad t > 0; \tag{2.2.4}$$

$$\lim_{|y| \to \infty} u(x, y, t) = 0; \tag{2.2.5}$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2.2.6}$$

onde $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

**Teorema 2.2.1.** *Sejam* $L\sqrt{1+L} < \pi$ *e* $u_0 \in H^2(\Omega)$ *com* $\|u_0\|^2 < 1/2$ *satisfazendo (2.2.4) e (2.2.5). Defina* $I_0 = (1 + x, |u_0 + u_{0x} + \Delta u_{0x} + u_0^2 u_{0x}|^2)$ *com* $x \in (0, L)$, *e suponha que* [2]

$$\|u_0\|^2 + \|u_{0yy}\|^2 + I_0 < \infty$$

*com*

$$2^3 C_1 \left\{ 2^2 \Big[ 2\|u_0\|^2 + I_0 \Big] + K_1 C_1^2 \Big[ 2\|u_0\|^2 + I_0 \Big]^3 \right\} < \frac{\pi^2}{L^2(1+L)} - 1, \tag{2.2.7}$$

*onde*

$$C_1(L, \|u_0\|) = \frac{\max\{2, (1+L)^2\}}{1 - 2\|u_0\|^2} \quad e \quad K_1(L) = 2^{18} 3^9 (1+L)^4.$$

*Então existe uma única solução regular global para o problema* (2.2.3)-(2.2.6); *mais precisamente,*

$$u \in L^\infty\left(0, \infty; H^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, \infty; H^3(\Omega)\right),$$

$$u_t, \Delta u_x \in L^\infty\left(0, \infty; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, \infty; H^1(\Omega)\right).$$

*Ainda mais, existem constantes* $C > 0$ *e* $\theta = \frac{\pi^2}{L^2(1+L)}$ *tais que*

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)}(t) + \|u_t\|^2(t) + \|\Delta u_x\|^2(t) + \int_{\mathbb{R}} \left[ u_x^2(0, y, t) + u_{xy}^2(0, y, t) \right] dy \le Ce^{-\theta t}, \quad \forall t \ge 0.$$

### 2.2.1 Existência de soluções regulares

Nesta seção, asseguramos o resultado da existência. Tecnicamente, nós seguimos principalmente [14]. O ponto de maior diferença e dificuldade - como mencionado na Introdução - é a não-linearidade crítica. Para provar a parte da existência do Teorema

[2] a norma $\|\cdot\|$ é considerada em $L^2(\Omega)$ e $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno neste espaço.

2.2.1, para todos os reais $\varepsilon > 0$, consideramos a seguinte regularização parabólica de (2.2.3)-(2.2.6):

$$P^\varepsilon u_m^\varepsilon \equiv Pu_m^\varepsilon + \varepsilon(\partial_x^4 u_m^\varepsilon + \partial_y^4 u_m^\varepsilon) = 0 \text{ in } Q_T; \quad (2.2.8)$$

$$u_m^\varepsilon(0,y,t) = u_m^\varepsilon(L,y,t) = u_{mx}^\varepsilon(L,y,t) = \varepsilon\partial_x^2 u_m^\varepsilon(0,y,t) = \lim_{|y|\to\infty} u_m^\varepsilon(x,y,t) = 0; \quad (2.2.9)$$

$$u_m^\varepsilon(x,y,0) = u_{0m}(x,y),\ (x,y) \in \Omega; \quad (2.2.10)$$

$$u_{0m}(0,y) = u_{0m}(L,y) = u_{0mx}(L,t) = \varepsilon u_{0mxx}(0,y) = \lim_{|y|\to\infty} u_{0m}(x,y) = 0, \quad (2.2.11)$$

onde $u_{0m}$ é uma aproximação de $u_0$ independente de $\varepsilon$ para $m \in \mathbb{N}$. Vamos assumir que $u_{0m}$ converge para $u_0$ no seguinte sentido. Defina

$$\begin{aligned} I_{0m}^\varepsilon &= \left(1+x, |u_{0m}^\varepsilon + u_{0mx}^\varepsilon + \Delta u_{0mx}^\varepsilon + (u_{0m}^\varepsilon)^2 u_{0mx}^\varepsilon + \varepsilon(\partial_x^4 u_{0m}^\varepsilon + \partial_y^4 u_{0m}^\varepsilon)|^2\right), \\ I_{0m} &= \left(1+x, |u_{0m} + u_{0mx} + \Delta u_{0mx} + u_{0m}^2 u_{0mx}|^2\right). \end{aligned}$$

Então $u_{0m} \to u_0$ se $I_{0m} \to I_0$ e $\|u_{0myy}\| \to \|u_{0yy}\|$. Assumimos para $m$ suficientemente grande que $\|u_{0m}\|^2 \leq 2\|u_0\|^2$ e $I_{0m} \leq 2I_0$. Nós consideremos também $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente para verificar $I_{0m}^\varepsilon < 2I_0$.

Para todo $\varepsilon > 0$, (2.2.8)-(2.2.11) admite uma única solução regular $u_m^\varepsilon$ em $Q_T$ fornecida por $u_{0m}$ suficientemente suave [13]. A seguir, omitimos os índices $m$ e $\varepsilon$ sempre que não houver ambiguidade.

**Lema 2.2.1.** *Para $m$ suficientemente grande, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e para $\|u_0\|^2 \leq 1/2$, a solução permanece em*

$$u_m^\varepsilon \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty; H^1(\Omega)),$$

*com estimativas independentes de $m$ e $\varepsilon$.*

*Demonstração.* Dividiremos a prova deste Lema em duas partes

*Estimativa I.* Multiplicando (2.2.8) por $2u_m^\varepsilon$ e integrando sobre $Q_t$. Computamos

$$\|u\|^2(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_x^2(0,y,\tau)\, dy d\tau + 2\epsilon \int_0^t \left(\|u_{xx}\|^2(\tau) + \|u_{yy}\|^2(\tau)\right) d\tau = \|u_{0m}\|^2. \quad (2.2.12)$$

Consequentemente, para $m$ e $\varepsilon$ sob as condições do Lema, obtemos

$$\|u_m^\varepsilon\|^2(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (u_{mx}^\varepsilon)^2(0,y,\tau)\, dy d\tau \leq 2\|u_0\|^2,\ t > 0. \quad (2.2.13)$$

*Estimativa II.* Multiplicando $P^\varepsilon u_m^\varepsilon$ por $2(1+x)u_m^\varepsilon$ e integrando sobre $\Omega$, nós temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(1+x, u^2\right)(t) + \|\nabla u\|^2(t) + 2\|u_x\|^2(t) - \|u\|^2(t) \\ &+2\varepsilon\left(1+x, u_{xx}^2 + u_{yy}^2\right)(t) + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_x^2(0,y,t)\, dy = \frac{1}{2}\|u\|_{L^4(\Omega)}^4(t). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Como $u_m^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, podemos concluir do Corolário 1.1.2, que a norma da solução em $L^4(\Omega)$ pode ser estimada pelas normas do espaço de energia, i.e. ,

$$\|u_m^\varepsilon\|_{L^4(\Omega)}^4(t) \leq 2\|\nabla u_m^\varepsilon\|^2(t)\|u_m^\varepsilon\|^2(t).$$

Com essa limitação, a desigualdade de Steklov (Lema 1.1.5, fórmula (1.1.6)), mais a estimativa (2.2.13), a igualdade (2.2.14) tornar-se

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,u^2\right)(t)+\left(\frac{2\pi^2}{L^2}-1\right)\|u\|^2(t)+\left(1-2\|u_0\|^2\right)\|\nabla u\|^2(t) \leq 0. \tag{2.2.15}$$

Devido a $\|u_0\|^2 < 1/2$ o último termo da esquerda da desigualdade é positivo, e como $L\sqrt{1+L} < \pi$ devemos ter $L < \pi$, o que implica $\dfrac{2\pi^2}{L^2} - 1 > \dfrac{\pi^2}{L^2}$. Portanto, (2.2.15) pode ser lida como

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,(u_m^\varepsilon)^2\right)(t)+\frac{\pi^2}{L^2(1+L)}\left(1+x,(u_m^\varepsilon)^2\right)(t) \leq 0. \tag{2.2.16}$$

Pela forma diferencial do Lema de Grönwall (Teorema 1.1.10 ), a condição (2.2.10), aplicadas em (2.2.16) implicam na desigualdade de decaimento

$$\|u_m^\varepsilon\|^2(t) \leq 2(1+L)\|u_0\|^2 e^{-\theta t} < (1+L)e^{-\theta t}, \quad t>0, \tag{2.2.17}$$

com $\theta = \dfrac{\pi^2}{L^2(1+L)}$. Voltando em (2.2.15) e integrando sobre $(0,t)$, nós finalmente temos

$$\int_0^t \|\nabla u_m^\varepsilon\|^2(\tau)\, d\tau \leq C_0(L,\|u_0\|) \tag{2.2.18}$$

onde constante $C_0$ é definida como

$$C_0(L,\|u_0\|) = \frac{1+L}{1-2\|u_0\|^2}. \tag{2.2.19}$$

Com as estimativas (2.2.17) e (2.2.18) concluímos a demonstração do Lema. □

**Observação 2.2.1.** *Observe que a taxa de decaimento $\theta$ em (2.2.17) é a mesma taxa encontrada em [14], Teorema 2.1 pg. 255. E se encaixa bem a taxa encontrada em [7], onde o decaimento em $L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$ possui a taxa $(3\pi^2-L^2)/2L^2(1+L)$, Teorema 7.3 pg. 679.*

**Lema 2.2.2.** *Para $m$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, valem as seguintes pertinências:*

$$\begin{aligned}
&u_m^\varepsilon \in L^\infty(0,\infty;H^1(\Omega));\\
&u_{mt}^\varepsilon \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;H^1(\Omega));\\
&u_{mx}^\varepsilon(0,y,t) \in L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}));\\
&u_{mxt}^\varepsilon(0,y,t) \in L^2(0,\infty;L^2(\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

*com estimativas independentes de $m$ e $\varepsilon$.*

*Demonstração.* Iniciamos separando a prova em estimativas.

*Estimativa III.* Escrevemos (2.2.14) na forma

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2(t) \quad &+2\|u_x\|^2(t) + 2\varepsilon\left(1+x, u_{xx}^2 + u_{yy}^2\right)(t) + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_x^2(0,y,t)\,dy \\ &= \|u\|^2(t) + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4(\Omega)}^4(t) - 2\left((1+x)u, u_t\right)(t). \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Pelo Corolário 1.1.2, as desigualdades de Hölder e de Young fornecem

$$\begin{aligned} (1-2\|u_0\|^2)\|\nabla u\|^2(t) \quad &+ \quad 2\|u_x\|^2(t) + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_x^2(0,y,t)\,dy \\ &\le \quad 2\|u\|^2(t) + (1+L)^2\|u_t\|^2(t) \\ &\le \quad K_0\big(\|u\|^2(t) + \|u_t\|^2(t)\big), \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

com

$$K_0(L) = \max\left\{2, (1+L)^2\right\}. \tag{2.2.22}$$

Logo,

$$\|\nabla u_m^\varepsilon\|^2(t) \quad \le \quad C_1\left(\|u_m^\varepsilon\|^2(t) + \|u_{mt}^\varepsilon\|^2(t)\right), \tag{2.2.23}$$

onde $C_1$ está definida como

$$C_1(L, \|u_0\|) = \frac{K_0(L)}{1-2\|u_0\|^2}. \tag{2.2.24}$$

*Estimativa IV.* Derive (2.2.8) com respeito a $t$ e multiplique o resultado por $2(1+x)u_{mt}^\varepsilon$. Integrando sobre $\Omega$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(1+x, u_t^2\right)(t) \quad &+ \quad \|\nabla u_t\|^2(t) + 2\|u_{xt}\|^2(t) + 2\varepsilon\left(1+x, u_{xxt}^2 + u_{yyt}^2\right)(t) \\ &+ \quad (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2(0,y,t)\,dy \\ &= \quad \|u_t\|^2(t) + \left(u^2, u_t^2\right)(t) - 2\left((1+x)uu_x, u_t^2\right)(t). \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Observe que $u, u_t \in H_0^1(\Omega)$, assim as desigualdades de Hölder, Young e de Nirenberg (fórmula (1.1.11) em $L^4$) fornecem

$$\begin{aligned} \left(u^2, u_t^2\right)(t) \quad &\le \quad \|u\|_{L_{xy}^4}^2(t)\|u_t\|_{L_{xy}^4}^2(t) \\ &\le \quad 2\|u\|(t)\|\nabla u\|(t)\|u_t\|(t)\|\nabla u_t\|(t) \\ &\le \quad \frac{1}{4}\|\nabla u_t\|^2(t) + 4\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^2(t)\|u_t\|^2(t). \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

A desigualdade de Nirenberg (fórmula (1.1.11) em $L^4$ e $L^8$), implica então

$$\begin{aligned} -2\left((1+x)uu_x, u_t^2\right)(t) \quad &\le \quad 2(1+L)\|u_x\|(t)\|u\|_{L_{xy}^4}(t)\|u_t\|_{L_{xy}^8}^2(t) \\ &\le \quad 2^5 3^{\frac{3}{2}}(1+L)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}}(t)\|u_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u_t\|^{\frac{3}{2}}(t). \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Pela desigualdade de Young, Teorema 1.1.15 com $p = 4$ e $q = 4/3$, (2.2.27) se torna

$$-2\left((1+x)uu_x, u_t^2\right)(t) \leq \frac{1}{4}\|\nabla u_t\|^2(t) + K_1\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^6(t)\|u_t\|^2(t) \tag{2.2.28}$$

onde $K_1$ está definida como

$$K_1(L) = 2^{18}3^9(1+L)^4. \tag{2.2.29}$$

Substituindo (2.2.26) e (2.2.28) em (2.2.25), achamos (para $m$ suficientemente grande) que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(1+x, u_t^2\right)(t) + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2(t) + 2\|u_{xt}\|^2(t) + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2(0,y,t)\,dy \\ &\leq \|u_t\|^2(t) + 2\|u_0\|^2\Big[2^2\|\nabla u\|^2(t) + K_1\|\nabla u\|^6(t)\Big]\left(1+x, u_t^2\right)(t).\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Devido a (2.2.23) e pela desigualdade de Steklov (fórmula (1.1.6) aplicada para $u_t$), a estimativa (2.2.30) nos permite escrever

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(1+x, u_t^2\right)(t) + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2(t) + \left(\frac{2\pi^2}{L^2} - 1\right)\|u_t\|^2(t) + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2(0,y,t)\,dy \\ &\leq C_1\left[2^2\Big[\|u\|^2(t) + \|u_t\|^2(t)\Big] + K_1C_1^2\Big[\|u\|^2(t) + \|u_t\|^2(t)\Big]^3\right]\left(1+x, u_t^2\right)(t).\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Escrevemos (2.2.31) como

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(1+x, u_t^2\right)(t) + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2(t) + \frac{\pi^2}{L^2(1+L)}\left(1+x, u_t^2\right)(t) \\ &+(1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_{xt}^2(0,y,t)\,dy + \left(\frac{\pi^2}{L^2(1+L)} - 1 - \omega_m^\varepsilon(t)\right)\left(1+x, u_t^2\right)(t) \leq 0,\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

onde

$$\omega_m^\varepsilon(t) = C_1\left\{2^2\Big[2\|u_0\|^2 + \left(1+x, (u_{mt}^\varepsilon)^2\right)(t)\Big] + K_1C_1^2\Big[2\|u_0\|^2 + \left(1+x, (u_{mt}^\varepsilon)^2\right)(t)\Big]^3\right\}.$$

Observamos que para $m$ e $\varepsilon$ nas condições do Lema, nós temos

$$\omega_m^\varepsilon(0) = C_1\left\{2^2\Big[2\|u_0\|^2 + I_{0m}^\varepsilon\Big] + K_1C_1^2\Big[2\|u_0\|^2 + I_{0m}^\varepsilon\Big]^3\right\} \leq 2^3\omega(0), \tag{2.2.33}$$

onde $\omega(0) = C_1\left\{2^2\Big[2\|u_0\|^2 + 2I_0\Big] + K_1C_1^2\Big[2\|u_0\|^2 + I_0\Big]^3\right\}$. Pela condição (2.2.7) do Teorema 2.2.1 e pela escolha de $u_{0m}$, obtemos

$$\omega_m^\varepsilon(0) < 2^3\omega(0) < \frac{\pi^2}{L^2(1+L)} - 1. \tag{2.2.34}$$

Como solução $u_m^\varepsilon$ é regular, devido a (2.2.32) e (2.2.34), o Lema 1.1.9 assegura para todo $t > 0$

$$\left(1+x, (u_{mt}^\varepsilon)^2\right)(t) < \left(1+x, (u_{mt}^\varepsilon)^2\right)(0), \tag{2.2.35}$$

e isso significa que

$$\omega_m^\varepsilon(t) < \omega_m^\varepsilon(0), \quad \forall t > 0. \tag{2.2.36}$$

Retornando a (2.2.32), obtêm-se

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,(u_{mt}^\varepsilon)^2\right)(t) + \frac{\pi^2}{L^2(1+L)}\left(1+x,(u_{mt}^\varepsilon)^2\right)(t) \leq 0, \tag{2.2.37}$$

e pela forma diferencial do Lema de Grönwall, obtemos o decaimento de $u_t$

$$\|u_{mt}^\varepsilon\|^2(t) \leq 2I_0 e^{-\theta t}, \quad t > 0. \tag{2.2.38}$$

Voltando para (2.2.32 ) com $\varepsilon < \frac{1}{4}$, conclui-se

$$\int_0^t \left(\|\nabla u_{mt}^\varepsilon\|^2(\tau) + \int_{\mathbb{R}} (u_{mxt}^\varepsilon)^2(0,y,\tau)\,dy\right) d\tau \leq 4I_0, \quad t > 0. \tag{2.2.39}$$

Visto (2.2.17) e (2.2.38 ), ganhamos de (2.2.23) que

$$\|\nabla u_m^\varepsilon\|^2(t) \quad \leq \quad C_2(L, I_0, \|u_0\|)e^{-\theta t}, \tag{2.2.40}$$

onde

$$C_2(L, I_0, \|u_0\|) = C_1\left[1 + L + 2I_0\right]. \tag{2.2.41}$$

Por (2.2.21) com $\varepsilon < \frac{1}{4}$ concluímos que

$$2\|u_x\|^2(t) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u_{mx}^\varepsilon)(0,y,t)\,dy \quad \leq \quad K_0\left[1 + L + 2I_0\right]e^{-\theta t}. \tag{2.2.42}$$

□

**Lema 2.2.3.** *Para $m$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ pequeno, temos*

$$\begin{aligned}
&\nabla u_{my}^\varepsilon \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega));\\
&u_{mxx}^\varepsilon\ ,\ \nabla u_{myy}^\varepsilon \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega));\\
&u_{mx}^\varepsilon(0,y,t) \in L^\infty(0,\infty; H^1(\mathbb{R})) \cap L^2(0,\infty; H^2(\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

*onde as estimativas não dependem de $m$ e $\varepsilon$.*

*Demonstração.* Primeiro deduzimos

*Estimativa V.* Multiplique a equação por $-2(1+x)u_{myy}^\varepsilon$ e integre sobre $\Omega$,

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u_y\|^2(t) + 2\|u_{xy}\|^2 + 2\varepsilon\left(1+x, u_{xxy}^2 + u_{yyy}^2\right)(t) + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_{xy}^2(0,y,t)\,dy\\
&= \|u_y\|^2(t) + 2\left((1+x)u_{yy}, u_t\right)(t) + \left(u^2, u_y^2\right)(t) - 2\left((1+x)uu_x, u_y^2\right)(t)
\end{aligned} \tag{2.2.43}$$

As desigualdades Hölder, Young e de Nirenberg (fórmula (1.1.11) aplicada em $L^4$ ), implicam

$$\begin{aligned}\left(u^2, u_y^2\right) \leq \|u\|^2_{L^4_{xy}}(t)\|u_y\|^2_{L^4_{xy}}(t) &\leq 2\|u\|(t)\|\nabla u\|(t)\|u_y\|(t)\|\nabla u_y\|(t) \\ &\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_y\|^2(t) + 6\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^4(t)\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Note também que as desigualdades de Young com $p = 4$ e $q = 4/3$, de Hölder e de Nirenberg (fórmula (1.1.11) aplicada em $L^4$ e $L^8$), implicam

$$\begin{aligned}-2\left((1+x)uu_x, u_y^2\right)(t) &\leq 2(1+L)\|u_x\|(t)\|u\|_{L^4_{xy}}(t)\|u_y\|^2_{L^8_{xy}}(t) \\ &\leq 2^5 3^{\frac{3}{2}}(1+L)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^2(t)\|\nabla u_y\|^{\frac{3}{2}}(t) \\ &\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_y\|^2(t) + \frac{3^3}{2^3}K_1\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^8(t),\end{aligned} \tag{2.2.45}$$

onde $K_1$ é dado em (2.2.29). Aplicando Hölder e Young novamente, temos

$$\begin{aligned}2\left((1+x)u_{yy}, u_t\right)(t) &\leq 2(1+L)\|u_{yy}\|(t)\|u_t\|(t) \\ &\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_y\|^2(t) + 6(1+L)^2\|u_t\|^2(t).\end{aligned} \tag{2.2.46}$$

Substitua (2.2.44), (2.2.45) e (2.2.46) em (2.2.43). Então, para $\varepsilon < \frac{1}{4}$ nós temos

$$\begin{aligned}\|\nabla u_y\|^2(t) + \int_{\mathbb{R}} u_{xy}^2(0,y,t)\,dy &\leq 2\|u_y\|^2(t) + 12(1+L)^2\|u_t\|^2(t) \\ &+12\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^4(t) + \frac{3^3}{2^2}K_1\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^8(t)\end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Por (2.2.17), (2.2.38) e (2.2.40), a desigualdade (2.2.47) se torna

$$\|\nabla u^\varepsilon_{my}\|^2(t) + \int_{\mathbb{R}} (u^\varepsilon_{mxy})^2(0,y,t)\,dy \leq C_3(L, I_0, \|u_0\|)e^{-\theta t}, \tag{2.2.48}$$

onde

$$C_3(L, I_0, \|u_0\|) = 2C_2 + 6C_2^2 + \frac{3^3}{2^3}K_1 C_2^4 + 24(1+L)^2 I_0. \tag{2.2.49}$$

*Estimativa VI.* Multiplicando (2.2.8) por $2(1+x)u^\varepsilon_{myyyy}$ e integrando sobre $\Omega$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(1+x, u_{yy}^2\right)(t) + \|\nabla u_{yy}\|^2(t) + 2\|u_{xyy}\|^2(t) + 2\varepsilon\left(1+x, u_{xxyy}^2 + u_{yyyy}^2\right)(t) \\ &+(1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_{xyy}^2(0,y,t)\,dy = \|u_{yy}\|^2(t) - 2\left((1+x)u_{yyyy}, u^2 u_x\right)(t).\end{aligned} \tag{2.2.50}$$

Note que

$$-2\left((1+x)u_{yyyy}, u^2u_x\right)(t) = -\frac{2}{3}\left((1+x)u_{yy}, 2u_y^2u_x + 2uu_xu_{yy} + 4uu_yu_{xy} + u^2u_{xyy}\right)(t). \tag{2.2.51}$$

Separando e estimando cada termo em (2.2.51) com uso das desigualdades de Hölder e de Nirenberg (fórmula (1.1.11) aplicada em $L^4, L^6$ e $L^8$), obtemos

$$\begin{aligned} -\tfrac{4}{3}\left((1+x)u_{yy}, u_y^2 u_x\right)(t) &= 4\left((1+x)u_y^3, u_{xy}\right)(t) \\ &\leq 4(1+L)\|u_y\|^3_{L^6(\Omega)}(t)\|u_{xy}\|(t) \\ &\leq 2^3 3^2(1+L)\|u_y\|(t)\|\nabla u_y\|^3(t). \end{aligned} \tag{2.2.52}$$

Além disso, desigualdade de Young com $p=4$ e $q=4/3$ implica

$$\begin{aligned} -\tfrac{4}{3}\left((1+x)u_{yy}, uu_xu_{yy}\right)(t) &= -\tfrac{4}{3}\left((1+x)uu_x, u_{yy}^2\right)(t) \\ &\leq \tfrac{4}{3}(1+L)\|u_x\|(t)\|u\|_{L^4(\Omega)}(t)\|u_{yy}\|^2_{L^8(\Omega)}(t) \\ &\leq 2^6\sqrt{3}(1+L)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}}(t)\|\nabla u_y\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u_{yy}\|^{\frac{3}{2}}(t) \\ &\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_{yy}\|^2(t) + \frac{2}{3}K_1\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^6(t)\|\nabla u_y\|^2(t) \end{aligned} \tag{2.2.53}$$

Estimamos agora usando Young com $p=8/5$ e $q=8/3$

$$\begin{aligned} -\tfrac{8}{3}\left((1+x)u_{yy}, uu_yu_{xy}\right)(t) &\leq \tfrac{8}{3}(1+L)\|u_{xy}\|(t)\|u\|_{L^4(\Omega)}(t)\|u_y\|_{L^8(\Omega)}(t)\|u_{yy}\|_{L^8(\Omega)}(t) \\ &\leq 2^7\sqrt{3}(1+L)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{3}{4}}(t)\|\nabla u_y\|^2(t)\|\nabla u_{yy}\|^{\frac{3}{4}}(t) \\ &\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_{yy}\|^2(t) + K_2\|u\|^{\frac{4}{5}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{6}{5}}(t)\|\nabla u_y\|^{\frac{16}{5}}(t) \end{aligned} \tag{2.2.54}$$

onde

$$K_2(L) = 2^7 3^2 5(1+L)^{\frac{8}{5}}. \tag{2.2.55}$$

O último termo pode ser abordado como

$$\begin{aligned} -\tfrac{2}{3}\left((1+x)u_{yy}, u^2u_{xyy}\right)(t) &\leq \tfrac{2}{3}(1+L)\|u_{xyy}\|(t)\|u\|^2_{L^8(\Omega)}(t)\|u_{yy}\|_{L^4(\Omega)}(t) \\ &\leq 2^5\sqrt{3}(1+L)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}}(t)\|u_{yy}\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u_{yy}\|^{\frac{3}{2}}(t) \\ &\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_{yy}\|^2(t) + \frac{1}{2^3 3}K_1\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^6(t)\|u_{yy}\|^2(t) \end{aligned} \tag{2.2.56}$$

Inserindo (2.2.52)-(2.2.54) e (2.2.56) em (2.2.50), podemos escrever então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(1+x, u_{yy}^2\right)(t) &+ \frac{1}{2}\|\nabla u_{yy}\|^2(t) + 2\|u_{xyy}\|^2(t) + (1-2\varepsilon)\int_{\mathbb{R}} u_{xyy}^2(0,y,t)\,dy \\ &\leq \left[1 + \frac{27}{2^3 3^2}K_1\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^6(t)\right]\|\nabla u_y\|^2(t) \\ &+ 2^3 3^2(1+L)\|u_y\|(t)\|\nabla u_y\|^3(t) \\ &+ K_2\|u\|^{\frac{4}{5}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{6}{5}}(t)\|\nabla u_y\|^{\frac{16}{5}}(t). \end{aligned} \tag{2.2.57}$$

Integrando em $(0,t)$, para $m$ suficientemente grande e $\varepsilon < \frac{1}{4}$, temos que

$$\begin{aligned} \left(1+x, (u^\varepsilon)^2_{myy}\right)(t) &+ \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla u^\varepsilon_{myy}\|^2(\tau)\,d\tau + 2\varepsilon\int_0^t \|u^\varepsilon_{myyyy}\|^2(\tau)d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} (u^\varepsilon_{mxyy})^2(0,y,\tau)\,dyd\tau \leq C(L, I_0, \|u_{0yy}\|). \end{aligned} \tag{2.2.58}$$

*Estimativa VII.* Escrevemos (2.2.8)-(2.2.10) na forma

$$u_{xxx} + u^2 u_x + \varepsilon u_{xxxx} = g, \tag{2.2.59}$$

$$u(0) = u_{xx}(0) = u(L) = u_x(L) = 0. \tag{2.2.60}$$

Por (2.2.58) temos $g \in L^2((0,\infty); L^2(\Omega))$. Multiplicando (2.2.59) por $x$ e integrando em $x \in (0, L)$, calcula-se que

$$u_x(0) + Lu_{xx}(L) - \frac{1}{3}\int_0^L u^3\,dx - \varepsilon u_{xx}(L) + L\varepsilon u_{xxx}(L) = \int_0^L xg\,dx. \tag{2.2.61}$$

Integração de (2.2.59) sobre $(x, L)$ multiplicada por $L$ nos dá

$$Lu_{xx}(L) - Lu_{xx}(x) - \frac{L}{3}u^3(x) + L\varepsilon\left(u_{xxx}(L) - u_{xxx}(x)\right) = L\int_x^L g(\tau)\,d\tau. \tag{2.2.62}$$

Subtraindo (2.2.62) de (2.2.61) temos

$$\begin{aligned} u_x(0) - \frac{1}{3}\int_0^L u^3\,dx - \varepsilon u_{xx}(L) \quad & + Lu_{xx}(x) + \tfrac{L}{3}u^3(x) + L\varepsilon u_{xxx}(x) \\ & = \int_0^L xg\,dx - L\int_x^L g(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{2.2.63}$$

Defina

$$h(x) = -u_x(0) + \frac{1}{3}\int_0^L u^3\,dx - \frac{L}{3}u^3(x) + \int_0^L xg\,dx - L\int_x^L g(\tau)\,d\tau. \tag{2.2.64}$$

Então, (2.2.63) se torna

$$u_{xx}(x) + \varepsilon u_{xxx}(x) = \frac{1}{L}\left(\varepsilon u_{xx}(L) + h(x)\right). \tag{2.2.65}$$

Multiplicamos agora (2.2.65) por $u_{xx}$ e integramos sobre $(0, L)$ para encontrar

$$\begin{aligned} \int_0^L u_{xx}^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2}u_{xx}^2(L) \quad &= \quad -\frac{1}{L}\varepsilon u_{xx}(L)u_x(0) + \int_0^L u_{xx}h\,dx \\ &\le \quad \frac{\varepsilon}{4}u_{xx}^2(L) + \frac{\varepsilon}{L^2}u_x^2(0) + \frac{1}{2}\int_0^L [u_{xx}^2 + h^2]\,dx. \end{aligned} \tag{2.2.66}$$

Portanto,

$$\int_0^L u_{xx}^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2}u_{xx}^2(L) \le \frac{2\varepsilon}{L^2}u_x^2(0) + \int_0^L h^2\,dx. \tag{2.2.67}$$

Logo,

$$\|u_{xx}\|^2(t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2(L,y,t)\,dy \le \frac{2\varepsilon}{L^2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2(0,y,t)\,dy + \|h\|^2(t). \tag{2.2.68}$$

Agora estimamos $h \in L^2(\Omega)$ para ver que

$$\begin{aligned}
|h|^2(t) &\leq 2\left(|u_x(0)|(t) + \frac{L}{3}|u|^3(t)\right)^2 + 2\left(\int_0^L \frac{1}{3}|u|^3 + 2L|g|\,dx\right)^2 \\
&\leq 4|u_x(0)|^2(t) + \frac{4L^2}{9}|u|^6(t) + \frac{2}{9}\left\||u|^3 + 6L|g|\right\|^2_{L^1(0,L)}(y,t) \\
&\leq 4|u_x(0)|^2(t) + \frac{4L^2}{9}|u|^6(t) + \frac{2L}{9}\left\||u|^3 + 6L|g|\right\|^2_{L^2(0,L)}(y,t).
\end{aligned} \tag{2.2.69}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|h\|^2(t) &\leq \int_\Omega \left[4|u_x(0)|^2(t) + \frac{4L^2}{9}|u|^6(t) + \frac{2L}{9}\left\||u|^3 + 6L|g|\right\|^2_{L^2(0,L)}(y,t)\right] d\Omega \\
&= 4L\int_{\mathbb{R}} u_x^2(0,y,t)\,dy + \frac{4L^2}{9}\|u\|^6_{L^6(\Omega)}(t) + \frac{2L^2}{9}\left\||u|^3 + 6L|g|\right\|^2(t) \\
&\leq 4L\int_{\mathbb{R}} u_x^2(0,y,t)\,dy + \frac{8L^2}{9}\|u\|^6_{L^6(\Omega)}(t) + 2^4L^4\left\|g\right\|^2(t).
\end{aligned} \tag{2.2.70}$$

Inserindo (2.2.70) em (2.2.68), obtemos

$$\|u_{xx}\|^2(t) \leq \left(4L + \frac{2\varepsilon}{L^2}\right)\int_{\mathbb{R}} u_x^2(0,y,t)\,dy + \frac{8L^2}{9}\|u\|^6_{L^6(\Omega)}(t) + 2^4L^4\left\|g\right\|^2(t).$$

Pelos resultados dos Lemmas 2.2.1 e 2.2.2, e utilizando a estimativa (2.2.58), conclui-se que

$$\int_0^t \|u^\varepsilon_{mxx}\|^2(t)\,dt \leq C(L, I_0, \|u_{0yy}\|). \tag{2.2.71}$$

□

## Passagem ao Limite

Iremos explorar os Lemas 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3. Usando estimativas independentes de $\varepsilon$ e notando que o termo não linear $(u^\varepsilon_m)^2 u^\varepsilon_{mx}$ está pelo menos em $L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$, junto com argumentos de compacidade, pode-se passar ao limite $\varepsilon \to 0$ em (2.2.8)-(2.2.11) para obter solução $u_m$ do problema (2.2.3)-(2.2.6) com dados iniciais $u_{0m}$. A resultante $u_m$ satisfaz

$$u_{mt} + u_{mx} + \nabla u_{mx} + u_m^2 u_{mx} = 0 \ \text{ in } Q_T; \tag{2.2.72}$$

$$u_m(0,y,t) = u_m(L,y,t) = u_{mx}(L,y,t) = \lim_{|y|\to\infty} u_m(x,y,t) = 0; \tag{2.2.73}$$

$$u_m(x,y,0) = u_{0m}(x,y), \ (x,y) \in \Omega; \tag{2.2.74}$$

$$u_{0m}(0,y) = u_{0m}(L,y) = u_{0mx}(L,t) = \lim_{|y|\to\infty} u_{0m}(x,y) = 0,. \tag{2.2.75}$$

Aqui $m$ é suficientemente grande e fixo. Notamos que $u_m$ verifica

$$u_m \in L^\infty(0,\infty;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;H^2(\Omega)), \tag{2.2.76}$$
$$\nabla u_{myy} \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega)) \tag{2.2.77}$$
$$u_{mt} \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;H^1(\Omega)). \tag{2.2.78}$$
$$u_{mx}(0,y,t) \in L^\infty(0,\infty;H^1(\mathbb{R})) \cap L^2(0,\infty;H^2(\mathbb{R})). \tag{2.2.79}$$

Escreva (2.2.72) como

$$u_{mxxx} = -(u_{mt} + u_{mx} + u_{mxyy} + u_m^2 u_{mx}). \tag{2.2.80}$$

Por (2.2.76) e pela desigualdade de Nirenberg (fórmula (1.1.9) aplicada para $u_x$ em $L^4$), vimos que

$$\begin{aligned}\|u_m^2 u_{mx}\|^2_{L^2_t L^2_{xy}} &= \int_0^t \int_\Omega u_m^4 u_{mx}^2 \, d\Omega dt \le \int_0^t \|u_m\|^4_{L^8(\Omega)}(t) \|u_{mx}\|^2_{L^4(\Omega)}(t)\, dt \\ &\le C_\Omega \|u_m\|_{L^\infty_t L^2_{xy}} \|\nabla u_m\|^3_{L^\infty_t L^2_{xy}} \Big( \|u_{mx}\|_{L^2_t L^2_{xy}} \|u_{mx}\|_{L^2_t H^1_{xy}} + \|u_{mx}\|^2_{L^2_t L^2_{xy}} \Big)\end{aligned} \tag{2.2.81}$$

Logo, por (2.2.76)-(2.2.78) e (2.2.81) a igualdade (2.2.80) assegura

$$u_{mxxx} \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega)). \tag{2.2.82}$$

—— Como as constantes em Lemas 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 não dependem de $\varepsilon, m, t$, podemos passar ao limite em (2.2.72)-(2.2.75) quando $m \to \infty$ para obter a solução $u(x,y,t)$ de (2.2.3)-(2.2.6) tal que

$$u \in L^\infty(0,\infty;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;H^2(\Omega)), \tag{2.2.83}$$
$$\nabla u_{yy}\ ,\ u_{xxx} \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega)) \tag{2.2.84}$$
$$u_t \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;H^1(\Omega)). \tag{2.2.85}$$
$$u_x(0,y,t) \in L^\infty(0,\infty;H^1(\mathbb{R})) \cap L^2(0,\infty;H^2(\mathbb{R})),. \tag{2.2.86}$$

Mais ainda, por (2.2.17), (2.2.38),(2.2.40), (2.2.42) e (2.2.48) obtemos o decaimento

$$\|u_t\|^2(t) + \|u\|^2_{H^1(\Omega)}(t) + \|\nabla u_y\|^2(t) + \int_{\mathbb{R}} \left[u_x^2(0,y,t) + u_{xy}^2(0,y,t)\right] dy \le C(L,I_0)e^{-\theta t}.$$

## Regularidade de $u$

Escrevemos (2.2.3)-(2.2.6) na forma

$$\Delta u_x = -u_t - u_x - \frac{1}{3}(u^3)_x\,, \tag{2.2.87}$$
$$u_x(L,y,t) = 0, \tag{2.2.88}$$
$$u_x(0,y,t) = \phi(y,t) \in L^\infty(0,\infty;H^1(\mathbb{R})) \cap L^2(0,\infty;H^2(\mathbb{R})). \tag{2.2.89}$$

Denotando $v = u_x - \dfrac{(L-x)}{L}\phi(y,t)$ e levando em consideração (2.2.87), escrevemos

$$\Delta v = -u_t - u_x - \frac{1}{3}(u^3)_x - \frac{(L-x)}{L}\phi_{yy}(y,t) \equiv F(x,y,t), \tag{2.2.90}$$
$$v(0,y,t) = v(L,y,t) = 0. \tag{2.2.91}$$

Temos por (2.2.83)-(2.2.86) que $F(x,y,t) \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$. Considere o produto interno

$$(\Delta v, v) = (F, v)\,,$$

Computamos

$$\begin{aligned}\int_\Omega [u_t + u_x] v \, d\Omega &\leq \big(\|u_t\|(t) + \|u_x\|(t)\big)\|v\|(t) \\ &\leq \|u_t\|^2(t) + \|u_x\|^2(t) + \frac{1}{2}\|v\|^2(t)\end{aligned} \tag{2.2.92}$$

e estimamos o termo não linear como

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2 u_x v \, d\Omega &\leq \|u^2 u_x\|(t)\|v\|(t) \\ &\leq 2^{\frac{13}{2}} 3^3 C_{N4}^2 \|u\|(t)\|\nabla u\|^4(t)\|u_x\|_{H^1_{xy}}(t) + \frac{1}{2}\|v\|^2(t) \\ &\leq \frac{1}{4}\|u_x\|^2_{H^1_{xy}}(t) + 2^{13}3^6 C_{N4}^4 \|u\|^2(t)\|\nabla u\|^8(t) + \frac{1}{2}\|v\|^2(t).\end{aligned} \tag{2.2.93}$$

O termo $\phi_{yy}$ é limitado por

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}\int_0^L \int_{\mathbb{R}} \left[(L-x)\phi_y(y,t)\right]_y v \, dydx &= -\frac{1}{L}\int_\Omega (L-x)\phi_y(y,t) v_y \, d\Omega \\ &\leq \left(\int_\Omega \phi_y^2 \, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \|v_y\|(t) \\ &\leq \frac{L}{2}\int_{\mathbb{R}} \phi_y^2 \, dy + \frac{1}{2}\|v_y\|^2(t).\end{aligned} \tag{2.2.94}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\|v\|^2(t) = \int_\Omega v^2 \, d\Omega &= \textstyle\int_\Omega \left[u_x - \frac{(L-x)}{L}\phi(y,t)\right]^2 \, d\Omega \\ &\leq 2\|u_x\|^2(t) + 2L\int_{\mathbb{R}} \phi^2(y,t)\, dy.\end{aligned} \tag{2.2.95}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2(t) &\leq \frac{1}{4}\|u_{xx}\|^2(t) + \|u_t\|^2(t) + \frac{13}{4}\|u_x\|^2(t) + \frac{1}{4}\|u_{xy}\|^2(t) \\ &+ 2^{13}3^6 C_{N4}^4 \|u\|^2(t)\|\nabla u\|^8(t) + L\int_{\mathbb{R}}\left[2\phi^2(y,t) + \frac{1}{2}\phi_y^2\right]\, dy.\end{aligned} \tag{2.2.96}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_{xx}\|^2(t) & \leq 2\|u_t\|^2(t)+\frac{13}{2}\|u_x\|^2(t)+\frac{1}{2}\|u_{xy}\|^2(t)\\ & +2^{14}3^6C_{N4}^4\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^8(t)+L\int_{\mathbb{R}}\left[\left(4+\frac{2}{L^2}\right)\phi^2(y,t)+\phi_y^2\right]\,dy.\end{aligned} \tag{2.2.97}$$

Temos por (2.2.1) que

$$\|u_{xx}\|^2(t)\leq C(L,I_0)e^{-\theta t},\quad \forall t\geq 0. \tag{2.2.98}$$

Daí, $u\in L^\infty(0,\infty;H^2(\Omega))$ e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2(t)\leq C(L,I_0)e^{-\theta t},\quad \forall t\geq 0. \tag{2.2.99}$$

Mais ainda, como $v$ é a solução de uma equação elíptica que se anula na fronteira, e como a fronteira $\partial\Omega$, neste caso da $y-$faixa, é $C^\infty$, temos pelo Teorema 1.1.8 que $v\in L^2(0,\infty;H^2(\Omega))$. Consequentemente, $u\in L^\infty(0,\infty;H^2(\Omega))\cap L^2(0,\infty;H^3(\Omega))$.

## Regularidade de $\Delta u_x$

Notemos que (2.2.3) fornece

$$\begin{aligned}\nabla\left(\Delta u_x\right) &= -\nabla\left(u_t+u_x+u^2u_x\right)\\ &= -\nabla\left(u_t+u_x\right)-2uu_x\nabla u-u^2\nabla u_x.\end{aligned} \tag{2.2.100}$$

Então, (2.2.100) e a desigualdade triangular implica

$$\begin{aligned}\|\Delta u_x\|_{H^1(\Omega)}^2(t) &= \|\Delta u_x\|^2(t)+\|\nabla\left(\Delta u_x\right)\|^2(t)\\ &\leq \|\Delta u_x\|^2(t)+2\|\nabla\left(u_t+u_x\right)\|^2(t)+4\|u^2\nabla u_x\|^2(t)+2^4\|uu_x\nabla u\|^2(t).\end{aligned} \tag{2.2.101}$$

Pelo Lema 1.1.8 e pelas estimativas nos Lemas (2.2.1) e (2.2.2) conclui-se que

$$\sup_{(x,y)\in\Omega}u^2(x,y,t)\leq\|u\|_{H^1(\Omega)}^2(t)+\|u_{xy}\|_{L^2(\Omega)}^2(t)\leq C(L,I_0)e^{-\theta t},\quad t>0.$$

Note que a equação (2.2.3) e as estimativas (2.2.38), (2.2.40) fornecem o decaimento de $\Delta u_x$ :

$$\begin{aligned}\|\Delta u_x\|^2(t) &\leq 2\|u_t+u_x\|^2(t)+2\|u^2u_x\|^2(t)\\ &\leq 2\|u_t+u_x\|^2(t)+2\left(\sup_{(x,y)\in\Omega}u^2(x,y,t)\right)^2\|u_x\|^2(t)\\ &\leq 2\|u_t+u_x\|^2(t)+2C^2e^{-2\theta t}\|u_x\|^2(t)\leq C(L,I_0)e^{-\theta t},\quad t>0.\end{aligned} \tag{2.2.102}$$

Na sequência, faremos a estimativa para as duas últimas normas em (2.2.101).

$$\begin{aligned}\|u^2\nabla u_x\|^2(t) &= \int_\Omega u^4\left(\nabla u_x\right)^2\,d\Omega\leq\left(\sup_{(x,y)\in\Omega}u^2(x,y,t)\right)^2\|\nabla u_x\|^2(t)\\ &\leq C^2e^{-2\theta t}\|\nabla u_x\|^2(t)\\ &\leq C^2e^{-2\theta t}\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)}^2(t)<+\infty,\quad t>0.\end{aligned} \tag{2.2.103}$$

E

$$
\begin{aligned}
\|uu_x\nabla u\|^2(t) &= \int_\Omega u^2u_x^2\left(\nabla u\right)^2\,d\Omega \\
&\le \left(\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y,t)\right)\|u_x\|^2_{L^4(\Omega)}(t)\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)}(t) \\
&\le C_{N4}^4Ce^{-\theta t}\|\nabla u\|^2(t)\|u_x\|_{H^1(\Omega)}(t)\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)}(t) \\
&\le C_{N4}^4Ce^{-\theta t}\|\nabla u\|^2(t)\|\nabla u\|^2_{H^1(\Omega)}(t) < +\infty, \quad t>0.
\end{aligned}
\tag{2.2.104}
$$

Assim, por (2.2.100), as fórmulas (2.2.103) e (2.2.104) implicam em

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\left(\Delta u_x\right)\|^2_{L^2_tL^2_{xy}} &\le \|\Delta u_x\|^2_{L^2_tL^2_{xy}} + 2\|\nabla\left(u_t+u_x\right)\|^2_{L^2_tL^2_{xy}} \\
&+ K(L,I_0)\|\nabla u\|^2_{L^2_tH^1_{xy}}.
\end{aligned}
\tag{2.2.105}
$$

Portanto, devido a (2.2.102) e (2.2.105) conclui-se que

$$\Delta u_x \in L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{2.2.106}$$

### 2.2.2 Unicidade da solução regular

**Teorema 2.2.2.** *A solução regular do problema* (2.2.3)-(2.2.6) *é única.*

*Demonstração.* Sejam $u, v$ duas soluções de (2.2.3)-(2.2.6), defina $w = u - v$. Então, $w$ satisfaz

$$Pw \equiv w_t + w_x + \Delta w_x + \left(u^2u_x - v^2v_x\right) = 0 \ \text{ em } Q_T; \tag{2.2.107}$$

$$w(0,y,t) = w(L,y,t) = w_x(L,y,t) = 0; \tag{2.2.108}$$

$$w(x,y,0) = 0. \tag{2.2.109}$$

Escrevemos

$$Pw \equiv w_t + w_x + \Delta w_x + w(u+v)u_x + w_xv^2 = 0 \ \text{ in } Q_T \tag{2.2.110}$$

e calculamos o produto interno

$$2\left((1+x)w, Pw\right) = 0$$

na forma

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(1+x,w^2\right)(t) + \|\nabla w\|^2(t) + 2\|w_x\|^2(t) + \int_{\mathbb{R}} w_x^2(0,y,t)\,dy \\
&+2\left((1+x)w^2,(u+v)u_x\right)(t) + 2\left((1+x)v^2, ww_x\right)(t) = \|w\|^2(t).
\end{aligned}
\tag{2.2.111}
$$

Usando as desigualdades de Hölder e de Nirenberg (fórmula (1.1.9) e (1.1.11)), os termos não lineares da igualdade (2.2.111) tornam-se

$$
\begin{aligned}
2\left((1+x)w^2,(u+v)u_x\right)(t) &= 2\int_\Omega (1+x)w^2(u+v)u_x\,d\Omega \\
&\le 2(1+L)\|w\|^2_{L^4(\Omega)}(t)\|u+v\|_{L^4(\Omega)}(t)\|u_x\|_{L^4(\Omega)}(t) \\
&\le 2^{\frac{7}{4}}(1+L)C_{N4}\|\nabla w\|(t)\|w\|(t) \\
&\quad\times\|\nabla(u+v)\|^{\frac{1}{2}}(t)\|(u+v)\|^{\frac{1}{2}}(t)\|u_x\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}(t)\|u_x\|^{\frac{1}{2}}(t)
\end{aligned}
\tag{2.2.112}
$$

e

$$
\begin{aligned}
2\left((1+x)v^2, ww_x\right)(t) &= \int_\Omega (1+x)v^2(w^2)_x \, d\Omega = -\int_\Omega w^2[v^2 + 2(1+x)vv_x] \, d\Omega \\
&= -\left(w^2, v^2 + 2(1+x)vv_x\right)(t) \\
&\leq \|w\|^2_{L^4(\Omega)} \|v^2 + 2(1+x)vv_x\|(t) \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|(t)\|w\|(t)\|v^2 + 2(1+x)vv_x\|(t).
\end{aligned}
\tag{2.2.113}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\|v^2 + 2(1+x)vv_x\|(t) &\leq \|v\|^2_{L^4(\Omega)}(t) + 2(1+L)\|vv_x\|(t) \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|(t)\|v\|(t) + 2(1+L)\|v\|_{L^4(\Omega)}(t)\|v_x\|_{L^4(\Omega)}(t) \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|(t)\|v\|(t) + C\|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}(t)\|v\|^{\frac{1}{2}}(t)\|v_x\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}(t)\|v_x\|^{\frac{1}{2}}(t).
\end{aligned}
\tag{2.2.114}
$$

Inserindo (2.2.114) em (2.2.113), temos que

$$
\begin{aligned}
2\left((1+x)v^2, ww_x\right)(t) \leq\ & \|\nabla w\|(t)\|w\|(t)\Big(2\|\nabla v\|(t)\|v\|(t) \\
& + 2^{\frac{7}{4}}(1+L)C_{N4}\|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}(t)\|v\|^{\frac{1}{2}}(t)\|v_x\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}\|v_x\|^{\frac{1}{2}}(t)\Big)
\end{aligned}
\tag{2.2.115}
$$

Somando (2.2.115) com (2.2.112) e utilizando a desigualdade de Young, obtemos

$$
2\left((1+x)w^2, (u+v)u_x\right)(t) + 2\left((1+x)v^2, ww_x\right)(t) \leq \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2(t) + f(t)\|w\|^2(t),
\tag{2.2.116}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
f(t) =\ & \frac{1}{2}\Big[2^{\frac{7}{4}}(1+L)C_{N4}\|\nabla(u+v)\|^{\frac{1}{2}}(t)\|(u+v)\|^{\frac{1}{2}}(t)\|u_x\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}(t)\|u_x\|^{\frac{1}{2}}(t) \\
+\ & 2\|\nabla v\|(t)\|v\|(t) + 2^{\frac{7}{4}}(1+L)C_{N4}\|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}(t)\|v\|^{\frac{1}{2}}(t)\|v_x\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}(t)\|v_x\|^{\frac{1}{2}}(t)\Big]^2.
\end{aligned}
\tag{2.2.117}
$$

Note que $f \in L^\infty(0,\infty)$. Visto (2.2.116), a igualdade (2.2.111) se torna

$$
\frac{d}{dt}\left(1+x, w^2\right)(t) \leq (1+f(t))\|w\|^2(t).
\tag{2.2.118}
$$

Pela forma diferencial do Lema de Grönwall com $\phi \equiv 1+f$ e $\psi \equiv 0$, observando que $w(0)=0$, e uma vez que $x \in (0,L)$, conclui-se que

$$
\|w\|^2(t) \leq \left(1+x, w^2\right)(t) \equiv 0.
\tag{2.2.119}
$$

A demonstração está completa. □

Capítulo 3

# Equação generalizada de Zakharov-Kuznetsov em um retângulo limitado

Abordaremos neste capítulo o Problema de Valor Inicial e de Contorno (PVIC) da equação generalizada de Zakharov-Kuznetsov sobre um retângulo limitado, de agora adiante usaremos $k \in \mathbb{N}$, como um número natural maior ou igual a 2.

Sejam $L, B$ e $T$ números reais positivos, e defina os conjuntos

$$\Omega = (0, L) \times (-B, B) \text{ e } Q_T = \Omega \times (0, T)$$

Sobre $Q_T$ considere o seguinte PVIC para a gZK

$$u_t + u_x + u^k u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0, \quad \text{em } Q_T; \tag{3.0.1}$$

$$u(x, -B, t) = u(x, B, t) = 0, \quad x \in (0, L), \ t > 0; \tag{3.0.2}$$

$$u(0, y, t) = u(L, y, t) = u_x(L, y, t) = 0, \quad y \in (-B, B), \ t > 0; \tag{3.0.3}$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{3.0.4}$$

onde $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

## 3.1 Resultados utilizados da teoria de semigrupos

Esta seção é destinada à apresentação da teoria de semigrupos, a qual será fundamental na nossa abordagem para a boa colocação e também no estudo do decaimento exponencial de soluções da gZK.

A teoria de semigrupos é motivada pelo estudo de problemas da forma

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

onde $u_0 \in X$, e $X$ é um espaço de Banach, $A$ é um operador linear definido em $\mathcal{D}(A) \subset X$ e $\mathcal{D}(A)$ é um espaço vetorial denso em $X$ (o que veremos mais além). A teoria irá definir semigrupos e algumas propriedades básicas que nos darão ferramentas para investigar a boa colocação e a estabilização das soluções do problema (3.1.1). Contudo, estabelecendo condições sobre o operador $A$ para obter a existência e unicidade de solução, estaremos nos próximos capítulos verificando-as para a gZK.

Vamos assumir informalmente que $u : [0, \infty) \to X$ seja a solução única de (3.1.1) para cada dado inicial $u_0 \in X$. Escreveremos $u(t) := S(t)u_0$ para ressaltar como $u(t)$ depende do dado inicial $u_0 \in X$. Para cada momento $t \geq 0$, podemos enxergar $S(t)$ como uma função de $X$ em $X$.

**Definição 3.1.1.** *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ uma família de operadores lineares limitados de $X$ em $X$. Diremos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um* **semigrupo** *se para cada $t, s \geq 0$, as seguintes condições estão satisfeitas:*

1. *$S(0)u_0 = u_0$ , $\forall u_0 \in X$;*
2. *$S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 = S(s)S(t)u_0 \quad \forall t, s \geq 0,$ , $\forall u_0 \in X$;*

   *Ainda diremos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe $C_0$ se satisfaz*
3. *Fixado $u_0 \in X$, a função $S(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to X$ definida por $t \mapsto S(t)u_0$ é contínua.*

**Definição 3.1.2.** *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo. Se $\forall t \geq 0$ tem-se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq 1$, diremos que é um* **semigrupo de contração**.

A partir de agora, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ representará um semigrupo de contrações no espaço de Banach $X$.

**Definição 3.1.3.** *Dado $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, vamos definir o conjunto*

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ u_0 \in X \ \text{tal que} \ \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)u_0 - u_0}{t} \ \text{existe em} \ X \right\},$$

*como o domínio do operador $A$, que é dado por*

$$Au := \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)u_0 - u_0}{t}, \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

*Sendo assim $A : \mathcal{D}(A) \to X$ será dito o* **gerador** *(infinitesimal) do semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $\mathcal{D}(A)$, o* **domínio** *de $A$.*

**Teorema 3.1.1** (Propriedades diferenciais de semigrupos)**.** *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $C_0$, e $u \in \mathcal{D}(A)$ como na definição (3.1.3). Então*

*(i) $S(t)u \in \mathcal{D}(A)$ e $AS(t)u = S(t)Au$ para todo $t \geq 0$;*

*(ii) A função*

$$\begin{array}{rcl} S(t)u : [0, \infty] & \to & X \\ t & \mapsto & S(t)u \end{array}$$

*é diferenciável e $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$ para todo $t > 0$;*

*(iii)* $\int_0^t S(s)uds \in \mathcal{D}(A)$ *e* $S(t)u - u = A\int_0^t S(s)uds.$

Para a demonstração ver [21] pg. 04, Teorema 2.4.

**Teorema 3.1.2** (Propriedades de geradores)**.** *Seja $\mathcal{D}(A)$ como na definição (3.1.3), Se $A$ é o gerador de um semigrupo de classe $C_0$. Então*

*(i)* $\mathcal{D}(A)$ *é denso em* $X$*;*

*(ii)* $A$ *é um operador fechado. Isto é, se* $u_k \to u$ *em* $X$ *e* $Au_k \to v$ *então* $u \in D(A)$ *e* $v = Au$.

Para a demonstração ver [21] pg. 05 , Corolário 2.5.

**Definição 3.1.4.** *Chamaremos de* **conjunto resolvente** $\rho(A)$*, de um operador $A$ dado, o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o operador $(\lambda I - A) : D(A) \to X$ é inversível. Quando $\lambda \in \rho(A)$, é possível definir o* **operador resolvente** $R_\lambda : X \to D(A)$ *como sendo $R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1}$. Tal operador é linear, limitado, fechado e se $u \in \mathcal{D}(A)$, temos $AR_\lambda u = R_\lambda Au$*

Agora apresentaremos os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips, as demonstrações estão em [21]. Porém, nosso objetivo principal se concentra no Corolário 3.1.1 do segundo teorema, que para a equação gZK com as nossas condições, se encaixará com simplicidade.

**Teorema 3.1.3** (Hille-Yosida)**.** *Seja $A : \mathcal{D}(A) \to X$ um operador linear(não limitado). Então $A$ é o gerador infinitesimal do semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe $C_0$, se e somente se*

*(i)* $A$ *é fechado e* $\mathcal{D}(A)$ *é denso em* $X$*;*

*(ii) O conjunto resolvente* $\rho(A)$ *de* $A$ *contém* $\mathbb{R}^+$ *e para todo* $\lambda > 0$

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{3.1.2}$$

Para a demonstração ver [21] pg. 08, Teorema 3.1.

**Teorema 3.1.4.** *Seja $A : \mathcal{D}(A) \to X$ um operador linear, então $A$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe $C_0$, se e somente se*

*(i)* $A$ *é fechado e* $\mathcal{D}(A)$ *é denso em* $X$*;*

*(ii) Existem* $M, \omega \in \mathbb{R}$ *tais que para todo* $\lambda > \omega$*, tenhamos* $\lambda \in \rho(A)$ *e ainda*

$$\|R_\lambda^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.1.3}$$

Para a demonstração ver [21] pg. 20, Teorema 5.3.

Seja $X$ um espaço de Banach e seja $X^*$ o seu dual. Denotamos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x^*, x\rangle$ ou $\langle x, x^*\rangle$. Para todo $x \in X$ definimos o conjunto dualidade $F(x) \subset X^*$ por

$$F(x) \doteq \{x^*; x^* \in X^* \text{ e } \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach segue que $F(x) \neq \varnothing$ para todo $x \in X$.

**Definição 3.1.5.** *O operador $A$ será dito* **dissipativo***, se para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, existe $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

**Teorema 3.1.5** (Lumer-Phillips)**.** *Seja $A$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em $X$.*

*(i) Se $A$ é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $R(\lambda_0 I - A)$, é igual a $X$. Então $A$ é o gerador de um semigrupo de contrações em X;*

*(ii) Se $A$ é o gerador de um semigrupo de contrações em X, então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e $A$ é dissipativo. E ainda teremos que para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e cada $x^* \in F(x)$, $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Para a demonstração ver [21] pg. 14, Teorema 4.2.

**Corolário 3.1.1.** *Sejam $X$ um espaço de Banach, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear onde $\mathcal{D}(A)$ é denso em $X$. Se $A$ e $A^*$ são dissipativos, então $A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe $C_0$ em X.*

Para a demonstração ver [21] pg. 15, Corolário 4.4.

Vamos observar o problema apresentado em (3.1.1). Agora já consideramos que $A$ gera algum semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe $C_0$. Pelas propriedades diferenciais do gerador, temos que $Au(t) = \frac{d}{dt}S(t)u$, ou seja, substituindo na equação do sistema acima, temos $u(t) = S(t)\bar{u}$. Como $u(0) = u_0 = S(0)\bar{u} = \bar{u}$, a função

$$u(t) = S(t)u_0$$

representa a solução do problema. Agora devemos observar em que espaço a solução $u = S(t)u_0$ se encontra. Veremos que a solução existirá e será única em um espaço que dependerá da restrição admitida para o dado inicial $u_0$.

**Definição 3.1.6.**

- *Dado $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, uma solução* **clássica** *de (3.1.1) é uma função $u : [0, T] \to X$, tal que $u \in C([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(0, T; X)$, que satisfaz (3.1.1) em todos os pontos $t \in [0, T]$.*

- *Dada $u_0 \in X$, uma solução* **mild** *(fraca ou generalizada) de (3.1.1) é uma função $u \in C([0, T], X)$ definida por $S(t)u_0$.*

Agora, considere o sistema associado a uma equação não homogênea

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Sendo $A$ o gerador do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $u$ uma solução de (3.1.4), definindo $g(s) = S(t-s)u(s)$, com $s \in (0,t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}g(s) &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s) \\ &= -S(t-s)u(s) + S(t-s)Au(s) + S(t-s)f(s). \\ &= S(t-s)f(s) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Se $f \in L^1(0,T;X)$, então $S(t-s)f(s)$ é integrável e integrando de 0 a $t$ a igualdade acima obtemos a fórmula

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds. \tag{3.1.6}$$

**Definição 3.1.7.** • *Agora, se $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, diremos que uma solução clássica de (3.1.4) é uma função $u : [0,T) \to X$, onde $u \in C([0,T);\mathcal{D}(A)) \cap C^1(0,T;X)$, satisfazendo (3.1.4).*

- *Sabendo que $u_0 \in X$, diremos que $u$ é uma solução mild de (3.1.4) quando $u \in C([0,T],X)$ é definida pela fórmula* (3.1.6) *acima.*

## 3.2 Resultado Local para a Equação Generalizada de Zakharov-Kuznetsov

Considere o seguinte Problema de Cauchy na forma abstrata:

$$\begin{cases} u_t + Au = f, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

onde $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ está definido como $A \equiv \partial_x + \Delta\partial_x$ com domínio

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in L^2(\Omega)\,;\, \Delta u_x + u_x \in L^2(\Omega)\,;\; u|_{\partial\Omega} = 0 \;\text{ e }\; u_x(L,y,t) = 0,\; t \in (0,T)\}, \tag{3.2.2}$$

com a sua norma natural $\|u\|_{\mathcal{D}(A)}(t) = \Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}(t) + \|\Delta u_x + u_x\|^2_{L^2(\Omega)}(t)\Big)^{1/2}$ para todo $t \in (0,T)$.

**Proposição 3.2.1.** *Sejam $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ com $f_t \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$. Então, o problema* (3.2.1) *possui uma única solução $u(t)$ tal que*

$$u \in C([0,T]; \mathcal{D}(A)), \ u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \quad T > 0. \tag{3.2.3}$$

*Mais ainda, se $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$, então* (3.2.1) *tem uma única solução mild $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\, ds \tag{3.2.4}$$

*onde $S(t)$ é o semigrupo de contrações gerado por $A$.*

**Corolário 3.2.1.** *Sobre as hipóteses da Proposição 3.2.1, a solução $u$ em (3.2.3) satisfaz*

$$u \in L^\infty\left(0,T; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right), \tag{3.2.5}$$

*Demonstração.* Para demonstração ver [27] pg. 13, Teorema 2.3 e Corolário 2.1. □

E ainda mais, pode-se obter estimativas para solução forte (3.2.3) (ver [12] pg. 488, Teorema 1.19, por exemplo):

$$\|u_t\|(t) \le \|Au_0\| + \|f\|(0) + \|f_t\|_{L^1_t L^2_{xy}}, \tag{3.2.6}$$

junto com

$$\|f\|(t) \le \|f\|(0) + \|f_t\|_{L^1_t L^2_{xy}}, \tag{3.2.7}$$

e também

$$\begin{aligned} \|Au\|(t) &\le \|u_t\|(t) + \|f\|(t) \\ &\le \|Au_0\| + 2\|f\|(0) + 2\|f_t\|_{L^1_t L^2_{xy}}. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Como $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ continuamente (ver [27] pg. 9, Proposição 2.2), nós temos a estimativa

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)}(t) \le C\|u\|_{\mathcal{D}(A)}(t) \le C\big(\|u\|_{L^\infty_t L^2_{xy}} + \|Au_0\| + 2\|f\|(0) + 2\|f_t\|_{L^1_t L^2_{xy}}\big) \tag{3.2.9}$$

onde $C$ depende somente de $\Omega$. Em seguida, definimos

$$Y_T = \{f \in L^1\big(0,T; L^2(\Omega)\big) \text{ tal que } f_t \in L^1\big(0,T; L^2(\Omega)\big)\}$$

com a norma

$$\|f\|_{Y_T} = \|f\|_{L^1_t L^2_{xy}} + \|f_t\|_{L^1_t L^2_{xy}}.$$

**Observação 3.2.1.** *Se $f \in Y_T$, então $f \in W^{1,1}(0,T; L^2(\Omega))$ e pelo Teorema do Cálculo em um espaço abstrato (Teorema 1.1.12 ) temos que $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.*

Definimos agora o conjunto:

$$Y_T^0 = \left\{ f \in Y_T; f(x,y,0) = \frac{1}{k+1}\big[u_0^{k+1}(x,y)\big]_x, \ \forall (x,y) \in \Omega \right\}. \tag{3.2.10}$$

Considere o espaço de Banach

$$X_T = \left\{ u \in L_t^\infty H_{xy}^1 \text{ tal que } u_t, \nabla u_y \in L_t^\infty L_{xy}^2 \quad \text{e} \quad u_{xx}, \nabla u_t \in L_t^2 L_{xy}^2 \right\} \tag{3.2.11}$$

com a norma

$$\|u\|_{X_T} = \|u\|_{L_t^\infty H_{xy}^1} + \|\nabla u_y\|_{L_t^\infty L_{xy}^2} + \|u_{xx}\|_{L_t^2 L_{xy}^2} + \|u_t\|_{L_t^\infty L_{xy}^2} + \|\nabla u_t\|_{L_t^2 L_{xy}^2} \tag{3.2.12}$$

e defina o conjunto fechado

$$X_T^0 = \{u \in X_T : \ u(x,y,0) = u_0(x,y), \ \forall (x,y) \in \Omega\}. \tag{3.2.13}$$

**Teorema 3.2.1.** *Seja $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Então, existe $T_* > 0$ tal que PVIC (3.0.1)-(3.0.4) possui uma única solução $u \in X_{T_*}^0$, com estimativa*

$$\|u\|_{X_{T_*}} \leq 2\left( (M+\kappa)\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)} + 2\kappa C C_{4k}^k C_{N4} \|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}^{k+1} \right),$$

*onde as constantes $M, \kappa$ dadas em* (3.2.27), (3.2.37)*,$C_{4k}, C_{N4}$ vem da desigualdade de Nirenberg (fórmula*(1.1.13) *e* (1.1.9)*), e $C$ vem da imersão $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, essas constantes dependem somente de $\Omega$. E podemos majorar $T_*$ por*

$$T_*^{\frac{1}{2}} 2^k C(T_*, \Omega) K(T_*) R^k < 1,$$

*onde $C(T_*, \Omega), K(T_*)$ e $R$ estão definidos em* (3.2.54)*,* (3.2.37) *e* (3.2.55) *respectivamente.*

A demonstração do teorema consiste em Lemas 3.2.1–3.2.5 abaixo. Primeiro, consideramos $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $f \in Y_T$ para todo $T > 0$. A Proposição 3.2.1 atribui uma solução para (3.2.1) tal que $u \in C([0,T]; \mathcal{D}(A))$, isto é, a aplicação $\mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $u \longmapsto \|u\|_{\mathcal{D}(A)}^2(t) = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2(t) + \|\Delta u_x + u_x\|_{L^2(\Omega)}^2(t)$ é contínua. Como $u_0 \in L^2(\Omega)$ e por densidade de $\mathcal{D}(A)$ em $L^2(\Omega)$, conclui-se que a função $L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $u \longmapsto \|u\|^2(t)$ também é. Sendo assim, duas funções continuas asseguram que a transformação $u \longmapsto \|\Delta u_x + u_x\|_{L^2(\Omega)}^2(t)$ com $u \in \mathcal{D}(A)$ é contínua; em outras palavras, $\Delta u_x + u_x \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Devido a Observação 3.2.1, temos $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Portanto, (3.2.1) nos dá $u_t = f - (\Delta u_x + u_x) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, e, como consequência, $u \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$. Logo, as operações a seguir fazem sentido pelo menos em $L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$.

*Estimativa VIII.* Multiplicando (3.2.1) por $2u$, temos

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2(t) + \int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\, dy = 2\int_\Omega f u \, d\Omega.$$

*Estimativa IX.* Multiplicando (3.2.1) por $2(1+x)u$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(1+x,u^2\right)(t)+ \quad &\|\nabla u\|^2(t)+2\|u_x\|^2(t)+\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\,dy \\ &= \|u\|^2(t)+2\int_\Omega (1+x)uf\,d\Omega.\end{aligned}$$

*Estimativa X.* Vamos derivar (3.2.1) com respeito a $t$ e multiplicar por $2(1+x)u_t$. Integrando sobre $\Omega$, o resultado leia-se como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(1+x,u_t^2\right)(t) \quad &+\|\nabla u_t\|^2(t)+2\|u_{xt}\|^2(t)+\int_{-B}^{B} u_{xt}^2(0,y,t)\,dy \\ &= \|u_t\|^2(t)+2\int_\Omega (1+x)u_t f_t\,d\Omega.\end{aligned}$$

*Estimativa XI.* A multiplicação de (3.2.1) por $-2(1+x)u_{yy}$ implica em

$$\|\nabla u_y\|^2(t)+2\|u_{xy}\|^2(t)+\int_{-B}^{B} u_{xy}^2(0,y,t)\,dy = \|u_y\|^2(t)+2\left((1+x)u_{yy},u_t-f\right)(t).$$

*Estimativa XII.* Multiplicamos (3.2.1) por $x$ e calculamos a integral sobre $(0,L)$. O resultado é

$$Lu_{xx}(L,y,t)=\int_0^L \left[u+u_{yy}-xu_t+xf\right]dx-u_x(0,y,t).$$

*Estimativa XIII.* Vamos derivar (3.2.1) em relação a $x$, multiplicar por $(1+x)u_x$ e integrar o resultado sobre $\Omega$. Um simples cálculo nos leva em

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(1+x,u_x^2\right)(t)+\|\nabla u_x\|^2(t)+2\|u_{xx}\|^2(t)+\int_{-B}^{B}\left[u_{xx}^2(0,y,t)+u_{xy}^2(0,y,t)\right]dy \\ &=2\int_{-B}^{B}\left[u_xu_{xxx}(0,y,t)-u_xu_{xx}(0,y,t)+\frac{1}{2}u_x^2(0,y,t)+\frac{(1+L)}{2}u_{xx}^2(L,y,t)\right]dy \\ &+\|u_x\|^2(t)+2\int_\Omega (1+x)u_xf_x\,d\Omega.\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Por (3.2.1) nós temos

$$\begin{aligned}2\int_{-B}^{B} u_xu_{xxx}(0,y,t)dy &= 2\int_{-B}^{B} u_x[f-u_t-u_x-u_{xyy}](0,y,t)dy \\ &= 2\int_{-B}^{B}[u_xf-u_x^2](0,y,t)dy+2\int_{-B}^{B}u_{xy}^2(0,y,t)dy.\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Substituindo (3.2.15) em (3.2.14) obtêm-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(1+x,u_x^2\right)(t)+\|\nabla u_x\|^2(t)+2\|u_{xx}\|^2(t)+\int_{-B}^{B}\left[u_{xx}^2(0,y,t)+u_x^2(0,y,t)\right]dy\\
&=2\int_{-B}^{B}\left[u_xf(0,y,t)-u_xu_{xx}(0,y,t)+\frac{1}{2}u_{xy}^2(0,y,t)+\frac{(1+L)}{2}u_{xx}^2(L,y,t)\right]dy\\
&+\|u_x\|^2(t)+2\int_{-B}^{B}\left[(1+x)u_xf(x,\cdot)\Big|_0^L-\int_0^L f\left[u_x+(1+x)u_{xx}\right]dx\right]dy\\
&=\|u_x\|^2(t)+\int_{-B}^{B}\left[u_{xy}^2(0,y,t)+(1+L)u_{xx}^2(L,y,t)-2u_xu_{xx}(0,y,t)\right]dy\\
&-2\int_{\Omega}f\left[u_x+(1+x)u_{xx}\right]d\Omega.
\end{aligned}
$$

Vamos estudar os seguintes casos separadamente.

### 3.2.1 Equação ZK linear

**Lema 3.2.1.** *Sejam $L$ e $B$ números reais positivos tais que* $\dfrac{\pi^2}{1+L}\left(\dfrac{2}{L^2}+\dfrac{1}{4B^2}\right)-1>0$, *e $u_0\in\mathcal{D}(A)$. Então, existe uma única solução global regular para problema linear* (3.2.1) *com $f\equiv 0$; mais precisamente, $u(t)=S(t)u_0\in X_T^0$. Mais ainda, existe uma constante $M>0$ dependendo somente de $L$ e dada por (3.2.27) tal que*

$$
\|S(t)u_0\|_{X_T}\leq M\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}. \tag{3.2.16}
$$

*Demonstração.* Iremos usar as Estimativas VIII–XIII com $f\equiv 0$ da seguinte forma.

*Estimativa XIV.* Somamos e aplicamos a desigualdade de Steklov (fórmulas (1.1.4) e (1.1.5)) nas Estimativas IX e X:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(1+x,u^2+u_t^2\right)(t) &+ \frac{\pi^2}{L^2(1+L)}\left(1+x,u^2+u_t^2\right)(t)+\int_{-B}^{B}\left[u_x^2+u_{xt}^2\right](0,y,t)\,dy\\
&+\left[\frac{\pi^2}{1+L}\left(\frac{2}{L^2}+\frac{1}{4B^2}\right)-1\right]\left(1+x,u^2+u_t^2\right)(t)\leq 0.
\end{aligned}
$$

Devido a condição imposta sobre $L$ e $B$ no enunciado do Lema 3.2.1, temos que o termo entre colchetes é positivo, e a forma diferencial do Lema de Grönwall nos dá

$$
\left(1+x,u^2+u_t^2\right)(t)\leq\left(1+x,u^2+u_t^2\right)(0)e^{-\theta t}
$$

com

$$
\theta=\frac{\pi^2}{L^2(1+L)}. \tag{3.2.17}
$$

Logo, sendo $u_t(x,y,0)=Au_0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2(t)+\|u_t\|^2(t) &\leq (1+L)\left(\|u_0\|^2+\|Au_0\|^2\right)e^{-\theta t}\\
&= (1+L)\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}e^{-\theta t}.
\end{aligned} \tag{3.2.18}
$$

Somando as Estimativas IX e X, integrando sobre $(0,T)$ e usando (3.2.18) concluímos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[\|\nabla u\|^2(t) + \|\nabla u_t\|^2(t) + \int_{-B}^{B} \left[u_x^2 + u_{xt}^2\right](0,y,t)\,dy\right] dt \\
&\le \left(1+x, u^2+u_t^2\right)(0) + (1+L)\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} \int_0^T e^{-\theta t}\,dt \\
&\le (1+L)\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} + \frac{(1+L)}{\theta}\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}\left[1-e^{-\theta T}\right] \\
&\le (1+L)\left[1+\frac{1}{\theta}\right]\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}.
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Reescrevendo a Estimativa IX, a desigualdade (3.2.18) nos dá

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2(t) + 2\|u_x\|^2(t) \; &+ \; \int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\,dy = \|u\|^2(t) - 2\left((1+x)u, u_t\right)(t) \\
&\le \; 2\left(1+x,u^2\right)(t) + \left(1+x,u_t^2\right)(t) \\
&\le \; 2(1+L)\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} e^{-\theta t}.
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

*Estimativa XV*. Da Estimativa XI, por (3.2.18) e por (3.2.20) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\nabla u_y\|^2(t) + 2\|u_{xy}\|^2(t) + \int_{-B}^{B} u_{xy}^2(0,y,t)\,dy \;&\le\; \|u_y\|^2(t) + 2(1+L)\left(1+x,u_t^2\right)(t) \\
&\le\; 4(1+L)^2\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} e^{-\theta t}.
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

*Estimativa XVI*. Deduzimos da Estimativa XII que

$$\begin{aligned}
&L^2 u_{xx}^2(L,y,t) \le 2\|u + u_{yy} - xu_t\|^2_{L^1(0,L)}(y,t) + 2u_x^2(0,y,t) \\
&\le 2L\|u + u_{yy} - xu_t\|^2_{L^2(0,L)}(y,t) + 2u_x^2(0,y,t) \\
&\le 2L\Big(\|u\|_{L^2(0,L)}(y,t) + \|u_{yy}\|_{L^2(0,L)}(y,t) + \|xu_t\|_{L^2(0,L)}(y,t)\Big)^2 + 2u_x^2(0,y,t) \\
&\le 8L\Big(\|u\|^2_{L^2(0,L)}(y,t) + \|u_{yy}\|^2_{L^2(0,L)}(y,t) + L^2\|u_t\|^2_{L^2(0,L)}(y,t)\Big) + 2u_x^2(0,y,t)
\end{aligned}$$

Logo, por (3.2.18), (3.2.19) e (3.2.21) temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_{-B}^{B} u_{xx}^2(L,y,t)\,dydt \;&\le\; \frac{8}{L}\int_0^T \Big(\|u\|^2(t) + \|u_{yy}\|^2(t) + L\|u_t\|^2(t)\Big)\,dt \\
&+\; \frac{2}{L^2}\int_0^T\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\,dydt \\
&\le\; \left(\frac{40(1+L)^2}{L}\int_0^T e^{-\theta t}\,dt + \frac{2(1+L)}{L^2}\left[1+\frac{1}{\theta}\right]\right)\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} \\
&\le\; \left(\frac{40(1+L)^2}{L\theta} + \frac{2(1+L)}{L^2}\left[1+\frac{1}{\theta}\right]\right)\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}.
\end{aligned}$$

*Estimativa XVII.* Pela Estimativa XIII com $f \equiv 0$, computamos

$$\begin{aligned}
&(1+x, u_x^2)(T) + \int_0^T \left[ \|\nabla u_x\|^2(t) + 2\|u_{xx}\|^2(t) + \frac{1}{2}\int_{-B}^{B} u_{xx}^2(0,y,t)\,dy \right] dt \\
&\leq \int_0^T \left[ \|u_x\|^2(t) + \int_{-B}^{B} \left[u_x^2(0,y,t) + u_{xy}^2(0,y,t) + (1+L)u_{xx}^2(L,y,t)\right] dy \right] dt \\
&+ \left(1+x, u_x^2\right)(0).
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Portanto, por (3.2.19), (3.2.21) e com uso da Estimativa XVI podemos escrever (3.2.22) como

$$\int_0^T \left[ \|\nabla u_x\|^2(t) + \frac{1}{2}\int_{-B}^{B} u_{xx}^2(0,y,t)\,dy \right] dt \leq M_1(L,\theta)\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} + \left(1+x, u_{0x}^2\right), \tag{3.2.23}$$

onde

$$M_1(L,\theta) = (1+L)\left[1 + \frac{1}{\theta} + \frac{4(1+L)}{\theta} + \left( \frac{40(1+L)^2}{L\theta} + \frac{2(1+L)}{L^2}\left[1+\frac{1}{\theta}\right]\right)\right]. \tag{3.2.24}$$

Notamos que $u, u_t \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, donde pela Observação 3.2.1 segue que $u \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$, e por (3.2.20) estamos em condições de estimar o último termo em (3.2.23), isto é,

$$\left(1+x, u_{0x}^2\right) \leq (1+L)^2\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}.$$

Consequentemente,

$$\int_0^T \|\nabla u_x\|^2(t)\,dt \leq \left(M_1(L,\theta) + (1+L)^2\right)\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}. \tag{3.2.25}$$

Logo, por (3.2.18), (3.2.19), (3.2.20), (3.2.21) e (3.2.25) conclui-se que

$$\|S(t)u_0\|_{X_T} \leq M(L,\theta)\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}, \tag{3.2.26}$$

onde $\theta$ está definida em (3.2.17) e

$$M(L,\theta) = \sqrt{1+L} + \sqrt{(1+L)\left(1+\tfrac{1}{\theta}\right)} + \sqrt{2(1+L)} + \sqrt{8}(1+L) + \sqrt{M_1 + (1+L)^2}. \tag{3.2.27}$$

A demonstração do Lema 3.2.1 está completa. □

### 3.2.2 Parte não linear

Lembramos que o espaço $Y_T^0$ onde trabalhamos a não linearidade está definido em (3.2.10) e o espaço $X_T$ onde buscamos a solução para gZK é definido em (3.2.11).

**Lema 3.2.2.** *A aplicação* $Y_T^0 \longrightarrow X_T;\quad f \mapsto u = \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds$ *está bem definida e é contínua, como segue*

$$\|u\|_{X_T} \leq K\|f\|_{Y_T} + \kappa\big(\|f\|(0) + \|Au_0\|\big)$$

*onde* $K, \kappa$ *são funções crescentes de* $T$*, dadas em* (3.2.37).

*Demonstração.* Para a demonstração, note que aplicação acima leva $f$ para solução do problema linear não homogêneo com dado inicial nulo. Então, as estimativas (3.2.6) e (3.2.9) nos dão

$$\|u\|_{L_t^\infty H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}+\|u_t\|_{L_T^\infty L_{xy}^2} \leq (1+2C)\big(\|f_t\|_{L_t^1 L_{xy}^2}+\|f\|(0)\big)+C\|u\|_{L_t^\infty L_{xy}^2}+(1+C)\|Au_0\|, \tag{3.2.28}$$

onde $C$ depende somente de $\Omega$. Sendo assim, resta estimar os termos $\|u\|_{L_t^\infty L_{xy}^2}$ e $\|\nabla u_t\|_{L_t^2 L_{xy}^2}$ em (3.2.12).

**Observação 3.2.2.** *Observe que o uso das Estimativas VIII–XIII com $u_0 \equiv 0$ e a desigualdade de Gronwall nos dão resultados semelhantes.*

Fixamos $t \in [0,T]$ e seja $t_n \to t$. Para cada $n$, defina

$$\psi_n(s) = \begin{cases} S(t_n - s)f(\cdot, s), & \text{se } s \leq t_n, \\ 0, & \text{se } s > t_n. \end{cases}$$

É claro que $\psi_n(s) \to \psi(s)$ quando $n \to \infty$, onde

$$\psi(s) = \begin{cases} S(t - s)f(\cdot, s), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$$

e vale a estimativa

$$\|\psi\|(s) \leq \|f\|(s) \in L^2(0,T).$$

Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue temos

$$\int_0^{t_n} S(t_n - s)f(\cdot, s)\, ds = \int_0^T \psi_n(s)\, ds \to \int_0^T \psi(s)\, ds = \int_0^t S(t-s)f(\cdot, s)\, ds.$$

Logo $u(\cdot, t) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, e para cada $t \in [0,T]$ vale

$$\|u\|(t) \leq \int_0^t \|f\|(t)\, dt \leq \|f\|_{L_t^1 L_{xy}^2}. \tag{3.2.29}$$

Inserindo (3.2.29) em (3.2.28), obtemos

$$\|u\|_{L_t^\infty H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}+\|u_t\|_{L_T^\infty L_{xy}^2} \leq (1+2C)\big(\|f_t\|_{L_t^1 L_{xy}^2}+\|f\|(0)\big)+C\|f\|_{L_t^1 L_{xy}^2}+(1+C)\|Au_0\|. \tag{3.2.30}$$

Integrando a Estimativa X sobre $(0,T)$ junto com (3.2.30). A desigualdade de Hölder implica

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left[\|\nabla u_t\|^2(t) + 2\|u_{xt}\|^2(t) + \int_{-B}^B u_{xt}^2(0,y,t)\, dy\right] dt \\ &\leq \int_0^T \left[\|u_t\|^2(t) + 2(1+L)\|u_t\|(t)\|f_t\|(t)\right] dt + \left(1+x, u_t^2\right)(0) \\ &\leq T(1+2C)^2\|f\|_{Y_T}^2 + 2(1+L)(1+2C)\|f\|_{Y_T}\int_0^T \|f_t\|(t) dt + \left(1+x, u_t^2\right)(0). \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Como $f \in Y_T^0$, utilizando a (3.2.1), conclui-se que

$$u_t(x,y,0) = f(x,y,0) - Au_0. \tag{3.2.32}$$

Inserindo (3.2.32) em (3.2.31), temos

$$\int_0^T \|\nabla u_t\|^2(t)\,dt \leq K^*(L,T)\|f\|_{Y_T}^2 + 2(1+L)\big(\|f\|^2(0) + \|Au_0\|^2\big) \tag{3.2.33}$$

onde

$$K^*(L,T) = T(1+2C)^2 + 2(1+L)(1+2C) \tag{3.2.34}$$

cresce com $T$ crescendo. Agora observe que,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X_T} = & \quad \|u\|_{L_t^\infty H_{xy}^1} + \|\nabla u_y\|_{L_t^\infty L_{xy}^2} + \|u_{xx}\|_{L_t^2 L_{xy}^2} + \|u_t\|_{L_t^\infty L_{xy}^2} + \|\nabla u_t\|_{L_t^2 L_{xy}^2} \\
\leq & \quad \|u\|_{L_t^\infty H_{xy}^1} + \|\nabla u_y\|_{L_t^\infty L_{xy}^2} + T^{\frac{1}{2}}\|u_{xx}\|_{L_t^\infty L_{xy}^2} + \|u_t\|_{L_t^\infty L_{xy}^2} + \|\nabla u_t\|_{L_t^2 L_{xy}^2} \\
\leq & \quad \|u\|_{L_t^\infty L_{xy}^2} + \max\{1, T^{\frac{1}{2}}\}\|u\|_{L_t^\infty (H_0^1 \cap H^2)_{xy}} + \|u_t\|_{L_t^\infty L_{xy}^2} + \|\nabla u_t\|_{L_t^2 L_{xy}^2}
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Portanto, pelas estimavas (3.2.6),(3.2.9), (3.2.29), (3.2.30) e (3.2.33) concluímos que

$$\|u\|_{X_T} \leq K\|f\|_{Y_T} + \kappa(\Omega)\big(\|f\|(0) + \|Au_0\|\big) \tag{3.2.36}$$

onde,

$$K(T) = 2 + 3C\max\{1, T^{\frac{1}{2}}\} + \sqrt{K^*} \;\text{ e }\; \kappa(\Omega) = (1 + 2C + \sqrt{2(1+L)}. \tag{3.2.37}$$

A constante $C$ que aparece na demonstração deste resultado depende somente de $\Omega$ e vem da imersão $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, e a constante $K^*$ está definida em (3.2.34). Isso conclui a prova do Lema. $\square$

### 3.2.3 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nosso objetivo nessa parte é mostrar que o operador

$$\begin{aligned}
\Phi : X_T^0 \;&\longrightarrow\; X_T^0 \\
v \;&\longmapsto\; S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)v^k v_x(s)\,ds
\end{aligned}$$

está bem definido sobre $X_T^0$ em si mesmo (a definição de $X_T^0$ é dada em (3.2.13)), e possui um ponto fixo para algum $T > 0$, o que será feito via Teorema do ponto fixo de Banach. Os Lemas 3.2.1–3.2.2 estabelecem que $\Phi$ está bem definido. Resta mostrar que $v^k v_x \in Y_T^0$ ( $Y_T^0$ é definido em (3.2.10)) para todo $v \in X_T^0$, e tomar $T > 0$ suficientemente pequeno para que $\Phi$ seja uma contração. As estimativas da parte linear e as estimativas seguintes, irão definir $R > 0$ como o raio da bola $B_R = \{u \in X_T^0; \|u\|_{X_T} \leq R\}$ exatamente em termos de $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Depois provaremos que para $T > 0$ suficientemente pequeno, o operador $\Phi$ leva essa bola em si mesmo.

**Lema 3.2.3.** *Aplicação $\phi : X_T^0 \longrightarrow Y_T^0$ , $v \longmapsto v^k v_x$ está bem definida e contínua com estimativa*

$$\|u^k u_x - v^k v_x\|_{Y_T} \leq T^{\frac{1}{2}} C(T,\Omega)\Big(\|u\|_{X_T} + \|v\|_{X_T}\Big)^k \|u - v\|_{X_T},$$

*onde $C(T,\Omega)$ depende de $T$ e está dada por (3.2.54).*

*Demonstração.* Se $u, v \in X_T$, então o Lema 1.1.8 assegura

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} v^2(x,y,t) \leq \|v\|^2_{H^1(\Omega)}(t) + \|v_{xy}\|^2_{L^2(\Omega)}(t) \leq \|v\|^2_{X_T}, \quad \forall t > 0. \tag{3.2.38}$$

Mesma coisa ocorre com $u - v$ e $u + v$ devido a linearidade da derivada. A norma em $Y_T^0$ está dada como

$$\|u^k u_x - v^k v_x\|_{Y_T} = \|u^k u_x - v^k v_x\|_{L^1_t L^2_{xy}} + \left\|\left(u^k u_x\right)_t - \left(v^k v_x\right)_t\right\|_{L^1_t L^2_{xy}} = I + J. \tag{3.2.39}$$

Para abordagem de $I$, escrevemos

$$I \leq \left\|(u^k - v^k) u_x\right\|_{L^1_t L^2_{xy}} + \left\|v^k (u_x - v_x)\right\|_{L^1_t L^2_{xy}} = I_1 + I_2. \tag{3.2.40}$$

Por (1.1.35) e (3.2.38) estimamos a norma $I_1$ na seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^T \left(\int_\Omega |u-v|^2 \left(\sum_{i=0}^{k-1} |u|^{k-1-i}|v|^i\right)^2 |u_x|^2 \, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \|u-v\|_{X_T} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \|u\|^{k-1-i}_{X_T} \|v\|^i_{X_T}\right) \int_0^T \|u_x\|(t)\, dt \\ &\leq T\|u-v\|_{X_T} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \|u\|^{k-1-i}_{X_T} \|v\|^i_{X_T}\right) \|u_x\|_{L^\infty_t L^2_{xy}} \\ &\leq T \left(\sum_{i=0}^{k-1} \|u\|^{k-i}_{X_T} \|v\|^i_{X_T}\right) \|u-v\|_{X_T}. \end{aligned} \tag{3.2.41}$$

Para $I_2$ temos, devido a (3.2.38), que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \left(\int_\Omega v^{2k}(u_x - v_x)^2 \, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \|v\|^k_{X_T} \int_0^T \|u_x - v_x\|(t)\, dt \\ &\leq T\|v\|^k_{X_T} \|u-v\|_{X_T}. \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

Logo, por (1.1.36) como $\beta_i > 1$ $(i = 1, \dots, k)$ e por (3.2.41), (3.2.42) temos

$$\begin{aligned} I &\leq T \left(\sum_{i=0}^{k-1} \|u\|^{k-i}_{X_T} \|v\|^i_{X_T} + \|v\|^k_{X_T}\right) \|u-v\|_{X_T} = T \left(\sum_{i=0}^{k} \|u\|^{k-i}_{X_T} \|v\|^i_{X_T}\right) \|u-v\|_{X_T} \\ &\leq T \left(\sum_{i=0}^{k} \beta_i \|u\|^{k-i}_{X_T} \|v\|^i_{X_T}\right) \|u-v\|_{X_T} = T\Big(\|u\|_{X_T} + \|v\|_{X_T}\Big)^k \|u-v\|_{X_T}. \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

Falta estimar a integral $J$. Primeiro, usamos (1.1.35) para escrever

$$\begin{aligned}
\big(u^k u_x - v^k v_x\big)_t &= k\big(u^{k-1}u_t u_x - v^{k-1}v_t v_x\big) + \big(u^k u_{xt} - v^k v_{xt}\big)\\
&= ku^{k-1}u_x\big(u_t - v_t\big) + kv_t\big(u^{k-1}u_x - v^{k-1}v_x\big)\\
&+ u_{xt}\big(u^k - v^k\big) + v^k\big(u_{xt} - v_{xt}\big)\\
&= ku^{k-1}u_x\big(u_t - v_t\big) + kv_t\left[u_x\big(u^{k-1} - v^{k-1}\big) + v^{k-1}\big(u_x - v_x\big)\right]\\
&+ u_{xt}\big(u^k - v^k\big) + v^k\big(u_{xt} - v_{xt}\big)\\
&= \left[kv_t u_x \sum_{i=0}^{k-2} u^{k-2-i}v^i + u_{xt}\sum_{i=0}^{k-1} u^{k-1-i}v^i\right](u-v)\\
&+ kv_t v^{k-1}\big(u_x - v_x\big) + ku^{k-1}u_x\big(u_t - v_t\big) + v^k\big(u_{xt} - v_{xt}\big).
\end{aligned} \tag{3.2.44}$$

Em seguida, a integral $J$ pode ser estimada via desigualdade triangular através das quatro normas $J_1, \ldots, J_4$. Para a primeira temos que (3.2.38) nos dá

$$\begin{aligned}
&J_1 = \int_0^T \left\|\left(kv_t u_x \sum_{i=0}^{k-2} u^{k-2-i}v^i + u_{xt}\sum_{i=0}^{k-1} u^{k-1-i}v^i\right)(u-v)\right\|(t)\,dt\\
&\leq \left[\int_0^T \left(k\,\|v_t u_x\|\,(t)\sum_{i=0}^{k-2}\|u\|_{X_T}^{k-2-i}\|v\|_{X_T}^i + \|u_{xt}\|(t)\sum_{i=0}^{k-1}\|u\|_{X_T}^{k-1-i}\|v\|_{X_T}^i\right)dt\right]\|u-v\|_{X_T}\\
&= \big(J_{1_1} + J_{1_2}\big)\|u-v\|_{X_T}.
\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

As desigualdades de Hölder e de Nirenberg com $p = 4$ implicam

$$\begin{aligned}
J_{1_1} &\leq k\left(\sum_{i=0}^{k-2}\|u\|_{X_T}^{k-2-i}\|v\|_{X_T}^i\right)\int_0^T \|v_t\|_{L^4_{xy}}(t)\|u_x\|_{L^4_{xy}}(t)\,dt\\
&\leq 2^{\frac14}kC_{N4}\left(\sum_{i=0}^{k-2}\|u\|_{X_T}^{k-2-i}\|v\|_{X_T}^i\right)\|v_t\|^{\frac12}_{L^\infty_t L^2_{xy}}\\
&\times \int_0^T \|\nabla v_t\|^{\frac12}(t)\Big(\|u_x\|^{\frac12}_{H^1_{xy}}(t)\|u_x\|^{\frac12}_{L^\infty_t L^2_{xy}} + \|u_x\|(t)\Big)\,dt\\
&\leq T^{\frac12}\left[2^{\frac14}kC_{N4}\|v_t\|^{\frac12}_{L^\infty_t L^2_{xy}}\|\nabla v_t\|^{\frac12}_{L^2_t L^2_{xy}}\Big(\|u_x\|^{\frac12}_{L^2_t H^1_{xy}}\|u_x\|^{\frac12}_{L^\infty_t L^2_{xy}} + T^{\frac14}\|u_x\|_{L^\infty_t L^2_{xy}}\Big)\right]\\
&\times \sum_{i=0}^{k-2}\|u\|_{X_T}^{k-2-i}\|v\|_{X_T}^i\\
&\leq T^{\frac12}\max\{1, T^{\frac14}\}2^{\frac14}kC_{N4}\|v\|_{X_T}\Big(\|u\|_{X_T} + \|u\|_{X_T}\Big)\sum_{i=0}^{k-2}\|u\|_{X_T}^{k-2-i}\|v\|_{X_T}^i\\
&= T^{\frac12}\max\{1, T^{\frac14}\}2^{\frac54}kC_{N4}\sum_{i=0}^{k-2}\|u\|_{X_T}^{k-1-i}\|v\|_{X_T}^{i+1}.
\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

A desigualdade de Hölder para o segundo termo em $J_1$ implica

$$J_{1_2} \leq T^{\frac12}\|u_{xt}\|_{L^2_t L^2_{xy}}\sum_{i=0}^{k-1}\|u\|_{X_T}^{k-1-i}\|v\|_{X_T}^i \leq T^{\frac12}\sum_{i=0}^{k-1}\|u\|_{X_T}^{k-i}\|v\|_{X_T}^i. \tag{3.2.47}$$

Então, (3.2.45), (3.2.46) e (3.2.47) implicam em

$$
\begin{aligned}
J_1 &\le T^{\frac{1}{2}}\left[\max\{1,T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{5}{4}}kC_{N4}\sum_{i=0}^{k-2}\|u\|_{X_T}^{k-1-i}\|v\|_{X_T}^{i+1}+\sum_{i=0}^{k-1}\|u\|_{X_T}^{k-i}\|v\|_{X_T}^{i}\right]\|u-v\|_{X_T}\\
&= T^{\frac{1}{2}}\left[\max\{1,T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{5}{4}}kC_{N4}\sum_{i=1}^{k-1}\|u\|_{X_T}^{k-i}\|v\|_{X_T}^{i}+\sum_{i=0}^{k-1}\|u\|_{X_T}^{k-i}\|v\|_{X_T}^{i}\right]\|u-v\|_{X_T}\\
&\le T^{\frac{1}{2}}\left(\max\{1,T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{5}{4}}kC_{N4}+1\right)\left[\sum_{i=0}^{k-1}\|u\|_{X_T}^{k-i}\|v\|_{X_T}^{i}\right]\|u-v\|_{X_T}.
\end{aligned}
\tag{3.2.48}
$$

Para o segundo termo em (3.2.44) temos

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^T \left\|kv_tv^{k-1}\big(u_x-v_x\big)\right\|(t)\,dt = k\int_0^T\left(\int_\Omega v_t^2v^{2(k-1)}\big(u_x-v_x\big)^2\,d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}dt\\
&\le k\|v\|_{X_T}^{k-1}\int_0^T\|v_t\|_{L^4_{xy}}(t)\|u_x-v_x\|_{L^4_{xy}}(t)\,dt\\
&\le T^{\frac{1}{2}}\max\{1,T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{1}{4}}kC_{N4}\|v\|_{X_T}^{k-1}\|v\|_{X_T}\Big(\|u-v\|_{X_T}+\|u-v\|_{X_T}\Big)\\
&= T^{\frac{1}{2}}\Big(\max\{1,T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{5}{4}}kC_{N4}\Big)\|v\|_{X_T}^{k}\|u-v\|_{X_T}.
\end{aligned}
\tag{3.2.49}
$$

Os últimos dois termos em (3.2.44) são estimados como segue

$$
J_3 = \int_0^T\left\|ku_xu^{k-1}\big(u_t-v_t\big)\right\|(t)\,dt \le T^{\frac{1}{2}}\Big(\max\{1,T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{5}{4}}kC_{N4}\Big)\|u\|_{X_T}^{k}\|u-v\|_{X_T}
\tag{3.2.50}
$$

e

$$
J_4 = \int_0^T\left\|v^k\big(u_{xt}-v_{xt}\big)\right\|(t)\,dt \le T^{\frac{1}{2}}\|v\|_{X_T}^{k}\|u-v\|_{X_T}. \tag{3.2.51}
$$

Logo, pelas (3.2.48), (3.2.49), (3.2.50) e (3.2.51) obtemos

$$
\begin{aligned}
J &\le T^{\frac{1}{2}}\left(2\max\{1,T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{5}{4}}kC_{N4}+1\right)\left[\sum_{i=0}^{k}\|u\|_{X_T}^{k-i}\|v\|_{X_T}^{i}\right]\|u-v\|_{X_T}\\
&\le T^{\frac{1}{2}}\left(2\max\{1,T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{5}{4}}kC_{N4}+1\right)\Big(\|u\|_{X_T}+\|v\|_{X_T}\Big)^k\|u-v\|_{X_T}.
\end{aligned}
\tag{3.2.52}
$$

Voltando para (3.2.39) concluímos que

$$
\|u^ku_x-v^kv_x\|_{Y_T}\le T^{\frac{1}{2}}C(T,\Omega)\Big(\|u\|_{X_T}+\|v\|_{X_T}\Big)^k\|u-v\|_{X_T}, \tag{3.2.53}
$$

onde

$$
C(T,\Omega)=2\max\{1,T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{5}{4}}kC_{N4}+1+T^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2.54}
$$

□

**Observação 3.2.3.** *A dependência da constante $C$ por $\Omega$ vem da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg aplicada ao termo $u_x$.*

Os Lemas 3.2.1–3.2.3 asseguram que o operador $\Phi$ está bem definido para todo $T > 0$. Os próximos dois Lemas mostram que existe $R > 0$ tal que se $B_R = \{u \in X_T^0; \|u\|_{X_T} \leq R\}$, então o operador $\Phi$ age de $B_R$ em si mesmo; e determina quão pequeno deve ser $T > 0$ para garantir que $\Phi$ seja uma contração.

**Lema 3.2.4.** *Seja $T > 0$ suficientemente pequeno e defina*

$$R = 2\left((M+\kappa)\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)} + 2\kappa C C_{4k}^k C_{N4}\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}^{k+1}\right). \tag{3.2.55}$$

*Então $\Phi$ leva $B_R \subset X_T^0$ em si mesmo, onde $X_T^0$ está definido em* (3.2.13)*, $\kappa$ está definido em* (3.2.37) *e $M$ está dado em* (3.2.27)*.*

*Demonstração.* Seja $v \in B_R$. Escolha $T > 0$ tal que $T^{\frac{1}{2}} C(T,\Omega) K R^k < \dfrac{1}{2}$, onde $K, C$ estão definidos em (3.2.37) e (3.2.54) respectivamente. Pelas estimativas (3.2.26), (3.2.36) e (3.2.53) com $u = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \|\Phi(v)\|_{X_T} &\leq \|S(t)u_0\|_{X_T} + \left\|\int_0^t S(t-s) v^k v_x \, ds\right\|_{X_T} \\ &\leq M\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \kappa\big(\|u_0^k u_{0x}\| + \|Au_0\|\big) + K\|v^k v_x\|_{Y_T}. \end{aligned} \tag{3.2.56}$$

Pela imersão de $\mathcal{D}(A)$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, junto com as desigualdades de Hölder e Nirenberg, temos

$$\begin{aligned} \|u_0^k u_{0x}\|^2 &= \int_\Omega u_0^{2k} u_{0x}^2 \, d\Omega \leq \|u_0\|_{L_{xy}^{4k}}^{2k} \|u_{0x}\|_{L_{xy}^4}^2 \\ &\leq C_{4k}^{2k} C_{N4}^2 \|u_0\| \|\nabla u_0\|^{2k-1} \big(\|u_{0x}\|^{\frac{1}{2}} \|u_{0x}\|_{H_{xy}^1}^{\frac{1}{2}} + \|u_{0x}\|\big)^2 \\ &\leq 4C^2 C_{4k}^{2k} C_{N4}^2 \|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}^{2k+2}. \end{aligned} \tag{3.2.57}$$

A substituição de (3.2.57) em (3.2.56) implica

$$\begin{aligned} \|\Phi(v)\|_{X_T} &\leq \left[(M+\kappa)\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)} + 2\kappa C C_{4k}^k C_{N4}\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}^{k+1}\right] + T^{\frac{1}{2}} C(T,\Omega) K \|v\|_{X_T}^{k+1} \\ &\leq \frac{R}{2} + T^{\frac{1}{2}} C(T,\Omega) K R^k R \leq R. \end{aligned} \tag{3.2.58}$$

□

**Lema 3.2.5.** *Seja $R > 0$ satisfazendo as condições do Lema 3.2.4 e $T > 0$ suficientemente pequeno, de modo que*

$$T^{\frac{1}{2}} 2^k C(T,\Omega) K R^k < 1. \tag{3.2.59}$$

*Então o operador*

$$\Phi : B_R \longrightarrow B_R;\ v \mapsto S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s) v^k v_x(s) \, ds$$

*é uma contração.*

*Demonstração.* Tome $u, v \in B_R$. Pelos Lemas 3.2.2 e 3.2.3 temos que

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{X_T} &\le \left\|\int_0^t S(t-s)\big[u^k u_x - v^k v_x\big]\,ds\right\|_{X_T}\\ &\le K\|u^k u_x - v^k v_x\|_{Y_T}\\ &\le T^{\frac{1}{2}} C(T,\Omega) K\Big(\|u\|_{X_T}+\|v\|_{X_T}\Big)^k \|u-v\|_{X_T}\\ &\le T^{\frac{1}{2}} 2^k C(T,\Omega) K R^k \|u-v\|_{X_T}.\end{aligned} \tag{3.2.60}$$

□

Escolha $T > 0$ satisfazendo as condições do Lema 3.2.5. Então $\Phi$ é uma contração de $B_R$ em si mesmo. Portanto, o Teorema de Ponto Fixo de Banach assegura a existência de um único elemento $u \in B_R$ tal que $\Phi(u) = u$. A solução é única em todo o espaço $X_T^0$, a demonstração desse fato é dado no Teorema 3.4.2 no final deste trabalho. Isso completa a demonstração do Teorema 3.2.1.

## 3.3 Estimativas globais e o decaimento para mZK

**Teorema 3.3.1.** *Sejam $B, L, T > 0$, defina $\Omega = (0,L)\times(-B,B)$ e $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Sobre a medida de $\Omega$ adicione a hipótese de que*

$$L^2(1+L) < 2\pi^2 \quad \text{e considere} \quad 2\lambda^2 := \pi^2\left[\frac{3}{L^2}+\frac{1}{4B^2}\right]-1 > 0. \tag{3.3.1}$$

*Suponhamos que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, onde $\mathcal{D}(A)$ está definido em (3.2.2), satisfaz*

$$\|u_0\|^2 < \min\left\{\frac{\lambda^2}{\pi^2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{4B^2}\right)}, 1\right\}\ ,\ I_0^2 = \big(1+x, |u_{0x}+\Delta u_{0x}+u_0^2 u_{0x}|^2\big) < \infty, \tag{3.3.2}$$

*e*

$$\Big[C_{\|u_0\|}\|u_0\|^2\big(I_0^2+\|u_0\|^2\big)\Big]\Big[4+C_1 C_{\|u_0\|}^2\big(I_0^2+\|u_0\|^2\big)^2\Big] < \frac{2\pi^2}{L^2(1+L)}-1, \tag{3.3.3}$$

*onde as constantes $C_{\|u_0\|}$ e $C_1$ são definidas como*

$$C_{\|u_0\|} = \frac{2(1+L)^2}{1-\|u_0\|^2} \quad e \quad C_1(L) = 3^3(4!)^2(1+L)^4 > 0. \tag{3.3.4}$$

*Assuma ainda mais, $\|u_0\|^2$ e $I_0^2$ são suficientemente pequenos, na ordem de*

$$\sum_{i=1}^{12}\beta_i(\Omega)\Big[P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)\Big]^i \ln\Big(8(M+\kappa)+CP\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)^2\Big) \le \frac{\gamma}{\Theta^2},$$

*onde* $\Theta$ *está dado em* (3.3.72) , $\gamma = \frac{\lambda^2}{1+L}$, $C$ *e* $\beta_i(\Omega)'s$ *são constantes positivas que dependem somente da medida de* $\Omega$, *e* $P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)$ *é uma combinação linear de* $\|u_0\|^2$ *e* $I_0^2$ *dada em* (3.3.62).

*Então, para todo* $T > 0$ *existe uma única solução* $u \in X_T^0$ *(definido em* (3.2.13)*) do problema* (3.0.1)-(3.0.4), *para* $k = 2$*; mais precisamente*

$$u \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \ \nabla u_y \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \ u_{xx} \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$

$$u_t \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \ \nabla u_t \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

*Além disso, existem constantes* $C > 0$ *e* $\gamma > 0$ *tais que*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)}(t) + \|\nabla u_y\|^2(t) + \|u_t\|^2(t) \leq Ce^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.3.5}$$

*Mais ainda,* $\Delta u_x \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ *e os traços*

$$u_x(0, y, t), \ u_{xy}(0, y, t), \ u_{xx}(L, y, t) \in L^\infty\left(0, T; L^2(-B, B)\right),$$

$$u_{xx}(0, y, t) \in L^2\left(0, T; L^2(-B, B)\right).$$

Seja $u \in X_{T_0}$ a solução local garantida pelo Teorema 3.2.1 para $k = 2$. Iremos obter estimativas independendo de $T_0$ com intuito de estender a solução local para todos os valores de $T > 0$.

*Estimativa XVIII.* Começamos a demonstração do (3.3.5), multiplicando (3.0.1) por $u$ e integrando sobre $Q_T$, de modo análogo a estimativa (2.1.9), obtemos

$$\|u\|^2(t) \leq \|u_0\|^2. \tag{3.3.6}$$

*Estimativa XIX.* Multiplicamos (3.0.1) por $(1 + x)u$ e integramos sobre $\Omega$; o resultado é

$$\frac{d}{dt}\left(1 + x, u^2\right)(t) + \int_{-B}^{B} u_x^2(0, y, t)\, dy + \|\nabla u\|^2(t) + 2\|u_x\|^2(t) - \|u\|^2(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^4\, d\Omega. \tag{3.3.7}$$

Para a integral $I_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega u^4\, d\Omega = \dfrac{1}{2}\|u\|^4_{L^4_{xy}}(t)$, a desigualdade de Nirenberg (fórmula (1.1.11) em $L^4$) implica em

$$I_1 \leq \frac{1}{2}\big(2^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\big)^4 = \|\nabla u\|^2(t)\|u\|^2(t) \leq \|\nabla u\|^2(t)\|u_0\|^2(t). \tag{3.3.8}$$

Tome

$$I_2 = 3\|u_x\|^2(t) + \|u_y\|^2(t).$$

Para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$I_2 = (3 - \varepsilon)\|u_x\|^2(t) + (1 - \varepsilon)\|u_y\|^2(t) + \varepsilon\big(\|u_x\|^2(t) + \|u_y\|^2(t)\big).$$

O Lema 1.1.5 junto com a (3.3.7) e (3.3.8) nos dá

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,u^2\right)(t)+\left[\pi^2\left(\frac{3}{L^2}+\frac{1}{4B^2}\right)-1-\varepsilon\pi^2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{4B^2}\right)\right]\|u\|^2(t)$$
$$+\left(\varepsilon-\|u_0\|^2\right)\|\nabla u\|^2(t)\leq 0. \tag{3.3.9}$$

Visto a condição (3.3.1) sobre $\Omega$, tome $\varepsilon=\dfrac{\lambda^2}{\pi^2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{4B^2}\right)}$. O resultado para (3.3.9) fica

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,u^2\right)(t)+\lambda^2\|u\|^2(t)+\left(\varepsilon-\|u_0\|^2\right)\|\nabla u\|^2(t)\leq 0. \tag{3.3.10}$$

Pela hipótese (3.3.2) tem-se $\|u_0\|^2\leq\varepsilon$, logo

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,u^2\right)(t)+\frac{\lambda^2}{1+L}\left(1+x,u^2\right)(t)\leq 0, \tag{3.3.11}$$

e, consequentemente, pela forma diferencial do Lema de Grönwall, concluímos o decaimento em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

$$\|u\|^2(t)\leq(1+L)\|u_0\|^2e^{-\gamma_0 t}\text{ com }\gamma_0=\frac{\lambda^2}{1+L}. \tag{3.3.12}$$

*Estimativa XX.* Multiplicamos (3.0.1) por $2(1+x)u$ e integramos sobre $\Omega$; usando as desigualdades de Höder e Young para $u$ e $u_t$ obtemos

$$\|\nabla u\|^2(t)+2\|u_x\|^2(t)+\int_{-B}^{B}u_x^2(0,y,t)\,dy=\|u\|^2(t)+\frac{1}{2}\|u\|^4_{L^4_{xy}}(t)-2\int_\Omega(1+x)uu_t\,d\Omega$$
$$\leq 2(1+L)^2\big(\|u_t\|^2(t)+\|u\|^2(t)\big)+\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^2(t). \tag{3.3.13}$$

Então

$$(1-\|u_0\|^2)\|\nabla u\|^2(t)+\|u_x\|^2(t)+\int_{-B}^{B}u_x^2(0,y,t)\,dy\leq 2(1+L)^2\big(\|u_t\|^2(t)+\|u\|^2(t)\big). \tag{3.3.14}$$

Note para um uso posterior que $\nabla u$ está estimado por $u$ e $u_t$ sendo $u_0$ suficientemente pequeno em $L^2(\Omega)$:

$$\|\nabla u\|^2(t)\leq C_{\|u_0\|}\big(\|u_t\|^2(t)+\|u\|^2(t)\big) \tag{3.3.15}$$

onde $C_{\|u_0\|}$ está definida em (3.3.4).

*Estimativa XXI.* Derive a equação (3.0.1) com respeito a $t$ e multiplique o resultado por $(1+x)u_t$. Integrando sobre $\Omega$, chegamos em

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,u_t^2\right)(t)+\|\nabla u_t\|^2(t)+2\|u_{xt}\|^2(t)+\int_{-B}^{B}u_{xt}^2(0,y,t)\,dy$$
$$=\|u_t\|^2(t)-\frac{2}{3}\int_\Omega(1+x)(u^3)_{xt}u_t\,d\Omega. \tag{3.3.16}$$

Temos então

$$-\frac{2}{3}\int_{\Omega}(1+x)(u^3)_{xt}u_t\,d\Omega = \left(u^2,u_t^2\right)(t) - 2\left((1+x)uu_x,u_t^2\right)(t) = I_1 + I_2. \qquad (3.3.17)$$

As desigualdades de Hölder e Nirenberg (fórmula (1.1.11) em $L^4$) implicam em

$$\begin{aligned} I_1 \leq \|u\|^2_{L^4_{xy}}(t)\|u_t\|^2_{L^4_{xy}}(t) &\leq 2\|u\|(t)\|\nabla u\|(t)\|u_t\|(t)\|\nabla u_t\|(t) \\ &\leq \frac{1}{4}\|\nabla u_t\|^2(t) + 4\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^2(t)\|u_t\|^2(t). \qquad (3.3.18)\end{aligned}$$

A de Nirenberg (fórmula (1.1.11) em $L^4$ e $L^8$) fornece

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2(1+L)\|u_x\|(t)\|u\|_{L^4_{xy}}(t)\|u_t\|^2_{L^8_{xy}}(t) \\ &\leq 2^{\frac{5}{4}}C^2_{N8}(1+L)\|u_x\|(t)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|u_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u_t\|^{\frac{3}{2}}(t) \\ &\leq 2^{\frac{5}{4}}C^2_{N8}(1+L)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}}(t)\|u_t\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u_t\|^{\frac{3}{2}}(t). \qquad (3.3.19)\end{aligned}$$

Tomando $p=\frac{4}{3}$ e $q=4$ na desigualdade de Young (Teorema 1.1.15) obtemos da estimativa (3.3.19)

$$I_2 \leq \frac{1}{4}\|\nabla u_t\|^2(t) + C_1\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^6(t)\|u_t\|^2(t) \qquad (3.3.20)$$

onde $C_1(L)$ está definido em (3.3.4). Assim, pelas estimativas (3.3.18) e (3.3.20)

$$I_1 + I_2 - \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2(t) \leq \left[\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^2(t)\right]\left[4 + C_1\|\nabla u\|^4(t)\right]\|u_t\|^2(t). \qquad (3.3.21)$$

Usando (3.3.15) em (3.3.21) nós temos

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2(t) &\leq \left[C_{\|u_0\|}\|u\|^2(t)\big(\|u_t\|^2(t) + \|u\|^2(t)\big)\right] \\ &\times \left[4 + C_1C^2_{\|u_0\|}\big(\|u_t\|^2(t) + \|u\|^2(t)\big)^2\right]\|u_t\|^2(t). \qquad (3.3.22)\end{aligned}$$

Voltando para (3.3.16), deduzimos de (3.3.22) que

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,u_t^2\right)(t) + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2(t) + 2\|u_{xt}\|^2(t) + \int_{-B}^{B}u_{xt}^2(0,y,t)\,dy - \big[1+\omega(t)\big]\|u_t\|^2(t) \leq 0 \qquad (3.3.23)$$

com

$$\omega(t) = \left[C_{\|u_0\|}\|u\|^2(t)\big[\left(1+x,u_t^2\right)(t) + \|u\|^2(t)\big]\right]\left[4 + C_1C^2_{\|u_0\|}\big[\left(1+x,u_t^2\right)(t) + \|u\|^2(t)\big]^2\right]. \qquad (3.3.24)$$

A aplicação da desigualdade de Steklov (fórmulas (1.1.4) e (1.1.5)) nos dá

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(1+x,u_t^2\right)(t) + \frac{\pi^2}{2(1+L)}\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{4B^2}\right)\left(1+x,u_t^2\right)(t) + \int_{-B}^{B}u_{xt}^2(0,y,t)\,dy \\ + \left[\frac{2\pi^2}{L^2(1+L)} - 1 - \omega(t)\right]\left(1+x,u_t^2\right)(t) \leq 0. \qquad (3.3.25)\end{aligned}$$

Fazendo $z(t) = \left(1+x, u_t^2\right)(t)$, a desigualdade (3.3.25) leia-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}z(t) &\leq \left[1 - \frac{\pi^2}{2(1+L)}\left(\frac{5}{L^2} + \frac{1}{4B^2}\right)\right] z(t) + \omega(t)z(t) \\
&= p_1 z(t) + p_2 z^2(t) + p_3 z^3(t) + p_4 z^4(t)
\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

onde

$$\begin{aligned}
p_1 &= C_{\|u_0\|}\|u_0\|^4\left(4 + C_1 C_{\|u_0\|}^2\|u_0\|^4\right) + \left[1 - \frac{\pi^2}{2(1+L)}\left(\frac{5}{L^2} + \frac{1}{4B^2}\right)\right] \\
p_2 &= C_{\|u_0\|}\|u_0\|^2\left(4 + 3C_1 C_{\|u_0\|}^2\|u_0\|^4\right) \\
p_3 &= 3C_1 C_{\|u_0\|}^3\|u_0\|^4 \\
p_4 &= C_1 C_{\|u_0\|}^3\|u_0\|^2.
\end{aligned}$$

Como já sabemos da Seção 3.2, $u_t = -(\Delta u_x + u_x) - u^2 u_x \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, e portanto $z \in C([0,T])$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\left(1+x, u_t^2\right)(0) > 0$. Escolha agora $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ tal que (3.3.3) se verifique, isto é, $\omega(0) < \frac{2\pi^2}{L^2(1+L)} - 1$. Então

$$p_1 I_0^2 + p_2 I_0^4 + p_3 I_0^6 + p_4 I_0^8 < 0.$$

De fato, é suficiente escolher $\omega(0) < \frac{2\pi^2}{L^2(1+L)} - 1$ em (3.3.25). Visto que $z \in C([0,T])$, existe $T^* \in (0,T]$ tal que

$$p_1 z(t) + p_2 z^2(t) + p_3 z^3(t) + p_4 z^4(t) < 0, \quad \forall t \in [0,T^*].$$

Então, (3.3.26) fornece

$$\frac{d}{dt}z(t) < 0, \quad \forall t \in (0,T^*). \tag{3.3.27}$$

Integrando (3.3.27) de 0 a $t$ com $t \in (0,T^*]$, temos

$$z(t) < z(0), \quad \forall t \in (0,T^*]. \tag{3.3.28}$$

Isso significa que $z(0)$ é um máximo (lateral) local. Considere o conjunto não-vazio

$$W := \left\{T^* \in [0,T]\,;\, z(t) < z(0),\ \forall t \in (0,T^*]\right\},$$

e defina $T_1^* = \sup_{T^* \in [0,T]} W$. Pela continuidade de $z(t)$, tem-se

$$z(t) < z(0), \qquad \forall t \in (0,T_1^*). \tag{3.3.29}$$

Portanto, pela definição de $\omega$ em (3.3.24) nós temos, por (3.3.29), que

$$\omega(t) < \left[C_{\|u_0\|}\|u_0\|^2\left[z(0) + \|u_0\|^2\right]\right]\left[4 + C_1 C_{\|u_0\|}^2\left[z(0) + \|u_0\|^2\right]^2\right] = \omega(0), \forall t \in (0,T_1^*).$$

Consequentemente,

$$\frac{2\pi^2}{L^2(1+L)} - 1 - \omega(t) > \frac{2\pi^2}{L^2(1+L)} - 1 - \omega(0) > 0, \forall t \in (0, T_1^*) \tag{3.3.30}$$

Integrando em $(0, T_1^*)$, a desigualdade (3.3.25) fornece

$$z(T_1^*) < z(0), \tag{3.3.31}$$

o que significa $T_1^* \in W$. Assim, $T_1^* = T$. Com efeito, suponhamos o contrário, usando os mesmos argumentos de continuidade no momento $T_1^*$. Repetindo os passos, podemos estender o intervalo $[0, T_1^*)$ para $[0, T_1^* + \delta]$, com algum $\delta > 0$. Isso contradiz a suposição de que $T_1^*$ é supremo de $W$.

Usando (3.3.30) em (3.3.25), temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(1+x, u_t^2\right)(t) + \frac{\pi^2}{2(1+L)}\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{4B^2}\right)\left(1+x, u_t^2\right)(t) + \int_{-B}^{B} u_{xt}^2(0,y,t)\,dy \\ &+ \left[\frac{2\pi^2}{L^2(1+L)} - 1 - \omega(0)\right]\left(1+x, u_t^2\right)(t) \leq 0, \quad \forall t \in (0,T). \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Finalmente,

$$\|u_t\|^2(t) \leq (1+L)\|u_t\|^2(0)e^{-\gamma_1 t}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.3.33}$$

onde

$$\gamma_1 = \frac{\pi^2}{2(1+L)}\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{4B^2}\right). \tag{3.3.34}$$

Considere $2\|u_{xt}\|^2(t)$ em (3.3.23) e aplique (1.1.5). Então (3.3.23) pode ser escrito semelhantemente a (3.3.32) com $\frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2(t)$ no lugar do segundo termo da esquerda. Integrando isso sobre $(0,T)$, obtemos

$$\|\nabla u_t\|^2_{L_t^2 L_{xy}^2} \leq (1+L)\|u_t\|^2(0). \tag{3.3.35}$$

Voltando para (3.3.15), computamos a taxa de decaimento exponencial da solução em $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2(t) &\leq C_{\|u_0\|}(1+L)\left(\|u_t\|^2(0)e^{-\gamma_1 t} + \|u_0\|^2 e^{-\gamma_0 t}\right) \\ &\leq C_{\|u_0\|}(1+L)K_1 e^{-\gamma_2 t}, \quad \forall t \in [0,T], \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

onde

$$\gamma_2 = \min\{\gamma_0, \gamma_1\} \tag{3.3.37}$$

com $\gamma_0$ definida em (3.3.12) e

$$K_1 = \max\left\{\|u_t\|^2(0), \|u_0\|^2\right\}. \tag{3.3.38}$$

*Estimativa XXII.* Multiplique a equação por $(1+x)u_{yy}$ e integre sobre $\Omega$. O resultado se verifica como

$$\|\nabla u_y\|^2(t)+2\|u_{xy}\|^2(t)+\int_{-B}^{B} u_{xy}^2(0,y,t)\,dy=\|u_y\|^2(t)+2\left((1+x)u_{yy},u_t+u^2u_x\right)(t). \tag{3.3.39}$$

Temos

$$2\left((1+x)u_{yy},u^2u_x\right)(t)=\left(u^2,u_y^2\right)(t)-2\left((1+x)uu_x,u_y^2\right)(t)=I_1+I_2. \tag{3.3.40}$$

As desigualdades de Hölder e Nirenberg (fórmulas (1.1.9) e (1.1.11) em $L^4$) implicam que

$$\begin{aligned} I_1\leq\|u\|^2_{L^4_{xy}}\|u_y\|^2_{L^4_{xy}} &\leq 2C_\Omega^2\|u\|(t)\|\nabla u\|(t)\|u_y\|(t)\|\nabla u_y\|(t)\\ &\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_y\|^2(t)+6C_\Omega^4\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^4(t) \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

De modo análogo, as desigualdades de Hölder e de Nirenberg (fórmulas (1.1.9) e (1.1.11) em $L^4$ e $L^8$) fornecem

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2(1+L)\|u_x\|(t)\|u\|_{L^4_{xy}}(t)\|u_y\|^2_{L^8_{xy}}(t)\\ &\leq 2^{\frac{5}{4}}C_{\Omega_8}^2(1+L)\|u_x\|(t)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|u_y\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u_y\|^{\frac{3}{2}}(t)\\ &\leq 2^{\frac{5}{4}}C_{\Omega_8}^2(1+L)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^2(t)\|\nabla u_y\|^{\frac{3}{2}}(t). \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

Fazendo $p=\frac{4}{3}$ e $q=4$ na desigualdade de Young generalizada, obtemos

$$I_2\leq\frac{1}{6}\|\nabla u_y\|^2(t)+C_2\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^8(t) \tag{3.3.43}$$

onde $C_2=3^6C_{\Omega_8}^8(1+L)^4$. Logo,

$$I_1+I_2\leq\frac{1}{3}\|\nabla u_y\|^2(t)+\Big[\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^4(t)\Big]\Big[6C_\Omega^4+C_2\|\nabla u\|^4(t)\Big]. \tag{3.3.44}$$

Em seguida, (3.3.39) se torna

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\nabla u_y\|^2(t) &+ \int_{-B}^{B} u_{xy}^2(0,y,t)\,dy\leq 6(1+L)^2\|u_t\|^2(t)+\|u_y\|^2(t)\\ &+ \Big[\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^4(t)\Big]\Big[6C_\Omega^4+C_2\|\nabla u\|^4(t)\Big]\leq K_2e^{-\gamma_2 t}, \end{aligned} \tag{3.3.45}$$

onde

$$K_2=\Big[(6(1+L)^2+1)(1+L)K_1+C^2_{\|u_0\|}(1+L)^2K_1^2\|u_0\|^2\left(6C_\Omega^4+C_2C^2_{\|u_0\|}(1+L)^2K_1^2\right)\Big].$$

*Estimativa XXIII.* Agora temos que estimar os traços $u_x(0,y,t), u_{xy}(0,y,t)$ e $u_{xx}(L,y,t)$ para obter uma estimativa ao termo $\nabla u_x\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. De (3.3.14) deduzimos que

$$\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\,dy\leq 2(1+L)^2\big(\|u_t\|^2(t)+\|u\|^2(t)\big)\leq 2(1+L)^3K_1e^{-\gamma_2 t}. \tag{3.3.46}$$

Escreva (3.3.45) como

$$\int_{-B}^{B} u_{xy}^2(0,y,t)\,dy \leq K_2 e^{-\gamma_2 t}, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{3.3.47}$$

Multiplique (3.0.1) por $x$ e integre sobre $(0,L)$. O resultado é

$$Lu_{xx}(L,y,t) = \int_0^L \big(u + u_{yy} - xu_t - xu^2u_x\big)\,dx - u_x(0,y,t). \tag{3.3.48}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L^2u_{xx}^2(L,y,t) &\leq 2\|u+u_{yy}-xu_t-xu^2u_x\|_{L^1(0,L)}^2 + 2u_x^2(0,y,t) \\ &\leq 2L\|u+u_{yy}-xu_t-xu^2u_x\|_{L^2(0,L)}^2 + 2u_x^2(0,y,t) \\ &\leq 8L\Big(\|u\|_{L_x^2}^2 + \|u_{yy}\|_{L_x^2}^2 + L^2\|u_t\|_{L_x^2}^2 + L^2\|u^2u_x\|_{L_x^2}^2\Big)(y,t) + 2u_x^2(0,y,t). \end{aligned} \tag{3.3.49}$$

Daí, a integração de (3.3.49) sobre $(-B,B)$ implica

$$\begin{aligned} \int_{-B}^{B} u_{xx}^2(L,y,t)\,dy &\leq \frac{8}{L}\Big(\|u\|^2(t) + \frac{2}{L}\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\,dy + \|u_{yy}\|^2(t) + L^2\|u_t\|^2(t)\Big) \\ &+ 8L\|u^2u_x\|^2(t) \leq C_3e^{-\gamma_2 t} + 8L\|u^2u_x\|^2(t) \end{aligned} \tag{3.3.50}$$

onde $C_3 = (1+L)K_1\Big(\frac{8}{L} + \frac{4(1+L)^2}{L} + \frac{K_2}{(1+L)K_1} + 8L\Big)$.

Para o último termo à direita em (3.3.50), temos pelo Lema 1.1.8 que

$$\begin{aligned} \|u^2u_x\|^2(t) &\leq \sup_{(x,y)\in\Omega} u^4(x,y,t)\|u_x\|^2(t) \\ &\leq \Big(\|u\|_{H_{xy}^1}^2(t) + \|u_{xy}\|^2(t)\Big)^2\|u_x\|^2(t) \\ &\leq 2\Big((1+L)K_1 + C_{\|u_0\|}^2(1+L)^2K_1^2 + K_2^2\Big)e^{-2\gamma_2 t}\|u_x\|^2(t) \\ &\leq K_3e^{-3\gamma_2 t}, \end{aligned} \tag{3.3.51}$$

com $K_3 = 2(1+L)^3K_1\Big((1+L)K_1 + C_{\|u_0\|}^2(1+L)^2K_1^2 + K_2^2\Big)$. Finalmente,

$$\int_{-B}^{B} u_{xx}^2(L,y,t)\,dy \leq K_4e^{-\gamma_2 t}, \qquad \forall t \in [0,T] \tag{3.3.52}$$

onde $K_4 = C_3 + 8LK_3$.

*Estimativa XXIV*. Derivamos a equação com respeito a $x$, multiplicamos por $(1+x)u_x$ e integramos sobre $\Omega$,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(1+x, u_x^2\right)(t) + \|\nabla u_x\|^2(t) + 2\|u_{xx}\|^2(t) + \int_{-B}^{B}\left[u_{xx}^2(0,y,t) + u_{xy}^2(0,y,t)\right]dy \\ &= 2\int_{-B}^{B}\left[u_xu_{xxx}(0,y,t) - u_xu_{xx}(0,y,t) + \frac{1}{2}u_x^2(0,y,t) + \frac{(1+L)}{2}u_{xx}^2(L,y,t)\right]dy \\ &\qquad + \|u_x\|^2(t) - \frac{2}{3}\int_\Omega (1+x)u_x\big(u^3\big)_{xx}\,d\Omega \end{aligned} \tag{3.3.53}$$

o que após inserir nas equações oferece

$$\begin{aligned} 2\int_{-B}^{B} u_x u_{xxx}(0,y,t)dy &= -2\int_{-B}^{B} u_x[u_t+u_x+u_{xyy}+u^2u_x](0,y,t)dy \\ &= -2\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)dy - 2\int_{-B}^{B} u_x u_{xyy}(0,y,t)dy \\ &= -2\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)dy + 2\int_{-B}^{B} u_{xy}^2(0,y,t)dy. \qquad (3.3.54) \end{aligned}$$

Substitua (3.3.54) em (3.3.53):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(1+x,u_x^2\right)(t) + \|\nabla u_x\|^2(t) + 2\|u_{xx}\|^2(t) + \int_{-B}^{B}\left[u_{xx}^2(0,y,t)+u_x^2(0,y,t)\right]dy \\ &= 2\int_{-B}^{B}\left[\frac{1}{2}u_{xy}^2(0,y,t)+\frac{(1+L)}{2}u_{xx}^2(L,y,t)-u_xu_{xx}(0,y,t)\right]dy \\ &\quad +\|u_x\|^2(t) - \frac{2}{3}\int_{\Omega}(1+x)u_x\big(u^3\big)_{xx}\,d\Omega \\ &= 2\int_{-B}^{B}\left[\frac{1}{2}u_{xy}^2(0,y,t)+\frac{(1+L)}{2}u_{xx}^2(L,y,t)-u_xu_{xx}(0,y,t)\right]dy \\ &\quad +\|u_x\|^2(t) + 2\int_{\Omega}\left[u^2u_x^2+(1+x)u^2u_xu_{xx}\right]d\Omega. \qquad (3.3.55) \end{aligned}$$

Então, temos como consequência que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(1+x,u_x^2\right)(t) + \|\nabla u_x\|^2(t) + \|u_{xx}\|^2(t) + \frac{1}{2}\int_{-B}^{B} u_{xx}^2(0,y,t)dy \\ &\leq \int_{-B}^{B}\left[3u_x^2(0,y,t)+u_{xy}^2(0,y,t)+(1+L)u_{xx}^2(L,y,t)\right]dy \\ &\quad +\|u_x\|^2(t) + (1+L)^2\|u^2u_x\|^2(t) + 2\|uu_x\|^2(t). \qquad (3.3.56) \end{aligned}$$

Devido a (3.3.36), (3.3.46), (3.3.47), (3.3.51 ) e (3.3.52 ), conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(1+x,u_x^2\right)(t) &+ \|\nabla u_x\|^2(t) + \|u_{xx}\|^2(t) + \frac{1}{2}\int_{-B}^{B} u_{xx}^2(0,y,t)dy \\ &\leq C_4e^{-\gamma_2 t} + \left[2(1+L)^3K_1 + (1+L)^2K_3\right]e^{-\gamma_2 t} + 2\|uu_x\|^2(t) \\ &\leq C_5e^{-\gamma_2 t} + 2\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y,t)\|u_x\|^2(t) \\ &\leq C_5e^{-\gamma_2 t} + 4(1+L)^3K_1\big(\|u\|^2_{H^1_{xy}}(t) + \|u_{xy}\|^2(t)\big)e^{-\gamma_2 t} \\ &\leq C_5e^{-\gamma_2 t} + C_6e^{-2\gamma_2 t} \leq K_5e^{-\gamma_2 t} \qquad (3.3.57) \end{aligned}$$

onde

$$C_4 = 6(1+L)^3K_1 + K_2 + (1+L)K_4,$$

$$C_5 = C_4 + 2(1+L)^3 K_1 + (1+L)^2 K_3,$$
$$C_6 = 4(1+L)^3 K_1 \big[(1+L)K_1 + C_{\|u_0\|}(1+L)K_1 + K_2\big].$$

e $K_5 = C_5 + C_6$.

Integre (3.3.57) em $t \in (0,T)$. O resultado fica

$$\begin{aligned}\|\nabla u_x\|^2_{L^2_t L^2_{xy}} + \|u_{xx}\|^2_{L^2_t L^2_{xy}} + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{-B}^{B} u^2_{xx}(0,y,t)\, dydt \\ \leq K_5 \int_0^T e^{-\gamma_2 t}\, dt + \left(1+x, u_x^2\right)(0) \\ \leq \frac{K_5}{\gamma_2}\left(1 - e^{-\gamma_2 T}\right) + (1+L)\|u_{0x}\|^2. \end{aligned} \tag{3.3.58}$$

Note que todas as constantes $K_i's$ são proporcionais a $\|u_0\|$ e a $\|u_t\|(0)$, se observamos os resultados das Estimativas XIX e XXI, podemos concluir que

$$\|u\|(T_0) \leq \|u_0\| \;\text{ e }\; \|u_t\|(T_0) \leq \|u_t\|(0). \tag{3.3.59}$$

Agora, se considerarmos um novo PVI para a mZK sobre $(T_0, +\infty)$ com dado inicial $u(T_0,x,y) \in \mathcal{D}(A)$, lembrando que a solução local $u \in C([0,T_0];\mathcal{D}(A)$, onde $\mathcal{D}(A)$ é o domínio do gerador $A$ de semigupo de contração para a $gZK$ (neste caso em específico para mZK) definido em (3.2.2). Temos pela desigualdade (3.3.59), que as hipóteses (3.3.2) e (3.3.3) do Teorema 3.3.1 estarão satisfeita para o novo dado inicial $u(T_0,x,y)$, e como todas as Estimativas não dependem de $T_0$, a nova solução local $u \in X_{T_0}$ encontrada sobre $(T_0,+\infty)$, que denotaremos por $u_1(x,y) \equiv u(T_0,x,y)$, tem intervalo existência local com medida no mínimo $T_0$.

De fato, pela definição do operador $A$ e de norma no espaço $\mathcal{D}(A)$, da equação (3.0.1) para o caso $k=2$, o Corolário 1.1.3 e as estimativas (3.3.12), (3.3.14) e (3.3.33), podemos escrever

$$\begin{array}{rcl} \|u_1\|^2_{\mathcal{D}(A)} & = & \|u_1\|^2 + \|Au_1\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_t + u^2 u_x\|^2(T_0) \\ & \leq & \|u_1\|^2 + 2\|u_t\|^2(T_0) + 2\|u_1^2 u_{1x}\|^2 \\ & \leq & \|u_1\|^2 + 2\|u_t\|^2(T_0) + 2|\Omega|^4\|u_{1xy}\|^4\|u_{1x}\|^2 \\ & \leq & \big[(1+L)\|u_0\|^2 + 2I_0^2\big]e^{-\gamma T_0} + 4(1+L)^2|\Omega|^4\|u_{1xy}\|^4\big(\|u_1\|^2 + \|u_t\|^2(T_0)\big) \\ & \leq & \Big[(1+L)\|u_0\|^2 + 2I_0^2 + 4(1+L)^2|\Omega|^4K_2^4\big[(1+L)\|u_0\|^2 + I_0^2\big]\Big]e^{-\gamma T_0} \end{array} \tag{3.3.60}$$

Portanto,

$$\|u_1\|^2_{\mathcal{D}(A)} \leq P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)e^{-\gamma T_0} \tag{3.3.61}$$

onde,

$$P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big) \doteq \Big[(1+L) + 4(1+L)^3|\Omega|^4K_2^4\Big]\|u_0\|^2 + \Big[2 + 4(1+L)^2|\Omega|^4K_2^4\Big]I_0^2 \tag{3.3.62}$$

Observando a definição (3.2.12) da norma no espaço $X_T$, podemos escrever

$$\|u_0\|^2 \leq R^2 \quad \text{e} \quad I_0^2 \leq (1+L)R^2 \tag{3.3.63}$$

Substituindo (3.3.63) em (3.3.62) e posteriormente usando este resulto em (3.3.61), a seguinte estimativa se verifica

$$\|u_1\|^2_{\mathcal{D}(A)} \le P\big(R^2\big)e^{-\gamma T_0}, \tag{3.3.64}$$

onde

$$P\big(R^2\big) \doteq \Big[(3+L) + 8(1+L)^3|\Omega|^4 K_2^4\Big] R^2. \tag{3.3.65}$$

Nosso objetivo neste momento, é mostrar que para $\|u_0\|^2$ e $I_0^2$ suficientemente pequenos, vale a seguinte implicação

$$\|u_1\|^2_{\mathcal{D}(A)} \le \|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)},$$

assim podemos afirmar que o raio $R_1$ do próximo PVI é menor ou igual a $R$. Graças a (3.3.64), se tivermos uma desigualdade do tipo

$$\|u_1\|^2_{\mathcal{D}(A)} \le P\big(R^2\big)e^{-\gamma T_0} \le \|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}. \tag{3.3.66}$$

o resultado irá seguir. Para tanto, é necessário que a condição

$$\ln\left(\frac{P\big(R^2\big)}{\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}}\right) \le \gamma T_0 \tag{3.3.67}$$

seja satisfeita. Analisando o termo dentro do logaritmo, por (3.3.65) temos

$$\begin{aligned}
\frac{P\big(R^2\big)}{\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}} &= \frac{R^2}{\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}}\Big[(3+L) + 8(1+L)^3|\Omega|^4 K_2^4\Big] \\
&= 8\Big((M+\kappa) + C\|u_0\|^4_{\mathcal{D}(A)}\Big)\Big[(3+L) + 8(1+L)^3|\Omega|^4 K_2^4\Big] \\
&\le 8\Big((M+\kappa) + CP\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)^2\Big)\Big[(3+L) + 8(1+L)^3|\Omega|^4 K_2^4\Big].
\end{aligned} \tag{3.3.68}$$

Por (3.3.68) e pela condição (3.3.3) de pequenidade de $\|u_0\|^2$ e $I_0^2$, existe uma constante $\mu(\Omega)$[1] $> 0$, que só depende de $\Omega$, tal que

$$\ln\left(\frac{P\big(R^2\big)}{\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}}\right) \le \gamma \mu \tag{3.3.69}$$

Pelo Lema 3.2.5, para todos os resultados da parte local serem verdadeiros, é suficiente que o tempo $T_0$ de existência local cumpra a desigualdade

$$T_0^{\frac{1}{2}} 2^2 C(T,\Omega) K(T) R^2 < 1, \tag{3.3.70}$$

onde

$$K(T) = 2 + 3C\max\{1, T^{\frac{1}{2}}\} + \sqrt{T(1+2C)^2 + 2(1+L)(1+2C)}$$

[1] $\mu = \frac{1}{\lambda}\ln\Big(8\left((M+\kappa) + C\varepsilon(\Omega)\right)\Big[(3+L) + 8(1+L)^3|\Omega|^4 K_2^4\Big]\Big)$ onde $\varepsilon(\Omega)$ é um limitante de $P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)$ garantido por (3.3.3) .

e

$$C(T,\Omega) = 2\max\{1, T^{\frac{1}{4}}\}2^{\frac{5}{4}}kC_{N4} + 1 + T^{\frac{1}{2}}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $T_0 < \mu$, pois estamos estudando a solução local, assim, utilizando essa informação nas definições de $K$ e $C(T,\Omega)$ obtemos,

$$T_0^{\frac{1}{2}} 2^2 C(T,\Omega) K R^2 < T_0^{\frac{1}{2}} \Theta R^2, \tag{3.3.71}$$

onde

$$\Theta = 2^2 K(\mu) C(\mu, \Omega) \tag{3.3.72}$$

só depende do domínio espacial $\Omega$.

As fórmulas (3.3.70), (3.3.71) e (3.3.72) nos permite escolher $T_0$ da seguinte forma

$$T_0 = \min\left\{\mu, \frac{1}{\Theta^2 R^4}\right\}. \tag{3.3.73}$$

Impondo a condição de que

$$R^4 \ln\left(8\left((M+\kappa) + CP\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)^2\right)\left[(3+L) + 8(1+L)^3|\Omega|^4 K_2^4\right]\right) \le \frac{\gamma}{\Theta^2}, \tag{3.3.74}$$

teremos por (3.3.67), (3.3.68), (3.3.73) quando $T_0 = \dfrac{1}{\Theta^2 R^4}$ e (3.3.74)

$$\ln\left(\frac{P\big(R^2\big)}{\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}}\right) \le \frac{\gamma}{\Theta^2 R^4} = \gamma T_0, \tag{3.3.75}$$

que é suficiente para mostrar (3.3.66), a outra possibilidade para $T_0$ é $T_0 = \mu$, mas observando a forma como $\mu$ é definido, a fórmula (3.3.69) garante a estimativa (3.3.67) e consequentemente (3.3.66). Nos resta apenas constatar que a fórmula (3.3.74) pode ser de fato verificada.

Com efeito, o objetivo é mostrar que para $\|u_0\|^2$ e $I_0^2$ suficientemente pequenos, podemos controlar o raio $R$, e assim comprovar que é possível escolher dados inciais que validam a estimativa (3.3.74). Pela definição (3.2.55) de $R$, temos

$$\begin{aligned} R^4 \le & \quad \left((M+\kappa)\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)} + C\|u_0\|^3_{\mathcal{D}(A)}\right)^4 \\ \le & \quad \left((M+\kappa)P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big) + CP\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)^3\right)^4 \\ = & \quad \sum_{i=1}^{12} \alpha_i(\Omega)\Big[P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)\Big]^i, \end{aligned} \tag{3.3.76}$$

onde $\alpha_i(\Omega) > 0$ depende de $M, \kappa$ e $C$, dados no Lema 3.2.4 e dependem somente de $\Omega$. Usando (3.3.76) para limitar o lado esquerdo de (3.3.74),

$$\begin{aligned} & R^4 \ln\left(8\left((M+\kappa) + CP\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)^2\right)\left[(3+L) + 8(1+L)^3|\Omega|^4 K_2^4\right]\right) \\ & \le \sum_{i=1}^{12} \beta_i(\Omega)\Big[P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)\Big]^i \ln\left(8(M+\kappa) + CP\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)^2\right) \end{aligned} \tag{3.3.77}$$

Observe que $P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big) \to 0$ quando $\|u_0\|^2 \to 0$ e $I_0^2 \to 0$, e como o lado direito de (3.3.77) é o produto de um polinômio homogêneo em $P\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)$ por uma função limitada. Com efeito, note que

$$\ln\Big(8(M+\kappa)\Big) \leq \ln\Big(8(M+\kappa) + CP\big(\|u_0\|^2, I_0^2\big)^2\Big) \leq \ln\Big(8(M+\kappa)+\varepsilon\big)^2\Big)$$

para todo $\varepsilon > 0$ com $\|u_0\|^2, I_0^2 < \delta(\varepsilon)$. Então, podemos afirmar que o lado direito de (3.3.77) tende 0 quando $\|u_0\|^2 \to 0$ e $I_0^2 \to 0$, e isto nos permite concluir que para $\|u_0\|^2$ e $I_0^2$ suficientemente pequenos, a estimativa (3.3.74) pode ser verificada.

Assim, o novo intervalo de existência local $[T_0, T_1]$ terá medida no mínimo $T_0$. Logo, a solução da mZK pode ser estendida para qualquer $T > 0$ com a taxa de decaimento acima. Mais detalhes sobre esta extensão é dado no Lema 3.4.3 para a extensão global da equação supercrítica de Zakharov-Kuznetsov e também é feito um breve comentário na Seção 3.5 sobre a taxa de decaimento exponencial.

### 3.3.1 Efeito Suavizante

A equação (3.0.1) nos dá

$$\begin{aligned} \nabla(\Delta u_x) &= -\nabla\left(u_t + u_x + u^2 u_x\right) \\ &= -\nabla(u_t+u_x) - 2uu_x\nabla u - u^2\nabla u_x. \end{aligned} \tag{3.3.78}$$

Logo,

$$\|\nabla(\Delta u_x)\|^2(t) \leq 2\|\nabla(u_t+u_x)\|^2(t) + 2^6\|uu_x\nabla u\|^2(t) + 2^2\|u^2\nabla u_x\|^2(t) \tag{3.3.79}$$

Escrevemos, por notação, $(\nabla v)^2 = v_x^2 + v_y^2$. Os dois últimos termos aqui podem ser estimados como seguir. O primeiro leia-se

$$\|uu_x\nabla u\|^2(t) = \int_\Omega u^2u_x^2(\nabla u)^2\, d\Omega \leq \left(\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y,t)\right)\|u_x\|^2_{L^4_{xy}}(t)\|\nabla u\|^2_{L^4_{xy}}(t)$$

$$\leq C_{\Omega 4}^2\left(\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y,t)\right)\|\nabla u\|^2(t)\Big(\|\nabla u_x\|(t)+1\Big)\Big(\|\nabla u_x\|(t)+\|\nabla u_y\|(t)+1\Big)$$

$$\leq 2^2C_{\Omega 4}^2\left(\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y,t)\right)\|\nabla u\|^2(t)\Big(\|\nabla u_x\|^2(t)+\|\nabla u_y\|^2(t)+1\Big) \tag{3.3.80}$$

E o segundo termo mencionado acima leia-se

$$\|u^2\nabla u_x\|^2(t) = \int_\Omega u^4(\nabla u_x)^2\, d\Omega \leq \left(\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y,t)\right)^2\|\nabla u_x\|^2(t). \tag{3.3.81}$$

Logo, por (3.3.79)-(3.3.81), nós temos

$$\|\nabla(\Delta u_x)\|^2_{L^2_tL^2_{xy}} \leq 2^2\left(\sup_{(x,y,t)\in Q_T} u^2(x,y,t)\right)^2\|\nabla u_x\|^2_{L^2_tL^2_{xy}} + 2\|\nabla(u_t+u_x)\|^2_{L^2_tL^2_{xy}}$$

$$+2^8C_{\Omega 4}^2\left(\sup_{(x,y,t)\in Q_T} u^2(x,y,t)\right)\|\nabla u\|^2_{L^\infty_tL^2_{xy}}\Big(\|\nabla u_x\|^2_{L^2_tL^2_{xy}}+\|\nabla u_y\|^2_{L^2_tL^2_{xy}}+T\Big) \tag{3.3.82}$$

Portanto,

$$\Delta u_x \in L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.3.83}$$

A unicidade da solução $u \in X_T$ prova-se pelo caminho usual, como no Teorema 3.4.2.

A demonstração do Teorema 3.3.1 está completa.

## 3.4 Solução global para a equação ZK supercrítica

**Teorema 3.4.1.** *Sejam $B$, $L$ números reais positivos tais que* $\alpha_0 = \dfrac{\pi^2}{1+L}\left(\dfrac{3}{2L^2}+\dfrac{1}{8B^2}\right)-1>0$. *Então, para $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ (definido em* (3.2.2)*) suficientemente pequeno e para todo $T>0$ existe uma única solução $u \in X_T^0$ (definido em* (3.2.13)*) do problema* (3.0.1)*-*(3.0.4)*; mais precisamente,*

$$u \in L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\right) \; ; \; u_x \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right),$$

$$u_t, \Delta u_x \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right).$$

*Além disso, existe $C(k,\Omega,\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)})>0$ tal que*

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)}(t)+\|u_t\|^2(t)+\|\Delta u_x\|^2(t) \le Ce^{-\theta t}, \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.4.1}$$

*onde $\theta>0$ está definido em* (3.2.17)*. Mais ainda, os traços*

$$u_x(0,y,t),\; u_{xy}(0,y,t),\; u_{xx}(L,y,t),\; u_{xx}(0,y,t) \in L^\infty\left(0,T;L^2(-B,B)\right)$$

*estão bem definidos, ver Estimativas XXV e XXIX e fórmula* (3.4.24) *para os traços.*

Para provar o Teorema seja $u \in X_{T_*}^0$ a solução local, $u \in B_R$. Iremos obter estimativas a priori independentes de $T_*$ com intuito de estender a solução local para todo $T>0$. Sabe-se pelo Lema 3.2.4 que a solução local $u$ está numa bola fechada de raio $R(\Omega,\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)})$ dado por

$$R = 2\left((M+\kappa)\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)} + 2\kappa C C_{4k}^k C_{N4}\|u_0\|^{k+1}_{\mathcal{D}(A)}\right),$$

isto é, $\|u\|_{X_{T_*}} \le R$. Dado $T_*>0$ fixado, nós vamos impor condições sobre $R$ (equivalente, exigência de que a norma $\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}$ seja pequena) para obter a dissipação da norma da solução em $\mathcal{D}(A)$ no intervalo $[0,T_*]$.

**Lema 3.4.1.** *Sejam as condições do Teorema 3.4.1 satisfeitas e a função $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ tão pequena que $R>0$ verifica*

$$R^k \le \frac{k+2}{2C_{k+2}^{k+2}}\left[\frac{\pi^2}{1+L}\left(\frac{2}{L^2}+\frac{1}{4B^2}\right)-1\right] \doteq \beta_1(k). \tag{3.4.2}$$

*Então $u \in L^\infty(0,T_*;L^2(\Omega))$ com estimativa*

$$\|u\|^2(t) \le (1+L)\|u_0\|^2 e^{-\theta t}, \quad t \in [0,T_*].$$

*Demonstração.* Como $\|u\|_{L_t^\infty H_{xy}^1} \leq \|u\|_{X_{T_*}}$, e $u, u_t \in L^2(0, T_*; H^1(\Omega))$, podemos concluir que $u \in C([0, T_*], H^1(\Omega))$, e portanto

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}(t) \leq R, \quad t \in [0, T_*]. \tag{3.4.3}$$

*Estimativa XXV.* Multiplicando (3.0.1) por $2u$, computamos

$$\|u\|^2(t) + \int_0^t \int_{-B}^{B} u_x^2(0, y, \tau)\, dy\, d\tau = \|u_0\|^2.$$

*Estimativa XXVI.* Multiplicando (3.0.1) por $2(1+x)u$ obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(1+x, u^2\right)(t) + \|\nabla u\|^2(t) + 2\|u_x\|^2(t) + \int_{-B}^{B} u_x^2(0, y, t)\, dy \\ &= \|u\|^2(t) + \frac{2}{k+2}\int_\Omega u^{k+2}\, d\Omega \leq \|u\|^2(t) + \frac{2}{k+2}\|u\|^{k+2}_{L^{k+2}_{xy}}(t). \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

A desigualdade de Nirenberg com $p = k+2$ (fórmula (1.1.11) ou (1.1.12), dependendo da paridade de $k$), e a estimativa (3.4.3) implicam

$$\|u\|^{k+2}_{L^{k+2}_{xy}}(t) \leq C^{k+2}_{k+2}\|\nabla u\|^k(t)\|u\|^2(t) \leq C^{k+2}_{k+2} R^k \left(1+x, u^2\right)(t). \tag{3.4.5}$$

Aqui $C_{k+2}$ é dado pelo Corolário 1.1.2. Substituindo (3.4.5) em (3.4.4) e usando desigualdade de Steklov (fórmulas (1.1.4) e (1.1.5)) temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(1+x, u^2\right)(t) + \frac{\pi^2}{L^2(1+L)}\left(1+x, u^2\right)(t) \\ &+ \left[\frac{\pi^2}{1+L}\left(\frac{2}{L^2} + \frac{1}{4B^2}\right) - 1 - \frac{2C^{k+2}_{k+2}}{k+2}R^k\right]\left(1+x, u^2\right)(t) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

A condição (3.4.2) do Lema implica

$$\frac{d}{dt}\left(1+x, u^2\right)(t) + \frac{\pi^2}{L^2(1+L)}\left(1+x, u^2\right)(t) \leq 0. \tag{3.4.7}$$

Consequentemente,

$$\left(1+x, u^2\right)(t) \leq (1+L)\|u_0\|^2 e^{-\theta t}. \tag{3.4.8}$$

$\square$

**Lema 3.4.2.** *Se as hipóteses do Teorema 3.4.1 estão satisfeitas, considere o dado inicial $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ tão pequeno que*

$$R^k \leq \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2_{k,1} + 4\alpha_0\alpha_{k,2}} - \alpha_{k,1}}{2\alpha_{k,2}}} \doteq \beta_2(k), \tag{3.4.9}$$

*onde $\alpha_{k,1}$ e $\alpha_{k,2}$ são dados em (3.4.12) e (3.4.14) respetivamente. Então $u_t, \nabla u \in L^\infty(0,T_*;L^2(\Omega))$ e $\nabla u_t \in L^2(0,T_*;L^2(\Omega))$ com estimativas*

$$\|u_t\|^2(t) \le (1+L)I_0^2 e^{-\theta t}, \quad \|\nabla u\|^2(t) \le (1+L)P(k,\|u_0\|,I_0,R)e^{-\theta t}, \quad t\in[0,T_*],$$

*onde*

$$P(k,\|u_0\|,I_0,R) \doteq 2\|u_0\|^2 + I_0^2 + \frac{2C_{k+2}^{k+2}}{k+2}\|u_0\|^2 R^k,$$

*e $I_0 = \|u_t\|(0)$.*

*Demonstração.* Iniciamos da seguinte forma.

*Estimativa XXVII.* Derive (3.0.1) com respeito a $t$ e multiplique o resultado por $2(1+x)u_t$. A integração sobre $\Omega$ leia-se

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(1+x,u_t^2)(t) + \|\nabla u_t\|^2(t) + 2\|u_{xt}\|^2(t) + \int_{-B}^{B} u_{xt}^2(0,y,t)\,dy \\
&= \|u_t\|^2(t) - \frac{2}{k+1}\int_\Omega (1+x)u_t\big(u^{k+1}\big)_{xt}\,d\Omega. \\
&= \|u_t\|^2(t) + \big(u^k,u_t^2\big)(t) - k\left((1+x)u^{k-1}u_x,u_t^2\right)(t).
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

As desigualdades de Hölder e Nirenberg (fórmula (1.1.11) em $L^{2k}$ e $L^4$) oferecem

$$\begin{aligned}
\big(u^k,u_t^2\big)(t) &\le \|u\|^k_{L^{2k}_{xy}}(t)\|u_t\|^2_{L^4_{xy}}(t) \le 2^{\frac12}C_{2k}^k\|\nabla u\|^{k-1}(t)\|u\|(t)\|\nabla u_t\|(t)\|u_t\|(t) \\
&\le \frac14\|\nabla u_t\|^2(t) + 2C_{2k}^{2k}\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^{2(k-1)}(t)\|u_t\|^2(t) \\
&\le \frac14\|\nabla u_t\|^2(t) + \alpha_{k,1}R^{2k}\left(1+x,u_t^2\right)(t).
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Aqui

$$\alpha_{k,1} = 2C_{2k}^{2k}. \tag{3.4.12}$$

Para o último termo em (3.4.10) computamos com o uso da fórmula (1.1.11) em $L^{4(k-1)}$ e $L^8$

$$\begin{aligned}
k\left((1+x)u^{k-1}u_x,u_t^2\right)(t) &\le k(1+L)\|u_x\|(t)\|u\|^{k-1}_{L^{4(k-1)}_{xy}}(t)\|u_t\|^2_{L^8_{xy}}(t) \\
&\le kC_8^2C_{4(k-1)}^{k-1}(1+L)\|u_x\|(t)\|\nabla u\|^{\frac{2k-3}{2}}(t)\|u\|^{\frac12}(t) \\
&\times \|\nabla u_t\|^{\frac32}(t)\|u_t\|^{\frac12}(t) \\
&\le \frac{3^3}{2^2}k^4C_8^8C_{4(k-1)}^{4(k-1)}(1+L)^4\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^{4k-2}(t)\|u_t\|^2(t) \\
&+ \frac14\|\nabla u_t\|^2(t) \\
&\le \frac14\|\nabla u_t\|^2(t) + \alpha_{k,2}R^{4k}\left(1+x,u_t^2\right)(t)
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

onde

$$\alpha_{k,2} = \frac{3^3}{2^2}k^4C_8^8C_{4(k-1)}^{4(k-1)}(1+L)^4. \tag{3.4.14}$$

Inserindo (3.4.11) e (3.4.13) em (3.4.10) temos, pela desigualdade de Steklov (fórmulas (1.1.4) e (1.1.5)), que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(1+x,u_t^2\right)(t)+\frac{\pi^2}{L^2(1+L)}\left(1+x,u_t^2\right)(t)+\int_{-B}^{B}u_{xt}^2(0,y,t)\,dy\\&+\left[\frac{\pi^2}{1+L}\left(\frac{3}{2L^2}+\frac{1}{8B^2}\right)-1-\alpha_{k,1}R^{2k}-\alpha_{k,2}R^{4k}\right]\left(1+x,u_t^2\right)(t)\leq 0.\end{aligned}\tag{3.4.15}$$

Tome $P=R^{2k}$. Então

$$\alpha_0-\alpha_{k,1}P-\alpha_{k,2}P^2\geq 0\tag{3.4.16}$$

para $t\in(0,+\infty)$ se e somente se $P\in[0,P_{max}]$ onde $P_{max}$ é a raiz positiva de (3.4.16) dada por

$$P_{max}=\frac{\sqrt{\alpha_{k,1}^2+4\alpha_0\alpha_{k,2}}-\alpha_{k,1}}{2\alpha_{k,2}}.\tag{3.4.17}$$

Pela condição (3.4.9) temos que $R^k\in[0,\sqrt{P_{max}}]$ e por isso a fórmula (3.4.15) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,u_t^2\right)(t)+\frac{\pi^2}{L^2(1+L)}\left(1+x,u_t^2\right)(t)\leq 0.$$

Logo,

$$(1+x,u_t^2)(t)\leq(1+L)\|u_t\|^2(0)e^{-\theta t}.\tag{3.4.18}$$

Visto que $u_0\in\mathcal{D}(A)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, tem-se pela equação (3.0.1) que

$$\|u_t\|^2(0)\leq\|Au_0\|^2+\|u_0^ku_{0x}\|^2\leq\|Au_0\|^2+\left(\sup_{(x,y)\in\Omega}u_0^2(x,y)\right)^k\|u_{0x}\|^2<+\infty.$$

Retornando em (3.4.10), integrando-a sobre $(0,T_*)$ e usando (3.4.11),(3.4.13) e (3.4.18), temos

$$\begin{aligned}\int_0^{T_*}\|\nabla u_t\|^2(t)\,dt&\leq 2\big(1+\alpha_{k,1}R^{2k}+\alpha_{k,2}R^{4k}\big)\|u_t\|^2(0)\int_0^T e^{-\theta t}\,dt+(1+L)\|u_t\|^2(0)\\&\leq\left(\frac{2}{\theta}\big[1+\alpha_{k,1}R^{2k}+\alpha_{k,2}R^{4k}\big]+1+L\right)\|u_t\|^2(0).\end{aligned}\tag{3.4.19}$$

Voltando em (3.4.4), as estimativas (3.4.8) e (3.4.18) providencia

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2(t)&\leq\|u_t\|^2(t)+\left(2+\tfrac{2C_{k+2}^{k+2}}{k+2}R^k\right)\|u\|^2(t)\\&\leq(1+L)\left[\|u_t\|^2(0)+\left(2+\tfrac{2C_{k+2}^{k+2}}{k+2}R^k\right)\|u_0\|^2\right]e^{-\theta t}.\end{aligned}\tag{3.4.20}$$

Isso conclui a demonstração do Lema 3.4.2. □

A restrição sobre a norma de $u_0\in\mathcal{D}(A)$ nos Lemas 3.4.1,3.4.2 também resulta que outras estimativas sejam independentes de $T_*$, como iremos mostrar abaixo.

*Estimativa XXVIII*. Multiplicando (3.0.1) por $-2(1+x)u_{yy}$ implica

$$\begin{aligned}
&\|\nabla u_y\|^2(t) + 2\|u_{xy}\|^2(t) + \int_{-B}^{B} u_{xy}^2(0,y,t)\,dy = \|u_y\|^2(t) + 2\left((1+x)u_{yy}, u_t + u^k u_x\right)(t)\\
&\leq \frac{1}{6}\|u_{yy}\|^2(t) + \|u_y\|^2(t) + 6(1+L)^2\|u_t\|^2(t) + \frac{2}{k+1}\left((1+x)u_{yy}, \left(u^{k+1}\right)_x\right)(t)\\
&= \frac{1}{6}\|u_{yy}\|^2(t) + \|u_y\|^2(t) + 6(1+L)^2\|u_t\|^2(t) + \left(u_y^2, u^k\right)(t) - k\left(u_y^2, (1+x)u^{k-1}u_x\right)(t).
\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

Como antes, estimamos os últimos dois termos em (3.4.21) usando as desigualdades de Hölder e Nirenberg (fórmula (1.1.11) em $L^{2k}$ e $L^4$) pelo seguinte caminho:

$$\begin{aligned}
\left(u_y^2, u^k\right)(t) &\leq \|u_y\|^2_{L^4_{xy}}(t)\|u\|^k_{L^{2k}_{xy}}(t) \leq \sqrt{2}C^k_{2k}\|\nabla u_y\|(t)\|u_y\|(t)\|\nabla u\|^{k-1}(t)\|u\|(t)\\
&\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_y\|^2(t) + 3C^{2k}_{2k}\|u_y\|^2(t)\|\nabla u\|^{2(k-1)}(t)\|u\|(t)\\
&\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_y\|^2(t) + 3C^{2k}_{2k}\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^{2k}(t).
\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}
k\left(u_y^2, (1+x)u^{k-1}u_x\right)(t) &\leq k(1+L)\|u_y\|^2_{L^8_{xy}}(t)\|u\|^{k-1}_{L^{4(k-1)}_{xy}}(t)\|u_x\|(t)\\
&\leq kC_8^2 C^{k-1}_{4(k-1)}(1+L)\|\nabla u_y\|^{\frac{3}{2}}(t)\|u_y\|^{\frac{1}{2}}(t)\\
&\times \|\nabla u\|^{\frac{2k-3}{2}}(t)\|u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|u_x\|(t)\\
&\leq \frac{1}{6}\|\nabla u_y\|^2(t) + \frac{3^3}{2^3}\alpha_{k,2}\|u\|^2(t)\|\nabla u\|^{4k}(t).
\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

Substituindo (3.4.22) e (3.4.23) em (3.4.21), temos pelas estimativas (3.4.8), (3.4.18) e (3.4.20), que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\nabla u_y\|^2(t) &+ 2\|u_{xy}\|^2(t) + \int_{-B}^{B} u_{xy}^2(0,y,t)\,dy)\\
&\leq \|u_y\|^2(t) + 6(1+L)^2\|u_t\|^2(t)\\
&+ 3\|u\|^2(t)\left(C^{2k}_{2k}\|\nabla u\|^{2k}(t) + \frac{3^2}{2^3}\alpha_{k,2}\|\nabla u\|^{4k}(t)\right)\\
&\leq C\big(L, k, \|u_0\|, \|u_t\|(0)\big)e^{-\theta t}.
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

Note que, para estimar todos os termos em $X^0_{T_*}$, resta estimar $u_{xx}$ em $L^2(0,T_*;L^2(\Omega))$. Para isso, usamos as Estimativas XII e XIII da Seção 3.2 com não linearidade $-u^k u_x$ no lugar de $f$.

*Estimativa XXIX*. Da Estimativa XII obtemos

$$\begin{aligned}
Lu_{xx}(L,y,t) &= \int_0^L \left[u + u_{yy} - xu_t - xu^k u_x\right] dx - u_x(0,y,t)\\
&= \int_0^L \left[u + u_{yy} - xu_t + \frac{u^{k+1}}{k+1}\right] dx - u_x(0,y,t).
\end{aligned}$$

Portanto, as estimativas (3.4.4), (3.4.8), (3.4.18), (3.4.20) e (3.4.24) implicam em

$$\begin{aligned}
L^2 \int_{-B}^{B} u_{xx}^2(L,y,t)\,dy &\leq 2\int_{-B}^{B}\left(\left\| u + u_{yy} - xu_t + \frac{u^{k+1}}{k+1}\right\|_{L^1(0,L)}^2 + u_x^2(0,y,t)\right) dy \\
&\leq 2L\left\| u + u_{yy} - xu_t + \frac{u^{k+1}}{k+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 (t) + 2\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\,dy \\
&\leq 4L\,\|u + u_{yy} - xu_t\|_{L^2(\Omega)}^2 (t) + \frac{4L}{(k+1)^2}\|u\|_{L^{2(k+1)}_{xy}}^{2(k+1)}(t) \\
&+ 2\int_{-B}^{B} u_x^2(0,y,t)\,dy \\
&\leq C\big(L,k,\|u_0\|,\|u_t\|(0)\big)e^{-\theta t}.
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

**Observação 3.4.1.** *Podemos concluir, pelo mesmo caminho, uma estimativa semelhante (3.4.25) para $u_{xx}(0,y,t) \in L^\infty(0,T_*;L^2(-B,B))$ com decaimento exponencial da norma correspondente.*

*Estimativa XXX.* Use agora a Estimativa XIII com $f = -u^k u_x$. O resultado é

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,(1+x,u_x^2)\,(t) + \|\nabla u_x\|^2(t) + 2\|u_{xx}\|^2(t) + \int_{-B}^{B}\big[u_{xx}^2(0,y,t) + u_x^2(0,y,t)\big]\,dy \\
&= \int_{-B}^{B}\big[u_{xy}^2(0,y,t) + (1+L)u_{xx}^2(L,y,t) - 2u_x u_{xx}(0,y,t)\big]\,dy \\
&+\|u_x\|^2(t) + 2\int_\Omega u^k u_x\big[u_x + (1+x)u_{xx}\big]d\Omega.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 1.1.8, e pelas estimativas (3.4.4), (3.4.8), (3.4.18), (3.4.20), (3.4.24) e (3.4.25), e ainda pelas desigualdades de Young e Hölder, chegamos em

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,(1+x,u_x^2)\,(t) + \|\nabla u_x\|^2(t) + \|u_{xx}\|^2(t) + \frac{1}{2}\int_{-B}^{B} u_{xx}^2(0,y,t)\,dy \\
&\leq \int_{-B}^{B}\big[u_{xy}^2(0,y,t) + (1+L)u_{xx}^2(L,y,t) + u_x^2(0,y,t)\big]\,dy \\
&+\|u_x\|^2(t) + 2\left(u^k,u_x^2\right)(t) + (1+L)^2\|u^k u_x\|^2(t) \\
&\leq \int_{-B}^{B}\big[u_{xy}^2(0,y,t) + (1+L)u_{xx}^2(L,y,t) + u_x^2(0,y,t)\big]\,dy \\
&+\|u_x\|^2(t)\left[1 + 2\sup_{(x,y)\in\Omega} u^k(x,y,t) + (1+L)^2\sup_{(x,y)\in\Omega} u^{2k}(x,y,t)\right] \\
&\leq C\big(L,k,\|u_0\|,\|u_t\|(0)\big)e^{-\theta t}.
\end{aligned} \tag{3.4.26}$$

Logo, a integração de (3.4.26) sobre $(0,T_*)$ nos dá

$$\int_0^{T_*}\left[\|u_{xx}\|^2(t) + \frac{1}{2}\int_{-B}^{B} u_{xx}^2(0,y,t)\,dy\right] dt \leq \frac{C\big(L,k,\|u_0\|,\|u_t\|(0)\big)}{\theta} + \left(1+x,u_{0x}^2\right). \tag{3.4.27}$$

Temos provado nas Estimativas XXV–XXX que a norma $u \in X^0_{T_*}$ é independente de $t$. Mais ainda, temos o decaimento de algumas normas. De fato, o decaimento das normas de $u, u_t, \nabla u \in L^\infty(0, T_*; L^2(\Omega))$ assegura que $u \in L^\infty(0, T_*; \mathcal{D}(A))$ também decai exponencialmente.

**Lema 3.4.3** (Extensão Global). *Sobre as condições dos Lemas 3.4.1 e 3.4.2, consideramos $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ tal que*

$$R^{2k} \ln\left(\frac{(1+L)C(R)}{\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}}\right) \le \frac{\theta}{4^{(k+1)}N(\Omega)^2}, \tag{3.4.28}$$

*onde*

$$N(\Omega) = K(\Lambda)C(\Lambda, \Omega)$$

*com $K$ e $C$ definidas em (3.2.37) e (3.2.54) respetivamente, e $\Lambda$ sendo uma constante suficientemente grande, de definimos $C(R)$ como*

$$C(R) = R^2\left[3 + 2^{k+1}\left(3R^{2k} + \frac{2C^{k+2}_{k+2}}{k+2}R^{3k}\right)\right].$$

*Então,*

$$\|u\|_{\mathcal{D}(A)}(T_*) \le \|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}, \tag{3.4.29}$$

*e é possível estender a solução local para todo $T > 0$.*

*Demonstração.* Começamos com os resultados dos Lemas 3.4.1,3.4.2. A equação (3.0.1) fornece

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{\mathcal{D}(A)}(t) &= \|u\|^2(t) + \|Au\|^2(t) \\ &= \|u\|^2(t) + \|-(u_t + u^k u_x)\|^2(t) \\ &\le \|u\|^2(t) + 2\|u_t\|^2(t) + 2\|u^k u_x\|^2(t) \\ &\le (1+L)\left[\|u_0\|^2 + 2I_0^2\right]e^{-\theta t} + 2\|u^k u_x\|^2(t). \end{aligned} \tag{3.4.30}$$

Estimamos o termo não linear usando os Lemas 1.1.8, 3.4.1, 3.4.2 e a definição de $X^0_{T_*}$.

$$\begin{aligned} \|u^k u_x\|^2(t) &= \int_\Omega u^{2k}u_x^2\, d\Omega \le \left(\sup_\Omega u^2(t)\right)^k \|u_x\|^2(t) \\ &\le (1+L)\left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)}(t) + \|u_{xy}\|^2(t)\right)^k P(k, \|u_0\|, I_0, R)e^{-\theta t} \\ &\le 2^k(1+L)R^{2k}P(k, \|u_0\|, I_0, R)e^{-\theta t}. \end{aligned} \tag{3.4.31}$$

Como $u_t \in C([0, T_*]; L^2(\Omega))$, tem-se $I_0^2 \le \|u_t\|^2_{L^\infty_t L^2_{xy}} \le \|u\|^2_{X_{T_*}} \le R^2$. Semelhantemente, $\|u_0\|^2 \le R^2$. Assim,

$$\begin{aligned} R^{2k}P(k, \|u_0\|, I_0, R) &= R^{2k}\left(2\|u_0\|^2 + I_0^2 + \tfrac{2C^{k+2}_{k+2}}{k+2}\|u_0\|^2 R^k\right) \\ &\le R^2\left(3R^{2k} + \frac{2C^{k+2}_{k+2}}{k+2}R^{3k}\right). \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

Inserindo (3.4.32) em (3.4.31) e depois em (3.4.30), obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{\mathcal{D}(A)}(t) &\leq (1+L)\left[\|u_0\|^2 + 2I_0^2 + 2^{k+1}R^2\left(3R^{2k} + \frac{2C_{k+2}^{k+2}}{k+2}R^{3k}\right)\right]e^{-\theta t} \\ &\leq (1+L)C(R)e^{-\theta t}. \end{aligned} \tag{3.4.33}$$

Analisando o termo logarítmico do lado esquerdo da desigualdade (3.4.28), visto a hipótese (3.4.2) do Lema 3.4.1, e por definição de $R$, concluímos que

$$\begin{aligned} &\frac{C(R)}{\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}} = 4\left[(M+\kappa) + 2\kappa C C_{4k}^k C_{N4}\|u_0\|^k_{\mathcal{D}(A)}\right]^2\left[3 + 2^{k+1}\left(3R^{2k} + \frac{2C_{k+2}^{k+2}}{k+2}R^{3k}\right)\right] \\ &\leq 4\left[(M+\kappa) + 2\kappa C C_{4k}^k C_{N4}\beta_1(k)\right]^2\left[3 + 2^{k+1}\left(3(\beta_1(k))^2 + \frac{2C_{k+2}^{k+2}}{k+2}(\beta_1(k))^3\right)\right] \\ &\doteq \beta_3(k). \end{aligned} \tag{3.4.34}$$

Nosso objetivo agora é mostrar que $T_* > 0$ satisfaz ambas as condições, a pequenidade (3.2.59) do Lema 3.2.5 para que $\Phi$ seja uma contração, e a consequência (3.4.29) para $R > 0$ pequeno, o qual não iremos modificar mais. Fixe uma constante $\Lambda$ tal que

$$\frac{1}{\theta}\ln\left[(1+L)\beta_3(k)\right] \leq \Lambda. \tag{3.4.35}$$

Note que, pelo Lema 3.2.5, para todos os resultados da parte local serem verdadeiros, basta $T_*$ satisfazer

$$(T_*)^{\frac{1}{2}}2^k C(T_*,\Omega)K(T_*)R^k \leq \frac{1}{2}.$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $T_* \leq \Lambda$. Observando as definições das constantes $K, C$ em (3.2.37) e (3.2.54) respetivamente, notamos que $C(T_*,\Omega)K(T_*) \leq N(\Omega)$. Logo podemos escolher

$$T_* = \min\left\{\Lambda, \frac{1}{4^{(k+1)}N^2R^{2k}}\right\}. \tag{3.4.36}$$

Aplicando (3.4.33) em $T_*$, temos $\|u\|^2_{\mathcal{D}(A)}(T_*) \leq (1+L)C(R)e^{-\theta T_*}$. De fato,

$$(1+L)C(R)e^{-\theta T_*} \leq \|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} \quad \text{é verdade se e somente se} \quad \ln\left(\frac{(1+L)C(R)}{\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}}\right) \leq \theta T_*. \tag{3.4.37}$$

Há duas possibilidades; a primeira é $T_* = \Lambda$. Neste caso (3.4.34) e (3.4.35) implicam

$$\ln\left(\frac{(1+L)C(R)}{\|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}}\right) \leq \ln\left[(1+L)\beta_3(k)\right] \leq \theta\Lambda = \theta T_*. \tag{3.4.38}$$

A segunda possibilidade é $T_* = \left(4^{(k+1)}N^2R^{2k}\right)^{-1}$. Neste caso (3.4.37) se torna (3.4.28). Finalmente, sobre as hipóteses dos Lemas 3.4.1–3.4.3, deduzimos que (3.4.29) é verdadeira. Agora estamos em condições de estender a solução para todo $T > 0$. Denote

$u_1 \equiv u(x,y,T_*)$ e considere um "novo"PVI (3.2.1) posto no intervalo $(T_*,+\infty)$. Então, fazendo

$$R_1(\Omega,\|u_1\|_{\mathcal{D}(A)}) = 2\left((M+\kappa)\|u_1\|_{\mathcal{D}(A)} + 2\kappa C C_{4k}^k C_{N4}\|u_1\|_{\mathcal{D}(A)}^{k+1}\right) < R(\Omega,\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}),$$

nos Lemas 3.2.4–3.2.5, concluímos que o comprimento de um novo intervalo de existência $[T_*,T_2]$ satisfaz $T_2 \geq 2T_*$. Por outro lado, as Estimativas XXV–XXX não dependem de $t$, e ambos $\Lambda$ e $N(\Omega)$ também não. Logo, o tamanho de $T_2$ pode ser escolhido pelo menos satisfazendo $T_2 \geq 2T_*$ também.

As condições dos Lemas 3.4.1–3.4.3 sobre o dado inicial $\|u_0\|_{\mathcal{D}(A)}$ claramente implicam em mesma pequenidade para $\|u_1\|_{\mathcal{D}(A)}$, fazendo justo o procedimento acima. Repetindo esse processo, nós concluímos que o problema (3.0.1)-(3.0.4) tem solução em $X_T^0$, para todos os valores de $T>0$ com decaimento correspondente. □

### 3.4.1 Efeito de Kato

A equação generalizada supercrítica de Zakharov-Kuznetsov (equação gZK com $k>2$) também possui a propriedade de suavização, isto é, se $u \in X_T$ resolve (3.0.1)-(3.0.4), então $u$ tem ganho de regularidade no espaço. Primeiro, afirmamos que $u_{xx} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e não apenas em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, causando o decaimento da solução $u$ no espaço $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$. E a segunda propriedade é o ganho de regularidade de Kato (ver [12]) para $\Delta u_x$.

## Regularidade de $u$

Escrevamos (3.0.1)-(3.0.4) na forma

$$\Delta u_x = -u_t - u_x - \frac{1}{k+1}(u^{k+1})_x\,, \tag{3.4.39}$$

$$u_x(L,y,t) = 0, \tag{3.4.40}$$

$$u_x(0,y,t) = \phi(y,t) \in L^\infty(0,T;H^1(-B,B)). \tag{3.4.41}$$

Denotando $v = u_x - \dfrac{(L-x)}{L}\phi(y,t)$, e tendo em mente (3.4.39), obtemos que

$$\Delta v = -u_t - u_x - \frac{1}{k+1}(u^{k+1})_x - \frac{(L-x)}{L}\phi_{yy}(y,t) \equiv F(x,y,t), \tag{3.4.42}$$

$$v(0,y,t) = v(L,y,t) = 0, \tag{3.4.43}$$

$$v(x,-B,t) = v(x,B,t) = 0. \tag{3.4.44}$$

Pelas Estimativas XXV-XXX temos $\Delta u_x \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Como $u_{xy}(0,y,t) \in L_t^\infty L_y^2$, tem-se $u_{xyy}(0,y,t) \in L^\infty(0,T;H^{-1}(-B,B))$. Logo, (3.4.42) implica que $F$ está pelo menos em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Considere o produto interno

$$(\Delta v, v) = (F, v)\,,$$

Computamos

$$\int_\Omega [u_t + u_x] v\, d\Omega \leq \|u_t\|^2(t) + \|u_x\|^2(t) + \frac{1}{2}\|v\|^2(t) \tag{3.4.45}$$

e estimamos o termo não linear como

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^k u_x v\, d\Omega &\leq \|u^k u_x\|(t)\|v\|(t) \leq \left( \sup_{(x,y)\in\Omega} u(x,y,t)^2 \right)^{\frac{k}{2}} \|u_x\|(t)\|v\|(t) \\ &\leq \frac{1}{2}\Big[\|u\|^2(t) + \|\nabla u\|^2(t) + \|u_{xy}\|^2(t)\Big]^k \|u_x\|^2(t) + \frac{1}{2}\|v\|^2(t). \end{aligned} \tag{3.4.46}$$

O termo $\phi_{yy}$ está limitado por

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L}\int_0^L \int_{-B}^B [(L-x)\phi_y(y,t)]_y\, v\, dydx = -\frac{1}{L}\int_\Omega (L-x)\phi_y(y,t) v_y\, d\Omega \\ &\leq \left( \int_\Omega \phi_y^2\, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \|v_y\|(t) \leq \frac{L}{2}\int_{-B}^B \phi_y^2\, dy + \frac{1}{2}\|v_y\|^2(t). \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

Finalmente,

$$\|v\|^2(t) = \int_\Omega v^2\, d\Omega \leq 2\|u_x\|^2(t) + 2L\int_{-B}^B \phi^2(y,t)\, dy. \tag{3.4.48}$$

Portanto, somando (3.4.45)-(3.4.48), implica em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2(t) &\leq \|u_t\|^2(t) + 3\|u_x\|^2(t) + \frac{1}{2}\Big[\|u\|^2(t) + \|\nabla u\|^2(t) + \|u_{xy}\|^2(t)\Big]^k \|u_x\|^2(t) \\ &+ L\int_{-B}^B \left[2\phi^2(y,t) + \frac{1}{2}\phi_y^2\right] dy. \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

Daí, $\|u_{xx}\|^2(t) \leq Ce^{-\theta t}$, para todo $t \in [0,T]$. Logo $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$, e então

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)}(t) \leq C\big(L, k, \|u_0\|, \|u_t\|(0)\big)e^{-\theta t}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.4.50}$$

Mais ainda, como $v$ é solução de uma equação elíptica que se anula na fronteira, o domínio $\Omega$, neste caso do retângulo, é um domínio Lipschitz, e como $F(t) \in H^{-1}(\Omega)$, $q.s.$ em $(0,T)$, temos temos pelo Teorema 1.1.7 que $v \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$. Consequentemente $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$.

## Regularidade de $\Delta u_x$

A equação (3.0.1) assegura que

$$\begin{aligned} \nabla(\Delta u_x) &= -\nabla\left(u_t + u_x + u^k u_x\right) \\ &= -\nabla(u_t + u_x) - ku^{k-1}u_x\nabla u - u^k\nabla u_x. \end{aligned} \tag{3.4.51}$$

Então, por (3.4.51), a desigualdade triangular implica

$$\|\nabla(\Delta u_x)\|^2(t) \leq 2\|\nabla(u_t + u_x)\|^2(t) + 4\|u^k\nabla u_x\|^2(t) + 4k^2\|u^{k-1}u_x\nabla u\|^2(t). \tag{3.4.52}$$

Note que equação (3.0.1) e Estimativas XII-XIV atribuem o decaimento de $\Delta u_x$ :

$$\begin{aligned} \|\Delta u_x\|^2(t) &\leq 2\|u_t + u_x\|^2(t) + 2\|u^k u_x\|^2(t) \\ &\leq 2\|u_t + u_x\|^2(t) + 2\left(\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y,t)\right)^k \|u_x\|^2(t) \\ &\leq C\big(L, k, \|u_0\|, \|u_t\|(0)\big)e^{-\theta t}, \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.4.53}$$

As duas últimas normas em (3.4.52) podem ser estimadas como a seguir. A primeira é

$$\|u^k \nabla u_x\|^2(t) \leq \left(\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y,t)\right)^k \|\nabla u_x\|^2(t) \leq Ce^{-\theta t}, \quad t \in [0,T]. \tag{3.4.54}$$

E a segunda norma mencionada acima se torna

$$\begin{aligned} \|u^{k-1}u_x \nabla u\|^2(t) &\leq \left(\sup_{(x,y)\in\Omega} u^2(x,y,t)\right)^{k-1} \|u_x\|^2_{L^4(\Omega)}(t)\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)}(t) \\ &\leq C\|\nabla u\|^4_{L^4(\Omega)}(t) \leq CC^4_{N4}\left(\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}(t)\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}(t) + \|\nabla u\|(t)\right)^4 \\ &\leq CC^4_{N4}\left(\|\nabla u\|^2(t)\|u\|^2_{H^2(\Omega)}(t) + \|\nabla u\|^4(t)\right) \leq Ce^{-\theta t}, \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.4.55}$$

Assim, substituindo (3.4.53)-(3.4.55) em (3.4.52), nós temos

$$\Delta u_x \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

### 3.4.2 Unicidade

**Teorema 3.4.2.** *A solução clássica de* (3.0.1)-(3.0.4) *é única.*

*Demonstração.* Sejam $u, v$ duas soluções de (3.0.1)-(3.0.4) e defina $w = u - v$. Então $w$ satisfaz

$$Pw \equiv w_t + w_x + \Delta w_x + \big(u^k u_x - v^k v_x\big) = 0 \ \text{ em } Q_T; \tag{3.4.56}$$

$$w(0,y,t) = w(L,y,t) = w_x(L,y,t) = 0; \tag{3.4.57}$$

$$w(x,y,0) = 0. \tag{3.4.58}$$

Escrevemos

$$Pw \equiv w_t + w_x + \Delta w_x + wu_x \sum_{i=1}^{k} u^{k-i}v^i + w_x v^k = 0 \ \text{ em } Q_T$$

e transformamos o produto interno

$$2\left((1+x)w, Pw\right) = 0$$

na seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(1+x,w^2\right)(t)+\|\nabla w\|^2(t)+2\|w_x\|^2(t)+\int_{\mathbb{R}} w_x^2(0,y,t)\,dy\\&+2\left((1+x)w^2,u_x\sum_{i=1}^{k}u^{k-i}v^i\right)(t)+2\left((1+x)ww_x,v^k\right)(t)=\|w\|^2(t).\end{aligned}\tag{3.4.59}$$

Aplicando as desigualdades de Hölder e Nirenberg, os termos não lineares em (3.4.59) ficam

$$\begin{aligned}2\left((1+x)w^2,u_x\sum_{i=1}^{k}u^{k-i}v^i\right)(t) &\leq 2(1+L)\sup_{(x,y)\in\Omega}\left(\sum_{i=1}^{k}u^{k-i}v^i\right)^2\|w\|^2_{L^4(\Omega)}(t)\|u_x\|(t)\\&\leq C\|u_x\|(t)\left(\sup_{(x,y)\in\Omega}\sum_{i=1}^{k}|u|^{k-i}|v|^i\right)\|\nabla w\|(t)\|w\|(t)\end{aligned}\tag{3.4.60}$$

e

$$\begin{aligned}2\left((1+x)v^k,ww_x\right)(t) &= \int_\Omega(1+x)v^k(w^2)_x\,d\Omega=-\int_\Omega w^2[v^k+k(1+x)v^{k-1}v_x]\,d\Omega\\&\leq \|w\|^2_{L^4(\Omega)}\|v^k+k(1+x)v^{k-1}v_x\|(t)\\&\leq C\|\nabla w\|(t)\|w\|(t)\left(\sup_{(x,y)\in\Omega}|v|^k+\|v_x\|(t)\sup_{(x,y)\in\Omega}|v|^{k-1}\right).\end{aligned}\tag{3.4.61}$$

Somando (3.4.60) com (3.4.61), temos pela desigualdade de Young que

$$2\left((1+x)w^2,(u+v)u_x\right)(t)+2\left((1+x)v^2,ww_x\right)(t)\leq\frac{1}{2}\|\nabla w\|^2(t)+f(t)\|w\|^2(t)\tag{3.4.62}$$

onde

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[C\|u_x\|(t)\sup_{(x,y)\in\Omega}\sum_{i=1}^{k}|u(t)|^{k-i}|v(t)|^i+\sup_{(x,y)\in\Omega}|v(t)|^k+\|v_x\|(t)\sup_{(x,y)\in\Omega}|v(t)|^{k-1}\right]^2.$$

Note que $f\in L^\infty(0,T)$. Devido a (3.4.62), a igualdade (3.4.59) fica

$$\frac{d}{dt}\left(1+x,w^2\right)(t)\leq(1+f(t))\|w\|^2(t).$$

Pela forma diferencial do Lema de Grönwall, notando que $w(0,x,y)\equiv 0$

$$\|w\|^2(t)\leq\left(1+x,w^2\right)(t)\equiv 0.$$

A demonstração está completa. □

## 3.5 Comentários sobre estabilidade assintótica

Nesta seção iremos fazer uma análise das constantes que apareceram nas estimativas globais para mZK e gZK, e justificar a existência das constantes de decaimento, dadas em (3.3.5) e (3.4.1), independentes de $t > 0$.

A forma que construímos a solução global para ambos os casos, determina uma partição do intervalo $[0, +\infty)$ em intervalos de existências locais

$$[0, +\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [T_n, T_{n+1}]$$

onde, sobre cada intervalo $[T_n, T_{n+1}]$ está posto um novo PVI para a gZK com dados inicias $u_n = u(x, y, T_n)$. O que determina novas constantes em todas as estimativas, para notação, vamos indexar o subíndice $n$ nas constantes que aparecerem na etapa $[T_n, T_{n+1}]$. Algumas das constantes são de suma importância para o comportamento assintótico da gZK, a própria norma do dado inicial $u_n$ em $L^2(\Omega)$, a "velocidade"inicial $I_n^2 = (1 + x, u_t(x, y, 0))$, e o raio da bola de existência $R_n$ determinado por $\|u_n\|_{\mathcal{D}(A)}$. Para $R_0$ nas hipóteses do Lema 3.4.3, podemos assegurar que

$$R_n \leq R_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, em cada etapa estão garantidas estimativas do tipo (3.4.8)

$$\left(1 + x, u^2\right)(t) \leq C_n e^{-\theta(t - T_n)}, \quad t \in [T_n, T_{n+1}], \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.5.1}$$

onde $C_n = \left(1 + x, u_n^2\right)$. Então, podemos concluir que

$$C_{n+1} \leq C_n e^{-\theta(T_{n+1} - T_n)} \leq \left(C_{n-1} e^{-\theta(T_n - T_{n-1})}\right) e^{-\theta(T_{n+1} - T_n)} \leq \cdots \leq C_0 e^{-\theta T_{n+1}}.$$

Isto implica que a sequência $\{C_n\}$ é somável, verificasse facilmente pelo teste da integral para séries. Logo, existe $C = \sum C_n$, satisfazendo a desigualdade

$$\left(1 + x, u^2\right)(t) \leq C e^{-\theta t}, \quad t \geq 0.$$

Pela estimativa (3.4.18), podemos seguir o mesmo caminho e concluir que a sequência $\{I_n^2\}$ também é somável, i.é., existe $I^2 = \sum I_n^2$ cumprindo

$$\left(1 + x, u_t^2\right)(t) \leq I^2 e^{-\theta t}, \quad t \geq 0.$$

A sequência $\{P_n\}$, formada no Lema 3.4.2

$$P_n(k, \|u_n\|, I_n, R_n) \doteq 2\|u_n\|^2 + I_n^2 + \frac{2C_{k+2}^{k+2}}{k+2} \|u_n\|^2 R_n^k,$$

é somável. As estimativas (3.4.30) e (3.4.31) asseguram que

$$\|u\|_{\mathcal{D}(A)}^2(t) \leq (1 + L) \left[\|u_n\|^2 + 2I_n^2 + 2^{k+1} R_n^{2k} P_n\right] e^{-\theta(t - T_n)}, t \in [T_n, T_{n+1}]. \tag{3.5.2}$$

Dessa desigualdade, podemos determinar a estabilidade exponencialmente assintótica de $u \in C((0, \infty); \mathcal{D}(A))$

$$\|u\|_{\mathcal{D}(A)}^2(t) \leq (1 + L) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\|u_n\|^2 + 2I_n^2 + 2^{k+1} R_n^{2k} P_n\right] e^{-\theta t}, t \geq 0. \tag{3.5.3}$$

A desigualdade (3.5.3) implica que a sequência $\{R_n\}$ é somável.

# Bibliografia


[1] J. L. Bona and R. W. Smith, The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation, Phil. Trans. Royal Soc. London Series A 278 (1975), 555–601.

[2] J. L. Bona, S. M. Sun and B. -Y. Zhang, A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain, commun. PDEs 28 (2003), 1391-1436.

[3] M. Castelli, G. Doronin, Modified and subcritical Zakharov-Kuznetsov equations posed on rectangles, Journal of Differential Equations 275 (2021), 554–580, https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.11.025.

[4] M. Castelli, G. Doronin Modified Zakharov-Kuznetsov equation posed on a strip, Applicable Analysis (2020), DOI: 10.1080/00036811.2020.1754402.

[5] M. Castelli, G. Doronin. Supercritical Zakharov-Kuznetsov equation posed on bounded rectangles. Z. Angew. Math. Phys. 72 (2021), https://doi.org/10.1007/s00033-020-01463-w

[6] T. Dlotko, Fourth order semilinear parabolic equations, Tsukuba J. Math. 16 (1992), no. 2, 389–405.

[7] G. G. Doronin and N. A. Larkin, Stabilization of regular solutions for the Zakharov-Kuznetsov equation posed on bounded rectangles and on a strip, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 58 (2015), 661—682.

[8] L. C. Evans, Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. xxii+749 pp. ISBN: 978-0-8218-4974-3

[9] A. V. Faminskii, The Cauchy problem for the Zakharov-Kuznetsov equation (Russian), Differentsial'nye Uravneniya, 31 (1995), 1070–1081; Engl. transl. in: Differential Equations 31 (1995), 1002–1012.

[10] A. V. Faminskii, Well-posed initial-boundary value problems for the Zakharov-Kuznetsov equation, Electronic Journal of Differential equations 127 (2008), 1–23.

[11] L. G. Farah, F. Linares and A. Pastor, A note on the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equation: Local, global, and scattering results, J. Differential Equations 253 (2012), 2558–2571.

[12] T. Kato, Perturbation theory for linear operators. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. xxii+619 pp. ISBN: 3-540-58661-X

[13] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Uraltseva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

[14] N. A. Larkin, M. V. Padilha, Global regular solutions to one problem of Saut-Temam for the 3D Zakharov-Kuznetsov equation. Appl. Math. Optim. 77 (2018), no. 2, 253—274.

[15] N. Larkin, J. Luckesi, Initial-Boundary Value Problems for Generalized Dispersive Equations of Higher Orders Posed on Bounded Intervals, Recommended to cite as: Larkin, N.A. & Luchesi, J. Appl Math Optim (2019). https://doi.org/10.1007/s00245-019-09579-w.

[16] N. Larkin, Decay of regular solutions for the critical 2D Zakharov-Kuznetsov equation posed on rectangles, Recommended to cite as: N.A. Larkin, J. Math. Phys. 61, 061509 (2020); http://doi.org/10.1063/1.5100284.

[17] F. Linares and A. Pastor, Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equation, J. Funct. Anal. 260 (2011), 1060–1085.

[18] F. Linares and A. Pastor, Well-posedness for the 2D modified Zakharov-Kuznetsov equation. SIAM J. Math. Anal. 41 (2009), no. 4, 1323–1339.

[19] F. Linares, A. Pastor and J.-C. Saut, Well-posedness for the ZK equation in a cylinder and on the background of a KdV Soliton, Comm. Part. Diff. Equations 35 (2010), 1674–1689.

[20] F. Ribaud and S. Vento, A note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equations, C. R. Acad. Sci. Paris 350 (2012) 499–503.

[21] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[22] F. Linares and J.-C. Saut, The Cauchy problem for the 3D Zakharov-Kuznetsov equation, Disc. Cont. Dynamical Systems A 24 (2009), 547–565.

[23] R. Sipcic, D. J. Benney, Lump interactions and collapse in the modified Zakharov-Kuznetsov equation, Stud. Appl. Math. 105 (2000), no. 4, 385—403.

[24] L. Rosier, Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2 (1997), 33–55.

[25] Mo Chen, L. Rosier, Exact controllability of the Zakharov-Kuznetsov equation by the flatness approach, To appear.

[26] J.-C. Saut and R. Temam, An initial boundary-value problem for the Zakharov-Kuznetsov equation, Advances in Differential Equations 15 (2010), 1001–1031.

[27] J.-C. Saut, R. Temam and C. Wang, An initial and boundary-value problem for the Zakharov-Kuznetsov equation in a bounded domain, J. Math. Phys. 53 (2012) 115612.

[28] R. Temam, Navier-Stokes Equations: theory and numerical analysis. Amsterdam, New York, North-Holland, 1997.

[29] R. Teman, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York, 1988.

[30] F. Boyer , P. Fabrie, Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2010.

[31] M. Tsutsumi, T. Mukasa, R. Iino, On the generalized Korteweg–de Vries equation, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 921-–925.

[32] B. -Y. Zhang, Exact boundary controllability of de Korteweg-de Vries equation, SIAM J. Control Optim. 37 (1999), 543-565.

[33] E. Infeld, G. Rowlands, and M. Hen, Acta Phys. Polon. A54, 131, 1978.

[34] E. Infeld, Plasma Phys. 33, 171, 1985.

[35] E. Infeld, and G. Rowlands, Nonlinear Waves, Solitons and Chaos, Cambridge University Press, 1990.

[36] T. B. Benjamin, Proc. R. Soc. Lond. A328, 153, 1972.

[37] P. G. Drazin, Q. J. Mech. Appl. Math. 30, 91, 1977.

[38] M. Kako, and G. Rowlands, Plasma Phys. 18, 165, 1976.

[39] H. Schamel, J. Plasma Phys. 9, 377, 1973.

[40] E.W. Laedke, and K. H. Spatschek, J. Plasma Phys. 28, 469, 1982

[41] I. S. O'Keir, and E. J. Parkes, Physica Scripta 55, 135, 1997.

[42] L. A. Medeiros, M. M. Miranda, Espaços de Sobolev - Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2019.

[43] P. Grisvard, Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Monographs and Studies Vol. 24, Pitmam, 1985.

[44] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, (1959) 115–162, Ser. 3, 13 .

[45] A. Mushtaqa and H. A. Shah, Nonlinear Zakharov-Kuznetsov equation for obliquely propagating two-dimensional ion-acoustic solitary waves in a relativistic, rotating magnetized electron-positron-ion plasma, Physics of Plasmas 12, (2005). DOI: 10.1063/1.1946729

[46] G. C. Das and S. N. Paul, Ion-acoustic solitary waves in relativistic plasmas, Phys. Fluids, 28, 823,( 1985). DOI: 10.1063/1.865050

[47] R. K. Roychowdhury and S. Bhattacharyya, Ion-acoustic solitary waves in relativistic plasmas, Phys. Fluids, 30, 2582, (1987). DOI: 10.1063/1.866098.

[48] B. B. Kadomtsev, and V. I. Petviashvili, On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersing Media, Soviet Physics Doklady, 15, 539, 1970.

[49] S. Munro and E.J. Parkes, The derivation of a modified Zakharov-Kuznetsov equation and the stability of its solutions, J. Plasma Physics, 62 (1999) 305-317.

[50] V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, On three-dimensional solitons, Sov. Phys. JETP 39 (1974), 285–286.